



HAL
open science

Quelques contributions à la contrainte et à la statistique des équations différentielles dirigées par le mouvement brownien fractionnaire ainsi qu'à la sélection de modèle.

Nicolas Marie

► To cite this version:

Nicolas Marie. Quelques contributions à la contrainte et à la statistique des équations différentielles dirigées par le mouvement brownien fractionnaire ainsi qu'à la sélection de modèle.. Probabilités [math.PR]. Paris X - Nanterre, 2019. tel-02357331

HAL Id: tel-02357331

<https://hal.science/tel-02357331>

Submitted on 15 Nov 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire d'Habilitation à Diriger les Recherches
Soutenu le 8 novembre 2019

Nicolas MARIE

Quelques contributions à la contrainte et à la statistique des
équations différentielles dirigées par le mouvement brownien
fractionnaire ainsi qu'à la sélection de modèle

Jury

Fabienne COMTE
Laure COUTIN
Arnak DALALYAN
Mikhail KAMENSKI
Antoine LEJAY
Mathieu ROSENBAUM
Philippe SOULIER
Lorenzo ZAMBOTTI

MAP5 - Université Paris Descartes
IMT - Université Paul Sabatier
CREST - ENSAE
Voronezh State University
INRIA Nancy Grand-Est
CMAP - Ecole Polytechnique
MODAL'X - Université Paris Nanterre
LPSM - Sorbonne Université

Ecole doctorale :
Unité de recherche :
Référent :
Rapporteurs :

ED CLM
Modal'X (EA 3454)
Philippe SOULIER
Arnak DALALYAN
Mikhail KAMENSKI
Lorenzo ZAMBOTTI

**Quelques contributions à la contrainte et à la
statistique des équations différentielles dirigées par
le mouvement brownien fractionnaire ainsi qu'à la
sélection de modèle**

Nicolas MARIE

Mémoire de synthèse en vue de l'obtention de l'habilitation
à diriger les recherches

Table des matières

Remerciements	5
Liste des publications	7
Introduction	9
Chapitre 1. Contrainte des solutions d'équations différentielles dirigées par le mouvement brownien fractionnaire et applications	11
1. Condition d'invariance pour les équations différentielles dirigées par le mBf et théorème de comparaison	13
2. Problème de réflexion de Skorokhod associé à une équation différentielle dirigée par le mBf et à un processus de rafle de Moreau	16
3. Equations différentielles dirigées par le mBf et dont le champ de vecteurs admet des singularités	20
4. Contrainte des solutions d'équations différentielles dirigées par le mBf en sciences du vivant	28
Chapitre 2. Estimation non-paramétrique et sélection de modèle	33
1. Estimateur de Nadaraya-Watson de la fonction de drift d'une équation différentielle dirigée par le mBf	34
2. Sélection de fenêtre pour l'estimateur de Wolverton-Wagner	38
3. Estimateur de la tendance d'une série temporelle multivariée en grande dimension	45
Bibliographie	49

Remerciements

Je tiens à remercier plusieurs collègues et amis qui, depuis la fin de ma thèse, ont travaillé avec moi et m'ont aidé à découvrir de nouvelles thématiques. Tout d'abord Fabienne Comte qui m'a guidé dans la découverte de l'estimation non-paramétrique et de la sélection de modèle. Faire de la recherche et écrire avec elle est un plaisir peu commun et je l'en remercie chaleureusement. Je remercie Paul Raynaud de Fitte dont j'envie la sagesse et qui m'a beaucoup appris sur l'étude des systèmes dynamiques multivalués. Je remercie Pierre Alquier qui m'a fait découvrir la statistique en grande dimension et avec qui nous avons travaillé sur l'estimation de la tendance de séries temporelles multivariées. Ce fut passionnant. Je remercie mes plus anciens collaborateurs et mentors : Laure Coutin, Laurent Decreusefond et Antoine Lejay. Ils sont toujours très présents et m'apportent régulièrement leur soutien. Merci à Laure et Antoine d'avoir monté le GdR TRAG et de m'avoir proposé d'y jouer un rôle actif. Je remercie Francis Lavergne et Jean-Marc Guglielmi, tous deux médecins, qui m'ont aidé à envisager des applications de mes travaux sur la contrainte d'EDS en pharmacocinétique et en neurophysiologie.

Je remercie l'ensemble des membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail en vue de l'obtention de l'HDR. En particulier Arnak Dalalyan, Mikhail Kamenskii et Lorenzo Zambotti qui ont gentiment accepté d'être rapporteurs.

Je remercie l'ESME Sudria, qui finance en partie mes recherches, et le laboratoire Modal'X de l'université Paris Nanterre, qui m'a accueilli comme membre associé. J'adresse mes remerciements à Hélène Halconruy et Maxime Ossonce, les deux autres *matheux* de l'ESME Sudria, avec qui j'ai souvent des discussions constructives à propos de bien des sujets. Enfin, je tiens à remercier tout particulièrement celle qui a le courage de me soutenir chaque fois que je doute, chaque fois que j'angoisse, ma compagne Nathalie.

Liste des publications

Articles soumis :

- F. Comte et N. Marie. *Bandwidth Selection for the Wolverton-Wagner Estimator*. arXiv : 1902.00734.
- C. Castaing, N. Marie et P. Raynaud de Fitte. *Sweeping Processes Perturbed by Rough Signals*. arXiv : 1702.06495.
- N. Marie. *On a Constrained Fractional Stochastic Volatility Model*. arXiv : 1608.03421.

Articles publiés :

- P. Alquier et N. Marie. *Matrix Factorization for Multivariate Time Series Analysis*. Electronic Journal of Statistics, DOI : 10.1214/19-EJS1630, 2019.
- F. Comte et N. Marie. *Nonparametric Estimation in Fractional SDE*. Statistical Inference for Stochastic Processes 22, 3, 359-382, 2019.
- G. Marcoulides, N. Marie et L. Trinchera. *A Distribution Free Interval Estimate for Coefficient Alpha*. Structural Equation Modeling : A Multidisciplinary Journal 25, 6, 876-887, 2018.
- L. Coutin, J.M. Guglielmi et N. Marie. *On a Fractional Stochastic Hodgkin-Huxley Model*. International Journal of Biomathematics 11, 5, 16 pages, 2018.
- L. Coutin et N. Marie. *Invariance for Rough Differential Equations*. Stochastic Processes and their Applications 127, 7, 2373-2395, 2017.
- N. Marie. *Ergodicity of a Generalized Jacobi's Equation and Applications*. Stochastic Processes and their Applications 126, 1, 66-99, 2016.
- N. Marie. *Singular Equations Driven by an Additive Noise and Applications*. Communications on Stochastic Analysis 9, 3, 309-341, 2015.
- N. Marie. *Sensitivities via Rough Paths*. ESAIM : Probability and Statistics 19, 515-543, 2015.
- F. Lavergne, N. Marie et F. Mehran. *Les 5 dimensions psychiques identifiées à partir des schémas précoces inadaptés*. l'Encéphale 41, 4, 314-322, 2015.
- N. Marie. *A Generalized Mean-Reverting Equation and Applications*. ESAIM : Probability and Statistics 18, 799-828, 2014.
- N. Marie. *Sur une application de l'analyse complexe aux trajectoires rugueuses*. Annales Mathématiques Blaise Pascal 21, 2, 69-80, 2014.
- N. Marie. *A Pathwise Fractional One Compartment Intra-Veinous Bolus Model*. International Journal of Statistics and Probability 3, 3, 65-79, 2014.

Remarque. Certains articles de la liste précédente ne sont pas abordés dans ce mémoire parce qu'ils ne s'inscrivent pas dans mon projet de recherche à long terme.

Introduction

Plusieurs approches étaient envisageables pour présenter ces travaux de recherche : contrainte et statistique des équations différentielles dirigées par le mouvement brownien fractionnaire (mBf) puis sélection de modèle, ou bien contrainte des équations différentielles dirigées par le mBf puis estimation non-paramétrique et sélection de modèle. Finalement, la seconde approche a été retenue pour mieux équilibrer le contenu des chapitres.

Le premier chapitre porte sur la contrainte des solutions d'équations différentielles dirigées par le mBf.

Dans le contexte du calcul d'Itô, la contrainte des solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS) a largement été étudiée depuis la fin des années 1970. Il existe au moins trois façons de contraindre la solution d'une EDS à évoluer dans un sous-ensemble de l'espace. Pour un ensemble contraint convexe et fermé, dynamique ou non, il convient d'imposer au champ de vecteurs de l'équation de satisfaire une condition d'invariance ou d'y associer un problème de réflexion de Skorokhod. Pour ne citer qu'une référence sur chacune de ces techniques, les autres viendront ensuite, le lecteur pourra se référer à Aubin et Da Prato [6] et Lions et Sznitman [57]. En dimension 1, pour un intervalle contraint ouvert, il convient d'imposer à la fonction de drift de l'équation d'exercer une force de rappel sur la solution tandis que la fonction de volatilité présente des singularités aux bornes de l'intervalle en question. C'est le cas du modèle de Cox-Ingersoll-Ross.

Depuis la fin des années 1990, grâce aux travaux de T. Lyons (cf. Lyons [58]) sur la théorie des trajectoires rugueuses qui n'a cessée d'évoluer depuis, il est possible de donner un sens et d'étudier les équations différentielles multidimensionnelles dirigées par le mBf. Dans ce contexte, les trois premières sections du premier chapitre présentent des travaux généralisant les trois méthodes de contrainte mentionnées ci-dessus aux équations différentielles dirigées par le mBf. Le premier chapitre s'achève par deux applications de modèles d'équations différentielles dirigées par le mBf avec contrainte en sciences du vivant.

Le second chapitre porte sur trois travaux en estimation non-paramétrique et sélection de modèle.

De façon à assurer une continuité avec ce qui précède, la première section porte sur la consistance et une vitesse de convergence pour un estimateur de Nadaraya-Watson de la fonction de drift d'une équation différentielle perturbée par un bruit additif fractionnaire sous une condition de dissipativité. L'estimateur en question est défini à l'aide de l'intégrale de Skorokhod, construite à partir de l'opérateur divergence du calcul de Malliavin.

Les deux sections suivantes portent sur des travaux en sélection de modèle. La seconde section présente de nouveaux résultats sur l'estimateur de Wolverton-Wagner (cf. Wolverton et Wagner [93]) de la densité parente d'un n -échantillon. Il s'agit

d'une généralisation récursive de l'estimateur de Parzen-Rosenblatt particulièrement adaptée au traitement de données en temps réel. Sous une condition de régularité de Nikolski sur la densité considérée, un contrôle du risque quadratique intégré de l'estimateur de Wolverton-Wagner analogue à celui connu pour l'estimateur de Parzen-Rosenblatt est établi. Ensuite, pour des fenêtres dépendant d'un paramètre réel, des estimateurs de ce dernier obtenus par une méthode type Goldenshluger-Lepski (cf. Goldenshluger et Lepski [37]) et par une méthode type Lacour-Massart-Rivoirard (cf. Lacour et al. [54]) sont étudiés.

La troisième section porte sur l'estimation de la tendance d'une série temporelle multivariée en grande dimension. Pour une matrice de bruit dont les lignes sont indépendantes et sous-gaussiennes, supposer que la matrice des tendances de la série temporelle considérée est de faible rang r et qu'elle dépend d'un paramètre τ caractérisant une propriété spécifique à la tendance d'une série temporelle comme la τ -périodicité, améliore le contrôle connu (cf. Koltchinskii et al. [42]) du risque quadratique de l'estimateur des moindres carrés de cette matrice des tendances. Ce contrôle permet de construire un estimateur de (r, τ) par pénalisation étudié en fin de section.

Il y a deux chapitres dans ce mémoire, mais en réalité il y a trois axes thématiques. Le dernier axe thématique intervient dans les deux chapitres : l'étude du comportement en temps long des solutions d'équations différentielles dirigées par le mBf en vue d'applications statistiques. Au premier chapitre, un théorème ergodique est établi pour les équations dont le champ de vecteurs présente des singularités dans le contexte de la théorie des systèmes dynamiques aléatoires de L. Arnold (cf. Arnold [5]). Au second chapitre, des résultats connus sur le comportement en temps long d'équations différentielles avec bruit additif fractionnaire dans le contexte de la théorie des systèmes dynamiques stochastiques de M. Hairer (cf. Hairer [43] et Hairer et Ohashi [44]) sont utilisés pour étudier la convergence de l'estimateur de Nadaraya-Watson mentionné précédemment.

Chaque chapitre commence par une introduction positionnant le problème, présentant brièvement le contenu de chacune de ses sections et listant les notations fréquemment utilisées. Les sections présentent de façon concise un ou plusieurs travaux effectués depuis 2012. Les résultats sont énoncés et expliqués sans démonstration détaillée, mais avec un schéma de preuve mettant en évidence les difficultés techniques et les principales références utilisées. La plupart des sections s'achèvent par quelques perspectives indiquées en gras.

Contrainte des solutions d'équations différentielles dirigées par le mouvement brownien fractionnaire et applications

Soit l'équation différentielle

$$(1) \quad X(t) = x_0 + \int_0^t b(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dB(s),$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^e$ avec $e \in \mathbb{N}^*$, B est un mouvement brownien fractionnaire d -dimensionnel ($d \in \mathbb{N}^*$) et d'indice de Hurst $H \in]1/4, 1[$, $(b, \sigma) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^e, \mathbb{R}^e \times \mathcal{M}_{e,d}(\mathbb{R}))$ et l'intégrale par rapport à B est prise au sens des trajectoires rugueuses (cf. p.ex. Friz et Hairer [32] ou Friz et Victoir [33]).

Il existe essentiellement deux façons de contraindre la solution de l'Equation (1) à évoluer dans un sous-ensemble convexe et fermé de l'espace. La première consiste à choisir b et σ de sorte qu'au bord de l'ensemble contraint, le bruit devienne négligeable et qu'une force de rappel s'exerce sur la solution. Il s'agit d'une condition d'invariance. La Section 1 présente une condition nécessaire et suffisante d'invariance d'une partie convexe et fermée de \mathbb{R}^e par l'Equation (1). Il en découle un théorème de comparaison. Les résultats de cette section sont démontrés dans Coutin et Marie [22].

La seconde méthode consiste à ajouter à la solution de l'Equation (1) un processus repoussant cette dernière à l'intérieur avec une force minimale chaque fois qu'elle touche le bord de l'ensemble contraint. Il s'agit d'un problème de réflexion de Skorokhod. La Section 2 porte sur l'existence, l'unicité et l'approximation de la solution d'un problème de réflexion de Skorokhod associé à l'Equation (1) et à un processus de raffle de Moreau pour un ensemble contraint convexe, compact et dépendant continûment du temps au sens de la distance de Hausdorff. Les résultats de cette section sont démontrés dans Castaing, Marie et Raynaud de Fitte [14] dans le cas $H \in]1/3, 1[$.

En dimension 1, une méthode permettant de contraindre la solution de l'Equation (1) à évoluer dans un intervalle ouvert I consiste à choisir une fonction σ admettant des singularités aux bornes de I et une fonction b de sorte qu'une force de rappel s'exerce sur la solution. Dans ce contexte, la Section 3 porte sur l'existence et l'unicité de la solution, la convergence d'un schéma d'approximation, un théorème ergodique et la régularité de l'application d'Itô pour l'Equation (1). Les résultats de cette section sont démontrés dans Marie [60], [61] et [62].

Le grand atout des modèles d'équations différentielles dirigées par le mBf dans les applications est la possibilité de contrôler la régularité des trajectoires de la solution via le paramètre de Hurst du mBf. La Section 4 porte sur des modèles d'équations différentielles dirigées par le mBf avec contraintes en sciences du vivant. Les résultats de cette section sont démontrés dans Marie [59] et Coutin, Guglielmi et Marie

[23].

Pour simplifier l'exposé, les Sections 1, 2 et 3 présentent les résultats de Coutin et Marie [22], Castaing, Marie et Raynaud de Fitte [14] et Marie [60], [61] et [62] pour un signal brownien fractionnaire et un ensemble contraint convexe. Néanmoins, ces résultats ont été obtenus dans un contexte plus général.

Sauf mention du contraire, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne l'espace probabilisé canonique pour le processus B et les fonctions b et σ satisfont la condition suivante sous-laquelle l'Equation (1) admet une unique solution.

HYPOTHÈSE 0.1. Soit $p := 1/H$. Les fonctions b et σ sont $[p]+1$ fois continûment différentiables sur \mathbb{R}^e et de différentielles successives bornées.

La définition suivante est utilisée dans plusieurs sections de ce chapitre.

DÉFINITION 0.2. Soit C un sous-ensemble convexe et fermé de \mathbb{R}^e . Pour tout $x \in \mathbb{R}^e$,

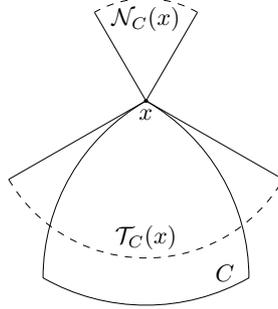
$$\mathcal{N}_C(x) := \{s \in \mathbb{R}^e : \forall y \in C, \langle s, y - x \rangle \leq 0\}$$

est le cône normal à C en x et

$$\mathcal{T}_C(x) := \{\delta \in \mathbb{R}^e : \forall s \in \mathcal{N}_C(x), \langle s, \delta \rangle \leq 0\}$$

est le cône tangent à C en x .

La figure suivante illustre la Définition 0.2 :



Enfin, quelques notations fréquemment utilisées dans ce chapitre :

- $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^d .
- \mathbf{p}_C désigne la projection orthogonale sur la partie convexe et fermée C d'un espace de Hilbert donné.
- $\text{ck}(\mathbb{R}^d)$ désigne l'ensemble des parties convexes et compactes de \mathbb{R}^d .
- $d_{\mathcal{H}}$ désigne la distance de Hausdorff sur $\text{ck}(\mathbb{R}^d)$.
- Pour $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $s < t$, $\Delta_{s,t} := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : s \leq u < v \leq t\}$ et $\Delta_t := \Delta_{0,t}$.
- Pour $q \geq 1$ et $T > 0$, $\mathcal{C}^{q\text{-var}}([0, T], \mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans \mathbb{R}^d et de q -variation finie. La (semi-)norme en q -variation est notée $\|\cdot\|_{q\text{-var}, T}$.
- Pour $\alpha \in]0, 1]$ et $T > 0$, $\mathcal{C}^\alpha([0, T], \mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des fonctions α -höldériennes de $[0, T]$ dans \mathbb{R}^d . La (semi-)norme α -höldérienne est notée $\|\cdot\|_{\alpha, T}$.
- Pour $q \geq 1$ et $T > 0$, $G\Omega_{q,T}(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des q -trajectoires (rueuses) géométriques définies sur $[0, T]$.

1. Condition d'invariance pour les équations différentielles dirigées par le mBf et théorème de comparaison

Dans cette section, les résultats sont présentés à horizon de temps fini $T > 0$. Tout d'abord, il convient de définir ce qu'est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^e invariant par l'Equation (1).

DÉFINITION 1.1. Soit un sous-ensemble fermé C de \mathbb{R}^e . Sous l'Hypothèse 0.1,

(1) La solution X de l'Equation (1) est viable dans C si et seulement si,

$$\forall \omega \in \Omega, \forall t \in [0, T], X(\omega, t) \subset C.$$

(2) C est invariant par l'Equation (1) si et seulement si, pour tout $x_0 \in C$, si X désigne la solution de l'Equation (1) avec la condition initiale x_0 , alors X est viable dans C .

Une condition nécessaire et suffisante d'invariance d'un sous-ensemble convexe et fermé de l'espace par une équation différentielle ordinaire est démontrée par Nagumo dans [74]. Une extension de ce résultat aux équations différentielles dirigées par le mouvement brownien dans le contexte du calcul d'Itô est démontrée par Aubin et Da Prato dans [6]. Dans [68], Milian obtient des résultats plus explicites dans le cas particulier où l'ensemble contraint est un polyèdre convexe. Dans [7], les résultats de [6] sont étendus par Aubin et Da Prato aux inclusions différentielles stochastiques. Enfin, une condition nécessaire et suffisante d'invariance s'appliquant à la fois aux équations différentielles stochastiques, aux équations différentielles stochastiques rétrogrades et aux équations aux dérivées partielles est établie dans Buckdahn et al. [11].

L'invariance d'un sous-ensemble fermé de l'espace par une équation différentielle dirigée par un signal α -höldérien avec $\alpha \in]1/2, 1[$ a été étudiée par plusieurs auteurs en intégrant par rapport au signal au sens du calcul fractionnaire (cf. Nualart et Rascanu [78]). Dans Ciotir et Rascanu [16] et Nie et Rascanu [76], les auteurs démontrent une condition nécessaire et suffisante d'invariance pour une équation différentielle dirigée par un mBf d'indice de Hurst $H \in]1/2, 1[$. Dans [66], Melnikov, Mishura et Shevchenko démontrent une condition nécessaire et suffisante d'invariance d'un sous-ensemble fermé et à bord lisse de l'espace pour un signal mixte (i.e. un couple dont l'une des composantes est un mouvement brownien et l'autre un processus à trajectoires α -höldériennes avec $\alpha \in]1/2, 1[$).

