Université de Paris

ÉCOLE DOCTORALE ED623 : Savoirs, Sciences, Education

Laboratoire de Didactique André Revuz

Les actions incarnées et l'utilisation d'artefacts dans l'enseignement et l'apprentissage des opérations de multiplication et de divisions partage et groupement

Par Paula JOUANNET ORTIZ

Thèse de doctorat de didactique des disciplines

Dirigée par Christine CHAMBRIS
et par Christophe HACHE

Présentée et soutenue publiquement le 13 décembre 2021

Devant le jury composé de :

Lalina COULANGE, professeure des universités, Université de Bordeaux, rapportrice

Luis RADFORD, professeur, Université Laurentienne, Ontario, rapporteur

Elizabeth MONTOYA, professeure, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chili, examinatrice

VANDEBROUCK Fabrice, professeur des universités, Université de Paris, examinateur

Christine CHAMBRIS, maître de conférence, Université de Cergy, co-directrice

Christophe HACHE, maître de conférence HDR, Université de Paris, co-directeur

Résumé

Dans une perspective conforme à la cognition incarnée, nous nous concentrons sur la place que le corps peut occuper dans l'enseignement et l'apprentissage. Nous abordons cette question dans la perspective d'une théorie historico-culturelle de l'enseignement et de l'apprentissage : la théorie de l'objectivation (TO), développée principalement par Luis Radford. La rencontre avec les concepts des opérations de multiplication et de division, au pluriel, que nous étudions en termes de processus d'objectivation, implique leur interprétation en termes de relations entre grandeurs. Nous abordons la question de l'implication du corps dans cet apprentissage au moyen d'une approche qui vise à interpréter la transformation du sens des actions en incarnées. Notre objet d'analyse consiste en l'activité en classe qui se déroule lors des séances de résolution de tâches multiplicatives. Nous analysons en profondeur trois séances impliquant deux artefacts, conçus dans le contexte de cette recherche : un artefact de manipulation appelé boîtes et cubes, et un artefact symbolique appelé grille des temps et des parties. Nous avons articulé des méthodologies d'analyse tirées de la TO et de la théorie de l'activité didactique, ainsi que d'autres outils permettant de saisir la dimension sémiotique de l'activité. Nous nous concentrons sur les gestes en tant que ressource sémiotique incarnée. Notre étude nous permet d'apprécier l'objectivation du savoir comme un processus social, incarné et symbolique. Nos résultats permettent d'interpréter la manipulation comme une opportunité pour approfondir la relation dialectique entre les composantes matérielles et idéeles de la pensée.

Mots-clés

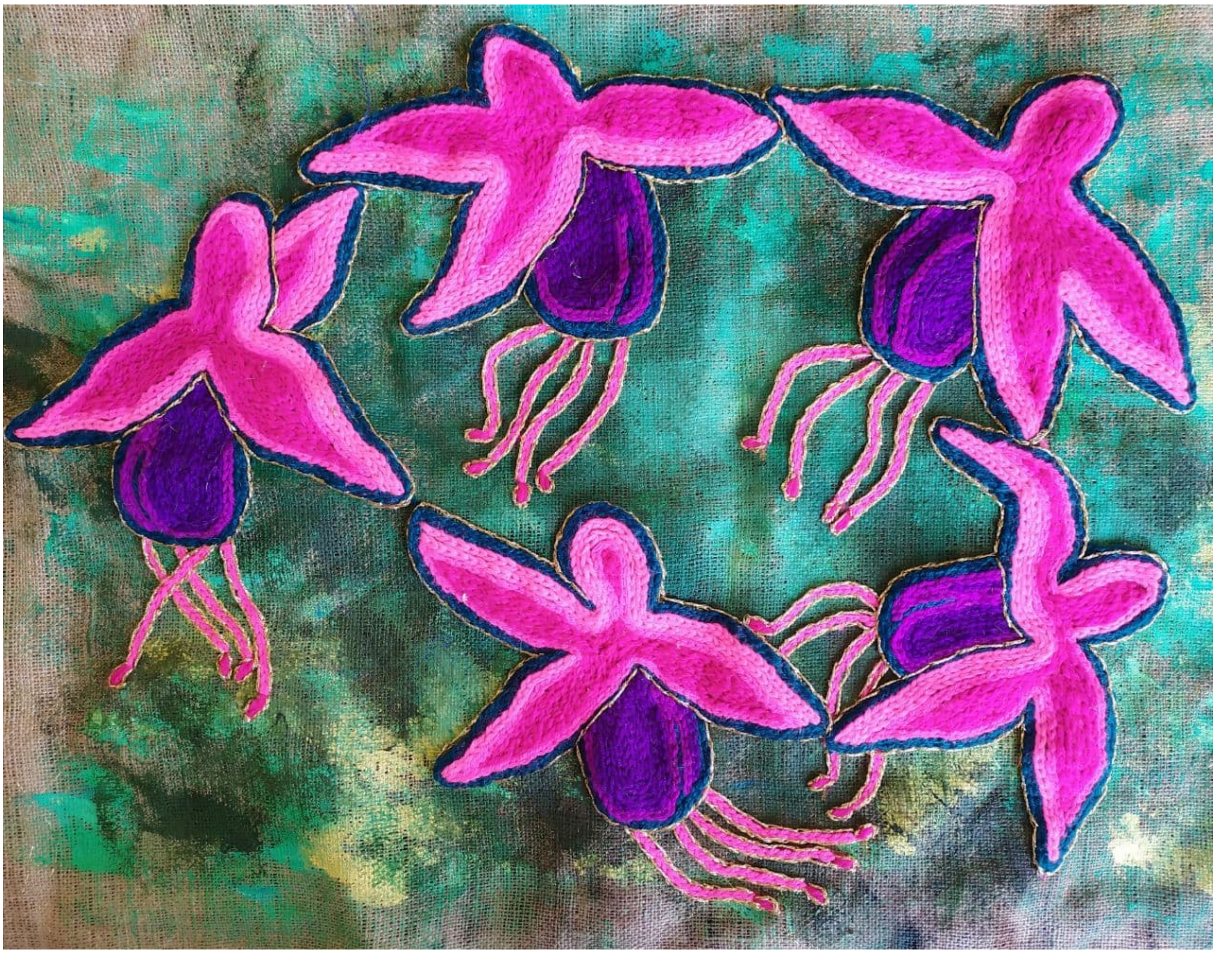
Cognition incarnée, artefacts, gestes, multiplication, division, grandeurs, Théorie de l'objectivation.

Abstract

From an embedded cognition perspective, we focus on the place the body can occupy in teaching and learning. We approach this question from the perspective of a cultural-historical theory of teaching and learning : the theory of objectification (OT), developed mainly by Luis Radford. The encounter with the concepts of multiplication and division operations (division) that we study in terms of objectification processes, implies their interpretation in terms of relationships between magnitudes. We approach the question of the implication of the body in this learning by means of an approach which aims to interpret the transformation of the meaning of embodied actions. Our object of analysis consists of the teaching-learning activity that takes place in the multiplicative task solving sessions. We take an in-depth look at three sessions using two artifacts, designed in the context of this research : a manipulative artifact called boxes and cubes, and a symbolic artifact called the times and parts grid. We articulate analysis methodologies taken from OT and the theory of didactic activity, as well as other tools that capture the semiotic dimension of the activity. We focus on gestures as an embodied semiotic resource. Our study allows us to appreciate the objectification of knowledge as a social, embodied, and symbolic process. Our results allow us to interpret manipulation as an opportunity to deepen the dialectical relationship between the material and ideal components of thought.

Keywords

Embodied cognition, artifacts, gestures, multiplication, division, magnitude, Theory of objectivation.



Chilpko

Depuis les années 1980, le mouvement écologiste Chipko maintient une résistance féroce, en défense de l'environnement en Inde. Chipko provient de l'hindi et signifie embrasser. Le mouvement tire son nom de l'action de protestation la plus connue au sein de ce groupe, où des femmes s'accrochaient aux arbres de la vallée de Doon, pour empêcher leur abattage. Vandana Shiva appelle ce geste l'étreinte à la vie, y voyant les germes d'une lutte écoféministe anticoloniale.

Dans les particularités des techniques textiles, ce geste des femmes Chipko fait apparition. Lorsque nous utilisons ces techniques, nos mains s'entrelacent et s'emmêlent dans la matière formant un cercle : les techniques textiles sont une étreinte de matérialité. Notre individualité s'étire et se détend sur l'accueil de cette rencontre circulaire. Nous filons notre histoire sur le tissu et à travers elle nous nous tissons à l'histoire que nous voulons construire et découvrir ensemble.

L'embouchure des canaux de la matière et de notre corps, gisent les fibres narratives que nous brodons dans nos trous. Chilco vient du Mapudungún et signifie « celui qui naît près de l'eau ».

L'apprentissage mutuel est l'histoire que chantaient les chilcos en fleur du jardin de ma grand-mère. Le mouvement de ses pistils s'est manifesté ces derniers jours ; il a glissé dans la main de Daphné. De la main de Feña, on a su que la couleur de leurs pétales est celle des éclairs rouges de l'œil du diucón. Dans la danse de Coté à son amie en quarantaine, la lumière rose de la danse des chilcos jaillit.

Seniora serpiente

Remerciements

Cette thèse a été financée par CONICYT

*

Comme toute création, la réalisation de cette thèse n'aurait pas vu le jour sans une matière première ; en dehors d'un réseau d'idées et d'affections, de personnes et du vivant.

Christophe et Christine, je ne peux exprimer par des mots la gratitude que je ressens. Cette thèse est évidemment le résultat d'un travail qui a connu des moments enrichissants et des difficultés. Merci de m'accompagner à tout moment et de me faire confiance. Je porte avec fierté la marque indélébile que vos perspectives et nos réflexions ont laissée en moi. Christophe, l'une des premières personnes que j'ai rencontrées au laboratoire. Avec un vocabulaire précaire, j'ai essayé d'exprimer mon intérêt pour le langage. Depuis lors, ton soutien est devenu indispensable. Merci infiniment. Christine, merci pour tes conseils et ton engagement à rechercher la clarté dans ma pensée. Merci pour tes idées qui m'ont parfois pris des semaines à digérer. Merci Marie de m'avoir accueilli dans votre classe. C'est en grande partie grâce à toi et à tes beaux gestes que j'ai pu réaliser ce travail.

Merci à Fabrice Vandebrouck et Elizabeth Montoya, d'avoir accepté de faire partie du jury. Eli, merci de m'accueillir dans ton réseau chaleureu. Luis Radford et Lalina Coulange, merci d'avoir accepté d'être rapporteur/rapportrice de la thèse. Merci, Luis Radford, d'avoir mis en lumière des perspectives à mes yeux cruciales pour l'avenir dans le contexte éducatif, qui ont sous-tendu ce travail.

Je remercie l'accompagnement des dernières semaines. Nicolás, bb, merci pour ta lecture ouverte et opportune ; surtout merci pour ta compagnie lumineuse. Erika, pour ton œil de lynx, pour ta *mano de monja*.

Merci à *lxs shorxs juané* et à ma famille pour m'avoir donné la vie et appris à vivre. Merci à mes ami.e.s d'avoir été là, por apañarme.

Merci à mes interlocutrices et interlocuteurs didactiques qui m'ont accompagné dans mes réflexions. Jorge, Léonard, Nicolás, Pauli, Andrea, Sole, Claudia, Luz y toda la banda latina.

Table des matières

Introduction

> It is said that we human beings are rational animals. On account of this, we devalue emotions and exalt rationality so much that, whenever we see some complex behavior in a non-human animal, we want to ascribe rational thinking to it. In this process, we have made the notion of objective reality a reference to something that we deem universal and independent of what we do, and which we use as an argument aimed at compelling someone to do something against his or her will.
> (Maturana, 1998, p. 50)

L'utilisation de l'action sur des objets physiques et des situations quotidiennes pour l'enseignement de la multiplication et de la division à l'école primaire est largement valorisée dans le cadre scolaire (Dias et Durand-Guerrier, 2005 ; Guissard et Henry, 2011). Cela se traduit par des prescriptions scolaires dans des documents officiels récents en France. Nous avons consulté les documents suivants (de l'éducation nationale de la jeunesse et des sports [EDUSCOL], 2021) : Programme de mathématiques pour le cycle 2 [1] (BOEN, 2020) ; Rapport Villani Torossian (2018) contenant 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques ; Attendus de fin d'année et les repères annuels de progression CP, CE1 et CE2 (EDUSCOL en ligne, 2021) ; Ressource daccompagnement : le calcul aux cycles 2 et 3 (IO, 2016) ; Ressource d'accompagnement : le calcul en ligne au cycle 2 (IO, 2016) ; Le nombre au cycle 2 (SCEREN, 2010). La plupart des indications se trouvent dans la rubrique « Nombres et calculs » de ces documents. Les actions physiques sur des objets sont au cœur des situations mathématiques qui fondent la rencontre des élèves avec le « sens des opérations ». Afin d'élaborer le sens des opérations arithmétiques, il est recommandé dans le rapport Villani-Torrosian (2018) « d'explorer des situations qui donnent du sens aux actions liées aux quatre opérations, de les mettre en action, puis d'évoluer progressivement vers les écritures mathématiques. » (p. 27). Les programmes officiels accordent une place fondamen-

1. La scolarité primaire dans le système français est organisé en 3 cycles : le cycle 1 des apprentissages premier, correspondant à l'école maternelle (kindergarden) pour les enfants de 3 à 6 ans ; le cycle 2 des apprentissages fondamentaux, enfants de 6 à 9 ans est constitué par les niveaux CP, CE1 et CE2 ; et le cycle 3 des consolidations pour les enfants de 9 à 12 ans est constitué par les niveaux CM1, CM2 et sixième (première classe du collège).

tale à l'expérience d'action physique sur des objets, à travers par exemple l'indication suivante : « prévoir des résultats d'actions portant sur des collections ou des grandeurs (les comparer, les réunir, les augmenter, les diminuer, les partager en parts égales ou inégales, chercher combien de fois l'une est comprise dans l'autre, etc.). » (BOEN 2020, p. 58). En particulier la ressource d'accompagnement relative au nombre au cycle 2 (SCEREN, 2010) propose de guider l'analyse des situations additives et soustractives au moyen des questions suivantes : « y a-t-il une action ? Si oui, quel type d'action ? Recherche-t-on la quantité (la place) avant ou après l'action ? » (p. 60). Quant à la multiplication et à la division, les principales situations qui sont évoquées par les programmes sont les situations d'addition itérée, de produit cartésien, de partages ou de groupements (BOEN, 2020 ; SCEREN, 2010). Ce point de vue sur les opérations nous semble assez proche de celui dont rendent compte les travaux de Fischbein, comme nous verrons plus loin.

Il convient de noter ici l'impact qu'a eu l'utilisation de matériel de manipulation dans l'enseignement de l'arithmétique tout au long de l'histoire, comme le souligne Griffiths, Back, et Gifford (2017) : « The use of objects to represent numerical relations goes back a long way- to the third millennium BC when early counting devices consisted of pebbles arranged in grooves in the sand or on tablets. » (p. 13). Dans la révision historique des principales ressources diffusées en Europe dans le 20e siècle, Griffiths *et al.* (2017) pointent celles de Maria Montessori (1912) et les réglettes Cuisenaire, crées par George Cuisinaire en 1952 en Belgique et diffusées par Gattegno dans les années 1950. Ces ressources continuent à être utilisées en France (De Bock, 2020). La popularité de ces différentes ressources s'est répandue en Europe, avec des hauts et des bas tout au long du 20e siècle, sous l'influence d'autres mouvements comme celui des « mathématiques modernes » (Griffiths *et al.*, 2017). Dans les programmes officiels consultés, nous voyons par exemple que la ressource d'accompagnement relative au nombre au cycle 2 octroie également une place fondamentale à la manipulation :

> L'utilisation d'objets familiers aux élèves, l'action concrète des élèves sur ces objets et le fait de pouvoir sentir les jetons dans l'enveloppe avant l'ajout de jetons supplémentaires sont autant de précautions prises pour faciliter l'accès au sens : l'élève ne peut bâtir une représentation qu'à partir de manipulations ; la présentation d'un problème sous forme d'énoncé est encore une phase ultérieure. Le fait d'évoquer la situation, de réaliser des actions faites ou de mimer l'action à faire pour retrouver les jetons présents au début dans l'enveloppe (enlever ceux qu'ils ont ajoutés) sont d'autres possibilités permettant aux élèves de comprendre la situation. (SCEREN, 2010, p. 59)

Cependant, comme remarque noter Moyer (2001) : « The effective use of manipulatives for mathematics instruction is more complicated than it might appear. » (p. 192). En effet, les enseignant·e·s peuvent rencontrer des difficultés pour les utiliser de manière significative du point de vue mathématique (Griffiths *et al.*, 2017 ; Hidayah et Istiandaru, 2018 ; Moyer, 2001). Par exemple, Puchner, Taylor, O'Donnell, et Fick (2008) concluent dans leur étude expérimentale avec des enseignant·e·s de l'école élémentaire : « One important observation within three of the lessons is that manipulative use was turned into an end in and of itself, rather than a tool leading tobetter understanding. » (p. 321). Cette affirmation trouve un écho dans les hypothèses de Furner et Worrell (2017) : "Teachers who believe manipulatives are just used for a change of pace, reward or privilege or fun are not going to genuinely incorporate manipulatives and the concepts they were meant to convey into their lessons" (p 13). Il peut avoir également des divergences entre l'utilisation du matériel prévue par les l'enseignant·e·s et les utilisations faites par les élèves (Houdement et Petitfour, 2019).

Si la question se pose non seulement au niveau de l'utilisation, mais aussi de la manière dont la manipulation doit être traitée, les perspectives cognitives permettent de poser certaines bases. À cet égard, une manière de conduire la manipulation vers l'appréhension conceptuelle trouve souvent des fondements piagétiens. En effet, ses fondements théoriques ont contribué à la diffusion des artefacts de manipulation en Europe dans le 20e siècle (Griffiths *et al.*, 2017), car l'apprentissage des nombres chez les jeunes enfants était considéré comme relevant de la manipulation d'objets. Dans cette optique, le matériel de manipulation est conçu pour représenter de manière explicite et concrète des idées mathématiques abstraites (Hidayah *et al.*, 2018 ; Moyer, 2001). On retrouve également des indications en accord avec la filiation piagétienne dans les programmes officiels, pour lesquels d'une part l'action et la manipulation sont liées au concret, d'autre part l'abstrait est lié aux concepts. On peut le constater par exemple dans la rubrique « Au cycle 2, on articule le concret et l'abstrait », qui est détaillée comme suit : « Observer et agir, manipuler, expérimenter, toutes ces activités mènent à la représentation, qu'elle soit analogique (dessins, images, schématisations) ou symbolique, abstraite (nombres, concepts) » (BOEN, 2020, p. 4). Pour la manipulation, une progression vers l'évocation par l'oral et l'écrit est indiquée « Ces actions portent sur des objets tout d'abord matériels puis évoqués à l'oral ou à l'écrit. » (BOEN 2020, p. 58).

Compte tenu de l'ancienneté de l'approche psychologique de Piaget, la question se pose : la perspective piagétienne est-elle encore pertinente pour étayer des indications sur la gestion du matériel de manipulation dans l'enseignement? Comment discuter les prescriptions scolaires à partir de perspectives récentes sur la cognition? Comment comprendre le rôle que le corps et l'utilisation d'artefacts de manipulation peuvent jouer dans l'apprentissage? Dans quelle mesure est-il pertinent de réduire le rôle du corps et des artefacts de manipulation à un stade préliminaire d'appréhension conceptuelle?

La cognition est l'un des concepts cruciaux pour étudier l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, puisque tout apprentissage implique un acte de pensée. Néanmoins le clivage cartésien classique esprit-corps qui sous-tendait les perspectives traditionnelles sur la cognition est remis en question depuis des décennies (Anderson, 2003; Lakoff, 2012; Varela, Thomson, et Rosch, 1991). Le dualisme cartésien s'insère dans une tradition de longue date de la cognition qui remonte à l'époque de Platon, selon laquelle la pensée est une activité mentale pure, quelque chose d'immatériel, indépendant du corps, se produisant dans la tête (L. Radford, Edwards, et Arzarello, 2009a; L. Radford, 2011a; L. Radford, 2013a). Le corps était considéré sous cet angle comme un obstacle à l'acquisition de la *vraie* connaissance. Radford (2011a) passe en revue certains des antécédents historiques qui expliquent le développement culturel-historique de cette perspective de pensée. Il cite les écoles de pensée rationalistes du 17e siècle, telles que Descartes et Leibnitz, qui considéraient que les mathématiques pouvaient se pratiquer les yeux fermés. Le dualisme cartésien conçoit l'esprit comme composé par deux plans différents : un plan interne (*res cogitans*, chez Descartes) relatif à l'esprit et comprenant la conscience et les idées, et un plan externe (*res extensa*, chez Descartes) lié à notre corps et ses mouvements. Dans cette perspective, la conception cognitiviste de la pensée humaine, dominante depuis l'avènement des sciences cognitives dans les années 1950, modélise la cognition en termes de traitement d'information. Dans les termes de Varela *et al.* (1991), « L'intuition centrale du cognitivisme est que l'intelligence – humaine comprise – ressemble tellement à la computation dans ses caractéristiques essentielles que la cognition peut en fait se définir par des computations sur des représentations symboliques » (p. 86).

Les limites de cette perspective devenant de plus en plus prononcées, une voie alternative émerge dans la perspective incarnée de la cognition (Bechara, Damasio, et Damasio, 2000; Hutto et Myin, 2013; Lakoff et Johnson, 1980; Wilson, 2002). En conséquence, « la cognition n'est plus vue sous l'angle du traitement d'information, mais plutôt comme ayant pour visée de supporter l'action. » (Dutriaux et Gyselinck, 2016, p. 419). Dans le cadre de la recherche, « Scholars of embodiment seek to evaluate the intriguing hypothesis that thought—even thinking about would-be abstract ideas—is inherently modal activity that shares much neural, sensorimotor, phenomenological, and cognitive wherewithal with actual dynamical corporeal being in the world. » (Abrahamson *et al.*, 2020, p. 2).

L'enseignement en général, et l'enseignement des mathématiques en particulier, n'ont pas échappé à l'influence du dualisme cartésien. Dans la même lignée, les champs de recherche d'éducation mathématique et de didactique des mathématiques ont traditionnellement été sceptiques quant au rôle du corps dans la cognition, comme le soulignent Radford *et al.* (2009) : « The belief in a dualism that separates the mind from the body has had a strong influence on both mathematics and mathematics education for some time. » (p. 91). Une conséquence de cette perspective dans la recherche est la focalisation sur certaines ressources, telle que l'écriture symbolique, pour aborder les subtilités de la pensée mathématique des élèves et la profondeur de leurs connaissances, en écartant comme des ressources cognitivement pertinentes la posture corporelle, les gestes et d'autres signes incarnés (Arzarello, 2006 ; Radford, 2011a). Depuis quelques dizaines d'années, une partie de la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques a pris le virage de l'incarnation pour étudier la nature de la pensée mathématique et explorer de nouvelles formes d'enseignement et d'apprentissage permises par la conception pédagogique qui s'adresse à une activité multimodale (Abrahamson et al., 2020).

S'appuyant sur diverses théorisations du rôle cognitif du corps, Radford, Arzarello, Ed- wards et Sabena (2017) distinguent les approches suivantes [2] : des approches axées sur la dimension métaphorique du langage et la constitution des espaces mentaux incarnés (Edwards, 2009 ; Lakoff et Núñez, 2000 ; Yoon, Thomas, et Dreyfus, 2011) ; des approches phénoménologiques (Nemirovsky et Ferrara, 2009 ; Bautista et Roth, 2012 ; Roth, 2010 ; Thom et Roth, 2011), des approches matérialistes (de Freitas et Sinclair, 2013), incluant l'approche matérialiste dialectique de Radford dénommée *la cognition sensuelle* ; et des approches multimodales, dont l'approche sémiotique vygotskienne des *faisceaux sémiotiques* (Arzarello, 2006 ; Arzarello, Paola, Robutti, et Sabena, 2009). En particulier, l'approche des faisceaux sémiotiques prend appui sur les travaux en psycholinguistique de McNeill (McNeill, 1985 ; McNeill et Levy, 1993 ; McNeill, 2000 ; McNeill, 2005 ; McNeill, 2011), qui mettent en évidence, à partir de l'étude des gestes, l'implication du corps dans la production discursive. Nous mentionnons également les recherches qui se concentrent sur les comportements des participant·e·s par rapport aux technologies interactives qui répondent aux qua-

2. On trouve d'autres ressources dans deux numéros spéciaux de la revue *Educational Studies in Mathematics*, édités par Radford , Edwards et Arzarello (2009) et L. Radford, Schubring, et Seeger (2011).

lités kinesthésiques des actions motrices des apprenant·e·s (Abrahamson et Trninic, 2011; Sinclair et Heyd –Metzuyanim, 2014).

L'influence de la cognition incarnée est présente dans une moindre mesure dans les recherches en didactique des mathématiques, en France. Une première étude au sein du laboratoire de didactique André Revuz qui aborde les perspectives de la cognition incarnée est celle développée par Kuzniak, Parzysz et Vivier (2008). Sur la base d'une étude bibliographique, il s'agissait d'identifier le lien entre les mathématiques et *le monde extérieur*, « du monde réel au monde mathématique » comme le dit le titre du cahier. La discussion sur la cognition incarnée est développée fondamentalement à partir de deux articles : Nuñez, Edwards et Matos (2003) [3] et Tall (2006). Dans l'idée de continuer la discussion entamée par Kuzniak *et al.*, (2008), Artigue, Cazes, Haspekian, Khanfour-Armale et Lagrage (2013) approfondissent l'étude. Les chercheuses et les chercheurs cherchent à se familiariser avec les perspectives de la cognition incarnée, notamment à travers l'appropriation de la notion de geste, et provoquer une réflexion sur leur impact dans les didactiques disciplinaires. La réflexion entretenue par Artigue *et al.* (2013) fait ressortir « L'évidence claire qu'effectivement ces questions sont des questions cruciales, bien qu'elles aient été longtemps sous-estimées dans les travaux de recherche didactique. » (Artigue *et al.*, 2013, p. 35). Pourtant, l'intégration de ces sensibilités dans les sujets de recherche didactique, sur le plan conceptuel et méthodologique, suscite un certain scepticisme. Plus récemment, certaines recherches en didactique des mathématiques intègrent des approches multimodales dans l'étude des gestes (Houdement et Petitfour, 2017; Houdement et Petitfour, 2018; Petitfour, 2015) ou en analysant le rôle des expériences sensorimotrices en didactique de la physique
(Décamp, Rollinde, et Derniaux, 2021).

Nous voudrions nous concentrer un instant sur la réflexion soutenue par Rogalski (2015) sur l'incidence des approches de la psychologie en didactique des mathématiques. Dans ce cadre, et après avoir abordé certaines approches de la cognition incarnée, telle que l'approche de l'énaction et de la cognition située [4], Rogalski fait référence à ce qui, pour elle, est inclu dans la didac-

3. Cet article s'appuie sur les perspectives développées dans l'ouvrage de Lakoff et Nuñez (2000) « Where mathematics comes from », qui tient une place fondatrice pour les perspectives incarnées dans le domaine de recherche de l'éducation mathématique.

4. Wilson (2002) rend compte de six hypothèses autour desquelles diverses perspectives sur la cognition incarnée sont développées : « (1) cognition is situated; (2) cognition is time-pressured; (3) we off-load cognitive work onto the environment; (4) the environment is part of the cognitive system; (5) cognition is for action; (6) offline cognition is body based. » (p. 625).

tique des mathématiques par rapport à ces perspectives :

> En didactique des mathématiques et des sciences, ou en psychologie des enseignements scientifiques, c'est la notion de cognition incarnée (embodied cognition) qui a été reprise comme cadre théorique motivant / justifiant des formes d'entrée dans un domaine particulier de savoir (le nombre, l'espace, le mouvement, . . .), en donnant d'une part une place importante – voire centrale – à la sémantique pour les acquisitions scolaires. C'est par exemple le cas des travaux de Sander et de Brissiaud sur les problèmes à énoncés verbaux (en particulier multiplicatifs) faisant référence à des situations du monde familier (dans l'enseignement élémentaire) (Brissiaud & Sander, 2010). (emphibid., p. 35)

Pour Rogalski (*ibid.*), la perspective de la cognition comme incarnation se cristallise dans la didactique des mathématiques en donnant une place fondamentale aux situations quotidiennes dans l'apprentissage. Elle fait référence au travail de Brissiaud et Sander (2010), sur lequel nous allons revenir plus loin. Rogalski réaffirme cette position par rapport à la didactique de la physique, en caractérisant l'intégration de la perspective de la cognition par la considération que : « les "connaissances naïves" spontanément acquises dans la vie quotidienne doivent constituer un socle pour l'enseignement des savoirs scientifiques, pour donner du sens aux notions enseignées » (Rogalski, 2015, p. 35-36). Dans l'interprétation de l'intuition comme « Connaissance directe, immédiate de la vérité, sans recours au raisonnement, à l'expérience. » (Larousse en ligne, 2021), les mots de Rogalski nous semblent rejoindre les conclusions tirées par Kuzniak *et al.* (2008), à propos de l'article de Nuñez *et al.* (2003) : « La cognition incarnée est une approche cognitive qui met en place des éléments théoriques pour remettre en valeur le rôle de l'intuition et des expériences physiques dans le processus d'abstraction. » (Kuzniak *et al.*, 2008, p. 65).

Certaines recherches en didactique des mathématiques cherchent à mettre en valeur le recours à l'expérience, y compris, mais sans s'y limiter, l'expérimentation sensible et manipulatrice d'objets physiques (Dias, 2005; Dias et Durand-Guerrier, 2005; Durand-Guerrier, Dias, et Pelay, 2010). Dias et Durand-Guerrier voient l'expérimentation dans l'enseignement des mathématiques comme un médiateur nécessaire au dialogue des élèves avec les objets mathématiques, dans une dynamique entre *le réel* et *le théorique* (Dias et Durand-Guerrier, 2005). Dias et Durand-Guerrier formulent l'hypothèse suivante : « Nous faisons l'hypothèse que cet espace de signification est de type expérimental puisqu'il s'agit pour le sujet de questionner le *réel* à partir d'une théorie en construction issue d'expériences sensibles problématiques permettant de faire des prédictions sur le *réel.* » (*ibid.*, p. 77, italique dans l'original). Dans le même ordre d'idée, Heraud (1998) souligne l'intêret qu'un retour aux objets dits du mode, auxquels on accède par l'expérience sensible. Cependant, il écarte la participation de l'expérience sensible à l'acquisition des concepts : « La connaissance des objets du monde [par l'expérience sensible] n'opère jamais leur mutation en êtres conceptuels, sémiotiques ou formels » (p. 1).

En revenant sur l'apprentissage des opérations de multiplication et de division, il nous semble que la recherche de Fischbein (Fischbein, Deri, Nello, et Marino, 1985 ; Fischbein, 1989) fournit un cadre pour comprendre les situations de la vie quotidienne qui interviennent dans l'acquisition de ces opérations arithmétiques. Il s'agit d'une recherche fondatrice du champ de recherche développé autour de l'enseignement et l'apprentissage des opérations de multiplication et de division, le *Multiplicative Conceptual Field* (MCF). Au regard de l'expérience quotidienne qui sous-tend le processus de résolution de problèmes, les auteur·e·s proposent les modèles primitifs, intuitifs et inconscients des opérations en tant que cadre explicatif des difficultés courantes rencontrées par les élèves. Plus précisément, les auteur·e·s affirment que les modèles primitifs, intuitifs et inconscients des opérations arithmétiques, y comprises la multiplication et la division, correspondent à « some practical behavior that would be the enactive, effectively performable counterpart of the operation » (*ibid.*, p. 5). Fischbein *et al.* (1985) formulent l'hypothèse suivante : « Each fundamental operation of arithmetic generally remains linked to an implicit, unconscious, and primitive intuitive model » (p. 2). Cette hypothèse s'alimente dans une large mesure de la recherche sur l'intuition et l'éducation développée par Fischbein (Fischbein, 1975 ; Fischbein, Tirosh, et Hess, 1979 ; Fischbein, 1987 ; Fischbein, 1989 ; Fischbein et Gazit, 1984 ; Fischbein *et al.*, 1985 ; Fischbein et Baltsan, 1998).

Le travail de Brissiaud et Sander (2010) [5] propose un cadre pour aborder les stratégies de résolution de problèmes arithmétiques des élèves : « Situation Strategy First framework ». Dans ce cadre, « Informal strategies used by children reflect the actions or the situation described in the text of the problem » (*ibid.*, p. 92). L'une des hypothèses centrales de ce travail rejoint dans une certaine mesure celle de Fischbein *et al.* (1985). Les auteurs concluent, à partir des données expérimentations obtenues lors de séances de résolution de problèmes avec des classes de CE2 et CM1, grades 3 et 4, que les élèves ont en principe recours à ces stratégies informelles et « only when it is not efficient for providing the numerical solution is the representation of the problem modified so that the relevant arithmetic knowledge might be used. » (p. 92). La perspective des modèles primitifs, intuitifs et inconscients des opérations arithmétiques en général, et des opérations de multiplication et de division en particulier, est ultérieurement reprise

5. Nous considérons que cette recherche ne prétend pas s'inscrire dans la perspective de la cognition incarnée ou *multimodale* : aucune allusion n'y est faite.

dans les recherches en *mathematics education* (Greer, 1992; Kouba, 1989; J. T. Mulligan et Mitchelmore, 1997), et plus récemment par Tirosh (2000), et Maffia et Mariotti (2018). En général, ces approches sont axées sur les stratégies des élèves lors de la résolution de problèmes arithmétiques, souvent informelles, qui reflètent les actions ou les situations du texte du problème, comme celle de Brissiaud et Sander (2010).

Il nous semble que la recherche de Fischbein (Fischbein *et al.*, 1985; Fischbein et Baltsan, 1989) fait remarquer une dimension incarnée fondamentale dans l'enseignement et l'apprentissage des opérations arithmétiques, impliquant la corporéité des actions sur des objets physiques qui leur donnent du sens. Cette recherche s'inscrit dans la lignée de la relation entre intuition et cognition, soulignée comme fondamentale par les interprétations en didactique des mathématiques de la cognition incarnée. Elle est également cohérente à l'approche par les situations de la recherche de Brissiaud et Sander (2010), qui est citée à cet égard. Les modèles de Fischbein (Fischbein *et al.*, 1985; Fischbein et Baltsan, 1989), dans le cadre des travaux de Fischbein sur l'intuition, nous semblent donc une manière intéressante d'aborder, dans un premier temps, la question de l'implication du corps dans l'apprentissage des opérations de multiplication et de division. Cette approche par les modèles de Fischbein (Fischbein *et al.*, 1985; Fischbein et Baltsan, 1989) nous offre au même temps la possibilité de dévoiler les limitations que la perspective centrée sur l'intuition peut imposer. Cela est d'autant plus vrai que les efforts visant à mettre l'accent sur l'expérience sensorielle des élèves dans l'apprentissage, au sens des programmes officiels et de certaines des recherches mentionnées (Dias et Durand-Grenier, 2005; Hidayah *et al.*, 2018; Moyer, 2001), qui sont sans aucun doute fondamentaux, ne sont pas nécessairement encadrés par la cognition incarnée.

En effet, et contrairement à Rogalski (2015), il nous semble que la focalisation sur les expériences ou situations physiques ne permet pas nécessairement de dépasser le dualisme cartésien. Pour reprendre les mots de Radford (2009), qui font référence aux gestes mais qui peuvent être étendus pour toute ressource incarnée : « the problem of the role of gestures in learning can hardly be solved by merely admitting that gestures and the body have "something" to do with cognition. We still have to determine *how* gestures relate to learning and thinking. » (p. 112, emphase dans l'original). Radford (2009) discute à cet égard de la manière dont le corps et les artefacts sont considérés dans l'épistémologie piagétienne : « the sensory–motor realm appeared as an ephemeral route towards abstract thinking : if body and artifacts played an epistemological role, it was indeed only that of highlighting the logical structures that supposedly underlay all acts of knowing. » (p. 112). En particulier, les réminiscences de la filiation piagétienne dans les programmes officiels ne font que souligner l'urgence d'aborder ces questions cruciales et sous-estimées pour la didactique mathématique, comme le soulignent Artigue *et al.* (2013), afin notamment de se positionner de manière critique par rapport aux prescriptions curriculaires.

Notre recherche porte sur la relation entre le corps et l'apprentissage des opérations de multiplication et de division. Elle est motivée par les questions naïves suivantes : comment ces relations se développent-elles, quelles formes peuvent-elles prendre ? En particulier, l'approche par les modèles de Fischbein *et al.* (1985) nous amène à poser les questions suivantes : dans quelle mesure ces perspectives sont-elles compatibles ou incompatibles avec les perspectives actuelles sur la cognition incarnée ? Dans quelle mesure la recherche de Fischbein nous informe-t-elle sur l'implication du corps dans l'apprentissage des opérations arithmétiques en question ? Plus intéressant encore pour notre recherche, quelles possibilités ouvre-t-elle pour une exploration plus approfondie du rôle du corps dans l'apprentissage des opérations de multiplication et de division ?

Notre recherche s'organise en trois parties. La première partie de la recherche a été consacrée à la problématisation de l'implication du corps dans l'apprentissage des opérations de multiplication et de division (chapitres 1, 2, 3 et 4). Notre problématisation a été accompagnée d'une prise de position théorique. La deuxième partie est consacrée à l'élaboration d'une méthodologie qui nous permet d'aborder ces questions du point de vue expérimentale (chapitres 5 et 6). La troisième partie contient les analyses de nos expérimentations (chapitres 7 et 8).

Dans le chapitre 1, nous rendons compte du *Multplicative Conceptual Field*, le champ de recherche en *Mathematics Education* qui accueille la réflexion sur les phénomènes liés à l'enseignement et l'apprentissage des opérations de multiplication et de division. Dans ce qui suit, nous développons une première approche des actions incarnées dans la recherche de Fischbein). Nous décrivons d'abord les modèles liés aux opérations de multiplication et de division. Nous rendons compte du cadre de l'intuition développé par Fischbein sur lequel il appuie sa problématisation de la place des modèles dans l'enseignement et l'apprentissage des opérations arithmétiques. Nous soulignons les limites que cette approche impose, du point de vue d'une perspective socio-culturelle de l'apprentissage. Ces limites concernent l'apprentissage et l'action incarnée. Enfin, nous présentons une première formulation de nos premières questions de recherche.

Le chapitre 2 est consacré à la description de notre approche de l'apprentissage des opérations de multiplication et de division, en termes de ce que nous appelons *une pensée multiplicative*. D'abord, nous décrivons les concepts fondamentaux qui érigent la perspective socioculturelle que nous adoptons dans cette recherche : la théorie de l'objectivation. Nous rendons compte de la façon dont la théorie de l'objectivation aborde les notions de savoir et de connaissance mathématique, d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, en appui des travaux de Vygotski et les fondements d'une philosophie matérialiste-dialectique. Dans la perspective de la théorie de l'objectivation, nous caractérisons ensuite la pensée multiplicative que nous considérons dans cette recherche, par laquelle nous abordons l'acquisition des concepts des opérations de multiplication et de division. Nous nous basons sur l'interprétation de certains contextes historiques.

Dans le chapitre 3, nous présentons dans une première partie l'approche de la cognition incarnée sur lequel nous prenons appui dans notre recherche, qui consiste en la cognition sensuelle. Nous abordons certaines caractéristiques de la cognition humaine selon cette approche. En particulier, nous décrivons la perspective de la cognition sensuelle sur les artefacts. Dans une deuxième partie, nous développons notre cadre interprétatif pour aborder l'implication de l'action incarnée dans l'apprentissage des opérations de multiplication et de divisions. Ce cadre interprétatif est fondamentalement basé sur une recherche en théorie de l'action et les réflexions de Radford sur l'intuition et la perception.

Le chapitre 4 est consacré au développement de l'approche sémiotique que nous adoptons dans notre recherche et la formulation de nos questions de recherche. Nous nous appuyons sur les travaux de Radford dans la matière. Nous nous intéressons particulièrement par les gestes en tant que ressources sémiotiques incarnée. Notre perspective sur les gestes est basée sur les travaux en psycholinguiste de McNeill. Nous décrivons certains concepts centraux de la théorie de la médiation sémiotique, afin de soutenir nos réflexions ultérieures sur les artefacts. Nous évoquons également une notion de la théorie de l'objectivation qui rend compte de la transformation des relations complexes entre le concret et le conceptuel. Enfin, nous formulons nos questions de recherche.

Le chapitre 5 est consacré à la présentation des principes méthodologiques qui érigent notre recherche. Nous présentons l'objet de notre méthodologie et l'unité d'analyse : l'activité qui a lieu fondamentalement lors de trois séances de résolution de tâches multiplicatives dans une classe de CE2. Nous rendons compte de nos outils méthodologiques et d'analyse, empruntés principalement à la théorie de l'objectivation, à la théorie de l'activité didactique, à la théorie de la médiation sémiotique, à l'approche des faisceaux sémiotiques et aux travaux de McNeill. Nous présentons les étapes de notre analyse de données.

Dans le chapitre 6 nous précisons les conditions de la mise en place des séances, qui constituent notre scénario. Nous rendons compte de l'élaboration de tâches et de deux artefacts : un artefact de manipulation appelé *boîtes et cubes* et un artefact symbolique appelé *grille fois-partie-tout*. Nous nous referons aux conditions pour l'enregistrement d'image des élèves, aux conditions de l'enseignement et à la progression globale de la classe pour ce qui concerne les opérations de multiplication et de division.

Le chapitre 7 est consacré à l'analyse du potentiel sémiotique des artefacts *boîtes et cubes* et *grille fois-partie-tout*. Nous prenons appui sur la théorie de la médiation sémiotique.

Le chapitre 8 est consacré à l'analyse de l'activité. Notre analyse des trois séances analysées en détail est composée d'une analyse *a priori* de tâches et d'une analyse de l'activité proprement dite. Nous complétons notre analyse avec des analyses de segments saillant de l'activité d'autres trois séances et des entretiens avec des élèves.

Sommaire

Première partie

Problématique et cadre théorique

Introduction

Adoptant l'idée que la cognition est incarnée comme hypothèse de travail, nous nous interrogeons sur l'implication du corps dans l'enseignement et l'apprentissage des opérations de multiplication et de division. Pour reprendre les mots de Radford et Sabena (2015), « By asking questions— research questions—theories fabricate [the] objects [that they seek]. They also fabricate the evidence that shows the objects in accordance with the procedures that theories follow in their persuasive endeavour. » (p. 159). Cette partie est consacrée à la problématisation de la question du rôle du corps dans le processus d'enseignement et d'apprentissage de ces concepts mathématiques, à la lumière des principes théoriques auxquels nous adhérons et qui définissent la perspective que nous utilisons pour étudier ce rôle.

Dans le chapitre 1, nous approfondissons notre questionnement initial en appui sur une recherche fondatrice dans les études autour de la multiplication en Mathematics Education : la recherche de Fischbein *et al.* (1985). Dans le chapitre 2, nous faisons référence aux notions théoriques empruntées à la théorie de l'objectivation développée par Radford, qui nous permettent de délimiter ce que nous entendons par l'apprentissage d'une pensée multiplicative, sur laquelle nous nous concentrons dans cette thèse. Dans le chapitre 3, nous détaillons la nature incarnée de la cognition dans la perspective que nous adoptons, à travers la notion de cognition sensuelle définie dans la théorie de l'objectivation. Nous développons également le cadre interprétatif théorique de l'implication du corps dans l'apprentissage de la pensée multiplicative : la *domestication des mains*. Enfin, dans le chapitre 4, nous présentons les concepts qui érigent la perspective sémiotique que nous adoptons pour étudier l'apprentissage, et formulons nos questions de recherche.

Sommaire Partie I

Chapitre 1

Les questions initiales

Notre recherche se concentre sur l'enseignement et l'apprentissage de la multiplication et de la division (ou des divisions, au pluriel, comme nous le verrons dans le chapitre 2). La réflexion sur les phénomènes liés à l'enseignement et l'apprentissage de ces opérations arithmétiques s'organise dans un champ de recherche vaste et prolifique : le champ conceptuel multiplicatif (« Multiplicatif conceptual field », en anglais, dont l'acronyme est MCF). Nous revenons à une recherche ancienne de longue influence à l'aube du MCF : les modèles intuitifs des opérations de multiplication et de division Fischbein *et al.* (1985). La recherche de Fischbein *et al.* (*ibid.*) façonne notre première approche à l'implication du corps dans l'apprentissage des opérations de multiplication et de division, par les modèles basés sur des actions sur des objets physiques qu'elle propose. Ce choix répond également à la possibilité qu'elle offre de creuser les limites des approches qui relèguent le rôle du corps et des artefacts à l'intuition. Nous abordons la recherche de Fischbein à travers les questions suivantes, formulées dans l'introduction : à quel point ces perspectives peuvent-elles s'avérer compatibles ou incompatibles avec les perspectives actuelles sur la cognition incarnée? Dans quelle mesure ces recherches nous renseignent-elles sur l'implication du corps dans l'apprentissage des opérations arithmétiques de multiplication et de division? Quelles possibilités ces recherches anciennes ouvrent-elles pour une exploration plus approfondie du rôle du corps dans l'apprentissage? Nous verrons que certaines limites de l'approche adoptée par Fischbein, du point de vue de l'apprentissage en tant que processus historico-culturel, ouvrent la possibilité de nouvelles questions sur l'implication du corps dans l'apprentissage des opérations de multiplication et de division. La recherche de Fischbein *et al.* (*ibid.*) et l'approche sur l'intuition de Fischbein nous fourniront ainsi des éléments pour esquisser nos premières questions sur l'implication du corps dans l'apprentissage de la multiplication et de la division.

Dans ce chapitre nous proposons une première reformulation de notre questionnement initial à la lumière de ces travaux de recherche. Dans la section 1.1 nous donnons un aperçu du champ de recherche MCF. Dans la section 1.2, nous faisons référence aux modèles primitifs, intuitifs et inconscients de Fischbein *et al.* (*ibid.*). Dans la section 1.3, nous nous concentrons sur les tensions entre l'intuition et l'acquisition de concepts formels. Enfin, dans la section 1.4 nous concluons sur les limites de l'approche des modèles primitifs, intuitifs et inconscients et les pistes que cela nous donne pour poursuivre notre recherche.

1.1 Le champ conceptuel multiplicatif

Le domaine de recherche consacré aux recherches axées sur les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des concepts liés à la multiplication reçoit le nom de *Multiplicatif conceptual field*. Parmi les lignes de recherche qui confluent dans le MCF, certaines sont focalisées sur le passage du raisonnement additif au raisonnement multiplicatif (Degrande, Van Hoof, Verschaffel, et Van Dooren, 2018 ; Dooren, Bock, et Verschaffel, 2010 ; Malola, Symons, et Stephens, 2020), la résolution de problèmes (Dooren et al., 2010; Verschaffel, Greer, et De Corte, 2002), l'acquisition du concept de fraction (Thompson et Saldanha, 2003; Wearne et Hiebert, 1989) et de la notion de proportionnalité (T. W. Boyer, Levine, et Huttenlocher, 2008; Empson et Knudsen, 2003).

Dans le paragraphe 1.1.1 nous faisons référence aux origines du champ de recherche dans le domaine multiplicatif. Nous évoquons dans le paragraphe 1.1.2 certaines perspectives de recherche qui sont partagées au sein du MCF. Dans, le paragraphe 1.1.3, nous faisons référence à la notion du *raisonnement multiplicatif*. Les paragraphes 1.1.4 et 1.1.5 sont consacrés à deux thèmes de recherche particuliers : l'approche de construction et de coordination d'unités, et l'utilisation d'artefacts.

1.1.1 Origines du champ de recherche MCF

L'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique a depuis le début trouvé une place importante dans le champ de recherche de *Mathematics Education* (ME). Ce n'est pas anodin que, parmi les premières revues publiées par le National Council of Teachers of Mathematics aux États-Unis (qui fonda en 1970 le *Journal for Reseach in Mathematics Education*), celle destinée aux enseignants de la maternelle à la 8e année avait pour titre *The Arithmetic Teacher*. Dans les années 70, l'intérêt porté à l'arithmétique en France est par exemple cristallisé dans la théorie des structures additives et multiplicatives de Vergnaud (Vergnaud, 1970). L'impératif de réunir ces divers efforts dans un domaine de recherche plus spécifique est devenu de plus en plus nécessaire dans le monde anglo-saxon. Cet impératif est exprimé en divers contextes scientifiques, notamment dans les recherches publiées dans l'*Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* en 1983 et dans le cadre des conférences relatives au *National Science Foundation's Research Agenda Projet for Mathematics Education* en 1986.

Au cours des années 1989 et 1990, un groupe de chercheuses et chercheurs propose les fondements d'un champ de recherche qui accueille les différents courants de recherche concernant le domaine multiplicatif, qui sera plus tard dénommé Multiplicatif Conceptual Field (MCF), ce qui suppose bien évidemment une spécificité par rapport aux opérations de multiplication et de division en relation aux opérations d'addition et de soustraction (Hiebert et Behr, 1988). La réflexion donnera lieu à la publication de l'ouvrage « The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics » (Harel et Confrey, 1994), dans lequel sont décrites diverses lignes de recherches suivies par ce groupe de chercheuses et chercheurs (L. Steffe, G. Vergnaud, B. Greer, S. Lamon, M. Behr, G. Harel, T. Post, R. Lesh, P. Thompson, J. Kaput, M. Maxwell West, J. Confrey, E. Smith, et T. Kieren). Le terme MCF désigne à la fois le champ de recherche développé autour des phénomènes concernant l'apprentissage et l'enseignement des opérations de multiplication et de division, et le champ conceptuel des opérations de multiplication et de division, en référence à la notion introduite par Vergnaud. Nous utilisons dorénavant les acronymes MCF C et MCF R pour nous référer respectivement au champ conceptuel et au champ de recherche, en cas d'ambiguïté.

1.1.2 Des perspectives partagées

Plusieurs lignes de recherche focalisées sur les phénomènes liés à l'enseignement et l'apprentissage des opérations de multiplication et de division convergent dans le MCF. Les points de vue sur certains sujets du champ conceptuel MCF se sont multipliés depuis les années 1990 notamment en relation aux classifications de situations de multiplication et de division (Greer, 1992; Nunes et al., 2009). Harel et Confrey (Harel et Confrey, 1994) soulignent toutefois la recurrence de certaines problématiques sous-jacentes aux recherches du MCF R, ainsi que des perspectives partagées. Les chercheuses et chercheurs partagent l'idée que les notions mathématiques relatives au champ conceptuel MCF présentent une complexité et une interconnexion remarquable : un véritable défi unique de recherche (*ibid.*). Le MCF C inclut les opérations de multiplication et de division et d'autres les concepts mathématiques (rapports, proportions, fractions, nombres rationnels, fonction linaire, etc), mais aussi « the situations and the problems that offer a sound experential reference » (Vergnaud, 1994, p. 46). Le domaine de recherche s'est ainsi constitué autour de ce que Lamon (1994) dénomme une *conjoncture critique* : « These topics [included in the MCF C] create the critical juncture in the middle school, separating those students who persist and those who drop up » (Harel et Confrey, 1994, p. xii). De plus, l'acquisition des notions du MCF C s'étend sur des périodes considérables du temps, même si leur compréhension commence tôt (Vergnaud, 1983). Ceci explique en partie les difficultés récurrentes des élèves à maîtriser le MCF C (Norton, Boyce, Ulrich, et Phillips, 2015; Olive et Steffe, 2010).

1.1.3 Le raisonnement multiplicatif

L'un des aspects soutenant la recherche au sein du MCF R c'est que l'apprentissage des opérations de multiplication et de division est liée aux possibilités de penser et d'agir qui se déploient dans leur mobilisation, dénommée *le raisonnement multiplicatif*. Avec les mots de Siemon, Breed, et Virgona (2008), il s'agit de « a capacity to work flexibly with the concepts, strategies and representations of multiplication (and division) as they occur in a wide range of contexts » (p.2). Dans le chapitre 2, nous adopterons une perspective historique et culturelle pour rendre compte d'une manière de penser et d'agir avec la multiplication et la division basée sur des pratiques humaines constituées historiquement et culturellement. Pour le moment, nous soulignons que le raisonnement multiplicatif ainsi compris se distingue, au sein du MCF R, du raisonnement dit additif. L'une des différences réside dans la manière dont les comparaisons entre quantités sont considérées : les approches additives considèrent une *différence* entre deux valeurs, alors que les approches multiplicatives considèrent un *rapport* entre deux valeurs (Dooren et al., 2010). La relation entre les deux valeurs et le rapport peut s'exprimer avec une multiplication. En effet, face au problème verbal suivant, l'approche additive et l'approche multiplicative conduisent à des réponses différentes : « Il y a deux semaines, deux fleurs ont été mesurées à 3 cm et 8 cm. Aujourd'hui, la taille des fleurs est respectivement de 6 cm et de 12 cm. La fleur de 3 cm ou de 8 cm a-t-elle poussé davantage ? » (adaptation d'un problème tiré de Van de Walle, Karp et Bay-Williams (2013)). Dans une approche additive, les différences des mesures des fleurs sont comparées, de sorte que la fleur de 8 cm a grandi le plus (4 cm contre 3 cm). Dans une approche multiplicative, la comparaison porte sur les rapports, $\frac{6}{3} = 2$ et $\frac{12}{8} = 1,5$ en l'occurrence, ce qui permet de conclure que la fleur qui a poussé le plus est celle qui mesurait 3 cm initialement.

Il convient de noter qu'une perspective constructiviste sous-tend souvent la caractérisation du raisonnement multiplicatif dans le MCF R. En effet, le raisonnement multiplicatif est généralement compris comme un ensemble de schémas et d'opérations mentales qui sont construits afin de travailler avec des concepts, des stratégies et des représentations, comme l'expriment Siemon, Breed et Virgona (2008) dans la citation ci-dessus. Par exemple, Thompson et Saldanha (2003) signalent, à propos du raisonnement multiplicatif : « We use the phrase "conceptual scheme" to indicate that we are talking about stable ways of thinking that entail imagining, connecting, inferring, and understanding situations in particular ways. » (p. 13). La caractérisation de ces opérations et structures mentales prend notamment appui sur l'approche constructiviste de construction et coordination d'unités, décrit dans le paragraphe suivant.

1.1.4 L'approche de construction et coordination d'unités

L'une des approches ayant une influence significative dans les recherches au sein du MCF R (Lamon, 1994 ; Steffe et Olive, 2010 ; Hackenberg, 2013 ; Norton *et al.*, 2015 ; Tzur et al., 2017) consiste en ce que Ulrich (2015) désigne comme « The theory of unit constructions and coordinations » (p. 2) (voir Ulrich 2015 et Ulrich 2016 pour une synthèse). Nous désignons cette approche théorique avec l'acronyme CCU. L'approche CCU vise à caractériser l'activité numérique des élèves, en termes de certaines structures mentales et opérations mentales, dans le sens piagétien. L'approche fournit un cadre explicatif pour les difficultés des élèves dans l'apprentissage des notions mathématiques arithmétiques qui impliquent les nombres entiers et les fractions (Hackenberg et Tillema, 2009 ; Boyce et Norton, 2016 ; Steffe et Olive, 2010). Les structures mentales décrites sont les *unités*. Les schèmes consistent en la *coordination* de ces structures. Ces structures sont construites au moyen des instances d'*abstraction réflexive*, tel qu'il est décrit par l'épistémologie piagetienne, que produit l'opération d'*unitizing* (Glasersfeld, 1981a, Glasersfeld, 1981b ; Glasersfeld, 1989), d'usage transversal au sein du MCF R (Harel et Confrey, 1994). Le terme *unitizing* réfère à une opération de perception qui permet la discrimination sensorielle ou l'isolement d'objets de leur entourage. Plus précisément, cette opération implique, selon l'hypothèse de Glasersfeld, un schéma attentionnel qui registre signaux sensorimoteurs d'une manière particulière [1]. Cette opération se complexifie par l'expérience sensorielle et donne lieu à l'*abstraction réflexive* : « That pattern, therefore, must be highly recurrent— and to separate it conceptually from the varying sensory material with which it occurs is probably among the very first instances of generalizing, or "empirical" abstraction (Piaget, 1974). » (Glasersfeld, 1981a, p. 88).

L'approche CCU est dans une large mesure soutenu par les recherches de Steffe et collègues qui expliquent le développement de dites structures et processus au sein d'activités de comptage (Cobb et Steffe, 1988 ; Steffe et von Glasersfeld, 1988 ; Steffe, 1992 ; Steffe, 2010). En effet, ils distinguent des schèmes de comptage produits par le biais du processus d'*unitizing* sur des suites numériques, qui déterminent des étapes de développement selon la complexité dont ces structures cognitives sont progressivement détentrices. La construction de ces structures prend également appui sur le processus d'abstraction réflexive au sens piagetien Ces étapes coïncident avec l'acquisition des *concepts multiplicatifs* (Hackenberg et Tilema 2009 ; Hackenberg, 2010), définis également en termes de la construction et coordination d'unités. D'autres recherches étendent l'usage de l'*unitizing* à des contextes géométriques (CClements, Battista, Sarama, et Swaminathan, 1997).

1.1.5 L'implication des artefacts

Certaines recherches dans le MCF R sont focalisées sur la médiation par des artefacts. Nous soulignons l'artefact appelé *TouchTimes* (TT), une application à écran tactile conçue et développée par Sinclair et collègues (Bakos et Sinclair, 2019a ; Bakos et Sinclair, 2019b ; Chorney et Sinclair, 2021). L'artefact s'insère dans la ligne de recherche qui utilise la technologie numérique en tant que source de nouvelles ressources prometteuses pour soutenir l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Robutti et al., 2016 ; Morgan et Kynigos, 2014 ; Baccaglini-Frank, Ca-

1. Les propriétés cognitives du modèle attentionnel qui soutient l'élaboration théorique de Glasersfeld portent sur la réception et sur le codage des informations sensorielles. D'abord, Glasersfeld (1981a) prend appui sur l'existence d'une intermittence dans la réception des informations sensoriels, ce qui rend possible l'existence des successions des impulsions focalisées, encadrées par les impulsions non focalisées ou vides. Cela permet la discrimination sensorielle ou l'isolation des objets de leur entour. Deuxièmement, Glasersfeld se base sur l'indépendance des informations sensorielles et leur codage, étant donné que ce dernier est fondé sur des fonctions corticales sensorielles, associatives et motrices. Ces opérations supportent ultérieurement l'opération en absence du matériel sensoriel.

rotenuto, et Sinclair, 2020), ce qui soulève d'ailleurs certains questionnements d'ordre épistémologique et ontogénétique (L. Radford, 2014c). L'artefact TT fournit une interaction tangible, visuelle et symbolique impliquant les doigts, les mains et les gestes des élèves, pour encourager différents façons de percevoir et comprendre des concepts numériques et arithmétiques dont la multiplication (Bakos et Sinclair, 2019a ; Bakos et Sinclair, 2019b). Le TT se base sur un modèle fonctionnel et symbolique de multiplication qui ne repose pas sur des additions répétées. Bakos et Sinclair (2019a) prennent appui sur la théorie de la médiation sémiotique (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008) pour analyser le potentiel sémiotique du TT pour l'apprentissage et l'enseignement de la multiplication à l'école primaire.

Le modèle rectangulaire a fait l'objet de plusieurs recherches concernant l'enseignement et l'apprentissage de la multiplication (Abrahamson, 2004 ; Fernandes, Carron et Ducasse, 2008 ; Hurts et Linsell, 2020, Jacob et Mulligan, 2014) et des propriétés comme la distributivité (Maffia et Mariotti, 2015). Les études concernent l'opération de multiplication dans un cadre numérique. La théorie de la médiation sémiotique (TMS) a permis de décrire l'émergence et l'évolution de signes par l'utilisation d'un artefact rectangulaire (Maffia et Mariotti, 2015), en soulignant le rôle de l'enseignant dans la sélection et l'élaboration de signes personnels spécifiques.

1.2 Les modèles de Fischbein *et al.* (1985)

L'étude menée par Fischbein *et al.* (Fischbein *et al.*, 1985) trouve une place remarquable au sein du domaine de recherche du MCF, qui a contribué à redynamiser la recherche sur la multiplication et la division dans les années 80 (Harel et Confrey, 1994). Fishcbein *et al.* (1985) étudient la résolution de « word problems », en anglais, ce que l'on appelle en didactique des mathématiques les *problèmes verbaux* ou les *problèmes à énoncés verbaux* (Coquin-Viennot, 2001 ; Houdement, 2011). Ces problèmes peuvent se définir comme suit : « Word problems are mathematical problems presented in the context a stroy of real-life scenario » (Adams, 2003, p. 790). Plus précisément, les problèmes verbaux étudiés par Fischbein *et al.* (*ibid.*) sont des problèmes qui peuvent être résolus par le biais d'un calcul, dénommés en didactique des mathématiques *problèmes arithmétiques verbaux*. La recherche de Fischbein *et al.* (1985) s'insère dans la ligne de recherches focalisées sur des effets de la nature des nombres et leur relations dans la résolution des problèmes arithmétiques verbaux (Bell, Swan, et Taylor). Au regard de l'expérience quotidienne qui sous-tend le processus de résolution, Fischbein *et al.* (*ibid.*) proposent les *modèles* *primitifs, intuitifs et inconscients* des opérations pour expliquer les difficultés rencontrées par les élèves dans le processus de résolution. Étant donné que nous nous focalisons surtout sur la nature intuitive des modèles, nous y ferons souvent référence par le terme *modèles intuitifs*.

Fischbein *et al.* (1985) affirment que les modèles intuitifs des opérations arithmétiques, y compris la multiplication et la division, correspondent à « some practical behavior that would be the enactive, effectively performable counterpart of the operation » (*ibid.*, p.5). Les modèles intuitifs décrits par Fischbein (Fischbein *et al.*, 1985 ; Fischbein et Baltsan, 1998) reprennent les actions physiques qui, effectuées sur des petites collections, permettent de traiter (au sens de résoudre) les problèmes pratiques matériels qui peuvent être associés aux opérations arithmétiques. Pour mettre l'accent sur le fait que ces actions physiques sont réalisées par le corps sur des objets concrets, nous les dénommons des *actions incarnées* [2]. Dans le paragraphe 1.2.1 nous présentons les modèles intuitifs de multiplication et de division. Le paragraphe 1.2.2 réfère à l'incidence des modèles au sens de Fischbein *et al.* (1985) dans la résolution de problèmes.

1.2.1 Modèles intuitifs de multiplication et de division

Dans un sens générique, « the model is a structure which helps to solve a problem, to understand and explain a phenomenon » (Fischbein et Baltsan, 1998, p.2). Les modèles intuitifs des opérations de multiplication et de division sont respectivement le modèle de l'addition itérée, et les modèles de la division partage et de division quotition. Fischbein *et al.* (1985) signalent que ce ne sont pas les seuls modèles possibles des opérations, tel que le modèle du rangement rectangulaire. Il s'agit néanmoins de ceux qui s'avèrent être les plus persistants. Le modèle de l'addition itérée consiste à considérer la *réunion* d'une certaine quantité de collections de même taille. Pour Fischbein *et al.* (1985), « Under the repeated addition interpretation, 3×5 means $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ or $5 + 5 + 5$ [3] » (p. 6). Dans le modèle de division partition, aussi appelé division partage, un objet ou une collection d'objets est *divisée* ou *partagée* en un nombre égal d'objets, de fragments ou de sous-collections équivalents. Dans le second modèle de division, la division quotition, que l'on pourrait aussi appeler division mesure ou division groupement, on cherche à déterminer combien de fois une grandeur donnée est contenue dans une grandeur en principe plus grande. Le modèle peut être aussi considéré comme une soustraction répétée, ce

2. Notre utilisation du terme est différente à celle d'*action incarnée* en tant que modèle de la cognition (Varela *et al.*, 1991).

3. Fischbein *et al.* (1985) ne distinguent pas multiplicateur de multiplicande pour le modèle d'addition itérée.

qui correspond à *prendre* un certain nombre de fois la plus petite grandeur dans la plus grande ou à *construire* cette dernière en répétant la plus petite.

1.2.2 L'incidence des modèles dans la résolution de problèmes

Fischbein *et al.* (1985) formulent l'hypothèse suivante : « Each fundamental operation of arithmetic generally remains linked to an implicit, unconscious, and primitive intuitive model » (p.2). L'incidence des modèles a été étudiée du point de vue du choix de l'opération arithmétique pour résoudre les problèmes verbaux d'un questionnaire, au regard des structures sémantiques des problèmes. Selon Fischbein *et al.* (1985), le chemin de la résolution des problèmes verbaux est bloqué par l'incongruité entre les données numériques du problème et les *contraintes* spécifiques aux domaines de validité des modèles intuitifs. Plus en détail, les modèles soutiendraient certaines croyances, à savoir « la multiplication rend plus grand » et « la division rend plus petit ». En particulier, la recherche a mis en évidence l'existence de phénomènes liés au choix de l'opération, comme c'est le cas de « l'effet du multiplicateur », aussi mise en évidence par d'autres recherches (Bell Swan et Taylor, 1981; Bell, Fischbein et Greer, 1984; De Corte, Verschafiel et Van Coillie, 1988; Luke, 1988). L'effet du multiplicateur consiste à choisir une division lorsque c'est une multiplication qui correspond à la situation décrite dans un problème verbal et dont le multiplicateur est un nombre décimal inférieur à 1. Par exemple, le phénomène a été observé par Fischbein *et al.* (1985) dans les réponses au problème suivant : « 1 kilo of a detergent is used in making 15 kilos of soap. How much soap can be made from 0.75 kilo of detergent? » (p. 9). Au lieu d'écrire $15 \times 0,75$ [4], les élèves faisaient des erreurs et écrivaient $15 : 0,75$ ou $0,75 : 15$.

L'influence des modèles peut durer longtemps, comme l'affirment Fischbein *et al.* (1985) dans la phrase suivante : « the enactive prototype of an arithmetical operation may remain rigidly attached to the concept long after the concept has acquired a formal status » (Fischbein *et al.*, 1985, p, 6). Nous reviendrons sur l'acquisition des concepts formels plus loin. La perspective des modèles intuitifs et tacites des opérations arithmétiques en général, et des opérations de multiplication et de division en particulier, est ultérieurement reprise dans la recherche (Greer, 1992; Kouba, 1989; Mulligan et Mitchelmore, 1997), et plus récemment par Tirosh (2000), et Maffia et Mariotti (2018). En général, ces approches sont axées sur les stratégies des élèves pour

4. En suivant la pratique qui était usuelle en France (et dans d'autres pays) avant les années 1970, nous écrivons le multiplicateur à droite.

la résolution de problèmes arithmétiques, souvent informelles, qui reflètent les actions ou les situations du texte du problème (Brissiaud et Sander, 2010).

1.3 Intuition et tensions avec l'acquisition des concepts formels

Les modèles intuitifs proposés par Fischbein (Fischbein *et al.*, 1985; Fischbein et Baltsan, 1989) s'inscrivent dans une réflexion plus large autour de l'intuition dans l'enseignement et l'apprentissage. Les nombreux travaux de Fischbein dans ce domaine (Fischbein, 1975; Fischbein, 1987; Fischbein, 1989; Fischbein, Tirosh et Hess, 1979; Fischbein et Gazit, 1984; Fischbein *et al.*, 1985; Fischbein et Baltsan, 1998) se concentrent sur « a formal recognition of intuition as one of the major components of our cognitive endeavors » (Fischbein, 1987, p. xi). Les efforts de recherche de Fischbein ont contribué à faire de l'intuition un sujet de recherche en Mathematics Education (Tirosh et Tsamir, 2020). Notre intérêt pour les réflexions de Fischbein sur l'intuition réside principalement dans la possibilité de révéler les tensions dans lesquelles peut s'inscrire la question de l'implication du corps dans l'apprentissage des opérations de multiplication et de division : une opposition entre *l'intuitif* et *le formel*. L'approche de l'intuition nous permet d'esquisser d'autres perspectives pour aborder cette question, étant donné que les actions incarnées sont à la base des modèles intuitifs.

Le paragraphe 1.3.1 est consacré à l'approche de l'intuition en Mathematics Education développée par Fischbein. Dans le paragraphe 1.3.2, nous présentons l'hypothèse de Fischbein selon laquelle la connaissance intuitive et les concepts formels coexistent inévitablement. Enfin, dans le paragraphe 1.3.3, nous abordons la question de la suspension de sens dans la résolution de problèmes arithmétiques verbaux.

1.3.1 L'intuition chez Fischbein

Fischbein (1989) rejette l'hypothèse cognitiviste basée sur l'analogie entre le cerveau humain et l'ordinateur, qui assimile la cognition à un processus de traitement des informations (nous avons évoqué au passage la perspective cognitiviste sur la cognition dans l'introduction de la thèse). Au contraire, la réflexion de Fischbein souligne que la pensée soumise à la pure manipulation de symboles abstraits, n'obéissant qu'à ces contraintes axiomatiques et formelles, est pratiquement impossible. Fischbein (1987) considère que les concepts formels voire les concepts mathématiques, tels que transmis par la culture, se présentent à nous, au moins à première vue, comme un mélange arbitraire. C'est ainsi que l'on a la tendance, selon Fischbein (1987), à produire des interprétations complémentaires afin de rendre ces concepts plus accessibles à la pensée humaine : les modèles intuitifs. Fischbein (1987) signale :

> Our point of view is that one tends always, almost automatically, to produce complementary interpretations of the conceptual structures which, by their very nature, will be able to confer on the concepts used the direct credibility, consistency and intrinsic necessity required by a normal, productive behavior. (p.123)

Le modèle intuitif est très souvent suggéré par la réalité empirique initiale qui constitue le contexte dans lequel l'individu rencontre initialement le concept formel, par exemple à travers d'une de ses représentations symboliques abstraites (le symbole arithmétique ou son nom, par exemple), ce qui donne un caractère primitif [5] au modèle. Une autre caractéristique remarquable des modèles est leur caractère concret, pratique et comportemental (Fischbein, 1989). En particulier, certains modèles proposés par Fischbein, tels que ceux des opérations arithmétiques, impliquent des objets *concrets*, c'est-à-dire des objets palpables, tangibles et matériels. Les modèles intuitifs de Fischbien peuvent également être abstraits, sans être nécessairement fondés sur une réalité concrète : c'est le cas de l'idée de segment infiniment divisible. Fischbein (1989) affirme que le segment géométrique apparaît subjectivement dans la pensée comme une entité abstraite, pure et idéale, mais aussi intuitivement représentable et manipulable comme s'il s'agissait d'un objet réel. Dans ce sens, les modèles intuitifs abstraits ont une double nature.

Fischbein met également l'accent sur la nature inconsciente ou implicite de certaines opérations de raisonnement, compatibles avec d'autres perspectives de la même époque ou actuelles de la cognition [6] (Reber, 1989 ; Lakoff et Nuñez, 2000 ; Dane et Pratt, 2009). Les modèles intuitifs agissent selon Fischbein "from behind the scenes » (Fischbein, 1989, p. 12). À l'instar de Polanyi (1969), Fischbein affirme que l'implicite joue un rôle décisif non seulement dans la découverte de la pensée scientifique, « but in the very holding of scientific knowledge » (Fischbein, 1989, p. 9).

5. Nous ne circonscrivons pas le mot à sa connotation péjorative (insuffisamment civilisé).

6. L'une des expériences (1974) qui en témoigne est le phénomène de la vision aveugle, présente dans quelques patients dont certaines régions cérébrales du traitement des images sont lésées, mais dont les voies visuelles sont intactes. Les informations reçues par les voies visuelles leur permettant d'avoir une « vision d'ambiance », ce qui leur permet d'éviter des obstacles ainsi que de deviner l'expression émotionnelle d'un visage, sans en avoir néanmoins la moindre conscience. L'activité de ces patients est modulée, de façon inconsciente, par des informations visuelles qui ne parviennent pas jusqu'à l'attention.

1.3.2 L'opposition de l'intuitif et le formel

La tendance à remplacer inconsciemment les concepts mathématiques formels par les modèles intuitifs s'étend à d'autres concepts, comme celui d'ensemble (Fiscbein et Baltsan, 1998). Fischbein et Baltsan (1998) signalent qu'il existe souvent une prévalence des modèles intuitifs sur les concepts formels sur le long terme. Dans la même veine, Brissiaud et Sanders (2010) soulignent que la représentation initiale d'un problème peut activer une stratégie intuitive, même après l'enseignement des concepts formels. L'utilisation des stratégies basées sur les opérations arithmétiques n'interviennent que lorsque ces stratégies intuitives ne sont plus efficaces pour fournir la solution numérique. Fischbein (1989) suggère ainsi que l'influence des modèles intuitifs des opérations dans le processus de conceptualisation ne se limiterait par aux étapes préformelles, contrairement à ce que les hypothèses piagetiennes pourraient faire supposer. Fischbein (1989) affirme :

> Our claim is that even after the individual becomes capable of formal reasoning, elementary intuitive models continue to influence his ways of reasoning. The relationships between the concrete and the formal in the reasoning process are much more complex than Piaget supposed [...] In fact, our information processing machine is not controlled only by logical structures but, at the same time, by a world of intuitive models acting tacitly and imposing their own constraints. (p. 10)

Fischbein explique ainsi l'influence des modèles intuitifs étendue au sein d'une opposition de *l'intuitif* et *le formel*. Cette opposition a été également envisagée à l'époque par Tall et Vinner (1981) avec les notions de *concept image* et de *concept définition*. Tall et Vinner mettent en évidence les contradictions impliquant des propriétés et des aspects formels des concepts mathématiques de limite de fonctions et de continuité qui peuvent être provoquées par certaines idées intuitives façonnant le raisonnement des élèves et des étudiant·e·s. Ces résultats sont cohérents avec ceux rapportés par Linchevski et Vinner (1988) et Fischbein et Baltsan (1998) à propos de la notion d'ensemble. Plus récemment, la notion de *changement conceptuel* proposée par Vamvakoussi et Vosniadou (2004) souligne également la contradiction intrinsèque entre l'intuitif et le formel qui habite l'apprentissage.

Un corollaire de l'hypothèse de la coexistence inévitable de l'intuitif et du formel s'applique aux modèles intuitifs des opérations de multiplication et de division, basés sur des actions incarnées. Dans ce cadre, le sens véhiculé par ces actions incarnées coexiste avec le statut formel des opérations arithmétiques de multiplication et de division. L'hypothèse permet de problématiser la place des modèles intuitifs dans l'enseignement des opérations arithmétiques. En effet, les tensions que cette coexistence entraîne s'expriment dans ce que Fischbein *et al.* (1985) appellent un « dilemme didactique fondamental » pour l'enseignement qui n'est pas résolu, comme le soulignent Fischbein *et al.* (1985), avec l'acquisition du concept formel. Le dilemme est le suivant :

> On the one hand, if one continues to introduce the operations of multiplication and division through the models described above, one will create –as our findings demonstrate– strong, resistant, and, at the same time, incomplete models that soon will come to conflict with the formal concepts of multiplication and division. On the other hand, if one tries to avoid building the ideas related to arithmetical operations on a foundation that is behaviorally and intuitively meaningful, one certainly will violate the most elementary principles of psychology and didactics. (p. 15)

1.3.3 Suspension de sens

Les contradictions qui peuvent se produire face aux concepts formels, comme celles liées aux « monstres mathématiques » [7] qui remettent en cause la fiabilité de l'intuition (voir par exemple Cooper, 1954 ; de Freitas, 2016 ; Feferman, 2000), pourraient conduire au *divorce malheureux* entre l'intuition et la rigueur, l'informel et le formel (pour reprendre le titre de l'article de Shoenfeld, 1991). Contrairement à l'idée du divorce, de nombreux.ses chercheur·e·s estiment qu'il existe une complémentarité de leurs rôles (Bass, 2005 ; Freudenthal, 2012 ; Klein, 2004 ; Wittmann, 1981). L'encouragement de l'utilisation d'une pensée critique, tout en sensibilisant les élèves au rôle de l'intuition dans leurs processus de réflexion est un objectif majeur de l'éducation mathématique (Tirosh et Tsamir, 2014). Pour reprendre les mots de Schoenfeld (1991), « To get to the heart of the matter, formal systems do not denote ; that is, formal systems in mathematics are not about *anything*. Formal systems consist of sets of symbols and rules for manipulating them. » (p. 311, italique dans l'original). En conséquence, Shoenfeld (*ibid.*) affirme que l'interprétation des phénomènes du monde réel, voir la résolution de problèmes verbaux, implique un raisonnement qui n'est pas entièrement compris dans ces systèmes formels. Dans le contexte de résolution de problèmes arithmétiques verbaux, qui ne repose donc pas entièrement sur des opérations arithmétiques, on dit que ce raisonnement est dit soutenu par le sens donné (« sense-making », en anglais) à la situation de la vie courante sous-jacente. L'utilisation récente du terme « sense making » en éducation mathématique est, comme Stillman, Kaiser, et Lampen (2020) le signalent, souvent liée aux déclarations du National Council of Teachers of

7. Par exemple, une fonction continue sur un intervalle et dérivable nulle part.

Mathematics (NCTM) aux États-Unis, qui définit le processus de « sense making » comme suit : « developing understanding of a situation, context, or concept by connecting it with existing knowledge" (NCTM 2009, p. 1). Dans cette perspective, diverses recherches sont focalisées sur la considération des conditions réalistes des situations (De Corte, Verschaffel, et Greer, 2000 ; Verschaffel et al., 2002), conformément à la notion de « realistic mathematics education » proposée par le Freudenthal Institute's.

La notion de *modélisation mathématique* est également utilisée pour rendre compte du processus de résolution de problèmes en appui sur des opérations mathématiques : « This complex process of applying the appropriate mathematical operations in order to make sense of everyday-life situations and to solve real-life problems, is called mathematical modelling » (Degrande et al., 2018, p. 99). Dans ce cadre, Blum et Leiss (2007) distinguent les phases du processus de modélisation, qui constituent un cycle de modalisation, qui coordonnent un plan correspondant aux situations de la vie réelle et un plan mathématique. Au sein du cycle de modélisation, la compréhension de la situation problématique (« sense-making ») conduit au développement d'un modèle de la situation, niveau auquel nous pensons que les modèles intuitifs peuvent intervenir, pour arriver à une solution à l'aide de concepts mathématiques. Nous considérons que cette perspective s'encadre dans l'opposition de l'intuitif, du côté des situations de la vie réelle, et le formel, du côté des mathématiques.

Or, la résolution de problèmes à l'école primaire est souvent décrite comme un processus superficiel qui manque de sens (Greer, 1997). Schoenfeld (1991) dénomme le phénomène « suspension of sense-making». Il est repris ultérieurement par d'autres recherches (Houdement;Verschaffel *et al.*, 2002 , 2014). Greer (1997) le décrit comme un processus qui consiste en général à choisir l'une des quatre opérations arithmétiques de base, ce choix peut reposer sur des traits superficiels comme des mots-clés du texte (Clement et Bernhard, 2005 ; Sowder, 1988), puis à exécuter l'opération à partir de deux nombres intégrés dans le texte du problème pour donner comme réponse le résultat du calcul. La nature stéréotypée des problèmes verbaux et la culture mathématique de la salle de classe peut permettre un succès illusoire quand il est obtenu par des méthodes superficielles (De Corte, Verschaffel, et De Win, 1985 ; Greer, 1993 ; Reusser 1988 ; Verschaffel, De Corte, et Lasure, 1994). Ce processus peut s'interpréter comme l'une des contreparties du dilemme fondamental signalé par Fischbein *et al.* (1985), quand l'enseignement ne travaille pas suffisamment l'élaboration du sens.

De nombreuses recherches montrent les difficultés des élèves pour donner du sens aux résultats obtenus dans la formulation de leur réponse. Elles/ils ont tendance à se transformer en *calculateurs aveugles* (Houdement, 2014 ; Sackur, Dorouhard, Maurel, et Pécal, 2007 ; Verschaffel et De Corte 2008), en particulier pour la division euclidienne (Cai et Silver, 1995; Silver, 1988; Silver et Burkett, 1994 ; Silver, Shapiro, et Deutsch, 1993). À la lumière du rapport de l'évaluation nationale des progrès éducatifs (NAEP, 1983) aux États-Unis, Silver *et al.* (1993) soulignent le bas pourcentage (24 %) de réponses correctes des élèves de 13 ans au problème verbal suivant : « An army bus holds 36 soldiers. If 1 128 soldiers are being bussed to their training site, how many buses are needed?» (le résultat de la division euclidienne de 1 128 par 36 est 31 et le reste est 12). Les difficultés des élèves pour interpréter le reste de la division euclidienne dans les termes de la situation décrite dans des problèmes verbaux sont également mises en évidence par des expérimentations rapportées par la recherche en éducation mathématique (Cai et Silver, 1995; Silver, 1988; Silver *et al.*, 1993).

1.4 Conclusions

Il nous semble que les modèles intuitifs de Fischbein sont intéressants pour expliquer certains phénomènes dans la résolution de problèmes. Nous pensons que l'accent mis sur la tension générée par l'inévitable coexistence de l'intuitif et du formel réussit à mettre en évidence un phénomène de grande importance dans l'apprentissage, qui consiste en l'étrangeté que peut engendrer la rencontre avec les concepts mathématiques. Cependant, elle s'inscrit dans une opposition qui nous semble limitée du point de vue de l'apprentissage et de la cognition incarnée.

En se concentrant sur l'impact des facteurs numériques sur le choix des opérations arithmétiques dans la résolution de problèmes arithmétiques verbaux, la recherche de Fischbein n'aborde pas l'acquisition des opérations arithmétiques. Les hypothèses sont formulées à partir des résultats de questionnaires. En conséquence, la recherche de Fischbein n'aborde pas l'impact des modèles intuitifs dans le cadre du processus d'enseignement et d'apprentissage, au sein duquel l'acquisition des opérations de multiplication et de division a lieu. L'approche des mathématiques du point de vue du formalisme axiomatique semble également limitée. Le statut formel des opérations nécessite de les considérer en tant que savoir historiquement et culturellement constitué. D'autant que l'apprentissage des mathématiques, tel que nous le concevons dans cette recherche, a lieu dans le cadre socioculturel de la classe et l'institution scolaire. Ainsi, un point de vue historico-culturel peut s'avérer pertinent pour aborder la question de l'implication du corps, et notamment des actions incarnées, relativement à l'acquisition des opérations arithmétiques de multiplication et de division. Dans cette perspective, le caractère ontologique des mathématiques peut également être discuté.

Du point de vue de la cognition incarnée, la perspective des modèles intuitifs nous semble également réductrice. Le cadre interprétatif de Fischbein dépasse la perspective piagetienne, dans la mesure où il étend l'implication du corps au-delà des stades pré-formels. Or, il oppose les actions incarnées, de la main à l'intuitif, aux concepts mathématiques formels. En conséquence, il ne s'écarte pas du problème essentiellement cartésien consistant à essayer de comprendre comment deux choses apparemment distinctes sont reliées. Bien que la perspective de Fischbein sur l'intuition suggère que la relation entre *le concret* et *le formel* est plus complexe que ne le supposait Piaget, elle ne fournit pas d'éléments pour spécifier, approfondir et théoriser cette relation, ou pour rendre compte de sa transformation. C'est le piège dans lequel tombent certaines perspectives lorsqu'elles prétendent donner au corps une place fondamentale dans l'apprentissage en l'assimilant à l'intuition ou des situations pratiques.

L'adoption d'une perspective socio-culturelle nous permet de repenser la place des actions incarnées dans l'apprentissage des opérations de multiplication et de division. Du point de vue de l'apprentissage, nous considérons que la question sur l'acquisition de ces opérations arithmétiques renvoie nécessairement à la pensée qui les mobilise, ce qui correspond dans ce cas au raisonnement multiplicatif. En nous concentrant sur les opérations en tant que savoir culturel, et non sur la résolution de problèmes verbaux comme un but en soi, nous posons la question suivante : comment caractériser le raisonnement multiplicatif du point de vue historico-culturel? Il nous semble que cette perspective peut enrichir la recherche au sein du MCF, encore dans une large mesure dans la lignée piagetienne. Ces questions demandent de nous placer dans une approche théorique qui nous fournisse des lignes claires sur la notion de l'apprentissage et la notion du savoir mathématique. Nous l'aborderons dans le chapitre 2. Du point de vue de l'implication du corps, nous nous intéressons à le traiter en nous focalisant sur la corporéité des actions incarnées. Dans ce cadre, nous nous intéressons à la relation complexe entre le corps et l'acquisition des concepts d'opérations de multiplication et de division. Nous nous interrogeons sur les transformations que cette relation peut subir : est-il possible que la manière dont les élèves perçoivent ces actions incarnées évolue au cours de l'apprentissage des opérations arithmétiques de multiplication et de division? Comment précisément les actions incarnées peuvent-elles participer à l'acquisition des opérations arithmétiques de multiplication et de division? Ces questions, il nous semble pertinent de les aborder du point de vue de leur réalisation concrète et matérielle par le corps à travers la manipulation. Ceci nous semble d'autant plus intéressant que la manipulation pourrait révéler des subtilités qui ne sont pas évidentes lorsque l'on considère uniquement le comportement pratique ce qui semble constituer la perspective des approches inscrites dans l'opposition de l'intuitif et du formel, tel que celle de Fishbein. Nous tentons de fournir de nouvelles perspectives sur la cognition incarnée et de contribuer à la réflexion au sein de la recherche en didactique des mathématiques.

Chapitre 2

L'apprentissage d'une pensée multiplicative

Le questionnement que nous avons évoqué dans le chapitre précédent nous amène à théoriser sur ce que signifie apprendre les opérations arithmétiques de multiplication et de division (ou divisions). Il s'agit donc de prendre une position épistémologique et ontologique par rapport à la connaissance et au savoir : comment l'apprentissage peut-il avoir lieu ? Quelle relation entre savoir et connaissance ? Quelle est la nature des concepts mathématiques ? Et plus précisément, comment caractériser l'acquisition des opérations de multiplication et de division et le raisonnement multiplicatif ? Dans ce chapitre, nous abordons donc la question de l'apprentissage et de l'enseignement des opérations de multiplication et de division, du point de vue théorique.

La section 2.1 est consacrée à la description des notions fondamentales de la théorie de l'objectivation (TO) qui nous permettent de rendre compte de la théorisation du processus d'enseignement et d'apprentissage dans ce cadre. Adopter une perspective historico-culturelle du savoir nous impose de situer dans les pratiques humaines l'objet-savoir que, dans notre cas, les élèves pourraient rencontrer à l'école primaire. Nous consacrons la section 2.2 à la description de ce que nous appelons une pensée multiplicative, comme alternative au terme du raisonnement multiplicatif. Nous terminons dans la section 2.3 par une conclusion du chapitre qui résume notre cheminement.

2.1 La théorie de l'objectivation : une théorie socioculturelle éducative

La théorie de l'objectivation (TO) est une théorie de l'enseignement-apprentissage, largement développée par Radford (Radford, 2011a; L. Radford, 2018a; L. Radford, 2018c; L. Radford 2020a; L. Radford 2020b ;L. Radford, 2020c), dont les premières formulations remontent à une quinzaine d'années (L. Radford, 2006a). La TO prend appui sur les travaux de psychologie historico-culturelle de Vygotsky et de la théorie de l'activité de Léontiev, et les reformule au sein du matérialisme de la praxis (Hegel, 1991; Marx, 1982; Ilyenkov, 1977). La TO s'oppose à une conception de « l'individu comme un être isolé de son contexte historique-culturel » (Radford, 2020a, p. 20). En particulier, la TO a une approche critique des perspectives à vocation didactique centrées sur l'individu, dont le constructivisme et la théorie de situations didactique (Radford, 2020b; Radford, 2018a). Dans une perspective socioculturelle, la TO fournit un cadre conceptuel pour interpréter théoriquement les mathématiques, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Dans l'objectif de présenter une esquisse des notions fondamentales de la TO sur l'apprentissage des opérations arithmétiques concernées, nous organisons notre présentation en deux axes : l'axe du savoir et de l'apprentissage (paragraphe 2.1.1), et l'axe de l'activité (paragraphe 2.1.2). Pour une présentation plus exhaustive et approfondie, consulter les articles cités.

2.1.1 Savoir et apprentissage dans la TO

Dans ce paragraphe, nous faisons référence au positionnement ontologique et épistémologique de la TO par rapport au savoir et à l'apprentissage. Ce niveau fait intervenir les notions d'*objectivation* et de *subjectivation*, introduites par la théorie, en référence aux processus qui soutiennent l'apprentissage. Dans cette section, nous faisons également allusion à la notion de zone de développement proximale (ZDP), empruntée à la psychologie vygotskienne. Nous allons développer ces notions dans les paragraphes suivants.

Savoir du point de vue de la TO

La TO conceptualise le savoir comme une entité culturelle et historique. Plus précisément, le savoir est interprété comme « un système de systèmes [*sic*] de pensée et d'action constitués culturellement et historiquement » (Radford, 2020a, p. 25). Radford reprend le concept de *potentialité* d'Aristote pour caractériser le savoir comme « possibilité pure », c'est-à-dire comme « une capacité à faire des choses et à penser de certaines manières » (*ibid.*, p.25), que nous pouvons rencontrer ou non au cours de notre vie. Radford (2017a) souligne également que le savoir est quelque chose de général : une forme idéale de pensée et d'actions qui ne peut pas être réduite à des instances ou des réalisations concrètes. Il donne l'exemple du savoir algébrique, qui consiste, du point de vue de la TO, en une potentialité qui est ancrée dans la culture, offrant des possibilités « de penser, de réfléchir, de poser et de résoudre des problèmes *d'une certaine manière* » (Radford, 2018a, *ibid.*, p. 14). Radford souligne que « To assert that knowledge is possibility does not amount to saying that knowledge is something eternal, static, or independent of all human experience (as in Kant's concept of things-in-themselves or as in Plato's forms) » (L. Radford, 2015b, p. 550). En fait, il caractérise également le savoir de la façon suivante : « El saber es un sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente » (L. Radford et al., 2017a, p. 101). La caractérisation du savoir en termes de processus incarnés, sensibles et matériels d'action et de réflexion a pour but de souligner que le savoir ne réfère pas à des « cogitaciones mentales ocurriendo dentro de la cabeza, sino acciones de individuos concretos que actúan y viven en el mundo social y cultural. » (*ibid.*, p. 101-102). La rencontre avec le savoir a lieu à l'intérieur d'un processus dénommé *objectivation*.

Objectivation

L'*objectivation* consiste en une rencontre locale, contextuelle et concrète avec le savoir. La théorie tire son nom du terme latin *objectare*, qui signifie, étymologiquement, « placer devant » (*ibid*). Le mot objectivation renvoie donc à l'idée que le savoir, plutôt que d'être construit, se présente ou se révèle à nous. Reprenant le sens moins usité du verbe objecter, qui est de s'opposer ou de faire obstacle, Radford caractérise encore le savoir, dans le cadre de cette rencontre, comme « quelque chose qui, dans son *altérité*, nous oppose à sa propre présence. C'est-à-dire que de par sa présence, le savoir nous résiste ou nous objecte. » (p. 320, italique dans l'original). Autrement dit, « Avant notre rencontre avec le savoir, le savoir est le signe d'une différence. » (Radford, 2018a, *ibid*, p. 320), de quelque chose qui nous est étranger. L'objectivation est donc un processus de *prise de conscience* [1] ou de reconnaissance d'un savoir.

L'objectivation peut également être interprétée comme la tentative d'effacer la différence ou de transformer l'*altérité* dans laquelle le savoir nous est présenté. Puisque le savoir est une forme générale en constante évolution, « la différence que notre rencontre avec le savoir tente d'effacer n'est pas quelque chose qui peut disparaître totalement » (Radford, 2020a, p. 26). L'objectivation n'attrape pas la forme idéale du savoir, il y a toujours un excédent qui subsiste au-delà de la rencontre locale, contextuelle et concrète avec le savoir. Ce qui apparaît néanmoins dans la rencontre porte « une spécificité que la forme idéale, comme telle, ne peut pas avoir » (*ibid*, p. 26). En conclusion : « Il en résulte que ce qui apparaît est toujours *déficit* et *surplus* par rapport à son idéalité et que l'idéalité est toujours plus et moins que ce qui la matérialise ou l'incarne. » (*ibid.*, p. 26, italique dans l'original). En conséquence, « l'objectivation est toujours partielle, une tentative interminable de saisir le savoir – de devenir conscient de celui-ci. Dès qu'on essaie de le rencontrer, le savoir bouge, se déplace; il n'est plus là, mais ailleurs. » (Radford, 2018a, p. 320). C'est la raison pour laquelle cette théorie affirme que les sujets s'engagent dans des *processus d'objectivation* et non qu'un savoir a été objectivé (*ibid.*). Nous utiliserons ainsi indistinctement les termes d'objectivation ou de processus d'objectivation (en singulier ou en pluriel) pour désigner le même processus.

Radford met l'accent sur le fait que le processus d'objectivation n'est pas purement intellectuel, mais « soutenu par le corps, l'affect, les émotions et le monde matériel » (Radford, 2020a, p. 26), ce qui fait de l'objectivation « un processus social, corporel, matériel et symbolique de prise de conscience du savoir, c'est-à-dire, des formes historiquement et culturellement constituées d'action, d'expression et de pensée. » (Radford, 2018a, p. 320). Cette perspective est sous-tendue par l'idée que le corps et la pensée constituent une seule et la même chose (Radford, 2020b), ce qui renvoie au cadre de la cognition sensuelle, que nous décrivons dans la section 3.1. Les ressources sémiotiques et matérielles façonnent, comme le dit Radford (2011a), le processus :

> L'objectivation, c'est ce perçu qui se dévoile dans le geste qui compte ou qui désigne, perçu qui se découvre dans l'intention qui s'exprime dans le signe ou dans le mouvement kinesthésique que médiatise l'artefact au cours de l'activité pratique sensorielle, quelque chose susceptible de se convertir en une action reproductible, dont le sens vise à ce schème eidétique culturel qui est l'objet conceptuel lui-même (p. 68)

1. La conscience est considérée comme la relation entre l'individu et le monde culturel (L. Radford, 2015a). Cette notion est explorée plus en détail à partir de celle d'activité, qui est traitée dans la section 2.1.1.

