

Discrétisation du problème de couplage instationnaire des équations de Navier-Stokes avec l'équation de la chaleur

Rim Aldbaissy

▶ **To cite this version:**

Rim Aldbaissy. Discrétisation du problème de couplage instationnaire des équations de Navier-Stokes avec l'équation de la chaleur. Analyse numérique [math.NA]. Sorbonne Université; Université Saint-Joseph (Beyrouth), 2019. Français. NNT : 2019SORUS013 . tel-02458872v2

HAL Id: tel-02458872
https://hal.science/tel-02458872v2

Submitted on 7 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sorbonne Université
UPMC LJLL

Université Saint-Joseph
FS Départ. Maths

Discrétisation du problème de couplage instationnaire des équations de Navier-Stokes avec l'équation de la chaleur.

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 18 Mars 2019

pour l'obtention du grade du

Docteur de Sorbonne Université
et
Docteur de l'Université Saint-Joseph - Liban
(Spécialité Mathématiques)

par

Rim ALDBAISSY

Composition du jury

Président :	NATAF Fédéric
Rapporteurs :	LOZINSKI Alexei
	AZAIEZ Mejdi
Examinateurs :	HECHT Frédéric (Directeur de thèse)
	SAYAH Toni (Directeur de thèse)
	MANSOUR Gihane (Co-directrice de thèse)
	MOURAD Ayman

Laboratoire Jacques Louis Lions – UMR 7598

Faculté des sciences

Remerciements

Ce manuscrit de thèse est l'aboutissement d'un travail de trois années, effectué en cotutelle entre la faculté des sciences de l'Université Saint-Joseph de Beyrouth et le laboratoire Jacques-Louis Lions de Sorbonne Université, grâce à la bourse du conseil de la recherche de l'Université Saint-Joseph de Beyrouth. Je remercie également Campus France pour avoir contribué dans une partie du financement.

Je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité, l'intérêt sont manifestés à l'égard de ma recherche.

Mes premiers remerciements s'adressent à mes directeurs de thèse Pr. Frédérique Hecht et Pr. Toni Sayah, et ma co-directrice Dr. Gihane Mansour.
Je commence par Pr. Frédéric Hecht, qui m'avait acceuillie au sein du Laboratoire Jacques Louis-Lions et dirigée tout au long de cette thèse. Je vous remercie tant pour votre bonne humeur que pour votre disponibilité. Je n'aurais pas pu progresser et m'épanouir autant dans mon travail de recherche sans votre soutien. Merci de m'avoir lancée dans le monde du calcul parallèle.
Je tiens également à remercier Pr. Toni Sayah. Sa cohésion autour de mes travaux m'a permis d'avancer à mon rythme dans les meilleures conditions. Par son exigence et par sa rigueur, il m'a initiée au métier de la recherche. Je lui suis profondèment reconnaissante pour son encadrement scientifique et humain, et la construction d'une ambiance de travail sereine et dynamique. Je le remercie aussi d'être toujours disponible pour répondre à toutes mes questions.
Je termine par remercier vivement ma codirectrice de thèse Dr. Gihane Mansour pour son aide, sa disponibilité et ses conseils, elle m'a permis d'accomplir cette thèse ; dont je ne pensais pas capable de la dépasser. Elle a su m'accorder une confiance sans faille et m'encadrer avec optimisme et enthousiasme. Je la remercie pour son intérêt et ses conseils qui ont été une source d'appui pour mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, en particulier Monsieur le Président Pr. Frédéric Nataf, Pr. Mejdi Azaiez, Pr. Alexei Lozinski et Pr. Ayman Mourad d'avoir accépté de participer à l'évaluation de cette thèse. Merci à Pr. Mejdi Azaiez et Pr. Alexei Lozinski d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Je n'oublie surtout pas les examinateurs, Pr. Frédéric Nataf et Pr. Ayman Mourad. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et le temps qu'ils ont consacré à la lecture du manuscrit.

Mes remerciements s'addressent aussi à Pr. Richard Maroune doyen de la faculté des sciences de m'avoir acceuilli à la faculté des sciences à Beyrouth.

Je pense également à tous les enseignants du département de mathématiques dirigé par

Dr. Rami Haddad.

Un grand merci aux différents personnels administratifs du Laboratoire Jacques-Louis Lions et de la faculté des sciences de l'université Saint Joseph de Beyrouth.

Je profite également de ce moment pour remercier Pierre-Henri Tournier pour l'aide précieuse qu'il m'a apporté surtout dans la partie technique du calcul parallèle. Merci pour sa patience exceptionnelle dans le partage de ses connaissances.

Je ne peux clôturer mes remerciements qu'en ayant une immense pensée à mes amis Sally, Rebecca, Hadi, Hussein, Anna, Marina, Elena, Rancy, Ghina, Mireille, Gabriella, plus que simples collègues, qui ont participé à rendre chaque moment empreint d'une certaine folie. Merci pour les moments agréables partagés.
Mira, Mireille, Diana, Cecile, Farah, Karim, Rasha et Elissa avec qui j'ai passé des moments inoubliables à paris, je les remercie de toute l'aide et le soutien qu'ils m'ont accordé. Je remercie également ces amies qui furent présentes à mes côtés lorsque j'en avais besoin. Merci donc à Nadine, Diala, Iman et Dina, avec qui j'ai partagé les moments difficiles.

Je termine enfin par ceux que je ne pourrais jamais remercier par des mots, ma famille, mon père, ma mère pour leur indestructible et constant soutien. Je les remercie pour leur encouragement et leur amour infini. Merci pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui.
Ma soeur Sarah et mon frère Karim m'ont toujours soutenue de manière indéfectible et ont été la source de ma motivation !

Que celles et ceux que j'aurais oubliés ici me pardonnent !

Table des matières

Introduction **1**

Chapitre 1
Problème de Navier-Stokes couplé avec l'équation de la chaleur **6**

1.1 Introduction 7

1.2 Rappels et définitions 7

1.3 Problème variationnel continu 11

1.3.1 Existence et unicité de la solution continue 15

1.4 Problème discret stabilisé 21

1.4.1 Discrétisation en temps 21

1.4.2 Discrétisation en espace 23

1.4.2.1 Existence et unicité de la solution du problème discret . . 25

1.4.3 Estimation d'erreur a priori 28

1.5 Problème discret non stabilisé 49

1.5.1 Existence et unicité de la solution 50

1.5.2 Estimation d'erreur *a priori* 53

1.6 Problème discret d'ordre deux en temps et en espace 59

1.6.1 Existence et unicité de la solution 62

1.6.2 Estimation d'erreur *a priori* 67

Chapitre 2
Simulations numériques du problème modèle **83**

2.1 Introduction générale 84
2.2 Problème discret 84
2.2.1 Résolution numérique du schéma d'ordre un en temps et en espace . 84
2.2.2 Résolution numérique du problème d'odre deux en temps et en espace 85
2.3 Résultats numériques 85
2.3.1 Validation académique 86
2.3.1.1 Schéma d'ordre un en temps et en espace 86
2.3.1.2 Schéma d'ordre deux en temps et en espace 89
2.3.1.3 Efficacité des deux schémas numériques 91
2.3.2 Convection natutelle de l'air 95
2.3.2.1 Déscription du problème modèle 95
2.3.2.2 Schéma numérique d'ordre un en temps et espace 97
2.3.2.3 Schéma numérique d'ordre deux en temps et en espace . . 98
2.4 Conclusion 100

Chapitre 3
Calcul parallèle itératif **101**

3.1 Introduction 102
3.2 Méthode de décomposition de domaine 102
3.2.1 Méthode de type Schwarz 103
3.2.2 Décomposition de domaine sans recouvrement 105
3.3 Résolution d'un système linéaire creux 105
3.3.1 Méthodes de résolutions 105
3.3.2 Préconditionnement 106
3.3.2.1 Méthode de Schwarz additive 106

3.3.2.2 Méthode de Schwarz additive restreinte (RAS) 107
3.3.2.3 Méthode de Schwarz additive restreinte optimisée 107
3.3.2.4 Le préconditionnement à deux niveaux 108
3.4 Simulation du procédé d'extrusion dans une imprimante 3D 109
3.4.1 L'imprimante $3D$ Pollen 109
3.5 Géométrie 110
3.6 Simulation 2D 112
3.6.1 Conditions aux limites 112
3.6.2 Méthode séquentielle 113
3.6.3 Méthode parallèle naturelle 115
3.6.4 Méthodes avancées 117
3.6.4.1 Méthode de préconditionnent à un niveau 117
3.6.4.2 Méthode de préconditionnement à deux niveaux 119
3.7 Simulation $3D$ 121
3.7.1 Géométrie axisymétrique 121
3.8 Conclusion 123

Conclusions et perspectives **124**

Bibliographie **126**

Résumé **130**

Abstract **131**

Introduction

La mécanique des fluides est une discipline ancienne, d'applications très variées. Elle décrit l'écoulement d'un fluide visqueux qui, durant son évolution, a tendance à dissiper de l'énergie. On doit à G.L. Navier et G.G. Stokes, l'idée d'introduire les termes de friction ([48],[53]). Ces équations sont le bilan des lois de conservation.
La première, appelée loi de conservation de la masse, impose la relation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div } \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

où ρ est la densité volumique et $\mathbf{u}$ est la vitesse du fluide.
Dans le cas d'un fluide incompressible, la densité volumique est constante. Alors d'après (1), l'incompressibilité du fluide sera traduite par le fait que le champ de vitesse est à divergence nulle.
La seconde loi de conservation de mouvement est donnée par

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla).\mathbf{u} \right) - \text{div } (\mu \nabla \mathbf{u}) + \nabla P = F,$$

où μ est la viscosité du fluide.
Les équations de Navier-Stokes s'écrivent alors

$$\begin{cases} \rho \left(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla).\mathbf{u} \right) - \text{div } (\mu \nabla \mathbf{u}) &= -\nabla P + F \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0. \end{cases}$$

La densité volumique ρ est une grandeur qui dépend de la pression et de la température. Soient T_0, P_0 et ρ_0 respectivement la température, la pression et la densité volumique du fluide au repos. La densité peut être alors linéarisée sous la forme :

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0) + \xi(P - P_0)),$$

où β est le coefficient de dilatation à pression constante et ξ est le coefficient de compression à température constante.
Cependant, l'effet de la température sur l'écoulement d'un fluide est un paramètre intéressant à étudier. L'approximation de Boussinesq consiste à prendre en compte la dilatation

du fluide, tout en conservant sa nature incompressible div $\mathbf{u} = 0$. En d'autres termes, les variations relatives de la masse volumique et de la pression sont supposées être négligeables par rapport à l'état de référence supposé au repos. Ce qui permet l'approximation

$$\rho \simeq \rho_0(1 - \beta T).$$

Alors le système des équations de Navier-Stokes couplées avec l'équation de la chaleur devient,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} - \text{div } (\nu(T)\nabla \mathbf{u}) + \nabla p & = & \mathbf{f}(T) \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} - \alpha \Delta T + (\mathbf{u}.\nabla)T & = & g \\ \text{div } \mathbf{u} & = & 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Les inconnues sont la vitesse $\mathbf{u}$, la pression cinématique $p = \dfrac{P}{\rho}$ et la température T. La force extérieure $\mathbf{f} = \dfrac{F}{\rho}$ et la viscosité cinématique $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ sont supposées être dépendantes de la température. La donnée g ne dépend que des variables d'espace et de temps.
Afin d'effectuer l'étude mathématique de ce modèle, nous supposons que la viscosité est bornée par deux constantes positives $\hat{\nu}_1$ et $\hat{\nu}_2$. De plus, la donnée $g \in L^2\left(0, \hat{T}, L^2(\Omega)\right)$ et $\mathbf{f}$ peut s'érire sous la forme

$$\mathbf{f}(x, t, T(x, t)) = \mathbf{f}_0(x, t) + \mathbf{f}_1(x, T(x, t)),$$

où $\mathbf{f}_0 \in L^2\left(0, \hat{T}; L^2(\Omega)^d\right)$ et $\mathbf{f}_1 \in L^2(\Omega)^d$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Nous avons supposé également, qu'il existe une constante positive $c_{\mathbf{f}_1}$ telle que

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}, \ |\mathbf{f}_1(x, \xi)| \leq c_{\mathbf{f}_1}|\xi|.$$

Par ailleurs, la résolution des équations aux dérivées partielles nécessite la mise en oeuvre d'une méthode numérique qui consiste à approcher la solution. La méthode des éléments finis est parmi les méthodes les plus utilisées dans diverses applications. Elle a été introduite dans un premier temps pour les équations d'advection-diffusion ([38], [39]), ainsi que pour le problème de Stokes ([40] et [41]). Dans [26] les auteurs ont généralisé cette méthode pour les équations de Navier-Stokes. De plus, une large application a été développée en se basant sur la méthode des éléments finis pour différents types d'équations aux dérivées partielles. D'autre part, les dérivées en temps sont évaluées par des méthodes numériques d'intégration d'équation différentielle en faisant intervenir un pas de temps τ_n (Euler, Runge-Kutta, multipas,...), voir par exemple [51]. Il existe plusieurs types d'Euler : explicite, implicite et semi-implicite, où les dérivées en temps de la vitesse et la température seront approchées par :

$$\frac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\tau_n} \qquad \text{et} \qquad \frac{T_h^n - T_h^{n-1}}{\tau_n}.$$

Afin d'améliorer la précision du schéma, des méthodes d'approximation de la dérivée en temps d'ordre élevé ont été introduites. Nous nous intéressons particulièrement à la méthode de type BDF "Backward Differentiation Formula" d'ordre 2. Il s'agit d'approcher les dérivées en temps de la vitesse et la température respectivement par :

$$\frac{3\mathbf{u}_h^n - 4\mathbf{u}_h^{n-1} + \mathbf{u}_h^{n-2}}{2\tau_n} \qquad \text{et} \qquad \frac{3T_h^n - 4T_h^{n-1} + T_h^{n-2}}{2\tau_n}.$$

Cette méthode a été introduite par C.F. Curtiss et J.O. Hirschfelder en 1952 [19], puis développées par C.W. Gear [28]. Dans [12], J.H Branble et al ont montré la convergence de cette méthode pour un ordre inférieur à 5. Par la suite, plusieurs travaux ont été développés dans le cadre de cette discrétisation du temps.

Les méthodes de discrétisation génèrent plusieurs sources d'erreurs : erreurs d'arrondi et de troncature, erreur de discrétisation, erreur de linéarisation... Dans ce travail, l'estimateur *a priori* de l'erreur de discrétisation sera établie. Cette erreur permet de montrer la convergence de la méthode en fonction de certains paramètres connus, et d'indiquer l'ordre de convergence.
Dans ce qui suit, nous signalons quelques références qui ont été utiles dans notre travail de recherche. H. Abboud et T. Sayah, ont établi l'estimation *a priori* de l'erreur de discrétisation en temps et en espace d'ordre un (cf. [3]) et d'ordre deux (avec V. Girault dans [2]) par un schéma à deux grilles, pour les équations de Navier-Stokes stationnaires. Un modèle similaire à (2), a été traité par C. Bernardi et R. Agroume (cf. [7]), mais en supposant que les forces extérieures sont indépendantes de la température et en utilisant la méthode spectrale. Dans [13] et [8] , les auteurs ont considéré le problème de Navier-Stokes couplé avec l'équation de la chaleur dans le cas stationnaire.

Ce travail de thèse présente un double objectif.
Le premier consiste à établir une étude théorique du modèle proposé (2) qui sera ensuite discrétisé à l'aide de la méthode des éléments finis et la méthode d'Euler semi-implicite. Notons que le schéma semi-implicite est inconditionnellement stable. Le schéma numérique discrétisé sera, pour tout $n \in \{1, ..., N\}$,

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\tau_n}\left(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h\right) + (\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n, \nabla\mathbf{v}_h) & \\ \qquad -(p_h^n, \text{div } \mathbf{v}_h) + ((\mathbf{u}_h^{n-1}\nabla).\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) & = \left(\mathbf{f}^n(T_h^{n-1}), \mathbf{v}_h\right), \\ \dfrac{1}{\tau_n}\left(T_h^n - T_h^{n-1}, r_h\right) + \alpha(\nabla T_h^n, \nabla r_h) + ((\mathbf{u}_h^n\nabla).T_h^n, r_h) & = (g^n, r_h) \\ \qquad (q_h, \text{div } \mathbf{u}_h^n) & = 0 \end{cases}$$

où $\mathbf{u}_h^0$ et T_h^0 sont des approximations de $\mathbf{u}_0$ et T_0. g^n et $\mathbf{f}^n$ sont données par

$$g^n = \frac{1}{\tau_n}\int_{t_{n-1}}^{t_n} g(s)ds$$

et

$$\mathbf{f}^n(T^{n-1}) = \mathbf{f}_0^n + \mathbf{f}_1(T^{n-1})$$

avec

$$\mathbf{f}_0^n = \frac{1}{\tau_n}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{f}(s)ds.$$

La convergence de ce schéma est assurée par l'analyse *a priori* de l'erreur de cette discrétisation. Cette convergence est améliorée par le schéma numérique d'ordre deux, pour $2 \leq n \leq N$, suivant :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3\mathbf{u}_h^n - 4\mathbf{u}_h^{n-1} + \mathbf{u}_h^{n-2}}{2\tau_n}, \mathbf{v}_h\right) + (\nu(T_h^n)\nabla\mathbf{u}_h^n, \nabla\mathbf{v}_h) - (p_h^n, \text{div } \mathbf{v}_h) \\ \qquad +((\mathbf{u}_h^n\nabla).\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + \dfrac{1}{2}(\text{div } (\mathbf{u}_h^n)\,\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}^n(T_h^n), \mathbf{v}_h) \\ \left(\dfrac{3T_h^n - 4T_h^{n-1} + T_h^{n-2}}{2\tau_n}, r_h\right) + ((\mathbf{u}_h^n\nabla).T_h^n, r_h) + \dfrac{1}{2}(\text{div } (\mathbf{u}_h^n)\,T_h^n, r_h) + \alpha(\nabla T_h^n, \nabla r_h) \\ \qquad = (g^n, r_h) \\ (q_h, \text{div } \mathbf{u}_h^n) = 0 \end{cases}$$

où $\mathbf{u}_h^0 = P_h\mathbf{u}(0)$, $T_h^0 = R_hT(0)$, $g^n = g(t_n)$ et

$$\mathbf{f}^n(T_h^n) = \mathbf{f}_0^n + \mathbf{f}_1(T_h^n) \text{ avec } \mathbf{f}_0^n = \mathbf{f}_0(t_n).$$

Le deuxième objectif consiste à valider les résultats théoriques obtenus en utilisant des simulations numériques séquentielles. Ceci se concrétise par des courbes d'erreur relative pour des cas académiques entre la solution exacte et la solution approchée. De même, des comparaisons avec un Benchmark se trouvant dans la littérature. Ces résultats théoriques et numériques obtenus ont été publiés dans un article [5]. Enfin, nous considérerons la simulation numérique de l'instabilité thermique qui apparaît de temps en temps durant l'impression trois dimensions.

Dans la plupart des applications pratiques, une grande précision dans le résultat obtenu est demandée. Ceci impose un nombre élevé en terme de degrés de liberté pour le problème discret étudié et par la suite une matrice associée de très grande taille. On a ainsi recours dans la plupart des fois à la méthode de calcul parallèle qui nous permet de profiter de la technologie informatique puissante de notre jour. Plusieurs techniques de parallélisation, basées sur la méthode de décomposition de domaine, ont été donc développées. Dans la plupart des cas, une méthode parallèle naturelle n'est pas efficace en terme de scalabilité (scalabilité forte : la capacité de l'algorithme à diminuer à moitié le temps de calcul en doublant le nombre de processeurs), d'où l'application de la méthode de préconditionnement dont on cite : Schwarz multiplicative [15], Schwarz additive [21], Schwarz additive restreinte [14], Schwarz additive restreinte optimisée [27]. Quant à l'amélioration de la méthode de préconditionnement à un niveau (la convergence de la méthode dépend du

nombre de processeurs), la correction par la résolution d'un problème grossier est l'une des méthodes les plus efficaces [47]. Dans [22], les auteurs ont effectué un calcul parallèle basé sur les méthodes de préconditionnement à un niveau pour résoudre les équations de Navier-Stokes et de transport par une méthode de projection.

Ce travail est divisé en 3 chapitres : le premier chapitre présentera les outils et les espaces fonctionnels utilisés par la suite. Les équations de Navier-Stokes couplées avec l'équation de la chaleur seront ensuite introduites. Deux schémas de discrétisation, stabilisé et non stabilisé, d'ordre un en temps et en espace seront proposés, respectivement par la méthode d'Euler semi-implicite et la méthode des éléments finis. Ce chapitre présentera aussi l'estimation *a priori* de l'erreur de discrétisation pour les schémas proposés.
Pour gagner en temps et en odre de convergence, un schéma discret d'ordre deux sera introduit où nous effectuons l'estimation *a priori* de l'erreur de discrétisation.

Dans le chapitre 2, nous effectuerons des essais numériques afin de valider les résultats théorique obtenus dans le premier chapitre. On commencera par des simulations numériques pour des applications académiques où nous calculerons les erreurs relatives correspondantes entre la solution exacte et la solution approchée. Par la suite, l'exemple de convection naturelle de l'air sera présenté tout en améliorant la précision et le temps de calcul en utilisant un shéma numérique d'ordre deux. Des comparaisons avec la littérature seront ensuite effectuées afin de valider les nôtres.

Le chapitre 3 est consacré à modéliser le procédé d'extrusion dans une imprimante 3D, en effectuant des simulations numériques séquentielles 2D. Afin de gagner en temps de calcul, l'algorithme sera parallélisé par une méthode naturelle basée sur la méthode de décomposition de domaines. Pour pouvoir passer aux simulations 3D, la performance de l'algorithme naturel proposé sera améliorée par la méthode de préconditionnement à un niveau. Les résultats numériques montreront que la convergence de cette méthode dépend du nombre de processeurs de même que la physique du modèle. D'où l'intérêt d'ajouter un deuxième niveau au préconditionneur. Une amélioration au niveau de la scalabilité et de la convergence de la méthode de préconditionnement à deux niveaux a été observée par rapport à celui à un niveau.

En dernier lieu, une conclusion générale rassemblera les principaux résultats obtenus et des perspectives proposeront de nouvelles pistes de recherche.

Chapitre 1

Problème de Navier-Stokes instationnaire couplé avec l'équation de la chaleur

1.1 Introduction

Les équations de Navier-Stokes décrivent l'évolution du mouvement d'un fluide incompressible de viscosité cinématique ν soumis à des contraintes extérieures $\mathbf{f}$. Un problème intéressant à étudier est l'effet de la température sur l'écoulement d'un fluide. On se met alors face aux problèmes de Navier-Stokes instationnaires couplés avec l'équation de la chaleur ; Ce modèle est connu sous le nom de Boussinesq.
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, de frontière $\partial\Omega$ continue lipschitzienne et $[0, \hat{T}]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
Nous supposons que ν et $\mathbf{f}$ dépendent de la température et que la vitesse et la température du fluide satisfont les conditions de Dirichlet homogènes.
Le problème à résoudre se modélise alors comme suit,
(1.1)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x,t) - \text{div } (\nu(T(x,t))\nabla \mathbf{u}(x,t)) & & & \\ \qquad +(\mathbf{u}(x,t).\nabla)\mathbf{u}(x,t) + \nabla p(x,t) &=& \mathbf{f}(x,t,T(x,t)) & \text{dans } \Omega \times [0,\hat{T}] \\ \dfrac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \alpha \Delta T(x,t) + (\mathbf{u}(x,t).\nabla)T(x,t) &=& g(x,t) & \text{dans } \Omega \times [0,\hat{T}] \\ \text{div } \mathbf{u}(x,t) &=& 0 & \text{dans } \Omega \times [0,\hat{T}] \\ \mathbf{u}(x,t) &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0,\hat{T}] \\ T(x,t) &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0,\hat{T}] \\ \mathbf{u}(x,0) &=& \mathbf{u}_0 & \text{dans } \Omega \\ T(x,0) &=& T_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où α est la constante de diffusion et g est une fonction donnée.
Les inconnues sont la vitesse $\mathbf{u}$, la pression p et la température T du fluide.
Dans ces équations, $(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}$ représente le terme de convection et div $(\nu(T)\nabla\mathbf{u})$ représente le terme de diffusion visqueux.

1.2 Rappels et définitions

Dans cette partie, nous introduisons les notations et les espaces fonctionnels que nous utiliserons par la suite.

Remarque 1.2.1. *En coordonneés cartésiennes dans un espace euclidien de dimension*

d, nous avons pour $\mathbf{u} = (u_i)_{1\leq i\leq d}$,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_d}\right), \quad (\mathbf{u}(x,t).\nabla)\mathbf{u}(x,t) = \sum_{i=1}^{d} u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}(x,t),$$
$$\Delta\mathbf{u}(x,t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2}(x,t)$$
$$\textit{et div}\ (\mathbf{u}(x,t)) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}(x,t).$$

Nous définissons, pour tout $p \geq 1$, l'espace

$$L^p(\Omega)^d = \left\{\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^d;\ \mathbf{f} \text{ est mesurable et } \int_\Omega |\mathbf{f}(x)|^p dx < \infty\right\},$$

muni de la norme

$$\|\,\mathbf{f}\,\|_{L^p(\Omega)^d} = \left(\int_\Omega |\mathbf{f}(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nous définissons, pour tout entier m positif et tout réel $r \geq 1$, l'espace de Sobolev

$$W^{m,r}(\Omega)^d = \left\{\mathbf{v} \in L^r(\Omega)^d;\ \partial^k \mathbf{v} \in L^r(\Omega)^d,\ \forall |k| \leq m\right\},$$

où $k = (k_1, ..., k_d)$ est un d-uplet d'entiers positifs tel que $|k| = k_1 + ... + k_d$ et

$$\partial^k \mathbf{v} = \frac{\partial^{|k|}\mathbf{v}}{\partial^{k_1} x_1 ... \partial^{k_d} x_d}.$$

L'espace $W^{m,r}(\Omega)^d$ est muni de la semi-norme

$$|\mathbf{v}|_{W^{m,r}(\Omega)^d} = \left(\sum_{|k|=m} \int_\Omega |\partial^k \mathbf{v}|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}.$$

$W^{m,p}(\Omega)^d$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|\,\mathbf{v}\,\|_{W^{m,r}(\Omega)^d} = \left(\sum_{l=0}^{m} \int_\Omega |\mathbf{v}|^r_{W^{l,r}(\Omega)^d} dx\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Pour $r = 2$ cet espace sera noté :

$$H^m(\Omega)^d = \left\{\mathbf{v} \in L^m(\Omega)^d,\ \nabla\mathbf{v} \in L(\Omega)^d\right\}.$$

De plus, $H^m(\Omega)^d$ est un espace de Hilbert.
Nous considérons en particulier l'espace

$$H_0^1(\Omega)^d = \left\{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d;\ \mathbf{v}_{|\partial\Omega} = 0\right\},$$

muni de la semi-norme $|.|_{H_0^1(\Omega)^d}$ et son espace dual $H^{-1}(\Omega)^d$.
L'espace $L^2(\Omega)^d$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_\Omega \mathbf{v}(x)\mathbf{w}(x)dx, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in L^2(\Omega)^d.$$

Lemme 1.2.2. *(Injection de Sobolev, cf. [4])*
Pour tout réel $p \geq 1$ lorsque $d = 1$ ou 2, ou pour tout $1 \leq p \leq \dfrac{2d}{d-2}$ lorsque $d \geq 3$, il existe des constantes positives S_p et S_p^0 telles que

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \| \mathbf{v} \|_{L^p(\Omega)^d} \leq S_p^0 |\mathbf{v}|_{H_0^1(\Omega)^d}$$

et

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d \ , \| \mathbf{v} \|_{L^p(\Omega)^d} \leq S_p \| \mathbf{v} \|_{H^1(\Omega)^d} \ .$$

Lemme 1.2.3. *(Résultat valable uniquement en dimension $d = 2$, cf. [56])*
Pour tout $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$, on a

$$\| \mathbf{v} \|_{L^4(\Omega)^2} \leq 2^{\frac{1}{4}} \ \| \mathbf{v} \|_{L^2(\Omega)^2}^{\frac{1}{2}} \ |\mathbf{v}|_{H_0^1(\Omega)^2}^{\frac{1}{2}}.$$

Pour traiter la variable de temps t, nous définissons l'espace des fonctions définies sur un intervalle de temps $]a, b[$ à valeurs dans un espace fonctionnel séparable W muni d'une norme $\| \, . \, \|_W$. Alors, pour tout réel $r \geq 1$, nous introduisons l'espace

$$L^r(a, b; W) = \left\{ f \text{ mesurable sur }]a, b[; \ \int_a^b \| f(t) \|_W^r \ dt < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\| f \|_{L^r(a,b;W)} = \left(\int_a^b \| f(t) \|_W^r \ dt \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Pour $r = \infty$, nous avons

$$L^\infty(a, b; W) = \left\{ f \text{ mesurable sur }]a, b[; \ \sup_{t \in [a,b]} \| f(t) \|_W < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\| f \|_{L^\infty(a,b;W)} = \sup_{t \in [a,b]} \| f(t) \|_W.$$

Remarque 1.2.4. *L'espace $L^r(a, b; W)$ est un espace de Banach si W est un espace de Banach.*

Par la suite, nous définissons l'espace $\mathcal{C}^j\left(0,\hat{T};W\right)$ comme étant l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^j$ en temps à valeurs dans W.

Afin de formuler le problème variationnel, nous adoptons les notations suivantes :

$$X = H_0^1(\Omega)^d,\ M = L_0^2(\Omega) \text{ et } Y = H_0^1(\Omega).$$

Les duals de X et Y sont respectivement notés $X' = H^{-1}(\Omega)^d$ et $Y' = H^{-1}(\Omega)$,
De plus, nous définissons l'espace suivant

$$V = \{\mathbf{v} \in X;\ \text{div } \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

Remarque 1.2.5. *L'espace V est un espace de Hilbert pour la norme $|.|_{H_0^1(\Omega)^d}$ étant donné qu'il est fermé dans un complet X.*

Nous introduisons, l'espace polaire

$$V^\circ = \left\{\mathbf{f} \in X';\ \forall \mathbf{v} \in V,\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle = 0\right\}$$

et l'espace orthogonal

$$V^\perp = \left\{\mathbf{v} \in X;\ \forall \omega \in X, \int_{\mathbf{\Omega}} \nabla \mathbf{v}(x)\nabla\omega(x)dx = 0\right\}.$$

Nous énonçons dans la suite, un résultat indispensable à l'établissement de l'existence et l'unicité de la solution du problème continu, [30] :

Théorème 1.2.6. *Si Ω est connexe alors il existe $\beta > 0$ telle que*

a) *l'opérateur ∇ est un isomorphisme de M dans V°. De plus, pour tout $p \in M$,*

$$\|\nabla p\|_{H^{-1}(\Omega)^d} \geq \beta\ \|p\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.2}$$

b) *l'opérateur div est un isomorphsisme de $V^\perp$ dans M. De plus, pour tout $\boldsymbol{v} \in V^\perp$,*

$$\|\ div\ \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)} \geq \beta |\boldsymbol{v}|_{H_0^1(\Omega)^d}. \tag{1.3}$$

De plus, pour tout $p \in M$,

$$\sup_{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d} \frac{(p,\ div\ \boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|_{H_0^1(\Omega)^d}} \geq \beta\ \|p\|_{L^2(\Omega)}\ . \tag{1.4}$$

Dans la plupart des démonstrations des théorèmes, nous utiliserons les relations évidentes suivantes :

Propriété 1.2.7.

1) *Pour tous* $a,\ b \in \mathbb{R}$, *on a*

$$a(a-b) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2 \tag{1.5}$$

et

$$ab \leq \frac{\xi}{2}a^2 + \frac{1}{2\xi}b^2, \tag{1.6}$$

où ξ *est un réel strictement positif quelconque.*

2) *Pour tous* a, b *et* $c \in \mathbb{R}$, *nous avons*

$$2\,(3a - 4b + c, a) = |a|^2 + |2a - b|^2 + |\delta^2 b|^2 - |b|^2 - |2b - c|^2,$$

en notant

$$\delta^2 b = a - 2b + c.$$

1.3 Problème variationnel continu

Nous supposons désormais les hypothèses suivantes :

Hypothèses 1.3.1. *Nous supposons que les données* $\mathbf{f}$, g *et* ν *vérifient :*

(*i*) $\mathbf{f}$ *peut s'érire sous la forme*

$$\mathbf{f}(x,t,T(x,t)) = \mathbf{f}_0(x,t) + \mathbf{f}_1(x,T(x,t)),$$

où $\mathbf{f}_0 \in L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)$ *et* $\mathbf{f}_1(.,T) \in L^2(\Omega)^d$ *est* $c^*_{\mathbf{f}_1}$*-lipschitzienne de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$. *De plus, nous supposons qu'il existe une constante positive* $c_{\mathbf{f}_1}$ *telle que*

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R},\ |\mathbf{f}_1(x,\xi)| \leq c_{\mathbf{f}_1}|\xi|, \tag{1.7}$$

(*ii*) $g \in L^2\left(0,\hat{T},L^2(\Omega)\right)$,

(*iii*) *la viscosité cinématique* $\nu \in L^\infty(\mathbb{R})$ *est continue. De plus, elle vérifie pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\hat{\nu}_1 \leq \nu(\theta) \leq \hat{\nu}_2 \tag{1.8}$$

où $\hat{\nu}_1$, $\hat{\nu}_2$ *sont deux constantes positives.*

Remarque 1.3.2. *Si* $\mathbf{f}_1$ *dépend de* x, t *et* T, *nous obtenons les mêmes résultats mais en supposant que* $\mathbf{f}_1$ *vérifie l'inégalité suivante*

$$\left|\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t}(x,t,\xi)\right| \leq c'_{\mathbf{f}_1}|\xi|, \forall x \in \Omega, \forall t \in [0,\hat{T}], \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Par la suite, nous introduisons les notations suivantes :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(.,t),\ T(t) = T(.,t) \text{ et } p(t) = p(.,t).$$

De plus, nous introduisons les formes trilinéaires suivantes :

$$c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \int_\Omega (\mathbf{u}(x)\nabla).\mathbf{v}(x)\mathbf{w}(x)dx,\ \forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in X$$

et

$$c_T(\mathbf{u},T,r) = \int_\Omega (\mathbf{u}(x)\nabla).T(x)r(x)dx,\ \forall \mathbf{u} \in X, \forall T,r \in Y.$$

Les résultats du lemme suivant sont évidents.

Lemme 1.3.3. *Pour tous* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d$ *et* $T \in H_0^1(\Omega)$ *tels que div* $\boldsymbol{u} = 0$, *nous avons*

$$c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0$$

et

$$c_T(\mathbf{u},T,T) = 0$$

La formulation variationnelle équivalente à (1.1), pour tout $t \in [0,\hat{T}]$, est :

$$\text{(E)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u},p) \in X \times M,\ T \in Y \text{ tels que,} \\ \dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) + (\nu(T(t))\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\mathbf{v}) \\ \quad -(p(t),\text{div } \mathbf{v}) + c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t,T(t)),\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in X \\ \qquad \dfrac{d}{dt}(T(t),r) + (\alpha\nabla T(t),\nabla r) \\ \qquad\qquad +c_T(\mathbf{u}(t),T(t),r) = (g(t),r), \qquad \forall r \in Y \\ \qquad\qquad\qquad (\text{div } \mathbf{u}(t),q) = 0, \qquad \forall q \in M \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \qquad \text{dans } \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad T(0) = T_0, \qquad \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Pour la démonstration du théorème suivant, nous nous référons à [7].

Théorème 1.3.4. *Sous les Hypothèses 1.3.1, toute solution $(\boldsymbol{u}, p, T)$ du problème variationnel (E) est une solution du problème (1.1). De plus, toute solution de (E) vérifie l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned}(1.9)\qquad &\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} + \|\boldsymbol{u}\|_{L^2\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)^d\right)} + \|T\|_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} + \|T\|_{L^2\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)\right)} \\ &\qquad \leq \hat{C}\left(\|g\|_{L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} + \|\mathbf{f}_0\|_{L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} + \|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \|T_0\|_{L^2(\Omega)}\right)\end{aligned}$$

où $\hat{C}$ est une constante positive qui dépend de S_2^0, $\hat{\nu}_1$, α et $c_{\mathbf{f}_1}$.

Preuve. Soit $(\mathbf{u}, p, T)$ une solution du problème variationnel (E).
Nous rappelons que $D(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact. Pour tous $\mathbf{v} \in D(\Omega)^d \subset X$ et $r \in D(\Omega) \subset Y$, cette solution vérifie les équations suivantes :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + (\nu(T(t))\nabla\mathbf{u}(t), \nabla\mathbf{v}) \\ &\qquad - (p(t), \text{div } \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t, T(t)), \mathbf{v}) \qquad (1.10)\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(T(t), r) + c_T(\mathbf{u}(t), T(t), r) + (\alpha\nabla T(t), \nabla r) = (g(t), r) \qquad (1.11)$$

Intégrons les équations (1.10) et (1.11) par parties, pour tous $\mathbf{v} \in D(\Omega)^d$ et $r \in D(\Omega)$. Nous obtenons alors au sens de distribution :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t) + (\mathbf{u}(t).\nabla)\mathbf{u}(t) - \text{div } (\nu(T(t))\nabla\mathbf{u}(t)) + \nabla p(t) &= \mathbf{f}(t, T(t)) \\ \dfrac{\partial T}{\partial t}(t) + (\mathbf{u}(t).\nabla)T(t) - \alpha\Delta T(t) &= g(t) \end{cases}$$

De plus, comme pour toute constante q

$$(\text{div } \mathbf{u}(t), q) = 0,$$

le résultat reste alors vrai pour tout $q \in L^2(\Omega)$ et nous obtenons

$$\text{div } \mathbf{u}(t) = 0.$$

D'autre part, d'après les définitions de X et Y, les conditions aux bords de $\mathbf{u}$ et T sont vérifiées.
Par la suite, nous établirons l'inégalité (1.9).
Nous remplaçons $\mathbf{v}$ par $\mathbf{u}$ dans (1.10). D'après la Proposition 1.3.3, le terme $c_u(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v})$ est nul, alors

$$\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x,t)\mathbf{u}(x,t)dx + \int_\Omega \nu(T(x,t))(\nabla\mathbf{u}(x,t))^2 dx = \int_\Omega \mathbf{f}(T(x,t))\mathbf{u}(x,t)dx.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'Hypothèse 1.3.1 et le Lemme 1.2.2 pour $p = 2$ donnent :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial t}(x,t)dx + \hat{\nu}_1|\mathbf{u}(t)|^2_{H_0^1(\Omega)^d} &\leq S_2^0 \,\|\,\mathbf{f}_0(t)\,\|_{L^2(\Omega)^d}\,|\mathbf{u}(t)|_{H_0^1(\Omega)^d} \\ &\quad + S_2^0 \,\|\,\mathbf{f}_1(T(t))\,\|_{L^2(\Omega)^d}\,|\mathbf{u}(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}.\end{aligned}$$

(1.12)

Nous utilisons (1.7), (1.6) avec $\xi = \dfrac{2(S_2^0)^2}{\hat{\nu}_1}$ et le Lemme 1.2.2 ($p = 2$) pour obtenir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\,\mathbf{u}(t)\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\hat{\nu_1}}{2}|\mathbf{u}(t)|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \leq \frac{(S_2^0)^2}{\hat{\nu}_1}\,\|\,\mathbf{f}_0(t)\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{(S_2^0)^4 c^2_{\mathbf{f}_1}}{\hat{\nu}_1}|T(t)|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{1.13}$$

En premier lieu, nous intégrons par rapport à t entre 0 et $\hat{T}$, et nous obtenons

$$\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^2\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)^d\right)} \leq \frac{2(S_2^0)^2}{(\hat{\nu}_1)^2}\,\|\,\mathbf{f}_0\,\|^2_{L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} + \frac{2(S_2^0)^4 c^2_{\mathbf{f}}}{(\hat{\nu}_1)^2}\,\|\,T\,\|^2_{L^2\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)\right)} + \frac{1}{\hat{\nu}_1}\,\|\,\mathbf{u}_0\,\|^2_{L^2(\Omega)^d}\,.$$

Ensuite, nous intégrons (1.13) entre 0 et $t < \hat{T}$, ce qui implique

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{\nu}_1}\,\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} &\leq \frac{2(S_2^0)^2}{\hat{\nu}_1}\,\|\,\mathbf{f}_0\,\|^2_{L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} + \frac{1}{\hat{\nu}_1}\,\|\,\mathbf{u}_0\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + \frac{2(S_2^0)^4 c^2_{\mathbf{f}}}{(\hat{\nu}_1)^2}\,\|\,T\,\|^2_{L^2\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)\right)}\,.\end{aligned}$$

(1.14)

Nous déduisons la majoration suivante,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{\nu}_1}\,\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} + \|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^2\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)^d\right)} &\leq \frac{4(S_2^0)^2}{(\hat{\nu}_1)^2}\,\|\,\mathbf{f}_0\,\|^2_{L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} + \frac{1}{\hat{\nu}_1}\,\|\,\mathbf{u}_0\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + \frac{4(S_2^0)^4 c^2_{\mathbf{f}}}{(\hat{\nu}_1)^2}\,\|\,T\,\|^2_{L^2\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)\right)}\,.\end{aligned} \tag{1.15}$$

D'autre part, en remplaçant r par T dans l'équation de la température (1.11), nous obtenons

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}(t), T(t)\right) + c_T\left(\mathbf{u}(t), T(t), T(t)\right) + \left(\alpha\nabla T(t), \nabla T(t)\right) = \left(g(t), T(t)\right).$$

Or, d'après le Lemme 1.3.3 le terme $c_T\left(\mathbf{u}, T, T\right)$ est nul. Il vient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le résultat

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\,T(t)\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\,\|\,\nabla T(t)\,\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\,g(t)\,\|_{L^2(\Omega)}\|\,T(t)\,\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Appliquons l'inégalité (1.6) pour $\xi = \dfrac{(S_2^0)^2}{\alpha}$ et le Lemme 1.2.2, pour avoir

$$\frac{d}{dt}\,\|\,T(t)\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha|T(t)|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{(S_2^0)^2}{\alpha^2}\,\|\,g(t)\,\|^2_{L^2(\Omega)}\,. \tag{1.16}$$

Intégrons entre 0 et $\hat{T}$ tous les termes de l'inégalité (1.16). Nous obtenons alors

$$\|\,T\,\|^2_{L^2\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)\right)} \leq \left(\frac{(S_2^0)^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\|\,g\,\|^2_{L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} + \|\,T_0\,\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{1.17}$$

D'autre part, nous intégrons l'inégalité (1.16) entre 0 et $t < \hat{T}$,

$$\frac{1}{\alpha}\,\|\,T\,\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} \leq \left(\frac{(S_2^0)^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\|\,g\,\|^2_{L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} + \|\,T_0\,\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{1.18}$$

Finalement, il vient de (1.15), (1.17) et (1.18),

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{\nu}_1}\,\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} + \frac{1}{\alpha}\,\|\,T\,\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} + \|\,\mathbf{u}\,\|_{L^2\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)^d\right)} + \|\,T\,\|_{L^2\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)\right)} \\ \leq \hat{C}\left(\|\,g\,\|_{L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} + \|\,\mathbf{f}_0\,\|_{L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} + \|\,\mathbf{u}_0\,\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\,T_0\,\|_{L^2(\Omega)}\right)\end{aligned}$$

où $\hat{C}$ ne dépend que de S_2^0, $\hat{\nu}_1$, α et $c_{\mathbf{f}_1}$.

□

1.3.1 Existence et unicité de la solution continue

Afin de résoudre (E), nous introduisons le problème équivalent suivant (cf. [30]) :
(EV)

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } \mathbf{u} \in V,\ T \in Y \text{ tels que,}\\ \dfrac{d}{dt}\,(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) + (\nu(T(t))\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\mathbf{v}) + c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t,T(t)),\mathbf{v})\,, \quad \forall \mathbf{v} \in V\\ \qquad \dfrac{d}{dt}\,(T(t),r) + (\alpha\nabla T(t),\nabla r) + c_T(\mathbf{u}(t),T(t),r) = (g(t),r)\,, \quad \forall r \in Y\\ \qquad\qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \text{dans } \Omega\\ \qquad\qquad T(0) = T_0, \quad \text{dans } \Omega\end{array}\right.$$

Dans ce qui suit, nous énonçons les principaux résultats d'existence et d'unicité de la solution $(\mathbf{u}, p, T)$ du problème variationnel (E). Nous nous sommes inspirés de la démarche suivie dans [7], en tenant compte de la dépendance de notre donnée $\mathbf{f}$ de la température T.

Théorème 1.3.5. *(Existence) Si les Hypothèses 1.3.1 sont vérifiées, alors le problème variationnel (E) admet au moins une solution* $(\boldsymbol{u}, p, T)$ *dans l'espace*

$$L^2\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)^d\right)\times L^2\left(0,\hat{T};L_0^2(\Omega)\right)\times L^2\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)\right).$$

Preuve. La démonstration est classique. Il suffit de construire des solutions discrètes $u_m(t)$ et $T_m(t)$ par une méthode de Galerkin et de montrer que ces solutions convergent vers la solution du problème (EV). Comme X est un espace séparable, alors $V \subset X$ l'est aussi. Ainsi, il existe une base $(\mathbf{w}_m)_m$ de V et une base $(\tilde{w}_m)_m$ de Y, engendrant respectivement les sous espaces V_m et Y_m de V et Y. Nous considérons,

$$\mathbf{u}_m(t)=\sum_{j=1}^{m}\tilde{u}_{jm}(t)\mathbf{w}_j$$

et

$$T_m(t)=\sum_{j=1}^{m}\tilde{T}_{jm}(t)\tilde{w}_j.$$

Nous introduisons le problème variationnel suivant, pour tous $t\in[0,\hat{T}]$ et $m\in\mathbb{N}$

$$
\left\{\begin{array}{ll}
\text{Trouver } \tilde{u}_{jm}(t)\in\mathbb{R}^2,\ \tilde{T}_{jm}\in\mathbb{R},\ \text{tels que} & \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{d\tilde{u}_{jm}}{dt}(t)\,(\mathbf{w}_j,\mathbf{w}_i)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\tilde{u}_{jm}(t)\tilde{u}_{lm}(t)c_u\,(\mathbf{w}_j,\mathbf{w}_l,\mathbf{w}_i) & \\
\quad+\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\tilde{u}_{jm}(t)(\nu(\sum_{l=1}^{m}\tilde{T}_{lm}(t)\tilde{w}_l)\nabla\mathbf{w}_j,\nabla\mathbf{w}_i) & \\
\quad=(\mathbf{f}_0(t),\mathbf{w}_i)+\left(\mathbf{f}_1(\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\tilde{T}_{jm}(t)\tilde{w}_j),\mathbf{w}_i\right), & \forall 1\le i\le m \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{d\tilde{T}_{jm}}{dt}(t)\,(\tilde{w}_j,\tilde{w}_i)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\tilde{T}_{lm}(t)\tilde{u}_{jm}(t)c_T\,(\mathbf{w}_j,\tilde{w}_l,\tilde{w}_i) & \\
\quad+\alpha\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\tilde{T}_{jm}(t)(\nabla\tilde{w}_j,\nabla\tilde{w}_i)=(g(t),\tilde{w}_i)\,, & \forall 1\le i\le m \\
\tilde{u}_{im}(0)=\tilde{u}_{im}^0 & \\
\tilde{T}_{im}(0)=\tilde{T}_{im}^0 &
\end{array}\right. \tag{1.19}
$$

où $\tilde{u}_{im}^0$ et $\tilde{T}_{im}^0$ sont respectivement les coefficients de $\mathbf{u}_{0m}$ et T_{0m} dans les bases $\{\mathbf{w}_i\}_{1\le i\le m}$ et $\{\tilde{w}_i\}_{1\le i\le m}$.
Comme $\{\mathbf{w}_i\}_{1\le i\le m}$ et $\{\tilde{w}_i\}_{1\le i\le m}$ sont deux familles libres alors les deux matrices de coefficients respectifs $(\mathbf{w}_i,\mathbf{w}_j)$ et $(\tilde{w}_i,\tilde{w}_j)$ sont inversibles.