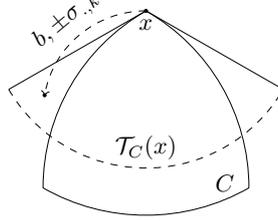
Dans la suite de cette section, C désigne un sous-ensemble convexe et fermé de \mathbb{R}^e . Pour tout $E \subset \mathbb{R}^e$, soit

$$\mathcal{I}(E) := \{(b, \sigma) : \forall x \in E, \forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket, b(x), \pm \sigma_{\cdot, k}(x) \in \mathcal{T}_C(x)\}.$$

Le théorème suivant est le résultat central de Coutin et Marie [22]. Il étend les conditions nécessaires et suffisantes d'invariance mentionnées ci-dessus au cas d'une équation différentielle dirigée par un mBf d'indice de Hurst $H \in]1/4, 1[$ par rapport auquel l'intégrale est prise au sens des trajectoires rugueuses.

THÉORÈME 1.2. *Sous l'Hypothèse 0.1, C est invariant par l'Equation (1) si et seulement si $(b, \sigma) \in \mathcal{I}(\partial C)$.*

La figure suivante illustre le Théorème 1.2 :



EXEMPLE 1.3. Ci-dessous, une formulation plus explicite de $\mathcal{I}(\partial C)$ pour quelques sous-ensembles convexes et fermés simples de \mathbb{R}^e :

- (1) Si C est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^e , alors $(b, \sigma) \in \mathcal{I}(\partial C)$ si et seulement si,

$$b(C) \subset C$$

et

$$\sigma_{.,k}(C) \subset C ; \forall k \in \llbracket 1, e \rrbracket.$$

- (2) Si C est la boule unité fermée de \mathbb{R}^e , alors $(b, \sigma) \in \mathcal{I}(\partial C)$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}^e$ tel que $\|x\| = 1$,

$$\langle x, b(x) \rangle \leq 0$$

et

$$\langle x, \sigma_{.,k}(x) \rangle = 0 ; \forall k \in \llbracket 1, e \rrbracket.$$

- (3) Si

$$C = \bigcap_{i \in I} \{x \in \mathbb{R}^e : \langle s_i, x - a_i \rangle \leq 0\},$$

où I est une partie finie et non vide de \mathbb{N} et $(a_i)_{i \in I}$ et $(s_i)_{i \in I}$ sont deux familles d'éléments de \mathbb{R}^e tels que $s_i \neq 0$ pour tout $i \in I$, alors $(b, \sigma) \in \mathcal{I}(\partial C)$ si et seulement si pour tous $x \in \mathbb{R}^e$ et $i \in I$ tels que $\langle s_i, x - a_i \rangle = 0$,

$$\langle s_i, b(x) \rangle \leq 0$$

et

$$\langle s_i, \sigma_{.,k}(x) \rangle = 0 ; \forall k \in \llbracket 1, e \rrbracket.$$

Pour une preuve détaillée du Théorème 1.2, se référer à Coutin et Marie [22], Sous-sections 3.1 et 3.3 pour les conditions suffisante et nécessaire respectivement. Sous l'Hypothèse 0.1, la suite de processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$(2) \quad X_n(t) = x_0 + \int_0^t b(X_n(s)) ds + \int_0^t \sigma(X_n(s)) dB_n(s) ; t \in [0, T],$$

où B_n désigne une approximation lipschitzienne et de signature d'ordre $[p]$ convergant dans $G\Omega_{p+\varepsilon, T}(\mathbb{R}^e)$, $\varepsilon > 0$ (interpolée linéaire, convoluée avec un noyau, etc.), converge uniformément vers la solution X de l'Equation (1). La preuve de la condition suffisante du Théorème 1.2 se décompose en trois étapes :

- (1) Montrer que si $(b, \sigma) \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^e)$, alors C est invariant par l'Equation (2). Pour cela, montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T]$ et $h > 0$,

$$d_C^2(X_n(t+h)) - d_C^2(X_n(t)) \leq ch^2,$$

puis conclure de la même manière qu'Aubin et Da Prato au Théorème 1.5 de [6].

- (2) Montrer que si $(b, \sigma) \in \mathcal{I}(\partial C)$, alors C est invariant par l'Equation (2) en remplaçant (b, σ) par $(b, \sigma) \circ \mathbf{p}_C$ dans l'Equation (2).

(3) Montrer que si $(b, \sigma) \in \mathcal{I}(\partial C)$, alors C est invariant par l'Equation (1) car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\|_{\infty, T} = 0.$$

La preuve de la condition nécessaire du Théorème 1.2, plus technique, se décompose également en trois étapes :

(1) Montrer que si le demi-hyperplan $D_\nu := \{x \in \mathbb{R}^e : x_\nu \geq 0\}$ avec $\nu \in \llbracket 1, e \rrbracket$ est invariant par l'Equation (1), alors $(b, \sigma) \in \mathcal{I}(\partial D_\nu)$. D'une part, montrer que s'il existe $x_0 \in D_\nu$ tel que

$$(3) \quad \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{\widehat{X}_\nu(t)}{t^H \sqrt{2 \log(\log(1/t))}} < 0,$$

où $\widehat{X}(t)$ avec $t \in [0, T]$ est le schéma d'Euler (rugueux) associé à l'Equation (1) avec la condition initiale x_0 sur la subdivision $(0, t)$ de l'intervalle $[0, t]$ (cf. Friz et Victoir [33], Section 10.3.5), alors D_ν n'est pas invariant par l'Equation (1). D'autre part, via la loi du logarithme itéré pour le mouvement brownien fractionnaire (cf. Arcones [4] et Viitasaari [91], Remarque 2.3.3), montrer que si $(b, \sigma) \notin \mathcal{I}(\partial D_\nu)$, alors l'inégalité (3) est satisfaite.

(2) Montrer que si le demi-espace $H_{a,s} := \{x \in \mathbb{R}^e : \langle s, x - a \rangle \leq 0\}$ avec $(a, s) \in \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^e \setminus \{0\}$ est invariant par l'Equation (1), alors $(b, \sigma) \in \mathcal{I}(\partial H_{a,s})$ en se ramenant au résultat de l'étape 1 par un changement de variable analogue à celui de la preuve du Théorème 1 de Milian [68].

(3) Montrer que si C est invariant par l'Equation (1), alors $(b, \sigma) \in \mathcal{I}(\partial C)$. Pour cela, supposer que $(b, \sigma) \notin \mathcal{I}(\partial C)$, ce qui entraîne qu'il existe $x_0 \in \partial C$ et $s \in \mathcal{N}_C(x_0)$ tels que

$$\langle b(x_0), s \rangle > 0 \text{ ou } (\exists k \in \llbracket 1, d \rrbracket : \langle \sigma_{\cdot, k}(x_0), s \rangle \neq 0).$$

Alors, $(b, \sigma) \notin \mathcal{I}(\partial H_{x_0, s})$ et d'après l'étape 2, il existe $t \in [0, T]$ tel que $X(t) \notin H_{x_0, s}$. Puisque $C \subset H_{x_0, s}$, C n'est pas invariant par l'Equation (1).

Le corollaire suivant permet de relaxer l'Hypothèse 0.1 de régularité sur b et σ lorsque C est compact.

COROLLAIRE 1.4. *Si C est compact, $x_0 \in C$, b et σ sont $[p]+1$ fois continûment différentiables sur \mathbb{R}^e et $(b, \sigma) \in \mathcal{I}(\partial C)$, alors l'Equation (1) admet une unique solution viable dans C .*

La preuve du Corollaire 1.4 est simple (cf. Coutin et Marie [22], Corollaire 3.7). C'est une conséquence de la compacité de C , du Théorème 1.2 et de Friz et Victoir [33], Theorem 10.21.

La Section 1 s'achève par un théorème de comparaison. Soient les équations différentielles

$$(4) \quad X^1(t) = x_0^1 + \int_0^t b^1(X^1(s))ds + \int_0^t \sigma^1(X^1(s))dB^1(s)$$

et

$$(5) \quad X^2(t) = x_0^2 + \int_0^t b^2(X^2(s))ds + \int_0^t \sigma^2(X^2(s))dB^2(s)$$

où, pour $j \in \{1, 2\}$, $x_0^j \in \mathbb{R}^e$, B^j est un mouvement brownien fractionnaire d -dimensionnel d'indice de Hurst $H \in]1/4, 1[$, $b^j \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^e)$, $\sigma^j \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^e, \mathcal{M}_{e,d}(\mathbb{R}))$ et l'intégrale par rapport à B^j est prise au sens des trajectoires rugueuses. Par ailleurs, soient $I \subset \llbracket 1, e \rrbracket$ et

$$C := \{(x^1, x^2) \in (\mathbb{R}^e)^2 : \forall i \in I, x_i^1 \leq x_i^2\}.$$

COROLLAIRE 1.5. *Sous l'Hypothèse 0.1, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *Pour tous $(x_0^1, x_0^2) \in C$, $i \in I$, $\omega \in \Omega$ et $t \in [0, T]$, $X_i^1(\omega, t) \leq X_i^2(\omega, t)$, où X^1 (resp. X^2) est la solution de l'Equation (4) (resp. (5)) avec la condition initiale x_0^1 (resp. x_0^2).*

(2) *Pour tous $(x^1, x^2) \in C$ et $i \in I$, si $x_i^1 = x_i^2$, alors*

$$b_i^1(x^1) \leq b_i^2(x^2)$$

et

$$\forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket, \sigma_{i,k}^1(x^1) = \sigma_{i,k}^2(x^2).$$

La preuve du Corollaire 1.5 est simple (cf. Coutin et Marie [22], Proposition 4.1). Il suffit d'écrire l'énoncé du Théorème 1.2 pour l'Equation (4)-(5) et C en remarquant que

$$C \cong \bigcap_{i \in I} \{x \in \mathbb{R}^{2e} : \langle s_i, x \rangle \leq 0\},$$

où $s_i := e_i - e_{e+i}$ pour tout $i \in I$.

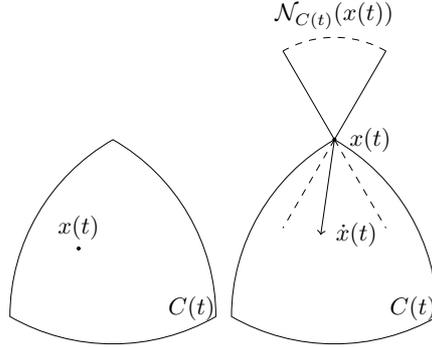
2. Problème de réflexion de Skorokhod associé à une équation différentielle dirigée par le mBf et à un processus de rafle de Moreau

Dans cette section, les résultats sont présentés à horizon de temps fini $T > 0$. Le processus de rafle est défini par l'inclusion différentielle

$$(6) \quad \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \mathcal{N}_{C(t)}(x(t)) \quad |Dx| \text{-p.p.} \\ x(0) = x_0 \in C(0) \end{cases},$$

où $C : [0, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^e$ est une multi-fonction à valeurs dans $\text{ck}(\mathbb{R}^e)$ et continue pour la distance de Hausdorff. Pour tout $f \in \mathcal{C}^{1\text{-var}}([0, T], \mathbb{R}^e)$, \dot{f} désigne la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure différentielle Df de f par rapport à sa variation totale $|Df|$.

L'Inclusion (6) fut introduite par J-J. Moreau en 1976 (cf. Moreau [73]) pour modéliser des problèmes d'élasto-plasticité. Concrètement, si elle en admet une unique, alors la solution de l'Inclusion (6) est un point immobile de l'ensemble contraint, excepté lorsque le bord de ce dernier le touche. Dans ce cas, le point est maintenu à l'intérieur de l'ensemble contraint avec une force minimale. Deux situations sont donc possibles :



L'existence, l'unicité et l'approximation de la solution de l'Inclusion (6) ont largement été étudiés sous diverses conditions sur la multi-fonction C (cf. p.ex. Moreau [73], Valadier [89] ou Monteiro Marques [72]). Le théorème d'existence et d'unicité suivant, utile dans ce qui suit, est dû à Monteiro Marques (cf. Monteiro Marques

[70], [71] et [72]) et s'appuie sur un résultat de Valadier (cf. Castaing [13] et Valadier [89]).

THÉORÈME 2.1. *S'il existe $a \in \mathbb{R}^e$ et $r > 0$ tels que*

$$\bar{B}_e(a, r) \subset C(t) ; \forall t \in [0, T],$$

alors l'Inclusion (6) admet une unique solution continue et à variation bornée x telle que

$$\|x\|_{1\text{-var}, T} \leq \frac{1}{2r} \|x_0 - a\|^2.$$

Sous l'Hypothèse 0.1, en désignant par X la solution de l'Equation (1), une façon naturelle de s'assurer que $X(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [0, T]$ est de poser le problème de réflexion de Skorokhod suivant :

$$(7) \quad \begin{cases} X(t) = H(t) + Y(t) \\ H(t) = \int_0^t b(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dB(s) \\ -\dot{Y}(t) \in \mathcal{N}_{C(t)}(X(t)) \text{ } |DY| \text{-p.p. avec } Y(0) = x_0 \end{cases} .$$

La définition du cône normal entraine que l'inclusion différentielle du Problème (7) définit un processus de rafle :

$$(8) \quad \begin{cases} -\dot{Y}(t) \in \mathcal{N}_{C_H(t)}(Y(t)) \text{ } |DY| \text{-p.p.} \\ Y(0) = x_0 \end{cases} ,$$

où $C_H(t) := C(t) - H(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.

L'existence, l'unicité et l'approximation de la solution du problème de réflexion de Skorokhod associé à une équation différentielle dirigée par le mouvement brownien pour un ensemble contrainté convexe et compact ont largement été étudiés dans le contexte du calcul d'Itô. Dans le cas d'un ensemble contrainté convexe, compact et constant en temps, l'existence et l'unicité de la solution est démontrée par Lions et Sznitman dans [57]. Sur l'existence et l'unicité de la solution dans le cas d'un ensemble contrainté convexe, compact et dépendant du temps, se référer à Bernicot et Venel [8] et Castaing et al. [15]. Dans [8], Bernicot et Venel démontrent également la convergence d'un schéma d'approximation de la solution.

Récemment, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'existence et à l'unicité de la solution du problème de réflexion de Skorokhod associé à une équation différentielle dirigée par un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $H \in]1/3, 1[$ pour un ensemble contrainté convexe et compact en intégrant par rapport au signal au sens des trajectoires rugueuses. Dans le cas d'un ensemble contrainté convexe, compact et constant en temps, l'existence d'une solution est démontrée par Aida dans [1] et [2]. L'unicité est une question beaucoup plus délicate et c'est pourquoi elle n'a été traitée que dans des cas particuliers. Dans [9], Besalu et al. démontrent l'existence et l'unicité de la solution pour une contrainte de positivité et dans [28], Deya et al. démontrent l'existence et l'unicité de la solution dans le cas unidimensionnel. Dans le cas d'un ensemble contrainté rectangulaire et dépendant du temps, pour $H \in]1/2, 1[$, Falkowski et Słominski démontrent l'existence et l'unicité de la solution dans [31].

Dans Castaing, Marie et Raynaud de Fitte [14], l'existence de solutions du Problème (7) est démontrée pour un bruit multiplicatif et l'unicité et la convergence d'un schéma d'approximation de la solution sont établies pour un bruit additif avec $H \in]1/3, 1[$ et sous la condition sur C suivante.

HYPOTHÈSE 2.2. (Condition d'intérieur non vide) C est une multi-fonction à valeurs dans $\text{ck}(\mathbb{R}^e)$, continue pour la distance de Hausdorff et telle qu'il existe une sélection continue $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^e$ satisfaisant

$$\overline{B}_e(\gamma(t), r) \subset \text{int}(C(t)) ; \forall t \in [0, T].$$

THÉORÈME 2.3. *Sous les Hypothèses 0.1 et 2.2, le Problème (7) admet au moins une solution à trajectoires continues et de $(p + \varepsilon)$ -variation finie pour tout $\varepsilon > 0$.*

Pour une preuve détaillée du Théorème 2.3, se référer à Castaing, Marie et Raynaud de Fitte [14], Section 3. Le cas $H \in]1/2, 1[$ (resp. $H \in]1/3, 1/2[$) est traité au Théorème 3.1 (resp. Théorème 3.2) de [14]. Dans les deux cas, la preuve consiste à établir que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par le schéma de Picard suivant admet une valeur d'adhérence dans $(\mathcal{C}^{(p+\varepsilon)\text{-var}}([0, T], \mathbb{R}^e), \|\cdot\|_{\infty, T})$, $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} X_n(t) = H_n(t) + Y_n(t) \\ H_n(t) = \int_0^t b(X_{n-1}(s))ds + \int_0^t \sigma(X_{n-1}(s))dB(s) \\ -\dot{Y}_n(t) \in \mathcal{N}_{C_{H_n(t)}}(Y_n(t)) \text{ } |DY_n|_{\text{-p.p.}} \text{ avec } Y_n(0) = x_0 \end{cases} .$$

La preuve se fait par récurrence et repose sur un argument de compacité utilisant les contrôles usuels de l'intégrale de Young et de l'intégrale des trajectoires rugueuses (cf. Friz et Hairer [32], Chapitres 4, 7 et 8), le Théorème 2.1 et un résultat de continuité pour le processus de rafle perturbé général (cf. Castaing et al. [15], Lemme 5.3).

PROPOSITION 2.4. *Sous les Hypothèses 0.1 et 2.2, si la fonction σ est constante, alors le Problème (7) admet une unique solution à trajectoires continues et de $(p+\varepsilon)$ -variation finie pour tout $\varepsilon > 0$.*

Pour une preuve détaillée de la Proposition 2.4, se référer à Castaing, Marie et Raynaud de Fitte [14], Proposition 4.1. La preuve de la Proposition 2.4 se décompose en trois étapes : en désignant par (X, Y) et (X^*, Y^*) deux solutions du Problème (7),

- (1) Montrer qu'il existe un contrôle $\omega : \Delta_T \rightarrow \mathbb{R}_+$ et une constante $c > 0$ tels que

$$\|X(t) - X^*(t)\|^2 \leq \omega(0, t) \|X - X^*\|_{\infty, t}^2 + c \int_0^t \langle X(s) - X^*(s), d(Y - Y^*)(s) \rangle$$

pour tout $t \in [0, T]$.

- (2) Remarquer que

$$(9) \quad \int_0^t \langle X(s) - X^*(s), d(Y - Y^*)(s) \rangle \leq 0 ; \forall t \in [0, T]$$

par monotonie du cône normal.

- (3) Puisque ω est un contrôle sur $[0, T]$, en déduire qu'il existe $\tau_1 \in]0, T]$ tel que $\omega(0, \tau_1) \in]0, 1[$ et donc $(X, Y) = (X^*, Y^*)$ sur $[0, \tau_1]$.

Par récurrence, $(X, Y) = (X^*, Y^*)$ sur $[0, T]$.

Lorsque σ n'est pas constante, la construction de l'intégrale de Young et de l'intégrale des trajectoires rugueuses suggère qu'il faut contrôler la norme en $(p + \varepsilon)$ -variation ($\varepsilon > 0$) de $X - X^*$ et non sa norme uniforme. Un terme analogue à celui du membre de gauche de l'Inégalité (9) apparait, mais la monotonie du cône normal ne suffit pas à assurer qu'il est négatif.

Pour $H = 1/2$, dans le contexte du calcul d'Itô, l'inégalité de Doob permet de conclure. Pour C constant en temps, se référer à Tanaka [84], Lions et Sznitman [57] et Saisho [80]. Pour C dépendant du temps, se référer à Bernicot et Venel [8] et Castaing et al. [15].

La proposition suivante établit une condition nécessaire et suffisante d'unicité de la solution du Problème (7) proche de l'Inégalité (9). Malheureusement, celle-ci semble difficile à vérifier en pratique sans arguments probabilistes complémentaires.

PROPOSITION 2.5. *Soient $(s, t) \in \Delta_T$ et (X, Y) et (X^*, Y^*) deux solutions du Problème (7) sous les Hypothèses 0.1 et 2.2.*

(1) *Sur $[s, t]$, si $H \in]1/2, 1[$, alors $(X, Y) = (X^*, Y^*)$ si et seulement si $X(s) = X^*(s)$ et*

$$\int_u^v \langle X(u, r) - X^*(u, r), d(Y - Y^*)(r) \rangle \leq 0 ; \forall (u, v) \in \Delta_{s,t}.$$

(2) *Sur $[s, t]$, si $H \in]1/3, 1/2[$, alors $(X, Y) = (X^*, Y^*)$ si et seulement si $X(s) = X^*(s)$ et*

$$\int_u^v \langle R_X(u, r) - R_{X^*}(u, r), d(Y - Y^*)(r) \rangle \leq 0 ; \forall (u, v) \in \Delta_{s,t}.$$

Pour une preuve détaillée de la Proposition 2.5, se référer à Castaing, Marie et Raynaud de Fitte [14], Propositions 4.2 et 4.3. Les arguments sont proches de ceux de la preuve de la Proposition 2.4, mais pour contrôler

$$\|X(v) - X(u) - (X^*(v) - X^*(u))\| ; (u, v) \in \Delta_{s,t}$$

et non plus

$$\|X(v) - X^*(v)\| ; v \in [0, T].$$

La Section 2 s'achève par un théorème de convergence pour le schéma d'approximation suivant de la solution du Problème (7) sous les conditions de la Proposition 2.4 :

$$(10) \quad \begin{cases} X_0^n = x_0 \\ X_{k+1}^n = \mathbf{P}_{C(t_{k+1}^n)}(X_k^n + H^n(t_{k+1}^n) - H^n(t_k^n)) \end{cases},$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, (t_0^n, \dots, t_n^n) désigne la subdivision de l'intervalle $[0, T]$ de pas régulier T/n et H^n le processus défini par

$$H^n(t) := \sum_{i=0}^{k-1} b(X_i^n)(t_{i+1}^n - t_i^n) + b(X_k^n)(t - t_k^n) + \sigma B(t)$$

pour tous $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]$.