Apprentissage du point de vue de la TO

Dans la perspective de la TO, l'apprentissage est défini comme un événement culturel axé à la fois sur le savoir et l'être, ou l'élève en l'occurrence (Radford, 2018a). L'apprentissage est le produit des processus d'objectivation, autrement dit l'acquisition [2] par l'élève de formes culturelles de réflexion. L'élève parvient, au cours du processus, à « donner du sens aux objets matériels et conceptuels qu'il rencontre dans sa culture » (Radford, 2018a, p. 64). Dans la terminologie de Hegel (Hegel et Wallace, 1975), Radford signale que la forme idéale, le savoir *en soi*, devient quelque chose de significatif du point de vue subjectif : c'est le savoir *pour soi* (Radford, 2017a). Il affirme (Radford, 2011a ; L. Radford, Bardini, Sabena, et al., 2006c) également que l'apprentissage implique une progressivité par rapport à la révélation des couches de *généralisation*, liées aux *déterminations* que le savoir acquiert au cours de l'histoire. Ces déterminations véhiculent sous une forme plus condensée les significations des formations théoriques préalables (Radford, 2017a). Pour reprendre l'exemple de Radford (2011a), la formule symbolique du cercle qui le décrit comme ensemble de points à égale distance de son centre comporte une couche de généralité plus élevée comparée à celle du mouvement kinesthésique qui permet de le tracer.

Nous tenons à souligner que le rôle de la dimension sociale dans la TO ne se réduit pas à son interprétation instrumentaliste, c'est-à-dire qu'elle n'est pas comprise en termes d'interactions qui facilitent ou catalysent un apprentissage individuel, à la manière de conditions « externes ». Pour reprendre les mots de Radford : « l'interaction est consubstantielle de l'apprentissage » (Radford, 2011a, p. 10). L'apprentissage n'est ainsi pas propre à un individu, mais collectif, culturellement et historiquement situé. Il requiert la volonté de se mettre à l'écoute des autres, s'engager pour une cause commune et de s'engager d'une manière orientée vers les autres (Roth, 2010). L'interaction des élèves est ainsi vue dans une optique de coopération, soutenue par une dimension éthique : l'*éthique communautaire*. L'éthique communautaire, à laquelle la TO s'intéresse, favorise « modes of collaboration of a non-utilitarian and non self-centred nature—modes of human collaboration and interaction that promote critical stance, solidarity, responsibility, and the care of the other. » (L. Radford, 2014d, p. 556).

2. Le mot acquisition est ici compris, dans son sens étymologique, comme un mouvement d'ouverture sur le monde et les autres (Radford, 2011a).

Subjectivation

La subjectivation est le processus historique de la création sans fin de soi (Radford, 2015a). Le processus de subjectivation permet de problématiser le sujet au sein de l'apprentissage, qui figure comme acquis dans les épistémologies classiques (Radford, 2018a). L'enseignant·e et les élèves sont conceptualisés dans la TO comme des subjectivités en devenir, des projets inachevés en évolution constante. Radford affirme : « Effectivement, tout processus d'objectivation entraîne, au sens dialectique du terme, un processus de subjectivation, c'est-à-dire un processus de formation du soi, car apprendre, nous l'avons dit, est aussi devenir. » (Radford, 2011a, p. 82-83). Focalisé sur l'être, le processus de subjectivation comprend les transformations que le sujet, l'enseignant·e et les élèves en l'occurrence, subit comme résultat de sa rencontre avec le savoir (Radford, 2018a). La rencontre avec le savoir ouvre « des espaces pour que les élèves puissent s'y [dans la salle de classe] positionner socialement et culturellement. Ce positionnement est ce qui permet à l'élève de se montrer et de s'affirmer en tant que subjectivité. » (Radford, 2020a, p. 32). Du point de vue social, Radford souligne également que « par son agir, l'élève s'y [dans la salle de classe] positionne en même temps qu'il y est positionné par l'agir des autres. » (Radford, 2018a, p. 321). À travers ce positionnement, l'élève *parvient à la présence*, comme le fait l'enseignant·e en jouant son rôle (*ibid.*). L'éthique communautaire est destinée à conduire à des formes critiques de subjectivité culturellement évoluées, lors du processus de subjectivation. Enfin, cette perspective est soutenue par une conception dialectique entre la culture et l'individu, « Ce qui signifie que de la même manière que les individus produisent la culture, la culture, à travers ses réseaux sociaux de distribution du savoir et du pouvoir, produise [*sic*] ses individus. » (*ibid.*, p. 321).

La zone de développement proximal

La zone de développement proximal (ZDP) est une notion empruntée à la psychologie vygotskienne, adapté par la TO. L'adaptation de cette notion dans la TO permet de souligner le rôle du social dans le processus d'objectivation, par le fait que celui-ci est possible non seulement par le contact de l'élève avec la situation mais aussi par l'interaction avec les autres élèves et l'enseignant·e (L. Radford, 2020d; Radford 2011a). La TO prend comme point de départ la définition de ZDP de Vygotski, qui consiste en « la distance entre le niveau de développement réel, déterminé par la résolution indépendante de problèmes, et le niveau de développement potentiel, déterminé par la résolution de problèmes sous la direction d'un adulte ou en collaboration avec des pairs plus compétents » (L. S. Vygotsky, 1978, p. 86). Roth et Radford (2010) proposent une perspective symétrique pour recadrer la notion de ZDP, en vertu de la nature co-constitutive de la conscience subjective et de la conscience collective que les chercheurs soutiennent. Ainsi, Radford et Sabena (2015) visent à dépasser des conceptions individualistes et asymétriques qui sous-tendent de nombreuses interprétations du terme, comme l'idée d'un individu plus ou moins capable et la nature fondamentale des asymétries des positions institutionnelles des élèves et l'enseignant·e dans la ZDP.

Dans la TO l'adoption d'une perspective symétrique de l'interaction revient à considérer toute production lors des interactions en classe comme appartenant à la fois à la locutrice [3] et à l'auditrice. En effet, les productions lors des interactions sont, selon Roth et Radford (2010), déterminées aussi bien par le fait qu'elles proviennent d'une locutrice que par le fait qu'elles sont adressées à une auditrice. En d'autres termes, elles reflètent une intercompréhension plutôt qu'une compréhension séparée de la locutrice et de l'auditrice. Les chercheurs soulignent que cette fonction s'exprime particulièrement dans les conversations : « Une conversation n'est une *con*versation que lorsque le mot est une réalité à deux. » (*ibid.*, p. 300, italique dans l'original). La ZDP est considérée comme une réalisation interactionnelle au sein de laquelle les participantes sont engagées dans une co-formation d'une harmonisation intersubjective émergente. L'harmonisation intersubjective fait allusion à l'orientation des participantes l'une vers l'autre, dans un processus au sein duquel leur conscience respective cherche l'autre à travers des mots, des actions, des gestes et des réactions corporelles. Plus précisément, ils signalent : « The reconceptualization of the zone of proximal development that we are suggesting rests hence in a form of intersubjectivity that is grounded in a common world of historical significations and ways of life that we come to share since our birth. » (*ibid.*, p. 304).

Bien qu'une asymétrie des rôles de l'enseignant·e et des élèves par rapport au savoir soit établie, elle se noie dans un espace symétrique où les consciences des participantes se connectent (Roth et Sabena, 2010). Roth et Radford soulignent que « Such a connection requires the appearance of a form of intersubjectivity where the participants decenter themselves. » (*ibid.*, p. 305). À l'instar de Vygotski, Roth et Radford considèrent que l'émergence d'une telle forme d'intersubjectivité est une condition nécessaire à l'apprentissage. En particulier, l'enseignant·e ne

3. Pour simplifier l'écriture, dans certains cas, nous mettrons les formes impersonnelles au féminin au lieu d'utiliser l'inclusif.

peut pas simplement faire apparaître l'objet de la connaissance dans la conscience des élèves. Ce n'est que lorsque l'objet de savoir apparaît simultanément dans la conscience des partici-pant·e·s soulignent les chercheurs, que l'apprentissage a lieu. Ainsi, la ZDP n'est pas seulement une opportunité pour l'élève d'apprendre, mais aussi une opportunité pour l'enseignant·e d'apprendre sur son métier, notamment par l'évaluation continue de ses tentatives de changer les actions et dires des élèves pour obtenir la réponse attendue (*ibid.*).

2.1.2 Activité dans la TO

Dans ce paragraphe, nous discutons de la notion d'activité, qui est au cœur de la TO. Tout d'abord, nous faisons référence à la place que l'activité a dans la TO par rapport à l'apprentissage. Nous présentons ensuite la dialectique savoir-connaissance dans laquelle s'inscrit l'activité. Nous évoquons le cadre générique dans lequel se situe le concept d'activité en TO : l'activité humaine. Nous décrivons la notion de travail conjoint, proposée par la TO, qui conceptualise l'activité en classe comme une seule activité d'enseignement et d'apprentissage, qui implique la participation de l'enseignant·e et des élèves. Enfin, nous abordons la structure objet-but-tâche, qui fournit des lignes directrices pour la planification de l'activité en classe.

L'activité et l'apprentissage

La TO emprunte et raffine le concept d'activité de la théorie de l'activité de Leontiev (1984), à partir de l'idée de *praxis* introduite par Marx (Radford, 2018a). Il utilise également les autres notions de la TO. L'activité est un concept central dans la TO, elle est le point d'ancrage entre l'individu et la culture. En effet, les processus d'objectivation et de subjectivation sont issus de l'activité d'enseignement et d'apprentissage, dans laquelle l'enseignant·e et les élèves sont impliqué·e·s. L'apprentissage a lieu à l'intérieur d'une activité. En particulier, l'activité d'enseignement et d'apprentissage laisse son empreinte dans les processus d'objectivation et de subjectivation, sa nature rend la rencontre avec le savoir quelque chose d'excitant ou quelque chose d'ennuyeux ou de frustrant (Radford, 2018a). Radford donne l'exemple de l'enseignement magistral, qui implique des processus d'objectivation, car les élèves rencontrent un savoir culturel. Néanmoins, les processus d'objectivation dans ce paradigme sont très pauvres par la réduction du rôle de l'élève qui « se limite à copier ce que dicte le maître » (*ibid.*, p. 320). La TO cherche à caractériser l'activité de la salle de classe comme une activité collective, critique, conduisant à des apprentissages mathématiques profonds (Radford, 2020a). Plus précisément, Raford signale :

> Dans les activités que nous visons à promouvoir en salle de classe, nous visons à ce que l'objectivation apparaisse comme un processus critique, poétique, sensible et sensuel de rencontre avec les mathématiques. Il s'agit pour nous de promouvoir les conditions pour qu'il y ait une rencontre progressive, incarnée, discursive, subversive, affective, symbolique et matérielle avec le savoir culturel. (Radford, 2018a, p. 321)

Dialectique savoir-connaissance

Du point de vue de la TO, l'objet-savoir se dévoile à la conscience des élèves par l'effet de la médiation exercée par une activité qui le sollicite (Radford, 2020a). Au sein de l'activité, le savoir devient objet de conscience [4] ou de pensée sous la forme de *connaissance*. Radford (Radford 2017a, Radford 2020a) utilise la terminologie d'Aristote : si le savoir est *potentialité*, la connaissance est l'*actualité* de ce savoir. En d'autres termes, l'activité met en *mouvement* le savoir et, « comme résultat de ce mouvement, le savoir apparaît, phénoménologiquement parlant : il apparaît dans une forme développée : une forme concrète *qu'on voit, qu'on entend et qu'on sent* » (Radford 2020a, p. 32). La connaissance est donc le contenu conceptuel et concret dans lequel se manifeste ou se matérialise le savoir, sa version tangible. En conséquence, « ni le savoir ni la connaissance ne sont des entités subjectives » (Radford, 2018a, p. 319). Radford utilise souvent la métaphore d'une symphonie pour caractériser les mathématiques et de l'activité en classe de mathématiques (développée plus en détail dans L. Radford, 2016). Le savoir, vu comme une potentialité, acquiert tout comme la partition de la 7e symphonie de Beethoven, un contenu sonore concret et sensuel grâce à l'activité d'un orchestre.

Nous présentons dans la figure 2.1 un schéma illustratif de la relation dialectique entre le savoir et la connaissance, désignés par les lettres S et C, et l'activité humaine (Radford, 2017a; Radford, 2015a).

La figure à gauche correspond à la mise en mouvement du savoir S par l'activité humaine (symbolisée par les flèches), à un certain moment du développement d'une culture. Le savoir S se révèle ainsi, par son actualisation, à la conscience des sujets concrets sous la forme de connaissance C. La figure à droite représente le fait que les sujets concrets peuvent, à l'intérieur de l'activité, étendre, raffiner, ou transformer le savoir S, donnant comme résultat un nouveau savoir S'. Le nouveau savoir S' peut, par la médiation d'autres activités, se révéler ou s'actualiser dans

4. La TO « ne considère pas la conscience comme une construction métaphysique cachée quelque part dans une intériorité présumée avec laquelle nous sommes tous nés » (Radford, 2017a, p. 122). En revanche, la conscience est considérée « une réflexion subjective et un positionnement propre sur le monde extérieur. » (*ibid.*, p. 122).

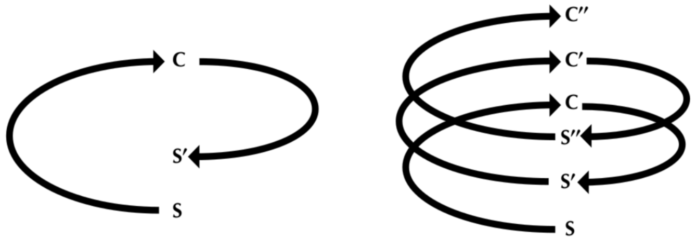


Figure 2.1 – Représentation schématique de la dialectique savoir et connaissance, Radford (2017a).

une autre connaissance C'.

La relation dialectique entre savoir et connaissance, par le biais de l'activité, est en lien étroit avec les fondements ontologiques et épistémologiques de la théorie par rapport aux mathématiques, comme Radford (2018a) signale :

> Dans ce même ordre d'idées, les mathématiques dans la théorie de l'objectivation apparaissent comme une entité historico-culturelle en mouvement, à la fois possibilité et réalisation et, donc, une entité à la fois idéale et concrète, réalisée ou matérialisée dans l'activité humaine : c'est à ce titre que les mathématiques sont à la fois idéelles et visuelles, tactiles, matérielles, symboliques, gestuelles et kinesthésiques. (p. 318-319)

L'activité objective

Dans la TO, l'activité est caractérisée par son objet, conformément aux travaux de Leontiev (2009). L'activité est considérée comme un système en mouvement qui se *déplace* vers son objet (Radford, 2015b). Il s'agit d'un objet historico-culturel, d'un savoir, d'où le terme d'*activité orientée objectuellement* ou d'*activité objective* (Radford, 2020a). Par exemple, l'activité développée en classe peut chercher que les élèves acquièrent une forme de pensée géométrique. Radford souligne à cet égard que l'object correspond au projet didactique, de sorte qu'il n'est pas nécessairement évident pour les élèves. L'objet de l'activité sera révélé aux élèves au fur et à mesure qu'elles et ils s'engagent dans l'activité en classe (Radford, 2015b ; Radford, 2017a). Radford insiste sur la nature de l'activité en tant que phénomène individuel-social, même si l'objet de l'activité n'apparaît pas à chaque élève avec la même clarté et même compréhension. Il affirme : « The object of the activity is multifariously refracted and always changing in each one of the students' consciousness. » (*ibid.*, p. 564).

L'activité objective comme une activité humaine

L'activité objective dans la salle de classe s'insère dans une interprétation plus large du concept d'activité. Radford conçoit l'activité comme « un système dynamique axé sur la satisfaction des besoins collectifs » (Radford, 2020a, p.31). L'activité apparaît dans ce sens comme « the minimal unit that reproduces society as a whole. » (Radford, 2015b, p. 554). Radford prend appui sur l'existence de deux mots dans les langues allemande et russe pour distinguer deux sens du mot activité (Radford, 2020a ; Radford, 2018a). Les mots *Tätigkeit*, en allemand, et *deyatel'nost*, en russe, correspondent au sens évoqué au-dessus, par opposition à l'activité dans le sens d'être simplement occupé à quelque chose (dénoté avec d'autres mots dans ces langues). Radford souligne également que l'activité ne se réduit pas, du point de vue de la TO, à l'activité du sujet, à ce que le sujet fait ou dit ; c'est-à-dire à sa dimension *fonctionnelle* et *technique* (Radford, 2020a). En d'autres termes, conceptualiser l'activité dans la salle de classe seulement en termes de l'objet de l'activité signifierait adopter une perspective rationaliste et réductionniste (*ibid.*). Selon lui : « L'activité est un système à la fois sensible, matériel, idéel, affectif et émotionnel que forment les individus et qui, en même temps les enveloppe et les dépasse » (Radford, 2018a, p. 323). Autrement dit, l'activité sensible ou *praxis* est « un processus sans fin d'inscription continuelle dans le monde social » au moyen duquel « nous nous produisons quotidiennement en tant qu'humains. » (*ibid*, p. 321). L'activité est donc la base de la vie des êtres humains, une manière à travers laquelle ils manifestent leur vie (Radford, 2020a). Ainsi, l'activité sensible « constitue la catégorie centrale de la TO et affirme le rôle ontologique et épistémologique fondamental de la matière, du corps, du mouvement, de l'action, du rythme, de la passion et de la sensation dans ce que c'est d'être humain » (*ibid*, p. 33). En effet, Radford conçoit, ontologiquement parlant, l'individu comme un « être de besoin », « un sujet concret, réel, qui souffre, jouit, sent, rêve » (Radford, 2015a, p. 335).

Le travail conjoint

Compris comme entité fondamentalement éthique, l'activité est conceptualisée dans la TO à travers le concept de *travail conjoint* ou *labeur conjoint* (Radford 2018a ; Radford, 2020a, Radford 2020b). Le travail conjoint désigne un processus social « d'inscription des individus dans le monde social et la production de leur propre existence » (Radford, 2020b, p.23). Le terme « travail », qui est censé évoquer l'idée d'un effort ardu, permet d'« affirmer le rôle ontologique et épistémologique fondamental de la matière, du corps, du mouvement, de l'action, du rythme, de la passion et de la sensation dans ce que c'est d'être humain » (Radford, 2020a, p. 33). Le travail conjoint est considéré par la TO « comme le champ ultime de l'expérience esthétique, de la subjectivité et de la cognition » (Radford 2018a, p. 323), ce qui se répercute sur la façon dont la richesse de l'apprentissage est appréciée par la théorie. Pris ensemble, le terme conceptualise un travail non aliénant dans lequel « les uns et les autres s'affirment dans leur production et se réalisent comme humains dans ce qu'ils font » (Radford, 2020a, p. 36), ce qui souligne la nature relationnelle de l'individu – historique-culturel – tel que compris dans la TO.

Par conséquent, l'enseignement et l'apprentissage sont compris comme constituant une seule et même activité, également appelée *activité d'enseignement-apprentissage*, sans négliger asymétrie du rapport au savoir (Radford, 2020a). En revenant à la métaphore de la 7e symphonie, l'enseignant·e et les élèves produisent les mathématiques ensemble, une *œuvre commune*, comme les musiciens jouent et font apparaître ensemble la symphonie dans une salle de classe (Radford, 2018a). En particulier, le rôle de l'enseignant·e ne se réduit pas à guider l'activité, « She is part of the whole ensemble of classroom consciousness trying to get attuned with each other » (L. Radford et Sabena, 2015, p. 166). Son rôle principal est éthique (Radford et Roth 2011).

La structure objet-but-tâche de l'activité

En vue de l'objectif, l'enseignant·e peut proposer aux élèves de résoudre des problèmes mathématiques, comme un moyen pour occasionner la rencontre avec le savoir. Plus précisément, Radford signale : « Résoudre ces problèmes se convertit en *buts* qui guident les actions des élèves. Ces problèmes – chargés dès le début d'un contenu culturel et conceptuel – forment des trajectoires potentielles pour atteindre l'objectif général. » (L. Radford, 2011b, p. 10). Ces trois niveaux, à savoir l'objet de l'activité, les buts qui permettent de construire les séquences d'enseignement et les tâches prescrites pour atteindre ces buts, déterminent la structure « objet-but-tâche » de l'activité (Radford, 2015), qui prend une place fondamentale dans la planification de l'activité, que nous abordons dans la partie consacrée à la méthodologie (voir chapitres 5 et 6).

2.2 Une pensée multiplicative

Dans la perspective de la TO, nous considérons les opérations de multiplication et de divisions comme étant enracinées dans des processus de réflexion, d'expression et d'action sur les grandeurs qui ont émergé au sein des pratiques humaines des civilisations anciennes, telles que la babylonienne, l'égyptienne et la grecque. Sans entrer dans les détails, nous concevons ces pratiques humaines comme profondément ancrées dans l'organisation sociale, économique et symbolique des civilisations (L. Radford, 2020d; L. Radford, 2003; L. Radford, 1998), comme en témoignent la prédominance de « la vie du peuple » dans l'arithmétique développée dans l'ancienne Égypte (Karpinski, 1925) et le mysticisme avec lequel les pythagoriciens abordaient l'arithmétique. Nous considérons les opérations de multiplication et de division par rapport aux possibilités qu'elles offrent de penser, de réfléchir, d'argumenter et d'agir. En partant de certains antécédents historiques et épistémologiques, nous caractérisons diverses dimensions interreliées qui constituent la pensée multiplicative que nous voudrions que les élèves de l'école primaire rencontrent, concernant : la médiatisation par l'utilisation d'artefacts de manipulation et symboliques, le lien avec des situations pratiques et l'étude du rapport entre grandeurs. Il s'agit également d'une reformulation socialement et culturellement située de la notion de *raisonnement multiplicatif* (voir le paragraphe 1.1.3).

Dans le paragraphe 2.2.1, nous caractérisons cette pensée multiplicative qui nous intéresse comme étant médiatisée par des artefacts, dont nous rendons compte en référence à quelques artefacts significatifs dans l'histoire. Dans le paragraphe 2.2.2 nous interprétons les opérations arithmétiques comme concepts mathématiques qui permettent de généraliser des phénomènes qui impliquent des grandeurs. Dans le paragraphe 2.2.3, nous nous referons aux opérations de multiplication et de division en tant qu'objets-savoir dans la pratique de la Grèce antique, plus spécifiquement dans le Livre V d'Euclide. Enfin, dans le paragraphe 2.2.4 nous réinterprétons les notions des opérations en termes plus adaptés à notre recherche et plus contemporaines.

2.2.1 La médiation par des artefacts

Le corps et quelques artefacts matériels de représentation

Depuis l'Antiquité, le corps et les artefacts ont permis de penser, d'exprimer et d'agir sur les grandeurs. L'utilisation des doigts de la main a été importante pour soutenir des expériences de dénombrement. Comme Aristote l'a fait remarquer, l'utilisation répandue du système décimal n'est que le résultat de l'accident anatomique : la plupart d'entre nous sont nés avec dix doigts et dix orteils (C. B. Boyer et Merzbach, 2011). Ce n'est pas non plus un hasard si le mot « calcul » vient du latin *calculus* qui signifie caillou. L'anglicisme « digit », qui évoque un chiffre, vient du latin *digitus* qui signifie doigt. Les communautés d'Oksapmin utilisent 27 parties du corps pour le comptage (Saxe et Esmonde, 2004). Un schéma du système de comptage dans les communautés Oksapmin est présenté dans la figuree 2.2.

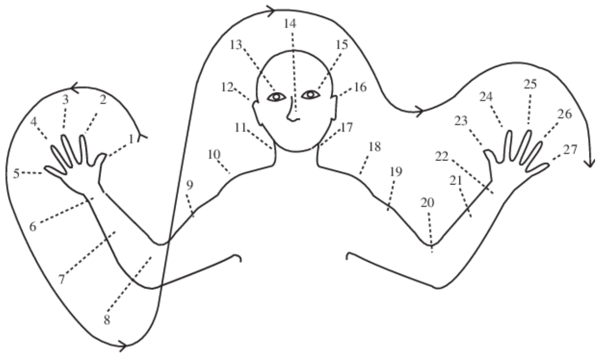


Figure 2.2 – Le système de comptage de pièces Oksapmin à 27 parties du corps (Saxe et Esmonde, 2004).

Dans l'histoire de l'humanité, il existe également d'autres moyens matériels de médiation de la pensée sur les grandeurs discrètes. L'un des premiers artefacts était constitué de bâtons ou de morceaux d'os et servait à des quantités des nombres en faisant des encoches, tels que les os d'Ishango découverts au Congo et datés entre 20 000 et 30 000 ans (voir figure 2.3).

Figure 2.3 – L'os d'Ishango.

Dans l'ancien Moyen-Orient, de petits jetons modelés en argile de différents types permettaient aux agriculteurs de garder une trace des animaux et des aliments qu'ils échangeaient, le but étant toujours d'avoir autant d'objets jetons que la grandeur discrète impliquée. Ils ont été inventés à la fin du quatrième millénaire avant J. C. (Schmandt-Besserat, 1986). Une « bulle-enveloppe », une sphère d'argile, servait à les garder.

L'abaque [5] et le boulier ont marqué la pensée arithmétique en Europe et dans le monde entier. Cet artefact était en usage chez les Étrusques, les Grecs, les Égyptiens, les Babyloniens, les Hindous, les Chinois et les Mexicains (Ball, 1960; Høyrup, 2002). Il est muni de plusieurs rangs de pièces pour donner aux objets représentant des unités, des jetons ou des cailloux, différentes valeurs selon leur position. Nous présentons dans la figure 2.4 une représentation de tels artefacts.

5. Bartolini Bussi et Mariotti analysent le *potentiel sémiotique* de l'abaque (Bartolini Bussi et Marioti, 2008).

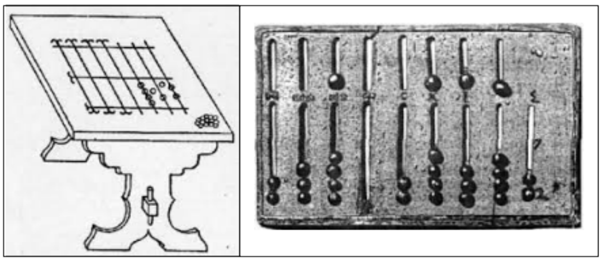


Figure 2.4 – Nous présentons à gauche une représentation d'une table au calcul grecque et à droite une image d'un boulier romain.

L'abaque positionnel semble être un précurseur de l'écriture positionnelle (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008). Dans le Moyen Âge, son usage était si répandu en Europe qu'il est devenu synonyme de l'arithmétique, comme témoigne le titre «Liber abaci » (livre de l'abaque) que Léonard de Pise a donné à son traité d'arithmétique écrit en 1202 (Boyer, 2011). Le livre introduit notamment une écriture positionnelle chiffrée des nombres naturels, au moyen d'un système de notation positionnelle hérité de la culture indo-arabe (Horadam, 2004).

Le corps a également soutenu l'élaboration des premières unités de mesure, qui étaient fondamentales pour tenter de rendre reproductibles les expériences avec les grandeurs continues. Dans son universalité, la figure humaine se trouve avoir été spécialement effective pour produire une norme brute immédiatement accessible par la référence corporelle. Les pieds, les bras, les mains et même les pouces ont servi d'étalon pour mesurer (Boyer, 2011), d'où la phrase "man is the measure of all things", attribué à Protagoras dans le *Théétète* de Platon. L'un des plus anciens étalons de longueur connu est la coudée, qui correspond à la fois à une longueur (une taille) et à l'instrument qui sert à mesurer la longueur. La plus ancienne qui nous est parvenue est la coudée de Nippour, une barre de cuivre de 51,85 cm. Elle date de 2 650 ans avant notre ère (Stone, 2014). La coudée était une unité courante dans le Proche-Orient ancien. De base anthropomorphique, la coudée correspond à la longueur de l'avant-bras, du bout du majeur à l'extrémité du coude. Les dimensions de la coudée ont varié au cours de la vaste zone géographique et de la longue période chronologique depuis sa première utilisation, comme l'attestent les découvertes archéologiques et la documentation ancienne comme les écritures hébraïques, dont la Bible, et la documentation pyramidale (*ibid.*). Les égyptiens possédaient deux systèmes de mesure basés sur deux types de coudée : le système traditionnel, issu de la coudée royale et à vocation architectonique, et le système artisanal, issu de la coudée sacrée et utilisé pour l'iconographie des tombes et des temples (Carlotti, 1995; Iversen, 1968). Le système de mesure traditionnel comprenait également d'autres unités courantes d'étalon, comme le doigt, la palme et la main ; la coudée s'y déclinait (Hirsch, 2013).

La standardisation des étalons de mesure basés sur le corps a commencé dans l'époque hellénistique. Elle s'est accrue pendant l'Empire romain sous l'influence des guerres, des voyages et du commerce (Stone, 2014). Les unités de longueur médiévales peuvent également être retracées jusqu'aux mensurations corporelles (Schnatz, 2012). Charlemagne a introduit le pied (dit carolingien) comme unité dans tout le royaume des Francs (*ibid.*). En France, l'Édit royal de François 1er instaure en 1540 l'aune du Roy (ou aune de Paris) comme unité de mesure officielle de la longueur (Portet, 2012). Dans la figure de l'Homme de Vitruve de Léonard de Vinci (voir figure 2.5), il est possible de trouver neuf unités de mesure historiques : la verge, l'envergure (une espèce de tige utilisée par les Grecques et les Romains), la coudée, l'aune flamande, l'aune anglaise, l'aune française [6], la brasse, la main et le pied (Schnatz, 2014).

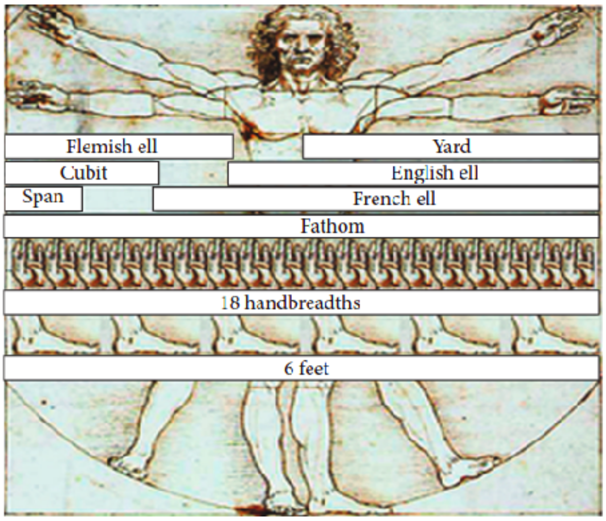


Figure 2.5 – Unités de mesure historiques dans l'Homme de Vitruve (Stone, 2014).

À la fin du 18e siècle, la discussion sur un système de mesure uniforme a commencé en Europe, étant donné l'obstacle que faisait pour le commerce la diversité alors existante des différentes mesures de longueur (Schnatz, 2014). L'invention du mètre, avec la révolution française de 1789, répond d'ailleurs à la volonté de détacher la mesure des grandeurs du corps. Il prend comme référence l'arc de méridien (à l'époque). Les progrès de la science permettent finalement de dématérialiser l'étalon du mètre, pour proposer une définition en termes de vitesse de la lumière (*ibid.*). Seuls les pays anglo-saxons conservent aujourd'hui légalement des mesures en

6. Un étalon métallique qui matérialisait l'aune officielle se trouve sur un pilier de la façade de l'église Notre-Dame de Montferrand.

pieds (« feet », en anglais) divisés en 12 pouces (« inches », en anglais) qui continuent d'être utilisées dans l'informatique et l'aéronautique.

Artefacts d'appui géométrique

Nous allons mettre particulièrement l'accent ici sur les techniques de manipulation des pierres à l'école de Pythagore. Les pythagoriciens ont notamment développé une théorie des nombres figurés qui correspondent à des nombres entiers dont les unités sont disposées selon des formes polygonales, comme des triangles, des carrés, des pentagones, etc. Radford (1998) cite Becker (1936) pour signaler que la proposition 22 du livre IX d'Euclide, concernant la parité de la somme d'une quantité paire de nombres impairs, aurait été prouvée à l'aide d'exemples concrets de façon similaire. Dans ce cas, la preuve semble avoir été basée sur l'idée que les nombres impairs, qui diffèrent des nombres pairs par une unité, peuvent se représenter par deux lignes de même longueur et une unité supplémentaire. Nous mettons dans la figure 2.6 une représentation de la façon dont la propriété aurait été prouvée par les pythagoriciens.

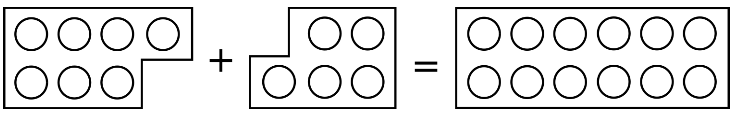


Figure 2.6 – Représentation de la propriété que la somme d'une quantité paire de nombres impairs est un nombre pair, en mobilisant des nombres figurés. Il s'agit d'une reproduction de la figure faite par Radford (Radford, 1998).

Ce qui nous intéresse de l'arithmétique concrète de l'école pythagoricienne est l'appui des relations géométriques des dispositions des pierres. Un artefact contemporain qui peut soutenir une manière de penser et d'agir similaire, dans une certaine mesure, est constitué par les cubes multi-base (voir figure 2.7).

Figure 2.7 – Cubes multi-base.

Il s'agit d'un artefact de manipulation d'usage habituel dans l'école primaire en France et dans d'autres pays. Les cubes peuvent être empilés pour former des lignes de cubes ou même de rectangles.

Artefacts symboliques

Les marques gravées dans de morceaux d'os et d'autres artefact, telles que celles gravées sur l'os d'Ichango, ont joué un rôle fondamental dans l'élaboration de signes mathématiques soutenant les premiers systèmes numériques. Les groupements des marques dans ces artefacts peuvent être interprétées comme les réquisitions des pratiques qui donneront lieu aux systèmes de numération (Boyer, 2001). L'exécution des calculs et sa sophistication a certainement été liée au développement de systèmes numériques (Caveing, 1998). Pour les babyloniens, le besoin d'identifier les objets de la comptabilité était une motivation majeure derrière l'invention de l'écriture proto-cunéiforme incisée, comme en témoignent les marques des surfaces externes des bulles-enveloppe selon le contenu (Robson, 2009a). La graphie cunéiforme commence à se mettre en place à partir du 3e millénaire av. J.-C., « But, as in almost all ancient and pre-modern societies, in early Mesopotamia writing was used to record numbers, not to manipulate them. Fingers and clay counters [7] remained the main means of calculation long after the development of literacy » (*ibid.*, p. 415). Les techniques calculatoires babyloniennes, devenues plus complexes à partir du deuxième millénaire, faisaient un usage intensif des tablettes d'argile où les nombres étaient écrits en cunéiformes, notamment des tables de multiplication. L'apprentissage des tables constituaient une partie importante de l'étude du scribe (Robson, 2009a). Robson affirme que les tables de multiplication comportaient des entrées pour les « multiplicandes » (*ibid.*, p. 4) 1 à 20, 30, 40 et 50, en utilisant un système sexagésimal. Elle précise :

> When the students first learned and copied each table they tended to write them in whole sentences : 25 a-rá 1 25 / a-rá 2 50 ('25 steps of 1 is 25, <25> steps of 2 is 50'), but when recalling longer sequences of tables in descending order abbreviated the entries to just the essential numbers : 1 25 / 2 50. (Robson, 2009a, p. 418)

Les Égyptiens ont créé un système de numération chiffré décimal non-positionnel. Dans ce système les nombres se notent par la répétition de signes figurant les différentes puissances de 10, qui se regroupent par ordres de grandeur (unités, dizaines, etc.). Dans ce cadre, les Égyptiens

7. Il s'agit de billes d'argile (ou des boulettes d'argile).

ont développé une technique de multiplication basée sur une décomposition des nombres en puissances de deux (Boyer, 2011). Boyer signale que les Grecs auraient développé deux systèmes de numération, l'un, probablement le plus ancien et le plus primitif, c'est le système attique ; l'autre est le système basé sur l'alphabet ionien (*ibid.*). Dans le système Attique, les nombres de 1 à 4 étaient représentés par des traits verticaux répétés. Pour le chiffre 5 un nouveau symbole, qui correspondait à la première lettre du mot cinq. En outre le système de numération additif romain, est resté d'usage répandu en Europe jusqu'à la propagation du système de numération indo-arabe, à laquelle le livre « Liber abaci » de Leonardo Fibonacci a contribué. Le système de numération indo-arabe reste le système le plus courant pour représenter nombres et les expressions symboliques correspondant aux opérations arithmétiques dans le monde d'aujourd'hui.

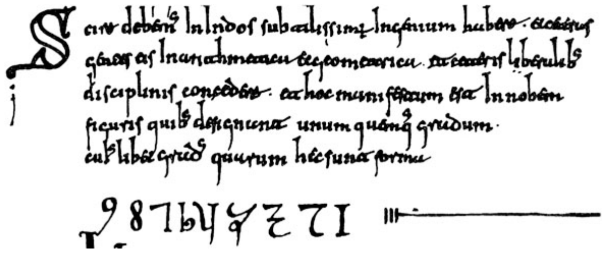


Figure 2.8 – Première représentation des chiffres arabes dans un manuscrit occidental (Codex Vigilanus de 976).

2.2.2 Lien avec les situations pratiques

La façon de percevoir les opérations arithmétiques, y compris celles de multiplication et de division, qui nous intéresse dans cette recherche implique l'organisation et la généralisation des situations pratiques concernant phénomènes de grandeurs (Freudenthal, 2012 ; Rouche, 1992). Nous nous focalisons sur les grandeurs [8] dont la manipulation [9] fait partie des pratiques an-

8. Il ne faut pas confondre la grandeur avec l'objet auquel elle est associée. Une grandeur n'est pas un objet matériel, en même temps que plusieurs grandeurs peuvent en général être associées à un objet matériel donné (par exemple, pour une table, sa hauteur, sa largeur, sa masse, l'épaisseur de son plateau, etc.). La notion de grandeur est difficile à définir théoriquement et surtout admet une diversité de définitions (Chambris, 2020). Historiquement, les mathématiques étaient considérées, jusqu'au milieu du 19e siècle, comme une science quantitative et les quantités n'étaient pas vraiment définies. D'importants travaux théoriques ont été menés au 19e siècle, au moment même où les quantités perdaient leur suprématie (Gandon, 2009). Une approche contemporaine est développée par Rouche (1992), comme nous le verrons dans la suite. Comme d'autres auteurs, voir par exemple (Griesel, 2007), il considère les grandeurs comme des classes d'équivalence d'objets par la relation « avoir même grandeur ». Du point de vue de la physique, les grandeurs peuvent être définies comme une propriété d'un phénomène, concernant la matière ou un système, que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence (Cook, 1994)

9. Ici nous faisons une utilisation large du terme manipulation. Même si les objets matériels (ou immatériels tel le temps) ne sont pas des grandeurs, les humains manipulent des objets matériels pour traiter des questions qui concernent les grandeurs que ces objets évoquent (par exemple, mettre dans un récipient un litre de lait avec un verre mesureur dont la contenance est un demi-litre).

ciennes des civilisations humaines. En particulier, nous les retrouvons dans l'organisation sociale des cités mésopotamiennes de l'Antiquité : gestion de terres, prélèvement de taxes et répartition équitable ou inéquitable de nourriture. Dans ce contexte, les savoirs socialement produits étaient enseignés au sein des écoles mésopotamiennes (Robson, 2009a; Robson, 2009b). En particulier, des problèmes arithmétiques verbaux de multiplication et de division étaient traités, comme l'attestent des sources anciennes comme les tablettes d'argile babyloniennes [10]. Par exemple Friberg reconstruit l'un des plus vieux problèmes de division relatifs à la distribution de grains entre un certain nombre de personnes (un problème mathématique du 3e millénaire av. J.-C.).

> Given that you have to count with 1 gu-bar for 33 persons, how much do you count with for 260,000 persons? (Friberg, 1986, p. 19).

2.2.3 Une approche par le rapport entre grandeurs dans le livre V des éléments d'Euclide

Une autre dimension qui caractérise la pensée multiplicative que nous voudrions esquisser est lié à une manière de penser et d'agir sur les grandeurs, que nous trouvons en particulier dans le livre V des *Éléments d'Euclide* [11] (Grèce, 300 av. J.-C). Nous avons consulté la traduction d'Henrion (Henrion, 1632). Ce livre consiste en une théorie des rapports et des proportions entre grandeurs (Vitrac, 1992). Plus spécifiquement, le Livre V introduit la notion de grandeur abstraite, et donc en particulier indépendamment de la géométrie du Livre I, « et il est consacré à la notion de rapport entre grandeurs homogènes, à l'identité ou non de tels rapports, à leurs manipulations, indépendamment de la commensurabilité ou non de ces grandeurs. » (Vitrac, 2008, p.12). La non prise en considération de la dimension, de la position et de la commensurabilité ou non des termes, fait que la théorie du Livre V puisse être dite *générale* (*ibid.*). Le livre débute par une définition relative à la comparaison des grandeurs homogènes (de même nature), au moyen du mesurage : « Partie est une grandeur tirée d'une autre plus grande, lorsque la plus petite mesure la plus grande » (Henrion, 1632, p. 166). Nous interpréterons le terme *mesure* en relation avec l'algorithme d'Euclide, qui sera précisé dans le paragraphe suivant. Les grandeurs doivent être « du même genre », comme le sont deux nombres, deux lignes, deux surfaces, deux solides

10. Ou le papyrus de Rhind (vers 1550 av. JC.) pour la civilisation égyptienne.

11. Pour Platon, la science du nombre (nombre entier) se subdivise en *arithmétique*, science des nombres pris en eux-mêmes, et en *logistique*, science des nombres dans leur rapport aux grandeurs (Vitrac, 1992). Le livre V est difficile à positionner par rapport à ces catégories, par leur traitement théorique des relations entre grandeurs.

(Henrion, 1632, p. 167). Par exemple, dans la figure nous présentons deux grandeurs A et B telles que A est contenu 3 fois en B (voir figure 2.9). On dit que A est une partie de B ou que, répété 3 fois, il constitue son tout, B.

Figure 2.9 – Segments A, B et C tels que A est contenu 3 fois en B, dans Henrion (1632), p. 166.

La deuxième définition d'Euclide traite de la notion de multiple, qui permet d'exprimer la relation de l'exemple de la figure 2.9 : « Multiple, est une grandeur plus grande qu'une autre plus petite, quand la plus grande est mesurée de la plus petite » (Henrion, 1632, p. 166). Ainsi, nous avons que « être une partie de » est la relation inverse de « être un multiple de » ; les deux relations étant définies sur la base du concept de mesure (Vitrac, 1992). Étant donné des grandeurs g et g', g' est mesuré par g signifie que g' est un multiple entier de g. Dans la définition 3 du livre, ce nombre est dénommé une *raison*. La raison est définie comme une certaine manière d'être, une *habitude* de deux grandeurs. En effet, il dit : « une raison est une habitude de deux grandeurs de même genre, comparées l'une à l'autre selon la quantité » (Henrion, 1632, p. 167), c'est-à-dire selon que l'une est plus grande que l'autre, ou moindre, ou égale.

L'algorithme d'Euclide

Nous trouvons dans le Livre VII des Éléments *l'algorithme d'Euclide*, qui permet de trouver une « unité de mesure » commune pour deux longueurs de segments commensurables, donc qui se mesurent en nombres entiers avec une même unité. L'algorithme consiste en une utilisation répétée, mais inversée, de la définition 4 [12] du Livre V qui correspond à l'axiome d'Eudoxe-Archimède (Boyer, 2011). Étant donné des grandeurs g' et g, g' plus grande que g, on soustrait g de g' jusqu'à ce qu'un reste r_1 soit inférieur à la grandeur g. Si le reste est non nul, on soustrait

12. Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

à plusieurs reprises ce reste r_1 de g à plusieurs reprises jusqu'à que qu'un reste r_2 inférieur à r_1 en résulte. Si le reste r_2 est non nul, l'algorithme continue jusqu'à obtenir un reste nul (ce qui se produit si les grandeurs sont commensurables). Notons que si g' est une grandeur multiple entier de g, alors g est l'unité de mesure commune que l'algorithme produit (il y en a d'autres : n'importe quelle partie au sens d'Euclide). Dans ce cas l'application de l'algorithme consiste à soustraire n fois g de g' et le reste est alors nul, donc la commune mesure est g (Vitrac, 1992).

2.2.4 Quelques interprétations en termes contemporains

Les pratiques historiquement et culturellement constituées de penser et d'agir sur les grandeurs sont des processus incarnés, sensibles et matériels. La pensée multiplicative que nous voudrions faire rencontrer aux élèves de l'école primaire est également caractérisée par la médiation par des artefacts contemporains de manipulation et des artefacts symboliques. Dans notre recherche, nous nous concentrons sur une manière mathématique de percevoir les opérations de multiplication et de division en relation avec les grandeurs, ce que nous dénommons une pensée multiplicative. Nous nous intéressons à la rencontre des manières de penser et d'agir sur les grandeurs, lorsqu'une grandeur g' est un multiple entier d'une grandeur g. Nous dirons que les grandeurs g et g' et la raison n constituent une *relation multiplicative* [13] et nous appellerons g, g' et n les *termes de la relation multiplicative*. Pour interpréter cette relation, nous reprenons l'idée de mesure qui apparaît dans l'algorithme d'Euclide associée à la soustraction itérée ou à l'addition itérée d'une quantité. La relation multiplicative entre grandeurs nous semble condenser en quelque sorte cette action tant au niveau de la manipulation qu'au niveau symbolique.

Les opérations arithmétiques de multiplication et de division peuvent être perçues dans ce cadre comme des opérations permettent de retrouver un terme inconnu dans une relation multiplicative dont les deux autres sont connus. Sur la base de l'étude épistémologique, afin de distinguer la recherche des termes en question conformément à leur nature différente, et contrairement aux prescriptions curriculaires, nous travaillerons avec une opération de multiplication et deux opérations de division. Nous conservons cependant les expressions division partage et division groupement utilisées dans certains textes curriculaires. Ainsi, la recherche de la grandeur g' correspond à une *multiplication* ; la recherche de la grandeur g, à une *division partition* (ou une *division partage*) ; et la recherche de la raison n, à une *division quotition* (ou une *division groupement*

13. La notion de relation multiplicative peut s'étendre aux cas où la raison n'est pas un nombre entier.

pement). Notons que la première étape de l'algorithme d'Euclide permet de réaliser la division quotition (par retrait itérée d'une grandeur). Les termes connus dans la relation multiplicative sont appelés *opérandes* et le terme inconnu, *résultat*. Pour la multiplication, les opérandes n et g reçoivent respectivement la dénomination de *multiplicateur* et de *multiplicande*, et le résultat g' est appelé *produit*. Pour la division partage, les opérandes g' et n reçoivent respectivement la dénomination de *dividende* et de *diviseur*, et le résultat g est appelé *quotient*. Pour la division groupement, les mots utilisés sont les mêmes : les opérandes g' et g reçoivent respectivement la dénomination de *dividende* et de *diviseur*, et le résultat n est appelé *quotient*.

Nous caractérisons également la pensée multiplicative par les possibilités que les opérations de multiplication et de divisions offrent pour généraliser et organiser des situations pratiques concernant des phénomènes de grandeurs (voir section 2.2.2). Nous nous focalisons sur les problèmes verbaux qui sont posés à partir de situations multiplicatives et qui peuvent être résolus par le calcul numérique d'une multiplication ou d'une division au sens habituel du terme. Ces problèmes sont dénommés en anglais « one step word problems ». Ainsi, les problèmes verbaux dits *problème de multiplication*, *problème de division partage* et *problème de division de quotition* ce sont ceux qui peuvent être résolus respectivement par une opération de multiplication, de division partition et de division quotition, le résultat de l'opération donnant la solution au problème.

Les travaux de Rouche (1992) permettent d'exprimer les opérations de multiplication et de divisions en termes de relation multiplicative entre grandeurs. Inspiré par Freudenthal (1983), Rouche (*ibid*) développe un cadre de compréhension des phénomènes liés aux grandeurs. Il propose également une axiomatique qui traite les grandeurs en tant qu'objets formels, tel qu'ils apparaissent le plus proche possible de l'expérience commune, sans les réduire à telle axiomatisation. En effet, Rouche (*ibid*) émet des remarques par rapport à la traduction des propriétés dans la réalité quotidienne, étant donné les limites imposées par la cohérence logique mathématique à laquelle le traitement axiomatique et symbolisé est soumis. Rouche définit les grandeurs comme des classes d'équivalence sur un ensemble d'objets générées par la relation d'équivalence d'avoir la même grandeur. À partir de l'axiomatisation proposée par Rouche (*ibid.*) (que nous n'abordons pas ici), il est possible d'exprimer les opérations de multiplication et de divisions comme des opérations externes sur un champ de grandeur : étant donné G un champ de grandeur, $g, g' \in G$ et $n \in \mathbb{N}$ (g et n non nuls), les expressions $g \times n = g'$[14], $g' : n = g$ et

14. Conformément à la tradition scolaire qui a prévalu en France au moins dans la période 1900-1970, pour l'ex-

$g' : g = n$ traduisent respectivement les opérations de multiplication, de division partition et de division quotition [15], quand g et g' sont en relation multiplicative telle que g' est une grandeur multiple de g.

Nous souhaiterions conclure en soulignant la distance que nous prenons par rapport à une perspective ensembliste des opérations arithmétiques, issue de l'axiomatisation des nombres réels au 19e siècle. Celle-ci sous-tend dans une certaine mesure l'enseignement actuel en France, suite à la réforme des mathématiques modernes des années 70' (Chambris, 2008; Chambris 2018). En effet, l'opération de multiplication et l'opération de division euclidienne sont définies sur l'ensemble des nombres entiers à partir des axiomes de Peano, ce qui constitue souvent l'objet-savoir cible par l'enseignement traditionnel. Au lieu de cela, nous nous concentrons sur une façon de penser et d'agir sur les grandeurs qui a des racines profondes dans les pratiques anciennes que nous avons rapportées. Notre hypothèse est que la rencontre avec la pensée multiplicative que nous avons esquissée peut donner lieu à des manières profondes et riches de penser, de réfléchir, d'argumenter et d'agir.

2.3 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons dans un premier temps rendu compte des concepts fondamentaux qui soutiennent la théorie de l'objectivation (TO). Nous avons vu que la TO aborde le savoir mathématique depuis une perspective socioculturelle. Les mathématiques sont vues comme une entité à la fois idéale et concrète. La TO conçoit l'apprentissage comme un processus profondément social, incarné et symbolique. L'apprentissage est conceptualisé en termes de deux types de processus entrelacés : d'objectivation, relatifs à la rencontre avec des savoirs culturels, et de subjectivation, qui réfèrent aux transformations que les élèves et les enseignant·e·s subissent dans ce cadre. Nous avons également présenté l'activité en classe, au prisme de ce cadre théorique appelé travail conjoint, comme l'instance à travers laquelle les mathématiques apparaissent à la conscience des individus. Dans la perspective de la TO, nous caractérisons dans un deuxième temps la pensée multiplicative en relation avec des manières de penser et d'agir constituées historiquement et culturellement. Celle-ci est esquissée à partir de trois dimensions

pression symbolique des multiplications, nous allons noter la grandeur g à gauche du signe $\times$ et la raison à sa droite.

15. Rouche (1992) définit les opérations de multiplication et de division partition à partir de l'opération d'addition des grandeurs, celle-ci étant liée à l'assemblage d'objets. Il ne définit pas la division quotition.

interreliées : la médiation des artefacts de manipulation et des artefacts symboliques, la généralisation des situations pratiques impliquant des grandeurs par les opérations de multiplication et de divisions, et l'interprétation des opérations en termes de la relation multiplicative entre grandeurs. Autrement dit, l'acquisition des opérations de multiplication et de division revient, dans notre recherche, à prendre conscience de cette façon de les percevoir mathématiquement. Il s'agit aussi d'une position différente à celle que fournit par la notion de *raisonnement multiplicatif* dans les recherches au sein du MCF (voir paragraphe 1.1.3), caractérisé en termes d'une *capacité* de résoudre des tâches multiplicatives.

Pour aborder l'implication du corps dans l'apprentissage, nous allons dans le prochain chapitre rendre compte de la perspective sur la cognition sur laquelle nous nous appuyons dans notre recherche : la *cognition sensuelle*. Nous allons également développer notre approche de l'acquisition suportée par les actions incarnées des concepts d'opérations de multiplication et de divisions que la recherche de Fischbein nous a fait rencontrer.

Chapitre 3

Une approche de l'action incarnée

Dans ce chapitre, nous explorons davantage l'implication du corps dans le processus d'objectivation des opérations de multiplication et de divisions, par le biais des actions incarnées. Nous reformulons, en termes de processus d'objectivation du savoir historique-culturel (voir chapitre 2), les questions posées initialement sur l'implication du corps et sur la manière. Dans une perspective incarnée de la cognition, ces questions portent sur la façon dont les actions incarnées sont perçues dans le processus d'enseignement et d'apprentissage des opérations (voir section 1.4). Plus précisément, l'objectif de ce chapitre est de concevoir un cadre interprétatif pour le sens qui peut être attribué aux actions incarnées à la lumière du processus d'objectivation de la pensée multiplicative, et dans la perspective de la cognition incarnée.

Dans la section 3.1 nous décrivons la notion de cognition sensuelle. Cette perspective nous permet de mettre en relief la nature incarnée des actions sur des objets physiques que nous considérons dans la cognition, notamment en interaction avec l'utilisation d'artefacts. Dans la section 3.2, nous faisons référence aux notions de concepts quotidiens, de concepts scientifiques et le processus de double enracinement de concepts quotidiens et de concepts scientifiques chez Vygotski. Nous interprétons dans ce cadre les actions incarnées constituant des modèles intuitifs des opérations arithmétiques concernées. C'est l'occasion de revisiter un exemple de résolution basée sur les actions incarnées et de l'analyser en termes d'objectivation du savoir. Dans la section 3.3, nous développons notre approche théorique à l'implication des actions incarnées dans l'apprentissage, en termes d'un processus que nous dénommons *domestication de mains*. Nous introduisons dans ce cadre les notions d'*actions multiplicatives* et d'*actions épistémiques non multiplicatives*. Il s'agit d'une distinction proposée sur la base de leurs fonctions, dans un sens à préciser. Enfin, dans la section 3.4, nous résumons les réflexions du chapitre en guise de conclusion.

3.1 La cognition sensuelle

Radford propose une approche de la cognition incarnée (voir Introduction) qu'il dénomme *cognition sensuelle* (« sensuous cognition » en anglais) (L. Radford, 2009a ; Radford, 2013a ; L. Radford, 2014a ; L. Radford, 2014b ; L. Radford et al., 2017 ; L. Radford, en presse 1). Radford prend appui sur les travaux de Gehlen (1988), de Vygotski (1978), de Leontiev (2009) et de l'énactivisme (H. Maturana et Varela, 1987) pour développer une perceptive théorique non mentaliste et matérialiste de la cognition. Sans prétentions de constituer une théorie sur la cognition, cette perspective cherche à être opérationnelle pour une utilisation en *Mathematic Education*, en ce qu'elle enrichit le regard sur l'activité en classe. La cognition sensuelle revendique la place des ressources incarnées dans la cognition. Radford affirme : « I advocated instead for a sensuous conception of thinking – one in which gestures and bodily actions are not the ephemeral symptoms announcing the imminent arrival of abstract thinking, but *genuine* constituents of it. » (Radford, 2009a, p. 123, italique dans l'original). Le cadre nous apporte des spécificités pour aborder la complexe relation entre le corps et la cognition humaine. En particulier, la cognition sensuelle fait sienne une des hypothèses qui n'est pas acceptée par toutes les perspectives de la cognition en tant qu'incarnée (Wilson, 2002). L'hypothèse consiste à considérer que l'environnement, c'est-à-dire ici le corps et la culture matérielle, fasse partie du système cognitif (Radford, 2014a).

Dans la suite de cette section, nous présentons les notions de *multimodalité* et *plasticité* telles qu'elles sont abordées dans le cadre de la cognition sensuelle. Nous esquissons une perspective sur le rôle des artefacts dans ce cadre.

3.1.1 La multimodalité et la plasticité dans la cognition incarnée

Selon la perspective de la cognition sensuelle, la *multimodalité* sensorielle caractérise également la cognition humaine. La nature multimodale de la cognition est abordée par plusieurs approches en Mathematics Education (Arzarello et Robutti, 2010 ; Ferrara, 2014 ; O'Halloran, 2015). La multimodalité sensorielle correspond à l'intégration et à la collaboration des modalités sensorielles pour assurer une perception complexe de la réalité, c'est-à-dire une expérience sensorielle multimodale du monde. Ce terme est proposé dans les recherches neuroscientifiques en opposition au modèle modulaire du cerveau [1] (Oddo, Villa, et Citerio ; Roh et Park). Plus précisement, la multimodalité correspond à considerer que toute action « (1) is neurally enacted using neural substrates used for both action and perception, and (2) that the modalities of action and perception are integrated at the level of the sensory-motor system itself and not via higher association areas. » (Gallese et Lakoff, 2005, p. 459).

La plasticité de la sensation humaine est une autre caractéristique fondamentale de la cognition, qui permet notamment une coévolution de la vie des pratiques sociales, de la culture matérielle et de la sensation (Radford, 2013a). En effet, Radford (2014a) soutient que nos fonctions cognitives se déploient et évoluent en corrélation avec la transformation culturelle de nos sens et notre expérience sensorielle multimodale du monde, à la fois au niveau phylogénétique qu'ontogénétique. La cognition humaine, souligne Radford :« is *transformed by human labor and social practice*. That is, human cognition is not a natural phenomenon, but a cultural-historical one. » (2014a, p. 358, italique dans l'original). La cognition humaine, dans ces termes, « can only be understood as a culturally and historically constituted sentient form of creatively responding, acting, feeling, transforming, and making sense of the world» (Radford 2013a, p. 144).

Les artefacts dans la cognition sensuelle

Il semble exister une perspective partagée dans la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques autour de l'idée que les artefacts participent à la médiation de l'activité (L. Radford, 2012 ; Radford, 2014c). En étendant la cognition au corps et à la culture matérielle, l'approche de la cognition sensuelle considère que les artefacts sont profondément ancrés dans notre façon de penser et de percevoir. Dans cette perspective, Radford (2012) insiste pour aller au-delà du statut épistémique des artefacts en tant que support de l'activité mathématique : « Artifacts can no longer be considered as a means to access mathematical objects and mathematical forms of reasoning, as these are not conceived of as transcendental entities. » (p. 285). Ainsi, en considérant les artefacts comme des éléments constitutifs de la pensée, « Knowing becomes knowing-with-tools as opposed to knowing via the tools. » (Radford, 2012, p. 285). Radford (2011a) considère l'utilisation d'artefacts comme un élément fondamental de la

1. Le terme *multimodalité* est également utilisé pour désigner la diversité des modes d'expression qui sont combinés pour communiquer (Jewitt, Bezemer, et O'Halloran, 2016)

cognition humaine, à la différence des animaux qui ne conservent pas des artefacts. Radford donne un exemple tiré de Köhler (voir Köhler et Winter, 2018) dans lequel un bout de bois utilisé par un chimpanzé pour atteindre un fruit perd sa signification après exécuter l'action. Il note que : « l'être humain est profondément affecté par l'artefact : au contact de celui-ci, l'être humain restructure ses actions (Baudrillard, 1968) et forme des capacités motrices et intellectuelles nouvelles, comme l'anticipation et la perception (L. Vygotsky, 1994) [2]. » (Radford, 2011a, p. 9).

La constitution des artefacts ne se réduit pas à une matière inerte, mais est une matière déjà dotée de sens, intégrant l'activité cognitive des générations passées (L. Radford, 2008b; Radford, 2011a; Radford, 2013a), le langage étant l'artefact humain par excellence. Enracinés dans les pratiques humaines depuis la nuit de temps, les artefacts sont conçus du point de vue de la cognition sensuelle comme des objets historiques et culturels qui font partie de la cognition.

3.2 Concepts quotidiens, Concepts scientifiques et actions incarnées

Les modèles primitifs, intuitifs et inconscients des opérations arithmétiques décrits par Fischbein (Fischbein *et al.*, 1985; Fiscbein 1989) délimitent un éventail important de situations multiplicatives. Notons que les trois modèles proposés correspondent respectivement aux opérations de multiplication et de divisions sur lesquelles nous nous focalisons : le modèle d'addition itérée pour la multiplication et les modèles de division partition ou division partage et de division quotition pour les opérations qui reçoivent la même dénomination. Comme il a été indiqué auparavant (voir section 4.2), les modèles réfèrent à la contrepartie active et effectivement réalisable de l'opération (Fischbein *et al.*, 1985), que nous interprétons en termes d'*actions incarnées*. Nous tenons à souligner que les actions incarnées sur lesquelles nous nous focalisons correspondent à celles associées à des situations multiplicatives. Elles entraînent un effet sur les objets physiques correspondant aux grandeurs impliquées. D'autres approches intègrent dans les modèles intuitifs les actes de comptage qui peuvent avoir lieu dans le processus de résolution de problèmes verbaux (Kouba, 1989; Mulligan, 1997) ou d'autres actions incarnées qui émergent dans l'interaction avec des artefacts technologiques (par exemple les recherches de

2. Radford (2013a) évoque les travaux de Vygotsky et Luria qui ciblent la transformation de la mémoire eidétique qui a lieu dans certaines cultures par l'utilisation du nœud.

Abrahamson et Sinclair que nous avons évoqué dans le paragraphe 1.1.5).

Dans cette section, nous abordons les actions incarnées, en tant qu'attachées aux situations de la vie quotidienne, en termes du processus d'objectivation des opérations de multiplication et de divisions. Dans le paragraphe 3.2.1, nous décrivons les notions des concepts quotidiens et concepts scientifiques provenant de la psychologie vygotskienne. Dans le paragraphe 3.2.2, nous distinguons, au moyen de ces notions, l'évocation des actions incarnées en relation avec les opérations arithmétiques concernées. Les concepts quotidiens et les concepts scientifiques fournissent une première approche pour comprendre la façon dont les actions incarnées peuvent participer du processus d'objectivation. Nous considérons que les concepts quotidiens et les concepts scientifiques permettent de réinterpréter l'opposition de l'intuitif et le formel.

3.2.1 Les concepts quotidiens et les concepts scientifiques

Dans le livre *pensée et langage*, Vygotski (1934) réfléchit sur les spécificités qui entourent l'acquisition des concepts dans le contexte *artificiel* du cadre scolaire. La distinction des *concepts quotidiens* et *concepts scientifiques*, permet de mettre en évidence l'hypothèse concernant les effets de restructuration profondes que l'enseignement scolaire peut provoquer chez les enfants en termes de développement (Brossard, 2008). Les concepts quotidiens sont ceux formés de façon spontanée au cours des expériences quotidiennes, au sein de l'environnement physique et social de l'enfant. Ils surgissent en tant que généralisation des nécessités qui viennent « agir sur le monde extérieur au sein de son univers familial mais aussi donner les raisons de ses actions, communiquer à autrui ses manières de sentir et de penser » (Brossard, 2008, p. 74). Les concepts scientifiques correspondent à ceux acquis dans le cadre scolaire, comme les concepts mathématiques proprement dits. Vygotski (1934) souligne « Les matériaux obtenus nous amènent à émettre l'hypothèse que les concepts scientifiques se développent selon une voie un peu particulière par rapport à celle des concepts quotidiens. » (p. 276). Vygotski (1934) suggère, à titre d'exemple, que les difficultés pour définir le concept de *frère*, utilisé dans la vie quotidienne, sont plus grandes que celles pour formuler le concept d'*esclavage* utilisé dans les sciences sociales, ou le *théorème de Pythagore* en mathématiques.

La particularité fondamentale des concepts scientifiques par rapport aux concepts quotidiens réside dans le caractère conscient et volontaire qui soutient leur utilisation. Les modes de formation et de fonctionnement des concepts quotidiens demeurent non-conscients, Vygotski l'illustre au moyen du concept de frère : l'enfant pourra mobiliser le concept pour rendre compte de la relation familiale s'il y a lieu, sans pouvoir nécessairement la définir. En revanche, comme Falcade (2006) le signale, l'action de l'enseignant peut se révéler très efficace à ce niveau, « par la proposition de tâches ayant comme but celui de développer ce caractère conscient et volontaire » (*ibid.*, p. 30). Nous trouvons une autre différence dans la formation des concepts scientifiques et quotidiens, elle concerne les relations entre concepts. Les concepts scientifiques, en tant que « généralisation sur des généralisations déjà formées » (*ibid.*), supposent un tissu conceptuel déjà développé, ils sont introduits selon la place qu'ils occupent dans ce système conceptuel. Les concepts quotidiens, quant à eux, se constituent en dehors d'un système déterminé, les liaisons établies entre eux étant d'ordre empirique.

Les trajectoires de formation des concepts sont opposées mais s'influencent mutuellement, dans un processus de double enracinement de concepts quotidiens et de concepts scientifiques, repris en didactique des mathématiques par Rogalski (Rogalski 2008 ; Vidal-Gomel et Rogalski, 2007). L'opposition des trajectoires est évoquée par Vygotski dans les termes d'une métaphore du « bas » et du « haut » : « Les concepts scientifiques germent vers le bas par l'intermédiaire des concepts quotidiens. Ces derniers germent vers le haut par l'intermédiaire des concepts scientifiques » (Vygotski, 1934, p. 372). En d'autres termes, les concepts quotidiens servent, d'une part, de support à l'introduction de concepts scientifiques. Les concepts quotidiens constituent le terrain sur lequel les concepts scientifiques plongent leurs racines, de sorte que leur développement « descend jusqu'au concret, jusqu'au phénomène » (*ibid.*, p. 372).

D'autre part, comme le souligne Vygotski, « la tendance des concepts quotidiens est de se développer en dehors d'un système déterminé et de s'élever, d'aller vers les généralisations » (Vygotski, 1934, p. 276). L'influence des concepts scientifiques sur les concepts quotidiens découle du fait que « les structures de généralisation que constituent les concepts scientifiques, ouvrent des voies de développement aux conceptions spontanées leur permettant ainsi de se transformer ». (Brossard, 2008, p. 77). À titre de l'exemple, Vygotski met sur le même plan les différences de l'apprentissage de la langue maternelle, similaire à la formation des concepts quotidiens, et des langues étrangères, similaire à la formation des concepts scientifiques. Vygotski suggère que l'apprentissage d'une langue étrangère élève la langue maternelle à un niveau supérieur, car la personne peut faire un usage plus conscient des formes de la langue et en généraliser les phénomènes qui lui sont propres. Vytgotski (*ibid.*) reprend la phrase de Goethe : « Qui ne connaît aucune langue étrangère ne connaît pas à fond la sienne propre ».

3.2.2 Les actions incarnées soutenant le concept quotidien d'opérations arithmétiques

Nous interprétons le concept quotidien d'opérations arithmétiques comme étant soutenu par le sens pratique des actions incarnées sur des objets physiques. Ce sens pratique des actions n'est pas centré sur les procédures mises en œuvre, mais plutôt sur leur résultat ou leur effet sur les objets. Cette interprétation est cohérente avec celle du concept quotidien de division partage donnée par L. Radford, Demers, et Miranda, qui réfèrent aux conditions nécessaires à l'acquisition de concepts mathématiques, ou scientifiques au sens vygotskien (Radford *et al.*, 2009b). Ils partent de la tâche qui consiste à partager 18 galettes entre trois enfants (l'énoncé donné aux élèves n'est pas précisé par Radford et ses collègues). Le concept quotidien de division, ou de division partage dans nos termes, correspond à l'action de partager séquentiellement une collection d'objets entre un certain nombre de personnes. L'action provoque une modification sur l'organisation de la collection d'objets du départ : une fois exécutée, des groupes constitués par une quantité équivalente d'objets sont en conséquence formés, sans que pour autant une relation multiplicative puisse être établie entre grandeurs. Une résolution possible du problème, que l'on peut sans doute trouver à l'école primaire, consiste à évoquer l'action en appui d'un dessin. Nous présentons dans la figure 3.1 un dessin qui pourrait être fait par un·e élève à l'école.

Figure 3.1 – Resolution basé sur un concept quotidien de division pour résoudre le problème de partage (Radford *et al.*, 2009b, p. 21).

Dans cette résolution, l'élève n'a pas mobilisé le concept mathématique de division partage, ce qui correspond, dans la terminologie introduite par Vygotski, au concept scientifique de division partage. En effet, Radford *et al.* signalent : « tant qu'il ne parvient pas à utiliser les faits numériques de la multiplication et à se rendre compte qu'il y a une multiplication derrière la solution du problème, il n'y aura pas d'apprentissage » (Radford *et al.*, p. 21). Dans la perspective de la TO, il s'agit de la prise de conscience que le problème peut être résolu par une division partage. En reprenant Radford *et al.* (2009b), il est également nécessaire que « la procédure multiplicative qui a fonctionné pour résoudre le problème des galettes soit généralisée à d'autres problèmes similaires » (p. 22). Radford *et al.* soulignent à cet égard l'importance de la prescription de problèmes à difficulté croissante (Radford *et al.*, 2009b), c'est-à-dire faire varier des variables didactiques. La rencontre avec la pensée multiplicative sous des formes symboliques que nous avons décrite, entraîne une reconnaissance du fait que le concept de division permet de généraliser ces situations. Cette rencontre implique que l'élève prenne conscience de la relation multiplicative entre la grandeur 18 galettes, la grandeur inconnue, et le nombre 3. L'opération de division partage doit être reconnue comme l'opération qui permet de trouver cette grandeur inconnue. En particulier, le rôle des grandeurs dans la relation multiplicative doit être progressivement distinguée. Par conséquent, l'acquisition de l'opération de division partage dans ce cadre, contrairement à ce que Radford *et al.* suggèrent par rapport à l'utilisation de faits numériques (Radford *et al.*, 2009b), ne requiert pas nécessairement de la mémorisation des tables de multiplication.

Dans les termes du processus de double enracinement de concepts quotidiens et de concepts scientifiques, nous observons une double implication du sens de l'action. D'une part, le sens que l'élève donne à l'algorithme personnel produit, en mobilisant le concept quotidien de division partage, peut évoluer vers le concept scientifique visé (Radford *et al.*, 2009b), à travers l'activité d'enseignement et d'apprentissage. D'autre part, l'acquisition du concept scientifique de division partage devrait comporter des modifications sur le concept quotidien de division partage. Nous posons la question : comment le sens donné aux actions incarnées, dans leur interprétation quotidienne, peut-il se transformer lors de l'objectivation ? Nous allons aborder cette question dans la section suivante.

3.3 La domestication des mains

L'approche de Fischbein *et al.* (1985) aborde les actions incarnées concernées dans le cadre des situations de la vie quotidienne, sans se focaliser sur les incidences de leur manifestation incarnée dans la cognition. Nous nous intéressons aux transformations de la manière dont les élèves perçoivent ces actions incarnées au cours de l'apprentissage des opérations arithmétiques de multiplication et de division. La question est donc de savoir comment rendre compte des restructurations que les actions incarnées pourraient subir. Pour répondre à cette question, notre réflexion s'appuie sur deux sources : d'une parte, une recherche de théorie de l'activité (Kirsh et Maglio, 1994) et, d'autre part, les réflexions de Radford (L. Radford, 2010a; L. Radford, 2013b) sur l'intention et la perception, dans le cadre de ses travaux sur l'émergence de la pensée algébrique à l'école primaire. Notre approche est par un processus que nous dénommons *domestication des mains* (terminologie emprunté à Radford), qui entraîne une modification dans la fonction des actions. Nous distinguons les actions incarnées selon leur fonction : des *actions multiplicatives* et *des actions épistémiques non multiplicatives*. Dans cette section, nous présentons d'abord les notions d'*actions épistémiques* et d'*actions pragmatiques*, dans la recherche de Kirsh et Maglio (1994). Ensuite, nous présentons les éléments de la réflexion de Radford sur lesquels nous prenons appui. Enfin, nous développons notre approche.

3.3.1 Les *actions épistémiques* et les *actions pragmatiques*

Dans le cadre de l'analyse de la performance de joueurs de tetris, Kirsh et Maglio (1994) introduisent la catégorie d'actions *épistémiques*, afin de les distinguer du point de vue de leur fonction des actions dites *pragmatiques*. Ces chercheurs estiment que la catégorisation est applicable à la théorie de l'action en général et qu'elle offre une perspective pertinente et innovante pour l'interprétation des actions. La pertinence de la proposition réside, selon les chercheurs, dans le fait que les récits traditionnels dans la théorie de l'action sont limités à la seule fonction des actions qui consiste en changer le monde. Ils dénomment les actions ayant cette fonction des *actions pragmatiques*. Plus précisément, comme Clark et Chalmers (1998) le soulignent, les *actions pragmatiques* « alter the world because some physical change is desirable for its own sake (e.g., putting cement into a hole in a dam) » (p. 8). En revanche, Kirsh et Maglio (1994) affirment que certaines actions sont mieux comprises comme ayant pour but d'utiliser le monde pour améliorer la cognition : c'est le cas des *actions épistémiques*. Plus spécifiquement, ces actions sont définies comme suit : « Epistemic actions are actions designed to change the input to an agent's information-processing system » (p. 541), c'est-à-dire elles permettent, par leur réalisation, de découvrir des informations cachées, et d'aider les processus cognitifs tels que la reconnaissance et la recherche. Cette hypothèse s'inscrit dans le cadre théorique d'une perspective externalisée de la cognition (Kirsh, 2010) selon laquelle l'environnement fait partie de la cognition, compatible avec l'idée de cognition sensuelle (voir section 3.1).

3.3.2 La domestication de l'œil

Radford a dédié des efforts à l'étude de la genèse de la pensée algébrique incarnée et non symbolique et sa transition progressive vers des formes de pensée symbolique culturellement évoluées chez les élèves à l'école primaire (voir par exemple Radford, 2010a ; Radford, 2011b ; Radford, 2013b ; Radford, 2014b). Dans ce cadre, il se concentre sur la généralisation et la recherche de motifs géométriques dans les séquences élémentaires, en termes de leur *perception*. Il se base sur le principe que la perception sensorielle, telle que l'exprime la perspective de la cognition sensuelle, n'est pas le résultat d'entrées directes. Il s'agit plutôt d'un processus actif [3] dans lequel interviennent des significations véhiculées par le langage et d'autres systèmes sémiotiques culturels. La perception humaine, plutôt que d'être un acte purement biologique, souligne Radford (2010a), est un processus social de part en part. Radford indique également qu'« il existe d'innombrables manières d'abstraire et de généraliser les faits toujours individuels et contingents qui nous sont intuitivement donnés par les sens et filtrés par la culture. » (*ibid.*, p. 2). En particulier, Radford se focalise sur la compréhension des manières sociales par lesquelles les élèves arrivent à percevoir des suites élémentaires composées de figures géométriques de certaines manières, par l'intermédiaire de la rencontre d'un mode culturel de généralisation (Radford, 2014) et la manière dont les enseignants créent des conditions pour cela (Radford, 2010a). En particulier, Radford (Radford, 2010a ; Radford, 2013b) prend appui sur les travaux de Husserl (Husserl, 2012, Husserl, 1971) pour rendre compte de la perception comme un acte *intentionnel*.

Radford (2014b) analyse une tâche donnée à des élèves de deuxième année (équivalent à CE1) dans un contexte d'introduction à l'algèbre. La tâche a consisté en l'exploration de termes d'une suite dont le terme générique n consiste en deux lignes de carrés de $n + 1$ et n carrés. L'enseignante leur a présenté les quatre premiers termes de la suite, ensuite les élèves devaient déterminer le sixième terme, puis le huitième. Nous présentons dans la figure 3.2 l'image donnée aux élèves. La manière mathématique de voir et de percevoir les termes de la suite que les

3. L'expérience menée par Held et Hein en 1963 à faveur d'une vision *énactive*, est assez illustrative à ce propos. Held et Hein ont réalisé une expérience avec des chatons élevés dans l'obscurité (voir Held et Hein, 1963). Pendant trois heures par jour, les chatons étaient amenés dans une pièce éclairée. Une première équipe devait se déplacer dans la pièce en tirant une carriole miniature. Les autres chatons se tenaient dans la carriole, immobiles. Après dix jours dans cet appareil, les chatons ont été libérés et leur vision a été testée. Held et Hein ont découvert que la vision du chat actif était normale, mais que la vision de l'autre était anormale à trois égards : il ne cligne pas des yeux lorsque des objets se profilent vers lui, il a du mal à guider visuellement ses pattes et il n'évite pas les falaises visuelles. Ils ont conclu que l'interaction physique avec le monde est nécessaire au développement de la vision. Dans les termes de Varela *et al.* (1991) : « voir des objets ne consiste pas à en extraire des traits visuels, mais à guider visuellement l'action dirigée vers eux. » (p. 237)

élèves sont censé·e·s rencontrer est une forme culturellement et historiquement constituée, qui apparaît en particulier dans l'œuvre de Diophante, à la fin de l'antiquité (L. G. Radford, 2001; Radford, 2020a). Il s'agit de pouvoir exprimer la figure associée à chaque terme de la suite en fonction de variables et leur relation, c'est-à-dire « une co-variation qui porte sur le nombre de chaque terme et le nombre de carrés dans les rangées du bas et du haut de ce terme » (p. 20). Lors de la résolution de la tâche, les élèves avaient néanmoins tendance à se focaliser uniquement sur l'aspect numérique de la suite en détriment des relations géométriques. Elles/ils exprimaient souvent les termes de la séquence présentée numériquement, au moyen du dénombrement de la quantité totale de carrés.

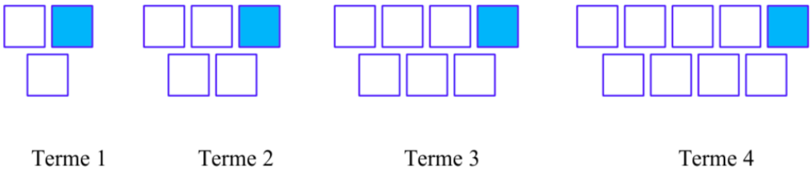


Figure 3.2 – Les premiers termes de la suite explorée par les élèves, image extraite de Radford (2020a).

Afin que les élèves puissent percevoir les termes de la suite comme composées de deux lignes de carrées, un acte dit *intentionnel* ou « a form of intuiting it » (Radford, 2013b, p. 62) doit se manifester (Radford, 2010a; Radford, 2013b). Radford reprend l'exemple de la séquence susmentionnée pour interpréter à l'instar de Husserl (1931) : « to apprehend the terms as divided into two rows, a specific intentional act has to lead perception, for "'intuiting' [an object] already includes the state of being turned towards" it (Husserl, 1931, p. 117). » (Radford, 2010a, p. 4). Ainsi, l'acte intentionnel doit conduire la perception. L'intuition prend dans les réflexions de Radford un sens différent de celui que lui donne Fischbein, pour qui l'intuition est liée à l'élaboration d'explications complémentaires aux concepts formels (voir paragraphe 1.3.1). Radford souligne l'interdépendance de l'appréhension d'un objet conceptuel et de la façon d'orienter la perception vers lui : « the intentional act or manner of intuiting the object and the perceived object thus objectified do not constitute two distinct aspects of perception : they are together the very basic unit of perception. » (*ibid.*, p. 4). Cette hypothèse exprime la proximité de la transformation de la façon de percevoir et le processus d'objectivation. Pour reprendre les mots de Radford : « The capacity to perceive certain things in certain ways, the capacity to intuit and attend to them in certain manners rather than others, belongs to those *sensibilities* that students develop as they engage in processes of objectification. » (*ibid.*, p. 4, italique dans l'original).

Radford (2010a) se concentre sur la perception visuelle des termes de la suite. Selon lui, il ne suffit pas que les élèves aient sous les yeux les figures qui composent la suite pour qu'elles/ils les perçoivent comme prévu. En effet, « They [students] have to go beyond the intentional stance focused on numerosity, which makes the figures appear in a certain way in consciousness, to a different one, based on rows.» (*ibid.*, p. 4). Bien que les élèves aient pu voir les deux lignes de carrés qui constituaient les termes de la séquence, elles/ils n'ont pas considéré cela comme important pour résoudre la tâche, contrairement au jugement des mathématicien·e·s. Les yeux des mathématicien·e·s ont subi, comme le dit Radford (Radford, 2010a ; Radford, 2013b), un long processus de *domestication*. La domestication des yeux consiste en le processus qui les transforme en un organe intellectuel sophistiqué, le développement de l'œil mathématique, qui permet de voir et de reconnaître d'une manière culturellement « efficace ». Naturellement, plusieurs domestications sont possibles. Ce processus nous semble être en accord avec les propos sur l'apprentissage de la flûte donnés par Varela *et al.* (1991) :

> À mesure que l'on pratique, la connexion entre l'intention et l'acte devient plus étroite, jusqu'à ce que, par la suite, le sentiment d'un écart entre eux disparaisse presque entièrement. On atteint ainsi un certain état qui, phénoménologiquement, donne l'impression de n'être ni purement mental, ni purement physique ; il s'agit plutôt d'un type spécifique d'unité corps-esprit. Et, bien entendu, une multitude de niveaux d'interprétations sont possibles, ainsi qu'en témoigne la diversité de musiciens accomplis. (p. 71-72)

3.3.3 La domestication des mains : une transformation sur la fonction des actions

Nous supposons, à la suite de Radford (Radford, 2010a ; Radford, 2013b), qu'une façon plus sophistiquée de percevoir les situations multiplicatives entraîne des transformations dans la façon de percevoir les actions incarnées. Nous interprétons cette transformation en termes de fonction de l'action (Kirsh et Maglio, 1994). En revenant à l'exemple du partage de galettes, il est possible d'observer que la réalisation de l'action incarnée de partage rapproche l'objectif de donner à chaque enfant une même quantité de galettes. L'action permet, à travers la modification de l'organisation spatiale de la collection, de résoudre le problème qui se pose au sens pratique. Nous considérons que cette action incarnée de partage, qui caractérise un certain type de situation, est une action pragmatique. Dans le cadre artificiel de l'enseignement à l'école primaire, la réalisation de l'action incarnée pour résoudre un problème mathématique nous semble avoir toujours une certaine portée épistémique.

Cependant, nous distinguons deux manières de réaliser l'action, qui se rapportent à des manières de percevoir la relation multiplicative entre grandeurs différentes. Une possibilité est de réaliser l'action afin de produire des transformations effectives dans le monde qui s'obtiennent dans les situations quotidiennes, pour ensuite pouvoir répondre à la question du problème. Une autre possibilité est de réaliser l'action pour rendre apparent la relation multiplicative entre grandeurs à travers les modifications sur l'organisation des objets. L'action est dans ce dernier cas orientée vers l'opération arithmétique de multiplication ou de division. Nous dirons que l'action incarnée est une *action épistémique non-multiplicative*, dans le premier cas, et que l'action incarnée est une *action multiplicative*, dans le second cas.

Ainsi, nous considérons que la fonction multiplicative des actions incarnées doit nécessairement apparaître comme la manifestation d'un acte *intentionnel*. En revenant à la réflexion développée par Radford, « intention and object co-emerge in the objectifying perceptual process » (Radford, 2010a, p. 4). En particulier, la capacité d'orienter la perception des situations impliquant des phénomènes de grandeurs vers l'apparition de la relation multiplicative par les actions est liée au processus d'acquisition des opérations de multiplication et de divisions. Nous dénommons processus de *domestication des mains* la transformation d'un mode et épistémique non multiplicatif vers un mode multiplicatif de l'action incarnée.

3.4 Conclusions

Ce chapitre a été consacré à la perspective de la cognition incarnée et les actions incarnées. Dans une première partie, nous avons détaillé la nature incarnée de la cognition dans la perspective de la cognition sensuelle, développée par Radford. Nous avons clarifié ce que l'on entend par le caractère multimodal de la cognition dans ce cadre, ainsi que la manière dont la cognition sensuelle se réfère à la plasticité de la sensation humaine. Nous avons fait un détour par les artefacts en tant qu'éléments constitutifs de l'acte cognitif. Dans une deuxième partie, nous avons réinterpré la relation de l'action incarnée avec l'apprentissage des opérations de multiplication et de divisions. L'approche vygotskienne par les notions de concepts quotidiens et de concepts scientifiques nous a permis d'interpréter les modèles intuitifs de Fischebin comme la manifestation de l'action incarnée dans la sphère quotidienne. Enfin, nous avons pris appui sur une recherche en théorie de l'action et les réflexions de Radford sur l'intuition et la perception pour proposer une approche théorique de l'implication des actions incarnées dans l'apprentissage des opérations de multiplication et de divisions : le processus de domestication de mains. Nous avons introduit une catégorisation d'actions incarnées selon leur fonction, consistant en *actions multiplicatives* et *actions épistémiques non multiplicatives*. Loin de chercher une délimitation stricte, cette distinction vise à nous aider à interpréter les transformations que la perception des élèves sur les actions incarnées peut subir dans l'apprentissage.

Dans les chapitres 2 et 3, nous posons les bases théoriques de notre objet d'étude : l'implication du corps dans l'apprentissage des opérations de multiplication et de division. Cependant, une dimension fondamentale de l'activité en classe n'a pas été suffisamment abordée, à savoir la dimension sémiotique. Dans le chapitre 4, nous approfondissons notre perspective à cet égard, en nous concentrant sur une ressource sémiotique incarnée d'une importance vitale au moment d'aborder l'implication du corps dans l'apprentissage : les gestes.

Chapitre 4

Dimension sémiotique de l'activité et questions de recherche

Les perspectives sémiotiques ont largement fourni des approches théoriques et des outils méthodologiques pour l'étude de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Arzarello, 2006 ; Houdement et Petitfour, 2018). Étant donné que les approches théoriques sémiotiques ne constituent pas des théories didactiques, elles doivent s'intégrer dans une théorie d'enseignement et d'apprentissage (Radford et Sabena, 2015). Dans une approche matérialiste dialectique, la dimension sémiotique de l'activité est centrale dans le processus d'objectivation. Ce chapitre est consacré à la clarification des notions qui sous-tendent la perspective sémiotique que nous adoptons dans cette recherche. En complément du caractère multimodal, au sens de la cognition sensuelle (voir section 3.1), et du caractère intersubjectif de l'activité en classe (qui s'exprime par exemple dans la notion de ZDP, décrite dans la section 2.1.1), la perspective sémiotique apporte une autre couleur à la palette de l'image matérielle et sensuelle du processus d'objectivation.

Dans la section 4.1, nous exposons l'approche sémiotique qui sous-tend la TO. Notre description sera portée de façon privilégiée sur le geste en tant que ressource sémiotique incarnée. Puisque la pensée multiplicative que nous étudions est médiatisée par des artefacts de manipulation et des artefacts symboliques, nous complétons la perspective sémiotique de la TO avec certaines notions de la théorie de la médiation sémiotique, discutée dans la section 4.2. Enfin, dans la section 4.3, nous énonçons nos questions de recherche.

4.1 Notre approche sémiotique

Le recours à la sémiotique en *Mathematics Education* et didactique des mathématiques est lié à l'intérêt porté sur les signes et les significations. En particulier, le sens, ce que nous entendons exprimer ou communiquer, ne peut entrer en présence que par des signes, il doit être *sign-ifié* (L. Radford et al., 2011). En suivant Radford (2006), la sémiotique peut être comprise comme une discipline qui aborde la question de la façon dont les signes signifient. Dans les approches de Saussure (De Saussure, 1916) et de Peirce (Hartshorne, Weiss, Burks, et al., 1958), souvent utilisées en Mathematics Education et didactique des mathématiques, les signes sont essentiellement des dispositifs de représentation (Radford, 2016), ce qui renvoie à une perspective transcendantale selon laquelle les objets conceptuels sont déjà là avant l'activité sémiotique, tout comme c'est le cas chez Platon, Kant et Husserl (Radford 2006a). En revanche, les signes sont pour Vygotski des outils de réflexion qui permettent aux individus de planifier l'action (Radford et Sabena, 2015), c'est-à-dire des outils médiateurs ou psychologiques (Radford 2014b). Bien que la TO prenne appui sur la psychologie culturelle de Vygotski, la TO adopte une approche matérialiste dialectique au sein de laquelle les signes et les artefacts acquièrent un rôle différent, comme nous l'avons dit dans les chapitres 2 et 3 : ils font partie de la pensée. La texture de la pensée est de nature sémiotique, dit Radford (2015b).

Dans le paragraphe 4.1.1, nous précisions la place que les signes et les artefacts ont dans l'objectivation selon la TO. Dans le paragraphe 4.1.2, nous nous référons aux gestes en tant que ressource sémiotique incarnée, en appui sur les travaux de McNeill. Dans le paragraphe 4.1.3 nous décrivons la notion d'unités idéelles et matérielles, en référence à la nature des relations du matériel et du conceptuel.

4.1.1 Sémiotique et objectivation

L'approche sémiotique présentée dans la TO conçoit la culture matérielle [1] en général (les signes, les artefacts, etc) comme étant indissociable de la conception de l'idée matérialiste dialectique de l'activité (Radford, 2016). Rappelons que pour qu'un objet-savoir se *matérialise*, par l'effet médiateur de l'activité, il doit acquérir des déterminations concrètes et sensibles, à tra-

1. Radford (2016) distingue deux niveaux dans lesquels la dimension sémiotique se manifeste. L'un d'entre eux, que nous ne développons pas ici, correspond aux superstructures de significations culturelles qui façonnent et organisent l'activité et le savoir, également dénommés Systèmes Sémiotiques de Signification Culturelle (Radford, 2003 ; Radford, 2011a).

vers les signes, les artefacts et la culture matérielle en général. Ces ressources participent donc du processus d'objectivation du savoir. Pour reprendre les mots de Radford : « Gestes, langage, symboles se convertissent ainsi en constituants mêmes de l'acte-cognitif qui positionne l'objet conceptuel non pas à l'intérieur de la tête mais sur le plan social. » (Radford, 2011a, p. 83). Ainsi, Radford et Sabena affirment que l'objectivation est un processus sémiotique à part entière (Radford et Sabena, 2015). Autrement dit, « In the course of the objectification processes, students and teachers produce multimodal actions. Through these actions complex meanings are formed in an inter-subjective way » (*ibid.*, p. 166).

Dans la TO, toutes les ressources sémiotiques que les élèves et les enseignant·e·s mobilisent au sein du processus d'objectivation sont appelées *moyens sémiotiques d'objectivation* (Radford 2002a, 2003a), conformément au rôle qu'elles jouent dans le processus d'objectivation. Radford (2014b) cite Vygotsky pour se référer également aux moyens sémiotiques d'objectivation « as means of voluntary directing attention, as means of abstracting and isolating features, and as a means of … synthesizing and symbolising » (Vygotski, 1987, p. 164). Autrement dit, ce sont l'éventail de ressources avec lequel « they [stundents and teachers] come to form their intentions and ideas against the background of culturally and historically constituted ways of thinking and acting » (Radford et Sabena, 2015, p. 166). Comme souligne Radford, les moyens sémiotiques d'objectivation peuvent inclure des signes mathématiques matériels, des objets, des gestes, une activité perceptive, le langage écrit, la parole, la position corporelle des élèves et de l'enseignante, le rythme, etc (Radford, 2016).

L'élaboration active de significations qu'implique le processus d'objectivation exprime la rencontre du subjectif et du collectif. À cet égard, Radford *et al.* reprennent la distinction de Leontiev entre d'une part la signification ou signifié (« meaning », en anglais) et d'autre part le sens (« sense », en anglais) : le premier est historique et idéal attaché à l'objet conceptuel, le second est personnel, subjectif (Radford *et al.*, 2011). Dans ces termes, la construction de significations par les élèves comprend le développement d'un sens subjectif : une co-appropiation individuelle du monde culturel objectif, une réfraction des significations historiques et politiques à travers le prisme de l'individu (Radford *et al.*, 2011). Cette rencontre caractérise l'objectivation des savoirs, en mots de Radford (2000) : « As we see it, knowledge appropriation is achieved through the tension between the students' subjectivity and the social means of semiotic objectification. » (p. 241). Le sens subjectif élaboré par les élèves au sein du travail conjoint consiste, selon Radford *et al.* (2011), au rapport entre les actions qui permettent de réaliser l'activité et les motifs de cette activité. Cette perspective met en relief le fait que « here are uncountable manners of abstracting and generalizing the always individual and contingent facts intuitively given to us by the senses and filtered by culture » (Radford, 2010a, p.2).

4.1.2 Les gestes

L'interprétation du rôle de gestes dans la cognition varie en fonction de la perspective sur la cognition au sein de laquelle ils sont considérés, comme le signale Radford : « Conceiving of thinking as something intrinsically mental easily leads to thinking of gestures as "windows" on inner thoughts or as conveyors of ideas that are already somewhere in the mind awaiting the proper material, namely, verbal expression. » (Radford, 2009a, p. 114). La perspective multimodale de la cognition permet de les considérer au cœur de la cognition humaine (Roth, 2001) et comme des « *genuine constituents* of thinking » (Radford, 2009a, p. 114, italique dans l'original). Diverses recherches en Mathematics Education (Arzarello *et al.*, 2009 ; Edwards, MooreRusso, et Ferrara, 2014 ; Goldin-Meadow, 2004 ; Roth, 2001) et en didactique des mathématiques (Houdement et Petitfour, 2017 ; Houdement et Petitfour, 2018 ; Petitfour, 2015) se focalisent sur le rôle crucial que les gestes peuvent jouer dans l'enseignement et l'apprentissage de mathématiques.

Au sens usuel du mot, les gestes désignent des mouvements corporels d'une personne perçus comme exprimant une manière d'être ou de faire (CNRTL en ligne, 2021). Dans le cadre psycholinguistique, les gestes réfèrent aux mouvements spontanés des mains, dans la plupart de cas, produits par des personnes dans le but de communiquer (McNeill, 2005, Kendon, 1988). McNeill reprend les types de gestes décrits par Kendom (Kendom, 1988) et propose la classification suivante : les gesticulations, des gestes non conventionnels qui accompagnent la parole ; les emblèmes, gestes symboliques ayant une signification communément acceptée dans une culture ; la pantomime, une performance silencieuse ; et la langue de signes, dans laquelle les gestes constituent des signes lexicaux (McNeill, 2005 ; McNeill, 2010).

McNeill étudie différentes propriétés linguistiques des gestes en relation à la parole à travers d'une organisation qu'il dénomme les *continuums de Kendon* (McNeill, 2005 ; McNeill, 2010). Les continuums de Kendom présentés par McNeill (2005) sont structurés en fonction de propriétés linguistiques, les gesticulations et la langue de signes constituant toujours les extrêmes. Par exemple, si l'on considère différents types de gestes le long du continuum de Kendom **Gesticulation > Pantomime > Emblèmes > Langue de signes**, on a : que le degré auquel le geste présente les propriétés d'une langue augmente, et que la contrainte de synchroniser la parole et les gestes diminue (sans utilisation de la parole pour les trois derniers). En particulier (et c'est ce que nous souhaitons retenir ici), les gestes qui se produisent de manière synchrone avec la parole, les gesticulations, ont des propriétés différentes de celles du langage, par opposition aux gestes qui constituent la langue des signes.

