



**HAL**  
open science

# Voisinage et stabilité des solutions périodiques des systèmes hamiltoniens

Larbi El Bakkali

► **To cite this version:**

Larbi El Bakkali. Voisinage et stabilité des solutions périodiques des systèmes hamiltoniens. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 1990. Français. NNT : . tel-02095283

**HAL Id: tel-02095283**

**<https://hal.science/tel-02095283>**

Submitted on 10 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat d'état  
és Sciences Physiques

90 OBSP 0003

présentée à  
L'OBSERVATOIRE DE PARIS

par Monsieur Larbi EL BAKKALI  
pour obtenir le grade de Docteur és Sciences

Sujet de la thèse :

VOISINAGE ET STABILITE  
DES SOLUTIONS PERIODIQUES DES SYSTEMES HAMILTONIENS  
APPLICATION AUX SOLUTIONS DE LAGRANGE DU PROBLEME  
DES TROIS CORPS .

Soutenue le 27 Juin 1990 devant le Jury :

<i>M<sup>me</sup>.</i>	L.LOSCO	Président
MM.	C.MARCHAL	Rapporteur
	C.M.MARLE	Rapporteur
	B.MORANDO	Rapporteur
<i>M<sup>me</sup>.</i>	I.STELLMACHER	Examineur

Thèse de Doctorat d'état  
és Sciences Physiques

présentée à  
L'OBSERVATOIRE DE PARIS

par Monsieur Larbi EL BAKKALI  
pour obtenir le grade de Docteur és Sciences

Sujet de la thèse :

VOISINAGE ET STABILITE  
DES SOLUTIONS PERIODIQUES DES SYSTEMES HAMILTONIENS  
APPLICATION AUX SOLUTIONS DE LAGRANGE DU PROBLEME  
DES TROIS CORPS .



Soutenue le 27 Juin 1990 devant le Jury :

<i>M<sup>me</sup></i> .	L.LOSCO	Président
MM.	C.MARCHAL	Rapporteur
	C.M.MARLE	Rapporteur
	B.MORANDO	Rapporteur
<i>M<sup>me</sup></i> .	I.STELLMACHER	Examineur

A ma femme Halima et mon fils Mouad  
A mes parents , mes frères et sœurs  
A mes beaux parents , mes beaux frères et sœurs  
A tous ceux qui m'ont aidé pour y arriver .

Adresse personnelle :  
Avenue Khalid ben Oualid  
Immeuble ben Ali n° 5  
TETOUAN-MAROC  
ou  
B.P. 332 TETOUAN-MAROC .

## Remerciements

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à Monsieur Christian MARCHAL Conseiller Scientifique à l'O.N.E.R.A.(Office National d'Etudes et de Recherche Aérospatiales) qui m'a proposé ce travail et m'a constamment soutenu et aidé pour le développer . Il m'a permis de ce fait de me recycler dans ce domaine si intéressant .

Je remercie beaucoup Madame Françoise RANNOU-MONTINY qui a effectué au centre de calcul de l'O.N.E.R.A. une grande quantité de calculs numériques indispensables .

J'exprime toute ma reconnaissance à Madame Lucette LOSCO Professeur de l'Université de Besançon qui a dirigé ma thèse de 3<sup>eme</sup> cycle , et avec qui j'ai gardé des contacts amicaux et fructueux et d'avoir accepté de présider le jury de ma thèse d'état .

Je suis très heureux de pouvoir exprimer ma gratitude à Madame Irène STELLMACHER Professeur de l'Université de Lille I et Messieurs Charles-Michel MARLE Professeur de l'université Paris VI et Bruno MORANDO Astronome aux Bureau des Longitudes de Paris qui ont bien voulu très aimablement juger ce travail et se joindre au jury de ma thèse .

Je voudrais enfin et tout particulièrement remercier le Bureau des Longitudes et Monsieur Jean CHAPRONT qui m'ont procuré les moyens nécessaires pour taper ce travail et Jacques LASKAR, Jean Louis SIMON , Mme Thérèse DEROUAZI et Pascal DESCAMPS , qui ont pris beaucoup de temps pour m'initier aux premières notions du "TEX" .

Je tiens enfin à exprimer ma gratitude à l'Université et à la Faculté des Sciences de TETOUAN (MAROC) qui m'ont encouragé et soutenu pour faire ce travail .

## Résumé

Dans les systèmes dynamiques l'étude du voisinage et de la stabilité d'une solution périodique commence habituellement par l'étude "du premier ordre", c'est à dire l'étude du système variationnel linéarisé ;

Ce premier pas conduit souvent soit à la stabilité exponentielle soit à l'instabilité exponentielle mais il peut aussi, assez fréquemment, conduire à des cas "critiques" où le plus grand exposant caractéristique de Liapounov est nul. Il est alors nécessaire de considérer les termes d'ordre élevé.

Ce sont surtout les problèmes hamiltoniens qui conduisent à des cas critiques et l'étude des termes d'ordre élevé y commence par une série de simplifications présentées dans les chapitres I et II. Ces simplifications conduisent au théorème de quasi-résonance et aux notions commodes qui y sont associées : quasi-intégrales, résonances positives etc... qui permettent une classification générale des types de stabilité et d'instabilité.

Les chapitres III et IV appliquent ces résultats théoriques aux mouvements de Lagrange du problème des 3 corps.

Les résultats diffèrent beaucoup selon les cas étudiés : le cas du problème restreint circulaire est entièrement traité (cas plan) ou presque entièrement (cas tri-dimensionnel). Dans les cas non restreint (3 masses quelconques) et / ou non circulaire (3 masses en mouvement elliptiques), l'étude fournit seulement les résultats principaux : zones critiques, résonances d'ordre 3. Le cas elliptique tri-dimensionnel possède une résonance générale d'ordre 4 qui menace de détruire la stabilité dans une grande part des zones critiques.

## Abstract

In the dynamical systems the study of the vicinity and the stability of a periodic solution begins usually by the "first-order study" of the variational system.

This first step leads either to the exponential stability or to the exponential instability or to the "critical case" in which the largest Liapounov characteristic exponent is zero. In this third case it becomes necessary to consider the higher order terms.

Most critical cases appear in Hamiltonian problems and the study of large order terms begins by several simplifications that are presented in chapters I and II. These simplifications lead to the near-resonance theorem and to the adjacent useful notions : quasi-integrals, positive resonances etc... that allow a general classification of the types of stability and instability.

The chapters III and IV apply these theoretical results to the Lagrangian motions of 3-body problem.

The results are very different according the case of interest.

The restricted circular problem is entirely solved (planar case) or almost entirely solved (three-dimensional case).

In the non-restricted case ( three positive masses ) and / or non-circular case ( elliptic motions ) only the main results are obtained : critical zones , third-order resonances . The elliptical and three-dimensional case has a general fourth-order resonance that threat to destroy the stability in a large part of the critical zones .

## INTRODUCTION

Les modèles mathématiques de nombreux phénomènes scientifiques sont régis par des équations différentielles. Une partie très importante de l'étude des systèmes d'équations différentielles est la théorie de la stabilité des positions d'équilibre et des solutions périodiques.

Ce problème est fondamental et peut être formulé ainsi: Supposons que le système dynamique modélisé soit décrit à chaque instant par des paramètres d'état  $x_k(t)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) variant avec le temps selon le système d'équations différentielles suivant:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t) \quad ; \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

**DEFINITION :** La position d'équilibre  $\vec{x} = \vec{x}_0$  est dite stable au sens de Liapounov après l'instant  $t_0$ , si à tout  $\varepsilon > 0$  aussi petit que l'on veut, on peut faire correspondre  $\eta(\varepsilon, t_0)$  tel que:

$$\|\vec{x}(t_0) - \vec{x}_0\| \leq \eta \Rightarrow \|\vec{x}(t) - \vec{x}_0\| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } t \geq t_0 \quad (2)$$

Une définition analogue existe pour les solutions périodiques et une solution qui n'est pas stable est dite instable.

Il y a bien d'autres définitions de la stabilité comme par exemple celles ci-après que nous n'utiliserons pas :

### **a-La stabilité au sens de Poisson :**

On dit que la solution  $\vec{x}(t)$  est stable au sens de Poisson si elle revient une infinité de fois dans tout voisinage des états antérieurs.

Les solutions périodiques, quasi-périodiques, presque-périodiques sont stables au sens de Poisson ainsi que la plupart des solutions chaotiques.

### **b-La stabilité au sens de Lagrange :**

Une solution  $\vec{x}(t)$  est stable au sens de Lagrange si son évolution future reste bornée dans l'espace des phases.

**c-La stabilité au sens de Hill, la stabilité au sens de Poincaré, la stabilité au premier ordre, au deuxième ordre, au n-ième ordre, la stabilité asymptotique etc....**

Certains de ces stabilités ne concernent que la solution étudiée, les autres dépendent des solutions voisines.

### **1-Analyse classique du premier ordre :**

Cette théorie est dûe essentiellement à Liapounov pour les solutions d'équilibre et à Floquet pour le cas plus général des solutions périodiques.

### a-Analyse de Liapounov :

Nous supposons que l'équilibre étudié soit à l'origine et que le système d'équations différentielles soit de la forme suivante :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t) \quad (3)$$

Avec

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + g_k(\vec{x}, t)$$

Où

$$g_k(\vec{x}, t) = o(\|\vec{x}\|) \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Ou encore

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + g(\vec{x}, t) \quad (4)$$

Ceci est possible en supposant par exemple que  $f(\vec{x}, t)$  est définie, continue et continuellement différentiable dans un voisinage de l'équilibre étudié et que ses dérivées premières partielles  $a_{kj}$  y sont indépendantes du temps  $t$ . Liapounov a étudié complètement les systèmes " du premier ordre " :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \quad (5)$$

Il a montré que leur stabilité dépend essentiellement des valeurs propres de  $A$  et de leur partie réelle les "exposants caractéristiques de Liapounov".

a-1) Si l'une des valeurs propres a une partie réelle positive, il y a "instabilité exponentielle".

a-2) Si toutes les valeurs propres ont leur partie réelle négative, il y a "stabilité exponentielle".

a-3) Enfin si la plus grande des parties réelles de valeur propre est nulle on est dans le " CAS CRITIQUE ".

a-3-1) Il y a stabilité critique si les valeurs propres critiques sont toutes différentes.

a-3-2) Il y a généralement instabilité critique si deux ou plusieurs valeurs propres critiques sont égales.

Malheureusement ces conclusions ne s'étendent que partiellement aux systèmes non linéaires . Dans les cas critiques la stabilité dépend des ordres supérieurs et les conclusions a-3-1 et a-3-2 ci-dessus peuvent être renversées , ainsi que l'a montré Liapounov lui même dans quelques exemples simples .

Liapounov a utilisé deux méthodes pour résoudre ces systèmes non linéaires . La première est basée sur la détermination de la solution générale ou d'une solution instable particulière du système des équations différentielles . La seconde semble être inspirée par le théorème de Lagrange-Dirichlet dans lequel la stabilité d'une position d'équilibre est décidée par une propriété de la fonction de force . Liapounov bâtit des fonctions analogues lui permettant d'étudier les évolutions au voisinage du point d'équilibre .

### **b-Analyse de Floquet :**

Considérons le système général (1) et étudions le voisinage d'une solution périodique  $\vec{x}(t)$  . Posons

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}(t)$$

et supposons  $f(\vec{x}, t)$  continuellement différentiable , nous obtenons :

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\vec{y} + o(\vec{y}) \quad (6)$$

L'analyse de Floquet généralise celle de Liapounov et s'applique si  $A(t)$  est périodique avec une période  $T$  . L'approximation du premier ordre donne l'équation de Floquet :

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\vec{y} \quad ; \quad A(t+T) \equiv A(t) \quad (7)$$

L'intégration de ce système donne

$$\vec{y}(t) = C(t)\vec{y}(0)$$

telle que

$$C(0) = I$$

et

$$\frac{dC}{dt} = A(t)C(t) \quad (8)$$

On pose  $M = C(T)$  appelée "matrice de Floquet" ,ou " matrice monodrome" ou encore " matrice de transition " . Les valeurs propres de  $M$  sont les "multiplicateurs de Floquet" . La matrice  $A(t)$  est périodique donc on a :

$$\forall t : C(t+T) = C(t)M \quad ; \quad \forall m \quad , \quad m \in \mathbb{Z} : C(mT) = M^m \quad (9)$$

$$\det C(t) = \exp\left\{\int_0^t \text{trace}A(u)du\right\} \neq 0$$

Soit  $\vec{V}_j$  un vecteur propre de  $M$ . L'analyse du premier ordre conduit donc à :

$$M\vec{V}_j = \mu_j \vec{V}_j$$

$$\vec{y}(0) = \varepsilon \vec{V}_j \quad \Rightarrow \quad \vec{y}(mT) = \varepsilon \mu_j^m \vec{V}_j \quad (10)$$

D'où les résultats de Floquet :

i-) Si l'une des valeurs propres  $\mu_j$  a un module plus grand que un , la solution périodique  $\vec{X}(t)$  étudiée est instable et même " exponentiellement instable " .

ii-) Si tous les multiplicateurs de Floquet ont un module inférieur à un , la solution  $\vec{X}(t)$  est asymptotiquement stable et même exponentiellement stable .

iii-) Enfin si le plus grand module des valeurs propres est égal à un , ce cas est dit " CAS CRITIQUE " ; la stabilité dépend alors des termes d'ordre supérieur .