Le système équivalent à (1.19) sera de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}'_{im}(t) \\ \tilde{T}'_{im}(t) \end{pmatrix} = \varphi_i \left(t; \tilde{u}_{1m}(t), \tilde{u}_{2m}(t), ..., \tilde{u}_{mm}(t), \tilde{T}_{1m}(t), \tilde{T}_{2m}(t), ..., \tilde{T}_{mm}(t)\right), \ \forall 1 \leq i \leq m.$$

Pour montrer l'existence de la solution, il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz (cf. [51]). Comme ν et $\mathbf{f}$ sont lipschitziennes, il s'en suit que φ_i, pour $i \in \{1, ..., m\}$, est localement lipschitzienne par rapport aux variables $\tilde{u}_{im}$ et $\tilde{T}_{im}$.
Nous déduisons, d'après le théorème de Cauchy-Lipschiz local, que le problème (1.19) admet une solution maximale $(\tilde{u}_{im}(t), \tilde{T}_{im}(t)) \in C^0\left(0, \hat{T}_m; V_m\right) \times C^0\left(0, \hat{T}_m; Y_m\right)$ pour un certain réel positif $\hat{T}_m$. Si $\hat{T}_m < \hat{T}$, alors nécessairement $\mathbf{u}_m$ et T_m ne sont pas bornés quand $t \to \hat{T}_m$ par valeurs inférieures. D'après l'inégalité (1.9) du Théorème 1.3.4, pour tout m, $\mathbf{u}_m$ et T_m sont bornés indépendamment de m et t, alors $\hat{T}_m = \hat{T}$ et $\mathbf{u}_m$ et T_m sont des solutions globales bornées dans $L^2\left(0, \hat{T}; H_0^1(\Omega)^d\right)$ et $L^2\left(0, \hat{T}; H_0^1(\Omega)\right)$ respectivement. Il existe alors une sous-suite que l'on notera à nouveau $(\mathbf{u}_m, T_m)_m$ par souci de simplification, qui converge faiblement vers une limite notée $(\mathbf{u}, T)$ dans $L^2\left(0, \hat{T}; H_0^1(\Omega)^d\right) \times L^2\left(0, \hat{T}; H_0^1(\Omega)\right)$.
Pour montrer que la limite $(\mathbf{u}, T)$ est solution du problème (EV), nous nous référons à ([7, Théorème 1.2.1]). La seule différence est au niveau du terme $(\mathbf{f}(T_m), \mathbf{w}_i)$ où la convergence se déduit facilement du fait que $\mathbf{f}$ est continue.

Pour montrer l'existence de la pression p, nous intégrons par rapport au temps la première équation du problème (EV), entre 0 et t, pour tout $t \in [0, \hat{T}]$.
Alors, pour tout $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$, nous définissons la fonction $L_t(\mathbf{v})$ par

$$\begin{aligned} L_t(\mathbf{v}) &= \int_0^t ((\mathbf{f}(T(s)), \mathbf{v}) - (\nu(T(s))\nabla\mathbf{u}(s), \nabla\mathbf{v}) \\ &\quad -(\mathbf{u}(s).\nabla)\mathbf{u}(s), \mathbf{v}) - \frac{d}{ds}(\mathbf{u}(s), \mathbf{v}))ds. \end{aligned}$$

D'après (EV), nous avons pour tout $\mathbf{v} \in V$,

$$L_t(\mathbf{v}) = 0.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, \hat{T}]$, le Théorème 1.2.6 nous permet de déduire qu'il existe $P(t) \in M$ tel que,

$$L_t(\mathbf{v}) = -(\text{div } (\mathbf{v}), P(t)), \quad \forall \mathbf{v} \in X \tag{1.20}$$

et

$$\| P(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{|L_t(\mathbf{v})|}{|\mathbf{v}|_{H_0^1(\Omega)^d}}.$$

En dérivant (1.20), par rapport à la variable t, nous déduisons que

$$p(t) = \frac{\partial P}{\partial t}(t),$$

vérifie la première équation du problème variationnel (EV).
D'où l'existence de la pression.

□

Pour démontrer l'unicité de la solution du problème (EV), nous aurons besoin du Lemme de Gronwall continu suivant (cf. [1]) :

Lemme 1.3.6. *(Gronwall continu) Soit k une fonction intégrable et positive presque partout sur l'intervalle $]0,\hat{T}[$. Soient C une constante positive et $\varphi \in C^0([0,\hat{T}])$ une fonction vérifiant l'égalité*

$$\forall t \in [0,\hat{T}], 0 \leq \varphi \leq C + \int_0^t k(s)\varphi(s)ds.$$

Alors, φ est majorée par

$$\forall t \in [0,\hat{T}], \varphi(t) \leq C \exp\left(\int_0^t k(s)ds\right).$$

L'étude de l'unicité de la solution des équations de Navier-Stokes est un problème ouvert pour $d = 3$. Nous nous limitons dans le théorème suivant à la dimension $d = 2$.

Théorème 1.3.7. *(Unicité en dimension $d = 2$)*
Supposons que la viscosité ν est lipschitzienne, avec c_ν la constante de Lipschitz. Si le problème (E) admet une solution $(\mathbf{u}, p, T)$ vérifiant, pour $p \geq 4$ et $r \geq 4$,

$$u \in L^p\left(0,\hat{T}; W^{1,r}(\Omega)^d\right),$$

alors cette solution est unique.

Preuve. Soient $(\mathbf{u}_1, p_1, T_1)$, $(\mathbf{u}_2, p_2, T_2)$ deux solutions du problème (E). Le but est de démontrer que $(\mathbf{u}_1, p_1, T_1) = (\mathbf{u}_2, p_2, T_2)$. Nous posons $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $p = p_1 - p_2$ et $T = T_1 - T_2$.
Pour tout $r \in X$, nous avons,
(1.21)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(T_1(t), r) + (\alpha(\nabla T_1(t), \nabla r) + c_T(\mathbf{u}_1(t), T_1(t), r) &= (g(t), r), \quad \text{dans } [0,\hat{T}] \\ \dfrac{d}{dt}(T_2(t), r) + (\alpha(\nabla T_2(t), \nabla r) + c_T(\mathbf{u}_2(t), T_2(t), r), &= (g(t), r), \quad \text{dans } [0,\hat{T}] \end{cases}$$

Nous ajoutons et retranchons $\displaystyle\int_\Omega (\mathbf{u}_2(x,t).\nabla) T_1(x,t) r(x) dx$ dans (1.21) pour obtenir

$$\int_\Omega \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) r(x) dx + \alpha(\nabla T(t), \nabla r)$$

$$= c_T(\mathbf{u}_2(t), T(t), r) - c_T(\mathbf{u}(t), T_1(t), r).$$

Nous remplaçons r par $T = T_1 - T_2$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les Lemmes 1.3.3 et 1.2.3, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\,T(t)\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha|T(t)|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq \|\,\mathbf{u}(t)\,\|_{L^4(\Omega)^d}\,|T_1(t)|_{H^1_0(\Omega)}\,\|\,T(t)\,\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq \frac{|T_1(t)|_{H^1_0(\Omega)}}{2}(\|\,\mathbf{u}(t)\,\|^2_{L^4(\Omega)^d} + \|\,T(t)\,\|^2_{L^4(\Omega)}) \\
&\leq \frac{|T_1(t)|_{H^1_0(\Omega)}}{\sqrt{2}}\Big(\|\,\mathbf{u}(t)\,\|_{L^2(\Omega)^d}\,|\mathbf{u(t)}|_{H^1_0(\Omega)^d} \\
&\quad + \|\,T(t)\,\|_{L^2(\Omega)}\,|T(t)|_{H^1_0(\Omega)}\Big).
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

D'après l'inégalité (1.6), nous avons pour $a = |\mathbf{u(t)}|_{H^1_0(\Omega)^d}$ et $b = |T_1(t)|_{H^1_0(\Omega)}\,\|\,\mathbf{u}(t)\,\|_{L^2(\Omega)^d}$,

$$
|T_1(t)|_{H^1_0(\Omega)}\,\|\,\mathbf{u}(t)\,\|_{L^2(\Omega)^d}\,|\mathbf{u(t)}|_{H^1_0(\Omega)^d} \leq \frac{\varepsilon_1}{2}|\mathbf{u}(t)|^2_{H^1_0(\Omega)^d} + \frac{1}{2\varepsilon_1}\,\|\,\mathbf{u}(t)\,\|^2_{L^2(\Omega)^d}\,|T_1(t)|^2_{H^1_0(\Omega)}.
$$

De même, nous avons pour $a = |T(t)|_{H^1_0(\Omega)}$ et $b = |T_1(t)|_{H^1_0(\Omega)}\,\|\,T(t)\,\|_{L^2(\Omega)}$,

$$
|T_1(t)|_{H^1_0(\Omega)}\,\|\,T(t)\,\|_{L^2(\Omega)}\,|T(t)|_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon_2}{2}|T(t)|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon_2}|T_1(t)|^2_{H^1_0(\Omega)}||T(t)||^2_{L^2(\Omega)}.
$$

Alors, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\,T(t)\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha|T(t)|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{\varepsilon_1}{2}|\mathbf{u}(t)|^2_{H^1_0(\Omega)^d} + \frac{1}{2\varepsilon_1}\,\|\,\mathbf{u}(t)\,\|^2_{L^2(\Omega)^d}\,|T_1(t)|^2_{H^1_0(\Omega)}\Big) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\varepsilon_2}{2}|T(t)|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon_2}|T_1(t)|^2_{H^1_0(\Omega)}||T(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

D'autre part, en remplaçant dans la première équation du problème variationnel (E), $\mathbf{v}$ par $\mathbf{u}$, nous déduisons,

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}\,(\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}(t)) + c_{\mathbf{u}}\,(\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}(t)) & \\
\qquad + (\nu(T_1(t))\nabla\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}(t)) &= (\mathbf{f}_0(t),\mathbf{u}(t)) + (\mathbf{f}_1(T_1(t)),\mathbf{u}(t)) \quad \text{dans } [0,\hat{T}] \\
\dfrac{d}{dt}\,(\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}(t)) + c_{\mathbf{u}}\,(\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}(t)) & \\
\qquad + (\nu(T_2(t))\nabla\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}(t)) &= (\mathbf{f}_0(t),\mathbf{u}(t)) + (\mathbf{f}_1(T_2(t)),\mathbf{u}(t)) \quad \text{dans } [0,\hat{T}].
\end{cases}
$$

Par suite, en effectuant la différence nous aurons,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\,(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)) + c_{\mathbf{u}}\,(\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}(t)) - c_{\mathbf{u}}\,(\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}(t)) \\
&\qquad + (\nu(T_1(t))\nabla\mathbf{u}_1(t),\nabla\mathbf{u}(t)) - (\nu(T_2(t))\nabla\mathbf{u}_2(t),\nabla\mathbf{u}(x,t)) \\
&\qquad = (\mathbf{f}_1(T_1(t)) - \mathbf{f}_1(T_2(t)),\mathbf{u}(t)).
\end{aligned}
$$

Nous ajoutons et nous retranchons les termes

$$(\nu(T_2(t))\nabla \mathbf{u}_1(t), \nabla \mathbf{u}(t)) \text{ et } c_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t)\right),$$

pour obtenir, en utilisant le Lemme 1.3.3

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)\right) + (\nu(T_2(t))\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{u}(t)) &= -c_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t)\right) \\ &+ ((\nu(T_2(t)) - \nu(T_1(t)))\nabla \mathbf{u}_1(t), \nabla \mathbf{u}(t)) + (\mathbf{f}_1(T_1(t)) - \mathbf{f}_1(T_2(t)), \mathbf{u}(t)).\end{aligned}$$

Nous notons $A = ((\nu(T_2(t)) - \nu(T_1(t)))\nabla \mathbf{u}_1(t), \nabla \mathbf{u}(t))$. Comme $\mathbf{f}_1$ est $c^*_{\mathbf{f}_1}$-lipschitzienne et ν est bornée, alors d'après les inégalités de Hölder et de Sobolev,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \mathbf{u}(t) \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \hat{\nu}_1 |\mathbf{u}(t)|^2_{H^1_0(\Omega)^d} \\ &\quad \leq ||\mathbf{u}(t)||^2_{L^4(\Omega)^d} |\mathbf{u}_1(t)|_{H^1_0(\Omega)^d} + |A| + c^*_{\mathbf{f}_1} ||T(t)||_{L^2(\Omega)} ||\mathbf{u}(t)||_{L^2(\Omega)^d}.\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Sobolev, les relations (1.6) et (1.23), le Théorème 1.3.4 et le Lemme 1.2.3, nous obtenons,

(1.24)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \mathbf{u}(t) \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \hat{\nu}_1 |\mathbf{u}(t)|^2_{H^1_0(\Omega)^d} \\ &\leq \sqrt{2} ||\mathbf{u}(t)||_{L^2(\Omega)^d} |\mathbf{u}(t)|_{H^1_0(\Omega)^d} |\mathbf{u}_1(t)|_{H^1_0(\Omega)^d} + |A| + \frac{c^*_{\mathbf{f}_1}}{2}(||\mathbf{u}(t)||^2_{L^2(\Omega)^d} + ||T(t)||^2_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq \varepsilon_3 |\mathbf{u}(t)|^2_{H^1_0(\Omega)^d} + \frac{1}{2\varepsilon_3} \| \mathbf{u}(t) \|^2_{L^2(\Omega)^d} |\mathbf{u}_1(t)|^2_{H^1_0(\Omega)^d} + |A| + \frac{c^*_{\mathbf{f}_1}}{2}(\| \mathbf{u}(t) \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| T(t) \|^2_{L^2(\Omega)}).\end{aligned}$$

Comme la solution exacte $\mathbf{u} \in L^\infty(0, \hat{T}; W^{1,r}(\Omega)^2)$ pour $r \geq 4$, nous majorons le terme $|A|$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}|A| &\leq c_\nu \| \mathbf{u}_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)^d} \| T(t) \|_{L^{r^*}(\Omega)} |\mathbf{u}(t)|_{H^1_0(\Omega)^d} \\ &\leq \frac{c_\nu}{2\varepsilon_4} \| \mathbf{u}_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)^d} \| T(t) \|^2_{L^{r^*}(\Omega)} + \frac{\nu^* \varepsilon_4}{2} \| \mathbf{u}_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)^d} |\mathbf{u}(t)|^2_{H^1_0(\Omega)^d}\end{aligned}$$

avec $r^* = \dfrac{2}{r-2}$.
Comme $r^* \leq 4$, alors nous obtenons

$$\begin{aligned}|A| &\leq \frac{\varepsilon_4}{2}\nu^* \| \mathbf{u}_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)^d} |\mathbf{u}(t)|^2_{H^1_0(\Omega)^d} \\ &\quad + \tfrac{1}{2\varepsilon_4}\nu^* \| \mathbf{u}_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)^d} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon_5} \| T(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon_5}{\sqrt{2}} |T(t)|^2_{H^1_0(\Omega)} \right),\end{aligned}$$

On considère la somme de (1.23) et (1.24). En choissant $\varepsilon_1 = \dfrac{\hat{\nu}_1\sqrt{2}}{3}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{\alpha}{4\sqrt{2}}$, $\varepsilon_3 = \dfrac{\hat{\nu}_1}{3}$, $\varepsilon_4 = \dfrac{\hat{\nu}_1}{3\nu^* \| \mathbf{u}_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)^2}}$ et $\varepsilon_5 = \dfrac{\varepsilon_4\alpha}{\sqrt{2}\nu^* \| \mathbf{u}_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)^2}}$ nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| \mathbf{u}(t) \|^2_{L^2(\Omega)^d} + ||T(t)||^2_{L^2(\Omega)}) \leq$$
$$\hat{C}\big(\| \mathbf{u}_1(t) \|^4_{W^{1,r}(\Omega)^2} + |T_1(t)|^2_{H^1_0(\Omega)} + 1\big)(\| \mathbf{u}(t) \|^2_{L^2(\Omega)^d} + ||T(t)||^2_{L^2(\Omega)}).$$

On note $y(t) = (\| \mathbf{u}(t) \|^2_{L^2(\Omega)^d} + ||T(t)||^2_{L^2(\Omega)})$, $\phi(t) = \hat{C}\big(\| \mathbf{u}_1(t) \|^4_{W^{1,r}(\Omega)^2} + |T_1(t)|^2_{H^1_0(\Omega)} + 1\big)$ et on intègre entre 0 et t pour obtenir

$$y(t) \leq \int_0^t \phi(s)y(s)ds.$$

On applique enfin le lemme de Gronwall continu 1.3.6, pour obtenir $y = 0$, ainsi $T_1 = T_2$ et $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. En ce qui concerne l'unicité de la pression, pour tout $\mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^d$, la fonction p vérifie,

$$\int_\Omega \text{div } (\mathbf{v}(x))p(x)dx = 0.$$

En conclusion, d'après le Théorème 1.2.6, nous avons $p = 0$.
D'où l'unicité de la solution.

□

1.4 Problème discret stabilisé

Cette section est consacrée à la discrétisation du problème variationnel en temps et en espace. Pour approcher les dérivées en temps de la vitesse et de la température, nous utilisons le schéma d'Euler semi-implicite d'ordre 1. D'autre part, pour la discrétisation en espace, nous nous intéressons à la méthode des éléments finis.

1.4.1 Discrétisation en temps

La méthode de discrétisation utilisée est la méthode d'Euler semi-implicite (cf.[36]). Nous introduisons une partition de l'intervalle $[0, \hat{T}]$ de N intervalles de la forme $[t_n, t_{n+1}]$, où $0 = t_0 < t_2 < t_3 < ... < t_N = \hat{T}$.
Désignons par τ_n la longueur de l'intervalle $[t_{n-1}, t_n]$ et τ_{max} (respectivment τ_{min}) le maximum (resptectivement le minimum) des τ_n, pour $1 \leq n \leq N$.

Remarque 1.4.1. *Dans la suite, en raison de simplification, on note par* $\mathbf{u}^n$, p^n *et* T^n *les quantités respectives* $\boldsymbol{u}(x, t_n)$, $p(x, t_n)$ *et* $T(x, t_n)$.

Remarque 1.4.2. *Dans le cas où le pas de temps est constant, que nous notons par τ, nous aurons*

$$\tau_i = \tau, \ \forall i = 1, ..., n.$$

Soit σ_τ le paramètre de régularité donné par,

$$\sigma_\tau = \max_{2 \leq n \leq N} \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}.$$

Nous supposons que la famille de partitions est régulière, c.à.d σ_τ est borné indépendamment de τ.

D'où la discrétisation d'Euler semi-implicite d'ordre 1 nous permet d'approcher les dérivées $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x,t)$ et $\frac{\partial T}{\partial t}(x,t)$, pour $n \in \{1, ..., N\}$, par

$$\frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\tau_n} \text{ et } \frac{T^n - T^{n-1}}{\tau_n}.$$

Le système discrétisé en temps, est linéarisé par la méthode de point fixe (cf [23]) et il sera, pour tout $n \in \{1, ..., N\}$,

(1.25)

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}^n, p^n) \in X \times M, \ T^n \in Y; \\ \frac{1}{\tau_n}\left(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{v}\right) + c_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}\right) + (\nu(T^{n-1})\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \mathbf{v}) \\ \qquad +(p^n, \text{div } \mathbf{v}) = (\mathbf{f}^n(T^{n-1}), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in X \\ \frac{1}{\tau_n}\left(T^n - T^{n-1}, r\right) + \alpha(\nabla T^n, \nabla r) + c_T\left(\mathbf{u}^n, T^n, r\right) = (g^n, r), \quad \forall r \in Y \\ (q, \text{div } \mathbf{u}^n) = 0, \quad \forall q \in M \end{cases}$$

tels que $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0$, $T^0 = T_0$ sur Ω.
g^n et $\mathbf{f}^n$ sont données par

$$g^n = \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} g(s) ds$$

et

$$\mathbf{f}^n(T^{n-1}) = \mathbf{f}_0^n + \mathbf{f}_1(T^{n-1})$$

avec

$$\mathbf{f}_0^n = \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{f}(s) ds.$$

1.4.2 Discrétisation en espace

Dans cette partie, nous nous intéressons à la discrétisation en espace du problème (1.25) par la méthode des éléments finis .
Désormais, nous supposons que notre domaine Ω est polygonal ($d = 2$) et polyédrique ($d = 3$), de manière à le recouvrir entièrement. Alors, pour tout $1 \leq n \leq N$, notons $(\mathcal{T}_{nh})_h$ une famille de triangulations ($d = 2$) et tétraèdres ($d = 3$) du domaine Ω telle que, d'une part l'intersection de deux éléments différents est soit le vide, soit un sommet, soit une arête (ou soit une face pour d=3). D'autre part,

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_{nh}} K,$$

Pour tout élément K de $\mathcal{T}_{nh}$, soient h_K son diamètre et ρ_K le diamètre de la sphère inscrite dans K.
Pour chaque $n \in \{1, ..., N\}$, h_n désigne le diamètre maximal des éléments de $\mathcal{T}_{nh}$. Nous définissons par h le maximum des h_n, pour $n \in \{1, ..., N\}$.
Supposons que la famille de triangulations $\mathcal{T}_{nh}$ est régulière, c'est-à-dire il existe une constante $\sigma > 0$ indépendante de h et τ, telle que

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \ \forall K \in \mathcal{T}_{nh}.$$

Nous définissons les espaces éléments finis X_{nh}, M_{nh} et Y_{nh} tels que $X_{nh} \subset X$, $M_{nh} \subset M$ et $Y_{nh} \subset Y$. Nous approchons la vitesse $\mathbf{u}$ par des éléments de Lagrange P_{1b}, la pression p et la température T par des éléments finis P_1. Nous rappelons que, pour tout entier k, $P_k(K)$ désigne l'espace des fonctions dont leur restriction sur K est un polynôme à d variables de degré k et $P_{1b}(K) = P_1(K) + vect(b_K)$, où b_K est le produit des coordonnées barycentriques de l'élément K. Nous introduisons l'espace des éléments finis suivant

$$Z_{nh} = \left\{ q_h \in C^0(\bar{\Omega}); \forall K \in \mathcal{T}_{nh}, q_{h|K} \in P_1 \right\}.$$

D'où, pour tout $n \in \{1, ..., N\}$,

$$\begin{aligned}
X_{nh} &= \left\{ \mathbf{v}_h \in C^0(\Omega)^d; \ \forall K \in \mathcal{T}_{nh}, \ \mathbf{v}_{h|K} \in P_{1b}(K), \mathbf{v}_{h|\partial\Omega} = 0 \right\}, \\
Y_{nh} &= \left\{ r_h \in Z_{nh}; \ r_{h|\partial\Omega} = 0 \right\}, \\
M_{nh} &= \left\{ q_h \in Z_{nh}; \ \int_\Omega q_h dx = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Nous introduisons les espaces discrets suivants :

$$\begin{aligned}
V_{nh} &= \left\{ \mathbf{v}_h \in X_{nh}; \ \forall q_h \in M_{nh}, \ \int_\Omega q_h(x) \ \text{div} \ \mathbf{v}_h(x) dx = 0 \right\}, \\
V_{nh}^\circ &= \left\{ \mathbf{f}_h \in X_{nh}^{'}; \ \forall \mathbf{v}_h \in V_{nh}, \ \langle \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h \rangle = 0 \right\}, \\
V_{nh}^\perp &= \left\{ \mathbf{v}_h \in X_{nh}; \ \forall w_h \in X_{nh}, \ \int_\Omega \nabla \mathbf{v}_h(x) \nabla \mathbf{w}_h(x) dx = 0 \right\},
\end{aligned}$$

où $X_{nh}^{'}$ est le dual de X_{nh}.

Remarque 1.4.3. *(cf. [6]) Les espaces X_{nh} et M_{nh} considérés, vérifient la condition inf-sup discrète, avec une constante $\beta^* > 0$ indépendante de h, à savoir*

$$\inf_{p_h^n \in M_{nh}} \sup_{\mathbf{v}_h \in X_{nh}} \frac{b(\mathbf{v}_h, p_h^n)}{|\mathbf{v}_h|_{H_0^1(\Omega)^d} \| p_h^n \|_{L^2(\Omega)}} \geq \beta^*. \tag{1.26}$$

Proposition 1.4.4. *Si la famille de triangulations $\mathcal{T}_{nh}$ est régulière, alors*

1) *il existe un opérateur d'interpolation $P_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^d, X_{nh})$ (voir [30] et [32]), tel que*

   (i) $\forall q_h \in M_{nh}$,

   $$\forall \mathbf{v} \in X, \ \int_\Omega q_h(x) div\ (P_h\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}(x))dx = 0.$$

   (ii) pour $k = 0$ ou 1,

   $$\forall \mathbf{v} \in H^{k+1}(\Omega)^d \cap H_0^1(\Omega)^d, \ \| P_h\mathbf{v} - \mathbf{v} \|_{L^2(\Omega)^d} \leq c_P h_n^{k+1} |\mathbf{v}|_{H^{k+1}(\Omega)^d}.$$

   (iii) pour $k = 0$ ou 1, pour tout $r \geq 2$,

   $$\forall \mathbf{v} \in W^{k+1,r}(\Omega)^d \cap H_0^1(\Omega)^d, \ |P_h\mathbf{v} - \mathbf{v}|_{W^{1,r}(\Omega)^d} \leq c_P h_n^k |\mathbf{v}|_{W^{k+1,r}(\Omega)^d}. \tag{1.27}$$

2) *De même, il existe $R_h \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), Z_{nh})$ (voir [18], [10] pour $d = 2$ et [52] pour $d = 3$) tel que, pour $m = 0, 1$, $l = 0, 1$ et pour tout $p \geq 2$,*

   $$\forall r \in W^{l+1,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \ |R_h r - r|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq c_R h_n^{l+1-m} |r|_{W^{l+1,p}(\Omega)}. \tag{1.28}$$

3) *Pour la pression , une simple modification de l'opérateur R_h nous donne un opérateur $r_h \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), Z_{nh}) \cap \mathcal{L}(H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), M_{nh})$ (cf. [2]), vérifiant l'inégalité (1.28), où c_P, c_R sont des constantes positives indépendantes de τ et h.*

Remarque 1.4.5. *Nous remarquons que P_h et R_h sont stables en norme $H^1(\Omega)^d$, en d'autre terme il existe deux constantes positives $c_P^{'}$ et $c_R^{'}$ telles que*

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \ \| P_h\mathbf{u} \|_{H_0^1(\Omega)^d} \leq c_P^{'} |\mathbf{v}|_{H_0^1(\Omega)^d}$$

et

$$\forall r \in H_0^1(\Omega), \ \| R_h r \|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_R^{'} |r|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Pour effectuer l'analyse numérique, il sera plus facile d'ajouter un terme de stabilisation aux termes de convections $((\mathbf{u}_h^{n-1}\nabla).\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h)$ et $((\mathbf{u}_h^n\nabla).T_h^n, r_h)$. Nous introduisons les formes trilinéaires suivantes :

$$d_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) = \left((\mathbf{u}_h^{n-1}.\nabla)\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h\right) + \frac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h\right)$$

et

$$d_T(\mathbf{u}_h^n, T_h^n, r_h) = ((\mathbf{u}_h^n.\nabla)T_h^n, r_h) + \frac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}_h^n)T_h^n, r_h\right).$$

Proposition 1.4.6. *Pour tous $\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h \in X_{nh}$ et $r_h \in Y_{nh}$, nous avons*

$$d_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = 0$$

et

$$d_T(\mathbf{u}_h, r_h, r_h) = 0.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Green-Riemann aux deux termes de chaque égalité.

□

Le problème variationnel discret associé à la formulation variationnelle continue (E) est, pour tout $n \in \{1, ..., N\}$,
(Eds1)

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh},\ T_h^n \in Y_{nh} \text{tels que :} & \\ \dfrac{1}{\tau_n}\left(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h\right) + (\nu(T_h^{n-1})\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{v}_h) & \\ \qquad -(p_h^n, \text{div } \mathbf{v}_h) + d_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) = \left(\mathbf{f}^n(T_h^{n-1}), \mathbf{v}_h\right), & \forall \mathbf{v}_h \in X_{nh} \\ \dfrac{1}{\tau_n}\left(T_h^n - T_h^{n-1}, r_h\right) + \alpha(\nabla T_h^n, \nabla r_h) + d_T(\mathbf{u}_h^n, T_h^n, r_h) = (g^n, r_h), & \forall r_h \in Y_{nh} \\ \qquad (q_h, \text{div } \mathbf{u}_h^n) = 0, & \forall q_h \in M_{nh} \end{cases}$$

où $\mathbf{u}_h^0$ et T_h^0 sont des approximations de $\mathbf{u}_0$ et T_0.
Alors, pour tout $\mathbf{v}_h \in V_{nh}$, nous avons, pour $n \in \{1, ..., N\}$:
(Eds2)

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh}(\Omega),\ T_h^n \in Y_{nh}(\Omega), \text{tels que} & \\ \dfrac{1}{\tau_n}\left(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h\right) + (\nu(T_h^{n-1})\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{v}_h) & \\ \qquad +d_{\mathbf{u}}(u_h^{n-1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) = \left(\mathbf{f}^n(T_h^{n-1}), \mathbf{v}_h\right), & \forall \mathbf{v}_h \in V_{nh} \\ \dfrac{1}{\tau_n}\left(T_h^n - T_h^{n-1}, r_h\right) + \alpha(\nabla T_h^n, \nabla r_h) + d_T(\mathbf{u}_h^n, T_h^n, r_h) = (g^n, r_h), & \forall r_h \in Y_{nh} \\ \qquad (q_h, \text{div } \mathbf{u}_h^n) = 0, & \forall q_h \in M_{nh} \end{cases}$$

Remarque 1.4.7. *Pour simplifier le calcul de l'estimation a priori, nous prenons $T_h^0 = R_h T(0)$ et $\mathbf{u}_h^0 = P_h u(0)$.*

1.4.2.1 Existence et unicité de la solution du problème discret

Pour assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème (Eds1), nous avons recours au théorème suivant :

Théorème 1.4.8. *(Existence et unicité) A chaque pas du temps, pour $\boldsymbol{u}_h^{n-1} \in X_{(n-1)h}$, $T_h^{n-1} \in Y_{(n-1)h}$, sous les Hypothèses 1.3.1, le problème (Eds1) admet une unique solution $(\boldsymbol{u}_h^n, p_h^n, T_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh} \times Y_{nh}$.*

Preuve. Nous introduisons la forme bilinéaire suivante : pour tout $\mathbf{u}_h,\ \mathbf{v}_h \in V_{nh}$

$$\tilde{a}_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + ((\mathbf{u}_h^{n-1}.\nabla)\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \frac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}_h^{n-1})\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h\right) + (\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h, \nabla\mathbf{v}_h).$$

La forme $\tilde{a}_1$ est continue et coercive.
En effet, pour tout $\mathbf{u}_h \in V$, nous avons

$$\tilde{a}_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = \frac{1}{\tau_n} \| \mathbf{u}_h \|^2_{L^2(\Omega)^d} + (\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h, \nabla\mathbf{u}_h).$$

L'inégalité (1.8) nous donne la minoration suivante

$$\tilde{a}_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq \frac{1}{\tau_n} \| \mathbf{u}_h \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \hat{\nu}_1 |\mathbf{u}_h|^2_{H_0^1(\Omega)^d}.$$

D'où,

$$\tilde{a}_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq \min\left(\frac{1}{\tau_{max}}, \hat{\nu}_1\right) \| \mathbf{u}_h \|^2_{H^1(\Omega)^d}\ .$$

Nous déduisons, en appliquant le théorème de Lax-Milgram, l'existence et l'unicité de la solution $\mathbf{u}_h^n \in X_{nh}$ de la première équation du problème variationnel discret (Eds2).
Comme pour tout $\mathbf{v}_h \in V_{nh}$, nous avons

$$\langle \mathbf{f}(T_h^n) - \frac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\tau_n} + \text{div } (\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n) - (\mathbf{u}_h^{n-1}\nabla).\mathbf{u}_h^{n-1} - \frac{1}{2}\text{div } \mathbf{u}_h^n\, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h\rangle = 0,$$

alors, d'après le Théorème 1.2.6, il existe $p_h^n \in M_{nh}$, tel que pour tout $\mathbf{v}_h \in V_{nh}$

$$\begin{aligned} -(p_h^n, \text{div } \mathbf{v}_h) \;&=\; \left(\mathbf{f}(T_h^{n-1}), \mathbf{v}_h\right) - \left(\frac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\tau_n}, \mathbf{v}_h\right) - (\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n, \nabla\mathbf{v}_h) \\ &\quad + ((\mathbf{u}_h^{n-1}\nabla).\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + \frac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h\right). \end{aligned}$$

De plus,

$$|\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega)^d} \leq \frac{1}{\beta^*} \| p_h^n \|_{L^2(\Omega)}\ .$$

De même pour démontrer l'existence et l'unicité de la température T du problème variationnel (Eds1), nous considérons, pour tous $T,\ r \in Y$, la forme bilinéraire suivante :

$$\tilde{a}_2(T, r) = \frac{1}{\tau_n}(T, r) + (\nabla T, \nabla r) + (\mathbf{u}_h^n \nabla T, r)\,.$$

La forme $\tilde{a}_2$ est continue et coercive.
D'après le théorème de Lax-Milgram, nous déduisons l'existence et l'unicité de la solution $T_h^n \in Y_{nh}$.

□

Proposition 1.4.9. *A chaque étape n, sous les Hypothèses 1.3.1, la solution $(\boldsymbol{u}_h^n, T_h^n) \in X_{nh} \times Y_{nh}$ du problème variationnel discret (Eds2) vérifie, pour tout $m = 1, ..., N$, les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \| \boldsymbol{u}_h^m \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{n=0}^{m} \frac{\hat{\nu}_1 \tau_n}{2} |\boldsymbol{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \;&\leq\; \tilde{C}_d \Big(\| g \|^2_{L^2\left(0,\hat{T},L^2(\Omega)\right)} + \| f_0 \|_{L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} \\ &\quad + \| T_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \boldsymbol{u}_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)^d} \Big),\end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\frac{1}{2} \| T_h^m \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=0}^{m} \frac{\alpha \tau_n}{2} |T_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \;\leq\; \tilde{C}'_d \Big(\| g \|^2_{L^2\left(0,\hat{T},L^2(\Omega)\right)} + \| T_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)} \Big), \tag{1.30}$$

où $\tilde{C}_d$ et $\tilde{C}'_d$ sont deux constantes positives indépendantes de h et m.

Preuve. Dans une première étape, nous montrons l'inégalité vérifiée par la température (1.30). En effet, en suivant la même démarche de la preuve du Théorème 1.3.4, nous obtenons, en remplaçant r_h^n par T_h^n dans la deuxième équation du problème variationnel (Eds1), l'inégalité suivante

$$\frac{1}{2} \| T_h^n \|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2} \| T_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha \tau_n}{2} |T_{h^n}|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{(S_2^0)^2 \tau_n}{2\alpha} \| g^n \|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Nous appliquons la somme sur n de 1 jusqu'à $m \leq N$, pour avoir l'estimation suivante :

$$\frac{1}{2} \| T_h^m \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=1}^{m} \frac{\tau_n \alpha}{2} |T_h^n|^2_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{C}'_d \Big(\| g \|^2_{L^2\left(0,\hat{T},L^2(\Omega)\right)} + \| T_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)} \Big), \tag{1.31}$$

où $\tilde{C}'_d$ une constante dépendante de S_0^2, $\hat{T}$ et α.
D'autre part, nous montrons que $\mathbf{u}_h^n$ vérifie l'estimation (1.29), il suffit de remplacer $\mathbf{v}_h$ par $\mathbf{u}_h^n$ dans la première équation du problème variationnel (Eds2). Nous obtenons alors, d'après la Proposition 1.4.6, l'équation suivante :

$$\left(\frac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\tau_n}, \mathbf{u}_h^n \right) + (\nu(T_h^{n-1}) \nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{u}_h^n) = (\mathbf{f}_0^n, \mathbf{u}_h^n) + \left(\mathbf{f}_1(T_h^{n-1}), \mathbf{u}_h^n \right),$$

qui par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la Relation (1.5), est inférieure à :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\tau_n} \| \mathbf{u}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} - \frac{1}{2\tau_n} \| \mathbf{u}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{2\tau_n} \| \mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} \\ &+ \hat{\nu}_1 |\mathbf{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \leq S_0^2 \| \mathbf{f}(T_h^{n-1}) \|_{L^2(\Omega)^d} |\mathbf{u}_h^n|_{H^1(\Omega)^d} + S_0^2 \| \mathbf{f}_0^n \|_{L^2(\Omega)^d} |\mathbf{u}_h^n|_{H^1(\Omega)^d}.\end{aligned} \tag{1.32}$$

Comme ν est bornée, alors (1.32) implique en utilisant (1.8) et (1.6) pour $\xi = \dfrac{2}{\hat{\nu}_1}$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \| \mathbf{u}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} - \frac{1}{2} \| \mathbf{u}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\hat{\nu}_1 \tau_n}{2} |\mathbf{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\ &\leq \frac{(S_0^2)^2 \tau_n c^2_{\mathbf{f}_1}}{\hat{\nu}_1} \| T_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{(S_0^2)^2}{\hat{\nu}_1} \| \mathbf{f}_0^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} .\end{aligned} \tag{1.33}$$

Nous insérons (1.31) dans (1.33). Nous obtenons alors, en sommant sur n entre 1 et $m \in \{1, ..., N\}$, l'estimation de la vitesse

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \| \mathbf{u}_h^m \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{n=1}^{m} \frac{\hat{\nu}_1 \tau_n}{2} |\mathbf{u}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\ &\leq \tilde{C}_d \left(\| g \|^2_{L^2\left(0,\hat{T},L^2(\Omega)\right)} + \| \mathbf{f}_0 \|^2_{L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} + \| T_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \mathbf{u}_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)^d} \right). \end{aligned} \tag{1.34}$$

□

1.4.3 Estimation d'erreur a priori

Après avoir montrer l'existence et l'uncité de la solution, nous établissons dans cette partie, une estimation d'erreur *a priori*. Pour cette raison, nous fixons le pas du temps que nous le notons τ. Nous supposons également que le pas de maillage, noté par h, n'évolu pas avec le temps. Dans ce qui suit, nous énonçons le Lemme de Grönwall discret, qui sera util dans les démonstrations des théorèmes.

Lemme 1.4.10. *(Lemme de Grönwall discret)*
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de réels positifs. Supposons que
(i) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit monotone croissante,
(ii) $a_0 + b_0 \leq c_0$
et qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que :

$$\forall n \geq 1,\ a_n + b_n \leq c_n + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

Alors ces suites vérifient la majoration

$$\forall n \geq 0,\ a_n + b_n \leq c_n e^{n\lambda}.$$

Pour appliquer le Lemme de Grönwall, nous aurons besoin de la remarque suivante

Remarque 1.4.11. *Soit $(\mathbf{v}_h^n)_n$ une suite dans $H_0^1(\Omega)^d$ telle que :*

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{v}_h^m \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{n=1}^{m} \| \mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \hat{\nu}_1 \sum_{n=1}^{m} \tau |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\ &\leq C_1 + C_2 \sum_{n=1}^{m} \tau \| \mathbf{v}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Nous écrivons

$$\| \mathbf{v}_h^m \|_{L^2(\Omega)^d} \leq \| \mathbf{v}_h^m - \mathbf{v}_h^{m-1} \|_{L^2(\Omega)^d} + \| \mathbf{v}_h^{m-1} \|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Alors,

$$C_2\tau \parallel \mathbf{v}_h^m \parallel^2_{L^2(\Omega)^d} \leq 2C_2\tau \parallel \mathbf{v}_h^m - \mathbf{v}_h^{m-1} \parallel^2_{L^2(\Omega)^d} + 2C_2\tau \parallel \mathbf{v}_h^{m-1} \parallel^2_{L^2(\Omega)^d} .$$

Nous supposons τ assez petit pour avoir par exemple $2C_2\tau \leq 1$.
Par suite, (1.35) devient

$$\begin{aligned} &\parallel \mathbf{v}_h^m \parallel^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{n=1}^{m-1} \parallel \mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1} \parallel^2_{L^2(\Omega)^d} + \hat{\nu}_1 \sum_{n=1}^{m} \tau |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\ &\leq \quad C_1 + 3C_2 \sum_{n=2}^{m} \parallel \mathbf{v}_h^{n-1} \parallel^2_{L^2(\Omega)^d} . \end{aligned}$$

Théorème 1.4.12. *Soient $(\boldsymbol{u}, T, p)$ une solution du problème continu (E), $(\boldsymbol{u}_h^n, T_h^n, p_h^n)$ une solution du problème discret (Eds2). Pour $\boldsymbol{u} \in L^\infty\left(0,\hat{T}; H^1(\Omega)^d\right) \cap L^2\left(0,\hat{T}; H^2(\Omega)^d\right)$, $\boldsymbol{u}' \in L^2\left(0,\hat{T}; H^1(\Omega)^d\right)$, $T \in L^\infty\left(0,\hat{T}; H^1(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,\hat{T}; H^2(\Omega)\right)$ et $T' \in L^2\left(0,\hat{T}; H^1(\Omega)\right)$, il existe des constantes C_T' et C_T'' positives qui dépendent de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$, T, T' et α telles que, pour tout $m \leq N$,*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \parallel T_h^m - R_h T^m \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} \alpha\tau |T_h^n - R_h T^n|^2_{H^1(\Omega)} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} \parallel T_h^n - R_h T^n - (T_h^{n-1} - R_h T^{n-1}) \parallel^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \quad C_T{}'(h^2 + \tau^2) + C_T'' \sum_{n=1}^{m} \tau |\mathbf{u}_h^n - P_h \mathbf{u}^n|_{H^1(\Omega)^d} \end{aligned}$$

avec R_h et P_h sont les opérateurs de projection définis dans la Proposition 1.4.4.

Preuve. Nous considérons l'équation de la chaleur du problème variationnel continu (EV), pour tout $r_h \in Y_{nh}$,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}(t), r_h\right) + (\alpha \nabla T(t), \nabla r_h) + c_T\left(\mathbf{u}(t), T(t), r_h\right) = (g(t), r_h).$$

Nous choisissons la fonction test $r_h = r_h^n = T_h^n - R_h T^n$, R_h étant l'opérateur défini dans la Proposition 1.4.4. Nous obtenons, en intégrant par rapport à la variable t entre t_{n-1} et t_n, la relation suivante

$$\begin{aligned} &(T^n - T^{n-1}, r_h^n) + \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \alpha \nabla T(t) dt, \nabla r_h^n\right) + \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{u}(t)\nabla).T(t) dt, r_h^n\right) \\ &= \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} g(t) dt, r_h^n\right). \end{aligned} \tag{1.36}$$

En remarquant que $\left(\tau g^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n} g(t)dt\right) = 0$, la différence entre (1.36) et l'équation de la chaleur du problème variationnel discret (Eds2), multipliée par le pas de temps τ, nous donne

$$\begin{aligned}&\left((T_h^n - T_h^{n-1}) - (T^n - T^{n-1}), r_h^n\right) + \alpha\left(\tau\nabla T_h^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\nabla T(t)dt, \nabla r_h^n\right)\\ &+\left(\tau(\mathbf{u}_h^n\nabla).T_h^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n}(\mathbf{u}(t)\nabla).T(t)dt + \frac{\tau}{2}\text{div } u_h^n\ T_h^n, r_h^n\right) = 0\end{aligned}$$

Nous notons par b_1, b_2 et b_3 les termes de cette équation, que nous traitons séparement. Nous majorons en premier le terme b_1. Nous intercalons (R_hT^n, r_h^n) et (R_hT^{n-1}, r_h^n) pour obtenir, en appliquant la relation (1.5), l'égalité suivante :

$$b_1 = \frac{1}{2}\parallel r_h^n\parallel^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\parallel r_h^{n-1}\parallel^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\parallel r_h^n - r_h^{n-1}\parallel^2_{L^2(\Omega)} + b_{1,1}.$$

En remarquant que $(R_hT)' = R_hT'$, il vient

$$\begin{aligned}b_{1,1} &= \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}(R_hT' - T')(t)dt, r_h^n\right)\\ &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n}\parallel R_hT'(t) - T'(t)\parallel_{L^2(\Omega)}\parallel r_h^n\parallel_{L^2(\Omega)} dt.\end{aligned}$$

D'après les propriétés de l'opérateur R_h et l'inégalité (1.6) pour $\xi = \tilde{\varepsilon}_1$, nous obtenons,

$$\begin{aligned}|b_{1,1}| &\leq \frac{c_R^2h^2}{2\tilde{\varepsilon}_1}\int_{t_{n-1}}^{t_n}|T'(t)|^2_{H^1(\Omega)}dt + \frac{\tau\tilde{\varepsilon}_1}{2}\parallel r_h^n\parallel^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq \frac{c_R^2h^2}{2\tilde{\varepsilon}_1}\parallel T'\parallel^2_{L^2(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega))} + \frac{\tau\tilde{\varepsilon}_1(S_0^2)^2}{2}|r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Pour majorer b_2, nous ajoutons et nous retranchons $\tau\,(\nabla R_hT^n, \nabla r_h^n)$ et $(\nabla R_hT, \nabla r_h^n)$, pour obtenir

$$\begin{aligned}b_2 &= \alpha\tau|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)} + \alpha\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\nabla(R_hT^n - R_hT(t)), \nabla r_h^n)\,dt\\ &\quad +\alpha\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\nabla(R_hT - T)(t), r_h^n)\,dt\\ &= \alpha\tau|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)} + b_{2,1} + b_{2,2}.\end{aligned}$$

Nous remarquons que $b_{2,1}$ s'écrit

$$b_{2,1} = \alpha\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_t^{t_n}\left(\nabla R_hT'(t), \nabla r_h^n\right)dsdt$$

qui par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le théorème de Fubini et la Remarque 1.4.5, sera inférieure à

$$\begin{aligned} |b_{2,1}| &\leq \alpha \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{t_{n-1}}^{s} |R_h T^{'}(s)|_{H^1(\Omega)} |r_h^n|_{H^1(\Omega)} dt ds \\ &\leq \alpha c_R^{'} |r_h^n|_{H^1(\Omega)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |T^{'}(s)|_{H^1(\Omega)} (s - t_{n-1}) ds. \end{aligned}$$

Il vient de l'inégalité de Hölder et (1.6) pour $\xi = \tilde{\varepsilon}_2$,

$$|b_{2,1}| \leq \frac{\tau^2 c_R^2 \alpha}{2\sqrt{3}\tilde{\varepsilon}_2} \| T^{'} \|^2_{L^2(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega))} + \frac{\tilde{\varepsilon}_2 \tau \alpha}{2\sqrt{3}} |r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}.$$

De même, pour le terme $b_{2,2}$, l'inégalité de Hölder et (1.6) pour $\xi = \tilde{\varepsilon}_3$ nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} |b_{2,2}| &= \left| \alpha \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nabla (T - R_h T)(t), \nabla r_h^n)\, dt \right| \\ &\leq \frac{\alpha}{2\tilde{\varepsilon}_3} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |(T - R_h T)(t)|^2_{H^1(\Omega)} dt + \frac{\tau \alpha \tilde{\varepsilon}_3}{2} |r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité (1.28) vérifiée par l'opérateur R_h implique,

$$|b_{2,2}| \leq \frac{\alpha c_R^2 h^2}{2\tilde{\varepsilon}_3} \| T \|^2_{L^2(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega))} + \frac{\alpha \tau \tilde{\varepsilon}_3}{2} |r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Maintenant, nous traitons le terme trilinéaire b_3. Nous intercalons $\pm\tau\left((\mathbf{u}_h^n \nabla).R_h T^n, r_h^n\right)$ et $\pm\frac{\tau}{2}\left(\text{div }(\mathbf{u}_h^n)\ R_h T^n, r_h^n\right)$ dans b_3. Nous obtenons alors en appliquant la Proposition 1.4.6

$$\begin{aligned} b_3 &= \tau\left((\mathbf{u}_h^n \nabla).R_h T^n, r_h^n\right) + \frac{\tau}{2}\left(\text{div }(\mathbf{u}_h^n) R_h T^n), r_h^n\right) \\ &\quad - \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{u}(t)\nabla).T(t) dt, r_h^n \right). \end{aligned}$$

Par suite, nous ajoutons et nous retranchons

$$\tau\left(P_h \mathbf{u}^n \nabla R_h T^n, r_h^n\right) \text{ et } \frac{\tau}{2}\left(\text{div }(P_h \mathbf{u}^n) R_h T^n, r_h^n\right),$$

où P_h désigne l'opérateur de projection défini dans la proposition 1.4.4,

$$\begin{aligned} b_3 &= \tau\left(((\mathbf{u}_h^n - P_h \mathbf{u}^n)\nabla).R_h T^n, r_h^n\right) + \tau\left((P_h \mathbf{u}^n \nabla).R_h T^n, r_h^n\right) \\ &\quad + \frac{\tau}{2}\left(\text{div }(\mathbf{u}_h^n - P_h \mathbf{u}^n) R_h T^n, r_h^n\right) + \frac{\tau}{2}\left(\text{div }(P_h \mathbf{u}^n) R_h T^n, r_h^n\right) \\ &\quad - \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{u}(t)\nabla).T(t) dt, r_h^n \right). \end{aligned}$$

Enfin, nous intercalons les termes
$\pm\int_{t_{n-1}}^{t_n}((P_h\mathbf{u}^n(t)\nabla).T(t),r_h^n)\,dt$, $\pm\frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\text{div } P_h\mathbf{u}^n(t)T(t),r_h^n)\,dt$ dans l'équation précédente. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
b_3 &= \tau\left(((\mathbf{u}_h^n-P_h\mathbf{u}^n)\nabla).R_hT^n,r_h^n\right)+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left((P_h\mathbf{u}^n\nabla).(R_hT^n-T(t)),r_h^n\right)dt\\
&+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(((P_h\mathbf{u}^n-\mathbf{u}(t))\nabla).T(t),r_h^n\right)dt+\frac{\tau}{2}\left(\text{div }(\mathbf{u}_h^n-P_h\mathbf{u}^n)R_hT^n,r_h^n\right)\\
&+\frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\text{div }(P_h\mathbf{u}^n)(R_hT^n-T(t)),r_h^n)\,dt\\
&+\frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\text{div }(P_h\mathbf{u}^n-\mathbf{u}(t))T(t),r_h^n)\,dt.
\end{aligned}$$

(1.37)

Notons par $b_{3,1}$,...,$b_{3,6}$ les termes du second membre de (1.37).