Concrètement, X^n coïncide avec le schéma d'Euler d'ordre n pour l'Equation (1) jusqu'à ce que l'un de ses termes, disons le k -ème avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, n'appartienne pas à $C(t_k^n)$. Dans ce cas, le k -ème terme du schéma d'Euler d'ordre n est remplacé par son projeté orthogonal sur $C(t_k^n)$.

Soient les processus X^n et Y^n définis par

$$X^n := \sum_{k=0}^{n-2} X_k^n \mathbf{1}_{[t_k^n, t_{k+1}^n[} + X_{n-1}^n \mathbf{1}_{[t_{n-1}^n, T]}$$

et

$$Y^n := \sum_{k=0}^{n-2} (X^n - H^n(t_k^n)) \mathbf{1}_{[t_k^n, t_{k+1}^n[} + (X^n - H^n(t_{n-1}^n)) \mathbf{1}_{[t_{n-1}^n, T]}.$$

THÉORÈME 2.6. *Sous les Hypothèses 0.1 et 2.2, si la fonction σ est constante et qu'il existe $c > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que*

$$(11) \quad d_{\mathcal{H}}(C(s), C(t)) \leq c|t - s|^\alpha ; \forall (s, t) \in \Delta_T,$$

alors $(X^n, Y^n)_{n \in \mathbb{N}^}$ converge uniformément vers l'unique solution (X, Y) du Problème (7).*

Pour une preuve détaillée du Théorème 2.6, se référer à Castaing, Marie et Raynaud de Fitte [14], Théorème 5.4. La preuve du Théorème 2.6 se décompose en quatre étapes :

- (1) Montrer par un argument de compacité que de toute sous-suite de $(H^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ uniformément convergente il est possible d'extraire une suite $(H^{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ uniformément convergente. Sa limite est notée H^* .
- (2) Montrer que $(Y^{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{C}_m^0([0, T], \mathbb{R}^e)$ en remarquant que

$$Y^n(t_{k+1}^n) = \mathbf{p}_{C_{H^n}(t_{k+1}^n)}(Y^n(t_k^n)) ; \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

C'est dans cette étape que la condition de Hölder (11) sur la multi-fonction C intervient.

- (3) Montrer que la limite Y^* de la suite $(Y^{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait

$$(12) \quad \langle z - H^*(\tau), Y^*(t) - Y^*(s) \rangle \geq \frac{1}{2} (\|Y^*(t)\|^2 - \|Y^*(s)\|^2)$$

pour tous $(s, t) \in \Delta_T$, $\tau \in [s, t]$ et $v \in \cap_{\tau \in [s, t]} C(v)$. Puisque l'Inégalité (12) caractérise le processus de rafle Y défini par l'Inclusion (8) (cf. Monteiro Marques [72], Chapitre 2), nécessairement $Y^* = Y$.

- (4) En désignant par X^* la limite uniforme de $(X^{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$, par définition de $(H^{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$,

$$H^*(t) = \int_0^t b(X^*(s)) ds + \sigma B(t) ; \forall t \in [0, T].$$

L'unicité de la solution du Problème (7), garantie par la Proposition 2.4, entraîne que $X^* = X$.

Quelques perspectives. L'unicité et la convergence du schéma d'approximation de la solution du Problème (7) sont encore à établir lorsque σ n'est pas constante. Le comportement en temps long de la solution et la statistique du Problème (7) n'ont pas du tout été étudiés.

3. Equations différentielles dirigées par le mBf et dont le champ de vecteurs admet des singularités

Dans les applications, le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) défini par l'équation différentielle stochastique suivante est très fréquemment utilisé :

$$(13) \quad X(t) = x_0 + \theta \int_0^t (m - X(s)) ds + \sigma \int_0^t \sqrt{X(s)} dW(s),$$

où $x_0, \theta, m > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^*$, W est un mouvement brownien et l'intégrale par rapport à W est prise au sens d'Itô. Sa solution est à valeurs positives, ce qui découle de la singularité en 0 de la fonction racine carrée et de la force de rappel vers la moyenne assurée par la fonction de drift $x \in \mathbb{R} \mapsto \theta(m - x)$. En partie pour cette raison, le modèle CIR est utilisé en finance pour modéliser les taux d'intérêt ou la volatilité

dans le modèle de prix d'actifs d'Heston (cf. Lamberton et Lapeyre [55]). Pour des raisons analogues, l'équation de Jacobi

$$(14) \quad Y(t) = y_0 + \theta \int_0^t (\mu - Y(s)) ds + \sigma \int_0^t \sqrt{Y(s)(1 - Y(s))} dW(s)$$

avec $y_0, \mu \in]0, 1[$ est souvent utilisée pour modéliser des proportions, par exemple dans la version stochastique du modèle de neurone de Morris-Lecar étudiée par Ditlevsen et Greenwood dans [29].

Marie [60] et [62] proposent une étude (existence, unicité et contrainte de la solution, régularité de l'application d'Itô, convergence d'un schéma d'approximation, comportement en temps long, etc.) des Equations (13) et (14) pour un signal brownien fractionnaire par rapport auquel l'intégrale est prise au sens des trajectoires rugueuses. Dans les deux cas, il convient de se ramener à l'étude d'une équation avec bruit additif fractionnaire par un changement de variable. Marie [61] porte sur l'étude d'une classe d'équations différentielles avec bruit additif fractionnaire et dont la fonction de drift admet une singularité en 0. Cette section présente les résultats de Marie [61] car celui-ci généralise les résultats de Marie [60] sur le modèle CIR fractionnaire et que les arguments employés dans Marie [62] pour l'équation de Jacobi fractionnaire sont analogues.

Dans la suite, $d = e = 1$, $x_0 > 0$, $\alpha \in]0, H[$, σ est une constante de $]0, \infty[$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b(x) = \infty.$$

Afin de garantir l'existence et l'unicité de la solution de l'Equation (1), la fonction b satisfait l'hypothèse suivante.

HYPOTHÈSE 3.1. La fonction b est $[p]+1$ continûment différentiable sur $]0, \infty[$ et de différentielles successives bornées sur $[\varepsilon, \infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$. Afin de compenser son comportement singulier en 0, la fonction b satisfait également les conditions suivantes :

(1) Il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall x > 0, b'(x) < -K.$$

(2) Il existe une constante $R > 0$ telle que

$$\forall x > 0, b(x) > -Rx.$$

(3) Pour tout $C > 0$,

$$\int_0^T b(Ct^\alpha) dt = \infty ; \forall T > 0$$

ou

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \frac{1}{T^\alpha} \int_0^T b(Ct^\alpha) dt = \infty.$$

Pour $H \in]1/2, 1[$, l'existence, l'unicité et l'absolue continuité de la loi de la solution de l'Equation (1) sont étudiés par Hu, Nualart et Song dans [47] sous une hypothèse analogue. Récemment, dans [34], Gassiat et Gess ont étudié le comportement de la solution de l'Equation (1) au voisinage de 0 et mis en évidence qu'un majorant de la norme \mathbb{L}^∞ de la différentielle seconde en espace d'une solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi stochastique s'exprime en fonction de solutions d'équations singulières de ce type.

L'exemple suivant présente quelques fonctions satisfaisant l'Hypothèse 3.1.

EXEMPLE 3.2. Soient $u, v, w, \gamma, \lambda, \mu > 0$.

- (1) Soit $b_1(x) := u(vx^{-\gamma} - wx)$ pour tout $x > 0$. Si $1 - \alpha < \alpha\gamma$, alors b_1 satisfait l'Hypothèse 3.1.
- (2) Soit $b_2(x) := u/(e^{vx^\gamma} - 1) - wx$ pour tout $x > 0$. Si $1 \leq \alpha\gamma$, alors b_2 satisfait l'Hypothèse 3.1.
- (3) Soit $b_1^*(x) := \lambda \sin(\mu x)$ pour tout $x > 0$. Si $1 - \alpha < \alpha\gamma$ (resp. $1 \leq \alpha\gamma$) et $\lambda\mu < uw$ (resp. $\lambda\mu < w$), alors $b_1 + b_1^*$ (resp. $b_2 + b_1^*$) satisfait l'Hypothèse 3.1.
- (4) Soit $b_2^*(x) := \lambda \log(\mu x)$ pour tout $x > 0$. Si $1 - \alpha < \alpha\gamma$ (resp. $1 \leq \alpha\gamma$), alors $b_1 + b_2^*$ (resp. $b_2 + b_2^*$) satisfait l'Hypothèse 3.1.

Sous l'Hypothèse 3.1, la Sous-section 3.1 porte sur l'existence, l'unicité et les propriétés trajectoires de la solution de l'Equation (1). La Sous-section 3.2 porte sur ses propriétés probabilistes et son comportement en temps long. L'absolue continuité de la loi de la solution, traitée à la Sous-section 3.2 de Marie [61], n'est pas abordée par souci de concision. Enfin, la Sous-section 3.3 présente une famille d'équations avec bruit multiplicatif fractionnaire dont l'étude se ramène, par un changement de variable, à celle d'une équation avec bruit additif fractionnaire et dont la fonction de drift satisfait l'Hypothèse 3.1

3.1. Existence, unicité et propriétés trajectoires de la solution de l'Equation (1). Sous l'Hypothèse 3.1, cette section présente des résultats sur l'existence, l'unicité, la régularité et l'approximation des trajectoires de la solution de l'Equation (1). Comme en témoignent les résultats de cette section, outre le fait de garantir l'existence, l'unicité et la positivité de la solution de l'Equation (1) malgré la singularité de la fonction b en 0, l'Hypothèse 3.1 permet d'obtenir des contrôles de la solution et de ses dérivées plus fins que ceux connus sous l'Hypothèse 0.1.

PROPOSITION 3.3. *Sous l'Hypothèse 3.1, l'Equation (1) admet une unique solution définie sur \mathbb{R}_+ , à valeurs strictement positives, à trajectoires α -höldériennes et telle que*

$$(15) \quad \|X\|_{\infty, T} \leq x_0 + |b(x_0)|T + 2\sigma\|B\|_{\infty, T}$$

pour tout $T > 0$.

Pour une preuve détaillée de la Proposition 3.3, se référer à Marie [61], Propositions 2.2 et 2.3. La preuve de la Proposition 3.3 se décompose en trois étapes :

- (1) D'après les conditions de régularité sur b de l'Hypothèse 3.1, l'Equation (1) admet une unique solution sur $[0, T_0]$ avec $T_0 := \inf\{t > 0 : X(t) = 0\}$. Par ailleurs, en posant $Y(t) := e^{Rt}X(t)$, $t \in [0, T_0]$,

$$Y(t) = x_0 + \int_0^t b_R(s, Y(s))ds + \sigma B_R(t)$$

où

$$B_R(t) := \int_0^t e^{Rs}dB(s) ; \forall t \in \mathbb{R}_+$$

et

$$b_R(t, x) := Rx + e^{Rt}b(e^{-Rt}x) ; \forall x > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

- (2) Puisque $Y(T_0) = 0$, pour $t \in [0, T_0]$ quelconque,

$$Y(t) + \int_t^{T_0} b_R(s, Y(s))ds = \sigma(B_R(t) - B_R(T_0)).$$

La régularité des trajectoires de B et l'Hypothèse 3.1.(1,2) entraînent que

$$\int_0^{T_0-t} b(\|B_R\|_{\alpha, T_0} s^\alpha) ds \leq \int_t^{T_0} b_R(s, Y(s)) ds \leq \sigma \|B_R\|_{\alpha, T_0} (T_0 - t)^\alpha.$$

Il y a contradiction avec l'Hypothèse 3.1.(3). Ainsi, $T_0 = \infty$.

(3) Pour $t \in \mathbb{R}_+$ quelconque, soit $T_{x_0}(t) := \inf\{s \in [0, t] : X(s) \leq x_0\}$. Alors,

$$\begin{aligned} 0 < X(t) &\leq x_0 + \int_{T_{x_0}(t)}^t b(X(s)) ds + \sigma(B(t) - B(T_{x_0}(t))) \\ &\leq x_0 + |b(x_0)|T + 2\sigma\|B\|_{\infty, T}. \end{aligned}$$

Dans la suite, $X(x_0, \omega)$ désigne la trajectoire de la solution de l'Equation (1) associée à la condition initiale $x_0 > 0$ et à la trajectoire ω du processus B . Pour tout $T > 0$, la restriction de l'application d'Itô $X(\cdot)$ à $]0, \infty[\times \mathcal{C}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$ est également notée $X(\cdot)$. Alors,

$$X(x_0, \omega)|_{[0, T]} = X(x_0, \omega|_{[0, T]})$$

pour tous $x_0, T > 0$ et $\omega \in \mathcal{C}_{\text{loc}}^\alpha(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Sous l'Hypothèse 3.1, la proposition suivante fournit plusieurs résultats de régularité pour l'application d'Itô $X(\cdot)$.

PROPOSITION 3.4. *Soit $T > 0$. Sous l'Hypothèse 3.1,*

(1) *Pour tous $x_0^1, x_0^2 > 0$ et $\omega^1, \omega^2 \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$,*

$$\|X(x_0^1, \omega^1) - X(x_0^2, \omega^2)\|_{\infty, T} \leq |x_0^1 - x_0^2| + 2\sigma\|\omega^1 - \omega^2\|_{\infty, T}.$$

(2) *L'application d'Itô $X(\cdot)$ est continûment différentiable de*

$$]0, \infty[\times \mathcal{C}^\alpha([0, T], \mathbb{R}) \text{ dans } \mathcal{C}^0([0, T],]0, \infty[).$$

De plus, pour tous $(x_0, \omega), (\xi, h) \in]0, \infty[\times \mathcal{C}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$,

$$D_{(\xi, h)}X(x_0, \omega) = \int_0^\cdot (\xi + \sigma h(s)) \exp\left(\int_s^\cdot b'(X(x_0, \omega, u)) du\right) ds$$

et

$$|D_{(\xi, h)}X(x_0, \omega, t)| \leq T(\xi + \sigma\|h\|_{\infty, T}); \forall t \in [0, T].$$

Pour une preuve détaillée de la Proposition 3.4, se référer à Marie [61], Propositions 2.4 et 2.6. La preuve du point 1 de la Proposition 3.4 s'appuie sur un raisonnement proche de celui utilisé pour démontrer l'Inégalité (15) de la Proposition 3.3. Au point 2 de la Proposition 3.4, la continue différentiabilité de l'application d'Itô s'obtient en appliquant Friz et Victoir [33], Théorèmes 11.3 et 11.6 sur les boules ouvertes de $]0, \infty[\times \mathcal{C}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$.

Pour une trajectoire ω du processus B fixée, le corollaire suivant fournit des résultats complémentaires pour $X(\cdot, \omega)$. Ceux-ci sont essentiels pour l'étude du système dynamique aléatoire associé à l'Equation (1) à la Sous-section 3.2.

COROLLAIRE 3.5. *Soit $\omega \in \mathcal{C}_{\text{loc}}^\alpha(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Sous l'Hypothèse 3.1,*

(1) *Pour tout $t > 0$, $X(\cdot, \omega, t)$ est strictement croissante sur $]0, \infty[$.*

(2) *Il existe une fonction $X(0, \omega) \in \mathcal{C}_{\text{loc}}^\alpha(\mathbb{R}_+,]0, \infty[)$ telle que*

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} \|X(x_0, \omega) - X(0, \omega)\|_{\infty, T} = 0; \forall T > 0.$$

(3) *Pour tous $x_0^1, x_0^2, t \in \mathbb{R}_+$,*

$$|X(x_0^1, \omega, t) - X(x_0^2, \omega, t)| \leq |x_0^1 - x_0^2| e^{-Kt}.$$

Pour une preuve détaillée du Corollaire 3.5, se référer à Marie [61], Corollaires 2.8, 2.9 et 2.10. La preuve du point 1 du Corollaire 3.5 est une conséquence immédiate du point 2 de la Proposition 3.4. La preuve du point 2 du Corollaire 3.5 se décompose en deux étapes :

- (1) Montrer qu'en 0, $X(\cdot, \omega)$ admet une limite à trajectoires continues en utilisant le point 1 de la Proposition 3.4 et le fait que les $(\mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty, T})$, $T > 0$ sont des espaces de Banach.
- (2) Montrer que $X(0, \omega)$ est à valeurs strictement positives sur $]0, \infty[$. D'une part, pour tous $s > t \geq 0$, il existe $u \in [s, t]$ tel que $X(0, \omega, u) > 0$ car dans le cas contraire, d'après l'Hypothèse 3.1.(1,3),

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} X(x_0, \omega, t) - X(x_0, \omega, s) - \sigma(\omega(t) - \omega(s)) \geq \lim_{x_0 \rightarrow 0} (t - s)b(\|X(x_0, \omega)\|_{\infty, T}) = \infty.$$

En particulier, il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, décroissante, de limite nulle et telle que $X(0, \omega, t_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque,

$$X(0, \omega, t_n + \cdot) = X(X(0, \omega, t_n), \omega(t_n + \cdot) - \omega(t_n))$$

sur $[0, \tau_0(t_n) - t_n[$, où $\tau_0(t_n) := \inf\{t > 0 : X(0, \omega, t_n + t) = 0\}$. D'après la Proposition 3.3,

$$\tau_0(t_n) = \inf\{t > 0 : X(X(0, \omega, t_n), \omega(t_n + \cdot) - \omega(t_n), t) = 0\} = \infty.$$

La preuve du point 3 du Corollaire 3.5 est simple. D'après l'Hypothèse 3.1.(1) et le théorème des accroissements finis, pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et $x_0^1, x_0^2 \in]0, \infty[$ tels que $x_0^1 \neq x_0^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(X(x_0^1, \omega, t) - X(x_0^2, \omega, t))^2 &= 2(X(x_0^1, \omega, t) - X(x_0^2, \omega, t))^2 \\ &\quad \times \frac{b(X(x_0^1, \omega, t)) - b(X(x_0^2, \omega, t))}{X(x_0^1, \omega, t) - X(x_0^2, \omega, t)} \\ &\leq -2K(X(x_0^1, \omega, t) - X(x_0^2, \omega, t))^2. \end{aligned}$$

La Sous-section 3.1 s'achève par un théorème de convergence pour le schéma d'Euler implicite associé à l'Equation (1) sous l'Hypothèse 3.1 :

$$(16) \quad \begin{cases} X_0^n = x_0 \\ X_{k+1}^n = X_k^n + b(X_{k+1}^n)(t_{k+1}^n - t_k^n) + \sigma(B(t_{k+1}^n) - B(t_k^n)) \end{cases},$$

où $T > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et (t_0^n, \dots, t_n^n) désigne la subdivision de l'intervalle $[0, T]$ de pas régulier T/n . Par ailleurs, soit le processus X^n défini par

$$X^n(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \left(X_k^n + \frac{X_{k+1}^n - X_k^n}{t_{k+1}^n - t_k^n} (t - t_k^n) \right) \mathbf{1}_{[t_k^n, t_{k+1}^n]}(t)$$

pour tout $t \in [0, T]$.

THÉORÈME 3.6. *Sous l'Hypothèse 3.1,*

- (1) L'Equation (16) admet une unique solution définie sur $\llbracket 0, n \rrbracket$ et à valeurs strictement positives telle que

$$(17) \quad \max_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} X_k^n \leq x_0 + |b(x_0)|T + 2\sigma\|B\|_{\infty, T}.$$

- (2) X^n converge uniformément vers la solution X de l'Equation (1) en $O(n^{-\alpha})$. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \|X^n - X\|_{\infty, T} &\leq ((\|b'\|_{\infty, [X^*, X^*]}^2 + \|b'\|_{\infty, [X^*, X^*]} + 1)\|X\|_{\alpha, T} + \\ &\quad \|b\|_{\infty, [X^*, X^*]} + \|B\|_{\alpha, T})(T^\alpha \vee T^{\alpha+2})n^{-\alpha} \end{aligned}$$

avec

$$X_* := \inf_{t \in [0, T]} X(t) \text{ et } X^* := \sup_{t \in [0, T]} X(t).$$

Pour une preuve détaillée du Théorème 3.6, se référer à Marie [61], Propositions 2.11 et 2.12 et Théorème 2.13. Au point 1 du Théorème 3.6, pour établir l'existence et l'unicité de la solution de l'Equation (16), il suffit de démontrer que pour tout $(\lambda, \mu) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}$, l'équation $x = \lambda b(x) + \mu$ admet une unique solution. La preuve de l'Inégalité (17) est analogue à celle de l'Inégalité (15) de la Proposition 3.3. La preuve du point 2 du Théorème 3.6 est proche de celle de Lejay [56], Proposition 5.