Dans le cas où  $A$  est une matrice constante on retrouve les résultats de Liapounov avec  $M = e^{AT}$  et les valeurs  $\lambda_j$  de  $A$  sont liés aux multiplicateurs de Floquet  $\mu_j$  par  $\mu_j = e^{\lambda_j T}$  .

### c-Cas critiques :

L'importance de ces cas vient de l'étude des systèmes conservatifs comme par exemple les systèmes hamiltoniens . En effet pour ces cas conservatifs le produit  $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n$  vaut un , la stabilité exponentielle est alors impossible et les cas critiques sont très fréquents . Pour ces cas critiques la stabilité dépend des termes d'ordre élevé . Un certain nombre de transformations et de simplifications de ces termes ont été étudiées .

## CHAPITRE I

### SYSTEMES DIFFERENTIELS : TRANSFORMATIONS ET SIMPLIFICATIONS . LE THEOREME DE QUASI-RESONANCE .

#### I-1—Simplification des termes du premier ordre :

Floquet a montré qu'une transformation linéaire et périodique appropriée  $\vec{y} \rightarrow \vec{z}$  permet de simplifier l'équation (7) et d'obtenir une équation du premier ordre indépendante du temps :

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = N\vec{z} \quad (11)$$

Si on choisit  $\vec{y}(0) \equiv \vec{z}(0)$  on peut définir la matrice  $N$  par  $e^{NT} = A$  . Les valeurs propres  $\lambda_j$  de  $N$  vérifient la relation  $\mu_j = e^{T\lambda_j}$  . En diagonalisant ou tout au moins en "jordanisant" la matrice  $N$  et en tenant compte des termes d'ordre supérieur l'équation (11) devient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_k}{dt} &= \lambda_k z_k + \delta_k z_{k+1} + g_k(z_1, z_2, \dots, z_n, t) ; \quad k = \{1, 2, \dots, n\} \\ &\text{avec les regles de Jordan :} \\ \delta_n &= 0 ; \quad \lambda_k \neq \lambda_{k+1} \Rightarrow \delta_k = 0 ; \quad \lambda_k = \lambda_{k+1} \Rightarrow \delta_k = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

#### I-2—Périodicité des termes d'ordre supérieur .

A partir d'ici l'analyse supposera que les termes d'ordre supérieur  $g_k$  de (12) sont périodiques par rapport au temps , avec une même période  $T$  , cela se produit surtout dans les deux cas courants suivants :

A ) Le système initial (1) , c'est à dire  $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t)$  est indépendant du temps  $t$  (système autonome) , le voisinage de la solution périodique étudiée  $\vec{x}(t)$  se reproduit avec la période  $T$  de  $\vec{x}(t)$  , période qui est donc celle des  $g_k(z_1, \dots, z_n, t)$  de (12) .

B ) Le système initial (1) n'est pas autonome mais a au moins une période  $P$  sous-multiple de  $T$  , comme par exemple le problème restreint-elliptique des 3 corps .

#### I-3—Théorème de Siegel .

La transformation linéaire périodique de Floquet permet la simplification des termes du premier ordre , est-il possible de faire de même avec les termes d'ordre supérieur ? .

Le théorème de Siegel que nous rappelons ici apporte dans certains cas une réponse positive. En effet , il indique qu'une transformation analytique appropriée  $\vec{z} \rightarrow \vec{u}$  permet de supprimer tous les termes d'ordre supérieur si les conditions suivantes sont satisfaites :

- i-) Les fonctions  $g_k(\vec{z}, t)$  sont analytiques par rapport à  $\vec{z}$  et indépendantes du temps  $t$ .
- ii-) Il existe deux nombres positifs  $\varepsilon$  et  $\mu$  tels que :

$$\left. \begin{array}{l} \forall k = 1, 2, \dots, n \quad ; \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N} : \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \left| \lambda_k - \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j \right| > \varepsilon (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)^{-\mu} \end{array} \right\} \quad (13)$$

Les équations du mouvement sont alors réduites à leur partie principale , avec les  $\lambda_k$  et  $\delta_k$  de (12) :

$$\frac{du_k}{dt} = \lambda_k u_k + \delta_k u_{k+1} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

dont les solutions sont de type :

$$u_k = P_k(t) \exp(\lambda_k t) \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

où  $P_k(t)$  sont des polynômes appropriés .

Remarquons que le théorème de Siegel n'est applicable que rarement , et pas dans les cas critiques car alors l'un au moins des exposants caractéristiques de Liapounov est nul , par exemple  $\mathcal{R}(\lambda_k) = 0$  , dans ce cas  $\bar{\lambda}_k$  est aussi une valeur propre et l'on a :

$$\lambda_k - (2\lambda_k + \bar{\lambda}_k) = 0 \quad (15)$$

ce qui contredit (13) .

#### I-4—THEOREME DE QUASI-RESONANCE [25-27] :

Le théorème de quasi-résonance est très récent et est d'une application beaucoup plus large que le théorème de Siegel . Il suffit que les fonctions  $g_k(\vec{z}, t)$  soient analytiques par rapport à  $\vec{z}$  et  $t$  , ou même décomposables en séries entières de Fourier absolument convergentes pour  $\vec{z}$  suffisamment petit :

$$\left. \begin{array}{l} g_k(\vec{z}, t) = \sum_{\vec{\alpha}, m} G_k(\vec{\alpha}, m) z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_n^{\alpha_n} \exp(m\omega_0 it) \\ \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad ; \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N} \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \geq 2 \quad ; \quad G_k(\vec{\alpha}, m) \in \mathbb{C} \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad ; \quad m \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \quad (16)$$

Si les conditions ci-dessus sont réalisées le théorème de quasi-résonance s'énonce comme suit :

Pour tout scalaire positif  $\varepsilon$  , même très petit , existe une transformation  $\vec{z} \rightarrow \vec{u}$  définie au voisinage de l'origine et telle que :

i-)  $\vec{z}$  et  $\vec{u}$  sont équivalents :

$$\vec{u} - \vec{z} = O(z^2) = O(u^2) \quad (17)$$

ii-) La transformation  $\vec{z} \rightarrow \vec{u}$  peut dépendre du temps et est périodique en fonction de  $t$ .

$$\vec{u}(\vec{z}, t) \equiv \vec{u}(\vec{z}, t + T) \quad (18)$$

Les équations du mouvement de  $\vec{u}$  ont beaucoup moins de termes :

$$\frac{du_k}{dt} = \lambda_k u_k + \delta_k u_{k+1} + j_k(u_1, u_2, \dots, u_n, t) \quad ; \quad \{k = 1, 2, \dots, n\} \quad (19)$$

$$j_k(\vec{u}, t) = \sum_{(\vec{\alpha}, m)} J_k(\vec{\alpha}, m) u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_n^{\alpha_n} \exp(m\omega_0 i t)$$

Les  $\lambda_k$  et  $\delta_k$  sont ceux de (12). Les séries de Fourier  $j_k$  sont sans termes d'ordre 0 ou 1, sont périodiques en fonction de  $t$ , sont absolument convergentes pour  $\|\vec{z}\|$  suffisamment petit et vérifient les conditions suivantes :

Les  $j_k$  n'ont que des termes "quasi-résonants", c'est à dire des termes

$$J_k(\vec{\alpha}, m) u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_n^{\alpha_n} \exp(m\omega_0 i t)$$

pour lesquels :

$$\|\lambda_k - m\omega_0 i - \sum_{c=1}^n \alpha_c \lambda_c\| \leq \varepsilon(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \quad (20)$$

## CHAPITRE II

### APPLICATION DU THEOREME DE QUASI-RESONANCE AUX SYSTEMES HAMILTONIENS

Nous avons vu dans l'introduction que les systèmes critiques sont ceux pour lesquels l'analyse du premier ordre ne permet de conclure ni à la stabilité ni à l'instabilité et que la plupart des systèmes critiques sont hamiltoniens . D'où la nécessité de les étudier et de leur appliquer le théorème de quasi-résonance .

Les équations classiques des systèmes hamiltoniens sont données par :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \quad ; \quad \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \quad (21)$$

où  $H = H(\vec{p}, \vec{q}, t)$  est l'hamiltonien du système étudié  $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_r)$  est le vecteur conjugué ,  $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_r)$  est le vecteur état et  $r$  est le nombre de degré de liberté .

Les suppositions faites au début du chapitre conduisent à un hamiltonien soit autonome ( $H = H(\vec{p}, \vec{q})$ ) soit périodique de période  $P$  ( $H(\vec{p}, \vec{q}, t) \equiv H(\vec{p}, \vec{q}, t + P)$ ) . Nous étudions le voisinage d'une solution périodique  $\vec{p}$  ,  $\vec{q}$  de période  $T$  (multiple de  $P$  dans le second cas) et la première simplification consiste à ramener cette solution à l'origine ce qui introduit la période  $T$  .

#### II-1—REDUCTION A L'ORIGINE

Cette première simplification consiste en une translation de la solution périodique  $\vec{p}(t)$  ,  $\vec{q}(t)$  à l'origine à l'aide de la fonction génératrice suivante :

$$S = S(\vec{p}, \vec{q}_a, t, H_a) = tH_a + \vec{p}\vec{q}(t) + \vec{p}\vec{q}_a - \vec{p}(t)\vec{q}_a + F(t) \quad (22)$$

avec

$$\frac{dF(t)}{dt} = H[\vec{p}(t), \vec{q}(t), t] - \vec{p}(t) \frac{d\vec{q}(t)}{dt} \quad (23)$$

La transformation canonique correspondante est :

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}_a &= \frac{\partial S}{\partial \vec{q}_a} = \vec{p} - \vec{p}(t) \\ \vec{q} &= \frac{\partial S}{\partial \vec{p}} = \vec{q}_a + \vec{q}(t) \\ t_a &= \frac{\partial S}{\partial H_a} = t \\ H &= \frac{\partial S}{\partial t} = H_a + [\vec{p} - \vec{p}(t)] \frac{d\vec{q}(t)}{dt} - \vec{q}_a \frac{d\vec{p}(t)}{dt} + H[\vec{p}(t), \vec{q}(t), t] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$\vec{p}_a$ ,  $\vec{q}_a$  sont les écarts à la solution étudiée et la première simplification est la translation suivante :

$$t_a = t$$

le même paramètre temps .

$$\vec{p}_a = \vec{p} - \vec{p}(t)$$

$$\vec{q}_a = \vec{q} - \vec{q}(t) \quad (25)$$

$$H_a = H_a(\vec{p}_a, \vec{q}_a, t) = \text{le nouvel hamiltonien}$$

$$H_a = H(\vec{p}, \vec{q}, t) - \vec{p}_a \frac{d\vec{q}(t)}{dt} + \vec{q}_a \frac{d\vec{p}(t)}{dt} - H[\vec{p}(t), \vec{q}(t), t]$$

et les équations du mouvement restent des équations hamiltoniennes classiques :

$$\frac{d\vec{q}_a}{dt} = \frac{\partial H_a}{\partial \vec{p}_a} \quad ; \quad \frac{d\vec{p}_a}{dt} = -\frac{\partial H_a}{\partial \vec{q}_a}$$

Le nouvel hamiltonien  $H_a$  ne contient ni les termes d'ordre zéro , ni les termes d'ordre un de l'ancien , il commence par des termes d'ordre deux au moins , de plus il vérifie la périodicité et on peut donc écrire que l'on a :

$$\left. \begin{aligned} H_a(\vec{p}_a, \vec{q}_a, t) &\equiv H_a(\vec{p}_a, \vec{q}_a, t + T) \\ H_a(\vec{p}_a, \vec{q}_a, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} H_{an}(\vec{p}_a, \vec{q}_a, t) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

avec  $H_{an}$  = termes d'ordre n en  $\vec{p}_a$ ,  $\vec{q}_a$  .

## II-2—SIMPLIFICATION DES TERMES DU SECOND ORDRE

Cette seconde simplification est une transformation linéaire et périodique analogue à celle de Floquet entre (7) et (12) . Elle consiste à transformer les variables canoniques  $(\vec{p}_a, \vec{q}_a)$  en nouvelles variables canoniques  $(\vec{p}_b, \vec{q}_b)$  et  $H_a$  en  $H_b$  pour obtenir des termes du second ordre les plus simples possibles . Cependant dans le cas critique qui nous intéresse les valeurs propres  $\lambda_k$  de (12) sont des nombres imaginaires purs et les termes correspondants de l'hamiltonien (termes qui seraient en  $(\lambda_k p_k q_k)$  ) conduiraient à des expressions complexes .