Les gesticulations sont considérées co-expressives avec la parole, dans le sens où « gesture and speech express the same underlying idea unit but express it in their own ways—their own aspects of it, and when they express overlapping aspects do so in distinctive ways » (McNeill, 2005, p. 22). McNeill (Mcneill, 1992, 2005) cite des preuves de diverses sources pour soutenir cette hypothèse, comme le fait que les personnes aveugles de naissance, qui n'ont jamais observé de gesticulations, produisent des gesticulations aussi souvent que les personnes voyantes et même si la destinataire est une autre personne aveugle (McNeill cite l'étude menée par Iverson et Goldin-Meadow, 1998). Les gestes qui sont étudiés par McNeill et, en général, en Mathematics Education et la didactique des mathématiques sont les gesticulations. S'agissant du type de geste qui nous intéresse, nous nous référons aux gesticulations simplement en tant que gestes, comme le fait McNeill dans son travail.

Les gestes et la parole sont étroitement liés et constituent des unités psycholinguistiques indissociables : les unités geste – discours (ou geste – parole). Ces unités se produisent au sein d'une *dialectique imagerie-langage*, qui implique à la fois un plan verbal de caractère segmenté et analytique, et un plan d'imagerie, de caractère global et synthétique (McNeill, 2005). L'imagerie en question est incarnée par les gestes. Le caractère global de l'imagerie est que les significations des « parties » d'un geste sont déterminées par la signification du tout, par opposition à la construction de la signification du tout à partir des significations des parties, c'est-à-dire de façon segmentée, sur le plan verbal. Le terme synthétique fait référence au fait qu'un seul geste concentre différentes significations qui pourraient être réparties sur toute la phrase qui l'accompagne. Le terme synthétique s'oppose au terme analytique qui décrit le plan verbal. Dans le plan verbal, des mots distincts sont utilisés pour construire des significations.

4.1.3 Le sensuel et le conceptuel comme une unité dynamique aux composantes matérielles et idéelles

Dans son étude de la relation entre la pensée et le langage, Vygotski considère que la signification de mots est à la fois liée au domaine de la pensée et du langage, elle constitue une unité de pensée verbale (Vygotski, 1934). Selon Vygotski, cette analyse par unités est bien adapté au fait que les unités conservent les propriétés du tout, par opposition à une analyse basée sur les « composantes » ou les « éléments », qui perd des propriétés fondamentales des phénomènes observés. Par exemple, si l'on s'intéresse aux propriétés de l'eau uniquement par le biais d'une analyse de ses éléments, on n'est pas en mesure de comprendre sa capacité à éteindre le feu : l'oxygène est un comburant et l'hydrogène est une substance très inflammable. En reprenant cette idée, Radford *et al.* (2011) expriment la relation entre le sensuel ou le concret et le conceptuel en les comprenant comme des composantes d'une même unité organique (Radford, 2014a). En d'autres termes, « Thinking turns out to be a dynamic *unity of material and ideal components*—a tangible social practice materialized in the body, in the use of signs, and artifacts of different sorts. » (Radford *et al.*, 2011, p. 154, italique dans l'orignal). Il s'agit d'une notion fondamentale pour étudier les transformations du sens des actions incarnées qui peuvent avoir lieu dans l'apprentissage des opérations de multiplication et de divisions. Dans une certaine mesure, le concept d'unité de composantes matérielles et idéelles semble permettre d'interpréter la relation complexe entre le concret et le formel soulignée par Fischbein (voir section 1.3).

Radford *et al.* (2017) soulignent également la nature dynamique de la pensée : « Thinking is something moving and unfolding—a movement of multiple corporeal, linguistic, symbolic, gestural, tactile, perceptual, physical, aesthetic, and emotional tonalities and positions» (p. 714). L'interaction entre diverses modalités sensorielles et différents signes peut être contractée, subsumée et réorganisée dans des unités psychiques émergentes (L. Radford, Demers, Guzmán, et Cerulli ; Radford, 2014a). Un corollaire méthodologique découle de l'interdépendance des composants matériels et conceptuels de la pensée : l'étude du développement dialectique de celles-ci doit se faire dans son ensemble (Radford, 2012a). Par exemple, un même geste peut, comme l'observe Radford (*ibid.*), signifier quelque chose de conceptuellement sophistiqué ou quelque chose de très simple, en fonction du rôle qu'il joue dans l'unité dont il fait partie. En particulier, les gestes et la parole sont analysés du point de vue de leur co-expressivité, avec les autres ressources sémiotiques en jeu. Radford (voir par exemple Radford et Sabena, 2015) propose la notion de *nœud sémiotique*, qui constitue un outil d'analyse pour attraper la globalité de l'implication de ressources sémiotiques qui interviennent dans l'élaboration d'unités conceptuelles matérielles. Nous faisons intervenir cette notion dans notre recherche au niveau méthodologique (voir section 5.3.1).

4.2 Théorie de la médiation sémiotique

Centrée sur l'idée de médiation introduite par Vygotski (1978), la théorie de médiation sémiotique (TMS) a été élaborée par Bartolini Bussi et Mariotti (2008). Elle rend compte d'un type de médiation particulier : celle produite par les signes et les artefacts. La TMS partage avec la TO l'idée que les connaissances théoriques peuvent dans une large mesure être considérées comme issues d'une mutuelle incidence de l'utilisation des artefacts, dans un processus à long terme dont les traces peuvent parfois être reconstituées (*ibid.*). Ainsi, la théorie vise à décrire et à comprendre le processus qui conduit, par la médiation d'un artefact, à l'appropriation d'un contenu mathématique particulier (Mariotti et Maracci, 2011). L'utilisation des artefacts se rapporte dans la TMS à la réalisation d'une tâche. L'approche cherche à exploiter le jeu de relations entre artefact, tâche et connaissance mathématique (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008). Nous dégageons dans la suite les notions que nous utilisons dans cette recherche, afin de rendre compte de la médiation par des artefacts dans le développement de la pensée incarnée multiplicative.

D'abord, nous rendons compte des notions interreliées de *polysémie* d'un artefact et *potentiel sémiotique* d'un artefact. Ensuite, nous décrivons les types de signes introduits par la théorie.

4.2.1 Polysémie d'un artefact et potentiel sémiotique

À l'instar de Leontiev (1976), la TMS souligne la contrepartie de l'utilisation d'artefacts pour la résolution d'une tâche dans le développement historique et culturel du savoir. Plus précisément, Bartolini Bussi et Mariotti (2008) parlent d'un double lien sémiotique entre un artefact et à la fois une tâche et un savoir : d'une part, un artefact est lié à une tâche spécifique, en lien avec la recherche d'une solution adaptée ; et, d'autre part, le même artefact est lié à un savoir mathématique spécifique. Cela est appelé *polysémie* d'un artefact. La notion de polysémie d'un artefact s'exprime également dans la coexistence de différents systèmes de signes liés à l'utilisation des artefacts. Du point de vue sémiotique, la TMS s'oppose aux perspectives représentationnistes du signe et adhère à l'idée que « les significations proviennent d'interactions complexes entre des signes » (Mariotti et Maracci, 2010, p. 91).

En ce qui concerne la relation entre l'artefact et la tâche, les élèves, ou même l'enseignante, produisent des signes lors de l'interaction avec l'artefact, lesquels sont désignés comme *signes-artefacts*. La signification de ces signes, dénommés par la théorie des *significations personnelles*, entretient un lien fort avec les opérations accomplies dans le contexte de résolution de la tâche (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008). La relation entre artefact et savoir, quant à elle, peut être exprimée par des signes qui sont culturellement déterminés et qui cristallisent le sens des opérations effectuées avec l'artefact (*ibid.*). Il s'agit des *signes mathématiques*, liés aux significations mathématiques telles qu'elles sont partagées dans l'institution où l'activité d'enseignement et d'apprentissage se développe, dans notre cas l'école primaire. Dans la figure 4.1, nous présentons le schéma utilisé par Bartolini Bussi et Mariotti (2008) pour représenter l'articulation des systèmes de signes autour de l'artefact, en relation avec le savoir et la tâche.

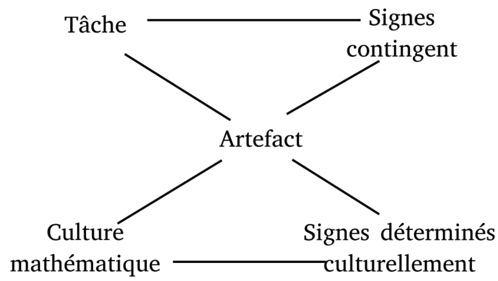


Figure 4.1 – Schéma de la polysemie d'un artefact, extraite et traduite de Bartolini Bussi et Mariotti (2008).

La relation entre un artefact et le savoir est dénommée *savoir évoqué*. Le savoir évoqué réfère à l'intelligence historique et culturelle dont les artefacts, tel que les signes, sont porteurs. Le savoir évoqué, tel que les relations entre les deux systèmes sémiotiques parallèles concernés, n'est certainement pas transparent ni spontanée (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008 ; Radford, 2011a). Dans l'objectif de souligner cette différence Bartolini Bussi et Mariotti proposent la notion de *potentiel sémiotique*. Mariotti et Maracci (2010) donnent la définition suivante :

> Le potentiel sémiotique d'un artefact représente le double lien qui peut s'établir entre i) un artefact et les significations personnelles émergeant de son utilisation finalisée ; ii) cet artefact et les significations mathématiques évoquées par son usage, reconnaissables comme mathématiques par un expert. (p. 92)

4.2.2 Types de signes

Dans le processus long et complexe d'évolution de signes, la TMS distingue trois types de signes : les *signes mathématiques*, les *signes-artefacts* et les *signes pivots*. Les signes mathématiques « refer to the mathematics context, they are related to the mathematical meanings as shared in the institution where the classroom is (e. g. primary school; secondary school) » (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008, p. 19). Les signes mathématiques font partie de l'héritage culturel que les élèves rencontrent en classe (*ibid.*). Étant donné un artefact, les signes-artefact sont ceux produits dans le contexte de résolution de tâches impliquant l'artefact. Les signes pivots sont des signes utilisés comme pivot pour favoriser le passage du contexte de l'artefact (signes-artefact) au contexte mathématique (signes mathématiques). L'utilisation des signes à ce propos se fonde sur leur caractère polysémique, tel que les artefacts, en ce qu'ils peuvent référer à la fois à des actions instrumentées spécifiques, au langage naturel et au domaine mathématique, selon le contexte (*ibid.*). Les signes pivot constituent un premier détachement de l'artefact, au sein d'un processus de généralisation, tout en maintenant néanmoins le lien avec celui-ci. La référence au contexte permet de ne pas perdre la signification personnelle qui est attachée aux signes. Les signes pivots peuvent correspondre à des termes hybrides, produits et utilisés au sein de la communauté de classe (*ibid.*).

4.3 Questions de recherche

Nous nous intéressons à la participation du corps dans l'apprentissage des opérations de multiplication et de division à l'école primaire. Nos questions de recherche cherchent à approfondir ce sujet. Il s'agit de deux questions de recherche principales. Ces questions sont déclinées en d'autres questions de recherche qui permettent d'orienter notre réflexion. Notre recherche se concentrera sur les élèves de CE2 (troisième année).

4.3.1 Première question

La première grande question de recherche est axée sur la rencontre des élèves avec la pensée multiplicative :

Comment la pensée multiplicative peut-elle émerger dans l'activité de la classe lorsque les élèves de CE2 résolvent des tâches multiplicatives?

Répondre à cette question, c'est rendre compte du processus d'objectivation dans lequel les élèves apprennent à se situer de manière critique dans les modes de pensée culturels et historiques constitués autour des grandeurs. Nous avons émis l'hypothèse que la rencontre avec la pensée multiplicative que nous avons décrite dans le chapitre 2 peut donner lieu à des manières profondes de penser, de réfléchir, d'argumenter et d'agir. Pour approfondir cette question, nous posons la question suivante :

Les formes numériques traditionnelles, configurent-elles les conditions pour la rencontre de la pensée multiplicative à travers des expressions numériques ? Quelles pistes peut-on en tirer pour rendre accessible la pensée multiplicative aux élèves de CE2 ?

Nous nous intéressons à la rencontre des élèves avec la pensée multiplicative médiée par des artefacts manipulatoires et symboliques. Étant donné la nature intrinsèquement sémiotique du processus d'objectivation et la nature multimodale de la cognition, nous nous interrogeons sur les ressources sémiotiques multimodales auxquelles les enseignantes et les élèves peuvent avoir recours dans le processus d'objectivation. Notre question est la suivante :

Quels moyens sémiotiques l'enseignante et les élèves utilisent-elles/ils au sein du processus d'objectivation des opérations de multiplication et de divisions ? Quelles fonctions sémiotiques dépendantes à la fois de la perception, du langage, des actions, des gestes et des artefacts peuvent être identifiées ?

4.3.2 Deuxième question

Notre deuxième question concerne la relation entre le processus d'objectivation des opérations de multiplication et de divisions et la transformation de la manière de percevoir les actions incarnées. Il s'agit de caractériser le processus de *domestication des mains* que nous avons introduit. À ce propos, nous nous interrogeons sur la pertinence du cadre interprétatif des fonctions d'action incarnées (*actions multiplicatives* et *épistémiques non multiplicatives*). La question est :

Comment les actions incarnées peuvent-elles être impliquées dans le processus d'objectivation ?

En particulier, nous abordons la manifestation concrète des actions incarnées lors de la manipulation. Nous la posons en termes de fonctions d'actions.

Comment les actions multiplicatives *et les* actions épistémiques non multiplicatives *peuvent-elles se manifester dans la manipulation ?*

Dans le cadre du travail conjoint, une autre question est de savoir comment les enseignant·e·s peuvent contribuer à créer les conditions pour que le processus de domestication des mains se produise. Nous nous interrogeons à cet égard :

Est-il possible d'observer chez des enseignant·e·s une position différenciée face à des actions incarnées pragmatiques et des actions incarnées multiplicatives ? Quelles sont les implications sur le processus de transformation de la perception des actions incarnées ?

Enfin, nous nous interrogeons sur le processus de domestication chez les élèves, ainsi que sur les liens de ce processus avec l'acquisition des opérations de multiplication et de divisions. La question est la suivante :

Est-il possible d'observer chez les élèves une transformation dans la perception des actions incarnées ? Dans quelle mesure cette transformation s'accompagne-t-elle d'une progression dans le processus d'objectivation ?

4.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons développé l'approche sémiotique que nous adoptons dans notre recherche. Sur la base des travaux de Radford, nous avons abordé le rôle des ressources sémiotiques dans le processus d'objectivation. Nous nous sommes concentrés sur les gestes en tant que ressource sémiotique incarnée, en appui sur les travaux en psycholinguiste de McNeill. Nous avons décrit certains concepts centraux de la théorie de la médiation sémiotique, afin de soutenir nos réflexions ultérieures sur les artefacts. Nous avons également évoqué une notion importante pour la TO qui rend compte de la transformation des relations complexes entre le concret et le conceptuel : les unités de composants matériels et idéaux. Enfin, nous avons formulé nos questions de recherche.

La deuxième partie de cette thèse est consacrée à la description de la méthodologie que nous avons suivie. De ce point de vue, nous avons cherché à développer une méthode pour étudier nos questions de recherche. Nous rendons compte des outils méthodologiques et d'analyse que nous allons utiliser. Dans cette partie nous décrivons notre démarche pour créer les conditions matérielles pour l'observation de l'activité de la classe, y compris l'élaboration des tâches multiplicatives. Nous allons également rendre compte de l'élaboration de deux artefacts, l'un de manipulation et l'autre symbolique.

Deuxième partie

Méthodologie

Introduction

Radford (2008) conçoit une *théorie* dans le domaine de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques comme un triplet interdépendant (P, M, Q), où P désigne les principes théoriques, M la méthodologie associée et Q représente les questions de recherche. Les composantes de ce triplet sont en relation dialectique les unes avec les autres, de sorte que les principes théoriques ne précèdent pas la méthodologie ou les questions de recherche. En fait, dans leur interrelation, chacune des composantes modifie les autres (pour une discussion approfondie des questions méthodologiques, voir Radford et Sabena 2015). En particulier, Radford et Sabena (2015) citent à cet égard le raffinement de la sensibilité méthodologique et théorique que la prise en compte du rythme comme moyen sémiotique fondamental d'objectivation a entraîné dans la TO.

Pour cette recherche, nous ne saurions, dans les contraintes imposées par la présentation d'une thèse, rendre compte de toutes les allées et venues qui ont façonné notre travail. L'ordre séquentiel suivi par la présentation est, de ce point de vue, trompeur. Nous nous contenterons de dire qu'une première analyse des données a mis en lumière certains faits bruts qui nous ont amenées à reconsidérer les principes théoriques qui sous-tendaient notre regard, et nous ont conduit à adopter la TO comme ancrage théorique. Ce choix a bien évidemment impliqué d'importants ajustements de la recherche.

Cette partie est consacrée à la description de la méthodologie, suivie de la description du recueil et de l'analyse de données envisagées.

Dans le chapitre 5, nous rendons ainsi compte des fondements théoriques qui pilotent la méthodologie que nous avons élaborée. Dans le chapitre 6, nous faisons référence à la conception des activités en classe. Enfin, dans le chapitre 7 nous précisons le contexte de la recherche et le recueil de données.

Sommaire

Chapitre 5

Fondements théoriques de la méthodologie

Nous avons largement fondé notre méthodologie sur les principes méthodologiques utilisés dans des publications qui s'inscrivent dans le cadre de la TO (Radford, 2015b, Radford et Sabena, 2015; Radford, 2017a). Concernant l'objet de la méthodologie dans la TO, nous reprenons les termes de Radford et Sabena : « Within this context [The theory of objectification], the account of learning rests on the account of how knowledge is transformed from pure possibility into an object of consciousness. The method is the critical and reflexive endeavour through which this transformation is investigated » (Radford et Sabena, 2015, p. 179). Ainsi, la méthodologie adoptée par la TO cherche à retracer les processus d'objectivation et de subjectivation au sein desquels l'apprentissage a lieu, ainsi que les conditions qui permettent ou entravent l'apprentissage. D'une part, nous rendons surtout compte du processus d'objectivation d'une pensée multiplicative, c'est-à-dire de la familiarisation progressive avec des significations culturelles historiquement constituées et des formes de raisonnement et d'action dont nous avons rendu compte dans le chapitre 2. Sans nous focaliser sur cette dimension de l'apprentissage, nous essayons de suivre, d'autre part, les processus par lesquels les élèves se positionnent dans les pratiques culturelles instanciées par la classe de mathématiques : les processus de subjectivation.

Dans la perspective de la TO, l'unité méthodologique d'analyse est l'activité de classe (Radford, 2017a). En particulier, la structure objet-but-tâche, que nous abordons dans la section 2.1.2, est centrale pour comprendre la place de la conception des tâches dans l'activité. En effet, comme nous l'avons indiqué, l'objet de l'activité est décortiqué en buts, autour desquels sont élaborés les tâches de la séquence. La planification didactique de l'activité dans ces termes correspond à la *composante didactique* ou la *composante* Φ de l'activité (Radford, 2015b; Radford, 2017a). La composante didactique est comprise comme étant contenue dans l'activité en classe proprement dite, c'est-a-dire celle qui actualise le savoir. L'activité en classe est désignée par la lettre Θ. Nous pouvons alors écrire $\Theta = (\Phi, \ldots)$. Ainsi, bien que planifiée dans sa composante Φ, l'activité en classe, l'activité Θ, est perçue comme un événement émergent, imprévisible et non reproductible : « as a dynamic system going through states out of which the conflicting significations arise. » (Raford et Sabena, 2015, p. 166). D'où l'importance de l'observation au niveau des réalisations effectives en classe pour accéder aux questions sur l'enseignement et l'apprentissage : c'est ainsi que nous avons procédé dans cette recherche.

Plus concrètement, nous avons analysé six sessions au total (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 et S_6), dont trois ont été analysées en détail (S_1, S_2 et S_3), comme nous le verrons plus loin. Dans le cadre d'un travail collaboratif avec une enseignante, nous avons élaboré des tâches qu'elle devait mettre en œuvre dans sa classe de CE2 (8-9 ans). Nous avons également conçu des artefacts pour résoudre ces tâches. Nous avons complété ces analyses par des entretiens avec des élèves. Le chapitre 6 traite de la planification des tâches, du développement des artefacts, de la justification des entretiens et de la collecte des données. En tenant compte de la structure de l'activité mentionnée ci-dessus, l'analyse de l'activité est constituée par une analyse *a priori* des tâches, relative à la composante didactique Φ de l'activité, et une analyse de l'activité en classe Θ. Nous les complétons avec des outils d'analyse tirés de la TMS, de la théorie de l'activité didactique (Robert, 2008 ; Vandebrouck et Robert, 2017) et de l'approche des faisceaux sémiotiques (Arzarello, 2006 ; Arzarello *et al.*, 2009).

Les sections suivantes précisent les outils méthodologiques qui soutiennent les analyses effectuées : dans la section 5.1, ceux liés à l'analyse du potentiel sémiotique des artefacts, dans la section 5.2, ceux qui structurent l'analyse *a priori* des tâches et, enfin, dans la section 5.3, ceux qui soutiennent l'analyse de l'activité proprement dite. Nous terminons par une conclusion du chapitre dans la section 5.4.

5.1 Analyse du potentiel sémiotique des artefacts

Notre analyse du potentiel sémiotique des artefacts est basée sur la TMS. Les artefacts effectivement utilisés sont d'abord décrits en termes généraux dans la section 6.2 du chapitre 6 et l'analyse de leur potentiel sémiotique sera présentée dans le chapitre 7. Comme nous l'avons signalé, il s'agit d'un artefact de manipulation et d'un artefact symbolique. Notre analyse fait intervenir la notion de *schème d'utilisation*, que nous précisons dans le paragraphe suivant. Notre analyse du potentiel sémiotique des artefacts comprend alors l'identification des schèmes d'utilisation en relation avec les tâches dans lesquelles les artefacts sont utilisés. Nous repérons ensuite le savoir mathématique évoqué par l'utilisation des artefacts, ainsi que les sources potentielles d'émergence de significations personnelles.

La TMS articule l'utilisation des artefacts avec la résolution de tâches par une opérationnalisation de l'approche instrumentale de Radardel (Rabardel et Samurçay 2001; Rabardel 1995; Trouche 2005). L'approche instrumentale distingue les artefacts des instruments : un artefact est un objet en soi, symbolique ou matériel, conçu pour satisfaire un besoin spécifique, tandis qu'un instrument consiste en une entité mixte composée d'artefacts et de composantes cognitives (Mariotti et Maracci, 2010). Les composantes cognitives des instruments sont constituées par formellement les *schèmes d'utilisation*. La notion de schème est une redéfinition de la notion piagetienne proposée par Vergnaud (1990). Vergnaud caractérise les schèmes comme des organisations invariantes de l'activité. Les schèmes d'utilisation des artefacts sont donc composés d'invariants opératoires, d'anticipations du but à atteindre, de règles d'action et d'inférences qui émergent dans l'utilisation de l'artefact.

5.2 L'analyse *a priori* Φ de l'activité

Notre analyse *a priori* vise à identifier les spécificités que la tâche comporte du point de vue mathématique. L'objet de l'activité est la rencontre avec la pensée multiplicative esquissée (voir section refC2S2). Ces spécificités façonnent potentiellement l'actualisation du savoir qui a lieu lors de la résolution de la tâche. Nous nous appuyons sur des outils d'analyses empruntés de la théorie de l'activité didactique (TDA). Du point de vue de la TDA, l'objectif de l'analyse *a priori* des tâches est de « circonscrire ce qui est en jeu sur le plan des mathématiques à utiliser » (Robert et Vandebrouck, 2014, p.14). L'analyse *a priori* fournit un cadre de référence par rapport à ce qui est *attendu* [1] du point de vue mathématique, ce qui permet d'apprécier l'activité qui a effectivement lieu par leur confrontation. Pour reprendre les termes de Robert (2003), les analyses *a priori* et *a posteriori* (cette dernière correspond donc à l'analyse de l'activité Θ dans la TO) de l'activité de l'enseignante et des élèves cristallisent, dans la perspective de la TDA, les

1. Nous tenons à souligner que l'analyse *a priori* basée sur la TDA est, en ce sens, différente à celle de la théorie de situations didactiques (TSD), dans la mesure où cette dernière vise à rélever l'ensemble des stratégies qui permettent de résoudre les tâches.

relations qui peuvent être établies par rapport au couple {tâches prescrites, déroulement}.

Notre adaptation de l'analyse *a priori* de la TDA rend compte des notions mathématiques et des propriétés qui sont convoquées pour la résolution de la tâche, ainsi que les opérations qui sous-tendent la résolution de la tâche. Nous soulignons qu'il s'agit d'une reformulation de la terminologie utilisée par la TDA. Selon ce cadre théorique, les connaissances mathématiques sont mises en fonctionnement lors de la résolution de tâches (Robert, 2008 ; Robert et Vandebrouck, 2014 ; Vandebrouck et Robert, 2017). Nous considérons qu'une perspective ergonomique sous-tend cette perspective, de sorte que le savoir mathématique est perçu d'un point de vue opérationnel. Il s'agit d'une perspective ontologique et épistémologique des mathématiques qui est différente de celle dont nous avons fait état dans la première partie de la recherche. Cette différence qui nous amène notamment à reformuler les outils empruntés de cette théorie dans nos termes. La TDA est pourtant compatible avec la TO en termes de la structure objet-but-tâche de l'activité, étant donné le support commun dans le travail de Leontiev.

Dans la terminologie de la TDA, l'analyse *a priori* permet de cerner l'*activité attendue*, c'est-à-dire, l'activité à développer par les élèves en relation aux savoirs identifiés (Vandebrouck et Robert, 2017). Nous précisons dans le paragraphe suivant les outils méthodologiques que nous avons empruntés à la TDA pour mener l'analyse.

5.2.1 Outils méthodologiques pour l'analyse *a priori*

Dans l'analyse *a priori* Φ des tâches, nous discutons d'abord des aspects linguistiques de la formulation de l'énoncé et des conditions de prescription des tâches. Nous nous focalisons sur l'impact que cela peut avoir sur l'activité attendue. Dans la suite, nous faisons référence aux outils d'analyse empruntés à la TDA et mobilisés pour effectuer notre analyse *a priori* des tâches.

Nous précisons les éléments qui constituent notre grille d'analyse dans l'introduction du chapitre 8, consacré à l'analyse de l'activité en classe.

Découpage de la tâche

Les sous-tâches consistent en des buts à atteindre à l'intérieur de la tâche. Le découpage en sous-tâches sert à structurer notre analyse de l'activité attendue et l'analyse *a posteriori* de la tâche en épisodes. Nous attribuons un codage aux sous-tâches identifiées pour faciliter la référence à celles-ci dans nos analyses *a priori* et de l'activité en soi.

Sous-activités mathématiques

L'activité attendue au sein de la TDA se caractérise par le développement des *sous-activités mathématiques*, qui consistent en des *opérations* qui donnent lieu aux adaptations requises par la résolution de la tâche. Les opérations sont définies dans la TDA, à l'instar de Galperine (1966) et Léontiev (1984) dans le cadre du découpage en trois niveaux de finalité suivant : « l'activité associée à un motif d'une part; l'action associée au but de l'activité d'autre part; et enfin les opérations qu'il faut effectuer pour réaliser l'action sous certaines conditions » (Vandebrouck et Robert, 2017, p. 5). Les sous-activités mathématiques reprennent les fonctions en jeu dans les opérations, à savoir : la *fonction d'orientation*, liées à la sélection des opérations d'exécution les plus adaptées pour atteindre le but visé; la *fonction d'exécution*, permettant d'atteindre le but; et la *fonction de contrôle*, qui sert à évaluer les résultats obtenus (*ibid.*).

Les descriptions et les opérationnalisations des sous-activités mathématiques faites par Robert et Vandebourck dans certaines recherches (Robert, 2003; Robert, 2004; Robert, 2008; Robert et Vandebrouck, 2014; Vandebrouck et Robert, 2017), nous amènent à décrire, dans le contexte de notre recherche, trois types de sous-activités mathématiques :

- les *sous-activité de reconnaissance* : l'identification des notions, propriétés et relations mathématiques entre les éléments concernés par la tâche. Dans notre recherche, nos tâches impliquent des relations au sein du cadre géométrique, du cadre de grandeurs et du cadre numérique;
- les *sous-activités de traitement* : l'interaction avec l'artefact de manipulation (le cas échéant) et les contrôles qui lui sont associés, l'expression et exécution de calculs, et changements de cadre;
- et les *sous-activités d'organisation* : repérage des raisonnements à mener, avec les étapes éventuelles dans leur ordre, et reprises de questions précédentes.

Nous repérons dans notre analyse *a priori* les sous-activités qui doivent être développées pour la résolution des sous-tâches identifiées. En particulier, cette analyse nous permet de caractériser les tâches en tant que *tâches complexes*. Les tâches complexes sont celles qui « activent et imbriquent plusieurs de ces sous-activités mathématiques » (*ibid.*, p.8). Les tâches complexes s'opposent aux tâches simples, pour lesquelles « les élèves n'ont pas à articuler plusieurs aspects, ni à mettre en fonctionnement simultanément plusieurs propriétés » (Robert, 2003, p.67).

Nous considérons que les limites de la catégorisation sont loin d'être strictes. Nous l'interprétons comme une tentative pour nous aider à comprendre et à structurer ce qui est mathématiquement envisagé pour la tâche. Nous tenons à souligner qu'il ne s'agit pas pour nous de reconstruire une chronologie dans ce qui est attendu de l'élève. Par exemple, il nous semble que penser que les sous-activités de reconnaissance précèdent les sous-activités de traitement contredit absolument nos hypothèses sur la cognition et l'apprentissage.

Scénario de la tâche

Un autre aspect crucial de ce cadre théorique est que les analyses de tâches sont relatives au contexte de sa prescription, qui constitue la situation (pas au sens fort de Brousseau) entourant l'activité. En conséquence, « aucune analyse a priori n'est totalement transférable d'un contexte à l'autre » (Vandebrouck et Robet, 2017, p.8). L'analyse de tâches implique donc la constitution du *scénario*, qui comprend le niveau scolaire considéré, les programmes en vigueur, les conditions de l'établissement scolaire et une certaine connaissance de la progression globale de la classe. Nous nous référons au scénario des tâches analysées dans la section 6.1 du chapitre 6.

5.3 Analyse de l'activité en classe Θ

L'analyse de l'activité en classe tente de reconstruire [2] l'activité conjointe discursive et non discursive des élèves et de l'enseignante du point de vue du caractère sémiotique et multimodal de celle-ci (Radford, 2015b). L'hypothèse sous-jacente est que l'accès à l'apprentissage des élèves, et aux interprétations et aux significations produites par les élèves et les enseignant·e·s est donné, méthodologiquement parlant, par l'éventail de ressources sémiotiques mobilisées, aux niveaux perceptif, auditif, kinesthésique, gestuel, linguistique et symbolique.

L'approche sémiotique adopté par la TO permet d'inclure les moyens d'expression incarnés en tant que ressources sémiotiques et d'examiner ainsi leur relation avec les systèmes sémiotiques traditionnellement étudiés, tels que le symbolisme mathématique écrit (Radford et Sabena, 2015). La méthodologie de TO s'éloigne ainsi des approches exclusivement verbales,

2. De façon similaire, l'analyse *a posteriori* dans la TDA cherche à reconstruire l'activité réalisée par les élèves, considérée comme une activité différente à celle réalisée par l'enseignante. L'activité reconstruite par l'analyse reçoit la dénomination d'*activité possible*, en référence à leur caractère inobservable et inaccessible selon cette approche. Ces activités sont également dites *potentielles*, dans le sens où leur réalisation effective n'est pas vérifiée (Robert, 2003b).

conformément à l'affirmation selon laquelle « Although we come from a logocentric tradition, that is, a tradition that emphasizes the role of language and discourse in knowing, we maintain that activity-based consciousness often emerges at a sensuous, pre-conceptual, and pre-intentional level » (Radford, 2015b, p. 560). Il s'agit donc d'une méthodologie *multi-sémiotique* (Radford *et al.*, 2006), qui vise à rendre compte de la manière dont l'ensemble des ressources sémiotiques est utilisé par les élèves et les enseignant·e·s au cours des processus sociaux d'objectivation (Radford et Sabena, 2015). Cette méthodologie implique une analyse approfondie, intégrée et systémique des différentes ressources sémiotiques, en accordant une attention particulière aux relations, à la dialectique et à la dynamique entre elles.

À l'instar de Vygotski et de Léontiev, Radford affirme : « Learning, we suggested, is related to consciousness. And individual consciousness, Vygotski reminded us, is but a particular case of social consciousness. Leont'ev went a step forward and claimed that the substance of consciousness is activity. » (Radford, 2015b, p. 563). Cela dit, Radford (*ibid.*) indique que l'apprentissage rapporté par la TO est celui de quelques élèves individuellement, et non celui du collectif dont elles/ils font partie. Cependant, les élèves ne sont pas considérées comme des entités isolées, mais comme des individus *en activité*, qui est le fondement ultime de leur être, comme nous l'avons vu dans la première partie de la recherche. En fait, l'activité en tant qu'unité d'analyse représente le seul prisme à travers lequel il est théoriquement possible de considérer les élèves de manière conceptuelle et de proposer des interprétations de leur apprentissage du point de vue de la TO (*ibid.*). Le caractère concret et spécifique des individus fait de l'activité un phénomène vivant. L'intérêt sur ce point se traduit méthodologiquement par l'intégration des pauses, des hésitations, des intonations, des gestes, etc., dans les analyses.

Dans le paragraphe 5.3.1 nous rendons compte des outils sémiotiques que nous avons mobilisés pour réaliser l'analyse de l'activité en classe et dans le paragraphe 5.3.2 nous décrivons les étapes que nous avons suivis pour y parvenir.

5.3.1 Outils sémiotiques pour l'analyse de l'activité en classe

L'analyse de l'activité Θ dans la perspective de la TO fait intervenir la notion de *nœud sémiotique*, de laquelle découle la notion de *contraction sémiotique*, et de *faisceau sémiotique*. Il s'agit des constructions méthodologiques qui visent à fournir une description et une interprétation de l'apprentissage en tant qu'activité médiatisée par les signes (Radford et Sabena, 2015). Radford signale : « From a methodological viewpoint, the problem is to understand how the diverse sensorial channels and semiotic signs (linguistic, written symbols, diagrams, etc.) are *related, coordinated,* and *subsumed* into a new thinking or psychic unity » (Radford, 2014a, p. 357). Autrement dit, ces outils d'analyse donnent des éléments pour rendre compte des relations dialectiques entre composantes matérielles et idéelles de la pensée (voir paragraphe 3). Les paragraphes suivants sont consacrés à la description de ces outils d'analyse. Nous intégrons également des perspectives de l'analyse des gestes développée par McNeill (McNeill, 2000 ; McNeill, 2005 ; McNeill, 2010), dont nous rendons compte dans le dernier paragraphe.

Nœud sémiotique

Un *nœud sémiotique* est défini comme un segment ou une partie cruciale de l'activité conjointe des élèves et des enseignant·e·s où des signes incarnés ou non provenant de divers systèmes sémiotiques sont mis en œuvre dans des processus d'objectivation (Radford et Sabena, 2015). Ces segments de l'activité semblent contenir des preuves d'apprentissage que nous cherchons à relever dans la mesure où les élèves et les enseignant·e·s proposent des interprétations mathématiques et des façons d'agir conformes aux modes de pensée et d'action culturellement et historiquement constituées (Radford et Sabena, 2015 ; Radford, 2003). En d'autres termes, les nœuds sémiotiques constituent des segments pertinents de l'activité où l'apprentissage a lieu (Radford et Sabena, 2015).

Contraction sémiotique

L'évolution des nœuds sémiotiques est étudiée à travers le concept de *contraction sémiotique*, qui fait référence à l'évolution des ressources sémiotiques employées lorsque les élèves affinent leurs idées et acquièrent des niveaux de conscience plus profonds. Radford et Sabena (*ibid.*) définissent cette notion comme suit : « A semiotic contraction refers to the reorganization of semiotic resources that occurs as a result of the students' increased consciousness of mathematical meanings and interpretations. » (p. 167). Par exemple, une contraction sémiotique peut se traduire par des formulations plus courtes, avec des mots moins nombreux et mieux articulés, ou avec des gestes plus courts ou plus précis, permettant d'omettre des détails au profit d'élaborations concises (L. Radford, 2008a).

Faisceaux sémiotiques

Largement développée par Arzarello (Arzarello, 2006 ; Arzarello *et al.*, 2009), la notion de *faisceau sémiotique* intègre le point de vue de la multimodalité dans l'analyse de l'activité sémiotique qui a lieu au sein des processus d'enseignement et d'apprentissage. Dans ce cadre, la multimodalité fait référence à la fois au point de vue sur la cognition humaine (en accord avec la multimodalité sensorielle dont nous rendons compte dans la section 3.1) et aux multiples modes de communication et d'expression. La notion de faisceau sémiotique étend l'éventail des ressources sémiotiques traditionnellement considérées, y compris les registres de représentation sémiotiques (Duval, 1993) et des systèmes sémiotiques (Ernest, 2006). Cette approche reformule également les notions liées aux opérations à l'intérieur ou entre des registres de représentation sémiotiques ou des systèmes sémiotiques. Pour définir un faisceau sémiotique, Arzarello (2006) adopte une perspective vygotskienne de l'interprétation psychologique du signe et reprend la définition de Ernest (2006). Arzarello donne la définition de la notion intermédiaire de *ensemble sémiotique* (« semiotic set », en anglais) :

> (a) A set of signs which may possibly be produced with different actions that have an intentional character, such as uttering, speaking, writing, drawing, gesticulating, handling an artefact.
> (b) A set of modes for producing signs and possibly transforming them ; such modes can possibly be rules or algorithms but can also be more flexible action or production modes used by the subject.
> (c) A set of relationships among these signs and their meanings embodied in an underlying meaning structure.
>
> (Arzarello, 2006, p. 281)

Ainsi, un faisceau sémiotique est un système de signes constitué par une collection d'ensembles sémiotiques, et par un système de relations entre ces ensembles (*ibid.*), typiquement produits par un élève ou un groupe d'élèves lors la résolution d'un problème (Arzarello *et al.*, 2009). Il est possible que l'enseignante participe également à cette production sémiotique. L'activité sémiotique multimodale des sujets est décrite dans ce cadre « in a holistic way as a dynamic production and transformation of various signs and of their relationships » (Arzarello *et al.*, 2009, p. 101) ; c'est-à-dire que les faisceaux sémiotiques sont des structures dynamiques. Arzarello (2006) donne par exemple l'unité dialectique du discours-geste en référence aux travaux de McNeill (2000) (voir section 4.1.2). En définitive, cette approche méthodologique met l'accent sur la prise en compte de l'interrelation des ressources sémiotique comme étant nécessaire à l'interprétation de la signification qu'elles véhiculent. Au sein des faisceaux sémiotiques, les ressources sémiotiques sont considérées dans un outil d'analyse unifié (Radford et Sabena, 2015).

Le concept de faisceau sémiotique offre également une approche à la fois synchronique et diachronique pour rendre compte des processus d'objectivation. D'une part, le faisceau sémiotique peut être un outil analytique permettant d'identifier les nœuds sémiotiques au sein de l'activité sur la base des relations synchroniques entre les signes (Radford et Sabena, 2015). D'autre part, l'approche diachronique permet d'étudier l'évolution de signes et leurs relations sur une periode de temps. Les évolutions diachroniques se trouvent notamment dans les *jeux sémiotique* de l'enseignante, lorsqu'elle « fait echo » des gestes produits par les élèves pour exprimer dans le registre verbal la signification mathématique véhiculée par ces gestes (Arzarello, Paola, et al., 2007; Robutti, 2006).

Les gestes

Nous nous focalisons sur les gestes (ou gesticulations) pour retracer l'imbrication des actions incarnées dans l'émergence d'unités de pensée. Nous les considérons comme faisant partie d'un faisceau sémiotique en interrelation avec d'autres ressources mobilisées, notamment au sein de l'unité dialectique du discours et du geste. Nous nous concentrons principalement sur les gestes que Petitfour (2015) identifie comme *gestes mathématiques*, c'est-a-dire ceux qui portent une signification liée aux mathématiques [3]. Les gestes sont effectués habituellement dans *l'espace gestuel*, qui est un espace limité dans le plan frontal du corps, de la taille aux yeux, et entre les épaules. Pour l'interprétation de la signification de gestes et leur encodage, ce dernier étant précisé ultérieurement, nous prenons appui sur trois notions : les *dimensions de gestes*, les *phases de gestes* et le *captage*, que nous abordons ci-dessous.

Dimensions de gestes McNeill (2005) distingue les gestes dits *référentiels*, qui comportent du contenu propositionnel, des gestes dont les fonctions ne sont pas propositionnelles mais orientées vers le discours, comme les *battements* (« beats », en anglais). Les *battements* sont de simples mouvements des mains de haut en bas ou d'avant en arrière. Ils se concentrent rythmi-

3. Nous ne souscrivons par contre pas à la distinction proposée par Petitfour (2015) entre *langage verbal* et *langage gestuel*, les gestes mathématiques relevant de cette deuxième catégorie, d'autant plus qu'elle peut suggérer une confluence de significations élaborées de manière interdépendante par la parole et le geste. Cette idée contredit les hypothèses théoriques auxquelles nous adhérons, avancées par McNeill, qui suggèrent une co-expressivité du geste (gesticulations) et de la parole (voir paragraphe 4.1.2).

quement sur les pics prosodiques de la parole. Petitfour (2015) les considère comme des gestes non mathématiques, sauf s'ils ont des effets indirects sur l'apprentissage des élèves. Les gestes référentiels, quant à eux, sont catégorisés par McNeill et Levy (McNeill et Levy, 1993; McNeill, 2000), en appui sur les catégories sémiotiques de Peirce (1958), en *gestes déictiques*, *gestes iconiques* et *gestes métaphoriques*. Nous allons les préciser ci-dessous. Petitfour (2015) reprend cette catégorisation dans une situation de communication en géométrie [4]. Plus récemment McNeill (2000) suggéra qu'il est préférable de les considérer comme des dimensions que des catégories, car la plupart des gestes sont multiformes : l'iconicité peut se combiner avec la deixis, la deixis avec le caractère métaphorique, etc. Dans cette perspective, Arzarello, Robutti, et Thomas (2015) se concentrent sur l'interrelation des dimensions gestuelles dans l'apprentissage en mathématiques. Plus spécifiquement, Arzarello et ses collègues tentent d'expliquer l'émergence de la dimension métaphorique du geste en termes de transition entre des dimensions iconique et déictique vers une proéminence de la première. Dans le même ordre d'idées, Petitfour (2015) suggère que les gestes métaphoriques sont, dans le cadre géométrique, dérivés des gestes iconiques et des gestes mimiques (à droite du continuum de Kendom, comme indiqué dans la section 4.1.2).

Gestes déictiques La forme prototypique de ce geste est le pointage de l'index. Dans le cadre géométrique, le pointage peut se faire avec la main ou avec un artefact instrumentalisé (Petitfour, 2015). Ils permettent de désigner un objet, un événement ou un lieu par rapport à un point de référence. Ce qui est désigné peut être présent ou non présent, ce dernier est le cas du *pointage abstrait* (McNeill, Cassell, et McCullough, 1994). Petitfour (2015) considère également comme des gestes déictiques des gestes de parcours sur des objets. Un exemple est le déplacement de l'index sur le bord d'une règle. Les gestes déictiques sont souvent accompagnés de termes déictiques, tels que « ici », « là » et « ça ».

Gestes iconiques De nature picturale, les gestes *iconiques* représentent des images d'objets ou des actions concrètes. Il s'agit d'un symbole référentiel. Les gestes incarnent des aspects picturaux du contenu sémantique, de sorte que l'évocation fonctionne par la ressemblance formelle et structurelle avec celui-ci. Petitfour réserve le terme d'iconique pour faire référence aux gestes qui véhiculent des « représentations corporelles, statiques ou dynamiques, des objets, relations ou propriétés géométriques » (*ibid.*, p. 133). Nous mettons dans la figure 5.1 des exemples

4. Petitfour (2015) incorpore également la catégorie des gestes mimiques, qui ne correspond par à des gesticulations, raison pour laquelle nous ne l'intégrons pas.

présentés par Petitfour : un geste iconique statique et un geste iconique dynamique représentant un triangle.

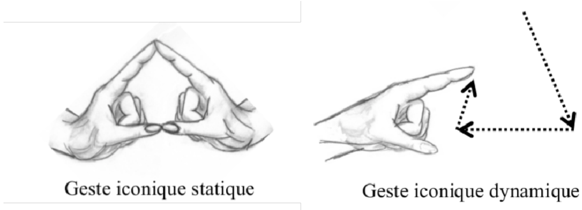


Figure 5.1 – Gestes iconiques qui représentent un triangle (Petitfour, 2015, p. 133).

Gestes métaphoriques En référence à une idée abstraite, les gestes *métaphoriques* imagent ou génèrent des images de l'inimaginable (McNeill, 2005). En d'autres termes, l'idée abstraite évoquée est présentée comme si elle avait une forme physique. Un exemple de geste métaphorique est celui qui évoque la propriété d'égalité de longueurs par l'écartement pouce-index de la main qui se déplace dans l'air (Petitfour, 2015). Dans le cadre géométrique, les gestes métaphoriques permettent de représenter les concepts géométriques (*ibid.*). Petitfour (*ibid.*) caractérise les gestes métaphoriques, ou les gestes ayant une dimension métaphorique proéminente, par leur forme épurée et décontextualisée. Du point de vue de la TMS, les gestes métaphoriques constituent, pour Petitfour (2015), des signes pivots entre l'action instrumentée et le concept géométrique auquel ils se réfèrent.

Phases de gestes La production de gestes se développe en *phases* (McNeill, 2020), qui s'organisent autour de l'*apogée* [5] du geste (« stroke » en anglais). L'apogée du geste est le point culminant du geste dans lequel sa signification est exprimée. En accord avec les résultats de certaines recherches (Nobe, 1997; Valbonesi et al., 2002), McNeill (2005) soutient que cette phase est généralement synchrone avec le discours co-expressif. En cas d'asynchronie, l'intervalle de temps étant généralement faible, le point culminant du geste précède le discours auquel il est sémantiquement lié, notamment en raison de brèves hésitations. Si le geste est statique (voir par exemple l'image 5.1, ci-dessus), le point culminant du geste est *fixé* pendant quelques instants.

Parmi les phases qui se déroulent éventuellement, nous avons la *phase préparatoire*. Ici, la main s'éloigne de la position de repos, le cas échéant, et entre dans l'espace gestuel pour initier le mouvement. Cela peut être suivi d'une *pause juste avant l'apogée* (« Stroke hold », en anglais),

5. Nous reprenons la traduction faite par Petitfour (2015).

pour articuler le geste avec un segment linguistique spécifique, selon la signification du geste. Symétriquement à la phase d'apogée, une phase de *pause juste après l'apogée* (« Poststroke hold », en anglais) peut se produire. Cette phase se produit si le discours co-expressif avec l'apogée du geste continue à se dérouler, alors que la phase d'apogée est terminée. Ainsi, les pauses potentielles avant et après l'apogée du geste assurent la synchronisation de l'apogée avec son discours co-expressif. Enfin, dans la *phase de retrait* les mains reviennent au repos, pas nécessairement à la position initiale. Il peut ne pas y avoir de phase de retrait si la locutrice passe immédiatement à une autre phase d'apogée.

Captage Radford et Sabena (2015) citent la notion proposée par McNeill et ses collègues (McNeill, 2005; McNeill et al., 2001) de *captage* (« catchment », en anglais), qui est issue d'une analyse diachronique de gestes. Cette notion a été utilisée dans la recherche en éducation mathématique (Arzarello et Sabena, 2014; Arzarello *et al.*, 2015; Sabena, Krause, et Maffia, 2016). McNeill signale que les captages sont reconnus par la reproduction de caractéristiques de la forme gestuelle (latéralité, forme, mouvement, espace, orientation, dynamique, etc.) dans au moins deux gestes, pas nécessairement consécutifs. Il précise ainsi que « A catchment is a kind of thread of consistent dynamic visuospatial imagery » (McNeill, 2015, p. 117) qui, dans sa récurrence, offre des indices sur les liens cohésifs du discours. Radford et Sabena (2015) soulignent la grande importance que cet outil d'analyse peut avoir dans la reconstruction de l'activité en classe, étant donné les indices qu'il peut donner sur les évolutions de sens dans les discours multimodaux des élèves.

5.3.2 Analyse de données en trois étapes

L'activité que nous analysons sans le chapitre 8 est réalisée sur une base de données recueillies dans l'année 2019. Il s'agit de vidéos tournées en classe et des enregistrements de l'audio de séances dédiées à la résolution de tâches mathématiques. Notre analyse de données est organisée en trois étapes, suivant l'organisation suggérée par la TO (Radford, 2015). Nous incorporons également des éléments de la microanalyse décrite par Arzarello *et al.* (2011). Nous complétons notre analyse de l'activité Θ lors des séances avec des entretiens avec les élèves. Nous précisons les conditions des entretiens et les raisons pour lesquelles les entretiens ont été menés dans le chapitre 6. Nous décrivons dans la suite ces trois étapes de l'analyse de données (les enregistrements lors des séances et lors des entretiens).

Première étape de l'analyse de données

Dans un premier temps, nous avons procédé à une analyse sommaire des vidéos de toutes les séances que nous avons enregistrées. Nous avons recueilli des observations sous la forme de ce que Radford (2015b) appelle *matériel brut*, dans le sens où nous n'utilisons pas les outils méthodologiques à notre disposition. Cette première étape nous a permis de sélectionner des *segments saillants* de l'activité, correspondant soit à des nœuds sémiotiques, soit à des passages utiles pour répondre aux questions de recherche. Nous avons procédé similairement à des entretiens, en sélectionnant des passages considérés intéressants. Par exemple, si nous observons la manifestation d'une *action multiplicative*. Une fois les segments saillants identifiés, les données vidéo ont été soumis à une transcription, qui implique dans un premier temps uniquement les énoncés verbaux. Nous avons organisé les segments saillant identifiés lors de séances par *épisodes*. Plus précisément, notre analyse de l'activité Θ s'organise dans un premier niveau en fonction du moment de la séance dans lequel ils ont lieu (nous nous référons aux moments de la séance dans le paragraphe 6.3.2). Notre analyse se structure à un second niveau en épisodes en fonction du découpage des tâches fait dans l'analyse *a priori*. Plus précisément, nous avons structuré l'analyse en épisodes numérotés concernant la présentation, la résolution et la correction des sous-tâches. Dans l'analyse de la première séance, nous avons également découpé en épisodes l'introduction de l'artefact symbolique. Une fois structuré les segments de l'activité identifiés en épisodes, nous avons inclus des commentaires sur ce qui a ont motivé leur choix.

À la lumière de l'analyse *a priori* des tâches et de cette première analyse de l'activité, nous avons choisi les séances sur lesquelles nous allions nous focaliser. Comme signalé, nous avons analysé six séances au total, soumises à cette première étape de l'analyse. En raison des contraintes de temps et du degré de finesse et de précision que nous avons voulu atteindre dans nos analyses, nous avons dû limiter l'analyse plus en détail à seulement trois séances. Pour ces trois séances (S_1, S_2 et S_3) nous avons suivi le reste des étapes d'analyse de données décrites ci-dessous. Pour les séances S_1 et S_2, nous avons effectué une transcription complète de la séance de résolution, ce qui nous a permis de nous faire une idée des séances dans leur globalité. Nous avons fait une transcription partielle de la troisième séance analysée en détail, la séance S_3. Cette transcription partielle ne comprend que les passages jugés importants. Les analyses produites des six séances et l'analyse des entretiens lors de cette première étape nous ont permis de compléter notre analyse des trois premières séances. Plus précisément, nous avons repris et analysé en détail certains passages des séances S_4, S_5 et S_6 et des entretiens que nous considérions comme contingents aux catégories d'observation qui ont émergé dans l'analyse des trois premières séances, à la suite des deux autres étapes de l'analyse.

Deuxième étape de l'analyse de données

Dans la deuxième étape, les segments saillants identifiés sont analysés en détail. Ils sont confrontés aux principes théoriques de la TO, aux questions de recherche et éventuellement à d'autres observations. Les segments sont plus précisément placés dans des *catégories analytiques conceptuelles émergentes* (ce terme est repris de Radford 2015), selon les aspects que nous considérons dignes d'intérêt par rapport à l'apprentissage et aux questions de recherche, telles que la production des gestes, la production symbolique, l'utilisation des artefacts, etc. Nous organisons à ce moment la transcription dans un tableau à trois colonnes, en suivant le tableau utilisé par Radford (2015b).

La première colonne contient les numéros correspondant aux lignes de transcription du discours. La deuxième colonne contient les informations relatives aux discours, aux corps et aux productions écrites, tels que distingués par Arzarello *et al.* (2011) dans l'analyse sémiotique de l'activité au moyen de l'approche des faisceaux sémiotiques. Nous transcrivons d'abord les déclarations verbales qui constituent le discours des élèves et de l'enseignante, en suivant la numération de la première colonne. Nous incluons également dans cette deuxième colonne des captures d'écran des productions corporelles significatives, notamment des gestes, mais aussi du regard et des postures que les élèves et l'enseignante utilisent pour soutenir leurs actes de communication. C'est le domaine du corps. En ce qui concerne la production écrite, nous joignons dans cette colonne des captures d'écran de la production écrite des élèves et de l'enseignante, dans le tableau ou dans les feuilles de travail des élèves. La troisième colonne comporte des commentaires interprétatifs, par exemple à propos des interrelations entre signes produits. Dans la figure 5.2, nous présentons, afin d'exemplifier, une partie de la table d'analyse de la séance S_1. Puisque nous nous concentrons sur la production de gestes au sein des épisodes, nous suivons des étapes spécifiques pour leur identification et leur analyse. Nous les décrivons dans le paragraphe suivant.

Repérage et analyse de gestes Nous repérons et analysons les gestes produits pendant les épisodes. Nous identifions les dimensions saillantes des gestes, et nous les classifions en gestes

	qui est la même longueur [Il apparaît une boite de 5 cubes en bas, avec une autre à la main] qu'une ligne [La ligne de boites de 5 est mise au-dessous] de boites de 5 cubes [geste le long de la ligne]	
15	C – Non, impossible	Les élèves pensent que c'est impossible, en envisageant possiblement une construction synchronique
16	P – Alors, impossible ?, on verra. Pour pouvoir s'en assurer il faut les aligner, pour voir si elles ont la **même** longueur [geste qui évoque la longueur 4:37-4:39]  Donc Paula (l'enseignante enlève les boites) a pensé a vous faire une petite grille comme ça juste pour que vous puissiez [L'enseignante sort le quadrillage] poser les boites comme ça (boite posée) vous voyez ? Oui on le voit bien. Là par exemple je voudrais poser une deuxième. Ça c'est quoi ? c'est une boite de 5 ? Là je pose une deuxième boite de 5	Geste métaphorique/iconique qui évoque la longueur

Figure 5.2 – Partie de la table d'analyse de la séance S_1.

déictiques, gestes iconiques ou gestes métaphoriques. Éventuellement, les gestes ont plus d'une dimension saillante (voir par exemple figure 5.2). Les gestes sont enregistrés en prenant une capture d'image, correspondant à la phase d'apogée du geste. Nous enregistrons l'intervalle du temps dans la vidéo (en minutes et secondes), compté autour de la phase d'apogée, par exemple depuis la phase préparatoire du geste jusqu'à la phase de retrait. En suivant le codage utilisé par McNeill (McNeill, 2005; McNeill, 2016) nous soulignons la phrase du discours prononcée lors de l'exécution du geste et nous mettons en gras les ou le mot prononcé lors de l'apogée du geste. En ce qui concerne la partie visuelle du codage du geste, nous traçons sur l'image extraite de la vidéo une ligne orange courbe (la plupart du temps) qui suit la forme que les mains dessinent pendant la production du geste. Occasionnellement, nous ajoutons des diagrammes auxiliaires pour rendre compte de la structure visuospatiale qui sous-tend l'imagerie du geste, généralement pour les gestes dont la dimension métaphorique est proéminente. Nous présentons un exemple dans la figure 5.3.

Nous interprétons la signification du geste en relation avec les ressources sémiotiques mobilisées lors de sa production, conformément à l'approche sémiotique adoptée. Une fois interprété, nous attribuons un nom au geste, l'associant ainsi à une catégorie de geste, mais sans le réduire à celle-ci. En d'autres termes, les catégories de gestes comprennent certaines propriétés

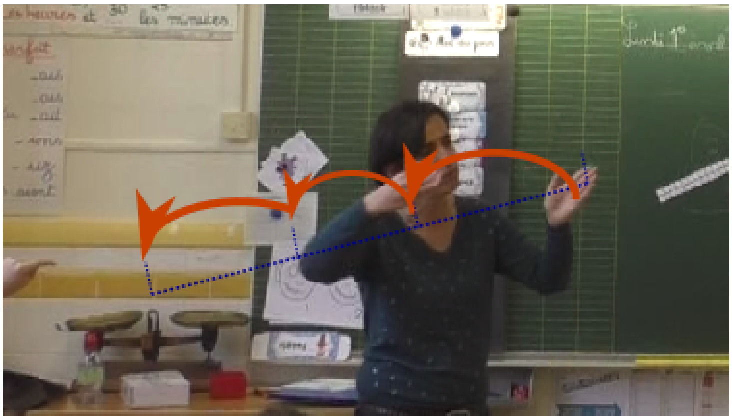


Figure 5.3 – Geste d'itération de traits, repéré dans la séance S2.

liées à l'imagerie sous-jacente des gestes et à leur signification. Chaque fois qu'un geste appartenant à une catégorie donnée est produit, cette catégorie est affinée. Tout cela sans perdre de vue la différence entre les catégories de gestes et les gestes eux-mêmes : la signification des gestes est toujours attachée au contexte concret et spécifique de leur élaboration. Ainsi, nous utilisons l'expression « répétition d'un geste » pour désigner l'élaboration d'un geste qui entre dans la catégorie correspondante, ceci étant un abus de langage.

Troisième étape de l'analyse de données

Dans la troisième étape, nous intégrons dans la transcription des indications sur la cadence du dialogue telles que les pauses, les hésitations verbales et les changements d'intonation. [6].

5.4 Conclusions

Nous avons présenté dans ce chapitre nos principes méthodologiques largement inspirés par la TO. L'objectif de notre méthodologie est de rendre compte des processus liés d'objectivation et de subjectivation, issus du travail conjoint des enseignant·e·s et des élèves. Notre unité d'analyse est l'activité en classe, caractérisée par la TO comme un événement émergent, imprévisible et non reproductible. L'analyse de l'activité est constituée par une analyse *a priori* Φ des tâches, relative à la composante didactique Φ de l'activité, et une analyse de l'activité en classe Θ. Nous avons rendu compte des outils méthodologiques et d'analyses que nous utilisons pour mener ces analyses. Nous avons évoqué la notion de schème d'utilisation issue de la TMS, pour

6. Les recherches de L. Radford, Bardino, et Sabena (2007) et Radford et Sabena (2015) rendent compte des analyses vocales avec l'aide d'un logiciel d'analyse prosodique appelé Praat. En lien avec nos contraintes de temps, nous ne l'avons pas utilisé.

analyser le potentiel sémiotique des artefacts utilisés dans notre expérimentation. Nous avons rendu compte des notions de la TDA sur lesquelles nous prenons appui pour réaliser notre analyse *a priori* des tâches. Nous avons présenté les concepts de nœud sémiotique, contraction sémiotique et faisceau sémiotique qui nous permettent rendre compte de l'activité sémiotique en classe. Nous avons présenté nos outils d'analyse de gestes. Enfin, nous avons présenté les étapes de notre analyse de données. Nous avons évoqué sommairement notre corpus de données, qui est constitué par l'enregistrement de six séances, dont trois sont analysées en détail, aussi bien que des entretiens avec des élèves.

Dans le prochain chapitre nous donnons des précisions sur la planification et le contexte de notre expérimentation. Nous rendons compte du travail collaboratif avec l'enseignante. Nous précisons la façon dont nous avons recueilli nos données. Nous présentons la planification de tâches et des artefacts que nous avons conçus. Nous rendons compte de nos choix méthodologiques concernant la constitution de notre corpus de données.

Chapitre 6

Planification de l'activité en classe et recueil de données

Les activités en classe que nous analysons dans cette recherche ont été faites avec l'objet de provoquer une rencontre entre les élèves et des formes de pensée, d'imagination, d'intuition, de symbolisation et d'action culturellement constituées. Elles sont médiatisées par l'utilisation d'artefacts de manipulation et symboliques, que nous avons conçus dans le cadre de notre recherche. Plus spécifiquement, nous analysons l'activité qui a eu lieu dans une classe de CE2 d'une école primaire à Paris. Dans le cadre d'un travail collaboratif avec une des enseignant·e·s d'une classe de CE2 [1], que nous détaillons ci-dessous, nous avons élaboré des tâches dont la résolution est focalisée sur une ou plusieurs dimensions de la pensée multiplicative. En particulier, les tâches impliquent les trois opérations arithmétiques concernées : la multiplication, la division partage et la division groupement, qui apparaissent en termes de relations multiplicatives. Les spécificités des tâches et artefacts impliqués sont cruciales, car elles contribuent à structurer, avec les ressources sémiotiques multimodales mobilisées dans l'activité, la forme et la généralité de la pensée que les élèves rencontrent (Radford, 2014a).

Ce chapitre est consacré à la spécification de la planification des tâches prescrites lors des séances enregistrées et analysées; c'est-à-dire de la composante didactique ϕ de l'activité. Il s'agit de six séances enregistrées et analysées, dans des étapes précisées dans la section 5.3.2. Comme nous l'avons signalé auparavant, nous avons analysé plus en détail trois séances S_1, S_2 et S_3.

1. La classe est assurée par une enseignante et un enseignant.

Dans la section 6.1, nous nous referons au contexte de la séquence d'enseignement. Dans la section 6.2, nous abordons l'organisation et les spécificités des séances. Dans la section 6.3 nous décrivons les artefacts qui ont été utilisés dans les séances analysées. Dans la section 6.4, nous abordons les tâches dont la résolution motive les séances analysées. Dans la section 6.5, nous précisons notre recueil de données. Enfin, les aspects les plus importants du chapitre sont résumés dans la section 6.6.

6.1 Contexte de la séquence d'enseignement

Les séances enregistrées s'insèrent dans un ensemble de séances qui se sont déroulées pendant l'année 2019, entre les mois de mars et juin. Nous avons travaillé avec une enseignante dans une école primaire dans le 14e arrondissement de Paris. Il s'agit d'une enseignante qui a plusieurs années d'expérience (plus de 10), ayant suivi des formations axées sur l'enseignement des mathématiques, travaillé sur l'élaboration de ressources mathématiques et participé à des groupes IREM. La classe de CE2 avait 26 élèves, un enseignant et une enseignante se partageaient la classe.

Nous avons eu trois journées de travail avec l'enseignante, préalablement aux séances observées, entre décembre 2018 et janvier 2019. Nous avons à cette occasion jeté les bases du travail à venir, en accord avec les programmes scolaires en rigueur. Nous avons partagé notre intérêt sur la réalisation des séances et nous avons établi les conditions, les attendus et l'organisation de leur mise en place. Nous avons commencé à avoir des échanges par mail et par téléphone avec l'enseignante une fois que les séances ont commencé à avoir lieu. De manière générale, le rôle de la doctorante était de préparer les réunions de travail, de veiller au respect du droit à l'image pour les élèves (avant et pendant les séances), de proposer des tâches et de concevoir le matériel à utiliser. Le rôle de l'enseignante était de rendre compte des difficultés que les tâches pouvaient poser dans la classe, de suggérer des modifications, d'adapter les propositions de la doctorante à sa classe et de mettre en œuvre les tâches dans la version finale.

Nous abordons dans les paragraphes suivants les conditions de la mise en place des séances, lesquelles constituent notre scénario. Nous précisons les conditions d'entrée dans la classe et d'enregistrement des élèves, les conditions de l'enseignement, et la progression globale de la classe pour ce qui concerne les opérations de multiplication et de divisions. Nous abordons les aspects relevants des attendus et de l'organisation de la mise en place de séances dans les sections suivantes.

6.1.1 Contexte institutionnel et légal

Pour accéder à la salle de classes il nous a fallu l'accord de l'Inspection de l'éducation nationale de la circonscription. Plus précisément, nous avons dû élaborer une convention de partenariat (voir annexes A), qui implique l'Université Paris Diderot (l'actuelle Université de Paris), le laboratoire de didactique André Revuz, le rectorat de l'académie de Paris et les services départementaux de l'éducation nationale. La convention explicitait le rôle et les obligations des partenaires, ainsi que le projet pédagogique concerné. Pour filmer les élèves, nous avons également demandé l'autorisation d'enregistrement d'image aux parents. Les responsables de deux élèves n'ont pas accepté que leur enfant soit filmé·e. Nous avons adapté le recueil de données à ces conditions (voir section 6.4).

6.1.2 Conditions sur l'enseignement

Nous considérons que la condition sur l'enseignement qui a le plus influencé le déroulement des séances était liée au fait que l'enseignante en question travaillait à temps partiel au moment de l'observation. Elle enseignait les lundis, les mardis et un mercredi sur deux. L'enseignement de la classe de CE2 observée était partagé entre l'enseignante en question et un autre enseignant. En particulier, l'enseignement des mathématiques était réparti comme suit par les deux collègues, selon les rubriques structurant les programmes de mathématiques de l'école primaire : l'enseignante en question était chargée de l'enseignement de la numération et du calcul, tandis que l'autre enseignant était chargé de l'enseignement des grandeurs, mesure et de la géométrique. L'organisation de l'enseignement des mathématiques nous a limitée dans une certaine mesure dans l'élaboration des tâches, étant donné l'enracinement de la pensée multiplicative qui nous intéresse dans les phénomènes impliquant des grandeurs. En particulier, l'enseignante et l'enseignant n'étaient pas en accord sur l'inclusion d'unités de grandeurs dans l'écriture des calculs : l'autre enseignant considérait que ce n'était pas mathématiquement correct. Nous interprétons classiquement cette posture comme une trace de la disparation des grandeurs des savoirs de référence au moment de la réforme des mathématiques modernes (Chambris, 2010).

6.1.3 Progression globale de la classe

La rencontre avec les opérations de multiplication et de divisions, en tant que savoir culturel, commence au CE1. En particulier, les mots pour les opérations, multiplication et division, et le symbole $\times$ sont introduits. À la fin du CE1, les élèves doivent, selon le programme scolaire, avoir mémorisé les tables de multiplication de $2, 3, 4$ et 5. Les élèves sont supposé·e·s également savoir multiplier par 10 un nombre inférieur à 100. En ce qui concerne la modélisation de situations multiplicatives, les attendus de fin d'année de CE1 signalent que les élèves doivent résoudre des problèmes impliquant une multiplication, notamment des problèmes d'addition itérée, et des problèmes de partage ou de groupement. Ces derniers sont définis comme suit : « ceux où l'on cherche combien de fois une grandeur contient une autre grandeur, ceux où l'on partage une grandeur en un nombre donné de grandeurs » (BO 2019, p. 2). En d'autres termes, ces problèmes consistent à trouver l'un des termes qui constituent une relation multiplicative.

Selon l'enseignante, les élèves de la classe de CE2 que nous avons observé·e·s avaient effectivement rencontré les concepts décrits dans les programmes. Au moment de l'observation, les élèves connaissaient déjà les tables de multiplication de 6, 7, 8 et 9. L'enseignante avait déjà introduit la multiplication, liée à l'idée d'addition itérée, en utilisant le mot « fois » pour exprimer des calculs (l'expression 3×5 se lisant « trois fois cinq »). Plus précisément, l'enseignante avait pris appui, avant l'expérimentation, sur un artefact symbolique dénommé *grille de résolution*. Nous décrivons l'artefact dans le paragraphe 6.3.2. Elle ne l'a utilisé que quelques fois (avant l'expérimentation). L'enseignante n'était pas entrée dans le détail des situations multiplicatives, se concentrant principalement sur les compétences de calcul du programme stipulées dans les curricula (la multiplication posée d'un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre). L'enseignante a à une occasion inclus l'écriture de l'unité de grandeur dans les calculs au tableau. Les opérations de division partage et de division groupement avaient été abordées dans une seule séance, antérieure aux séances que nous analysons.

6.2 Organisation et spécificité des séances

L'un des aspects fondamentaux de l'organisation des séances observées est le travail en groupe d'élèves. Ceci est cohérent avec la perspective de l'activité, du point de vue de la TO, en tant que phénomène intrinsèquement social. Lors des séances ordinaires, l'enseignante a souvent fait travailler les élèves par binôme ou groupes de trois. Dans les séances observées, le nombre d'élèves par groupe était le plus souvent de 4 ou 5 élèves. Les groupes d'élèves étaient plus grands que ceux avec lesquels l'enseignante avait l'habitude de travailler et que ceux rapportés dans les recherches appuyées sur la TO (groupes de 3 ou 4 élèves). Le développement de matériel de manipulation à grande échelle était en effet pratiquement difficile pour certains artefacts utilisés, comme celui constitué par des boîtes et de cubes (nous allons décrire les artefacts dans la section 6.3). Les groupes étaient constitués par tirage au sort au début des séances.

La composition et la quantité d'élèves par groupes correspondent à l'une des différentes entre les séances observées, et les séances ordinaires. À cela s'ajoute la circonstance exceptionnelle de l'enregistrement de la séance par une personne extérieure à la classe (la doctorante). Le statut particulier de ces séances dans la culture de la classe par rapport aux autres s'est exprimé par le nom spécifique que leur a donné l'enseignante : les *séances de résolution de problèmes*. Comme le nom le suggère, les séances consistaient en la résolution des problèmes, et plus précisément en des tâches multiplicatives. Bien entendu, ces séances avaient d'autres spécificités, telles que l'utilisation d'artefacts et celles qui viennent d'être mentionnées.

Dans la suite, nous allons approfondir d'autres aspects concernant l'organisation et la spécificité de séances. Dans la section 6.2.1, nous ferons référence aux principes organisant le travail. Enfin, dans le paragraphe 6.2.2, nous décrivons les différents moments de la séance.

6.2.1 Les principes du travail en groupe

Les possibilités de travailler et de réfléchir avec l'enseignante sur l'éthique communautaire (nous y faisons allusion au paragraphe 2.1.1) dans notre recherche ont été limités par la nature du projet de travail collaboratif mis en place. Ce projet s'est concentré principalement sur l'aspect didactique de l'activité, dans une période de temps limitée. Plus précisément, il nous a semblé que l'enseignante percevait la formation du soi (subjectivation) d'une façon accessoire, c'est-à-dire comme étant dissociée de l'axe du savoir. Cependant, le travail de groupe étant au cœur du projet, nous avons pu aborder, dans la planification des séances, des suggestions visant à favoriser l'interaction coopérative entre élèves. En effet, nous nous sommes mises d'accord sur l'idée d'impliquer et de responsabiliser les élèves afin d'établir une dynamique de travail en collaboration pour atteindre les objectifs des séances, au-delà du climat de convivialité en général promu en classe.

Nous avons établi avec l'enseignante trois *principes de travail en groupe* : (1) **participer et impliquer les autres**, c'est-à-dire que chaque élève devait participer activement au travail de groupe et s'assurer que toutes et tous les autres camarades soient impliqué·e·s dans le travail ; (2) **se respecter mutuellement**, c'est-à-dire que les élèves devaient créer une atmosphère de respect et de confiance pour travailler, en écoutant en silence l'avis de leurs camarades pour essayer de comprendre ce que chacun·e avait à dire ; et (3) **organiser son travail**. Selon ce dernier principe il était nécessaire de s'assurer que tout le groupe comprend la tâche et le raisonnement qu'elles/ils développent en tant que groupe. Par exemple, en demandant aux camarades si elles ou ils avaient des doutes, et en les éclairant s'il y en avait. Une autre indication de ce principe est que les élèves veillent à partager leurs idées pour la résolution du problème avec le groupe entier, et non avec seulement une partie du groupe. Ces principes ont été discutés par l'enseignante et les élèves lors de certaines séances enregistrées ; leur mise en place effective a été surveillée dans le déroulement des séances.

6.2.2 Moments de la séance

Dans la TO, des *moments* de l'activité sont identifiés (Radford, 2015b; Radford, 2017a). En comprenant l'activité Θ comme un processus émergent, ces moments constituent les étapes à travers lesquelles elle évolue (Radford, 2015). Dans la figure 6.1 nous présentons un schéma de l'activité Θ et de ses moments.

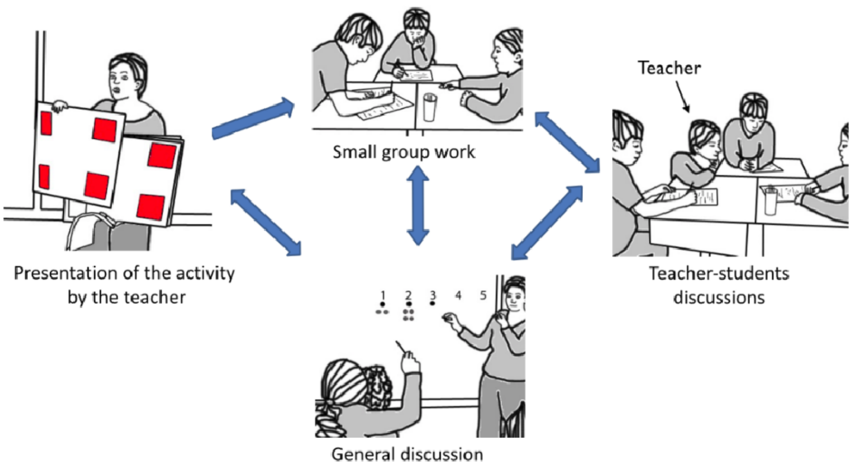


Figure 6.1 – Les moments de la séance qui caractérisent l'activité somme un système émergeant (Radford, 2015)

Les moments de l'activité sont : la présentation de la tâche par l'enseignante, le travail en groupe d'élèves, l'intervention de l'enseignante dans les groupes, et la discussion collective. L'activité peut s'arrêter à ce dernier moment, ou bien se poursuivre par un autre moment comme le travail en groupe, d'où le double sens des flèches dans le schéma 6.1.

Dans cette recherche, nous avons reformulé les moments de la séance ,selon la TO, en trois : la présentation de la tâche, le travail en groupe (en intégrant les interventions régulières de l'enseignante), et la synthèse, pour reprendre le terme utilisé par l'enseignante. Il existe parfois de brèves discussions collectives intermédiaires, comme le suggère le schéma ci-dessus. Nous présentons dans les paragraphes suivants la façon dont ces moments sont en général structurés dans les séances observées.

Présentation de la tâche

La présentation de la tâche des séances observées dure entre 5 et 10 minutes. En général, l'énoncé de la tâche prescrite est donné par écrit sur une feuille en papier, qui contient également des espaces pour les réponses aux questions posées. C'est ce que l'enseignante appelle une *feuille de réponses*. Dans certaines séances, dans lesquelles la tâches consiste à élaborer des problèmes (voir section 6.4), l'enseignante donne la consigne à l'oral et il n'y a pas de feuille de réponses (réponse orale ou/et sur ardoise). Quand l'énoncé est donné par écrit, l'enseignante distribue une feuille de réponses par groupe en début de séance et utilise un vidéoprojecteur pour montrer l'énoncé au tableau. Dans ce cas, la présentation de la tâche commence par la lecture à haute voix de l'énoncé de la tâche par une ou un élève (c'est l'occasion pour les élèves de s'entraîner à lire). L'enseignante reprend ensuite la parole, en reformulant l'énoncé et en posant souvent des questions aux élèves pour les aider à mieux le comprendre.

La présentation de la tâche inclut en général une modification de la tâche, dans la mesure où elle intègre des indications ou des aides supplémentaires de l'enseignante, qui peuvent être plus ou moins importantes par rapport à l'enjeu mathématique de la tâche. L'objectif de l'enseignante est de donner autant d'indications qu'elle le juge nécessaire pour démarrer l'activité, au moins partiellement, de sorte que toutes et tous les élèves « aient quelque chose à faire », selon ses mots.

Travail en groupe

Le temps de travail en groupe varie entre 15 et 20 minutes. Il débute avec la distribution du matériel de manipulation (pour les tâches impliquant du matériel de manipulation) sur lequel repose la tâche par l'enseignante ou la doctorante. Pendant le travail de groupe, les élèves sont engagé·e·s dans la résolution de la tâche prescrite. L'objectif est qu'elles et ils essayent d'avancer aussi loin que possible dans la résolution de la tâche (Radford *et al.*, 2009a). Les élèves peuvent poser des questions à l'enseignante, qui visite régulièrement les groupes pour évaluer leur progrès. L'enseignante pose également des questions aux élèves et leur apporte des aides en cas de difficulté.

Synthèse

Le moment de la synthèse est censé de durer environ 15 minutes. Au cours de la synthèse, l'enseignant mène des discussions collectives permettant aux élèves d'exposer, de comparer et de confronter leurs différentes réponses. Les élèves se rendent souvent au tableau pour expliquer leur raisonnement. C'est également l'occasion pour donner un statut culturel à ce que les élèves ont rencontré, en d'autres termes il s'agit d'une phrase d'*institutionnalisation* (dans un sens proche de celui de Brousseau, 2011).

6.3 Description des artefacts utilisés

Les séances observées sont caractérisées par l'utilisation du matériel de manipulation. Nous portons un double intérêt à cette utilisation. D'une part, les artefacts constituent le cadre permettant aux actions incarnées de se manifester de manière concrète. D'autre part, la médiatisation par l'utilisation d'artefacts caractérise la pensée multiplicative que nous voulons que les élèves rencontrent. L'utilisation d'artefacts matériels entraîne la mise en relation de la structure spatiale et géométrique des objets constituant les artefacts et les grandeurs impliquées (voir l'analyse du potentiel sémiotique des artefacts dans la section 7.1). Il s'agit de matériel de manipulation innovant. Le matériel de manipulation habituel dans la classe de CE2 observée était constitué de cubes multi-base et était réservé aux élèves en difficulté pour la numération. Dans deux des trois séances analysées en détail, les séances S_1 et S_2, l'artefact dénommé *boîtes et cubes* a été utilisé. L'autre séance, la séance S_3, d'élaboration de problèmes (voir section 6.3), a simplement utilisé un matériel aimanté pour représenter des quantités au tableau (des fleurs aimantés), que nous ne détaillerons pas davantage. Nous avons également fait intervenir un autre artefact, qui pour médier la rencontre avec des formes symboliques d'expression : la *grille fois-*

partie-tout, qui a été utilisée dans toutes les séances (introduite dans la première séance, utilisé pour la résolution de la tâche dans les autres deux séances).

Dans le paragraphe 6.3.1 nous décrivons l'artefact *boîtes et cubes*. Dans le paragraphe 6.3.2 nous décrivons l'artefact *grille fois-partie-tout*. Enfin, dans le paragraphe 6.3.3 nous décrivons l'artefact de manipulation utilisé dans les discussions collectives, l'artefact *boîtes et cubes aimantés*.

6.3.1 L'artefact *boîtes et cubes*

Nous avons conçu l'artefact *boîtes et cubes* dans le cadre de cette recherche. La fonction principale de l'artefact est de médiatiser la manipulation. L'artefact *boîtes et cubes* est composé de boîtes en plastique de différentes tailles et de petits cubes en bois d'arête 1 cm environ (la taille des cubes n'est pas exacte, avec une erreur possible de l'ordre du millimètre). La figure 6.2 présente une image du matériel. Les boîtes en plastique utilisées sont des prismes carrés droits ouverts sur une face et ayant deux faces carrées qui coïncident avec celles des cubes. Les autres quatre faces des boîtes correspondent à des rectangles dont la longueur a toujours une mesure entière en centimètres (toujours avec une erreur possible de l'ordre du millimètre), c'est-à-dire une mesure qui est multiple de la mesure du côté des cubes. De cette manière, il est possible de remplir les boîtes en plastique en fonction de leur taille avec un nombre fixe de petits cubes, sans laisser des grands espaces vides. Afin de rendre notre référence au matériel plus suggestive, nous désignons les boîtes en plastique sous le terme *boîtes de cubes*.

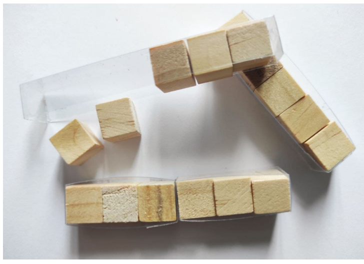


Figure 6.2 – Artefact *boîtes et cubes*, composé de boîtes en plastique de taille variable et de petits cubes en bois.

Nous avons intégré un outil appelé *quadrillage* dans la résolution des tâches avec l'artefact *boîtes et cubes*, en fonction de facteurs précisés ultérieurement. Il s'agit d'une feuille de papier rectangulaire sur laquelle est imprimée une grille des lignes de 3 millimètres d'épaisseur. Les carrés de la grille ont des côtés d'un centimètre de longueur (voir figure 6.2). L'une des fonctions de la grille est de réduire les effets éventuels des petites variations de tailles des boîtes et des cubes et d'appuyer l'exécution de certains schèmes d'utilisation de l'artefact, que nous détaillerons dans la section suivante.

Figure 6.3 – Quadrillage rectangulaire, sur lequel est placée une ligne de 2 boîtes de 3 cubes.

6.3.2 L'artefact *grille fois-partie-tout*

L'artefact *grille fois-partie-tout* est un artefact symbolique qui a été conçu au cours du travail collaboratif avec l'enseignante dans cette recherche. Elle avait exprimé son intention de concevoir un outil schématique pour appuyer l'activité des élèves pour la résolution de problèmes verbaux multiplicatifs. Dans le cadre de résolution de problèmes additifs, l'enseignante avait eu recours à un diagramme [2] basé sur le modèle « partie-tout » [3], qu'elle a dénommé, dans le contexte de sa classe, la *grille de résolution*. Nous avons pris appui sur cet artefact symbolique pour élaborer la *grille fois-partie-tout*. Nous décrivons l'artefact et la modalité d'utilisation dans le paragraphe suivant.

Artefact *grille de résolution*

L'enseignante a utilisé l'artefact symbolique *grille de résolution* pour médiatiser l'activité de *résolution* des problèmes verbaux additifs, raison pour laquelle il reçoit cette dénomination. L'enseignante a présenté le diagramme sous la forme d'une boîte rectangulaire divisée par une ligne verticale au milieu, où la boîte de gauche a des subdivisions horizontales pour délimiter autant des cases que le nombre d'opérandes. L'artefact *grille de résolution* est ainsi remplie de la façon suivante : les opérandes de la relation additive sont placés dans les cases de gauche et le résultat est placé à droite. Les relations additives abordées par l'enseignante à l'aide de la *grille de résolution* ne comportaient que des nombres. En ce qui concerne la terminologie « partie-tout »,

2. Nous entendons par diagramme une représentation visuelle simplifiée et structurée de relations.
3. Les diagrammes partie-tout sont souvent utilisés à l'école primaire, notamment dans le contexte anglo-saxon, pour représenter des relations additives entre quantités ou nombres. Les diagrammes peuvent inclure des cercles ou des barres. Le terme peut également désigner une classe de problèmes selon la typologie des problèmes additifs-soustractifs proposée par Vergnaud (2020).

l'enseignante utilise le terme « partie » ou « parties » pour désigner les nombres qui jouent le rôle d'opérandes dans la relation additive, les cases respectives étant appelées « cases de la partie » ou encore « partie », dans un abus du langage. De même, le terme « tout » est utilisé par l'enseignante pour faire allusion au résultat de l'addition ou la soustraction représentée, la case correspondante étant appelée « case du tout » ou « tout ». Nous représentons dans la figure 6.4 la relation additive $5 + 5 + 5 + 5 = 20$ dans la *grille de résolution*.

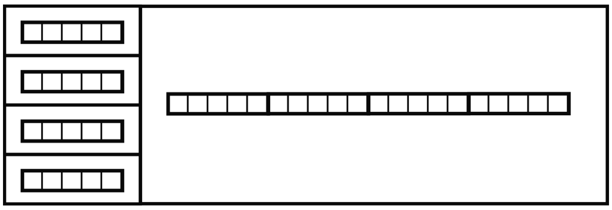


Figure 6.4 – Représentation de la relation multiplicative entre les grandeurs constituant la ligne de boîtes de 5 au moyen de la *grille de résolution*, avec le matériel aimanté.

Description de la forme et le vocabulaire associé à la grille fois-partie-tout

L'artefact symbolique *grille fois-partie-tout* consiste en un diagramme composé de deux cases rectangulaires de même hauteur et une case circulaire (voir figure 6.5). Il a été conçu dans le but de représenter des relations multiplicatives entre grandeurs, en fonction de l'emplacement des signes dans les cases. Les cases rectangulaires sont accolées horizontalement par la largeur, et la case circulaire est disposée au-dessus de la case rectangulaire de gauche, plus petite que celle de droite. La case circulaire s'appelle « nombre de fois », la case rectangulaire de gauche s'appelle « partie », et la case rectangulaire de droite, « tout ». Nous présentons dans la figure 6.5 le diagramme avec les noms des termes qui correspondent.

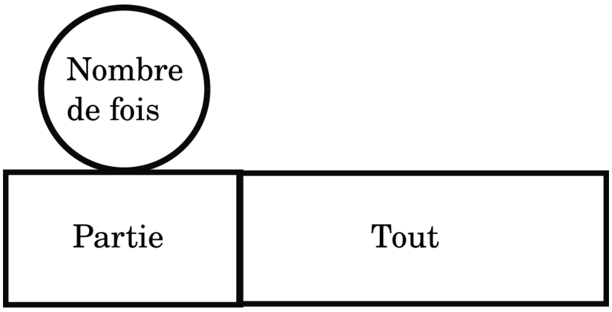


Figure 6.5 – Artefact *grille fois-partie-tout*, remplie avec les noms des termes qui correspondent pas case

Étant donné G un champ de grandeurs, $n \in \mathbb{N}$ et $g, g' \in G$, le *nombre de fois* est le terme pour faire référence au scalaire n dans la relation multiplicative $n \times g = g'$, les termes *partie* et *tout* correspondent respectivement aux grandeurs g et g'. Le vocabulaire associé à la *grille fois-partie-tout* conserve les termes « partie » et « tout » de la *grille de résolution*. Nous avons également gardé le mot « grille » pour faire allusion à une utilisation similaire. La forme circulaire de la case du nombre de fois obéit à celle utilisée par Vergnaud (1983) pour représenter des quantités scalaires, dans sa schématisation des problèmes relevant des structures multiplicatives.

6.3.3 Artefact *boîtes et cubes aimantés*

L'artefact des boîtes et des cubes aimantés a été conçu pour être utilisé dans les instances de discussion collective de la classe. Il s'agit d'un matériel de manipulation aimanté composé des rectangles qui contiennent des carrés. Ils sont fabriqués en papier, plastifiés et aimantés, afin de pouvoir être placés dans le tableau. Nous présentons dans la figure 6.6 une photo du matériel. Les carrés représentent les cubes et les rectangles de carrés les boîtes remplies de l'artefact *boîtes et cubes*. Les contours des rectangles sont plus épais que les contours des carrés représentant les cubes, ceci pour renforcer l'idée de la présence des boîtes. L'utilisation de l'artefact ne permet pas seulement l'évocation dans des phases collectives des schèmes de construction de lignes de boîtes et de la comparaison de lignes, mais aussi de l'intégrer au remplissage de la *grille fois-partie-tout* dans le tableau (pour pouvoir produire des représentations comme celle de la figure 7.5, dans le chapitre 7).

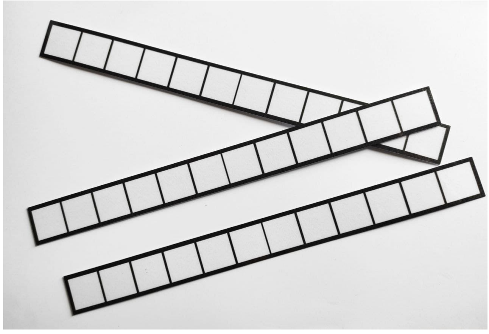


Figure 6.6 – Artefact *boîtes et cubes aimantés*, composé de rectangles en papier, plastifiés et aimantés, qui représentent les boîtes de cubes de l'artefact *boîtes et cubes*.

6.4 Tâches des séances observées et entretiens

Nous avons élaboré les tâches des séances enregistrées en collaboration avec l'enseignante de CE2 avec laquelle nous avons travaillé. Nous avons conçu 14 tâches (voir annexes B), le travail sur 6 d'entre elles a été enregistré, et 8 ont été des tâches de réinvestissement qui n'ont pas donné lieu à un enregistrement. Les tâches de réinvestissement consistaient en des tâches simples qui reprenaient les points essentiels des tâches complexes des *séances de résolution de problème* enregistrées. En général nous avons proposé des tâches à l'enseignante, qui a évalué leur pertinence et faisabilité dans sa classe, et a proposé des modifications si nécessaire. À la demande de l'enseignante, nous avons conçu des tâches qui pouvaient en principe être résolues par les élèves de CE2 dans un temps limité, 20 minutes au maximum, et incluaient 3 questions au maximum. Nous nous sommes également adaptées aux exigences institutionnelles du programme scolaire et de l'école primaire de l'enseignante.

En général, le but des tâches était de résoudre un problème verbal en mobilisant une pensée multiplicative. Puisque les spécificités des tâches façonnent le contenu conceptuel de l'activité à travers laquelle le savoir sera rencontré (Radford et Sabena, 2015), elles ont été élaborées de manière à pouvoir éclairer, au moins en principe, à nos questions de recherche. D'une part, les tâches étaient focalisées sur la médiation de formes matérielles de représentation par l'interaction avec l'artefact *boîtes et cubes*. Les questions posées ont supposé un degré varié d'implication d'actions dans la résolution de problèmes, comme nous constatons dans l'analyse *a priori* de celles-ci (voir chapitre 8). D'autre part, les tâches ont impliqué l'artefact symbolique *grille fois-partie-tout*, pour la distinction des termes qui constituent les relations multiplicatives sous-jacentes aux tâches et l'inconnue à l'intérieur de celles-ci. Certaines tâches ont été focalisées sur l'une des opérations de multiplication et de divisions, d'autres ont impliquée les trois opérations.

Nous allons dans la suite donner des précisions sur les tâches des séances observées et les entretiens menés avec les élèves.

6.4.1 Tâches des séances analysées

Nous affichons dans le tableau 6.1 des informations concernant les 6 tâches correspondantes aux séances analysées. Les tâches T_1, T_2 et T_3 correspondent respectivement aux séances S_1, S_2 et S_3 analysées en détail. Les tâches T_1 et T_2 impliquent l'artefact *boîtes et cubes*. La tâche T_3 est une tâche d'élaboration de problèmes, qui implique un artefact aimanté pour représenter des grandeurs au tableau. La séance S_1 de résolution de la tâche T_1 est celle de l'introduction de l'artefact *grille fois-partie-tout*. Toutes les autres tâches impliquent cet artefact. Le reste de tâches,

T_4, T_5 et T_6 correspondent respectivement aux séances S_4, S_5 et S_6 que nous avons analysées seulement dans une phase préliminaire (voir les étapes d'analyse dans la section 5.3.2). L'analyse *a priori* des tâches T_1, T_2 et T_3 est détaillée dans le chapitre 8. Les énoncés des tâches T_4, T_5 et T_6 sont en annexe (voir annexes B).

T	Nom de la tâche	Opérations	Artefacts	Date	Enregistrement
T_1	Ligne de boîtes de même longueur	Multiplication	boîte et cubes quadrillage	11/03/2019 Première séance	Enseignante Deux groupes d'élèves
T_2	Partage de lignes de boîtes	Division partage	boîte et cubes grille fois-partie-tout	01/04/2019 Troisième séance	Enseignante Deux groupes d'élèves
T_3	Élaboration de problèmes (deuxième séance)	Les trois	grille fois-partie-tout matériel aimanté	17/06/2019 Sixième séance	Enseignante Photos ardoises
T_4	Commutativité avec des lignes	Multiplication	boîte et cubes quadrillage grille fois-partie-tout	18/03/2019 Deuxième séance	Enseignante Deux groupes d'élèves
T_5	Groupes dans les lignes	Division groupement	boîte et cubes grille fois-partie-tout	08/04/2019 Quatrième séance	Enseignante Deux groupes d'élèves
T_6	Élaboration de problèmes (première séance)	Les trois	grille fois-partie-tout matériel de manipulation	03/06/2019 Cinquième séance	Enseignante Deux groupes d'élèves

Tableau 6.1 – Tâches analysées de manière générique. La colonne « opérations » indique les opérations de multiplication ou/et de divisions sur lesquelles porte la tâche. La colonne « artefacts » indique les artefacts qui sont utilisés pour la résolution des tâches : l'artefact *boîtes et cubes*, l'artefact *grille fois-partie-tout* ou d'autres artefact de manipulation. Enfin, la colonne « date » indique la date de réalisation de la séance dans laquelle la tâche a été prescrite.

6.4.2 Entretiens

Des entretiens avec des élèves ont été menés le 26 juin 2019, en dehors des cours. Les cinq élèves qui ont participé·e·s à toutes les séances ont été choisi·e·s par l'enseignante, qui a essayé de sélectionner des élèves de différents niveaux de progression. Les élèves devaient d'abord résoudre individuellement le problème verbal suivant : *Anaïs mange 5 fruits par jour. Combien de fruits mange-t-elle par semaine?*. Le problème se résout par une multiplication (première question) et par une division groupement (deuxième question). Une fois que les élèves avaient résolu le problème, la doctorante leur a demandé d'exprimer leurs réponses et d'expliquer leur procédure. Les entretiens ont duré environ 2 minutes par élève. Ceci après avoir jeté un premier coup d'œil aux séances et constaté une faible production de gestes par les élèves. L'objectif des entretiens était donc de vérifier si les élèves produisaient des gestes pour s'exprimer et, le cas échéant, d'analyser ces gestes. Ces entretiens ne constituant pas pour nous une rencontre avec le savoir, nous les avons considérés uniquement pour compléter notre analyse de séances S_1, S_2 et S_3, à partir des observables repérés.

6.5 Recueil de données

Cette section est consacrée à la description des sources et des modalités du recueil de données. Dans le paragraphe 6.5.1 nous nous référons à l'enregistrement vidéo et audio, qui est notre principale source de données. Dans le paragraphe 6.5.2, nous décrivons nos notes de terrain et les échanges avec l'enseignante. Enfin, dans le paragraphe 6.5.3, nous préciserons les sources écrites : des évaluations des élèves effectuées et des feuilles avec les réponses des élèves, lors de certaines séances. Ces deux dernières sources, ont joué un rôle secondaire, à préciser dans la suite.