3.2. Propriétés probabilistes et comportement en temps long de la solution de l'Equation (1). Tout d'abord, sous l'Hypothèse 3.1, la Proposition 3.3, le Théorème 3.6.(1) et le théorème de Fernique entraînent que pour $p \geq 1$ et $T > 0$ quelconques,

$$\|X\|_{\infty, T}, \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|X^n\|_{\infty, T} \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}).$$

De plus, d'après le Théorème 3.6.(2) et le théorème de Vitali,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\|X^n - X\|_{\infty, T}^p) = 0.$$

Le reste de cette sous-section est consacré au comportement en temps long de la solution de l'Equation (1) sous l'Hypothèse 3.1.

Dans la suite, B est un mouvement brownien fractionnaire défini sur \mathbb{R} et d'indice de Hurst $H \in]0, 1[$. Par ailleurs, $\theta := (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ désigne le shift de Wiener, c'est-à-dire le système dynamique défini sur (Ω, \mathcal{A}) par

$$\theta_t \omega := \omega(t + \cdot) - \omega(t)$$

pour tous $\omega \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}$. D'après Maslowski et Schmalfluss [64], $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \theta)$ est un système dynamique métrique ergodique. De plus, d'après Gess et al. [35], Lemme 3.3, il existe un sous-ensemble θ -invariant $\Omega^* \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$ et

$$(18) \quad \forall \omega \in \Omega^*, \exists C(\omega) > 0 : \forall t \in \mathbb{R}, |B(\omega, t)| \leq C(\omega)(1 + |t|).$$

Enfin, soit $\mathcal{A}^* := \{A \cap \Omega^* ; A \in \mathcal{A}\}$ la tribu trace de \mathcal{A} sur Ω^* . Le quadruplet $(\Omega^*, \mathcal{A}^*, \mathbb{P}, \theta)$ est également un système dynamique métrique ergodique et le prolongement par continuité de l'application d'Itô

$$X(\cdot) : (x_0, \omega, t) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \mapsto X(x_0, \omega, t)$$

du point 2 du Corollaire 3.5 est un système dynamique aléatoire continu sur \mathbb{R}_+ relativement aux systèmes dynamiques métriques $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \theta)$ et $(\Omega^*, \mathcal{A}^*, \mathbb{P}, \theta)$.

LEMME 3.7. *Sous l'Hypothèse 3.1, pour tout $\omega \in \Omega^*$, il existe $C(\omega) > 0$ tel que pour tous $t, T, x_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon \geq x_0$,*

$$|X(x_0, \theta_{-T} \omega, t) - \varepsilon| \leq \varepsilon + |b(\varepsilon)|t + C(\omega)(1 + t + T)^2.$$

Pour une preuve détaillée du Lemme 3.7, se référer à Marie [61], Proposition 3.3. La preuve s'appuie sur un raisonnement proche de celui utilisé pour démontrer l'Inégalité (15) de la Proposition 3.3 et sur l'Inégalité (18).

THÉORÈME 3.8. *Sous l'Hypothèse 3.1,*

- (1) *Il existe une variable aléatoire $X^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ appartenant à $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ pour tout $p \geq 1$ et telle que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$,*

$$|X(x_0, \cdot, T) - X^* \circ \theta_T| \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

presque sûrement et dans $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ pour tout $p \geq 1$.

- (2) Pour toute fonction uniformément continue à croissance au plus polynomiale $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varphi(X(x_0, \cdot, t)) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\varphi(X^*))$$

presque sûrement et dans $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ pour tout $p \geq 1$.

Pour une preuve détaillée du Théorème 3.8, se référer à Marie [61], Théorème 3.4 et Corollaire 3.5. La preuve du point 1 du Théorème 3.8 se décompose en deux étapes :

- (1) Montrer l'existence d'une solution stationnaire de l'Equation (1) attirant les autres en temps long. La cocyclicité de $X(\cdot)$, le point 3 du Corollaire 3.5 et le Lemme 3.7 entraînent que pour $\omega \in \Omega^*$ et $\varepsilon \geq x_0 \geq 0$ quelconques et tous $n \in \mathbb{N}$,

$$(19) |X(x_0, \theta_{-n}\omega, n) - X(x_0, \theta_{-(n+1)}\omega, n+1)| \leq e^{-Kn}(|x_0 - \varepsilon| + \varepsilon + |b(\varepsilon)| + C(\omega)(3+n)^2).$$

La suite de réels positifs $(X(x_0, \theta_{-n}\omega, n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy. Sa limite $X^*(\omega)$ ne dépend pas de x_0 d'après le point 3 du Corollaire 3.5. Un raisonnement analogue à celui employé pour démontrer l'Inégalité (19) permet d'établir que

$$(20) \lim_{t \rightarrow \infty} |X(x_0, \theta_{-t}\omega, t) - X^*(\omega)| = 0.$$

Par cocyclicité et continuité du système dynamique aléatoire $X(\cdot)$, le point 2 du Corollaire 3.5 et l'Egalité (20),

$$X(X^*(\omega), \omega, t) = X^*(\theta_t\omega) ; \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Puisque $(\Omega^*, \mathcal{A}^*, \mathbb{P}, \theta)$ est un système dynamique métrique ergodique, il s'ensuit que $X^* \circ \theta$ est une solution stationnaire de l'Equation (1). De plus, d'après le point 3 du Corollaire 3.5,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(x_0, \omega, t) - X^*(\theta_t\omega)| = 0 ; \forall x_0 \in \mathbb{R}_+.$$

- (2) Pour tous $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et $p \geq 1$, par un raisonnement analogue à celui de la première étape,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X(x_0, \cdot, t) - X^* \circ \theta_t|^p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X(x_0, \theta_{-t}(\cdot), t) - X^*|^p) = 0.$$

La preuve du point 2 du Théorème 3.8 à partir du premier et du théorème ergodique de Birkhoff est classique.

3.3. Modèles CIR et logistique fractionnaires. Cette sous-section présente une famille d'équations avec bruit multiplicatif fractionnaire dont l'étude se ramène, par un changement de variable, à celle d'une équation avec bruit additif fractionnaire et dont la fonction de drift satisfait l'Hypothèse 3.1. En particulier, cette famille d'équations couvre des modèles type CIR et logistique fractionnaires. Le Théorème 3.10 synthétise l'ensemble des propriétés obtenues dans Marie [61], Section 4 sur ces équations.

Soit $F :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant l'hypothèse suivante.

HYPOTHÈSE 3.9. La fonction F est $[p] + 1$ fois continûment différentiable sur $]0, \infty[$ et strictement monotone.

Sous les Hypothèses 3.1 et 3.9, par la formule de changement de variable pour l'intégrale des trajectoires rugueuses, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} F(X(t)) &= F(x_0) + \int_0^t F'(X(s))dX(s) \\ &= F(x_0) + \int_0^t F'(X(s))b(X(s))ds + \sigma \int_0^t F'(X(s))dB(s). \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $I := F(]0, \infty[)$, $G := b \circ F^{-1}$ et $H := F' \circ F^{-1}$, avec la condition initiale $z_0 \in I$, $Z = F \circ X(F^{-1}(z_0), \cdot)$ est l'unique solution définie sur \mathbb{R}_+ et à valeurs dans I de l'équation

$$(21) \quad Z(t) = z_0 + \int_0^t G(Z(s))H(Z(s))ds + \sigma \int_0^t H(Z(s))dB(s).$$

Soient $\kappa \in \mathbb{R}^*$ et $u, v, w, \gamma > 0$ tels que $1 - \alpha < \alpha\gamma$. Soient également $b(x) := u(vx^{-\gamma} - wx)$ et $F(x) := x^\kappa$ pour tout $x > 0$. Les fonctions b et F satisfont les Hypothèses 3.1 et 3.9 respectivement. Dans ce cas, l'Equation (21) devient

$$Z(t) = z_0 + \kappa u \int_0^t (vZ(s)^{1-(\gamma+1)/\kappa} - wZ(s))ds + \kappa \sigma \int_0^t Z(s)^{1-1/\kappa}dB(s).$$

D'une part, soient $\kappa = \gamma + 1$, $u = 1/(\gamma + 1)$ et $\sigma = \zeta/(\gamma + 1)$ avec $\zeta \in \mathbb{R}^*$. En posant $\beta := 1 - 1/(\gamma + 1) \in]1 - \alpha, 1[$, l'Equation (21) devient

$$Z(t) = z_0 + \int_0^t (v - wZ(s))ds + \zeta \int_0^t Z(s)^\beta dB(s).$$

Dans ce cas, l'Equation (21) correspond au model de Cox-Ingersoll-Ross fractionnaire étudié dans Marie [60]. D'autre part, soient $\kappa = -(\gamma + 1)$, $u = 1/(\gamma + 1)$ et $\sigma = -\zeta^*/(\gamma + 1)$ avec $\zeta^* \in \mathbb{R}^*$. En posant $\beta^* := 1/(\gamma + 1) \in]0, \alpha[$, l'Equation (21) devient

$$Z(t) = z_0 + \int_0^t Z(s)(w - vZ(s))ds + \zeta^* \int_0^t Z(s)^{1+\beta^*}dB(s).$$

Dans ce cas, l'Equation (21) correspond au modèle logistique étudié pour $\beta^* = 0$ dans Huy et Nguyen [48].

Le théorème suivant synthétise l'ensemble des propriétés obtenues dans Marie [61], Section 4 sur l'Equation (21) à partir des résultats des Sous-sections 3.1 et 3.2.

THÉORÈME 3.10. *Sous les Hypothèses 3.1 et 3.9,*

(1) *Pour tous $T > 0$ et $p \geq 1$,*

$$\|Z\|_{\infty, T} \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

et

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|Z^n\|_{\infty, T} \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}),$$

où $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}^}$ désigne le schéma d'approximation pour l'Equation (21) défini par*

$$Z^n := F \circ X^n(F^{-1}(z_0), \cdot) ; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(2) *Z^n converge uniformément vers la solution Z de l'Equation (21) en $O(n^{-\alpha})$. De plus,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|Z^n - Z|^p) = 0 ; \forall p \geq 1.$$

(3) Pour toute fonction uniformément continue à croissance au plus polynomiale $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ et tout $z_0 \in I$,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varphi(Z(z_0, \cdot, t)) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\varphi(F(X^*)))$$

presque sûrement et dans $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ pour tout $p \geq 1$.

La preuve du Théorème 3.10 est simple (cf. Marie [61], Propositions 4.6, 4.7 et 4.11).

Quelques perspectives. Sous l'Hypothèse 3.1 et pour σ constante, les résultats sur le comportement en temps long de la solution de l'Equation (1) établis à la Sous-section 3.2 permettront d'étudier la consistance d'estimateurs de la fonction b .

4. Contrainte des solutions d'équations différentielles dirigées par le mBf en sciences du vivant

Cette section présente deux applications des résultats des Sections 1 et 3 en sciences du vivant. La Sous-section 4.1 est consacrée à un modèle (de neurone) d'Hodgkin-Huxley dans lequel les équations modélisant les variables de portes des canaux ioniques sont perturbées par un bruit multiplicatif fractionnaire et le champ de vecteurs satisfait la condition d'invariance de la Section 1 pour le convexe fermé $[0, 1]^3 \times \mathbb{R}$ (cf. Coutin, Guglielmi et Marie [23]). Une application en finance de la condition d'invariance de la Section 1 est proposée dans Marie [63], mais n'est pas abordée par souci de concision. La Sous-section 4.2 présente une application du modèle CIR fractionnaire de la Sous-section 3.3 en pharmacocinétique (cf. Marie [59]).

Comme évoqué en introduction de ce chapitre, le grand atout des modèles d'équations différentielles dirigées par le mBf dans les applications est la possibilité de contrôler la régularité des trajectoires de la solution via le paramètre de Hurst du mBf. En effet, sous l'Hypothèse 0.1, la régularité de l'application d'Itô entraîne que les trajectoires de la solution X de l'Equation (1) sont localement α -höldériennes pour tout $\alpha \in]0, H[$. Néanmoins, les trajectoires de X sont-elles H -höldériennes sur tous les segments de \mathbb{R}_+ ? La proposition suivante, prouvée dans Coutin, Guglielmi et Marie [23], assure que non dans deux cas particuliers. C'est important dans la suite de cette section.

PROPOSITION 4.1. *Sous l'Hypothèse 0.1,*

(1) *Si σ est constante, alors les trajectoires de X ne sont H -höldériennes sur aucun segment de \mathbb{R}_+ .*

(2) *Si $H \in]1/2, 1[$, $d = e$ et $\sigma_{k,l} = 0$ pour tout $(k, l) \in \llbracket 1, e \rrbracket^2$ tel que $k \neq l$, alors pour tous $\omega \in \Omega$ et $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que $s < t$ et*

$$(\sigma_{k,k} \circ X(\omega))(s, t) \subset \mathbb{R}^* ; \forall k \in \llbracket 1, e \rrbracket,$$

la trajectoire $X(\omega)$ de X n'est pas H -höldérienne sur $[s, t]$.

La preuve de la Proposition 4.1 est simple (cf. Coutin, Guglielmi et Marie [23], Propositions A.6 et A.7).

4.1. Modèle d'Hodgkin-Huxley fractionnaire. Dans le modèle d'Hodgkin-Huxley (cf. Hodgkin et Huxley [39]), le potentiel membranaire V du neurone est modélisé par l'équation différentielle

$$(22) \quad c\dot{V} + I_{Na} + I_K + I_L = I,$$

où $I_k := G_k(V - E_k)$ est l'intensité du courant ionique k (Na, K ou L), G_k désigne sa conductance et E_k son potentiel d'équilibre. Plus précisément, $G_L := \bar{g}_L$, $G_K := \bar{g}_K n^4$ avec

$$(23) \quad \dot{n} = \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n$$

et $G_{Na} := \bar{g}_{Na} m^3 h$ avec

$$(24) \quad \begin{cases} \dot{m} = \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m \\ \dot{h} = \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h \end{cases},$$

où les fonctions $\alpha_n, \beta_n, \alpha_m, \beta_m, \alpha_h$ et β_h sont de la forme

$$v \mapsto \frac{a + bv}{\exp(a' + b'v) + c'}$$

et les constantes a, b, a', b' et c' sont précisées dans Hodgkin et Huxley [39]. Les fonctions n, m et h sont les variables de portes des canaux ioniques et correspondent à des proportions de molécules activatrices et inhibitrices présentes de part et d'autre de la membrane du neurone.

l'Equation (22)-(23)-(24) s'écrit $\dot{X}(t) = b_{HH}(X(t))$, où $X = (m, h, n, V)$ et b_{HH} est une fonction de $\mathcal{C}^\infty([0, 1]^3 \times \mathbb{R})$ satisfaisant la condition d'invariance du théorème de Nagumo (cf. Nagumo [74]) pour le convexe fermé $C := [0, 1]^3 \times \mathbb{R}$. Ainsi, l'Equation (22)-(23)-(24) admet une unique solution définie sur \mathbb{R}_+ et à valeurs dans C . Ce dernier point est essentiel car n, m et h sont des proportions.

Par ailleurs, le modèle d'Hodgkin-Huxley a une bifurcation de Hopf de paramètre I . Si $I \in [0, I_1]$ avec $I_1 \approx 3 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, alors le neurone ne décharge pas de potentiel d'action. Si $I \in]I_1, I_2]$ avec $I_2 \approx 6 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, alors le neurone décharge un unique potentiel d'action. Si $I > I_2$, alors le neurone décharge une succession de potentiels d'action. Ci-dessous, la solution de l'Equation (22)-(23)-(24) est simulée pour trois valeurs du paramètre de bifurcation I :

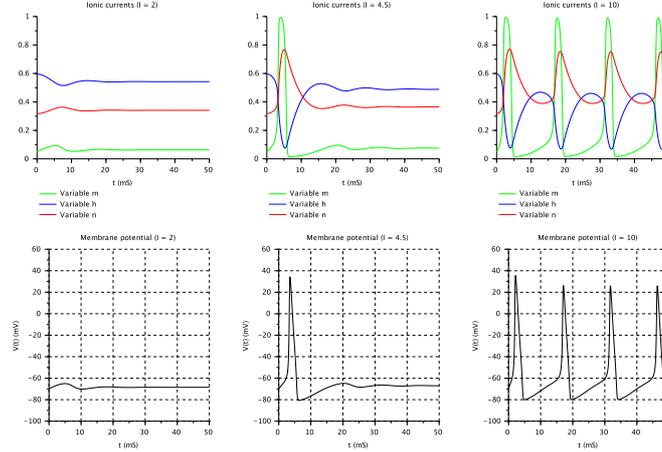


FIGURE 1. Comportements du modèle d'Hodgkin-Huxley.

Dans [67], Meunier et Segev prouvent que le comportement de n, m et h est en partie aléatoire. Dans Saarinen et al. [79], les Equations (23) et (24) sont perturbées par un bruit additif brownien. Malheureusement, dans ce cas, les processus n, m et h ne sont plus à valeurs dans $[0, 1]$ comme souhaité. Dans Cresson et al. [24],

les Equations (23) et (24) sont perturbées par un bruit multiplicatif dirigé par le mouvement brownien dans le contexte du calcul d'Itô et le champ de vecteurs du modèle ainsi obtenu satisfait la condition d'invariance d'Aubin et Da Prato [6] pour C .

Dans Coutin, Guglielmi et Marie [23], $X = (m, h, n, V)$ est modélisé par l'Equation (1) avec $d = 3$, $e = 4$, $H \in]1/2, 1[$, $b = b_{\text{HH}}$ et, pour tout $(p, v) \in [0, 1]^3 \times \mathbb{R}$,

$$\sigma(p, v) := \begin{pmatrix} \sigma_1 p_1 (1 - p_1) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 p_2 (1 - p_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 p_3 (1 - p_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 > 0.$$

Dans ce cas, $(b, \sigma) \in \mathcal{I}(\partial C)$ et d'après une variante du Corollaire 1.4 (cf. [23], Corollaire A.13), l'Equation (1) admet une unique solution X définie sur \mathbb{R}_+ et à valeurs dans C . Par ailleurs, d'après le point 2 de la Proposition 4.1, les trajectoires des processus m , h et n sont α -höldériennes pour tout $\alpha \in]0, H[$, mais pas H -höldériennes sur les segments sur lesquels elles n'atteignent pas 0 ou 1. Ainsi, H contrôle la régularité des trajectoires de (m, h, n) et par incidence la *forme* des trajectoires du potentiel membranaire.

Au cours de certaines neuropathies, le tracé du potentiel membranaire d'une fibre nerveuse endommagée se déforme (cf. Tasaki [85]). A la Section 3.2 de Coutin, Guglielmi et Marie [23], compte-tenu de ce qui précède sur le contrôle de la régularité des trajectoires de X via le paramètre de Hurst du mBf, il est suggéré d'utiliser l'Equation (1) pour modéliser le potentiel membranaire d'une fibre nerveuse endommagée et de prendre en compte la déformation de son tracé en sélectionnant une valeur de H plus ou moins proche de 1 selon le niveau d'atteinte.

Ci-dessous, la solution de l'Equation (1) est simulée pour deux valeurs de H et $I = 10$:

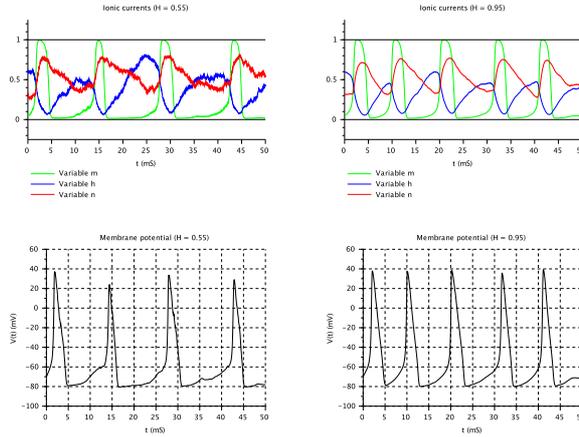


FIGURE 2. Déformation de V dans le modèle d'Hodgkin-Huxley fractionnaire.

Considérer une fonction σ constante aurait bien des avantages. D'une part, d'après le point 1 de la Proposition 4.1, le contrôle de la régularité des trajectoires de m , h et n par H ne serait plus conditionné par le fait qu'elles atteignent 0 ou 1 sur un

segment donné. D'autre part, sur le plan statistique, le modèle serait plus simple à ajuster sur des données réelles. Cependant, $(b, \sigma) \notin \mathcal{I}(\partial C)$ et il apparaît clairement sur la figure suivante que les trajectoires de (m, h, n) ne sont pas à valeurs dans $[0, 1]^3$ comme souhaité :

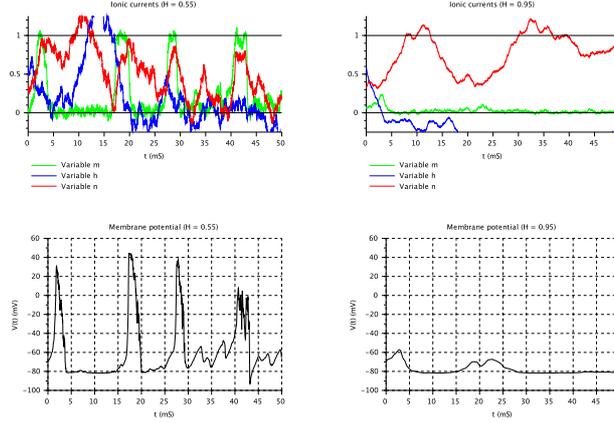


FIGURE 3. Modèle d'Hodgkin-Huxley avec bruit additif fractionnaire.