Si nous voulons obtenir une expression des termes du second degré à la fois réelle et la plus simple possible nous sommes conduit à distinguer deux cas :

1-) **Le cas critique singulier** : certains des  $\delta_k$  de (12) sont égaux à 1 . Ce cas trop complexe ne sera pas étudié ici .

2-) **Le cas des hamiltoniens critiques "réguliers"** : tous les  $\delta_k$  de (12) sont nuls (par exemple les valeurs propres  $\lambda_k$  sont toutes différentes) .

La plus simple expression réelle possible des termes du second degré est alors :

$$H_{b2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \omega_j (p_{bj}^2 + q_{bj}^2) \quad (27)$$

Où les  $\omega_j$  sont les pulsations (où "pulsations propres" ; les quantités  $\frac{\omega_j}{2\pi}$  sont les fréquences propres) . Les r paires de valeurs propres  $\pm\lambda_k$  valent  $\pm i\omega_k$  et les multiplicateurs de Floquet vérifient les relations  $\mu_k = e^{i\omega_k T}$  et  $\bar{\mu}_k = e^{-i\omega_k T}$  . La fonction génératrice correspondante s'écrit (avec  $\tau$  en indice supérieur droit pour symbole de la transposition) :

$$S = t_a H_b + \frac{1}{2} \vec{p}_a^{\tau} M_1 \vec{p}_a + \vec{p}_a^{\tau} M_2 \vec{q}_b + \frac{1}{2} \vec{q}_b^{\tau} M_3 \vec{q}_b \quad (28)$$

où  $M_1$  ,  $M_2$  et  $M_3$  sont des matrices réelles d'ordre  $r \times r$  , fonctions du temps t et périodiques de période T .  $M_1$  et  $M_3$  sont de plus symétriques . La transformation canonique est donc :

$$\left. \begin{aligned} t_b &= \frac{\partial S}{\partial H_b} = t_a = t \\ \vec{p}_b &= \frac{\partial S}{\partial \vec{q}_b} = M_2^{\tau}(t) \vec{p}_a + M_3(t) \vec{q}_b \\ \vec{q}_b &= \frac{\partial S}{\partial \vec{p}_a} = M_1(t) \vec{p}_a + M_2(t) \vec{q}_b \\ H_a &= \frac{\partial S}{\partial t_a} = H_b + \frac{1}{2} \vec{p}_a^{\tau} M_1'(t) \vec{p}_a + \vec{p}_a^{\tau} M_2'(t) \vec{q}_b + \frac{1}{2} \vec{q}_b^{\tau} M_3'(t) \vec{q}_b \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

La différence  $H_a - H_b$  ne contient que des termes du second ordre d'où la décomposition des termes d'ordre n :

$$H_b(\vec{p}_b, \vec{q}_b, t) = \sum_{n=2}^{\infty} H_{bn}(\vec{p}_b, \vec{q}_b, t) \quad (30)$$

ce qui entraine pour  $n \geq 3$  :

$$H_{bn}(\vec{p}_b, \vec{q}_b, t) \equiv H_{an}(\vec{p}_a, \vec{q}_a, t)$$

## II-3—APPLICATION DU THEOREME DE QUASI-RESONANCE

Considérons l'hamiltonien  $H_b(\vec{p}_b, \vec{q}_b, t)$  où  $\vec{p}_b$  et  $\vec{q}_b$  sont liés aux  $\vec{p}$  et  $\vec{q}$  par une transformation linéaire, soit :

$$H_b = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \omega_k (p_{bk}^2 + q_{bk}^2) + \text{ordres supérieurs} \quad (31)$$

Les équations correspondantes du premier ordre sont :

$$\frac{dq_{bk}}{dt} = \frac{\partial H_b}{\partial p_{bk}} = \omega_k p_{bk} \quad ; \quad \frac{dp_{bk}}{dt} = -\frac{\partial H_b}{\partial q_{bk}} = -\omega_k q_{bk} \quad (32)$$

Posons :

$$z_{bk} = p_{bk} + iq_{bk} \quad ; \quad \bar{z}_{bk} = p_{bk} - iq_{bk} \quad (33)$$

Donc au premier ordre nous avons :

$$\frac{dz_{bk}}{dt} = i\omega_k z_{bk} \quad ; \quad \frac{d\bar{z}_{bk}}{dt} = -i\omega_k \bar{z}_{bk} \quad (34)$$

Et les  $2r$  paramètres  $z_{bk}$  et  $\bar{z}_{bk}$  jouent le rôle des paramètres  $z_k$  en (12) .

Dans ces conditions, le théorème de quasi-résonance conduit aux vecteurs réels  $\vec{p}_N$ ,  $\vec{q}_N$  équivalents à  $\vec{p}_b$ ,  $\vec{q}_b$  et à l'hamiltonien  $H_N(\vec{p}_N, \vec{q}_N, t)$  tel que :

$$z_{Nk} = p_{Nk} + q_{Nk} \quad ; \quad \bar{z}_{Nk} = p_{Nk} - iq_{Nk} \quad (35)$$

$$H_N(\vec{p}_N, \vec{q}_N, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \omega_k (p_{Nk}^2 + q_{Nk}^2) + \sum_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, m)} K_N(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, m) z_{N1}^{\alpha_1} \dots z_{Nr}^{\alpha_r} \bar{z}_{N1}^{\beta_1} \dots \bar{z}_{Nr}^{\beta_r} \exp(m\omega_0 it) \quad (36)$$

Avec la condition de réalité sur les coefficients  $K_N$  :

$$K_N(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, -m) = \bar{K}_N(\vec{\beta}, \vec{\alpha}, m) \quad (37)$$

Et les conditions de quasi-résonances avec  $\varepsilon$  constante positive que l'on peut choisir .

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \quad ; \quad \vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \sum_{k=1}^r (\alpha_k + \beta_k) = D \geq 3 \quad (38)$$

$$\left| \omega_0 + \sum_{k=1}^r (\alpha_k - \beta_k) \omega_k \right| \leq \varepsilon D$$

Où  $m \in \mathbb{Z}$  et  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

La transformation utilisée dans le théorème de quasi-résonance conduit donc à des hamiltoniens ne comportant plus que des termes quasi-résonants . La plupart des termes initiaux ont disparu .

**Remarquons que :**

1-)  $\sum_{k=1}^r \frac{\omega_k}{2} (p_{Nk}^2 + q_{Nk}^2)$  peut s'écrire  $\sum_{k=1}^r \frac{\omega_k}{2} z_{Nk} \bar{z}_{Nk}$  et l'hamiltonien  $H_N$  peut être considéré comme étant  $H_N(\vec{z}_N, \vec{\bar{z}}_N, t)$  ce qui conduit aux "dérivées formelles" :

$$\frac{dz_{Nk}}{dt} = 2i \frac{\partial H_N}{\partial \bar{z}_{Nk}} \quad ; \quad \frac{d\bar{z}_{Nk}}{dt} = -2i \frac{\partial H_N}{\partial z_{Nk}} \quad (39)$$

2-) Les termes dont le degré  $D$  est inférieur ou égal à  $N$  sont en nombre fini et pour  $\varepsilon$  suffisamment petit ne subsistent que les termes "strictement résonants" qui vérifient :

$$m\omega_0 + \sum_{k=1}^r (\alpha_k - \beta_k) \omega_k = 0 \quad (40)$$

On peut donc , pour un  $\varepsilon$  donné , définir l'entier  $N$  et l'Hamiltonien  $H_N(\vec{p}_N, \vec{q}_N, t)$  de telle façon que le premier terme non strictement résonant soit de degré  $(N + 1)$  .

3-) Notons que l'inégalité  $D \leq N$  , implique non seulement la relation de résonance (40) mais aussi l'indépendance du coefficient  $K_N(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, m)$  vis à vis de  $N$  . Ces coefficients  $K_N$  avec  $D \leq N$  sont la généralisation des coefficients invariants de Birkhoff des systèmes hamiltoniens à un ou deux degrés de liberté .

## II-4—ETUDE DE LA STABILITE ET DE L'INFLUENCE DES TERMES D'ORDRE ELEVE . LES QUASI-INTEGRALES

### II-4-1) Généralisation de la rotation différentielle de Birkhoff :

Si les  $(r + 1)$  pulsations  $\omega_k$  ( $k = 0, 1, \dots, r$ ) ne sont pas liés par une relation rationnelle , alors (40) implique les résultats suivants :

$$m = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_k = \beta_k \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (41)$$

et pour  $D \leq N$  l'hamiltonien  $H_N(\vec{p}_N, \vec{q}_N, t)$  n'a que des termes strictement résonants qui ne dépendent que des  $r$  produits  $z_{Nk} \bar{z}_{Nk}$  c'est à dire des  $r$  sommes  $p_{Nk}^2 + q_{Nk}^2$  . Nous définissons la quantité réelle non négative  $W_{Nk}$  par l'expression :

$$W_{Nk} = z_{Nk} \bar{z}_{Nk} = p_{Nk}^2 + q_{Nk}^2 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (42)$$

Les dérivées formelles (39) deviennent avec  $H_N = H_{NN}(\vec{W}_N) + \text{termes d'ordre } (N+1)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_{Nk}}{dt} &= 2iz_{Nk} \frac{\partial H_{NN}}{\partial W_{Nk}} + (\text{ordre } N) \\ \frac{d\bar{z}_{Nk}}{dt} &= -2i\bar{z}_{Nk} \frac{\partial H_{NN}}{\partial W_{Nk}} + (\text{ordre } N) \\ \frac{dW_{Nk}}{dt} &= \text{ordre}(N+1) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Ainsi les  $W_{Nk}$  varient très lentement et l'on est conduit à la notion de “quasi-intégrale”

**DEFINITION :** On appelle “quasi-intégrale” une suite analogue à  $W_{3k}$ ,  $W_{4k}$ , ...,  $W_{Nk}$ , telle que l'on ait :

$$\left. \begin{aligned} \forall N \quad ; \quad \frac{dW_{Nk}}{dt} &= \text{ordre}(N+1) \\ \text{et } W_{(N+1)k} - W_{Nk} &= \text{ordre}(N+1) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

La “vitesse angulaire” de  $z_{Nk}$  est  $2 \frac{\partial H_{NN}}{\partial W_{Nk}} + \text{ordre}(N+1)$  et c'est aussi une quasi-intégrale dont le terme principal est  $\omega_k$ .

Cette situation conduit à la généralisation de la rotation différentielle de Birkhoff. Les  $r$  vecteurs  $(\vec{p}_{Nk}, \vec{q}_{Nk})$  ont des modules constants et tournent dans leur plan avec des vitesses de rotation constantes et fonctions seulement des  $r$  modules. Cette image est vraie à n'importe quel ordre et conduit à la “stabilité à tous les ordres”.

## II-4-2) Résonances et quasi-intégrales

Les  $(r+1)$  pulsations  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_r$  peuvent être liées par une ou plusieurs relations rationnelles, soit par exemple  $s$  relations rationnelles indépendantes :

$$\vec{c}_j \cdot \vec{\omega} = 0 \quad (45)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \vec{\omega} &= (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_r) \\ j &= (1, 2, \dots, s) \\ \vec{c}_j &= (c_{j0}, c_{j1}, \dots, c_{jr}) \quad : \quad s \text{ vecteurs indépendants} \\ &\text{tous les } c_{jk} \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Dans ces conditions les  $W_{Nk}$  (42) ; (43) ; (44) ne sont généralement plus des quasi-intégrales, mais  $(r-s)$  fonctions linéaires indépendantes de ces  $W_{Nk}$  sont encore quasi-intégrales. Ce sont les fonctions  $S_N$  égales à  $\sum_{k=1}^r e_k W_{Nk}$  et données par :

$$\left. \begin{aligned} \vec{e} &= (0, e_1, e_1, \dots, e_r) \\ \forall j = 1, 2, \dots, s \quad : \quad \vec{c}_j \cdot \vec{e} &= 0 \\ S_N &= \sum e_k W_{Nk} = \sum e_k z_{Nk} \bar{z}_{Nk} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

en effet :

$$\frac{dS_N}{dt} = \sum_{k=1}^r 2ie_k \left[ \bar{z}_{Nk} \frac{\partial H_N}{\partial \bar{z}_{Nk}} - z_{Nk} \frac{\partial H_N}{\partial z_{Nk}} \right] \quad (48)$$

Considérons un terme de  $H_N$ , soit  $Q(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, m) = K(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, m) z_{N1}^{\alpha_1} \dots z_{Nr}^{\alpha_r} \bar{z}_{N1}^{\beta_1} \dots \bar{z}_{Nr}^{\beta_r} \exp(m\omega_0 it)$  ; le terme correspondant de la somme (48) est :

$$2iQ(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, m) \sum_{k=1}^r e_k (\beta_k - \alpha_k) \quad (49)$$

Jusqu'à l'ordre  $N$  ce terme est nul, en effet :

Posons

$$\left. \begin{aligned} \vec{b} &= [m, (\alpha_1 - \beta_1), \dots, (\alpha_r - \beta_r)] \\ &\text{donc avec (40) :} \\ m\omega_0 + \sum (\alpha_k - \beta_k) \omega_k &= \vec{b} \cdot \vec{\omega} = 0 \\ &\text{et, avec (46) :} \\ \vec{b} &\in \text{espace défini par } \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_s \\ &\text{d'où avec (47) :} \\ \sum_{k=1}^r e_k (\beta_k - \alpha_k) &= -\vec{e} \vec{b} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Si l'une des fonctions  $S_N$  peut être construite avec des coefficients  $e_k (k = 1, 2, \dots, r)$ , tous positifs alors les quantités positives et réelles  $W_{Nk}$  vont être "quasi-bornées" et le système aura un autre type de "stabilité à tous les ordres".