Nous commençons par majorer $b_{3,1}$. A l'aide de l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$b_{3,1}\leq\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\mathbf{u}_h^n-P_h\mathbf{u}^n\|_{L^4(\Omega)^d}\,|R_hT^n|_{H^1(\Omega)}\,\|r_h^n\|_{L^4(\Omega)}\,dt.$$

La Remarque 1.4.5 et le Lemme 1.2.2 (pour $p=4$), donnent

$$|b_{3,1}|\leq c_R^{'}(S_4^0)^2\int_{t_{n-1}}^{t_n}|\mathbf{u}_h^n-P_h\mathbf{u}^n|_{H^1(\Omega)^d}\,\|T\|_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)}\,|r_h^n|_{H^1(\Omega)}dt.$$

En prenant $\xi=\tilde{\varepsilon}_4$, l'inégalité (1.6) implique

$$\begin{aligned}
|b_{3,1}| &\leq \frac{1}{2\tilde{\varepsilon}_4}\tau(c_R^{'})^2(S_4^0)^4\,\|T\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)}\,|\mathbf{u}_h^n-P_h\mathbf{u}^n|^2_{H^1(\Omega)^d}\\
&+\frac{\tilde{\varepsilon}_4\tau}{2}|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'autre part, nous intercalons $\pm\int_{t_{n-1}}^{t_n}((P_hu^n\nabla\ R_hT(t),r_h^n)\,dt$ dans $b_{3,2}$, pour obtenir

$$\begin{aligned}
|b_{3,2}| &= \left|\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(((P_h\mathbf{u}^n\nabla).(R_hT^n-R_hT(t)),r_h^n)+((P_h\mathbf{u}^n\nabla).(R_hT(t)-T(t)),r_h^n)\right)dt\right|\\
&\leq \left|\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_t^{t_n}\left((P_h\mathbf{u}^n\nabla).R_hT^{'}(s),r_h^n\right)dsdt\right|+\left|\int_{t_{n-1}}^{t_n}((P_h\mathbf{u}^n\nabla).(R_hT-T)(t),r_h^n)\,dt\right|.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder et le théorème de Fubini nous permettent d'écrire,

$$\begin{aligned}|b_{3,2}| &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{t_{n-1}}^{s} \| P_h\mathbf{u}^n\|_{L^4(\Omega)^d}\, |R_hT^{'}(s)|_{H^1(\Omega)}\, \| r_h^n\|_{L^4(\Omega)}\, dtds \\ &\quad + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| P_h\mathbf{u}^n\|_{L^4(\Omega)^d}\, |(R_hT-T)(t)|_{H^1(\Omega)}\, \| r_h^n\|_{L^4(\Omega)}\, dt.\end{aligned}$$

En utilisant les injections de Sobolev et l'inégalité (1.28), $|b_{3,2}|$ sera majoré par

$$\begin{aligned}|b_{3,2}| &\leq (S_4^0)^2|P_h\mathbf{u}^n|_{H^1(\Omega)^d}|r_h^n|_{H^1(\Omega)}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}|R_hT^{'}(s)|_{H^1(\Omega)}(s-t_{n-1})ds\right. \\ &\quad \left. + hc_R^{'}\int_{t_{n-1}}^{t_n}|T(t)|_{H^2(\Omega)}dt\right).\end{aligned}$$

A partir des propriétés de P_h et R_h (Proposition 1.4.4) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned}|b_{3,2}| &\leq \frac{1}{2}(c_P^{'})^2(S_4^0)^4\, \|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d)}\left(\frac{(c_R^{'})^2\tau^2}{3\tilde{\varepsilon}_5}||T^{'}||^2_{L^2(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega))}\right. \\ &\quad \left. + \frac{c_R^2h^2}{2\tilde{\varepsilon}_6}||T||^2_{L^2(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega))}\right) + \frac{\tau\tilde{\varepsilon}_5}{2}|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\tau\tilde{\varepsilon}_6}{2}|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Nous passons à la majoration du terme $b_{3,3}$.
Alors, en intercalant $\pm\int_{t_{n-1}}^{t_n}((P_h\mathbf{u}(t).\nabla)T(t), r_h^n)\,dt$, nous obtenons

$$|b_{3,3}| = \left|\int_{t_{n-1}}^{t_n}(((P_h\mathbf{u}^n - P_h\mathbf{u}(t)).\nabla)\,T(t) + ((P_h\mathbf{u}-\mathbf{u})(t)\nabla)\,.T(t), r_h^n)\,dt\right|.$$

Nous remarquons que $P_h\mathbf{u}^n - P_h\mathbf{u}(t) = \int_t^{t_n} P_h\mathbf{u}^{'}(s)ds$. Il vient alors des inégalités de Hölder et de Sobolev,

$$\begin{aligned}|b_{3,3}| &\leq (S_4^0)^2\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_t^{t_n}|P_h\mathbf{u}^{'}(s)|_{H^1(\Omega)^d}|T(t)|_{H^1(\Omega)}|r_h^n|_{H^1(\Omega)}dsdt \\ &\quad + (S_4^0)^2\int_{t_{n-1}}^{t_n}|(P_h\mathbf{u}-\mathbf{u})(t)|_{H^1(\Omega)^d}|T(t)|_{H^1(\Omega)}|r_h^n|_{H^1(\Omega)}dt.\end{aligned}$$

Par suite, nous appliquons le théorème de Fubini et nous utilisons les propriétés de l'opérateur P_h, pour avoir

$$\begin{aligned}|b_{3,3}| &\leq (S_4^0)^2c_P^{'}\, \|T\|_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)}\int_{t_{n-1}}^{t_n}|\mathbf{u}^{'}(s)|_{H^1(\Omega)^d}|r_h^n|_{H^1(\Omega)}(t_n-s)ds \\ &\quad + (S_4^0)^2c_Ph\, \|T\|_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)}\int_{t_{n-1}}^{t_n}|\mathbf{u}(t)|_{H^2(\Omega)^d}|r_h^n|_{H^1(\Omega)}dt.\end{aligned}$$

Or, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} |\mathbf{u}^{'}(s)|_{H^1(\Omega)^d} |r_h^n|_{H^1(\Omega)} (t_n - s) ds,$$

nous obtenons à l'aide de (1.6),

$$\begin{aligned} |b_{3,3}| \;\leq\; & \frac{1}{6\tilde{\varepsilon}_7}(S_4^0)^4 (c_P^{'})^2 \tau^2 \,\|T\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)} \|\mathbf{u}^{'}\|^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\tilde{\varepsilon}_7}{2} |r_h^n|^2_{H^1(\Omega)} \\ & + \frac{1}{2\tilde{\varepsilon}_8}(S_4^0)^4 c_P^2 h^2 \,\|T\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)} \|\mathbf{u}\|^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\tilde{\varepsilon}_8}{2} |r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Les termes correspondants à la divergence seront traités de la même façon que $b_{3,1}$, $b_{3,2}$ et $b_{3,3}$. Alors nous obtenons, en suivant les mêmes étapes de calcul, la majoration suivante :

$$\begin{aligned} |b_{3,4}| &= \left| \frac{\tau}{2} \left(\text{div } (\mathbf{u}_h^n - P_h\mathbf{u}^n) R_h T^n, r_h^n\right) \right| \\ &\leq \frac{\tau\sqrt{2}}{2} |\mathbf{u}_h^n - P_h\mathbf{u}^n|_{H^1(\Omega)^d} \,\|R_h T^n\|_{L^4(\Omega)} \|r_h^n\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq \frac{(S_4^0)^2 \tau\sqrt{2}}{2} |\mathbf{u}_h^n - P_h\mathbf{u}^n|_{H^1(\Omega)^d} |R_h T^n|_{H^1(\Omega)} |r_h^n|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Nous déduisons de l'inégalité (1.6), pour $\xi = \tilde{\varepsilon}_9$, ce qui suit

$$|b_{3,4}| \leq \frac{1}{4\varepsilon_9} \tau (S_4^0)^4 (c_R^{'})^2 \,\|T\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)} \,|\mathbf{u}_h^n - P_h\mathbf{u}^n|^2_{H^1(\Omega)^d} + \frac{1}{2}\varepsilon_9 \tau |r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Le terme $b_{3,5}$ est analogue à $b_{3,2}$, alors nous avons

$$\begin{aligned} |b_{3,5}| &= \left| \frac{1}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\text{div } P_h\mathbf{u}^n (R_h T^n - T), r_h^n) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\text{div } P_h\, \mathbf{u}^n (R_h T^n - R_h T)(t), r_h^n)\, dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\text{div } P_h\mathbf{u}^n (R_h T - T)(t), r_h^n)\, dt \right| \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} (S_4^0)^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_t^{t_n} |P_h\mathbf{u}^n|_{H^1(\Omega)^d} |R_h T^{'}(s)|_{H^1(\Omega)} |r_h^n|_{H^1(\Omega)} ds dt \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2} (S_4^0)^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} |P_h\mathbf{u}^n|_{H^1(\Omega)^d} |(R_h T - T)(t)|_{H^1(\Omega)} |r_h^n|_{H^1(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

Le théorème de Fubini nous donne, en appliquant la Proposition 1.4.4 et la Remarque 1.4.5, le résultat suivant :

$$\begin{aligned} |b_{3,5}| \;\leq\; & \frac{\sqrt{2}}{2} (S_4^0)^2 c_P^{'} c_R^{'} \,\|\mathbf{u}\|_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |T^{'}(s)|_{H^1(\Omega)} |r_h^n|_{H^1(\Omega)} (s - t_{n-1}) ds \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} (S_4^0)^2 c_P^{'} c_R h \,\|\mathbf{u}\|_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |T(t)|_{H^2(\Omega)} |r_h^n|_{H^1(\Omega)} dt \end{aligned}$$

D'où, l'inégalité (1.6) implique,

$$\begin{aligned}|b_{3,5}| \;\leq\; & \frac{1}{12\tilde{\varepsilon}_{10}}(S_4^0)^4(c_P^{'})^2(c_R^{'})^2\tau^2 \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \parallel T^{'} \parallel^2_{L^2(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega))} + \frac{\tau\tilde{\varepsilon}_{10}}{2}|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)} \\ & + \frac{1}{4\tilde{\varepsilon}_{11}}(S_4^0)^4(c_P^{'})^2c_R^2h^2 \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^2\right)} \parallel T \parallel^2_{L^2(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega))} + \frac{\tau\tilde{\varepsilon}_{11}}{2}|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Finalement, nous traitons $b_{3,6}$ similairement à $b_{3,3}$ de sorte d'avoir

$$\begin{aligned}|b_{3,6}| \;\leq\; & \frac{1}{12\varepsilon_{12}}(S_4^0)^4(c_P^{'})^2\tau^2 \parallel T \parallel^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)} \parallel \mathbf{u}^{'} \parallel^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\varepsilon_{12}}{2}|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)} \\ & + \frac{1}{4\varepsilon_{13}}(S_4^0)^4c_P^2h^2 \parallel T \parallel^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)} \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\varepsilon_{13}}{2}|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'où, en utilisant les majorations obtenues, et sommant sur n de 1 jusqu'à m, pour tout $m \leq N$, nous déduisons ce qui suit

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2} \parallel r_h^m \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} \parallel r_h^n - r_h^{n-1} \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=1}^{m}\alpha\tau|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)} \\ & \leq\; \tilde{\xi}_1(h^2+\tau^2) + \tilde{\xi}_2\sum_{n=1}^{m}\tau|\mathbf{u}_h^n - P_h\mathbf{u}^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\ & \quad + \tilde{\xi}_3\sum_{n=1}^{m}\tau|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)},\end{aligned}$$

où $\tilde{\xi}_1,\ \tilde{\xi}_2$, et $\tilde{\xi}_3$ sont respectivement la somme des coefficients de

$$h^2+\tau^2,\ \sum_{n=1}^{m}\tau|\mathbf{u}_h^n - P_h\mathbf{u}^n|_{H^1(\Omega)^d},\ \sum_{n=1}^{m}\tau|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)},\ \text{et}\ \sum_{n=1}^{m}\tau \parallel r_h^n \parallel^2_{L^2(\Omega)}$$

dépendant des $\tilde{\varepsilon}_i$ pour $1 \leq i \leq 13$.
Enfin, nous choisissons convenablement les valeurs de ε_i, pour $1 \leq i \leq 13$, afin d'obtenir

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2} \parallel r_h^m \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} \parallel r_h^n - r_h^{n-1} \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\alpha\tau|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)} \\ & \leq\; C_T{}'(h^2+\tau^2) + C_T^{''}\sum_{n=1}^{m}\tau|\mathbf{u}_h^n - P_h\mathbf{u}^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.\end{aligned}$$

□

Théorème 1.4.13. *Soient $d = 2$, $(\boldsymbol{u}, p, T)$ la solution du problème continu (E), et $(\boldsymbol{u}_h^n, p_h^n, T_h^n)$ solution discrète du problème (Eds1).*
Pour $\boldsymbol{u} \in L^2\left(0,\hat{T};H^2(\Omega)^d\right) \cap L^\infty\left(0,\hat{T};W^{1,4}(\Omega)^d\right)$, $\boldsymbol{u}' \in L^2\left(0,\hat{T};H^2(\Omega)^d\right)$,

$T' \in L^2\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)$ et $p \in L^2\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)$ il existe des constantes positives $C'_{\boldsymbol{u}}$, $C''_{\boldsymbol{u}}$ et $C'''_{\boldsymbol{u}}$, telles que pour tous $\delta_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $m \leq N$ et τ suffisamment petit,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\|\,\mathbf{u}_h^m - P_h\mathbf{u}^m\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\hat{\nu}_1}{2}\sum_{n=1}^{m}\tau|\mathbf{u}_h^n - P_h\mathbf{u}^n|^2_{H^1(\Omega)^d}\\
+&\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\|\,\mathbf{u}_h^n - P_h\mathbf{u}^n - (\mathbf{u}_h^{n-1} - P_h\mathbf{u}^{n-1})\,\|^2_{L^2(\Omega)^d}\\
&\leq\ C_{\hat{T}}\left(C'_{\boldsymbol{u}}(h^2+\tau^2) + \sum_{n=1}^{m}\frac{\tau\delta_1}{2}|T_h^n - T^n|^2_{H^1(\Omega)}\right.\\
&\qquad\left. + \sum_{n=1}^{m}(C''_{\boldsymbol{u}}\frac{\tau}{\delta_1} + C'''_{\mathbf{u}}\tau)\,\|\,T_h^{n-1} - T^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

avec $C_{\hat{T}}$ est une constante positive qui dépend de $\hat{T}$.

Preuve. La première équation du problème continue (E) fournit, pour tout $\mathbf{v} \in V_{nh}$, la relation suivante

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial t},\mathbf{v}\right) + (\nu(T(t))\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\mathbf{v})\\
&\quad + c_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\right) - (p(t),\text{div }(\mathbf{v})) = (\mathbf{f}(t,T(t)),\mathbf{v})\,.
\end{aligned}$$

Intégrons entre t_{n-1} et t_n, l'équation précédente pour $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h^n = \mathbf{u}_h^n - P_h\mathbf{u}^n$ avec $P_h\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_h^0$, pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1},\mathbf{v}_h^n\right) + \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu(T(t))\nabla\mathbf{u}(t)dt,\nabla\mathbf{v}_h^n\right) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v}_h^n\right)dt\\
&\quad - \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} p(t)dt,\text{div }(\mathbf{v}_h^n)\right) = \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{f}_0(t)dt,\mathbf{v}_h^n\right) + \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{f}_1(T(t))dt,\mathbf{v}_h^n\right).
\end{aligned} \tag{1.38}$$

D'autre part, en multipliant par τ la première équation du problème discret (Eds1), nous avons

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1},\mathbf{v}_h^n\right) + \left(\tau\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n,\nabla\mathbf{v}_h^n\right) + \frac{1}{2}\left(\tau\text{div }(\mathbf{u}_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n,\mathbf{v}_h^n\right)\\
&\quad + \left(\tau(\mathbf{u}_h^{n-1}\nabla).\mathbf{u}_h^n,\mathbf{v}_h^n\right) - (\tau p_h^n,\text{div }(\mathbf{v}_h^n)) = (\tau\mathbf{f}_0^n,\mathbf{v}_h^n) + \left(\tau\mathbf{f}_1^n(T_h^{n-1}),\mathbf{v}_h^n\right).
\end{aligned} \tag{1.39}$$

(1.38) et (1.39) impliquent,

$$
\begin{aligned}
&\left((\mathbf{u}_h^n-\mathbf{u}_h^{n-1})-(\mathbf{u}^n-\mathbf{u}^{n-1}),\mathbf{v}_h^n\right)+\left(\tau\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu(T)\nabla\mathbf{u}dt,\nabla\mathbf{v}_h^n\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(\tau\text{div }(\mathbf{u}_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n,\mathbf{v}_h^n\right)+\left(\tau(\mathbf{u}_h^{n-1}\nabla).\mathbf{u}_h^n-\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\mathbf{u}\nabla).\mathbf{u}dt,\mathbf{v}_h^n\right)\\
&+\left(\tau p_h^n-\int_{t_{n-1}}^{t_n}p(t)dt,\text{div }(\mathbf{v}_h^n)\right)=\left(\tau\mathbf{f}_1(T_h^{n-1})-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{f}_1(T(t))dt,\mathbf{v}_h^n\right).
\end{aligned}
\tag{1.40}
$$

Notons,

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \left((\mathbf{u}_h^n-\mathbf{u}_h^{n-1})-(\mathbf{u}^n-\mathbf{u}^{n-1}),\mathbf{v}_h^n\right),\\
a_2 &= \left(\tau\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu(T(t))\nabla\mathbf{u}(t)dt,\nabla\mathbf{v}_h^n\right),\\
a_3 &= \left(\tau p_h^n-\int_{t_{n-1}}^{t_n}p(t),\text{div }v_h^n\right),\\
a_4 &= \left(\tau(\mathbf{u}_h^{n-1}\nabla).\mathbf{u}_h^n-\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\mathbf{u}(t)\nabla).\mathbf{u}(t)dt,\mathbf{v}_h^n\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\tau\text{div }(\mathbf{u}_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n,\mathbf{v}_h^n\right),\\
a_5 &= \left(\tau\mathbf{f}_1(T_h^{n-1})-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{f}_1(T(t))dt,\mathbf{v}_h^n\right).
\end{aligned}
$$

Nous commençons par la majoration du terme a_1. En intercalant $\pm\left(P_h\mathbf{u}^n,\mathbf{v}_h^n\right)$ et $\pm\left(P_h\mathbf{u}^{n-1},\mathbf{v}_h^n\right)$, nous obtenons d'après la relation (1.5) :

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \left((\mathbf{u}_h^n-P_h\mathbf{u}^n)-\left(\mathbf{u}_h^{n-1}-P_h\mathbf{u}^{n-1}\right),\mathbf{v}_h^n\right)\\
&\quad+\left((P_h\mathbf{u}^n-\mathbf{u}^n)-\left(P_h\mathbf{u}^{n-1}-\mathbf{u}^{n-1}\right),\mathbf{v}_h^n\right)\\
&= \frac{1}{2}\parallel\mathbf{v}_h^n\parallel^2_{L^2(\Omega)^d}-\frac{1}{2}\parallel\mathbf{v}_h^{n-1}\parallel^2_{L^2(\Omega)^d}+\frac{1}{2}\parallel\mathbf{v}_h^n-\mathbf{v}_h^{n-1}\parallel^2_{L^2(\Omega)^d}+a_{1,1},
\end{aligned}
$$

où $a_{1,1}$ s'écrit, en utilisant les inégalités de Hölder, de Sobolev et (1.6), de la manière suivante

$$
\begin{aligned}
|a_{1,1}| &= \left|\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(P_h\mathbf{u}'-\mathbf{u}'\right)(t)dt,\mathbf{v}_h^n\right)\right|\\
&\leq S_2^0\int_{t_{n-1}}^{t_n}\parallel\left(P_h\mathbf{u}'-\mathbf{u}'\right)(t)\parallel_{L^2(\Omega)^d}|\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d}dt\\
&\leq \frac{(S_2^0)^2}{2\varepsilon_1}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\parallel\left(P_h\mathbf{u}'-\mathbf{u}'\right)(t)\parallel^2_{L^2(\Omega)^d}ds+\frac{\tau\varepsilon_1}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.
\end{aligned}
$$

Nous déduisons de la Proposition 1.4.4 ce qui suit :

$$
|a_{1,1}|\leq\frac{1}{2\varepsilon_1}(S_2^0)^2c_P^2h^2\parallel\mathbf{u}'\parallel^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega)^d\right)}+\frac{\tau\varepsilon_1}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.
$$

Passons au deuxième terme,

$$a_2 = \left(\tau\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu(T(t))\nabla\mathbf{u}(t)dt, \nabla\mathbf{v}_h^n\right).$$

Nous ajoutons et nous retranchons

$$\left(\tau\nu(T_h^{n-1})\nabla P_h\mathbf{u}^n, \nabla\mathbf{v}_h^n\right), \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu(T_h^{n-1})\nabla P_h\mathbf{u}(t), \nabla\mathbf{v}_h^n\right) \text{ et } \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu(T(t))\nabla P_h\mathbf{u}(t)dt, \nabla\mathbf{v}_h^n\right),$$

alors,

$$\begin{aligned}
a_2 &= \left(\tau\nu(T_h^{n-1})\nabla(\mathbf{u}_h^n - P_h\mathbf{u}^n), \nabla\mathbf{v}_h^n\right) \\
&\quad + \left(\tau\nu(T_h^{n-1})\nabla P_h\mathbf{u}^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu(T_h^{n-1})\nabla P_h\mathbf{u}(t)dt, \nabla\mathbf{v}_h^n\right) \\
&\quad + \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu(T_h^{n-1})\nabla P_h\mathbf{u}(t)dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu(T(t))\nabla P_h\mathbf{u}(t)dt, \nabla\mathbf{v}_h^n\right) \\
&\quad + \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu(T(t))\nabla P_h\mathbf{u}(t)dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu(T(t))\nabla\mathbf{u}(t)dt, \nabla\mathbf{v}_h^n\right) \\
&= a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} + a_{2,4}.
\end{aligned}$$

Comme la viscosité ν est bornée, alors

$$|a_{2,1}| = \left(\tau\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{v}_h^n, \nabla\mathbf{v}_h^n\right) \geq \tau\hat{\nu}_1|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.$$

Pour le temre $a_{2,2}$,

$$\begin{aligned}
|a_{2,2}| &= \left|\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu(T_h^{n-1})\nabla P_h\mathbf{u}^n dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu(T_h^n)\nabla P_h\mathbf{u}(t)dt, \mathbf{v}_h^n\right)\right| \\
&= \left|\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu(T_h^{n-1})\int_t^{t_n}\nabla P_h\mathbf{u}'(s)ds\ dt, \nabla\mathbf{v}_h^n\right)\right|,
\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini, nous obtenons à l'aide des inégalités de Hölder et (1.8), la majoration suivante :

$$|a_{2,2}| \leq \hat{\nu}_2\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left|P_h\mathbf{u}'(s)\right|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)}(s - t_{n-1})ds.$$

Enfin, l'inégalité de Cauchy Schwarz et (1.6) pour $\xi = \varepsilon_2$, nous permettent d'obtenir

$$|a_{2,2}| \leq \frac{1}{6\varepsilon_2}(\hat{\nu_2})^2(c_P')^2\tau^2\ \|\mathbf{u}'\|^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\varepsilon_2}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.$$

Nous traitons maintenant le terme $a_{2,3}$, nous intercalons

$$\pm\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu(T^{n-1})\nabla P_h\mathbf{u}(t)dt, \nabla\mathbf{v}_h^n\right),$$

ensuite nous ajoutons et nous retranchons le terme

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nu(T(t))\nabla P_h\mathbf{u}(t), \nabla\mathbf{v}_h^n)\, dt,$$

et nous obtenons,

$$\begin{aligned}
|a_{2,3}| \;\leq\; & \left|\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nu(T_h^{n-1}) - \nu(T^{n-1})\nabla P_h\mathbf{u}(t)dt, \nabla\mathbf{v}_h^n\right)\right| \\
& + \left|\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nu(T^{n-1}) - \nu(T(t)))\nabla P_h\mathbf{u}(t)dt, \nabla\mathbf{v}_h^n\right)\right| \\
\leq\; & \left|\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nu(T_h^{n-1}) - \nu(T^{n-1}))\nabla(P_h\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t))dt, \nabla\mathbf{v}_h^n\right)\right| \\
& + \left|\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nu(T_h^{n-1}) - \nu(T^{n-1}))\nabla\mathbf{u}(t)dt, \nabla\mathbf{v}_h^n\right)\right| \\
& + \left|\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nu(T^{n-1}) - \nu(T(t)))\nabla(P_h\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t))dt, \nabla\mathbf{v}_h^n\right)\right| \\
& + \left|\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nu(T^{n-1}) - \nu(T(t)))\nabla\mathbf{u}(t)dt, \nabla\mathbf{v}_h^n\right)\right|.
\end{aligned}$$

Comme ν est majorée par $\hat{\nu}_2$ et ν^*-lipschitzienne dans $\mathbb{R}$, nous obtenons, en appliquant (1.6), le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
|a_{2,3}| \;\leq\; & \frac{1}{\varepsilon_3} 8\hat{\nu}_2^2 c_P^2 h^2 \,\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^2\left(0,\hat{T};H^2(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\varepsilon_3}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\
& + \frac{1}{2\varepsilon_4}(\nu^*)^2\tau \,\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};W^{1,4}(\Omega)^d\right)} \|\,T_h^{n-1} - T^{n-1}\,\|^2_{L^4(\Omega)} + \frac{\tau\varepsilon_4}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\
& + \nu^* \int_\Omega \int_{t_{n-1}}^{t_n} |T(x,t_{n-1}) - T(x,t)||\nabla\mathbf{u}(x,t)||\nabla\mathbf{v}_h^n(x)|dt\; dx.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
& \nu^* \int_\Omega \int_{t_{n-1}}^{t_n} |T(x,t_{n-1}) - T(x,t)||\nabla\mathbf{u}(x,t)||\nabla\mathbf{v}_h^n(x)|dt\; dx \\
& \leq\; \nu^* \int_\Omega \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{t_{n-1}}^{t} \left|T'(x,s)\right| |\nabla\mathbf{u}(x,t)||\nabla\mathbf{v}_h^n(x)|ds\; dt\; dx \\
& \leq\; \nu^* \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_s^{t_n} \|\,T'(s)\,\|_{L^4(\Omega)} \|\,\mathbf{u}(t)\,\|_{W^{1,4}(\Omega)^d}\, |\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d} dt\; ds \\
& \leq\; \nu^* S_4^0 \,\|\,\mathbf{u}\,\|_{L^\infty\left(0,\hat{T};W^{1,4}(\Omega)^d\right)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |T'(s)|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d} (t_n - s)ds.
\end{aligned}$$

Nous déduisons d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (1.6) pour $\xi = \varepsilon_5$

$$\begin{aligned}
&\nu^* \int_\Omega \int_{t_{n-1}}^{t_n} |T^{n-1}(x) - T(x,t)||\nabla \mathbf{u}(x,t)||\nabla \mathbf{v}_h^n(x)| dt\, dx \\
&\leq \nu^* S_4^0 \tau \tau^{\frac{1}{2}} \| \mathbf{u} \|_{L^\infty\left(0,\hat{T};W^{1,4}(\Omega)^d\right)} \| T' \|_{L^2(t_{n-1},t_n H^1(\Omega))} |\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d} \\
&\leq \frac{1}{2\varepsilon_5}(\nu^*)^2 (S_4^0)^2 \tau^2 \| \mathbf{u} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};W^{1,4}(\Omega)^d\right)} \| T' \|^2_{L^2(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega))} + \frac{\tau\varepsilon_5}{2} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

Il résulte, en appliquant l'inégalité (1.2.3)

$$\begin{aligned}
|a_{2,3}| \leq\ & \frac{1}{\varepsilon_3} 8\hat{\nu}_2^2 c_P^2 h^2 \| \mathbf{u} \|^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\varepsilon_3}{2} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} + \frac{\tau\varepsilon_4}{2} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\
&+ \frac{(\nu^*)^4}{16\varepsilon_4^2} \| \mathbf{u} \|^4_{L^\infty\left(0,\hat{T};W^{1,4}(\Omega)^d\right)} \frac{\tau}{2\delta_1} \| T_h^{n-1} - T^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\tau\delta_1}{2} |T_h^{n-1} - T^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} \\
&+ \frac{\tau\varepsilon_5}{2} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} + \frac{1}{2\varepsilon_5}(\nu^*)^2 (S_4^0)^2 \tau^2 \| \mathbf{u} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};W^{1,4}(\Omega)^d\right)} \| T' \|^2_{L^2(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Finalement, pour le terme

$$a_{2,4} = \left| \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \nu(T(t)) \nabla \left(P_h \mathbf{u} - \mathbf{u} \right)(t), \nabla \mathbf{v}_h^n \right) \right|,$$

l'inégalité de Hölder, (1.27) et (1.6) pour $\xi = \varepsilon_6$ impliquent,

$$\begin{aligned}
|a_{2,4}| &\leq \hat{\nu}_2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| \nabla \left(P_h \mathbf{u} - \mathbf{u} \right)(t) \|_{L^2(\Omega)} |\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d} dt \\
&\leq \frac{(\hat{\nu}_2)^2 c_P^2 h^2}{2\varepsilon_6} \| \mathbf{u} \|^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\varepsilon_6}{2} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

Comme $r_h p(t) \in M_{nh}$ et $r_h^n \in M_{nh}$, alors

$$(r_h p(t), \text{div } (\mathbf{v}_h^n)) = 0,$$

et

$$(p_h^n, \text{div } (\mathbf{v}_h^n)) = 0.$$

Ainsi,

$$|a_3| = \left| \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} (r_h p(t) - p(t))\, dt, \text{div } (\mathbf{v}_h^n) \right) \right|.$$

Les inégalités de Cauchy-Schrwarz par rapport aux variables t et x, et (1.6) nous permettent d'écrire :

$$|a_3| \leq \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \| (r_h p - p)(t) \|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \| \text{div } (\mathbf{v}_h^n) \|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors d'après l'inégalité vérifiée par r_h , nous obtenons

$$|a_3| \leq \frac{c_r^2 h^2}{\varepsilon_7} \|p\|^2_{L^2(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega))} + \frac{\varepsilon_7 \tau}{2} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.$$

Nous étudions maintenant le terme de convection stabilisé a_4.

$$a_4 = \tau d_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h^n\right) - \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}(t)\nabla\mathbf{u}(t)dt, \mathbf{v}_h^n\right).$$

Nous ajoutons et retranchons les termes $(\tau \mathbf{u}_h^n \nabla P_h\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n)$ et $\left(\frac{1}{2}\text{div } \mathbf{u}_h^{n-1} P_h\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right)$, pour obtenir, d'après la Proposition 1.4.6

$$a_4 = \tau d_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}_h^{n-1}, P_h\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right) - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_h^n\right) dt.$$

Ensuite, nous intercalons dans l'équation précédente les deux termes suivants :

$$\pm \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_{\mathbf{u}}\left(P_h\mathbf{u}^{n-1}, P_h\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right) dt \text{ et } \pm\frac{1}{2}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \text{div } P_h\mathbf{u}^{n-1} P_h\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right).$$

D'où,

$$\begin{aligned} a_4 \;=\; & \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left((\mathbf{u}_h^{n-1} - P_h\mathbf{u}^{n-1})\nabla\right).P_h\mathbf{u}^n dt, \mathbf{v}_h^n\right) + \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(P_h\mathbf{u}^{n-1}\nabla\right).P_h\mathbf{u}^n dt, \mathbf{v}_h^n\right) \\ & + \frac{1}{2}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \text{div } (\mathbf{u}_h^{n-1} - P_h\mathbf{u}^{n-1}) P_h\mathbf{u}^n dt, \mathbf{v}_h^n\right) + \frac{1}{2}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \text{div } (P_h\mathbf{u}^{n-1}) P_h\mathbf{u}^n dt, \mathbf{v}_h^n\right) \\ & - \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{u}(t)\nabla).\mathbf{u}(t), \mathbf{v}_h^n\right). \end{aligned}$$

(1.41)

Enfin, en ajoutant et retranchant

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} c_{\mathbf{u}}\left(P_h\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_h^n\right) dt \text{ et } \frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left((\text{div } (P_h\mathbf{u}^{n-1})\mathbf{u}(t), \mathbf{v}_h^n)\right) dt,$$

dans l'équation (1.41) et comme div $\mathbf{u} = 0$, nous aboutissons à six termes notés $a_{4,i}$, avec

$i \in \{1, ..., 6\}$:

$$
\begin{aligned}
a_{4,1} &= \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left((\mathbf{u}_h^{n-1} - P_h\mathbf{u}^{n-1})\nabla \right) . P_h\mathbf{u}^n dt, \mathbf{v}_h^n \right), \\
a_{4,2} &= \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(P_h\mathbf{u}^{n-1}\nabla \right) . \left(P_h\mathbf{u}^n - \mathbf{u}(t) \right) dt, \mathbf{v}_h^n \right), \\
a_{4,3} &= \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\left(P_h\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}(t) \right) \nabla \right) . \mathbf{u}(t) dt, \mathbf{v}_h^n \right), \\
a_{4,4} &= \frac{1}{2} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \text{div } (\mathbf{u}_h^{n-1} - P_h\mathbf{u}^{n-1}) P_h\mathbf{u}^n dt, \mathbf{v}_h^n \right), \\
a_{4,5} &= \frac{1}{2} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \text{div } P_h\mathbf{u}^{n-1} \left(P_h\mathbf{u}^n - \mathbf{u}(t) \right) dt, \mathbf{v}_h^n \right), \\
a_{4,6} &= \frac{1}{2} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \text{div } (P_h\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}(t)) P_h\mathbf{u}^n dt, \mathbf{v}_h^n \right).
\end{aligned}
$$

Comme dans la preuve du Théorème 1.4.12, pour majorer le terme $|a_{4,1}|$, nous utilisons l'inégalité de Hölder de même que les injections de Sobolev définies dans le Lemme 1.2.2 ($d = 2$), pour obtenir

$$
|a_{4,1}| \leq S_4^0 \, \| P_h\mathbf{u} \|_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\mathbf{v}_h^{n-1}|_{H^1(\Omega)^d} \, \| \mathbf{v}_h^n \|_{L^4(\Omega)^d} \, dt.
$$

D'après les propriétés de P_h, nous avons

$$
|a_{4,1}| \leq S_4^0 c_P^{'} \, \| \mathbf{u} \|_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\mathbf{v}_h^{n-1}|_{H^1(\Omega)^d} \, \| \mathbf{v}_h^n \|_{L^4(\Omega)^d} \, dt.
$$

En utilisant l'inégalité (1.6) pour $\xi = \varepsilon_8$, il vient daprès le Lemme 1.2.3 et la stabilité de l'opérateur P_h en norme H^1 (Remarque 1.4.5),

$$
\begin{aligned}
|a_{4,1}| \;\leq\; & \frac{\varepsilon_8}{2} (S_4^0)^2 (c_P^{'})^2 \, \| \mathbf{u} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \, \tau |\mathbf{v}_h^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)^d} \\
& + \frac{\delta_2 \tau \sqrt{2}}{2\varepsilon_8} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} + \frac{\tau\sqrt{2}}{2\delta_2\varepsilon_8} \, \| \mathbf{v}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} \, .
\end{aligned}
$$

Pour le deuxième terme nous intercalons $\pm \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} (P_h\mathbf{u}^{n-1}\nabla).P_h\mathbf{u}(t)dt, \mathbf{v}_h^n \right)$, pour avoir

$$
\begin{aligned}
|a_{4,2}| \;\leq\; & \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_{\mathbf{u}} \left(P_h\mathbf{u}^{n-1}, P_h\mathbf{u}^n - P_h\mathbf{u}(t), \mathbf{v}_h^n \right) dt \right| \\
& + \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_{\mathbf{u}} \left(P_h\mathbf{u}^{n-1}, P_h\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_h^n \right) dt \right|.
\end{aligned}
$$

Comme $P_h\mathbf{u}^n - P_h\mathbf{u}(t) = \int_t^{t_n} P_h\mathbf{u}^{'}(s)ds$, alors nous écrivons, en utilisant les inégalités de

Hölder et de Sobolev,

$$\begin{aligned}|a_{4,2}| &\leq (S_4^0)^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{t}^{t_n} |P_h\mathbf{u}^{n-1}|_{H^1(\Omega)^d}|P_h\mathbf{u}^{'}(s)|_{H^1(\Omega)^d}|\mathbf{v}_h^n|_{H_0^1(\Omega)^d}dsdt \\ &\quad +(S_4^0)^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} |P_h\mathbf{u}^{n-1}|_{H^1(\Omega)^d}|P_h\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)^d}|\mathbf{v}_h^n|_{H_0^1(\Omega)^d}dt.\end{aligned}$$

Ce qui entraîne, d'après le théorème de Fubini et les inégalités vérifiées par P_h :

$$\begin{aligned}|a_{4,2}| &\leq (S_4^0)^2(c_P^{'})^2|\mathbf{u}^{n-1}|_{H^1(\Omega)^d}|\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d}\int_{t_{n-1}}^{t_n}|\mathbf{u}^{'}(s)|_{H_0^1(\Omega)^d}(s-t_{n-1})ds \\ &\quad +(S_4^0)^2c_pc_P^{'}\int_{t_{n-1}}^{t_n}|\mathbf{u}^{n-1}|_{H^1(\Omega)^d}\,\|\,\mathbf{u}(t)\,\|_{H^2(\Omega)^d}\,|\mathbf{v}_h^n|_{H_0^1(\Omega)^d}dt \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3}}(S_4^0)^2(c_P^{'})^2\tau\sqrt{\tau}\,\|\,\mathbf{u}\,\|_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)}\,|\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d}\,\|\,\mathbf{u}^{'}\,\|_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega)^d\right)} \\ &\quad +(S_4^0)^2c_P^{'}c_Ph\,\|\,\mathbf{u}\,\|_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\,\mathbf{u}(t)\,\|_{H^2(\Omega)^d}\,|\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d}dt \\ &\leq \frac{1}{6\varepsilon_9}(S_4^0)^4(c_P^{'})^4\tau^2\,\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)}\|\,\mathbf{u}^{'}\,\|^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega)^d\right)} \\ &\quad +\frac{1}{2\varepsilon_{10}}(S_4^0)^4(c_P^{'})^2c_P^2h^2\,\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)}\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega)^d\right)} \\ &\quad +\frac{\tau\varepsilon_9}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}+\frac{\tau\varepsilon_{10}}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.\end{aligned}$$

D'autre part, pour majorer $a_{4,3}$, nous intercalons $\pm\displaystyle\int_{t_{n-1}}^{t_n} c_{\mathbf{u}}\left(P_h\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v}_h^n\right)dt$, ce qui fournit l'inégalité :

$$\begin{aligned}|a_{4,3}| &\leq (S_4^0)^2\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{t_{n-1}}^{t}|P_h\mathbf{u}^{'}(s)|_{H^1(\Omega)^d}|\mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)^d}|\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d}dsdt \\ &\quad +(S_4^0)^2|P_h\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)^d}|\mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)^d}|\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d}dt \\ &\leq (S_4^0)^2c_P^{'}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{s}^{t_n}|\mathbf{u}^{'}(s)|_{H^1(\Omega)^d}|\mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)^d}|\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d}dtds \\ &\quad +(S_4^0)^2c_Ph\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\,\mathbf{u}(t)\,\|_{H^2(\Omega)^d}\,|\mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)^d}|\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d}dt.\end{aligned}$$

Nous déduisons, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz par rapport au temps et l'inégalité (1.6), la majoration suivante

$$\begin{aligned}|a_{4,3}| &\leq \frac{1}{6\varepsilon_{11}}(S_4^0)^4(c_P^{'})^2\tau^2|\mathbf{u}|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)}\,\|\,\mathbf{u}^{'}\,\|^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega)^d\right)}+\frac{\tau\varepsilon_{11}}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\ &\quad +\frac{1}{2\varepsilon_{12}}(S_4^0)^4c_P^2h^2\,\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega)^d\right)}\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)}+\frac{\tau\varepsilon_{12}}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.\end{aligned}$$

En remarquant que $a_{4,4}$ est l'analogue de $a_{4,1}$ en terme de divergence, nous les traitons similairement, tel que

$$\begin{aligned}
|a_{4,4}| &= \frac{1}{2}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \text{div } (\mathbf{u}_h^{n-1} - P_h\mathbf{u}^{n-1})P_h\mathbf{u}^n dt, \mathbf{v}_h^n\right) \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{2} S_4^0 c_P^{'} \parallel \mathbf{u} \parallel_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\mathbf{v}_h^{n-1}|_{H^1(\Omega)^d} \parallel \mathbf{v}_h^n \parallel_{L^4(\Omega)^d} dt \\
&\leq \frac{1}{4}(S_4^0)^2 (c_P^{'})^2 \tau\varepsilon_{13} \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} |\mathbf{v}_h^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)^d} \\
&\quad + \frac{\tau\sqrt{2}}{4\varepsilon_{13}\delta_3} \parallel \mathbf{v}_h^n \parallel^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\tau\delta_3\sqrt{2}}{4\varepsilon_{13}} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

De même pour $a_{4,5}$, qui est analogue à $a_{4,2}$, nous intercalons

$$\pm\frac{1}{2}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \text{div } P_h\mathbf{u}^{n-1} P_h\mathbf{u}(t) dt, \mathbf{v}_h^n\right),$$

pour avoir,

$$\begin{aligned}
|a_{4,5}| &\leq \frac{1}{2}\left|\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \text{div } P_h\mathbf{u}^{n-1}\left(P_h\mathbf{u}^n - P_h\mathbf{u}(t)\right) dt, \mathbf{v}_h^n\right)\right| \\
&\quad + \frac{1}{2}\left|\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \text{div } P_h\mathbf{u}^{n-1}\left(P_h\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t)\right)\right) dt, \mathbf{v}_h^n\right)\right| \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{2}(S_4^0)^2 (c_P^{'})^2 \parallel \mathbf{u} \parallel_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\mathbf{u}^{'}(s)|_{H^1(\Omega)^d} |\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d} (s - t_{n-1}) ds \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}(S_4^0)^2 c_P^{'} c_p h \parallel \mathbf{u} \parallel_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\mathbf{u}(t)|_{H^2(\Omega)^d} |\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d} dt \\
&\leq \frac{1}{12\varepsilon_{14}}(S_4^0)^4 (c_P^{'})^4 \tau^2 \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \parallel \mathbf{u}^{'} \parallel^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\varepsilon_{14}}{2} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\
&\quad + \frac{1}{4\varepsilon_{15}}(S_4^0)^4 (c_P^{'})^2 c_p^2 h^2 \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\varepsilon_{15}}{2} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

Finalement, nous ajoutons et nous retranchons $\frac{1}{2}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \text{div } P_h\mathbf{u}(t)\ \mathbf{u}(t) dt, \mathbf{v}_h^n\right)$ dans $a_{4,6}$,

de sorte d'obtenir la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
|a_{4,6}| &\leq \frac{1}{2}\left|\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \text{div } (P_h\mathbf{u}^{n-1} - P_h\mathbf{u}(t))\mathbf{u}(t)dt, \mathbf{v}_h^n\right)\right| \\
&\quad + \frac{1}{2}\left|\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \text{div } (P_h\mathbf{u}(t) - u(t))\mathbf{u}(t)dt, \mathbf{v}_h^n\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{2}(S_4^0)^2 c_P^{'} \parallel \mathbf{u} \parallel_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\mathbf{u}^{'}(s)|_{H^1(\Omega)^d} |\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d}(t_n - s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}(S_4^0)^2 c_p h \parallel \mathbf{u} \parallel_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\mathbf{u}(t)|_{H^2(\Omega)^d} |\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d} dt \\
&\leq \frac{1}{24\varepsilon_{16}}(S_4^0)^4 (c_P^{'})^2 \tau^2 \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \parallel \mathbf{u}^{'} \parallel^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\varepsilon_{16}}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\
&\quad + \frac{1}{8\varepsilon_{17}}(S_4^0)^4 c_p^2 h^2 \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\varepsilon_{17}}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

Il reste donc à majorer le terme a_5, alors nous intercalons

$$\pm \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{f}_1(T^{n-1})dt, \mathbf{v}_h^n\right),$$

pour obtenir, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
a_5 &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \parallel \mathbf{f}_1(T_h^{n-1}) - \mathbf{f}_1(T^{n-1}) \parallel_{L^2(\Omega)^d} \parallel \mathbf{v}_h^n \parallel_{L^2(\Omega)^d} dt \\
&\quad + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \parallel \mathbf{f}_1(T^{n-1}) - \mathbf{f}_1(T(t)) \parallel_{L^2(\Omega)^d} \parallel \mathbf{v}_h^n \parallel_{L^2(\Omega)^d} dt.
\end{aligned}$$

Or $\mathbf{f}_1$ est $c^*_{\mathbf{f}_1}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, ce qui fournit

$$\begin{aligned}
a_5 &\leq c^*_{\mathbf{f}_1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \parallel T_h^{n-1} - T^{n-1} \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel \mathbf{v}_h^n \parallel_{L^2(\Omega)^d} dt \\
&\quad + c^*_{\mathbf{f}_1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \parallel T^{n-1} - T(t) \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel \mathbf{v}_h^n \parallel_{L^2(\Omega)^d} dt.
\end{aligned}$$

A partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (1.6), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
a_5 &\leq \frac{(S_2^0)^2}{2\varepsilon_{18}}(c^*_{\mathbf{f}_1})^2 \tau \parallel T_h^{n-1} - T^{n-1} \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\tau\varepsilon_{18}}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\
&\quad + \frac{(c^*_{\mathbf{f}_1})^2 (S_2^0)^2}{2\varepsilon_{19}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \parallel T^{n-1} - T(t) \parallel^2_{L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} dt + \frac{\varepsilon_{19}\tau}{2} \parallel \mathbf{v}_h^n \parallel^2_{L^2(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

Or, en appliquant le théorème de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \| T^{n-1} - T(t) \|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_\Omega |T^{n-1}(x) - T(x,t)|^2 dx\ dt \\ &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_\Omega \left| \int_{t_{n-1}}^{t} T'(x,s) ds \right|^2 dx\ dt \\ &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_\Omega \int_{t_{n-1}}^{t} \left| T'(x,s) \right|^2 \tau ds\ dx\ dt.\end{aligned}$$

Le théorème de Fubini entraîne,

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \| T^{n-1} - T(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| T'(x,s) \right|^2 \tau^2 ds\ dx.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}a_5 \leq\ & \frac{(S_2^0)^2}{2\varepsilon_{18}} (c_f^*)^2 \tau \| T_h^{n-1} - T^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\tau \varepsilon_{18}}{2} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\ & + \frac{(S_2^0)^2}{2\varepsilon_{19}} (c_f^*)^2 \tau^2 \| T' \|^2_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))} + \frac{\tau \varepsilon_{19}}{2} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.\end{aligned}$$

D'après les estimations établies précédement, (1.40) s'écrit, en sommant sur n allant de 1 à m, pour tout $m < N$, comme suit

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \| \mathbf{v}_h^m \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} \| \mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \hat{\nu}_1 \sum_{n=1}^{m} \tau |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\ &\leq\ \xi_1 (h^2 + \tau^2) + \sum_{n=1}^{m} (\xi_2 \frac{\tau}{2\delta_1} + \xi_3) \| T_h^{n-1} - T^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=1}^{m} \frac{\tau \delta_1}{2} |T_h^n - T^n|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \xi_4 \sum_{n=1}^{m} \tau \| \mathbf{v}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \xi_5 \sum_{n=1}^{m} \tau \| \mathbf{v}_h^n \|^2_{H^1(\Omega)^d},\end{aligned}$$

où ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 et ξ_5 sont respectivement la somme des coefficients de

$$h^2 + \tau^2,\ \sum_{n=1}^{m} \frac{\tau}{2\delta_1} \| T_h^n - T^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)},\ \sum_{n=1}^{m} \tau \| \mathbf{v}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} \text{ et } \sum_{n=1}^{m} \tau |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.$$

Ensuite, nous choisissons ensuite des valeurs particulières de ε_i, pour $i = 1, ..., 19$, δ_2 et δ_3, de sorte d'obtenir

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \| \mathbf{v}_h^m \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} \| \mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\tau \hat{\nu}_1}{2} \sum_{n=1}^{m} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\ &\leq\ C'_{\mathbf{u}} (h^2 + \tau^2) + \sum_{n=1}^{m} (C''_{\mathbf{u}} \frac{\tau}{\delta_1} + C'''_{\mathbf{u}} \tau) \| T_h^{n-1} - T^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{m} \frac{\tau \delta_1}{2} |T_h^{n-1} - T^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} + C''''_{\mathbf{u}} \sum_{n=1}^{m} \tau \| \mathbf{v}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d}.\end{aligned} \tag{1.42}$$

Nous appliquons la Remarque 1.4.11 à l'inégalité (1.42), nous déduisons pour $2C_u^{''''}\tau < 1$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\|\,\mathbf{v}_h^m\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m-1}\|\,\mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\hat{\nu}_1}{2}\sum_{n=1}^{m}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}\\
&\quad\leq\ C'_{\mathbf{u}}(h^2+\tau^2) + \sum_{n=1}^{m}\frac{\tau\delta_1}{2}|T_h^{n-1} - T^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)}\\
&\qquad + \sum_{n=1}^{m}(C''_{\mathbf{u}}\frac{\tau}{\delta_1} + C'''_{\mathbf{u}}\tau)\,\|\,T_h^{n-1} - T^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)} + 3C''''_{\mathbf{u}}\sum_{n=2}^{m}\tau\,\|\,\mathbf{v}_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)^d}\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le théorème de Grönwall discret donne pour

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}\,\|\,\mathbf{v}_h^m\,\|^2_{L^2(\Omega)^d},\ b_n = \frac{\hat{\nu}_1}{2}\sum_{n=1}^{m}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}\\
c_n &= C'_{\mathbf{u}}(h^2+\tau^2) + \sum_{n=1}^{m}\frac{\tau\delta_1}{2}|T_h^{n-1} - T^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)}\\
&\quad + \sum_{n=1}^{m}(C''_{\mathbf{u}}\frac{\tau}{\delta_1} + C'''_{\mathbf{u}}\tau)\,\|\,T_h^{n-1} - T^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

pour obtenir, en utilisant les mêmes notations des constantes, l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\|\,\mathbf{v}_h^m\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\|\,\mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\hat{\nu}_1}{2}\sum_{n=1}^{m}\tau|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}\\
&\quad\leq\ C_{\hat{T}}\left(C'_{\mathbf{u}}(h^2+\tau^2) + \sum_{n=1}^{m}\frac{\tau\delta_1}{2}|T_h^{n-1} - T^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)}\right.\\
&\qquad\left. + \sum_{n=1}^{m}(C''_{\mathbf{u}}\frac{\tau}{\delta_1} + C'''_{\mathbf{u}}\tau)\,\|\,T_h^{n-1} - T^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

avec $C_{\hat{T}}$ est une constante que dépend du temps final $\hat{T}$.