4.2. Le modèle CIR fractionnaire en pharmacocinétique. En pharmacocinétique, le corps humain est considéré comme une succession de compartiments et la concentration du médicament dans l'organisme au cours du temps est modélisée par une équation différentielle (cf. Jacomet [50]). Dans le cas d'un modèle mono-compartimental, la concentration est modélisée par une équation différentielle linéaire prenant en compte les phases d'absorption et d'élimination du médicament.

D'après d'Argenio et Park [25], le processus d'élimination d'un médicament par l'organisme est en partie aléatoire. Une façon naturelle de le prendre en compte dans le modèle mono-compartimental est d'ajouter un bruit dans l'équation différentielle modélisant le processus de concentration. Ce type de modèles a déjà été étudié dans le contexte du calcul d'Itô pour un signal brownien par plusieurs auteurs (cf. Sen et Bell [82] et Donnet et Samson [30]). Cependant, comme mis en évidence par Delattre et Lavielle dans [27], les processus de diffusion ont des trajectoires trop irrégulières pour modéliser de façon réaliste la concentration au cours du temps. Pour contourner cette difficulté, Delattre et Lavielle proposent de modéliser le processus de concentration par la solution d'une équation différentielle ordinaire dépendant d'un processus de diffusion.

Une autre façon de contourner la difficulté mise en évidence dans Delattre et Lavielle [27], justifiée par la Proposition 4.1, est de perturber l'équation différentielle modélisant le processus de concentration par un bruit multiplicatif fractionnaire. Dans Marie [59], pour un médicament administré par voie intra-veineuse, le processus de concentration est modélisé par le modèle CIR fractionnaire présenté à la Sous-section 3.3 :

$$(25) \quad C(t) = C_0 - v \int_0^t C(s) ds + \sigma \int_0^t C(s)^\beta dB(s) ; t \in [0, \tau_0]$$

avec

$$\tau_0 := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : C(t) = 0\}$$

le temps total d'élimination du médicament par l'organisme, $\beta \in [0, 1[$, $v > 0$ la vitesse d'élimination du médicament et $C_0 := A_0/V$, où $A_0 > 0$ désigne la dose de médicament administrée et $V > 0$ le volume du compartiment d'élimination. Puisque le champ de vecteurs de l'Equation (25) est de classe \mathcal{C}^∞ sur les segments de $]0, \infty[$, celle-ci admet une unique solution sur $[0, \tau_0]$ telle que $C = X^{\gamma+1}$, où $\gamma := \beta/(1 - \beta)$ et X est la solution de l'équation de Langevin fractionnaire

$$(26) \quad X(t) = C_0^{1-\beta} - v(1 - \beta) \int_0^t X(s)ds + \sigma(1 - \beta)B(t).$$

L'Equation (26) s'obtient en appliquant la formule de changement de variable pour l'intégrale des trajectoires rugueuses au processus C et à la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^{1-\beta}$ sur $[0, \tau_0]$. Ainsi,

$$C(t) = \left(C_0^{1-\beta} + \sigma(1 - \beta) \int_0^t e^{v(1-\beta)s} dB(s) \right)^{\gamma+1} e^{-vt} ; \forall t \in [0, \tau_0].$$

L'étude du comportement en temps long et l'estimation dans les équations différentielles dirigées par le mBf est une question délicate car leurs solutions ne sont généralement pas markoviennes. Heureusement, puisque $C = X^{\gamma+1}$ et compte-tenu des résultats statistiques connus sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire (cf. Hu et Nualart [45], Brouste et Iacus [10], etc.), il est possible d'ajuster le processus C sur des données réelles à partir d'estimateurs bien maîtrisés (cf. Marie [59], Sections 2 et 3).

Pour conclure, ci-dessous, la solution de l'Equation (25) est simulée pour $H = 0.9$ et $H = 0.6$ afin de mettre en évidence que moins l'indice de Hurst est proche de 1, moins le modèle pharmacocinétique proposé dans cette section est réaliste :

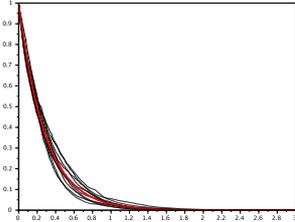


FIGURE 4. $H = 0.9$

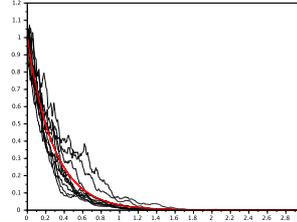


FIGURE 5. $H = 0.6$

Quelques perspectives. Il serait intéressant d'ajuster les deux modèles présentés dans cette section sur des données réelles et d'en discuter la pertinence dans des applications cliniques avec des équipes médicales.

Estimation non-paramétrique et sélection de modèle

Ce chapitre présente plusieurs travaux en estimation non-paramétrique et sélection de modèle sur des données i.i.d. ou temporelles avec dépendance.

En premier lieu, soit l'équation différentielle

$$(27) \quad X(t) = X_0 + \int_0^t b(X(s))ds + \sigma B(t),$$

où B est un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $H \in]1/2, 1[$, $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $\sigma \in \mathbb{R}^*$. A la Section 1, sous une condition de dissipativité, la consistance et une vitesse de convergence sont établis pour l'estimateur de Nadaraya-Watson

$$\widehat{b}_{T,h}(x) := \frac{\int_0^T K\left(\frac{X(s)-x}{h}\right) \delta X(s)}{\int_0^T K\left(\frac{X(s)-x}{h}\right) ds}; \quad x \in \mathbb{R}$$

de b , où $T, h > 0$, $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est un noyau et l'intégrale par rapport à X est prise au sens de Skorokhod. L'intégrale de Skorokhod est une généralisation de l'intégrale d'Itô construite à partir de l'opérateur divergence du calcul de Malliavin (cf. Nualart [77]). Les résultats de cette section sont démontrés dans Comte et Marie [19].

En second lieu, soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Y_1, \dots, Y_n un n -échantillon de densité parente $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit l'estimateur de Wolverton-Wagner

$$\widehat{f}_{n,\mathbf{h}_n}(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{h_k} K\left(\frac{Y_k - x}{h_k}\right); \quad x \in \mathbb{R}$$

de f , où $\mathbf{h}_n = (h_1, \dots, h_n)$ avec $0 < h_n < \dots < h_1$. Il s'agit d'une généralisation de l'estimateur de Parzen-Rosenblatt particulièrement adaptée au traitement de données en temps réel car il satisfait la relation de récurrence

$$\widehat{f}_{n+1,\mathbf{h}_{n+1}}(x) = \frac{n}{n+1} \widehat{f}_{n,\mathbf{h}_n}(x) + \frac{1}{(n+1)h_{n+1}} K\left(\frac{Y_{n+1} - x}{h_{n+1}}\right).$$

Sous une condition de régularité de Nikolski sur f , la Section 2 présente un contrôle du risque quadratique intégré de $\widehat{f}_{n,\mathbf{h}_n}$ analogue à celui connu pour l'estimateur de Parzen-Rosenblatt. Pour $h_k = h_k(\gamma)$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $\gamma \in]0, 1[$, des estimateurs de γ obtenus par une méthode type Goldenshluger-Lepski et par une méthode type Lacour-Massart-Rivoirard sont également étudiés à la Section 2. Les résultats de cette section sont démontrés dans Comte et Marie [20].

En troisième lieu, soit le modèle

$$(28) \quad \mathbf{X} = \mathbf{M}_{r,\tau} + \varepsilon,$$

où $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{d,T}(\mathbb{R})$ ($d, T \in \mathbb{N}^*$) est une matrice dont les lignes sont des séries temporelles, ε est une matrice aléatoire dont les lignes sont indépendantes et sous-gaussiennes, $\mathbf{M}_{r,\tau}$ est la matrice dont les lignes sont les tendances des séries temporelles considérées, $r \in \mathbb{N}^*$ est le rang de $\mathbf{M}_{r,\tau}$ supposé faible et $\tau \in \mathbb{N}^*$ est un paramètre caractérisant une propriété spécifique à la tendance d'une série temporelle comme la τ -périodicité.

La Section 3 présente un contrôle en $O(r(d + \tau))$ du risque quadratique de l'estimateur des moindres carrés $\widehat{\mathbf{M}}_{r,\tau}$ de $\mathbf{M}_{r,\tau}$. Il en découle un contrôle du risque quadratique de $\widehat{\mathbf{M}}_{\widehat{r},\widehat{\tau}}$, où $(\widehat{r}, \widehat{\tau})$ désigne un estimateur de (r, τ) obtenu par pénalisation. Les résultats de cette section sont démontrés dans Alquier et Marie [3].

Enfin, quelques notations fréquemment utilisées dans ce chapitre :

- Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, dy)$ est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$.
- $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ (resp. $\|\cdot\|_{\text{op}}$) désigne la norme de Fröbenius (resp. la norme spectrale) sur $\mathcal{M}_{d,T}(\mathbb{R})$.
- Pour tout sous-ensemble \mathcal{K} de $\mathcal{M}_{d,T}(\mathbb{R})$, $\text{rk}(\mathcal{K}) := \sup\{\text{rg}(\mathbf{A}) ; \mathbf{A} \in \mathcal{K}\}$.
- Pour tout sous-ensemble \mathcal{S} de $\mathcal{M}_{d,T}(\mathbb{R})$, $\Delta(\mathcal{S}) := \{\mathbf{A} - \mathbf{B} ; \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{S}\}$.
- Pour tout sous-ensemble \mathcal{K} de $\mathcal{M}_{d,T}(\mathbb{R})$, $\mathcal{K}^1 := \{\mathbf{A} \in \mathcal{K} : \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{F}} = 1\}$.

1. Estimateur de Nadaraya-Watson de la fonction de drift d'une équation différentielle dirigée par le mBf

Depuis la fin des années 1990, de nombreux auteurs se sont intéressés au comportement en temps long et à l'estimation dans les équations différentielles dirigées par le mouvement brownien fractionnaire.

La plupart des travaux sur le sujet portent sur l'estimation de la tendance de l'Equation (27) dans le contexte paramétrique. Kleptsyna et Le Breton [41] et Hu et Nualart [45] proposent des estimateurs consistants de la constante de drift de l'équation de Langevin fractionnaire. Dans [41], Kleptsyna et Le Breton étudient un estimateur du maximum de vraisemblance dont le numérateur est une intégrale par rapport à la solution de l'Equation (27) se ramenant à une intégrale d'Itô. Dans [45], Hu et Nualart étudient un estimateur des moindres carrés dont le numérateur est une intégrale par rapport à la solution de l'Equation (27) prise au sens de Skorokhod. Tudor et Viens [87] (resp. Hu et al. [46]) étend l'estimateur de [41] (resp. [45]) au cas d'une fonction de drift dépendant linéairement du paramètre à estimer. Dans Neuenkirch et Tindel [75], les auteurs étudient un estimateur type moindres carrés défini par une fonction de contraste tenant compte du contrôle de la variation quadratique du mouvement brownien fractionnaire établi dans Tudor et Viens [88]. Dans [75], la fonction de drift de l'Equation (27) ne dépend pas linéairement du paramètre à estimer. Chronopoulou et Tindel [17] porte sur une méthode numérique utilisant la vraisemblance pour estimer un paramètre dont dépendent la fonction de drift et la fonction de volatilité d'une équation différentielle avec bruit multiplicatif fractionnaire.

Il y a peu de références sur l'estimation non-paramétrique dans les équations différentielles dirigées par le mBf. Saussereau [81] et Mishra et Prakasa Rao [69] proposent des estimateurs type Nadaraya-Watson consistants de la fonction de drift de l'Equation (27). Sur l'estimation non-paramétrique dans le contexte du calcul d'Itô, se référer à Kutoyants [53]. Cette section porte sur la consistance et une vitesse de convergence pour un autre estimateur de Nadaraya-Watson de la fonction b :

$$\widehat{b}_{T,h}(x) = \frac{1}{\widehat{f}_{T,h}(x)} \times \frac{1}{Th} \int_0^T K\left(\frac{X(s) - x}{h}\right) \delta X(s) ; x \in \mathbb{R},$$

où

$$\widehat{f}_{T,h}(x) := \frac{1}{Th} \int_0^T K \left(\frac{X(s) - x}{h} \right) ds.$$

Dans la suite, le noyau K satisfait l'hypothèse suivante.

HYPOTHÈSE 1.1. $\text{supp}(K) = [-1, 1]$ et $K \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

Etant donné que le calcul de l'intégrale de Skorokhod au numérateur de l'estimateur de Nadaraya-Watson précédent pose des difficultés en pratique, la variante suivante de l'estimateur $\widehat{b}_{T,h}$ est également étudiée dans Comte et Marie [19] :

$$\begin{aligned} \widehat{b}_{T,h,\varepsilon}(x) := & \frac{1}{\widehat{f}_{T,h}(x)} \left(\frac{1}{Th} \int_0^T K \left(\frac{X_{x_0}(s) - x}{h} \right) dX_{x_0}(s) \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_H \sigma^2}{Th^2} \int_0^T \int_0^u K' \left(\frac{X_{x_0}(u) - x}{h} \right) \frac{X_{x_0+\varepsilon}(u) - X_{x_0}(u)}{X_{x_0+\varepsilon}(v) - X_{x_0}(v)} |u - v|^{2H-2} dv du \right), \end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$ et X_{x_0} désigne la solution de l'Equation (27) avec la condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}$. Cet estimateur reste imparfait puisque son calcul nécessite l'observation de deux solutions de l'Equation (27) pour deux conditions initiales proches. Dans Comte et Marie [19], une application en pharmacocinétique est néanmoins suggérée.

Dans la suite, la fonction b satisfait l'hypothèse suivante.

HYPOTHÈSE 1.2. La fonction b est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , de dérivées successives bornées et il existe une constante $M > 0$ telle que

$$b'(y) \leq -M ; \forall y \in \mathbb{R}.$$

Sous l'Hypothèse 1.2, la fonction b satisfait les conditions de dissipativité de Hairer [43], Hairer et Ohashi [44] et Hu et al. [46].

Soient $\gamma \in]1/2, H[$, $\delta \in]H - \gamma, 1 - \gamma[$ et $\Omega := \Omega_- \times \Omega_+$, où Ω_- (resp. Ω_+) est le complété de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$) relativement à la norme $\|\cdot\|_-$ (resp. $\|\cdot\|_+$) définie par

$$\|\omega_-\|_- := \sup_{s < t \leq 0} \frac{|\omega_-(t) - \omega_-(s)|}{|t - s|^\gamma (1 + |s| + |t|)^\delta} ; \forall \omega_- \in \Omega_-$$

(resp.

$$\|\omega_+\|_+ := \sup_{0 \leq s < t} \frac{|\omega_+(t) - \omega_+(s)|}{|t - s|^\gamma (1 + |s| + |t|)^\delta} ; \forall \omega_+ \in \Omega_+).$$

D'après Hairer et Ohashi [44], Lemmes 4.1 et 4.2, il existe une mesure de probabilité \mathbb{P} sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ et un noyau de transition P de Ω_- dans $\mathcal{B}(\Omega_+)$ tels que :

- Le processus généré par $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P})$ est un mouvement brownien fractionnaire B défini sur \mathbb{R} .
- Pour tous $U \in \mathcal{B}(\Omega_-)$ et $V \in \mathcal{B}(\Omega_+)$,

$$\mathbb{P}(U \times V) = \int_U P(\omega_-, V) \mathbb{P}_-(d\omega_-),$$

où \mathbb{P}_- est la loi de $(B(t))_{t \in \mathbb{R}_-}$.

La proposition suivante fournit un résultat sur le comportement en temps long de la solution de l'Equation (27) découlant de Hairer [43] et Hairer et Ohashi [44].

PROPOSITION 1.3. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne pour laquelle il existe une partie compacte et non vide C de \mathbb{R} telle que $\varphi(C) \subset]0, \infty[$. Sous l'Hypothèse 1.2, il existe une constante déterministe $l(\varphi) > 0$ telle que

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varphi(X(t)) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} l(\varphi)$$

presque surement et dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P})$.

Pour une preuve détaillée de la Proposition 1.3, se référer à Comte et Marie [19], Proposition 2.11. Dans Hairer [43] et Hairer et Ohashi [44], les auteurs considèrent un semi-groupe de Feller $Q = (Q(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ sur $\mathbb{R} \times \Omega_-$ tel que la première composante du processus généré par Q est une solution de l'Equation (27). Ils montrent alors qu'il existe $\tau \in]0, \infty[$ tel que pour tout $(x, \omega_-) \in \mathbb{R} \times \Omega_-$ et tout ouvert non vide U de \mathbb{R} , $Q(\tau; (x, \omega_-), U \times \Omega_-) > 0$, puis que Q admet une unique mesure de probabilité invariante μ . Donc,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varphi(X(t)) dt \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\text{p.s./}\mathbb{L}^2} \mu(\varphi \circ \mathbf{p}_{\mathbb{R}})$$

et

$$\begin{aligned} \mu(\varphi \circ \mathbf{p}_{\mathbb{R}}) &= \int_{\mathbb{R} \times \Omega_-} \varphi(x) \int_{\mathbb{R} \times \Omega_-} Q(\tau; (\bar{x}, \bar{\omega}_-), (dx, d\omega_-)) \mu(d\bar{x}, d\bar{\omega}_-) \\ &\geq \min_{x \in C} \varphi(x) \cdot \int_{C \times \Omega_-} Q(\tau; (\bar{x}, \bar{\omega}_-), \text{int}(C) \times \Omega_-) \mu(d\bar{x}, d\bar{\omega}_-) > 0. \end{aligned}$$

Excepté dans le cas particulier de l'équation de Langevin fractionnaire, même s'il est connu que l'Equation (27) admet une unique solution stationnaire au sens de Hairer [43] sous l'Hypothèse 1.2, il n'est pas assuré en général que sa loi admette une densité. Ainsi, la seule information disponible sur le comportement en temps long de $\hat{f}_{T,h}$ est que pour $h > 0$ quelconque fixé, $\hat{f}_{T,h}(x)$ converge presque surement et en moyenne quadratique vers une constante strictement positive d'après la Proposition 1.3. Avec les propriétés connues de l'intégrale de Skorokhod, cela permet d'établir le résultat de convergence partiel suivant pour les estimateurs $\hat{b}_{T,h}$ et $\hat{b}_{T,h,\varepsilon}$.

PROPOSITION 1.4. *Soit*

$$S_{T,h}(x) := \frac{\sigma}{Th} \int_0^T K\left(\frac{X(s) - x}{h}\right) \delta B(s).$$

Sous les Hypothèses 1.1 et 1.2,

$$(29) \quad |\hat{b}_{T,h}(x) - b(x)| \leq \|b'\|_{\infty} h + \frac{|S_{T,h}(x)|}{\hat{f}_{T,h}(x)}$$

et il existe une constante $c_1 > 0$, ne dépendant pas de T et h , telle que

$$(30) \quad \mathbb{E}(S_{T,h}(x)^2) \leq \frac{c_1}{h^4 T^{2(1-H)}}.$$

En conséquence, pour $h > 0$ quelconque,

$$(31) \quad T^{\beta} V_{T,h}(x) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0 ; \forall \beta \in [0, 1 - H],$$

où

$$V_{T,h}(x) := \left| \frac{S_{T,h}(x)}{\hat{f}_{T,h}(x)} \right|.$$

Enfin, il existe une constante $c_2 > 0$, ne dépendant pas de T et h , telle que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(32) \quad |\hat{b}_{T,h,\varepsilon}(x) - \hat{b}_{T,h}(x)| \leq c_2 \frac{\varepsilon h^{-2} T^{2H-2}}{\hat{f}_{T,h}(x)}.$$

Pour une preuve détaillée de la Proposition 1.4, se référer à Comte et Marie [19], Proposition 3.4. La preuve de la Proposition 1.4 se décompose en deux étapes :

(1) La décomposition

$$\widehat{b}_{T,h}(x) - b(x) = \frac{1}{\widehat{f}_{T,h}(x)} \left(\frac{1}{Th} \int_0^T K \left(\frac{X(s) - x}{h} \right) (b(X(s)) - b(x)) ds + S_{T,h}(x) \right)$$

permet de montrer l'Inégalité (29), la Proposition 4.4 de Hu et al. [46] permet de montrer l'Inégalité (30) et la Proposition 1.3 permet d'en déduire le résultat de convergence (31).

(2) Soient

$$R_{h,\varepsilon}(T) := \frac{\alpha_H \sigma^2}{Th^2} \int_0^T \int_0^u K' \left(\frac{X_{x_0}(u) - x}{h} \right) \frac{X_{x_0+\varepsilon}(u) - X_{x_0}(u)}{X_{x_0+\varepsilon}(v) - X_{x_0}(v)} |u - v|^{2H-2} dv du$$

et

$$R_h(T) := \frac{\alpha_H \sigma}{Th^2} \int_0^T \int_0^T K' \left(\frac{X_{x_0}(u) - x}{h} \right) \mathbf{D}_v X_{x_0}(u) |u - v|^{2H-2} dv du,$$

où $\mathbf{D}X_{x_0}(u)$, $u \in \mathbb{R}_+$ désigne la dérivée de Malliavin de $X_{x_0}(u)$. Puisque

$$\mathbf{D}_v X_{x_0}(u) = \sigma \mathbf{1}_{[0,u]}(v) \frac{\partial_{x_0} X_{x_0}(u)}{\partial_{x_0} X_{x_0}(v)}; \quad \forall (u, v) \in [0, T]^2,$$

en utilisant Nualart [77], Proposition 5.2.3, montrer qu'il existe une constante $c > 0$, ne dépendant que de T , h et ε , telle que

$$|R_h(T) - R_{h,\varepsilon}(T)| \leq c\varepsilon T^{2H-1},$$

puis en déduire l'Inégalité (32).