Cette analyse souligne l'importance des signes des pulsations propres  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$  définies en (27) et permet de définir les "résonances positives" :

$$\left. \begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{\omega} &= c_0 \omega_0 + c_1 \omega_1 + \dots + c_r \omega_r = 0 \\ &\text{avec :} \\ \vec{c} \neq 0 \quad ; \quad c_0 &\in \mathbb{Z} \quad ; \quad c_1, c_2, \dots, c_r \in \mathbb{N} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Les résonances positives sont les seules qui soient dangereuses pour la stabilité et un système dépourvu de résonance positive possède au moins une quasi-intégrale du type  $\sum e_k W_{Nk} = \sum_k e_k (p_{Nk}^2 + q_{Nk}^2)$  avec des coefficients  $e_k$  tous positifs et avec la stabilité à tous les ordres.

Une autre quasi-intégrale simple et intéressante est la suivante en posant :

$$\begin{aligned} Z_{Nk} &= P_{Nk} + iQ_{Nk} = z_{Nk} e^{-i\omega_k t} \\ \bar{Z}_{Nk} &= P_{Nk} - iQ_{Nk} = \bar{z}_{Nk} e^{i\omega_k t} \end{aligned} \quad (52)$$

La transformation  $(\vec{p}_N, \vec{q}_N)$  à  $(\vec{P}_N, \vec{Q}_N)$  est canonique et conduit à l'hamiltonien  $\mathcal{H}_N$  :

$$\mathcal{H}_N(\vec{P}_N, \vec{Q}_N, t) = H_N(\vec{p}_N, \vec{q}_N, t) - \sum_{k=1}^r \frac{\omega_k}{2} (p_{Nk}^2 + q_{Nk}^2) \quad (53)$$

Le nouvel hamiltonien  $\mathcal{H}_N(\vec{P}_N, \vec{Q}_N, t)$  n'a plus de termes du second ordre mais il conserve les termes d'ordre supérieur de  $H_N(\vec{p}_N, \vec{q}_N, t)$ . Il n'est plus périodique en fonction de  $t$ , mais à cause de (40) et (52), il est indépendant du temps  $t$  jusqu'à l'ordre  $N$ . D'où la suite des quasi-intégrales intéressantes  $\mathcal{H}_N$  car on a :

$$\frac{d\mathcal{H}_N}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_N}{\partial t} = \text{ordre}(N + 1)$$

Nous remarquons que la partie principale des  $\mathcal{H}_N(\vec{P}_N, \vec{Q}_N, t)$  est un polynôme  $h_M(\vec{P}_N, \vec{Q}_N, t)$  réel, homogène de degré  $M$  et indépendant de  $t$  et de  $N$  dès que  $N \geq M$ . On appellera problème principal du mouvement, le problème donné par l'hamiltonien  $h_M(\vec{P}_N, \vec{Q}_N)$ .

Dans la plupart des problèmes, l'entier  $M$  est égal à 4, car les termes en  $z_{Nk}^2 \bar{z}_{Nk}^2$  ou en  $z_{Nk} \bar{z}_{Nk} z_{Nj} \bar{z}_{Nj}$  satisfont toujours à la relation de résonance (40).

### II-4-3—Les principaux types de stabilité et d'instabilité.

Nous pouvons donc dire en conclusion qu'il y a six types principaux de mouvements dans l'étude du voisinage de la solution étudiée :

- A- L'instabilité exponentielle comme dans le cas :  $\frac{dx}{dt} \sim \lambda x$  ;  $\mathcal{R}(\lambda) \geq 0$ .
- B- L'instabilité "puissance n" comme dans le cas  $\frac{dx}{dt} = x^n$  avec  $n \geq 2$ .
- C- La diffusion d'Arnold.
- D- La stabilité simple ou non asymptotique.
- E- La stabilité "puissance n" comme dans le cas :  $\frac{dx}{dt} = -x^n$  ; n impair  $n \geq 3$ .
- F- La stabilité exponentielle :  $\frac{dx}{dt} = \lambda x$  avec  $\mathcal{R}(\lambda) \leq 0$ .

Les types E et F sont impossibles pour les systèmes hamiltoniens et pour tous les systèmes conservatifs. Les types A B C sont instables tandis que les types D E F sont stables mais ils ont des différences importantes.

L'analyse des systèmes au premier ordre conduit ou bien au type A ou bien aux types B C D E (cas critiques), ou bien au type F.

Les types C et D correspondent à la "stabilité à tous les ordres".

L'instabilité "puissance n" apparaît souvent avec l'étude du problème principal et de son hamiltonien  $h_M(\vec{P}_N, \vec{Q}_N)$ . Si ce problème a des solutions asymptotiques il en est de même du problème étudié ce qui provoque une instabilité puissance n avec  $n = M - 1$ .

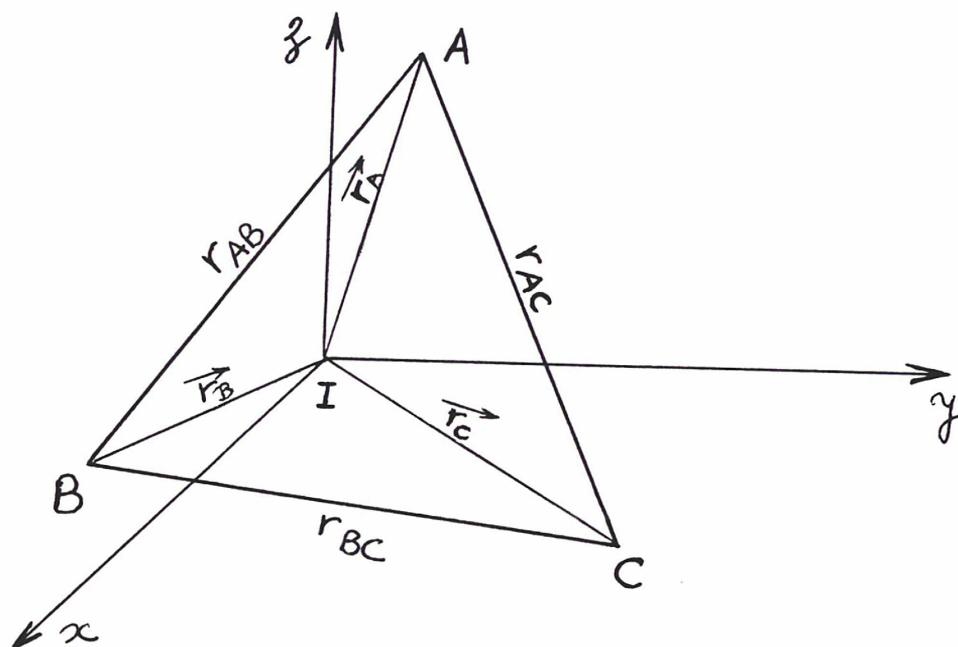
# CHAPITRE III

## LES SOLUTIONS D'EULER ET DE LAGRANGE

### LES RESULTATS CLASSIQUES

#### III-1—Les solutions d'Euler et de Lagrange .

Soient trois points matériels A , B et C de masses respectives  $m_A$  ,  $m_B$  et  $m_C$  (fig : III-1) .



*fig III-1 : Le problème des trois corps.*

Pour ce problème Lagrange a recherché les solutions en mouvement circulaire uniforme autour du centre de masse . Il a trouvé les solutions des deux types suivants :

A -) Les solutions où les trois corps sont aux sommets d'un triangle équilatéral qui tourne dans son plan .

B -) Les solutions où les trois corps tournent en restant constamment alignés à des distances fixes les uns des autres .

Euler a étendu ces solutions à des mouvements képlériens elliptiques , paraboliques ou hyperboliques . La figure des trois corps reste constante au cours du mouvement des trois corps (fig III-2 et fig III-3) .

Ces configurations particulières s'appellent les configurations centrales . Les accélérations y sont proportionnelles aux rayons et dirigées vers le centre de masse ; curieusement les configurations des solutions en triangle équilatéral s'appellent configurations de Lagrange

et celles alignées configurations d'Euler .

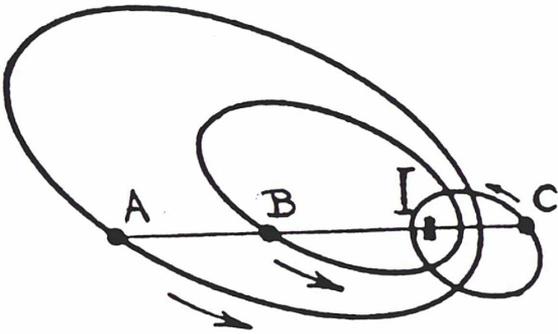


fig III-2 : Mouvement d'Euler

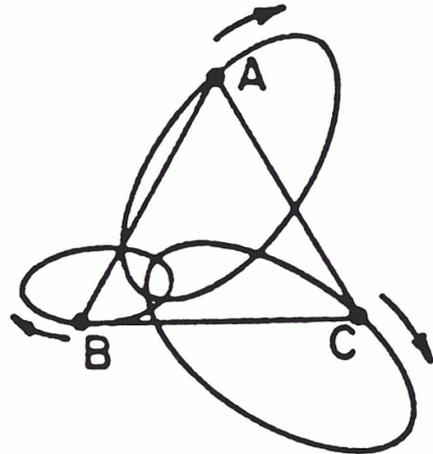


fig III-3 : Mouvement de Lagrange

Si on considère le mouvement de chaque point séparément , on montre que tout se passe comme si ce point était soumis à une attraction Newtonienne venant du centre de masse I . Les trajectoires sont des coniques semblables de foyer commun I . Ces trajectoires sont décrites selon la loi des aires

Dans le cas des corps alignés avec le point B entre les points A et C , on pose :

$$\frac{r_{BC}}{r_{AB}} = x \quad (54)$$

et l'on obtient la relation classique dite "d'équilibre relatif" :

$$(m_A + m_B)x^5 + (3m_A + 2m_B)x^4 + (3m_A + m_B)x^3 - (m_B + 3m_C)x^2 - (2m_B + 3m_C)x - (m_B + m_C) = 0 \quad (55)$$

Cette équation porte le nom d'équation de Lagrange et permet d'obtenir le rapport x . La règle de Descartes montre qu'elle n'admet qu'une seule racine réelle positive quelles que soient les masses  $m_A$  ,  $m_B$  ,  $m_C$  .

### III-2—Stabilité des solutions de Lagrange du problème restreint.

#### Etude du premier ordre

#### III-2-1-Problème restreint circulaire

#### III-2-1-1-Les équations du mouvement :

Les hypothèses habituelles de ce problème sont : On considère deux corps A et B de masses respectives  $m_A$  et  $m_B$ , s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton . Ils décrivent autour de leur centre de masse fixe des mouvements képlériens circulaires . On choisit en général :

$$m_A + m_B = 1 \quad ; \quad G = 1 \quad ; \quad r_{AB} = 1 \quad ; \quad m_A = 1 - \mu \quad ; \quad m_B = \mu \quad (56)$$

On étudie alors le mouvement du point C dont la masse est supposée suffisamment petite pour qu'elle ne perturbe pas le mouvement des corps primaires A et B .