□

En utilisant les résultats obtenus précédement, nous énonçons le théorème suivant, qui donne les estimations de l'erreur *a priori* de la vitesse et la température.

Théorème 1.4.14. *Sous les hypothèses des Théorèmes 1.4.12 et 1.4.13 et en supposant que $T \in L^\infty(0,\hat{T},H^2(\Omega))$, il existe des constantes k_0, $C_{\boldsymbol{u}}$ et C_T, telles que, pour $\tau < k_0$,*

$$\sup_{1\leq n\leq N}\|\,T_h^n - T^n\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{m}\alpha\tau|T_h^n - T^n|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_T(h^2+\tau^2) \tag{1.43}$$

et

$$\sup_{1\leq n\leq N}\|\,\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}^n\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{m}\hat{\nu}_1\tau|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \leq C_{\boldsymbol{u}}(h^2+\tau^2), \tag{1.44}$$

où $C_{\boldsymbol{u}}$ et C_T sont dépendantes de $\hat{T}$ mais indépendantes de h et τ.

Preuve. Nous avons démontré dans le Théorème 1.4.12 l'inégalité suivante,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\|\,r_h^m\,\|^2_{L^2(\Omega)} &+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\alpha\tau|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\|\,r_h^n-r_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq\ \ C_T{}'(h^2+\tau^2)+C_T''\sum_{n=1}^{m}\tau|\mathbf{u}_h^n-P_h\mathbf{u}^n|^2_{H^1(\Omega)^d}\end{aligned}$$

avec $r_h^n = T_h^n - R_hT^n$.
Nous appliquons l'estimation établi dans le Théorème 1.4.13, qui nous permet, en intercalant R_hT^{n-1}, de majorer le terme $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\tau|\mathbf{u}_h^n-P_h\mathbf{u}^n|^2_{H^1(\Omega)^d}$ par

$$\frac{2C_{\hat{T}}}{\hat{\nu}_1}\left(C'_{\mathbf{u}}(h^2+\tau^2)+\sum_{n=1}^{m}\frac{\tau\delta_1}{2}|T_h^{n-1}-T^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)}+\sum_{n=1}^{m}(C''_{\mathbf{u}}\frac{\tau}{\delta_1}+C'''_{\mathbf{u}}\tau)\,\|\,T_h^{n-1}-T^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

pour obtenir, en utilisant les mêmes notations des constantes

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\|\,r_h^m\,\|^2_{L^2(\Omega)} &+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\alpha\tau|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\|\,r_h^n-r_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq C'_T(h^2+\tau^2)+C''_T\sum_{n=1}^{m}\frac{\tau\delta_1}{2}|T_h^{n-1}-R_hT^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)}\\ &\quad+C'''_T\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{C''_{\mathbf{u}}\tau}{2\delta_1}+C'''_{\mathbf{u}}\tau\right)\|\,T_h^{n-1}-R_hT^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}\tag{1.45}$$

où C'_T, C''_T et C'''_T sont des constantes indépendantes de h et τ.
En insérant $\pm R_hT^{n-1}$ dans le deuxième et le troisième termes de (1.45), pour obtenir en utilisant les propriétés de l'opérateur R_h, l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\|\,r_h^m\,\|^2_{L^2(\Omega)} &+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\alpha\tau|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\|\,r_h^n-r_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq C'_T(h^2+\tau^2)+C'''_T\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{C''_{\mathbf{u}}\tau}{2\delta_1}+C'''_{\mathbf{u}}\tau\right)\|\,r_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)}+C''_T\sum_{n=1}^{m}\tau\delta_1|r_h^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Pour $\delta_1 = \dfrac{\alpha}{4C''_T}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\|\,r_h^m\,\|^2_{L^2(\Omega)} &+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{m}\alpha\tau|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\|\,r_h^n-r_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq C'_T(h^2+\tau^2)+C''_T\sum_{n=1}^{m}\tau\,\|\,r_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

La Remarque 1.4.11 nous permet d'écrire, pour τ assez petit,

$$\frac{1}{2}\,\|\,r_h^m\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{m}\alpha\tau|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\|\,r_h^n - r_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq \quad C_T'(h^2+\tau^2) + C_T''\sum_{n=2}^{m}\tau\,\|\,r_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Nous déduisons d'après le lemme de Grönwall discret,

$$\frac{1}{2}\,\|\,r_h^m\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\|\,r_h^n - r_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{m}\alpha\tau|r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_T(h^2+\tau^2),$$

avec C_T est une constante qui dépend du temps final $\hat{T}$. D'où

$$\sup_{1\leq n\leq N}\|\,T_h^n - R_hT^n\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{m}\alpha\tau|T_h^n - R_hT^n|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_T(h^2+\tau^2).$$

Pour démontrer (1.43), il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire suivante

$$|T_h^n - T^n|_{H^1(\Omega)} \leq |T_h^n - R_hT^n|_{H^1(\Omega)} + |R_hT^n - T^n|_{H^1(\Omega)}.$$

La relation (1.44) est obtenue en utilisant le résultat du Théorème 1.4.13 et la relation (1.43).

1.5 Problème discret non stabilisé

Dans cette section nous introduisons un nouveau schéma discret non stabilisé qui correspond à la formulation variationnelle discrète déjà étudiée dans la précédante section mais en l'abscence du terme $\frac{1}{2}\left(\text{div }\mathbf{u}_h^{n-1}\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h^n\right)$. L'implémentation de ce nouveau schéma permet d'économiser en terme de temps de calcul.
Nous montrons l'existence et l'unicité de la solution, et établissons l'estimation *a priori* de l'erreur de discrétisation en temps et en espace.
Nous utilisons les mêmes espaces de discrétisation de la section précédente.
La formulation variationelle discrète non stabilisée, pour tout $n \in \{1, ..., N\}$, est donnée par :
(1.46)

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{nh}\times M_{nh},\ T_h^n \in Y_{nh} \text{ tels que :} & & \\ \left(\dfrac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\tau_n}, \mathbf{v}_h\right) + (\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n, \nabla\mathbf{v}_h) & & \\ \qquad + c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - (p_h^n, \text{div }\mathbf{v}_h) &=& \left(\mathbf{f}^n(T_h^{n-1}), \mathbf{v}_h\right), \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_{nh} \\ \left(\dfrac{T_h^n - T_h^{n-1}}{\tau_n}, r_h\right) + \alpha(\nabla T_h^n, \nabla r_h) + c_T(\mathbf{u}_h^n, T_h^n, r_h) &=& (g^n, r_h)\,, \quad \forall r_h \in Y_{nh} \\ (q_h, \mathbf{u}_h^n) &=& 0, \quad \forall q_h \in M_{nh} \end{cases}$$

1.5.1 Existence et unicité de la solution

Afin de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème disret non stabilisé, nous avons besoin du lemme suivant,

Lemme 1.5.1. *A chaque pas du temps, pour* $\mathbf{u}_h^{n-1} \in X_{(n-1)h}$, $\mathbf{u}_h^n \in X_{nh}$, *il existe deux contantes* $\hat{C}_{\mathbf{u}}$ *et* $\hat{C}_T$ *indépendantes de* h_n *et* τ_n, *telles que pour tous* $\mathbf{u}_h \in V_{nh}$ *et* $T_h \in Y_{nh}$,

$$\left|c_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h\right)\right| \leq \hat{C}_{\mathbf{u}} h_n^r \parallel div\ \mathbf{u}_h^{n-1} \parallel_{L^2(\Omega)} |\mathbf{u}_h|^2_{H^1(\Omega)^d}, \tag{1.47}$$

et

$$\left|c_T\left(\mathbf{u}_h^n, T_h, T_h\right)\right| \leq \hat{C}_T h_n^r \parallel div\ \mathbf{u}_h^n \parallel_{L^2(\Omega)} |T_h|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{1.48}$$

avec $r = 1 - \hat{\varepsilon}$, $\hat{\varepsilon} > 0$ *si* $d = 2$ *et* $r = \dfrac{1}{2}$ *si* $d = 3$.

Preuve. Pour démontrer (1.47) et (1.48), nous suivons la même démarche suivie dans de la preuve du Lemme 1.5 de [31]. □

Théorème 1.5.2. *A chaque pas du temps, soient* $\mathbf{u}_h^{n-1} \in X_{(n-1)h}$ *et* $T_h^{n-1} \in Y_{(n-1)h}$. *On suppose qu'on a*

$$h_n^r < \frac{\hat{\nu}_1}{4\hat{C}_{\mathbf{u}} \parallel div\ \mathbf{u}_h^{n-1} \parallel_{L^2(\Omega)}}, \tag{1.49}$$

où r, $\hat{C}_{\mathbf{u}}$ *est la constante de (1.47). Alors la première équation du problème (1.46) admet une unique solution* $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh}$.
On suppose de plus qu'on a

$$h_n^r < \frac{\alpha}{4\hat{C}_T \parallel div\ \mathbf{u}_h^n \parallel_{L^2(\Omega)}}, \tag{1.50}$$

où $\hat{C}_T$ *est la constante de (1.48). Alors la deuxième équation du problème (1.46) admet une unique solution* $T_h^n \in Y_{nh}$.

Preuve. Nous considérons la première équation du problème (1.46), pour tout $\mathbf{v}_h \in V_{nh}$

$$\left(\frac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\tau_n}, \mathbf{v}_h\right) + (\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n, \nabla\mathbf{v}_h) + c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) = \left(\mathbf{f}^n(T_h^{n-1}), \mathbf{v}_h\right).$$

Nous introduisons la forme bilinéaire $A_{\mathbf{u}}(.,.)$, telle que, pour tous $\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h \in V_{nh}$,

$$A_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h\right) = \left(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h\right) + \tau_n \left(\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{w}_h, \nabla\mathbf{v}_h\right) + \tau_n c_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h\right).$$

Montrons que A est coercive. Pour tout $\mathbf{v}_h \in V_{nh}$, nous avons

$$A_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = \| \mathbf{v}_h \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \tau_n \left(\nu(T_h^{n-1}) \nabla \mathbf{v}_h, \nabla \mathbf{v}_h \right) + \tau_n c_{\mathbf{u}} \left(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h \right).$$

D'après la Lemme 1.5.1 et l'inégalité (1.8), nous pouvons écrire pour tout $\mathbf{v}_h \in V_{nh}$

$$A_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \| \mathbf{v}_h \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \tau_{\min} \left(\hat{\nu}_1 - \hat{C}_{\mathbf{u}} h_n^r \| \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n \|_{L^2(\Omega)} \right) |\mathbf{v}_h|^2_{H^1(\Omega)^d}.$$

Nous déduisons de la condition (1.49), que la forme bilinéaire $A_{\mathbf{u}}$ est coercive. Par suite, d'après le théorème de Lax-Milgram la solution $\mathbf{u}_h^n$ existe et elle est unique.
De même, pour montrer l'existence et l'unicité de T_h^n, il suffit de démonter la coercivité de la forme bilinéaire $A_T(.,.)$, telle que pour tous ω_h, $r_h \in Y_{nh}$

$$A_T(\omega_h, r_h) = (\omega_h, r_h) + \tau_n \alpha (\nabla \omega_h, \nabla r_h) + \tau_n c_T (\mathbf{u}_h^n, \omega_h, r_h).$$

en utilisant le Lemme 1.5.1 et la condition (1.50).
L'existence et l'unicité de la pression est similaire à celle pour le shéma stabilisé.
D'où l'unicité de la solution.

□

Théorème 1.5.3. *A chaque pas du temps, sous les conditions (1.49) et (1.50), la solution* $(\mathbf{u}_h^m, T_h^m)$ *vérifie pour tout* $m = 1, ..., N$, *les inégalités suivantes :*
(1.51)

$$\frac{1}{2} \| \boldsymbol{u}_h^m \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{n=0}^{m} \frac{\hat{\nu}_1 \tau_n}{2} |\boldsymbol{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \leq \tilde{C}_d \left(\| g \|^2_{L^2\left(0,\hat{T},L^2(\Omega)\right)} + \| f_0 \|^2_{L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} + \| T_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \boldsymbol{u}_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)^d} \right),$$

$$\frac{1}{2} \| T_h^m \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=0}^{m} \frac{\alpha \tau_n}{2} |T_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \tilde{C}'_d \left(\| g \|^2_{L^2\left(0,\hat{T},L^2(\Omega)\right)} + \| T_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)} \right), \quad (1.52)$$

où $\tilde{C}_d$ *et* $\tilde{C}'_d$ *sont deux constantes positives indépendantes de* h *et de* m.

Preuve. Tout d'abord, nous remplaçons dans la deuxième équation de (1.46), r_h par T_h^n pour avoir la relation suivante :

$$\left(\frac{T_h^n - T_h^{n-1}}{\tau_n}, T_h^n \right) + \alpha (\nabla T_h^n, \nabla T_h^n) + c_T (\mathbf{u}_h^n, T_h^n, T_h^n) = (g^n, T_h^n).$$

En utilisant la relation (1.5), l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (1.8) et le Lemme 1.5.1, nous obtenons pour tout $n \in \{1, ..., m\}$,

$$\frac{1}{2} \| T_h^n \|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2} \| T_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{2} \| T_h^n - T_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \tau_n \alpha |T_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)}$$
$$\leq \tau_n \| g^n \|_{L^2(\Omega)} \| T_h^n \|_{L^2(\Omega)} + \tau_n \hat{C}_T h_n^r \| \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n \|_{L^2(\Omega)} |T_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Nous appliquons le Lemme 1.2.2 pour $p = 2$ et l'inégalité (1.6), ce qui implique

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\|\,T_h^n\,\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\,\|\,T_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\,\|\,T_h^n - T_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \tau_n\alpha|T_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\quad\le \tau_n S_2^0\,\|\,g^n\,\|_{L^2(\Omega)}\,|T_h^n|_{H_0^1(\Omega)} + \tau_n\hat{C}_T h_n^r\,\|\,\mathrm{div}\;\mathbf{u}_h^n\,\|_{L^2(\Omega)}\,|T_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\quad\le \tau_n\frac{(S_2^0)^2}{2\varepsilon}\,\|\,g_h^n\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \tau_n\frac{\varepsilon}{2}|T_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} + \tau_n\hat{C}_T h_n^r\,\|\,\mathrm{div}\;\mathbf{u}_h^n\,\|_{L^2(\Omega)}\,|T_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2}$, il vient d'après la condition (1.50)

$$\|\,T_h^n\,\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\,T_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\,T_h^n - T_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \tau_n\alpha|T_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \tau_n C_d\,\|\,g^n\,\|^2_{L^2(\Omega)}\,. \tag{1.53}$$

En sommant sur n de 1 jusqu'à m, nous obtenons la majoration (1.52).
D'autre part, nous considérons la première équation du problème (1.46) et nous choisissons $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h^n$ pour avoir

$$\left(\frac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\tau_n}, \mathbf{u}_h^n\right) + (\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n, \nabla\mathbf{u}_h^n) + c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^n) = \left(\mathbf{f}^n(T_h^{n-1}), \mathbf{u}_h^n\right).$$

D'après la relation (1.5), l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (1.8) et la Proposition 1.5.1, nous déduisons, pour tout $n \in \{1, ..., m\}$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\|\,\mathbf{u}_h^n\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \frac{1}{2}\,\|\,\mathbf{u}_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{2}\,\|\,\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \tau_n\hat{\nu}_1|\mathbf{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\
&\quad\le \tau_n\,\|\,\mathbf{f}_1(T_h^{n-1})\,\|_{L^2(\Omega)^d}\|\,\mathbf{u}_h^n\,\|_{L^2(\Omega)^d} + \tau_n\hat{C}_{\mathbf{u}}h_n^r\,\|\,\mathrm{div}\;\mathbf{u}_h^{n-1}\,\|_{L^2(\Omega)}\,|\mathbf{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\
&\qquad + \tau_n\,\|\,\mathbf{f}_0^n\,\|_{L^2(\Omega)^d}\|\,\mathbf{u}_h^n\,\|_{L^2(\Omega)^d}\,.
\end{aligned}$$

Nous appliquons le Lemme 1.2.2 pour $p = 2$, les inégalités (1.7) et (1.6), ce qui implique

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\|\,\mathbf{u}_h^n\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \frac{1}{2}\,\|\,\mathbf{u}_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{2}\,\|\,\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \tau_n\hat{\nu}_1|\mathbf{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\
&\quad\le \tau_n S_2^0 c_{\mathbf{f}_1}\,\|\,T_h^{n-1}\,\|_{L^2(\Omega)}\,|\mathbf{u}_h^n|_{H_0^1(\Omega)^d} + \tau_n\hat{C}_{\mathbf{u}}h_n^r\,\|\,\mathrm{div}\;\mathbf{u}_h^{n-1}\,\|_{L^2(\Omega)}\,|\mathbf{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\
&\qquad + \tau_n S_2^0\,\|\,\mathbf{f}_0^n\,\|_{L^2(\Omega)^d}\,|\mathbf{u}_h^n|_{H_0^1(\Omega)^d} \\
&\quad\le \tau_n\frac{(S_2^0)^2 c_{\mathbf{f}_1}^2}{2\varepsilon_1}\,\|\,T_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \tau_n\frac{\varepsilon_1}{2}|\mathbf{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} + \tau_n\hat{C}_{\mathbf{u}}h_n^r\,\|\,\mathrm{div}\;\mathbf{u}_h^{n-1}\,\|_{L^2(\Omega)}\,|\mathbf{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\
&\qquad + \frac{\tau_n(S_2^0)^2}{2\varepsilon_2}\,\|\,\mathbf{f}_0^n\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\tau_n\varepsilon_2}{2}|\mathbf{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

Nous choisissons $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\hat{\nu}_1}{2}$, pour déduire de la condition (1.49) la majoration suivante

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\|\,\mathbf{u}_h^n\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \frac{1}{2}\,\|\,\mathbf{u}_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{2}\,\|\,\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{2}\tau_n\hat{\nu}_1|\mathbf{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\
&\qquad\le \tau_n C_1\,\|\,T_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)}\,.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Finalement, en insérant (1.53) dans (1.54) et sommant sur n de 1 jusqu'à $m \leq N$, nous concluons (1.51).

□

1.5.2 Estimation d'erreur *a priori*

Dans cette partie, nous nous intéressons à calculer l'estimation *a priori* de l'erreur de discrétisation en temps et en espace, pour un pas de temps fixe noté τ, en suivant le même enchaînnement de celle du schéma stabilisé.
Nous énonçons alors le théorème suivant :

Théorème 1.5.4. *Soient $(\boldsymbol{u}, T, p)$ la solution du problème continu (E), $(\boldsymbol{u}_h^n, T_h^n, p_h^n)$ la solution du problème discret (1.46). Pour $\boldsymbol{u} \in L^2\left(0,T;H^2(\Omega)^d\right) \cap L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega)^d\right)$, $T \in L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega)\right)$, $\mathbf{u}' \in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)^d\right)$ et $T' \in L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega)\right)$, on suppose que h vérifie les conditions (1.50) et (1.49). Il existe deux constantes $\tilde{C}_T'$ et $\tilde{C}_T''$ qui ne dépendent pas de h et de τ telles que, pour tout $m \leq N$*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left\| T_h^m - R_h T^m \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} \left\| T_h^n - R_h T^n - (T_h^{n-1} - R_h T^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \alpha \sum_{n=1}^{m} \tau |T_h^n - R_h T^n|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \tilde{C}_T'(h^2+\tau^2) + \tilde{C}_T'' \sum_{n=1}^{m} \tau |\mathbf{u}_h^n - P_h \mathbf{u}^n|_{H^1(\Omega)^2}^2, \end{aligned} \tag{1.55}$$

avec P_h et R_h sont les opérateurs définis dans la Proposition 1.4.4.

Preuve. Afin de montrer l'estimation (1.55), nous intégrons par rapport au temps entre t_{n-1} et t_n, la formulation variationelle continue de l'équation de la chaleur, pour $r = r_h^n = T_h^n - R_h T^n$ avec $R_h T^0 = T_h^0$, nous obtenons alors

(1.56)

$$\left(T^n - T^{n-1}, r_h^n\right) + \alpha \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nabla T(t), \nabla r_h^n)\, dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} ((\mathbf{u}(t)\nabla).T(t), r_h^n)\, dt = \int_{t_{n-1}}^{t_n} (g(t), r_h^n)\, dt.$$

D'autre part, la deuxième équation du problème discret (1.46) nous donne, pour $r_h = r_h^n$

$$\left(T_h^n - T_h^{n-1}, r_h^n\right) + \tau\alpha\left(\nabla T_h^n, \nabla r_h^n\right) + \tau\left((\mathbf{u}_h^n \nabla).T_h^n, r_h^n\right) = \tau\left(g^n, r_h^n\right). \tag{1.57}$$

Alors en combinant (1.56) et (1.57), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\left((T_h^n - T_h^{n-1}) - (T^n - T^{n-1}), r_h^n\right) + \tau\alpha\left(\nabla(T_h^n, \nabla r_h^n) - \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nabla T(t), \nabla r_h^n)\, dt\right. \\ &\quad \left. + \tau c_T\left(\mathbf{u}_h^n, T_h^n, r_h^n\right) - \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_T\left(\mathbf{u}(t), T(t), r_h^n\right) dt = 0.\right. \end{aligned}$$

Par la suite, nous intercalons les termes (R_hT^n, r_h^n) et (R_hT^{n-1}, r_h^n) dans l'équation précédente, pour avoir à l'aide de (1.5), la relation suivante

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\|\,r_h^n\,\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\,\|\,r_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\,\|\,r_h^n - r_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \tau\alpha|r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\quad + \big((R_hT^n - T^n) + (R_hT^{n-1} - T^{n-1}), r_h^n\big) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nabla(R_hT^n - T(t)))\,dt \\
&\quad + \tau c_T\left(\mathbf{u}_h^n, T_h^n, r_h^n\right) - \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_T\left(\mathbf{u}(t), T(t), r_h^n\right) dt = 0.
\end{aligned}$$

Notons par

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_1 &= \left((R_hT^n - T^n) + (R_hT^{n-1} - T^{n-1}), r_h^n\right), \\
\tilde{b}_2 &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nabla(R_hT^n - T(t)))\,dt, \\
\tilde{b}_3 &= \tau c_T\left(\mathbf{u}_h^n, T_h^n, r_h^n\right) - \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_T\left(\mathbf{u}(t), T(t), r_h^n\right) dt.
\end{aligned}$$

Nous traitons les termes $\tilde{b}_1$ et $\tilde{b}_2$ similairement à b_1 et b_2 de la preuve du Théorème 1.4.12, pour obtenir

$$|\tilde{b_1}| \leq \frac{c_R^2h^2(S_2^0)^2}{2\tilde{\varepsilon}_1}\,\|\,T'\,\|^2_{L^2(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega))} + \frac{\tau\tilde{\varepsilon}_1}{2}|r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\begin{aligned}
|\tilde{b}_2| \;\leq\; & \frac{\tau^2c_R^2\alpha}{2\sqrt{3}\tilde{\varepsilon}_2}\,\|\,T'\,\|^2_{L^2(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega))} + \frac{\tilde{\varepsilon}_2\tau\alpha}{2\sqrt{3}}|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)} \\
& + \frac{\alpha c_R^2h^2}{2\varepsilon_3}\,\|\,T\,\|^2_{L^2(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega))} + \frac{\alpha\tau\varepsilon_3}{2}|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Le terme $\tilde{b}_3$ se traite différemment. Alors nous intercalons

$$\pm\tau c_T\left(\mathbf{u}_h^n, R_hT^n, r_h^n\right),\ \pm\tau c_T\left(P_h\mathbf{u}^n, R_hT^n, r_h^n\right)\ \text{ et }\ \pm\int_{t_{n-1}}^{t_n} c_T\left(P_h\mathbf{u}^n, T(t), r_h^n\right) dt,$$

pour avoir

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_3 \;=\;& \tau c_T\left(\mathbf{u}_h^n, r_h^n, r_h^n\right) + \tau c_T\left(\mathbf{u}_h^n - P_h\mathbf{u}^n, R_hT^n, r_h^n\right) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_T\left(P_h\mathbf{u}^n, R_hT^n - T(t), r_h^n\right) dt \\
& + \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_T\left(P_h\mathbf{u}^n - \mathbf{u}(t), T(t), r_h^n\right) dt. \\
=\;& \tilde{b}_{3,1} + \tilde{b}_{3,2} + \tilde{b}_{3,3} + \tilde{b}_{3,4}.
\end{aligned}$$

Pour majorer $\tilde{b}_{3,2}$, $\tilde{b}_{3,3}$ et $\tilde{b}_{3,4}$, il suffit de suivre les mêmes étapes faites pour les termes $b_{3,1}$, $b_{3,2}$ et $b_{3,3}$ du Théorème 1.4.12. D'où,

$$\begin{aligned}
|\tilde{b}_{3,2}| \;\leq\; & \frac{1}{2\tilde{\varepsilon}_4}\tau(c_R')^2(S_4^0)^4\,\|\,T\,\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)}\,|\mathbf{u}_h^n - P_h\mathbf{u}^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\
& + \frac{\tilde{\varepsilon}_4\tau}{2}|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

de même,

$$\begin{aligned}|\tilde{b}_{3,3}| \;\leq\; & \frac{1}{6\tilde{\varepsilon}_5}(c_P^{'})^2(S_4^0)^4(c_R^{'})^2\tau^2 \,\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^\infty(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d)}\,||T^{'}||^2_{L^\infty(0,\hat{T};H^1(\Omega))}\\ & +\frac{1}{4\tilde{\varepsilon}_6}(c_P^{'})^2(S_4^0)^4c_R^2h^2\,\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^\infty(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d)}\,||T||^2_{L^2(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega))}\\ & +\frac{\tau\tilde{\varepsilon}_5}{2}|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}+\frac{\tau\tilde{\varepsilon}_6}{2}|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|\tilde{b}_{3,4}| \;\leq\; & \frac{1}{6\tilde{\varepsilon}_7}(S_4^0)^4(c_P^{'})^2\tau^2\,\|\,T\,\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)}\|\,\mathbf{u}^{'}\,\|^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega)^d\right)}+\frac{\tau\tilde{\varepsilon}_7}{2}|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}\\ & +\frac{1}{2\tilde{\varepsilon}_8}(S_4^0)^4c_P^2h^2\,\|\,T\,\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)}\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega)^d\right)}+\frac{\tau\tilde{\varepsilon}_8}{2}|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.5.1 et la condition (1.50), nous obtenons

$$|\tilde{b}_{3,1}|\leq\frac{\tau\hat{\nu}_1}{4}|r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Nous sommons sur $n=1,..,m\leq N$ et choisissons les $\tilde{\varepsilon}_i$, $i=1,...,8$, de sorte d'obtenir l'estimation suivante,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,\|\,r_h^m\,\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\|\,r_h^n-r_h^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)}+\alpha\sum_{n=1}^{m}\tau|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}\\ &\quad\leq\;\tilde{C}_T^{'}(h^2+\tau^2)+\tilde{C}_T^{''}\sum_{n=1}^{m}\tau|\mathbf{u}_h^n-P_h\mathbf{u}^n|^2_{H^1(\Omega)^2}.\end{aligned}$$

□

Théorème 1.5.5. *Soient $d=2$, $(\mathbf{u},p,T)$ solution du problème continu (E)et $(\mathbf{u}_h^n,p_h^n,T_h^n)$ solution du problème dicret (1.46). Pour $\mathbf{u}\in L^\infty\left(0,T;W^{1,4}(\Omega)^d\right)\cap L^2\left(0,T;H^2(\Omega)^d\right)$, $\mathbf{u}^{'}\in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)^d\right)$, $T^{'}\in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right)$, et $p\in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right)$, on suppose que h vérifie les conditions (1.49) et (1.50) il existe les constantes $\tilde{C}_{\mathbf{u}}^{'}$, $\tilde{C}_{\mathbf{u}}^{''}$ et $\tilde{C}_{\mathbf{u}}^{'''}$, telles que pour tout $\tilde{\delta}_2\in\mathbb{R}$, $m\leq N$ et τ suffisamment petit,*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,\|\,\mathbf{u}_h^m-P_h\mathbf{u}^m\,\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\hat{\nu}_1}{2}\sum_{n=1}^{m}\tau|\mathbf{u}_h^n-P_h\mathbf{u}^n|^2_{H^1(\Omega)}\\ &\quad\leq\;C_{\hat{T}}^{'}\left(\tilde{C}_{\mathbf{u}}^{'}(h^2+\tau^2)+\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\tilde{C}_{\mathbf{u}}^{''}\tau}{\tilde{\delta}_2}+\tilde{C}_{\mathbf{u}}^{'''}\tau\right)\|\,T_h^{n-1}-T^{n-1}\,\|^2_{L^2(\Omega)}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\tilde{\delta}_1}{2}\sum_{n=1}^{m}\tau|T_h^{n-1}-T^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)}\right),\end{aligned}$$

avec P_h l'opérateur défini dans la Proposition 1.4.4 et $C_{\hat{T}}^{'}$ une constante qui dépend du temps final $\hat{T}$.

Preuve. Nous considérons la première équation du problème continue (E) pour $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h^n = \mathbf{u}_h^n - R_h\mathbf{u}^n \in V_{nh}$, nous obtenons alors, en intégrant par rapport au temps entre t_{n-1} et t_n, la relation suivante

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{v}_h^n\right) + \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \nu(T(t))\nabla\mathbf{u}(t)dt, \nabla\mathbf{v}_h^n\right) - \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} p(t)dt, \text{div } \mathbf{v}_h^n\right)\\ &+\int_{t_{n-1}}^{t_n} c_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_h^n\right) ds = \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{f}_1(T(t))dt, \mathbf{v}_h^n\right) + \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{f}_0(t)dt, \mathbf{v}_h^n\right).\end{aligned} \tag{1.58}$$

D'autre part, la deuxième équation du problème discret (1.46) nous donne, pour $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h^n$, l'égalité suivante

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h\right) + \tau c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - \tau(p_h^n, \text{div } \mathbf{v}_h)\\ &+\tau(\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n, \nabla\mathbf{v}_h) = \tau\left(\mathbf{f}_1(T_h^{n-1}), \mathbf{v}_h\right) + \tau\left(\mathbf{f}_0^n, \mathbf{v}_h\right).\end{aligned} \tag{1.59}$$

En combinant (1.58) et (1.59), nous déduisons la relation suivante,

$$\begin{aligned}&\left(\left(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\right) - \left(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\right), \mathbf{v}_h^n\right) + \tau\left(p_h^n, \text{div } \mathbf{v}_h^n\right) - \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} p(t)dt, \text{div } \mathbf{v}_h^n\right)\\ &+\tau\left(\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \nu(T(t))\nabla\mathbf{u}(t)dt, \nabla\mathbf{v}_h^n\right) + \tau c_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h^n\right)\\ &-\int_{t_{n-1}}^{t_n} c_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_h^n\right) dt = \tau\left(\mathbf{f}_1(T_h^{n-1}), \mathbf{v}_h^n\right) - \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{f}_1(T(t))dt, \mathbf{v}_h^n\right).\end{aligned}$$

En faisant la même démarche que dans la preuve du Théorème 1.4.13, nous obtenons le résultat suivant

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\|\mathbf{v}_h^n\right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \frac{1}{2}\left\|\mathbf{v}_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{2}\left\|\mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)^d}^2\\ &+\hat{\nu}_1\sum_{n=1}^{m}\tau|\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d}^2 \leq \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \tilde{a}_3 + \tilde{a}_4 + \tilde{a}_5\end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned}|\tilde{a}_1| &= \left|\tau\left(\left(P_h\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^n\right) - \left(P_h\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}^{n-1}\right), \mathbf{v}_h^n\right)\right|\\ &\leq \frac{(S_2^0)^2 c_P^2 h^2}{2\varepsilon_1}\left\|\mathbf{u}'\right\|_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega)^d\right)}^2 + \frac{\tau\varepsilon_1}{2}|\mathbf{v}_h^n|_{H^1(\Omega)^d}^2,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\tilde{a}_2| &= \left|\left(\tau\nu(T_h^{n-1})\nabla P_h\mathbf{u}^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu(T(t))\nabla\mathbf{u}(t)dt, \nabla\mathbf{v}_h^n\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{6\varepsilon_2}(\hat{\nu_2})^2(c_P^{'})^2\tau^2 \parallel \mathbf{u}^{'} \parallel^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\varepsilon_2}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon_3}8\hat{\nu}_2^2c_P^2h^2 \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\varepsilon_3}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} + \frac{\tau\varepsilon_4}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\
&\quad + \frac{(\nu^*)^2}{16\varepsilon_4} \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};W^{1,4}(\Omega)^d\right)} \frac{\tau}{2\delta_1} \parallel T_h^{n-1} - T^{n-1} \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\tau\delta_1}{2}|T_h^{n-1} - T^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} \\
&\quad + \frac{\tau\varepsilon_5}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} + \frac{1}{2\varepsilon_5}(\nu^*)^2(S_4^0)^2\tau^2 \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};W^{1,4}(\Omega)^d\right)} \parallel T^{'} \parallel^2_{L^2(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega))} \\
&\quad + \frac{(\hat{\nu}_2)^2c_P^2h^2}{2\varepsilon_6} \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\varepsilon_6}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\tilde{a}_3| &= \left|\tau\left(p_h^n, \text{div } \mathbf{v}_h^n\right) + \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} p(t)dt, \text{div } \mathbf{v}_h^n\right)\right| \\
&\leq \frac{c_r^2h^2}{2\varepsilon_7} \parallel p \parallel^2_{L^2(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega))} + \frac{\varepsilon_7\tau}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_5 &= \left|\tau\left(\mathbf{f}_1(T_h^{n-1}), \mathbf{v}_h^n\right) - \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{f}_1(T)dt, \mathbf{v}_h^n\right)\right| \\
&\leq \frac{(S_2^0)^2}{2\varepsilon_{18}}(c_{\mathbf{f}_1}^*)^2\tau \parallel T_h^{n-1} - T^{n-1} \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\tau\varepsilon_{18}}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\
&\quad + \frac{(S_2^0)^2}{2\varepsilon_{19}}(c_{\mathbf{f}_1}^*)^2\tau^2 \parallel T^{'} \parallel^2_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))} + \frac{\tau\varepsilon_{19}}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.
\end{aligned}
$$

Pour le terme

$$
\tilde{a}_4 = \left|\tau c_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h^n\right) - \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_{\mathbf{u}}\left(u(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_h^n\right)dt\right|,
$$

nous intercalons

$$
\pm\tau c_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}^{n-1}, P_h\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right),\ \tau c_{\mathbf{u}}\left(P_h\mathbf{u}^{n-1}, P_h\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right) \text{ et } \pm\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(P_h\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_h^n\right)dt.
$$

Ce qui implique,

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_{4,1} &= \tau c_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^n, \mathbf{v}_h^n\right), \\
\tilde{a}_{4,2} &= \tau c_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}_h^{n-1} - P_h\mathbf{u}^{n-1}, P_h\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right), \\
\tilde{a}_{4,3} &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_{\mathbf{u}}\left(P_h\mathbf{u}^{n-1}, P_h\mathbf{u}^n - \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_h^n\right)dt, \\
\tilde{a}_{4,4} &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_{\mathbf{u}}\left(P_h\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_h^n\right)dt.
\end{aligned}
$$

D'après la preuve du Théorème 1.4.13, nous déduisons les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{4,2} &\leq \frac{\varepsilon_8}{2}(S_4^0)^2(c_P^{'})^2 \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \tau \parallel \mathbf{v}_h^{n-1} \parallel^2_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + \frac{\delta_2\tau\sqrt{2}}{2\varepsilon_8}|\mathbf{v}_h^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)^d} + \frac{\tau\sqrt{2}}{2\delta_2\varepsilon_8}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{4,3} &\leq \frac{1}{6\varepsilon_9}(S_4^0)^4(c_P^{'})^4\tau^2 \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^\infty\left(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega)^d\right)} \parallel \mathbf{u}^{'} \parallel^2_{L^2\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon_{10}}(S_4^0)^4(c_P^{'})^2c_P^2h^2 \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega)^d\right)} \\ &\quad + \frac{\tau\varepsilon_9}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} + \frac{\tau\varepsilon_{10}}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\tilde{a}_{4,4}| &\leq \frac{1}{6\varepsilon_{11}}(S_4^0)^4(c_P^{'})^2\tau^2|\mathbf{u}|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \parallel \mathbf{u}^{'} \parallel^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^1(\Omega)^d\right)} \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon_{12}}(S_4^0)^4c_P^2h^2 \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^2\left(t_{n-1},t_n;H^2(\Omega)^d\right)} \parallel \mathbf{u} \parallel^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \\ &\quad + \frac{\tau\varepsilon_{11}}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} + \frac{\tau\varepsilon_{12}}{2}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.\end{aligned}$$

Le Lemme 1.5.1 et la condition (1.49) impliquent l'inégalité suivante :

$$\tilde{a}_{4,1} = \tau c_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^n, \mathbf{v}_h^n\right) \leq \frac{\tau\hat{\nu}_1}{4}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d}.$$

Nous choisissons des valeurs particulières de ε_i, $1 \leq i \leq 12$ et δ_2, pour obtenir, en appliquant la somme sur n de 1 à $m \leq N$, l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \parallel \mathbf{v}_h^m \parallel^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} \parallel \mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1} \parallel^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\tau\hat{\nu}_1}{2}\sum_{n=1}^{m}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\ &\leq \tilde{C}_{\mathbf{u}}^{'}(h^2+\tau^2) + \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\tilde{C}_{\mathbf{u}}^{''}\tau}{\delta_1} + \tilde{C}_{\mathbf{u}}^{'''}\right) \parallel T_h^{n-1} - T^{n-1} \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=1}^{m}\frac{\tau\delta_1}{2}|T_h^{n-1} - T^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \tilde{C}_{\mathbf{u}}^{'''}\sum_{n=1}^{m}\tau \parallel \mathbf{v}_h^n \parallel^2_{L^2(\Omega)^d}.\end{aligned}$$

Revenons à la Remarque 1.4.11 pour appliquer le théorème de Gronwall à l'inégalité précédente et obtenir le résultat suivant

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \parallel \mathbf{v}_h^m \parallel^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} \parallel \mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1} \parallel^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\tau\hat{\nu}_1}{2}\sum_{n=1}^{m}|\mathbf{v}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\ &\leq C_{\hat{T}}^{'}\left(\tilde{C}_{\mathbf{u}}^{'}(h^2+\tau^2) + \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\tilde{C}_{\mathbf{u}}^{''}\tau}{\delta_1} + \tilde{C}_{\mathbf{u}}^{'''}\right) \parallel T_h^{n-1} - T^{n-1} \parallel^2_{L^2(\Omega)}\right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{m}\frac{\tau\delta_1}{2}|T_h^{n-1} - T^{n-1}|^2_{H^1(\Omega)}\right),\end{aligned}$$

avec $C'_{\hat{T}}$ dépend de $\hat{T}$.

□

Théorème 1.5.6. *Soient (u, p, T), (u_h^n, p_h^n, T_h^n) solutions du problème continu et discret respectivement, vérifiant les hypothèses des Théorèmes 1.5.5 et 1.5.4. En supposant que $T \in L^\infty(0, \hat{T}, H^2(\Omega))$, il existe des constantes k_0, $\tilde{C}_{\boldsymbol{u}}$ et $\tilde{C}_T$, indépendantes de h et de τ, telles que, pour $\tau < k_0$,*

$$\sup_{1\leq n\leq N} \| T_h^n - T^n \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=1}^{N} \alpha\tau |T_h^n - T^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \tilde{C}_T(h^2 + \tau^2) \tag{1.60}$$

et

$$\sup_{1\leq n\leq N} \| \boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{n=1}^{N} \hat{\nu}_1\tau |\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \leq \tilde{C}_{\boldsymbol{u}}(h^2 + \tau^2), \tag{1.61}$$

avec $\tilde{C}_{\boldsymbol{u}}$ et $\tilde{C}_T$ dépendent de $\hat{T}$.

Preuve. D'après les Théorèmes 1.5.4 et 1.5.5, en suivant la preuve du Théorème 1.4.14, nous déduisons les inégalités (1.60) et (1.61).

□

1.6 Problème discret d'ordre deux en temps et en espace

Afin de gagner en ordre de convergence et en temps de calcul, nous introduisons dans cette section un schéma numérique d'ordre deux en temps et en espace correspondant à notre problème de couplage.
Nous étudions l'existence et l'unicité de la solution. Une estimation *a priori* de l'erreur de discrétisation est établie pour le schéma proposé. Nous considérons alors des approximations plus précises. Nous approchons alors la vitesse et la température dans chaque triangle du maillage avec des polynômes $P2$ et nous gardons l'approximation $P1$ pour la pession.
D'où, pour tout $n \in \{1, ..., N\}$,

$$\begin{aligned}
X_{nh} &= \left\{ \mathbf{v}_h \in X;\ \forall K \in \mathcal{T}_{nh},\ \mathbf{v}_{h|K} \in P_2(K) \right\}, \\
Y_{nh} &= \left\{ r_h \in Y; \forall K \in \mathcal{T}_{nh},\ r_{h|K} \in P_2(K) \right\}, \\
M_{nh} &= \left\{ q_h \in M;\ \forall K \in \mathcal{T}_{nh},\ q_{h|K} \in P_1(K) \right\}.
\end{aligned}$$

De plus, nous introduisons les espaces discrets suivants :

$$V_{nh} = \left\{ \mathbf{v}_h \in X_{nh};\ \forall q_h \in M_{nh},\ \int_\Omega q_h(x)\ \text{div}\ \mathbf{v}_h(x)dx = 0 \right\},$$
$$V_{nh}^{\circ} = \left\{ \mathbf{f}_h \in X_{nh}^{'};\ \forall v_h \in V_{nh},\ \langle \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h \rangle = 0 \right\},$$
$$V_{nh}^{\perp} = \left\{ \mathbf{v}_h \in X_{nh};\ \forall w_h \in X_{nh},\ \int_\Omega \nabla \mathbf{v}_h(x) \nabla \mathbf{w}_h(x)dx = 0 \right\}.$$

Pour la discrétisation en temps, nous considérons le même pas de temps τ_n et nous utilisons la méthode a multipas linéaire : BDF "Méthode de différentiation rétrograde", inconditionnellement stable. Cette méthode consiste à donner des approximations des termes de dérivée en temps par la dérivée du polynôme d'interpolation. En d'autre terme, nous approchons les dérivées partielles $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ par

$$\frac{3\mathbf{u}_h^n - 4\mathbf{u}_h^{n-1} + \mathbf{u}_h^{n-2}}{2\tau_n} \text{ et } \frac{3T_h^n - 4T_h^{n-1} + T_h^{n-2}}{2\tau_n}.$$

Nous introduisons, pour $2 \leq n \leq N$, la formulation variationnelle discrète stabilisée suivante :

(1.62)

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh},\ T_h^n \in Y_{nh} \text{ tels que,} \\ \left(\dfrac{3\mathbf{u}_h^n - 4\mathbf{u}_h^{n-1} + \mathbf{u}_h^{n-2}}{2\tau_n}, \mathbf{v}_h \right) + (\nu(T_h^n)\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{v}_h) - (p_h^n, \text{div}\ \mathbf{v}_h) \\ \qquad + d_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}^n(T_h^n), \mathbf{v}_h) \qquad \forall \mathbf{v}_h \in X_{nh} \\ \left(\dfrac{3T_h^n - 4T_h^{n-1} + T_h^{n-2}}{2\tau_n}, r_h \right) + d_T(\mathbf{u}_h^n, T_h^n, r_h) + \alpha(\nabla T_h^n, \nabla r_h) \\ \qquad = (g^n, r_h) \qquad \forall r_h \in Y_{nh} \\ (q_h, \text{div}\ \mathbf{u}_h^n) = 0 \qquad \forall q_h \in M_{nh} \end{cases}$$

Où $\mathbf{u}_h^0 = P_h \mathbf{u}(0)$, $T_h^0 = R_h T(0)$, $g^n = g(t_n)$ et

$$\mathbf{f}^n(T_h^n) = \mathbf{f}_0^n + \mathbf{f}_1(T_h^n) \text{ avec } \mathbf{f}_0^n = \mathbf{f}_0(t_n).$$

Nous calculons $(\mathbf{u}_h^1, T_h^1)$ par une résolution du schéma d'Euler suivant :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{Trouver } (\mathbf{u}_h^1, p_h^1) \in X_{1h} \times M_{1h},\ T_h^1 \in Y_{1h} \text{ tels que,} \\
\left(\dfrac{\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^0}{\tau_1}, \mathbf{v}_h\right) + (\nu(T_h^1)\nabla \mathbf{u}_h^1, \nabla \mathbf{v}_h) - (p_h^1, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) \\
\qquad\qquad +d_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^1, \mathbf{u}_h^1, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}^1(T_h^1), \mathbf{v}_h) \qquad \forall \mathbf{v}_h \in X_{1h} \\
\left(\dfrac{T_h^1 - T_h^0}{\tau_1}, r_h\right) + d_T(\mathbf{u}_h^1, T_h^1, r_h) + \alpha(\nabla T_h^1, \nabla r_h) \\
\qquad\qquad = (g^1, r_h) \qquad \forall r_h \in Y_{1h} \\
\qquad\qquad (q_h, \operatorname{div} \mathbf{u}_h^1) = 0 \qquad \forall q_h \in M_{1h}
\end{array}
\right. \tag{1.63}
$$

Remarque 1.6.1. *Les espaces éléments finis X_{nh} et M_{nh} (espaces de Taylor-Hood) choisis vérifient la condition inf-sup (1.26).*

Proposition 1.6.2. *Nous introduisons les opérateurs suivants :*

1) *Il existe un opérateur d'interpolation $P_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^d, X_{nh})$ (cf. [54] et [33]), tel que*

   (i) $\forall q_h \in M_{nh}$,

$$
\forall \mathbf{v} \in X,\ \int_\Omega q_h(x) div\ (P_h\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}(x))dx = 0. \tag{1.64}
$$

   (ii) Pour $k = 0, 1$ ou 2,

$$
\begin{array}{l}
\forall \mathbf{v} \in H^{k+1}(\Omega)^d \cap H_0^1(\Omega)^d, \quad \| P_h\mathbf{v} - \mathbf{v} \|_{L^2(\Omega)^d} \leq c_P h_n^{k+1} |\mathbf{v}|_{H^{k+1}(\Omega)^d}, \\
\qquad\qquad |P_h\mathbf{v} - \mathbf{v}|_{H^1(\Omega)^d} \leq c_P h_n^k |\mathbf{v}|_{H^{k+1}(\Omega)^d}.
\end{array} \tag{1.65}
$$

2) *De même, [52] il existe $R_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), Y_{nh})$ tels que,*

   (i) Pour $k = 0, 1$ ou 2,

$$
\begin{array}{l}
\forall r \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \| R_h r - r \|_{L^2(\Omega)} \leq c_R h_n^{k+1} |r|_{H^{k+1}(\Omega)} \\
\qquad\qquad |R_h r - r|_{H^1(\Omega)} \leq c_R h_n^k |r|_{H^{k+1}(\Omega)}.
\end{array} \tag{1.66}
$$

3) *Pour la pression, il existe un opérateur $r_h \in \mathcal{L}\,(L_0^2(\Omega), M_{nh})$, vérifiant, pour tout $q \in H^s(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$, $s \in [0, 2]$*

$$
\| r_h q - q \|_{L^2(\Omega)} \leq c_r h_n^s |q|_{H^s(\Omega)},
$$

où c_P, c_R et c_r sont des constantes positives indépendantes de τ et h.