La Proposition 1.4 suggère que le risque quadratique de l'estimateur $\widehat{b}_{T,h}(x)$ se décompose en un terme de biais d'ordre h^2 et un terme de variance d'ordre $h^{-4}T^{2H-2}$. La vitesse de convergence optimale de l'estimateur de Nadaraya-Watson serait donc $T^{-2/3(1-H)}$ pour une fenêtre d'ordre $T^{-1/3(1-H)}$.

La proposition suivante fournit un résultat négatif mais intéressant : l'estimateur de Nadaraya-Watson trajectorien n'est pas consistant.

PROPOSITION 1.5. *Sous les Hypothèses 1.1 et 1.2,*

$$\widetilde{b}_{T,h}(x) := \frac{1}{\widehat{f}_{T,h}(x)} \times \frac{1}{Th} \int_0^T K \left(\frac{X(s) - x}{h} \right) dX(s) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Pour une preuve détaillée de la Proposition 1.5, se référer à Comte et Marie [19], Proposition 3.3. La preuve de la Proposition 1.5 se décompose en deux étapes :

(1) Soit \mathcal{K} une primitive de K . Par la formule de changement de variable pour l'intégrale de Young,

$$\widetilde{b}_{T,h}(x) = \frac{1}{T\widehat{f}_{T,h}(x)} \left(\mathcal{K} \left(\frac{X(T) - x}{h} \right) - \mathcal{K} \left(\frac{X(0) - x}{h} \right) \right).$$

(2) D'après la Proposition 1.3,

$$|\widetilde{b}_{T,h}(x)| \leq \frac{\|K\|_\infty}{Th\widehat{f}_{T,h}(x)} |X(T) - X(0)| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Finalement, pour une fenêtre dépendant du temps, la proposition suivante fournit un résultat de convergence dont les conditions sont au moins satisfaites lorsque l'Equation (27) est l'équation de Langevin fractionnaire, comme établi à la Section 3.3 de Comte et Marie [19] en usant d'idées proches de celles de Taqqu [83] pour vérifier la Condition (33).

PROPOSITION 1.6. Soient $\beta \in]0, 1 - H[$, $\gamma \in]0, \beta[$, $T_0 > 0$ et $h : [T_0, \infty[\rightarrow]0, 1[$ tels que

$$\begin{cases} T^{-\beta} = o(h(T)^2) \\ T^{H-1+\gamma} = o(h(T)^2) \\ h(T) = o(T^{-\gamma}) \end{cases} .$$

Sous les Hypothèses 1.1 et 1.2, si

$$(33) \quad \widehat{f}_{T,h(T)}(x) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} l(x) > 0,$$

alors

$$T^\gamma |\widehat{b}_{T,h(T)}(x) - b(x)| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

De plus, si $\varepsilon : [T_0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ satisfait

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \varepsilon(T) = 0 \text{ et } \varepsilon(T) = o(h(T)^{-2} T^{2H-2+\gamma}),$$

alors

$$T^\gamma |\widehat{b}_{T,h(T),\varepsilon(T)}(x) - b(x)| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Pour une preuve détaillée de la Proposition 1.6, se référer à Comte et Marie [19], Proposition 3.6 et Corollaire 3.7. La preuve s'appuie sur un raisonnement analogue à celui utilisé pour démontrer la Proposition 1.4.

EXEMPLE 1.7. $h(T) = T^{-1/3(1-H)}$ et $\varepsilon(T) = h(T)^2$ satisfont les conditions de la Proposition 1.6 pour tout $\beta \in]2/3(1-H), 1-H[$.

Quelques perspectives. L'analogie à temps discret de l'estimateur de Nadaraya-Watson étudié dans cette section, beaucoup plus simple à calculer et implémenter, fait l'objet d'un travail en cours avec Fabien Panloup et Alexandre Richard.

2. Sélection de fenêtre pour l'estimateur de Wolverton-Wagner

En 1969, Wolverton et Wagner introduisent l'estimateur

$$\widehat{f}_{n,\mathbf{h}_n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{h_k} K\left(\frac{Y_k - x}{h_k}\right) ; x \in \mathbb{R}$$

dans [93]. Comme mentionné dans l'introduction de ce chapitre, $\widehat{f}_{n,\mathbf{h}_n}$ est une généralisation de l'estimateur de Parzen-Rosenblatt particulièrement adaptée au traitement de données en temps réel. Il en existe plusieurs variantes étudiées dans Yamato [94], Wegman et Davies [92] et Hall et Patil [38].

Pour l'estimateur de Parzen-Rosenblatt, plusieurs méthodes ont été développées ces dernières années pour en sélectionner la fenêtre à partir des observations. Tout d'abord, la méthode de Goldenshluger-Lespki introduite dans Goldenshluger et Lepski [37] qui, malheureusement, est particulièrement coûteuse en temps de calcul car elle implique la résolution numérique d'un problème d'optimisation à deux variables (cf. Comte et Rebafka [21]). Plus récemment, Lacour, Massart et Rivoirard ont proposé un estimateur de la fenêtre par pénalisation dans [54] en s'appuyant sur une inégalité de concentration pour les U-statistiques démontrée dans Houdré et Reynaud-Bouret [40]. Pour $h_k = h_k(\gamma)$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $\gamma \in]0, 1[$, cette section présente des variantes de ces deux méthodes pour sélectionner γ à partir des observations.

Dans la suite, le noyau K et la densité de probabilité f satisfont les hypothèses suivantes.

HYPOTHÈSE 2.1. Le noyau K est de carré intégrable et il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, \lfloor \beta \rfloor \rrbracket$, $y \in \mathbb{R} \mapsto y^i K(y)$ est intégrable et

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^i K(y) dy = 0.$$

HYPOTHÈSE 2.2. (Condition de Nikolski) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{\lfloor \beta \rfloor}$ sur \mathbb{R} et il existe une constante $\mathcal{N}(f) > 0$ telle que

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(\lfloor \beta \rfloor)}(y + \varepsilon) - f^{(\lfloor \beta \rfloor)}(y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq \mathcal{N}(f) |\varepsilon|^{\beta - \lfloor \beta \rfloor}; \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

La proposition suivante fournit un contrôle du risque quadratique intégré de $\widehat{f}_{n, \mathbf{h}_n}$ qui, lorsque $h_1 = \dots = h_n$, coïncide avec le contrôle connu sous les Hypothèses 2.1 et 2.2 pour l'estimateur de Parzen-Rosenblatt (cf. Tsybakov [86], Section 1.2.1, Théorème 1.3).

PROPOSITION 2.3. *Sous les Hypothèses 2.1 et 2.2, il existe une constante $c > 0$, ne dépendant pas de n et \mathbf{h}_n , telle que*

$$\mathbb{E}(\|\widehat{f}_{n, \mathbf{h}_n} - f\|_2^2) \leq c(\mathbb{B}_n + \mathbb{V}_n),$$

où

$$\mathbb{B}_n := \frac{1}{n^2} \left| \sum_{k=1}^n h_k^\beta \right|^2, \quad \mathbb{V}_n := \frac{1}{n h_n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{h_n} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{h_k}.$$

Pour une preuve détaillée de la Proposition 2.3, se référer à Comte et Marie [20], Proposition 2.5. Le contrôle du terme de variance s'obtient par un raisonnement analogue à celui utilisé pour l'estimateur de Parzen-Rosenblatt (cf. Tsybakov [86], Section 1.2.1, Théorème 1.3). Le contrôle du terme de biais s'obtient par un raisonnement proche de celui utilisé pour l'estimateur de Parzen-Rosenblatt, mais le résultat préliminaire complémentaire suivant est nécessaire : pour toute fonction borélienne $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi(\cdot, z)$, $z \in \mathbb{R}$ est intégrable et

$$y \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y, z) dz$$

est borélienne,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^n \varphi(k, z) \right|^2 dz \leq \left| \sum_{k=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k, z)^2 dz \right)^{1/2} \right|^2.$$

Dans la preuve de la Proposition 2.3, ce résultat permet de montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbb{E}(\widehat{f}_{n, \mathbf{h}_n}(x)) - f(x)|^2 dx \leq \left| \frac{1}{(\lfloor \beta \rfloor - 1)! n} \sum_{k=1}^n h_k^{\lfloor \beta \rfloor} u_k^{1/2} \right|^2,$$

où

$$u_k := \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} z^{\lfloor \beta \rfloor} K(z) \int_0^1 (1-t)^{\lfloor \beta \rfloor - 1} (f^{(\lfloor \beta \rfloor)}(th_k z + x) - f^{(\lfloor \beta \rfloor)}(x)) dt dz \right|^2 dx$$

pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Dans la suite de cette section, le vecteur \mathbf{h}_n satisfait l'hypothèse suivante.

HYPOTHÈSE 2.4. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$h_k = h_k(\gamma)$$

avec $\gamma \in]0, 1[$ et $h_1(\cdot), \dots, h_n(\cdot) \in \mathcal{C}^0([0, 1],]0, \infty[)$ satisfaisant

(1) Pour tout $\gamma' \in]0, 1]$,

$$0 < h_n(\gamma') < \dots < h_1(\gamma').$$

(2) $h_n(\cdot)$ est décroissante et bijective de $[0, 1]$ dans $]0, 1]$.

Sous l'Hypothèse 2.4, \mathbf{h}_n , \mathbb{B}_n et \mathbb{V}_n sont respectivement notés $\mathbf{h}_n(\gamma)$, $\mathbb{B}_n(\gamma)$ et $\mathbb{V}_n(\gamma)$.

L'exemple suivant présente un vecteur \mathbf{h}_n satisfaisant l'Hypothèse 2.4 et explicite, pour celui-ci, le contrôle du risque quadratique intégré de l'estimateur de Wolverton-Wagner obtenu à la Proposition 2.3.

EXEMPLE 2.5. Soit $\mathbf{h}_n := (h_1, \dots, h_n)$, où

$$h_k = k^{-\gamma} ; \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

avec $\gamma \in]0, 1[$. Le vecteur $\mathbf{h}_n(\gamma)$ satisfait l'Hypothèse 2.4,

$$\mathbb{B}_n(\gamma) = \begin{cases} O(n^{-2}) & \text{si } \gamma\beta > 1 \\ O(\log(n)n^{-2}) & \text{si } \gamma\beta = 1 \text{ et } \mathbb{V}_n(\gamma) = O(n^{\gamma-1}). \\ O(n^{-2\gamma\beta}) & \text{si } \gamma\beta < 1 \end{cases}$$

Alors, sous les Hypothèses 2.1 et 2.2, comme établi au Corollaire 2.6 de Comte et Marie [20], $\gamma_{\text{opt}} = 1/(2\beta + 1)$ fournit la vitesse de convergence optimale de l'estimateur de Wolverton-Wagner :

$$\mathbb{E}(\|\widehat{f}_{n, \mathbf{h}_n(\gamma_{\text{opt}})} - f\|_2^2) \leq cn^{-\frac{2\beta}{2\beta+1}},$$

où $c > 0$ désigne une constante ne dépendant pas de n .

Soit $\Gamma_n := \{\gamma_1, \dots, \gamma_{n(n)}\}$, où $n(n) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et

$$0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_{n(n)} \leq h_n^{-1}(1/n).$$

A la Section 3 de Comte et Marie [20], il est proposé de sélectionner γ dans Γ_n via la méthode type Goldenshluger-Lepski suivante :

$$(34) \quad \widehat{\gamma}_n \in \arg \min_{\gamma \in \Gamma_n} \{\mathbb{A}_n(\gamma) + v\mathbb{V}_n(\gamma)\},$$

où $v > 0$ ne dépend pas de n ,

$$\mathbb{A}_n(\gamma) := \sup_{\gamma' \in \Gamma_n} (\|\widehat{f}_{n, \mathbf{h}_n(\gamma')} - \widehat{f}_{n, \gamma, \gamma'}\|_2^2 - v\mathbb{V}_n(\gamma'))_+$$

et

$$\widehat{f}_{n, \gamma, \gamma'}(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (K_{h_k(\gamma')} * K_{h_k(\gamma)})(Y_k - x) ; \gamma' \in [0, 1].$$

Le théorème suivant fournit un contrôle du risque quadratique intégré de l'estimateur $\widehat{f}_{n, \mathbf{h}_n(\widehat{\gamma}_n)}$.

THÉORÈME 2.6. *Sous les Hypothèses 2.1, 2.2 et 2.4, si f est bornée et que pour tous $t > 0$ et $r \in \{1/2, 1\}$,*

$$(35) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\gamma' \in \Gamma_n} \exp\left(-\frac{t}{\mathbf{h}_n(\gamma')^r}\right) < \infty,$$

alors il existe une constante $c > 0$, ne dépendant pas de n , telle que

$$\mathbb{E}(\|\widehat{f}_{n, \mathbf{h}_n(\widehat{\gamma}_n)} - f\|_2^2) \leq c \left(\inf_{\gamma \in \Gamma_n} \{\mathbb{B}_n(\gamma) + \mathbb{V}_n(\gamma)\} + \frac{1}{n} \right).$$

Pour une preuve détaillée du Théorème 2.6, se référer à Comte et Marie [20], Proposition 3.3. La preuve du Théorème 2.6 s'appuie sur un raisonnement proche de celui utilisé lorsque $\gamma = h_1 = \dots = h_n$ (cf. Comte [18], Théorème 4.2), mais pour contrôler $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n(\gamma))$, et plus précisément

$$a_n(v) := \mathbb{E} \left(\sup_{\gamma' \in \Gamma_n} (\|\widehat{f}_{n, \mathbf{h}_n(\gamma')} - f_{n, \gamma'}\|_2^2 - c_1 v \mathbb{V}_n(\gamma'))_+ \right),$$

où $c_1 > 0$ est une constante universelle et

$$f_{n, \gamma'} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n K_{h_k(\gamma')} * f ; \gamma' \in [0, 1],$$

l'inégalité de Talagrand est appliquée à des variables aléatoires non identiquement distribuées. En désignant par \mathcal{S} une partie dénombrable et dense de la sphère unité de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, dy)$,

$$(36) \quad a_n(v) \leq \sum_{\gamma' \in \Gamma_n} \mathbb{E} \left(\left(\sup_{\psi \in \mathcal{S}} \mathbf{v}_{n, \gamma'}(\psi)^2 - c_1 v \mathbb{V}_n(\gamma') \right)_+ \right)$$

où, pour tout $\psi \in \mathcal{S}$,

$$\mathbf{v}_{n, \gamma'}(\psi) := \langle \psi, \widehat{f}_{n, \mathbf{h}_n(\gamma')} - f_{n, \gamma'} \rangle_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (v_\psi(h_k(\gamma'), Y_k) - \mathbb{E}(v_\psi(h_k(\gamma'), Y_k)))$$

et

$$v_\psi(h, y) := \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) K_h(y - z) dz ; \forall (h, y) \in]1/n, 1[\times \mathbb{R}.$$

En appliquant la version de l'inégalité de Talagrand démontrée dans Klein et Rio [52] à la famille dénombrable $(v_\psi)_{\psi \in \mathcal{S}}$ et aux variables aléatoires indépendantes $(h_1(\gamma'), Y_1), \dots, (h_n(\gamma'), Y_n)$, il existe deux constantes $v^*, c_2 > 0$, dépendant seulement de f, K et c_1 , telles que :

$$\mathbb{E} \left(\left(\sup_{\psi \in \mathcal{S}} \mathbf{v}_{n, \gamma'}(\psi)^2 - c_1 v^* \mathbb{V}_n(\gamma') \right)_+ \right) \leq \frac{c_2}{n} \left(\exp \left(-\frac{c_2}{\mathfrak{h}_n(\gamma')} \right) + \exp \left(-\frac{c_2}{\mathfrak{h}_n(\gamma')^{1/2}} \right) \right).$$

Ainsi, d'après la Condition (35) et l'Inégalité (36), il existe une constante $c_3 > 0$, ne dépendant pas de n , telle que

$$a_n(v^*) \leq \frac{c_3}{n}.$$

Pour le vecteur \mathbf{h}_n introduit à l'Exemple 2.5, l'exemple suivant présente un ensemble Γ_n satisfaisant les conditions du Théorème 2.6.

EXEMPLE 2.7. Soit

$$\Gamma_n := \left\{ \left(\frac{i}{\log(n)} \right)^{1/2} ; i \in \llbracket 1, \lfloor \log(n) \rfloor \rrbracket \right\}.$$

Pour tout $\gamma' \in \Gamma_n$,

$$\frac{1}{\mathfrak{h}_n(\gamma')} = n^{\gamma'-1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^{\gamma'} \geq \frac{1}{2} \exp(\log(n)^{1/2}).$$

Donc, pour tous $t > 0$ et $r \in \{1/2, 1\}$,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\gamma' \in \Gamma_n} \exp \left(-\frac{t}{\mathfrak{h}_n(\gamma')^r} \right) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \log(n) \exp \left(-\frac{t}{2^r} \exp(r \log(n)^{1/2}) \right) < \infty.$$

Comme établi à l'Exemple 2.5, $\gamma_{\text{opt}} = 1/(2\beta + 1)$ fournit la vitesse de convergence optimale de l'estimateur de Wolverton-Wagner. D'après le Théorème 2.6, la valeur

de γ sélectionnée dans Γ_n par la méthode type Goldenshluger-Lepski précédente est proche de γ_{opt} . Pour l'ensemble Γ_n introduit dans cet exemple,

$$|\gamma_{\text{opt}} - \widehat{\gamma}_n| = O(\log(n)^{-1/2}).$$

Ainsi, au moins pour n grand, $\widehat{\beta}_n := (\widehat{\gamma}_n^{-1} - 1)/2$ fournit une estimation du paramètre de régularité de Nikolski β de f .

La méthode type Goldenshluger-Lepski précédente est coûteuse en temps de calcul car elle implique la résolution numérique du problème d'optimisation à deux variables (34) et la calibration de la constante v . C'est pourquoi, à la Section 4 de Comte et Marie [20], il est proposé de sélectionner γ dans Γ_n via la méthode type Lacour-Massart-Rivoirard suivante :

$$\widetilde{\gamma}_n \in \arg \min_{\gamma \in \Gamma_n} \{ \|\widehat{f}_{n, \mathbf{h}_n(\gamma)} - \widehat{f}_{n, \mathbf{h}_n(\gamma_{\max})}\|_2^2 + \text{pen}(\gamma) \},$$

où $\gamma_{\max} := \max(\Gamma_n)$ et

$$\text{pen}(\gamma) := \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n \langle K_{h_k(\gamma_{\max})}, K_{h_k(\gamma)} \rangle_2.$$

Le théorème suivant fournit un contrôle de la perte quadratique intégrée de l'estimateur $\widehat{f}_{n, \mathbf{h}_n(\widetilde{\gamma}_n)}$.

THÉORÈME 2.8. *Soient $s \in [1, \infty[$ et $\varepsilon \in]0, 1[$. Sous les Hypothèses 2.1, 2.2 et 2.4, si f est bornée, K est symétrique, $K(0) > 0$ et*

$$\frac{\|K\|_1 \|K\|_\infty}{nh_n(\gamma_{\max})} \leq 1,$$

alors il existe trois constantes $c_1, c_2, c_3 > 0$, ne dépendant pas de n, s et γ , telles qu'avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - c_1 |\Gamma_n| e^{-s}$,

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}_{n, \mathbf{h}_n(\widetilde{\gamma}_n)} - f\|_2^2 &\leq (1 + \varepsilon) \min_{\gamma \in \Gamma_n} \|\widehat{f}_{n, \mathbf{h}_n(\gamma)} - f\|_2^2 \\ &\quad + \frac{c_2}{\varepsilon} \|f_{n, \gamma_{\max}} - f\|_2^2 + \frac{c_3}{\varepsilon} \left(\frac{s^2}{n} + \frac{s^3}{n^2 h_n(\gamma_{\max})} \right). \end{aligned}$$

Pour une preuve détaillée du Théorème 2.8, se référer à Comte et Marie [20], Proposition 4.2. La preuve du Théorème 2.8 s'appuie sur un raisonnement proche de celui utilisé lorsque $\gamma = h_1 = \dots = h_n$ (cf. Lacour et al. [54], Théorème 2), mais les résultats préliminaires suivants s'obtiennent en appliquant l'inégalité de concentration pour les U-statistiques du Théorème 3.4 de Houdré et Reynaud-Bouret [40] et l'inégalité de Bernstein à des variables aléatoires non identiquement distribuées.