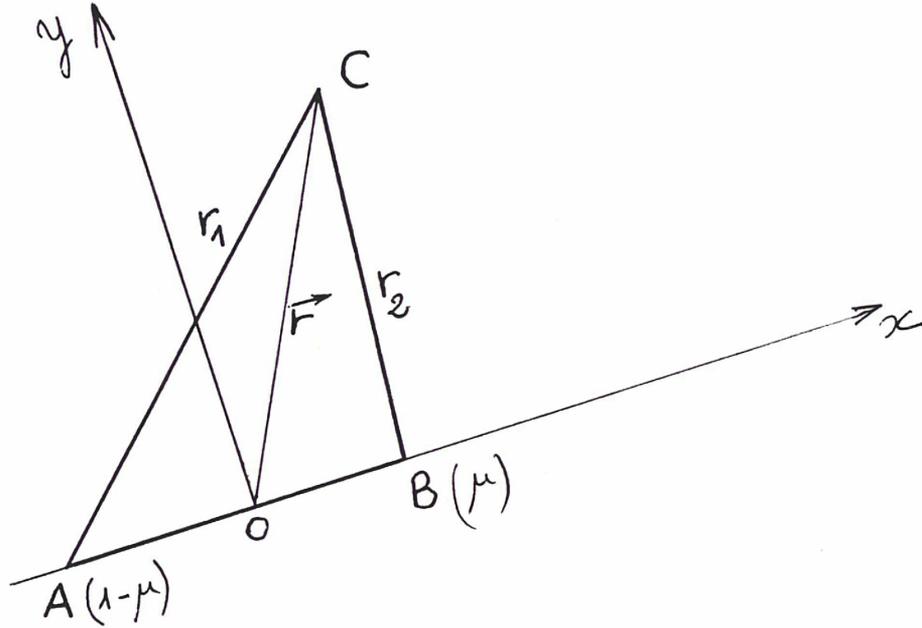


fig III-4 : Les axes tournants du problème restreint circulaire .

Les équations du mouvement du point C sont :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Omega^*}{\partial x}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Omega^*}{\partial y}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial \Omega^*}{\partial z}$$

où

$$\Omega^*(x, y, z) = \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (57)$$

Ces équations donne l'intégrale classique de Jacobi

$$h = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} - \Omega^*(x, y, z) \quad (58)$$

Ceci entraîne que  $\Omega^*(x, y, z) \geq -h$ . Le point  $C$  de masse  $m_c$  se déplace nécessairement dans la région de l'espace où  $\Omega^*(x, y, z) \geq -h$ . Cette région est limitée par la "surface de Hill" donnée par  $\Omega^* = -h$ .

### III-2-1-2—Stabilité au premier ordre

Les solutions de Lagrange et Euler correspondants aux positions d'équilibre relatif du point  $C$  sont représentées dans la figure ci-dessous :

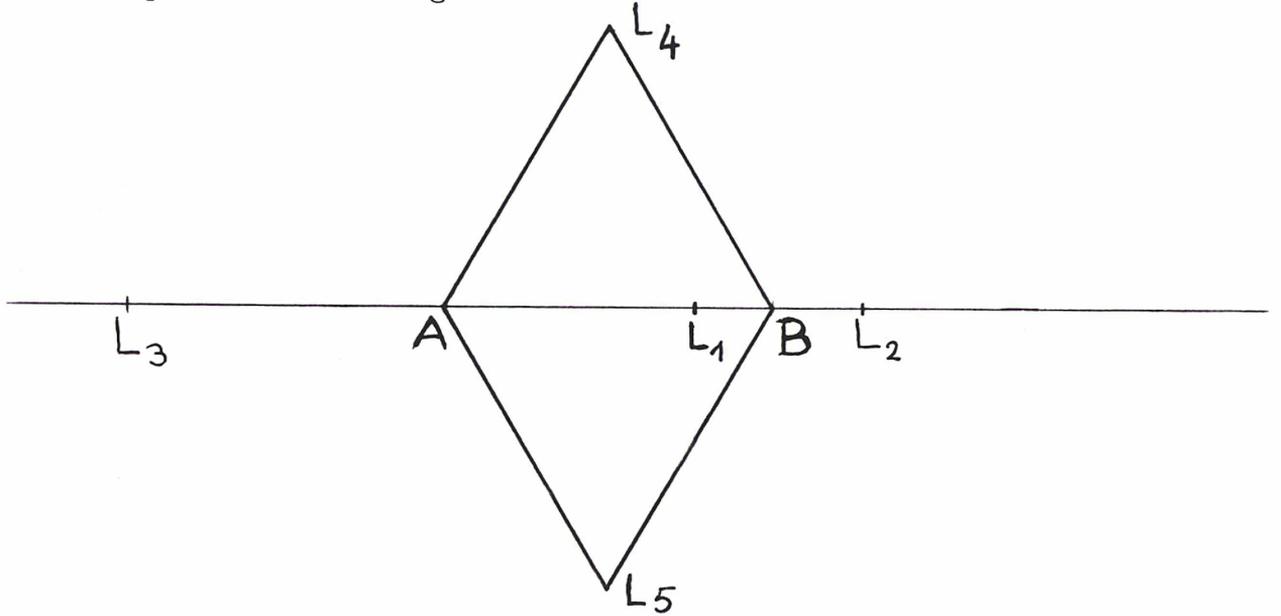


fig III-3 : Les positions d'équilibre relatif.

Pour écrire les équations aux variations, correspondant aux mouvements perturbés au voisinage des points d'équilibre ; on pose :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \\ y &= y_0 + \eta \\ z &= z_0 + \zeta \end{aligned} \quad (59)$$

Les équations aux variations s'écrivent immédiatement :

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\frac{d\eta}{dt} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\frac{d\xi}{dt} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Omega^*}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\Omega^*}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\Omega^*}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\Omega^*}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\Omega^*}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\Omega^*}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\Omega^*}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2\Omega^*}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2\Omega^*}{\partial z^2} \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (60)$$

On vérifie que  $(\frac{\partial^2\Omega^*}{\partial x\partial z})_0 = (\frac{\partial^2\Omega^*}{\partial y\partial z})_0 = 0$  et le système ci-dessus se sépare en deux parties :  $(\xi, \eta)$  d'un côté et  $\zeta$  de l'autre. pour  $\zeta$  l'intégration est immédiate et on obtient  $(\frac{\partial^2\Omega^*}{\partial z^2})_0 \leq 0$

ce qui donne un mouvement sinusoïdal stable . Quand aux mouvements en  $\xi, \eta$  le polynôme caractéristique est :

$$\lambda^4 + \lambda^2(4 - \Omega_{xx}^* - \Omega_{yy}^*) + \Omega_{xx}^* \Omega_{yy}^* - \Omega_{xy}^{*2} = 0 \quad (61)$$

Pour les points  $L_1, L_2$  et  $L_3$  l'équation (61) admet toujours une racine réelle positive et ces points sont exponentiellement instables . Pour les points  $L_4$  et  $L_5$  la discussion est la suivante , l'équation (61) devient au voisinage du point  $L_4$  :

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0 \quad (62)$$

Si  $27\mu(1 - \mu) > 1$  , l'équation (62) a deux racines à partie réelle positive et l'équilibre est instable .

Si  $27\mu(1 - \mu) \leq 1$  , l'équation (62) admet quatre racines à partie réelle nulle , l'équilibre est dit "critique " ou "stable au premier ordre " .

### III-2-2—Problème restreint elliptique

#### Equations du problème :

Pour ce problème nous reprenons les mêmes hypothèses (56) que pour le problème restreint circulaire , mais avec les mouvements des corps primaires  $A$  et  $B$  elliptiques .

Dans les axes "tournants-pulsants" classiques les équations du mouvement sont données en fonction de l'anomalie vraie  $v$  des 2 primaires par :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dv^2} - 2\frac{dy}{dv} &= \frac{1}{1 + e\cos v} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dv^2} + 2\frac{dx}{dv} &= \frac{1}{1 + e\cos v} \frac{\partial \Omega}{\partial y}; \\ \frac{d^2z}{dv^2} + z &= \frac{1}{1 + e\cos v} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \end{aligned} \quad (63)$$

où

$$\Omega(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (64)$$

Etudions les mouvements au voisinage du point  $L_4(\frac{1-2\mu}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$  :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-2\mu}{2} + \xi \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \eta \\ z &= \zeta \end{aligned} \quad (65)$$

Puis , avec la transformation de Deprit [9-12] .

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (66)$$

Où

$$\tan 2\beta = \sqrt{3}(1 - 2\mu) \quad (67)$$

Les équations deviennent au premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dv^2} - 2 \frac{dY}{dv} &= \frac{3(1-N)}{2(1+e\cos v)} X \\ \frac{d^2 Y}{dv^2} + 2 \frac{dX}{dv} &= \frac{3(1+N)}{2(1+e\cos v)} Y \\ \frac{d^2 Z}{dv^2} &= -Z \end{aligned} \quad (68)$$

Où

$$N = \sqrt{1 - 3(\mu - \mu^2)} \in [0; \frac{1}{2}] \quad (69)$$

Ce système a été étudié par plusieurs auteurs . Grebenikov (1964) a proposé une méthode par récurrence en développant la solution suivant les puissances de  $e$  et en prenant des valeurs moyennes des coefficients par rapport à l'anomalie vraie . Danby (1964) a intégré ce système numériquement et a obtenu des courbes de transition qui délimitent les zones de stabilité dans le plan  $(\mu, e)$  [fig(III - 6)] . Ces études numériques ont été reprises et confirmées par Bennett (1965) .

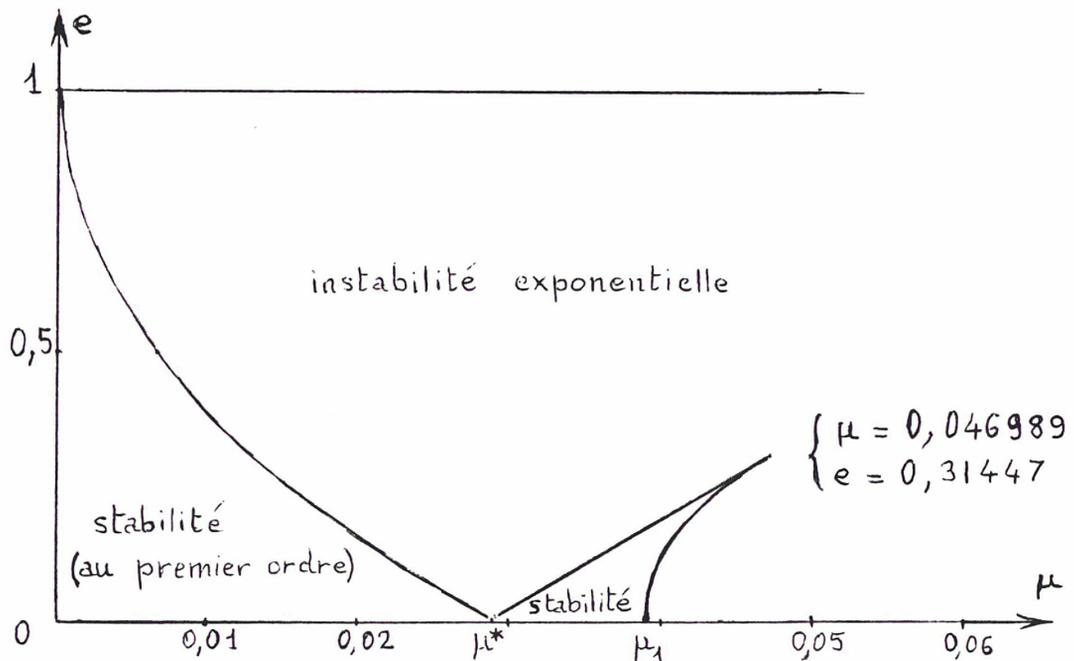


fig III-6—Les zones de stabilité de Danby et Bennett .

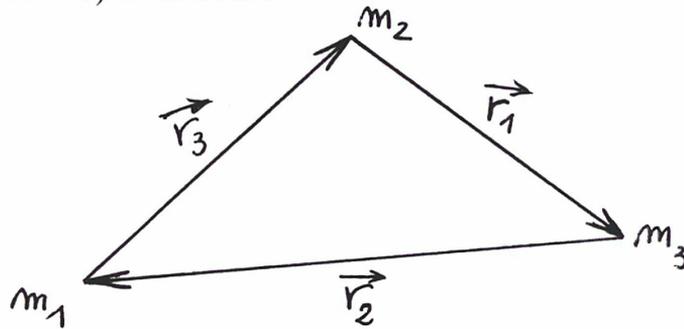
$$\mu^* = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = 0,02859548\dots$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{69}}{9} \right) = 0,038520896\dots$$

### III-2-3—Problème elliptique tri-dimensionnel général

#### Equations du problème .

Les équations classiques du problème des trois corps peuvent s'écrire avec les notations de Lagrange (*fig.III - 7*) ci-dessous :



*fig .III-7 : Les notations de Lagrange .*

$$\frac{d^2 \vec{r}_n}{dt^2} = -\frac{M \vec{r}_n}{r_n^3} + m_n \vec{W} \quad (70)$$

où

$$n = 1, 2, 3 \quad ; \quad M = m_1 + m_2 + m_3$$

et

$$\vec{W} = \sum_{n=1}^3 \frac{\vec{r}_n}{r_n^3} \quad ; \quad \sum_{n=1}^3 \vec{r}_n = \vec{0} \quad (71)$$

Considérons une solution d'Euler-Lagrange avec 3 corps alignés en mouvement elliptique  $\vec{r}_1(t)$  ;  $\vec{r}_2(t)$  et  $\vec{r}_3(t)$  . Pour étudier les solutions voisines  $\vec{r}_1 + \vec{\delta}_1$  ;  $\vec{r}_2 + \vec{\delta}_2$  ;  $\vec{r}_3 + \vec{\delta}_3$  nous décomposons les  $\vec{\delta}_j$  en leurs composantes  $r_j\alpha_j$  ;  $r_j\beta_j$  ;  $r_j\gamma_j$  radiale , circonférentielles et normales ( $r_j\alpha_j = \frac{\vec{r}_j\delta_j}{r_j}$ , etc...)