Remarque 1.6.3. *Nous utilisons souvant la relation suivante :*
(1.67)
$$2\left(3a^n - 4a^{n-1} + a^{n-2}, a^n\right) = |a^n|^2 + |2a^n - a^{n-1}|^2 + |\delta^2 a^{n-1}|^2 - |a^{n-1}|^2 - |2a^{n-1} - a^{n-2}|^2,$$

en notant

$$\delta^2 a^{n-1} = a^n - 2a^{n-1} + a^{n-2}.$$

Remarque 1.6.4. *Les formes trilinéaires $d_{\mathbf{u}}$ et d_T, pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{w} \in X_{nh}$ et $r, s, z \in Y_{nh}$, vérifient les inégalités suivantes :*

$$d_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{w}) \leq 2(S_4^0)^2 |\mathbf{u}|_{H_0^1(\Omega)^d} |\mathbf{v}|_{H_0^1(\Omega)^d} |\boldsymbol{w}|_{H_0^1(\Omega)^d},$$

$$d_T(r, s, z) \leq 2(S_4^0)^2 |r|_{H_0^1(\Omega)} |s|_{H_0^1(\Omega)} |z|_{H_0^1(\Omega)}.$$

1.6.1 Existence et unicité de la solution

Proposition 1.6.5. *(Stabilité)*
La solution $(\mathbf{u}_h^n, T_h^n) \in X_{nh} \times Y_{nh}$ du problème variationnel discret (1.62), pour données initiales $(\mathbf{u}_h^0, T_h^0)$ et $(\mathbf{u}_h^1, T_h^1)$, satisfait les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\sup_{2\leq n\leq N} \| \mathbf{u}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sup_{2\leq n\leq N} \| 2\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{n=2}^{N} \| \delta^2 \mathbf{u}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + 2\sum_{n=2}^{N} \hat{\nu}_1 \tau_n |\mathbf{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\
&\quad \leq \bar{C}_{\mathbf{u}_1} \Big(\| g \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} + \| T_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2T_h^1 - T_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \| \mathbf{f}_0 \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} + \| \mathbf{u}_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| 2\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)^d} \Big) \qquad (1.68)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\sup_{2\leq n\leq N} \| T_h^n \|^2_{L^2(\Omega)} + \sup_{2\leq n\leq N} \| 2T_h^n - T_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=2}^{N} \| \delta^2 T_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + 2\sum_{n=2}^{N} \alpha \tau_n |T_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\quad \leq \bar{C}_{T_1} \left(\| g \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} + \| T_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2T_h^1 - T_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)} \right), \qquad (1.69)
\end{aligned}$$

avec $\bar{C}_{\mathbf{u}_1}$ et $\bar{C}_{T_1}$ sont deux constantes indépendantes de h et τ.

Preuve. Soit $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, T_h^n)$ solution du problème discret (1.62). Nous remplaçons dans la deuxième équation de (1.62) r_h par $4\tau_n T_h^n$ et nous utilisons la relation (1.67). La Proposition 1.4.6, les inégalités de Sobolev et de Cauchy-Schwarz, nous permettent d'otenir :

$$\begin{aligned}
&\| T_h^n \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2T_h^n - T_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \delta^2 T_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} \\
&- \| T_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} - \| 2T_h^{n-1} - T_h^{n-2} \|^2_{L^2(\Omega)} + 4\tau_n |T_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\quad \leq \frac{2\tau_n (S_2^0)^2}{\varepsilon_1} \| g^n \|^2_{L^2(\Omega)} + 2\tau_n \varepsilon_1 |T_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Nous sommons sur n allant de 2 à $m \leq N$ l'équation précédente. Nous obtenons, en choisissant $\varepsilon = \alpha$, l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
&\sup_{2\leq n\leq m} \| T_h^n \|^2_{L^2(\Omega)} + \sup_{2\leq n\leq m} \| 2T_h^n - T_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ \sum_{n=2}^{m} \| \delta^2 T_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + 2\sum_{n=2}^{m} \alpha\tau_n |T_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \sum_{n=2}^{m} \frac{2\tau_n (S_2^0)^2}{\alpha} \| g \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} + \| T_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2T_h^1 - T_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned} \tag{1.70}$$

D'autre part, nous choisissons $\mathbf{v}_h = 4\tau_n \mathbf{u}_h^n$ dans la première équation du problème (1.62). Nous obtenons, en suivant les mêmes étapes précédentes, le résultat suivant

$$\begin{aligned}
&\| \mathbf{u}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| 2\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| \delta^2 \mathbf{u}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} \\
&- \| \mathbf{u}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} - \| 2\mathbf{u}_h^{n-1} - \mathbf{u}_h^{n-2} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + 4\tau_n \hat{\nu}_1 |\mathbf{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\
&\leq \frac{2\tau_n (S_2^0)^2 c_{\mathbf{f}_1}}{\varepsilon_1} \| T_h^n \|^2_{L^2(\Omega)} + 2\tau_n \varepsilon_1 |\mathbf{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\
&+ \frac{2\tau_n (S_2^0)^2}{\varepsilon_2} \| \mathbf{f}_0 \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} + 2\tau_n \varepsilon_2 |\mathbf{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d}.
\end{aligned} \tag{1.71}$$

Nous insérons l'inéquation (1.70) dans (1.71). Ensuite, nous sommons sur n allant de 2 à m. En choisissant $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\hat{\nu}_1}{2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\sup_{2\leq n\leq m} \| \mathbf{u}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sup_{2\leq n\leq m} \| 2\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} \\
&+ \sum_{n=2}^{m} \| \delta^2 \mathbf{u}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + 2\sum_{n=2}^{m} \hat{\nu}_1 \tau_n |\mathbf{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\
&\leq \bar{C}_{\mathbf{u}^1} \Big(\| g \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} + \| T_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2T_h^1 - T_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \| \mathbf{f}_0 \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} + \| \mathbf{u}_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| 2\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)^d} \Big).
\end{aligned}$$

□

Pour montrer l'existence de la solution du schéma d'ordre deux en temps et en espace, nous avons recours au Corollaire 1.6.7 comme étant une conséquence du théorème de point fixe de Brouwer (cf. [30]) suivant :

Théorème 1.6.6. *(Théorème de Brouwer)*
Toute application continue d'une partie convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$ dans elle même possède un point fixe.

Corollaire 1.6.7. *Soient H un espace de Hilbert de dimension finie de norme $\|.\|_H$ de produit scalaire $(.,.)_h$ et F une application continue de H dans H, telle qu'il existe $\mu > 0$ tel que, pour tout $v \in H$*

$$(F(v), v)_H \geq 0,$$

avec $\| v \|_H = \mu$.
Alors il existe au moins un élément $u \in H$, *tel que*

$$F(u) = 0 \ et \ \| u \|_H \leq \mu.$$

Théorème 1.6.8. *Soient* $\nu > 0$ *et les données* $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$ *et* $g \in L^\infty\left(0, \hat{T}; L^2(\Omega)\right)$. *Alors le schéma (1.62) admet au moins une solution* $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, T_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh} \times Y_{nh}$ *pour toutes conditions initiales* $\mathbf{u}_h^1, \mathbf{u}_h^0 \in X_{nh}$ *et* $T_h^1, T_h^0 \in Y_{nh}$.

Preuve. Notons

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{u}_1} &= \bar{C}_{\mathbf{u}^1}\Big(\| g \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} + \| T_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2T_h^1 - T_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \| \mathbf{f}_0 \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} + \| \mathbf{u}_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| 2\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)^d} \Big). \end{aligned}$$

et

$$C_{T_1} = \bar{C}_{T_1}\left(\| g \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} + \| T_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2T_h^1 - T_h^0 \|^2_{L^2(\Omega)} \right).$$

Par la suite, nous raisonnons par induction sur $n \geq 3$. Tout d'abord, pour chaque T_h^{n-1} et T_h^{n-2} vérifiant (1.69), nous introduisons la fonction ϕ_T de Y_{nh} dans Y_{nh} suivante :

$$(\phi_T(T_h^n), r_h) = \left(\frac{3T_h^n - 4T_h^{n-1} + T_h^{n-2}}{2\tau_n}, r_h \right) + d_T(\mathbf{u}_h^n, T_h^n, r_h) + \alpha(\nabla T_h^n, \nabla r_h) - (g^n, r_h).$$

Nous déduisons facilement la continuité de cette fonction.
D'autre part, d'après la Propriété 1.4.6 et l'inégalité de Sobolev, nous obtenons

$$\begin{aligned} |(\phi(T_h^n), T_h^n)| &\geq |T_h^n|_{H_0^1(\Omega)} \Big(\alpha |T_h^n|_{H_0^1(\Omega)} - \Big(\frac{S_2^0}{2\tau_{min}} \| 4T_h^{n-1} - T_h^{n-2} \|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + S_2^0 \| g^n \|_{L^2(\Omega)} \Big) \Big). \end{aligned}$$

Le théorème précédent nous permet d'aboutir à la majoration suivante :

$$|(\phi(T_h^n), T_h^n)| \geq |T_h^n|_{H_0^1(\Omega)} \left(\alpha |T_h^n|_{H_0^1(\Omega)} - \left(\frac{5S_2^0}{2\tau_{min}} C_{T_1} + S_2^0 \| g \|_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} \right) \right).$$

Choisissons

$$\mu_T = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{5S_2^0}{2\tau_{min}} C_{T_1} + S_2^0 \| g \|_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} \right).$$

Alors pour tout $T_h^n \in Y_{nh}$, telle que

$$|T_h^n|_{H_0^1(\Omega)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{5S_2^0}{2\tau_{min}} C_{T_1} + S_2^0 \| g \|_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} \right),$$

nous avons $(\phi_T(T_h^n), T_h^n) \geq 0$.
Nous concluons, d'après le théorème de point fixe de Brouwer 1.6.7, il existe au moins un $T_h^n \in Y_{nh}$ tel que

$$\phi(T_h^n) = 0$$

et

$$|T_h^n|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha}\left[\frac{5S_2^0}{2\tau_{min}}C_{T_1} + S_2^0 \,\|\, g \,\|_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)}\right].$$

Il reste à montrer l'existence de $\mathbf{u}_h^n$, pour chaque $\mathbf{u}_h^{n-1}$ et $\mathbf{u}_h^{n-2}$ vérifiant (1.68). Nous considérons alors la fonction $\phi_{\mathbf{u}}$ de X_{nh} dans X_{nh}, telle que pour tout $\mathbf{v}_h \in X_{nh}$

$$\begin{aligned}(\phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{v}_h) &= \left(\frac{3\mathbf{u}_h^n - 4\mathbf{u}_h^{n-1} + \mathbf{u}_h^{n-2}}{2\tau_n}, \mathbf{v}_h\right) + d_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) \\ &\quad + (\nu(T_h^n(\mathbf{u}_h^n))\nabla\mathbf{u}_h^n, \nabla\mathbf{v}_h) - (\mathbf{f}^n(T_h^n(\mathbf{u}_h^n)), \mathbf{v}_h).\end{aligned}$$

Les inégalités de Sobolev et les Hypothèses 1.3.1 nous donnent

$$\begin{aligned}|(\phi(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{u}_h^n)| &\geq |\mathbf{u}_h^n|_{H_0^1(\Omega)^d}\left(\hat{\nu}_1|\mathbf{u}_h^n|_{H_0^1(\Omega)^d} - \left(\frac{5S_2^0}{2\tau_{min}}C_{\mathbf{u}_1} + c_{\mathbf{f}_1}S_2^0 C_{T_1}\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + S_2^0 \,\|\, \mathbf{f}_0 \,\|_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)}\right)\right).\end{aligned}$$

Nous remarquons que pour tout $\mathbf{u}_h^n \in X_{nh}$ telle que

$$|\mathbf{u}_h^n|_{H_0^1(\Omega)^d} = \mu_{\mathbf{u}} = \frac{5S_2^0}{2\tau_{min}}C_{\mathbf{u}_1} + c_{\mathbf{f}_1}S_2^0 C_{T_1} + S_2^0 \,\|\, \mathbf{f}_0 \,\|_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)},$$

$(\phi(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{u}_h^n) \geq 0$.
Nous concluons du théorème de point fixe de Brouwer et de la condition inf-sup, qu'il existe $(u_h^n, p_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh}$ solution de la pemière équation du problème (1.62).

□

Théorème 1.6.9. *(Unicité de la solution discrète)*
Soit ν lipschitzienne avec une constante de Lipschitz noté ν^*. Sous les hypothèses 1.3.1, le problème (1.62) admet une unique solution $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, T_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh} \times Y_{nh}$, pour un pas de temps τ_n suffisamment petit.

Preuve. Soient $\left(\mathbf{u}_h^{(1)n}, p_h^{(1)n}, T_h^{(1)n}\right)$ et $\left(\mathbf{u}_h^{(2)n}, p_h^{(2)n}, T_h^{(2)n}\right)$ deux solutions du problème (1.62). Notons,

$$(\mathbf{w}_h^n, s_h^n, z_h^n) = \left(\mathbf{u}_h^{(1)n} - \mathbf{u}_h^{(2)n}, p_h^{(1)n} - p_h^{(2)n}, T_h^{(1)n} - T_h^{(2)n}\right).$$

La différence z_h^n vérifie l'équation suivante :
(1.72)

$$\left(\frac{3z_h^n - 4z_h^{n-1} + z_h^{n-2}}{2\tau_n}, r_h\right) + d_T(\mathbf{u}_h^{(1)n}, T_h^{(1)n}, r_h) - d_T(\mathbf{u}_h^{(2)n}, T_h^{(2)n}, r_h) + \alpha(\nabla z_h^n, \nabla r_h) = 0.$$

Nous intercalons le terme $d_T(\mathbf{u}_h^{(2)n}, T_h^{(1)n}, r_h)$. La relation (1.67) nous permet d'obtenir, en multipliant (1.72) par $4\tau_n$ et choisissant $r_h = z_h^n$, l'égalité suivante

$$\begin{aligned}&\|\, z_h^n \,\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\, 2z_h^n - z_h^{n-1} \,\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\, \delta^2 z_h^{n-1} \,\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\, z_h^{n-1} \,\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\, 2z_h^{n-1} - z_h^{n-2} \,\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + 4\tau_n\alpha|z_h^n|_{H^1(\Omega)}^2 = -d_T(\mathbf{w}_h^n, T_h^{(1)n}, z_h^n) + d_T(\mathbf{u}_h^{(2)n}, z_h^n, z_h^n).\end{aligned}$$

En appliquant les inégalités de Holder et de Sobolev, nous aurons

$$\begin{aligned}&\| z_h^n \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2z_h^n - z_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \delta^2 z_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} - \| z_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} \\ &- \| 2z_h^{n-1} - z_h^{n-2} \|^2_{L^2(\Omega)} + 4\tau\alpha |z_h^n|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\qquad \leq c_1 \tau_n \Big(|\mathbf{w}_h^n|_{H^1(\Omega)^d} |T_h^{(1)n}|_{H^1(\Omega)^d} |z_h^n|_{H^1(\Omega)} + |\mathbf{u}_h^{(2)n}|_{H^1(\Omega)^d} |z_h^n|^2_{H^1(\Omega)} \Big).\end{aligned}$$

Comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, en utilisant la Proposition 1.6.5 et la relation $a.b \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$, nous trouvons une inégalité de la forme suivante :

$$\begin{aligned}&\| z_h^n \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2z_h^n - z_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \delta^2 z_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} - \| z_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} \\ &- \| 2z_h^{n-1} - z_h^{n-2} \|^2_{L^2(\Omega)} + 4\tau\alpha |z_h^n|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\qquad \leq c_1 \tau_n \Big(||\mathbf{w}_h^n||^2_{L^2(\Omega)^d} + ||z_h^n||^2_{L^2(\Omega)} \Big).\end{aligned} \tag{1.73}$$

Où c_1 dépend de h_n et ne dépend pas de τ_n.
D'autre part, en suivant les mêmes démarches pour l'équation de la vitesse nous aurons, en utilisant le fait que ν et $\mathbf{f}_1$ sont lipschitziennes et qu'on est en dimension finie, l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}&\| \mathbf{w}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| 2\mathbf{w}_h^n - \mathbf{w}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| \delta^2 \mathbf{w}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} - \| \mathbf{w}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} \\ &- \| 2\mathbf{w}_h^{n-1} - \mathbf{w}_h^{n-2} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + 4\tau_n\alpha |\mathbf{w}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\ &\qquad \leq 4\tau_n \Big((\nu(T_h^{(1)n}) - \nu(T_h^{(2)n}) \nabla \mathbf{u}_h^{(1)n}, \nabla \mathbf{w}_h^n \Big) - 4\tau_n d_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}_h^n, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{w}_h^n) \\ &\qquad\quad + 4\tau_n \Big(\mathbf{f}_1(T_h^{(1)n}) - \mathbf{f}_1(T_h^{(2)n}), \nabla \mathbf{w}_h^n \Big) \\ &\qquad \leq c_2 \tau_n \Big(||\mathbf{w}_h^n||^2_{L^2(\Omega)^d} + ||z_h^n||^2_{L^2(\Omega)} \Big),\end{aligned} \tag{1.74}$$

où c_2 dépend de h_n et ne dépend pas de τ_n.
Nous sommons chacune des inégalités (1.73) et (1.74) pour n allant de 1 jusquà $m \leq N$. En remarquant que $z_h^0 = z_h^1 = 0$ et $\mathbf{w}_h^0 = \mathbf{w}_h^1 = \mathbf{0}$, nous obtenons

(1.75)

$$\begin{aligned}&\| z_h^m \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2z_h^m - z_h^{m-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=1}^{m} \| \delta^2 z_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + 4\alpha \sum_{n=1}^{m} \tau_n |z_h^n|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \| \mathbf{w}_h^m \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| 2\mathbf{w}_h^m - \mathbf{w}_h^{m-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{n=1}^{m} \| \delta^2 \mathbf{w}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + 4\hat{\nu}_1 \sum_{n=1}^{m} \tau_n |\mathbf{w}_h^n|^2_{H^1(\Omega)^d} \\ &\leq c_3 \sum_{n=1}^{m} \tau_n \Big(||\mathbf{w}_h^n||^2_{L^2(\Omega)^d} + ||z_h^n||^2_{L^2(\Omega)} \Big),\end{aligned}$$

où c_3 dépend de h_n et ne dépend pas de τ_n.
Pour appliquer le lemme de Gronwall discret, nous écrivons le dernier terme d'ordre $n = m$ du second membre de la manière suivante :

$$\mathbf{w}_h^m = \delta^2 \mathbf{w}_h^{m-1} + 2\mathbf{w}_h^{m-1} - \mathbf{w}_h^{m-2}$$

et

$$z_h^n = \delta^2 z_h^{m-1} + 2z_h^{m-1} - z_h^{m-2}.$$

Par conséquent,

$$\| \mathbf{w}_h^m \|^2_{L^2(\Omega)^d} = 2 \left(\| \delta^2 \mathbf{w}_h^{m-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| 2\mathbf{w}_h^{m-1} - \mathbf{w}_h^{m-2} \|^2_{L^2(\Omega)^d} \right)$$

et

$$\| z_h^m \|^2_{L^2(\Omega)} = 2 \left(\| \delta^2 z_h^{m-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2z_h^{m-1} - z_h^{m-2} \|^2_{L^2(\Omega)} \right).$$

Pour τ_m assez petit, le terme

$$c_3 \tau_m (\| z_h^m \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \mathbf{w}_h^m \|^2_{L^2(\Omega)^d})$$

peut être contrôlé à l'aide des termes correspondants du premier membre de l'équation (1.75) écrite pour l'ordre m et $m-1$. Nous appliquons ainsi le lemme de Gronwall discret, pour obtenir $\mathbf{w}_h^n = z_h^n = 0$, $2 \leq n \leq N$. Grâce à la condition inf-sup, nous avons $p_h^n = 0$, $2 \leq n \leq N$.
D'où l'unicité de la solution.

□

1.6.2 Estimation d'erreur *a priori*

Dans cette section, nous établissons une estimation *a priori* de l'erreur de discrétisation du schéma numérique d'ordre deux en temps et en espace. Nous supposons alors que le pas de temps est fixe et que le maillage n'évolue pas avec le temps. Nous notons par h le pas de maillage et τ le pas de temps. Pour simplifier, nous prenons $\mathbf{u}_h^0 = P_h \mathbf{u}^0$ et $T_h^0 = R_h T^0$.

Théorème 1.6.10. *Soient* $T \in L^\infty \left(0, \hat{T}; H^3(\Omega)\right)$, $T' \in L^\infty \left(0, \hat{T}; H^2(\Omega)\right)$, $T'' \in L^\infty \left(0, \hat{T}; L^2(\Omega)\right)$ *et* $\mathbf{u} \in L^\infty \left(0, \hat{T}; H^3(\Omega)^d\right)$, *l'erreur de la température obtenue par une itération du schéma d'Euler (1.63) vérifie l'inégalité suivante, pour* τ *assez petit,*

$$\frac{1}{2} \| T_h^1 - R_h T^1 \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \alpha \tau |T_h^1 - R_h T^1|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \hat{C}_T' (h^4 + \tau^4) + \hat{C}_T'' \tau |\mathbf{u}_h^1 - P_h \mathbf{u}^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d}.$$

où P_h *et* R_h *sont les opérateurs définis dans la Proposition 1.6.2.*

Preuve. D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $\theta \in]0;1[$ telle que

$$T^0 = T^1 - \tau T'(\tau) + \frac{1}{2} \tau^2 T''(\tau\theta),$$

alors,

$$T'(\tau) = \frac{T^1 - T^0}{\tau} - \frac{\tau}{2} T''(\tau\theta). \tag{1.76}$$

La solution continue T^1 vérifie l'équation suivante, pour tout $r \in Y$

$$\left(T^{'}(\tau), r\right) + \alpha\left(\nabla T^1, \nabla r\right) + c_T\left(\mathbf{u}^1, T^1, r\right) = \left(g(\tau), r\right). \tag{1.77}$$

Nous remplaçons (1.76) dans (1.77), pour obtenir

$$\begin{aligned} &\left(T^1 - T^0, r\right) - \frac{\tau^2}{2}\left(T^{''}(\tau\theta), r\right) + \alpha\tau\left(\nabla T, \nabla r\right) \\ &\quad +\tau c_T\left(\mathbf{u}^1, T^1, r\right) = \tau\left(g(\tau), r\right). \end{aligned} \tag{1.78}$$

D'autre part, la solution T_h^1 du problème discret (1.63), vérifie l'équation suivante

$$\left(T_h^1 - T_h^0, r_h\right) + \alpha\tau\left(\nabla T_h^1, \nabla r_h\right) + \tau d_T\left(\mathbf{u}_h^1, T_h^1, r_h\right) = \tau\left(g(\tau), r_h\right). \tag{1.79}$$

Posons $r_h^1 = T_h^1 - R_h T^1$ et $\tilde{\varphi}_h^1 = R_h T^1 - T^1$, où R_h est l'opérateur défini dans la Proposition 1.6.2. Alors, en choisissant $r = r_h = r_h^1 = T_h^1 - R_h T^1$, (1.78) et (1.79) donnent

$$\begin{aligned} &((T_h^1 - T^1) - (T_h^0 - T^0), r_h^1) + \alpha\tau\left(\nabla T_h^1 - \nabla T^1, \nabla r_h^1\right) \\ &\quad +\tau d_T\left(\mathbf{u}_h^1, T_h^1, r_h^1\right) - \tau d_T\left(\mathbf{u}^1, T^1, r_h^1\right) = 0. \end{aligned}$$

Nous ajoutons et retranchons $R_h T^1$ dans le premier et le deuxième terme de l'égalité précédente

$$\begin{aligned} &\left(T_h^1 - R_h T^1, r_h^1\right) + \alpha\tau\left(\nabla(T_h^1 - R_h T^1), \nabla r_h^1\right) = \\ &\quad -\left((R_h T^1 - T^1) - (T_h^0 - T^0), r_h^1\right) + \alpha\tau\left(\nabla(R_h T^1 - T^1), \nabla r_h^1\right) \\ &\quad -\left(\tau d_T\left(\mathbf{u}_h^1, T_h^1, r_h^1\right) - \tau d_T\left(\mathbf{u}^1, T^1, r_h^1\right)\right) + \frac{\tau^2}{2}\left(T^{''}(\tau\theta), r\right). \end{aligned}$$

D'où

$$\| r_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\tau |r_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)} \;=\; B_1 + B_2 + B_3 + B_4. \tag{1.80}$$

Comme $R_h T^0 = T_h^0$, alors

$$\begin{aligned} |B_1| &= \left| \int_{t_0}^{t_1} \left((R_h T^{'} - T^{'})(t), r_h^1\right) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon_1} \tau c_R^2 (S_2^0)^4 h^4 \| T^{'} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^2(\Omega)\right)} + \frac{\tau\varepsilon_1}{2} |r_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pour le terme B_2, nous avons le résultat suivant

$$\begin{aligned} |B_2| &= \left|\alpha\tau\left(\nabla(R_h T^1 - T^1), \nabla r_h^1\right)\right| \\ &\leq \frac{2}{2\varepsilon_2} \tau\alpha c_R^2 h^4 \| T \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^3(\Omega)\right)} + \frac{\tau\alpha\varepsilon_2}{2} |r_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Le terme trilinéaire B_3 s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} |B_3| &= \left| d_T\left(\mathbf{u}_h^1 - P_h\mathbf{u}^1, R_hT^1, r_h^1\right) + d_T\left(P_h\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^1, R_hT^1, r_h^1\right) \right. \\ &\quad \left. + d_T\left(\mathbf{u}^1, R_hT^1 - T^1, r_h^1\right)\right| \\ &= |B_{3,1} + B_{3,2} + B_{3,3}|\,. \end{aligned}$$

Nous traitons chaque terme séparement, pour obtenir en utilisant la Remarque 1.6.4, les majorations suivantes ;

$$\begin{aligned} |B_{3,1}| &\leq \frac{1}{\varepsilon_3}\tau(S_4^0)^4(c_R^{'})^2 \left\| T \right\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)\right)} |\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &\quad + \tau\varepsilon_3 |r_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)}, \\ |B_{3,2}| &\leq \frac{1}{\varepsilon_4}\tau(S_4^0)^4 c_P^2 (c_R^{'})^2 h^4 \left\| T \right\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)\right)} \left\| \mathbf{u} \right\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^3(\Omega)^d\right)} \\ &\quad + \tau\varepsilon_4 |r_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)}, \\ |B_{3,3}| &\leq \frac{1}{\varepsilon_5}\tau(S_4^0)^4 c_R^2 h^4 \left\| \mathbf{u} \right\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)^d\right)} \left\| T \right\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^3(\Omega)\right)} \\ &\quad + \tau\varepsilon_5 |r_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} B_4 &= \left| \frac{\tau^2}{2}\left(T^{''}(\tau\theta), r_h^1\right)\right| \\ &\leq \frac{\tau^4}{4\varepsilon_6} \left\| T^{''} \right\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} + \frac{\varepsilon_6}{4} \left\| r_h^1 \right\|^2_{L^2(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

En utilisant les estimations obtenues, (1.80) s'écrit

$$\left\| r_h^1 \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\tau |r_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \hat{\xi}_1(h^4 + \tau^4) + \hat{\xi}_2\tau|\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d} + \hat{\xi}_3\tau|r_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{\varepsilon_6}{4}\left\| r_h^1 \right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

où $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2$ et $\hat{\xi}_3$ dépendent des ε_i, $i = 1, .., 6$. Nous choisissons $\varepsilon_6 = 2$ et les ε_i, $i \in \{1, ..., 5\}$ de sorte d'avoir $\hat{\xi}_3 = \dfrac{\alpha}{2}$. D'où,

$$\frac{1}{2}\left\| r_h^1 \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\alpha\tau |r_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \hat{C}_T^{'}(h^4 + \tau^4) + \hat{C}_T^{''}\tau|\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d}$$

□

Théorème 1.6.11. *Soient $d = 2$, $\mathbf{u} \in L^\infty\left(0, \hat{T}; H^3(\Omega)^d\right)$, $\mathbf{u}^{'} \in L^\infty\left(0, \hat{T}; L^2(\Omega)^d\right)$ et $p \in L^\infty\left(0, \hat{T}; H^2(\Omega)\right)$. Pour tous $\delta_1 \in \mathbb{R}_+^*$, il existe des constantes positives $\hat{C}_{\mathbf{u}}^{'}$, $\hat{C}_{\mathbf{u}}^{''}$, $\bar{C}_{\mathbf{u}}^{''''}$ et $\hat{C}_{\mathbf{u}}^{''''}$ indépendantes de δ_1 telles que, pour τ assez petit,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\| \mathbf{v}_h^1 \right\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\tau\hat{\nu}_1}{2}|\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d} &\leq \hat{C}_{\mathbf{u}}^{'}(h^4 + \tau^4) + \hat{C}_{\mathbf{u}}^{''''}\delta_1\tau|T_h^1 - T^1|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &\quad + \left(\hat{C}_{\mathbf{u}}^{''} + \frac{\hat{C}^{''''}{}_{\mathbf{u}}}{\delta_1}\right)\tau \left\| T_h^1 - T^1 \right\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{1.81}$$

où P_h et R_h sont les opérateurs définis dans la Proposition 1.6.2.

Preuve. Pour démontrer (1.81) il suffit de suivre les mêmes étapes de la preuve du Théorème 1.6.10. Nous utilisons la formule de Taylor-Lagrange, alors il existe $\theta \in]0;1[$ tel que,

$$\mathbf{u}^{'}(\tau) = \frac{\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0}{\tau} + \frac{1}{2}\tau\mathbf{u}^{''}(\tau\theta). \tag{1.82}$$

Notons $\mathbf{v}_h^1 = \mathbf{u}_h^1 - P_h\mathbf{u}^1$ et $\varphi_h^1 = P_h\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^1$, où P_h est l'opérateur défini dans la Proposition 1.6.2. Le problème continue (E) donne, pour $t = t_1 = \tau$ et $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h^1$, la relation suivante :

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{u}^{'}(\tau), \mathbf{v}_h^1\right) + \left(\nu(T^1)\nabla\mathbf{u}^1, \nabla\mathbf{v}_h^1\right) - \left(p^1, \text{div } \mathbf{v}_h^1\right) + d_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1, \mathbf{v}_h^1\right)\\ &\quad = \tau\left(\mathbf{f}_0(t_1), \mathbf{v}_h^1\right) + \tau\left(\mathbf{f}_1(T^1), \mathbf{v}_h^1\right)\end{aligned}$$

la formule 1.82 nous donne,

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0, \mathbf{v}_h^1\right) - \frac{1}{2}\tau^2\left(\mathbf{u}^{''}(\tau\theta), \mathbf{v}_h^1\right) + \tau\left(\nu(T^1)\nabla\mathbf{u}^1, \nabla\mathbf{v}_h^1\right)\\ &\quad - \tau\left(p^1, \text{div } \mathbf{v}_h^1\right) + \tau d_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1, \mathbf{v}_h^1\right) = \tau\left(\mathbf{f}_0(t_1), \mathbf{v}_h^1\right) + \tau\left(\mathbf{f}_1(T^1), \mathbf{v}_h^1\right).\end{aligned} \tag{1.83}$$

D'autre part, la solution $(\mathbf{u}_h^1, p_h^1, T_h^1)$ vérifie l'équation discrète suivante, pour $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h^1$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^0}{\tau}, \mathbf{v}_h^1\right) + \left(\nu(T_h^1)\nabla\mathbf{u}_h^1, \nabla\mathbf{v}_h^1\right) - \left(p_h^1, \text{div } \mathbf{v}_h^1\right)\\ &\quad + d_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}_h^1, \mathbf{u}_h^1, \mathbf{v}_h^1\right) = \left(\mathbf{f}_0^1, \mathbf{v}_h^1\right) + \left(\mathbf{f}_1(T_h^1), \mathbf{v}_h^1\right).\end{aligned} \tag{1.84}$$

(1.83) et (1.84) impliquent,

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}^1, \mathbf{v}_h^1\right) + \frac{1}{2}\tau^2\left(\mathbf{u}^{''}(\tau\theta), \mathbf{v}_h^1\right) + \tau\left(\nu(T_h^1)\mathbf{u}_h^1 - \nu(T^1)\nabla\mathbf{u}^1, \nabla\mathbf{v}_h^1\right)\\ &\quad - \tau\left(p_h^1 - p^1, \text{div } \mathbf{v}_h^1\right) + \tau d_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}_h^1, \mathbf{u}_h^1, \mathbf{v}_h^1\right) - \tau d_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1, \mathbf{v}_h^1\right)\\ &\quad = \tau\left(\mathbf{f}_1(T_h^1) - \mathbf{f}_1(T^1), \mathbf{v}_h^1\right) + \left(\mathbf{u}_h^0 - \mathbf{u}^0, \mathbf{v}_h^1\right).\end{aligned} \tag{1.85}$$

Nous ajoutons et nous retranchons $P_h\mathbf{u}^1$ dans le premier et le troisième terme de (1.85), ensuite nous intercalons $\pm\left(\nu(T_h^1)\nabla P_h\mathbf{u}^1, \mathbf{v}_h^1\right)$, pour obtenir,

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{v}_h^1\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \tau\hat{\nu}_1|\mathbf{v}_h^1|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \leq\\ &\quad |\tau\left(\nu(T_h^1)P_h\mathbf{u}^1 - \nu(T^1)\nabla\mathbf{u}^1, \nabla\mathbf{v}_h^1\right)| + |\tau\left(p_h^1 - p^1, \text{div } \mathbf{v}_h^1\right)|\\ &\quad |\tau\left(d_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}_h^1, \mathbf{u}_h^1, \mathbf{v}_h^1\right) - d_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1, \mathbf{v}_h^1\right)\right)| + |\frac{1}{2}\tau^2\left(\mathbf{u}^{''}(\tau\theta), \mathbf{v}_h^1\right)|\\ &\quad + |\tau\left(\mathbf{f}_1(T_h^1) - \mathbf{f}_1(T^1), \mathbf{v}_h^1\right)| + |\left(\left(P_h\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^1\right) - \left(\mathbf{u}_h^0 - \mathbf{u}^0\right), \mathbf{v}_h^1\right)|.\end{aligned} \tag{1.86}$$

Notons B_1,...,B_6 les termes du second membre de l'équation précédente.
Nous suivons la même démarche de la preuve du Théorème 1.6.13. Alors, en utilisant

la Proposition 1.6.2, le Lemme 1.2.3 et le fait que ν est bornée et lipschitzienne, nous obtenons

$$\begin{aligned} B_1 &= \tau\left(\nu(T_h^1)\nabla(P_h\mathbf{u}^1-\mathbf{u}^1),\nabla\mathbf{v}_h^1\right)+\tau\left(\left(\nu(T_h^1)-\nu(T^1)\right)\nabla\mathbf{u}^1,\nabla\mathbf{v}_h^1\right)\\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon_1}\hat{\nu}_2^2c_P^2h^4\tau\,\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^3(\Omega)^d\right)}+\frac{1}{2}\tau\varepsilon_1|\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d}\\ &\quad+\frac{1}{2\varepsilon_2\delta_1}\tau(\nu^*)^2\,\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};W^{1,4}(\Omega)^d\right)}\|\,T_h^1-T^1\,\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\quad+\frac{1}{2\varepsilon_2}\delta_1\tau(\nu^*)^2\,\|\,\mathbf{u}\,\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};W^{1,4}(\Omega)^d\right)}\,|T_h^1-T^1|^2_{H_0^1(\Omega)}+\frac{1}{2}\varepsilon_2|\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Comme $r_hp^1, p_h^1\in M_{1h}$,alors

$$\tau(r_hp^1,\text{div }\mathbf{v}_h^1)=0$$

et

$$\tau(p_h^1,\text{div }\mathbf{v}_h^1)=0,$$

où r_h est l'opérateur introduit dans la Proposition 1.6.2. D'où

$$\begin{aligned} B_2 &= \tau\left(r_hp^1-p^1,\text{div }\mathbf{v}_h^1\right)\\ &\leq \frac{\tau c_r^2h^4}{\varepsilon_3}\,\|\,p\,\|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^2(\Omega)\right)}+\frac{\tau\varepsilon_3}{2}|\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Ensuite, nous intercalons dans B_3, le terme $\tau d_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}_h^1,P_h\mathbf{u}^1,\mathbf{v}_h^1\right)$, pour avoir d'après le Théorème 1.4.6

$$B_3=\tau d_u\left(\mathbf{u}_h^1,P_h\mathbf{u}^1,\mathbf{v}_h^1\right)-\tau d_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}^1,\mathbf{u}^1,\mathbf{v}_h^1\right).$$

Nous ajoutons et retranchons les termes suivants

$$\tau d_{\mathbf{u}}\left(P_h\mathbf{u}^1,P_h\mathbf{u}^1,\mathbf{v}_h^1\right)\text{ et }\tau d_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}^1,P_h\mathbf{u}^1,\mathbf{v}_h^1\right).$$

Alors B_3 s'écrit

$$\begin{aligned} B_3 &= \tau d_u\left(\mathbf{v}_h^1,P_h\mathbf{u}^1,\mathbf{v}_h^1\right)+\tau d_{\mathbf{u}}\left(\varphi_h^1,P_h\mathbf{u}^1,\mathbf{v}_h^1\right)+\tau d_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}^1,\varphi_h^1,\mathbf{v}_h^1\right)\\ &= B_{3,1}+B_{3,2}+B_{3,3}. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 1.2.3 et

$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'},\quad\text{avec }\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,$$

nous obtenons les majorations suivantes,

$$\begin{aligned}
B_{3,1} &\leq \frac{\tau}{(\varepsilon_4)^4} S_4^0 c_P^{'} \| \mathbf{u} \|_{L^\infty\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)^d\right)} \| \mathbf{v}_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)^d} \\
&\quad + 3\tau(\varepsilon_4)^{\frac{4}{3}} S_4^0 c_P^{'} \| \mathbf{u} \|_{L^\infty\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)^d\right)} |\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\
B_{3,2} &\leq \frac{\tau}{\varepsilon_5} (S_4^0)^2 (c_P^{'})^2 c_P^2 h^4 \| \mathbf{u} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)^d\right)} \| \mathbf{u} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^3(\Omega)^d\right)} \\
&\quad + \tau\varepsilon_5 |\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d}, \\
B_{3,3} &\leq \frac{\tau}{\varepsilon_6} c_P^2 (S_4^0)^2 h^4 \| \mathbf{u} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)^d\right)} \| \mathbf{u} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^3(\Omega)^d\right)} \\
&\quad + \tau\varepsilon_6 |\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
B_4 &= \frac{1}{2}\tau^2 \left(\mathbf{u}^{''}(\tau\theta), \mathbf{v}_h^1 \right) \\
&\leq \frac{1}{2\varepsilon_7} \tau^4 \| \mathbf{u}^{''} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} + \frac{1}{2}\varepsilon_7 \| \mathbf{v}_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

Le terme source sera majoré par

$$B_5 \leq \frac{1}{2\varepsilon_8} \tau (S_2^0)^2 (c_{\mathbf{f}}^*)^2 \| T_h^1 - T^1 \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\tau\varepsilon_8 |\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d}.$$

Finalement, comme $P_h \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_h^0$, alors

$$\begin{aligned}
|B_6| &= \left| \int_0^\tau \left((P_h \mathbf{u}^{'} - \mathbf{u}^{'})(t), \mathbf{v}_h^1 \right) dt \right| \\
&\leq \frac{\tau}{2\varepsilon_9} c_P^2 (S_4^0)^2 h^4 \| \mathbf{u}^{'} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^2(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\varepsilon_9}{2} |\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

Il vient des majorations obtenues, l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{v}_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \hat{\nu}_1 \tau |\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d} &\leq \hat{\xi}_1 (h^4 + \tau^4) + \hat{\xi}_2 \tau \| \mathbf{v}_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)^d} \\
&\quad + \frac{\tau(\nu^*)^2 \delta_1}{2\varepsilon_2} \| \mathbf{u} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};W^{1,4}(\Omega)^d\right)} |T_h^1 - T^1|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\quad + \left(\hat{\xi}_3 + \frac{\hat{\xi}_4}{\delta_1} \right) \tau \| T_h^1 - T^1 \|^2_{L^2(\Omega)} + \hat{\xi}_5 \tau |\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d},
\end{aligned}$$

où $\hat{\xi}_1$,...,$\hat{\xi}_5$ dépendent de ε_i, $i = 1, ...9$ et δ_1.

Après un choix convenable de ε_i, $i \in \{1, ...9\}$ (avec $\varepsilon_7 = \frac{1}{2}$) et pour $\tau \leq \frac{1}{4\hat{\xi}_2}$, nous déduisons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \| \mathbf{v}_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\tau\hat{\nu}_1}{2} |\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d} &\leq \hat{C}_{\mathbf{u}}^{'} (h^4 + \tau^4) \\
&\quad + \left(\hat{C}_{\mathbf{u}}^{''} + \frac{\hat{C}_{\mathbf{u}}^{'''}}{\delta_1} \right) \tau \| T_h^1 - T^1 \|^2_{L^2(\Omega)} + \hat{C}_{\mathbf{u}}^{''''} \delta_1 \tau |T_h^1 - T^1|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 1.6.12. *Sous les hypothèses des Théorèmes 1.6.10 et 1.6.11, il existe des constantes k_0, $\hat{C}_{\mathbf{u}}$ et $\hat{C}_T$, indépendantes de h et de τ, telles que*

$$\frac{1}{4}\,\|\,r_h^1\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}|r_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \hat{C}_T(h^4+\tau^4)$$

et

$$\frac{1}{4}\,\|\,\mathbf{v}_h^1\,\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{4}|\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \leq \hat{C}_{\mathbf{u}}(h^4+\tau^4).$$

Preuve. D'après les Théorèmes 1.6.10 et 1.6.11, nous avons

$$\frac{1}{2}\,\|\,r_h^1\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\alpha\tau|r_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \hat{C}'_T(h^4+\tau^4) + \hat{C}''_T\tau|\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\tau\hat{\nu}_1}{2}|\mathbf{v}_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)^d} &\leq \hat{C}'_{\mathbf{u}}(h^4+\tau^4) + \hat{C}''''_{\mathbf{u}}\delta_1\tau|T_h^1 - T^1|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\quad + \left(\hat{C}''_{\mathbf{u}} + \frac{\hat{C}'''_{\mathbf{u}}}{\delta_1}\right)\tau\,\|\,T_h^1 - T^1\,\|^2_{L^2(\Omega)}\,. \qquad (1.87)\end{aligned}$$

Nous intercalons $R_hT_h^1$ dans les deux termes de l'équation (1.87). Il vient de la Proposition 1.6.2 avec $\delta_1 = \dfrac{\alpha\hat{\nu}_1}{8\hat{C}''_T\hat{C}''''_{\mathbf{u}}}$,

$$\frac{1}{2}\,\|\,r_h^1\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha\tau}{4}|r_h^1|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \hat{C}'_T(h^4+\tau^4) + \hat{C}''_T\tau\,\|\,r_h^1\,\|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Supposons que $\hat{C}''_T\tau \leq \dfrac{1}{4}$, alors nous concluons l'estimation *a priori* suivante :

$$\|\,T_h^1 - T^1\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \tau|T_h^1 - T^1|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \hat{C}_T(h^4+\tau^4). \qquad (1.88)$$

L'estimation *a priori* qui correspond à la vitesse sera déduite à partir du Théorème 1.6.11 et la relation (1.88), pour τ assez petit.

□

Dans ce qui suit, nous énonçons les théorèmes intermédiaires qui nous seront utiles dans l'estimation *a priori* de l'erreur de la vitesse et la température.

Théorème 1.6.13. *Soient $(\boldsymbol{u}, T, p)$ la solution du problème continu (E), $(\boldsymbol{u}_h^n, T_h^n, p_h^n)$ la solution du problème discret. Pour $\boldsymbol{u} \in L^\infty\left(0,T;H^3(\Omega)^d\right)$, $T \in L^\infty\left(0,T;H^3(\Omega)\right)$, $T' \in L^\infty\left(0,T;H^2(\Omega)\right)$ et $T^{(3)} \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, il existe des constantes $\hat{C}'_T$, $\hat{C}''_T$ et $\hat{C}_T{}'''$ qui ne dépendent pas de h et de τ telles que,pour tout $m \leq N$*

$$\begin{aligned}&\|\,T_h^m - R_hT^m\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\,2(T_h^m - R_hT^m) - (T_h^{m-1} - R_hT^{m-1})\,\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ \sum_{n=2}^{m}\|\,\delta^2(T_h^{n-1} - R_hT^{n-1})\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=2}^{m}\tau\alpha|T_h^n - R_hT^n|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\leq\ \hat{C}'_T(\tau^4+h^4) + \hat{C}'''_T\sum_{n=2}^{m}\tau|\mathbf{u}_h^n - P_h\mathbf{u}^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d},\end{aligned}$$

où P_h et R_h sont les opérateurs définis dans la Proposition 1.6.2.