— **Comte et Marie [20], Lemme 6.2.** Soient $s \in [1, \infty[$, $\theta \in]0, 1[$ et la U-statistique

$$U_n(\gamma, \gamma_{\max}) := \sum_{k \neq l} \langle K_{h_k(\gamma)}(Y_k - \cdot) - f_{h_k(\gamma)}, K_{h_l(\gamma_{\max})}(Y_l - \cdot) - f_{h_l(\gamma_{\max})} \rangle_2,$$

où $f_h := f * K_h$, $h > 0$. Il existe une constante universelle $c > 0$ telle qu'avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - 5.54 |\Gamma_n| e^{-s}$,

$$\frac{|U_n(\gamma, \gamma_{\max})|}{n^2} \leq \frac{\theta \|K\|_2^2}{n \mathfrak{h}_n(\gamma)} + \frac{c}{\theta} \left(\frac{\|K\|_1^2 \|f\|_\infty}{n} s^2 + \frac{\|K\|_1 \|K\|_\infty}{n^2 h_n(\gamma_{\max})} s^3 \right).$$

— **Comte et Marie [20], Lemme 6.3.** Soient $s \in [1, \infty[$, $\theta \in]0, 1[$ et $\gamma' \in \Gamma_n$. Il existe une constante $c > 0$, ne dépendant pas de n, s, θ, γ et γ' , telle qu'avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - 2e^{-s}$,

$$|\langle \widehat{f}_{n, \mathbf{h}_n(\gamma)} - f_{n, \gamma}, f_{n, \gamma'} - f \rangle_2| \leq \theta \|f_{n, \gamma'} - f\|_2^2 + \frac{cs}{\theta n}.$$

- **Comte et Marie [20], Lemme 6.4.** Sous les conditions du Théorème 2.8, il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$, ne dépendant pas de n, s, ε et γ , telles qu'avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - c_1|\Gamma_n|e^{-s}$,

$$\|f_{n,\gamma} - f\|_2^2 + \frac{\|K\|_2^2}{n\mathfrak{h}_n(\gamma)} \leq (1 + \varepsilon)\|\widehat{f}_{n,\mathbf{h}_n(\gamma)} - f\|_2^2 + c_2 \frac{(1 + \varepsilon)^2}{\varepsilon} \left(\frac{s^2}{n} + \frac{s^3}{n^2 h_n(\gamma_{\max})} \right).$$

Dans la preuve du Théorème 2.8, $\|\widehat{f}_{n,\mathbf{h}_n(\tilde{\gamma}_n)} - f\|_2^2$ est décomposé de la même façon que lorsque $\gamma = h_1 = \dots = h_n$, puis chaque terme de cette décomposition est contrôlé via les Lemmes 6.2, 6.3 et 6.4 de Comte et Marie [20] énoncés précédemment.

La Section 2 s'achève par une application de la méthode type Lacour-Massart-Rivoirard précédente sur des données générées à partir de deux lois usuelles. Dans la suite,

$$K(x) = 4\nu_1(x) - 6\nu_2(x) + 4\nu_3(x) - \nu_4(x) ; \forall x \in \mathbb{R},$$

où $\nu_i, i \in \mathbb{N}^*$ désigne la densité normale d'espérance nulle et de variance i . Soit f_1 la densité de la loi $0.5\mathcal{N}(-2, 1) + 0.5\mathcal{N}(2, 1)$. Pour un jeu de $n = 1000$ observations indépendantes d'une variable aléatoire de densité f_1 ,

- A gauche sur la Figure 2, f_1 est représentée en rouge, $\widehat{f}_{n,\mathbf{h}_n(\tilde{\gamma}_n)}$ avec $h_k(\gamma) = k^{-\gamma}$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\gamma \in \Gamma_n = \{0.5i/n(n) ; i \in \llbracket 1, n(n) \rrbracket\}$ ($n(n) = 40$) est représenté en pointillés bleus, l'estimateur de Parzen-Rosenblatt de fenêtre sélectionnée par la méthode de Lacour-Massart-Rivoirard dans $H_n = \{i/n(n) ; i \in \llbracket 1, n(n) \rrbracket\}$ est représenté en pointillés verts et l'estimateur de f_1 implémenté dans la fonction `ksdensity` de Matlab est représenté en pointillés noirs.
- Au milieu sur la Figure 2, f_1 est représentée en rouge et les $\widehat{f}_{n,\mathbf{h}_n(\gamma)}$, $\gamma \in \Gamma_n$ sont représentés en pointillés bleus.
- A droite sur la Figure 2, f_1 est représentée en rouge et, pour chaque fenêtre de H_n , l'estimateur de Parzen-Rosenblatt est représenté en pointillés bleus.

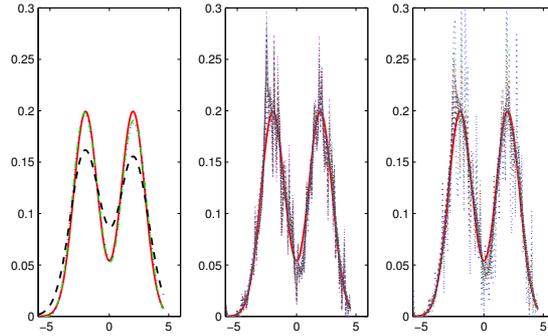


FIGURE 1. 1 jeu de données et $n = 1000$ pour f_1 .

La figure suivante est l'analogue de la Figure 2 pour $n = 250$ et la densité f_2 de la loi $\beta(3, 3)$.

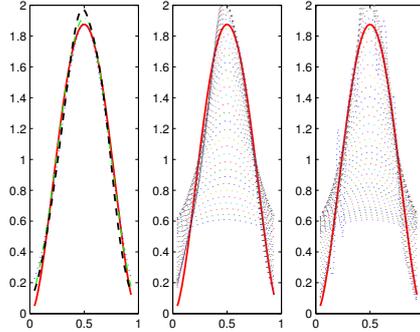


FIGURE 2. 1 jeu de données et $n = 250$ pour f_2 .

A la figure suivante, f_2 est représentée en rouge de gauche à droite et pour 30 jeux de $n = 250$ observations indépendantes d'une variable aléatoire de densité f_2 , $\hat{f}_{n, \mathbf{h}_n(\tilde{\gamma}_n)}$ est représenté en pointillés verts à gauche, l'estimateur de Parzen-Rosenblatt de fenêtre sélectionnée par la méthode de Lacour-Massart-Rivoirard dans H_n est représenté en pointillés verts au milieu et l'estimateur de f_2 implémenté dans la fonction `ksdensity` de Matlab est représenté en pointillés verts à droite.

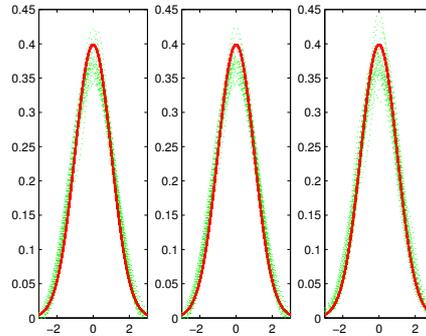


FIGURE 3. 30 jeux de données et $n = 250$ pour f_2 .

A la Sous-section 4.2 de Comte et Marie [20], il est mis en évidence que $\hat{f}_{n, \mathbf{h}_n(\tilde{\gamma}_n)}$ fournit une estimation sensiblement meilleure que l'estimateur de Parzen-Rosenblatt de fenêtre sélectionnée dans H_n par la méthode de Lacour-Massart-Rivoirard.

Quelques perspectives. Les méthodes de sélection du paramètre γ présentées dans cette section ne tirent pas pleinement parti du caractère récursif de l'estimateur de Wolverton-Wagner. La méthode type Lacour-Massart-Rivoirard présentée dans cette section pourrait être améliorée dans ce sens.

3. Estimateur de la tendance d'une série temporelle multivariée en grande dimension

Par souci de clarté, excepté en fin de section pour la sélection de modèle, r et τ ne seront pas mis en indices des ensembles et matrices qui en dépendent.

Comme mentionné dans l'introduction de ce chapitre, dans Alquier et Marie [3], la matrice \mathbf{M} du Modèle (28) satisfait deux conditions : elle s'écrit comme un produit de matrices de faible rang r et ses lignes satisfont une propriété spécifique à la tendance d'une série temporelle. D'une part, $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{W}$, où $\mathbf{U} \in \mathcal{M}_{d,r}(\mathbb{R})$ et les lignes de $\mathbf{W} \in \mathcal{M}_{r,T}(\mathbb{R})$ peuvent s'interpréter comme des facteurs latents ; c'est un intérêt pratique de la première condition. La factorisation de matrices, classiquement utilisée en économétrie depuis les années 1970 (cf. Geweke [36], Izenman [49] ou Kleibergen et Van Dijk [51]), est déjà appliquée à l'analyse de données temporelles multidimensionnelles (cf. p.ex. De Castro et al. [26] ou Mei et al. [65]). D'autre part, supposer que les lignes de \mathbf{M} satisfont une propriété spécifique à la tendance d'une série temporelle caractérisée par le paramètre τ permet d'obtenir un contrôle du risque quadratique de l'estimateur des moindres carrés de \mathbf{M} en $O(r(d + \tau))$. Sans cette condition, celui-ci serait en $O(r(d + T))$ (cf. Koltchinskii et al. [42]). Rigoureusement, dans la suite, la matrice \mathbf{M} satisfait l'hypothèse suivante.

HYPOTHÈSE 3.1. $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}$, où $\mathbf{U} \in \mathcal{M}_{d,r}(\mathbb{R})$, $\mathbf{V} \in \mathcal{M}_{r,\tau}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{M}_{\tau,T}(\mathbb{C})$ avec $\text{rg}(\mathbf{\Lambda}) = \tau$.

Dans la décomposition de \mathbf{M} à l'Hypothèse 3.5, le paramètre τ et la matrice $\mathbf{\Lambda}$ permettent d'imposer aux lignes de la matrice \mathbf{M} de satisfaire une propriété spécifique à la tendance d'une série temporelle.

EXEMPLE 3.2. D'une part, si la tendance de \mathbf{X} est τ -périodique et que T est un multiple de τ , alors $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}$ avec $\mathbf{\Lambda} := (\mathbf{I}_\tau | \cdots | \mathbf{I}_\tau)$. D'autre part, si la tendance de \mathbf{X} est de la forme $t \in \llbracket 1, T \rrbracket \mapsto f(t/T)$ avec $f \in \mathbb{L}^2([0, 1], \mathbb{R}^d)$, alors $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}$ avec

$$\mathbf{\Lambda} := \left(\mathbf{e}_n \left(\frac{t}{T} \right) \right)_{(n,t) \in \llbracket -n_\tau, n_\tau \rrbracket \times \llbracket 1, T \rrbracket},$$

où τ est impair, $n_\tau := (\tau - 1)/2$ et $(\mathbf{e}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ désigne la base de Fourier.

Dans la suite, la matrice ε satisfait l'hypothèse suivante.

HYPOTHÈSE 3.3. Les lignes de la matrice aléatoire ε sont indépendantes, centrées et de même loi sous-gaussienne de matrice de covariance $\mathbf{\Sigma}_\varepsilon$. De plus, les vecteurs aléatoires

$$\varepsilon_{i,\cdot} \mathbf{\Sigma}_\varepsilon^{-1/2}, \quad i \in \llbracket 1, d \rrbracket$$

sont isotropes et de norme sous-gaussienne finie (i.e.

$$\mathfrak{g}_\varepsilon := \sup_{x \in \partial \mathcal{B}_T(0,1)} \sup_{p \in [1, \infty[} p^{-1/2} \mathbb{E}(|\langle \varepsilon_{i,\cdot} \mathbf{\Sigma}_\varepsilon^{-1/2}, x \rangle|^p)^{1/p} < \infty).$$

La constante $\mathfrak{G}_\varepsilon := \mathfrak{g}_\varepsilon^2 \vee \mathfrak{g}_\varepsilon^4$ intervient dans l'inégalité de concentration sur les matrices aléatoires utilisée dans la suite (cf. Vershynin [90], Théorème 5.39 et Remarque 5.40.2).

Pour obtenir un contrôle en $O(r(d + \tau))$ du risque quadratique de l'estimateur des moindres carrés de \mathbf{M} , il convient d'introduire le modèle auxiliaire suivant.

Soit $\mathbf{\Lambda}^+$ l'inverse généralisée de $\mathbf{\Lambda}$. Sous l'Hypothèse 3.1, $\mathbf{\Lambda}^+ = \mathbf{\Lambda}^*(\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^*)^{-1}$. Donc, $\bar{\mathbf{X}} := \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}^+$, $\bar{\mathbf{M}} := \mathbf{U}\mathbf{V}$ et $\bar{\varepsilon} := \varepsilon\mathbf{\Lambda}^+$ satisfont

$$(37) \quad \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{M}} + \bar{\varepsilon}.$$

Soit l'estimateur $\widehat{\mathbf{M}} := \widehat{\mathbf{M}}\mathbf{\Lambda}$ de \mathbf{M} , où

$$\widehat{\mathbf{M}} \in \arg \min_{\mathbf{A} \in \mathcal{S}} \|\mathbf{A} - \overline{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{F}}^2$$

et \mathcal{S} est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_{d,\tau}(\mathbb{R})$.

Le théorème suivant fournit un contrôle de la perte quadratique $\|\widehat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}^2$ en l'absence de propriété spécifique à la tendance d'une série temporelle des lignes de \mathbf{M} (i.e. $\tau = T$ et $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}_T$).

THÉORÈME 3.4. *Sous les Hypothèses 3.1 et 3.3, il existe une constante $c > 0$, ne dépendant pas de ε , d et T , telle que pour tous $\lambda \in]0, 1[$ et $s \in \mathbb{R}_+$, avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - 2e^{-s}$,*

$$\|\widehat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \cdot \min_{\mathbf{A} \in \mathcal{S}} \|\mathbf{A} - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}^2 + \frac{4cr}{\lambda(1 - \lambda)} \mathfrak{G}_\varepsilon \|\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon\|_{\text{op}} (d + T + s).$$

Pour une preuve détaillée du Théorème 3.4, se référer à Alquier et Marie [3], Théorème 3.4. La preuve du Théorème 3.4 se décompose en trois étapes :

(1) Montrer que pour tout $\lambda \in]0, 1[$,

$$\|\widehat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \cdot \min_{\mathbf{A} \in \mathcal{S}} \|\mathbf{A} - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}^2 + \frac{2}{\lambda(1 - \lambda)} \sup_{\mathbf{A} \in \Delta(\mathcal{S})^1} \langle \varepsilon, \mathbf{A} \rangle_{\mathcal{F}}^2.$$

(2) Pour tout $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}_{d,T}(\mathbb{R})$, puisque

$$\sup_{\mathbf{A} \in \mathcal{K}^1} \langle \varepsilon, \mathbf{A} \rangle_{\mathcal{F}}^2 \leq \text{rk}(\mathcal{K}^1) \sigma_1(\varepsilon)^2$$

et

$$\left| \frac{1}{d} \sigma_1(\varepsilon)^2 - \|\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon\|_{\text{op}} \right| \leq \left\| \frac{1}{d} \varepsilon^* \varepsilon - \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \right\|_{\text{op}},$$

d'après Vershynin [90], Théorème 5.39 et Remarque 5.40.2, avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - 2e^{-s}$,

$$\sup_{\mathbf{A} \in \mathcal{K}^1} \langle \varepsilon, \mathbf{A} \rangle_{\mathcal{F}}^2 \leq c \cdot \text{rk}(\mathcal{K}^1) \mathfrak{G}_\varepsilon \|\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon\|_{\text{op}} (d + T + s).$$

Ce résultat de Vershynin [90] s'applique car ε satisfait l'Hypothèse 3.3.

(3) Conclure à l'aide des points 1 et 2.

Il est désormais supposé que $\tau < T$. Avant tout, il faut s'assurer que $\|\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon\|_{\text{op}}$, \mathfrak{g}_ε et $\rho(\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^*) \|(\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^*)^{-1}\|_{\text{op}}$ sont majorés par des constantes ne dépendant pas de d , T , r et τ . Comme établi à la Remarque 3.3 de Alquier et Marie [3], c'est le cas de $\|\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon\|_{\text{op}}$ lorsque $\varepsilon_{1,1}, \dots, \varepsilon_{1,T}$ sont décorrélés ou lorsque $\varepsilon_{1,\cdot}$ est la restriction d'un MA(1) ou d'un AR(1) à $[[1, T]]$. Par ailleurs, dans la suite, $\mathbf{\Lambda}$ et ε satisfont les hypothèses suivantes.

HYPOTHÈSE 3.5. Il existe une constante $c(\tau, T) > 0$ telle que $\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^* = c(\tau, T)\mathbf{I}_\tau$.

HYPOTHÈSE 3.6. Il existe une constante $\mathfrak{m} \in [1, \infty[$, ne dépendant pas de d , T , r et τ , telle que $\mathfrak{g}_{\overline{\varepsilon}} \leq \mathfrak{g}_\varepsilon \leq \mathfrak{m}$.

A la Sous-section 3.2 de Alquier et Marie [3], il est établi que si $\varepsilon_{1,\cdot}$ est un vecteur gaussien ou s'il existe une constante $\sigma > 0$ telle que $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon = \sigma^2 \mathbf{I}_T$ et que $\mathbf{\Lambda}$ satisfait l'Hypothèse 3.5, alors ε satisfait l'Hypothèse 3.6. De plus, aux Sous-sections 3.3 et 3.4 de Alquier et Marie [3], il est établi que les matrices

$$(\mathbf{I}_\tau | \dots | \mathbf{I}_\tau) \text{ et } \left(\mathbf{e}_n \begin{pmatrix} t \\ T \end{pmatrix} \right)_{(n,t) \in [-n_\tau, n_\tau] \times [1, T]}$$

introduites à l'Exemple 3.2 satisfont l'Hypothèse 3.5.

COROLLAIRE 3.7. *Sous les Hypothèses 3.1, 3.3, 3.5 et 3.6, pour tous $\lambda \in]0, 1[$ et $s \in \mathbb{R}_+$, avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - 2e^{-s}$,*

$$\|\widehat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \cdot \min_{\mathbf{A} \in \mathcal{S}} \|\mathbf{A}\mathbf{\Lambda} - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}^2 + \frac{4\mathbf{c}\mathbf{m}^4 r}{\lambda(1 - \lambda)} \|\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon\|_{\text{op}}(d + \tau + s).$$

Pour une preuve détaillée du Corollaire 3.7, se référer à Alquier et Marie [3], Corollaire 3.7. Appliqué au Modèle (37), le Théorème 3.4 fournit un contrôle de

$$\|\widehat{\mathbf{M}} - \overline{\mathbf{M}}\|_{\mathcal{F}}^2,$$

puis les trois inégalités suivantes, avec les Hypothèses 3.5 et 3.6, permettent de conclure :

$$(38) \quad \|\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon_{1,\mathbf{C}}}\|_{\text{op}} \leq \|\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon\|_{\text{op}} \|\mathbf{C}^* \mathbf{C}\|_{\text{op}}$$

pour tout $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_{\mathbf{T},\tau}(\mathbb{C})$,

$$\|\mathbf{A} - \overline{\mathbf{M}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{\Lambda} - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}^2 \|(\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^*)^{-1}\|_{\text{op}}$$

pour tout $\mathbf{A} \in \mathcal{S}$, et

$$\|\widehat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \|\widehat{\mathbf{M}} - \overline{\mathbf{M}}\|_{\mathcal{F}}^2 \|\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^*\|_{\text{op}}.$$

La Section 3 s'achève par le contrôle du risque quadratique de $\widehat{\mathbf{M}}_{\widehat{r}_s, \widehat{\tau}_s}$, où $s \in \mathbb{R}_+$,

$$(\widehat{r}_s, \widehat{\tau}_s) \in \arg \min_{(r,\tau) \in \mathcal{R} \times \mathcal{T}} \{ \|\widehat{\mathbf{M}}_{r,\tau} - \mathbf{X}\|_{\mathcal{F}}^2 + \text{pen}_{s+r+\tau}(r, \tau) \},$$

$\mathcal{R} \subset \llbracket 1, d \wedge \mathbf{T} \rrbracket$, $\mathcal{T} \subset \llbracket 1, \mathbf{T} \rrbracket$ et

$$\text{pen}_s(r, \tau) := \frac{2\mathbf{c}\mathbf{m}^4 r}{\lambda} \|\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon\|_{\text{op}}(d + \tau + s); \forall (r, \tau) \in \mathcal{R} \times \mathcal{T}.$$

THÉORÈME 3.8. *Sous les Hypothèses 3.1, 3.3, 3.5 et 3.6, pour tous $\lambda \in]0, 1[$ et $s \in \mathbb{R}_+$, avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - 2e^{-s}$,*

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{M}}_{\widehat{r}_s, \widehat{\tau}_s} - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}^2 &\leq \min_{(r,\tau) \in \mathcal{R} \times \mathcal{T}} \min_{\mathbf{A} \in \mathcal{S}_{r,\tau}} \left\{ \left(\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \right)^2 \|\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}_\tau - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{16\mathbf{c}\mathbf{m}^4 r}{\lambda(1 - \lambda)^2} \|\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon\|_{\text{op}}(d + \tau + s) \right\}. \end{aligned}$$

Pour une preuve détaillée du Théorème 3.8, se référer à Alquier et Marie [3], Théorème 4.1. La preuve du Théorème 3.8 se décompose en trois étapes :

- (1) Par un raisonnement proche de celui utilisé à l'étape 1 de la preuve du Théorème 3.4, montrer que

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{M}}_{\widehat{r}_s, \widehat{\tau}_s} - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}^2 &\leq \frac{1}{1 - \lambda} \cdot \min_{(r,\tau) \in \mathcal{R} \times \mathcal{T}} \{ (1 + \lambda) \|\widehat{\mathbf{M}}_{r,\tau} - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}^2 + \text{pen}_{s+r+\tau}(r, \tau) \\ &\quad + \psi_\varepsilon(\widehat{\mathbf{M}}_{r,\tau}) \} + \frac{1}{1 - \lambda} (-\text{pen}_{s+\widehat{r}_s+\widehat{\tau}_s}(\widehat{r}_s, \widehat{\tau}_s) + \psi_\varepsilon(\widehat{\mathbf{M}}_{\widehat{r}_s, \widehat{\tau}_s})), \end{aligned}$$

où

$$\psi_\varepsilon(\widehat{\mathbf{M}}_{r,\tau}) := \frac{1}{\lambda} \left\langle \varepsilon, \frac{\widehat{\mathbf{M}}_{r,\tau} - \mathbf{M}}{\|\widehat{\mathbf{M}}_{r,\tau} - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}} \right\rangle_{\mathcal{F}}^2$$

pour tout $(r, \tau) \in \mathcal{R} \times \mathcal{T}$.