6.5.1 Enregistrement d'image et d'audio

Nous avons enregistré la vidéo et l'audio des six séances, listées dans le tableau 6.1. Pour chaque séance, nous avons utilisé deux caméras et deux dictaphones. En général, nous avons mis les caméras au fond de la classe aux moments des discussions collectives, lors de la présentation de la tâche et la synthèse de la séance, afin de saisir la globalité de la séance. Au moment du travail en groupe, nous avons installé les caméras sur deux groupes d'élèves [4] Dans les entretiens, nous avons enregistré la vidéo et l'audio avec une caméra qui filmait l'élève.

Pour l'enregistrement de la session S_3, nous avons procédé différemment que pour l'enregistrement lors du travail en groupe. Nous avons fait le choix méthodologique de ne pas enregistrer le travail en groupe des élèves, sur la base d'une observation de l'enregistrement vidéo de la séance S_6 d'élaboration de problèmes déroulant chronologiquement avant S_3 (voir table 6.1). En effet, nous n'avons alors observé pratiquement aucun échange entre les élèves. De plus, la lecture des problèmes élaborés par les élèves au cours de la synthèse de la séance S_6 était souvent incompréhensible. Nous avons donc choisi de photographier les déclarations des élèves de la classe pendant le travail de groupe en complément des enregistrement des moments d'échanges collectifs. L'objectif était d'assurer la reconstruction des interventions des élèves au tableau, ainsi que de constituer une base de données plus étendue sur les énoncés produits par les élèves.

6.5.2 Notes de terrain et échanges avec l'enseignante

La doctorante prend des notes pour créer des notes de terrain après chaque leçon de mathématiques. Ces notes de terrain contiennent des remarques sur ce qui s'est passé lors des séances, par exemple, des notes sur des faits didactiques jugés intéressants pour une analyse plus approfondie. Nous complémentons ces données avec des échanges avec l'enseignante concernant l'activité déclenchée par la résolution des tâches de réinvestissement, lors des séances que ne sont pas filmés (voir annexes B). Les notes de terrain ont servi principalement à identifier les segments saillants des séances analysées et à rappeler les aspects à discuter avec l'enseignante pour la planification des tâches ultérieures.

6.5.3 Évaluations et traces écrites

L'enseignante a fait des évaluations lors des séances. Une évaluation formative fin avril et une autre, évaluation finale fin juin.

L'évaluation formative contenait deux item (voir annexes C). Le premier item consistait en la résolution de 6 problèmes verbaux multiplicatifs. Pour chaque problème les élèves devaient

4. Pour l'enregistrement du travail en groupe, nous avons les cas échéant changé de groupe les élèves qui ne devaient pas être filmé·e·s. Lors de l'enregistrement des moments de discussion collective, nous avons fait placé ces élèves hors du champ de la caméra.

écrire la réponse, remplir la *grille fois-partie-tout* et écrire le calcul qui permettait de trouver la réponse. Le deuxième item comportait des grilles fois-partie-tout avec l'une des cases vides. La tâche était de remplir la case vide et d'indiquer l'opération que les grilles représentaient.

L'évaluation finale comprenait, parmi d'autres questions portant sur la numération, trois questions de résolution de problèmes verbaux multiplicatifs (voir annexes D). Comme pour l'évaluation formative, les élèves devaient écrire la réponse, remplir la *grille fois-partie-tout* et écrire le calcul qui permettait de trouver la réponse.

Les évaluations ont été scannées et analysées selon la quantité de réponses réussites par item. L'analyse des évaluations nous a donné une idée des difficultés des élèves à résoudre des tâches multiplicatives impliquant l'artefact *grille fois-partie-tout*. En particulier, l'évaluation formative a été utile pour la planification de tâches ultérieures. Ces données n'ont pas été reprises dans l'analyse de séances.

Nous comptons également avec les feuilles avec les réponses de deux groupes d'élèves enregistrés lors des séances S_2 et S_5 (voir annexes E). Ces feuilles ont également été scannées et prises en considération dans l'analyse de séances, notamment dans l'analyse de la séance S_2.

6.6 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons précisé le contexte et la planification de notre expérimentation. En effet, notre expérimentation s'encadre dans un projet de travail collaboratif avec une enseignante expérimentée de CE2. Nous avons précisé le rôle de la doctorante et le rôle de l'enseignante. Nous avons rendu compte des conditions de la mise en place des séances, comme celles correspondant à l'enregistrement vidéo des élèves, aux conditions de l'enseignement et à la progression globale de la classe. Nous avons fait allusion à la contrainte de la répartition de matières avec l'autre enseignant de la classe. Nous avons précisé l'organisation des séances en trois moments : présentation de la tâche, travail en groupe et synthèse. Nous avons rendu compte de nos limitations pour travailler avec l'enseignante autour de l'éthique communautaire et des principes de travail en groupe que nous avons élaborés.

Nous avons également décrit l'artefact de manipulation *boîtes et cubes* et l'artefact symbolique *grille fois-partie-tout*, impliqués dans les tâches des séances que nous avons analysées. Nous avons donné des précisions sur les tâches et les séances analysées, comme les noms, les opérations arithmétiques abordées, les artefacts impliqués, la chronologie, et les enregistrements qui ont eu lieu (voir tableau 6.1). Nous avons également fait référence aux entretiens qui ont complété nos analyses. Nous avons décrit les sources et les modalités de recueil de données.

Troisième partie

Analyses

Introduction

Cette partie est consacrée à la présentation de nos analyses, suivant les principes méthodologiques exposés au chapitre 5. Certes, l'une des étapes les plus importantes du processus de recherche. Comme le souligne Hatch, « Data analysis is a systematic search for meaning. » (Hatch, 2002, p.148). Nous cherchons avec nos analyses à donner du sens aux données que nous avons collectées pour aborder nos questions de recherche.

Dans le chapitre 7, nous présentons nos analyses du potentiel sémiotique des artefacts présentés dans la section 6.3. Dans le chapitre 8 nous présentons nos analyses des séances qui cherchent reconstruire l'activité mathématique.

Sommaire Partie I

Chapitre 7

Analyse du potentiel sémiotique des artefacts

Dans cette section, nous décrivons et analysons le potentiel sémiotique des deux principaux artefacts, *boîtes et cubes* et de l'artefact *grille fois-partie-tout*, conçus dans le contexte du travail collaboratif avec l'enseignante pour la résolution de tâches multiplicatives (voir section 6.2). Nous décrivons les artefacts dans la section 6.3. Ce sont les artefacts qui interviennent dans les séances S_1, S_2 et S_3, que nous avons analysées en détail. L'utilisation de ces artefacts se rapporte à la résolution de diverses tâches multiplicatives, comme spécifié dans la section 6.2. L'analyse du potentiel sémiotique des artefacts fournit une perspective adaptée pour mettre en évidence, du point de vue sémiotique, le rôle qu'ils peuvent jouer dans le processus d'objectivation des opérations de multiplication et de division. Elle revient à apprécier la « historical intelligence » (au sens de Radford, 2014b) que les artefacts portent, en termes de significations mathématiques. Notre analyse du potentiel sémiotique de chaque artefact est organisée en trois sections. Nous rendons d'abord compte du type des tâches qui sont prescrites en utilisation des artefacts et les schèmes d'utilisation qui en découlent, en nous appuyant de la théorie de la médiation sémiotique (voir paragraphe 4.2). Nous précisons ensuite nos hypothèses sur le potentiel sémiotique des artefacts et les questions que cette analyse soulève.

Plus spécifiquement, l'analyse du potentiel sémiotique de l'artefact *boîtes et cubes* est cruciale pour comprendre la transformation du sens véhiculé par les actions incarnées. D'autre part, l'analyse du potentiel sémiotique de l'artefact *grille fois-partie-tout* est liée à l'élucidation des formes symboliques qui vont participer à la médiation de la pensée multiplicative. L'utilisation de ces artefacts de deux types, manipulatoire et symbolique, permet également de se poser les questions suivantes : comment peut-on envisager une transition de formes incarnées vers des formes d'expression symboliques? L'analyse du potentiel sémiotique des artefacts est cruciale pour donner des éléments de réponse à cette question, sur laquelle nous reviendrons dans les conclusions de la thèse.

7.1 Analyse du potentiel sémiotique de l'artefact *boîtes et cubes*

7.1.1 Tâches à accomplir impliquant l'artefact et schèmes d'utilisation associés

L'artefact *boîtes et cubes* est manipulé par les élèves observé·e·s dans le contexte de la résolution des tâches multiplicatives T_1, T_2, T_4 et T_5. Ces tâches portent sur des relations multiplicatives entre grandeurs liées aux objets qui composent l'artefact : des cubes, des boîtes et des lignes construites avec les boîtes. Dans une phase préalable à la résolution de ces tâches, les élèves doivent remplir les boîtes de cubes, au moyen du schème d'utilisation que nous appelons *schème de remplissage des boîtes (avec les cubes)*. Nous avons également identifié deux autres schèmes d'utilisation associés à l'artefact, qui correspondent au *schème de construction des lignes de boîtes* et au *schème de comparaison (directe) de longueur de lignes de boîtes*. Nous prenons appui sur la ressemblance de l'artefact avec celui de cubes multi-base, matériel de manipulation d'usage habituel à l'école primaire en France (voir paragraphe 2.2.1). Les artefacts sont proches du point de vue de l'assemblage des cubes en lignes de cubes. Notre intention est de mettre en relief certains aspects du potentiel sémiotique de l'artefact *boîtes et cubes*.

Le schème de remplissage

Le schème d'utilisation que nous appelons de *remplissage de boîtes* permet, par l'action incarnée sur le matériel, de rassembler les cubes à l'intérieur des boîtes. Dans le remplissage d'une boîte, des cubes sont placés à l'intérieur côte à côte, juxtaposés, de manière à constituer des lignes de cubes contenues dans les boîtes. Le schème d'utilisation inverse correspond à vider les cubes des boîtes. Les cubes multi-bases, quant à eux, sont assemblés en rangées de cubes, empilés ou assemblés (sans remplir les boîtes). Les rangées peuvent être défaites en dépliant ou en désassemblant les cubes.

Schème de construction de lignes de boîtes

Grâce à la structure des boîtes, qui constituent des lignes de cubes, l'artefact admet un autre usage : la *construction de lignes de boîtes*. Les lignes de boîtes sont construites en plaçant des boîtes bout à bout (voir les figures 6.2 et 6.3). Pour la résolution des tâches T_1 et T_2 (voir l'analyse *a priori* Φ de la tâche T_1 dans la section 8.1), l'exécution du schème de *construction de lignes de boîtes* est subordonnée à la comparaison directe de longueurs de lignes. Autrement dit, les lignes de boîtes sont construites pour comparer de façon directe leurs longueurs (nous y revenons dans le paragraphe suivant). Les boîtes doivent par conséquent être alignées, ce qui nécessite de contrôles géométriques que nous décrivons en termes de *droites auxiliaires*. Dans le cas où la tâche est résolue dans un cadre numérique, l'exécution du schème de construction de lignes de boîtes dispense des contrôles géométriques nécessaires pour aligner les boîtes.

Nous considérons que le contrôle de l'alignement des boîtes peut être effectué, au moyen des droites auxiliaires, essentiellement de deux façons. La première est de prendre appui sur une droite auxiliaire et vérifier que la ligne de boîtes est entièrement le long de celle-ci. La deuxième est de prendre appui sur deux droites auxiliaires et vérifier que la ligne de boîtes est située intégralement entre deux droites auxiliaires. Du point de vue matériel et sensible, ce sont des segments de ces droites auxiliaires avec lesquels on travaille. Les segments de droites auxiliaires peuvent être tracés, imaginés, ou bien repérés si la construction de lignes est effectué sur une surface comportant des lignes droites. En particulier, le quadrillage contient des droites parallèles qui peuvent servir de droites auxiliaires, de sorte que son inclusion dans la résolution de tâches incorpore un outil pour mettre en place ces contrôles. Les contrôles géométriques d'alignement de boîtes peuvent également se faire à l'aide des autres outils comme les mains, dont les doigts peuvent fonctionner en tant que segments de droites auxiliaires.

Schème de comparaison (directe) de longueurs de lignes de boîtes

Ce schème d'utilisation porte sur la comparaison de longueurs de deux lignes de boîtes construites avec l'artefact. La comparaison peut être directe, à partir de la structure en ligne de boîtes qui organise les cubes, ou indirecte, si les longueurs des lignes sont comparées au moyen de leur mesure (quantité de cubes par ligne). Dans ce dernier cas, la construction de lignes de boîtes ne doit pas se faire nécessairement par le schème décrit dans le paragraphe précédent. Puisque nous nous intéressons à l'utilisation du schème dans le premier cas, nous le désignons occasionnellement dans ce contexte comme le schème de comparaison des longueurs des lignes des boîtes, afin de simplifier la présentation de nos analyses. En revenant aux opérations du schème relatives au cadre géométrique et des grandeurs, notons que la ligne d'origine, à partir de laquelle les lignes de boîtes sont construites, peut être associée à une droite auxiliaire. Il s'agit d'une droite auxiliaire orthogonale à la ligne de boîtes (alignées). Il est possible d'utiliser cette ligne auxiliaire selon les méthodes mentionnées ci-dessus. En outre, le parallélisme de lignes de boîtes va être contrôlé de différentes façons selon que les lignes de boîtes sont construites séparément, espacées, ou l'une juste à côté l'autre, collées. Dans la figure 7.1, nous présentons une construction des lignes de boîtes séparément sur le quadrillage.

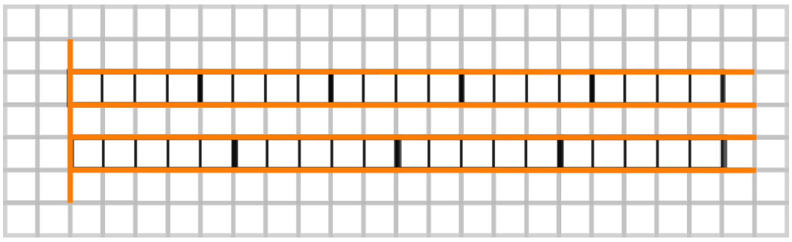


Figure 7.1 – Construction séparée des lignes sur le quadrillage. Les lignes orange représentent les droites auxiliaires qui peuvent être utilisées. Une première droite auxiliaire à gauche est celle où se placent les extrémités des lignes, les autres servent à contrôler l'alignement de boîtes.

Le contrôle de l'alignement de boîtes est dans ce cas effectué séparément. Il y a deux droites auxiliaires qui peuvent contrôler l'alignement des boîtes par ligne de boîtes. Si les extrémités des lignes de boîtes alignées sont mises sur une même droite auxiliaire, les lignes de boîtes sont parallèles [1], car elles sont perpendiculaires à la même droite.

Nous présentons dans la figure 7.2 une construction des lignes de boîtes accolées.

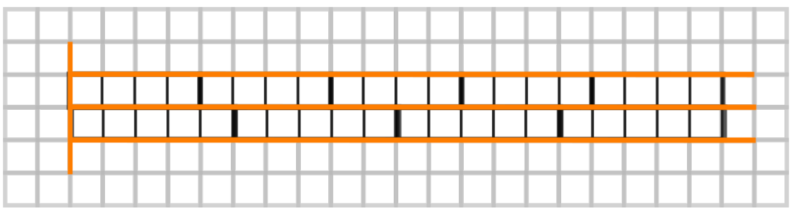


Figure 7.2 – Construction des lignes l'une juste à côté de l'autre sur le quadrillage. Les lignes orange représentent les droites auxiliaires qui peuvent être utilisées. Une première ligne à gauche est celle qui peut aider à placer les origines de lignes de boîtes, les autres servent à contrôler l'alignement de boîtes.

Dans ce cas, une droite auxiliaire unique peut servir pour contrôler à la fois l'alignement de boîtes et le parallélisme des lignes de boîtes. Le segment de droite auxiliaire peut se placer au

1. Ce n'est pas la seule façon d'obtenir des lignes de boîtes parallèles, mais c'est celle qui convient pour obtenir des lignes de boîtes qui peuvent être comparées du point de vue de leurs longueurs.

milieu des lignes de boîtes ou le long de l'une des lignes de boîtes. Notons que le segment de droite auxiliaire à employer pour vérifier que les lignes de boîtes sont placées sur une même ligne d'origine (segment de la droite perpendiculaire aux lignes) est beaucoup plus court que celui précédent (segment de droite au milieu de lignes de boîtes). En conséquence, l'utilisation, par exemple, de doigts en guise de segments auxiliaires est tout à fait plausible. C'est ainsi que les sous-activités de traitement attendues sont moins coûteuses dans ce cas.

Notez que la longueur du segment de ligne auxiliaire à utiliser pour vérifier que les lignes des boîtes sont situées sur la même ligne d'origine (la ligne perpendiculaire aux lignes) est plus courte que la précédente (la ligne au milieu des lignes des boîtes). Par conséquent, l'utilisation, par exemple, des doigts comme segments auxiliaires est tout à fait plausible. Ainsi, les sous-activités de traitement envisagées sont moins coûteuses dans ce cas.

Si les lignes de droites partent d'une même ligne d'origine et sont parallèles, la comparaison directe de longueurs de lignes de boîtes peut, selon nous, se faire principalement de deux façons, à l'aide des droites auxiliaires : une comparaison par extrémités ou une comparaison par projection. Comme pour la construction des lignes de boîtes, ces opérations peuvent se faire à l'œil nu ou à l'aide des outils, comme la main.

Nous présentons dans la figure 7.3 une comparaison des longueurs de lignes de boîtes par extrémités.

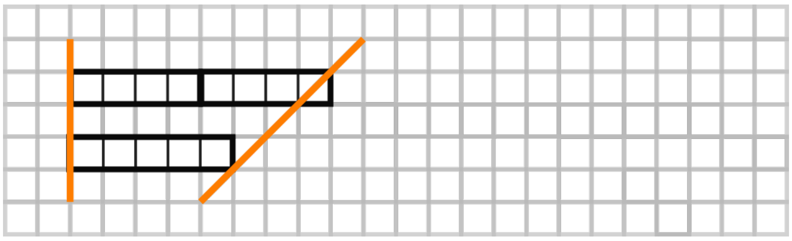


Figure 7.3 – Comparaison des longueurs de lignes par extrémités, au moyen d'une droite auxiliaire qui relie les extrémités des lignes de boîtes. Sans perte de généralité, l'exemple montre des lignes de boîtes espacées : c'est la longueur des segments de droites employés qui change.

La comparaison par extrémités consiste à repérer un segment de droite qui relie les extrémités des lignes de boîtes qui ne sont pas sur la ligne d'origine. Si la droite est orthogonale aux deux lignes de boîtes, les lignes de boîtes comparées ont la même longueur.

Nous présentons dans la figure 7.4 une comparaison des longueurs de lignes de boîtes par projection.

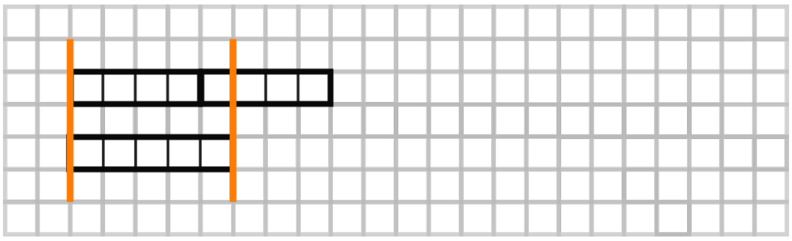


Figure 7.4 – Comparaison des longueurs de lignes par projection, au moyen d'une droite auxiliaire qui permet de faire la projection d'une ligne de boîtes sur l'autre. Sans perte de généralité, l'exemple montre des lignes de boîtes espacées, mais la même opération peut être mise en place si les lignes sont collées.

La comparaison des lignes par projection consiste à projeter une droite auxiliaire, orthogonale aux lignes de boîtes, à partir de l'extrémité qui n'est pas à l'origine de l'une des lignes de boîtes jusqu'à l'autre. Si la droite arrive à l'extrémité de l'autre ligne, les lignes de boîtes ont la même longueur.

7.1.2 Le potentiel sémiotique de l'artefact boîtes et cubes

De manière générale, l'interaction avec l'artefact *boîtes et cubes* permet de rencontrer une pensée multiplicative médiatisée par des formes matérielles de représentation, comme l'arithmétique concrète développée par l'école pythagoricienne (voir section 2.2.1) ou l'artefact de cubes multi-base. Il convient de ne pas perdre de vue qu'il s'agit d'un artefact, bien qu'innovant, déjà ancré dans une forme historique particulière d'industrie du 20e siècle dans la société de scolarisation massive (les cubes en bois). Nous analysons le potentiel sémiotique associé au matériel, qui revient à rendre compte du savoir culturel-historique qu'il véhicule. Nous allons nous appuyer sur les schèmes d'utilisation de remplissage de boîtes, de construction de lignes de boîtes et de comparaison de lignes de boîtes. Nous organisons la présentation par les objets physiques qui sont impliqués : le cube, la boîte et la ligne. Nous organisons dans le tableau 7.1 les significations mathématiques dont nous rendons compte dans les paragraphes suivants.

Le cube

Les cubes engagent au moins deux grandeurs : d'une part, leur quantité, grandeur discrète taille de la collection de cubes ; et, d'autre part, la longueur, une grandeur continue, pour la longueur du côté. Dans ce cas, le côté du cube est interprété en tant que segment de droite.

La boîte

Les boîtes remplies de cubes réunissent deux objets physiques, une boîte et l'ensemble de cubes. En conséquence, toute quantité de boîtes consiste à la fois en deux collections d'objets physiques : une collection de cubes et une collection de boîtes. Les boîtes représentent également des grandeurs discrètes. Plus précisément, toute boîte de cubes évoque deux grandeurs discrètes : 1 boîte et une quantité supérieure à 1 de cubes [2]. Une troisième grandeur est engagée, la longueur de la boîte, si elle est interprétée en tant que segment de ligne droite. La longueur de la boîte est la même que la longueur de la ligne de cubes qu'elle contient. Dans ce dernier car, la boîte est conçue comme union de segments, qui correspondent à l'arête du cube.

Les significations mathématiques que nous avons mentionnées ne sont pas *transparentes* : la simple action de remplir les boîtes des cubes n'implique pas que ces significations soient saisies. Notons également que la taille de boîtes de cubes est fixe (une boîte de 4 ne peut être remplie qu'avec 4 cubes), il n'est donc pas nécessaire de prévoir le nombre de cubes par boîte dans leur remplissage. En revanche, une action plus intentionnelle doit se produire pour imbriquer les cubes multi-base afin de représenter une quantité.

En particulier, le remplissage des boîtes induit une relation de *contenance* entre la boîte et les cubes. Il s'agit d'une relation spatiale particulière déterminée par : un intérieur, où les cubes sont placés ; une frontière, la boîte plastique ; et un extérieur. Lakoff et Nuñez (2000) comprennent cette relation spatiale comme une structure cognitive qu'ils dénomment le « container schema ». Le « container schema » est, selon Lakoff et Nuñes (2000), d'une grande importance dans la compréhension de notions mathématiques tels que les ensembles fermés, les intervalles bornés et les figures géométriques. Étant profondément ancrée dans des pratiques humaines anciennes, selon les auteurs, il nous semble que la relation de contenance est une source potentielle de significations personnelles, susceptibles d'évoluer vers les significations mathématiques susmentionnées par l'intervention intentionnelle de l'enseignante. En effet, dans la catégorisation de Kouba (1989) des problèmes multiplicatifs du type « one-to-many relationship » (isomorphisme de mesures pour des grandeurs discrètes), la relation de contenance détermine la caté-

2. Notons que tout artefact composé de collections d'objets qui peuvent être rassemblés, comme les paquets de bâtons, les paquets d'allumettes ou les cubes multi-base, évoquent ces signifiés mathématiques, comme Mariotti (2012) l'indique pour l'artefact constitué des paquets de tiges.

gorie de problèmes considérée comme la plus élémentaire dans la catégorisation :

> In Problem A, because of the connotation of a can as a container, children are likely to have no difficulty seeing the can in its two roles of being an object in and of itself and a holder that represents a group of objects. (Kouba, 1989, p. 148).

La ligne

Toute ligne de boîtes est un objet matériel en soi (une ligne de boîtes) et une collection d'objets physiques : des collections de boîtes et de cubes. Du point de vue géométrique, la ligne de boîtes renvoie au concept mathématique de ligne droite, et plus précisément à celui de segment de ligne droite. Dans cette perspective, la ligne de boîte correspond également à l'union des segments (une succession de boîtes) et l'union de l'union de segments (une succession de cubes). Nous considérons que le concept de segment de droite devient apparent par l'exécution du schème de construction de lignes de boîtes. Les relations entre les lignes, les boîtes et les cubes peuvent ainsi se comprendre au sein de la structure géométrique spatiale : dans un premier rang le cube, qui correspond à un segment ; dans un deuxième rang la boîte, qui correspond à une union de segments ; et dans un troisième rang la ligne, qui correspond à une union d'union de segments. La perceptibilité des boîtes de cubes dans les lignes permet que cette structure géométrique spatiale soit susceptible d'être distinguée. Toutefois, une position intentionnelle à l'égard des grandeurs et de leurs relations est nécessaire pour l'ancrer de manière significative.

Du point de vue des grandeurs discrètes, toute ligne de boîtes en désigne trois : 1 ligne, une quantité supérieure à 1 de boîtes et une quantité supérieure à 1 de cubes. En général, la quantité de lignes n'intervient pas dans la résolution des tâches prescrites, à l'exception de la tâche T_2, sous-tâche ST2 (voir l'analyse *a priori* Φ de la tâche T_2 dans la section 8.4). Du point de vue des grandeurs continues, la ligne de boîtes, en tant que segment de droite, évoque une longueur. Il nous semble que le schème de comparaison de longueurs de lignes fait apparaître la longueur de lignes. Nous tenons à souligner que la structure spatiale géométrique des lignes induit des relations entre longueurs : d'une part, la longueur des boîtes comme mesure en termes de la longueur du cube, et, d'autre part, la longueur de la ligne en relation multiplicative avec la longueur de boîtes qui la composent.

Nous organisons dans le tableau 7.1 les significations mathématiques évoqués par l'artefact *boîtes et cubes* dont nous avons rendu compte dans les paragraphes précédents.

Objets	Grandeurs discrètes	Grandeurs continues	Concepts géométriques
Cube	1 cube	Longueur d'un segment (arête du cube)	Segment
Boîte	1 boîte Quantité de cubes	Longueur d'un segment (arête de la boîte) Mesure en la longueur d'une arête d'1 cube	Segment Union de segments
Ligne	1 ligne Quantité de boîtes Quantité de cubes	Longueur d'un segment (la ligne) Mesure en la longueur d'une arête d'1 boîte Longueurs en relation multiplicative	Segment Union de segments Union de segments

Tableau 7.1 – Nous organisons dans ce tableau les significations mathématiques qui sont évoquées par l'artefact *boîtes et cubes*. La première colonne contient les objets physiques qui constituent l'artefact : les cubes, les boîtes et les lignes. Le reste des colonnes organise les significations mathématiques, selon si elles correspondent à des grandeurs discrètes (deuxième colonne), grandeurs continues (troisième colonne), ou à des concepts géométriques (quatrième colonne).

Notons que les significations mathématiques évoquées par l'artefact *boîtes et cubes* sont différentes de celles des lignes construites avec les cubes multi-base. En effet, les lignes de cubes évoquent dans ce cas deux grandeurs discrètes : 1 ligne et une quantité supérieure à 1 de cubes. La perceptibilité des boîtes de cubes dans les lignes construites permet d'incorporer *une couche* supplémentaire de significations mathématiques.

Des synergies sont susceptibles de se produire dans l'articulation des structures spatiales géométriques et des structures qui associent des grandeurs de ce type [3], comme l'affirment plusieurs recherches (Battista, Clements, Arnoff, Battista, et Borrow, 1998 ; Battista, 1999 ; Clements et al., 1997; Kosko, 2020; J. Mulligan et Mitchelmore, 2000; Outhred et Mitchelmore, 2000; Reynolds et Wheatley, 1996). Par exemple, Mitchelmore (1992) a constaté que plus la structuration spatiale de rangements rectangulaires des élèves à l'école primaire augmente, plus les élèves utilisent des stratégies multiplicatives pour dénombrer les carrés. Ce résultat a été confirmé par Clements *et al.* (1997) et Outhred et Mitchelmore (2000), qui constatent que la plupart des élèves acquièrent la structure en lignes et colonnes des rangements rectangulaires vers la 4ème année de scolarité (CM1), en même temps qu'elles et ils élaborent des stratégies pour dénombrer au moyen de la multiplication.

7.2 Analyse du potentiel sémiotique de la *grille fois-partie-tout*

7.2.1 Tâches à accomplir dans l'utilisation de l'artefact et schèmes d'utilisation associés

Le potentiel sémiotique de l'artefact *grille fois-partie-tout* se rapporte à l'accomplissement de tâches multiplicatives de deux types, associées à l'exécution de deux schèmes d'utilisation que nous décrirons ci-dessous. Le premier type de tâche s'inscrit dans le contexte de la présentation d'une situation qui induit une relation multiplicative entre grandeurs. Pour les tâches T_1, T_2, T_4 et T_5 la situation correspond au contexte de manipulation avec l'artefact *boîtes et cubes*. La tâche consiste fondamentalement à compléter les cases (vides) de la *grille fois-partie-tout* pour représenter la relation multiplicative concernée, par le biais du schème que nous appelons *schème*

3. Ces recherches se placent dans un paradigme constructiviste, au sein duquel l'objet d'étude est la construction des structures et des opérations mentales qui traduisent ces structures. Nous prenons appui de certains résultats de recherche établis à partir de l'activité des élèves face à des problèmes dont l'enjeu se rapporte à la reconnaissance de ces structures.

de remplissage. Si la *grille fois-partie-tout* est, au contraire, présentée dans la tâche comme étant déjà remplie, la tâche portera sur l'interprétation de la relation multiplicative représentée par l'artefact, par exemple en inscrivant la relation dans une situation de la vie quotidienne. La résolution de ce deuxième type de tâche implique l'application du schème d'utilisation que nous dénommons *schème de retour à une situation*.

Schème de remplissage et schème de retour à une situation

En fonction de la disponibilité du matériel de manipulation, le remplissage de la *grille fois-partie-tout* consiste à placer ou écrire des signes relatifs aux grandeurs impliquées dans la relation multiplicative à représenter, dans les cases correspondant aux rôles qu'elles jouent au sein de celles-ci. Les signes admis pour l'utilisation de l'artefact consistent en : signes matériels des objets associés aux quantités concernées (dessins du matériel de manipulation) ; l'écriture en chiffre des quantités, avec *le* symbole [4] de l'unité de grandeur induite par la situation ; ou l'écriture en chiffre des nombres relatifs à la mesure des quantités selon l'unité de grandeur induite par la situation. Dans la figure 7.5 nous représentons dans l'artefact la relation multiplicative 5 fois 4 cubes égale 20 cubes, élaborée dans le contexte de construction de lignes de boîtes avec l'artefact *boîtes et cubes*. L'une des grandeurs de la relation multiplicative dans la *grille fois-partie-tout* peut éventuellement être inconnue, ce qui peut se représenter par un point d'interrogation dans la case correspondant.

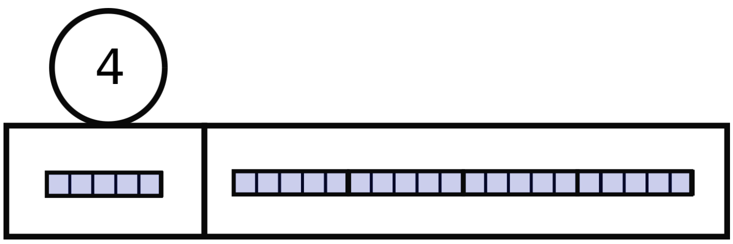


Figure 7.5 – Représentation dans la *grille fois-partie-tout* de la relation multiplicative 5 fois 4 cubes égale 20 cubes, dans le contexte de la construction d'une ligne de boîtes de 4 cubes. Les boîtes sont représentées par des rectangles aux contours plus épais que les carrés représentant les cubes.

Le schème de retour à une situation est le schème inverse au schème de remplissage : la *grille fois-partie-tout* est présentée remplie avec des valeurs numériques ou des quantités. La mise en place du schème implique également la reconnaissance du rôle des grandeurs dans la relation

4. Dans le cas des champs de grandeurs non standards, il s'agira généralement de l'initiale du mot désignant le champ. Par exemple, la lettre c est, dans le contexte d'usage de l'artefact, le symbole en principe accepté pour évoquer l'unité de la grandeur discrète des cubes en bois. D'autres types d'accord peuvent avoir lieu lorsque des mots commençant par la même lettre sont impliqués.

multiplicative concernée. Pour le schème de remplissage, il s'agit de comprendre la situation présentée dans le cadre de la tâche en termes d'une relation multiplicative entre quantités. En revanche, le schème de retour à une situation implique la mise en relation avec une situation présentée par ailleurs et la relation mathématique exprimée par l'artefact.

7.2.2 Hypothèses et questions sur le potentiel sémiotique

La *grille fois-partie-tout* permet d'exprimer de façon symbolique une relation multiplicative, par le recours à des signes spécifiques. L'artefact sert de médiateur une manière symbolique de penser et d'agir sur les grandeurs (voir section 2.2). La *grille fois-partie-tout* évoque les termes de la relation multiplicative et les conceptualise au moyen des cases et des noms attribués : « tout », « partie » et « nombre de fois ». Plus précisément, étant donné les grandeurs g et g' en relation multiplicative telle que $g \times n = g'$, le terme « nombre de fois » évoque la raison n ; les termes « tout » et « partie » correspondent respectivement aux grandeurs g' et g. La mise du point d'interrogation dans la case ou cercle du terme inconnu est en relation avec l'une des opérations de multiplication et de divisions : s'il est sur la case du tout, c'est l'opération de multiplication qui permet de le trouver, s'il est sur la case du nombre de fois, c'est l'opération de division groupement qui permet de le trouver, et s'il est sur la case de la partie, c'est l'opération de division partage qui permet de le trouver.

Le potentiel sémiotique de l'artefact réside d'une part dans la structuration visuelle de ses composants. Notons d'abord que les cases correspondantes à la partie et au tout partagent la même forme rectangulaire, ce qui évoque la signification mathématique de l'appartenance commune des grandeurs à un même champ de grandeur. La forme rectangulaire des cases respecte également la forme des cases respectives de la *grille de résolution* (voir paragraphe 6.3.2), afin de profiter les significations personnelles qui peuvent y être attachés. En outre, l'utilisation d'une case ayant une forme différente des autres pour représenter le nombre de fois permet de distinguer la nature des opérandes dans la relation multiplicative, même si la grille n'est remplie que de chiffres. Nous insistons sur le fait que l'écriture symbolique des expressions multiplicatives purement numériques ne rend pas apparent la relation multiplicative entre grandeurs. En effet, dans une écriture purement numérique de la multiplication, par exemple $4 \times 5 = 20$, la symétrie les opérandes ne permet pas de distinguer leurs fonctions, comme dans l'écriture 4 cubes $\times 5 = 20$ cubes. L'écriture purement numérique des divisions, par exemple $20 \ : \ 4 = 5$, ne permet pas non plus de distinguer la nature de l'inconnu, et donc de savoir de quelle division s'agit-il.

Du point de vue des relations spatiales des composantes du diagramme, notons que les cases relatives au nombre de fois et à la partie sont dans un emplacement commun, à gauche, différent de celui de la case du tout, à droite. Cette caractéristique visuelle du diagramme permet d'évoquer la relation mathématique entre le couple (n, q) et la quantité q', au sein de la relation $g \times n = g'$. En particulier, l'existence d'un schème d'utilisation commun de remplissage pour les opérations de multiplication et de division, lorsque l'une des grandeurs est inconnue, évoque la signification mathématique de l'éclairage d'une relation multiplicative entre grandeurs, plutôt que la découverte du produit ou du quotient. Le potentiel de l'artefact symbolique est, en ce sens, différent de celui des calculs en ligne. Cet aspect peut s'avérer intéressant face au phénomène de suspension de sens (voir paragraphe 1.3.3), et plus précisément en ce qui concerne l'interprétation du résultat de l'opération de façon isolée et comme une réponse immédiate au problème.

Enfin, la signification mathématique d'égalité dans la relation multiplicative des grandeurs n'est pas évoquée par l'utilisation de la *grille fois-partie-tout*, étant donné la coïncidence des hauteurs des cases de la partie et du tout [5]. Ce n'est pas le cas de la *grille de résolution*, dans laquelle la juxtaposition de cases de la partie sur les côtés de la longueur permet de constituer une surface dans l'ensemble équivalente à celle de la case du tout. Les deux surfaces équivalentes se font face le long de la ligne du milieu. L'artefact ne favorise pas la comparaison multiplicative en termes d'égalité de quantités.

Le potentiel sémiotique de l'artefact est aussi lié à la terminologie qui lui est associé. D'abord, le fait d'avoir trois noms différents pour chaque quantité dans la relation multiplicative, par opposition aux relations additives, souligne une distinction du point de vue du rôle que les quantités jouent au sein de celle-ci. En particulier, les termes « partie » et « tout » déterminent dans un sens général une relation sémantique et hiérarchique entre les deux termes, la partie étant contenue dans le tout. La relation entre « partie » et « tout » est évoquée dans le livre I d'Euclide : *le tout est plus grand que la partie*. Le mot « partie » exclue les relations multiplicatives qui s'établissent par comparaison. Étant toujours accompagnée d'un déterminant, le mot « fois » est dans notre cas déterminé par un nombre. Le terme « nombre de fois » évoque le nombre

5. Une possibilité avait été d'utiliser une largeur inférieure pour la case de la partie par rapport à la case du tout, ce qui a été écarté par l'ergonomie du dessin.

qui accompagne le mot « fois » dans l'énonciation d'expressions multiplicatives.Dans la sphère quotidienne, l'une des significations du mot correspond à « la répétition ou la multiplication d'une quantité qu'on ajoute à elle-même : Trois fois cinq font quinze » (Larousse en ligne, s. d.).

Chapitre 8

Analyse de l'activité

Ce chapitre est consacré à présenter nos analyses de l'activité Θ. Nous avons analysé trois séances en détail : les séances S_1, S_2 et S_3. Pour chacune de ces séances, nous allons présenter l'analyse *a priori* Φ de la tâche qui a motivé la séance et l'analyse de l'activité proprement dite de la séance. Nous allons également rendre compte des segments saillants repérés dans les séances que nous n'avons pas analysés en détail (S_4, S_5 et S_6), et des entretiens. Il s'agit plus précisément des segments saillants que nous avons jugés intéressants pour compléter l'analyse de la séance S_2 et, surtout, la séance S_3. Nous avons évoqué les détails de la mise en place de séance dans le tableau 6.1.

Notre chapitre est ainsi organisé en 10 sections, en suivant un ordre chronologique. Les sections 8.1 et 8.2, sont respectivement consacrées aux analyses *a priori* et de l'activité Θ de la séance S_1. Dans la section 8.3 nous rendons compte d'un observable de la séance S_4, deuxième séance qui a eu lieu. Les sections 8.4 et 8.5 sont respectivement consacrées aux analyses *a priori* et de l'activité Θ de la séance S_2, troisième séance qui a eu lieu. Dans les sections 8.6 et 8.7, nous rendons compte des observables des séances S_5 et S_6, qui sont les séances qui ont eu lieu ensuite. Les sections 8.8 et 8.9 sont respectivement consacrées aux analyses *a priori* et de l'activité Θ de la séance S_3, sixième séance qui a eu lieu. Enfin, dans la section 8.10 nous rendons compte d'un observable lors des entretiens avec les élèves.

Avant de présenter nos analyses, nous précisons la structure sur laquelle nous avons pris appui.

Analyse *a priori*

La structure de l'analyse *a priori* de chaque tâche est spécifique au type de tâche (tâche de résolution de problèmes et tâche d'élaboration de problèmes). Nous allons d'abord rendre compte de la structure des analyses *a priori* des tâches de résolution de problèmes, à savoir les tâches T_1 et T_2. Nous allons ensuite présenter la structure de l'analyse *a priori* de la tâche d'élaboration de problèmes, à savoir la tâche T_3.

Analyse *a priori* des tâches T_1 et T_2

Pour chacune des tâches T_2 et T_2 notre analyse *a priori* est organisée en 5 parties : Contexte et description de la tâche, Découpage en sous-tâches, Forme de l'énoncé et conditions de la prescription de la tâche, L'activité attendue et Conclusions. Nous nous sommes inspirées de la grille d'analyse de tâches proposée par Robert (2003).

Contexte et description de la tâche Dans ce paragraphe, nous faisons référence à l'objectif visé par l'enseignante. Nous évoquons *grosso modo* l'enjeu mathématique de la tâche et nous la résolvons. Nous mettons également l'énoncé tel qu'il est donné aux élèves, sous la forme d'une *feuille de réponses*, qui est le nom qui lui est donné par l'enseignante. La feuille de réponses comprend des cases où les groupes d'élèves doivent inscrire leurs réponses à la tâche et, éventuellement, des grilles fois-partie-tout à remplir. Le paragraphe aborde également les détails d'utilisation de l'artefact de boîtes et de cubes dans le contexte de la tâche, notamment la taille des boîtes à employer et le nombre de cubes à distribuer par groupe d'élèves.

Découpage de la tâche Nous rendons compte dans ce paragraphe du découpage en sous-tâches, c'est-à-dire des buts à atteindre à l'intérieur de la tâche. Nous décrivons les sous-tâches identifiées et leur attribuons un code pour faciliter la référence. Le découpage en sous-tâches sert à structurer notre analyse de l'activité attendue et l'analyse de l'activité Θ.

Forme de l'énoncé Dans ce paragraphe, nous discutons l'impact sur l'activité attendue des aspects linguistiques de la formulation de l'énoncé et des conditions de prescription de la tâche, en relation avec la distribution et la disponibilité du matériel de manipulation.

Activité attendue L'activité attendue est au cœur de l'analyse *a priori* de la tâche. Ce paragraphe est consacré à la description de l'activité attendue dans la perspective de la TDA pour résoudre la tâche. Nous inférons les sous-activités mathématiques (des sous-activités de reconnaissance, des sous-activités d'organisation et des sous-activités de traitement) que les élèves devraient faire pour résoudre la tâche à partir des savoirs mathématiques impliqués.

Conclusions Dans les conclusions, nous nous concentrons sur les indicateurs importants que l'analyse a priori de la tâche révèle par rapport à nos questions d'analyse, que nous prenons en compte dans l'analyse de l'activité Θ.

Analyse *a priori* de la tâche T_3

L'analyse *a priori* de la tâche commence par la partie Contexte et description de la tâche, analogue à celle comprise dans l'analyse des tâches T_1 et T_2. Nous incluons une partie dénommée Les attentes (en sachant que le type de tâche n'admet pas l'esquisse de l'activité attendue), dans laquelle nous identifions les savoirs qui sont impliqués pour l'élaboration du problème et les enjeux du point de vue de la TO. Nous terminons par la partie Conclusion, dans laquelle nous réfléchissons sur l'intérêt de la tâche pour notre recherche et où nous proposons des questions pour guider notre analyse de l'activité Θ.

Analyse de l'activité Θ

Nous organisons notre analyse de l'activité Θ des séances S_1, S_2 et S_3 en moments de la classe, à savoir : présentation de la tâche, travail en groupe et synthèse (voir paragraphe 6.3.2). Nous divisons également notre analyse en épisodes en fonction de la résolution de sous-tâches, repérées dans l'analyse *a priori* des tâches, et de l'utilisation des artefacts (nous rendons compte de cette organisation dans la section 5.3 de notre méthodologie). Notre analyse de l'activité est, comme nous l'avons signalé auparavant (voir 5.3.2), basée sur l'analyse des segments saillants, d'où émergent nos catégories d'analyse ou observables. Nous avons pourtant opté pour ne pas découper notre présentation de l'analyse de l'activité de ces séances en fonction des observables, afin de ne pas gêner la lecture. En particulier, nous n'avons pas découpé la présentation selon la manifestation d'actions *multiplicatives* ou d'actions *épistémiques non multiplicatives*. En revanche, pour les séances S_4, S_5, S_6, ainsi que pour les entretiens, nous présentons les observables issus de l'analyse.

8.1 Analyse *a priori* de la tâche T_1 : Lignes de cubes de même longueur

Nous présentons dans cette partie une analyse *a priori* Φ détaillée de la tâche T_1 pour souligner en conclusions 8.1.6 sur les enjeux liés à nos questions. Nous incluons également une analyse de l'introduction des artefacts, notamment l'artefact *grille fois-partie-tout* dans le paragraphe 8.1.5.

8.1.1 Contexte et description de la tâche

Il s'agit de la première séance de résolution de problèmes avec l'artefact *boîtes et cubes*. La tâche est centrée sur l'opération de multiplication. L'enseignante prévoit de renforcer la modélisation des situations impliquant l'action incarnée d'itérer et des problèmes de multiplication. La tâche concerne deux relations multiplicatives dont le produit est le même et inconnu. La tâche est proposée dans un cadre géométrique et de grandeurs : il s'agit de la comparer de la longueur de lignes de boîtes. Nous dénommons la tâche « Lignes de cubes de même longueur ». La résolution de la tâche nécessite également l'expression symbolique des relations multiplicatives impliquées. Dans la synthèse, l'enseignante prévoit d'introduire l'artefact *grille fois-partie-tout*. Elle entend également se concentrer sur la distinction des rôles des opérandes (multiplicateur et multiplicande).

La tâche porte sur la construction de lignes avec des boîtes de 4 cubes et 5 cubes. L'énoncé est le suivant :

1. *Est-il possible de faire une ligne avec uniquement des boîtes de* 4 *cubes qui ait la même longueur qu'une ligne construite uniquement avec des boîtes de* 5 *cubes?*
2. *Combien de cubes y a-t-il dans chaque ligne? Écrivez les calculs qui vous permettent* [1] *de déterminer la quantité de cubes par ligne.*

Les élèves sont regroupé·e·s par quatre ou cinq. Le support matériel disponible pour la résolution de la tâche, donné à chaque groupe d'élèves, est constitué par :

— une cinquantaine de cubes en bois,

— 8 à 10 boîtes en plastiques pouvant contenir 4 cubes,

1. Une coquille c'était glissé dans l'énoncé, c'était le mot "permet" qui apparaissait dans la feuille de réponses donnée aux élèves.

— 8 à 10 boîtes en plastique pouvant contenir 5 cubes,

— la feuille quadrillée (le quadrillage).

Pour la résolution de la tâche, notons que l'existence de deux lignes de la même longueur est toujours assurée, à condition qu'il existe une unité commune : ici c'est le cube. Les configurations possibles sont en fait infinies : tous les couples de lignes ayant un nombre de cubes qui est un multiple commun entre les deux capacités de boîtes (4 et 5 dans ce cas). En particulier, la solution avec les lignes les plus courtes est celle du PPCM (20, dans ce cas, les autres solutions sont les multiples de 20). Il suffit donc ici de faire une ligne avec 5 boîtes de 4 cubes et l'autre avec 4 boîtes de 5 cubes, qui correspond à la construction attendue avec le matériel. Les expressions 4×5 et 5×4 (ou $4c \ \times \ 5$ et $5c \ \times \ 4$, en notant « c » pour l'unité cube) permettent de calculer respectivement la quantité de cubes des lignes de boîtes de 4 et de boîtes de 5.

8.1.2 Découpage en sous-tâches

Nous considérons que la résolution de la tâche *Lignes de cubes de la même longueur* exige l'aboutissement de trois sous-tâches : ST1, ST2 et ST3. La première sous-tâche, ST1, est liée à la première question de l'énoncé et consiste à déterminer s'il est possible de faire des lignes de la même longueur avec des boîtes de 4 et 5 cubes. La deuxième sous-tâche, ST2, est de déterminer la quantité de cubes dans ces lignes. Cette sous-tâche permet de répondre à la première partie de la deuxième question. La troisième sous-tâche, ST3, correspond à la deuxième partie du deuxième item et consiste à exprimer les calculs correspondants à l'aide des symboles numériques.

8.1.3 Forme de l'énoncé et conditions de la tâche

En relation à la disponibilité du matériel de manipulation pour la résolution de la tâche, il nous semble qu'il peut y avoir ici un effet du contrat didactique : s'il y a du matériel de manipulation, développé et donné spécifiquement dans le contexte de la résolution de la tâche, c'est qu'il faut l'utiliser. L'enseignante prévoit également faire remplir les boîtes à utiliser par les élèves. Nous considérons que l'une des incidences de cette demande est de diriger davantage l'activité vers la manipulation. En effet, il nous semble que le remplissage des boîtes, contrairement à la distribution de boîtes déjà remplies, peut aider aux élèves à s'approprier le matériel et les pousser à résoudre les sous-tâches suivantes avec manipulation. En outre, le remplissage de boîtes implique la mise en œuvre de ce schème d'utilisation de l'artefact (voir section 7.1).

Nous observons également dans la formulation de la sous-tâche ST1, trois éléments qui semblent orienter l'activité vers l'élaboration effective de lignes avec l'artefact. Tout d'abord, l'expression « Est-il possible de faire . . . ? » est formulée sous la forme de présent de l'indicatif. Nous considérons que la forme verbale du présent de l'indicatif du verbe *être* et l'utilisation du verbe *faire* invitent implicitement l'élève à répondre après vérification expérimentale de la construction des lignes. En fait, la forme la plus *conventionnelle* de réponse à cette question est « oui, il est possible de le faire comme ça » ou « non, ce n'est pas possible ». Notons que si la question avait été exprimée, par exemple, avec un verbe à la forme conditionnelle, l'accent aurait été mis sur les conditions qui rendent hypothétiquement, et non nécessairement, la construction possible. Dans ce cas, une réponse du type *« oui, ce serait possible si . . . »* aurait été attendue. Deuxièmement, la sous-tâche ST1 est formulée directement à propos de l'artefact *boîtes et cubes*, mais aussi des lignes de boîtes qu'il est possible de construire avec ce matériel. Enfin, la sous-tâche ST1 est posée dans un cadre géométrique et de grandeurs, car il s'agit d'élucider une relation entre lignes en lien avec leurs longueurs, de sorte qu'une adaptation de cadre est requise pour une résolution numérique sans manipulation.

L'énoncé se compose de deux parties (correspondant aux items (1) et (2)) : la première partie correspond à la sous-tâche ST1 et la deuxième partie contient les sous-tâches ST2 et ST3. La sous-tâche ST1 est présentée comme une question ouverte, ce qui en fait un problème de recherche. La deuxième partie de l'énoncé est posée de façon fermée, demandant spécifiquement la quantité de cubes par ligne et un calcul pour arriver au résultat. La formulation, au pluriel, des calculs de la quantité de cubes par ligne souligne que les calculs trouvés peuvent être différents (ce qui est le cas). C'est un aspect crucial pour souligner la distinction entre opérandes au sein des relations multiplicatives impliquées, bien qu'il y ait coïncidence dans les valeurs numériques. Finalement, en ce qui concerne la tâche dans sa globalité, les deux tâches sont données l'une après l'autre sur une même feuille [2]. La juxtaposition des deux énoncés suggère que la réponse à la première question est affirmative, de sorte que la résolution de ST1 revient juste à trouver une configuration visée, et non à étudier la validité d'une proposition mathématique.

2. La juxtaposition des questions dans une seule feuille a été décidée par l'enseignante pour des raisons pratiques, sans commentaires particuliers.

8.1.4 L'activité attendue

Activité attendue sous-tâche ST1

Des sous-activités de reconnaissance Pour résoudre la sous-tâche ST1, les lignes de boîtes doivent être reconnues comme évoquant des segments de droite, afin que leurs longueurs puissent être comparées. Il faut également que les élèves comprennent le contexte de construction de lignes : que les deux types de boîtes doivent être distinguées par leur taille et que les lignes de boîtes sont construites en mettant les boîtes bout à bout, conformément au schème d'utilisation de l'artefact. La sous-tâche ST1 met également en question la valeur de vérité d'une proposition mathématique d'existence. La reconnaissance de la proposition mathématique exige la compréhension de la possibilité de l'existence des lignes équivalentes du point de vue de la longueur. Les élèves doivent également anticiper que la construction effective des lignes de boîtes est un moyen qui permet de déterminer la valeur de vérité de la proposition mathématique.

Les élèves doivent mettre en place une construction de deux lignes de boîtes qui produit des longueurs à comparer, susceptibles d'être équivalentes. En particulier, les élèves doivent accepter que les deux lignes de boîtes à construire peuvent, et doivent, contenir une quantité différente des boîtes. Une activité qui ne conduit pas à la réponse attendue peut en effet avoir lieu si la construction des lignes est considérée comme synchrone et dépendante (c'est-à-dire qu'à chaque fois qu'une boîte de 4 cubes est posée, une boîte de 5 doit également être posée dans l'autre ligne, alors la construction ne peut pas aboutir). Dans ce cas, l'ensemble composé d'une boîte de 4 cubes et d'une boîte de 5 est itéré pour construire deux lignes de boîtes. Cette approche de la manipulation peut conduire à une réponse erronée à la question (il n'est pas possible de construire des lignes de boîtes de la même longueur) ou à un blocage de l'activité.

La construction des lignes de boîtes orientée vers la résolution du problème nécessite d'exploiter la possibilité que la construction elle-même offre de produire des longueurs éventuellement équivalentes. Cette reconnaissance est basée sur la structure spatiale géométrique sous-jacente. En effet, il faut reconnaître que les boîtes structurent, par leur itération, la ligne de boîtes correspondante. Les boîtes doivent être également interprétées comme des segments de droite qui constituent des lignes droites, et ainsi attribuer la signification mathématique de longueur au matériel de manipulation. La structure de deux lignes est coordonnée par la comparaison de la longueur des lignes de boîtes résultants. Par conséquent, l'itération de boîtes doit être perçue comme une action incarnée qui produit des longueurs telles que la sous-tâche peut être résolue, à condition que la structure géométrique spatiale soit respectée. Nous voulons souligner que les lignes de boîtes produites par cette action, en tant qu'objets physiques, ne constituent pas une relation multiplicative : ce sont les grandeurs qui leur sont associées qui peuvent l'être. En particulier, la longueur de chaque ligne est en relation multiplicative avec la longueur des boîtes qui la composent. Dans ce sens, l'action incarne chaque fois la structure spatiale géométrique qui sous-tend la relation multiplicative entre grandeurs. Cependant, la résolution de la tâche ne nécessite pas la prise de conscience de la relation multiplicative entre la longueur des lignes et la longueur des boîtes, en tant que telle.

Des sous-activités de traitement Tout d'abord, il convient de noter que la construction effective de lignes de boîtes nécessite la mise en œuvre du schème de construction de lignes de boîtes (voir l'utilisation de l'artefact *boîtes et cubes* section 7.1). Ce schème s'appuie sur des notions géométriques pour contrôler l'alignement. En termes de fonctions de l'action, l'action incarnée d'itération de boîtes a une fonction épistémique, car elle fait apparaître des lignes droites. Cependant, comme nous l'avons noté, la construction de lignes droites n'est pas suffisante, de sorte que l'action incarnée orientée uniquement vers la construction de lignes droites ne conduit pas nécessairement à la résolution de la sous-tâche. L'action incarnée doit viser à produire des longueurs de lignes équivalentes qui respectent la structure spatiale géométrique imposée pour la tâche. La manipulation doit donc s'assurer que les lignes sont bien alignées et parallèles afin de pouvoir comparer leur longueur. La structure spatiale géométrique de chaque ligne doit également être maintenue [3] pendant la comparaison.

La comparaison de la longueur des lignes peut se faire dans un cadre géométrique et de grandeurs, de façon directe sans associer une mesure aux lignes de boîtes, c'est-à-dire sans compter les cubes par ligne. Dans ce cas, il s'agit de mettre en place le schème de comparaison de lignes de boîtes avec les lignes de boîtes qui sont en construction. Il s'agit de la comparaison par projection et par extrémités (voir section 7.1). Bien que la tâche soit dirigée vers ce type de compa-

3. Une manipulation qui ne conserve pas la structure spatiale géométrique est, par exemple, celle dans laquelle les boîtes de 4 et de 5 peuvent être vidées en deux tas différents lors de la comparaison des lignes, en effectuant des calculs partiels de la quantité de cubes par tas jusqu'à obtenir le même résultat. Du point de vue des grandeurs évoquées par l'artefact, la seule qui reste après cette opération est la quantité de cubes par ligne. Cet aspect, que nous n'abordons pas ici, peut être intéressant à analyser en comparaison avec une résolution dans un environnement traditionnel papier-crayon.

raison (la question est posée en termes de la longueur de lignes), la comparaison de longueurs peut passer par la mesure, ce qui requiert une adaptation. Dans ce cas, la construction de lignes de boîtes n'exige pas un alignement rigoureux, car les autres contrôles sont pris en charge par des activités de comptage répétées.

Des sous-activités d'organisation Bien que plusieurs facteurs de l'activité tendent à orienter la résolution vers une démonstration de l'existence de deux lignes de même longueur, l'ouverture de la question amène à prendre au moins en considération l'impossibilité de la construction comme une réponse possible. La résolution de la tâche est ainsi organisée en deux étapes : l'une consiste en la recherche de la configuration attendue et l'autre en une étape hypothétique d'évaluation de l'absence de solution pour la construction. Cette dernière étape nécessite de se demander si toutes les possibilités ont été effectivement considérées et la formulation de potentielles explications de l'impossibilité (par exemple, il n'est pas possible de faire les lignes de boîtes avec le matériel disponible).

La construction effective des lignes de boîtes requiert aussi une organisation, pour faire émerger les possibilités de lignes de boîtes de la même longueur. D'abord, on peut imaginer une organisation préalable du matériel, des boîtes de 4 et 5 par paquet, ou bien, à mesure que les lignes sont construites, les boîtes qui correspondent sont cherchées chaque fois qu'elles doivent être posées. La comparaison des lignes de boîtes peut être mise en place à différents moments lors de la construction, en fonction de la façon dont elle est organisée. Nous distinguons principalement deux types d'organisation : une construction séquentielle et une construction simultanée (une organisation mixte peut également avoir lieu).

1. Construction séquentielle Dans la construction séquentielle, l'activité attendue est organisée de la façon suivante : dans une première étape, l'une des deux lignes de boîtes est construite, en utilisant une quantité arbitraire de boîtes, par exemple toutes les boîtes d'un type (de 4 cubes ou de 5 cubes) disponibles. L'autre ligne de boîtes est construite après, c'est-à-dire sans coordonner sa construction avec celle de la première ligne. L'action épistémique incarnée est ici conduite par la matérialisation d'une ligne droite, tout en respectant la structure spatiale géométrique de la ligne en question. La construction de cette ligne ne requiert pas une *position intentionnelle* par rapport à la longueur (voir section 3.3). Autrement dit, orienter la construction vers l'obtention de lignes droites n'implique pas que la longueur soit prise en considération.

Quant à la construction de la deuxième ligne de boîtes, nous observons deux possibilités. La première est qu'elle soit construite de la même façon que la première, avec une quantité arbitraire de boîtes. Dans ce cas, l'équivalence de longueurs des lignes est établie à un moment ultérieur (par exemple : la totalité de boîtes a été posée), à condition que les lignes de boîtes aient été construites. L'élaboration de la deuxième ligne de boîtes peut, et c'est la deuxième possibilité, être guidée par la comparaison successive de la longueur de cette ligne de boîtes, en cours de construction, avec des sous-lignes de boîtes contenues dans la première. Nous soulignons que l'action incarnée est associée dans cette deuxième possibilité à une perception plus sophistiquée, soutenue par la comparaison de longueurs comme critère de conduite.

La comparaison des longueurs peut se faire, dans les deux cas, par projection. La configuration attendue est trouvée au moment où il existe dans la première ligne de boîtes une « sous-ligne » contenue qui ait la même longueur que la deuxième. L'activité s'organise ainsi en une première étape de construction de l'une des lignes, et en quatre ou plus étapes de construction de l'autre, selon le cas. Nous présentons dans la figure 8.1 une schématisation d'une construction séquentielle des lignes.

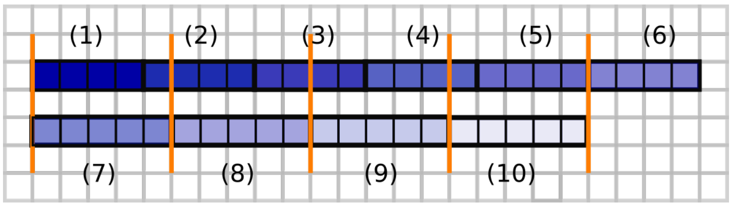


Figure 8.1 – Construction séquentielle. Le dégradé de bleu indique la temporalité de l'action de l'élève dans la pose de la boîte : plus il est foncé plus la boîte est posée tôt. Les étapes sont aussi numérotées. En orange les comparaisons des longueurs entre lignes par projection.

Construction simultanée Une construction simultanée des lignes est organisée par la comparaison permanente des longueurs. Une boîte est par exemple chaque fois ajoutée à la ligne qui a la longueur la plus courte, jusqu'à avoir des lignes de la même longueur. Les longueurs des lignes sont ainsi compensées à mesure que les boîtes sont incorporées aux lignes. La comparaison de lignes peut se faire de façon directe par projection ou par extrémités, ou de façon indirecte par dénombrement. Nous présentons dans la figure 8.2 une schématisation d'une construction simultanée. Nous tenons à souligner qu'une construction simultanée des lignes nous semble impliquer la prise d'une position intentionnelle basée sur la comparaison des longueurs des lignes pour la construction des deux lignes. En effet, chaque étape de pose de boîtes par l'action incarnée est orienté vers l'équivalence de longueurs de lignes, à partir de la comparaison des longueurs qui a lieu dans l'étape précédente. L'aboutissement de cette construction nécessite 9 étapes de pose de boîtes.

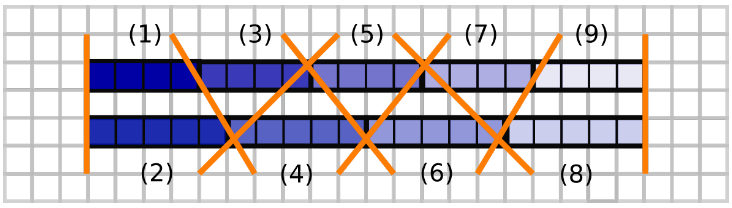


Figure 8.2 – Construction simultanée. Le dégradé de bleu indique la temporalité de l'action de l'élève dans la pose de la boîte : plus il est foncé plus la boîte est posée tôt. Les étapes sont aussi numérotées. En orange les comparaisons bout à bout des longueurs entre lignes.

Activité attendue sous-tâche ST2

Sous-activités mathématiques de reconnaissance La sous-tâche ST2 est posée dans le cadre de grandeurs et mesure, car il faut déterminer la quantité de cubes par ligne. La résolution de la sous-tâche entraîne une sous-activité de reconnaissance d'un outil de calcul afin de déterminer le nombre de cubes par ligne. Le calcul de cubes peut se faire par dénombrement, par addition itérée ou par multiplication, selon la façon dont la structure des lignes de boîtes est investie. En d'autres termes, il s'agit de la reconnaissance des grandeurs associées aux objets physiques de l'artefact *boîtes et cubes*, et des relations entre grandeurs qui sous-tendent les relations spatiales géométriques entre lignes, boîtes et cubes. Plus précisément, si chaque ligne de boîtes est perçue comme groupe de cubes, la quantité de cubes par ligne peut être obtenue par dénombrement. Si chaque ligne de boîtes est considérée en tant que groupe de cubes et groupe de boîtes, et chaque boîte en tant que groupe de cubes, la quantité de cubes de lignes peut être déterminée par addition itérée ou par multiplication. Pour résoudre la sous-tâche par addition itérée, il faut identifier l'addition de la quantité de cubes par boîte qui est associée à chaque ligne ($4c + 4c + 4c + 4c + 4c$ et $5c + 5c + 5c + 5c$). De même, pour déterminer la quantité de cubes par ligne au moyen de la multiplication, il faut : identifier la quantité de cubes par boîtes comme multiplicande, identifier la quantité de boîtes par ligne comme multiplicateur, et la quantité de cubes par ligne comme produit ($4c \times 5$ et $5c \times 4$).

Sous-activités mathématiques de traitement Nous considérons que les cubes peuvent être dénombrés fondamentalement de trois façons : un par un, ou par parquet (1, 2, 3, **4** ; 5, 6, 7, **8** ; 9, 10, 11, **12**, . . .). Comme signalé, les calculs peuvent consister en l'addition itérée ou la multiplication. Une possibilité est un dénombrement en sautant des nombres : (4, 8, 12, . . .). Si c'est l'addition itérée, une sous-activité de traitement symbolique pour l'addition des quantités itérées est mise en place. Elle mobilise les tables d'addition. Dans le cas où il s'agit d'une multiplication, la sous-activité de traitement consiste en une mise en relation avec des résultats connus par cœur, 4 fois 5 égale à 20 ou/et 5 fois 4 égale à 20.

Sous-activités mathématiques d'organisation Il peut y avoir des sous-activités d'organisation liées au comptage, comme l'établissement de points de référence dans l'espace de travail pour distinguer les cubes comptés des cubes non comptés.

Activité attendue sous-tâche ST3

Notons d'abord que la résolution de la sous-tâche ST2 peut être incluse dans la résolution de la sous-tâche ST3 si elles sont prises ensemble. Dans la résolution de la sous-tâche ST3, qui consiste à exprimer un calcul qui permet d'obtenir la quantité de cubes par ligne, la sous-activité mathématique attendue est d'exprimer une multiplication par ligne (une addition est également possible). Le dénombrement ne résout pas la sous-tâche. Il faut reconnaître la multiplication qui peut être associée au calcul de cubes par lignes, comme nous l'avons indiqué ci-dessus. L'écriture symbolique de l'expression multiplicative correcte par ligne implique également la reconnaissance des symboles qui sont associés. L'écriture de calculs peut inclure le symbole correspondant à l'unité de grandeur, bien que dans la classe observée les élèves produisent une écriture numérique. La résolution de la sous-tâche exige l'identification d'un calcul par ligne, même si les valeurs numériques des calculs coïncident.

8.1.5 Introduction des artefacts

L'enseignante prévoit d'introduire dans la séance de résolution de la tâche les artefacts *boîtes et cubes* et *grille fois-partie-tout*. L'artefact *boîtes et cubes* est introduit en tant que matériel de manipulation sur lequel porte la tâche. L'enseignante envisage dans la présentation de la tâche de faire référence explicite à la taille de boîtes à utiliser (4 et 5 cubes). La *grille fois-partie-tout* va être introduite dans la synthèse (voir section 7.2 pour l'analyse du potentiel sémiotique de la *grille fois-partie-tout*). Cet artefact symbolique sera utilisé pour représenter les relations multiplicatives entre grandeurs qui sous-tendent la construction de lignes de boîtes de la même longueur (voir paragraphe 8.1.2). L'enseignante prévoit également avoir recours à l'artefact *grille de résolution* et l'artefact *boîtes et cubes aimantés* (voir section 6.3 pour la description des artefacts). D'abord, l'enseignante entend produire deux lignes avec l'artefact *boîtes et cubes aimantés* pour représenter les deux lignes de boîtes. Elle prévoit ensuite de développer des signes-artefact qui évoquent la relation multiplicative entre grandeurs par ligne de boîtes. Plus spécifiquement, les signes-artefact sont, dans l'ordre d'apparition : deux *grilles de résolution* remplies avec le matériel aimanté, deux *grilles fois-partie-tout* remplies avec le matériel aimanté et deux *grilles fois-partie-tout* remplies avec des nombres. Nous présentons dans la figure 8.3 une représentation des signes-artefacts associés à la relation multiplicative relative à la construction de la ligne de boîtes de 4 cubes.

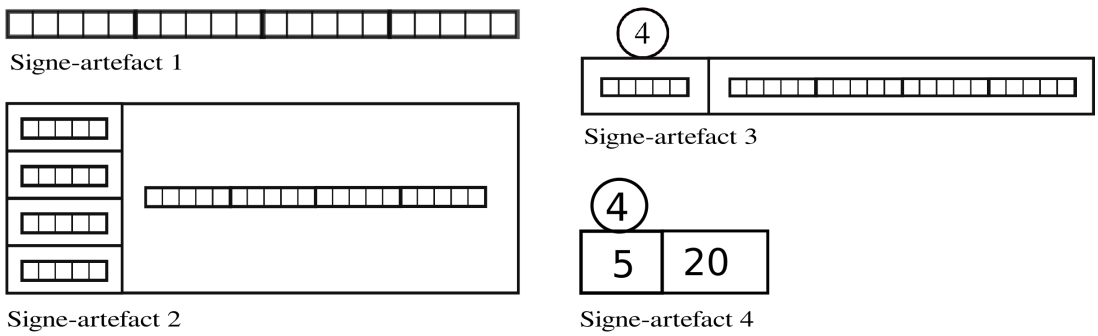


Figure 8.3 – Signes-artefacts à produite lors de la synthèse pour l'introduction de l'artefact *grille fois-partie-tout*, par rapport à la relation multiplicative associée à la ligne de boîtes de 4 cubes. Les signes-artefact numérotés sont respectivement liés aux artefacts *boîtes et cubes aimantés*, *grille de résolution*, et *grille fois-partie-tout* pour ces deux derniers.

Il convient de noter que ces signes graphiques sont, en tant que signes-artefact, attachés au contexte de résolution de la tâche (la construction de lignes de boîtes). Enfin, les signes-artefact devront également être mis en relation avec les expressions multiplicatives symboliques produites pour la résolution de la sous-tâche ST3 ($4 \times 5 = 20$ et $5 \times 4 = 20$).

L'introduction de l'artefact *grille fois-partie-tout* implique également l'installation du vocabulaire qui lui est associé : les termes « tout », « partie » et « nombre de fois ». Il est à noter que les termes « tout » et « partie » sont déjà ancrés pour la production des expressions orales associées à la *grille de résolution*. La nouveauté concerne donc avant tout le terme correspondant au rapport des grandeurs dans une relation multiplicative, le « nombre de fois ».

8.1.6 Conclusions

Du point de vue de la manipulation, la construction de lignes de boîtes requiert bien évidemment la pose des boîtes l'une au bout de l'autre par une action incarnée. Il s'agit d'une action qui répète plusieurs fois une action élémentaire (poser la boîte), nous l'appelons action incarnée d'itération [4]. Il ne s'agit pas néanmoins d'une action épistémique non multiplicative. Loin d'être naïve, l'action incarnée d'itération orientée vers la construction de deux lignes de boîtes de même longueur est dotée de significations mathématiques. Notre analyse *a priori* de la tâche nous permet en effet de la caractériser en tant qu'action épistémique, par rapport à deux fonctions dans la résolution de la sous-tâche, à savoir. D'abord, l'action incarnée sur l'artefact matérialise des notions géométriques telles que la notion de ligne droite et l'équivalence de longueurs. Le rôle de l'action incarnée est également d'ancrer de manière significative la structure spatiale géométrique imposée par la tâche, afin de découvrir les relations entre les longueurs des lignes. Dans la mesure où la structure spatiale géométrique des lignes sous-tend la relation multiplicative entre grandeurs, l'action incarnée d'itération de boîtes remplit une fonction multiplicative. Dans cette perspective, la tâche nous offre la possibilité d'observer la façon dont les élèves peuvent percevoir l'organisation à la base des relations multiplicatives impliquées, en termes de manifestation de l'action lors de la résolution. Il s'agit d'observations cruciales en ce qui concerne notre question sur la manifestation de l'action incarnée dans l'objectivation des opérations de multiplication et de division en termes de relation multiplicative (voir section 4.3). Nous posons les questions suivantes : les élèves, rencontrent-elles/ils des difficultés à manipuler l'artefact de manière à produire des lignes de la même longueur? Lesquelles? Quelles ressources les élèves utilisent-elles/ils pour réaliser l'action?

L'inclusion des sous-tâches ST2 et ST3 dans la tâche nous semble intéressante dès lors que leur résolution nécessite l'objectivation de l'opération de multiplication : l'écriture de deux expressions multiplicatives symboliques différentes pour la détermination du nombre de cubes par ligne. D'autant plus que la manifestation de l'action incarnée pour résoudre la sous-tâche ST1 n'est pas suffisante. Cependant, nous nous demandons si l'écriture des expressions symboliques, probablement numériques, reflète réellement une distinction des rôles des opérandes, bien que la question soit posée pour chaque ligne. Autrement dit, la question est de savoir dans

4. Le mot « itérer » est utilisé par l'enseignante comme synonyme de « répéter ». Il s'agit du même verbe que nous utilisons pour esquisser la pensé multiplicative.

quelle mesure la résolution des sous-tâches fournit une instance pour la rencontre avec une forme symbolique de penser la relation multiplicative entre grandeurs. Quelles interprétations les élèves semblent-elles/ils attribuer aux expressions symboliques ? Il s'agit d'une instance pour observer l'objectivation de l'opération de multiplication par la médiation de formes symboliques, ici l'expression multiplicative symbolique numérique (première question de recherche, voir section 4.3).

Finalement, l'un des objectifs de la séance est de faire rencontrer aux élèves des formes de réflexion et d'action sur la relation multiplicative entre grandeurs par la médiation d'une forme symbolique de représentation : l'artefact *grille fois-partie-tout*. Comme il s'agit de la séance d'introduction de l'artefact, nous nous demandons s'il existe des points de blocage pour les élèves : dans quelle mesure l'artefact peut-il être perturbant? En considérant également des signes-artefact sur lesquels l'enseignante entend s'appuyer, nous posons les questions suivantes : dans quelle mesure l'enseignante peut-elle assurer une progression des signes-artefacts, de ceux liés à l'artefact *grille de résolution* vers ceux liés à l'artefact *grille fois-partie-tout* ? Comment les expressions multiplicatives symboliques numériques sont-elles associées à l'artefact *grille fois-partie-tout* ? Comment l'enseignante entrelace-t-elle le vocabulaire cible avec l'utilisation de l'artefact *grille fois-partie-tout* ? Quelles ressources sémiotiques l'enseignante utilise-t-elle ? Enfin, concernant les particularités de la tâche, nos questions sont les suivantes : l'artefact *grille fois-partie-tout*, devient-il un point d'appui pour aborder les enjeux de la tâche ? Dans quelle mesure les relations multiplicatives entre grandeurs impliquées dans la tâche favorisent-elles l'exploitation du potentiel sémiotique de l'artefact ? Dans quelle mesure l'expérience manipulatoire avec l'artefact *boîtes et cubes* apparaît-elle dans l'utilisation de l'artefact *grille fois-partie-tout* ?

8.2 Analyse de l'activité dans la S_1 : Lignes de boîtes de même longueur

Nous présentons dans la suite notre analyse de l'activité en classe dans la séance de résolution la tâche T_1 « Lignes de boîtes de même longueur ». Nous reconstruisons l'activité lors de la présentation de la tâche, le travail en groupe et la synthèse dans les paragraphes 8.2.1, 8.2.2 et 8.2.2 respectivement. Nous développons dans le paragraphe 8.2.4 des conclusions qui reviennent aux points cruciaux de l'analyse du point de vue global de la séance. Notre analyse est découpée en 13 épisodes, selon la résolution et la correction de sous-tâches et l'utilisation d'artefacts. Nous présentons dans le tableau 8.1 l'organisation d'épisodes dans la reconstruction de l'activité.

Présentation de la tâche
Épisode 1 : Présentation de la sous-tâche ST1 Épisode 2 : Présentation de la sous-tâche ST2 Épisode 3 : Présentation de la sous-tâche ST3
Travail de groupe
Groupe G1
Épisode 4 : Résolution de la sous-tâche ST1 Épisode 5 : Résolution de la sous-tâche ST2 et la sous-tâche ST3
Groupe G2
Épisode 6 : Résolution de la sous-tâche ST1 Épisode 7 : Résolution de la sous-tâche ST2 et la sous-tâche ST3
Synthèse
Épisode 8 : Correction sous-tâche ST1 et ST2, et représentation de la ligne de boîtes de 4 cubes Épisode 9 : Rappel de la *grille de résolution* Épisode 10 : Représentation de la ligne de boîtes de 5 cubes Épisode 11 : Remplissage de la *grille de résolution* avec des signes matériels Épisode 12 : Correction de la sous-tâche ST3 Épisode 13 : Présentation de la grille partie-fois-tout

Tableau 8.1 – Tableau de l'organisation des épisodes dans l'activité reconstruite de la séance S_1.

8.2.1 Présentation de la tâche

Épisode 1 : Présentation de la sous-tâche ST1

Après la lecture de l'énoncé relatif à la sous-tâche ST1, l'enseignante présente d'abord l'artefact *boîtes et cubes*, en utilisant le vidéoprojecteur (projection du matériel présent sur le bureau à l'aide d'une webcam et des manipulations). L'enseignante coordonne l'apparition des boîtes dans la projection avec des expressions qui indiquent la quantité de cubes qu'elles contiennent (« *boîte de quatre cubes* » et « *boîte de cinq cubes* »). Elle fait par cette action correspondre à ces objets physiques des significations mathématiques de grandeur. L'enseignante revient ensuite à la question, sans l'énoncer complètement pour se concentrer sur la première allusion aux lignes de boîtes. C'est l'occasion de montrer la construction d'une ligne de deux boîtes de 4 cubes, comme le montre l'extrait ci-dessous [5].

> P – *La question c'est, est-il possible de faire une ligne de boîtes* [L'enseignante enlève tout le matériel qui était projeté. L'enseignante prend hors champ la boîte de 4 cubes] *de quatre cubes* [La boîte de 4 cubes est posée et projetée]. *Alors, par exemple, moi j'ai fait une ligne de boîtes* [L'enseignante pose une autre boîte de 4 cubes à côté] *de quatre cubes. Là, par exemple j'ai fait une ligne de combien de boîtes de quatre cubes? Jean*
> E – *Deux*
> P – *Deux. Très bien [. . .]*

L'enseignante montre avec un exemple la façon dont les lignes sont construites en mettant une boîte à côté de l'autre. L'action incarnée de réitération est ainsi, au moyen de la coordination sensuelle de l'action et du discours, associée à la construction de lignes de boîtes. Quand l'enseignante pose la question sur la quantité de boîtes dans la ligne élaborée, elle attire l'attention sur la grandeur discrète quantité de boîtes qui peut être associée à la ligne. En d'autres termes, l'enseignante, ayant recours à des ressources sémiotiques multimodales, contribue à l'élaboration de significations mathématiques de grandeur associées à l'artefact *boîtes et cubes*. La présentation de la sous-tâche ST1 se termine avec une relecture de l'énoncé en entier, ce qui permet de faire référence à l'équivalence de la longueur des lignes. Nous pensons que ce découpage que l'enseignante fait de l'énoncé lui permet de décortiquer les objets et notions impliqués : les objets physiques constituant l'artefact *boîtes et cubes*, les grandeurs et les relations entre grandeurs. Au moyen d'une coordination sensible entre la manipulation de l'artefact, les gestes et la parole, l'enseignante évoque la notion mathématique de ligne droite et l'équivalence de longueurs, à propos de la construction de lignes de boîtes :

> P – *Donc, est-ce qu'il est possible de faire une ligne de boîtes de quatre cubes* [Geste le long de la ligne, décrit ci-dessous, sur la ligne de 2 boîtes de 4 projetées] *qui ait la même longueur* [L'enseignante pose une boîte de 5 cubes en bas. Les origines de deux lignes de boîtes sont

5. Sauf indication contraire, la lettre P désigne dans nos transcriptions l'enseignante, la lettre C désigne la classe et la lettre E désigne une ou un élève qui intervient dans un moment de la séance ou lors d'un épisode, sur lequel nous n'allons pas nous concentrer. Nous soulignons la partie de la formulation qui est cordonnée avec quelque chose que nous remarquons visuellement, décrit entre parenthèses. Pour les gestes, les caractères gras indiquent l'apogée des gestes. Nous avons changé les noms des élèves pour ne pas dévoiler leur identité. Nous gardons le prénom attribué pour le reste de notre analyse.

plus ou moins sur une même droite auxiliaire imaginaire] *qu'une ligne* [L'enseignante pose une boîte de 5 à côté] *de boîtes de cinq cubes* [Geste le long de la ligne, décrit ci-dessous]

Nous présentons dans la figure 8.4 le geste que nous avons appelé *geste le long de la ligne*.

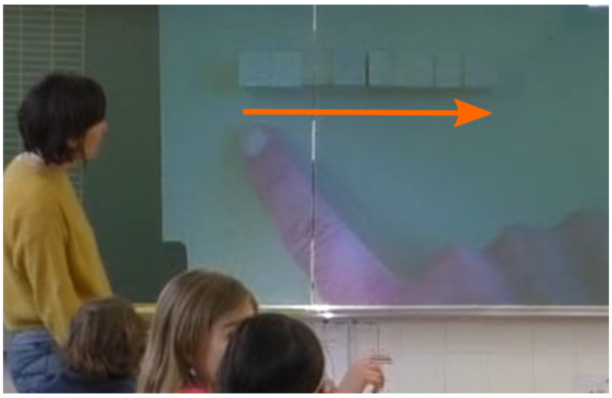


Figure 8.4 – Geste le long de la ligne. La flèche orange indique le chemin que la main suit et la direction du geste.

Le geste a été produit deux fois dans cette intervention et coordonné respectivement avec les phrases « *une ligne de boîtes de quatre cubes* » et « *de cinq cubes* ». Nous supposons que l'enseignante n'a pas coordonné le geste avec l'expression « *une ligne de boîtes de cinq cubes* » parce qu'elle n'a pas eu le temps de construire la ligne de boîtes de 5 avant de produire le geste (voir la transcription précédente). Le geste dessine une ligne imaginaire avec le doigt, parallèle et juste à côté des lignes de boîtes construites (une ligne de deux boîtes de 4 cubes et une ligne de deux boîtes de 5 cubes). Il nous semble que le geste en coordination avec la parole fait apparaître la notion géométrique de ligne droite en relation avec les lignes de boîtes. Elle présente aux élèves la façon dont l'action incarnée d'itération de boîtes peut s'orienter par la concrétisation du concept de ligne droite.

L'enseignante pose la boîte de 5 cubes sous la ligne de boîtes de 4 cubes déjà construite, au même temps qu'elle dit «*même longueur* ». Nous considérons que cette coordination de l'action et de la parole sert à faire remarquer que l'équivalence de longueurs est une relation mathématique à vérifier entre les deux segments de droite qui correspondent aux lignes des boîtes.

Nous voudrions également attirer l'attention sur le fait que la construction de ces deux lignes de boîtes sert d'exemple pour la réalisation des sous-activités mathématiques impliquées. En revanche, l'exemple montré ne met pas en évidence le fait que les lignes ne contiennent pas nécessairement la même quantité de boîtes. En fait, après l'intervention de l'enseignante, quelques élèves ont dit « non » et « impossible », ce qui suggère une perception synchronique et dépendante de la construction de lignes par ces élèves. L'enseignante répond, sans y approfondir :

« *Alors, impossible?, on verra.* », elle continue, « *pour pouvoir s'en assurer il faut les aligner, pour voir si elles ont la **même** longueur* » [Geste de la longueur, nous présentons dans la figure 8.5 une image du geste].

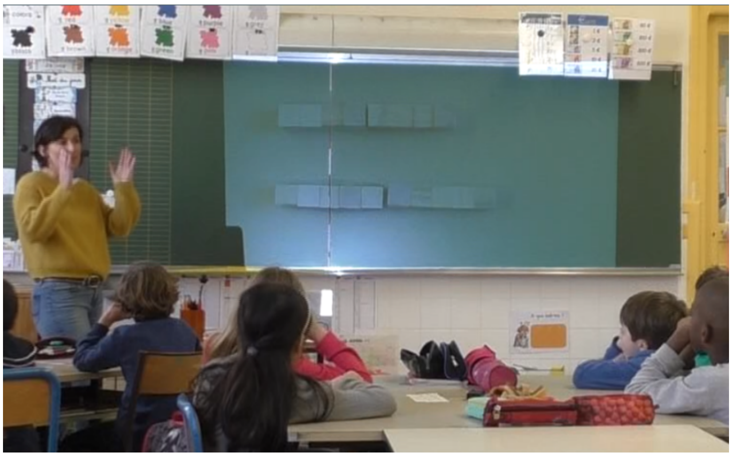


Figure 8.5 – Capture d'écran lors de la production du *geste de la longueur*.

Le geste est composé par les deux mains tendues placées de telle sorte que les paumes se regardent. Les mains délimitent un espace vide : il semble s'agir d'un geste métaphorique qui indique typiquement l'idée de contenance [6]. En considération du contexte, l'espace entre les mains semble évoquer une longueur. Le fait que l'action du geste ait été coordonné avec le mot « même », et non « longueur », semble indiquer que l'accent est mis sur la comparaison des longueurs de lignes plutôt que sur la longueur en soi. Compte tenu aussi du fait que l'intervention de l'enseignante commence en se référant à l'alignement des boîtes, nous interprétons que le geste comporte sur une aide procédurale à la comparaison des longueurs : deux lignes de boîtes vont avoir la même longueur – représentée par l'espace entre mains – si elles peuvent se mettre dans un même espace. L'espace est délimité par les mains tendues qui semblent évoquer deux droites.

L'enseignante présente ensuite le quadrillage. L'enseignante prend appui sur la production d'autres gestes pour apporter des aides procédurales aux élèves [7] :

> P – *Donc, Paula* [l'enseignante enlève les boîtes] *a pensé à vous faire une petite grille comme ça juste pour que vous puissiez* [L'enseignante pose le quadrillage dans la projection] *poser les boîtes comme ça* [L'enseignante pose une boîte de 5] *vous voyez? Oui on le voit bien. Là par exemple je voudrais poser une deuxième.* [. . .] *Là je pose une deuxième boîte de cinq.* [L'enseignante pose une boîte de 5 juste à côté de la première boîte posée] *Vous voyez et pour*

6. Voir par exemple le geste « Upward hollowness » dans McNeill (2016) ou la métaphore de la contenance en Lakoff et Núñez (2000)

7. Dans la transcription, Paula est la doctorante.

> *être sûre que je vais bien aligner, je me mets bien comme ça* [l'enseignante pose une boîte de 4 cubes au-dessus] *bord à bord. Et là je suis sûre que je vais **bien aligner*** [Geste de la main comme droite, décrit ci-dessous]. *Et j'essaie bien évidement* [Geste le long de deux lignes, décrit ci-dessous] *d'obtenir ma ligne de boîtes de 4 cubes qui a la même longueur que ma ligne de boîtes de 5 cubes.*

Nous présentons dans la figure 8.6 une capture d'écran au moment où l'enseignante produit le geste que nous dénommons *geste de la main comme droite*.

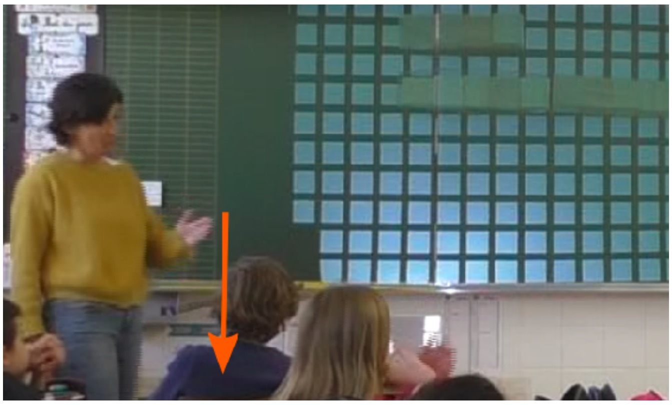


Figure 8.6 – Capture d'écran lors de la production du *geste de la main comme droite*. La flèche orange indique le chemin que la main a suivi et la direction du geste.

L'enseignante fait le geste avec sa main gauche tendue. La paume de la main est posée de la même façon que pour le *geste de la longueur*. La main a la même inclination que les droites verticales du quadrillage, qui sont orthogonales à la ligne de boîtes qui est sur le quadrillage au moment de l'élaboration du geste. Il nous semble que la main tendue incarne une droite qui sert de repère spatial pour placer les origines des lignes de boîtes dans le quadrillage.

À la fin de l'intervention concernant la présentation du quadrillage, l'enseignante produit un geste que nous dénommons *geste le long de deux lignes* (voir figure 8.7)

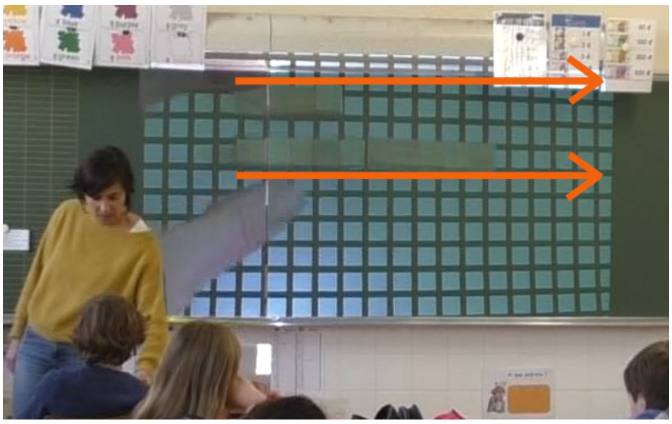


Figure 8.7 – Capture d'écran lors de la production du *geste le long de deux lignes*. Les flèches orange indiquent le chemin que la main a suivi et la direction du geste.

Le geste est fait avec une seule main. Avec le pouce et l'index, l'enseignante dessine deux droites parallèles aux lignes de boîtes qui sont dans la même direction que les droites horizontales du quadrillage. Les droites dessinées au moyen du geste entourent les deux lignes de boîtes : l'une se trouve juste en dessous de la ligne du bas et l'autre se trouve juste au-dessus de la ligne du haut. Le geste ne s'arrête à la fin d'aucune ligne de boîtes, mais il continue jusqu'à la fin du quadrillage, ce qui indique, selon nous, que l'enseignante fait référence à des droites auxiliaires du quadrillage plutôt qu'aux lignes de boîtes. Ces deux droites auxiliaires peuvent servir à bien aligner les boîtes et à contrôler le parallélisme des lignes de boîtes.

En conclusion, nous voyons dans ces interventions l'intention de l'enseignante de fournir des aides procédurales aux élèves pour résoudre la sous-tâche ST1, afin de s'assurer que le travail de manipulation sera effectué de manière adéquate. Les concepts géométriques de ligne droite, d'orthogonalité, de parallélisme et d'origine sont sous-jacents. Autrement dit, l'enseignante contribue à l'orientation de l'action de manipulation vers les concepts géométriques impliqués. Une action épistémique se manifeste lorsque l'enseignante rend apparents des moyens culturels « efficaces », les notions géométriques impliquées, pour gérer la manipulation. Dans le contexte d'un processus d'objectivation qui débute, il s'agit des indications difficiles à travailler par le discours (uniquement). L'enseignante se situe ainsi dans la ZDP (zone de développement proximale, cette notion nous l'avons évoquée dans la section 2.1) des élèves et fournit, à travers notamment des ressources sémiotiques incarnées, des repères géométriques nécessaires à la résolution de cette première sous-tâche. Les mains dessinent ou incarnent des droites pour pouvoir évoquer les concepts géométriques impliqués et fournir les aides procédurales exigés pour la résolution (par manipulation) de la sous-tâche.

Enfin, l'enseignante montre un deuxième exemple de construction de deux lignes de boîtes, cette fois sur le quadrillage. Dans ce cas, les lignes de boîtes sont composées d'une quantité différente de boîtes : une ligne de deux boîtes de 5 et une ligne d'une boîte de 4. L'enseignante dit « *là je n'ai pas essayé de le faire, vous voyez bien qu'elles n'ont pas la même longueur* », pour souligner qu'il s'agit d'une configuration possible qui ne résout pas la tâche. Nous pensons que la mise en évidence d'un exemple qui contredit une construction synchronique de lignes de boîtes prend dans une certaine mesure en charge les sous-activités de reconnaissance mathématiques impliquées : chaque boîte permet de construire une ligne de boîtes par son itération.

Épisode 2 : Présentation de la sous-tâche ST2

L'épisode commence avec une révision de la première question, par rapport à la forme qui devrait avoir la réponse. L'enseignante dit : « *Donc en fait la première question, on vous demande juste si c'est possible ou pas possible, ah? Vous voyez? Est-il possible, oui, c'est possible. Non, ce n'est pas possible. D'accord?* ». Le retour à la première question permet à l'enseignante d'attirer l'attention des élèves sur ce qui va être attendu comme réponse pour la sous-tâches ST2, comme nous le constatons dans la transcription ci-dessous.

> P – *Alors, on fait bien attention, on se concentre. On vous demande pas combien de boîtes de quatre ou combien de boîtes de cinq cubes vous avez mis dans chaque ligne. On vous demande combien de* <u>*cubes*</u> [L'intonation de l'enseignante marque un accent sur le mot. L'enseignante indique le mot sur l'énonce sous forme écrite avec un geste déictique] *vous avez mis dans chaque ligne, d'accord? Donc la ligne* <u>*de* ***boîtes*** *de quatre*</u> [Geste de la boîte comme unité, décrit ci-dessous] *et la ligne* <u>*de* ***boîtes de cinq***</u> [Geste de la boîte comme unité].

Le geste que nous dénommons *geste de la boîte comme unité*, produit par l'enseignante dans cette intervention. Le geste est composé de deux mains, dont les paumes se regardent, avec un espace entre elles. Nous présentons une image du geste dans la figure 8.8.

Figure 8.8 – Capture d'écran lors de la production du *geste de la boîte comme unité*.

Comme le *geste de la longueur* produit lors de l'épisode 1, il s'agit d'un geste de contenance. Le geste a été répété deux fois, en coordination avec les phrases « *la ligne de* ***boîtes*** *de quatre* » et « *la ligne* ***boîtes de cinq*** ». Elle effectue la deuxième production du geste avec – et c'est ce qui attire notre intérêt sur la production du geste – une légère augmentation de l'espace entre les mains. Il nous semble donc que l'espace entre les mains dans le geste fait métaphoriquement allusion aux différentes quantités de cubes dans les boîtes. Nous tenons à souligner que le geste conserve sa structure, même si des quantités différentes sont évoquées. Par conséquent, nous considérons que la signification du geste ne concerne pas – uniquement – les quantités de cubes, mais la quantité de cubes comme un groupe, comme une unité. Autrement dit, le geste signifie l'objet physique boîte, remplie de cubes, comme unité relative au cube. Il nous semble que ce signe-artefact enrichit la rencontre avec la relation multiplicative entre grandeurs, car il fournit une forme incarnée de percevoir la grandeur en tant qu'unité.

Épisode 3 : Présentation de la sous-tâche ST3

Dans cet épisode, l'enseignante demande aux élèves la quantité de cubes qu'il y a dans une ligne d'une boîte de 4 cubes et une ligne de deux boîtes de 5 cubes. Dans son intervention, l'enseignante semble vouloir s'assurer que les élèves répondront à la deuxième question, c'est-à-dire qu'elles/ils résoudront la sous-tâche ST3. L'enseignante demande également de donner un calcul pour déterminer la quantité de cubes par ligne, dans le contexte d'une recherche collective. Nous considérons que l'enseignante est largement en charge la sous-activité de reconnaissance en question. Cependant, nous constatons que l'enseignante demande le calcul pour des lignes avec un nombre réduit de boîtes (une et deux boîtes). Compte tenu du caractère quotidien de l'expression « 2 fois », la réponse de l'élève n'est pas nécessairement interprétée comme une multiplication.