Preuve. Nous considérons l'équation de la température du problème discret (1.62). En intercalant

$$\pm 2\left(\frac{3T^n-4T^{n-1}+T^{n-2}}{2\tau},r_h\right) \text{ et } \pm 2\left(\frac{3R_hT^n-4R_hT^{n-1}+R_hT^{n-2}}{2\tau},r_h\right),$$

nous obtenons la relation suivante :

$$\begin{aligned} &2\left(\frac{3r_h^n-4r_h^{n-1}+r_h^{n-2}}{2\tau},r_h\right)+4\tau d_T\left(\mathbf{u}_h^n,T_h^n,r_h^n\right)\\ &+2\left(\frac{3\varphi_h^n-4\varphi_h^{n-1}+\varphi_h^{n-2}}{2\tau},r_h\right)+4\tau\alpha\left(\nabla T_h^n,\nabla r_h\right)\\ &+2\left(\frac{3T^n-4T^{n-1}+T^{n-2}}{2\tau},r_h\right)=4\tau\left(g^n,r_h\right), \end{aligned} \tag{1.89}$$

avec $r_h^n=T_h^n-R_hT^n$ et $\varphi_h^n=R_hT^n-T^n$, où R_h est l'opérateur défini dans la Proposition 1.6.2.
D'autre part, la deuxième équation du problème continue (E) donne, pour $t=t_n$ et $r=r_h=r_h^n$,

$$4\tau\left(T^{'}(t_n),r_h^n\right)+4\tau d_T\left(\mathbf{u}^n,T^n,r_h^n\right)+4\tau\alpha\left(\nabla T^n,\nabla r_h^n\right)=4\tau\left(g^n,r_h^n\right). \tag{1.90}$$

Qui en ajoutant et retranchant $2\left(3T^n-4T^{n-1}+T^{n-2},r_h^n\right)$, s'écrit

$$\begin{aligned} &2\left(3T^n-4T^{n-1}+T^{n-2},r_h^n\right)+4\tau d_T\left(\mathbf{u}_h^n,T^n,r_h^n\right)\\ &+4\tau\alpha\left(\nabla T_h^n,\nabla r_h^n\right)=4\tau\left(g^n,r_h^n\right)+R_1, \end{aligned} \tag{1.91}$$

avec

$$R_1=\left(\tau T^{'}(t)-\frac{3T(t)-4T(t-\tau)+T(t-2\tau)}{2},r_h\right).$$

La formule de Taylor avec reste intégral implique,

$$\left|T^{'}(t)-\frac{3T(t)-4T(t-\tau)+T(t-2\tau)}{2\tau}\right|\leq\frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{3}}\left\|T^{(3)}(x)\right\|_{L^2(t-2\tau,t)}.$$

D'après les inégalités de Cauchy-Schwarz et (1.6), nous obtenons

$$|R_1|\leq\frac{\tau^4}{24\varepsilon_1}\left\|T^{(3)}\right\|^2_{L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)}+\frac{\tau\varepsilon_1(S_2^0)^2}{2}|r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

(1.89) et (1.91) impliquent, en intercalant $\pm 4\tau\alpha\left(\nabla R_hT^n,\nabla r_h\right)$ pour $r_h=r_h^n$ et utilisant (1.67), la relation suivante

$$\begin{aligned} &\left\|r_h^n\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|2r_h^n-r_h^{n-1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\delta^2r_h^{n-1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &-\left\|r_h^{n-1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}-\left\|2r_h^{n-1}-r_h^{n-2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+4\tau\alpha|r_h^n|^2_{H^1(\Omega)}\\ &\leq\ |R_1|+\left|2\left(3\varphi_h^n-4\varphi_h^{n-1}+\varphi_h^{n-2},r_h^n\right)\right|+\tau\alpha\left|\left(\nabla\varphi_h^n,\nabla r_h^n\right)\right|\\ &\quad+\left|d_T\left(\mathbf{u}_h^n,T_h^n,r_h^n\right)-d_T\left(\mathbf{u}^n,T^n,r_h^n\right)\right|\\ &\leq\ |R_1|+A_1+A_2+A_3, \end{aligned}$$

avec

$$A_1 = |2\left(3\varphi_h^n - 4\varphi_h^{n-1} + \varphi_h^{n-2}, r_h^n\right)|,$$
$$A_2 = \tau\alpha|\left(\nabla\varphi_h^n, \nabla r_h^n\right)|$$

et

$$A_3 = |d_T\left(\mathbf{u}_h^n, T_h^n, r_h^n\right) - d_T\left(\mathbf{u}^n, T^n, r_h^n\right)|.$$

D'autre part, d'après la formule de Taylor, nous avons

$$2\left(3\varphi_h^n - 4\varphi_h^{n-1} + \varphi_h^{n-2}, r_h^n\right) = \left(R_h T^{'}(t_n) - T^{'}(t_n), r_h^n\right) + \left(R_2, r_h^n\right),$$

avec

$$R_2 \leq \frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{3}} \| R_h T^{(3)} - T^{(3)} \|_{L^2(t_{n-2}, t_n)} .$$

Or, d'après [52], l'oprérateur R_h est stable en norme L^2, alors nous obtenons, en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz,

$$\begin{aligned} |A_1| &\leq 2\tau \| R_h T^{'}(t_n) - T^{'}(t_n) \|_{L^2(\Omega)} \| r_h^n \|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \tau \frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \| R_h T^{(3)} - T^{(3)} \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \| r_h^n \|_{L^2(\Omega)} . \end{aligned}$$

A partir de l'inégalité (1.6), les propriétés de R_h (1.66) et de P_h (1.65), nous avons

$$\begin{aligned} |A_1| &\leq \frac{(S_2^0)^2 c_R^2 h^4 \tau}{2\varepsilon_2} \| T^{'} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^2(\Omega)\right)} + \frac{\varepsilon_2 \tau}{2} |r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &\quad + \frac{\tau^4 (S_2^0)^2 (c_R^{'})^2}{6\varepsilon_3} \| T^{(3)} \|_{L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)\right)} + \frac{\tau\varepsilon_3}{2} |r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

De même, $|A_2|$ sera majoré par,

$$|A_2| \leq \frac{\alpha^2 \tau h^4 c_R^2}{2\varepsilon_4} \| \mathbf{u} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^3(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\varepsilon_4}{2} \| r_h^n \|^2_{H^1(\Omega)} .$$

Enfin, pour estimer le terme $|A_3|$, nous intercalons tout d'abord les termes $\pm 4\tau\left(\mathbf{u}_h^n \nabla R_h T^n, r_h^n\right)$ et $\pm 2\tau\left(\text{div } \mathbf{u}_h^n R_h T^n, r_h^n\right)$ et nous utilisons la Proposition 1.4.6,

$$\begin{aligned} |A_3| &= 4\tau\left(\mathbf{u}_h^n \nabla R_h T^n, r_h^n\right) + 2\tau\left(\text{div } \mathbf{u}_h^n R_h T^n, r_h^n\right) \\ &\quad - 4\tau\left(\mathbf{u}^n \nabla T^n, r_h^n\right) - 2\tau\left(\text{div } \mathbf{u}^n T^n, r_h^n\right), \end{aligned}$$

ensuite, nous ajoutons et nous retranchons les termes

$$4\tau\left(P_h\mathbf{u}^n \nabla R_h T^n, r_h^n\right),\ 2\tau\left(\text{div } (P_h\mathbf{u}^n) R_h T^n, r_h^n\right),\ 4\tau\left(\mathbf{v}_h^n \nabla T^n, r_h^n\right) \text{ et } 2\tau\left(\text{div } (\mathbf{v}_h^n) T^n, r_h^n\right),$$

pour obtenir la relation suivante,

$$|A_3| \leq |A_{3,1}| + |A_{3,2}| + |A_{3,3}|,$$

avec

$$\begin{aligned} A_{3,1} &= 4\tau\left(\mathbf{v}_h^n \nabla R_h T^n, r_h^n\right) + 2\tau\left(\text{div } \mathbf{v}_h^n R_h T^n, r_h^n\right), \\ A_{3,2} &= 4\tau\left(P_h \mathbf{u}^n \nabla \varphi_h^n, r_h^n\right) + 2\tau\left(\text{div } \mathbf{v}_h^n \varphi_h^n, r_h^n\right), \\ A_{3,3} &= 4\tau\left((P_h \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^n)\nabla T^n, r_h^n\right) + 2\tau\left(\text{div } (P_h \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^n) T^n, r_h^n\right). \end{aligned}$$

Pour majorer $A_{3,1}$, $A_{3,2}$ et $A_{3,3}$, nous appliquons les inégalités de Sobolev, de Hölder et (1.6), de même que la Proposition 1.6.2. Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} |A_{3,1}| \leq\ & \frac{2(S_4^0)^4 (c_R^{'})^2 \tau}{\varepsilon_5} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \| T \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)} \\ & + \frac{(S_4^0)^4 (c_R^{'})^2 \tau}{\varepsilon_6} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \| T \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)} \\ & + 2\tau\varepsilon_5 |r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} + \tau\varepsilon_6 |r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_{3,2}| \leq\ & \frac{2(S_4^0)^4 (c_P^{'})^2 c_R^2 \tau}{\varepsilon_7} h^4 \| T \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T}:H^3(\Omega)\right)} \| u \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)^d\right)} \\ & + \frac{(S_4^0)^4 (c_P^{'})^2 c_R^2 \tau}{\varepsilon_8} h^4 \| T \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T}:H^3(\Omega)\right)} \| T \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)} \\ & + 2\tau\varepsilon_7 |r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} + \tau\varepsilon_8 |r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |A_{3,3}| \leq\ & \frac{2(S_4^0)^4 c_R^2 \tau}{\varepsilon_9} h^4 \| \mathbf{u} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T}:H^3(\Omega)^d\right)} \| T \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^1(\Omega)\right)} \\ & + \frac{(S_4^0)^4 (c_R^{'})^2 \tau}{\varepsilon_{10}} h^4 \| \mathbf{u} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T}:H^3(\Omega)^d\right)} \| T \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)\right)} \\ & + 2\tau\varepsilon_9 |r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} + \tau\varepsilon_{10} |r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Finalement, nous utilisons les majorations obtenues précédemment pour obtenir, en sommant sur n de 2 jusqu'à $m \leq N$, l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & \| r_h^m \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2r_h^m - r_h^{m-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=2}^{m} \| \delta^2 r_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + 4\sum_{n=2}^{m} \tau\alpha |r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ & \leq \xi_1(\tau^4 + h^4) + \xi_2 \sum_{n=2}^{m} \tau |r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} + \xi_3 \sum_{n=2}^{m} \tau |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\ & \quad + 3 \| r_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{1.92}$$

avec ξ_i, $i = 1, ..., 3$ dépendent de ε_i, $i = 1, ..., 10$.
D'après le Théorème 1.6.10, avec un choix convenable de ε_i pour $i \in \{1, ..., 10\}$ (avec

$\xi_2 = 2\alpha$), (1.92) devient

$$\| r_h^m \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2r_h^m - r_h^{m-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=2}^{m} \| \delta^2 r_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=2}^{m} \tau\alpha |r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)}$$
$$\leq \hat{C}'_T(\tau^4 + h^4) + \hat{C}''_T \sum_{n=2}^{m} \tau |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d},$$

où $\hat{C}'_T$ et $\hat{C}''_T$ sont des constantes indépendantes de τ et de h.

□

Le théorème suivant nous donne l'estimation *a priori* de l'erreur de la vitesse.

Théorème 1.6.14. *Soient $d = 2$, $(\boldsymbol{u}, T, p)$ la solution du problème continu (E), $(\boldsymbol{u}_h^n, T_h^n, p_h^n)$ la solution du problème discret (1.62). Pour $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^2) \cap L^\infty(0,T;W^{1,4}(\Omega)^2)$, $p \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$, $\mathbf{u}' \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^2)$ et $\mathbf{u}^{(3)} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)$. Pour tout $\tilde{\delta}_1 \in \mathbb{R}_+^*$, il existe des constantes $\hat{C}_{\mathbf{u}}$ et $\hat{C}'_{\mathbf{u}}$ indépendantes de $\tilde{\delta}_1$, $\bar{C}''_{\mathbf{u}}$ dépendante de $\tilde{\delta}_1$ et $C''_{\hat{T}}$ dépendante de $\hat{T}$, telles que pour tout $m \leq N$,*

$$\| \mathbf{v}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| 2\mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{n=2}^{m} \| \delta^2 \mathbf{v}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{n=2}^{m} \tau\hat{\nu}_1 |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d}$$
$$\leq C''_{\hat{T}} \left(\hat{C}_{\mathbf{u}}(h^4 + \tau^4) + \hat{C}'_{\mathbf{u}} \tilde{\delta}_1 \sum_{n=2}^{m} \tau |T_h^n - T^n|^2_{H_0^1(\Omega)} + \sum_{n=2}^{m} \left(\frac{\hat{C}''_{\mathbf{u}}}{\tilde{\delta}_1} + \hat{C}'''_{\mathbf{u}} \right) \tau \| T_h^n - T^n \|^2_{L^2(\Omega)} \right).$$

Toutes les constantes utilisées dans la précédante majoration sont indépendentes de h et de τ.

Preuve. Nous posons $\mathbf{v}_h^n = \mathbf{u}_h^n - P_h\mathbf{u}^n$ et $\tilde{\varphi}_h^n = P_h\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^n$. La première équation du problème (1.62) nous donne, pour $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h^n$,

$$\begin{aligned} &2\left(3\mathbf{u}_h^n - 4\mathbf{u}_h^{n-1} + \mathbf{u}_h^{n-2}, \mathbf{v}_h^n\right) + 4\tau(\nu(T_h^n)\nabla\mathbf{u}_h^n, \nabla\mathbf{v}_h^n) + 4\tau(\mathbf{u}_h^n\nabla\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h^n) \\ &\quad +2\tau\left(\text{div }(\mathbf{u}_h^n)\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h^n\right) - 4\tau(p_h^n, \text{div }\mathbf{v}_h^n) = 4\tau\left(\mathbf{f}_0^n, \mathbf{v}_h^n\right) + 4\tau\left(\mathbf{f}_1(T_h^n), \mathbf{v}_h^n\right). \end{aligned} \tag{1.93}$$

D'autre part, nous choisissons $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h^n \in V_{nh}$ et $t = t_n$ dans la première équation du problème contine (E), pour avoir

$$\begin{aligned} &4\tau\left(\mathbf{u}'(t_n), \mathbf{v}_h^n\right) + 4\tau(\nu(T^n)\nabla\mathbf{u}^n, \nabla\mathbf{v}_h^n) - 4\tau(p^n, \text{div }\mathbf{v}_h^n) \\ &\quad +4\tau(\mathbf{u}^n\nabla\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n) + 2\tau\left(\text{div }(\mathbf{u}^n)\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right) = 4\tau\left(\mathbf{f}_0^n, \mathbf{v}_h^n\right) + 4\tau\left(\mathbf{f}_1(T^n), \mathbf{v}_h^n\right). \end{aligned} \tag{1.94}$$

D'après la formule de Taylor, nous pouvons écrire

$$\left| \tau\mathbf{u}'(t) - \frac{3\mathbf{u}(t) - 4\mathbf{u}(t-\tau) + \mathbf{u}(t-2\tau)}{2} \right| \leq \frac{\tau\tau^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{3}} \| \mathbf{u}^{(3)} \|_{L^2(t-2\tau,t)}.$$

Nous intercalons $\pm 2\left(3\mathbf{u}_h^n - 4\mathbf{u}_h^{n-1} + \mathbf{u}_h^{n-2}, \mathbf{v}_h^n\right)$ dans (1.94). Ce qui implique,

$$\begin{aligned} &2\left(3\mathbf{u}_h^n - 4\mathbf{u}_h^{n-1} + \mathbf{u}_h^{n-2}, \mathbf{v}_h^n\right) + 4\tau(\nu(T^n)\nabla\mathbf{u}^n, \nabla\mathbf{v}_h^n) + 4\tau(\mathbf{u}^n\nabla\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n) \\ &+ 2\tau\left(\text{div }(\mathbf{u}^n)\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right) - 4\tau(p^n, \text{div }\mathbf{v}_h^n) - 4\tau\left(\mathbf{f}^n(T^n), \mathbf{v}_h^n\right) = \tilde{R}_1, \end{aligned} \tag{1.95}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= \left(\tau\mathbf{u}^{'}(t) - \frac{3\mathbf{u}(t) - 4\mathbf{u}(t-\tau) + \mathbf{u}(t-2\tau)}{2}, \mathbf{v}_h\right) \\ &\leq \frac{\tau^4}{24\tilde{\varepsilon}_1} \| \mathbf{u}^{(3)} \|^2_{L^2\left(0,\hat{T};L^2(\Omega)^d\right)} + \frac{\tau\tilde{\varepsilon}_1(S_2^0)^2}{2}|\mathbf{u}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

(1.93) et (1.95) donnent en ajoutant et retranchant

$$2\left(3P_h\mathbf{u}^n - 4P_h\mathbf{u}^{n-1} + P_h\mathbf{u}^{n-2}, \mathbf{v}_h^n\right) \text{ et } 4\tau(\nu(T_h^n)\nabla P_h\mathbf{u}^n, \nabla\mathbf{v}_h^n),$$

le résultat suivant :

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{v}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| 2\mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| \delta^2\mathbf{v}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} \\ &- \| \mathbf{v}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} - \| 2\mathbf{v}_h^{n-1} - \mathbf{v}_h^{n-2} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + 4\tau\hat{\nu}_1|\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\ &\leq |2\left(3\tilde{\varphi}_h^n - 4\tilde{\varphi}_h^{n-1} + \tilde{\varphi}_h^{n-2}, \mathbf{v}_h^n\right)| + |4\tau(\nu(T_h^n)\nabla P_h\mathbf{u}^n, \nabla\mathbf{v}_h^n) - 4\tau(\nu(T^n)\nabla\mathbf{u}^n, \nabla\mathbf{v}_h^n)| \\ &+|4\tau(\mathbf{u}_h^n\nabla\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h^n) + 2\tau\left(\text{div }(\mathbf{u}_h^n)\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h^n\right) - 4\tau(\mathbf{u}^n\nabla\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n) - 2\tau\left(\text{div }(\mathbf{u}^n)\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right)| \\ &+|4\tau(p_h^n - p^n, \text{div }\mathbf{v}_h^n)| + |4\tau\left(\mathbf{f}_1(T_h^n), \mathbf{v}_h^n\right) - 4\tau\left(\mathbf{f}_1(T^n), \mathbf{v}_h^n\right)| + |\tilde{R}_1|. \end{aligned}$$

Nous notons les termes du membre droite de l'équation précédente, respectivement, $\tilde{A}_i$ pour $i \in \{1, ..., 5\}$.
Or,

$$\frac{3\tilde{\varphi}_h^n - 4\tilde{\varphi}_h^{n-1} + \tilde{\varphi}_h^{n-2}}{2\tau} = P_h\mathbf{u}^{'}(t_n) - u^{'}(t_n) + \tilde{R}_2,$$

avec

$$|\tilde{R}_2| \leq \frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{3}} \left\| \left(P_h\mathbf{u}^{(3)} - \mathbf{u}^{(3)}\right)(x) \right\|_{L^2(t_{n-2},t_n)}.$$

Comme P_h est stable en norme H_0^1, alors nous obtenons en utilisant les inégalités de Hölder, (1.6) et la Proposition 1.6.2, l'estimation suivante

$$\begin{aligned} |\tilde{A}_1| &\leq \frac{2(c_P)^2h^4}{\tilde{\varepsilon}_2} \| \mathbf{u}^{'} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^2(\Omega)^d\right)} + 2\tau\tilde{\varepsilon}_2|\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\ &+ \frac{(S_4^0)^4\tau^4(c_P^{'})^2}{\tilde{\varepsilon}_3} \| \mathbf{u}^{(3)} \|^2_{L^2\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)^d\right)} + \tau\tilde{\varepsilon}_3|\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \end{aligned}$$

Pour le terme $|\tilde{A}_2|$, nous intercalons $\pm 4\tau\left(\nu(T_h^n)\nabla\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right)$. Il vient des inégalités de Hölder,

de Sobolev, (1.64) et du Lemme 1.2.3 le résultat suivant :

$$\begin{aligned}|\tilde{A}_2| \;\leq\; & \frac{2(\hat{\nu}_2)^2 c_P^2 h^4 \tau}{\tilde{\varepsilon}_4} \| \mathbf{u} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^3(\Omega)^d\right)} + 2\tau\tilde{\varepsilon}_4 |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\ & + \frac{2\tau(\nu^*)^4}{\tilde{\varepsilon}_5\tilde{\delta}_1} \| \mathbf{u} \|^4_{L^\infty\left(0,\hat{T};W^{1,4}(\Omega)^d\right)} \| T_h^n - T^n \|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \frac{\tau\tilde{\delta}_1}{\tilde{\varepsilon}_5} |T_h^n - T^n|^2_{H_0^1(\Omega)} + \tau\tilde{\varepsilon_5} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d}.\end{aligned}$$

Ensuite, nous ajoutons et nous retranchons dans $\tilde{A}_3$ les termes

$$4\tau d_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}_h^n, P_h\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right), \quad 4\tau d_{\mathbf{u}}\left(P_h\mathbf{u}^n, P_h\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right) \text{ et } 4\tau d_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}^n, P_h\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right).$$

D'après la Proposition 1.4.6, nous obtenons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}|\tilde{A}_3| \;\leq\; & |4\tau\left(\mathbf{v}_h^n \nabla P_h\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right) + 2\tau\left(\text{div }(\mathbf{v}_h^n) P_h\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right)| \\ & + |4\tau\left((P_h\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^n)\nabla P_h\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right) + 2\tau\left(\text{div }(P_h\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^n) P_h\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right)| \\ & + |4\tau\left(\mathbf{u}^n \nabla (P_h\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^n), \mathbf{v}_h^n\right) + 2\tau\left(\text{div }(\mathbf{u}^n)(P_h\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^n)\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_h^n\right)| \\ \leq\; & \tilde{A}_{3,1} + \tilde{A}_{3,2} + \tilde{A}_{3,3}.\end{aligned}$$

Alors, en utilisant la relation suivante

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \quad \text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

lLa Remarque 1.6.4 et le Lemme 1.2.3, nous obtenons la majoration suivante,

$$\begin{aligned}|\tilde{A}_{3,1}| \;\leq\; & 4\tau S_4^0 (c_P')^2 2^{\frac{1}{4}} \| \mathbf{u} \|_{L^\infty\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)^d\right)} \| \mathbf{v}_h^n \|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)^d} |\mathbf{v}_h^n|^{\frac{3}{2}}_{H_0^1(\Omega)^d} \\ \leq\; & 4\tau S_4^0 (c_P')^2 \| \mathbf{u} \|_{L^\infty\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)^d\right)} \left(\frac{1}{2(\tilde{\varepsilon}_6)^4} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} + \frac{3(\tilde{\varepsilon}_6)^{\frac{4}{3}}}{4} \| \mathbf{v}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} \right).\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}|\tilde{A}_{3,2}| \;\leq\; & \frac{4\tau(S_4^0)^4 (c_P')^2 c_P^2}{\tilde{\varepsilon}_7} h^4 \| \mathbf{u} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)^d\right)} \| \mathbf{u} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^3(\Omega)^d\right)} \\ & + 4\tau\tilde{\varepsilon}_7 |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|\tilde{A}_{3,3}| \;\leq\; & \frac{4\tau(S_4^0)^4 c_P^2}{\tilde{\varepsilon}_8} h^4 \| \mathbf{u} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)^d\right)} \| \mathbf{u} \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^3(\Omega)^d\right)} \\ & + 4\tau\tilde{\varepsilon}_8 |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d}.\end{aligned}$$

D'autre part, comme $r_h p^n, p_h^n \in M_{nh}$,alors

$$4\tau(r_h p^n, \text{div } \mathbf{v}_h^n) = 0$$

et

$$4\tau(p_h^n, \text{div } \mathbf{v}_h^n) = 0,$$

où r_h est l'opérateur introduit dans la Proposition 1.6.2. D'où,

$$|\tilde{A}_4| \leq \frac{4\tau c_r^2 h^4}{\tilde{\varepsilon}_9} \| p \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^2(\Omega)\right)} + 2\tau\tilde{\varepsilon}_9 |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d}.$$

Finalement, pour le terme $\tilde{A}_5$, nous utilisons le fait que $\mathbf{f}_1$ est $c^*_{\mathbf{f}_1}$-lipschitzienne pour obtenir

$$|\tilde{A}_5| \leq \frac{2\tau(c^*_{\mathbf{f}})^2(S_2^0)^2}{\tilde{\varepsilon}_{10}} \| T_h^n - T^n \|^2_{L^2(\Omega)} + 2\tau\tilde{\varepsilon}_{10} |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d}.$$

Nous sommons sur n allant de 2 à m. Alors les estimations obtenues précédemment nous donnent

$$\begin{aligned}
&\| \mathbf{v}_h^m \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| 2\mathbf{v}_h^m - \mathbf{v}_h^{m-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{n=2}^{m} \| \delta^2 \mathbf{v}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} - 3 \| \mathbf{v}_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)^d} \\
&+ 4\sum_{n=2}^{m} \tau\hat{\nu}_1 |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \leq \tilde{\xi}_1(h^4 + \tau^4) + \sum_{n=2}^{m} \left(\frac{\tilde{\xi}_2}{\tilde{\delta}_1} + \tilde{\xi}_3 \right) \tau \| T_h^n - T^n \|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{m} \frac{\tau\tilde{\delta}_1}{\tilde{\varepsilon}_4} |T_h^n - T^n|^2_{H_0^1(\Omega)} + \sum_{n=2}^{m} \tilde{\xi}_4 \tau \| \mathbf{v}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{n=2}^{m} \tilde{\xi}_5 \tau |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d},
\end{aligned}$$

où $\tilde{\xi}_i$, $i = 1, ..., 5$ dépendent de $\tilde{\varepsilon}_i$, $i = 1, ..., 9$.
Nous utilisons le résultat du Théorème 1.6.11 et choisissons des valeurs convenables de $\tilde{\varepsilon}_i$, pour $i \in \{1, .., 9\}$, de sorte d'avoir

$$\begin{aligned}
&\| \mathbf{v}_h^m \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| 2\mathbf{v}_h^m - \mathbf{v}_h^{m-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{n=2}^{m} \| \delta^2 \mathbf{v}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{n=2}^{m} \tau\hat{\nu}_1 |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \\
&\leq \hat{C}_{\mathbf{u}}(h^4 + \tau^4) + \left(\frac{\hat{C}''_{\mathbf{u}}}{\tilde{\delta}_1} + \hat{C}'''_{\mathbf{u}} \right) \sum_{n=2}^{m} \tau \| T_h^n - T^n \|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \hat{C}'_{\mathbf{u}} \tilde{\delta}_1 \sum_{n=2}^{m} \tau |T_h^n - T^n|^2_{H_0^1(\Omega)} + \hat{C}''''_{\mathbf{u}} \sum_{n=2}^{m} \tau \| \mathbf{v}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} + 3 \| \mathbf{v}_h^1 \|^2_{L^2(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

Nous écrivons :

$$\hat{C}''''_{\mathbf{u}} \sum_{n=2}^{m} \tau \| \mathbf{v}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} = \hat{C}''''_{\mathbf{u}} \sum_{n=2}^{m-1} \tau \| \mathbf{v}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \hat{C}''''_{\mathbf{u}} \tau \| \mathbf{v}_h^m \|^2_{L^2(\Omega)^d}.$$

Pour appliquer le lemme de Gronwall discret, nous remarquons que

$$\| \mathbf{v}_h^m \|_{L^2(\Omega)^d} \leq 2(\| \delta^2 \mathbf{v}_h^{m-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| 2\mathbf{v}_h^{m-1} - \mathbf{v}_h^{m-2} \|^2_{L^2(\Omega)^d}).$$

Le Théorème 1.6.12 et le lemme de Gronwall impliquent, pour τ suffisamment petit, la majoration suivante

$$\begin{aligned}
&\| \mathbf{v}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \| 2\mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{n=2}^{m} \| \delta^2 \mathbf{v}_h^n \|^2_{L^2(\Omega)^d} \\
&+ \sum_{n=2}^{m} \tau \hat{\nu}_1 |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \leq C''_{\hat{T}} \hat{C}_{\mathbf{u}} (h^4 + \tau^4) + C''_{\hat{T}} \hat{C}_{\mathbf{u}} \delta_1 \sum_{n=2}^{m} \tau |T_h^n - T^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\quad + C''_{\hat{T}} \left(\frac{\hat{C}''_{\mathbf{u}}}{\tilde{\delta}_1} + \hat{C}'''_{\mathbf{u}} \right) \sum_{n=2}^{m} \tau \| T_h^n - T^n \|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

avec $C''_{\hat{T}}$ est une constante qui dépend de $\hat{T}$.

□

Théorème 1.6.15. *Sous les hypothèses des Théorèmes 1.6.14 et 1.6.13, il existe deux constantes $\hat{C}_{\mathbf{u}}$ et $\hat{C}_T$ indépendantes de τ et h, pour τ assez petit, telles que*
(1.96)

$$\begin{aligned}
&\sup_{2\leq n\leq N} \| T_h^n - R_h T^n \|^2_{L^2(\Omega)} + \sup_{2\leq n\leq N} \| 2(T_h^m - R_h T^m) - (T_h^{m-1} - R_h T^{m-1}) \|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{N-1} \| \delta^2 (T_h^{n-1} - R_h T^{n-1}) \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=2}^{N} \frac{\tau\alpha}{2} |T_h^n - R_h T^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \hat{C}_T (\tau^4 + h^4)
\end{aligned}$$

et
(1.97)

$$\begin{aligned}
&\sup_{2\leq n\leq N} \| \mathbf{u}_h^n - P_h \mathbf{u}^n \|^2_{L^2(\Omega)^2} + \sup_{2\leq n\leq N} \| 2(\mathbf{u}_h^m - P_h \mathbf{u}^m) - (\mathbf{u}_h^{m-1} - P_h \mathbf{u}^{m-1}) \|^2_{L^2(\Omega)^2} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{m-1} \| \delta^2 (\mathbf{u}_h^{n-1} - P_h \mathbf{u}^{n-1}) \|^2_{L^2(\Omega)^2} + \sum_{n=2}^{m} \frac{\tau \hat{\nu}_1}{2} |\mathbf{u}_h^n - P_h \mathbf{u}^n|^2_{H_0^1(\Omega)^2} \leq \hat{C}_{\mathbf{u}} (\tau^4 + h^4),
\end{aligned}$$

avec P_h et R_h sont les opérateurs d'interpolation définis dans la Proposition 1.6.2 et $\hat{C}_{\mathbf{u}}$ et $\hat{C}_T$ sont dépendantes du temps final $\hat{T}$.

Preuve. Nous commençons par démontrer l'inégalité (1.96). D'après le résultat du Théorème 1.6.13, nous avons

$$\begin{aligned}
&\| r_h^m \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2r_h^m - r_h^{m-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \delta^2 r_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=2}^{m} \tau\alpha |r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \hat{C}'_T (\tau^4 + h^4) + \hat{C}''_T \sum_{n=2}^{m} \tau |\mathbf{v}_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)^d}. \qquad (1.98)
\end{aligned}$$

Le Théorème 1.6.14, nous permet de remplacer le dernier terme de (1.98) par

$$\hat{C}_{\mathbf{u}} (h^4 + \tau^4) + \hat{C}_{\mathbf{u}} \delta_1 \sum_{n=2}^{m} \tau |T_h^n - T^n|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left(\frac{\hat{C}''_{\mathbf{u}}}{\tilde{\delta}_1} + \hat{C}'''_{\mathbf{u}} \right) \sum_{n=2}^{m} \tau \| T_h^n - T^n \|^2_{L^2(\Omega)},$$

pour obtenir en utilisant les mêmes notations des constantes,

$$\begin{aligned} &\| r_h^m \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2r_h^m - r_h^{m-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \delta^2 r_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=2}^{m} \tau\alpha |r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \ \hat{C}'_T(\tau^4 + h^4) + \hat{C}'''_T \tilde{\delta}_1 \sum_{n=2}^{m} \tau |T_h^n - T^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &\quad + \hat{C}'''_T \left(\frac{\hat{C}''_{\mathbf{u}}}{\tilde{\delta}_1} + \hat{C}'''_{\mathbf{u}} \right) \sum_{n=2}^{m} \tau \| T_h^n - T^n \|^2_{L^2(\Omega)} \ . \end{aligned} \tag{1.99}$$

Nous écrivons,

$$|T_h^n - T^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq 2|T_h^n - R_h T^n|^2_{H_0^1(\Omega)} + 2|R_h T^n - T^n|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Il vient des propriétés de R_h, les inégalités suivantes :

$$|T_h^n - T^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq 2(c_R')^2 h^4 \| T \|^2_{L^\infty\left(0,\hat{T};H^3(\Omega)\right)} + 2|r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Nous les remplaçons dans (1.99) et choisissons $\tilde{\delta}_1 = \dfrac{\alpha}{4\hat{C}'''_T}$ pour obtenir en conservant les mêmes notations des constantes,

$$\begin{aligned} &\| r_h^m \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2r_h^m - r_h^{m-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=2}^{m} \| \delta^2 r_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{m} \tau\alpha |r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \ \hat{C}'_T(\tau^4 + h^4) + \hat{C}''_T \sum_{n=2}^{m} \tau \| r_h^n \|^2_{L^2(\Omega)} \ . \end{aligned} \tag{1.100}$$

Nous remarquons que

$$\| r_h^m \|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2 \left(\| \delta^2 r_h^m \|^2_{L^2(\Omega)} + \| 2r_h^{m-1} - r_h^{m-2} \|^2_{L^2(\Omega)} \right).$$

Pour τ assez petit, ces termes seront contrôlés par des termes correspondants du premier membre de l'équation 1.100. Alors, nous appliquons le théorème de Gronwall discret, ce qui implique l'estimation d'erreur suivante :

$$\begin{aligned} &\sup_{2\leq n\leq N} \| r_h^n \|^2_{L^2(\Omega)} + \sup_{2\leq n\leq N} \| 2r_h^m - r_h^{m-1} \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=2}^{m-1} \| \delta^2 r_h^{n-1} \|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{m} \frac{\tau\alpha}{2} |r_h^n|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \hat{C}_T(\tau^4 + h^4) \end{aligned}$$

La relation (1.97) découle du Théorème 1.6.14, en suivant les mêmes étapes de calcul et concluons la preuve du théorème.

□

Chapitre 2

Simulations numériques du problème modèle

2.1 Introduction générale

Dans ce chapitre, nous avons pour but de valider les estimations d'erreur *a priori* obtenus dans le chapitre. Nous nous intéressons alors au problème de Navier-Stokes couplé avec l'équation de la chaleur instationnnaires en dimension 2. Nous utilisons le logiciel Freefem++ créé et développé par F. Hecht, O. Pironneau et K. Ohtsuka [37].
Nous considérons le système suivant, défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x,t) - \text{div }(\nu(T(x,t))\nabla \mathbf{u}(x,t)) & & & \\ +(\mathbf{u}(x,t)\nabla).\mathbf{u}(x,t) + \nabla p(x,t) & = & \mathbf{f}(x,t,T(x,t)) & \text{dans } \Omega \times [0,\hat{T}] \\ \dfrac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \alpha \Delta T(x,t) + \mathbf{u}(x,t)\nabla T(x,t) & = & g(x,t) & \text{dans } \Omega \times [0,\hat{T}] \\ \text{div } \mathbf{u}(x,t) & = & 0 & \text{dans } \Omega \times [0,\hat{T}] \\ \mathbf{u}(x,t) & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0,\hat{T}] \\ T(x,t) & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0,\hat{T}] \\ \mathbf{u}(x,0) & = & \mathbf{u}_0(x) & \text{dans } \Omega \\ T(x,0) & = & T_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array}\right.$$

2.2 Problème discret

Nous rappelons dans cette section des schémas numériques d'ordre un et deux en temps et en espace introduits dans le premier chapitre.

2.2.1 Résolution numérique du schéma d'ordre un en temps et en espace

Nous approchons chaque composantede la vitesse par des éléments finis de type P_{1b} et nous approchons a pression et la température par des éléments finis de type P_1. Pour l'approximation en temps, nous appliquons la méthode d'Euler. Les formulations variationnelles discrètes non stabilisée et stabilisée seront données par :
(2.1)

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh},\ T_h^n \in Y_{nh} \text{ tels que, } \forall \mathbf{v}_h \in X_{nh}, r_h \in Y_{nh} \text{ et } q_h \in M_{nh}, \\ \left(\dfrac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\tau}, \mathbf{v}_h\right) + (\mathbf{u}_h^{n-1}\nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + (\nu(T_h^{n-1})\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{v}_h) - (p_h^n, \text{div } \mathbf{v}_h) = \left(\mathbf{f}^n(T_h^{n-1}), \mathbf{v}_h\right), \\ \left(\dfrac{T_h^n - T_h^{n-1}}{\tau}, r_h\right) + (\mathbf{u}_h^n \nabla T_h^n, r_h) + \alpha(\nabla T_h^n, \nabla r_h) = (g^n, r_h), \\ (q_h, \text{div } \mathbf{u}_h^n) = 0. \end{array}\right.$$

et
(2.2)

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh},\ T_h^n \in Y_{nh} \text{ tels que, } \forall \mathbf{v}_h \in X_{nh}, r_h \in Y_{nh} \text{ et } q_h \in M_{nh},\\ \left(\dfrac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\tau}, \mathbf{v}_h\right) + (\mathbf{u}_h^{n-1}\nabla\mathbf{u}_h^n, \nabla\mathbf{v}_h) + (\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - (p_h^n, \text{div } \mathbf{v}_h)\\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h\right) = \left(\mathbf{f}^n(T_h^{n-1}), \mathbf{v}_h\right),\\ \left(\dfrac{T_h^n - T_h^{n-1}}{\tau}, r_h\right) + (\mathbf{u}_h^n\nabla T_h^n, r_h) + \alpha(\nabla T_h^n, \nabla r_h) + \dfrac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}_h^n)T_h^n, r_h\right) = (g^n, r_h),\\ \qquad\qquad (q_h, \text{div } \mathbf{u}_h^n) = 0.\end{array}\right.$$

Dans nos résultats numériques effectués, nous considérons $\mathbf{u}_h^0 = \mathbf{u}_0 = 0$ et $T_h^0 = T_0 = 0$.

2.2.2 Résolution numérique du problème d'odre deux en temps et en espace

Dans certaines applications pratiques, l'ordre un en temps et en espace ne suffisent pas pour aboutir à la précision voulue où même des fois pour assurer la stabilité correspondante. Nous considérons alors une approximation plus précise de la vitesse et la température par des éléments finis de type P_2. De même, pour la discrétisation en temps nous approchons les dérivées en temps de la vitesse et la température par la méthode "BDF" d'ordre deux. Le schéma d'ordre deux considéré sera le suivant :
(2.3)

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh},\ T_h^n \in Y_{nh} \text{ tels que, } \forall \mathbf{v}_h \in X_{nh}, \forall r_h \in Y_{nh} \text{ et } \forall q_h \in M_{nh}\\ \left(\dfrac{3\mathbf{u}_h^n - 4\mathbf{u}_h^{n-1} + \mathbf{u}_h^{n-2}}{2\tau}, \mathbf{v}_h\right) + (\nu(T_h^n)\nabla\mathbf{u}_h^n, \nabla\mathbf{v}_h) - (p_h^n, \text{div } \mathbf{v}_h)\\ \qquad\qquad +(\mathbf{u}_h^n\nabla\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + \dfrac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}_h^n)\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h\right) = \left(\mathbf{f}(T_h^n), \mathbf{v}_h\right),\\ \left(\dfrac{3T_h^n - 4T_h^{n-1} + T_h^{n-2}}{2\tau}, r_h\right) + (\mathbf{u}_h^n\nabla T_h^n, r_h) + \alpha(\nabla T_h^n, \nabla r_h)\\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}_h^n)T_h^n, r_h\right) = (g^n, r_h),\\ \qquad\qquad (q_h, \text{div } \mathbf{u}_h^n) = 0.\end{array}\right.$$

Pour ce schéma, nous utilisons les éléments finis de Taylor-Hood : P_2 pour la vitesse et la température et P_1 pour la pression.

2.3 Résultats numériques

L'objectif de cette section est de vérifier numériquement les résultats théoriques présentés auparavant. Nous considérons alors deux exemples numériques différents .

En premier lieu, nous effectuons l'analyse *a priori* de notre algorithme en prenant un exemple académique pour des différentes valeurs de la viscosité ν. Ensuite, nous traitons un cas plus compliqué au niveau de la stabilité des schémas numériques utilisés.

2.3.1 Validation académique

Nous considérons pour domaine Ω une géométrie simple, le carré $[0,3]^2$ où chaque arête est décomposée en N segments (voir figure 2.1), avec $[0,\hat{T}]$ est l'intervalle de temps considéré.
Nous proposons une solution théorique, $(\mathbf{u},p,T) = (t\ e^t \mathrm{rot}\psi, p, T)$, telle que pour tout

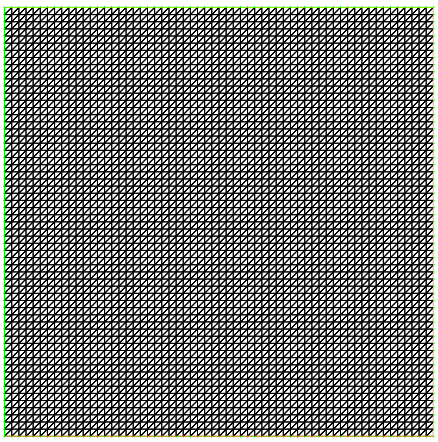


FIGURE 2.1 – Domaine Ω.

$(x,y) \in\ \Omega$.

$$
\begin{aligned}
&\psi(x,y) = e^{-30\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)},\\
&p(x,t) = t\sin t\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}y\right),\\
&T(x,t) = \sin t\ x^2(x-3)^2y^2(y-3)^2.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Cette solution vérifie la condition initiale, les conditions aux bords et la condition d'incompressiblité.
La fonction $\mathbf{f}_1$ est supposée nulle.
Par la suite, nous prenons trois cas différents de la viscosité, $\nu(T) = T+1$, $\nu(T) = \sin T+2$ et $\nu(T) = e^{-T} + \dfrac{1}{10}$.

2.3.1.1 Schéma d'ordre un en temps et en espace

Dans cette section, nous commençons par résolution du schéma non stabilisé d'ordre un en temps et en espace en appliquant la méthode de point fixe (3.6).

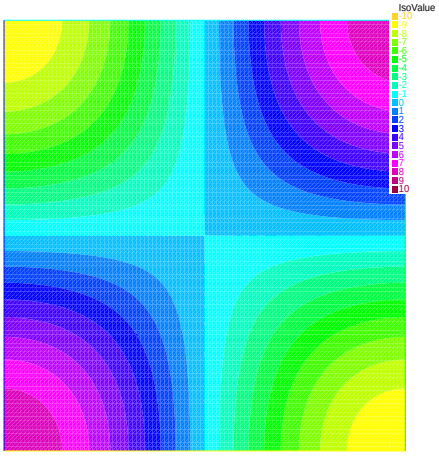


FIGURE 2.2 – Pression numérique pour $\nu(T) = T + 1$ et $N = 100$.

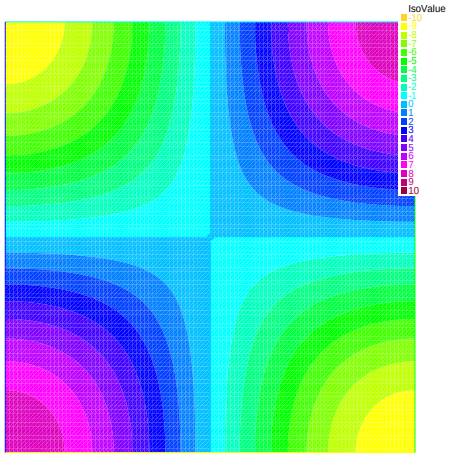


FIGURE 2.3 – Pression théorique pour $\nu(T) = T + 1$ et $N = 100$.

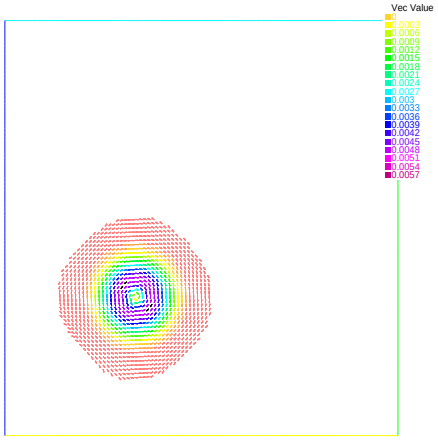


FIGURE 2.4 – Vitesse numérique pour $\nu(T) = T + 1$ et $N = 100$.

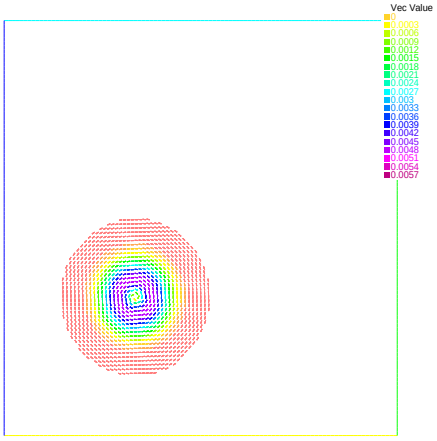


FIGURE 2.5 – Vitesse théorique pour $\nu(T) = T + 1$ et $N = 100$.

Pour $\nu(T) = T + 1$, les figures (2.2), (2.3), (2.4) et (2.5), (2.6) et (2.7) représentent, respectivement, la solution numérique et exacte de la pression, la vitesse et la température du fluide à viscosité $\nu(T) = T + 1$ pour $N = 100$ et $\hat{T} = 9s$.

Remarque 2.3.1. *Nous obtenons des figures similaires pour les solutions numérique et exacte du schéma stabilisé (2.2).*

Par la suite, pour le de l'estimation de l'erreur *a priori*, nous définissons l'erreur relative totale suivante :

(2.5)

$$err = \Big(\frac{\sum_{n=1}^{M} \tau |\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t_n)|^2_{H^1(\Omega)^2}}{\sum_{n=1}^{M} \tau |\mathbf{u}(t_n)|^2_{H^1(\Omega)^2}} + \frac{\sum_{n=1}^{M} \tau |p_h^n - p(t_n)|^2_{L^2(\Omega)}}{\sum_{n=1}^{M} \tau |p(t_n)|^2_{L^2(\Omega)}} + \frac{\sum_{n=1}^{M} \tau |T_h^n - T(t_n)|^2_{H^1(\Omega)}}{\sum_{n=1}^{M} \tau |T(t_n)|^2_{H^1(\Omega)}} \Big)^{1/2}.$$



FIGURE 2.6 – Température numérique pour $\nu(T) = T + 1$ et $N = 100$.



FIGURE 2.7 – Température théorique pour $\nu(T) = T + 1$ et $N = 100$.

Nous testons l'algorithme pour N allant de 60 à 120, par pas de 10, avec $\hat{T} = 3$, $h = \dfrac{\hat{T}}{N}$ et

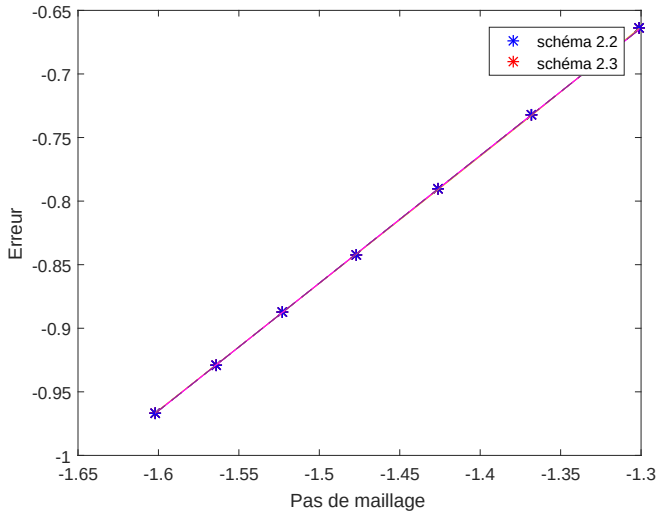


FIGURE 2.8 – Courbe d'erreur totale en échelle logarithmique pour $\nu(T) = T + 1$.

$\tau = h$. La Figure (2.8) représente, en échelle logarithmique, les courbes de l'erreur relative totale (2.5) correspondantes aux deux schémas discrets (3.6) et (2.3), en fonction du pas de maillage h.

La pente de ces deux courbes d'erreur est de l'odre de 1.0035. Ce qui confirme les résultats

théoriques obtenus dans le Théorème 1.5.6 du premier chapitre.

Par la suite, nous considérons le cas où la viscosité est de la forme $\nu(T) = \sin(T) + 2$.

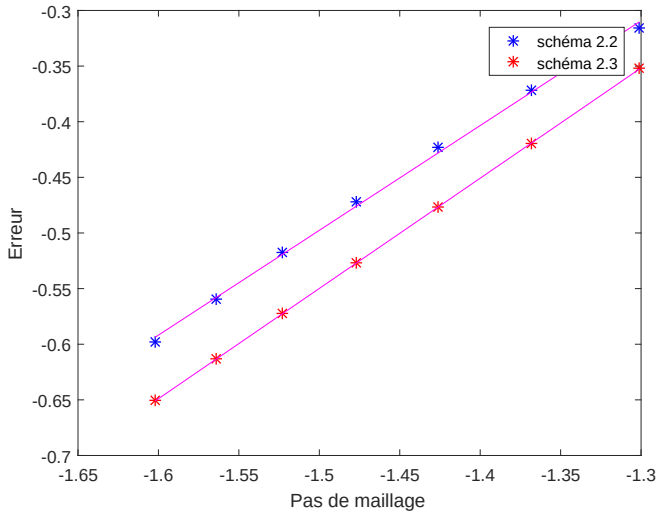


FIGURE 2.9 – Courbe d'erreur totale en échelle logarithmique pour $\nu(T) = \sin T + 2$.

Dans la Figure (2.9) nous représentons, en échelle logarithmique, le courbes d'erreur totale du schéma non stabilisé (la pente est de l'ordre de 0.9419) et du schéma stabilisé (la pente est de l'ordre de 0.9841), en fonction du pas de maillage h.
Ces courbes confirment les estimations d'erreur *a priori* obtenues dans la partie théorique.

Finalement, nous testons l'algorithme dans cas où la viscosité est donnée par $\nu(T) = e^{-T} + \dfrac{1}{10}$. Dans ce cas, les courbes d'erreur totale des schémas (3.6) et (2.3) illustrées sur la figure 2.10, sont de pentes respectives 0.9838 et 0.9841.

2.3.1.2 Schéma d'ordre deux en temps et en espace

Nous passons maintenant à tester le schéma numérique d'odre deux (2.3) en souhaitons gagner en précision et temps de calcul. Ce schéma peut être représenté formellement à chaque pas de temps, de la manière suivante :

$$F(w) = 0,$$

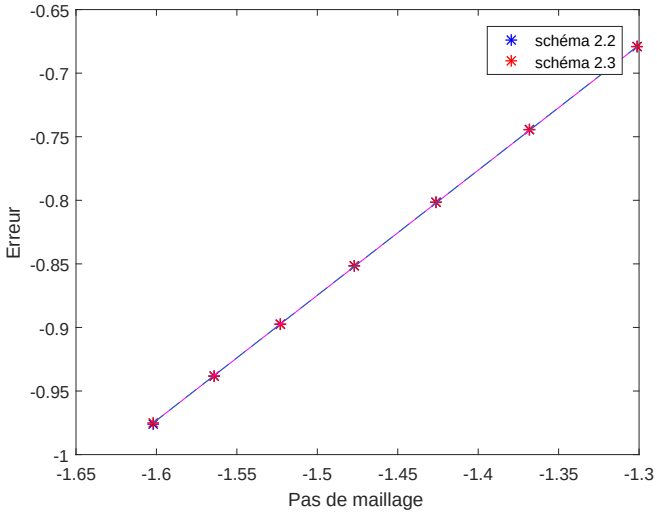


FIGURE 2.10 – Courbe d'erreur totale en échelle logarithmique, pour $\nu(T) = e^{-T} + \dfrac{1}{10}$.

où $w = (\mathbf{u}_h^n, p_h^n, T_h^n)$ et F est un opérateur qui à chaque fonction inconnue w associe la fonction,

(2.6)
$$\begin{pmatrix} \dfrac{3\mathbf{u}_h^n - 4\mathbf{u}_h^{n-1} + \mathbf{u}_h^{n-2}}{2\tau} + \mathbf{u}_h^n \nabla \mathbf{u}_h^n - \text{div } (\nu(T_h^n)\nabla \mathbf{u}_h^n) + \nabla p_h^n + \dfrac{1}{2}\text{div } (\mathbf{u}_h^n)\mathbf{u}_h^n - \mathbf{f}_0^n \\ \dfrac{3T_h^n - 4T_h^{n-1} + T_h^{n-2}}{2\tau} + \mathbf{u}_h^n \nabla T_h^n - \alpha \Delta T_h^n + \dfrac{1}{2}\text{div } (\mathbf{u}_h^n)T_h^n - g^n \end{pmatrix}.$$

Nous nous intéressons maintenant à résoudre le problème non linéaire par la méthode de Newton qui se base sur des approximations successives.