En introduisant les composantes de  $\vec{\delta}_j$  dans ((70); (71)) et en prenant comme variable indépendante du mouvement l'anomalie vraie  $v$  de la solution d'Euler-Lagrange au lieu du temps  $t$  , les équations peuvent se ramener (en modifiant un peu au besoin le mouvement d'Euler-Lagrange de base et en négligeant le deuxième ordre ) à :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} &= \frac{\beta_1}{\beta_2} = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{m_1 r_1 (r_2^3 - r_3^3)}{m_2 r_2 (r_3^3 - r_1^3)} \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_3} &= \frac{\beta_1}{\beta_3} = \frac{\gamma_1}{\gamma_3} = \frac{m_1 r_1 (r_2^3 - r_3^3)}{m_3 r_3 (r_1^3 - r_2^3)} \end{aligned} \quad (72)$$

$m_2$  est supposée entre  $m_1$  et  $m_3$  ;

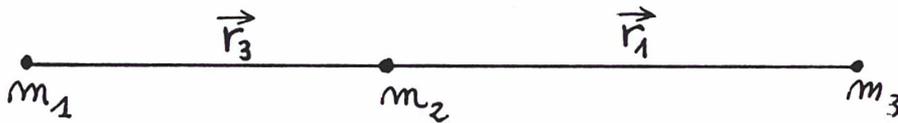


fig . III-8 : Une configuration d'Euler .

Et l'on obtient [23]

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha_n}{dt^2} - 2\frac{d\beta_n}{dt} &= \frac{3 + 2K}{1 + e\cos v} \alpha_n \\ \frac{d^2\beta_n}{dt^2} + 2\frac{d\alpha_n}{dt} &= -\frac{K}{1 + e\cos v} \beta_n \\ \frac{d^2\gamma_n}{dt^2} + \gamma_n &= -\frac{K}{1 + e\cos v} \gamma_n \end{aligned} \quad (73)$$

Avec

$$K = \frac{m_3 r_3 (r_2^3 - r_1^3) + m_1 r_1 (r_2^3 - r_3^3)}{(m_1 + m_3) r_1^2 r_3^2 + m_2 r_2^2 (r_1^2 + r_3^2)}$$

Les masses n'interviennent plus que par le rapport  $K$  qui varie de  $0(m_1 = m_3 = 0 < m_2)$  à  $7(m_1 = m_3 > 0 = m_2)$  aussi bien dans le cas restreint que dans le cas général . Les conclusions du cas restreint peuvent donc s'étendre au cas général . Le cas elliptique restreint a été étudié numériquement par Bennett [4] et conduit toujours à l'instabilité . Les solutions d'Euler-Lagrange avec 3 masses alignées sont donc toujours exponentiellement instables .

Considérons maintenant une solution d'Euler-Lagrange avec 3 corps aux sommets d'un triangle équilatéral . La même décomposition du vecteur  $\delta_j$  conduit alors au premier ordre , avec un mouvement d'Euler-Lagrange de base au besoin un peu modifié , à :

$$\frac{\alpha_1 + i\beta_1}{j^2 m_3 m_1 - j m_2 m_1} = \frac{\alpha_2 + i\beta_2}{m_1 m_2 - j^2 m_3 m_2} = \frac{\alpha_3 + i\beta_3}{j m_3 m_2 - m_1 m_3} \quad (74)$$

avec

$$i = \sqrt{-1} \quad ; \quad j = \sqrt[3]{1} = \frac{i\sqrt{3} - 1}{2}$$

et

$$\frac{d^2 \gamma_k}{dt^2} + \gamma_k = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, 3$$

Les équations du 1<sup>er</sup> ordre du mouvement du problème elliptique général s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dv^2} - 2 \frac{dy}{dv} &= \frac{3(1+N)}{2(1+e \cos v)} x \\ \frac{d^2 y}{dv^2} + 2 \frac{dx}{dv} &= \frac{3(1-N)}{2(1+e \cos v)} y \end{aligned} \quad (75)$$

avec  $x + iy$  proportionnel aux  $\alpha_k + i\beta_k$  avec un rapport approprié [23] , et :

$$N = \frac{(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_1 m_2 - m_1 m_3 - m_2 m_3)^{1/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)} \quad ; \quad N \in [0; 1]$$

Les équations en  $\gamma_k$  sont simples et donnent les solutions sinusoïdales stable :

$$\gamma_k = a_k \sin v + b_k \cos v \quad (76)$$

Les équations en  $x$  et  $y$  sont celles de (68) avec  $x = -Y$  et  $y = X$  , mais  $N$  appartient à  $[0; 1]$  au lieu de  $[0; 1/2]$  . Quand  $N \leq \frac{1}{2}$  les résultats du problème restreint (*fig.III - 6*) peuvent s'étendre au problème général . On peut montrer que si  $N \geq 1/2$  il y a toujours instabilité exponentielle .

Le système (75) est décomposable (voir Chapitre IV ) et nous utiliserons cette propriété pour l'étudier numériquement .

### III-3—STABILITE - ETUDES DES TERMES D'ORDRE SUPERIEUR

#### III-3-1-Problème restreint circulaire plan - Les équations sous forme hamiltonienne .

Nous avons vu dans la section (III-2-1) les équations du problème restreint circulaire linéarisées au voisinage de la position d'équilibre triangulaire  $L_4$  .Si  $27(\mu - \mu^2) \leq 1$  , l'équilibre est dit "critique" ou "stable au premier ordre" d'où la nécessité d'écrire ces équations aux variations à l'ordre supérieur . Ces équations sont :

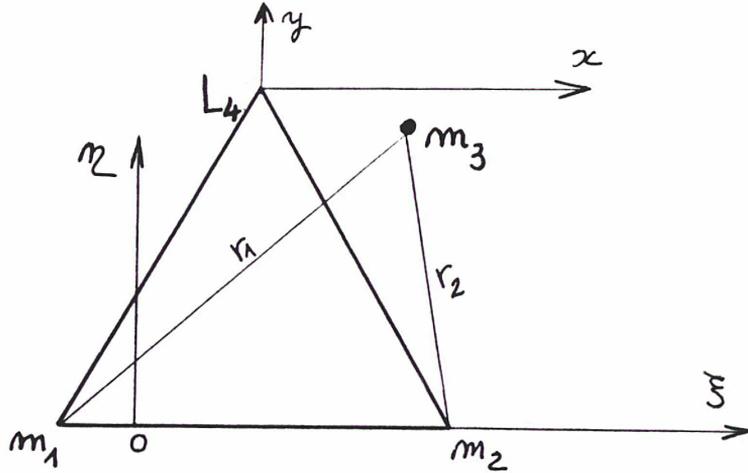


fig III-9 : Le problème restreint circulaire plan. Les axes  $\xi, \eta$  et les axes  $x, y$ .

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - 2 \frac{d\eta}{dt} &= \xi + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} + 2 \frac{d\xi}{dt} &= \eta + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (77)$$

Où  $\Omega(\xi, \eta) = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$

Pour écrire les équations (77) à l'ordre supérieur , il suffit de développer la fonction  $\Omega(\xi, \eta)$  . Le développement de cette fonction au voisinage de la position de Lagrange  $L_4(1/2 - \mu; \sqrt{3}/2)$  est donnée à l'ordre 4 :

On pose (fig. III-9) :

$$\begin{aligned} \xi &= x + \frac{1}{2} - \mu \\ \eta &= y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (78)$$

$$r_1^2 = (x + 1/2)^2 + (y + \sqrt{3}/2)^2 = 1 + x + y\sqrt{3} + x^2 + y^2$$

$$r_2^2 = (x - 1/2)^2 + (y + \sqrt{3}/2)^2 = 1 - x + y\sqrt{3} + x^2 + y^2 \quad (79)$$

Soient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} = 1 - \frac{1}{2}(x + y\sqrt{3}) - \frac{1}{8}(x^2 - 5y^2) + \frac{3}{4}\sqrt{3}xy + \frac{1}{16}(7x^3 - 3\sqrt{3}x^2y - 33xy^2 - 3\sqrt{3}y^3) \\ + \frac{1}{128}(-37x^4 - 100\sqrt{3}x^3y + 246x^2y^2 + 180\sqrt{3}xy^3 + 3y^4) + \mathcal{O}(x^5; y^5) \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_2} = 1 + \frac{1}{2}(x + y\sqrt{3}) - \frac{1}{8}(x^2 - 5y^2) - \frac{3}{4}\sqrt{3}xy + \frac{1}{16}(-7x^3 - 3\sqrt{3}x^2y + 33xy^2 - 3\sqrt{3}y^3) \\ + \frac{1}{128}(-37x^4 + 100\sqrt{3}x^3y + 246x^2y^2 - 180\sqrt{3}xy^3 + 3y^4) + \mathcal{O}(x^5; y^5) \end{aligned} \quad (81)$$

En introduisant ces expressions dans celle de  $\Omega$  on obtient :

$$\Omega(x, y) = \Omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 + \mathcal{O}(x^5, y^5) \quad (82)$$

avec  $\Omega_n$  un polynôme homogène de degré  $n$  en  $(x, y)$ .

Les équations (77) deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= X_1 + X_2 + X_3 + \dots \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots \end{aligned} \quad (83)$$

Où  $X_j$  et  $Y_j$  sont des fonctions homogènes de degré  $j$  en  $(x, y)$  :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{3}{4}[x + \sqrt{3}(1 - 2\mu)y] = x + \frac{\partial\Omega_2}{\partial x} \\ Y_1 &= \frac{3}{4}[\sqrt{3}(1 - 2\mu)x + 3y] = y + \frac{\partial\Omega_2}{\partial y} \\ X_2 &= \frac{\partial\Omega_3}{\partial x}; Y_2 = \frac{\partial\Omega_3}{\partial y}; \text{etc...} \end{aligned} \quad (84)$$

L'étude complète de la stabilité du problème restreint plan à été faite sous forme hamiltonienne par Leontovitch (1961) ; Deprit (1966) ; Markeev (1970) et d'autres . Le mouvement du problème restreint circulaire au voisinage du point équilatéral  $L_4$  est décrit par les équations canoniques associées aux équations aux variations (83) données par l'hamiltonien suivant ; avec  $n$  et  $p$  moments conjugués de  $x$  et  $y$  :

$$H(n, p, x, y) = \frac{n^2 + p^2}{2} + ny - px - \Omega(x, y) \quad (85)$$

d'après la forme de  $\Omega(x, y)$  donnée en (82) on peut écrire :

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \quad (86)$$

avec

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{2}(n^2 + p^2) + ny - px + \frac{1}{8}(x^2 - 5y^2) - Rxy \\ H_3 &= \frac{R\sqrt{3}}{36}x(-7x^2 + 33y^2) + \frac{3\sqrt{3}}{16}y(x^2 + y^2) \\ H_4 &= \frac{1}{128}(37x^4 - 246x^2y^2 - 3y^4) + \frac{Rxy}{24}(25x^2 - 45y^2) \end{aligned} \quad (87)$$

où

$$R = \frac{3\sqrt{3}(1 - 2\mu)}{4}$$

Et les équations hamiltoniennes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial n} = n + y \quad ; \quad \frac{dn}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = p - x \quad ; \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned} \quad (88)$$

Deprit (1966) a obtenu une transformation linéaire canonique normalisante avec la méthode de normalisation de Birkhoff :  $n, p, q, x, y \longrightarrow n_4, p_4, x_4, y_4$  (voir section IV - 2) on pose :

$$n_4 + ix_4 = e^{i\varphi_1} \sqrt{2I_1} \quad ; \quad p_4 + iy_4 = e^{i\varphi_2} \sqrt{2I_2} \quad (89)$$

Soit :

$$H_2 = \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2) \quad (90)$$

Les coordonnées  $(I_i, \varphi_i)$  sont appelées "coordonnées canoniques polaires" . Avec ce changement de coordonnées , la forme quadratique de H s'écrit :

$$H_2 = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2$$

avec

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1+A}{2}} \quad ; \quad \omega_2 = -\sqrt{\frac{1-A}{2}} < 0 \quad ; \quad A = \sqrt{1 - 27(\mu - \mu^2)} \quad (91)$$

Alors que l'hamiltonien H s'écrit :

$$H = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + D_{11} I_1^2 + D_{12} I_1 I_2 + D_{22} I_2^2 + H^*(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \quad (92)$$

avec

$$H^* = \mathcal{O}(I_1 + I_2)^{5/2}$$

### III-3-2—Discussion de la stabilité .

Les équations canoniques du système linéarisé ont la forme :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial q_i}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial p_i}$$

L'équation caractéristique admet des racines imaginaires pures  $\pm i\omega_1$  ;  $\pm i\omega_2$  . La transformation (88)-(92) de Deprit ne peut être faite qu'en cas de non-résonance , c'est à dire si :

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0 \quad (93)$$

avec

$$0 < |k_1| + |k_2| \leq 4 \quad (94)$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont des entiers .