8.2.2 Travail en groupe

Groupe G1

Épisode 4 : Résolution de la sous-tâche ST1

L'un des élèves, Rémi, prend en charge la construction de lignes de boîtes. En termes de sous-activités d'organisation, Rémi met en place une construction simultanée, que nous schématisons dans la figure 8.9. L'élève pose d'abord une boîte de 5, ensuite une boîte de 4, pour arriver finalement à une ligne de 3 boîtes de 5 et une ligne de 4 boîtes de 4.

L'élève utilise le quadrillage sur toute la largeur (voir figure 8.9). Il construit « verticalement ». Le bord du quadrillage joue le rôle de droite auxiliaire pour placer l'origine des lignes de boîtes. Les lignes de boîtes sont construites séparément, à un carreau de distance, comme l'enseignante l'a fait dans la présentation de la tâche. Nous observons dans les actions épistémiques de l'élève l'intention de contrôler l'alignement des boîtes et d'aboutir à la construction de deux lignes de boîtes de même longueur. Il semble prendre appui sur deux droites auxiliaires

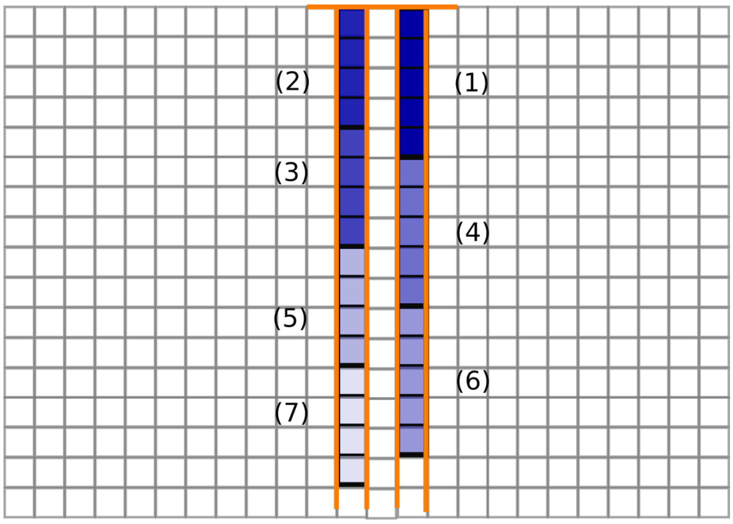


Figure 8.9 – Représentation à l'échelle de la construction simultanée des lignes de boîtes du groupe G1. En gradation de bleu, les boîtes selon si elles appartiennent à des étapes ultérieures. Les étapes sont aussi numérotées.

du quadrillage pour aligner les boîtes. L'action incarnée réalisée par l'élève nous semble multiplicative dans le sens où elle rend apparente la structure spatiale géométrique des lignes. Elle semble également être orientée par l'équivalence de longueurs. Rémi prend encore une boîte de 5 pour continuer la construction, à l'étape présentée dans la figure 8.9. Il revient à la construction pour mettre la boîte qui a dans la main, mais il arrête son action. Il observe un instant la construction. Il bouge en suite un peu le quadrillage pour montrer la construction aux autres élèves du groupe et dit : « *impossible!* ». Une fois qu'il a capté l'attention des élèves, il continue :

> Rémi – *Il y a un truc qui ne va pas* [Geste déictique sur la ligne la plus courte, voir figure 8.10]. *Il manque quatre* [l'élève laisse la boîte de 5 et prend une boîte de 4. Il conserve la boîte sous sa main, juste à côté de la construction] *De coup je m'en doute, parce que là* ... [incompréhensible] *Un, deux, cinq* [Rémi compte des boîtes sur les lignes. Rémi met une boîte de 5 sur la ligne de 4]

Le geste déictique produit par l'élève permet de signaler la disparité des longueurs de lignes comme la cause qui démontre l'impossibilité de la construction. Le recours à l'éventail de ressources sémiotiques multimodales que l'élève avait à sa disposition, son intonation, sa posture corporelle, la parole et le geste, lui a permis de partager avec le groupe une idée naissante, liée à l'impossibilité de la construction, sans qu'elle soit tout à fait exprimable par le discours. Rémi était l'un des élèves qui dans la présentation de la tâche, au moment où l'enseignante a montré le premier exemple de construction de lignes, a dit « *impossible* ». Il nous semble que la proposition de Rémi est motivée par la limitation de la surface quadrillée, de la façon dont elle a été placée : il n'est pas possible de poursuivre la construction des lignes de boîtes sans en sortir (effet contrat didactique). L'impossibilité de la construction des lignes de la même longueur va être

Figure 8.10 – Rémi utilise un geste déictique pour indiquer l'impossibilité de la construction.

brièvement discutée par d'autres élèves du groupe, Anaïs et Jean :

> Jean – *Non. . .c'est pas possible*
> Anaïs – *Si, si, si, c'est possible* [Rémi met une boîte de 4 sur la ligne de boîtes de 5]. *Passe! Passe! Passe!* [Anaïs met sa main sur le quadrillage et le bouge un peu dans sa direction]

Rémi continuait à mettre des boîtes lorsque ses camarades donnaient leur avis. Le fait que Anaïs ait pensé que la construction était possible peut avoir encouragé Rémi à continuer avec celle-ci. Rémi enlève la boîte de 4 qu'il avait mis sur la ligne de 5 pendant l'échange (voir la transcription ci-dessus), la laisse de côté et mets à sa place une boîte de 5. Il met ensuite la boîte de 4 qui restait dans la ligne de 4. La construction des lignes de la même longueur est ainsi réussie et remarquée immédiatement par Rémi. Il dit « *et voilà, ça revient au même* », avec une intonation de moment Eurêka [8] (« Aha ! Moment » ou « Insight » en anglais).

L'enseignante passe une première fois juste après la réussite. Dans son intervention, l'enseignante va interroger les élèves à propos de l'équivalence de la quantité. Elle demande : « *Est-ce qu'à un moment vous avez l'impression qu'on a la même quantité?* », à ce que les élèves Rémi et Anaïs répondent respectivement « *ouais* » et « *à la fin, ouais* ». L'enseignante semble avoir des doutes sur la production des élèves, peut-être par l'utilisation inattendue du quadrillage dans le sens de la largeur. Elle leur propose de refaire les lignes de boîtes, dans le sens de la longueur du quadrillage. L'enseignante retourne donc le quadrillage et refait les lignes de boîtes, en prononçant le nombre de cubes dans les boîtes au fur et à mesure qu'elle les place, elle dit « *quatre, quatre, quatre, quatre, quatre* » et « *cinq, cinq, cinq, cinq* ». Les élèves la suivent. Il nous semble que ce travail conjoint relie de manière significative les relations spatiales géométriques en jeu

8. Le moment Eurêka fait référence à l'expérience humaine courante consistant à comprendre soudainement un problème ou un concept auparavant incompréhensible. Les personnes qui l'expérimentent jugent la solution comme étant vraie et font confiance à ce jugement (Topolinski et Reber, 2010)

par la construction matérielle de lignes avec les grandeurs impliquées. La configuration étant conforme aux attentes, l'enseignante invite les élèves à répondre aux questions de la feuille.

Les élèves lisent l'énoncé. Elles/ils se trompent et enlèvent toutes les boîtes sur le quadrillage avant de répondre à la deuxième question. Puis les élèves refont le groupement des boîtes selon la taille, comme il avait été fait au départ. En relisant la dernière question, les élèves se rendent compte de leur erreur : il fallait avoir les lignes de boîtes construites pour résoudre les sous-tâche ST2 et ST3. À ce moment, un autre élève, Corentin, qui n'avait pas participé activement de la résolution de la sous-tâche ST1, prend le quadrillage et commence à refaire les lignes de boîtes. Lors de la pose des boîtes, il fait attention à mettre les boîtes bien alignées et met les origines de ses lignes de boîtes sur une même droite orthogonale. Quand il a deux boîtes de 4 sur l'une des lignes et 2 boîtes de 5 sur l'autre, il est bloqué (voir figure 8.11).

Figure 8.11 – Corentin est bloqué dans la construction des lignes de la même longueur.

L'élève regarde les autres élèves du groupe et dit « *je ne sais pas* . . . », en manifestant également sa confusion au moyen de son expression faciale et de l'intonation de sa voix. Les élèves Rémi et Jean répondent « *si tu sais pas ce que tu fais alors laisse* ». Rémi reprend encore la construction des lignes de boîtes. Une explication de la part d'autres élèves aurait pu aider Corentin et contribuer également à leur compréhension. Cet épisode peut également mettre en évidence les lacunes qui peuvent résulter d'une gestion qui n'intègre pas la nature sociale et la formation du soi dans l'apprentissage (le processus de subjectivation).

D'après ce que nous avons observé, Corentin n'a pas pu arriver à résoudre la sous-tâche ST1. Il sait néanmoins que la construction est possible à réaliser, car Rémi et l'enseignante l'ont fait devant lui (et il observait). La tâche à résoudre par l'élève consiste à reproduire les lignes de boîtes de 4 et de 5 de même longueur. Le blocage de l'élève dans la résolution de cette tâche peut être interprété comme une difficulté à donner un sens à la construction qu'il réalisait, un sens qui lui permettrait d'atteindre la configuration visée. Ce sens ne peut pas, bien entendu, être *transmis* par la simple vérification de l'existence de lignes de même longueur par Rémi et l'enseignante. La réalisation de l'action incarnée orientée à la construction de deux lignes des boîtes ne suffit pas non plus. Bien que l'action incarnée réalisée par l'élève puisse accomplir une fonction épistémique dans la mesure où elle conduit à la matérialisation du concept de ligne droite, il n'arrive pas à ancrer la structure spatiale géométrique de façon significative : l'action qu'il réalise n'est pas une action multiplicative. Notons que l'élève a mis les boîtes dans cet ordre : une boîte de 4, une boîte de 5, une boîte de 4 et une boîte de 5. Étant donné également que les difficultés de l'élève à poursuivre sont apparues lorsqu'il y avait le même nombre de boîtes de 4 et de 5 dans les lignes, nous émettons l'hypothèse que l'élève percevait la construction de lignes des boîtes de façon synchronique. L'élève semble avoir remarqué une incohérence entre le sens qu'il donnait à sa construction et la réalisation de deux lignes de même longueur lorsqu'il a dit « *je ne sais pas* ». Il s'agit probablement de la première étape permettant à l'élève de découvrir ce qu'il n'a pas encore vu : comment la manipulation de l'artefact peut conduire à la résolution de la sous-tâche.

Un autre groupe d'élèves, qui n'a pas été filmée mais qui a été observée pendant la séance, a également montré des difficultés à construire des lignes de boîtes. L'action multiplicative n'a pas eu lieu ici sans le soutien de l'enseignant. Selon ce qu'il a été observé par la doctorante, ce groupe a essayé plusieurs configurations de deux lignes de boîtes de la même longueur qui mélangeaient des boîtes de 4 et de 5, toutes ces configurations à partir d'une même quantité des boîtes de chaque type. L'utilisation chaque fois d'une même quantité de boîtes de 4 et de 5, pour la construction des lignes, suggère que les élèves on fait la distinction des deux types de boîtes. La source de difficultés semble alors se situer dans la reconnaissance des lignes de boîtes comme étant chacune construite par l'itération de boîtes. Il est possible d'entendre, à la minute 4 de l'enregistrement du groupe G1 (ce groupe était placé juste à côté), l'enseignante qui dit « *vous avez pas bien compris [sic]* [...] », vraisemblablement, à cet autre groupe. Ce groupe a finalement pu accomplir la tâche, avec l'aide de l'enseignante. L'une des élèves de ce groupe a en fait donné une réponse correcte à la deuxième sous-tâche au moment de la synthèse.

Épisode 5 : Résolution des sous-tâches ST2 et ST3

Rémi refait les lignes de boîtes. L'action est un peu plus automatique. Il construit les lignes avec les boîtes que les autres élèves lui apportent. Une fois que Rémi a terminé, Jean dit « *maintenant il faut compter* ». Rémi commence à compter à voix haute les cubes un par un, en s'accompagnant de gestes déictiques. Il est tout de suite interrompu par Anaïs, qui compte à la place les boîtes de 4, en appui aussi du geste déictique. Elle dit : « *un, deux, trois, quatre, cinq, cinq fois quatre* », rythmiquement (voir figure 8.12).

Figure 8.12 – À gauche, une image d'Anaïs quand elle calcule la quantité de cubes dans la ligne de boîtes de 4 par la coordination du geste, la parole et le rythme. À droite, une image de Rémi quand il calcule la quantité de cubes dans la ligne de boîtes de 5, d'une manière similaire.

Nous constatons qu'Anaïs ne se limite pas à déterminer la quantité totale de cubes dans la ligne, mais voit que derrière la structure spatiale géométrique de la ligne il y a une multiplication. L'élève la dévoile à travers l'identification des opérandes du calcul, qui se base sur sa procédure de dénombrement avec son doigt, en coordination avec les mots des nombres. Il s'agit d'un nœud sémiotique. Le fait qu'elle puisse identifier les opérandes et trouver le calcul visé ne montre cependant pas qu'elle a pris conscience du rôle de chaque opérande dans la relation multiplicative, ce qui implique un degré plus profond de prise de conscience. En effet, l'élève passera au tableau lors de la synthèse et mettra en évidence ces difficultés à distinguer le rôle des opérandes dans l'expression multiplicative symbolique (*cf.* épisode 12).

Pour l'écriture de la réponse, Rémi prend appui sur la production d'Anaïs pour orienter ses actions et dit : « *un, deux, trois, quatre, quatre fois cinq* ». Il se trompe dans le total et dit 30. Il compte alors les cubes un par un et repère son erreur. Nous soulignons que les actions de Rémi ne constituent pas une simple imitation des actions de Anaïs. Elles semblent plutôt se lier à un processus qui reçoit le nom de *iconicité* (« iconicity », en anglais) et qui est défini comme « the process through which the students draw on previous experiences to orient their actions in a new situation » (Radford, 2008a, p. 95), autrement dit : « It is first of all a matter of making apparent the relevant similar » (*Ibid.*, p. 95). Il est central dans le processus d'objectivation. Ainsi, nous pouvons interpréter les actions de Rémi comme étant basées sur l'identification des similitudes pertinentes pour l'expression symbolique d'une multiplication. Rémi propose à la fin de mettre « *quatre fois cinq fois deux* » sur la feuille de réponse, vraisemblablement parce qu'il croyait qu'il s'agissait de calculer la quantité totale de cubes pour les deux lignes de boîtes. La formulation nous semble intéressante, compte tenu aussi du fait que les élèves n'ont pas rencontré encore la multiplication à trois nombres dans le cours. L'ajout «*fois 2* » à l'expression multiplicative semble déconcerter dans une certaine mesure Rémi, qui répète la phrase avec une intonation différente, de doute, comme s'il avait pu y remarquer quelque chose de nouveau.

Groupe G2

Épisode 6 : Résolution de la sous-tâche ST1

Les élèves se répartissent d'abord le travail en binômes : l'un constitué par Éloïse et Pauline, et l'autre par Benjamin et Thomas. Chaque binôme a la construction d'une ligne de boîtes à sa charge. Les binômes commencent donc à faire des lignes avec les boîtes en même temps. Les deux lignes sont collées. Les actions des élèves semblent être mobilisées pour construire des lignes structurées par les boîtes de 4 et 5, respectivement, mais il n'est pas possible de savoir si les élèves prennent en compte la comparaison des longueurs dans la construction de lignes. L'action incarnée réalisée semble ainsi être multiplicative. Dans le contexte de cette tâche, nous considérons que le fait de penser à distribuer l'élaboration de lignes de boîtes par binôme peut aider à surmonter des difficultés liées à la reconnaissance de l'indépendance de la construction des lignes, comme celles possiblement rencontrées par Corentin du groupe G1 (*cf.* épisode 4). En fait, c'est une façon de mettre en acte cette indépendance. En raison des difficultés pratiques, la construction est prise en charge par Éloïse et Pauline après quelques minutes. La construction des lignes est séquentielle. Nous présentons une schématisation de la construction dans la figure 8.13. Elles font d'abord une ligne de 5 boîtes de 5. Pour la ligne de boîtes de 4, Éloïse met les boîtes de 4 alors que Pauline s'occupe de bien les aligner.

Éloïse, qui plaçait les boîtes de 4, arrête son action lorsqu'elle a placé la cinquième boîte. Elle semble avoir reconnue la configuration attendue. Pour la valider, l'élève fait recours au *geste de la main comme droite* que l'enseignante avait produit lors de la présentation de la sous-tâche ST1

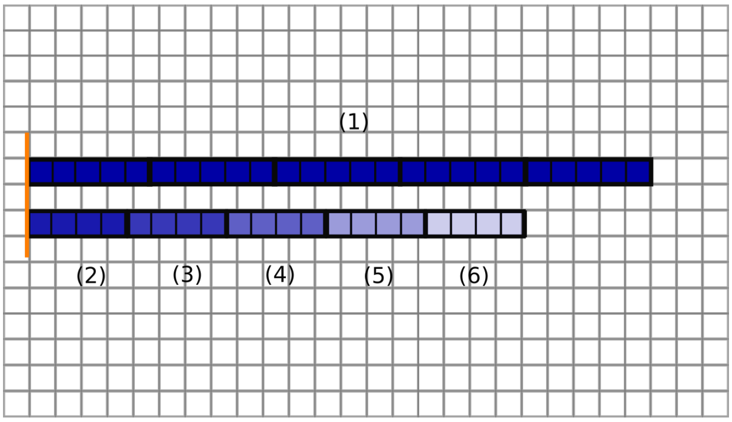


Figure 8.13 – Construction séquentielle de lignes de boîtes du groupe G2. En dégradation de bleu, les boîtes selon si elles appartiennent à des étapes ultérieures. Les étapes sont aussi numérotées.

(*cf.* épisode 1). Éloïse fait le geste avec sa main gauche, tendue et placée orthogonale aux lignes de boîtes, juste au bout de la ligne de boîtes de 4 (voir figure 8.14). Le geste nous semble servir de droite auxiliaire orthogonale aux lignes de boîtes, pour assurer que la fin des lignes de boîtes coïncident. Notons que l'utilisation du geste par l'enseignante a été appliquée pour évoquer une droite auxiliaire pour mettre les origines des lignes de boîtes. L'enseignante a également produit le *geste de la longueur* avec les deux mains tendues (*cf.* épisode 1). L'élève adapte ainsi cette ressource incarnée au contexte de la résolution de la sous-tâche, afin de comparer les longueurs des lignes.

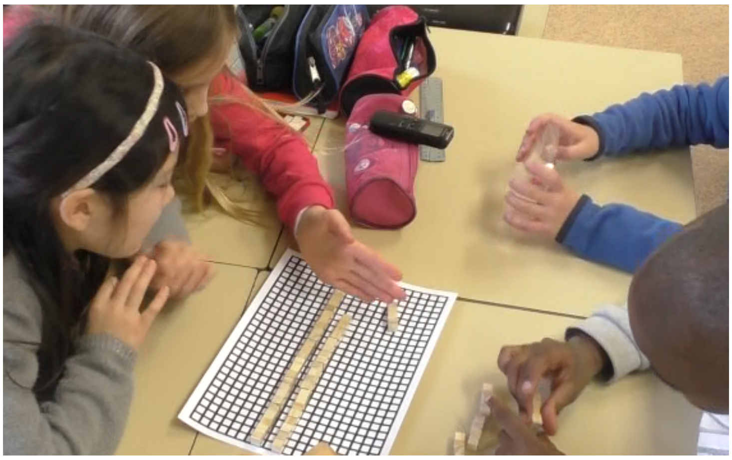


Figure 8.14 – Geste de comparaison de longueurs à une main.

Après deux secondes, Pauline interrompt Éloïse en lui prenant la main avec laquelle l'élève produisait le geste. Pauline semble vouloir continuer à mettre des boîtes de 4 sur la ligne, peut-être au point de mettre toutes les boîtes disponibles, sans se rendre compte que la réponse à la sous-tâche ST1 était sous ses yeux. Éloïse réagit et exprime verbalement qu'elle a une hypothèse :

« *je pense que là, il va marcher. Attendez, on va voir* ». Elle retire ensuite la boîte de 5 supplémentaire de la ligne, pour faire découvrir aux autres élèves du groupe deux lignes de même longueur. Une fois la boîte enlevée, les élèves semblent convencu·e·s, en particulier Pauline qui dit « *ah, ouais !* ». Éloïse manipule à nouveau les boîtes pour vérifier encore l'hypothèse. L'erreur du matériel (une différence de quelques millimètres) la fait douter de l'équivalence des longueurs des lignes. Le cadre géométrique s'avère donc insuffisant pour conclure, ce qui amène Éloïse à proposer un changement de cadre. En attendant une même quantité de cubes par ligne, les élèves comptent à voix haute les cubes un par un, au moyen des gestes déictiques ordinaires (voir figure 8.15).

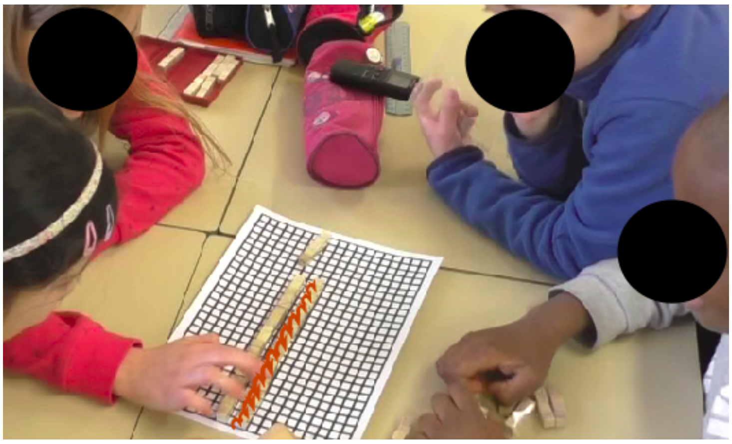


Figure 8.15 – Le groupe compte le nombre de cubes dans chaque rangée. Les élèves coordonnent le comptage des chiffres, prononcés rythmiquement, avec les gestes déictiques d'Éloïse.

Les élèves comptent rythmiquement 20 cubes par ligne, ce qui leur suffit pour conclure. Chaque élève du groupe montre qu'elle/il reconnait la validité du résultat, soit par un sourire, soit par les mots « *yes !* » ou « *oui !* » : moment Eurêka.

Épisode 7 : Résolution des sous-tâches ST2 et ST3

Lors de la formulation de la réponse à la deuxième question, Pauline semble croire que le dénombrement de la quantité de cubes par ligne est suffisant pour y répondre. Éloïse prend la feuille et lit la deuxième question. Elle compte alors le nombre de boîtes de 4 sur la ligne et dit « *un, deux, trois, quatre, cinq* », elle continue « *cinq fois quatre* ». L'élève objective ainsi l'expression multiplicative numérique associée à la ligne.

Pauline prend appui sur la production d'Éloïse et trouve la multiplication pour la deuxième ligne et développe la même activité : « *quatre fois cinq* » (voir figure 8.16).

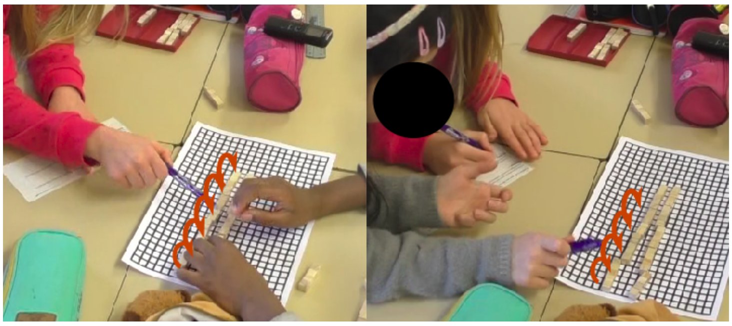


Figure 8.16 – À droite, une image d'Éloïse quand elle calcule la quantité de cubes dans la ligne de boîtes de 4. À gauche, Pauline élabore le calcul associé à la ligne de boîtes de 5 en coordinant le geste déictique, le rythme et la parole de façon similaire.

Il s'agit possiblement du processus d'iconicité dont nous avons parlé à propos de la résolution de la sous-tâche par le groupe G1 (*cf.* épisode 5). Les élèves distinguent deux calculs différents à partir de la structure des lignes. Une fois qu'Éloïse a écrit les deux calculs, elle change son expression faciale et le ton de sa voix pour exprimer qu'elle a découvert quelque chose. Elle n'y approfondit pas jusqu'à la synthèse (*cf.* épisode 9).

8.2.3 La synthèse

Épisode 8 : Correction sous-tâche ST1 et ST2, et représentation de la ligne de boîtes de 4 cubes

L'enseignante demande la réponse à la première question de l'énoncé. Elle donne la parole à l'une des élèves, Jessica, du groupe qui avait des difficultés pour développer les sous-activités de reconnaissance attendues (*cf.* épisode 4). L'élève répond correctement à la première question, elle dit « *oui* ». L'enseignante reformule ensuite la réponse et lui demande la quantité de boîtes de 4 sur la ligne : « *Oui, c'était possible. Alors, est-ce que tu peux me dire combien de boîtes de quatre cubes vous avez mises?* ». L'élève répond correctement « *cinq* ». L'enseignante représente alors la ligne de boîtes de 4 sur le tableau avec le matériel de manipulation collective : le premier signe-artefact qui était prévu d'être produit (voir figure 8.17). L'enseignante donne ensuite deux signes évoquant l'addition de la quantité de cubes par boîte : elle écrit l'expression symbolique $4 + 4 + 4 + 4 + 4$ sur le tableau et dit « *donc ici j'ai en quatre plus encore quatre plus encore quatre plus encore quatre plus encore quatre, d'accord?* » (voir figure 8.17). L'écriture symbolique, et sa lecture à l'orale, rend compte de la relation d'addition répétée des cubes. L'organisation par boîtes, bien que représentée par les boîtes aimantées, est dans une certaine mesure invisibilisée par l'expression d'une relation additive des unités simples (les cubes [9]). L'enseignante demande ensuite à un autre élève la quantité totale de cubes dans la ligne. Plusieurs élèves lèvent la main. Une fois que la réponse correcte est donnée, l'enseignante ajoute le signe «$= 20$» à l'expression symbolique précédente. L'enseignante profite de cette occasion pour commencer à installer du vocabulaire relatif à la grille partie-fois-tout. L'enseignante évoque indirectement l'action d'itérer à l'orale par l'intermédiaire du verbe « itérer ». Elle dit, tout en signalant le signe 4 sur le tableau : « *la quantité qu'on a itérée, c'est combien?* » (voir figure 8.17).

Figure 8.17 – Représentation de la ligne de boîtes de 4 et expression additive que enseignante y associe.

Plusieurs élèves lèvent la main, un élève répond « *quatre* » : le fait que l'enseignante pointe la grandeur à dire (effet Topaze) permet aux élèves de répondre à la question qui est formulée dans les termes qui commencent juste à être introduits par l'enseignante.

Épisode 9 : Rappel de la *grille de résolution*

L'enseignante commence à rappeler aux élèves le contexte d'utilisation de la *grille de résolution* (voir paragraphe 6.3.3). Elle est ensuite interrompue par Éloïse du groupe G2 qui demande la parole. Éloïse va essayer d'exprimer ce qu'elle a remarqué à la fin du travail en groupe (*cf.* épisode 9). L'élève produit un geste que nous avons dénommée *geste de changement de rôles des opérandes*.

9. Notons que l'écriture $4\ 4\ 4\ 4\ 4$ aurait par exemple conservé la structure, du fait que la quantité de cubes par boîte est encore présentée en tant que groupe de cubes.

Dans la figure 8.18, nous présentons deux captures d'écran de la vidéo lors de la production du geste.

Figure 8.18 – Captures d'écran lors de la production du *geste de changement de rôles des opérandes*. La première et la seconde position du geste sont mises à gauche et à droite, respectivement. La flèche organe à droite représente la direction de changement de position de doigts.

Le geste est composé de l'index et le majeur. Le geste est fait en deux temps. Dans un premier temps, l'index et le majeur sont les seuls doigts levés de la main (à gauche dans la figure 8.18). L'élève dit, lors de l'exécution du geste : *En fait on a, on a, on a...* [geste de changement de rôles] *on a tourné dans **le deux sens*** [geste de changement de rôles]. L'élève fait dans un deuxième temps tourner la main, de sorte que dans la place de l'index est alors occupée par le majeur (à droite dans la figure 8.18). Nous faisons l'hypothèse que chaque doigt incarne un opérande de la multiplication et le changement de position de doigts la variation dans l'ordre des opérandes dans l'expression multiplicative. La coordination sensuelle du geste et la parole de l'élève accomplissent ainsi une objectivation du savoir. Elle rend apparent par le recours à ces ressources sémiotiques la propriété de la commutativité de la multiplication. Le processus d'objectivation n'a néanmoins pas atteint le niveau de profondeur nécessaire pour que l'élève puisse avoir recours à la parole seule pour exprimer la propriété (ce qui impliquerait une contraction sémiotique par rapport à ce nœud sémiotique). Le geste lui permet ainsi de profiter de l'instance collective de la classe pour donner forme à ce qu'elle avait remarqué lors du travail en groupe. L'enseignante, qui sait à ce quoi l'élève fait référence, ne considère pas que c'est le moment pour y approfondir la question et dit : « *Oh, on n'en est pas encore là, mon amour. Nous en parlerons plus tard, oui* ». La propiété commutative sera traité dans la séance S_4 (voir table 6.1)

L'enseignante revient au rappel de la *grille de résolution*, étant donné le temps considérable qui est passé depuis la dernière utilisation. L'enseignante se centre sur les termes de la relation entre grandeurs représentée au moyen de la *grille de résolution* : le *tout* et les *parties* (l'enseignante utilisait aussi le terme en singulier pour se référer à l'enseignante des parties). Elle dit :

> P – *On utilisait une grille, on utilisait une grille comme ça* [L'enseignante dessine un rectangle dans le tableau]. *On appelait ça notre* grille de résolution [l'enseignante fait une division verticale au milieu du rectangle], *et là on mettait* [Geste en tout, décrit ci-dessous] *là on disait que c'était le tout* [Geste déictique sur le même endroit] *et là on disait que c'était les parties* [L'enseignante dessine 2 lignes horizontale sur la case à gauche en guise de divisions] *de ce qu'on additionnait* [Geste d'itération en ligne, décrit ci-dessous] *pour faire un tout* [Geste déictique sur la case du tout]. *Vous vous en souvenez de ça ?*

L'enseignante utilise le geste que nous avons appelé le *geste en tout* pour se référer à la quantité dénommée le *tout* sur la *grille de résolution*. Nous présentons le geste dans la figure 8.19.

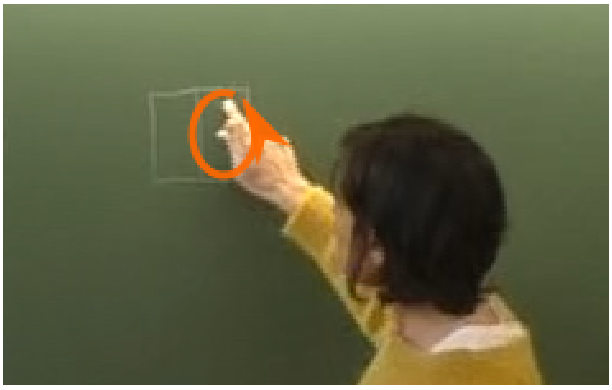


Figure 8.19 – Capture d'écran lors de la production du *geste en tout* sur la *grille de résolution*. Première apparition. La flèche orange représente la direction que la main a suivi pour faire les cercles. L'enseignante a fait 2 cercles.

L'enseignante utilise l'index de sa main droite pour produire le geste. Le geste consiste à dessiner des cercles dans l'air, sur la case du tout. L'index parcourt des bornes d'une surface délimitée. La surface semble dans un sens métaphorique représenter le tout, dans la mesure où elle réfère à une *totalité* qui *contient* tous les éléments qui sont réunis (les parties) dans la surface. Le geste fournit une signification incarnée au tout, qui est attribuable au terme dans la relation multiplicative.

L'enseignante produit également dans cette intervention un geste que nous avons dénommé *geste d'itération en ligne*. Il est produit en coordination avec la phrase « *de ce qu'on additionnait* » (voir transcription ci-dessus). Nous présentons le geste dans la figure 8.20.

Le geste se fait avec le poing et l'index de la main droite, détendus. Le geste a consisté en trois petits coups avec un rythme constant qui indiquent chaque fois les cases de la partie (voir figure 8.20). Le rythme constant du geste, en coordination avec la proposition « *ce qu'on additionnait* », permet de cibler le fait qu'il s'agit d'une action réitérée. Chaque coup est un geste déictique qui

Figure 8.20 – Capture d'écran lors de la production du *geste d'itération en ligne*. Les croix orange représentent les petits coups du geste. Les flèches orange indiquent le chemin que la main a suivi.

signale une case de la partie. Les gestes déictiques permettent d'évoquer les significations attribuées aux « parties », en tant que concept. Le conceptuel se trouve ainsi étroitement ancré au sensuel, à travers l'interrelation des gestes, la parole, le rythme et l'utilisation de l'artefact *grille de résolution*. En particulier, l'action d'itérer se manifeste ici comme une action épistémique, dans la mesure où elle est subsumée dans cette unité dynamique émergente des composants matériels et idéels. Après l'exécution du geste d'itération en ligne, l'enseignante signale la case du tout avec un geste déictique et dit « *faire un tout* » (voir transcription ci-dessous). Nous considérons que la séquence et l'enchaînement du *geste d'itération en ligne* et du geste déictique, en coordination avec les autres ressources sémiotiques qui constituent les faisceaux sémiotiques qui les contient, permettent d'établir une relation d'équivalence entre les parties (ou la partie) et le tout. Ainsi, les parties sont signifiées par leur relation au tout, dans le cadre des relations entre grandeurs induites par l'action de l'itération.

L'enseignante, qui a adopté un point de vue général pour désigner et signifier les termes qui composent la *grille de résolution*, donne ensuite un exemple concret. Elle remplit la grille de solution avec les valeurs numériques des grandeurs en relation multiplicative associées à la ligne des boîtes de 4. Elle utilise uniquement des chiffres pour remplir la grille. L'enseignante produit ainsi un signe-artefact qui se trouve être intermédiaire à celui qu'elle avait prévue de faire, qui implique le remplissage de la *grille de résolution* avec le matériel aimanté. Il se trouve intermédiaire par rapport à l'utilisation que la classe y faisait dans le contexte de la résolution de problèmes verbaux additif (voir la description de l'artefact dans le paragraphe 6.3.2). À la fin de l'exemple, l'enseignant revient sur la généralité du schéma, pour indiquer à nouveau les cases qui sont données pour mettre les parties et le tout. En conclusion, l'enseignante a seulement fait référence à l'utilisation déjà faite en classe de l'artefact de la *grille de résolution*.

Épisode 10 : Représentation de la ligne de boîtes de 5 cubes

L'enseignante redirige l'attention des élèves vers la représentation de la ligne de boîtes de 5 cubes, à partir des questions portant sur l'équivalence de la quantité de cubes par ligne. L'enseignante produit dans ce contexte un geste que nous avons dénommée *geste d'itération de cubes*. Elle coordonne la production du geste avec la phrase « *pour qu'à la fin les lignes elles aient la même longueur, il fallait qu'elles quoi, ces lignes, la même quantité de quoi ?* ». Nous présentons dans la figure 8.21 la structure visuospatiale du geste.

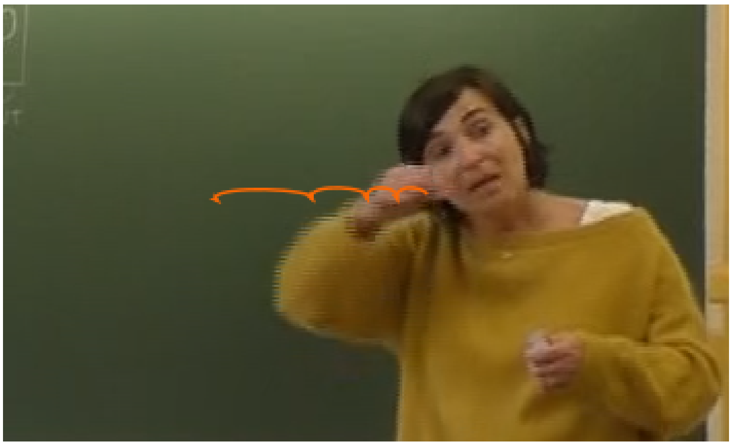


Figure 8.21 – Capture d'écran lors de la production du *geste de l'itération de cubes*. Nous représentons avec des flèches orange le chemin que la main a suivi.

L'enseignante fait le geste avec sa main droite. La main trace une ligne horizontale imaginaire par petits coups. Les petits coups sont très subtils, de sorte que la ligne horizontale dessinée par le geste est une ligne légèrement ondulée. D'après le contexte dans lequel le geste est produit, il nous semble que le geste suggère que les lignes sont faites de cubes, évoqués métaphoriquement par les petits coups. De cette façon, le geste sert à souligner la grandeur discrète qui peut être associée à la ligne de boîtes, la quantité de cubes. L'enseignante prend appui sur cette signification mathématique pour faire référence à la correspondance entre l'équivalence des longueurs des lignes, évoquée par la parole, et l'équivalence des quantités des cubes par ligne. L'enseignante pose ensuite la question de la quantité de cubes dans la ligne de boîtes de 5 ; l'élève qui a répondu se trompe (il répond « *quatre* », vraisemblablement en référence au nombre de boîtes dans la ligne). Vu l'erreur de l'élève, l'enseignante utilise le *geste en tout* pour reformuler la question : « *combien de cubes en tout* [L'enseignante fait le *geste en tout* dans l'air] *on devait* *avoir pour que ce soit aligné avec cette ligne-là?* » [L'enseignante indique la ligne de boîtes de 4]. Ici, la signification évoquée par le geste semble également liée à l'idée de totalité, cette fois pour faire référence à la quantité qui jouait le rôle du tout.

L'enseignante reproduit les signes graphiques des relations entre grandeurs faites pour la ligne de boîtes de 4 (ligne faite avec le matériel aimanté et expression additive symbolique). L'enseignante a ainsi incorporé sur le tableau des signes graphiques de trois types associées à la construction des deux lignes. Les signes évoquent des significations mathématiques diverses associées aux lignes de boîtes, qui enrichissent le processus d'objectivation du savoir.

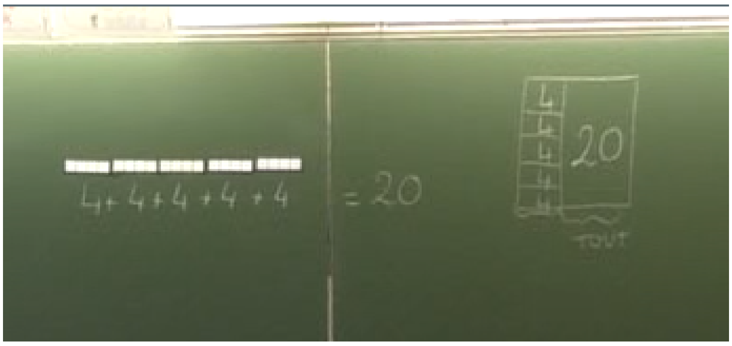


Figure 8.22 – Signes qui évoquent les grandeurs en relation multiplicative associées à la construction de la ligne de boîtes de 4. À gauche et en haut un signe-artefact avec le matériel aimanté; à gauche et en bas une expression symbolique additive; et à droite un signe-artefact avec la *grille de résolution*.

L'enseignante profite l'occasion pour enrichir le vocabulaire qui va être associé à la *grille fois-partie-tout* pour faire référence à la relation multiplicative entre grandeurs. Elle prend encore appui sur le verbe *itérer* et l'expression *quantité itérée*, pour produire des formulations basées sur le terme à introduire : le *nombre de fois*. L'enseignante pose plusieurs questions sur les quantités impliquées en utilisant ces expressions. Le fait de revenir plusieurs fois augmente les possibilités et les instances pour que les élèves donnent du sens à la relation multiplicative, au sein du travail conjoint. Nous présentons ci-dessous un extrait de l'une de ces interventions.

> P – *Est-ce qu'on comprend comment on a pu obtenir deux lignes alignées? Parce qu'elles avaient la même quantité de cubes? En additionnant, en itérant cinq fois la quantité quatre on obtient le même résultat* [L'enseignante produit un geste déictique sur le nombre 20 dans la *grille de résolution* au-dessous] *qu'en itérant* [L'enseignante produit le geste iconique d'itérer, décrit ci-dessous, à côté de la *grille de résolution* en bas] *quatre fois la quantité cinq. Et donc finalement vous avez obtenu des lignes alignées*

Notons d'abord que les relations d'addition itérée auxquelles l'enseignante fait référence sont articulées dans une même phrase, ce qui permet de rendre compte de leur équivalence du point de vue du « résultat ». L'enseignante utilise le mot *quantité* pour faire référence à la quantité de cubes par boîte (« *la quantité quatre* » et « *la quantité cinq* »). Nous considérons que l'emploi du mot *quantité* permet, d'une part, d'adjectiver les mots des nombres *quatre* et *cinq*, c'est-à-dire de leur attribuer la signification mathématique de grandeur (ce sont des quantités dont nous parlons). D'autre part (et plus intéressant pour notre propos), deux significations coexistent dans les phrases « *la quantité quatre* » et « *la quantité cinq* ». Les mots de nombres « quatre » et « cinq » indiquent une pluralité, tandis que le mot *quantité*, au singulier, indique qu'il agit d'une seule chose, une unité. Le mot sert ainsi à évoquer la signification d'unité relative.

Un autre aspect qui nous semble remarquable dans l'intervention de l'enseignante est la production d'un geste que nous appelons *geste iconique d'itérer* (voir transcription ci-dessous). Nous présentons dans la figure 8.23 la structure visuospatiale du geste.

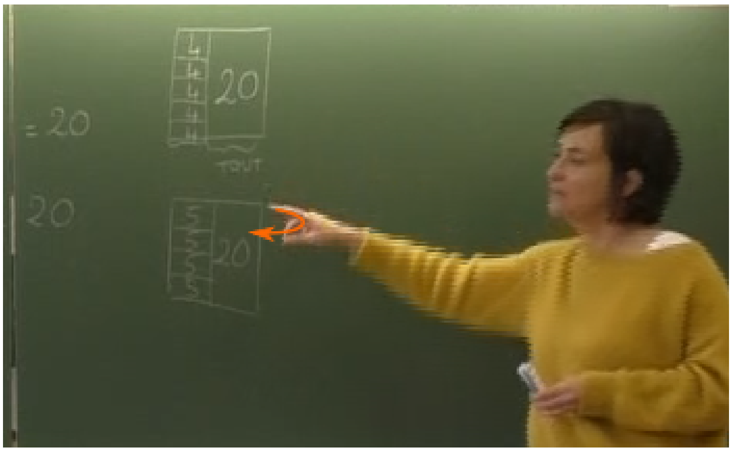


Figure 8.23 – Capture d'écran lors de la production du *geste iconique d'itérer*. Nous signalons avec une flèche orange le chemin que la main a suivi lors de l'exécution du geste.

Le *geste iconique d'itérer* est, du point de vue de la structure visuospatiale, très similaire à celui d'itération en ligne [10] : les deux gestes consistent en de petits coups exécutés avec un rythme constant. Dans les deux cas nous observons la manifestation de l'action d'itération. Cependant, nous repérons des différences cruciales, très utiles pour interpréter les différentes significations évoquées. Le *geste iconique d'itérer* contient de petits coups qui n'ont aucune fonction indicative, ils ont été faits dans l'air. Dans le *geste d'itération en ligne*, les petits coups indiquent les cases de la partie sur la *grille de résolution*. Nous observons également dans le *geste iconique d'itérer* une disparité considérable entre le nombre de petits coups, deux, et le multiplicateur de la relation

10. Cette similitude nous avait amenées à interpréter ces deux gestes comme évoquant des significations très proches. La répétition ultérieure du *geste d'itération en ligne* à l'épisode 4 nous a cependant permis de mettre en lumière des différences invisibles à première vue.

multiplicative en question, quatre (il s'agit de la multiplication $5c \times 4$ [11], où c représente l'unité de grandeur). Il nous semble que l'enseignante n'aurait pas eu d'inconvénient à faire coïncider ces deux quantités si telle avait été son intention. Ainsi, ces petits coups, au lieu de faire référence à des grandeurs dans la relation multiplicative, semblent vouloir produire une image de l'action concrète d'itération. C'est pourquoi nous interprétons le *geste iconique d'itérer* comme ayant une dimension iconique prédominante, d'où le nom que nous lui donnons. Nous considérons que l'action d'itération se manifeste ici en tant qu'action épistémique non multiplicative. Notre hypothèse semble également être mise en évidence au niveau de la coordination geste – parole, puisque la production du geste est coordonnée avec l'énoncé « *en itérant* », en référence au verbe *itérer*. En effet, nous interprétons ceci en disant que l'enseignante construit dans son discours une subordination causale entre l'exécution de l'action quotidienne d'itérer sur le matériel et l'obtention d'un résultat : la relation « *quatre fois la quantité cinq* ». Le *geste d'itération en ligne*, en revanche, a été coordonné avec une phrase relative à une grandeur (*ce qu'on additionne*).

Épisode 11 : Remplissage de la *grille de résolution* avec des signes matériels

Dans l'utilisation habituelle de la *grille de résolution*, elle n'était remplie que de chiffres. Elle n'était jamais remplie de signes représentant des quantités, tels que des signes matériels évoquant les objets physiques associés (par exemple, le matériel aimanté représentant des boîtes et des cubes) ou des expressions symboliques avec le signe de l'unité de grandeur. L'enseignante demande alors de remplir la *grille de résolution* avec le matériel aimanté, une *grille de résolution* par ligne de boîtes, pour ainsi produire le deuxième signe-artefact selon prévu. L'objectif est d'étendre l'utilisation de la *grille de résolution* pour la remplir avec des signes matériels. L'enseignante dessine d'abord un long rectangle, qui est ensuite divisé en deux, pour l'élaboration de la première *grille de résolution* (un rectangle pour la partie, l'autre pour le tout). Rémi du groupe G1 se porte volontaire. L'enseignante lui demande « *tu vas me mettre les parties et le tout* », en lui indiquant avec des gestes déictiques la gauche et la droite respectivement.

Rémi doit représenter la relation entre grandeurs de la ligne de boîtes de 4. Il met la première boîte aimantée de 4 cubes en haut des cases des parties à gauche. L'enseignante lui demande alors la quantité de *parties*, qui correspond à la quantité de boîtes aimantées que l'élève devra utiliser. L'élève répond qu'il y en a quatre, peut-être en faisant référence à la quantité des cubes

11. L'enseignante utilise l'ordre d'écriture traditionnel français, selon lequel le multiplicande est mis à gauche et le multiplicateur, à droite.

dans la boîte. Quand l'enseignante reformule la question en parlant de la quantité de boîtes, l'élève répond correctement. Le mot *partie* semble ainsi ne pas être reconnu par l'élève comme exprimant le multiplicande. L'élève commence à mettre les boîtes aimantées, qui sont chaque fois donnés par l'enseignante, et à marquer les séparations des parties avec la craie. Les actions de l'élève deviennent de plus en plus automatiques et l'enseignante le perçoit. L'enseignante lui donne alors une boîte de plus, vraisemblablement pour voir s'il a bien anticipé le nombre de boîtes qu'il devait mettre dans la *grille de résolution*. L'enseignante induit ainsi une erreur : l'élève se trompe et met une boîte de plus (6 boîtes de 4 cubes). Nous présentons dans la figure 8.24 une capture d'écran du moment.

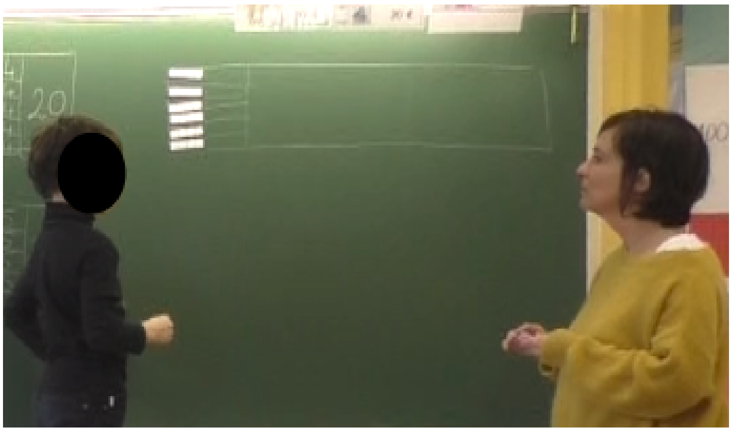


Figure 8.24 – Capture d'écran du remplissage de la *grille de résolution* du premier élève qui est passé au tableau, avec le matériel de manipulation collective. L'élève a mis une boîte de plus dans la partie.

L'action de l'enseignante permet de matérialiser et d'amener au plan collectif les limitations de la façon d'aborder la relation multiplicative par l'élève, par la médiation de l'artefact. Il nous semble que les difficultés de l'élève peuvent être en grande partie dues à un manque de familiarisation avec l'utilisation de la *grille de résolution* avec ce type de signe.

L'enseignante demande à un autre élève de passer au tableau, Jean, pour « *faire la même grille avec les boîtes de cinq* ». L'enseignante lui donne une craie. Sans aucune indication, l'élève dessine une ligne verticale dans la *grille de résolution* de la ligne de boîtes de 4 qui avait été faite par l'élève qui a précédemment passé au tableau (voir figure 8.25). L'enseignante lui fait effacer immédiatement cette ligne additionnelle. Elle lui demande de dessiner la grille en dessous.

Qu'est-ce qui a pu amener l'élève à tracer cette ligne ? La ligne verticale dans la grille de solution permet d'établir une relation d'équivalence entre les quantités. Ainsi, une deuxième ligne verticale peut être un signe qui évoque une relation d'équivalence entre trois termes. En raison de l'équivalence de la quantité de cubes par ligne, une telle production sémiotique peut avoir

Figure 8.25 – Capture d'écran du remplissage de la *grille de résolution* du deuxième élève qui est passé au tableau qui fait un trait supplémentaire.

beaucoup de sens. La ligne que l'élève a tracée fournit donc trois cases : les deux premières relatives à la *grille de résolution* de la première ligne et une troisième case. Étant donné également la similitude de la surface de la troisième case introduite avec la surface de celle utilisée par le premier élève pour placer les boîtes, il nous semble qu'il est possible que l'élève ait voulu représenter dans cette troisième case la partie de la relation de grandeurs relative à la ligne de boîtes de 5. Enfin, après que l'enseignante efface la ligne l'élève remplit la deuxième grille. L'élève commence par dessiner la case où il va mettre la partie. L'élève dessine quatre cases, ce qui suggère qu'il a anticipé le multiplicateur. L'élève remplit correctement la grille avec les boîtes que lui donne l'enseignante.

L'enseignante fait une récapitulation en appui sur les *grilles de résolution* remplies, qui deviennent une autre ressource sémiotique à enrichir l'activité. L'enseignante se sert du vocabulaire introduit ainsi que du *geste d'itération en ligne* :

> P – *Cinq* [Geste déictique sur le premier casier de la partie de la *grille de résolution* où la ligne de boîtes de 4 est représentée, au-dessus] *parties de* [geste d'itération en ligne] *quatre cubes* [geste déictique sur une boîte de 4] *ça fait vingt cubes* [geste déictique sur la ligne de boîtes de 4 dans la case du tout] *à rond tout. Quatre* [Geste déictique sur le premier casier de la partie de la *grille de résolution* où la ligne de boîtes de 5 est représentée, au-dessous] *parties de cinq cubes, ça fait aussi vingt cubes en tout. Et donc, si on aligne les boîtes on obtenait la même longueur parce qu'on avait la même quantité de cubes.*

C'est la deuxième fois dans la synthèse que l'enseignante utilise le *geste d'itération en ligne* (*cf.* épisode 9). L'enseignante prend appui sur les deux *grilles de résolution* remplies avec le matériel aimanté. L'enseignante reproduit le geste deux fois, une fois pour chaque grille (nous avons mis la transcription correspondante à une). L'élaboration du geste a été coordonnée avec les phrases

« *cinq parties de quatre cubes* » et « *quatre parties de cinq cubes* ». Nous y repérons une structure visuospatiale commune au *geste d'itération en ligne* produit la première fois (d'où le même nom) : l'exécution de petits coups, avec un rythme constant, tout au long d'une ligne imaginaire verticale. Dans cette occasion, le nombre de petits coups ne correspond pas au nombre de parties dans les *grilles de résolution* : l'enseignante fait un petit coup de moins dans le deux cas (trois coups pour la ligne de boîtes de 5 cubes et quatre coups pour la ligne de boîtes de 4 cubes). Il nous semble néanmoins qu'il s'agit d'un effet de la vitesse d'exécution du geste, car les petits coups accomplissent également une fonction indicative : ils signalent les cases correspondantes à la partie dans les *grilles de résolution*.

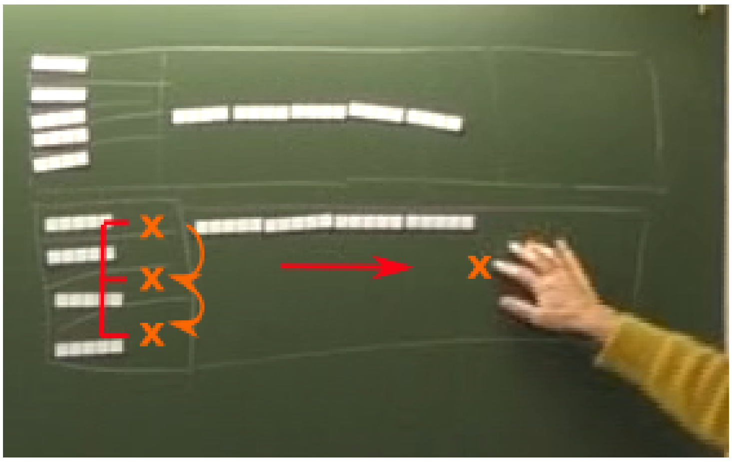


Figure 8.26 – Capture d'écran lors de la production du *geste d'itération en ligne*. L'enseignante a produit trois petits coups lors de l'exécution du geste, que nous représentons avec des croix orange. Les flèches orange représentent le chemin que la main a suivi lors de l'exécution du geste, dans un plan orthogonal à celui du tableau. Nous représentons avec rouge la ligne imaginaire tracée par la concaténation des petits coups. Nous mettons une flèche rouge pour pointer le déplacement qui suit la main après le *geste d'itération en ligne* pour indiquer le tout.

Les phrases avec lesquelles le geste est coordonné font référence au nombre d'itérations de la *partie* (« *cinq parties de* »). Comme signalé pour la première apparition du geste, il nous semble encore accomplir une fonction sémiotique cruciale dans l'émergence d'une unité de composants matériels et idéels. Par la coordination sensuelle des gestes déictiques et de la parole, l'enseignante fait apparaître le contenu conceptuel qui est associé aux cases de l'artefact : *les parties*. Cette notion rend compte des grandeurs qui sont additionnées : il s'agit ici d'une même quantité de cubes. La grandeur 4 cubes est ensuite évoquée par la parole et par le geste déictique, en référence au signe graphique (matériel aimanté) au tableau. Ce dernier représente à la fois l'objet physique et la grandeur. L'action incarnée se manifeste, en tant qu'action épistémique, par la concaténation, le mouvement et le rythme de la main. L'action incarnée d'itération sert à l'enseignante à signifier la relation entre grandeurs. L'interaction entre les différentes modalités sensorielles et les différents signes révèle une perception de la relation multiplicative entre grandeurs associée à l'addition itérée de grandeurs.

Épisode 12 : Correction de la sous-tâche ST3

Dans cet épisode l'enseignante se concentre sur l'écriture des calculs. L'enseignante demande la réponse à la deuxième question. Anaïs du groupe G1 se porte volontaire pour aller au tableau et donne la réponse que le groupe a trouvé, elle dit : « *cinq fois quatre ou quatre fois cinq* ». L'enseignante l'invite alors l'élève à écrire les calculs au tableau, en les faisant correspondre avec les grilles. [12]

> P – *Allez, on regarde, on est amenés à la deuxième question. On écrit le calcul qui correspond à la grille. Alors, elle écrit cinq multiplié* [Anaïs écrit 5×4= au-dessus, à côté de la grille correspondante aux lignes de boîtes de 4] . . . *tu peux mettre. . . pour nous aider, quand c'est des cubes, tu peux mettre "c" de cubes?*
> Les élèves murmurent
> P –*Monsieur Bernard n'est pas là, on lui dira pas.* [Anaïs met des c à côté des nombres 5 et 4]
> P – *Très bien, merci.*

Rappelons que la classe est suivie par deux enseignant·e·s, qui ont divisé le programme de mathématiques par thèmes : l'enseignante observée ici enseigne le calcul et la numération, tandis que l'autre enseignant enseigne la géométrie et les grandeurs et mesure. Les élèves n'ont pas le droit d'écrire les unités de grandeur dans les calculs avec l'autre enseignant (nous l'avons évoqué dans le paragraphe 6.1.2). L'écriture avec des unités de grandeurs implique pour les élèves une rupture du contrat didactique avec l'autre enseignant, Monsieur Bernard. Cette rupture met également l'enseignante dans une situation décalée concernant la répartition des contenus enseignés. Dans cet épisode, c'est la première fois, selon les données auxquels nous avons accès, qu'une élève fait face à la tâche d'écrire les calculs avec des unités de grandeur. Quant à l'anticipation par l'enseignante, les seules difficultés prévues semblent relever uniquement du contrat didactique. Nous interprétons la façon directe dont l'enseignante formule la question – « *tu peux mettre. . . pour nous aider, quand c'est des cubes, tu peux mettre c des cubes*» –, comme si elle la tenait pour une demande suffisamment transparente, comme si le fait d'écrire les calculs avec l'unité de grandeurs allait certainement *aider* aux élèves à les interpréter. La seule indication donnée porte sur l'autre enseignant : « *Monsieur Bernard n'est pas là, on lui dira pas.* ».

Pour l'écriture des calculs, Anaïs se sert des signes-artefacts (*grille de résolution*) sur le tableau : elle compte d'abord le nombre de boîtes dans la partie de la *grille de résolution*, et écrit ensuite les calculs (les actions coordonnées avec l'écriture du calcul, que réalise l'élève, coïncident

12. Dans la transcription, nous n'avos pas mis le vrai nom de l'enseignant.

avec ce que nous avons observé lors du travail en groupe, dans l'épisode 5). L'élève place, dans ces deux calculs, le multiplicateur à gauche et le multiplicande à droite. Suite à la demande de l'enseignante, Anaïs incorpore le signe c à ces calculs et écrit $5c \times 4c = 20$ en haut et $4c \times 5c$ en bas (voir figure 8.27). L'élève ne perçoit pas la façon dont le symbole de l'unité de grandeurs peut être utilisé. Les opérandes au sein de l'expression multiplicative symbolique, lesquels l'élève accompagne indistinctement avec le signe c,. semblent indistinguables. Soulignons le fait que l'élève donne comme réponse à l'oral « 5 *fois* 4 ***ou*** 4 *fois* 5 », et non « 5 *fois* 4 ***et*** 4 *fois* 5». Les deux expressions multiplicatives semblent en conséquence équivalentes aux yeux de l'élève. Le choix des relations multiplicatives sur lesquelles repose la tâche est intéressant, car il nous permet d'observer si ces relations sont perçues au-delà de la coïncidence des valeurs numériques.

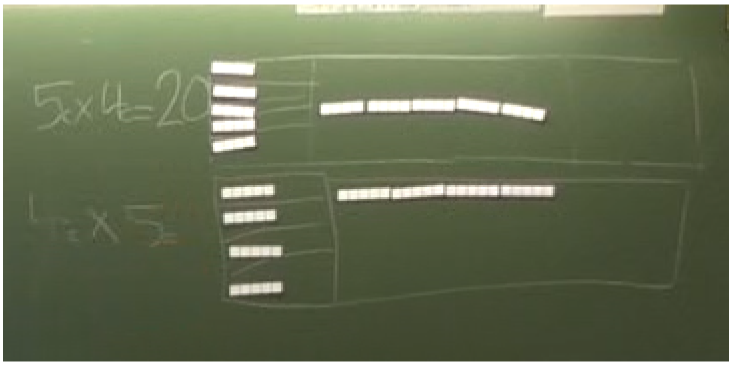


Figure 8.27 – Expressions multiplicatives symboliques écrites par Anaïs. Dans le calcul du haut, les deux opérandes sont accompagnés de l'unité de mesure ($5c \times 4c = 20$). Dans le calcul en bas, les deux opérandes sont accompagnés de l'unité de mesure, $4c \times 5c$, mais, interpellée par l'enseignante, l'élève ne finit pas d'écrire le calcul. L'élève venait d'effacer légèrement $4c$ du calcul.

L'enseignante, qui n'avait pas perçu l'erreur lors de l'écriture du calcul du haut, interrompe Anaïs quand elle écrit le calcul du bas ($4c \times 5c$) et le dit : « *Ah non, non, tu n'as pas fait cinq cubes multiplié par quatre cubes*. La réaction tardive de l'enseignante (elle n'a pas interpellé l'élève au sujet du calcul $5c \times 4c = 20$) réside probablement dans l'écriture peu perceptible du c qui accompagne le signe 4 dans le calcul, qui donne l'écriture attendue, $5c \times 4 = 20$. C'est au deuxième calcul ($4c \times 5c$) que l'enseignante réagit. Quand l'enseignante dit à l'élève « *tu n'as pas fait cinq cubes multiplié par quatre cubes* », l'élève et la classe ont l'air étonnés. L'élève ne comprend pas ce que l'enseignante cherche à lui faire remarquer. Elle agit ensuite comme si elle avait repéré l'erreur et elle dit « *Ah, oui!* ». Elle change le premier opérande de son calcul et met $5c \times 5c$. L'élève semble ne pas se rendre compte de la possibilité de ne pas accompagner du symbole c tous les opérandes de l'expression multiplicative. L'enseignante lui fait effacer et écrire 4 à la place de $5c$, à ce que la classe répond « *mais c'est ce qu'elle avait mis!* », et Anaïs acquiesce. En conséquence, la distinction de termes semble concerner pour les élèves uniquement la valeur numérique de quantités, de sorte que mettre 4 dans le calcul est considéré équivalent à mettre $4c$. La seule possibilité pour Anaïs de donner une expression multiplicative symbolique alternative était, selon notre interprétation, d'en proposer une contenant une autre valeur numérique. Elle propose donc $5c \times 5c$ ou lieu de $5c \times 4c$.

Nous constatons que l'écriture de l'expression multiplicative symbolique numérique ne se traduit pas en une prise de conscience du rapport entre grandeurs sous-jacent. La symétrie des opérandes dans l'écriture n'entraîne aucune contradiction, bien que la signification de ceux-ci en tant que grandeur ne soit pas encore accessible aux élèves. Le contrat didactique avec l'autre enseignant de la classe, qui n'admet pas ce type d'écriture, semble permettre d'éviter telles difficultés. En revanche, l'écriture de l'unité symbolique de la grandeur discrète des cubes a forcé une distinction des rôles des opérandes, en termes de grandeurs, et a donc déstabilisé Anaïs. La rencontre qui était censée se produire par la médiation de l'artefact *grille fois-partie-tout* est dans une certaine mesure précipitée.

Un élève signale, à propos des écritures symboliques au tableau, « *elle a écrit pareil* » (il voit vraisemblablement $5c \times 4$ et $4 \times 5c$ sur le tableau), ce qui est confirmé par d'autres élèves de la classe qui dissent « *Ah oui, elle a écrit pareil* ». L'enseignante confirme et essaie de faire remarquer aux élèves la discordance de l'expression multiplicative $5c \times 4$ avec la quantité de boîtes dans la *grille de résolution* relative à la ligne de boîtes de 4 cubes. L'enseignante se sert des gestes déictiques sur le matériel aimanté et du *geste d'itération en ligne*. Le *geste d'itération en ligne* pointe le nombre fois où la quantité de cubes se trouve dans la *grille de résolution*, soit cinq, ce qui ne coïncide pas avec le nombre 4 dans l'expression symbolique écrite par Anaïs. Quand l'enseignante demande le calcul correct l'élève qui répond donne une réponse qui n'a pas la forme attendue, il dit : « 5 *boîtes par* 4 » (probablement en référence à 5 boîtes de 4 cubes). Nous considérons que la réponse met en évidence la structure de la ligne de boîtes (les objets physiques qui la constituent), mais ne le conduit pas, en revanche, à repérer la relation multiplicative entre grandeurs qui se cache derrière. En effet, l'élève ne se place pas au niveau de la grandeur discrète quantité de cubes pour exprimer la relation en question. Il évoque deux grandeurs de la situation qui ne sont pas en relation multiplicative : 5 boîtes et 4 cubes, selon notre interprétation. Il peut avoir des difficultés pour saisir la signification mathématique de grandeur (4 cubes) évoquée par les boîtes en tant qu'objet physique. L'enseignante ignore l'élève afin de conduire autrement la recherche collective.

L'enseignante efface tous les calculs écrits par Anaïs. La concentration des élèves commence à diminuer (plus de bruit, moins attention au tableau). L'enseignante cherche encore à produire l'expression multiplicative $4c \times 5$ pour la ligne de boîtes de 4, tout en posant des questions précises aux élèves. Nous présentons ci-dessous un extrait de ces interventions.

> P – *Ici c'est combien de cubes qu'on a itéré combien de fois? Là ici, avec moi, c'est combien de cubes itérés, combien de fois? Là, ici, avec moi* [Geste déictique sur la grille] *Rackel?*
> E – *quatre cubes*
> P – *quatre cubes* [Geste déictique sur chaque cube d'une boîte de 4. L'enseignante écrit ensuite « $4c\times$ » sur le tableau] *qui ont été multipliés combien de fois? Qui ont été itérées* [Geste iconique d'itérer] *combien de fois? Jean*
> Jean – *Cinq boîtes*
> P – *Cinq fois* [L'enseignante ajoute « $5 = 20$ » à l'expression précédente pour arriver à écrire « $4c \times 5 = 20$ »]
> C – *cinq fois, cinq boîtes* [les élèves le dissent tout en murmurant]

L'enseignante renforce les notions introduites pour faire référence à la relation multiplicative : la partie, le nombre de fois et le tout, en même temps qu'elle les utilise pour les coordonner avec l'écriture des expressions symboliques de la relation multiplicative. En particulier, l'enseignante indique avec un geste déictique les cubes dans la boîte de 4 cubes, représentée avec le matériel aimanté, pour évoquer la signification mathématique de quantité de cubes. En posant la question sur le multiplicateur, le nombre de fois, l'enseignante évoque l'action incarnée d'itération au moyen du *geste iconique d'itérer*. Le geste sert à faire ressortir l'expérience manipulatoire avec l'artefact en termes d'action. Bien que l'enseignante ait formulé la question sur le multiplicateur en termes de nombre de fois, l'élève répond en termes de nombre de boîtes. Il s'agit du même ordre de difficultés que l'élève interrogé précédemment. Le décalage est remarqué par plusieurs élèves de la classe, qui murmurent « *cinq fois, cinq boîtes* », mais pas par l'enseignante.

L'enseignante cherche ensuite à écrire le calcul correspondant à la ligne de boîtes de 5 cubes. L'enseignante récapitule en posant des questions aux élèves pour retravailler le vocabulaire introduit (« partie », « quantité itérée », « tout » et « nombre de fois »). Dans un premier temps, les élèves interrogé·e·s donnent les réponses attendues. Un élève prend conscience de la relation multiplicative entre les grandeurs associées à la ligne de boîtes de 5 et dit : « *cinq cubes répétés quatre fois* ». Suite à cette intervention, l'enseignante se voit confrontée encore à la formulation en termes de boîtes de la part des élèves : une élève dit qu'il s'agit du « *nombre de boîtes* » au lieu du nombre de fois. L'enseignante répond « *oui* » en faisant un geste de négation avec la tête. L'enseignante exprime à travers cette discordance entre geste et parole que la réponse de l'élève n'est pas erronée, mais qu'elle n'est pas attendue. Afin d'essayer de donner du sens à la réponse de l'élève, l'enseignante réinterprète le calcul et dit : « *D'accord. Alors, ça c'est le nombre de cubes par une boîte* [geste déictique sur $5c$] *et ça c'est le nombre de boîtes* [Geste déictique sur 4], *c'est-à-dire le nombre de fois qu'on additionne la quantité.* ». Ainsi, l'enseignante fait appel à un autre cadre d'interprétation, en référence au produit d'une quantité extensive (le nombre de cubes par boîtes) par une quantité intensive (le nombre de boîtes). Nous considérons que la réponse de l'enseignante s'écarte des contradictions qui sont impliquées dans les réponses des élèves en termes de boîtes par rapport à la relation multiplicative.

Épisode 13 : Présentation de la *grille partie-fois-tout*

L'enseignante introduit la grille partie-fois-tout juste après l'épisode précédent. Éloïse du groupe G2 se porte volontaire pour passer au tableau, même si l'enseignante avait prévu de remplir la première grille au tableau seule. Il s'agit du troisième signe-artefact que l'enseignante entendait de faire. L'enseignante demande à l'élève la quantité qui a été itérée. L'élève ne sait pas : le vocabulaire ne lui est pas encore accessible. L'enseignante a recours à des ressources de natures diverses pour aider l'élève à reconnaître les grandeurs qui constituent la relation multiplicative en question, par la médiation de l'artefact. Nous retranscrivons ci-dessous l'extrait du dialogue de l'enseignante avec l'élève.

> P – *Alors, ici je te rappelle* [geste déictique sur la case de la partie] *c'est la quantité. Quelle quantité on a, quelle quantité va être répété, quelle quantité on itère ?*
> Éloïse – *Ehh, je ne sais pas*
> P – *Alors, ici on met,* [Geste déictique sur la case de la partie] *ici, on met quelle est la la quantité qui va être répétée, additionnée, itérée* [Geste d'itération en ligne produit de façon horizontale, voir figure 8.28], *on la représente dans ce coin-là* [Geste déictique sur la case de la partie], *qu'on additionne, qu'on répète* [Geste iconique d'itérer]
> Éloïse – *Les cubes*
> P – *C'est une boîte de . . .*
> Éloïse – *Quatre cubes*
> P – *quatre cubes, très bien. Ici,* [Geste déictique sur le cercle] *on marque le nombre de fois, on va l'additionner le nombre de fois on va itérer cette quantité, combien de fois on le fait ?*
> Éloïse – *Cinq fois*
> P – *Bravo ! cinq fois*

La production du *geste iconique d'itérer* et du *geste d'itération en ligne* (produit horizontalement) permet d'évoquer l'action d'itération de deux façons différentes. Le *geste iconique d'itérer* est coordonné avec la phrase « *qu'on additionne, qu'on répète* ». L'enseignante fait appel à travers le geste à une situation dans laquelle un sujet indeterminé, désigné par le mot « *on* » exécute l'action d'*additionner* et de *répéter*. Nous considérons que le geste permet de contextualiser, par le biais de l'action incarnée, l'apparition de la quantité.

Nous présentons dans la figure 8.28 une capture d'écran du *geste d'itération en ligne produit par l'enseignante.*

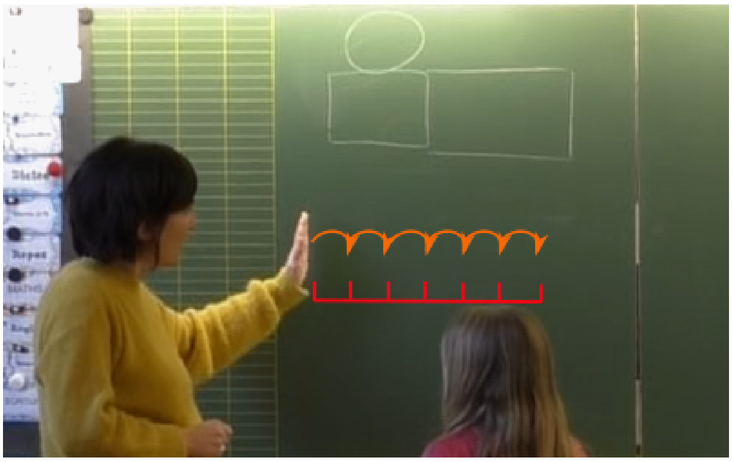


Figure 8.28 – Capture d'écran lors de la production du *geste d'itération en ligne*. L'enseignante exécute le geste sur une ligne imaginaire horizontale. Nous représentons avec des flèches orange les petits coups exécutés. Nous représentons avec des lignes rouges la ligne horizontale imaginaire tracée et les délimitations de segments que les petits coups du geste permettent d'évoquer.

Le *geste d'itération en ligne* permet à l'enseignante de faire référence à la quantité qui joue le rôle de partie dans la relation multiplicative. Le geste a cette fois été produit horizontalement, comme il est possible de constater dans la figure 8.28. Le geste est coordonné avec la phrase « *la quantité qui va être répétée, additionnée, itérée* », ce qui suggère que le geste fait référence à la partie.

Contrairement aux autres exécutions du geste, la main est tendue. L'enseignante place sa main de façon orthogonale à la ligne horizontale imaginaire que le geste dessine. Les mains semblent incarner des bornes qui servent à délimiter ou couper la ligne. Le geste suit d'ailleurs un mouvement similaire à l'action de couper des légumes sur une table de cuisine (une image à laquelle nous accédons par les signifiants de notre culture). Ce qui est itéré, au sens du geste, ce sont les segments délimités. C'est ainsi que, si la ligne tracée représente métaphoriquement le tout dans la relation multiplicative, les segments des lignes, délimités par les petits coups des mains orthogonales à la ligne, correspondent à la partie. Dans l'élaboration verticale du *geste d'itération en ligne*, les petits coups indiquent les cases de la *grille de résolution*, c'est alors la structure visuelle de l'artefact qui évoque des relations spatiales géométriques entre cases qui peuvent participer à la signification de la relation multiplicative. Étant donné la situation de manipulation qui est modélisée et le traçage d'une ligne horizontale, nous faisons l'hypothèse que l'enseignante a cherché à évoquer la construction de lignes avec l'artefact *boîtes et cubes*. Dans ce cas, il nous semble que la ligne imaginaire peut évoquer la ligne de boîtes et les segments, les boîtes. Le *geste d'itération en ligne* ferait, en conséquence, référence à l'itération de boîtes. Enfin, nous considérons que le changement obligatoire de la direction de la ligne imaginaire tracée par le geste pour pouvoir évoquer la construction de la ligne de boîtes met en évidence une certaine incompatibilité de l'artefact *grille fois-partie-tout* avec l'artefact *boîtes et cubes*.

Grâce à la collaboration entre Éloïse et l'enseignante, Éloïse remplit correctement la *grille fois-partie-tout* avec le matériel aimanté. L'enseignante fait ensuite une autre grille partie-fois-tout pour rendre encore compte de la relation multiplicative correspondant à la ligne de boîtes de 4 cubes, remplie cette fois avec des nombres (voir figure 8.29). Un autre élève passe au tableau pour faire les *grilles partie-fois-tout* associées à la ligne de boîtes de 5 cubes. L'élève complète, sans difficultés, une grille avec le matériel aimanté et l'autre remplie avec des nombres. C'est ainsi que quatre signes graphiques qui évoquent chaque relation multiplicative cohabitent simultanément sur le tableau, comme traces du travail conjoint de l'enseignante et les élèves : six signes-artefacts correspondant à la *grille de résolution* et à la *grille fois-partie-tout*, et deux signes correspondant à l'écriture symbolique de l'expression multiplicative avec l'unité de grandeur c (voir figure 8.29).

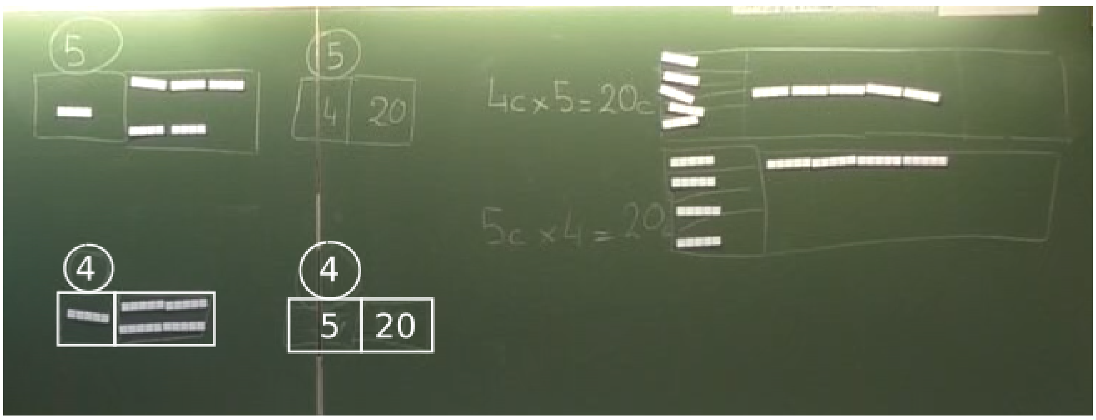


Figure 8.29 – Signes graphiques évoquant les relations multiplicatives associées à la construction de boîtes de 4 et de boîtes de 5. Nous avons marqué les signes produits par le deuxième élève qui est passé au tableau.

L'enseignante a organisé les signes graphiques sur le tableau en rangées et colonnes. Deux rangées ont été utilisées pour y mettre les signes évoquant les relations multiplicatives par ligne ; et quatre colonnes pour faire utilisation des types différents de signes pour les représenter. La disposition des signes graphiques sur le tableau permet de constater l'existence d'un résultat (le tout) commun aux deux relations multiplicatives, mais aussi les différences au niveau d'autres termes (partie et tout) dans ces relations.

L'enseignante intervient une dernière fois afin de renforcer le vocabulaire introduit relatif aux termes de la relation multiplicative. À ce moment les élèves sont déconcentré·e·s (davantage de bruit, moins d'attention au tableau).

> P – *Voilà notre travail aujourd'hui, c'est bien ça. Eh, donc, le quatre, qu'est-ce que c'est ici, le quatre? Rackel*
> Rackel – *Le nombre de cubes*
> P – *Oui, c'est la partie, qu'on va répéter, la quantité. Ici c'est quoi ça? Il y a que Rosa qui sait?, Antonio*
> Antonio – *Le nombre de boîtes*
> P – *Le nombre de fois. Que ça sera pas toujours des boîtes, on l'en va dire le nombre de fois, parce qu'on va pas l'utiliser que pour des boîtes. Partie* [Geste déictique], *nombre de fois,* [Geste déictique] *et? Rosa?*
> Rosa – *Le nombre total*
> P – *Le total, le tout. Extraordinaire.*

Nous observons encore chez les élèves une résistance à utiliser le vocabulaire introduit. Tout se passe comme si les élèves ne tenaient pas compte de l'utilité que les expressions « partie », « nombre de fois » et « tout » peuvent avoir pour faire référence à la relation multiplicative. Bien entendu, les possibilités d'intégrer ces termes et les rendre un outil pour faire apparaître la relation multiplicative sont liées à l'approfondissement du processus d'objectivation. Bien que les difficultés puissent être en partie liées au fait qu'il s'agit d'une séance d'introduction, nous considérons qu'elles témoignent des difficultés de remarquer les grandeurs associées au matériel et de les mettre en relation de manière significative. Le fait que les ruptures majeures se trouvent autour du terme « nombre de fois » (*cf.* épisodes 12 et 13), qui est l'opérande (nombre) dont la signification exprime le rapport entre le tout et la partie (grandeurs), ne nous semble pas être un fait anodin. D'autant plus que nous constatons que les élèves utilisent avec aisance le mot « fois » dans l'énonciation orale d'expressions multiplicatives symboliques purement numériques. Nous faisons l'hypothèse que les élèves mobilisent dans ce contexte le sens courant du mot, qui permet de relier les mots numériques de l'opération de multiplication. Un groupe d'élèves, qui reconnaît l'opération de multiplication dans la situation, a du mal à remettre en cause leur rapport avec la situation, compte tenu de la restructuration de la pensée qui s'impose. Ces élèves qui évoquent le nombre de boîtes semblent s'approcher aux grandeurs de façon isolée, par exemple 4 boîtes et 5 cubes, sans tenir en compte leur relation multiplicative. Il nous semble que cette tension ne fait que révéler les contradictions caractéristiques d'un processus d'objectivation en plein développement : l'étrangeté de l'opération de multiplication en termes de rapport entre grandeurs.

8.2.4 Conclusions

L'activité en classe est configurée comme une instance collective d'élaboration de significations depuis la présentation de la tâche. Le sens apparaît ici lié au monde matériel des objets qui composent l'artefact *boîtes et cubes* grâce au travail conjoint de l'enseignante et des élèves. En particulier, l'enseignante rend apparentes des significations de grandeur qui enrichissent la rencontre avec des formes de réflexion et d'action sur le rapport entre grandeurs. Elle le fait par la coordination sensuelle de gestes, de la parole, des actions et de l'artefact. Dans ce sens, nous avons souligné la richesse du *geste de la boîte en tant qu'unité*.

Les deux groupes d'élèves ont résolu la tâche par manipulation et ont identifié les calculs correspondants, c'est-à-dire que les élèves ont objectivé l'opération de multiplication par la médiation de l'expression multiplicative symbolique numérique. La construction des lignes de boîtes a été organisée de manière simultanée (groupe G1) et de manière séquentielle (groupe G2). Les élèves ont mis en place une action épistémique qui fait apparaître des concepts géométriques fondamentaux, et qui contrôlent le recours aux ressources incarnées pour résoudre la sous-tâche ST1. L'enseignante participe également à la mise en évidence de ces outils lors de la présentation de la tâche, notamment par la production de gestes des mains comme droites ou des gestes qui dessinent des lignes imaginaires. L'exploitation de ces outils par les élèves, en les adaptant aux besoins de la tâche, nous amène à supposer que ces outils constituent un répertoire collectif résultant du travail conjoint de l'enseignante et des élèves. Nous constatons également que l'action incarnée multiplicative sur l'artefact menant à la résolution de la tâche peut être bloquée, en cas de difficultés à reconnaître la structure spatiale géométrique de chaque ligne. Les difficultés de Corentin du groupe G1 que nous avons observées et des élèves du groupe que nous n'avons pas enregistré en témoignent. Elles soulèvent la question de savoir comment accompagner les élèves dans le processus de *domestication des mains* qui est impliqué.

L'enseignante orchestre la discussion en classe aboutissent à l'élaboration de différents significations qui soutiennent le processus d'objectivation de l'opération de multiplication en termes de relation entre grandeurs. Nous constatons que la médiation par les formes symboliques qui incluent l'unité de grandeur mettent en évidence l'étrangeté que provoque l'objet-savoir qui apparaît dans la classe. L'introduction du terme « nombre de fois » pour faire référence à la raison du rapport entre grandeurs a des effets similaires. L'enseignante s'efforce à contribuer à la création de sens pour soutenir le processus d'objectivation. Elle prend appui sur des ressources sémiotique multimodales de nature diverse pour paraphraser et reformuler les réponses des élèves. Les gestes déictiques permettent d'indiquer les grandeurs et leurs relations sur les cases des artefacts ou les expressions multiplicatives symboliques. Elle prend appui sur le vocabulaire cible. L'enseignante peut aussi à travers des gestes déictiques poser des questions en relation au vocabulaire visé, pour rendre apparent les concepts qui sont impliqués. C'est un va-et-vient qui contribue à l'évolution des signes-artefacts vers l'élaboration de significations mathématiques. Le *geste d'itération en ligne* joue à cet égard le rôle de signes pivot.

Les gestes de l'enseignante, en coordination avec d'autres ressources sémiotiques, ont une place remarquable pour signifier les termes qui constituent la relation multiplicative. Le sens du terme « tout » est exprimé à travers un geste métaphorique qui évoque visuellement la limite d'un espace de rassemblement d'objets (*geste en tout*). La « partie » et le « nombre de fois » sont évoqués par les gestes d'itération en ligne qui les présentent en lien avec l'action incarnée d'itération. L'action d'itération se manifeste fondamentalement au moyen de deux gestes : le *geste d'itération en ligne* et le geste iconique d'itération. Le *geste d'itération en ligne* se distingue du geste iconique d'itération par la fonction de l'action incarnée impliquée : la fonction de l'action incarnée dans le premier est de donner, par intermédiaire de l'artefact *grille de résolution*, du sens à la relation multiplicative des termes (fonction multiplicative), tandis que le second fait appel à un contexte ordinaire (fonction épistémique non multiplicative). L'enseignante semble ainsi avoir une position différenciée face à des actions épistémiques non multiplicatives et des actions multiplicatives. Une domestication des mains peut être entrevue dans les ressources sémiotiques multimodales mobilisées par l'enseignante, dans la mesure où elles montrent une certaine manière de percevoir le rapport entre grandeurs. Cela nous amène aux hypothèses de Radford qui, à l'instar de Husserl (1931), présente la perception comme un acte intentionnel, de sorte que l'appréhension d'un objet conceptuel et la façon d'orienter la perception vers lui sont les deux faces d'une même pièce.

8.3 Observables de la séance S_4

Nous présentons dans la suite l'analyse du segment saillant que nous avons repéré dans la séance S_4. La séance S_4 est dénommée *Commutativité avec des lignes*. Nous appelons l'observable *Lignes parallèles, pentes égales*. Nous l'évoquons dans la séance S_2 (*cf.* épisode 1, page 218). La séance S_4 a eu lieu deux semaines avant la séance S_2 et une semaine après la séance S_1. La séance S_4 porte sur la multiplication et la propriété commutative. Elle implique l'artefact *boîtes et cubes* et l'artefact *grille fois-partie-tout*.

8.3.1 Lignes parallèles, pentes égales

Dans la présentation de la tâche, l'enseignante met l'accent sur les contrôles géométriques à mettre en place pour la construction de lignes de boîtes et leur comparaison du point de vue de la longueur. Elle colle le quadrillage sur le tableau et dispose les boîtes et les cubes sur son bureau. Dans la première intervention, l'enseignante produit des gestes de la main comme droite, une catégorie de geste que nous avons introduit dans la S_1 (*cf.* épisode 1). Elle coordonne son discours avec des gestes comme suit :

> *Oui, pour vérifier qu'elles soient bien de la même longueur, c'est-à-dire bien les aligner, qu'elles partent, qu'elles partent* *du même endroit* [Geste de la main comme droite, décrit ci-dessous] *et qu'il n'y ait pas une qui parte un petit* *peu comme ça* [Geste de la main comme droite, voir figure 8.30] *et l'autre un petit peu* *comme ça* [Geste de la main comme droite, voir figure 8.30], *sinon c'est difficile de savoir si elles ont la même longueur.*

Nous présentons dans la figure 8.30 des images des trois gestes produits, dans l'ordre d'apparition.

Figure 8.30 – L'enseignante produit trois fois le *geste de la main comme droite*. L'ordre des images de gauche à droite est accorde avec leur apparition.

Les gestes des mains comme droite sont dans les trois cas des gestes statiques. Il nous semble que dans tous les cas la tranche de la main incarne des lignes droites. Le premier geste de l'enseignante nous semble reproduire une aide procédurale que l'enseignante avait fournie lors de la présentation de la tâche dans la séance S_1 (*cf.* épisode 1). Dans la séance S_1, l'enseignante avait produit le geste en déplaçant la main vers le quadrillage sur son bureau. Nous avons interprété dans ce cas que la main de l'enseignante incarnait une droite qui servait de repère spatial pour placer les origines des lignes de boîtes dans le quadrillage. À cette occasion, l'enseignante évoque également le repère spatial pour placer les lignes de boîtes. Elle le fait par la coordination sensuelle du geste et de la parole, lorsqu'elle dit « *du même endroit* ». Cependant, cette fois il nous semble qu'il s'agit plutôt d'un rappel. En effet, elle produit le geste très rapidement, à la manière d'un geste de battement, sans se focaliser sur cela.

Il nous semble que l'enseignante fait allusion à travers des deux gestes produits en dernier à la pente des lignes. Elle l'indique par la co-expressivité de l'utilisation du pronom déictiques « *ça* » et de l'inclinaison de la main en ces deux occasions (voir figure 8.30). L'enchaînement de gestes semble impliquer une indication sur le parallélisme de lignes de boîtes. En effet, l'enseignante produit deux fois le geste pour évoquer d'abord une ligne à pente négative par rapport à l'horizon et ensuite une ligne à pente positive par rapport à l'horizon (du point de vue de la classe). Nous constatons que l'enseignante a recours à trois ressources sémiotiques pour souligner la disparité des pentes. Premièrement, nous observons que l'enseignante modifie, ce qui n'est pas le cas du premier geste, sa posture corporelle en fonction de l'inclination de la main. Deuxièmement, chaque fois qu'elle fait les gestes, elle émet des coups qui lui permettent maintenir la position du geste pendant quelques instants. Troisièmement, l'intonation de la voix de l'enseignante met l'accent sur le mot déictique « *ça* », qui nous semble souligner chaque fois l'introduction d'éléments distinctif dans le discours.

De manière globale, l'enseignante nous semble essayer d'insister sur les contrôles géométriques qui doivent être mis en place pour comparer la longueur des lignes dans les boîtes, en faisant remarquer aux élèves les conséquences sur la comparaison des longueurs des lignes qui pourraient être causées par leur négligence. Elle évoque d'abord ces contrôles géométriques : l'alignement de boîtes et le placement des lignes dans un « *même endroit* », c'est-a-dire sur une même droite d'origine. Elle fait noter les élèves que, si ces conditions ne sont pas respectées, les lignes de boîtes produites peuvent ne pas être parallèles – sans le dire avec des mots bien sûr. Elle conclut en disant que si les lignes de boîtes produites ne sont pas parallèles, la comparaison de longueurs se tourne difficile.

8.4 Analyse *a priori* de la tâche T_2 : Partage de lignes de boîtes

Nous présentons dans cette partie une analyse *a priori* Φ détaillée de la tâche T_2 pour souligner en conclusions 8.4.5 sur les enjeux liés à nos questions.

8.4.1 Contexte et description de la tâche

La séance destinée à la résolution de cette tâche constitue la troisième séance (du point de vue chronologique) de résolution de problèmes avec l'artefact *boîtes et cubes* du total de dix que nous avons observées (voir section 6.3). La séance a pour but de faire travailler l'idée que la *partie* sur la grille partie-fois-tout peut être vue comme l'inconnue de la division partage. L'enseignante prévoit de renforcer la modélisation des situations impliquant les actions incarnées de *distribution* ou de *partage* par l'opération de division partage (c'est pourquoi nous appelons la tâche « Partage de lignes de boîtes »). La tâche vise également à redécouvrir la relation inverse entre la multiplication et la division partage. L'enseignante prévoit d'utiliser le signe « : » pour l'expression symbolique de la division, tout en incluant l'unité de grandeur dans son écriture.

La tâche porte sur la résolution des problèmes relatifs à la construction de lignes avec des boîtes de cubes. Les élèves sont regroupé·e·s par quatre ou cinq. L'énoncé est le suivant :

Pour commencer, vous construisez une ligne de 7 boîtes de 10 cubes $+ 2$ cubes isolés.

1. *Vous devez construire une ligne avec la même quantité de cubes (même longueur) en utilisant seulement 6 boîtes, combien de cubes contiendra chaque boîte ?*
   (a) *Complétez la* grille fois-partie-tout *en dessinant les boîtes (grande grille)*
   (b) *Complétez la* grille fois-partie-tout *avec des nombres (petite grille)*
   (c) *Écrivez le calcul correspondant (dans le rectangle)*
2. *Si maintenant vous partagez cette ligne (question 1) en 3 lignes de la même longueur, combien de cubes contiendra chaque ligne ?*
   (a) *Complétez la* grille fois-partie-tout *en dessinant les boîtes (grande grille)*
   (b) *Complétez la* grille fois-partie-tout *avec des nombres (petite grille)*
   (c) *Écrivez le calcul correspondant (dans le rectangle)*
3. *Entoure la bonne réponse. Dans une* grille fois-partie-tout *:*
   (a) *Pour répondre à la question 1, j'ai cherché : la partie le nombre de fois le tout*
   (b) *Pour répondre à la question 2, j'ai cherché : la partie le nombre de fois le tout*

Le support matériel pour la résolution de la tâche, donné à chaque groupe d'élèves, est constitué par :

— 2 gobelet avec 72 cubes chacun ;

— 10 boîtes de 10 cubes ;

— 6 boîtes de 12 cubes ;

— et la feuille de réponses.

Les 6 boîtes de 12 cubes sont à donner seulement une fois que les élèves ont répondu à la première question. Quant à la feuille de réponses, elle contient pour les deux premières questions : une grande grille qui doit contenir les dessins des lignes de boîtes (item a des questions 1 et 2) ; une grille plus petite qui doit être complétée avec des nombres (item b des questions 1 et 2) ; et un emplacement rectangulaire pour y écrire le calcul correspondant (item c des questions 1 et 2) (voir annexes).

Indications rapides sur la résolution de la tâche (nous détaillons les enjeux plus loin) : la tâche peut être résolue au moyen de deux divisions partage. Pour la première question, notons d'abord que 6 boîtes de 10 peuvent être partagées en 6 groupes, il reste 12 cubes. On peut alors ajouter 2 cubes à chaque groupe de 10 cubes. La relation multiplicative sous-jacente est ainsi constitué par la grandeur 72 cubes (le tout), le nombre 6 (le nombre de fois), et la grandeur 12 cubes (la partie). La grande grille (question a) et la petite grille (question b) doivent être remplies avec cette information. Le calcul (question c) est $12 \times 6 = 72$ (ou $12c \times 6 = 72c$). Pour la deuxième question, il suffit de remarquer que chacune des trois lignes doit contenir 2 boîtes de $12c$, ce qui donne 24 cubes par ligne. Dans ce cas, 72 cubes est le tout, 3 est le nombre de fois et 24 cubes est la partie. Dans tous les deux cas l'inconnue est la partie, ce qui permet de répondre la dernière question.

8.4.2 Découpage en sous-tâches

Nous découpons la résolution de la tâche T_2 selon les trois items de l'énoncé. Le premier item de l'énoncé nous le décortiquons en sous-tâches, à savoir :

— la sous-tâche ST1, déterminer la taille de boîtes qu'il faut utiliser pour construire une ligne avec 6 boîtes qui ait la même quantité de cubes que la ligne de boîtes de 10 et la construire effectivement ;

— la sous-tâche ST1$_a$, compléter la *grille fois-partie-tout* qui représente la situation avec des dessins des lignes ;

— la sous-tâche ST1$_b$, compléter la *grille fois-partie-tout* avec les quantités ;

— et la sous-tâche ST1$_c$, écrire le calcul qui correspond à la grille.