En considérant $w^0 = \left(\mathbf{u}_h^{n-1}, p_h^{n-1}, \theta_h^{n-1}\right)$, la méthode de Newton consiste à construire une suite $(w^k)_k$, solution du problème itératif suivant

$$D_w F(w^{k-1})(w^k - w^{k-1}) = -F(w^{k-1}), \tag{2.7}$$

où $D_w F$ est la dérivée de F au sens des opérateurs.
Soit $(\mathbf{u}_w, p_w, \theta_w) = w^k - w^{k-1}$, pour tous $\mathbf{v}_h \in X_{nh}$ et $r_h \in Y_{nh}$, (2.7) s'écrit de la forme

suivante :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{3\mathbf{u}_w}{2\tau}, \mathbf{v}_h\right) + (\mathbf{u}_w \nabla \mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}^{k-1} \nabla \mathbf{u}_w, \mathbf{v}_h) + (\nu(T^{k-1}) \nabla \mathbf{u}_w, \nabla \mathbf{v}_h) \\
&+ \left(\frac{d\nu}{dT}(T^{k-1}) T_w \nabla \mathbf{u}^{k-1}, \nabla \mathbf{v}_h\right) - (p_w, \text{div } \mathbf{v}_h) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}_w)\mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{v}_h\right) + \frac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}^{k-1})\mathbf{u}_w, \mathbf{v}_h\right) \\
&= -\left(\frac{3\mathbf{u}^{k-1} - 4\mathbf{u}_h^{n-1} + \mathbf{u}_h^{n-2}}{2\tau}, \mathbf{v}_h\right) - (\mathbf{u}^{k-1} \nabla \mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{v}_h) + (p^{k-1}, \text{div } \mathbf{v}_h) \\
&-(\nu(T_h^{k-1}) \nabla \mathbf{u}^{k-1}, \nabla \mathbf{v}_h) - \frac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}^{k-1})\mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{v}_h\right) + (\mathbf{f}_0^n, \mathbf{v}_h)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{3T_w}{2\tau}, r_h\right) + (\mathbf{u}_{k-1} \nabla T_w, r_h) + (\mathbf{u}_w \nabla T^{k-1}, r_h) + \alpha(\nabla T_w, \nabla r_h) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}_w)T^{k-1}, r_h\right) + \frac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}^{k-1})T_w, r_h\right) \\
&= -\left(\frac{3T^{k-1} - 4T_h^{n-1} + T_h^{n-2}}{2\tau}, r_h\right) - (T^{k-1} \nabla T^{k-1}, r_h) \\
&-\alpha(\nabla T^{k-1}, \nabla r_h) - \frac{1}{2}\left(\text{div } (u^{k-1})T^{k-1}, r_h\right) + (g^n, r_h)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

avec le critère d'arrêt classique défini par

$$err_{w^k} = \frac{|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}|_{H^1(\Omega)^2}}{|\mathbf{u}^k|_{H^1(\Omega)^2}} + \frac{|p^k - p^{k-1}|_{L^2(\Omega)}}{|p^k|_{L^2(\Omega)}} + \frac{|T^k - T^{k-1}|_{H^1(\Omega)}}{|T^k|_{H^1(\Omega)}} \leq 10^{-10}.$$

Nous testons l'algorithme pour N allant de 50 à 70 par un pas de 5.

Les courbes relatives aux estimations d'erreur totale ont été étudiées pour les différentes valeurs de la viscosité : en échelle logarithmique, la pente de la courbe représentant l'erreur pour $\nu(T) = T + 1$ (2.11) est de l'ordre deux (2.4164). De même, pour $\nu(T) = sin(T) + 2$, la pente de la courbe de l'erreur relative totale est présentée dans (2.12), est de l'ordre de 2.1983. Finalement, la pente de la courbe d'erreur totale correspondante à $\nu(T) = e^{-T} + \frac{1}{10}$ est illustrée par la Figure (2.13) où la pente correspondante est de l'ordre 1.9386. Tous ces résultats vérifient les résultats théoriques concernant l'estimation de l'erreur *a priori* obtenues dans le chapitre 1.

2.3.1.3 Efficacité des deux schémas numériques

Nous allons présenter dans cette section, une comparaison en temps de calcul de la résolution du problème de Navier-Stokes par un schéma d'ordre deux à celle par un schéma d'ordre un pour une même précision.
Les Tableaux (2.1) et (2.2) repésentent l'erreur *a priori* et le temps de calcul dans le cas des schémas numériques d'ordre un et d'ordre deux, pour différentes valeurs de N.

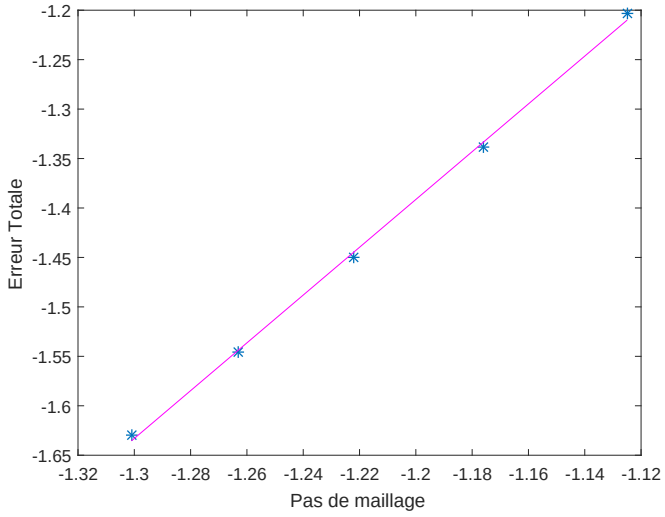


FIGURE 2.11 – Courbe d'erreur totale en échelle logarithmique pour $\nu(T) = T + 1$.

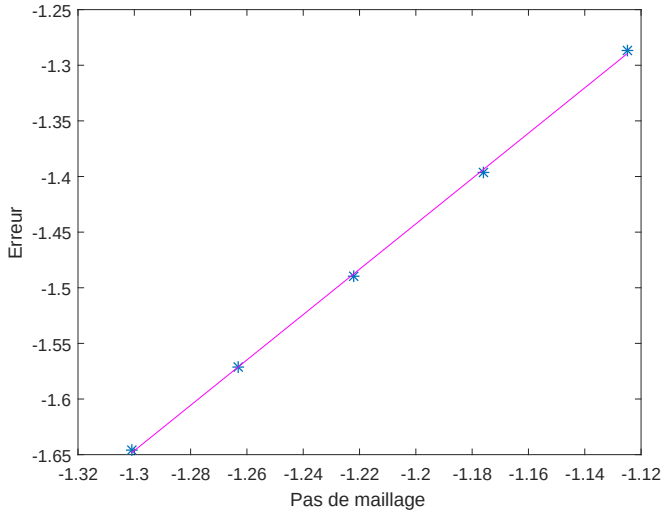


FIGURE 2.12 – Courbe d'erreur totale en échelle logarithmique pour $\nu(T) = \sin T + 2$.

Nous remarquons, d'après les Tableaux (2.1) et (2.2), qu'une erreur *a priori* de l'ordre de

$\nu = T + 1$

N	Erreur *a priori*	Temps de calcul (s)
50	0.265896	60.491
100	0.1295	495
150	0.086418	1726.08
200	0.06481	4106.3

TABLE 2.1 – L'erreur *a priori* et le temps de calcul, pour $N = 40, ..., 70$, de la résolution numérique du schéma d'ordre 1.

$\nu = T + 1$

N	Erreur *a priori*	Temps de calcul (s)
40	0.06258	285.58
50	0.035453	523.753
60	0.0234715	910.818
70	0.0169112	1736.96

TABLE 2.2 – L'erreur *a priori* et le temps de calcul, pour $N = 40, ..., 70$, de la résolution numérique du schéma d'ordre 2.

$\nu = \sin T + 2$

N	Erreur *a priori*	Temps de calcul (s)
50	0.551736	62.309
100	0.303371	516.841
150	0.202104	1680.24
200	0.151852	4974.78

TABLE 2.3 – L'erreur *a priori* et le temps de calcul, pour $N = 40, ..., 70$, de la résolution numérique du schéma d'ordre 1.

$$\nu = \sin T + 2$$

N	Erreur *a priori*	Temps de calcul (s)
30	0.159768	112.077
40	0.0516913	273.785
50	0.0324244	511.772
60	0.0225694	934.452
70	0.016627	1475.98

TABLE 2.4 – L'erreur *a priori* et le temps de calcul, pour $N = 40, ..., 70$, de la résolution numérique du schéma d'ordre 2.

$$\nu(T) = e^{-T} + \frac{1}{10}$$

N	Erreur *a priori*	Temps de calcul (s)
50	0.249432	64.901
100	0.126754	519.597
150	0.084759	1875.77
200	0.0636385	4192.4

TABLE 2.5 – L'erreur *a priori* et le temps de calcul, pour $N = 40, ..., 70$, de la résolution numérique du schéma d'ordre 1.

$$\nu(T) = e^{-T} + \frac{1}{10}$$

N	Erreur *a priori*	Temps de calcul (s)
40	0.0250141	285.199
50	0.0324244	511.772
60	0.0225694	934.452
70	0.016627	1475.98

TABLE 2.6 – L'erreur *a priori* et le temps de calcul, pour $N = 40, ..., 70$, de la résolution numérique du schéma d'ordre 2.

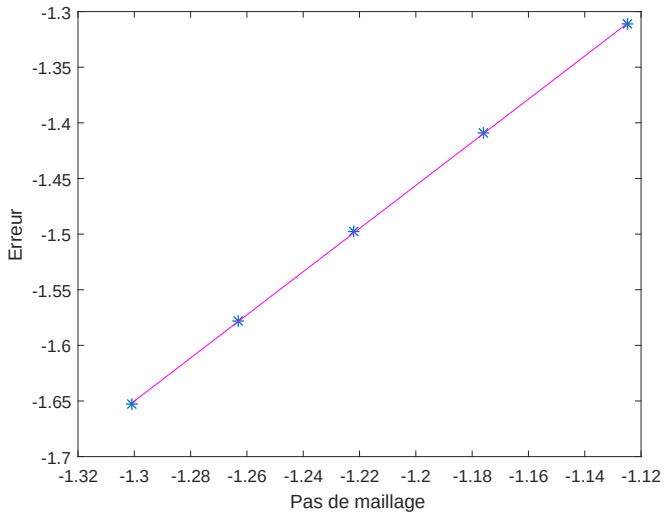


FIGURE 2.13 – Courbe d'erreur totale en échelle logarithmique pour $\nu(T) = e^{-T} + \dfrac{1}{10}$.

10^{-2} est obtenue par le schéma numérique d'ordre deux pour $N = 40$ (285.58 s), et par le schéma numérique d'ordre un pour $N = 200$ (4106.3 s). Nous concluons que le schéma d'ordre deux est plus économique que le schéma d'ordre un.

2.3.2 Convection natutelle de l'air

Afin de valider le modèle numérique proposé dans le premier chapitre, nous considérons dans cette section un cas pratique qui représente une difficulté au niveau de la stabilité numérique. Dans un premier temps, nous implémentons le schéma stabilisé d'ordre un en temps et en espace traité dans le chapitre 1. Dans un second temps, nous considérons le schéma d'ordre deux en temps et en espace. Nous comparons ensuite le temps de calcul CPU des deux schémas considérés. Nous espérons gagner en précision et en temps de calcul par un schéma d'ordre deux.

2.3.2.1 Déscription du problème modèle

La convection naturelle apparaît dans un fluide au sein duquel existe un gradient de température.En d'autre terme, dans ce type de problème le tranfert de chaleur est associé à un mouvement de fluide qui dépend des temératures des parois. Nous considérons le domaine de la Figure (2.14).

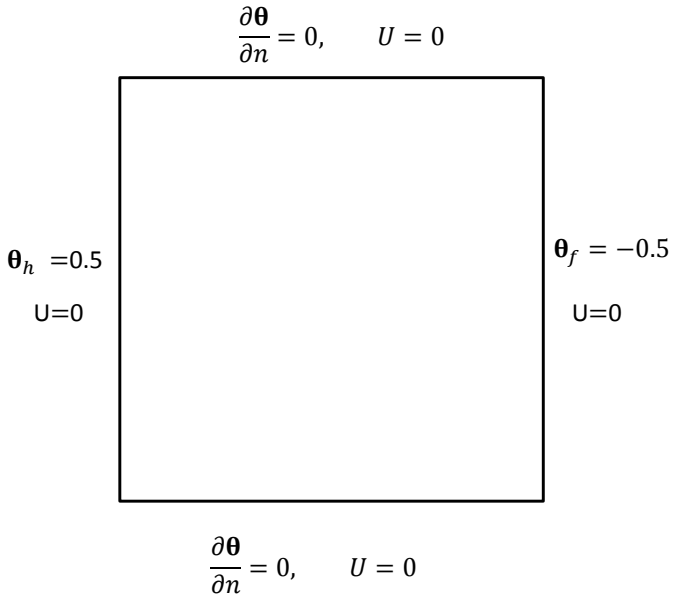


FIGURE 2.14 – Les conditions aux bords du domaine considéré.

Les arêtes verticales de la cavité sont considérées isothermes de température T_h (la température chaude) et T_f (la température froide). À ce sujet, nous référons à [25] qui définit une mise à échelle, en utilisant $L_{ref} = H = 1$ et l'état de référence du fluide $(\nu_{ref}, V_{ref}, T_{ref})$. Alors nous définissons les nouvelles variables de l'espace, de la vitesse, de la température et du temps comme suit :

$$X = \frac{x}{L_{ref}},\ U = \frac{u}{V_{ref}},\ \theta = \frac{T - T_{ref}}{T_h - T_f},\ \tau = \frac{t}{t_{ref}},\ t_{ref} = \frac{L_{ref}}{V_{ref}},$$

où $T_{ref} = \dfrac{T_h + T_f}{2}$ et $V_{ref} = \dfrac{\nu}{H}$.

La viscosité est supposé constante indépendante de la température θ tandis que la force extérieure est donnée par : $\mathbf{f}_0 = 0$ et

$$\mathbf{f}_1(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{Ra}{RePr}\theta \end{pmatrix}.$$

Nous considérons $Ra = 10^6$ (le nombre de Rayleight), $Re = 1$ (le nombre de Reynolds) et $Pr = 0.71$ (le nombre de Prandtl).

2.3.2.2 Schéma numérique d'ordre un en temps et espace

Dans ce paragraphe, nous testons l'algorithme du schéma numérique d'ordre un en temps et en espace (2.3) en utilisant la méthode d'Euler et la méthode des élements fini (P_{1b} pour la vitesse, P_1 pour la pression et la température). Les Figures (2.15), (2.16), (2.17) et (2.18) illustrent l'évolution des lignes de courant du champ de vitesse pour $N = 80$ de la méthode de point fixe.

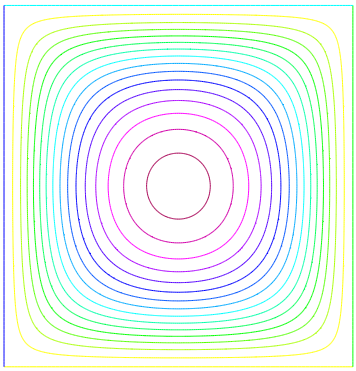


FIGURE 2.15 – Les lignes de courant de la vitesse pour $N = 80$ à $t = 0.01s$.

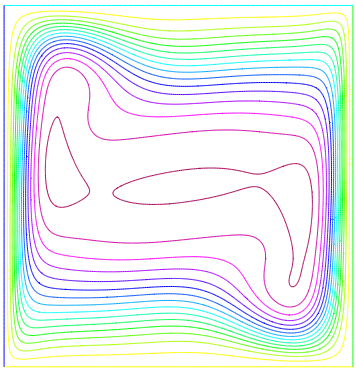


FIGURE 2.16 – Les lignes de courant de la vitesse pour $N = 80$ à $t = 0.1s$.

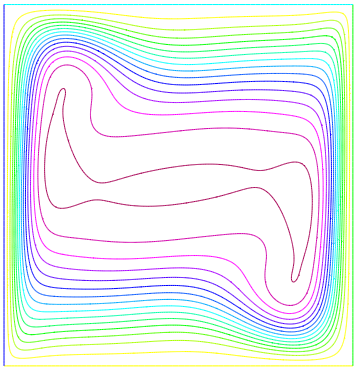


FIGURE 2.17 – Les lignes de courant de la vitesse pour $N = 80$ à $t = 0.2s$.

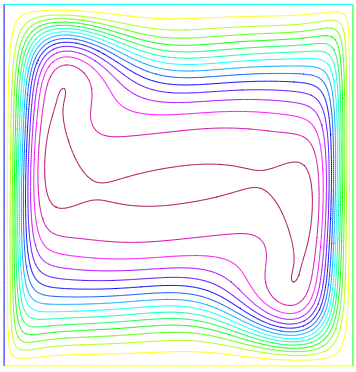


FIGURE 2.18 – Les lignes de courant de la vitesse pour $N = 80$ à $t = 0.3s$.

Dans la suite, nous comparons les simulations numériques effectuées par la méthode de point fixe à celles obtenus dans [25] où l'algorithme considéré représente le problème stationnaire (indépendant du temps) et se base sur la méthode de Newton pour un schéma numérique d'ordre 2 en espace.

Nous représentons dans le Graphe (2.19) deux courbes relatives à la vitesse horizontale $u(y)$ pour $x = 0.5$. La première courbe (en rouge) correspond au schéma d'ordre 1 (3.6), alors que la seconde (en bleue) correspond à la méthode de Newton utilisée par [25]. Nous remarquons que notre résultat est en accord avec celui obtenu dans (3.6).

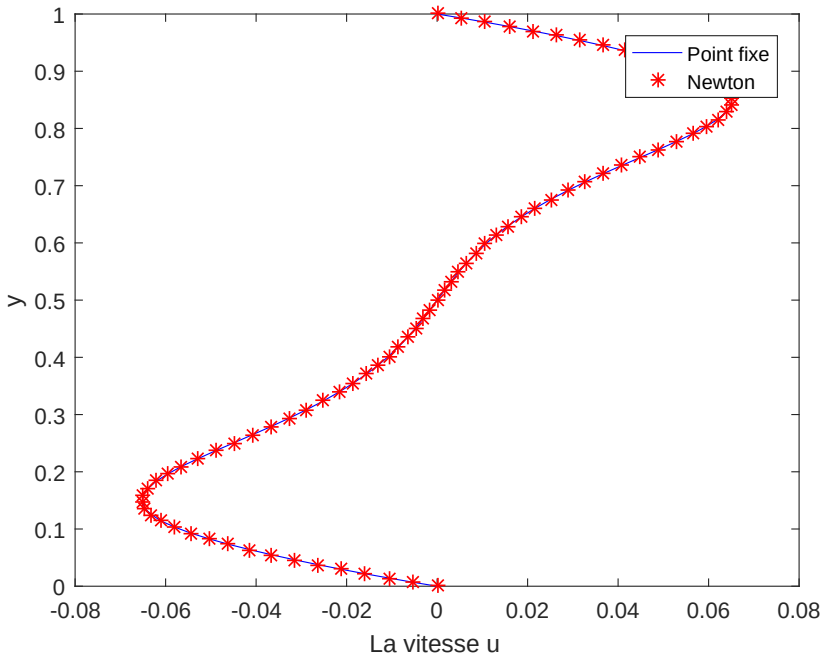


FIGURE 2.19 – Comparaison de la vitesse horizontale $u(y)$ obtenue par la méthode de Newton avec celle obtenue par la méthode Point fixe, pour $N = 80$.

Remarque 2.3.2. *Pour le problème variationnel discret non stabilisé, nous obtenons les même valeurs de la vitesse verticale $u(y)$ pour $x = 0.5$.*

2.3.2.3 Schéma numérique d'ordre deux en temps et en espace

Afin de gagner en ordre de convergence et en temps de calcul, nous discrétisons le problème de Navier-Stokes couplé avec l'équation de la chaleur d'odre deux en temps et en espace. Pour la discrétisation en espace, nous approchons la vitesse et la température par de éléments finis de tupw P_2 et la pression par des éléments finis de type P_1.Le résultat obtenu sera comparé avec celui du schéma d'ordre un en temps en en espace établi dans la section précédente.

Nous rappelons la formulation variationnelle d'ordre deux,

(2.10)

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Trouver } (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh},\ \theta_h^n \in Y_{nh} \text{ tels que,} \\
\left(\dfrac{3\mathbf{u}_h^n - 4\mathbf{u}_h^{n-1} + \mathbf{u}_h^{n-2}}{2\tau}, \mathbf{v}_h\right) + (\nu\nabla\mathbf{u}_h^n, \nabla\mathbf{v}_h) - (p_h^n, \text{div } \mathbf{v}_h) \\
\qquad +(\mathbf{u}_h^n\nabla\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + \dfrac{1}{2}(\text{div } (\mathbf{u}_h^n)\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}_1(\theta_h^n), \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_{nh} \\
\left(\dfrac{3\theta_h^n - 4\theta_h^{n-1} + \theta_h^{n-2}}{2\tau}, r_h\right) + (\mathbf{u}_h^n\nabla\theta_h^n, r_h) + \alpha(\nabla\theta_h^n, \nabla r_h) \\
\qquad +\dfrac{1}{2}(\text{div } (\mathbf{u}_h^n)\theta_h^n, r_h) = (g^n, r_h) \qquad \forall r_h \in Y_{nh} \\
\qquad (q_h, \text{div } \mathbf{u}_h^n) = 0 \qquad \forall q_h \in M_{nh}
\end{array}\right.$$

Comme dans l'exemple académique, nous utilisons la méthode de Newton qui consiste à résoudre le problème itératif suivant :

$$D_w F(w^k)(w^{k+1} - w^k) = -F(w^k)$$

où $w = (u^n, p^n, T^n)$ est solution du problème variationnel (2.10), donnée par

$$F(w) = 0.$$

D'où, pour $w^0 = \left(\mathbf{u}_h^{n-1}, p_h^{n-1}, \theta_h^{n-1}\right)$ et $(\mathbf{u}_w, p_w, \theta_w) = w^k - w^{k-1}$, le problème itératif à résoudre est : pour tous, $\mathbf{v}_h \in X_{nh}$ et $r_h \in Y_{nh}$,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{3\mathbf{u}_w}{2\tau}, \mathbf{v}_h\right) + (\mathbf{u}_w\nabla\mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}^{k-1}\nabla\mathbf{u}_w, \mathbf{v}_h) + (\nu\nabla\mathbf{u}_w, \nabla\mathbf{v}_h) \\
&-(p_w, \text{div } \mathbf{v}_h) + \frac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}_w)\mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{v}_h\right) + \frac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}^{k-1})\mathbf{u}_w, \mathbf{v}_h\right) - \left(\frac{d\mathbf{f}_1}{d\theta}(\theta^{k-1})\theta_w, \mathbf{v}_h\right) \\
&= \left(\frac{3\mathbf{u}^{k-1} - 4\mathbf{u}_h^{n-1} + \mathbf{u}_h^{n-2}}{2\tau}, \mathbf{v}_h\right) + (\mathbf{u}^{k-1}\nabla\mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{v}_h) - (p^{k-1}, \text{div } \mathbf{v}_h) \\
&\quad +(\nu(\theta_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}^{k-1}, \nabla\mathbf{v}_h) + \frac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}^{k-1})\mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{v}_h\right) - \left(\mathbf{f}_1(\theta_h^{k-1}), \mathbf{v}_h\right)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{3\theta_w}{2\tau}, r_h\right) + (\mathbf{u}_{k-1}\nabla\theta_w, r_h) + (\mathbf{u}_w\nabla\theta^{k-1}, r_h) + \alpha(\nabla\theta_w, \nabla r_h) \\
&+\frac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}_w)\theta^{k-1}, r_h\right) + \frac{1}{2}\left(\text{div } (\mathbf{u}^{k-1})\theta_w, r_h\right) \\
&= \left(\frac{3\theta^{k-1} - 4\theta_h^{n-1} + \theta_h^{n-2}}{2\tau}, r_h\right) + (\theta^{k-1}\nabla\theta^{k-1}, r_h) \\
&\quad +\alpha(\nabla\theta^{k-1}, \nabla r_h) + \frac{1}{2}\left(\text{div } (u^{k-1})\theta^{k-1}, r_h\right) - (g^n, r_h)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

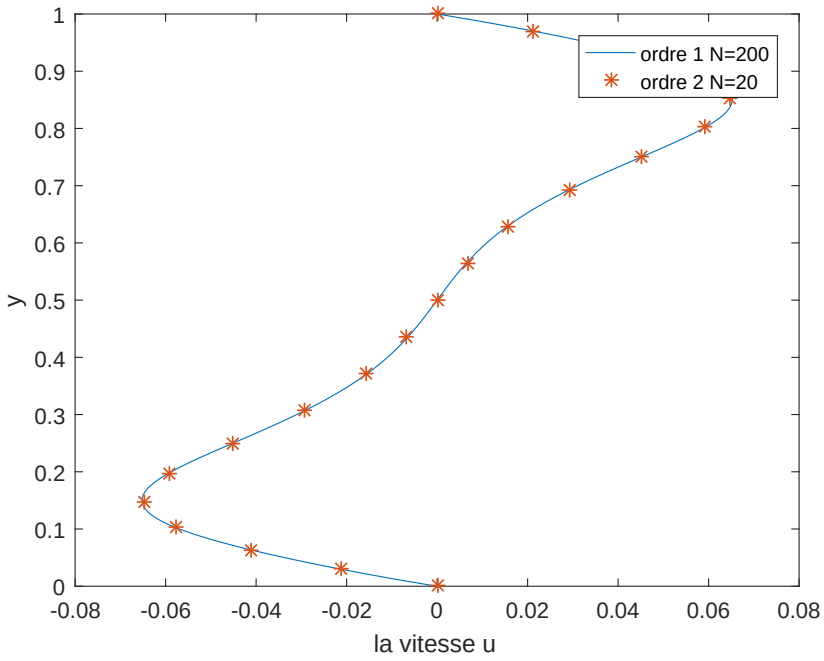


FIGURE 2.20 – Comparaison de la vitesse horizontale $u(y)$ obtenue par la résolution du schéma d'ordre un avec celle obtenue par la résolution du schéma d'ordre deux.

La Figure (2.20) représente une comparaison entre les valeurs de la vitesse horizontale obtenues par un schéma d'ordre un (courbe bleue) avec $N = 200$ et un schéma d'ordre deux (courbe rouge) pour $N = 20$. Nous remarquons que la convergence du schéma d'ordre deux en temps et en espace est aboutie pour $N = 20$, et celle du schéma d'ordre un par un maillage beaucoup plus raffiné ($N = 200$). Cela justifie un gain en temps de calcul par la résolution de notre problème par un schéma d'ordre deux en temps et en espace.

2.4 Conclusion

Nous avons validé dans ce chapitre les résultats d'estimation de l'erreur de discrétisation *a priori*, établis dans le premier chapitre, par un exemple académique où la solution est bien connue. De même, le modèle numérique été valider par un benchmark du problème de convection naturelle. Nous avons remarqué une amélioration du temps de calcul par la résolution d'un schéma d'ordre deux par rapport au schéma d'ordre un.

Chapitre 3

Calcul parallèle itératif

3.1 Introduction

Les résultats théoriques ont été validés dans le chapitre 2 à l'aide des simulations académiques, mais les problèmes industriels reste notre utlime objectif. Ainsi, nous nous intéressons dans ce chapitre à la compréhension et l'analyser du phénomène d'instabilité thermique qui apparaît de temps en temps dans l'imprimante 3D. Afin d'améliorer la précision du calcul, la finesse de discrétisation sera augmentée. L'utilisation d'un seul processeur ne satisfera plus les exigences aux niveaux temps de calcul et place mémoire. Pour dépasser cet obstacle, nous devons utiliser le calcul parallèle en appliquant les méthodes de décomposition de domaine. Cependant, la méthode de décomposition en temps de type "parareal" (cf. [46]) qui consiste à résoudre indépendamment le problème sur des sous-intervalles temporels, ne permet pas de diminuer l'empreinte mémoire. Pour cette raison, nous utiliserons des méthodes de décomposition en espace. Ces méthodes permettent de résoudre le problème sur des sous-domaines en parallèle. La continuité entre les sous-domaines sera gérée par la transmission d'informations en utilisant la librairie MPI (Message Passing Interface). L'application de ces méthodes diminuera le temps de calcul et l'empreinte mémoire par processeur.
La performance des méthodes de calcul parallèle est présentée par l'étude de la variation du temps de calcul en fonction du nombre du processeurs. Cette étude est appelée la scalabilité forte. Nous espérons réduire de moitié le temps de calcul en doublant le nombre de processeurs.

Ce chapitre présentera les différentes méthodes de calcul parallèle basées sur la méthode de décomposition de domaine. En premier lieu, nous proposerons un algorithme naturel. Les résultats numériques ont montré que cette méthode n'est pas "scalable", elle ne peut pas donc être utilisée dans les simulations 3D. L'utilisation des algortihmes de la bibliothèque haute performance HPDDM "High performance domain decomposition methods" (cf. [42]) sera donc proposée comme solution à ce problème, ce qui diminuera le temps de calcul et la place mémoire par processeur. Finalement, nous effectuerons une analyse basée sur les calculs numériques des algorithmes proposés.
Ces simulations parallèles présentées seront réalisées sur les machines "hpc2" du Laboratoire Jacques Louis Lions.

3.2 Méthode de décomposition de domaine

La méthode de décomposition de domaine s'est largement imposée dans le domaine de parallélisation pour son efficacité en terme de scalabilité, en minimisant la place mémoire et le temps de calcul. En effet, résoudre un problème numérique sur tout le domaine est souvent impossible. Cette approche consiste à décomposer le domaine global en un ensemble de sous-domaines et utiliser des microprocesseurs qui résolvent le problème sur chaque sous-domaine à part ; Un algorithme itératif unifiera par la suite la solution globale.

Systématiquement, ces méthodes peuvent se scinder en deux grandes familles : Décomposition avec recouvrement, dite de type Schwarz ou sans recouvrement dite méthode de sous-structuration (basée sur des compléments de Schur).

3.2.1 Méthode de type Schwarz

La première méthode de décomposition de domaine a été proposée par le mathématicien allemand H.A. Schwarz en 1870 [50], qui à l'époque avait été construite pour surmonter des difficultés rencontrées au niveau de l'existence et l'unicité de la solution du problème de Poisson dans le cas d'un domaine complexe. Cet algorithme fait partie des méthodes de décomposition avec recouvrement [20]. L'algorithme de Schwarz est maintenant utilisé pour réduire la complexité de calcul que nous allons présenter dans un cas simple, où Ω est divisé en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 avec recouvrement, comme l'indique la figure 3.1.
Nous considérons le problème de Poisson suivant :

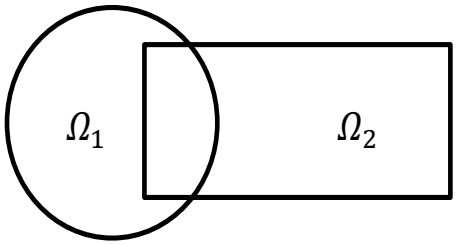


FIGURE 3.1 – Décomposition de domaine de Schwarz.

$$\left\{ \begin{array}{rl} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

La méthode de Schwarz consiste à calculer, simultanément, dans les deux sous-domaines le couple (u_1^{n+1}, u_2^{n+1}), à partir de $\mathbf{u}_1^n$, vérifiant les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u_1^{n+1} & = & f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u_1^{n+1} & = & u_2^n & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \bar{\Omega}_2. \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u_2^{n+1} & = & f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ u_2^{n+1} & = & u_1^{n+1} & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \bar{\Omega}_1. \end{array} \right.$$

Comme la solution sur le sous-domaine Ω_2 à l'itération $n+1$ dépend de celle sur le sous-domaine Ω_1 à l'étape $n+1$, alors cette approche n'est pas parallèle. Cependant,

une simple modification sur l'algorithme introduite par P.L. Lions dans[45], donne un algorithme complètement parallèle. A partir de $(\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n)$, la solution $(\mathbf{u}_1^{n+1}, \mathbf{u}_2^{n+1})$ vérifie,

$$\begin{cases} \Delta u_1^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u_1^{n+1} = u_2^n & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \bar{\Omega}_2. \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \Delta u_2^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ u_2^{n+1} = u_1^n & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \bar{\Omega}_1. \end{cases}$$

Cet algorithme joue une rôle fondamental dans la méthode de calcul parallèle basée sur la méthode de décomposition de domaine, dans le but de rendre les simulations moins coûteuses en termes de temps de calcul et de place mémoire.
Nous distinguons deux classes : multiplicative et additive. La méthode multiplicative, équivalente à une méthode de bloc de Gauss-Seidel, est de type séquentielle (donc inutile dans notre cas), contrairement à la variante additive, qui est de type parallèle qui correspond à une méthode de bloc Jacobi.

Afin de généraliser au cas de plusieurs sous-domaines, nous introduisons les opérateurs d'extension et de partition de l'unité.
Soit E_i, $i = 1, 2$, tel que

$$E_i(\omega_i) : \Omega \to \mathbb{R}.$$

E_i est l'extension d'une fonction $\omega_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ par 0 à l'extérieur de Ω_i.
Nous définissons également la fonction de partition de l'unité continue $\chi_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$, $\chi_i > 0$ et $\chi_i(x) = 0$ pour $x \in \partial\Omega_i \backslash \partial\Omega$. Alors

$$\omega = \sum_{i=1}^{2} E_i(\chi_i \omega_{|\Omega_i}),$$

pour tout $\omega : \Omega \to \mathbb{R}$.
Il s'agit alors de résoudre simultanément le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u_i^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_i \\ u_i^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ u_i^{n+1} = U^n & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \bar{\Omega}_{3-i} \end{cases} \tag{3.2}$$

avec $i = 1, 2$ et $U^n = \sum_{i=1}^{2} E_i(\chi_i u_i^n)$.

Remarque 3.2.1. *La résolution de* (3.2) *est totalement parallèle alors que la construction de U^n, étant séquentielle, demandera des communications entre les processeurs.*

3.2.2 Décomposition de domaine sans recouvrement

Il existe des méthodes sans recouvrement, dont l'intersection entre les sous-domaines se réduit aux interfaces (cf. [55]). Ces méthodes sont basées sur le complément de Schur primal et dual. Pour plus de détails, on peut se référer à [20].
Dans le cas du problème de Navier-Stokes couplé avec l'équation de la chaleur, nous ne disposons pas d'un bon préconditionneur basé sur la méthode de Schur. Alors l'application de cette méthode sera complexe. Nous introduisons dans la suite les méthodes de Schwarz qui seront utilisées comme méthodes de préconditionnement du problème couplé.

3.3 Résolution d'un système linéaire creux

On considère le système linéaire creux :

$$Au = F,$$

où A est une matrice de dimensions $n \times n$ (n est grand), $F \in \mathbb{R}^n$ le second membre et $u \in \mathbb{R}^n$ est une solution de dimension n.

Remarque 3.3.1. *Un système linéaire est dit creux si le nombre de coefficients non nuls sur une ligne est à moyen constant indépendamment de n.*

3.3.1 Méthodes de résolutions

Pour la résolution du système linéaire creux, plusieurs méthodes existent, directes ou itératives. Parmi les méthodes directes, les logiciels séquentiels comme UMFPACK et superLU, et parallèles comme MUMPS et Pastix qui sont interfacés dans freefem++, sont simples à utiliser et donnent une solution numérique précise. D'autre part, des méthodes itératives sont implémentées dans les logiciels pARMS, HIPS, HYRE qui nous permettent, à partir d'une solution initiale, de construire une suite de solutions qui converge vers la solution $\mathbf{u}$. Ces méthodes sont basée sur les méthodes de Krylov de type GMRES préconditionné.
Dans le cas d'un problème de grande taille, les méthodes directes demandent énormément de resources de mémoire, alors que les méthodes basées sur les sous-espaces de Krylov sont caractérisées par leur faible coût mémoire par rapport aux méthodes directes. Mais leur convergence est incertaine, ce qui peut faire exploser le temps de calcul.
Voici une description synthétique de l'algorithme de GMRES.
Soit $r = b - Ax$ le résidu du problème linéaire.
Partant d'une solution $\mathbf{u}_0$ telle que le résidu initial est donné par $r_0 = f - Au_0$, nous définissons l'espace de Krylov suivant pour $n \in \mathbb{N}$:

$$K_n(A, r_0) = vect\{r_0, Ar_0, ..., A^{n-1}r_0\}. \tag{3.3}$$

L'idée de la méthode de GMRES est de chercher $\mathbf{u}_n$ dans $\mathbf{u}_{n-1} + K_n$ de sorte de minimiser le résidu $\| f - A\mathbf{u}_n \|_{L^2(\Omega^d)}$.
La méthode GMRES n'est pas entièrement suffisante, étant donné que dans certains cas, ces méthodes convergent lentement ou même ne convergent pas. Pour surmonter ce problème, des techniques de préconditionnement ont été proposées. En d'autre terme, au lieu de résoudre le système $Au = f$, il serait plus rapide de résoudre le système de la forme

$$M^{-1}Au = M^{-1}f, \text{ (respectivement } AM^{-1}y = f,\ u = M^{-1}y),$$

avec M la matrice de préconditionnement à gauche (respectivement à droite).
M^{-1} sera un inverse approchant A^{-1} facile à calculer.
La résolution des systèmes linéaires, utilisant la méthode de point fixe, est pénalisante au niveau du temps de calcul, ce qui conduit à l'emploi des méthodes de type Krylov, comme GMRES pour accélérer l'algorithme. La convergence de ces méthodes peut être lente lorsque le système est mal conditionné. Ainsi, nous devrons donc préconditionner le système.

3.3.2 Préconditionnement

Dans cette section, nous nous intéressons à la méthode de préconditionnement basée sur la décomposition de domaine avec recouvrement de type Schwarz, dont la difficulté réside en la construction des préconditionneurs. La variante additive de la méthode de Schwarz discrète itérative nous permet de calculer les solutions locales simultanément sur chaque sous-domaine avec un préconditionneur M^{-1} parallèle.
On note A_i la matrice locale sur chaque sous-domaine Ω_i.
De même, nous introduisons les opérateurs de restriction R_i, dont l'application donne un vecteur dont les coefficients sont définies sur Ω_i. Ainsi

$$A = \sum_i R_i D_i A_i R_i^T,$$

où D_i est la matrice diagonale correspondant à la partition de l'unité.

3.3.2.1 Méthode de Schwarz additive

Au lieu de résoudre deux problèmes successivement, M. Dryja et O. Widlund en 1987 [21], ont développé une variante additive de la méthode de Schwarz complètement parallèle. Elle permet de calculer indépendamment les solutions locales sur chaque sous-domaine, qui serons ensuite assemblées afin d'obtenir la solution globale.
Le schéma est alors le suivant :

$$u^{n+1} = u_1^n + M^{-1}(f - Au^n),$$

avec $M^{-1} = R_1^T A_1^{-1} R_1 + R_2^T A_2^{-1} R_2$.
A chaque itération l'erreur est donnée par,

$$e^{n+1} = u^{n+1} - u.$$

Pour simplifier, nous prenons $B_i = R_i^T A_i^{-1} R_i$. L'erreur e^{n+1} sera donnée par :

$$\begin{aligned} e^{n+1} &= u^n - u - (B_1 + B_2)(f - Au^n) \\ &= u^n - u - (B_1 + B_2)(Au - Au^n) \\ &= (I - B_1 A - B_2 A)e^n. \end{aligned}$$

Remarque 3.3.2. *Si la matrice A est définie positive ou est une M-matrice, alors la méthode de Schwarz additive converge en un nombre d'itérations proportionnel au nombre de processeurs.*

Remarque 3.3.3. *Il est aussi possible de rajouter un préconditionneur plus global à M^{-1} pour éviter d'obtenir un nombre d'itération dépendant du nombre de sous-domaines et qu'on appelle le préconditonneur à deux niveaux.*

En pratique, cette méthode de point fixe n'est pas utilisée mais M^{-1} sera un bon préconditionneur pour accélerer la méthode de type Krylov comme GMRES introduite dans la section 3.2.1.

3.3.2.2 Méthode de Schwarz additive restreinte (RAS)

Pour pouvoir gagner en temps de calcul, Cai et al [14] ont proposé la méthode de Schwarz additive restreinte qui permet de limiter les comunications entre les sous-domaines. L'idée est de remplacer l'opérateur de restriction R_i par sa version restreinte $\tilde{R}_i$, $\tilde{R}_i$ étant un nouvel opérateur de restriction au sous-domaine Ω_i sans le recouvrement.
Le préconditionneur RAS s'écrit sous la forme suivante :

$$M^{-1} = \tilde{R}_1^T A_1^{-1} R_1 + \tilde{R}_2^T A_2^{-1} R_2.$$

RAS s'avère également plus robuste que la méthode de Schwarz additive et elle diminue le nombre d'itération de convergence.

3.3.2.3 Méthode de Schwarz additive restreinte optimisée

Pour certains EDP, comme les équations de Helmotz par exemple, les solveurs itératifs pour les méthodes définies précedemment ne convergent pas. Pour cette raison, la méthode de RAS optimisée a été proposée (cf. [27]) étant une version de RAS basée sur l'algorithme de P.L. Lions. En d'autre terme, il suffit de remplacer les conditions de Dirichlet sur les interfaces par les conditions de Robin.

En notant par α le coefficient de Robin, l'algorithme de PL. Lions consiste à résoudre sur Ω_1 et Ω_2 les problèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta \mathbf{u}_1^{n+1} & = & \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_1 \\ \mathbf{u}_1^{n+1} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial n_1} + \alpha\right)\mathbf{u}_1^{n+1} & = & \left(\dfrac{\partial}{\partial n_1} + \alpha\right)\mathbf{u}_2^{n} & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \bar{\Omega}_2, \end{array}\right. \tag{3.4}$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta \mathbf{u}_2^{n+1} & = & \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_2 \\ \mathbf{u}_2^{n+1} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial n_2} + \alpha\right)\mathbf{u}_2^{n+1} & = & \left(\dfrac{\partial}{\partial n_2} + \alpha\right)\mathbf{u}_1^{n} & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \bar{\Omega}_1, \end{array}\right. \tag{3.5}$$

avec n_i, $i = 1, 2$ est la normale sortante sur le bord de Ω_i.
Soit $\tilde{A}_i$ la matrice de discrétisation équivalente à la formulation de P.L. Lions.
La méthode ORAS permet de résoudre :

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + M^{-1}(f - A\mathbf{u}^n),$$

avec $M^{-1} = \tilde{R}_1^T \tilde{A}_1 R_1 + \tilde{R}_2^T \tilde{A}_2 R_2$.
Comme les sous-domaines ne communiquent qu'avec leurs voisins (réception et envoi de la solution sur le recouvrement), alors le nombre de communications augmente avec l'augmentation du nombre de sous-domaines. Ainsi, la vitesse de convergence dépend du nombre de sous-domaines. Ces méthodes s'avèrent scalables si un deuxième niveau est ajouté à l'algorithme, en enrichissant le préconditionneur par la solution d'un problème grossier [57].

3.3.2.4 Le préconditionnement à deux niveaux

Dans les méthodes de préconditionnent, dans la plupart des cas, le nombre d'itération de convergence est proportionnel au nombre de processeur. Sur les grosses machines parallèles nous disposons d'un nombre important de processeurs et cela peut devenir rédhibitoire au niveau du nombre d'itérations de convergence. D'où l'idée d'ajouter un deuxième niveau pour résoudre ce problème. La méthode à deux niveaux permet d'enrichir le préconditionneur à un niveau de type Schwarz additif (RAS, ORAS,...), par la résolution d'un problème appelé "problème grossier", en ajoutant une correction grossière noté Q. On note par Z la matrice d'interpolation entre le maillage fin et le maillage grossier. La matrice du maillage grossier sera donnée par

$$E = Z^T A Z.$$

En pratique, nous construisons E en discrétisant les problèmes par un maillage grossier. De la même manière que pour les matrices locales dans chaque sous-domaine, on peut

alors utiliser un solveur direct pour factoriser E, qui est de taille bien plus petite que A. On définit alors la correction grossière comme suit,

$$Q = ZE^{-1}Z^T.$$

Il existe plusieurs approches de préconditionnement à deux niveaux, citons (cf.[47]) :

Additive Preconditionner :$M_{AD}^{-1} = M^{-1} + Q$,

Balancing Neumann-Neumann (BNN) :$M_{BNN}^{-1} = (I - QA)M^{-1}(I - AQ) + Q$,

Adapted Deflation variant 1 (A-DEF1) :$M_{A-DEF1}^{-1} = M^{-1}(I - AQ) + Q$

Adapted Deflation variant 1 (A-DEF2) :$M_{A-DEF2}^{-1} = (I - AQ)M^{-1} + Q$

Tous ces méthodes sont implémentées dans la bibliothèque de haute performance pour les méthodes de décomposition de domaine "HPDDM" (cf. [42]).

3.4 Simulation du procédé d'extrusion dans une imprimante 3D

Dans cette section, nous étudions l'extrusion du plastique dans une imprimante 3D. Cette technologie est basée sur l'indée de passer de la conception virtuelle d'un objet à ça fabrication réelle via l'imprimante en partant d'un fichier informatique. Ce type d'impréssion tridimentionnelle touche plusieurs secteurs d'activités dont les champs d'applications sont nombreux : Art, architecture, mode, décoration, médecine, industrie,... Cette technologie nous permet de faire un prototypage rapide de nouveaux objets. Il existe plusieurs techniques d'impression, selon le type de l'imprimante, on peut les classifiées dans trois groupes, fabrication des objets tranche par tranche, Stéréolithographie qui utilise comme matériaux d'impression une résine liquide solidifée sous l'effet d'une lumière ultra violet et le frittage Laser Sélectif qui se base sur la fusion d'une poudre à l'aide d'un laser.
En 1988, Scott Crump a développé la première imprimante $3D$ par extrusion d'un filament plastique qui par superposition donne la forme de l'objet. L'imprimante Pollen s'attaque à la même technologie d'impression mais en présentant des différences au niveau des matériaux utilisés et la méthode d'extrusion qui crée le filament à partir des granules.
Cette imprimante présente, de temps en temps, des irrégularités surfaciques qui proviennent des irrégularités du débit que nous allons étudier et analyser dans la section suivante.

3.4.1 L'imprimante $3D$ Pollen

L'imprimante Pollen- Am appellée PAM, a été lancée en 2013 par Cédric Michel et Victor Roux. Pollen AM propose une machine qui utilise des matériaux adaptés à l'industrie,

elle fonctionne à partir de granulés de thermoplastiques haute qualité qui est une forme très pratique à stocker, à manipuler, et bien adaptée aux processus.

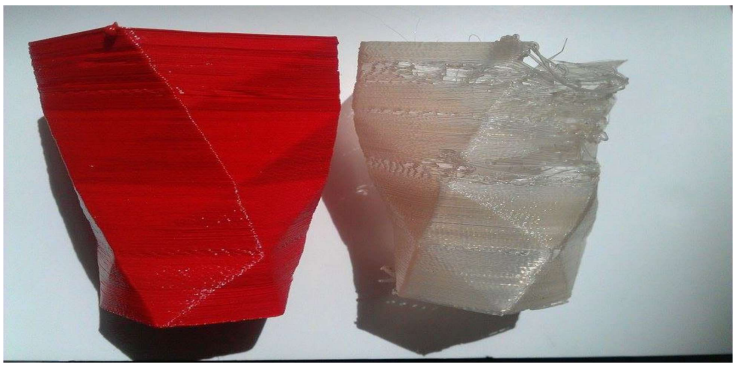


FIGURE 3.2 – Exemple d'une impression sans perte de débit (à gauche) et avec perte de débit (à droite).

Notre problème est d'analyse l'instabilité du débit qui arrive parfois au cours de l'impression. La Figure 3.2 présente un exemple d'un objet imprimé avec un débit instable présenté par des couches moins dense (objet à droite). Cette instabilité pourrait être due à un phénomène de bouchon qui apparaît au niveau de la sortie de l'extrudeur. Ce bouchon est due à la basse température de la sortie ce qui augmente la viscosité du fluide. Une fois que le fluide ne bouge pas, sa température va reaugmenter, sa viscosité diminue et le fluide va resortir et ainsi de suite.
Pour simplifier, nous supposons que le polymère est toujours fluide dans le dispositif.