Deprit a étudié la stabilité de ce problème y compris dans les cas résonants ; il a obtenu les conditions de stabilité et les résultats suivants confirmés par les études de Leontovitch et de Markeev :

1-) Il y a pour les rapports  $\mu$  critiques ( $\mu(1 - \mu) \leq 1/27$ ) , deux cas de résonances conduisant à l'instabilité du mouvement :

$$I) \quad \omega_1 + 2\omega_2 = 0$$

$$\text{soit } \mu = \frac{45 - \sqrt{1833}}{90} = 0,0242939$$

$$II) \quad \omega_1 + 3\omega_2 = 0$$

$$\text{soit } \mu = \frac{15 - \sqrt{213}}{30} = 0,0135160$$

2-) Dans le cas limite  $\mu = 0$  le problème se décompose (deux mouvements de deux corps ) et est linéairement instable .

3-) L'autre cas limite  $\mu(1 - \mu) = 1/27$  soit  $\mu = 0,03852\dots$  n'est pas étudié (voir ci-après section IV-5).

4-) Le cas où  $D_{11}\omega_2^2 - D_{12}\omega_1\omega_2 + D_{22}\omega_1^2 = 0$  , c'est à dire  $\mu = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3265 + \sqrt{799780}}{17388}} = 0,01091367$  nécessite une étude au cinquième ordre (étude du deuxième invariant de Birkhoff ) . Le deuxième invariant de Birkhoff n'étant pas nul ce cas est stable .

5-) Les autres valeurs critiques de  $\mu$  conduisent à la stabilité .

### III-3-3—Problème restreint circulaire tri-dimensionnel - "La stabilité effective" .

Dans le cas tri-dimensionnel le nombre de paramètres est trop élevé pour que les “tores d’Arnold” puissent assurer la stabilité : il y a toujours possibilité de “diffusion d’Arnold”.

Cette diffusion a été étudié en [14] dans le cas des points  $L_4$  et  $L_5$  du système Soleil-Jupiter . Une zone significative de l’espace des phases y conduit à des mouvements et des écarts très faibles pendant des milliards d’années .

Ce phénomène n’est pas la stabilité stricte de Liapounov , il a reçu le nom de “stabilité effective” et est lié à la “stabilité à tous les ordres” développée dans le chapitre IV .

**CHAPITRE IV**  
**STABILITE DES SOLUTIONS DE LAGRANGE**  
**LES NOUVEAUX RESULTATS**

**IV-1—Problème restreint circulaire tridimensionnel . Les équations du mouvement .**

Nous étudierons le mouvement jusqu'au 3<sup>e</sup> ordre avec l'hamiltonien autonome développé jusqu'à l'ordre 4 .

On considère le cas de figure ci-dessous (fig .IV-1) où l'origine du repère  $(x, y, z)$  est translaturée au point  $L_4$  afin de simplifier la forme de l'hamiltonien du système .

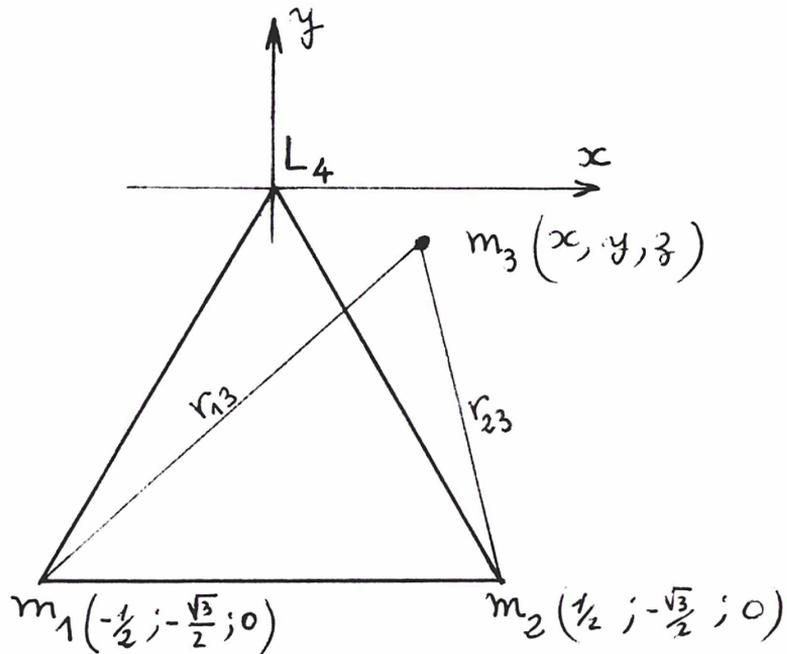


fig .IV-1

Les variables  $x, y, z$  sont les coordonnées de la masse infinitésimale  $m_3$  et  $n, p, q$  sont les paramètres conjugués correspondants . Ils conduisent à l'hamiltonien suivant :

$$H = \frac{1}{2}[(p-x)^2 + (n+y)^2 + q^2 + z^2] - m_1\left(\frac{1}{r_{13}} + \frac{r_{13}^2}{2}\right) - m_2\left(\frac{1}{r_{23}} + \frac{r_{23}^2}{2}\right) \quad (95)$$

où

$$r_{13}^2 = 1 + x + y\sqrt{3} + x^2 + y^2 + z^2$$

$$r_{23}^2 = 1 - x + y\sqrt{3} + x^2 + y^2 + z^2 \quad (96)$$

$$m_1 + m_2 = 1$$

Nous avons , d'après (22) – (26) le nouvel hamiltonien  $H_a$  tel que :

$$H_a = H + 1,5 = H_{a2} + H_{a3} + H_{a4} + \text{ordre}(5) \quad (97)$$

Où les  $H_{an}$  sont des polynômes homogènes de degré n en  $(n,p,q,x,y,z)$  .

Le developpement de H à l'ordre 4 au voisinage de l'origine nous donne en posant  $R = \frac{3\sqrt{3}(m_1-m_2)}{4}$

$$H_{a2} = \frac{1}{2}(n^2 + p^2 + q^2 + z^2) + ny - px + \frac{1}{8}(x^2 - 5y^2) - Rxy \quad (98)$$

$$H_{a3} = \frac{Rx\sqrt{3}}{36}(-7x^2 + 33y^2 - 12z^2) + \frac{3y\sqrt{3}}{16}(x^2 + y^2 - 4z^2) \quad (99)$$

$$H_{a4} = \frac{1}{128}(37x^4 - 246x^2y^2 - 3y^4 + 24x^2z^2 + 264y^2z^2 - 48z^4) + \frac{Rxy}{24}(25x^2 - 45y^2 + 60z^2) \quad (100)$$

La forme quadratique  $H_{a2}$  permet de faire l'étude du problème au premier ordre , en effet ; les équations du mouvement sont alors :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} = n + y = \frac{\partial H_{a2}}{\partial n} & \quad \frac{dn}{dt} = p - \frac{x}{4} + Ry = -\frac{\partial H_{a2}}{\partial x} \\ \frac{dy}{dt} = p - x = \frac{\partial H_{a2}}{\partial p} & \quad \frac{dp}{dt} = -n + Rx + \frac{5}{4}y = -\frac{\partial H_{a2}}{\partial y} \\ \frac{dz}{dt} = q = \frac{\partial H_{a2}}{\partial z} & \quad \frac{dq}{dt} = -z = -\frac{\partial H_{a2}}{\partial z} \end{aligned} \right\} (101)$$

Ces équations s'écrivent sous forme matricielle :

$$\frac{dw}{dt} = Nw \quad (102)$$

avec

$$w = \begin{pmatrix} n \\ p \\ q \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et la matrice  $N$  donnée par :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1/4 & R & 0 \\ -1 & 0 & 0 & R & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (103)$$

Les valeurs propres de  $N$  sont données par l'équation caractéristique :

$$\det(N - \lambda I) = 0 \quad (104)$$

soit

$$(\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{16} - R^2)(\lambda^2 + 1) = 0 \quad (105)$$

La discussion de cette équation est classique . Si nous avons  $R^2 < \frac{23}{16}$  , l'équation admet deux valeurs propres à partie réelle positive et le mouvement est donc exponentiellement instable . Si  $R^2 \geq \frac{23}{16}$  , nous sommes dans le cas critique ; Le développement de l'hamiltonien à l'ordre supérieur est nécessaire .

#### IV-2—LES SIMPLIFICATIONS .

Dans cette première simplification nous cherchons à rendre les termes du second ordre les plus simples possibles en utilisant la transformation linéaire conduisant des variables  $(n, p, q, x, y, z, H_a)$  aux nouvelles variables  $(n_b, p_b, q_b, x_b, y_b, z_b, H_b)$  et telle que

$$H_{an}(n, p, q, x, y, z) \equiv H_{bn}(n_b, p_b, q_b, x_b, y_b, z_b) \quad (106)$$

Nous remarquons que , d'après les équations (101) – (103) , le mouvement du premier ordre peut être décomposé en deux , l'un dans l'espace  $(n, p, x, y)$  et l'autre dans le plan  $(q, z)$  .

Considérons donc la transformation linéaire et canonique :

$$q_b = q \quad ; \quad z_b = z \quad (107)$$

et

$$\begin{pmatrix} n \\ p \\ x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} n_b \\ p_b \\ x_b \\ y_b \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} n_b \\ p_b \\ x_b \\ y_b \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} n \\ p \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (108)$$

La matrice  $B$  est symplectique , c'est à dire qu'elle vérifie la propriété suivante :

$$B^T J B = J \quad \text{ou bien} \quad B^{-1} = -J B^T J \quad (109)$$

où  $B^T$  est la transposée de  $B$  et la matrice

$$J = \begin{pmatrix} O & -I \\ I & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (110)$$

Dans ces conditions , si toutes les valeurs propres sont distinctes , les vecteurs propres correspondants sont aussi distincts et forment une base .

La matrice symplectique  $B$  [27] est :

$$B = \begin{pmatrix} (4k_1^2 - 3)c_1 & (3 - 4k_2^2)c_2 & 4Rk_1c_1 & 4Rk_2c_2 \\ -4Rc_1 & 4Rc_2 & (5k_1 - 4k_1^3)c_1 & (5k_2 - 4k_2^3)c_2 \\ -4Rc_1 & 4Rc_2 & 8k_1c_1 & 8k_2c_2 \\ (4k_1^2 + 3)c_1 & -(3 + 4k_2^2)c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (111)$$

et

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 8k_1c_1 & 0 & -4Rk_1c_1 & (4k_1^3 - 5k_1)c_1 \\ 8k_2c_2 & 0 & -4Rk_2c_2 & (4k_2^3 - 5k_2)c_2 \\ 4Rc_1 & -(4k_1^2 + 3)c_1 & (4k_1^2 - 3)c_1 & -4Rc_1 \\ -4Rc_2 & (3 + 4k_2^2)c_2 & (3 - 4k_2^2)c_2 & 4Rc_2 \end{pmatrix} \quad (112)$$

avec

$$c_1 = [4k_1(2k_1^2 - 1)(4k_1^2 + 3)]^{-1/2}$$

et

$$c_2 = [4k_2(1 - 2k_2^2)(3 + 4k_2^2)]^{-1/2} \quad (113)$$

où  $\pm ik_1$  ;  $\pm ik_2$  sont les valeurs propres de l'équation  $\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{16} - R^2 = 0$  soit

$$k_1 = \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - 27m_1m_2}}{2} \right\}^{1/2}$$

$$k_2 = \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 - 27m_1m_2}}{2} \right\}^{1/2}$$

et

$$m_1 + m_2 = 1 \quad ; \quad k_1^2 + k_2^2 = 1 \quad (114)$$

la forme réelle la plus simple possible pour  $H_{b2}$  est :

$$H_{b2} = \frac{1}{2}[\omega_1(n_b^2 + x_b^2) + \omega_2(p_b^2 + y_b^2) + \omega_3(q_b^2 + z_b^2)] \quad (115)$$

avec nécessairement :  $|\omega_1| = k_1$  ;  $|\omega_2| = k_2$  ;  $|\omega_3| = 1$