De façon analogue, la résolution du deuxième item comprend la résolution de quatre sous-tâches :

— la sous-tâche ST2, déterminer la quantité de cubes dans chaque ligne qui résulte de partager la ligne en 3 ;

— la sous-tâche ST2$_a$, compléter la *grille fois-partie-tout* qui représente la situation avec des dessins des lignes ;

— la sous-tâche ST2$_b$, compléter la *grille fois-partie-tout* avec les quantités qui correspondent ;

— et la sous-tâche ST2$_c$, écrire le calcul qui correspond à la grille.

Finalement, nous considérons la sous-tâche ST3 qui consiste à déterminer quelle est la place de l'inconnue dans la *grille fois-partie-tout* pour les deux sous-tâches précédentes (ce qui répond au dernier item de l'énoncé).

Notons que les deux premières sous-tâches ST1 et ST2 sont relatives à l'utilisation de l'artefact *boîtes et cubes*. Les sous-tâches de sous-indices a, b et c sont relatives à l'utilisation de l'artefact *grille fois-partie-tout* et à l'expression d'un calcul, à propos des situations proposées dans ces deux premières sous-tâches. Nous ferons référence à l'ensemble des sous-tâches de sous-indice a, b et c relatives aux sous-tâches ST1 et ST2 comme ST1$_{abc}$ (ST1$_a$, ST1$_b$ et ST1$_c$) et ST2$_{abc}$ (ST2$_a$, ST2$_b$ et ST2$_c$).

8.4.3 Forme de l'énoncé et conditions de la tâche

Les élèves doivent d'abord remplir les boîtes de 10. Le but principal est le même que pour la tâche T$_1$: mettre en œuvre le schème de remplissage de boîtes et favoriser la résolution par manipulation. L'enseignante prévoit également de faire que les élèves construisent une ligne avec sept boîtes de 10 cubes et 2 cubes avant que les groupes d'élèves commencent à résoudre la tâche. Nous remarquons que la disposition du matériel de manipulation est différente pour les sous-tâches ST1 et ST2 (les boîtes de 6 cubes sont données une fois la sous-tâche ST1 résolue), ce qui peut avoir des effets sur les résolutions des élèves, comme nous le verrons dans l'analyse de l'activité attendue pour la résolution de la sous-tache (voir paragraphe 8.4.4).

Notons que les sous-tâches ST1 et ST2 sont formulées de façon fermée : il s'agit de déterminer la taille des boîtes ou la quantité de cubes qui composent une ligne de boîtes. Les énoncés des sous-tâches ST1 et ST2 décrivent des situations concrètes de construction de lignes, avec des questions portant sur différentes relations : respectivement, la construction d'une ligne à partir des boîtes et la construction de plusieurs lignes de boîtes à partir d'une ligne. Nous revenons plus loin sur les conséquences que ce fait peut avoir sur l'activité attendue pour la résolution des sous-tâches. L'équivalence des lignes est pour la sous-tâche ST1 posée en termes de quantité de cubes, et non en termes de longueur des lignes, comme c'est les cas pour la tâche T_1 Lignes de boîtes de la même longueur (voir section 8.1). La sous-tâche ST1 est ainsi comprise dans le cadre de grandeurs discrètes. En revanche, la question de la sous-tâche ST2 est posée en termes de longueur de lignes. Enfin, l'action de partage n'est pas évoquée par l'énoncé de la sous-tâche ST1, bien qu'il s'agisse d'un problème de division partage.

Les sous-tâches avec le sous-indice a, b et c comportent des indications directes : compléter la grille, déterminer un calcul. Nous remarquons le fait que « le calcul qui correspond à la grille » est au singulier, alors que trois calculs correspondent à la grille une fois complétée. Ce choix répond au fait que l'expression des divisions à partir de la grille n'a pas encore été institutionnalisée, de sorte que la réponse attendue est celle basée sur l'opération de multiplication. Finalement, la sous-tâche ST3 est aussi posée de façon fermée. Le fait que la question sur l'inconnue soit posée par sous-tâche permet que la réponse peut varier, bien que ce ne soit pas le cas.

8.4.4 L'activité attendue

L'activité attendue de la sous-tâche ST1

Sous-activités de reconnaissance La résolution de la sous-tâche entraîne d'abord le développement des sous-activités de reconnaissance des grandeurs associées à la ligne de boîtes à construire et la relation multiplicative qui les relie (pas nécessairement de façon explicite). La grandeur 72 cubes doit être reconnue comme la quantité de cubes que doit contenir la ligne de boîtes. Les élèves doivent aussi reconnaître la quantité de cubes dans la boîte comme l'inconnue et 6 comme le nombre de boîtes à utiliser.

Sous-activités de traitement Nous distinguons deux sous-activités de traitement possibles, selon le caractère d'inconnue (ou pas) de la quantité de cubes dans la boîte de la ligne de boîtes : une résolution *directe*, la taille de la boîte en question restant inconnue lors de la résolution, et une résolution *par essai et erreur*, qui consiste à essayer plusieurs boîtes ou groupes de cubes variés. Compte tenu du matériel de manipulation à disposition (la ligne de 7 boîtes de 10 cubes et deux cubes, et les 72 cubes), nous considérons qu'une résolution directe par manipulation peut se faire essentiellement de deux façons. Une possibilité consiste à distribuer d'abord les boîtes de 10 en 6 groupes (une boîte par groupe) et ensuite les cubes qui en restent (2 cubes par groupe). Autrement dit, on commence par distribuer les unités d'ordre le plus grand (10 cubes) pour terminer avec les unités simples (un cube). L'autre possibilité est de distribuer les 72 cubes, tout en concevant la quantité en termes d'unités simples. Au moyen de l'organisation du tout, l'action incarnée de distribuer matérialise l'opération de renversement de la relation multiplicative qui permet de trouver la partie. L'action incarnée a dans ce sens une fonction multiplicative. La résolution directe par calcul n'est pas attendue dans ce contexte, vu que $12 \times 6 = 72$ est un calcul qui n'est pas dans les tables de multiplication et que la technique opératoire de la division n'a pas encore été acquise par les élèves.

L'activité attendue sans distribution consiste à produire des relations multiplicatives avec des tailles de boîtes arbitraire par essai et erreur, soit au moyen du calcul, soit au moyen du matériel. Ainsi, la relation multiplicative est renversée suite à l'évocation des relations multiplicatives ayant 6 par nombre de fois. Étant donné l'absence de boîtes d'autre taille que 10 pour la résolution de cette sous-tâche, une résolution par essai et erreur par manipulation est moins pratique.

Sous-activités d'organisation Dans le cas d'une résolution directe par manipulation, le matériel doit être organisé, d'abord, par une assignation des emplacements physiques pour les 6 groupes qui vont être formés. Lors de l'exécution de l'action, les boîtes et les cubes qui n'ont pas encore été distribués doivent bien être distingués de ceux qui l'ont déjà été, par exemple en les plaçant dans un endroit différent. L'activité par essai et erreur peut s'organiser dans des phases successives de comparaisons des produits obtenus avec la quantité 72 cubes.

L'activité attendue de la sous-tâche ST2

Sous-activités de reconnaissance Les situations décrites par les sous-tâches ST1 et ST2 correspondent à l'opération de division partage. Cependant, la relation multiplicative y apparaît différemment. Dans la sous-tâche ST1, rappelons-nous, la relation multiplicative sous-jacente est $12c \times 6 = 72c$. La sous-tâche implique une ligne de boîtes de 72 cubes (le tout), qui est construite à partir de six (nombre de fois) boîtes, dont la taille (la partie) est inconnue. Dans la sous-tâche ST1, la relation multiplicative impliquée est $24c \times 4 = 72c$. La résolution de la sous-tâche concerne en revanche l'obtention, par l'action de partage, de trois (nombre de fois) lignes de boîtes de même longueur, à partir de la ligne de 6 boîtes (le tout), dont la quantité de cubes des lignes résultantes (la partie, également inconnue). L'action qui renverse directement la relation multiplicative est ici prise en charge par l'énoncé. En effet, une fois le partage de lignes effectué, on peut trouver l'inconnue de la relation multiplicative. Il suffit donc de reconnaître la ligne de 6 boîtes de 12 cubes comme point de départ de l'action de partage, au sens quotidien, puis de déterminer la quantité de cubes dans une des lignes résultantes.

Sous-activités de traitement L'activité attendue comprend la mise en place effective du partage. Les élèves doivent partager en 3 lignes les 6 boîtes de 12 cubes qui sont présentes une fois la sous-tâche ST1 résolue. La quantité de cubes par ligne peut être déterminée par comptage ou par calcul (2 fois 12 cubes).

Sous-activités d'organisation Les sous-activités d'organisation attendues pour la résolution de la sous-tâche correspondent, comme pour la sous-tâche ST1, à l'organisation du matériel nécessaire à la mise en œuvre de l'action de distribution : l'attribution des emplacements pour les trois groupes à former et la distinction du matériel déjà distribué de celui qui ne l'est pas.

L'activité attendue de la sous-tâche ST3 et sous-tâches de sous-indices a, b et c

La résolution des sous-tâches ST1a et ST2a nécessitent d'identifier le rôle que jouent les grandeurs dans les relations multiplicatives impliquées, par la médiation de l'artefact *grille fois-partie-tout*.

Les sous-tâches portant le sous-indice a nécessitent de faire correspondre les grandeurs dans la relation multiplicative avec les cases de la grille et les sous-tâches, en dessinant. Les sous-tâches avec le sous-indice b nécessitent la mise en correspondance des valeurs numériques des grandeurs impliquées avec les cases de l'artefact. Notons que le remplissage de la *grille fois-partie-tout* avec des nombres s'avère plus efficace par rapport au dessin des boîtes et 72 cubes. Les sous-tâches avec sous-indice c demandent l'expression d'un calcul. L'écriture du calcul sans unités de grandeur ne nécessite pas nécessairement de distinguer la partie et le nombre de fois. L'ordre des sous-tâches peut néanmoins favoriser l'interprétation en termes de grandeur des nombres dans l'expression du calcul. Résoudre la sous-tâche ST3 revient à identifier la grandeur qui joue le rôle d'inconnue dans les *grilles fois-partie-tout* remplies. Les sous-tâches portant l'indice a nécessitent de relier des objets physiques aux cellules de la grille et aux sous-tâches. Les sous-tâches portant l'indice b nécessitent la mise en correspondance des quantités impliquées avec les cellules de l'artefact. Les sous-tâches portant l'indice c nécessitent l'expression d'un calcul.

Notons que la partie de la relation multiplicative dans la sous-tâche ST1 correspond à une quantité de cubes dans une boîte de 12 cubes. Le tout correspond à 6 fois la quantité de cubes dans une boîte de 12 cubes. En revanche, la partie de la relation multiplicative dans la sous-tâche ST2 correspond à la quantité de cubes dans une ligne de deux boîtes de 12 cubes, soit 24 cubes. La ligne de deux boîtes évoque, du point de vue de la quantité de cubes, les significations mathématiques à la fois de deux groupes de 12 cubes (deux boîtes) et d'un groupe de 24 cubes (l'ensemble de deux boîtes comme ligne). Dans ce cas, la quantité 24 cubes est une unité relative aux unités 12 cubes et 1 cube. Par conséquent, le tout peut être interprété comme la quantité de cubes de trois groupes de deux groupes de 12 cubes, ou comme la quantité de cubes de trois groupes de 24 cubes.

8.4.5 Conclusions

L'analyse de la tâche nous permet d'apprécier différentes formes d'implication de l'action incarnée dans la résolution de problèmes de partage de division, associées à différentes manières de percevoir les relations multiplicatives sous-jacentes. Pour la résolution de la sous-tâche ST1 par manipulation, le tout, qui peut être représenté par des boîtes et des cubes, est réarrangé en fonction de la valeur du nombre de fois, pour obtenir une forme équivalente à celle qui devrait être obtenue en itérant la boîte dont la taille est inconnue. La partie reste ainsi inconnue lors de l'exécution de l'action incarnée de partage. L'action incarnée de partage a une fonction multiplicative dans la mesure où elle devient un outil pour révéler la quantité qui joue le rôle de la partie dans la relation multiplicative. Une résolution par essai et erreur peut également mobiliser une action incarnée qui est physiquement très similaire à cette action incarnée de partage. Cependant, les objets des actions sont différents. Comme nous l'avons souligné, la première cherche à trouver la quantité qui joue le rôle de la partie, qui reste inconnue lors de l'action ; la seconde, à produire des relations multiplicatives, le nombre de fois étant connu (six), avec des quantités arbitraires qui jouent le rôle de la partie. Dans ce dernier cas, nous avons donc affaire à des actions incarnées d'itération successive, dont la concaténation peut être interprétée comme une action incarnée de partage. En conclusion, l'action incarnée de partage fait apparaître la division différemment selon la manière dont les relations multiplicatives sont perçues pendant la manipulation. En particulier, l'action incarnée de partage dans une résolution directe nous semble être en principe liée à une relation dialectique plus profonde entre le sensuel (manipulation de l'artefact) et le conceptuel (concept de division partage), qui soutient le processus que nous avons appelé *domestication des mains* (voir chapitre 3).

Pour la résolution de la sous-tâche ST2, la manipulation n'est pas orientée vers la relation multiplicative entre grandeurs : c'est le sens quotidien de l'action de partage qui sous-tend la résolution. Les sous-tâches ST1 et ST2 révèlent donc des différences cruciales dans l'implication de l'action de partage, bien qu'il s'agisse dans les deux cas de problèmes de division partage. La différence réside dans le degré de conscience des relations multiplicatives que la réalisation de l'action incarnée de partage exige. Ces différences s'avèrent intéressantes du point de vue de notre question concernant la manifestation des actions incarnées dans le processus d'objectivation des opérations de multiplication et de divisions, en termes des fonctions pragmatique et épistémique (voir section 4.3).

L'artefact *grille fois-partie-tout* est utilisé pour la résolution des sous-tâches ST3 et des sous-indices a et b. Les sous-tâches de sous indices a, b fournissent une instance pour l'objectivation de la relation multiplicative, par la médiation de l'artefact symbolique grille fois-partie-tout. La sous-tâche ST3 vise à faire rencontrer les élèves l'opération de division partage en termes de relation multiplicative, par le repérage de l'inconnue : la partie. En conséquence, ces sous-tâches ont le potentiel de nous offrir une perspective privilégiée sur la manière dont les élèves peuvent objectiver l'opération de division partage au sein de l'activité en classe.

8.5 Analyse de l'activité dans la séance S_2 : Partage de lignes de boîtes

Nous présentons dans la suite notre analyse de l'activité en classe dans la séance de résolution la tâche T_2. Nous reconstruisons l'activité lors de la présentation de la tâche, le travail en groupe et la synthèse dans les paragraphes 8.5.1, 8.5.2 et 8.5.3 respectivement. Nous développons dans le paragraphe 8.5.4 des conclusions qui reviennent aux points cruciaux de l'analyse du point de vue globale de la séance. Notre analyse est découpée en 13 épisodes. Nous présentons dans le tableau 8.2 l'organisation d'épisodes dans la reconstruction de l'activité.

Présentation de la tâche
Épisode 1 : Présentation de la tâche T_2
Travail de groupe
Groupe G1
Épisode 2 : Résolution de la sous-tâche ST1 Épisode 3 : Résolution des sous-tâches $ST1_{abc}$ Épisode 4 : Résolution de la sous-tâche ST2 Épisode 5 : Résolution des sous-tâches $ST2_{bc}$
Groupe G2
Épisode 6 : Résolution de la sous-tâche ST1 Épisode 7 : Résolution des sous-tâches $ST1_{abc}$ Épisode 8 : Résolution de la sous-tâche ST2 Épisode 9 : Résolution des sous-tâches $ST2_{abc}$
Synthèse
Épisode 10 : Correction de la sous-tâche ST1 Épisode 11 : Correction des sous-tâches $ST1_{abc}$ Épisode 12 : Correction de la sous-tâche ST2 Épisode 13 : Correction de la sous-tâche ST3

Tableau 8.2 – Tableau de l'organisation des épisodes dans l'activité reconstruite de la séance S_2.

8.5.1 Présentation de la tâche

Épisode 1 : Présentation de la tâche T_2

Après qu'un élève a lu la première question de l'énoncé, l'enseignante pose les questions suivantes : «*Alors… qu'est-ce qu'il faut faire? Qu'est-ce qu'il faut faire au début? Tout au début, avant de commencer répondre aux questions, qu'est-ce qu'on fait?* [13]». Une élève répond : « *aligner sept*

13. Nous soulignons la partie de la formulation qui est cordonnée avec quelque chose que nous remarquons visuellement, décrit entre parenthèses. Pour les gestes, les caractères gras indiquent l'apogée des gestes.

boîtes de dix cubes et deux cubes ». L'enseignante reformule ensuite la réponse de l'élève, tout en produisant le *geste le long de deux lignes*, produit dans l'épisode 1 de la séance S_1 consacrée à la tâche Lignes de boîtes de même longueur (voir paragraphe 8.2.1) : «*d'accord, donc on fait une ligne* [geste le long de deux lignes], *en prenant les sept boîtes de dix cubes plus deux cubes*». Nous présentons dans la figure 8.31 une représentation de la structure visuospatiale du geste.

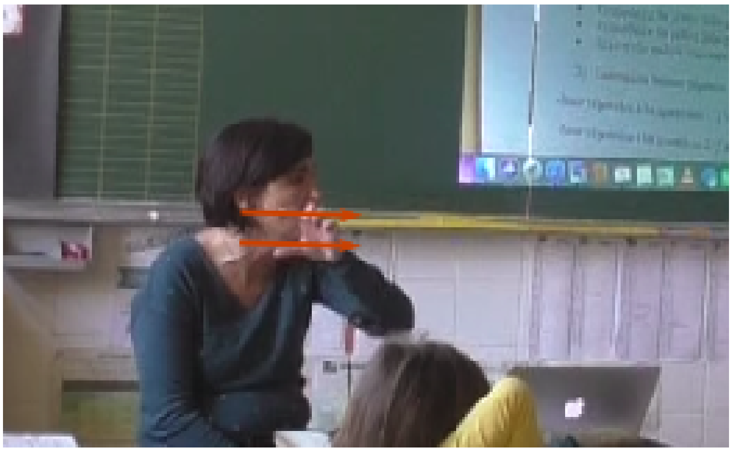


Figure 8.31 – Capture d'écran lors de la production du *geste le long de deux lignes*. Les flèches orange indiquent le chemin que les mains ont parcouru et la direction du geste.

Le geste est fait avec la main gauche de l'enseignante. L'enseignante utilise le pouce et l'index, dont les bouts des doigts sont tournés l'un vers l'autre. Les doigts dessinent deux lignes imaginaires parallèles pendant l'exécution du geste (voir figure 8.31). Nous interprétons la zone rectangulaire qui les sépare comme représentant une ligne de boîtes, évoquée par la parole à travers la phrase « *une ligne* ». Il s'agit vraisemblablement d'un signe-artefact qui fait référence aux lignes de boîtes. De plus, nous considérons que les lignes imaginaires tracées par les deux doigts peuvent évoquer des lignes auxiliaires, comme dans l'épisode 1 de la séance de résolution de la tâche T_1 [14]. Étant donné également l'allusion à l'alignement des boîtes dans la réponse de l'élève, il nous semble que le geste constitue une aide procédurale à l'application des contrôles nécessaires à la construction de lignes de boîtes bien alignées.

Dans son intervention, l'enseignante délimite également une première étape de construction de la ligne de boîtes de 10 cubes, tout ce qui est d'ailleurs utile pour une résolution manipulatoire. Par conséquent, l'enseignante est en charge de la sous-activité d'organisation consistant à établir ces deux étapes dans la résolution de la tâche. L'intervention de l'enseignante peut aider à décortiquer l'opération de comparaison des deux lignes de boîtes, en fixant l'une d'entre

14. Bien que dans ce dernier cas les lignes auxiliaires délimitaient une surface dans laquelle deux lignes de boîte étaient incluses.

elles, afin que la comparaison avec la longueur de l'autre puisse être envisagée ultérieurement. Des soucis de discipline se posent pendant une minute. Puis l'enseignante revient sur les conditions matérielles de la construction des lignes de boîtes dans le contexte de la sous-tâche et dit :

> *Vous n'aurez, vous n'aurez pas la feuille avec le quadrillage, donc vous la posez directement* [Geste iconique, les mains ont imité des pinces] *sur la table, en essayant* [Geste le long de deux lignes] *de faire bien droite* (geste le long de deux lignes) *pour ne pas perdre* [Gestes de la main comme droite]. . . *voilà*

Pour la réalisation du *geste le long de deux lignes*, l'enseignante utilise également le pouce et l'index. Cependant, nous observons trois différences dans la structure visuospatiale du geste par rapport à sa production précédente, comme on peut le voir sur la figure 8.32. La première différence est que l'enseignante utilise les deux mains. Les mains partent d'un endroit commun pour tracer par leur mouvement deux couples de lignes imaginaires parallèles : une couple de lignes avec sa main gauche se déplaçant vers la droite (du point de vue d'une observatrice) et un couple de lignes avec sa main droite se déplaçant vers la droite (idem) (voir figure 8.32). La deuxième différence est que l'espace entre les mains est à cette occasion plus petit, de sorte que la position des mains ressemble à la forme d'une pince. La troisième différence réside dans le plan dans lequel l'enseignante déplace les mains. En effet, ici l'enseignante réalise le geste avec les doigts vers le sol (les lignes de boîtes imaginaires sont considérées par le dessus).

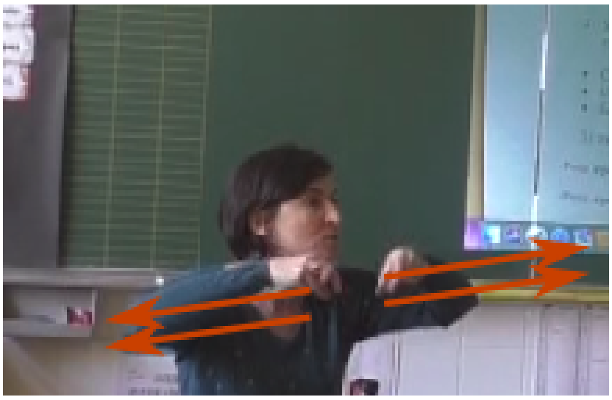


Figure 8.32 – Capture d'écran lors de la production du *geste le long de deux lignes*. Le geste a été produit par l'enseignante lors de la présentation de la sous-tâche ST1. L'enseignante produit le geste avec ses deux mains. Les flèches orange indiquent le chemin que les mains ont parcouru et la direction qu'elles ont suivie.

L'enseignante fait lors de cette intervention référence à la construction de lignes de boîtes. Le geste permet dans ce contexte d'évoquer des droites auxiliaires parallèles qui peuvent contrôler l'alignement de boîtes. Étant donné que le geste est réalisé vu de dessus (et sur son bureau), l'enseignante fait ressortir de façon plus évidente l'expérience manipulatoire avec l'artefact (que les élèves manipulent sur leurs tables). Les mains peuvent devenir des outils pour les contrôles géométriques à mettre en place : la position des mains comme des pinces et le mouvement qu'elles suivent peuvent être imités pour contrôler l'alignement de boîtes. Elles donnent forme à une action incarnée épistémique qui rend apparent le concept de ligne droite.

Nous observons que l'enseignante apporte des aides procédurales par rapport au parallélisme des droites, à l'aide du *geste de la main comme droite* (voir transcription ci-dessus). Le geste avait été produit lors de la séance de résolution de la tâche Lignes de boîtes de la même longueur (cf. épisode 1), pour faire allusion aux droites auxiliaires (selon notre interprétation). La signification mathématique que le geste véhicule ici semble différente, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant. Nous présentons dans la figure 8.33 une image de la structure visuospatiale du geste.

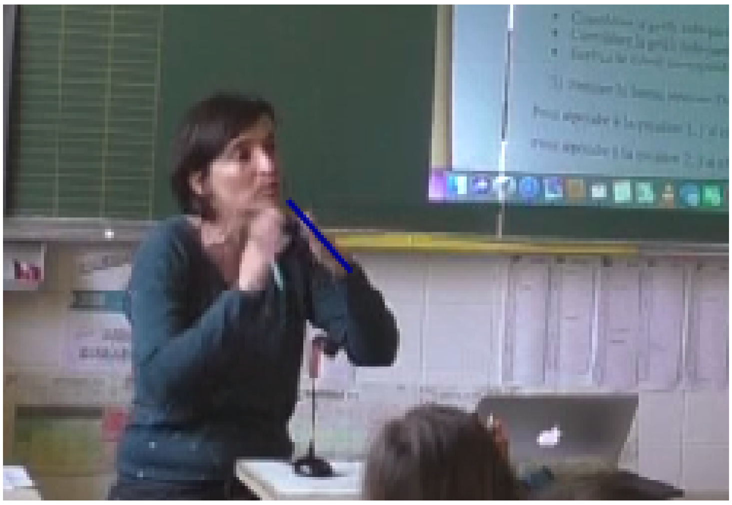


Figure 8.33 – Capture d'écran lors de la production du *geste de la main comme droite*. Le geste a été produit par l'enseignante lors de la présentation de la sous-tâche ST1. La ligne bleue démarque la ligne à pente positive représentée par le geste, du point de vue de la salle.

Le geste est statique, et est produit avec la main gauche de l'enseignante. La main est tendue et le pouce est tourné vers le tronc de l'enseignante, à différence de la production du geste dans la séance de résolution de la tâche T_1 (voir paragraphe 8.2.1). La tranche de la main (où se trouve l'auriculaire) est tournée vers la salle (voir la figure 8.33). Nous interprétons la tranche de la main comme démarquant une ligne imaginaire, dont la pente peut être évoquée par l'inclinaison de la main. Le geste semble comporter une aide procédurale pour contrôler le parallélisme de droites afin de comparer leurs longueurs. En effet, l'enseignante produit deux fois le geste pour évoquer d'abord une ligne à pente négative par rapport à l'horizon et ensuite une ligne à pente positive par rapport à l'horizon (du point de vue d'une observatrice). La ligne que la main incarne nous semble correspondre à une ligne de boîtes. Ayant des pentes de signes opposé, ce sont clairement des lignes non parallèles, ce qui est à éviter pour résoudre la tâche.

Lors de cette dernière intervention, l'enseignante exécute ces deux gestes très rapidement, sans terminer les phrases avec lesquelles ils sont coordonnés (voir transcription ci-dessus). Les gestes ont été produits pendant la présentation de la tâche T_4, lors d'une séance précédente à celle-ci, pour apporter des aides procédurales similaires (voir annexes). Les gestes avaient été produits dans ce cas lentement (coordonnés avec des phrases plus longues) et de façon expressive (vérifiable par l'intonation de la voix de l'enseignante, son expression faciale et des apogées des gestes plus prononcés). La facilité avec laquelle l'enseignante les produit à cette occasion nous semble refléter un certain degré d'installation des gestes comme artefacts-signes chez l'enseignante.

Le reste de la présentation de la sous-tâche ST1 et du reste des sous-tâches comprend la lecture des énoncés par les élèves et des reformulations chez l'enseignante. Il n'y a pas de modification significative des sous-tâches ou de contribution significative au processus d'objectivation, du moins d'après ce que nous avons pu observer.

8.5.2 Travail en groupe

Activité développée par le groupe G1

Épisode 2 : Résolution de la sous-tâche ST1

Le matériel est distribué par l'enseignante et la doctorante : les élèves reçoivent sept boîtes de 10 cubes, deux gobelets contenant 72 cubes chacun et la feuille de réponses. Les élèves remplissent les boîtes et construisent la ligne de sept boîtes et 2 cubes. L'alignement des boîtes est contrôlé par de petits mouvements : lorsque une boîte est placée à côté d'une autre, le bout de l'index et du pouce des mains des élèves qui, placés à la jonction des extrémités de deux boîtes, ajustent les boîtes sur une même ligne. Ces contrôles sont plus évidents ici en comparaison avec la tâche Lignes de boîtes de même longueur, où les élèves disposaient du quadrillage. Nous soulignons la similitude avec la position de la main en pince du *geste le long de deux lignes* dans la deuxième production par l'enseignante, lors de la présentation de la tâche. Nous voyons dans cette similitude la preuve de l'utilisation par les élèves d'outils pour gérer l'utilisation de l'artefact, qui semblent constituer un répertoire commun. L'enseignante est une facilitatrice.

Une élève, Anaïs [15], relit l'énoncé et compte les boîtes, pour vérifier que la ligne construite est bien celle décrite par l'énoncé. Elle manipule la ligne de boîtes, enlève une des boîtes et les deux cubes isolées pour obtenir deux lignes parallèles de 3 boîtes. L'élève a fait deux lignes avec la même quantité de cubes avec six boîtes au total. Elle dit : « *si, allez, regardez, c'est possible !* ». L'intonation de la voix d'Anaïs et son expression corporelle est d'un moment Eurêka (voir note en bas de la page 178). Elle dit encore : *regardez, six boîtes*. Les autres élèves du groupe analysent sa production pendant quelques secondes, sans la rejeter. À ce moment, l'enseignante arrive. Nous présentons dans l'image 8.34 une capture d'image de ce moment du travail en groupe.

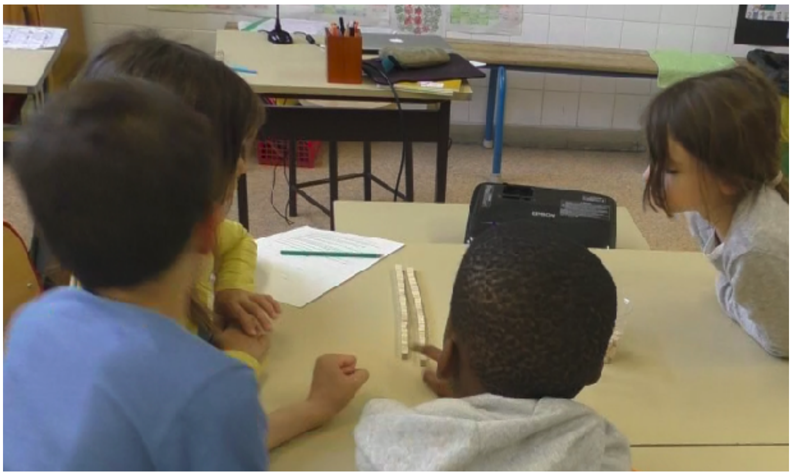


Figure 8.34 – Les élèves du groupe G2 analysent la proposition d'Anaïs, qui a partagé six boîtes de 10 cubes en deux lignes.

L'enseignante note l'erreur et revient à l'énoncé pour révéler des indices utiles à la résolution de la sous-tâche. Elle dit : « *vous devez faire la même ligne* [Geste de la main comme droite. L'enseignante fixe Anaïs], *c'est-à-dire, le même nombre de cubes, mais en utilisant simplement six boîtes.* ». La main est légèrement inclinée, peut-être pour l'amener dans le plan visuel de l'élève que l'enseignante regarde (Anaïs). Nous présentons dans la figure 8.35 une capture d'image au moment que l'enseignante produit le geste.

Nous interprétons l'expression « *même ligne* » comme un abus du langage : reproduire la même ligne au sens strict n'a pas de sens dans ce contexte. Cependant, l'enseignante l'utilise pour faire référence à l'équivalence en termes du nombre de cubes des lignes à construire, comme si elle disait plutôt *(le) même (nombre de cubes de la) ligne*. En appui du geste, l'enseignante semble chercher à évoquer la ligne de départ de boîtes de 10 et la quantité de cubes qu'elle contient.

15. Nous avons changé les noms des élèves pour ne pas dévoiler leur identité. Nous gardons le prénom attribué pour le reste de notre analyse. Dans ce cas, il s'agit de la même élève qui faisait partie du groupe G1 dans l'analyse de la séance de résolution de la tâche Lignes de boîtes de la même longueur

Figure 8.35 – Capture d'écran lors de la production du *geste de la main comme droite*. Le geste a été élaboré par l'enseignante. Elle coordonne le geste avec la parole pour faire aux élèves revenir aux conditions de la tâche.

Après quelques mots, l'enseignante termine en résumant : « *six boîtes*[Geste le long de la ligne, dans l'air], *même ligne*[Geste le long de la ligne, produit au-dessus la ligne de boîtes de 10]. Nous présentons dans la figure 8.36 des images de l'élaboration de ces gestes. La première phrase prononcée en coordination du geste semble faire référence à la ligne à construire avec six boîtes. L'enseignante revient ensuite à la ligne de boîtes de 10 en utilisant encore l'expression « *même ligne* » (même quantité de cubes) et le geste le long de la ligne en l'indiquant. L'intervention de l'enseignante condense dans ces brèves phrases et les gestes produits des relations mathématiques fondamentales à la résolution de la tâche, comme la relation d'équivalence d'égalité de grandeurs impliquées et la contrainte du nombre de boîtes pour construire la ligne.

Figure 8.36 – L'enseignante condense des indications sur la tâche à travers la coordination des gestes et la parole. Nous présentons des captures d'image au moment de la production deux fois du *geste le long de la ligne* dans l'air, dans ordre de réalisation.

Un autre élève, Jean, prend l'énoncé et le lit à voix basse. Sans manipuler le matériel, un autre élève, Romain, dit « *ah ouais six boîtes de quatre* ». L'élève reformule lors de quelques petits échanges et dit « *la même chose mais avec des boîtes de six, il faut mettre des boîtes de quatre* », à ce que Anaïs répond « *C'est bon !* ». Après quelques minutes, Jean commence à remplir la grande *grille fois-partie-tout* ($ST1_a$). Jean met 6 dans la case du nombre de fois de la grande grille lorsque Anaïs dit : « *six* ». Romain dit ensuite : « *et après tu fais sept* ». Anaïs demande alors : « *six fois sept ?* », à ce que Jean répond « *quarante-deux !* ». Impossible de trouver dans l'enregistrement ce qui a pu amener l'élève à abandonner l'idée de six boîtes de 4 et donner cette réponse, exprimée dans un cadre numérique. Les élèves semblent néanmoins convaincu·e·s. Le calcul proposé par les élèves est cohérent avec le nombre de boîtes que doit contenir la ligne à construire, ce qui était justement la condition qui n'était pas respecté dans la proposition avant l'arrivée de l'enseignante. Cependant, les élèves ne prennent pas en compte le résultat du calcul pour vérifier la quantité de cubes que doit contenir la ligne. L'enseignante arrive à nouveau au groupe, pendant que Jean écrit la réponse. Un dialogue qui écarte la réponse des élèves s'instaure, dont nous mettons la transcription ci-dessous [16] :

P – *Alors les loulous, là ça veut dire combien dans la partie, là ?*
Jean – *Sept*
P – *Alors si tu pars de sept et tu multiplies pas six, ça fait combien ?*
Jean – *quarante-deux*
P – *Et la ligne de départ, elle faisait combien tu penses ?... sept boîtes de dix plus deux*
Romain – *soixante-douze*
P – *et donc est-ce qu'on va avoir la même quantité de cubes, alors ?*
Anaïs, Romain – *Non*
P – *Non. Donc c'est pas sept ce que tu dois avoir, ce n'est pas assez*

Comme on peut le voir dans ce dialogue, l'enseignante prend appui sur la production des élèves pour attirer leur attention sur le produit du calcul. L'intervention de l'enseignante rend donc apparent un autre aspect de la sous-tâche qui n'a pas été considéré par les élèves. Elle revient sur l'équivalence du nombre de cubes par ligne à travers les questions sur le résultat du calcul proposé par les élèves et sur la quantité de cubes de la ligne de départ. Nous notons que dans la dernière formulation, l'enseignante suggère implicitement d'envisager une résolution par essais et erreurs en essayant de plus grandes quantités.

Romain lance ensuite une nouvelle recherche par tâtonnement et commence par dire « *huit fois huit* », à ce quoi Jean répond « *soixante-quatre* ». Puis il dit « *huit fois neuf* » [17], et la quatrième élève, Rebecca, répond « *soixante-douze* ». Romain pense avoir trouvé la réponse, il l'ex-

16. Sauf indication contraire, la lettre P désigne dans nos transcriptions l'enseignante, la lettre C désigne la classe et la lettre E désigne une ou un élève qui intervient dans un moment de la séance ou lors d'un épisode, sur lequel nous n'allons pas nous concentrer.

17. Nous avons également entendu la formulation de ce calcul par un autre groupe d'élèves dans l'enregistrement des groupes G1 et G2.

prime dans la phrase : « *soixante-douze!, c'est ça* » avec l'intonation et l'expression corporelle caractéristiques du moment Eurêka. Dans la réponse de l'élève la quantité totale de cubes que doit contenir la ligne est respecté mais pas le nombre de boîtes. Anaïs se rend compte que la condition sur le nombre de boîtes leur a échappée et dit *le six, le six, il faut faire six*. L'enseignante revient vers le groupe. Elle semble avoir entendu les élèves exprimer la quantité huit et dit « *si huit ce n'est pas assez, il faut mettre peut-être des boîtes de neuf, dix, je n'en sais rien. Six boîtes de dix ça fait combien?* ». Anaïs répond « *soixante* ». L'enseignante rend encore plus explicite les pistes pour structurer une résolution et dit « *c'est alors plus grand que dix* ». L'enseignante est sur le point de partir, mais Jean l'appelle. Nous mettons ci-dessous le dialogue qui a lieu :

Jean – *Maîtresse, on ne peut pas avec un six, parce que six fois dix ça fait soixante*
P – *Oui, je suis d'accord, et alors?*
Jean – *On ne peut pas trouver soixante-douze*
P – *On ne peut pas faire plus que six fois dix? On ne peut pas faire six fois onze? on n'a pas le droit?*
Anaïs – *Si, on peut faire plus*
Romain – *On peut aussi faire huit fois neuf* [Personne fait attention.]
P – *On a le droit d'avoir des boîtes de plus de dix, je ne sais pourquoi tu penses que c'est interdit, ce n'est pas interdit. Les boîtes, elles sont de la quantité qu'on veut, ah! C'est nous qui décidons*
Romain – *Huit fois neuf, huit fois neuf* [Personne fait attention.]
P – *On vient de dire, vous ne l'avez pas écouté, Jean, il vient de dire que six fois dix ce n'était pas assez, que ça faisait soixante et vous, vous avez mis combien de cubes?* [L'enseignante fait taire au reste d'élèves dans la classe]
Anaïs – *Soixante-douze*
P – *En tout on a soixante-douze cubes, six fois dix, ça fait soixante, donc dix ce n'est pas assez, donc on va pas chercher loin, on va pas essayer moins*
Romain – *J'ai fait huit fois neuf* [L'élève se dirige à l'enseignante.]
P – *Ah! Non, le nombre de boîtes, tu n'as pas le choix mon grand, c'est six. C'est le nombre de cubes dans une boîte*

Jean semble avoir été bloqué sur le fait que le nombre 72 dépasse la table de multiplication de 6. Cette idée est discutée et démentie avec l'enseignante. L'enseignante reprend alors la piste qu'elle avait apportée au groupe plus tôt : essayer avec des boîtes de 10, un candidat plus proche de la réponse par rapport à ceux essayés par le groupe avant (8×6). Ainsi, l'enseignante les encourage à essayer avec d'autres quantités, mais en prenant en compte le résultat du calcul. L'intervention permet également d'écarter la réponse de Romain. Juste après que l'enseignante est partie, Jean formule la réponse : « *j'ai trouvé, c'est six fois douze* ». Cette fois, tout le groupe est d'accord. L'enseignante passe quelques minutes après et leur demande la réponse à la première question. La doctorante leur apporte ensuite les boîtes 12 cubes. Les élèves remplissent les boîtes et construisent la ligne de boîtes de 12 cubes juste à côté de la ligne de départ. Les élèves vérifient ainsi que les lignes ont la même longueur.

Épisode 3 : Résolution des sous-tâches ST1$_{abc}$

Jean ajoute des cubes à la boîte qui a été précédemment dessinée dans la partie de la grande grille de l'item a. Anaïs reprend ensuite la résolution de la sous-tâche ST1$_a$, lorsque le reste du groupe range le matériel de manipulation. Anaïs résoudra les sous-tâches ST1$_b$ et ST1$_c$ au dernier moment, une fois la sous-tâche ST2 résolue. Dans la figure 8.37, nous mettons les réponses des élèves aux sous-tâches ST1$_{abc}$.

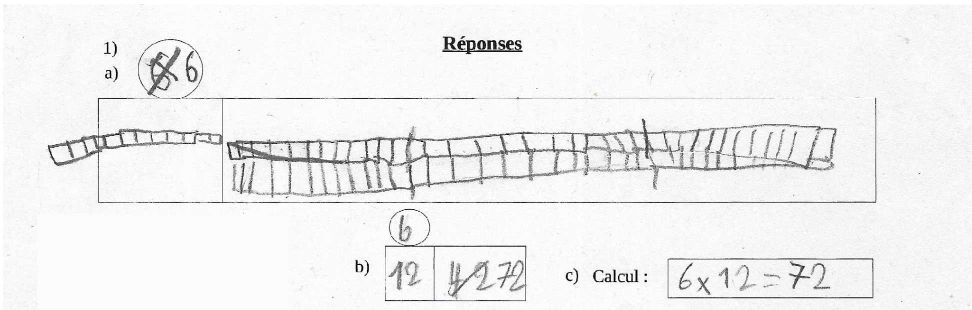


Figure 8.37 – Feuille de réponses du groupe G1, aux sous-tâches ST1$_{abc}$.

Les élèves remplissent correctement les *grilles fois-partie-tout* et arrivent au calcul attendu, comme le montre leur production écrite (voir figure 8.37). Les élèves ont utilisé des carrés pour représenter les cubes dans leurs dessins. Notons que de petits lignes supplémentaires ont été tracées entre certaines cubes dans le tout, vraisemblablement pour la distinguer les boîtes.

Épisode 4 : Résolution de la sous-tâche ST2

Anaïs se met à lire l'énoncé. Le reste du groupe n'est pas concentré. Elle dit alors à haute voix, sous la forme du langage égocentrique, au sens vygoskien du terme [18] : « *alors il faut faire trois lignes* ». Elle prend trois boîtes de la ligne de boîtes de 12, lorsqu'elle compte rythmiquement à voix haute jusqu'à trois. Elle utilise trois emplacements, qui sont sur une même droite imaginaire, pour placer chaque boîte. Elle va voir l'enseignante, pour s'assurer qu'elle a bien compris l'énoncé. Ensuite, elle partage les trois boîtes restantes pour construire trois lignes parallèles de la même longueur. Rebecca, qui semble avoir suivi ce qu'Anaïs faisait, déplace la dernière boîte (voir figure 8.38).

La configuration visée, le partage en trois ligne, est rendu apparent par la manipulation de l'artefact par Anaïs et Rebecca. Anaïs dit alors « *là, ça fait vingt-quatre* ».

18. Langage dit externe, qui a la fonction d'organiser l'action.

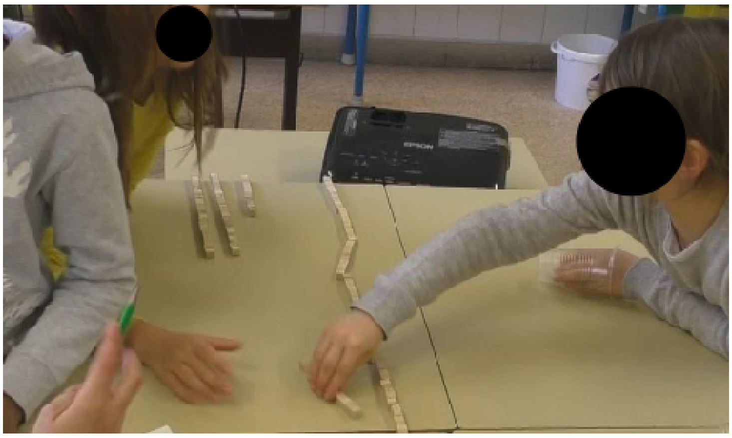


Figure 8.38 – Résolution de la sous-tâche ST2 par manipulation des boîtes. Rebecca apporte la dernière boîte pour aboutir au partage en trois lignes.

Épisode 5 : Résolution des sous-tâches ST2$_{bc}$

Anaïs se met à résoudre les sous-tâches ST2$_{abc}$ quand il reste peu de temps du travail en groupe. L'enseignante demande en fait à la classe de ranger le matériel pour passer à la synthèse, ce qui leur laisse très peu de temps pour terminer. Anaïs complète d'abord la *grille fois-partie-tout* de l'item b, elle a mis le nombre 2 dans le cercle du nombre de fois, 12 dans la case de la partie et 72 dans celle du tout. Jean dit alors « *deux fois douze ça fait pas soixante-douze* », à ce quoi Anaïs répond « *deux fois douze, ça fait vingt-quatre* ». La grandeur 72 cubes qui était d'abord perçue comme le tout est remplacée par la grandeur 24 cubes, qui est effectivement en relation multiplicative avec la grandeur 12 cubes. Cependant, la relation entre les grandeurs 72 cubes et 24 cubes n'est pas perçue comme la relation multiplicative sur laquelle porte la sous-tâche. Ainsi, les élèves mettent 24 au lieu de 72 dans le tout de la petite grille (item b) et $2 \times 12 = 24$ comme calcul. Nous présentons dans la figure 8.39 la production des élèves.

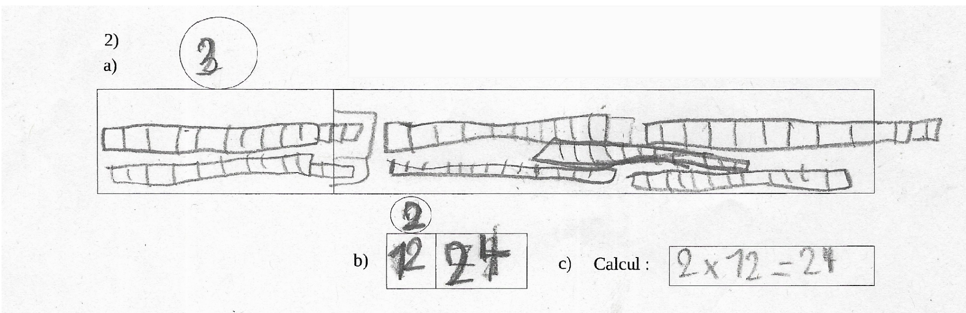


Figure 8.39 – Feuille de réponses du groupe G1, aux sous-tâches ST2$_{abc}$. La réponse à la sous-tâche ST2$_a$ n'a pas été donné lors du travail de groupe.

Anaïs avait commencé à compléter la grande grille correspondante à la sous-tâche ST2, mais elle n'a pas terminé pendant le moment du travail en groupe. L'élève avait juste mis le nombre

2 dans la case du nombre de fois et une représentation de la boîte de 12 dans la partie. Le dessin a été modifié, probablement lors de la synthèse. Dans la feuille rendue, les cases de la partie et du nombre de fois de la grande grille sont complétées, mais dans la case du tout il y a uniquement cinq boîtes dessinées (l'élève qui l'a complétée n'a peut-être pas eu le temps de toutes les dessiner). Nous tenons à souligner que l'élève qui a complété la grille de l'item a a dessiné deux crochets (]) collés juste à droite du dessin de deux boîtes dans la case de la partie (voir figure 8.39). Nous interprétons le dessin comme un signe qui matérialise la double signification mathématique évoquée par l'ensemble de deux boîtes : deux groupes de 12 cubes (les deux boîtes dessinées séparément) et un groupe ou unité de 24 cubes (les deux boîtes liées par les crochets). Nous émettons l'hypothèse que la symbolisation de l'ensemble de deux boîtes de 12, signifié comme une unité, participe comme moyen sémiotique d'objectivation de la relation multiplicative entre les quantités 72 cubes et 24 cubes.

Les élèves n'ont pas eu le temps de résoudre la sous-tâche ST3, aucune réponse n'a été entourée sur la feuille de réponses. En fait, il semble que c'était l'un des derniers groupes à avoir terminé. Nous tirons cette conclusion du fait que l'enseignante demande à la classe de ranger le matériel une fois qu'elle voit que le groupe a fait les trois lignes de boîtes de 12.

Activité développée par le groupe G2

Épisode 6 : Résolution de la sous-tâche ST1

Les élèves du groupe construisent la ligne de départ avec 6 boîtes de 10 cubes et 12 cubes isolés (il n'avait pas assez de boîtes de 10). Les élèves exécutent les mêmes contrôles géométriques que le groupe G1 pour l'alignement de boîtes. Pierre compte rythmiquement le nombre de boîtes de la ligne pour vérifier si celle-ci respecte les conditions imposées par la sous-tâche. Un deuxième élève, Raoul, lit l'énoncé de la sous-tâche ST1. Ces élèves commencent à réfléchir ensemble en produisant plusieurs énoncés en référence à l'inconnue et les grandeurs signalées par l'énoncé. Par exemple l'élève Pierre dit « *soixante-douze cubes, avec six boîtes, comment on fait* ». Une autre élève du groupe, Pauline, essaie de s'impliquer mais, au bout d'un moment, elle commence à jouer avec les cubes restant avec l'autre élève du groupe, Esteban. Au bout d'un moment Pierre dit « *dix fois six, c'est soixante, donc normalement...* », mais il est interrompu par Raoul qui dit : « *ah de coup je sais ce qu'on cherche* ». L'élève commence à remplir la grande grille de l'item a, c'est-à-dire à résoudre la sous-tâche ST1$_a$. Raoul dit « *six fois* » [Raoul marque avec son intonation la séparation des mots « six » et « fois »], lorsqu'il met le nombre 6 dans la case du nombre de fois, puis il dit « *ce qu'on cherche* », en mettant un point d'interrogation dans la case de la partie. Il fixe immédiatement Pierre. Nous constatons que les élèves n'ont pas suivi l'organisation attendue pour la résolution de la tâche. Raoul a recours à l'artefact *grille fois-partie-tout* pour rendre apparente la relation multiplicative qui relie les grandeurs en jeu, dont la partie est inconnue. L'inconnue dans la relation multiplicative est signalée comme l'objet qui guide la démarche à suivre. Raoul rend apparent son point de vue à travers la coordination sensuelle de l'artefact *grille fois-partie-tout*, les symboles écrits (le nombre 6 et le point d'interrogation), la parole, l'intonation de la voix, le rythme et son regard. Pierre complète et dit : « *six fois combien, fait soixante-douze*». Les élèves accomplissent ainsi une objectivation de la relation multiplicative sous-jacente. Pierre essaie ensuite, dans un cadre numérique, avec quelques calculs : « *mais huit fois neuf, ça fait soixante-douze. Six fois combien*... *six fois onze, ça fait soixante-six*... », sans poursuivre la recherche.

Les élèves Pierre et Raoul se mettent à discuter sur des aspects relevant d'autres sous-tâches. Pierre essaie de répondre à la troisième question et dit : « *par contre, tu peux entourer de la première question le nombre de fois* ». Raoul n'est pas d'accord : « *non, on cherche la partie* », dit-il, en entourant « la partie » dans la question 3. Pierre dit alors : « *non, parce la partie c'est ça* », tout en indiquant la case de la partie, ce à quoi Raoul répond « *ce qu'on cherche* ». Pierre, qui remarque en plus le point d'interrogation qui se trouvait dans la case de la partie, réalise son erreur (il se prend la tête et dit *ah ouais, ouais*). Raoul récapitule alors : « *six fois quoi, égale soixante-douze* », tout en signalant chaque fois sur la grille les cases correspondantes. L'intonation de sa voix souligne le mot « quoi ». Pierre conclut en disant : « *il faut que tu dessines le tout* ». Raoul commence alors à compléter la grille de l'item a, sans avoir résolu (encore) la sous-tâche ST1.

L'enseignante arrive quelques minutes après dans le groupe. Tout d'abord, l'enseignante vérifie que les élèves ont bien construit la ligne de départ. Étant donné que Raoul complétait la grande grille, l'enseignante demande la réponse à la sous-tâche ST1. Pierre répond : « *on n'a pas encore trouvé, mais on réfléchit* », et dit : « *il [Raoul] dessine les soixante-douze cubes* ». L'enseignante profite alors de l'occasion pour faire référence au rôle des grandeurs impliquées dans la relation multiplicative. Le dialogue est retranscrit ci-dessous :

P – *Regardez ce que fait Raoul, il a compris quoi Raoul? Regardez*
Pauline – *Le tout*
Pierre – *Le tout, en fait, le tout, c'est ça* [Pierre fait le geste au long de la ligne, tout en indiquant la ligne de boîtes de 10]

P – *Le tout, c'est, vous savez qu'elle a la même quantité de cubes, donc vous savez que vous avez le tout*
Pauline – *Oui*
Pierre – *Oui*
P – *Vous savez le nombre de fois où elle va se répéter, la quantité, elle va se répéter combien de fois? Bah, la quantité elle va se répéter. . .*
Pierre – *bah! La quantité elle va se répéter. . .*
Pauline – *six fois?*
P – *six fois! Très bien, donc vous devez chercher la partie. C'est bien*

L'intervention de l'enseignante nous semble renforcer et valider le chemin que les élèves avaient commencé à parcourir. L'enseignante amène les élèves à formuler le nom assigné au tout, à remarquer l'inconnue dans la relation multiplicative, la partie, et à spécifier le nombre de fois. La relation multiplicative est ainsi objectivée. Cet échange implique également des ressources incarnées ; en particulier Pierre produit le *geste long de la ligne*, en s'adressant à l'artefact *boîtes et cubes*. L'enseignante précise la formulation de l'élève en termes de quantité de cubes, en faisant allusion à l'équivalence des lignes. Enfin, la dernière phrase prononcée par l'enseignante souligne l'objet de la sous-tâche : trouver la partie.

Après à l'intervention de l'enseignante, Pierre et Raoul résolvent la sous-tâche par calcul, sans avoir recours à la manipulation. Pauline, qui manipulait l'artefact *boîtes et cubes* en autonomie, les interrompe deux fois, sans pourtant attirer leur attention. Esteban manipule également des cubes et semble ne pas suivre le groupe. Nous transcrivons ci-dessous le dialogue qui a lieu :

Raoul – *Alors maintenant, il faut résoudre nos boîtes de six, ah non, de boîtes de combien. Soixante-douze, mais comment trouver soixante-douze. Alors soixante-douze [. . .] La table de onze c'est pas possible*
Pierre – *La table de onze est super simple*
Raoul – *Bah ouais, et déjà six fois onze, c'est pas possible, soixante-six*
Pierre – *Oui, six fois onze, soixante-six. Fois douze, fois douze... Bah! Tu fais soixante-six soixante-six plus six, c'est soixante-douze qui a. . .*
Raoul – *six fois douze, six fois douze! Attends. . .*
Pierre – *Parce que douze fois six, soixante-douze*
Raoul – *Attends, mais il faut vérifier. Alors, six fois deux?*
Pierre – *Six fois deux, douze, fois deux . . .*
Pauline – *Moi j'ai réussi à les partager en quatre* [Pauline qui développait une activité en autonomie, interrompe la conversation de Pierre et Raoul. Ils ne font pas attention.]
Raoul – *Attends, non, attends, dix fois deux*
Pauline – *Les garçons, moi j'ai réussi à les partager en quatre!* [Pierre et Raoul ne font encore pas attention à l'élève.]
Pierre – *Ça fait vingt . . .*
Raoul – *Ça fait vingt, ça me rend malade, je ne comprends pas*
Pierre – *Mais si, tu sais pourquoi six fois douze ça fait soixante-douze, parce que en fait six fois onze, ça fait soixante-six, plus six, soixante-douze. Ah, il n'y a pas une calculatrice dans le coin,*

pour vérifier. En plus on n'a pas le droit
Raoul – *Bah de coup, oui, c'est bon. Mais de coup c'est six fois douze*
Pierre – *Voilà, bon, mais marque le douze dans le point d'interrogation.*

Dans un cadre numérique, Pierre et Raoul basent la résolution sur l'utilisation des tables de multiplication. Raoul indique que le produit 6×11 étant insuffisant, à ce que Pierre propose le produit 6×12 comme candidat. La résolution est donc organisée en étapes d'essai et erreur. Pierre, qui ne connaissait pas le résultat par cœur, utilise la propriété de la distributivité de la multiplication pour y parvenir ($6 \times 12 = 6 \times (11 + 1) = 6 \times 11 + 6 = 66 + 6 = 72$). Pour vérifier la réponse de Pierre, Raoul demande d'abord le résultat de la multiplication 6×2. Il nous semble que l'élève a voulu exprimer le nombre 72 comme l'addition de 6×2 et 6×10. Il s'agit d'une décomposition différente de celle proposée par Pierre. Raoul utilise, selon notre interprétation, la décomposition additive du nombre 12 en dizaines et unités, $10 + 2$, et suit l'ordre par unité de numération pour multiplier par 6, d'abord les unités et puis les dizaines. L'élève fait néanmoins une erreur et demande à Pierre le résultat de « *deux fois dix* », au lieu de 6×10. Vraisemblablement influencés par cette erreur de calcul, les élèves pensent à valider leur réponse avec la calculatrice. L'utilisation de l'artefact pour valider, notamment l'action incarnée du partage, n'a pas été pris en considération.

Pendant que Pierre et Raoul discutent, Pauline et Esteban manipulent les cubes. Pauline poursuit une recherche par tâtonnement qui abouti à la disposition des cubes en 18 groupes de 4 cubes, puis elle dit : « *moi j'ai réussi à les partager en quatre* » (voir la transcription précédente). Elle commente sa découverte avec Pierre et Raoul qui, concentrés sur leur discussion, n'en tiennent pas compte. Bien que l'élève utilise le mot « partager », nous considérons que l'élève mobilise une action incarnée qui permet de réaliser une division groupement sur la quantité totale de cubes. En effet, l'élève déplace les cubes pour obtenir à chaque fois des blocs de base carrée constitués par 4 cubes. Nous interprétons la formulation de l'élève comme signifiant « *moi j'ai réussi à les partager en (groupes de) quatre* ». L'action développée par l'élève semble être davantage guidée par des questions spatiales-géométriques (et esthétiques et ludiques) que par la résolution de la sous-tâche ST1. Cette action lui a dans tous les cas permis d'avancer dans la rencontre avec une autre opération.

Les élèves valident le résultat obtenu à travers la comparaison directe de la longueur des lignes, une fois les boîtes de 12 cubes apportées. À l'initiative de Raoul, les élèves construisent la ligne avec les boîtes de 12 cubes vides (voir figure 8.40).

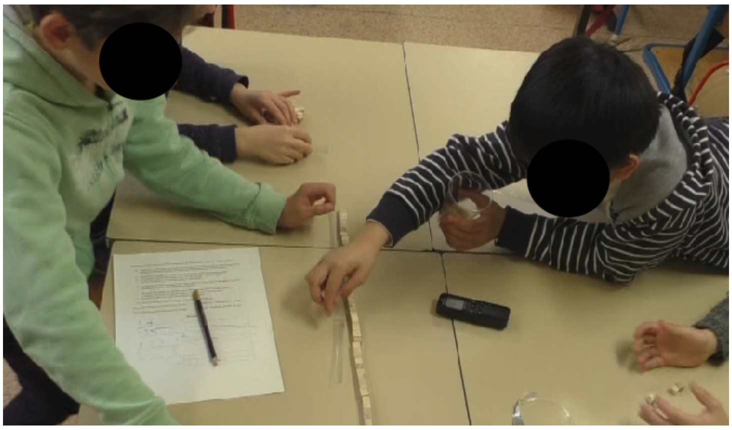


Figure 8.40 – Validation de la résolution de la sous-tâche ST1. Les élèves construisent la ligne de boîtes de 12 sans remplir les boîtes.

L'action des élèves implique une appropriation de l'artefact *boîtes et cubes*, en y imprimant la reconnaissance de la boîte comme unité de longueur. Il s'agit d'une manière plus efficace d'envisager la comparaison de la longueur des lignes.

Épisode 7 : Résolution des sous-tâches ST1$_{abc}$

Étant la sous-tâche ST1 résolue, Raoul termine de remplir la grande grille. En représentant les cubes par des carrés, l'élève dessine la boîte de 12 cubes dans la partie et 72 cubes dans la case du tout. Nous présentons dans la figure 8.41 la production de l'élève, au sein du travail en groupe.

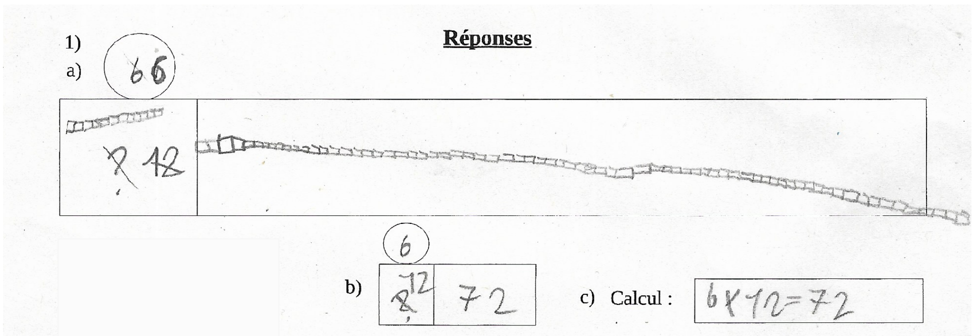


Figure 8.41 – Feuille de réponses du groupe G2, aux sous-tâches ST1$_{abc}$.

Nous soulignons le fait que l'élève dessine les 72 carrés sans inclure des traces auxiliaires pour symboliser les boîtes de 12, conformément à l'état de résolution de la sous-tâche ST1 au moment du remplissage de la case du tout (la taille de boîtes était inconnue). Les sous-tâches ST1$_b$ et ST1$_c$ sont résolues aisément par Raoul (voir la figure 8.41).

Épisode 8 : Résolution de la sous-tâche ST2

Pour résoudre la sous-tâche ST2. Raoul lit l'énoncé à haute voix. Il dit tout de suite : « *ah, bah !, j'ai compris cette fois. Cette fois c'est le tout ce qu'on trouve* ». Sans fournir d'arguments consistants, l'élève se contente de paraphraser l'énoncé : « *parce que là, maintenant c'est si vous partagez une ligne, cette ligne, en trois lignes de même longueur* ». Ensuite, Raoul reconnaît le nombre trois en tant que nombre de fois et met le signe 3 dans la case correspondante. Il essaye vraisemblablement de mettre en place la même procédure qui lui avait permis de résoudre la sous-tâche ST1. L'élève continue : « *du coup c'est trois fois ! Mais trois fois quoi ?* ». Il relit à haute voix l'énoncé. Pierre formule alors la question « *soixante-douze divisé par trois, ça fait quoi ?* ». Pierre adapte ainsi la sous-tâche au cadre numérique et renverse la relation multiplicative en exprimant un calcul. Raoul ignore la question de Pierre et revient à la nature de l'inconnue : « *oui, mais attends, du coup, là, c'est la partie ce qu'il faut trouver ? Ah non, c'est pas ça.* ». Face aux difficultés pour exprimer la relation multiplicative sous-jacente, Raoul résout finalement la sous-tâche par manipulation. Il dit : « *il faut partager, cette ligne, la partager en trois, voilà, je l'ai partagée en trois* », lorsqu'il partage la ligne en trois (voir figure 8.42). Les élèves calculent le nombre de cubes par ligne immédiatement après avoir effectué l'action, « *deux fois douze* » dit Raoul, « *bah, vingt-quatre* » répond Pierre.

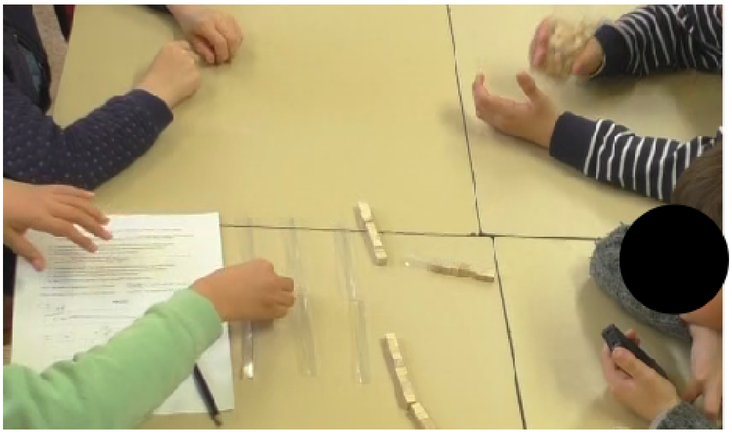


Figure 8.42 – Raoul partage la ligne de boîtes de 12 cubes vides en trois lignes

Épisode 9 : Résolution des sous-tâches ST2$_{abc}$

Lorsque Pierre et Raoul estiment avoir résolu la sous-tâche ST2, ils commencent à remplir la feuille de réponses. Raoul, qui avait déjà interprété l'inconnue comme le tout, met la quantité 24 cubes dans la case du tout. Quant au remplissage de la case de la partie, Raoul y met le nombre

2, mais il n'est pas sûr de sa réponse et dit : « *j'ai rien compris, en fait* ». Malgré le sentiment que l'élève avait exprimé, il dit au bout d'un moment « *c'est terminé !* ». Pierre intervient et revient alors au calcul qu'il avait proposé tout à l'heure et répond : « *non, c'est pas terminé. Tu as pas compris, en fait.* [Pierre prend l'énoncé] *Si maintenant vous partagez cette ligne, question un, en trois lignes. . . donc, on doit plutôt faire soixante-douze divisé par trois et ça donne les lignes* » [Geste de la main comme droite, trois fois]. Nous présentons dans la figure 8.43 une image de la production du geste.

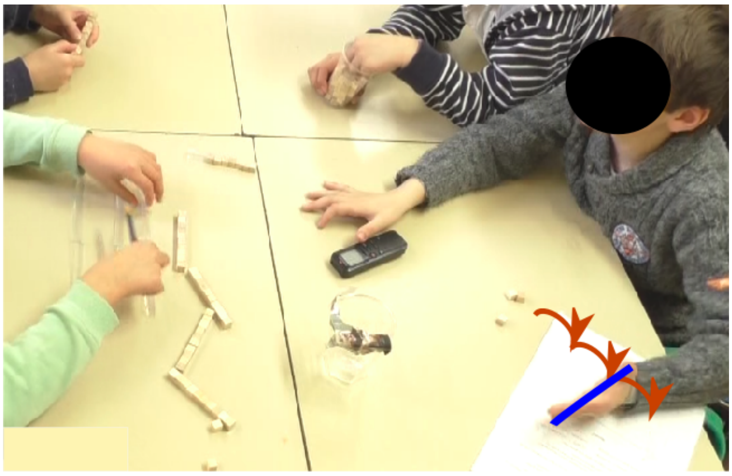


Figure 8.43 – Capture d'écran lors de la production du *geste de la main comme droite*. Le geste a été produit pour Pierre lors du travail en groupe. Les flèches orange indiquent le chemin que les mains ont parcouru et la direction du geste. Les lignes en bleu la structure que nous interprétons.

Pierre produit trois fois le *geste de la main comme droite* sur la table. Les mains de l'élève représentent vraisemblablement les trois lignes de boîtes produites par le partage, conformément à la coordination du geste et la parole et la structure visuospatiale du geste. Par le geste, l'élève fait correspondre la division du nombre 72 par 3 et l'élaboration de lignes avec l'artefact *boîtes et cubes*. L'élève fait ressortir l'expérience manipulatoire du partage de la ligne de boîtes de départ en trois. Pierre demande alors : « *soixante-douze divisé par trois, ça fait combien ?* », Raoul répond 24. Pierre vérifie le résultat trouvé par Raoul, au moyen du produit 3×24. Comme pour la résolution de la sous-tâche ST1 (cf. épisode 6), l'élève utilise la propriété de distributivité et dit : « *bah vingt-quatre fois deux, ça fait quarante-huit, plus vingt-quatre, soixante-douze. Donc, voilà !* ». Les élèves n'ont pas recours au matériel pour raisonner. Bien que Pierre ait mentionné le calcul correct, il ne semble pas l'avoir interprété en termes de division en trois lignes, comme exprimé dans l'énoncé. Pierre et Raoul entament une discussion qui ne débouche pas sur un point de vue partagé. Pauline l'appelle « *la dispute infernale* », vraisemblablement par l'insistance de chacun sur leur avis. Nous présentons un extrait ci-dessous, juste après la dernière intervention de Pierre :

> Pierre – *Vingt-quatre cubes, comment tu fais pour faire trois lignes de la même longueur avec vingt-quatre cubes*
> Raoul – *Ah bah tu partages en trois lignes. . .*
> Pierre – *Oui, mais il faut trouver !*
> Raoul – *Tu fais, deux boîtes, deux boîtes, deux boîtes. Là tu prends trois boîtes, six boîtes. . .*
> Pierre – *Il faut que les trois soient à vingt-quatre, avec des boîtes de je ne sais pas combien, je ne sais pas combien, je ne sais pas combien. . . que des boîtes de douze ?*
> Raoul – *Là, regarde, il y a vingt-quatre dans les boîtes de douze. Tu as vingt-quatre*
> Pierre – *Alors, je n'ai pas trop compris, là. Normalement ça doit être si simple*
> Raoul – *Tu comprends ? Tu comprends ? Tu comprends que c'est compliqué à comprendre ?*
> Pierre – *Non, c'est pas du tout ça, en fait. Non, je pense, à mon avis, non. Je ne sais pas trop, mais à mon avis non*

Dans la proposition de Pierre, la grandeur 24 cubes apparaît également comme le tout. L'inconnue semble être la quantité de cubes dans les boîtes à utiliser pour faire trois lignes contenant 24 cubes, sans prendre donc en compte celles résultantes du partage de la ligne de boîtes de 12. Il fait référence à l'itération de la grandeur par la répétition trois fois de la phrase « *je ne sais pas combien* ». Raoul semble signaler que la réponse devrait être formulée à partir des boîtes de 12. Bien que les élèves aient résolu la sous-tâche ST2 par manipulation, aucun élève ne semble être sûr du point de vue à adopter pour répondre aux sous-tâches ST2$_{abc}$. Il nous semble qu'il existe une discordance entre l'expérience manipulatoire avec l'artefact et la reconnaissance de la grandeur que l'action incarnée fait découvrir (24 cubes), en relation multiplicative avec la grandeur relative à la quantité de cubes de la ligne de départ (72 cubes). La rupture ne fait que mettre en évidence le caractère pragmatique de l'action incarnée mise en place. En effet, elle n'a pas impliqué une prise de position intentionnelle du point de vue de la relation multiplicative sous-jacente : les doutes sur le remplissage préalable de la *grille fois-partie-tout* en témoignent. Raoul l'exprime clairement en mots, quand Pierre lui propose revenir à l'énoncé, pour vérifier la résolution de la sous-tâche : « *non mais moi, mon problème c'est comment le poser. C'est pas comment le calculer, en fait. De coup, le calcul, je sais déjà qu'il fait vingt-quatre.* ».

Les élèves font ensuite des propositions qui combinent différentes grandeurs, sans aboutir à la réponse. Peut-être influencé par l'interprétation de la quantité 24 cubes comme le tout, Raoul reprend le nombre de lignes et la quantité de boîtes par lignes et dit « *trois fois deux cubes égale vingt-quatre* ». Pierre se concentre sur le matériel et dit : « *tu prends toutes boîtes [sic] de douze, et deux boîtes de douze, mais la troisième, comment on fait, c'est ça le truc* ». Les élèves décident finalement de mettre 2 comme le nombre de fois, 12 cubes comme la partie et 24 cubes comme le tout. Une fois la discussion terminée, Raoul remplit la grande grille et la petite grille. Dans la figure 8.44 nous présentons la production des élèves.

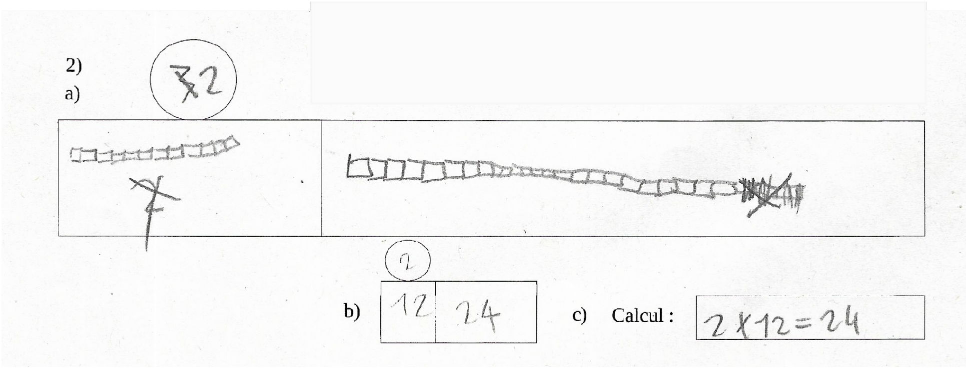


Figure 8.44 – Feuille de réponses du groupe G2, aux sous-tâches ST2$_{abc}$.

Notons que les nombres 3 et 2 rayés dans le cercle du nombre de fois et la case de la partie, respectivement, sont des traces des changements de points de vue lors de la discussion. Le signe 2 dans la partie semble l'empreinte de la proposition de Raoul (« *trois fois deux cubes égale vingt-quatre* »).

L'enseignante passe ensuite par le groupe et demande aux élèves de lui montrer la feuille de réponses. Nous mettons ci-dessous la transcription du dialogue qui a lieu :

> P – *Vous avez mis quoi ? Ah, tatatata, ah non, non, non, non. Il fallait pas la partager en…, non, eh, c'est… là,* [Geste déictique sur la case de la partie] *c'est quelle quantité qui est mise dans la partie ?*
> Raoul – *douze cubes*
> P – *douze, douze fois deux, ça fait soixante-douze ?*
> Pauline – *vingt-quatre*
> Raoul – *vingt-quatre*
> P – *Non, mais dans le tout, il y a quoi dans le tout, là ?*
> Raoul – *vingt-quatre cubes*
> P – *Non, vingt-quatre c'était pas le tout. Le tout, c'était ça* [l'enseignante ramasse dans sa main toutes les boîtes vides qui étaient sur la table]. *Et toi, on te demande de le partager en trois part égales et on te demande combien il en a dans une part*

L'enseignante est confrontée à une réponse qu'elle n'attendait pas. Elle semble d'abord avoir remarqué le nombre de fois, puis elle fait référence à la partie. Nous interprétons alors que l'enseignante cherche à confronter les élèves à l'incohérence de la partie et le nombre de fois par rapport au tout : 2 fois 12 ne permet pas d'obtenir 72 cubes. Néanmoins, c'est au niveau de la reconnaissance de la quantité 72 cubes comme le tout que l'erreur des élèves se produit, donc l'aide ne s'avère pas suffisante. L'enseignante se tourne ensuite vers l'artefact *boîtes et cubes* pour apporter un aide supplémentaire : elle ramasse toutes les boîtes vides sur la table et les met dans sa main. Comme il y avait un mélange de boîtes de 10 et de 12, elle ramasse des boîtes de deux tailles, de sorte que les élèves sont perdu·e·s. Raoul dit même, après le départ de l'enseignante : « *voilà, c'est bien deux boîtes de douze* ». Les élèves enlèvent après les boîtes de 10, de sorte qu'il ne reste sur la table que les 6 boîtes de 12, partagées en trois groupe de deux boîtes. Pauline appelle l'enseignante pour qu'elle vienne encore. Le dialogue suivant a lieu :

P – *C'était combien de boîtes de douze? à la première question?*
Raoul – *Six*
P – *Oui, alors, deux, deux, deux* [L'enseignante indique chaque fois les groupes de 2 boîtes de 12 cubes qui sont sur la table]. *Donc ça, ça* [L'enseignante ramasse deux boîtes de 12] *tu vas l'écrire où dans ta grille? Ça c'est où dans ta grille?*
Pauline – *Là?* [l'élève E_2 indique la case de la partie]
P – *Oui. Ça c'est le nombre totale de fois où ça se répète* [L'enseignante indique avec un geste déictique chaque groupe de 2 boîtes sur la table], *et le total, c'est quoi le total alors?*
Pauline – *Vingt-quatre*
P – *Bah non, c'est pas le total vingt-quatre*
Pauline – *Bah deux fois douze*
P – *Bah non, c'est pas le total vingt-quatre. Le total c'est ça* [L'enseignante ramasse toutes les boîtes. Elle fixe du regard aux élèves en silence. Le volume de la voix augmente pour dire « ça »]
Pauline – *Ah!* [Intonation de moment d'Eurêka]
Raoul – *Mais c'est combien qu'il y a dans une ligne, qui est marqué*
P – *Comment?*
Raoul, Pauline – *Combien on a dans une ligne*
P – *Mais ça c'est que tu cherches, qui t'a dit que ce que tu cherches c'est le tout? Tu cherches pas le tout. Le tout tu l'avais. Tu le connaissais le tout, qu'est-ce que tu cherchais alors?*
Pauline – *Six fois douze, alors*
P – *Ça tu le savais* [Geste déictique sur la case du tout], *ça tu le savais* [geste déictique sur le cercle du nombre de fois], *c'est ça que tu ne savais pas* [Geste déictique sur la case de la partie]
Pauline – *Et alors c'est six fois douze. Bah oui, parce qu'il y a six boîtes de douze*
P – *Je vous laisse réfléchir*

Nous observons que l'enseignante a recours à diverses ressources sémiotiques pour soutenir une réflexion avec les élèves, à propos des grandeurs et leur relation multiplicative. Elle fait d'abord référence à la quantité de boîtes de départ, six, et à son organisation en groupes de deux. Elle répète trois fois le mot "deux" en désignant les groupes de deux boîtes. L'enseignante produit ensuite un signe-artefact à travers son action : elle prend le groupe de deux boîtes dans sa main, pour demander la case de la *grille fois-partie-tout* qui correspond. L'action permet de référer à la grandeur correspondant à l'ensemble de deux boîtes à travers le rassemblement de celles-ci, à la manière du *geste en tout* produit lors de la séance de résolution de la tâche Lignes de boîtes de même longueur (cf. épisode 9). En prenant des objets physiques dans la main, l'enseignante fait également référence à l'expérience manipulatoire avec l'artefact. Lorsque les élèves ont des difficultés à reconnaître le tout, l'enseignante recourt à nouveau au ramassage des boîtes. Elle prend dans sa main les six boîtes qui sont sur la table et qui, cette fois, correspondent à l'ensemble (voir figure 8.45). Nous considérons que l'intervention de l'enseignante montre l'articulation des multiples tonalités corporelles, linguistiques, gestuelles, perceptives, physiques, esthétiques et émotionnelles afin d'élaborer des significations mathématiques pertinentes. L'enseignante coordonne sensuellement l'action sur l'artefact, le discours qui l'accompagne, l'accent que produit la modulation de l'intonation de sa voix et le regard fixe pour faire allusion au tout de manière emphatique et théâtrale. C'est l'empreinte esthétique de l'idiosyncrasie de l'enseignante dans l'objectivation du concept du "tout". Notons également qu'il ne s'agit pas seulement de rendre apparent le tout, mais de s'opposer avec ténacité à la réponse donnée avec insistance par les élèves.

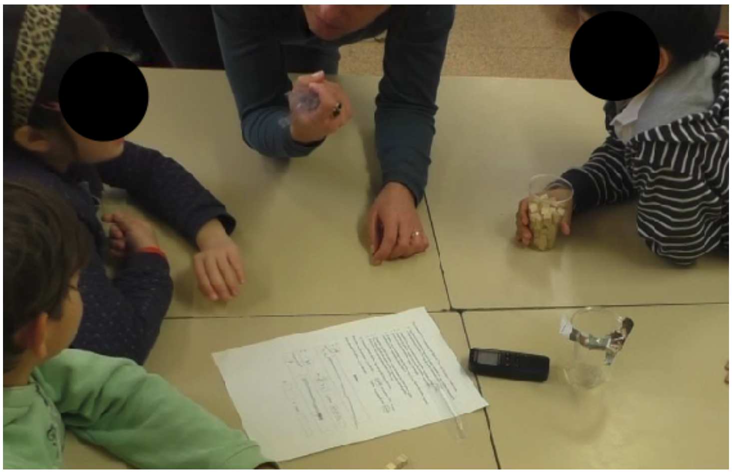


Figure 8.45 – L'enseignante prend dans sa main la totalité des boîtes de 12 pour rendre apparent la grandeur qui correspond au terme tout dans la relation multiplicative.

L'intervention de l'enseignante a des effets sur Pauline, la grandeur 72 cubes en tant que tout apparaît à sa conscience. Cependant, l'élève évoque le calcul « *six fois douze* », qui correspond à la ligne de six boîtes de douze. La discussion s'est terminée par l'expression du point de discordance, qui devient à cette occasion plus clair par rapport au dialogue précédant : l'inconnue, 24 cubes, était interprété par les élèves, et surtout par Raoul, comme le tout. L'enseignante leur fait remarquer que la réponse à laquelle elles/ils étaient parvenu·e·s était incorrecte. Elle revient à la *grille fois-partie-tout* pour indiquer les grandeurs et leur rôle au sein de la relation multiplicative sous-jacente.

Après l'intervention de l'enseignante, Raoul semble rencontrer encore des difficultés à reconnaître l'ensemble de 2 boîtes de 12 cubes comme la partie. En fait, il revient à l'idée du tout comme l'inconnue : « *Non, mais c'est ça ce que vous cherchiez. Parce que quand j'ai partagé en trois j'ai cherché le tout* ». En revanche, Pierre semble être arrivé à un degré de conscience plus accru sur la relation multiplicative en question. Notons que l'élève avait déjà exprimé le calcul correct, mais il ne l'a pas reconnu comme le calcul qui correspondait à la situation de partage. Il utilise cette nouvelle perspective pour expliquer à Raoul : « *soixante-douze divisé par trois, ça fait vingt-quatre cubes, ça résout le truc* ». Pauline, de sa part, développe de calculs pour valider la quantité 72 comme le tout, comme l'avait fait Pierre précédemment. Elle prend ici appui sur le matériel : « *Là, douze plus douze, ça fait vingt-quatre.* [Pauline prend deux boîtes de 12 vides] *Vingt-quatre plus vingt-quatre, ça fait quarante-huit* ». Pauline est presque arrivée à la bonne configuration quand elle est interrompue par Pierre, qui fait référence au temps écoulé. Raoul insiste alors « *Normalement c'est bien le tout ce qu'on cherchait*, à ce que Pierre répond « *bah, non, on cherchait la partie* ». Raoul insiste : « *moi, je savais qui c'était des boîtes de douze, tu sais? Je savais qui c'était douze cubes qui étaient multipliés par deux fois* » . Face à l'insistance de Raoul, Pierre revient à l'énoncé de la sous-tâche pour mettre en discussion les affirmations de Raoul. Pierre est pourtant interrompu par l'enseignante : le temps du travail en groupe a terminé. Raoul, obstiné, met $2 \times 12 = 24$ comme calcul et entoure le tout comme l'inconnue pour la sous-tâche ST3 (voir figure 8.44). Il nous semble que Raoul adopte une perspective critique pour évaluer les propositions de ses camarades et de l'enseignante. Il ne les prend pas comme certaines si elles n'ont pas du sens pour lui. Pierre, ayant atteint un degré plus accru de conscience sur le rapport entre grandeurs, montre le même engagement dans la discussion. Nous considérons que l'interaction coopérative des élèves n'est pas seulement orientée vers la résolution de tâches, mais qu'elle s'inscrit dans un processus dans lequel leurs consciences respectives se cherchent à travers la parole et le corps : la ZDP. Les discussions qu'ils engagent exploitent le caractère intersubjectif de la ZDP, auquel les élèves ne pourraient pas accéder en agissant seuls.

8.5.3 Synthèse

Épisode 10 : Correction de la sous-tâche ST1

L'enseignante commence par la correction de la sous-tâche ST1. Un élève donne la réponse correcte et dit que la ligne avait « *six boîtes de douze cubes* » . L'enseignante a recours à l'artefact *boîtes et cubes aimantés* et représente la ligne. Un autre élève, Jean, commence à expliquer la procédure suivie et dit : « *On a fait six fois dix, ça fait soixante* ». L'enseignante interrompe l'élève pour souligner ce calcul comme point de départ de la résolution de la sous-tâche. L'enseignante formule la réponse de l'élève en termes d'expression multiplicative symbolique et écrit $6 \times 10c = 60c$ sur le tableau. L'enseignante demande ensuite le rapport entre les grandeurs 60 cubes et 72 cubes, pour amener les élèves à exprimer leurs résolutions. Un élève, Simon, répond : « *on a juste à rajouter douze* », ce qui selon lui revient à faire « *plus six fois deux* ». Il nous semble que c'était une occasion très profitable pour rendre compte de la résolution directe par manipulation. L'enseignante aurait pu interpréter l'expression $6 \times 10c = 60c$ sur le tableau en termes d'un premier partage des boîtes de 10 de la ligne de départ, pour continuer avec les cubes restant, 12 cubes, qui partagés en 6 groupes font justement « *six fois deux* ». L'enseignante était au courant de la résolution directe par manipulation dont l'intérêt avait été discuté. Elle laisse pourtant échapper cette opportunité et n'intègre pas l'observation de Simon. Elle continue avec la résolution par essai et erreur :

> P – *Alors, pour faire soixante-six je peux, peut-être, faire comme ça* [L'enseignante écrit $6 \times 11c = 66c$], *des boîtes de onze. Si je prends onze cubes dans une boîte, je suis à soixante-six.* [Simon lève la main] *Oui?*
> Simon – *On a fait six fois onze, ça fait soixante-six et après six fois douze ça fait soixante-douze*
> P – *Oui, bravo! Très bien! Très bien!* [L'enseignante écrit $6 \times 12c = 72c$] *Six multiplié par douze, ça fait soixante-douze, très bien!*

La grandeur 60 cubes représente dans cette résolution le premier candidat à essayer dans la liste. L'enseignante s'appuie sur l'écriture symbolique des expressions multiplicatives, de sorte que la résolution de la sous-tâche ST1$_c$ est présentée en même temps. L'enseignante se base sur des comparaisons successives du tout avec les sous-totaux produits à mesure que la taille des boîtes considérées augmente. Le choix de la quantité de départ dans la résolution par essai et erreur soutient ensuite l'enchaînement des questions subséquentes posées par l'enseignante. Ces questions ont cherché à révéler d'autres possibilités pour la résolution de la sous-tâche : « *Est-ce qu'on en a d'autres qui ont fait d'autres façons? Non? Personne s'est dit, bah par exemple oui eh... Est-ce que personne n'a démarré à sept, par exemple? Personne s'est dit bah si j'en mets sept, sept, sept, sept, sept, sept, ça fait combien? Puis, si je fais huit, huit, huit, huit, huit, ça fait combien? Neuf, neuf, neuf, neuf . . . Tout le monde a démarré à dix?* ». Dans son discours, l'enseignante utilise la répétition des mots des nombres pour évoquer l'itération de boîtes dans les lignes des boîtes, en référence à la quantité de cubes des boîtes. Une élève, Éloïse, répond « *On a fait soixante-douze* *divisé par six ça fait douze* ». Sans entrer dans les détails, car ce calcul devait être discuté plus tard dans la séance, l'enseignante écrit dans le coin supérieur droit du tableau le calcul $72c : 6 = 12c$. Simon dit que son groupe a commencé à sept, d'où nous concluons que son groupe a résolu la tâche par essai et erreur. Aucun·e élève n'a décrit une autre possibilité pour résoudre la sous-tâche ST1. La résolution par essai et erreur est la seule résolution présentée.

Épisode 11 : Correction des sous-tâches ST1$_{abc}$

L'enseignante interroge un élève, Martin, sur les quantités qui étaient connues au début pour résoudre la sous-tâche ST1. L'enseignante cherche ici à discuter sur le statut des grandeurs au sein de la relation multiplicative. Les murmures d'autres élèves qui tentaient des réponses se heurtent au silence de Martin, qui semble rencontrer des difficultés. Martin donne tardivement une réponse correcte : « *le nombre de fois* ». Il se trompe, cependant, lorsque l'enseignante lui demande la quantité qui joue le rôle du nombre de fois : il répond « *sept fois* ». L'enseignante se tourne alors vers l'artefact aimanté pour raisonner avec l'élève : elle sépare une à une les boîtes de 12 cubes qui sont dans la ligne de boîtes dans le tableau (voir figure 8.46). Elle fait ainsi apparaître un espace plus grand entre elles, tout en disant « *sept fois on l'avait [la boîte de* 12 *cubes]? Combien en on l'a de fois, là?* ». Nous considérons que la production de ce signe-artefact – les boîtes séparées – rend plus perceptible la quantité de boîtes aimantées sur le tableau, ce qui permet de déterminer le nombre de fois. Il nous semble que l'accent mis sur la matière et l'action sur celle-ci, ainsi que l'allusion au passé par le discours, mettent en évidence l'expérience phénoménologique avec l'artefact *boîtes et cubes* (et plus particulièrement l'itération des boîtes). Selon notre interprétation, l'enseignante essaie de faire revenir l'élève à l'itération six fois de la boîte de 12 pour construire la ligne de boîtes lors de la résolution de la tâche.

L'enseignante semble constater les difficultés de l'élève, elle lui demande donc la quantité qui joue le rôle du tout de façon beaucoup plus directive. Elle indique le signe $72c$ dans le tableau en posant la question. C'est peut-être pour la même raison que l'enseignante capte l'attention des élèves, et particulièrement celle de Martin, et dit « *Alors en fait, Martin, si tu veux, regarde, je peux même te faire comme ça, tu vas voir* ». Il faut noter que l'invitation de l'enseignante exprime en premier lieu une proximité émotionnelle qui peut servir à rassurer l'élève, et toutes et tous celles/ceux qui rencontrent des difficultés similaires. En second lieu, l'enseignante met l'accent sur ce qu'elle va faire, ce qui semble suggérer la révélation d'éléments utiles à la prise de conscience des relations entre les quantités. L'enseignante entoure dans une case la ligne de six

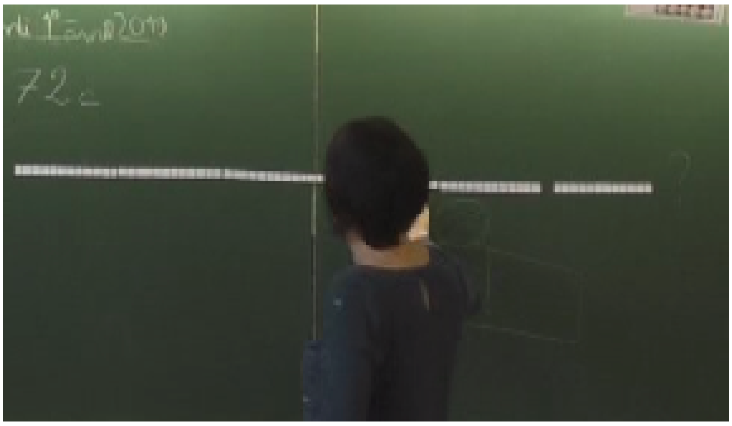


Figure 8.46 – L'enseignante sépare une à une les boîtes aimantées de la ligne de boîtes dans le tableau. Elle commence par les boîtes plus à droite, du point de vue d'une observatrice, jusqu'à la boîte la plus à gauche.

boîtes de 12 cubes, et complète la figure avec d'autres cases pour construire la *grille fois-partie-tout* qui représente la situation (voir figure 8.47). À notre égard, l'intervention de l'enseignante va au-delà de la simple exécution du remplissage la *grille fois-partie-tout*. D'autant plus qu'elle construit la grille à partir de la représentation de la ligne avec le matériel aimanté. En conséquence, elle re-signifie la grandeur 72 cubes, par son inscription dans la case qui correspond au tout. L'enseignante attache ainsi la signification du tout au matériel aimanté qui représente la grandeur 72 cubes.

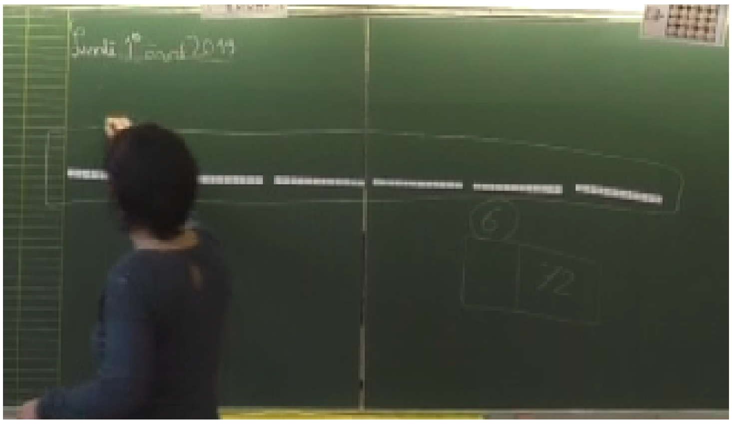


Figure 8.47 – L'enseignante entoure dans une case rectangulaire la ligne de boîtes de 12 dans le tableau, pour faire apparaître ensuite la *grille fois-partie-tout* qui est associée à la ligne.

L'enseignante produit quelques minutes après une formulation qui met en relation multiplicative les grandeurs qui sont représentées dans la *grille fois-partie-tout* : « *six fois douze cubes ça fait soixante-douze* », tout en indiquant les cases correspondant avec des gestes déictiques. Il s'agit d'un signe-artefact qui relie des signes oraux avec des signes matériels pour évoquer la relation multiplicative. L'enseignante continue :

> P – *Pour faire ça, en fait, donc on a, vous aviez vous soixante-deux cubes* [Geste en tout] *et vous les avez rangés* [Geste d'itération en ligne], *vous les avez organisés* [Geste d'organiser, décrit ci-dessous], *vous les avez distribués* [Geste iconique de distribuer, décrit ci-dessous]. *Vous avez dit, bah, là, si je mets un cube, un cube, un cube, un cube, un cube, un cube* [Geste de distribution en ligne sur le tableau, en indiquant la ligne de boîtes, décrit ci-dessous], *ça ne suffit pas. Là, si je mets deux cubes, deux cubes, deux cubes, deux cubes, deux cubes, deux cubes* [Geste de distribution en ligne sur le tableau en indiquant la ligne de boîtes], *ça ne suffit pas. Trois, trois, trois, trois, trois, trois* [Geste de distribution en ligne de transition, sur le tableau mais sans indiquer la ligne de boîtes, décrit ci-dessous], *ça suffit pas. Quatre, quatre, quatre, quatre, quatre* [Geste iconique de distribuer], *ça ne suffit pas. Vous avez vu qu'il fallait aller jusqu'au douze. Mais vous pourriez avoir commencé peut-être en se reposant la question, déjà, dix cubes ça fessait soixante.*

Dans l'intervention de l'enseignante, on peut voir l'intention de fournir des éléments permettant de généraliser la situation de manipulation de l'artefact *boîtes et cubes* et, ainsi, d'atteindre un niveau plus profond du processus d'objectivation. Pour cela, l'enseignante évoque les actions « ranger », « organiser » et « distribuer ». Les gestes jouent un rôle central en tant que dispositif sémiotique pour contribuer à l'appréhension phénoménologique du général par les élèves. Les gestes produits sont : le *geste d'itération en ligne* (produit lors de la séance S_1, cf. épisode 9), le *geste d'organiser*, le *geste iconique de distribuer* et le *geste de distribution en ligne* (dont il est question aux paragraphes suivants). D'autres ressources sémiotiques sont imbriquées dans ce nœud sémiotique, telles que l'emploi des mots à visée généralisante, comme l'article « les », et l'allusion au tout au moyen du *geste en tout* (produit également lors de la séance S_1, cf. épisode 9).