3.5 Géométrie

L'imprimante est formée d'une vis sans fin (vis d'Archimède) qui entre en rotation dans un fourreau. La vis est un système de pompage produisant un mouvement dit hélicoïdal. La matière entre sous forme de granules dans le dispositif, qui sera convoyée par la vis jusqu'à la sortie de la filière. Le polymère est chauffé par une résistance placée au niveau de la vis (présenté dans Figure 3.3), pour qu'il devient liquide.
Les matériaux utilisés sont des thermoplastiques à base de copolyester de viscosité est indépendante du taux de cisaillement et peut être décrite par le modèle de Cross-WLF comme suit :

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \left(\frac{\nu_0 \dot{\gamma}}{\tau^*}\right)^{1-n}}$$

$$\nu_0 = D_1 . \exp\left(-\frac{A1(T - T^*)}{A2 + (T - T^*)}\right)$$

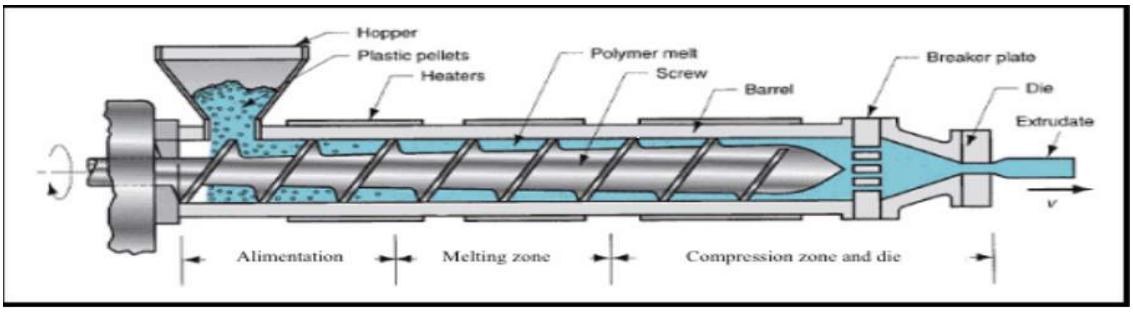


FIGURE 3.3 – Schéma d'une vis d'extrusion.

$$T^* = D_2 + D_3\ p$$
$$A_2 = A_3 + D_3\ p,$$

où les paramètres A_1, A_3, D_1, D_2 et D_3 sont des constantes caractéristiques du matériau. Dans notre cas, le comportement du fluide ne dépend pas de la pression alors le paramètre D_3 est nul.
Avec ce modèle de viscosité, malheureusement nous n'avons pas réussi à mettre en évidence l'instabilité thermique. Pour cette raison, nous remplaçons le modèle de Cross-WLF par une fonction qui dépend de la température, illustrée par le Graphe 3.4.

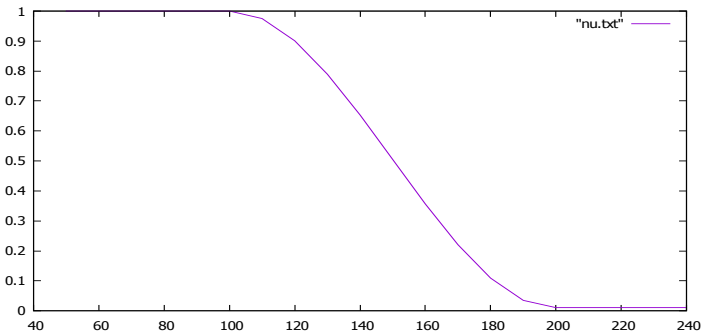


FIGURE 3.4 – La viscosité en fonction de la température.

Dans cette partie nous effectuons des simulations numériques de l'écoulement du plastique sous Freefem++ afin de comprendre le phénomène bouchon qui apparaît de temps en temps durant l'impression. Nous commençons par les simulation en 2D. Dans ce cas, nous ne pouvont pas simuler la vis sans fin, nous supposons alors qu'elle prend la forme d'une force uniforme exercée sur le fluide à l'entrée. Pour passer ensuite aux simulations 3D, dans lesquelles on se place dans le repère tounant de la vis, le maillage sera fixe, ce qui simplifie notre calcul.

3.6 Simulation 2D

Dans cette section, nous nous intéressons à la modélisation du phénomène d'instabilité du débit en $2D$ par un calcul séquentiel. Afin de réduire le temps de calcul nous avons utilisé des méthodes parallèles. Ceci nous permettera de comprendre les difficultés du modèle et de l'algorithmique liées au problème étudié pour pouvoir préparer les simulations 3D.
En raison de la complexité de la géométrie, nous effectuons les simulations numériques sur le domaine Ω illustré par la Figure 3.5. Le modèle 2D sera donné par les équations de Navier-Stokes incompressible couplées avec l'équation de la chaleur à viscosité variable,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x,t) + (\mathbf{u}(x,t).\nabla)\mathbf{u}(x,t) - \text{div }(\nu(T(x,t))\nabla \mathbf{u}(x,t)) & & & \\ \qquad +\nabla p(x,t) &=& \mathbf{f}(x,t,T(x,t)) & \text{dans } \Omega \times [0,\hat{T}] \\ \dfrac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \text{div }(\alpha \nabla T(x,t)) + (\mathbf{u}(x,t).\nabla)T(x,t) &=& g(x,t) & \text{dans } \Omega \times [0,\hat{T}] \\ \text{div } \mathbf{u}(x,t) &=& 0 & \text{dans } \Omega \times [0,\hat{T}] \\ \mathbf{u}(x,t) &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0,\hat{T}] \\ T(x,t) &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0,\hat{T}] \end{cases}$$

3.6.1 Conditions aux limites

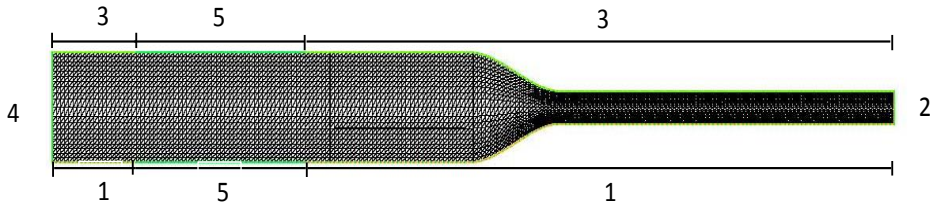


FIGURE 3.5 – Le maillage du domaine deux dimensionnels avec 8000 éléments.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, nous supposons que la vis sans fin va avoir l'accent d'une force régulière appliquée sur le fluide à l'entrée, noté par F_{in}. Nous supposons également que les composantes de la vitesse sont nuls sur les bord 1, 3 et 5 (Figure 3.5) .
Pour la température, nous imposons des conditions de Dirichlet :

$$T_{\text{rest}} = 600, \text{sur } 5$$

$$T_{\text{in}} = 100, \text{sur } 4.$$

Tout corps chaud émet de l'énergie dans toutes les directions, alors il existe un échange thermique sur le bord qui sépare le métal et l'air, dont les particules sont libres de se déplacer. Nous écrivons alors la condition suivante

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_{ext}), \text{ sur } 1, 3 \text{ et } 5,$$

avec $h = 10$ le coefficient de transfert de chaleur et κ la conductivité thermique.

Pour la discrétisation en temps, nous utilisons la méthode d'Euler semi-implicite. D'autre part, nous approchons les composantes de la vitesse et la tempŕature par des éléments finis de type P_2, et la pression par des éléments finis de type P_1.
La matrice locale à resoudre est un problème algébrique associé à la formulation variationnelle suivante :
(3.6)

$$\begin{cases} \left(\frac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\tau}, \mathbf{v}_h\right) + (\mathbf{u}_h^{n-1}\nabla\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + (\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - (p_h^n, \text{div } \mathbf{v}_h) &= \left(\mathbf{f}^n(T_h^{n-1}), \mathbf{v}_h\right), \\ \left(\frac{T_h^n - T_h^{n-1}}{\tau}, r_h\right) + (\mathbf{u}_h^n\nabla T_h^n, r_h) + \alpha(\nabla T_h^n, \nabla r_h) &= (g^n, r_h), \\ (q_h, \text{div } \mathbf{u}_h^n) &= 0. \end{cases}$$

3.6.2 Méthode séquentielle

Les simulations numériques dans le cas séquentiel ont été testées durant le stage de l'étudiant Ibrahim Benslim à l'Université Pierre et Marie Curie.
La Figure (3.6) illustre l'instabilité du débit en fonction du temps obtenue pour 53544 degrès de liberté pour 1000 pas de temps. Nous remarquons que la variation de flux sortant de l'imprimante est périodique et conserve la même amplitude.
Notons que pour mesurer le débit massique sortant de l'extrudeur, il suffit de calculer l'intégrale du flux de la vitesse sur le segment de sortie 2 du domaine (3.5).
Pour expliquer la variation du flux observée durant l'impression, nous illustrons dans le graphe 3.7 la variation du débit de même que la variation de la moyenne température au niveau de la buse. Nous déduisons que l'instabilité thermique a pour origine la chute de la température au niveau de la réduction de la section à la sortie de filière.

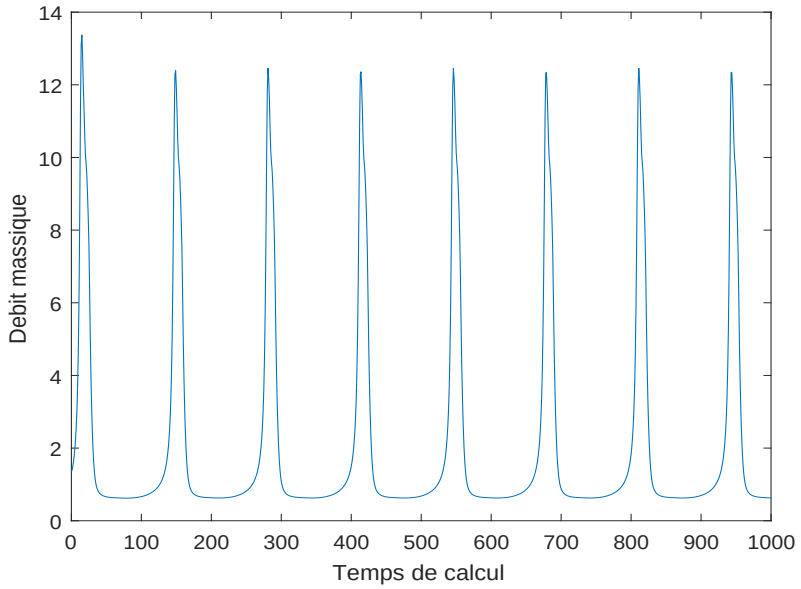


FIGURE 3.6 – Evolution du débit massique (en mg/s) au cours du temps (en s) en sortie de filière.

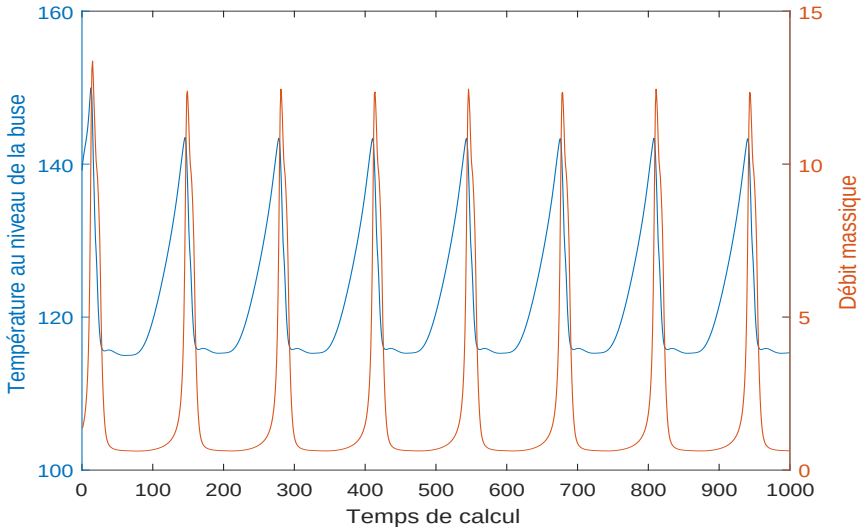


FIGURE 3.7 – Evolution du débit massique (en mg/s) et de la température au cours du temps (en s) en sortie de filière.

Pour un maillage très fin, la résolution d'un tel système devient rapidement coûteuse en temps de calcul et espace mémoire. Il est alors indispensable d'améliorer la performance

de l'algorithme séquentiel. Pour ces raisons, nous utiliserons les méthodes de calcul parallèle.
Dans la suite de ce chapitre, nous allons exposer différents algorithmes de calcul parallèle basés sur la méthode de décomposition de domaine que nous utilisons.

Dans la suite, nous reprenons les mêmes données, conditions aux bords et types de discrétisation de la section précédente.

3.6.3 Méthode parallèle naturelle

Comme le principe est de diviser le domaine Ω en un nombre de sous-domaine, un partitionneur de graphe automatique est alors appelé (Scotch ou Metis) avec un minimum de recouvrement. La librairie Metis [43] introduisée par G.Karupis, s'appuie sur un algorithme de bipartionnement récursif dit "k-way". D'autre part, le partionneur Scotch, qui est développé par F.Pellegrini [17], s'appuie sur des heuristiques d'optimisation locale de type Fiduccia-Mattheyses. La Figure 3.8 nous montre un partitionnement du domaine en 4 sous-domaines. Le maillage considéré contient 200000 éléments. Alors le nombre de

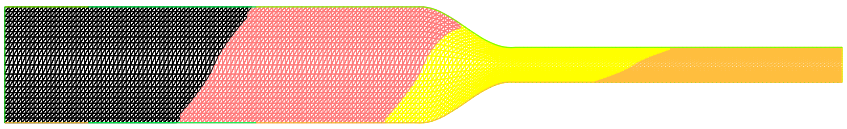


FIGURE 3.8 – Exemple du maillage partagé en 4 sous-domaines avec Scotch.

degrés de liberté totale sera 1307704 (u_1, u_2, p et T).
Les étapes de l'algorithme exécuté se résume par :

1- La géométrie partionnée, en utilisant la librairie Scotch, est distribuée aux processeurs. Ainsi, l'exécution du calcul est patagée entre les processurs. La communication entre eux est gérée par la bibliothèque MPI (Message Passing Interface).

2- Les matrices locales dans les sous-domaines Ω_i, sont assemblées en parallèle sur les différents processeurs.

3- Ensuite, la matrice globale A sera factorisée par le solveur direct parallèle MUMPS.

4- La dernière étape consiste à regrouper la solution globale u, qui est effectuée sur un seul processeur.

D'après la Figure (3.9), nous remarquons que l'algorithme séquentiel et parallèle donne le même résultat de variation du débit en fonction du temps. Pour étudier la performance de la méthode parallèle, nous présentons dans le Figure (3.10) la courbe de la forte scalabilité

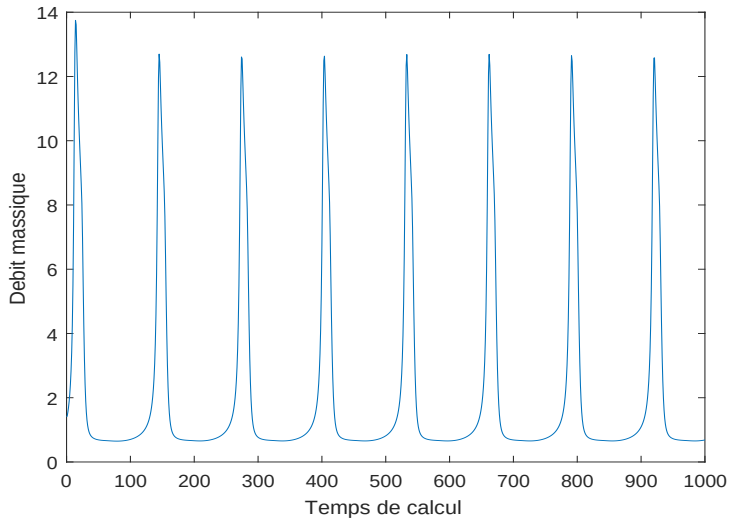


FIGURE 3.9 – La variation du flux sortant (en mg/s) de l'extrudeur en fonction du temps (en s).

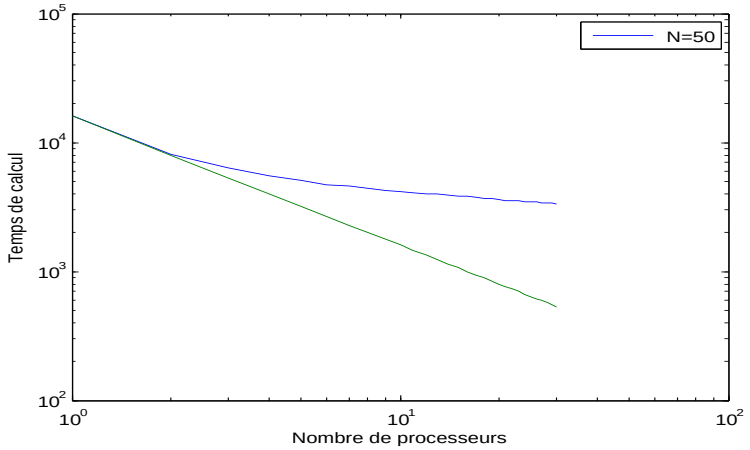


FIGURE 3.10 – "Strong scalability" du problème d'instabilité thermique par la méthode de parallélisation classique.

de l'algorithme. Nous attendons à réduire de moitié le du temps de calcul en passant de 4 à 8 processeurs. D'après le Graphe (3.10) le temps de calcul à diminué de 0.1.
Nous déduisons que cette méthode est insuffisante pour résoudre le problème en 3D. Notre but est alors de trouver un algorithme pour obtenir une meilleur scalabilité.

3.6.4 Méthodes avancées

3.6.4.1 Méthode de préconditionnent à un niveau

Pour améliorer la performance l'algorithme de parallélisation naturelle présenté précédemment, nous appliquons la méthode de préconditionnement par l'algorithme de Schwarz à un niveau par le solveur ORAS.

1) Nous utilisons la librairie scotch pour patitionner notre domaine en un nombre de sous-domaines. Ce partionnement sera distribué à chaque processeur MPI.
2) On cherche à approcher la solution en utilisant la méthode élements finis du problème instationnaire. Nous choisissons à approcher les composantes de la vitesse et la température par des éléments finis P_2 et la pression par des éléments finis P_1.
3) Le problème couplé est préconditionné par ORAS, et résolu itérativement dans une boucle en temps avec un pas $\tau = 1$.
4) A chaque itération, la solution est mise à jour.

Le maillage est constitué de 191232 éléments.
La figure (3.11) présente la scalabilité en échelle logarithmique de l'algorithme proposé, pour 1250656 degrés de liberté (les composantes de la vitesse, la pression et la température). On remarque que le temps de calcul diminue avec l'augmentation du nombre de procésseurs. Par contre, la forte scalabilité se détériore en passant à un nombre élevé de processeurs.

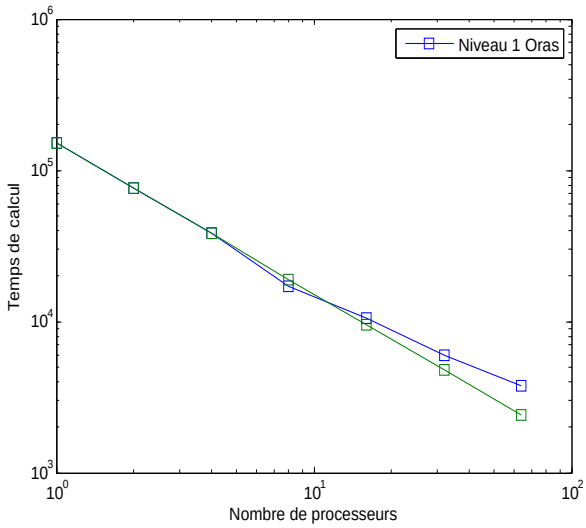


FIGURE 3.11 – "Strong scalability" du préconditionneur à un niveau.

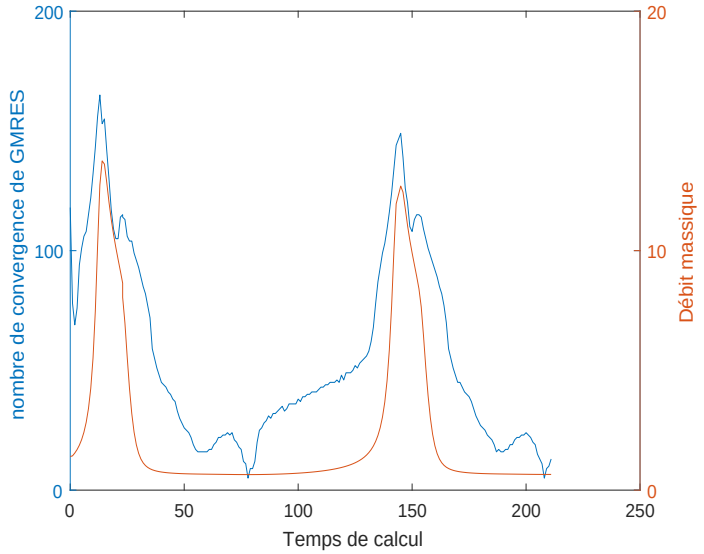


FIGURE 3.12 – La variation du nombre de convergence de GMRES et du débit massique en fonction du temps.

Pour expliciter ce problème, nous présentons dans le Graphe (3.12) la variation du nombre d'itérations de convergence de GMRES de même que la variation du débit sortant, en fonction du temps pour 64 processeurs. Nous déduisons que la méthode souffre d'une mauvaise

convergence qui est proportionnelle à la variation du débit. En d'autres termes, GMRES converge lentement durant la phase d'écoulement et rapidement quand l'imprimante est bouchée.

Remarque 3.6.1. *En utilisant le préconditionneur RAS, le solveur GMRES n'a pas convergé. Pour cette raison, nous avons remplacer RAS par ORAS.*

3.6.4.2 Méthode de préconditionnement à deux niveaux

Le problème de convergence de GMRES de la méthode de préconditionnement à un niveau peut s'expliquer par un manque de communication globale entre les sous-domaines. Une amélioration possible sera l'utilisation d'une méthode à deux niveaux dont le préconditionneur est enrichi par la résolution d'un problème grossier de taille d'ordre du nombre de sous-domaines. Notons que dans [35], les auteurs ont montré un bon résultat de scalabilité du préconditionneurORAS à deux niveaux pour les équations de Stokes.
Parmi les préconditionneurs à deux niveaux présentés dans la section 3.2.2.4, la méthode de type "Adapted Deflation variant 1" est la moins coûteuse au niveau de l'aplication de la matrice de correction Q. Nous appliquons le préconditionneur de type ORAS suivant :

$$M^{-1}_{A-DEF1} = M^{-1}(I - AQ) + Q.$$

Pour le premier niveau, nous considérons un maillage de 191232 éléments qui correspond à 1250656 degrès de liberté (u_1, u_2, p et T). Il est évident que plus le nombre de sommet est faible dans le maillage grossier plus le facteur de déraffinement entre le maillage fin et le maillage grossier est élevé et le temps de calcul sera réduit. Nous choisissont le facteur de déraffinement égale à 6 (5312 éléments).
Pour de plus de réduction de temps de calcul, nous dédicaçons 4 processeurs pour la résolution du problème grossier en parallèle. Le problème grossier est de 35806 degrès de liberté à résoudre (u_1, u_2, p et T). Cette méthode présente une excellente scalabilité illustrée par le graphe de variation du temps de calcul en échelle logarithmique en fonction du nombre de processeur (Figure 3.13) et le tableau d'efficacité 3.1. Où l'efficatité est le rapport de la durée d'exécution avec deux processeurs d'une part et p processeurs d'autre part, divisé par $\frac{p}{2}$ puis multiplié par 100.

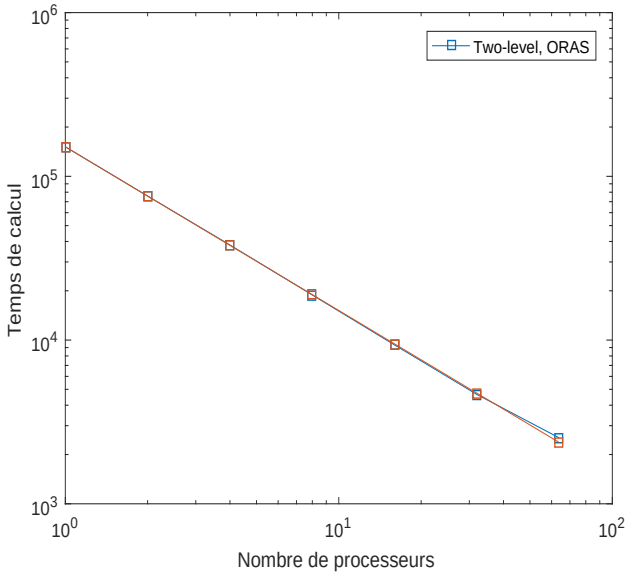


FIGURE 3.13 – "Strong scalability" du préconditionneur à deux niveaux.

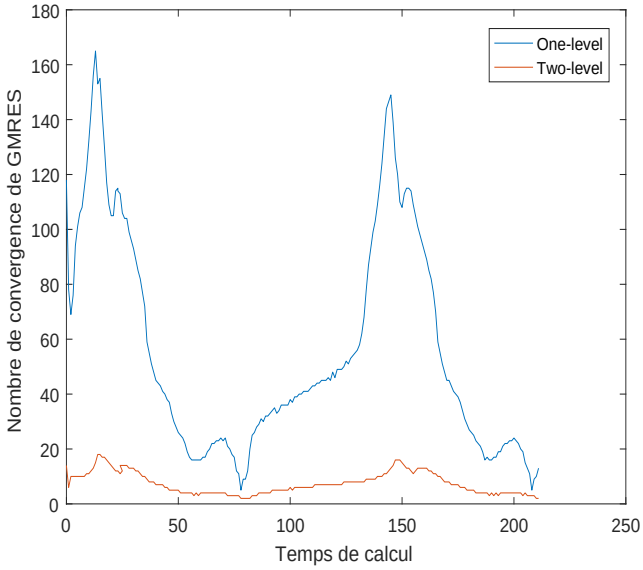


FIGURE 3.14 – Comparaison du nombre d'irérations de convergence de GMRES pour un préconditionnement à un et deux niveaux.

De plus, le Graphe (3.14) montre une amélioration dans le nombre d'itération de convergence de GMRES qui est due à la correction du préconditionneur à un niveau par un problème grossier. En effet, après 15 secondes le nombre d'itérations de convergence de GMRES est égale à 155 (respectivement 18) pour un préconditionnement à un niveau (respectivement à deux niveaux).

Nombre de processeurs	Temps de calcul (s)	efficacité (en %)
2	75761.1	100
4	38081.8	99.47
8	18855.5	100.49
16	9332.83	101.48
32	4651.16	101.8
64	2526.43	93.71

TABLE 3.1 – Efficacité de la méthode de préconditionnement à deux niveaux de type A-DEF1.

En conclusion, avec la résolution de l'espace grossier la méthode de Schwarz à deux niveaux converge indépendamment du nombre de sous domaines et de la variation du débit sortant.

3.7 Simulation $3D$

Dans cette section, nous commençons par présenter la construction du modèle $3D$ de l'extrudeur qui a été fait par F. Hecht, en utilisant les différents outils de FreeFem++. Cela nous permettera d'effectuer dans une étude prochaine, des optimisations sur la géométrie de la vis sans fin (taille des dents, l'épaisseur entre la vis et le fourreau, inclinaison des dents,...). Le domaine est en mobile et l'extrudeur étant axisymétrique, si on se met dans le repère de la vis, on se retrouve avec un domaine fixe se qui simplifiera le calcul.

3.7.1 Géométrie axisymétrique

L'extrudeur de imprimante $3D$ est constituée de deux partie, le fourreau et la vis sans fin. La partie extérieure de l'extrudeur (fourreau) prend la forme d'une bouteille axisymétrique (est un objet 2D tourné) et la seconde partie est formée de la vis sans fin qui est un objet de forme hélicoïdal (un objet 2D translaté et tourné). Ces deux modèles sont faciles à modéliser. Pour ce faire, nous utilisons les différents outils de Freefem++ (*spline, movemesh23, tetgreconstruction, adaptmesh,...*) et des transformations géométriques. Nous obtenons les Figures (3.15) et (3.16). Le maillage est raffiné dans le conduit de manière à capter les perturbations.

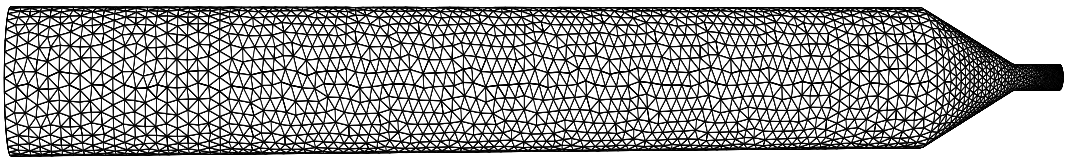


FIGURE 3.15 – Géomtrie du fourreau.

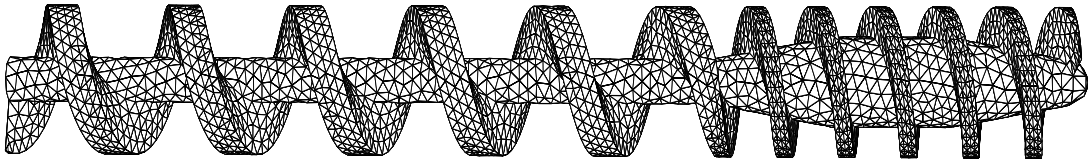


FIGURE 3.16 – Géométrie de la vis à l'intérieur du fourreau.

Le fluide est en rotation à vitesse constante w. Il est soumis à des forces de coriolis et de centrifuge. La force de centrifuge est perpendiculaire à l'axe de rotation et prend la valeur suivante :

$$F_{cent} = w^2\mathbf{r},$$

où $\mathbf{r}$ est le vecteur position par rapport à l'axe de rotation.
La force de coriolis, agit perpendiculairement à la direction de mouvement, est donnée par

$$F_{cor} = -\overrightarrow{w} \wedge \mathbf{u}$$

où $\overrightarrow{w}$ est le vecteur de rotation $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ est le vecteur vitesse du fluide.
L'écoulement de fluide est alors décrit par les équations de Navier-Stokes couplé avec l'équation de la température dans le référentiel tournant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} - \text{div }(\nu(T)\nabla\mathbf{u}) + \nabla p + w^2\mathbf{r} - 2\overrightarrow{w} \wedge \mathbf{u} &= \mathbf{f}(T) \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} - \text{div }(\alpha\nabla T) + (\mathbf{u}.\nabla)T &= 0 \\ \text{div } \mathbf{u}(x,t) &= 0 \\ \mathbf{u}(x,t) &= 0 \\ T(x,t) &= 0 \\ \mathbf{u}(x,0) &= \mathbf{u}_0 \\ T(x,0) &= T_0 \end{cases}$$

Pour la discrétisation en espace, nous approchons les composantes de la vitesse par des éléments finis de type P_2, la pression et la température sont approchées par des éléments finis de type P_1. Pour approcher les dérivées en temps de la vitesse et de la température nous appliquons la méthode d'Euler semi-implicite. La formulation variationnelle discrétisée sera donné par,

$$\begin{cases} \left(\frac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\tau}, \mathbf{v}_h\right) + (\mathbf{u}_h^{n-1}\nabla\mathbf{u}_h^n, \nabla\mathbf{v}_h) + (\nu(T_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - (p_h^n, \text{div } \mathbf{v}_h) \\ \qquad\qquad +w^2(\mathbf{r}, v_h) - 2(\overrightarrow{w} \wedge \mathbf{u}_h^n, v_h) = 0, \\ \left(\frac{T_h^n - T_h^{n-1}}{\tau}, r_h\right) + (\mathbf{u}_h^n\nabla T_h^n, r_h) + \alpha(\nabla T_h^n, \nabla r_h) = 0, \\ (q_h, \text{div } \mathbf{u}_h^n) = 0. \end{cases}$$

Les simulations numériques 3D du procédé d'extrusion constituent l'étape prochaine de ce traivail. Ces simulations seront effectuées en utilisant la méthode de préconditionnement à deux niveaux de type ORAS.

3.8 Conclusion

La simulation numérique 2D effectuée dans ce chapitre, a mis en évidence l'instabilité thermique qui apparaît parfois au cours de l'impression. Pour passer en trois dimensions, il était indispensable de paralléliser cet algorithme en utilisant la méthode de décomposition de domaine. Le graphe de variation du temps de calcul en fonction du nombre de processeurs (3.10) a montré que la méthode de calcul parallèle naturel n'est pas suffisante en terme de scalabilté. Pour cette raison, nous avons appliqué la méthode de préconditionnement à un niveau de type ORAS. le graphe (3.12) a montré que la convergence de cette méthode dépend de la phyqiue du modèle. Pour résoudre ce problème, un deuxième niveau a été ajouté pour enrichir le préconditionneur à un niveau. Nous avons obtenu un bon résultat de scalabilité où la performance du préconditionnement à deux niveaux a augmenté en évaluant le nombre de processeurs. Cet algorithme en 2D aurait dû être appliqué pour les calculs 3D, mais malheureusement nous ne l'avons pas implémenté par faute du temps. Les simulations 3D constitueront donc l'étape prochaine de ce travail.

Conclusions et perspectives

Ce travail a porté d'une part, sur la résolution du modèle de Boussinesq à viscosité non linéaire dépendante de la température ; d'autre part, sur la validation numérique des résultats théoriques obtenus à travers des exemples académiques et industriels.
Nous avons présenté et étudié le problème de Navier-stokes couplé avec l'équation de la température. Deux schémas numériques stabilisé et non stabilisé d'ordre un ont été proposés en utilisant la méthode d'Euler semi-implicite pour la discrétisation en temps et la méthode des éléments finis pour la discrétisation en espace. Afin de gagner en ordre de convergence et en temps de calcul, un schéma numérique d'ordre deux a été proposé et étudié. Nous avons appliqué la méthode BDF "Backward Differentiation Formula" pour la discrétisation en temps et la méthode des éléments finis pour la discrétisation en espace. L'estimation de l'erreur *a priori* entre la solution exacte et la solution approchée a été établie pour les schémas proposés.

Ensuite, nous avons validé les résultats obtenus par des simulations numériques académiques. De plus, un benchmark de la convection naturelle a été considéré afin de valider l'algorithme du modèle de Boussinesq à viscosité constante. Les essais numériques ont montré un gain en temps de calcul pour le schéma d'ordre deux par rapport à celui d'ordre un.

Finalement, nous avons étudié et analysé, par des simulations 2D en séquentiel, le phénomène d'instabilité thermique détecté de temps en temps durant l'impression 3D. Pour pouvoir modéliser ce phénomène dans le cas 3D, nous avons parallélisé l'algortihme séquentiel par la méthode de décomposition de domaine. Vu la non-satisfaction du résultat de sclabilité obtenu, nous avons utilisé la méthode de préconditionnement à un niveau de type ORAS. Les résultats numériques ont montrés que la convergence de cette méthode dépend du nombre de processeurs et de la physique du modèle. Un deuxième niveau a été ajouté dans le but d'enrichir le préconditionneur à un niveau. Cette méthode a présenté une excellente scalabilité.

Une perspective naturelle de ce travail de recherche serait l'application de la méthode de préconditionnement à deux niveaux de type ORAS pour modéliser le phénomène de l'instabilité thermique en 3D afin de se rapprocher de la réalité physique du problème. Ce travail constituera la prochaine étape de notre plan de recherche. Ensuite et toujours

dans le cadre du gain en temps de calcul et en précision, nous prétendons étudier et établir des estimations d'erreur *a posteriori* correspondantes à notre problème de couplage instationnaire afin de pouvoir appliquer la méthode d'adaptaion de maillage qui consiste à raffiner le maillage dans les régions où les informations sont riches et l'erreur est grande.

Bibliographie

[1] H. Abboud. *Schémas à deux-grilles pour la résolution du problème de Navier-Stokes in- stationnaire incompressible.* Mathematics [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI ; Université Saint-Joseph, Beyrouth, 2006. French. <tel-00132658>.

[2] H. Abboud, V. Girault, T. Sayah. *A second order accurency in time for a full descretized time-depndent Navier-Stokes equations by a tow-grid scheme.* 2007.<hal-00176003>.

[3] H. Abboud, T. Sayah. *A FULL DISCRETIZATION OF THE TIME-DEPENDENT NAVIER-STOKES EQUATIONS BY A TWO-GRID SCHEME.* Numer. Math. 2009 114 : 198 – 231.

[4] R.A. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York, 1978.

[5] R. Aldbaissy, F. Hecht,G Mansour, T. Sayah. *A full discretisation of the time-dependent Boussinesq (buoyancy) model with nonlinear viscosity.* Calcolo 55 :44 2018.

[6] D. Arnold, F. Brezzi, M. Fortin, A stable finite element for the Stokes equations, *Calcolo* 21 (1984),337 – 344.

[7] R. Agroum, C. Bernardi. *Spectral descritisation of the time dependent Navier-Stokes problem coupled with the heat equation.* hal-00997632, 2014.

[8] R. Agroum, S.M. Aouadi, C. Bernardi and J. Satouri, Spectral discretization of the Navier-Stokes equations coupled with the heat equation. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 49, 3, (2015), 621-639.*

[9] M. Azaïez, M. Deville, E Mund. *Eléments finis pour les fluides incompressibles.* Presses polythecniques et universitaires romandes, Lausanne, 2011.

[10] C. Bernardi, V. Girault, A local regularisation operation for triangular and quadrilateral finite elements. *SIAM J. Numer. Anal., 35, (1998), 1893-1916.*

[11] C. Bernardi, B. Métivet, B Pernaud. *Couplage des équations de Navier-Stokes et de la chaleur : modèle et son approximation par éléments finis.* RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., 29(7) : 871 – 921, 1995.

[12] J.H Bramble, J.E. Pasciak, P.H. Sammon, V. Thomé *Incomplete interations in multistep Backward Difference Methods for Parabolic problems with smooth ans nonsmooth data.* Mathematic of Computation, vol 52 : 339 – 367, 1989.

[13] M. Bulicek, E. Feireisl, J. Malek, A Navier-Stokes-Fourier system for incompressible fluids with temperature dependent material coefficients, *Nonlinear Analysis : Real World Applications 10, (2009), 992-1015.*

[14] X-C. Cai, M. Sarkis. *A Restricted Additive Schwarz Preconditioner for General Sparse Linear Systems.* Journal on Scientific Computing, 21(2), 792 − 797, 1999.

[15] X.-C. Cai and O. B. Widlund. *Multiplicative Schwarz algorithms for some nonsymmetric and indefinite problems.* SIAM Journal on Numerical Analysis, 30 :936 − 952, 1993.

[16] L. Bourdin, E. Télat. *General Cauchy-Lipschitz theory for Δ-Caichy problems with Cartheodory dynamics on time scales.* Journal of Difference Equations ans applications, 2014.

[17] C. Chevalier, F. Pellegrini. *PT-SCOTCH : a tool for efficient parallel graph ordering.* Parallel computing,6 − 8(34) : 318 − 331, 2008.

[18] P. Clément, Approximation by finite element functions using local regularisation, *R.A.I.R.O. Anal. Numer.,* 9, *pp.*77 − 84 *(*1975*).*

[19] C.F Curtiss, J.O Hirschfelder Integration of stiff equations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the Unites States of America,* 38(3), *pp.*235 − 243 *(*1952*).*

[20] V. Dolean, P. Jolivet, F. Nataf. *Methods : algorithms, theory and parallel implementation*, Master. France. 2015.

[21] O. Dryja, M. Widlund, *An additive variant of the Schwarz alternating method for the case of many subregions.*, (Technical Report 339, Ultracomputer Note 131). Department of Computer Science, Courant Institute.

[22] M. EL-Haddad, F. Hecht, T. Sayah. *Interface transport scheme of a Two-Phase Flow by the method of characteritics.* 2015. hal-01217940.

[23] A. EL Malaki. *Résolution de problème aux limites à l'aide de méthodes itératives hiérarchiques à préconditionneur variable.* Thèse de doctorat, Université Laval, Faculté des sciences et de génie, (2007).

[24] A. Ern, J.L. Guermond. *Eléments finis : Théorie, applications, mise en oeuvre.* Springer, Allemagne

[25] I. Daniala, R Molgan, F Hecht, S Le Masson. *A Newton method with adaptive finite elements for solving phase-change problems with natural convection.* Journal of computational physics, 274 (2014) 826 − 840

[26] L. P. Franca et S. L Frey. *Stabilized finite element methods : Ii. the incompressible navier stokes equations.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 99 :209-233, 1992.

[27] M. J. Gander, S. J. Thomas et A. St-Cyr. *Optimized multiplicative, additive, and restricted additive Schwarz preconditioning.* In : SIAM Journal on Scientific Computing 29.6(2007), pp. 2402 − 2425.

[28] C.W. Gear *The automatic integration of ordinary differential equations.* Commun. ACM 14 :, pp. 176 – 9, 1971.

[29] V. Girault. *Problèmes variationnels et méthodes d'éléments finis.* DEA (1994 – 95)

[30] V. Girault, P.A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms.* Springer-Verlag, Berlin (1986)

[31] V. Girault, J. L. Lions. *Two-grid finite-element schemes for the steady Navier-Stokes problem in polyhedra.* Portugaliae Mathematica. Nova Série 58.1 (2001) : 25 – 57.

[32] V. Girault, J. L. Lions. *Two-grid finite-element schemes for the transient Navier-Stokes problem in polyhedra.* Mathematical modelling and numerical analysis. Vol. 35, N^0, (2001).

[33] V. Girault, L.R Scott. *A quasi-local interpolation operator preserving the descrete divergence.* Calcolo, 40 : 1, pp 1 – 19, (2003).

[34] V. Guinot, B. Cappelaere. *Two-grid finite-element schemes for the steady Navier-Stokes problem in polyhedra.* Polytech "Montpellier STE 2. 2005/2006.

[35] R. Haferssas, P. Jolivet, et F. Nataf. *An additive Schwarz method type theory for Lions's algorithm and Optimized Schwarz Methods.* SIAM J. Sci. Comput., 39(4), $A1345 - A1365$. (21 pages)

[36] Y. He *The euler implicit/explicit scheme for the 2D Time-dependent Navier-Stokes equations with smooth or non-smooth initial Data.* Mathematics of computaion, (2008)

[37] F. Hecht *New development in Frefem++.* Journal if Numerical Mathmatics 520, 251 – 266, (2012)

[38] T.J.R. Hughes, et A. Brooks. *A multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion.* AMD, 21, 1979.

[39] T.J.R. Hughes, et A. Brooks. *Streamline-upwind/petrov-galerkin formulation.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 32 :199 – 259, 1982.

[40] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, et M. Balestra. *A new finite element formulation for computational fluid dynamics : V. circumventing the babuska-brezzi condition : A stable petrov-galerkin formulation for the stokes problem accomodating equalorder interpolations.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engi- neering, 59 :85 – 99, 1986.

[41] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, et M. Balestra. *A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Vi. the stokes problem with various well-posed boundary conditions : symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engi- neering, 65 :85 – 96, 1987.

[42] P. Jolivet, V. Dolean, F. Hecht, F. Nataf, C. Prud'Homme, N. Spillane. *High preformance domain decomposition methods on massively parallel architectures with FreeFEM++.* Jurnal of Numerical Mathmatics, De Gruyter, (2013).

[43] G. Karypis, V. Kumar *Metis, unstructured graph partitioning and sparse matrix ordering system.* Technical report. Minneapolis, MN 55455 : University of Minnesota, Department of Computer Science, August 1995.

[44] G. Kreiss, E. Olsson *A conservative level set method for two phase flow II.* Preprint submitted to Elsevier Science, (2006)

[45] P-L, Lions . *"On the Schwarz alternating method. I". In : First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations.* pp. $1-42$ (cit. on p. 15), 1988.

[46] Y. Maday, G. Turinici. *Résolution d'EDP par un schéma en temps $<$ pararéel $>$.* Comptes rendus de l'Académie des sciences. SÃ©rie I, Mathématique, Elsevier, 2001, 332 (7), pp.661 – 668. <hal-00798372>.

[47] R. Nabben, J.M Tang, C. Vuik et al. *Comparison of Two-Level Preconditioners Derived from Deflation, Domain Decomposition and Multigrid Methods.* Sci Comput (2009) Vol 39(3), pp 340 – 370.

[48] C.L. Navier, *Sur les lois du mouvements des fluides..Mém. Sci. Ist. France.* 6 (1822), pp 389 – 440.

[49] Y. Saad, M. H. Schultz. *GMRES : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems.* Siam j. sci. stat. comp., 7 : 856 – 869, 1986.

[50] H. A. Schwarz. *Uber einen GrenzÃ$\frac{1}{4}$bergang durch alternierendes Verfahren.* Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich, 15 : 272 – 286 (1870)

[51] M. Schatzman. *Analyse Numérique.* Paris, InterEditions, 1991.

[52] L.R. Scott, S. Zhang, Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Math. Comp.,* 54, (1990), 483 – 493.

[53] G.G. Stokes, On the theorie of the internal frictionof fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. Fellow of Pembroke College, (1845).

[54] R.S. Falk, A Fortin operator for two dimensional Taylor-Hood elements. *ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis* May 2008.

[55] B. Sousedik, J. Mandel. *On the equivalence of primal and dual substructuring preconditioners.* Electronic Transaction on Numerical Analysis, Volume 31, p.p 384 – 402, 2008.

[56] R. Temam *Navier-Stokes equations, Theory an numerical analysis.* North-Holland Publishing Company-Amsterdam

[57] P. Vassilevski *Multilevel block factorysation preconditionners : matrix-based analysis ans algorithms for solving finite element equations.* Vol. 10. Springer.

Résumé

Les équations aux dérivées partielles issues de la nature n'ont pas de solutions explicites et ne peuvent de ce fait qu'être résolue de manière approchée. Le travail présenté dans cette thèse porte d'une part sur la résolution du système de Navier-stokes couplé avec l'équation de la température. Ce couplage est connu sous le nom du modèle de Boussinesq. La viscosité et la force extérieure sont non linéaires dépendent de la température. D'autre part, sur la validation numérique des résultats théoriques obtenus dans le cadre académique et industriel.

Ce travail porte sur deux parties. Dans la première, nous nous intéressons à l'approximation numérique de la solution des schémas discrets proposés en utilisant la méthode d'Euler semi-implicit pour la dicrétisation en temps et la méthode des éléments finis pour la discrétisation en espace d'ordre un. Dans le but de gagner en temps et en ordre de convergence, nous discrétisons le problème de couplage en ordre deux en temps et en espace, respectivement par la méthode BDF et la méthode des éléments finis d'ordre deux. Nous effectuons ainsi l'analyse de l'erreur *a priori* des schémas proposés et nous terminons par valider les résultats théoriques déjà obtenus par des simulations numériques en utilisant le logiciel Freefem++.

La deuxième partie est dédiée à la modélisation du phénomène bouchon qui apparaît de temps en temps durant l'impression 3D. Dans le but d'améliorer l'algorithme séquentiel 2D et pouvoir passer ensuite à la simulation 3D, nous effectuons des calculs parallèles basés sur la méthode de décomposition de domaine. Les résultats obtenus montrent que cette méthode n'est pas efficace en terme de scalablité. Nous utilisons alors une méthode de préconditionnement à un niveau où les essais numériques decèlent une dépendance de la convergence en fonction du nombre de processeurs et de la physique du modèle. D'où l'idée d'ajouter au préconditionneur un deuxième niveau par la résolution du problème grossier.

Mots clés : Equation de Navier-Stokes, Equation de la chaleur, modèle de Boussinesq, analyse d'erreur *a priori*, méthode des éléments finis, calcul parallèle, méthode de décomposition de domaine, méthode de préconditionnement.

Abstract

The analytical solutions of the majority of partial differential equations are difficult to calculate, hence, numerical methods are employed.
This work is devided into two parts. First, we study the time dependent Navier-Stokes equations coupled with the heat equation with nonlinear viscosity depending on the temperature known as the Boussinesq (buoyancy) model . Then, numerical experiments are presented to confirm the theoretical accuracy of the discretization using the Freefem++ software.

In the first part, we propose first order numerical schemes based on the finite element method for the space discretization and the semi-implicit Euler method for the time discretization. In oder to gain time and order of convergence, we study a second order scheme in time and space by using respectively the second order BDF method "Backward Differentiation Formula" and the finite element method. An optimal *a priori* error estimate is then derived for each numerical scheme. Finally, numerical experiments are presented to confirm the theoretical results.

The second part is dedicated to the modeling of the thermal instability that appears from time to time while printing using a 3D printer. Our purpose is to build a reliable scheme for the 3D simulation. For this reason, we propose a trivial parallel algorithm based on the domain decomposition method. The numerical results show that this method is not efficient in terms of scalability. Therefore, it is inportant to use a one-level preconditioning method "ORAS". When using a large number of subdomains, the numerical test shows a slow convergence. In addition, we noticed that the iteration number depends on the physical model. A coarse space correction is required to obtain a better convergence and to be able to model in three dimensions.

KEYWORDS. Boussinesq model, Buoyancy, Navier-Stokes equations ; Heat equation ; finite element method ; *a priori* error estimates, parallel computation, domain decomposition method,.