- (2) Montrer que pour $(r, \tau) \in \mathcal{R} \times \mathcal{T}$ quelconque,

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(\widehat{\mathbf{M}}_{r,\tau}) &\leq \frac{1}{\lambda} \sup_{\mathbf{A} \in \Delta(\mathcal{S}_{r,\tau})^1} \langle \bar{\varepsilon}, \mathbf{A}\mathbf{\Lambda}_\tau^* \rangle_{\mathcal{F}}^2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|\mathbf{\Lambda}_\tau^*\|_{\text{op}}^2 \cdot \text{rk}(\Delta(\mathcal{S}_{r,\tau})^1) \cdot \sigma_1(\bar{\varepsilon})^2. \end{aligned}$$

De plus, d'après l'Inégalité (38) et l'Hypothèse 3.5,

$$\|\Sigma_{\varepsilon_1, \Lambda^\dagger}\|_{\text{op}} \|\Lambda_\tau^*\|_{\text{op}}^2 \leq \|\Sigma_\varepsilon\|_{\text{op}} \|(\Lambda_\tau \Lambda_\tau^*)^{-1}\|_{\text{op}} \|\Lambda_\tau \Lambda_\tau^*\|_{\text{op}} = \|\Sigma_\varepsilon\|_{\text{op}}.$$

Donc, d'après Vershynin [90], Théorème 5.39 et Remarque 5.40.2, avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - 2e^{-s-r-\tau}$,

$$\psi_\varepsilon(\widehat{\mathbf{M}}_{r,\tau}) \leq \text{pen}_{s+r+\tau}(r, \tau).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\psi_\varepsilon(\widehat{\mathbf{M}}_{\widehat{r}_s, \widehat{\tau}_s}) \leq \text{pen}_{s+\widehat{r}_s+\widehat{\tau}_s}(\widehat{r}_s, \widehat{\tau}_s)) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{(r,\tau) \in \mathcal{R} \times \mathcal{T}} \{\psi_\varepsilon(\widehat{\mathbf{M}}_{r,\tau}) \leq \text{pen}_{s+r+\tau}(r, \tau)\} \cap \{(\widehat{r}_s, \widehat{\tau}_s) = (r, \tau)\}\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{(r,\tau) \in \mathcal{R} \times \mathcal{T}} \{\psi_\varepsilon(\widehat{\mathbf{M}}_{r,\tau}) \leq \text{pen}_{s+r+\tau}(r, \tau)\}\right) \geq 1 - 2e^{-s}. \end{aligned}$$

(3) D'après les étapes 1 et 2, avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - 2e^{-s}$,

$$\|\widehat{\mathbf{M}}_{\widehat{r}_s, \widehat{\tau}_s} - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \frac{1}{1-\lambda} \cdot \min_{(r,\tau) \in \mathcal{R} \times \mathcal{T}} \{(1+\lambda)\|\widehat{\mathbf{M}}_{r,\tau} - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}^2 + 2\text{pen}_{s+r+\tau}(r, \tau)\}.$$

Le contrôle de $\|\widehat{\mathbf{M}}_{r,\tau} - \mathbf{M}\|_{\mathcal{F}}^2$, $(r, \tau) \in \mathcal{R} \times \mathcal{T}$ fourni par le Corollaire 3.7 permet de conclure.

Bibliographie

- [1] S. Aida. *Reflected Rough Differential Equations*. Stochastic Processes and their Applications 125, 9, 3570-3595, 2015.
- [2] S. Aida. *Rough Differential Equations Containing Path-Dependent Bounded Variation Terms*. ArXiv : 1608.03083.
- [3] P. Alquier et N. Marie. *Matrix Factorization for Multivariate Time Series Analysis*. Soumis, arXiv : 1903.05589.
- [4] M.A. Arcones. *On the Law of the Iterated Logarithm for Gaussian processes*. Journal of Theoretical Probability 8, 877-904,1995.
- [5] L. Arnold. *Random Dynamical Systems*. Springer, 1998.
- [6] J.P. Aubin et G. Da Prato. *Stochastic Viability and Invariance*. Annali Scuola Normale di Pisa 27, 595-694, 1990.
- [7] J.P. Aubin et G. Da Prato. *The Viability Theorem for Stochastic Differential Inclusions*. Stochastic Anal. Appl. 16, 1, 1-15, 1998.
- [8] F. Bernicot et J. Venel. *Stochastic Perturbation of Sweeping Process and a Convergence Result for an Associated Numerical Scheme*. Journal of Differential Equations 251, 4-5, 1195-1224, 2011.
- [9] M. Besalu, D. Marquez-Carreras et C. Rovira. *Delay Equations with Non-Negativity Constraints Driven by a Hölder Continuous Function of Order $\beta \in (1/3, 1/2)$* . Potential Analysis 41, 1, 117-141, 2014.
- [10] A. Brouste et S. Iacus. *Parameter Estimation for the Discretely Observed Fractional Ornstein-Uhlenbeck Process and the Yuima R Package*. Computational Statistics 28, 4, 1529-1547, 2013.
- [11] R. Buckdahn, M. Quincampoix, C. Rainer et A. Rascanu. *Viability of Moving Sets for Stochastic Differential Equation*. Advances in Differential Equations 7, 9, 1045-1072, 2002.
- [12] R. Buckdahn, M. Quincampoix, C. Rainer et J. Teichmann. *Another Proof for the Equivalence Between Invariance of Closed Sets with Respect to Stochastic and Deterministic Systems*. Bull. Sci. Math. 134, 207-214, 2010.
- [13] C. Castaing. *Sur un nouvelle classe d'équation d'évolution dans les espaces de Hilbert*. Séminaire d'Analyse Convexe 13, 10, 28 pages, 1983.
- [14] C. Castaing, N. Marie et P. Raynaud de Fitte. *Sweeping Processes Perturbed by Rough Signals*. Soumis, arXiv : 1702.06495.
- [15] C. Castaing, M.D.P. Monteiro Marques et P. Raynaud de Fitte. *A Skorokhod Problem Governed by a Closed Convex Moving Set*. Journal of Convex Analysis 23, 2, 387-423, 2016.
- [16] I. Ciotir et A. Rascanu. *Viability for Differential Equations driven by Fractional Brownian Motion*. Journal of Differential Equations 247, 5, 1505-1528, 2009.
- [17] A. Chronopoulou et S. Tindel. *On Inference for Fractional Differential Equations*. Statistical Inference for Stochastic Processes 16, 1, 29-61, 2013.
- [18] F. Comte. *Estimation non-paramétrique*. Spartacus, 2015.
- [19] F. Comte et N. Marie. *Nonparametric Estimation in Fractional SDE*. Statistical Inference for Stochastic Processes, DOI : 10.1007/s11203-019-09196-y, 2019.
- [20] F. Comte et N. Marie. *Bandwidth Selection for the Wolverton-Wagner Estimator*. Soumis, arXiv : 1902.00734.
- [21] F. Comte et T. Rebařka. *Nonparametric Weighted Estimators for Biased Data*. Journal of Statistical Planning and Inference 174, 104-128, 2016.
- [22] L. Coutin et N. Marie. *Invariance for Rough Differential Equations*. Stochastic Processes and their Applications 127, 7, 2373-2395, 2017.

- [23] L. Coutin, J-M. Guglielmi et N. Marie. *On a Fractional Stochastic Hodgkin-Huxley Model*. International Journal of Biomathematics 11, 5, 16 pages, 2018.
- [24] J. Cresson, B. Puig et S. Sonner. *Validating Stochastic Models : Invariance Criteria for Systems of Stochastic Differential Equations and the Selection of a Stochastic Hodgkin-Huxley Type Model*. Internat. J. Biomath. Biostat. 2, 111-122, 2013.
- [25] D. D'Argenio et K. Park. *Uncertain Pharmacokinetics/Pharmacodynamics Systems : Design, Estimation and Control*. Control Engineering Practice 5, 12, 1707-1716, 1997.
- [26] Y. De Castro, Y. Goude, G. Hébrail et J. Mei. *Recovering Multiple Nonnegative Time Series from a Few Temporel Aggregates*. ICML 2017, 1-9, 2017.
- [27] M. Delattre et M. Lavielle. *Pharmacokinetics and Stochastic Differential Equations : Model and Methodology*. Proceedings of the Annual Meeting of the Population Approach Group in Europe, 2011.
- [28] A. Deya, M. Gubinelli, M. Hofmanova et S. Tindel. *One-Dimensional Reflected Rough Differential Equations*. Stochastic Processes and their Applications, DOI : 10.1016/j.spa.2018.09.007, 2018.
- [29] S. Ditlevsen et P. Greenwood. *The Morris-Lecar Neuron Model Embeds a Leaky Integrate-and-Fire Model*. Journal of Mathematical Biology 67, 2, 239-259, 2013.
- [30] S. Donnet et A. Samson. *A Review on Estimation of Stochastic Differential Equations for Pharmacokinetic/Pharmacodynamic Models*. Advanced Drug Delivery Reviews 65, 7, 929-939, 2013.
- [31] A. Falkowski et L. Słominski. *Sweeping Processes with Stochastic Perturbations Generated by a Fractional Brownian Motion*. ArXiv : 1505.01315.
- [32] P. Friz et M. Hairer. *A Course on Rough Paths, With an Introduction to Regularity Structures*. Springer, 2014.
- [33] P. Friz et N. Victoir. *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths : Theory and Applications*. Cambridge Studies in Applied Mathematics 120, Cambridge University Press, 2010.
- [34] P. Gassiat et B. Gess. *Regularization by Noise for Hamilton-Jacobi Equations*. Probability Theory and Related Fields, DOI : 10.1007/s00440-018-0848-7, 2018.
- [35] B. Gess, W. Liu et M. Röckner. *Random Attractors for a Class of Stochastic Partial Differential Equations Driven by General Additive Noise*. Journal of Differential Equations 251, 1225-1253, 2011.
- [36] J. Geweke. *Bayesian Reduced Rank Regression in Econometrics*. Journal of Econometrics 75, 121-146, 1996.
- [37] A. Goldenshluger et O. Lepski. *Bandwidth Selection in Kernel Density Estimation : Oracle Inequalities and Adaptive Minimax Optimality*. The Annals of Statistics 39, 1608-1632, 2011.
- [38] P. Hall et P. Patil. *On the Efficiency of On-Line Density Estimators*. IEEE Transactions on Information Theory 40, 5, 1504-1512, 1994.
- [39] A.L. Hodgkin et A.F. Huxley. *A Quantitative Description of Membrane Current and its Application to Conduction and Excitability in Nerves*. J. Physiol. 117, 500-544, 1952.
- [40] C. Houdré et P. Reynaud-Bouret. *Exponential Inequalities, with Constants, for U-Statistics of Order Two*. Stochastic Inequalities and Applications, Progr. Probab. 56 Birkhäuser, Basel, 55-69, 2003.
- [41] M.L. Kleptsyna et A. Le Breton. *Some Explicit Statistical Results About Elementary Fractional Type Models*. Nonlinear Analysis 47, 4783-4794, 2001.
- [42] V. Koltchinskii, K. Lounici et A. Tsybakov. *Nuclear-Norm Penalization and Optimal Rates for Noisy Low-Rank Matrix Completion*. The Annals of Statistics 39, 5, 2302-2329, 2011.
- [43] M. Hairer. *Ergodicity of Stochastic Differential Equations Driven by Fractional Brownian Motion*. The Annals of Probability 33, 3, 703-758, 2005.
- [44] M. Hairer et A. Ohashi. *Ergodic Theory for SDEs with Extrinsic Memory*. The Annals of Probability 35, 5, 1950-1977, 2007.
- [45] Y. Hu et D. Nualart. *Parameter Estimation for Fractional Ornstein-Uhlenbeck Processes*. Statistics and Probability Letters 80, 11-12, 1030-1038, 2010.
- [46] Y. Hu, D. Nualart et H. Zhou. *Drift Parameter Estimation for Nonlinear Stochastic Differential Equations Driven by Fractional Brownian Motion*. Stochastics, DOI : 10.1080/17442508.2018.1563606, 2019.

- [47] Y. Hu, D. Nualart et X. Song. *A Singular Stochastic Differential Equation Driven by Fractional Brownian Motion*. Statistics and Probability Letters 78, 14, 2075-2085, 2008.
- [48] D.P. Huy et T.T. Nguyen. *A Note on Fractional Stochastic Verhulst Equation with Small Perturbation*. Soochow Journal of Mathematics 28, 1, 57-64, 2002.
- [49] A. Izenman. *Reduced Rank Regression for the Multivariate Linear Model*. Journal of Multivariate Analysis 5, 2, 248-264, 1975.
- [50] Y. Jacomet. *Pharmacocinétique. Tomes I et II*. U.E.R. de Médecine de Nice, Ellipses, 1989.
- [51] F. Kleibergen et H. K. van Dijk. *On the Shape of the Likelihood-Posterior in Cointegration Models*. Econometric Theory 10, 514-551, 1994.
- [52] T. Klein et E. Rio. *Concentration Around the Mean for Maxima of Empirical Processes*. The Annals of Probability 33, 1060-1077, 2005.
- [53] Y. Kutoyants. *Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes*. Springer, 2004.
- [54] C. Lacour, P. Massart et V. Rivoirard. *Estimator Selection : a New Method with Applications to Kernel Density Estimation*. Sankhya 79, 298-335, 2017.
- [55] D. Lambertson et B. Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses, 2012.
- [56] A. Lejay. *Controlled Differential Equations as Young Integrals : A Simple Approach*. Journal of Differential Equations 249, 1777-1798, 2010.
- [57] P.L. Lions et A.S. Sznitman. *Stochastic Differential Equations with Reflecting Boundary Conditions*. Communications on Pure and Applied Mathematics XXXVII, 511-537, 1984.
- [58] T. Lyons. *Differential Equations Driven by Rough Signals*. Rev. Mat. Iberoamericana 14, 2, 215-310, 1998.
- [59] N. Marie. *A Pathwise Fractional One Compartment Intra-Veinous Bolus Model*. International Journal of Statistics and Probability 3, 3, 65-79, 2014.
- [60] N. Marie. *A Generalized Mean-Reverting Equation and Applications*. ESAIM : Probability and Statistics 18, 799-828, 2014.
- [61] N. Marie. *Singular Equations Driven by an Additive Noise and Applications*. Communications on Stochastic Analysis 9, 3, 309-341, 2015.
- [62] N. Marie. *Ergodicity of a Generalized Jacobi's Equation and Applications*. Stochastic Processes and their Applications 126, 1, 66-99, 2016.
- [63] N. Marie. *On a Constrained Fractional Stochastic Volatility Model*. Soumis, arXiv : 1608.03421.
- [64] B. Maslowski et B. Schmalfuss. *Random Dynamical Systems and Stationary Solutions of Differential Equations Driven by the Fractional Brownian Motion*. Stoch. Anal. Appl. 22, 1577-1607, 2004.
- [65] J. Mei, Y. De Castro, Y. Goude, J-M. Azaïs et G. Hébrail. *Nonnegative Matrix Factorization with Side Information for Time Series Recovery and Prediction*. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2018.
- [66] A. Melnikov, Y. Mishura et G. Shevchenko. *Stochastic Viability and Comparison Theorems for Mixed Stochastic Differential Equations*. Methodology and Computing in Applied Probability 17, 1, 169-188, 2015.
- [67] C. Meunier et I. Segev. *Playing the Devil's Advocate : Is the Hodgkin-Huxley Model Useful ?* Trends Neurosci. 25, 2, 558-563, 2002.
- [68] A. Milian. *Stochastic Viability and a Comparison Theorem*. Colloquium Mathematicum LXVIII, 2, 297-316, 1995.
- [69] M.N. Mishra et B.L.S. Prakasa Rao. *Nonparametric Estimation of Trend for Stochastic Differential Equations Driven by Fractional Brownian Motion*. Statistical Inference for Stochastic Processes 14, 2, 101-109, 2011.
- [70] M.D.P. Monteiro Marques. *Rafle par un convexe semi-continu inférieurement d'intérieur non vide en dimension finie*. Séminaire d'analyse convexe 14, 6, 24 pages, 1984.
- [71] M.D.P. Monteiro Marques. *Rafle par un convexe continu d'intérieur non vide en dimension infinie*. Séminaire d'analyse convexe 16, 4, 11 pages, 1986.
- [72] M.D.P. Monteiro Marques. *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems : Shocks and Dry Friction*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications 9, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [73] J-J. Moreau. *Solution du processus de rafle au sens des mesures différentielles*. Travaux Sém. Anal. Convexe 6, 1, 17, 1976.

- [74] M. Nagumo. *Über die Lage der Integralkurven Gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Proc. Phys. Math. Soc. Japan 24, 551-559, 1942.
- [75] A. Neuenkirch et S. Tindel. *A Least Square-Type Procedure for Parameter Estimation in Stochastic Differential Equations with Additive Fractional Noise*. Statistical Inference for Stochastic Processes 17, 1, 99-120, 2014.
- [76] T. Nie and A. Rascanu. *Deterministic Characterization of Viability for Stochastic Differential Equation Driven by Fractional Brownian Motion*. ESAIM : COCV 18, 4, 915-929, 2011.
- [77] D. Nualart. *The Malliavin Calculus and Related Topics. 2nd Edition*. Springer, 2006.
- [78] D. Nualart and A. Rascanu. *Differential Equations Driven by Fractional Brownian Motion*. Collect. Math. 53, 1, 55-81, 2002.
- [79] A. Saarinen, L-M. Linne et O. Yli-Harja. *Stochastic Differential Equation Model for Cerebellar Granule Cell Excitability*. PLoS Comput. Biol., DOI : 10.1371/journal.pcbi.1000004, 2008.
- [80] Y. Saisho. *Stochastic Differential Equations for Multidimensional Domain with Reflecting Boundary*. Probability Theory and Related Fields 74, 3, 455-477, 1987.
- [81] B. Sausserau. *Nonparametric Inference for Fractional Diffusion*. Bernoulli 20, 2, 878-918, 2014.
- [82] P. Sen et D. Bell. *A Model for the Interaction of Two Chemicals*. Journal of Theoretical Biology 238, 3, 652-656, 2006.
- [83] M.S. Taqqu. *Weak Convergence to Fractional Brownian Motion and to the Rosenblatt Process*. Warscheinlichkeitstheorie verw Gebiete 31, 287-302, 1975.
- [84] H. Tanaka. *Stochastic Differential Equations with Reflecting Boundary Condition in Convex Regions*. Hiroshima Math. J. 9, 1, 163-177, 1979.
- [85] I. Tasaki. *Initiation and Abolition of the Action Potential of a Single Node of Ranvier*. J. Gen. Physiol. 39, 3, 377-395, 1956.
- [86] A. Tsybakov. *Introduction to Nonparametric Estimation*. Springer, 2009.
- [87] C.A. Tudor et F. Viens. *Statistical Aspects of the Fractional Stochastic Calculus*. The Annals of Statistics 35, 3, 1183-1212, 2007.
- [88] C.A. Tudor et F. Viens. *Variations and Estimators for Self-Similarity Parameters via Malliavin Calculus*. The Annals of Probability 37, 6, 2093-2134, 2009.
- [89] M. Valadier. *Lipschitz Approximation of the Sweeping (or Moreau) Process*. Journal of Differential Equations 88, 2, 248-264, 1990.
- [90] B. Vershynin. *Introduction to the Non-Asymptotic Analysis of Random Matrices*. arXiv : 1011.3027, 2010.
- [91] L. Viitasaari. *Integration in a Normal World : Fractional Brownian Motion and Beyond*. Aalto University Publication Series, 2014.
- [92] E.J. Wegman et H.I. Davies. *Remarks on Some Recursive Estimators of a Probability Density*. The Annals of Statistics 7, 316-327, 1979.
- [93] C. Wolverton et T. Wagner. *Asymptotically Optimal Discriminant Functions for Pattern Classification*. IEEE Trans. Information Theory IT-15, 258-265, 1969.
- [94] H. Yamato. *Sequential Estimation of a Continuous Probability Density Function and Mode*. Bull. Math. Statist. 14, 1-12, 1971.