Comme dans l'épisode 13 de la séance de résolution de la tâche T1, le *geste d'itération de ligne* est produit avec la main étendue perpendiculairement à une ligne horizontale imaginaire, comme une trace qui délimite un segment à l'intérieur de celle-ci (voir figure 8.48).

La main parcourt la ligne imaginaire tout en pointant des endroits qui la divisent. Ici le geste est produit en coordination avec le mot « *rangés* ». Le premier petit coup produit indique une extrémité de la ligne de boîtes dans le tableau. Le geste entier est produit sur le tableau (et sur la ligne de boîtes) sans que le reste de petits coups ait, selon notre interprétation, une fonction déictique. D'autant plus que les petits coups ne coïncident avec l'extrémité d'aucune boîte et le geste ne parcourt pas toute la ligne. Nous considérons donc que le geste évoque l'action d'itération de boîtes, qui permet, compte tenu du discours, de ranger les 72 cubes en boîtes. La fonction que l'action a dans cette allusion est, pour nous, épistémique non multiplicative.

Nous observons également, pour la première fois, la production du geste que nous avons

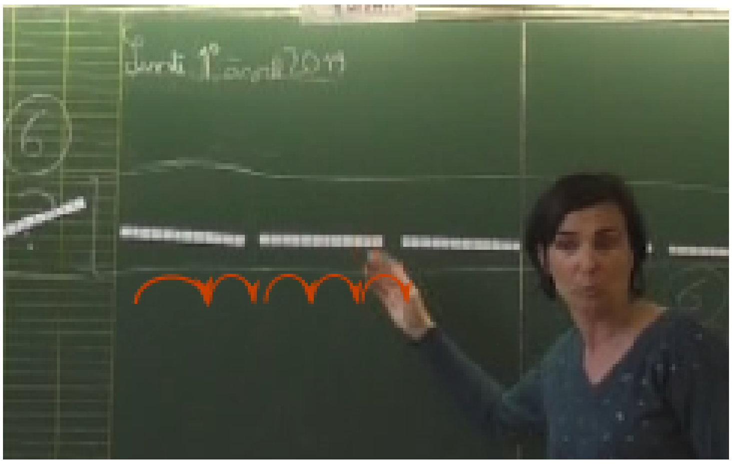


Figure 8.48 – Capture d'écran lors de la production du *geste d'itération en ligne*. Les flèches orange indiquent le chemin que les mains ont parcouru et la direction du geste.

dénommé *geste d'organiser*. Nous présentons dans la figure 8.49 une représentation de sa structure visuospatiale. Le geste a été coordonné avec la phrase « *vous les avez organisés* », d'après le contexte de production du geste, le complément d'objet direct « les » remplaçant l'expression « soixante-douze cubes ».

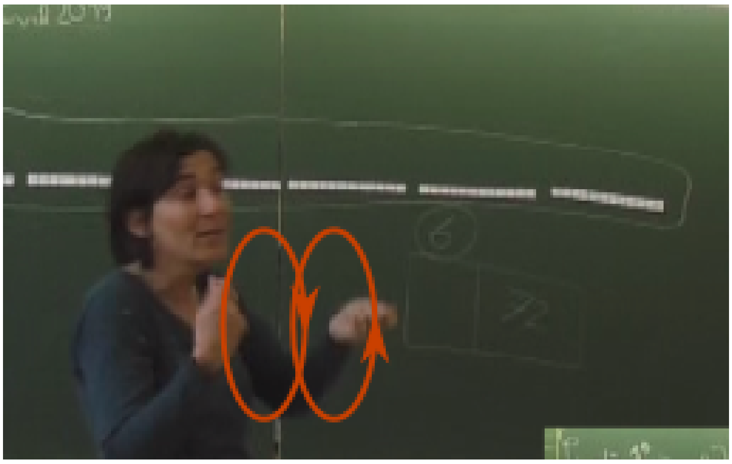


Figure 8.49 – Capture d'écran lors de la production du *geste d'organiser*. Les flèches orange indiquent le chemin que les mains ont parcouru et la direction du geste.

Le *geste d'organiser* comprend le mouvement circulaire des deux mains de l'enseignante tendues. Chaque main dessine, comme pour le *geste en tout* (cf. épisode 9 de la séance de résolution de la tâche T_1), un cercle dans l'air. Nous considérons que l'opposition des directions dans le dessin des deux cercles (voir figure 8.49) montre une différenciation de deux états du tout, la grandeur 72 cubes en l'occurrence. Le parallélisme des plans qui contiennent les cercles dessinés évoque aussi leur confrontation. Revêtu de la structure visuospatiale du *geste en tout*, nous considérons que le geste d'organiser évoque dans un sens métaphorique une modification dans l'*organisation* du tout. Avec la production de ce geste, l'enseignante fournit une autre signification incarnée à la généralisation des situations division partage : dans ce type de situation, la grandeur qui joue le rôle du tout dans la relation multiplicative est *organisée* au sens du geste pour révéler l'inconnue.

Nous observons également, pour la première fois, la production du geste que nous avons dénommé *geste iconique de distribuer*. Nous présentons dans la figure 8.50 une représentation de sa structure visuospatiale.

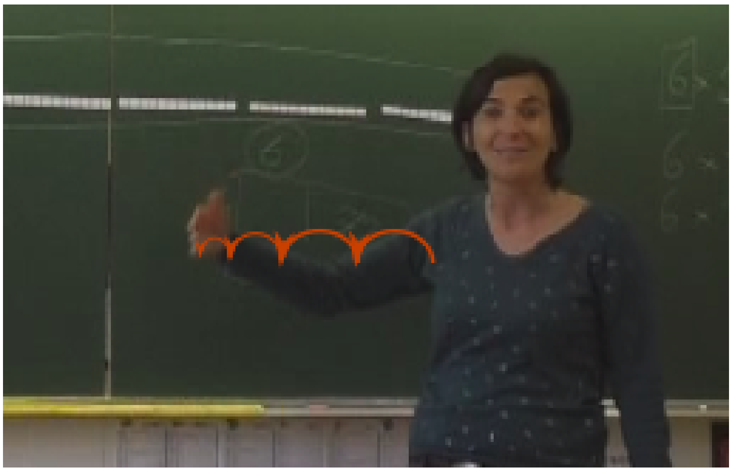


Figure 8.50 – Capture d'écran lors de la production du *geste iconique de distribuer*. Les flèches orange indiquent le chemin que la main a suivi lors de la production du geste.

Le geste est effectué avec la main droite de l'enseignante plus ou moins détendue, avec l'index légèrement en saillie. Approximativement sur une ligne horizontale imaginaire, l'enseignante exécute rapidement des petits coups depuis son tronc vers l'extérieur (voir figure 8.50). Les coups sont donc produits de droite à gauche du point de vue de la classe. Nous reviendrons sur cet aspect pour l'interprétation du *geste de distribution en ligne* produit dans cette intervention. Le geste iconique de distribuer a été coordonné avec la phrase « *vous les avez distribués* ». Comme le geste d'organiser, le mot « les » remplace la grandeur 72 cubes. En l'absence de relations spatiales importantes, du moins pour autant que nous puissions l'observer, une dimension iconique est imposée au geste. Nous considérons en conséquence que le geste renvoi figurativement à l'action quotidienne de distribuer. Ainsi, l'enseignante enrichit, par la coordination du geste et de la parole, les significations qui sont associées au type de situations en question, au sens pragmatique de l'action incarné.

Nous observons par la première fois la production du geste que nous avons dénommé *geste de distribution en ligne*. Nous présentons dans la figure 8.51 une représentation de sa structure visuospatiale.

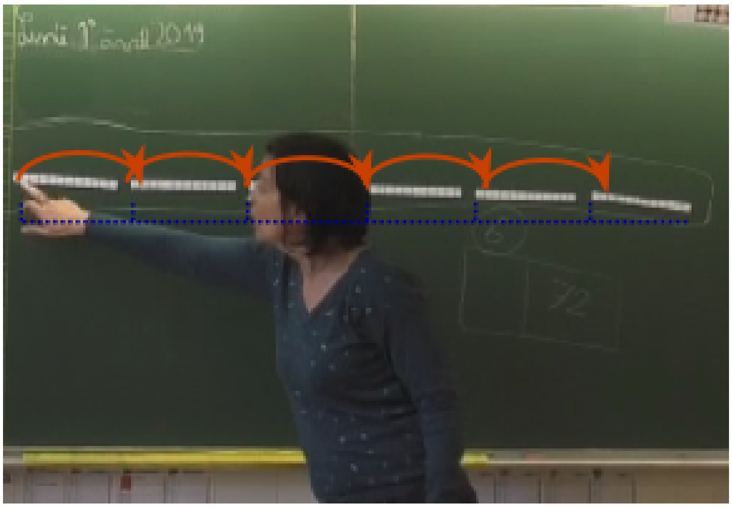


Figure 8.51 – Capture d'écran lors de la production du *geste de distribution en ligne*. Les flèches orange indiquent le chemin que la main a suivi lors de la production du geste. Les lignes pointillées bleues représentent la structure visuospatiale à partir de laquelle nous interprétons le geste.

Le geste est produit deux fois, coordonné avec la phrase « *un cube, un cube, un cube, un cube, un cube, un cube* », la première fois, et « *deux cubes, deux cubes, deux cubes, deux cubes, deux cubes, deux cubes* », la seconde fois. Le geste est produit en référence à la représentation de la ligne avec le matériel aimanté. Ainsi, le recours au tableau par l'enseignante permet de relier au geste l'expérience manipulatoire avec l'artefact *boîtes et cubes*. Le majeur de la main de l'enseignante produit six petits coups de gauche à droite du point de vue d'une observatrice. Chaque coup est coordonné avec une phrase évoquant une quantité de cubes (un cube ou deux cubes, respectivement) et indique les premiers cubes des boîtes qui conforment la ligne de boîtes dans le tableau. La quantité de cubes énoncée correspond (plus ou moins) à la quantité de cubes signalée dans les boîtes si elles sont remplies de gauche à droite du point de vue d'une observatrice (voir la figure 8.51).

Avec l'index légèrement en saillie, la main [19] est dans la position du geste iconique de la distribution. Le mouvement de la main est également similaire. La parole et le geste sont coordonnés pour montrer chaque fois les grandeurs qui sont induites par l'action incarnée de distribution ou de partage. Nous tenons également à souligner que la ligne de boîtes indiquée par le geste est sur la case du tout de la *grille fois-partie-tout*, de sorte que le concept du tout est ancré au

19. Le geste est structurellement assez similaire au *geste d'itération en ligne* produit lors de cette intervention, mais avec des différences qui nous semblent suffisamment remarquables pour considérer que les significations véhiculées sont différentes. La différence majeure consiste en la position de la main lors de l'exécution du geste. Dans le *geste d'itération en ligne*, la main est tendue, toujours perpendiculaire à la ligne imaginaire tracée par le geste.

sensuel. Il existe également un accord entre la valeur numérique du nombre de fois, le nombre de coups du geste, et le nombre de fois que les expressions « *un cube* » ou « *deux cubes* » sont prononcées. Il nous semble que ces ressources sémiotiques sont coordonnées pour révéler la partie par le biais de l'action incarnée sur les cubes constituant le tout, tout en respectant le nombre de fois. Dans une fonction multiplicative, l'action incarnée de partage sert pour signifier la relation multiplicative entre les grandeurs. Il s'agit d'un signe pivot, dans sa vocation de faire évoluer la signification quotidienne de l'action incarnée de partage, attachée à la manipulation de l'artefact *boîtes et cubes*, vers la signification mathématique d'opération de division partage (en lien avec la relation multiplicative).

Nous observons que l'enseignante produit ensuite le *geste de distribution en ligne* (même structure visuospatiale que sur le tableau) mais cette fois sans indiquer la ligne de boîtes (voir figure 8.52).

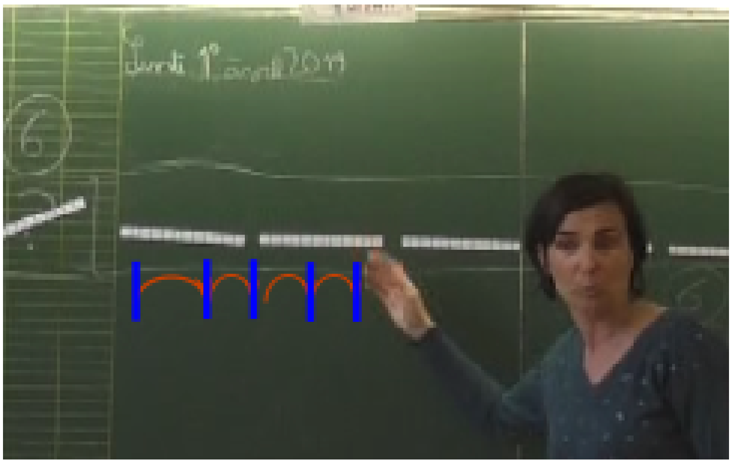


Figure 8.52 – Capture d'écran lors de la production du *geste de distribution en ligne* de transition, produit sans indiquer la ligne de boîtes. Les flèches orange indiquent le chemin que la main a suivi lors de la production du geste.

Le geste est coordonné avec la phrase « *trois, trois, trois, trois, trois, trois* » et chaque coup coordonné avec le mot « *trois* ». La fonction multiplicative du geste devient moins explicite par rapport au *geste de distribution en ligne* produit en indiquant la ligne de boîtes sur le tableau. En effet, les grandeurs évoquées ne sont pas associées à un terme dans la relation multiplicative. Le geste nous semble servir de transition au geste iconique de distribuer, produit ensuite : l'enseignante se tourne vers la classe pour produire ce geste de transition, de sorte qu'elle n'a plus recours au tableau (le geste n'a pas donc fonction déictique).

L'enseignante produit enfin le geste iconique d'itérer (les mouvements sont produits depuis son tronc et vers sa droite) en coordination avec la phrase « *quatre, quatre, quatre, quatre, quatre* ».

Les petits coups sont moins prononcés et sont produits plus rapidement, sans faire coïncider leur exécution avec le mot « *quatre* ». Le geste nous semble encore évoque l'action pragmatique de distribuer.

Nous observons ainsi des différences importantes, similaires à celles que nous avons trouvé pour le *geste d'itération en ligne* (produit sur la ligne de boîtes dans le tableau) et le geste iconique d'itérer, bien que les gestes gardent certaines similitudes comme la position de la main lors de l'exécution de ceux-ci. En ce qui concerne la structure visuospatiale des gestes, une différence remarquable consiste en la structure des gestes et la direction que suit la main lors de l'exécution des gestes. L'élaboration du *geste de distribution en ligne* s'adapte à la représentation de la ligne de boîtes avec le matériel aimanté, il suit alors la direction usuelle (culturelle) de la construction de la ligne, de gauche à droite, selon le point de vue d'une observatrice. Dans sa nature iconique, le geste iconique de distribution, par contre, n'a pas de contraintes structurelles. Il suit donc probablement la direction la plus pratique pour l'enseignante, de son tronc vers l'extérieur (de droite à gauche du point de la classe). Nous observons également des différences similaires par rapport à la coordination avec la parole. Le *geste d'itération en ligne* est coordonné avec des phrases désignant des grandeurs. Ces grandeurs sont reliées par le geste au tout et au nombre de fois. Le geste iconique d'itérer a été coordonné avec l'infinitif du verbe « distribuer » dans la première exécution et avec des nombres, dans la seconde, sans toutefois établir une correspondance avec ceux-ci.

Épisode 12 : Correction de la sous-tâche ST2

L'enseignante efface la grille partie-fois-tout et les calculs correspondant à la sous-tâche ST1, ne laissant au tableau que la ligne de six boîtes de 12 cubes représentée par le matériel aimanté. Une élève, Colette, se porte volontaire pour résoudre la sous-tâche ST2. L'élève déplace les boîtes en trois colonnes de deux boîtes chacune. Colette dit lors de la manipulation : « *alors, on en a donné une pour une personne, une, une autre personne et encore une autre personne. . .* » (voir figure 8.53).

L'élève imprime ainsi dans son action une narrative personnelle comme une forme particulière de percevoir la situation. Ainsi, l'élève donne un sens à la nouvelle configuration spatiale des boîtes, qu'elle rend évidente pour elle-même et pour le reste de la classe à travers l'action qui se déroule dans ce fil narratif. L'enseignante souligne l'initiative de l'élève et dit : « *super, en imaginant qu'il avait trois personnes, très bien* ».

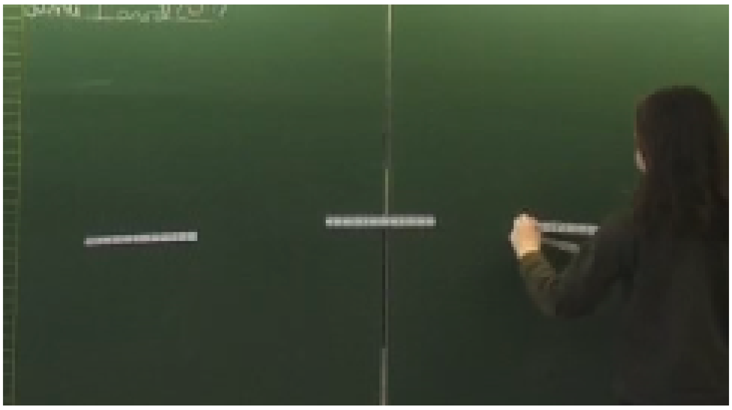


Figure 8.53 – Colette partage les boîtes lorsqu'elle raconte une histoire de partage avec des personnes.

Pour construire la *grille fois-partie-tout*, Colette entoure d'abord sa production dans la case du tout, comme l'a fait l'enseignante précédemment (cf. épisode 11, page 244). Elle remplit le reste des cases avec des nombres, met 3 pour le nombre de fois et, alors qu'elle s'apprête à remplir la case de la partie avec 12 (nous l'observons dans le mouvement que son bras suit), l'enseignante lui demande de le faire avec le matériel aimanté. L'élève répète son erreur et ne met qu'une seule boîte de 12 cubes dans la partie. Le signe-artefact que Colette a produit est présentée dans la figure 8.54.

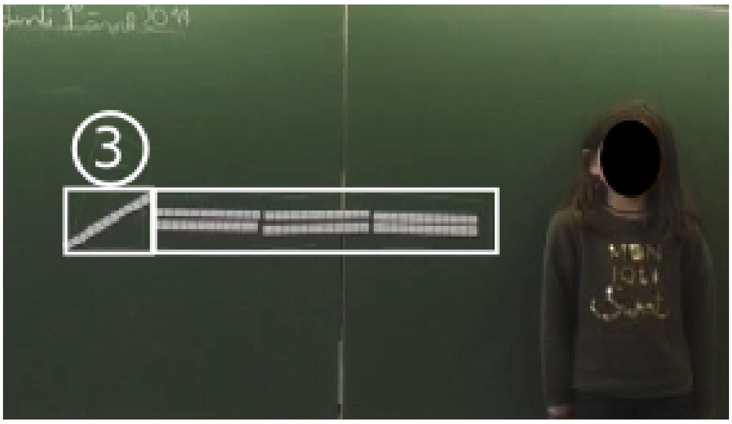


Figure 8.54 – Erreur de remplissage de la partie dans la *grille fois-partie-tout*.

L'enseignante, qui pourrait avoir tout simplement souligné l'erreur de l'élève, demande au reste de la classe de réagir à la résolution de l'élève. Elle encourage une attitude réflexive et critique des élèves face aux productions d'autres. La classe est d'accord avec la production de l'élève (assentiment général). Comme aucun avis contraire n'est exprimé, l'enseignante explicite son désaccord, ce qui incite l'élève à retourner à sa production. L'élève efface le nombre 3 dans le cercle du nombre de fois. L'enseignante essaie d'amener l'élève à la bonne réponse en lui demandant « *si on fait trois fois douze, est-ce qu'on obtient ce qui est dans le tout ?* ». L'élève fait néanmoins encore une erreur en mettant 2 dans le cercle du nombre de fois. Le changement de réponse nous semble intéressant, car l'élève évoque une signification mathématique du groupe de deux boîtes, $12c \times 2$ (voir analyse *a priori* de la tâche). Le problème est que ces deux termes ne sont pas en relation multiplicative avec la grandeur 72 cubes. L'erreur reprend dans une certaine façon ceux des élèves enregistré·e·s lors du travail en groupe : la prise d'une position intentionnelle focalisée sur la ligne de deux boîtes de 12. L'enseignante réagit « *Non. Ma belle, le trois tu l'avais juste, parce que c'était bien. On va bien répéter bien trois fois cette quantité, quelle quantité? Quelle partie? Dans la partie tu t'es trompée* ». Colette remet le nombre 3 dans le cercle du nombre de fois. Elle n'arrive pas pourtant à prendre conscience de la grandeur qui joue le rôle de la partie. L'enseignante lui dit : « *trois fois quoi? Tu l'as sous tes yeux! trois fois quoi?* », mais Colette est bloquée et n'arrive pas à trouver la partie. Enfin, l'enseignante prend le relais. Elle s'approche de Colette et la rassure, ce qui met en évidence l'implication d'une dimension émotionnelle dans l'apprentissage. Elle prend alors deux boîtes aimantées et les lui montre (ce que dit l'enseignante à ce moment-là est incompressible). Nous présentons dans la figure 8.55 une capture d'écran de ce moment. Colette met ensuite les boîtes dans la case de la partie.

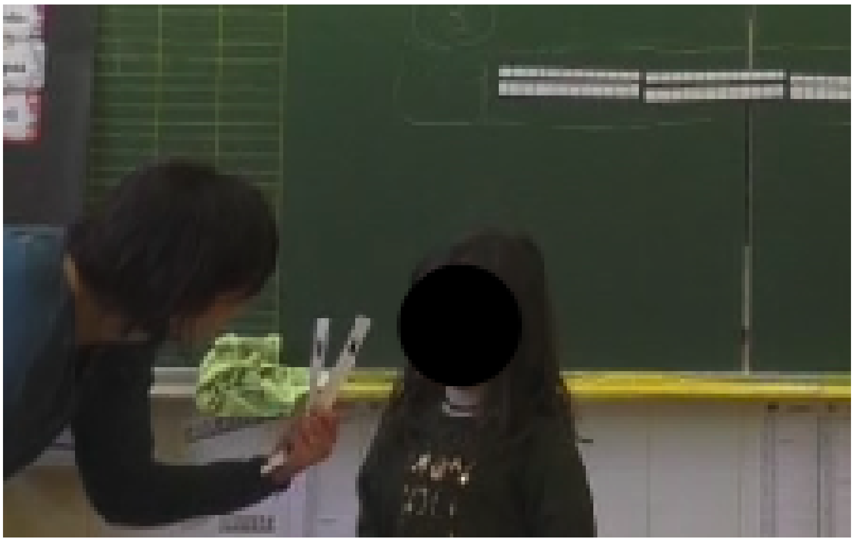


Figure 8.55 – Enseignante prend deux boîtes aimantées et les montre à Colette pour l'indiquer la grandeur qui joue le rôle de la partie.

Nous constatons ainsi que l'élève n'a pas pu se rendre compte de la relation multiplicative sous-jacente, bien qu'elle ait mis en évidence sa compréhension de la situation quotidienne de partager. La fonction de l'action incarnée de partage qu'elle a réalisée semble ainsi être épistémique non multiplicative.

L'enseignante revient à la *grille fois-partie-tout* sur le tableau. L'enseignante met également en relation la production de l'élève avec les actions d'organisation et de distribution précédemment évoquées à l'aide des gestes : « *vous avez vu de quelle manière elle a organisé, de quelle manière elle a distribué les boites en trois parties pour trouver la réponse.* [Gestes déictiques sur chaque colonne de deux boîtes de 12] ». L'enseignante prend cette fois appui sur la disposition du matériel de manipulation pour contribuer à la généralisation des situations impliquant une division partage. Pour interpréter le rôle de la partie dans la situation de manipulation en question, l'enseignante utilise la narrative introduite par Colette et dit : « *pour une personne, comme elle disait, c'est combien de cubes* ».

Épisode 13 : Correction de la sous-tâche ST3

Pour récapituler, l'enseignante refait les *grilles fois-partie-tout* des sous-tâches ST1 et ST2, remplit le tout et le nombre de fois avec des nombres (et présente ainsi les réponses aux sous-tâches ST1$_b$ et ST2$_b$) et met un point d'interrogation sur la case de la partie. L'enseignante pose ensuite la question de l'inconnue dans les problèmes résolus, pour ainsi répondre à la dernière question. Il s'agit d'une étape cruciale pour évoquer l'opération de division partage qui résout les problèmes rencontrés. Un élève fait une erreur et dit que l'inconnue était le nombre de fois, ce à quoi une partie de la classe réagit rapidement en désapprouvant. Sachant qu'une simple réponse réprobatrice à la réponse de l'élève serait probablement insuffisante pour que l'élève et celles/ceux qui partagent son avis se rendent compte de l'erreur, l'enseignante exploite diverses ressources sémiotiques multimodales pour faire apparaître le nombre de fois comme un terme connu.

L'enseignante prend appui sur la production de Colette et dit : « *vous avez cherché le nombre de fois, là, tu ne savais pas que c'était en trois fois, là ?* ». Elle coordonne la formulation de la phrase avec des gestes déictiques qui désignent les trois colonnes qui sont dans la case du tout de la *grille fois-partie-tout* complétée par l'élève (voir figure 8.56).

L'enseignante revient ensuite à la première question, elle utilise des gestes et la parole. Elle dit « *Et la première question, tu ne savais pas que s'était en six fois?* [Geste d'itération en ligne dans l'air] », « *est-ce que tu savais six fois* [Geste d'itération de traits, voir figure 8.57] *qu'on devait répéter, qu'on avait droit à six fois ?* [Geste d'itération de traits] ».

Figure 8.56 – L'enseignante indique les groupes de deux boîtes dans le tout pour faire apparaître le nombre de fois.

Nous observons, pour la première fois, la production du geste que nous avons dénommé *geste d'itération de traits*. Nous présentons dans la figure 8.57 une représentation de sa structure visuospatiale.

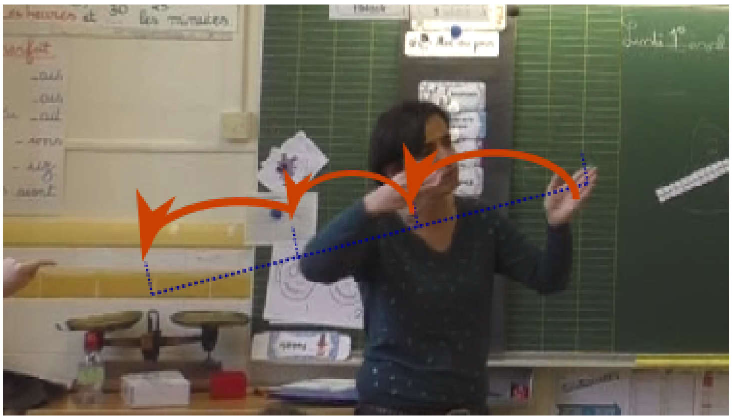


Figure 8.57 – Geste d'itération de traits. Les flèches orange indiquent le chemin que la main a suivi lors de la production du geste. Les lignes bleues représentent la structure visuospatiale à partir de laquelle nous interprétons le geste.

Dans l'élaboration du geste, les deux mains sont toujours tendues, et les paumes sont tournées l'une vers l'autre et espacées. Cette position des mains est similaire à celle du *geste de la boîte comme unité* (cf. épisode 2 de la séance S_1). Nous considérons qu'elle évoque dans un sens métaphorique la boîte de 12 cubes, étant donné l'allusion à la sous-tâche ST1. L'enseignante déplace ses mains dans cette position (l'espace entre ses mains ne change pas) le long d'une ligne horizontale imaginaire, en produisant trois petits coups, à la manière du *geste d'itération en ligne*. L'enseignante semble chercher, par les ressources sémiotiques qu'elle mobilise, à faire rencontrer aux élèves le nombre de fois dans la relation multiplicative en question, afin d'interroger le caractère supposé inconnu du nombre de fois dans les situations étudiées. Le nombre de fois se manifeste par rapport aux autres grandeurs en relation multiplicative par l'action incarnée d'itération de boîtes évoquée par les gestes et la parole.

La correction de la sous-tâche ST3 se termine par un retour à la question. Un élève répond correctement et dit « *la partie* ». L'enseignante reprend les deux grilles dessinées précédemment, dans lesquelles figurait un point d'interrogation dans la partie, et les remplit à partir des réponses des élèves. L'enseignante réécrit l'expression multiplicative symbolique pour la sous-tâche ST1 ($12c \times 6 = 72c$). L'enseignante se focalise ensuite sur la partie en tant qu'inconnue dans la relation multiplicative pour évoquer l'opération de division partage. Elle revient à l'expression multiplicative relative à la sous-tâche ST1 et dit : « *Quand on cherche la partie, ici,* [L'enseignante entoure $12c$ dans l'expression multiplicative qu'elle venait d'écrire dans le tableau] « *quand on sait le nombre de fois et qu'on cherche une partie, ça revient. . . En fait on trouve le résultat par une division* ». L'enseignante revient à l'expression symbolique qu'elle avait écrite tout au départ de la synthèse dans le coin supérieur droit du tableau, $72c : 6 = 12c$, à partir du calcul proposé par Éloïse (cf. épisode 10). L'enseignante dit « *C'est ce qu'a fait Éloïse ici.* [Geste déictique sur l'expression $72c : 6 = 12c$] *Une division qu'on appelle une division partage.* ». Le nom de l'opération sert à relier les problèmes résolus, la partie comme l'inconnue de la relation multiplicative et les expressions symboliques associées. L'enseignante réécrit l'expression symbolique qui était dans le coin juste en bas de l'expression $72c : 6 = 12c$, lorsqu'elle énonce à l'orale les grandeurs en relation multiplicative. Il s'agit d'une instance clé du processus d'objectivation par lequel les élèves prennent conscience des manières culturellement et historiquement constituées de penser. Éloïse se porte volontaire pour passer au tableau écrire la multiplication et la division relatives à la sous-tâche ST2 (et résoudre alors la sous-tâche $ST2_c$). Elle écrit : $24 \times 3 = 72$ et $72 : 3 = 24$ (pas d'unité de grandeur). Les formes symboliques introduites pour exprimer l'opération de division sont ainsi associées à celles correspondantes à l'opération de multiplication, pour présenter la division comme opération inverse de la multiplication.

8.5.4 Conclusions

Pour la manipulation de l'artefact *boîtes et cubes*, nous observons le recours à un répertoire commun d'outils qui érigent l'action incarnée comme action épistémique quant aux concepts géométriques qui l'orientent. Il s'agit du même phénomène dont nous avons rendu compte dans l'analyse de la séance S_1 Lignes de boîtes de même longueur. En ce qui concerne la résolution de la sous-tâche ST1, nous constatons une prédilection par la résolution par essai et erreur et par le biais des calculs, par rapport à la résolution directe par manipulation, tant de la part des élèves que de l'enseignante. En particulier, le calcul mental a permis aux deux groupes de trouver la grandeur inconnue. Comme l'analyse *a priori* de la tâche permet de le souligner, l'exécution de l'action incarnée de partage comme outil de résolution est lié à une relation plus profonde entre le concept de division partage et la manipulation. D'autant plus que cette résolution implique de travailler avec la partie en tant qu'inconnue.

De plus, nous constatons que les élèves du groupe G1 ont rencontré des difficultés à prendre conscience des grandeurs de l'énoncé et leurs relations. L'objectivation de la relation multiplicative sous-jacente a poursuivi un processus de plusieurs tentatives motivées par l'identification isolée de certains termes. Les interventions de l'enseignante ont permis aux élèves de confronter leurs hypothèses aux conditions du problème, ce qui met d'ailleurs en évidence le caractère social du processus d'objectivation.

Les élèves du groupe G2 ont fait recours à la *grille fois-partie-tout* pour objectiver la relation multiplicative tout au départ. La résolution de la sous-tâche ST1 est orchestrée dans le groupe G2 par les productions sémiotiques diverses des élèves Pierre et Raoul. Ils évoquent les grandeurs de la situation et les relations qu'ils perçoivent entre elles. Les significations élaborées sont constamment reprises par l'autre dans le terrain commun de la conversation, et évoluent pour offrir des instances de réflexion toujours plus profondes.

En tant que réalisation de l'action incarnée reléguée à une dimension quotidienne, la sous-tâche ST2 est facilement résolue. Les élèves rencontrent pourtant des difficultés à interpréter cette expérience manipulatoire à la lumière de la relation multiplicative qui relie les grandeurs impliquées. Nous nous permettons de reprendre les mots de Raoul du groupe G2 à ce sujet : « *non mais moi, mon problème c'est comment le poser. C'est pas comment le calculer, en fait. De coup, le calcul je sais déjà qu'il fait vingt-quatre.* ». Il nous semble qu'un des facteurs qui a pu contribuer aux difficultés des élèves peut résider dans la confluence de diverses significations mathématiques dans la partie. Comme nous l'avons signalé dans l'analyse *a priori* de la tâche, l'ensemble de deux boîtes correspond à la fois un groupe de deux boîtes, voire une ligne ; et deux boîtes considérées séparément. En conséquence, les grandeurs qui sont évoquées par le matériel sont plus que celles évoquées par une boîte de cubes. La trace écrite du travail conjoint sur la feuille de réponses du groupe G1 semble pointer dans la même direction, selon notre hypothèse : la symbolisation de la grandeur en tant qu'unité peut soutenir l'objectivation du rapport entre grandeurs. Le contrat didactique peut également avoir eu un effet, car la partie était toujours une boîte, dans les autres séances de résolution de problème avec l'artefact *boîtes et cubes* (séances S_1 et S_4, qui ont lieu avant de cette séance).

Nous avons également observé lors du travail en groupe une certaine tendance des élèves à privilégier l'utilisation des calculs et des résultats des tables de multiplication pour résoudre la tâche. Elles sont en particulier privilégiées par rapport à d'autres moyens comme celui de la manipulation. Il est possible que les calculs soient perçus comme un outil à privilégier pour résoudre les tâches multiplicatives (contrat didactique). Jean du groupe G1 le met en évidence lorsqu'il exprime à l'enseignante sa croyance sur l'impossibilité de résoudre la sous-tâche ST1 avec un résultat issu des tables de multiplication. Dans le groupe G2, Pierre et Raoul soutiennent une pensée sophistiquée par le biais du calcul mental, sans pour autant être en mesure d'aborder l'expérience de manipulation de l'artefact de manière significative.

Comme dans la séance S_1, nous avons observé ici dans le travail en groupe et dans la synthèse le recours de l'enseignante à diverses ressources sémiotiques multimodales pour objectiver l'opération de division partage. Nous tenons à souligner le recours à l'intonation au rythme par l'enseignante comme dispositifs sémiotiques pour mettre en évidence certaines significations, ce qui a pour conséquence d'enrichir et d'approfondir le processus d'objectivation des termes de la relation multiplicative en cours. Cette exploitation nous rappelle l'interprétation de la généralisation algébrique comme un processus similaire à la création d'une sculpture ou d'un tableau chez Radford (2008a). La similitude réside dans le rôle crucial du contraste entre certains éléments qui sont mis en avant et certains d'autres qui sont laissés à l'arrière, afin de remarquer ce qui doit être remarqué.

Les gestes que l'enseignante produit ont également une place remarquable dans l'appréhension phénoménologique du général quant aux problèmes rencontrés. La fonction épistémique non multiplicative des actions incarnées évoquées par ces gestes esquisse un type de problème dans lequel la partie est l'inconnue. Nous soulignons également le *geste de distribution de ligne*, dans lequel l'action incarnée de partage fait apparaître de manière significative la partie comme le terme inconnu dans la relation multiplicative entre grandeurs. Nous constatons des différences structurales importantes avec le geste iconique d'itérer, dont la signification est encadrée dans une sphère quotidienne. Il nous semble que ces différences ne font que souligner l'intervention de la fonction multiplicative de l'action incarnée de partage dans le premier geste. L'enseignante adapte le geste pour le coordonner sensuellement avec d'autres ressources sémiotiques, notamment l'artefact *grille fois-partie-tout*, afin de présenter une manière incarnée de percevoir la division partage dans la manipulation.

8.6 Observables de la séance S_5

Nous présentons dans la suite l'analyse du segment saillant que nous avons repéré dans la séance S_5. La séance S_5 est dénommée *Groupes dans les lignes*. Nous appelons l'observable *Action incarnée de la main ouverte*. Nous l'évoquons dans la séance S_3 (*cf.* épisode 3, p. 276). Nous appelons ce segment *Action incarnée de la main ouverte*. La séance S_5 a eu lieu deux mois avant la séance S_3. La séance S_5 porte sur la division groupement. Elle implique l'artefact *boîtes et cubes* et l'artefact *grille fois-partie-tout*.

8.6.1 Action incarnée de la main ouverte

Nous observons Pierre réaliser une action incarnée dont la forme ressemble au *geste de la main ouverte*, produit par l'enseignante lors de la deuxième séance de résolution de problème S_3. Pierre la produit dans deux occasions : dans le travail en groupe et lors de la synthèse. Lors du travail en groupe, les élèves avaient construit une ligne de boîtes de 4 cubes. Les élèves venaient de faire une ligne de boites de quinze boîtes de 4 cubes pour répondre à la première question. Les élèves du groupe devaient alors répondre : « *Combien de groupes de* 12 *cubes il y a-t-il sur la ligne que vous venez de faire?* ». Pierre propose, au moyen de la coordination sensuelle de la parole et de l'action, de prendre des groupes de trois boîtes. Il dit : « *regardez, on fait comme ça* ». Il déplace des groupes de trois boîtes et à chaque fois il dit « *douze* » (voir figure 8.58).

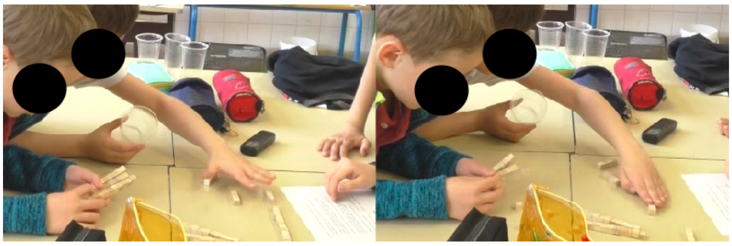


Figure 8.58 – Pierre propose aux élèves du groupe de faire des groupes de trois boîtes de 4 cubes pour répondre à la question. De gauche à droite une séquence de captures d'image de l'action.

Il nous semble que la fonction de l'action n'est pas seulement pragmatique, car l'élève cherche à rendre apparente la décomposition de la ligne en groupes de trois boîtes à travers l'action. Nous constatons une similitude avec le geste de la main ouverte produit par l'enseignante lors de la séance S_3 (*cf.* épisode 3, page 279) : la position de la main ouverte permet de couvrir le groupe de boîtes indiqué par l'élève. Nous faisons l'hypothèse que l'action incarnée a une fonction multiplicative dans la mesure où elle symbolise l'ensemble de boîtes prises comme un groupe.

Pierre passe également au tableau lors de la synthèse. L'enseignante lui demande de répondre à la deuxième question à travers l'utilisation de l'artefact *grille fois-partie-tout*, remplie avec le matériel aimanté. L'élève dit « *On met trois comme ça on fait douze* » ; il reproduit alors la même action (voir figure 8.59).

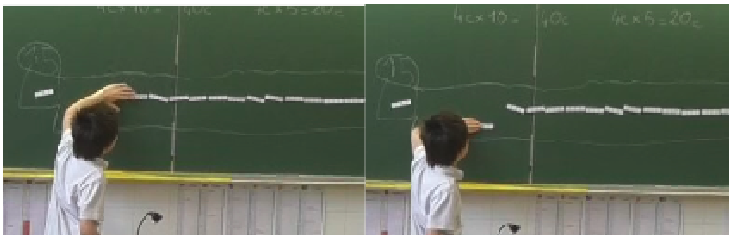


Figure 8.59 – Pierre montre à la classe l'action incarnée de grouper comme moyen pour répondre à la question. De gauche à droite une séquence de captures d'image de l'action.

8.7 Observables de la séance S_6

Nous présentons dans la suite l'analyse des segments saillants que nous avons repérés dans la séance S_6. La séance S_6 est dénommée *Élaboration de problème*. Nous évoquons les observables que nous avons identifiés dans la séance S_3, à préciser ci-dessous. Nous appelons ces observables : *Groupement, c'est faire des groupes*, *Anecdote du problème de multiplication de Raoul* et *Erreur pour identifier un problème de division groupement*. Nous les avons évoqués dans l'analyse de la séance S_3 dans la présentation de l'épisode 2 (page 274 pour le premier, page 273 pour les autres deux). La séance S_6 est la première séance d'élaboration de problème et a eu lieu deux semaines avant la séance S_3. Elle implique l'artefact *grille fois-partie-tout*.

8.7.1 Groupement, c'est faire des groupes :

Éloïse est censée élaborer un problème de division groupement. Au début, elle parlait à un élève du groupe de l'opération qui lui avait été attribuée, puis elle a commencé à se parler à elle-même. Elle réfléchit sur la nature conceptuelle de l'inconnue que l'opération de division groupement permet de trouver en termes de relation multiplicative. Il s'agit du nombre de fois. La réflexion de l'élève est soutenue par une coordination sensuelle de la parole et du geste, qui rendent compte des ses hésitations : « *La division groupement, c'est quand tu as pas la partie? Groupement, tu fais de groupes,* [Geste iconique de grouper, décrit ci-dessous] *Oui, donc c'est quand tu as pas la partie... Non, c'est quand tu as pas les fois. Voilà, c'est ça !* ». L'élève commence par évoquer la partie, mais cette assertion ne la convainc pas. Elle approfondit donc sa réflexion, par l'intermédiaire d'un geste qui nous semble accomplir une fonction cruciale. Nous l'avons dénommé *geste iconique de grouper*. Nous présentons une représentation de la structure visuospatiale du geste dans la figure 8.60.

L'élève produit le geste avec les deux mains entrouvertes, les paumes tournées l'une vers l'autre. Lors de l'exécution du geste, l'élève déplace les paumes jusqu'à les faire rencontrer. Notons que si l'élève avait des objets physiques à portée de main, le mouvement effectué lui aurait permis de les rassembler en un groupe. Il nous semble donc que le geste de l'élève fait apparaître l'action de « *faire des groupes* », ou de grouper, au sens quotidien de celle-ci. D'où le caractère iconique que nous avons attribué au geste. En conséquence, l'élève évoque une situation de groupement, dans laquelle l'action incarnée accomplit une fonction pragmatique, en espé-

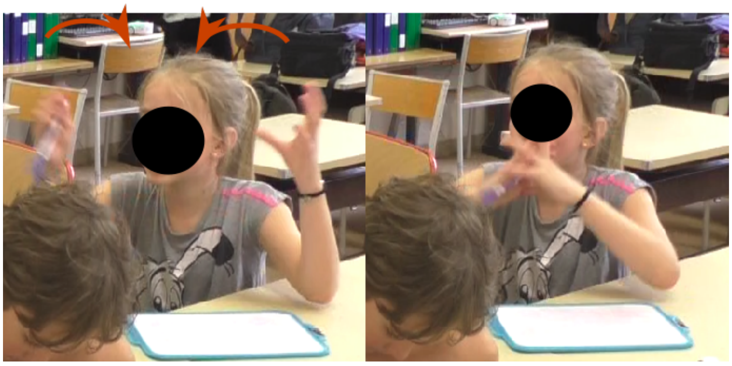


Figure 8.60 – Séquence d'image qui montre l'élaboration du geste iconique de grouper par Éloïse.

rant qu'elle puisse l'orienter vers la reconnaissance de l'inconnue dans la relation multiplicative. L'élève signale encore une fois la partie comme l'inconnue que l'opération de division groupement permet de trouver, mais elle termine en évoquant le nombre de fois, « *les fois* ». Ce n'est pas pour autant qu'elle parvienne à en prendre conscience. En effet, l'élève se dirige ensuite vers l'élève du groupe qui est en charge du problème de multiplication et lui dit : « *Passez-moi la multiplication, Passez-moi la multiplication !* ». Il nous semble donc que l'incertitude demeure. Notre interprétation est que l'élève reconnaît probablement le tout comme l'inconnue que l'opération de multiplication permet de trouver, avec une certitude qu'elle ne peut atteindre pour les opérations de divisions. Le point intéressant réside ici dans le fait que l'évocation de la situation de groupement, par l'action incarnée de grouper, s'avère insuffisante pour lui permettre d'objectiver le rapport entre nombre de fois et la division groupement. Éloïse n'arrive pas à ce moment à ancrer l'expérience incarnée de manière significative pour faire parvenir à la présence le caractère de l'inconnue en termes de relation multiplicative.

8.7.2 Anecdote du problème de multiplication de Raoul :

Les élèves devaient travailler avec la relation multiplicative huit fois six chocolats égale quarante-huit chocolats. Raoul intervient dans la synthèse après la lecture de quelques élèves qui n'avaient pas respecté la consigne du matériel (soit par le type de matériel, soit parce que les grandeurs ne correspondaient pas). Il lit son énoncé : « *Louise apporte des chocolats à l'école. Elle les partage entre ses huit amis. Chaque ami a six chocolats. Combien de chocolats a-t-elle apportés ?* ». L'enseignante réagit : « *Alors, on va le garder celui-là, on le garde parce qu'il est très bien, mais c'est quel type de problème ça ? C'est quel type de problème ça ?* ». L'enseignante a vraisemblablement décidé de le garder parce que c'était le seul problème qui respectait les grandeurs proposées. Cependant, elle considère, comme nous allons le confirmer ci-dessous, qu'il s'agit d'un problème de division partage. Elle demande à la classe le type de problème qui correspond à l'énoncé de l'élève. Étant donné que personne ne répond, l'enseignante demande à l'élève de relire l'énoncé. Le dialogue suivant se produit ensuite :

> P – *C'est quel type de problème ? Alain ?*
> Alain – *Division partage*
> P – *Très bien, mon grand !*
> C – *Non* [quelques murmures]
> P – *Attends ! Oui, c'est ça ? Combien de chocolats va avoir chaque ami, tu demandes ?*
> Raoul – *Combien a-t-elle apporté*
> P – *Alors, attends ! Ah !* [Elle rigole et regarde la doctorante] *Bah, non, non, c'est la maîtresse. Excusez-moi, donc c'était bien un problème de multiplication si c'était bien le tout. C'est moi qui ai entendu amis et que je suis allée trop vite. Une dernière fois mon grand,* [Il s'agit de la lecture de l'énoncé] *je suis désolée, je me concentre, je te le promets. Allez !*

L'énoncé de l'élève met en évidence une discordance entre la situation à laquelle l'énoncé fait référence (partage) et l'opération qui résout le problème (multiplication). L'énoncé montre le risque d'erreur qu'une telle mise en correspondance superficielle peut déclencher. L'enseignante souligne le stéréotype des problèmes évoquant une situation de partage, dans lesquels la question se pose sur la grandeur qui correspond à chaque participante du partage. Hors norme, le problème proposé par l'élève fournit une instance de réflexion qui demande aux élèves une objectivation plus profonde de l'opération de multiplication. En particulier, l'enseignante se voit confrontée à la manière particulière de l'élève de présenter son énoncé, faisant apparaître la multiplication dans un problème verbal. Nous soulignons à cet égard que l'enseignante n'avait pas l'habitude de prendre appui sur la relation multiplicative entre grandeurs pour enseigner les opérations de multiplication et de divisions. Nous considérons que cette occasion met en évidence l'émergence d'une forme d'intersubjectivité à laquelle se tiennent l'enseignante et les élèves dans le contexte d'apprentissage : la ZDP (voir paragraphe 2.1.1). La ZDP fournit à l'enseignante une occasion précieuse d'enrichir sa perspective sur la possibilité de problèmes verbaux qui sortent du stéréotype traditionnel, autrement dit le mot partage pour une division partage.

Suite à la troisième lecture de l'énoncé par l'élève, l'enseignante profite de l'occasion pour que les élèves prennent conscience de la discordance entre la situation évoquée et l'opération qui résout le problème de l'énoncé de Raoul. Elle prend appui sur la *grille fois-partie-tout* qui était sur le tableau (voir figure 8.61).

Nous mettons la transcription du dialogue qui a eu lieu.

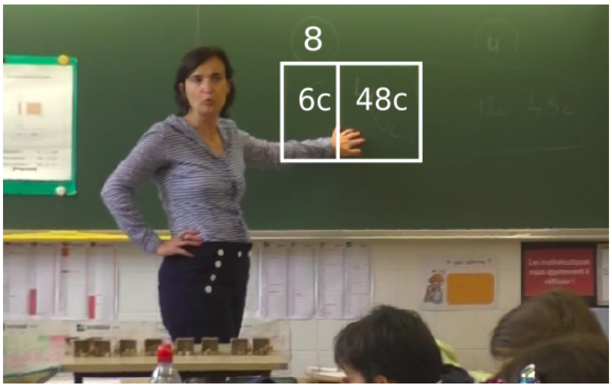


Figure 8.61 – L'enseignante signale la case du tout dans la *grille fois-partie-tout* qui représente la relation multiplicative sur laquelle les élèves devaient travailler.

> P – *Bravo ! Et la maîtresse s'est laissée piéger parce que la maîtresse n'était pas assez concentrée. Pourquoi elle s'est laissée piéger, la maîtresse ?* [Quelques élèves lèvent la main] *Qu'est-ce qu'il a mis ce petit coquin dans l'énoncé pour piéger ? Pour pas faire comme les élèves justement qui voient un mot et qui de coup cherchent* [*sic*] *pas à comprendre ce qu'il se passe ? Pierre*
> Pierre – *Il a mis le mot partage*
> P – *Il a mis le mot partage. Et moi j'ai entendu le mot partage et je suis partie sur une division alors qu'en fait si on doit remplir la grille de Raoul, Raoul il nous donne quoi dans sa grille ?* [L'enseignante indique la *grille fois-partie-tout* qui était sur le tableau] *Il nous donne le nombre d'amis* [L'enseignante indique le cercle du nombre de fois dans la *grille fois-partie-tout*] *et combien chaque ami a de chocolats* [L'enseignante indique la case de la partie dans la *grille fois-partie-tout*] *et donc c'est bien notre tout* [L'enseignante indique la case du tout dans la *grille fois-partie-tout*]. *Bien !* [L'enseignante augmente considérablement le volume de la voix et regarde Raoul lorsqu'elle prononce le mot] *On va le garder celui-là.*

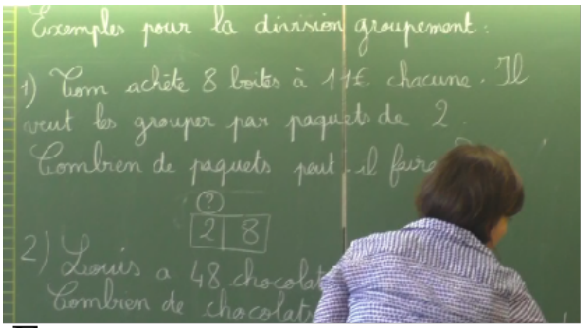
L'enseignante fait d'abord remarquer aux élèves le piège de l'énoncé, ce qui leur permet de se placer d'une manière critique par rapport à la reconnaissance de l'opération de multiplication et de divisions qui permettent de résoudre les problèmes verbaux. La réflexion conduit inévitablement à rendre apparents les aspects conceptuels qui soutiennent leur distinction. L'enseignante se concentre sur le tout pour le signaler comme l'inconnue qui correspond à la multiplication. Elle a recours à la *grille fois-partie-tout* pour objectiver le rôle des grandeurs évoquées par l'énoncé de Raoul dans la relation multiplicative (voir figure 8.61). Par la coordination de gestes déictiques et de la parole, l'enseignante signifie le nombre d'amis en tant que nombre de fois et la quantité de chocolats par ami en tant que partie. Le tout est signalé à la fin en réaffirmant qu'il correspondait bien à l'inconnue du problème. L'enseignante termine par féliciter la proposition créative de l'élève.

L'enseignante écrit l'énoncé sur le tableau, les élèves le copient dans leurs cahiers. Elle représente à la fin la relation multiplicative sous-jacent dont le tout est l'inconnue dans une *grille fois-partie-tout* remplie avec des nombres. Le fait que ce soit l'enseignante qui se trompe participe au fait que ce moment devient crucial : les élèves sont attentif.ves et impliqué·e·s. Elles et ils se souviennent à la séance suivante (séance S$_3$).

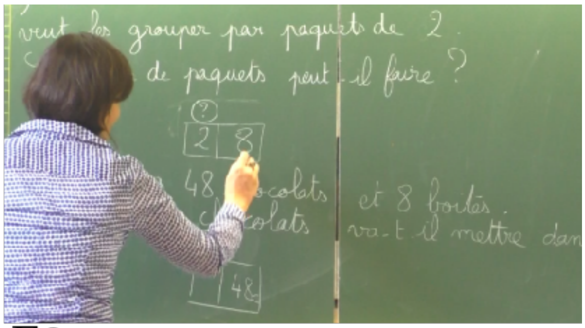
8.7.3 Erreur pour identifier un problème de division groupement :

Dans la synthèse, les élèves devaient présenter des énoncés de problèmes de division groupement. Un problème qui porte sur la grandeur quantité de boîte a été énoncé. Esteban passe au tableau pour lire sa proposition : « *Louis a quarante-huit chocolats et six boîtes. Combien va-t-il mettre dans chaque boîte?* ». L'enseignante acquiesce : « *C'est efficace, vous avez écouté? Redis-le* ». L'élève relit l'énoncé et modifie la quantité de boîtes du problème, qu'il remplace par huit boîtes. Il nous semble que l'enseignante a pu penser qu'il s'agissait d'un problème de division groupement pour la perception de la situation de l'énoncé comme impliquant un groupement d'objets. D'autant plus que les boîtes de chocolats, dans la mesure où elles contiennent les chocolats, évoquent la signification de groupe de chocolats. L'enseignante copie les deux énoncés sur le tableau en tant qu'exemples de problèmes de division groupement. Elle commence par celui donné en premier et complète la *grille fois-partie-tout* avec des nombres. Elle continue avec l'énoncé d'Esteban (voir figure 8.62, F1). L'enseignante écrit ensuite les symboles d'unités de grandeurs lorsqu'elle dit « *je mets les unités de grandeur* ». Elle accompagne d'abord le nombre 48 dans la grille de l'énoncé d'Esteban avec le signe c et continue avec celle du premier énoncé (voir figure 8.62, F2). Une fois le symbole b incorporé en tant qu'unité de grandeur pour la grille du premier énoncé, l'enseignante revient à la *grille fois-partie-tout* de l'énoncé d'Esteban. Elle s'arrête devant la grille un instant (voir figure 8.62, F3) et dit : « *Attendez! C'est une division partage ce que tu nous mets, Esteban. Et vous dites rien!* ».

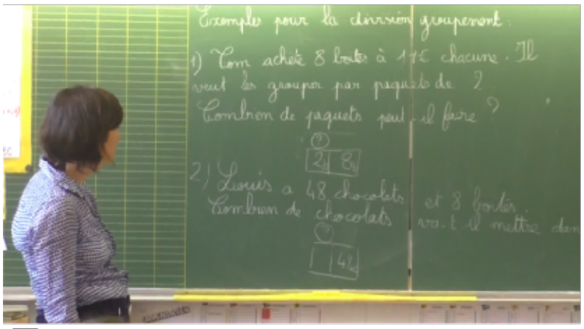
Nous constatons que l'enseignante se rend compte de l'incongruité de l'inconnue de l'énoncé proposé par l'élève au moment de remplir la *grille fois-partie-tout*. La réflexion sur le rôle que jouent les grandeurs dans la relation multiplicative par la médiation de l'artefact pousse l'enseignante à repérer son erreur. Comme montre la séquence d'images, la réflexion est soutenue par l'écriture symbolique des grandeurs avec l'unité de grandeur qui accompagne ce processus. L'enseignante profite de l'occasion pour approfondir le concept de division groupement. Elle invite les élèves à reprendre la production d'Esteban : « *Alors comment on le transforme? Comment on le transforme l'énoncé d'Esteban? Allez! Qui c'est qui me transforme l'énoncé d'Esteban?* ». Elle efface alors une partie de l'énoncé. Un élève propose de grouper les chocolats par six. L'enseignante



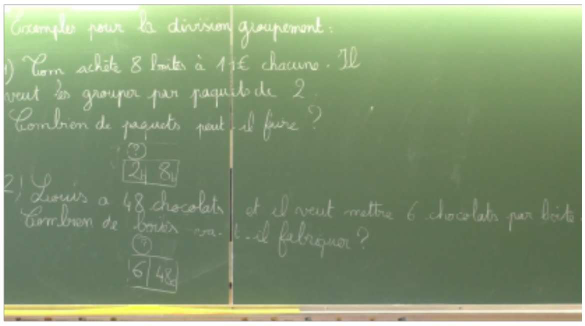
F1



F2



F3



F4

Figure 8.62 – Séquence de photos (F) qui montrent le repérage de l'erreur par la médiation de la *grille fois-partie-tout*.

adapte l'énoncé d'Esteban à la proposition de l'élève, en attribuant des éléments de la situation (voir 8.62, F4). L'enseignante lit l'énoncé final lorsqu'elle écrit les phrases qui permettent de transformer l'énoncé d'Esteban : « *Louis a quarante-huit chocolats et il veut mettre six chocolats par boîte. Combien de boîtes va-t-il fabriquer* ». Elle revient à la *grille fois-partie-tout* pour souligner les aspects du problème qui font qu'il peut se résoudre avec l'opération de division groupement. Elle dit « *C'est juste le contraire. <u>On a le nombre de chocolats dans une boîte</u>* » [L'enseignante remplit avec le nombre 6 la partie de la grille et l'indique avec sa main gauche]. Elle continue : « *Ce qu'on sait pas c'est <u>combien de boîtes on va pouvoir faire.</u>* », lorsqu'elle indique le cercle du nombre de fois remplie avec un point d'interrogation.

8.8 Analyse *a priori* de la tâche T_3 : Élaboration de problèmes

8.8.1 Contexte et description de la tâche

Nous présentons dans cette partie une analyse *a priori* Φ détaillée de la tâche T_3, pour souligner en conclusions 8.8.3 sur les enjeux liés à nos questions.

Contexte et but

La séance S_3 destinée à la résolution de cette tâche est la seconde séance d'élaboration de problèmes. Le but est de faire rencontrer aux élèves des manières de penser et d'agir sur les rapports entre grandeurs à travers l'exploration de situations de la vie pratique concernant des phénomènes de grandeurs, par la médiation de l'artefact *grille fois-partie-tout*. Plus précisément, les élèves doivent élaborer et reconnaître : des problèmes de multiplication (le tout est l'inconnue dans la *grille fois-partie-tout* et la multiplication est l'opération qui permet de la trouver), des problèmes de division partage (la partie est l'inconnue dans la *grille fois-partie-tout* et la division partage est l'opération qui permet de le trouver) et des problèmes de division groupement (le nombre de fois est l'inconnue dans la *grille fois-partie-tout* et la division groupement est l'opération qui permet de le trouver).

Les élèves sont regroupé·e·s par trois. L'énoncé de la tâche va être donné à l'oral. Dans un premier temps, chaque groupe doit élaborer un problème par opération, de sorte que chaque élève est chargé de l'élaboration de l'un des problèmes. Les élèves doivent écrire l'énoncé du problème sur leurs ardoises. Dans les problèmes élaborés par les élèves, la grandeur 15 fleurs doit être le tout dans la relation multiplicative. L'enseignante prévoit de représenter la grandeur avec un matériel aimanté [20]. Il n'y a pas d'indications par rapport au fait si la relation multiplicative que sous-tend le problème de l'élève doit être retenue pour tout le groupe. Dans un deuxième temps, des élèves passent individuellement au tableau pour lire leur problème sans avertir de quelle opération il s'agit. Le reste des élèves doit représenter la relation multiplicative sous-jacente en utilisant l'artefact *grille fois-partie-tout* et mettre un point d'interrogation dans la case qui correspond à l'inconnue. Les réponses et la pertinence des problèmes sont soumises à une discussion

20. L'enseignante et la doctorante ont choisi de ne pas utiliser de matériel de manipulation, en utilisant à la place le matériel aimanté pour deux raisons. Premièrement, à cause du risque signalé par l'enseignante de déconcentrer les élèves de l'écriture de l'énoncé avec le matériel de manipulation. Deuxièmement, le matériel de manipulation n'a pas été considéré comme fondamental pour résoudre la tâche, bien qu'il aurait pu être intéressant de voir si des manipulations se produisaient et d'analyser leur rôle.

collective une fois que les élèves lèvent leurs ardoises avec leurs réponses.

Le matériel disponible pour la résolution de la tâche est constitué par :

— une ardoise par élève ; et

— 15 fleurs aimantées pour représenter la grandeur sur le tableau.

8.8.2 Les attentes

Pour la première partie de la tâche, nous identifions trois sous-tâches mathématiques enchaînées. Une première sous-tâche mathématique est de trouver des grandeurs valides pour produire une relation multiplicative, la grandeur 15 fleurs jouant le rôle du tout. Les valeurs numériques peuvent être 1, 3, 5 et 15 (par exemple, les élèves peuvent considérer la relation multiplicative 3 fois 5 fleurs égale 15 fleurs). Une deuxième sous-tâche consiste à identifier l'inconnue de la relation multiplicative en fonction de l'opération arithmétique assignée. Une troisième sous-tâche consiste à élaborer le problème à partir d'une situation de la vie pratique, dans laquelle un phénomène de grandeurs se manifeste en correspondance avec la relation multiplicative. Le problème est alors formulé en évoquant la situation, et en exprimant les grandeurs et/ou le nombre connus au sein de la relation multiplicative. Il faut finalement exprimer une question à laquelle la grandeur ou le nombre qui joue le rôle d'inconnue permet de répondre.

Pour la deuxième partie de la tâche, les élèves doivent se positionner de façon critique face à la proposition d'un·e autre élève. Les élèves doivent reconnaître si l'énoncé correspond à un problème de multiplication, de division partage ou de division groupement. Si c'est le cas, les élèves doivent identifier la relation multiplicative sous-jacente, ce qui implique que chaque terme, y compris l'inconnue, soit distingué. Les élèves doivent ensuite compléter la *grille fois-partie-tout* sur leurs ardoises.

8.8.3 Conclusions

Nous considérons que la première partie de la tâche nous donne un accès privilégié au caractère créatif et poétique propre du processus d'objectivation, dans la mesure où l'élaboration des problèmes permet aux élèves d'apporter une dimension personnelle à l'énoncé proposé. L'élaboration du problème implique également que les élèves donnent un sens aux opérations arithmétiques de multiplication et de divisions en faisant appel à leur expérience quotidienne. Les élèves doivent prendre conscience des formes historiquement et culturellement constituées d'agir et de penser sur les grandeurs, pour poser des problèmes de multiplication et de divisions ayant du sens et correspondant aux contraintes imposées ici.

La résolution de la tâche exige également que les élèves rendent apparent, par la médiation de l'artefact *grille fois-partie-tout*, l'inconnue dans la relation multiplicative. Les opérations de multiplication et de divisions sont censées être objectivées dans les termes de cette relation. En particulier, le contexte de la discussion collective fournit une opportunité intéressante pour nous approcher de la dimension sociale et critique du processus d'objectivation. D'autant que la pertinence des problèmes est soumise à l'examen critique de la classe.

Enfin, étant donné la place de la session dans la séquence des sessions enregistrées (elle a lieu le 17 juin), la tâche présente un intérêt méthodologique particulier. En effet, elle est susceptible de nous fournir des éléments pour apprécier la progressivité et effectivité du processus d'objectivation. C'est la raison pour laquelle il nous a semblé particulièrement intéressant de prendre en considération les observables issus de l'ensemble de séances analysées (voir la méthodologie d'analyse de de l'activité Θ dans la section 5.3). La question suivante se pose : est-il possible que le travail des séances précédentes ait une influence dans cette séance de résolution de problèmes? Et, plus généralement, comment la progressivité du processus d'objectivation peut-elle s'imprimer dans l'histoire de la classe?

8.9 Analyse de l'activité de la séance S_3 Élaboration de problèmes

Nous présentons dans la suite notre analyse de l'activité en classe dans la séance S_3, *Élaboration de problèmes*. Nous reconstruisons l'activité lors de la présentation de la tâche et de la synthèse [21] dans les paragraphes 8.9.1 et 8.9.2 respectivement. Nous développons dans le paragraphe 8.9.2 des conclusions qui reviennent aux points cruciaux de l'analyse du point de vue global de la séance. Notre analyse est découpée en 4 épisodes : un épisode de présentation de la tâche et trois épisodes dans la synthèse (chaque épisode correspond à la correction d'un problème d'une des opérations arithmétiques). Nous présentons dans le tableau 8.3 l'organisation d'épisodes dans la reconstruction de l'activité.

Présentation de la tâche
Épisode 1 : Présentation de la tâche
Synthèse
Épisode 2 : Problème de division partage Épisode 3 : Problème de multiplication Épisode 4 : Problème de division groupement

Tableau 8.3 – Tableau de l'organisation des épisodes dans l'activité reconstruite de la séance S_3.

8.9.1 Présentation de la tâche

Épisode 1 : Présentation de la tâche

La séance commence par la présentation de la tâche. L'enseignante évoque la séance précédente d'élaboration sous la phrase « *ce qu'on a fait la dernière fois que Paula* [22] *est venue* » et reconstruit avec les élèves la tâche qui a été prescrite. Les premières réponses des élèves étant axées sur les concepts des opérations de multiplication et de divisions, l'enseignante conduit la réflexion vers la nature de la tâche à travers l'idée de « type d'activité ». Nous mettons un extrait du dialogue qui a eu lieu [23] :

P – *Quel type d'activité on faisait ? Est-ce que vous vous souvenez comment vous réfléchissiez sur*

21. Nous n'avons pas enregistré les élèves lors du travail en groupe. Nous avons opté pour enregistrer les énoncés des problèmes de classe. Nous discutons sur ce choix méthodologique dans la section 6.5.

22. La doctorante.

23. Sauf indication contraire, la lettre P désigne dans nos transcriptions l'enseignante, la lettre C désigne la classe et la lettre E désigne une ou un élève qui intervient dans un moment de la séance ou lors d'un épisode, sur lequel nous n'allons pas nous concentrer.

quoi? Jessica
E – *Des problèmes de division . . .*
P – *Alors, on était sur des problèmes, on est de plus en plus précis. Est-ce que c'est moi qui donnais les problèmes? Comment ça c'était passé? Est-ce que c'est moi qui vous avais donné des problèmes? Est-ce que vous deviez les résoudre?*
E – *Parce qu'en fait on devait fabriquer un problème. . .*
P – *Ah, oui! C'est bon de dire le mot fabriquer, c'est très joli. Vous deviez inventer un énoncé de problème, trouver un énoncé de problème.* [Une élève lève la main] *Oui?*
E – *Avec la division partage, la division groupement et la multiplication*
P – *C'est bien!* [Augmentation du volume de la voix] *Il fallait qu'il y ait un qui sait. . . la réponse c'est grâce à un calcul de multiplication. Il y en avait un pour le résoudre, il fallait faire une division partage et enfin un troisième qui pour le résoudre il fallait faire une division groupement. Aujourd'hui vous allez faire la même chose.*

Nous observons un travail conjoint d'où émerge la première sous-tâche. On observe que les élèves repèrent progressivement les aspects fondamentaux de celle-ci grâce à l'accompagnement de l'enseignante. Nous voudrions mettre en avant le dernier échange ci-dessus. Ici l'élève met en relation l'invention des énoncés de problème et les opérations de multiplication et de divisions au moyen de la préposition « *avec* ». En plus de confirmer l'existence d'une telle relation, l'enseignante la précise en termes de résolution de problème. L'enseignante souligne, par la parole et l'intonation de la voix, une perspective dans laquelle les concepts d'opérations de multiplication et de divisions généralisent les problèmes qui leur sont associés. Loin d'être accessoire, l'intervention de l'enseignante nous semble permettre que la relation entre opération et problème atteigne un degré d'enracinement plus profond que ne le suggère l'allusion de l'élève dans son discours. Ne perdons pas de vue que l'objectif de la tâche est lié à cette relation, qui est soutenue par la relation multiplicative sous-jacente.

Ensuite, l'enseignante se concentre sur le matériel aimanté. Elle revient d'abord au matériel de manipulation impliqué dans la séance précédente d'élaboration de problèmes sous forme de « *contrainte* » de la tâche et dit : « *Vous ne pouviez pas inventer n'importe quel problème. Il fallait inventer avec quel matériel?* », à ce qu'un élève répond « *des boîtes et des chocolats* ». Nous constatons que l'enseignante utilise le terme *matériel*, pour désigner les grandeurs discrètes en jeu dans la tâche précédente. L'enseignante a recours au terme et à d'autres ressources sémiotiques pour introduire la grandeur par rapport à laquelle les problèmes vont être inventés cette fois, à savoir les 15 fleurs.

P – *Aujourd'hui c'est la même chose, sauf que le problème que vous devez inventer, <u>vous avez droit à ce matériel-là</u>.* [Geste de l'arc, voir figure 8.63] *Donc, quelque part, quel que soit le problème que vous allez inventer, ça c'est le matériel <u>que vous avez</u>,* [Geste en tout à deux mains, décrit ci-dessous] *bah <u>en tout</u>* [Geste en tout à deux mains]. *Vous avez pas le droit à*

> <u>*plus de fleurs que ça*</u> [Geste de l'arc], *d'accord? Donc on peut imaginer, c'est pas pour autant. . . qu'on peut imaginer que si on a notre grille,* [L'enseignante dessine la grille en entourant d'abord les fleurs aimantées] <u>*voilà ce que vous avez comme matériel dans le tout*</u>. [Geste déictique sur la case du tout]

Nous constatons que l'enseignante utilise une gamme de tonalités linguistiques, symboliques et gestuelles pour produire des signes-artefact divers (l'artefact ici est constitué de fleurs aimantées). Les signes-artefact permettent d'attribuer des significations mathématiques au matériel aimanté. Nous allons nous concentrer sur certains faisceaux sémiotiques (parole, geste, actions et symboles) que nous distinguons dans cette intervention.

Notons d'abord que l'enseignante produit le geste que nous avons appelé le *geste de l'arc*. Nous présentons dans la figure 8.63 une représentation de la structure visuospatiale du geste.

Figure 8.63 – Capture d'écran lors de la production du *geste de l'arc*, la première fois. La flèche orange indique le chemin parcouru par la main.

La main de l'enseignante incarne un arc imaginaire qui relie l'ensemble des fleurs aimantées dans le tableau. Par la coordination sensuelle du geste et la phrase « *ce matériel-là* » l'enseignante présente *ce* matériel aimanté, au singulier, comme une seule chose, comme une catégorie. Dans le contexte, la catégorie nous semble correspondre au champ de grandeurs discrète quantité de fleurs.

L'enseignante reformule ensuite et présente un autre point de vue. Elle produit deux fois le geste que nous avons appelé *geste en tout à deux mains*, similaire au geste en tout produit lors des séances précédentes (*cf.* épisode 1 de la séance S_1). Une représentation de la structure visuospatiale du geste est présentée dans la figure 8.64.

Les mains partent du tronc de l'enseignante et se déplacent en arc de cercle, dans un plan parallèle à la tête la première fois et dans un plan parallèle au sol la seconde. En considérant le discours auquel le geste est coordonné, il nous semble que l'enseignante évoque la signification de *totalité*, en référence aux fleurs aimantées. Les fleurs aimantées constituent un groupe de

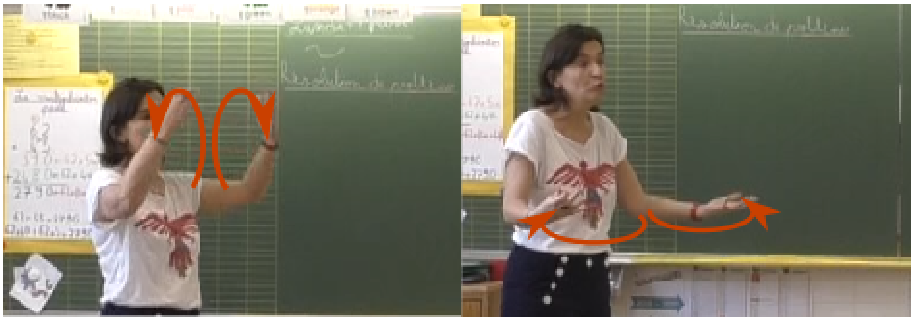


Figure 8.64 – Capture d'écran lors de la production du *geste en tout à deux mains*. À gauche le geste produit par la première fois, à droite le geste produit la seconde. Les flèches orange indiquent le chemin parcouru par les mains.

fleurs. L'enseignante poursuit et reproduit le *geste de l'arc*. Cette fois, l'enseignante présente les fleurs aimantées en tant que grandeur. Plus spécifiquement, les fleurs aimantées, indiquées par le *geste de l'arc*. et le mot déictique « *ça* », deviennent une grandeur comparable à une quantité hypothétique de fleurs à laquelle les élèves n'ont « *pas droit* ».

Enfin, par l'incorporation de l'artefact symbolique *grille fois-partie-tout*, l'enseignante re-signifie la grandeur en tant que tout dans une relation multiplicative dont le nombre de fois et la partie sont inconnus, à la manière dont elle l'a fait lors de l'épisode dans la séance S_2 (*cf.* épisode 11). En effet, la magnitude évoquée par le matériau acquiert le statut du tout par son incorporation dans la case correspondante. Nous présentons dans la figure 8.65 une représentation de la structure visuospatiale du geste.

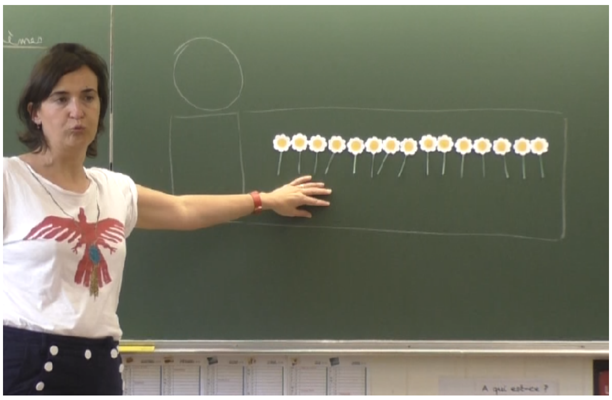


Figure 8.65 – Gestes déictique sur la case du tout dans la *grille fois-partie-tout* qui intègre les fleurs aimantées en tant que tout.

L'enseignante invite alors les élèves à dénombrer les fleurs aimantées ensemble, et rendre ainsi apparente la grandeur. Elle les déplace en groupes de deux fleurs lorsque les élèves prononcent la comptine, rythmiquement : « *deux, quatre, six, . . . , quatorze, quinze* ». L'enseignante confirme la découverte : « *Donc vous avez quinze fleurs. Voilà votre matériel sur lequel vous devez travailler à trois* ».

L'enseignante revient à la consigne de la tâche. En particulier, elle met l'accent sur l'écriture du point d'interrogation sur la case de l'inconnue. Elle prend une ardoise et dit : « *Et c'est vous sur votre ardoise qui me ferez la grille et qui me mettrez le point d'interrogation. Grâce au point d'interrogation je comprendrai si vous avez compris si c'est une division partage, une division groupement, une multiplication, d'accord?* ». L'enseignante demande ensuite aux élèves : « *Quand on met le point d'interrogation dans le tout, ça veut dire que c'est quel type de calcul qui permet résoudre le problème?* ». L'élève interrogée répond correctement : « *une multiplication* ». L'enseignante continue avec la partie. L'élève interrogé se trompe et répond : « *division groupement* ». Un autre élève rectifie et dit : « *division partage* ». Nous constatons que les concepts des opérations de multiplication et de divisions n'apparaissent pas à la conscience des élèves avec le même degré de profondeur. L'enseignante enrichit le processus avec l'élaboration des significations, par la médiation de l'artefact, la parole et des gestes déictiques. Elle dit : « *combien on a dans un groupe* », en indiquant la case de la partie et « *combien de fois on a ce groupe* », en indiquant le cercle du nombre de fois. Elle interroge à la fin un élève pour les trois opérations. Il répond correctement.

8.9.2 Synthèse

Épisode 2 : Problème de division partage

L'enseignante donne la parole au premier élève, choisi au hasard. L'élève passe au tableau pour lire son énoncé, son premier mot étant « *multiplication* »[24]. La classe se rend immédiatement compte que la consigne n'a pas été respectée par l'élève : l'exclamation « *Bah, non!* » s'entend fort. L'enseignante fait appel à une autre élève, Jessica. Jessica lit son énoncé : « *J'ai quinze fleurs, je vais les partager en trois amis. Combien de fleurs je vais donner à chaque ami?* ». Nous présentons dans la figure 8.66 une photo de son ardoise.

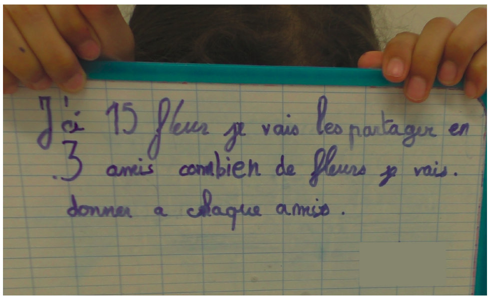


Figure 8.66 – Photo de l'ardoise de Jessica, qui est passée au tableau pour lire son énoncé. Il s'agit d'un problème de division partage.

24. Effectivement dans l'ardoise de l'élève il a écrit « multiplication » en titre.

L'enseignante demande aux élèves de compléter la *grille fois-partie-tout* sur leurs ardoises. Elle leur demande de lever les ardoises à mesure qu'elles sont complétées. L'enseignante vérifie pour chaque élève que la *grille fois-partie-tout* est bien remplie. Un élève pose une question qui remet en cause le respect de la consigne par Jessica. Le dialogue suivant a eu lieu :

> E – *Mais en fait elle a dit qu'elle voulait partager*
> P – *Eh. . . C'est pas faux ce que tu dis, mais. . . ça pourrait être un piège. Il faut pas s'arrêter au verbe. On peut utiliser ce verbe-là et. . . Je sais plus qui c'est. . .*
> C – *Raoul* [Quelques murmures]
> P – *Qui a fait un problème comme ça ?*
> C – *Raoul !*
> P – *Raoul a mis le terme partager et c'était une multiplication.*

La question de l'élève révèle sa vigilance quant au respect des conditions de la tâche. L'élève invite la classe à faire attention au fait que l'énoncé du problème peut suggérer, par les mots utilisés, l'opération à mobiliser pour résoudre le problème. Dans ce cas, l'utilisation du mot « partager » semble suggérer à l'élève que le problème est résolu par une division partage. En ce sens, le problème de multiplication proposé par Raoul lors de la séance précédente de résolution de problèmes S_6 est très éclairant, car il a été posé en relation avec une situation de partage (voir paragraphe 8.7.2). L'anecdote du problème de Raoul est resté dans l'esprit – et le corps – des élèves : elles/ils commencent à évoquer l'épisode avant même que l'enseignante ait fini de formuler l'allusion. Il s'agit d'une anecdote dont la valeur est appréciée par le groupe ; elle devient un jalon dans l'histoire de la classe. On voit là l'histoire d'une réflexion en classe sur des problèmes verbaux qui s'affine grâce à des discussions collectives qui apportent de nouvelles idées et de nouveaux éléments au débat. L'enseignante établit un lien significatif entre ce point de référence et la discussion sur le rapport problème-opération. L'anecdote du problème de Raoul permet à l'enseignante de souligner l'inconnue dans la relation multiplicative et proposer une position intentionnelle, contraire à celle basée sur les aspects superficiels de la situation. Cette position intentionnelle est orientée vers la relation multiplicative. Un autre observable mettant en évidence cet aspect a eu lieu dans la même séance précédente d'élaboration de problème S_6. À cette occasion, un problème de division partage a été signalé comme un problème de division groupement, probablement en raison des aspects situationnels évoqués par l'énoncé (voir paragraphe 8.7.3). Par la médiation de l'artefact *grille fois-partie-tout*, l'enseignante a révélé la nature de l'inconnue de la relation multiplicative sous-jacente, ce qui a permis d'identifier l'erreur.

L'enseignante attire ensuite l'attention des élèves sur le remplissage de la *grille fois-partie-tout*. Elle dit : « *Est-ce que vous vous souvenez de quelque chose qui est déjà très important si vous avez* *un doute.Est-ce que si on a des fleurs là, ici* » [L'enseignante indique la case du tout] *qu'est ce qu'on doit avoir comme* *<u>unité?</u>* [L'enseignante fait le geste des guillemets [25]] *Obligatoirement* ». Un élève répond « *des fleurs* ». L'enseignante demande ensuite aux élèves d'inclure l'unité de grandeur f lorsqu'ils remplissent la grille du problème suivant. Dans des conversations ultérieures avec la doctorante, l'enseignante a indiqué qu'elle avait trouvé l'écriture du symbole de l'unité de grandeur utile pour remplir la *grille fois-partie-tout*, ce qui n'était pas toujours évident. Il nous semble que le recours au symbole de grandeur permet de signifier l'appartenance au même champ de grandeurs des grandeurs impliqués. Nous tenons à souligner que l'enseignante a également coordonné l'utilisation de l'artefact et l'écriture avec l'unité symbolique dans l'épisode d'erreur pour identifier un problème de division partage (voir paragraphe 8.7.3). Elle a pu ensuite repérer l'erreur.

Éloïse se rend au tableau pour résoudre le problème verbal proposé par Jessica. Éloïse profite de l'occasion pour s'interroger sur le rapport entre l'inconnue de la relation multiplicative et l'opération qui permet de la trouver. L'élève prend appui sur la *grille fois-partie-tout* qui est sur le tableau, depuis la présentation de la tâche, pour poser des questions à l'enseignante. Elle produit des gestes déictiques sur le cercle et la case du nombre de fois (voir figure 8.67).

Figure 8.67 – Éloïse pose des questions sur la relation multiplicative entre grandeurs en appui sur l'artefact *grille fois-partie-tout*. En haut, elle indique la case de la partie, en bas le cercle du nombre de fois.

Le dialogue suivant a lieu :

> Éloïse – *Là on cherche combien* [Geste déictique sur la case de la partie, voir figure 8.67] *il y a dans un* [Geste en tout]. . .
> P – *Combien chaque ami va avoir*
> Éloïse – *Oui, on cherche combien chaque ami va avoir* [Geste déictique sur le cercle du nombre de fois, voir figure 8.67] *et là on cherche combien de groupes il va y avoir?*

25. Le geste des guillemets dessine des guillemets imaginaires dans l'air avec les doigts.

P – *Là, combien d'amis*
Éloïse – *Fin, combien d'amis*
P – *Et là tu le sais*
Éloïse – *C'est ça ?*
P – *C'est ça quoi ?, Ma belle*
Éloïse – *Là, c'est partage, Si on cherche ici, c'est partage. Si on cherche là, c'est groupement ?*
P – *Oui*
Éloïse – *Et si on cherche là, c'est groupement ?*
P – *Oui*
Éloïse – [L'élève soupire] *Oui alors, ça va !* [Le visage de l'élève semble plus calme]

Éloïse faisait partie de l'un des groupes enregistrés lors de la première séance d'élaboration de problèmes S_6. Elle avait alors révélé des difficultés à reconnaître la nature de l'inconnue associée à l'opération de division partage. Elle avait évoqué avec un geste l'action de grouper, sans pour autant distinguer la nature de l'inconnue dans la relation multiplicative (voir paragraphe 8.7.1). Dans les premières questions de l'élève, nous observons l'intention d'utiliser le terme « groupe » qui a une visée généralisante. C'est le même terme que celui utilisé par l'enseignante dans la présentation de la tâche pour faire allusion aux termes de la relation multiplicative, à travers l'artefact de la *grille fois-partie-tout* (*cf.* fin de l'épisode 1). Éloïse pose des questions concernant les termes « partie » et « nombre de fois » accompagnées de gestes déictiques vers l'artefact. L'enseignante amène l'élève aux spécificités du problème de Jessica, en reformulant ses questions en termes d'amis. Éloïse adapte sa réflexion aux termes proposés par l'enseignante, probablement en ayant conscience de la possibilité de les généraliser.

Nous considérons que la notion de ZDP (zone de développement proximale : cette notion nous l'avons traité dans le paragraphe 2.1.1) nous fournit une interprétation intéressante de l'épisode. La conscience d'Éloïse cherche celle de l'enseignante à travers la coordination sensuelle des mots, l'intonation de sa voix, ses gestes déictiques et l'artefact *grille fois-partie-tout*. Éloïse requiert l'accompagnement de l'enseignante pour rendre apparente la relation entre le caractère de l'inconnue dans la relation multiplicative, et les opérations de divisions. L'objectivation des opérations de divisions atteint un degré plus accru de profondeur par la médiation du travail conjoint.

Une fois que l'enseignante lui répond, Éloïse soupire. Le soupir de l'élève est le signe du soulagement que procure une question résolue, dont elle est accablée depuis un certain temps (la séance S_6), selon nos observations. Le soupir de l'élève est un point culminant dans un processus social d'élaboration de significations au fil du temps. Cette observation nous renvoie à la dimension émotionnelle impliqué dans le processus d'objectivation. Elle s'inscrit dans la lignée de la réflexion de Maturana sur la manière dont l'émotion est liée à l'acceptation d'une réponse :

> In doing this, the observer accepts or rejects a reformulation of his or praxis of living as an explanation according to whether or not it satisfies an implicit or explicit criterion of acceptability that he or she applies through his or her manner of listening. If the criterion of acceptability applies, the reformulation of the praxis of living is accepted and becomes an explanation, the emotion or mood of the observer shifts from doubt to contentment, and he or she stops asking over and over again the same question. (H. R. Maturana, 1988, p. 28)

Nous constatons que l'élève produit ultérieurement, dans le cadre d'un entretien avec la doctorante, un geste intéressant pour faire référence à la division groupement (voir paragraphe 8.10.1). Nous avons appelé ce geste *geste du poing*. Le geste reflète un ancrage profond et riche du matériel et du conceptuel.

L'enseignante demande alors à Éloïse de terminer de compléter la *grille fois-partie-tout* qui représente la situation évoquée par l'énoncé de Jessica. À la demande de l'enseignante, elle réorganise par groupes les fleurs aimantées qui sont dans la case du tout. L'élève déplace les fleurs de manière à former des groupes de cinq fleurs. Elle termine ensuite de compléter la grille (voir figure 8.68).

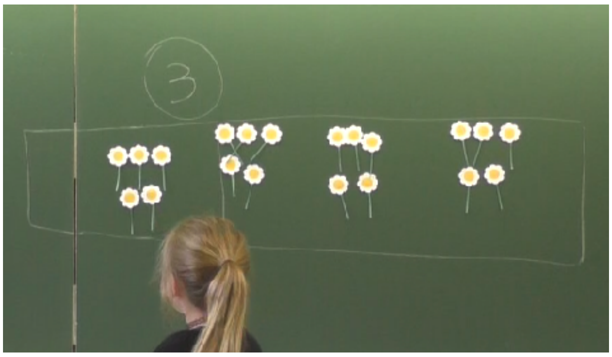


Figure 8.68 – *Grille fois-partie-tout* qui représente la situation évoquée par l'énoncé de Jessica, complétée par Éloïse. La frontière entre le tout et la partie est fine et floue.

L'enseignante écrit finalement l'énoncé du problème. Elle complète la *grille fois-partie-tout* avec des grandeurs, en mettant un point d'interrogation sur la case de l'inconnue (la partie). L'enseignante termine avec l'écriture des expressions multiplicatives symboliques : une multiplication et une division partage avec des unités de grandeur (voir figure 8.69). Il s'agit d'une trace du travail conjoint.

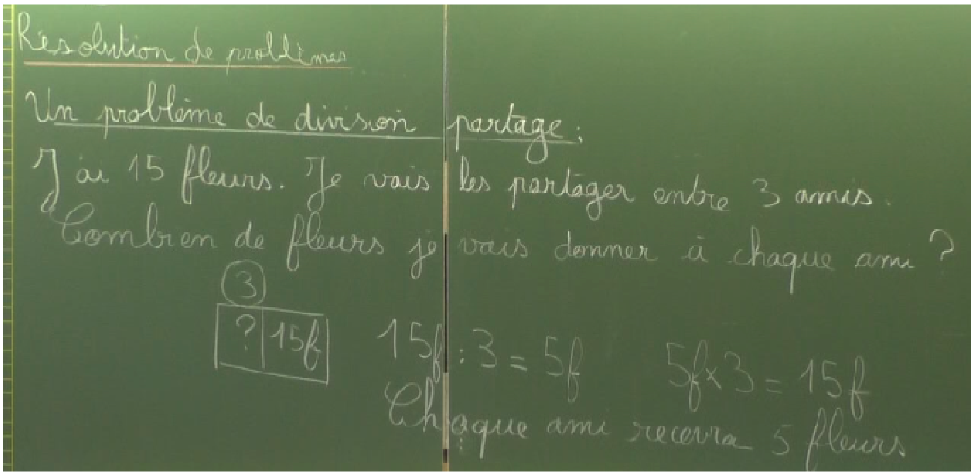


Figure 8.69 – Énoncé du problème de division partage. L'enseignante inclut la grille remplie et des expressions symboliques multiplicatives.

Épisode 3 : Problème de multiplication

Esteban passe pour lire son énoncé : « *Trois abeilles ont butiné cinq fleurs, combien de fleurs ont-elles butiné en tout?* ». L'enseignante ne manque pas la poésie de l'élaboration de l'élève et dit, dans une intonation exclamative : « *C'est beau ça ! J'aime bien* ». La figure 8.70 montre une photo de l'ardoise d'Esteban.

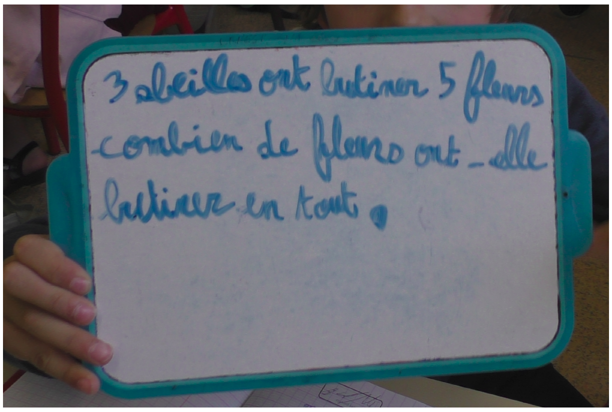


Figure 8.70 – Photo de l'ardoise d'Esteban qui est passée au tableau pour lire son énoncé. Il s'agit d'un problème de multiplication.

Nous tenons à souligner qu'Esteban aurait pu s'en tenir à la grandeur quinze fleurs et à des éléments accessoires plus *habituels* pour parler des groupes de fleurs, comme les amis, les paquets et les rangées. Cependant, en respectant la consigne, il intègre dans son énoncé un processus vital pour l'existence humaine et des autres espèces : celui de la pollinisation, qui assure la fécondation des plantes à fleurs [26]. Esteban imprime sur l'énoncé l'empreinte de son positionne-

26. La crise qui menace l'existence des abeilles, les insectes assurant la pollinisation, aurait pu avoir été abordé dans le cadre de l'éthique communautaire.

ment social et culturel dans la classe en tant que sujet reconnaissant un tel processus (processus de subjectivation). L'énoncé proposé par Esteban procure une rencontre affective, poétique et sensible avec la multiplication.

L'enseignante signale ensuite une imprécision du problème et l'examine plus en détail avec la classe : « *Trois abeilles ont butiné cinq fleurs, elles ont butiné cinq fleurs, les trois?* ». En effet, le problème ainsi énoncé est ambigu. Il aurait fallu préciser « cinq fleurs différentes » ou « chacune cinq fleurs ». L'enseignante le perçoit.

La question est l'occasion pour l'élève de transformer l'énoncé en un problème de multiplication. Esteban reste silencieux quelques instants et répond : « *Oui, c'est chacun* ». Certain·e·s élèves de la classe acquiescent et ajoutent :« *Bah, oui* » et « *chacune des abeilles* ». Esteban récapitule : « *C'est chaque abeille qui butine cinq fleurs* [Geste en tout]. L'enseignante paraphrase et rectifie l'énoncé pour qu'il corresponde plus sûrement à un problème de multiplication : « *Alors, une abeille butine cinq fleurs. Trois abeilles auraient butiné combien de fleurs?* ». L'enseignante demande ensuite aux élèves de remplir dans l'ardoise la *grille fois-partie-tout* qui correspond à l'énoncé.

Anaïs se porte volontaire pour remplir la *grille fois-partie-tout* au tableau. Cette fois, la *grille fois-partie-tout* est vide. L'élève complète d'abord la case de la partie, elle y met cinq fleurs aimantées. Lorsque'élève était en train de remplir la case avec le matériel aimanté, l'enseignante souligne le champ de grandeur auquel la grandeur mise dans la case de la partie appartient. L'enseignante dit : « *Alors, c'est bien, elle a compris que c'est bien de fleurs qu'on met dans la partie, les abeilles ne sont pas là.* ». L'élève se trompe et met le signe 1 dans le nombre de fois. L'enseignante lui fait repérer l'erreur : « *Bah, non, en tout il y en a trois, justement* ». L'élève efface le nombre 1. L'enseignante se rapproche de l'élève et le dialogue suivant a lieu :

> P – *Ça, c'est la quantité que butine une abeille* [Geste de la main ouverte sur la partie, voir figure 8.71. Anaïs écrit 1 dans le cercle du nombre de fois, voir figure 8.71]
> P – *Et là tu cherches pour trois* [Geste de la main ouverte sur la partie]
> Anaïs – *D'accord!* [Anaïs efface le signe 1 et met 3 à sa place]

Concentrons-nous sur deux faisceaux sémiotiques cruciaux que nous avons identifiés pour la reconstruction de l'activité dans laquelle l'enseignante et l'élève s'impliquent. Le premier comprend le *geste de la main ouverte* de l'enseignante, la phrase « *Ça c'est combien est capable de butiner une abeille* », et le signe-artefact que l'élève avait produit (la *grille fois-partie-tout* dont la partie est remplie par cinq fleurs aimantées). Nous présentons dans la figure 8.71 une capture d'imagen de ce moment.

Figure 8.71 – Captures d'image lors de la conversation entre l'enseignante et Anaïs. À gauche, le *geste de la main ouverte* produit par l'enseignante. À droite, Anaïs met encore 1 dans le cercle du nombre de fois.

L'enseignante produit le geste avec la main ouverte et tendue. D'une part, nous pouvons voir une fonction déictique dans la signalisation du groupe de cinq fleurs aimantées dans la case de la partie. L'enseignante y fait également référence au moyen du pronom déictique « *ça* ». D'autre part, l'ouverture de la main suggère, selon notre interprétation, l'action et l'effet de recouvrir une multitude d'objets. Le geste est également statique et produit en une seule fois. Nous considérons que le geste signifie donc le groupe d'objets signalés en tant qu'une seule chose : une unité. En l'occurrence, le groupe de cinq fleurs. Nous soulignons que Pierre a réalisé une action incarnée sur le matériel de manipulation dans la séance S_5 qui nous semble véhiculer une signification similaire (voir paragraphe 8.6.1).

Le deuxième faisceau sémiotique contient, entre autres signes, le signe-artefact produit par Anaïs quand elle met le signe 1 dans le cercle du nombre de fois. Nous tenons à préciser que l'enseignante avait auparavant fait remarquer que le nombre 1 ne correspondait pas au nombre de fois. Cependant, l'élève continue à l'utiliser, ce qui ne nous semble pas être un fait anodin. Au contraire, il nous semble que la médiation par le symbole est crucial dans la réflexion de l'élève. En effet, nous interprétons que le signe 1 est une ressource symbolique qui permet Anaïs de signifier la grandeur 5 fleurs comme une unité. Sa production sémiotique lui permet également de rencontrer le point de vue présenté par l'enseignante. Le nombre 3 apparaît alors dans la conscience de l'élève comme le nombre de fois de la relation multiplicative sous-jacente. Elle se met ensuite à compléter la grille (voir figure 8.72).

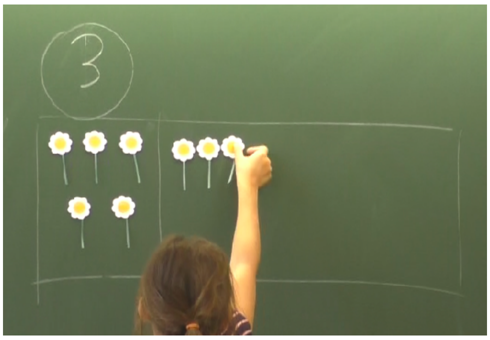


Figure 8.72 – Une fois Anaïs a reconnu le nombre de fois, elle se met à compléter le tout.

L'enseignante écrit enfin l'énoncé sur le tableau. Comme pour le problème de division partage, elle met l'énoncé, la *grille fois-partie-tout*, remplie et les expressions multiplicatives symboliques (voir figure 8.73).

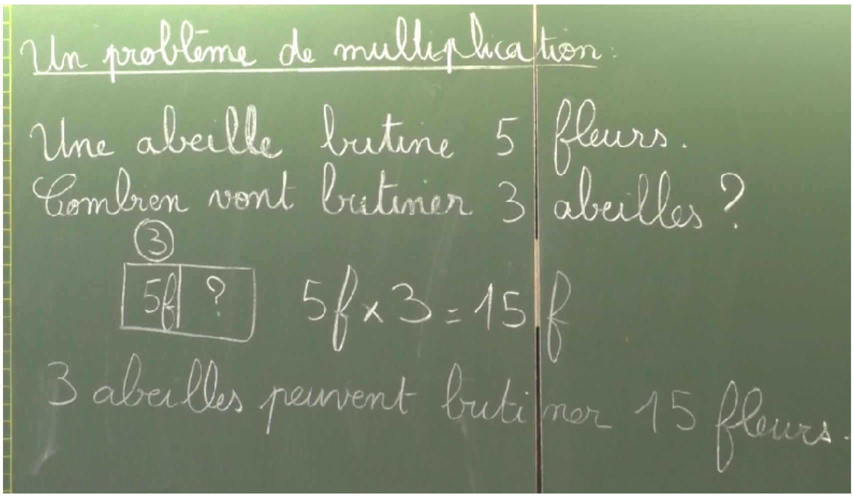


Figure 8.73 – Énoncé du problème de multiplication. L'enseignante inclut la grille remplie et des expressions symboliques multiplicatives.

Épisode 4 : Problème de division groupement

Personne n'avait fait le problème de division groupement à ce moment de la séance. Cela ressort clairement des énoncés que nous avons enregistrés : il n'y a eu qu'un seul problème de division groupement, mais il était incomplet (voir annexes). Pierre se porte volontaire pour inventer un problème de division groupement au tableau. Il commence : « *C'est une personne qui va chez un fleuriste. Il achète quinze fleurs. Eh, bah il achète trois paquets de fleurs. On fait comme ça* ». Pierre parvient à introduire les grandeurs, à les mettre en relation avec un contexte, mais n'élabore pas de question. En tout cas, si la question était de déterminer la quantité de fleurs par paquet, il s'agirait d'un problème de division partage. Les murmures dans la salle semblent ne pas approuver le problème.

Pierre le sent : il relâche sa posture, son regard se perd dans la ligne d'horizon : son problème n'est pas terminé. L'enseignante poursuit : « *Est-ce qu'on pourrait aider Pierre, dans son histoire ?* ». Plusieurs mains sont levées. Lorsque l'enseignante pose la question, Pierre semble avoir eu un moment Eurêka : ses yeux s'écarquillent, sa posture se redresse, il lève la main avec insistance et dit avec enthousiasme : « *Moi, moi, moi, je sais !* ». La transformation de l'expression de l'élève nous semble mettre en évidence la dimension émotionnelle de l'apprentissage. L'enseignante se concentre d'abord sur des aspects relevant du contexte et rappelle le nom précis donné au groupe de fleurs. Elle dit : « *Déjà dans son histoire il s'agit de bouquets, et non de paquets* ». L'enseignante se tourne à nouveau vers Pierre et lui donne la parole. Pierre reprend son énoncé :

Pierre – *C'est une personne qui va chez un fleuriste. Il achète des bouquets de fleurs. Dans chaque bouquet de fleurs, il y a cinq fleurs. Combien de bouquets il achète ?*
P – *Alors mon grand, il nous manque des données si tu nous dis pas combien de bouquets il achète*
C – *En fait, mais . . .* [Certain·e·s élèves le disent]
Pierre – *Non, Mais en fait, ça c'est ce qu'il faut trouver*

Pierre commence par le contexte de la situation. L'élève se concentre alors sur les bouquets de fleurs. Il semble donc reconnaître la partie comme l'un des termes connus dans une division groupement, qu'il relie de manière significative au contexte. Il incorpore l'indication de l'enseignante, par rapport à la nature du groupement de fleurs, les bouquets de fleurs. Il s'agit de la grandeur qui lui avait échappé et qui permet d'élaborer un problème de division groupement. Il indique sa valeur : 5 fleurs. Il termine par poser la question en termes de nombre de bouquets. Cependant, l'énonce du problème de division groupement n'est pas encore complet : l'élève a oublié, peut-être parce qu'il s'est focalisé sur les bouquets, de mentionner la quantité totale de fleurs. En réponse à la question de l'enseignante, l'élève souligne le caractère inconnu du nombre de bouquets. La classe ne joue pas un rôle passif. Au contraire, les élèves montrent leur engagement par des réactions à des points cruciaux de la discussion. En particulier certain·e·s élèves semblent avoir reconnu le nombre de bouquets comme l'inconnue. L'enseignante demande à l'élève de répéter l'énoncé. Voici un extrait du dialogue qui a lieu :

Pierre – *Quelqu'un va chez le fleuriste, il achète quinze fleurs. Il les met dans des bouquets différents*
P – *Alors ils ne sont pas faits les bouquets ?* [L'enseignante dessine une *grille fois-partie-tout* sur le tableau, voir figure 8.74]
C – *Non* [Certain·e·s élèves]
Pierre – *Bah, il achète de bouquets, au total, du coup ça fait quinze*
P – *Alors, il achète des bouquets, en tout il y a quinze fleurs* [L'enseignante écrit 15 dans la case du tout de la *grille fois-partie-tout*]

Pierre – *Oui. Dans chaque bouquet, bah, il y a cinq fleurs.* [L'enseignante écrit 5 dans la case de la partie] *Combien de bouquets il y a-t-il?* [L'enseignante met un point d'interrogation dans le cercle du nombre de fois]
P – *On est d'accord?* [L'enseignante se dirige à la classe]
C – *Oui!, Bah oui!* [Les élèves applaudissent]

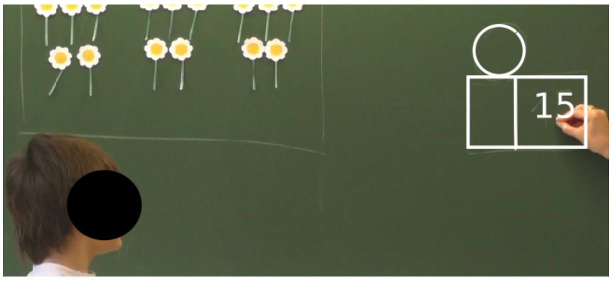


Figure 8.74 – L'enseignante complète la *grille fois-partie-tout* du problème pendant que Pierre développe son énoncé.

Notons tout d'abord que l'élève inclut dans la première formulation du dialogue la quantité totale de fleurs. Il nous semble que le fait que l'élève ait réalisé la partie comme le terme connu et le nombre de fois comme l'inconnue dans l'élaboration précédente lui a permis de prendre en considération cette fois toutes les grandeurs. La situation évoquée par Pierre se focalise sur l'organisation de la grandeur 15 fleurs en bouquets. Il semble donc que la constitution de bouquets ne joue pas un rôle important. Ainsi l'élève ne répond pas à la question que l'enseignante le pose, et revient en revanche aux grandeurs en question. L'activité est ensuite médiatisée par la *grille fois-partie-tout* que l'enseignante dessine sur le tableau. Le travail conjoint de l'enseignante et Pierre fait apparaître la relation multiplicative qui sous-tend l'énoncé du problème de division groupement en cours d'élaboration. À cette fin, l'enseignante coordonne l'écriture symbolique des grandeurs sur la *grille fois-partie-tout* avec leur évocation à l'oral par l'élève. Les élèves, qui ont été présent·e·s lors de la réflexion, applaudissent l'effort qui conduit à l'élaboration de l'énoncé d'un problème de division groupement.

L'enseignante reprend l'énoncé afin de lui donner une forme plus adaptée au contexte de la boutique du fleuriste. Elle transforme la question, en quelque sorte artificielle, sur l'organisation des bouquets achetés en un problème rencontré par le fleuriste dans son activité :

P – *Un fleuriste a quinze fleurs, il veut faire de bouquets de* . . .
C – *Cinq*
P – *Il veut faire des bouquets de cinq* . . . [L'enseignante indique le nombre 5]
C – *Fleurs*
P – *Combien* [Geste déictique sur le cercle du nombre de fois]
E – *De paquets*
P – *De bouquets peut-il faire.*

La reformulation de l'énoncé est l'occasion de rendre plus évidentes les grandeurs du problème dans une relation multiplicative. Le nouvel énoncé évoque l'action de grouper, en l'occurrence faire des bouquets, ce que l'énoncé de l'élève n'envisageait pas. L'enseignante fait ensuite la grille et place quinze fleurs aimantées dans le tout. Elle évoque encore les grandeurs connues de la situation du fleuriste au sein de la relation multiplicative, afin d'objectiver l'opération de division groupement. Elle dit : « *qu'est-ce qu'il sait le fleuriste? Il est dans sa boutique et il a ça, le fleuriste* [Geste de la main ouverte sur la case du tout, voir figure 8.75]. *Et il sait que dans son bouquet il veut combien?* [Geste déictique sur la case de a partie] ».

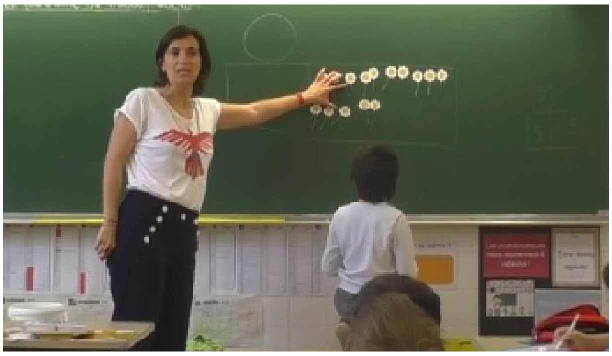


Figure 8.75 – Signe groupes.

Les fleurs aimantées, par leur inscription dans la case du tout de l'artefact *grille fois-partie-tout*, sont signifiées comme le tout, qui est l'une des grandeurs connues dans le problème. Notons que le *geste de la main ouverte* sur la case du tout, en référence au matériel aimanté, et en coordination avec le mot déictique *ça*, fait apparaître le tout en tant que groupe de 15 fleurs. Avec le geste déictique produit en dernier l'enseignante enchaîne avec son intervention au remplissage de la partie de la grille par l'élève qui doit prendre le relais. Pierre se porte volontaire pour terminer de compléter la *grille fois-partie-tout* avec le matériel aimanté.

Suite à l'intervention de l'enseignante, Pierre complète la case de la partie avec cinq fleurs aimantées. L'enseignante invite l'élève : « *fait le fleuriste, avec le tout* ». L'invitation de l'enseignante, formulée dans les termes de la situation du problème, cherche à faire apparaître l'action sur le matériel qui permet de l'organiser en groupes de fleurs (bouquets). L'élève manipule alors les fleurs aimantées, il les déplace de façon à obtenir des groupes de cinq fleurs. L'enseignante tresse avec l'action que l'élève réalise des mots qui permettent de la raconter : « *il fait de beaux groupements de cinq et cherche combien on peut en faire* ». L'enseignante revient au nombre de bouquets : « *Bravo, il a maintenant le nombre de bouquets, combien de bouquets peut-il faire? Vas-y* ». Au lieu de compléter tout de suite le nombre de fois, l'élève entoure avec un cercle chaque groupe de cinq fleurs avec le tout (voir figure 8.76). Il nous semble que l'élève enrichit par la production du signe graphique le processus d'objectivation, par l'imbrication de la signification mathématique de groupe qu'il associe à la grandeur cinq fleurs. Il compte ensuite les groupe et complète la *grille fois-partie-tout*.

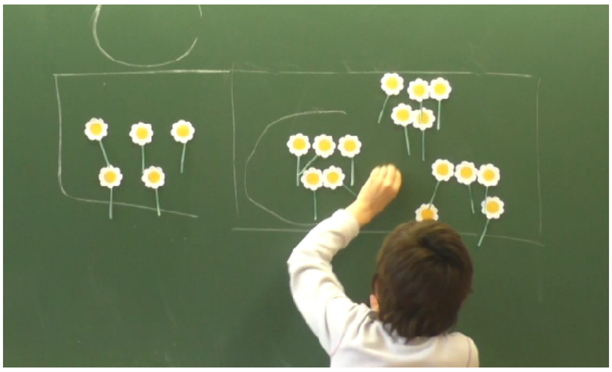


Figure 8.76 – Pierre entoure les groupes de fleurs avec des cercles.

L'enseignante copie l'énoncé final dans le tableau, comme elle l'avait fait pour les problèmes précédents. Il s'agit de la dernière trace d'un travail conjoint d'élaboration de significations (voir figure8.77).

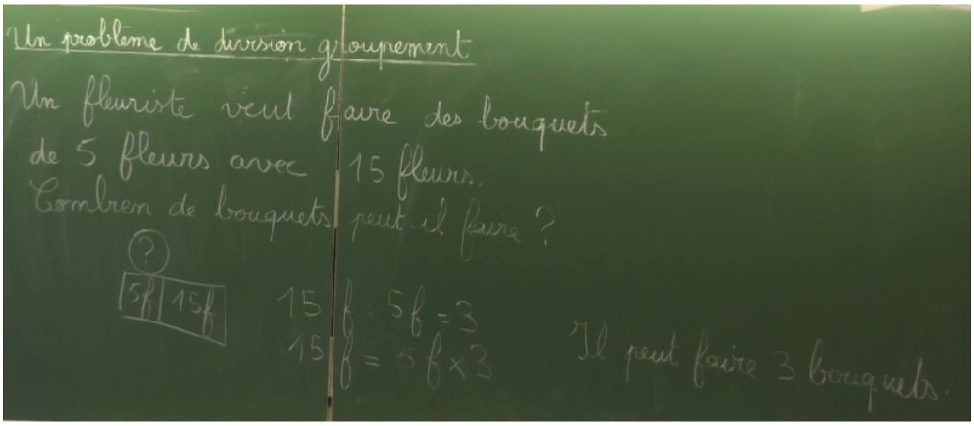


Figure 8.77 – Énonce du problème de division groupement. L'enseignante inclut la grille remplie et des expressions symboliques multiplicatives.

Conclusions

Nos observations suggèrent que la tâche d'élaboration de problèmes est susceptible de promouvoir une rencontre progressive, incarnée, discursive, poétique, affective, symbolique et matérielle avec les opérations de multiplication et de divisions. L'élaboration de problèmes fournit aux élèves une occasion de s'engager de manière créative pour donner du sens et prendre conscience de l'objet savoir qu'elles/ils rencontrent, comme nous le voyons notamment dans l'élaboration du problème de multiplication. La prise en considération des épisodes de séances précédentes a permis de constater la réapparition des significations élaborées dans le cadre d'un processus collectif mené par la classe. Les réapparitions constituent la trace que la progressivité du processus d'objectivation a laissé dans l'histoire de la classe. À cet égard, l'anecdote avec le problème de multiplication proposé par Raoul, évoqué lors de la synthèse, est un jalon important qui a marqué la classe. L'artefact *grille fois-partie-tout* joue un rôle intéressant dans la mesure où il permet de médiatiser la distinction des termes de la relation multiplicative. Au-delà du remplissage, l'artefact a soutenu une réflexion profonde et des discussions riches autour de phénomènes de grandeur. Dans une certaine mesure, la médiation par l'artefact a permis de dépasser une approche superficielle des problèmes verbaux, basée sur certains aspects des situations de la vie pratique visées, comme les verbes. Les élèves se sont positionné·e·s de manière critique par rapport à des manières historiquement et culturellement constituées de faire et de penser la relation multiplicative entre les grandeurs.

Dans la synthèse, nous observons un pas important dans la profondeur progressive avec laquelle l'objet-savoir apparaît dans la conscience d'Éloïse. Le repérage des moments significatifs d'autres séances nous permet de l'apprécier comme un processus dans lequel la relation dialectique entre le sensuel et le conceptuel est renforcée, en lien avec une utilisation des ressources sémiotiques multimodales. Enfin, nous considérons que la production sémiotique (*cf.* épisode 3 et épisode 4) nous suggère à plusieurs occasions que la signification des grandeurs en tant qu'unités peut participer au processus d'objectivation des opérations de multiplication et de divisions. Nous avons également pu apprécier la dimension émotionnelle impliquée dans le processus d'objectivation.

8.10 Observables dans les entretiens

L'entretien a eu lieu en dehors de classe. L'entretien été à propos de la résolution d'un problème verbal. Le problème était : *Anaïs mange* 5 *fruits par jour. Combien de fruits mange-t-elle dans une semaine ? Combien de semaines va-t-elle mettre pour manger* 140 *fruits ?*. Nous présentons dans la suite l'analyse du segment saillant que nous avons repéré lors des entretiens avec les élèves (26 juin). Nous avons appelé l'observable *Geste du poing*. Nous l'avons évoqué dans l'analyse de la séance S_3, dans la présentation de l'épisode 2 (page 276)

8.10.1 Geste du poing

Éloïse est interviewée par la doctorante. La réponse de l'élève est qu'Anaïs mange 35 fruits par semaine et qu'il lui faut 4 jours pour manger 140 fruits. L'élève a donc bien répondu à la première question, mais pas à la deuxième (la réponse était 4 semaines). Compte tenu aussi des réponses ultérieures de l'élève, nous constatons qu'elle a confondu l'unité de grandeur jour avec l'unité de grandeur semaine, en considérant qu'Anaïs mange 35 fruits par jour au lieu de 35 fruits par semaine. Elle a néanmoins bien identifié les opérations et les valeurs numériques qui y sont impliquées. La trace écrite de son travail est en annexes. La doctorante lui demande : « *Pourquoi tu as mis que c'était une division groupement ?* ». L'élève répond : « *Parce on cherchait combien de groupes* [Geste du poing trois fois, voir figure 8.78] ». Elle continue : « *Parce on savait déjà qu'il avait trente-cinq fruits par un jour* » [Geste poing] *et cent-quarante en tout* [Geste de la main ouverte], *mais on savait pas combien il y avait de jours* ». Nous présentons une représentation de la structure visuospatiale du *geste du poing* dans la figure 8.78.

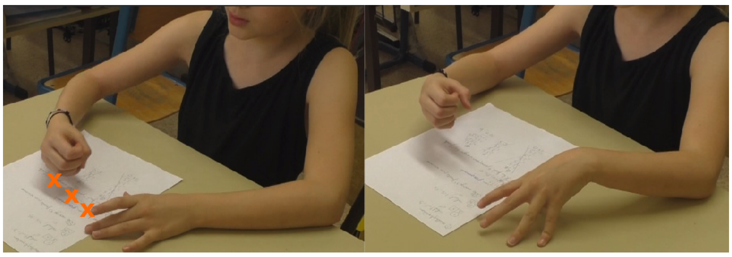


Figure 8.78 – Capture d'écran lors de la production du *geste du poing*, produit à deux occasions par Éloïse. À gauche, la première production du geste qui contient trois petits coups. Les croix orange marquent les endroits auxquels l'élève a produit les petits coups. À droite la deuxième production qui comprend un petit coup (main droite) et le *geste de la main ouverte* (main gauche).

Il nous semble qu'Éloïse accomplit une objectivation de l'opération de division de groupement, par la coordination sensuelle du geste et la parole. La première fois que l'élève produit le geste, elle rend apparent le nombre de fois comme terme inconnu de la relation multiplicative, en référence à l'opération de division groupement. Les mains incarnent le nombre de fois à travers les petits coups produits par le mouvement des mains. En coordination sensuelle avec la parole, le nombre de fois est présenté comme le terme qui permet de répondre à la question « *combien de groupes* ». La deuxième fois, l'élève produit une fois le geste pour se référer à la grandeur 35 fruits comme l'une des grandeurs connues. En revenant à l'épisode précédent, « *groupement c'est faire de groupes* », nous observons que l'action pragmatique de grouper se manifestait pour donner du sens à l'élaboration de groupes. Nous considérons que le *geste du poing* sert à l'élève à symboliser la quantité de fruits par jour (qui est en fait celle de la semaine) comme des groupes déjà constitués. Plus précisément, nous interprétons que l'élève fait apparaître avec la main serrée, en coordination avec la parole, les groupes comme unité. Enfin, l'élève produit le *geste de la main ouverte* lors de la phase de retrait du *geste du poing* : elle fait référence par la coordination du geste et la parole à la grandeur 140 fruits comme l'autre grandeur connue dans la relation multiplicative.

Conclusion

La conclusion de ce travail aura lieu en quatre temps. Dans un premier temps, nous referons un parcours de la démarche que nous a menée à nos questions de recherche. Nous passerons en revue les éléments de réponse apportés à nos grandes questions de recherche. Dans un deuxième temps, nous aborderons la première grande question ; dans un troisième temps, la deuxième grande question. Finalement, dans un quatrième temps, nous parlerons des limites de ce travail, en évoquant les perspectives de recherche encore ouvertes ou à explorer qui peuvent être inférés de celles-ci.

Parcours de la démarche

La première partie de la recherche a été consacrée à la problématisation de l'implication du corps dans l'apprentissage des opérations de multiplication et de divisions. Dans le chapitre 1, nous avons développé une première approche à cette question à travers les modèles intuitifs des opérations de multiplication et de divisions de Fischbein. Cette approche se trouve ancrée dans les réflexions développées par Fischbein sur l'intuition. En particulier, nous avons noté que l'hypothèse de l'inévitable coexistence entre l'intuitif et le formel permet de problématiser la place des modèles dans l'enseignement, sous le *dilemme fondamental*. Nous avons constaté les limitations que l'opposition entre l'intuitif et le formel impose, du point de vue de l'apprentissage, en tant que processus socio-culturel, et du point de vue de la cognition incarnée. Notre cheminement ultérieur a consisté, en reprenant certains éléments avancés par Fischbein, à développer une approche alternative pour théoriser et aborder notre question de départ.

Dans le chapitre 2, nous avons théorisé ce que signifie apprendre les opérations arithmétiques de multiplication et de divisions, par la rencontre avec une pensée multiplicative. Nous avons tout d'abord décrit des notions fondamentales de la TO (théorie de l'objectivation), sur laquelle nous avons largement basé notre travail. Ces notions apportent une perspective historico-culturelle des mathématiques, de l'enseignement et de l'apprentissage. La notion de pensée multiplicative que nous proposons comme alternative au terme du raisonnement multiplicatif, soutenue par une perspective constructiviste de la cognition, se concentre sur une manière mathématique de percevoir les opérations de multiplication et de divisions en lien avec cette relation multiplicative entre grandeurs. Nous avons indiqué que les pratiques historiquement et culturellement constituées de penser et d'agir, qui caractérisent cette pensée multiplicative, ont depuis l'antiquité été médiées par des formes matérielles de représentation et par des artefacts symboliques.

Le chapitre 3 a été consacré au développement de notre perspective sur les actions incarnées. Nous avons adhéré à l'approche de la cognition sensuelle esquissée par Radford. Ce cadre accorde une place fondamentale aux artefacts dans la cognition, en tant qu'éléments constitutifs. Nous avons introduit les termes d'*actions épistémiques non multiplicatives* et d'*actions multiplicatives* pour rendre compte des transformations de la perception des actions incarnées. En appui sur les travaux de Radford sur la perception et l'intuition, nous avons dénommé *domestication des mains* ce processus.

Dans le chapitre 4, nous avons approfondi la perspective sémiotique de l'activité. Nous avons développé notre perspective des gestes en tant que ressources sémiotiques incarnées fondamentales. Nous avons décrit le type de geste sur lequel nous nous sommes focalisées, à savoir les gesticulations, qui sont co-expressives avec le discours. Nous avons abordé la relation génétique entre le sensuel et le conceptuel dans la formation du savoir dans le cadre de la TO. Nous avons enfin exprimé nosdeux grandes questions de recherche.

Dans la deuxième partie, nous avons rendu compte de l'élaboration d'un accès empirique à nos questions de recherche. Dans le chapitre 5, nous avons présenté nos principes méthodologiques inspirées de la TO. Nous avons rendu compte de nos outils pour aborder notre objet d'analyse : l'activité en classe, lors de six séances de résolution de tâches multiplicatives. Nous avons précisé la structure de nos analyses de l'activité, constituée par une analyse *a priori* Φ des tâches, relative à la composante didactique Φ de l'activité, et par une analyse de l'activité en classe Θ. Nous avons précisé les outils que nous empruntons de la TDA (théorie de l'activité didactique) pour constituer notre analyse *a priori* des tâches. Nous avons ensuite présenté les concepts de nœud sémiotique, contraction sémiotique et faisceau sémiotique qui nous permettent de rendre compte de l'activité sémiotique en classe, ainsi que les outils d'analyse de gestes développées par McNeill. La TMS (théorie de la médiation sémiotique) est également évoquée en tant qu'outil d'analyse du potentiel sémiotique des artefacts.

Dans le chapitre 6, nous avons détaillé le contexte et les étapes du recueil de données, suite à la mise en place d'un travail collaboratif avec une enseignante d'une classe de CE2. Nous avons décrit les artefacts à travers lesquels les élèves allaient rencontrer la pensée multiplicative. Enfin, nous avons décrit sommairement les tâches multiplicatives que nous avons élaborées : des tâches de résolution de problème et des tâches d'élaboration de problèmes.

Dans la troisième partie, nous avons présenté nos analyses. Nous avons commencé avec celle du potentiel sémiotique des artefacts, en nous appuyant sur la TMS. Nous avons continué avec l'analyse de l'activité en classe qui a eu lieu lors de trois séances, analysées en détail. Finalement, nous avons présenté des analyses des segments saillants qui ont complété nos analyses précédentes. Ces segments étaient issus du reste des séances analysées et des entretiens avec les élèves.

Cette démarche nous a permis d'aborder nos questions de recherche. Nous allons par la suite les rappeler et les aborder à la lumière des résultats de nos analyses.

Première grande question de recherche et éléments de réponse

Notre première question est :

Comment la pensée multiplicative peut-elle émerger dans l'activité de la classe lorsque les élèves de CE2 résolvent des tâches multiplicatives ?

Enracinée dans des praxis historico-culturelles anciennes, la pensée multiplicative que nous avons esquissée préexistait sous une forme idéale développée, avant que les élèves de cette classe de CE2 ne s'engagent dans les tâches que nous les avons proposées. Nos tâches et artefacts ont façonné la forme et la généralité de la pensée multiplicative rencontrée. Nos analyses permettent d'apprécier la rencontre des élèves avec une manière de penser et d'agir sur la relation multiplicative entre grandeurs comme un processus profondément social, symbolique et incarné, émotionnel et poétique. Nous constatons que l'activité en classe est configurée comme un cadre communautaire au sein duquel l'élaboration active de significations et de création de sens a eu lieu. Le sens apparaît ici lié au monde matériel qui composent l'artefact *boîtes et cubes* et l'artefact *grille fois-partie-tout*, grâce au travail conjoint – sémiotique et multimodale – de l'enseignante et des élèves. Il nous semble que nos analyses mettent en évidence la rencontre avec les concepts d'opérations de multiplication et de divisions du point de vue des possibilités qu'ils offrent pour penser, réfléchir, argumenter et agir, au sein de cette rencontre. Nous allons approfondir la façon dont la pensée multiplicative a pu émerger à travers les questions avec lesquelles nous avons décortiqué notre première grande question.

Première sous-question

Nous allons aborder la question suivante :

Les formes numériques traditionnelles, configurent-elles les conditions pour la rencontre de la pensée multiplicative à travers des expressions numériques? Quelles pistes peut-on en tirer pour rendre accessible la pensée multiplicative aux élèves de CE2?

Le travail conjoint de l'enseignante et des élèves n'a pas été exempté de contradictions et de tensions intrinsèques au processus d'objectivation. Nous observons dans nos analyses que l'étrangeté de la rencontre avec le savoir se manifeste avec insistance lors de la première séance de Lignes de la même longueur (S_1), et dans une moindre mesure lors des séances Partage de lignes de boîtes (deuxième séance analysée, S_2) et d'Élaboration de problème (troisième séance analysée, S_3). La rencontre a pu se produire dès que la classe a fait tomber le voile du contrat didactique établi avec l'autre enseignant. Cette rencontre est mediée par la médiation de l'écriture symbolique des expressions multiplicatives avec l'unité de grandeur, dans une première rencontre, et puis par l'artefact symbolique *grille fois-partie-tout*.

Nous tenons à souligner aussi que les élèves de la classe avaient déjà rencontré les opérations de multiplication et de divisions. Il convient de noter ici que l'intérêt de l'enseignante pour l'artefact résidait principalement dans la possibilité de servir comme un outil à la résolution de problèmes verbaux par les élèves, à la manière de la grille de résolution. L'effet a été tout à fait contraire, puisqu'il a confronté les élèves à une manière de penser les opérations de multiplication et de divisions différente de celle qu'elles/ils avaient rencontrée. Une partie considérable des élèves semble néanmoins ne pas avoir pris conscience du rôle que peuvent jouer les grandeurs au sein d'une relation multiplicative. Un corollaire est qu'une perspective centrée sur le numérique ne façonne pas nécessairement les conditions d'accès à la pensée multiplicative qui nous intéresse. Dans cette perspective, les difficultés des élèves à ancrer significativement l'expérience concrète dans les termes d'une relation multiplicative entre grandeurs peuvent être masquées par la réussite à des tâches d'expression et d'exécution de calculs.

Deuxième sous-question

Quels moyens sémiotiques l'enseignante et les élèves utilisent-elles/ils au sein du processus d'objectivation des opérations de multiplication et de divisions? Quelles fonctions sémiotiques dépendantes à la fois de la perception, du langage, des actions, des gestes et des artefacts peuvent être identifiées?

Nous constatons qu'un large éventail de tonalités sémiotiques multimodales enrichit les processus sociaux de prise de conscience des significations culturelles de la réflexion et de l'action sur la relation multiplicative entre grandeurs. La corporéité qui se trouve dans les actions incarnées, les gestes et les artefacts a une place remarquable. Nous avons souligné l'utilisation d'autres ressources sémiotiques multimodales, souvent inattendues, telles que l'intonation de la voix, le rythme et le regard. En tant que dispositifs sémiotiques, ils mettent en évidence des aspects cruciaux de la compréhension par le contraste qu'ils provoquent entre certains points focaux et le reste de la discussion. Nous avons aussi mis en valeur la production des signes graphiques de la part des élèves, comme les signes de nombres, les dessins de cercles ou des marques dans leur feuille de travail ou sur le tableau. Les élèves y ont eu recours pour signifier des grandeurs en tant qu'unités.

Dans nos analyses, nous avons souligné le rôle fondamental que les gestes ont joué, la plus part de ceux-ci ayant été produits par l'enseignante. Les gestes ont, en effet, enrichi énormément la rencontre de la pensée multiplicative, par l'élaboration de significations mathématiques pertinentes. En particulier, ils ont eu une place remarquable pour signifier les termes dans la relation multiplicative. En coordination sensuelle aux paroles, aux signes et aux artefacts, ils sont devenus une ressource sémiotique fondamentale dans l'intégration dialectique du sensuel et du conceptuel. À travers ses gestes, l'enseignante a rendu apparentes les grandeurs et leurs relations multiplicatives. Les gestes ont incarné des actions épistémiques non multiplicatives et des actions multiplicatives. Nous voudrions souligner que ces gestes ont été généralement produits en coordination avec des artefacts ; ils portent leur empreinte. Nous le constatons du point de vue structurel, dans la forme qu'une partie considérable des gestes ont prise. En effet, à propos de l'artefact boîtes et cubes, ils se sont en général configurés autour d'une ligne droite imaginaire, avec des emplacements suggérant des boîtes de cubes. L'artefact *grille fois-partie-tout*, « en arrière-plan » de la production des gestes, a été fondamental pour faire apparaître, par les fonctions déictiques des gestes, les concepts de « tout », « partie » et « nombre de fois ».

Dans les deux premières séances analysées, les élèves ont rencontré des relations multiplicatives entre grandeurs par la médiation de l'artefact *boîtes et cubes*, Pendant le travail en groupe lors de la séance Lignes de la même longueur (S_1), l'artefact a fait rencontrer les élèves une manière incarnée de penser et d'agir sur le rapport de grandeurs. L'action incarnée itérée sur les boîtes a permis de rendre apparente la relation multiplicative entre grandeurs. Dans la séance Partage de lignes de boîtes (S_2), l'artefact a servi à la réalisation d'une action que nous avons qualifiée d'*épistémique non multiplicative*.

Concernant l'artefact *grille fois-partie-tout*, nous remarquons que sa potentialité ne se manifeste pas seulement dans l'objectivation de la relation multiplicative entre grandeurs à travers son remplissage. L'artefact symbolique a aussi offert la possibilité d'ouvrir la discussion dans la rencontre de modes de pensée et de communication historiques et culturels. Cette potentialité s'est exprimée dans les échanges des élèves lors des séances de Lignes de la même longueur (S_1), dans la présentation de l'artefact, et lors la séance de Partage des lignes de boîtes (S_2), dans le travail en groupe et la synthèse. Cependant, c'est dans le cadre de la réflexion collective profonde que l'artefact a soutenue dans la séance (S_3) d'élaboration de problème, que son potentiel s'exprime le plus clairement. Il faut souligner que le rôle de l'artefact n'est pas simplement de servir d'appui. À cet égard il convient de reprendre l'affirmation de Radford (2012) : « Knowing becomes knowing-with-tools as opposed to knowing via the tools. » (p. 285).

Nos analyses suggèrent que l'artefact *grille fois-partie-tout* configure un endroit dans lequel les élèves et l'enseignante apprennent à se situer de manière critique, dans des modes de pensée constitués culturels et historiques. Il a joué un rôle fondamental pour révéler les cas où les critères superficiels basés sur les situations évoquées ont poussée à une erreur, lors des épisodes qui se sont cristallisés dans l'histoire de la classe. L'artefact a également mis en évidence le caractère décentré que caractérise la forme d'intersubjectivité émergente de l'enseignante et des élèves dans le contexte de l'apprentissage de l'opération de multiplication et de divisions. Nous le voyons clairement dans l'anecdote du problème de multiplication de Raoul lors de la séance S_4. La ZDP (zone de développement proximal) fournit aux élèves la possibilité de rencontrer l'objet-savoir et à l'enseignante la possibilité d'enrichir sa perspective sur les problèmes verbaux pour sortir du stéréotype traditionnel, par exemple le mot partager pour l'opération de division.

Deuxième grande question de recherche et éléments de réponse

Notre deuxième grande question de recherche est la suivante :

Comment les actions incarnées peuvent-elles être impliquées dans le processus d'objectivation ?

La distinction théorique des *actions multiplicatives* et des *actions épistémiques non multiplicatives* permet d'apprécier la manifestation des actions du point de vue de la façon d'orienter la perception vers l'objet conceptuel en question : les opérations de multiplication et de divisions. Comme toute catégorisation, les limites des types de fonctions d'action ne sont pas strictes ; notre approche n'a pas pour but de proposer une distinction inflexible. Notre approche constitue une réponse à une perspective qui réduit l'action à une sphère quotidienne, et interprète l'implication de l'action dans l'apprentissage comme une ressource intuitive, au sens de Fischbein. Notre objectif est de fournir un cadre interprétatif permettant de poursuivre la réflexion et le questionnement sur la relation complexe entre le corps et l'apprentissage des opérations de multiplication et de division. En comprenant la perception comme un acte intentionnel, l'approche que nous avons développée nous a permis d'aborder les fonctions des actions et leur transformation à la lumière de l'objectivation du savoir. Nous avons introduit le terme de processus de *domestication de mains* pour rendre compte de cette transformation. Notre approche vise, en ce sens, à apporter de nouvelles perspectives sur la cognition incarnée à la didactique des mathématiques en France et à la recherche sur l'enseignement des mathématiques en général. L'analyse de l'activité en classe nous a permis d'avancer des hypothèses empiriques, en termes de relations dialectiques entre le concret et le conceptuel.

Nous abordons cette grande question à travers plusieurs sous-questions. Ces questions concernent la manifestation d'actions incarnées pendant la manipulation de l'artefact *boîtes et cubes* et dans le cadre des interventions de l'enseignante et des élèves, pendant l'activité en classe. Dans chaque cas, nous soulignons l'utilité de la distinction entre *actions multiplicatives* et *actions épistémiques non multiplicatives* comme cadre interprétatif. Nous concluons par une réflexion sur ce que la manipulation peut signifier du point de vue de l'enseignement.

Première sous-question

Comment les actions multiplicatives et les actions épistémiques non multiplicatives peuvent-elles se manifester dans la manipulation ?

L'analyse des tâches proposées en interaction avec l'artefact boîtes et cubes nous a permis d'observer que l'action incarnée peut se manifester de façons diverses. Dans l'activité en classe, nous avons constaté que l'action incarnée se manifeste en relation à d'autres savoirs. En effet, les élèves sont engagé·e·s dans une action épistémique qui met en évidence des concepts géométriques fondamentaux. L'enseignante participe à l'élaboration des outils procéduraux qui contrôlent l'action. Le recours aux gestes et aux actions incarnées a joué un rôle crucial. Dans ce contexte, l'artefact boîtes et cubes est devenu l'endroit de convergence et de circulation des significations mathématiques géométriques liées aux actions. Nous avons fait l'hypothèse que ces outils constituent un répertoire collectif résultant du travail conjoint de l'enseignante et des élèves. L'enseignante agit comme facilitatrice de l'émergence des significations culturelles et historiques dont ces outils sont dotés. Ce sont notamment ses gestes qui ont permis la mise en évidence de ces outils. Nous abordons l'action incarnée dans la deuxième question de recherche.

Pour la tâche Lignes de boîtes de la même longueur (S_1), le projet didactique de la tâche était que les élèves perçoivent les lignes comme étant constituées par l'itération d'une boîte, afin de rendre apparente la relation multiplicative entre les grandeurs associées. Nous avons observé des élèves qui rencontrent des difficultés à ancrer de manière significative la structure spatiale géométrique imposée par la tâche. Cette observation nous semble mettre en évidence un fait d'une importance cruciale : la structure spatiale géométrique n'est pas dans les objets en soi, elle n'a pas été accessible à toutes et tous les élèves. En corollaire, se pose la question de l'accompagnement de ces élèves dans le processus *domestication des mains*.

Pour reprendre les mots de Battista *et al.* (1998) : « They [the students] do not "read off" these [spatial geometrics] structures from objects » (p. 530). Face aux difficultés des élèves à appréhender la structure spatiale géométrique des rangements en deux dimensions, Battista *et al.* (*ibid.*) prennent une perspective critique par rapport aux séquences d'enseignement de la multiplication basées sur les rangements rectangulaires. À cet égard, plusieurs recherches suggèrent une synergie de la résolution de tâches multiplicatives dans un cadre numérique et de la résolution de tâche concernant la structuration de l'espace dans un cadre géométrique (Battista *et al.*, 1998 ; Battista *et al.*, 1998 ; Clements *et al.* 1997 ; Kosko, 2020 ; Mitchelmore, 1992 ; Mulligan et Mitchelmore, 2000 ; Outhred et Mitchelmore, 2000 ; Wheatley et Reynolds, 1996). Cette perspective est en quelque sorte la nôtre, dans la mesure où l'appréhension de la structure géométrique spatiale des lignes de boîtes peut être interprétée en termes d'orientation de l'action vers la relation multiplicative entre les grandeurs.

Dans la tâche Partage de lignes de boîtes (S_2), nous trouvons des différences cruciales quant à l'implication de l'action de partage dans la résolution des sous-tâches. Notre analyse *a priori* Φ suggère que la première sous-tâche pouvait être résolue par une action multiplicative et la seconde par une *action épistémique non multiplicative*, bien que les deux soient des problèmes de division partage. La distinction entre ces deux types d'action a permis d'apprécier la manifestation des actions en fonction de leur orientation vers la relation multiplicative des grandeurs, au-delà de leurs effets sur les objets physiques. Dans l'activité en classe, nous avons observé que l'*action multiplicative* pour résoudre la première sous-tâche ne s'est pas manifestée, ni pour les élèves ni pour l'enseignante. Par contre, l'*action épistémique non multiplicative* s'est manifestée lors du travail en groupe et lors de la synthèse, dans la correction de la sous-tâche. L'inclusion des questions de remplissage de la *grille fois-partie-tout* et d'écriture de calcul nous a permis de constater une rupture entre la réalisation de l'action incarnée et la reconnaissance de la relation multiplicative sous-jacente. Bien que l'*action épistémique non multiplicative* ait été dirigée par la recherche d'une grandeur inconnue et ait conduit à sa découverte, elle n'a pas amené à une rencontre avec la relation multiplicative impliquée. Les élèves ont eu des difficultés à ancrer significativement le sensuel et le conceptuel à travers l'action médiée par l'artefact boîtes et cubes. Revenons une fois de plus aux paroles de Raoul, très éclairantes à cet égard : « *non mais moi, mon problème c'est comment le poser* [dans la *grille fois-partie-tout*]. *C'est pas comment le calculer, en fait. Du coup, le calcul je sais déjà qu'il fait vingt-quatre.* ». Cette phrase est un signe important de prise de conscience qui indique où se situe la difficulté. En révélant l'absence des éléments conceptuels qui expliquent la relation multiplicative en question, l'élève prend une position ouverte pour les acquérir.

Deuxième sous-question

Est-il possible d'observer chez des enseignant·e·s une position différenciée face à des actions incarnées pragmatiques et des actions incarnées multiplicatives ? Quelles sont les implications sur le processus de transformation de la perception des actions incarnées ?

La distinction entre actions pragmatiques et actions multiplicatives nous a permis lors des séances S_1 et S_2 d'interpréter la position différenciée de l'enseignante vis-à-vis des actions. Les actions incarnées se sont manifestées au sein de l'interaction dynamique de ressources sémiotiques tels que les gestes, le rythme, la parole, les signes, les artefacts et l'intonation de la voix. Nous avons identifié deux types de gestes, dont l'identification a été cruciale pour analyser la façon dont l'action s'est manifestée dans les interventions de l'enseignante : les gestes iconiques et les gestes à dimension métaphorique et déictique saillantes. Dans les gestes iconiques, le mouvement incarné par la main fait ressortir une image associée culturellement à l'action dans le contexte quotidien, nous lui avons donc attribué la fonction pragmatique. Nous tenons à souligner que la fonction pragmatique ne doit pas non plus être sous-estimée. Ces gestes, avec d'autres évoquant des actions, ont contribué à l'appréhension phénoménologique du caractère général des phénomènes de grandeur impliqués. Dans les gestes à dimension métaphorique et déictique prédominante, l'action se manifeste afin de donner du sens à la relation multiplicative. C'est le cas des gestes *d'itération en ligne* et *de distribution en ligne*. La fonction de l'action est donc multiplicative. Les gestes sont ici un moyen sémiotique d'objectivation, dans la mesure où ils rendent apparentes les opérations de multiplication et de division partage. Une *domestication des mains* peut également être entrevue dans les gestes de l'enseignante. Ils montrent une manière de percevoir la façon dont l'action peut faire apparaître la relation multiplicative entre grandeurs.

Troisième sous-question

Nous allons aborder la question suivante :

Est-il possible d'observer chez les élèves une transformation dans la perception des actions incarnées ? Cette transformation s'accompagne-t-elle d'un progrès dans le processus d'objectivation ?

Du côté des élèves, nous voyons une progressivité dans l'intégration dialectique du sensuel et du conceptuel à travers la coordination sensuelle de gestes, de l'action médiatisée, de la parole et des signes par une élève, Éloïse. La distinction entre actions épistémiques non multiplicatives et actions multiplicatives nous a permis de retracer cette progressivité en trois épisodes. Nous avons constaté que cette intégration s'accompagnait d'une conscience accrue du concept de division groupement. Dans le premier moment (séance S_6, voir paragraphe 8.7.1), l'élève a explicité ses doutes sur la nature de l'inconnu dans la relation multiplicative qui permet de trouver l'opération de division groupement. Elle accompagne sa réflexion par un geste iconique par lequel l'action de grouper se manifeste au sens quotidien. Elle n'a pas été en mesure d'ancrer significativement l'action afin d'identifier la nature de l'inconnu. Dans le deuxième moment (séance S3, voir paragraphe 8.9.2, épisode 3), elle met en évidence sa progression dans la rencontre avec le concept de division groupement. Dans le cadre du travail conjoint, elle rend apparentes les relations entre la nature de l'inconnue au sein de la relation multiplicative et les opérations des divisions, notamment par la médiation de l'artefact *grille fois-partie-tout*. Dans le troisième moment (entretien voir paragraphe 8.10.1), nous constatons une complexification et une réorganisation des relations systémiques structurantes entre les composants matériels et idéels de la pensée, à travers la coordination du geste et de la parole. Éloïse fait apparaître par la coordination sensuelle du geste et la parole la relation multiplicative entre grandeurs.

Nous avons également identifié la manifestation d'*actions multiplicatives* pendant la séance S5 de résolution des problèmes de division groupement avec l'artefact boîtes et cubes (voir paragraphe 8.6.1). Un élève, Pierre, produit une action que nous avons dénommée *l'action de la main ouverte*. Il nous semble que l'action de l'élève cherche non seulement à produire des effets sur le matériel de manipulation pour résoudre la tâche, mais cherche aussi à donner du sens au matériel déplacé avec sa main. Plus précisément, nous avons interprété que l'élève présente à l'intérieur du travail conjoint une certaine manière de percevoir la manipulation. Cette perception fait apparaître le nombre de fois en tant que terme de la relation multiplicative entre les grandeurs impliquées.

Sur la manipulation dans l'enseignement

Les théories pédagogiques qui sous-tendent une grande partie des dispositions du programme officiel sont, de notre point de vue, liées à l'épistémologie piagétienne. L'expérience sensoriel-motrice étant considérée comme une voie éphémère vers la pensée abstraite, le rôle du corps et des artefacts se réduit dans ces approches aux premiers stades de l'enseignement. La manipulation apparaît souvent également comme étant liée aux phases de tatônnement dans la résolution de problèmes. Nos résultats suggèrent que la valeur de la manipulation dans l'enseignement des opérations de multiplication et de divisions peut être repensée. Nous considérons en effet que la valeur de la manipulation réside dans son potentiel à offrir des opportunités d'approfondir la relation entre les composantes matérielles et idéelles de la pensée. La manipulation est pour nous un lieu privilégié pour que le processus de *domestication des mains* s'opère.

Nos observations soulignent que la suppression des ressources incarnées à la faveur d'une activité réduite aux calculs, voire à « l'acquisition d'automatismes », peut rendre stérile la rencontre avec des formes de penser et d'agir impliquant la relation multiplicative entre grandeurs. En effet, nous avons vu que la réflexion aiguisée par les calculs ne donne pas nécessairement un sens à l'expérience concrète.

Nous ne disons pas que l'enseignement des opérations de multiplication et de divisions doit toujours s'inscrire dans un contexte de manipulation. En effet, nous considérons que l'objectivation des opérations de multiplication implique dans une certaine mesure un détachement du corps et des actions, en termes de contraction sémiotique. Cependant, nous considérons que ce détachement pourrait être enrichi par les opportunités offertes par la manipulation. En reprenant Radford et al. (2004) : « The disembodiment of meaning is not related to the exclusion of the body or the austerity of the action. Rather, the disembodiment of meaning is related to the possibility of dialectically embedding the sensual and the conceptual. » (p. 80)

Bien entendu, la manipulation ne fournit pas non plus un cadre permettant à l'objectivation du savoir de se produire spontanément. La manipulation n'est pas *magique*, comme le souligne Ball : « Although kinesthetic experience can enhance perception and thinking, understanding does not travel through the fingertips and up the arm » (Ball, 1992, p. 47). Bien que la cognition soit incarnée, la pensée englobe plus que l'incarnation : « Thinking is an activity that, although performed by an "I" and the "I's body", is ubiquitously drawing on culture's kit of patterns of meaning-making as well as on historically constituted concepts of an ethical, political, scientific, and aesthetic nature » (L. Radford, 2010, p. XXXVII). La signification historique-culturelle que les objets physiques constituant des artefacts évoquent ne se trouve pas dans les objets eux-mêmes : le sens apparaît et leur est attribué par la médiation de l'activité et de sa dimension sociale. Ainsi, une manipulation qui ne conduit pas à la transformation de la perception des actions incarnées risque de devenir l'éternel prélude d'une objectivation qui ne vient pas. Ou pire, il peut s'agir du scénario dans lequel les actions épistémiques non multiplicatives sont interprétées comme l'indice de l'acquisition des opérations de multiplication et de divisions par un effet Jourdain, sans aller au-delà de la résolution superficielle des problèmes verbaux expliqués par le phénomène de la suspension du sens.

Limites et perspectives

L'une des limitations les plus marquées de cette recherche réside dans les limites de l'expérimentation réalisée. Nous considérons que notre expérimentation ne nous a permis de rendre compte de la progressivité de la transformation de la perception des élèves des actions incarnées et des processus sociaux d'objectivation que de façon limitée. Nos analyses ne nous permettent pas d'avancer des hypothèses ontogénétiques robustes sur le processus de *domestication des mains*. Parmi les limitations, citons le petit nombre de séances planifiées avec l'artefact boîtes et cubes, quatre (S_1, S_2, S_4 et S_5), et le nombre réduit de séances que nous avons analysées en détail, trois (S_1, S_2 et S_3). De même, certains choix méthodologiques auraient pu être faits pour favoriser la collecte des données plus adéquates, par exemple en choisissant les élèves filmé·e·s et analysé·e·s à chaque séance (au lieu de le faire selon des contraintes externes) afin de pouvoir suivre leur progression. La fabrication laborieuse de boîtes en plastique a également limité le matériel de manipulation disponible par élève et a obligé de former des groupes peut-être trop importants, de quatre ou cinq élèves (il y avait toujours dans les groupes un·e ou deux élèves moins impliqué·e·s dans le travail collectif).

Une deuxième limite, cette fois théorique, concerne l'introduction de la TO en tant que cadre théorique structural de la thèse, qui a été tardive. Le développement de nos analyses en appui de la TO nous a conduit à envisager la possibilité de mener une analyse historique et épistémologique complémentaire. La question se pose également sur les outils d'analyse pour apprécier la place du processus de subjectivation au sein du travail conjoint. En particulier, il nous semble que l'ancrage du projet didactique dans l'éthique communautaire aurait donné des opportunités pour apprécier l'entrelacement de ce processus dans celui d'objectivation. Il nous semble qu'un tel projet nécessiterait alors d'un travail avec les enseignant·e·s avec une méthodologie qui serait à préciser.

Nous interrogeons les résistances à l'acquisition des concepts de multiplication et de divisions que nous avons identifiés en termes de perspectives pour des recherches à l'avenir à partir des résistances

Un aspect porte sur la classification des opérations de divisions utilisées dans certains textes curriculaires, division groupement et division partage. Ces expressions semblent reliées aux modèles intuitifs proposés par Fischbein (Fischbein *et al.*, 1989; Fischbein et Baltsan, 1989). En conservant ces noms, on risque de contribuer aux difficultés à la distinguer et à mettre en relation les situations impliquant des phénomènes de grandeur évoquées dans des problèmes verbaux, d'une part, et les opérations arithmétiques qui permettent de trouver l'inconnue et de résoudre ces problèmes, d'autre part. Une autre approche consiste à aborder les problèmes verbaux en termes de relation multiplicative entre grandeurs. Dans ce cadre, au lieu de distinguer des problèmes de multiplication, de division partage et de division groupement, on pourrait voir des problèmes de relations multiplicatives dans lesquelles on cherche le nombre de fois (le multiplicateur), la partie (le multiplicande) ou le tout (le produit).

Un autre aspect concerne la façon dont nous avons appuyé le travail avec l'artefact *grille de résolution* fait par l'enseignante. Tout d'abord, la manière dont l'artefact *grille fois-partie-tout* se base sur la disposition des cases et du cercle pour établir l'équalité entre le produit du « nombre de fois », la « partie » et le « tout » nous semble être un point qui peut être repris. Cette équalité est en effet établie par la disposition de cases de la partie juste à côté de la case du tout. Nous en avons parlé dans l'analyse du potentiel sémiotique de l'artefact. Cette disposition est de plus incompatible avec celle de comparaison de longueurs de lignes si elles sont orientées de la forme culturellement traditionnelle (en occident), horizontalement. Nous faisons l'hypothèse que les difficultés repérées dans la coexistence des artefacts *grille fois-partie-tout* avec *boîtes et cubes* peut réduire les possibilités de promouvoir une transition entre la manipulation et la symbolisation. L'artefact *grille fois-partie-tout* a aussi adopté le vocabulaire associé à l'artefact grille de résolution : les termes « partie » et « tout ». Il nous semble que le mot « partie », en tant qu'il réfère à un élément constitutif ou à une portion d'un tout, peut conduire à un glissement de sens en termes de la nature de relation d'équivalence de la relation multiplicative entre les grandeurs ; c'est-à-dire à penser que les relations multiplicatives nécessitent toujours une grandeur contenue dans une autre. Nous constatons le recours de l'enseignante à d'autres termes qui pourraient être plus adaptés comme « quantité », « quantité itérée » ou d'autres formulations comme « combien on a dans un groupe ». Le terme « nombre de fois » a également posé des difficultés qui semblent demander une vigilance accrue.

Nous nous intéressons à la caractérisation théorique de la pensée multiplicative, dont nous avons esquissé certains aspects. Des tâches peuvent être élaborées de manière à rendre accessible aux élèves une pensée multiplicative incarnée. Cette pensée serait caractérisée par une manière de penser et d'agir sur le rapport entre grandeurs par la médiation de l'artefact boîtes et cubes. Le matériel pourrait être fabriqué de telle sorte que plus d'élèves y aient accès. Il est possible également dans ce contexte d'enchaîner l'artefact *boîtes et cubes* avec d'autres artefacts de manipulation, comme les cubes multi-base ou même des bandes rectangulaires avec des carrées. Dans ce cadre, l'élaboration d'une séquence plus longue basée sur l'utilisation de l'artefact boîtes et cubes est l'une des perspectives de recherche. Il nous semble également intéressant d'étendre le niveau de scolarité de prescription de ces tâches pour des élèves de CP et de CE1.

Nous pourrions également étudier la transition d'une pensée multiplicative incarnée vers une pensée multiplicative symbolique. Dans cette perspective, nous considérons que l'artefact *grille fois-partie-tout*, ainsi que son introduction, peut être l'objet d'un raffinement. Une autre disposition du matériel pourrait admettre la symbolisation des relations d'équivalence multiplicatives entre plus de trois termes (idée suggérée par un élève avec la ligne qu'il a tracée, voir page 195). Une autre piste qui nous semble fondamentale pour penser cette transition tient à une des exploitations que l'enseignante a fait de l'artefact : la possibilité de re-signifier les grandeurs manipulées par son inscription dans une case. Les élèves pourraient même participer à l'élaboration de ressources sémiotiques pour signifier les relations multiplicatives entre grandeurs.

Il nous semble enfin que l'analyse de l'activité nous a permis de mettre en évidence des relations entre l'objectivation des opérations de multiplication et de divisions et la signification et la symbolisation de grandeurs en tant qu'unité. Nous l'avons signalé à plusieurs reprises. Nous considérons que ces liens peuvent être traités plus en profondeur. Une analyse historique et épistémologique peut être intéressante pour découvrir les pratiques historiques et culturelles qui nous donnent des éléments pour penser tel lien. Le cadre de la TO peut fournir une perspective historico-culturelle adaptée. Cela rejoint notre intention d'approfondir la caractérisation socioculturelle de la pensée multiplicative. Nous voudrions également incorporer les perspectives des travaux dont nous n'avons pris connaissance que récemment (Chambris, 2021).

Il nous semble que notre réflexion sur la question de la manipulation dans l'enseignement est sans doute limitée si elle n'incorpore pas dans l'équation des finalités éducatives qui devraient soutenir tel enseignement. Nous considérons que la non-explicitation de ces finalités éducatives dans la recherche implique souvent l'adhésion implicite aux finalités éducatives qui sous-tendent les programmes. Radford (2020d) rend compte des finalités éducatives scolaires en mathématiques dans la période de la fin du 19e siècle et le début du 20e siècle, dans laquelle l'éducation mathématique se profile comme un projet sociétal explicite. Il décrit principalement deux positions pédagogiques. D'une part, les pédagogies dites « modernes », appuyées sur l'idée d'une civilisation technologique, où l'élève y apparaît comme du capital humain. D'autre part, les pédagogiques dites « classiques », inspirées dans la philosophie de lumières, dans lesquelles l'élève est conçu·e comme « un individu en soi, un sujet en développement, en quête des conditions environnementales propices pour se réaliser pleinement » (*ibid.*, 362). La pédagogie centrée sur l'élève en est la version contemporaine.

L'enseignement des mathématiques aujourd'hui n'est pas étranger à ces positions pédagogiques, dont les influences sont également visibles dans les programmes actuels en France (*ibid*). Les finalités éducatives, centrées sur l'individu en tant que propriété privée (Radford, 2014), font « de l'école une institution vouée à la satisfaction des besoins entrepreneuriaux » (Radford, 2020d, p. 367). L'éducation mathématique devrait s'inscrire, insiste Radford, « dans un projet différent de ce qui l'a justifiée jusqu'à aujourd'hui comme discipline scientifique. » (*ibid.*, p. 368). Il propose : « Les mathématiques devraient donner l'occasion aux élèves d'entamer un dialogue critique avec l'humanité et, à partir de ce dialogue, nous permettre de mieux nous connaître en tant qu'humains. » (*ibid.*, p. 368).

Il s'agit alors d'élucider les possibilités que la manipulation dans l'éducation peut offrir pour initier un tel dialogue. Par exemple, faire entendre la polyphonie des voix des expériences qui naissent dans la rencontre créative avec la matière, en opposition à une éducation qui apprend très tôt aux enfants à oublier le corps et les mains. Et surtout, sans perdre de vue l'élève en tant que personne « qui, en apprenant, vit, respire, jouit et souffre avec d'autres. » (Radford, 2018a, p. 319), ce qui va au-delà de toute perspective qui les réduit au sujet épistémique.. Nous considérons qu'il s'agit là d'un point crucial, notamment dans la mesure où il s'agit de s'élever contre la violation systématique des droits des enfants – et surtout de certain·e·s enfants – dans les institutions supposées être responsables de leur soin. de plus d'un millier d'enfants mort·e·s en 15 ans sous la responsabilité du SENAME [27] au Chili ; le plus de deux mille enfants réunionnais arraché·e·s à leur famille entre 1966 et 1982 pour venir en France ; les corps de 215 enfants autochtones dont les restes ont été récemment découverts au Canada, ne font que réaffirmer l'urgence de dénoncer contre la violence systématique à l'encontre des enfants.

Et si « c'est justement à l'école que les bases de ces mouvements sociaux [producteurs d'une intelligibilité de l'existence collective] de nature politique devraient commencer » (Radford 2020d, p. 368), une piste peut apparaître en revenant aux mains et en découvrant leurs possibilités d'action et leur potentiel émancipateur lorsqu'elles s'engagent dans le tissage du collectif. Une telle

27. Institution gouvernementales chiliennes chargée de la protection des droits des enfants et des adolescents au Chili.

puissance, je la connais bien [28]. La question qui se pose alors est celle de savoir comment façonner les conditions pour que le processus de *domestication des mains* puisse donner lieu aussi à un processus de soulèvement de *mains subversives*.

28. Ici je parle en tant qu'artiste textile féministe militante. Je parle des réflexions et des contemplations que cette pratique, souvent collective, avec la laine et le tissu, m'a permis de développer. Et je parle de l'étreinte avec la matière au sein des techniques textiles dont je tiens compte dans le texte chilpko, en tant que seniora serpiente. Ce mot « je » apparaît dans le cadre d'une démarche scientifique qui cherche à écarter les hypothèses injustifiées, mais qui n'est pas faite de rien. Contraire à l'idée d'un œil désincarné examinant objectivement les phénomènes, j'adhère aux paroles de Maturana : « Todo lo dicho es dicho por alguien » (Maturana, 1989, p. 63). Je tiens à souligner l'importance que ses considérations peuvent avoir dans le cadre d'un projet éducatif qui vise à engager un dialogue critique avec l'humanité : « mais l'hypothèse que la science ne puisse pas contribuer à une compréhension de notre expérience peut impliquer, dans le contexte moderne, l'abandon de la tâche consistant à nous comprendre nous-mêmes. L'expérience et la compréhension scientifique sont comme les deux jambes qui nous sont nécessaires pour marcher » (Varela *et al.*, p. 48)

Références

Abrahamson, D., Nathan, M. J., Williams-Pierce, C., Walkington, C., Ottmar, E. R., Soto, H., & Alibali, M. W. (2020). The future of embodied design for mathematics teaching and learning. In *Frontiers in education* (Vol. 5, p. 147).

Abrahamson, D., & Trninic, D. (2011). Toward an embodied-interaction design framework for mathematical concepts. In *Proceedings of the 10th international conference on interaction design and children* (pp. 1–10).

Adams, T. L. (2003). Reading mathematics : More than words can say. *The Reading Teacher*, *56*(8), 786–795.

Anderson, M. L. (2003). Embodied cognition : A field guide. *Artificial intelligence*, *149*(1), 91–130.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *9*(Extraordinario 1), 267–299.

Arzarello, F., Paola, D., et al. (2007). Semiotic games : The role of the teacher. In *Proceedings of the 31st conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 17–24).

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 97–109.

Arzarello, F., & Robutti, O. (2010). Multimodality in multi-representational environments. *ZDM*, *42*(7), 715–731.

Arzarello, F., Robutti, O., & Thomas, M. (2015). Growth point and gestures : looking inside mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(1), 19–37.

Arzarello, F., & Sabena, C. (2014). Analytic-structural functions of gestures in mathematical argumentation processes. *Emerging perspectives on gesture and embodiment*, 75–103.

Baccaglini-Frank, A., Carotenuto, G., & Sinclair, N. (2020). Eliciting preschoolers' number abilities using open, multi-touch environments. *ZDM*, 1–13.

Bakos, S., & Sinclair, N. (2019a). Exploring the semiotic potential of touchtimes with primary teachers. In *International symposium elementary mathematics teaching* (p. 53).

Bakos, S., & Sinclair, N. (2019b). Pips (times) pods : Dancing towards multiplicative thinking. In *Eleventh congress of the european society for research in mathematics education (cerme11)*.

Ball, W. W. R. (1960). *A short account of the history of mathematics*. Courier Corporation.

Bartolini Bussi, M., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom : Artifacts and signs after a vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education*, *746*.

Bass, H. (2005). Mathematics, mathematicians, and mathematics education. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *42*(4), 417–430.

Battista, M. T. (1999). Fifth graders' enumeration of cubes in 3d arrays : Conceptual progress in an inquiry-based classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(4), 417–448.

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C. V. A. (1998). Students' spatial structuring of 2d arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(5), 503–532.

Baudrillard, J. (1968). *El sistème des objets*. Paris : Gallimard.

Bautista, A., & Roth, W.-M. (2012). Conceptualizing sound as a form of incarnate mathematical consciousness. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 41–59.

Bechara, A., Damasio, H., & Damasio, A. R. (2000). Emotion, decision making and the orbitofrontal cortex. *Cerebral cortex*, *10*(3), 295–307.

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational studies in Mathematics*, *12*(4), 399–420.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). Deal with modelling problems. *Mathematical modelling : Education, engineering and economics-ICTMA*, *12*, 222.

Boyce, S., & Norton, A. (2016). Co-construction of fractions schemes and units coordinating structures. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 10–25.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.

Boyer, T. W., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning : where young children go wrong. *Developmental psychology*, *44*(5), 1478.

Brissiaud, R., & Sander, E. (2010). Arithmetic word problem solving : A situation strategy first framework. *Developmental Science*, *13*(1), 92–107.

Brossard, M. (2008). Concepts quotidiens/concepts scientifiques : réflexions sur une hypothèse de travail. *Carrefours de l'éducation*(2), 67–82.

Brousseau, G. (2011). *La théorie des situations didactiques en mathématiques* (N° 5-1). Presses universitaires de Rennes.

Cai, J., & Silver, E. A. (1995). Brief report : Solution processes and interpretations of solutions in solving a division-with-remainder story problem : Do chinese and us students have similar difficulties ? *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(5), 491–497.

Carlotti, J.-F. (1995). Quelques réflexions sur les unîtes de mesure utilisées en architecture à l'époque pharaonique. *Les cahiers de Karnak*, *10*, pp–127.

Caveing, M. (1998). L'histoire des mathématiques de l'antiquité. *Revue de synthese*, *119*(4), 485–510.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en didactique des mathématiques*, *30*, 317–366.

Chambris, C. (2020). Raisons d'être des grandeurs – le cas de l'arithmétique à l'école élémentaire. In *Ouvrage collectif suite à la 20e école d'été de didactique des mathématiques (Autrans, 13 – 19 octobre 2019)*.

Chorney, S., & Sinclair, N. (2021). Concepts in action : Multiplication as spread. *Khon Kaen, Thailand 19-22 July 2021*.

Clark, A., & Chalmers, D. (1998). The extended mind. *analysis*, *58*(1), 7–19.

Clement, L. L., & Bernhard, J. Z. (2005). A problem-solving alternative to using key words. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *10*(7), 360–365.

Clements, D. H., Battista, M. T., Sarama, J., & Swaminathan, S. (1997). Development of students' spatial thinking in a unit on geometric motions and area. *The Elementary School Journal*, *98*(2), 171–186.

Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for research in mathematics education*, *14*(2), 83–94.

Cook, A. H. (1994). *Observational foundations of physics*. Cambridge University Press.

Cooper, J. (1954). Mathematical monsters. *The Mathematical Gazette*, *38*(326), 258–265.

Coquin-Viennot, D. (2001). Problèmes arithmétiques verbaux à l'école : pourquoi les élèves ne répondent-ils pas à la question posée ? *Enfance*, *53*(2), 181–196.

Dane, E., & Pratt, M. G. (2009). Conceptualizing and measuring intuition : A review of recent trends. *International review of industrial and organizational psychology*, *24*(1), 1–40.

De Bock, D. (2020). Georges cuisenaire's numbers in colour. a teaching aid that survived the 1950s. In *"dig where you stand" 6. proceedings of the sixth international conference on the history of mathematics education.*

Décamp, N., Rollinde, E., & Derniaux, C. (2021). Une expérimentation concernant l'étude des changements de référentiels. la cognition incarnée au service de l'apprentissage de la cinématique. In *11e rencontres scientifiques de l'ardist* (pp. 761–767).

De Corte, E., Verschaffel, L., & De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of educational psychology*, *77*(4), 460.

De Corte, E., Verschaffel, L., & Greer, B. (2000). Connecting mathematics problem solving to the real world. In *Proceedings of the international conference on mathematics education into the 21st century : Mathematics for living* (pp. 66–73).

de Freitas, E. (2016). Number sense and the calculating child : Measure, multiplicity and mathematical monsters. *Discourse : Studies in the Cultural Politics of Education*, *37*(5), 650–661.

de Freitas, E., & Sinclair, N. (2013). New materialist ontologies in mathematics education : The body in/of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(3), 453–470.

Degrande, T., Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Open word problems : taking the additive or the multiplicative road? *ZDM*, *50*(1), 91–102.

de l'éducation nationale de la jeunesse et des sports, M. (2021). J'enseigne au cycle 2,`https://eduscol.education.fr/84/j-enseigne-au-cycle-2`, 10 octobre.

De Saussure, F. (1916). Nature of the linguistic sign. *Course in general linguistics*, 65–70.

Dias, T. (2005). La dimension expérimentale en mathématiques : mythe ou réalité. *Actes des 4es*, 1–9.

Dias, T., & Durand-Guerrier, V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM*, *60*, 61–78.

Dooren, W. V., Bock, D. D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication… and back : The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, *28*(3), 360–381.

Durand-Guerrier, V., Dias, T., & Pelay, N. (2010). Mathématiques et réalité, une problématique centrale dans l'apprentissage des mathématiques à l'école. In F. O. . C. Thuderoz (Ed.), *Des mondes bricolés ? Arts & Sciences à l'épreuve de la notion de bricolage* (p. 177-189). Presses polytechniques & universitaires romandes.

Dutriaux, L., & Gyselinck, V. (2016). Cognition incarnée : un point de vue sur les représentations spatiales. *LAnnee psychologique*, *116*(3), 419–465.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 5, pp. 37–65).

Edwards, L. D. (2009). Gestures and conceptual integration in mathematical talk. *Educational studies in mathematics*, *70*(2), 127–141.

Edwards, L. D., MooreRusso, D., & Ferrara, F. (2014). *Emerging perspectives on gesture and embodiment in mathematics*. IAP.

Empson, S., & Knudsen, J. (2003). Building on children's thinking to develop proportional reasoning. *Texas Mathematics Teacher*, *2*, 16–21.

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity : The case of number. *Educational studies in mathematics*, *61*(1), 67–101.

Feferman, S. (2000). Mathematical intuition vs. mathematical monsters. *Synthese*, *125*(3), 317–332.

Ferrara, F. (2014). How multimodality works in mathematical activity : Young children graphing motion. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*(4), 917–939.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Vol. 85). Springer Science & Business Media.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics : An educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the learning of mathematics*, *9*(2), 9–14.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, *16*(1), 3–17.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational studies in mathematics*, *15*(1), 1–24.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational studies in mathematics*, 3–40.

Freudenthal, H. (2012). *Mathematics as an educational task*. Springer Science & Business Media.

Friberg, J. (1986). *The early roots of babylonian mathematics : 3. three remarkable texts from ancient* *ebla* (Vol. 6).

Furner, J. M., & Worrell, N. L. (2017). The importance of using manipulatives in teaching math today. *Transformations*, *3*(1), 2.

Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts : The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive neuropsychology*, *22*(3-4), 455–479.

Gandon, S. (2009). *Relations et quantités chez russell (1897-1913)* (Thèse de doctorat non publiée). Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II.

Gehlen, A. (1988). *Man, his nature and place in the world* (Vol. 3). Columbia University Press.

Glasersfeld, E. (1981a). The conception and perception of number. *Information Reference Center (ERIC/IRC), The Ohio State Univ., 1200 Chambers Rd., 3rd Floor, Columbus*, 15.

Glasersfeld, E. (1981b). Introducción al constructivismo radical. *La realidad inventada ¿ Cómo sabemos lo que creemos saber*, 20–37.

Glasersfeld, E. (1989). Facts and the self from a constructivist point of view. *Poetics*, *18*(4-5), 435–448.

Goldin-Meadow, S. (2004). Gesture's role in the learning process. *Theory into practice*, *43*(4), 314–321.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations.

Greer, B. (1993). The mathematical modeling perspective on wor (l) d problems. *The Journal of Mathematical Behavior*.

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms : The case of word problems. *Learning and instruction*, *7*(4), 293–307.

Griesel, H. (2007). Reform of the construction of the number system with reference to gottlob frege. *ZDM*, *39*(1-2), 31–38.

Griffiths, R., Back, J., & Gifford, S. (2017). Using manipulatives in the foundations of arithmetic. *Retrieved from University of Leicester website : www. nuffieldfoundation. org/sites/default/files/files/Nuffield% 20Main% 20Report% 20Mar% 202017web (1). pdf*.

Guissard, M.-F., & Henry, V. (2011). Math et manips à l'école primaire. favoriser l'apprentissage des grandeurs par des manipulations. *Losanges*, *15*, 16–21.

Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction*, *28*(4), 383–432.

Hackenberg, A. J. (2013). The fractional knowledge and algebraic reasoning of students with the first multiplicative concept. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 538–563.

Hackenberg, A. J., & Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts : A critical constructive resource for fraction composition schemes. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 1–18.

Harel, G., & Confrey, J. (1994). *Development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics, the*. Suny Press.

Hartshorne, C., Weiss, P., Burks, A. W., et al. (1958). *Collected papers of charles sanders peirce* (Vol. 8). Belknap Press of Harvard University Press.

Hatch, J. A. (2002). *Doing qualitative research in education settings*. Suny Press.

Hegel, G. W. F. (1991). The encyclopaedia logic : Part i of the encyclopaedia of the philosophical sciences with the zustze.

Hegel, G. W. F., & Wallace, W. (1975). *Hegel's logic*. Oxford University Press Oxford.

Held, R., & Hein, A. (1963). Movement-produced stimulation in the development of visually guided behavior. *Journal of comparative and physiological psychology*, *56*(5), 872.

Henrion, D. (1632). Les quinze livres des éléments géométriques d'euclide : plus le livre des donnez du mesme euclide aussi traduict en françois par ledit henrion, et imprimé de son vivant/traduicts en françois par d. henrion https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k68013g/f172.item. *Veuve Henrion (Paris)*.

Heraud, J. (1998). Quantification et conceptualisation dans l'épreuve des objets :«tu as raison, un poisson est un poisson». In (pp. 1–10).

Hidayah, I., & Istiandaru. (2018). Manipulatives and question series for elementary school mathematics teaching on solid geometry. *International Journal of Instruction*, *11*(3), 649–662.

Hirsch, A. P. (2013). *Ancient egyptian cubits–origin and evolution*. University of Toronto (Canada).

Horadam, A. (2004). " fibonacci's liber abaci" : A translation into modern english of leonardo pisano's book of calculation by le sigler. *FIBONACCI QUARTERLY*, *42*(1), 82–85.

Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. In *Annales de didactiques et de sciences cognitives* (Vol. 16, pp. 67–96).

Houdement, C. (2014). Des connaissances fonctionnelles (mais ignorées) en résolution de problèmes arithmétiques. *Cahiers des Sciences de l'Education*, *36*, 7–34.

Houdement, C., & Petitfour, E. (2017). Malentendus sémiotiques dans l'enseignement spécialisé. In *44e colloque international sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles-*

manipuler, représenter, communiquer : quelle est la place de la sémiotique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques? (pp. 79–96).

Houdement, C., & Petitfour, E. (2018). L'analyse sémiotique de l'activité mathématique, une nécessité didactique dans le contexte de l'adaptation scolaire. In *Annales de didactiques et de sciences cognitives* (Vol. 23, pp. 9–40).

Houdement, C., & Petitfour, E. (2019). Manipulatives in special education : help or hindrance? In *11th congress of the european society for research in mathematics education.*

Høyrup, J. (2002). A note on old babylonian computational techniques. *Historia Mathematica*, *29*(2), 193–198.

Husserl, E. (1971). Logical investigations, vol. i–ii. trans. *JN Findlay. London and New York : Routledge. First edition of the translation*, 1900–1.

Husserl, E. (2012). *Ideas : General introduction to pure phenomenology*. Routledge.

Hutto, D. D., & Myin, E. (2012). *Radicalizing enactivism : Basic minds without content*. MIT press.

Ilyenkov, E. (1977). Dialectical logic : Essays on its history and theory. moscow. *Pacifica, CA, USA : Progress Publishers*.

Iversen, E. (1968). Diodorus' account of the egyptian canon. *The Journal of Egyptian Archaeology*, *54*(1), 215–218.

Jewitt, C., Bezemer, J., & O'Halloran, K. (2016). *Introducing multimodality*. Routledge.

Kendon, A. (1988). How gestures can become like words. In *This paper is a revision of a paper presented to the american anthropological association, chicago, dec 1983.*

Kirsh, D. (2010). Thinking with external representations. *AI & society*, *25*(4), 441–454.

Kirsh, D., & Maglio, P. (1994). On distinguishing epistemic from pragmatic action. *Cognitive science*, *18*(4), 513–549.

Klein, F. (2004). *Elementary mathematics from an advanced standpoint : Arithmetic, algebra, analysis* (Vol. 1). Courier Corporation.

Köhler, W., & Winter, E. (2018). *The mentality of apes*. Routledge.

Kosko, K. W. (2020). The multiplicative meaning conveyed by visual representations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *60*, 100800.

Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for research in Mathematics Education*, *20*(2), 147–158.

Lakoff, G. (2012). Explaining embodied cognition results. *Topics in cognitive science*, *4*(4), 773–785.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). Conceptual metaphor in everyday language. *The journal of Philosophy*, *77*(8), 453–486.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from* (Vol. 6). New York : Basic Books.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion : Cognitive foundations in unitizing and norming. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 89–120.

Linchevski, L., & Vinner, S. (1988). The naive concept of sets in elementary teachers. In *Proceedings of the 12th international conference, psychology of mathematics education* (Vol. 11, pp. 471–478).

Maffia, A., & Mariotti, M. A. (2018). Intuitive and formal models of whole number multiplication : Relations and emerging structures. *For the Learning of Mathematics*, *38*(3), 30–36.

Malola, M., Symons, D., & Stephens, M. (2020). Supporting students' transition from additive to multiplicative thinking : A complex pedagogical challenge. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *25*(2), 31–36.

Mariotti, M. A., & Maracci, M. (2011). Resources for the teacher from a semiotic mediation perspective. In *From text to'lived'resources* (pp. 59–75). Springer.

Marx, K. (1982). Œuvres. tomme iii. philosophie. edition m. rubel.

Maturana, H., & Varela, F. (1987). The tree of knowledge. boston. *New Science Library*.

Maturana, H. R. (1988). Reality : The search for objectivity or the quest for a compelling argument. *The Irish journal of psychology*, *9*(1), 25–82.

McNeill, D. (1985). So you think gestures are nonverbal? *Psychological review*, *92*(3), 350–371.

McNeill, D. (2000). *Language and gesture* (Vol. 2). Cambridge University Press Cambridge.

McNeill, D. (2005). *Gesture and thought*. University of Chicago press.

McNeill, D. (2011). *Hand and mind*. De Gruyter Mouton.

McNeill, D. (2016). *Why we gesture : The surprising role of hand movements in communication*. Cambridge University Press.

McNeill, D., Cassell, J., & McCullough, K.-E. (1994). Communicative effects of speech-mismatched gestures. *Research on language and social interaction*, *27*(3), 223–237.

McNeill, D., & Levy, E. T. (1993). Cohesion and gesture. *Discourse processes*, *16*(4), 363–386.

McNeill, D., Quek, F., McCullough, K. E., Duncan, S., Furuyama, N., Bryll, R., ... Ansari, R. (2001). Gesture and speech multimodal conversational interaction. *VISLab Report : VISLab-01*, *1*.

Montessori, M. (1912). A critical consideration of the new pedagogy in its relation to modern science.

Morgan, C., & Kynigos, C. (2014). Digital artefacts as representations : forging connections between a constructionist and a social semiotic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(3), 357–379.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? how teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in mathematics*, *47*(2), 175–197.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33–49.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for research in Mathematics Education*, *28*(3), 309–330.

Nemirovsky, R., & Ferrara, F. (2009). Mathematical imagination and embodied cognition. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 159–174.

Nobe, S. (1997). Representational gestures, cognitive rhythms, and acoustic aspects of speech : A network/threshold model of gesture production.

Norton, A., Boyce, S., Ulrich, C., & Phillips, N. (2015). Students' units coordination activity : A cross-sectional analysis. *The Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 51–66.

Nunes, T., Bryant, P., Burman, D., Bell, D., Evans, D., & Hallett, D. (2009). Deaf children's informal knowledge of multiplicative reasoning. *Journal of deaf studies and deaf education*, *14*(2), 260–277.

Oddo, M., Villa, F., & Citerio, G. (2012). Brain multimodality monitoring : an update. *Current opinion in critical care*, *18*(2), 111–118.

Olive, J., & Steffe, L. P. (2010). The partitive, the iterative, and the unit composition schemes. In *Children's fractional knowledge* (pp. 171–223). Springer.

Outhred, L. N., & Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for research in mathematics education*, *31*(2), 144–167.

O'Halloran, K. L. (2015). The language of learning mathematics : A multimodal perspective. *The Journal of Mathematical Behavior*, *40*, 63–74.

Petitfour, E. (2015). *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition cm2-6ème* (Thèse de doctorat non publiée). Université Paris Diderot-Paris 7.

Piaget, J. (1974). La prise de conscience.

Polanyi, M. (1961). Knowing and being. *Mind*, 458–470.

Portet, P. (2012). *La mesure de paris. a mesure de paris. les anciennes mesures du centre historique de* *la france d'après les tables de conversion, charbonnier, pierre (ed.), editions du cths, paris, 2012.*

Puchner, L., Taylor, A., O'Donnell, B., & Fick, K. (2008). Teacher learning and mathematics manipulatives : A collective case study about teacher use of manipulatives in elementary and middle school mathematics lessons. *School Science and Mathematics*, *108*(7), 313–325.

Radford, L. (1998). On signs and representations a cultural account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *35*, 277–302.

Radford, L. (2003). On culture and mind : A post-vygotskian semiotic perspective with an example from greek mathematical thought.

Radford, L. (2006a). Elements of a cultural theory of objectification. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*, 103–129.

Radford, L. (2008a). Iconicity and contraction : A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, *40*(1), 83–96.

Radford, L. (2008b). Culture and cognition : Towards an anthropology of mathematical thinking. *Handbook of international research in mathematics education*, *2*, 439–464.

Radford, L. (2009a). Why do gestures matter? sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational studies in mathematics*, *70*(2), 111–126.

Radford, L. (2010a). The eye as a theoretician : Seeing structures in generalizing activities. *For the learning of mathematics*, *30*(2), 2–7.

Radford, L. (2010b). Elementary forms of algebraic thinking in young students. In *Proceedings of the 34th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 73–80).

Radford, L. (2011a). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : La théorie de l'objectivation. *Éléments*, *1*, 1–27.

Radford, L. (2011b). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In *Proceedings of the 35th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 17–24).

Radford, L. (2012). *On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. in g. gueudet, b. pepin, & l. trouche, (eds.).* New York : Springer.

Radford, L. (2013a). Sensuous cognition. In *Visual mathematics and cyberlearning* (pp. 141–162). Springer.

Radford, L. (2013b). Perceiving with the eyes and with the hands. *International Journal for Research in Mathematics Education*, *3*(1), 56–77.

Radford, L. (2014a). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM*, *46*(3), 349–361.

Radford, L. (2014b). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257–277.

Radford, L. (2014c). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(3), 405–422.

Radford, L. (2014d). On teachers and students : An ethical cultural-historical perspective. In *Proceedings of the joint meeting of pme* (Vol. 38, pp. 1–20).

Radford, L. (2015a). Pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. *Actes EMF2015–GT3*.

Radford, L. (2015b). Methodological aspects of the theory of objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, *8*(18).

Radford, L. (2016). Mathematics and mathematics classroom activity through the lens of a metaphor. *La Matematica e la sua Didattica/Mathematics and Mathematics Education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore*, 439–446.

Radford, L. (2018a). Une théorie vygotskienne de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM*, 314–332.

Radford, L. (2018c). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *12*(2), 61–80.

Radford, L. (2020a). Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*(21), 19–41.

Radford, L. (2020b). El aprendizaje visto como saber y devenir : una mirada desde la teoría de la objetivación. *REMATEC*, *15*(36), 27–42.

Radford, L. (2020c). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación [a journey through the theory of objectification]. in s. takeco gobara & l. radford (eds.). *Teoria da Objetivação : Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática*, 15–42.

Radford, L. (2020d). Les finalités éducatives scolaires en mathématiques : présupposés, égarements et quelques pistes pour retrouver la voie. in y. lenoir, j. bourque, a. hasni, r. nagy & m. priolet (eds.). *Les finalités éducatives scolaires. Pour une étude critique des approches théoriques, philosophiques et idéologiques. T. 2 : Conceptions des finalités et des disciplines scolaires chez des enseignants du primaire. Une étude comparative internationale*, 15–42.

Radford, L. (Presse 1). Sensed objects, sensing subjects : Embodiment from a dialectical materialist perspective. *The Body in Mathematics; Edwards, L., Krause, C., Eds*.

Radford, L., Arzarello, F., Edwards, L., & Sabena, C. (2017). The multimodal material mind : Embodiment in mathematics education.

Radford, L., Bardini, C., Sabena, C., et al. (2006). Rhythm and the grasping of the general. In *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 393–400).

Radford, L., Bardino, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the general : The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for research in Mathematics Education*, *38*(5), 507–530.

Radford, L., Demers, S., Guzmán, J., & Cerulli, M. (2004). The sensual and the conceptual : Artefact-mediated kinesthetic actions and semiotic activity. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Radford, L., Demers, S., & Miranda, I. (2009b). *Processus d'abstraction en mathématiques*. Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques.

Radford, L., Edwards, L., & Arzarello, F. (2009a). Introduction : beyond words. *Educational studies in mathematics*, *70*(2), 91–95.

Radford, L., et al. (2017a). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas : problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L., & Sabena, C. (2015). The question of method in a vygotskian semiotic approach. In *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 157–182). Springer.

Radford, L., Schubring, G., & Seeger, F. (2011). Signifying and meaning-making in mathematical thinking, teaching, and learning. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 149–156.

Radford, L. G. (2001). The historical origins of algebraic thinking. In *Perspectives on school algebra* (pp. 13–36). Springer.

Reber, A. S. (1989). Implicit learning and tacit knowledge. *Journal of experimental psychology : General*, *118*(3), 219.

Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things : Contextual effects on understanding and solving word problems. *Instructional Science*, *17*(4), 309–338.

Reynolds, A., & Wheatley, G. H. (1996). Elementary students' construction and coordination of units in an area setting. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(5), 564–581.

Robert, A. (2003). Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations individuelles introduites au démarrage des exercices cherchés en classe. *Petit* *x*.

Robert, A. (2008). Sur les apprentissages des élèves : une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. *La classe de mathématiques : Activités des élèves et pratiques des enseignants*, 33–44.

Robert, A., & Vandebrouck, F. (2014). *Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et zpd des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes.* (N° 10). IREM de Paris.

Robson, E. (2009a). *Mathematics, metrology, and professional numeracy*. Routledge.

Robson, E. (2009b). Mathematics education in an old babylonian scribal school. *Oxford Handbook of the History of Mathematics*, 199–227.

Robutti, O. (2006). Motion, technology, gestures in interpreting graphs. *International journal for technology in mathematics education*, *13*(3).

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., … Joubert, M. (2016). Icme international survey on teachers working and learning through collaboration : June 2016. *ZDM*, *48*(5), 651–690.

Rogalski, J. (2008). Théorie de l'activité et cadres développementaux pour l'analyse liée des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves. f. vandebrouck (ed.). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, *1*.

Rogalski, J. (2015). *Didactique et cognition. De Vygotsky à Dehaene… ?* (N° 13). IREM de Paris.

Roh, D., & Park, S. (2016). Brain multimodality monitoring : updated perspectives. *Current neurology and neuroscience reports*, *16*(6), 56.

Roth, W.-M. (2001). Gestures : Their role in teaching and learning. *Review of educational research*, *71*(3), 365–392.

Roth, W.-M. (2010). Incarnation : Radicalizing the embodiment of mathematics. *For the learning of Mathematics*, *30*(2), 8–17.

Rouche, N. (1992). Le sens de la mesure. *Bruxelles : Didier Hatier*.

Sabena, C., Krause, C., & Maffia, A. (2016). L'analisi semiotica in ottica multimodale : dalla costruzione di un quadro teorico al networking con altre teorie. *Relazione al XXXIII Seminario Nazionale di ricerca in didattica della matematica Giovanni Prodi*.

Sackur, C., Dorouhard, J.-P., Maurel, M., & Pécal, M. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire? *Repères IREM*, *28*, 37–68.

Saxe, G. B., & Esmonde, I. (2004). Making change in oksapmin tradestores : A study of shifting practices of quantification under conditions of rapid shift towards a cash economy. *South Pacific Journal of Psychology*, *15*, 11–28.

SCEREN. (2010). Le nombre au cycle 2.

Schmandt-Besserat, D. (1986). An ancient token system-the precursor to numerals and writing.

Schnatz, H. (2012). Length–the si base unit "metre". *MITTEILUNGEN S*, *122*, 7–21.

Schoenfeld, A. (1991). *Informal reasoning and education, capıtol on mathematics sense making : An informal attack on the unfortunately divorce of formal and informal mathematics, pagina 311–343*. Erlbaum.

Siemon, D., Breed, M., & Virgona, J. (2005). From additive to multiplicative thinking–the big challenge of the middle years. In *Mathematics : celebrating achievement. proceedings of the annual conference of the mathematical association of victoria, melbourne : Mav.*

Silver, E. A. (1988). Solving story problems involving division with remainders : The importance of semantic processing and referential mapping. In *Proceedings of the tenth annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 127–133).

Silver, E. A., & Burkett, M. L. (1994). The posing of division problems by preservice elementary school teachers : Conceptual knowledge and contextual connections.

Silver, E. A., Shapiro, L. J., & Deutsch, A. (1993). Sense making and the solution of division problems involving remainders : An examination of middle school students' solution processes and their interpretations of solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(2), 117–135.

Sowder, L. (1988). Children's solutions of story problems. *The Journal of Mathematical Behavior*.

Steffe, L. P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and individual differences*, *4*(3), 259–309.

Steffe, L. P. (2010). Operations that produce numerical counting schemes. In *Children's fractional knowledge* (pp. 27–47). Springer.

Steffe, L. P., & von Glasersfeld, E. (1988). On the construction of the counting scheme. In *Construction of arithmetical meanings and strategies* (pp. 1–19). Springer.

Stillman, G. A., Kaiser, G., & Lampen, E. (2020). Sense-making in mathematical modelling and applications educational research and practice. In *Mathematical modelling education and sense-making* (pp. 15–29). Springer, Cham.

Stone, M. H. (2014). The cubit : a history and measurement commentary. *Journal of Anthropology*, *2014*.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151–169.

Thom, J. S., & Roth, W.-M. (2011). Radical embodiment and semiotics : Toward a theory of mathematics in the flesh. *Educational studies in mathematics*, *77*(2), 267–284.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. *Research companion to the principles and standards for school mathematics*, 95–113.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions : The case of division of fractions. *Journal for research in Mathematics Education*, *31*(1), 5–25.

Tirosh, D., & Tsamir, P. (2020). Intuition in mathematics education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 428–433.

Tzur, R., Johnson, H. L., Norton, A., Davis, A., Wang, X., Ferrara, M., & Wei, B. (2017). Conception of number as a composite unit predicts students' multiplicative reasoning : Quantitative corroboration of steffe's model. In *Proceedings of the 41st annual conference of the international group for psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 289–296).

Valbonesi, L., Ansari, R., McNeill, D., Quek, F., Duncan, S., McCullough, K. E., & Bryll, R. (2002). Multimodal signal analysis of prosody and hand motion : Temporal correlation of speech and gestures. In *2002 11th european signal processing conference* (pp. 1–4).

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers : A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5), 453–467.

Vandebrouck, F., & Robert, A. (2017). Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *37*, 333–382.

Varela, F. J., Thomson, E., & Rosch, E. (1993). *L'inscription corporelle de l'esprit : sciences cognitives et expérience humaine*. Editions du Seuil.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. *Number concepts and operations in the middle grades*, 141–161.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels' recherches en didactique desmathématiques 10 (2, 3), 133-170. *Vergnaud213310Recherches en Didactique des Mathématiques1990*.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field : What and why? *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 41–59.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and instruction*, *4*(4), 273–294.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2002). Everyday knowledge and mathematical modeling of school word problems. In *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 257–276). Springer.

Vidal-Gomel, C., & Rogalski, J. (2007). La conceptualisation et la place des concepts pragmatiques dans l'activité professionnelle et le développement des compétences. *Activités*, *4*(4-1).

Villani, C., Torossian, C., & Dias, T. (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques.

Vitrac, B. (1992). *Logistique et fractions dans le monde hellénistique.* Birkhaüser.

Vygotski, L. (1934). Pensée et langage, traduction de f. *Sève. Paris : La Dispute*.

Vygotsky, L. (1994). Tool and symbol in child development. *The vygotsky reader*.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society : The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA : Harvard University Press.

Wearne, D., & Hiebert, J. (1989). Cognitive changes during conceptually based instruction on decimal fractions. *Journal of Educational psychology*, *81*(4), 507.

Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic bulletin & review*, *9*(4), 625–636.

Wittmann, E. (1981). The complementary roles of intuitive and reflective thinking in mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 389–397.

Yoon, C., Thomas, M. O., & Dreyfus, T. (2011). Grounded blends and mathematical gesture spaces : Developing mathematical understandings via gestures. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(3), 371–393.