En écrivant les identités provenant de la transformation canonique indépendante du temps  $t : (n, p, q, x, y, z, H_a) \longrightarrow (n_b, p_b, q_b, x_b, y_b, z_b, H_b)$  c'est à dire :

$$H_a(n, p, q, x, y, z) \equiv H_b(n_b, p_b, q_b, x_b, y_b, z_b)$$

$$H_{a2}(n, p, q, x, y, z) \equiv H_{b2}(n_b, p_b, q_b, x_b, y_b, z_b) \quad (116)$$

on en déduit que

$$\omega_1 = k_1 \quad ; \quad \omega_2 = -k_2 \quad ; \quad \omega_3 = +1 \quad (117)$$

d'où

$$H_{b2} = \frac{1}{2} [k_1(n_b^2 + x_b^2) - k_2(p_b^2 + y_b^2) + (q_b^2 + z_b^2)] \quad (118)$$

Comme cette étude nécessite aussi les termes des 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> ordre , nous utiliserons en plus de (116) les identités suivantes .

$$H_{b3}(n_b, p_b, q_b, x_b, y_b, z_b) \equiv H_{a3}(x, y, z)$$

$$H_{b4}(n_b, p_b, q_b, x_b, y_b, z_b) \equiv H_{a4}(x, y, z) \quad (119)$$

D'après (107) – (114) la transformation canonique linéaire est

$$\left. \begin{aligned} x &= -4Rc_1n_b + 4Rc_2p_b + 8k_1c_1x_b + 8k_2c_2y_b \\ y &= (4k_1^2 + 3)c_1n_b - (4k_2^2 + 3)c_2p_b \\ z &= z_b \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Il est difficile d'exprimer l'hamiltonien  $H_b$  en fonction de  $(n_b, p_b, q_b, x_b, y_b, z_b)$  . Nous cherchons donc à simplifier le plus possible les formes de  $H_{bn}$  ( $n = 3, 4$ ) . Pour cela nous prendrons une nouvelle transformation de manière à éliminer si possible les termes d'ordre 3 et avoir un hamiltonien  $H_3$  de la forme :

$$H_3 = H_{32} + H_{34} + \text{ordre}(5) \quad (121)$$

Considérons la transformation de Von Zeipel suivante qui fait passer de  $H_b$  à  $H_3$  avec la fonction génératrice  $S$  :

$$S = n_b x_3 + p_b y_3 + q_b z_3 + \varepsilon(n_b, p_b, q_b, x_3, y_3, z_3) \quad (122)$$

où  $\varepsilon(n_b, p_b, q_b, x_3, y_3, z_3)$  est un polynome homogène de degré 3 . On obtient :

$$\left. \begin{aligned} H_b &= H_3 \\ x_b &= x_3 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_b} \quad ; \quad y_b = y_3 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_b} \quad ; \quad z_b = z_3 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_b} \\ \text{et} \\ n_3 &= n_b + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} \quad ; \quad p_3 = p_b + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_3} \quad ; \quad q_3 = q_b + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z_3} \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Les nouvelles variables  $(n_3 \dots z_3)$  ont donc même partie principale que les anciennes  $(n_b \dots z_b)$  et

$$H_{b2} + H_{b3} + H_{b4} = H_{32} + H_{33} + H_{34} + \text{ordre}(5) \quad (124)$$

$H_{b2}$  et  $H_{32}$  ont eux aussi même partie principale et donc même expression ce qui donne :

$$H_{32} = \frac{\omega_1}{2}(n_3^2 + x_3^2) + \frac{\omega_2}{2}(p_3^2 + y_3^2) + \frac{\omega_3}{2}(q_3^2 + z_3^2) \quad (125)$$

Nous voulons simplifier le plus possible le terme  $H_{33}$  qui vaut donc :

$$H_{33} = H_{b2} + H_{b3} - H_{32} + \text{ordre}(4)$$

soit , à l'ordre 4 près :

$$H_{33} = H_{b3} + \omega_1(x_3 \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_b} - n_b \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3}) + \omega_2(y_3 \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_b} - p_b \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_3}) + \omega_3(z_3 \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_b} - q_b \frac{\partial \varepsilon}{\partial z_3}) \quad (126)$$

Cette forme ne se prête pas bien à l'étude , et nous sommes amenés à considérer un changement de variable ; en utilisant les variables complexes  $u_1, u_2, u_3$  définies par :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= n_b + ix_3 & \bar{u}_1 &= n_b - ix_3 \\ u_2 &= p_b + iy_3 & \bar{u}_2 &= p_b - iy_3 \\ u_3 &= q_b + iz_3 & \bar{u}_3 &= q_b - iz_3 \end{aligned} \right\} (127)$$

C'est à dire :

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \frac{i}{2}(\bar{u}_1 - u_1) & n_b &= \frac{1}{2}(u_1 + \bar{u}_1) \\ y_3 &= \frac{i}{2}(\bar{u}_2 - u_2) & p_b &= \frac{1}{2}(u_2 + \bar{u}_2) \\ z_3 &= \frac{i}{2}(\bar{u}_3 - u_3) & q_b &= \frac{1}{2}(u_3 + \bar{u}_3) \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_b} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_1} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_b} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_2} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_b} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_3} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_3} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} &= i(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_1}) & \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_3} &= i(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_2}) & \frac{\partial \varepsilon}{\partial z_3} &= i(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_3} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_3}) \end{aligned} \right\} (128)$$

On peut ensuite exprimer  $x, y, z$  en fonction des  $u_i$  et  $\bar{u}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) .En remplaçant dans (120) on obtient :

$$\left. \begin{aligned} x &= Au_1 + \bar{A}\bar{u}_1 + Bu_2 + \bar{B}\bar{u}_2 + i(A - \bar{A})(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_1}) + i(B - \bar{B})(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_2}) \\ y &= C(u_1 - \bar{u}_1) + D(u_2 + \bar{u}_2) \\ z &= \frac{i}{2}(\bar{u}_3 - u_3) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_3} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_3} \end{aligned} \right\} (129)$$

où

$$\left. \begin{aligned} A &= -2c_1(R + 2k_1i) \\ B &= 2c_2(R - 2k_2i) \\ C &= \frac{c_1}{2}(4k_1^2 + 3) \\ D &= -\frac{c_2}{2}(4k_2^2 + 3) \end{aligned} \right\} (130)$$

Nous avons d'après (126) :

$$H_{33} = H_{b3} + (H_{b2} - H_{32}) + \text{ordre}(4) \quad (131)$$

On en déduit les termes du 3<sup>e</sup> degré provenant de  $H_{b2} - H_{32}$  soit :

$$H_{b2} - H_{32} = \sum_{j=1}^{j=3} i\omega_j (\bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_j} - u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_j}) \quad (131bis)$$

On peut voir que l'on a au deuxième ordre près :

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= i\omega_1 u_1 \quad ; \quad \frac{d\bar{u}_1}{dt} = -i\omega_1 \bar{u}_1 \\ \frac{du_2}{dt} &= i\omega_2 u_2 \quad ; \quad \frac{d\bar{u}_2}{dt} = -i\omega_2 \bar{u}_2 \\ \frac{du_3}{dt} &= i\omega_3 u_3 \quad ; \quad \frac{d\bar{u}_3}{dt} = -i\omega_3 \bar{u}_3 \end{aligned} \quad (132)$$

En remplaçant ces expressions dans (131) , nous obtenons au 4<sup>e</sup> ordre près :

$$H_{b2} - H_{32} = H_{33} - H_{b3} = -\frac{d\varepsilon}{dt} \quad (133)$$

Soit :

$$H_{33} = H_{b3} - \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (134)$$

Pour éliminer les termes de  $H_{33}$  , il suffit d'exprimer  $H_{b3}$  sous la forme suivante grâce à  $H_{b3} = H_{a3}$  et à (99) et (129) - (130) :

$$H_{b3} = \sum_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} K(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) u_1^{\alpha_1} \bar{u}_1^{\beta_1} u_2^{\alpha_2} \bar{u}_2^{\beta_2} u_3^{\alpha_3} \bar{u}_3^{\beta_3} + \text{ordre}(4)$$

avec

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 3 \quad (135)$$

Et nous choisirons la fonction  $\varepsilon$  homogène de degré 3 de manière à avoir  $H_{b3} - \frac{d\varepsilon}{dt} \equiv \text{ordre}(4)$ . Soit donc  $H_{33} \equiv 0$  :

$$\varepsilon(u_i, \bar{u}_i) = \sum_{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})} \frac{K(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) u_1^{\alpha_1} \bar{u}_1^{\beta_1} u_2^{\alpha_2} \bar{u}_2^{\beta_2} u_3^{\alpha_3} \bar{u}_3^{\beta_3}}{i[(\omega_1(\alpha_1 - \beta_1) + \omega_2(\alpha_2 - \beta_2) + \omega_3(\alpha_3 - \beta_3))]} \quad (136)$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_3 + \beta_3 = 3$$

La différence  $\alpha_3 - \beta_3$  étant toujours paire le seul cas de dénominateur nul est obtenu pour  $\omega_1 + 2\omega_2 = 0$ , cas de résonance déjà reconnu comme instable en section (III-3-2)

#### IV-2-1—Détermination des expressions (134) et (136) de $H_{b3}$ et $\varepsilon$ .

$H_{b3}$  est identique à  $H_{a3}$  lequel est donné en (99) soit :

$$H_{a3} = \frac{Rx\sqrt{3}}{36}(-7x^2 + 33y^2 - 12z^2) + \frac{3y\sqrt{3}}{16}(x^2 + y^2 - 4z^2) \quad (137)$$

Pour exprimer (134) c'est à dire les termes du 3<sup>e</sup> degré de  $H_{b3}$  en  $(u_i, \bar{u}_i)$  on peut utiliser la transformation (129) – (130) soit :

$$\left. \begin{aligned} x &= Au_1 + \bar{A}\bar{u}_1 + Bu_2 + \bar{B}\bar{u}_2 + (2^e \text{ ordre}) \\ y &= C(u_1 + \bar{u}_1) + D(u_2 + \bar{u}_2) \\ z &= \frac{i}{2}(\bar{u}_3 - u_3) + (2^e \text{ ordre}) \end{aligned} \right\} (138)$$

avec pour les constantes  $A, B, C, D$  déjà rencontrées en (130) :

$$\left. \begin{aligned} A &= -2c_1(R + 2k_1i) \\ B &= 2c_2(R - 2k_2i) \\ C &= c_1(2k_1^2 + 1, 5) \\ D &= -c_2(2k_2^2 + 1, 5) \end{aligned} \right\}$$

avec

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= [4k_1(2k_1^2 - 1)(4k_1^2 + 3)]^{-1/2} \\ c_2 &= [4k_2(1 - 2k_2^2)(4k_2^2 + 3)]^{-1/2} \end{aligned} \right\} (139)$$

$$k_1 = \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - 27m_1m_2}}{2} \right]^{1/2}$$

$$k_2 = \left[ \frac{1 - \sqrt{1 - 27m_1m_2}}{2} \right]^{1/2}$$

$$R = 3\sqrt{3}(m_1 - m_2)/4$$

$$m_1 + m_2 = 1 \quad ; \quad k_1^2 + k_2^2 = 1$$

D'où finalement l'expression de  $H_{b3}$  :

$$\begin{aligned}
H_{b3} = & \mathcal{A}u_1^3 + \bar{\mathcal{A}}\bar{u}_1^3 + \mathcal{B}u_1^2\bar{u}_1 + \bar{\mathcal{B}}u_1\bar{u}_1^2 + \mathcal{C}u_1^2u_2 + \bar{\mathcal{C}}\bar{u}_1^2\bar{u}_2 + \mathcal{D}u_1\bar{u}_1u_2 + \bar{\mathcal{D}}u_1\bar{u}_1\bar{u}_2 + \\
& + \mathcal{E}\bar{u}_1^2u_2 + \bar{\mathcal{E}}u_1^2\bar{u}_2 + \mathcal{F}u_1u_2^2 + \bar{\mathcal{F}}\bar{u}_1\bar{u}_2^2 + \mathcal{G}\bar{u}_1^2u_2 + \bar{\mathcal{G}}u_1\bar{u}_2^2 + \mathcal{H}u_1u_2\bar{u}_2 + \bar{\mathcal{H}}\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_2 + \\
& + \mathcal{J}u_2^3 + \bar{\mathcal{J}}\bar{u}_2^3 + \mathcal{K}u_2^2\bar{u}_2 + \bar{\mathcal{K}}u_2\bar{u}_2^2 + \\
& + \sqrt{3}\left(\frac{RA}{12} + \frac{3C}{16}\right)[u_1u_3^2 - 2u_1u_3\bar{u}_3 + u_1\bar{u}_3^2] + \\
& + \sqrt{3}\left(\frac{R\bar{A}}{12} + \frac{3C}{16}\right)[\bar{u}_1u_3^2 - 2\bar{u}_1u_3\bar{u}_3 + \bar{u}_1\bar{u}_3^2] + \\
& + \sqrt{3}\left(\frac{RB}{12} + \frac{3D}{16}\right)[u_2u_3^2 - 2u_2u_3\bar{u}_3 + u_2\bar{u}_3^2] + \\
& + \sqrt{3}\left(\frac{R\bar{B}}{12} + \frac{3D}{16}\right)[\bar{u}_2u_3^2 - 2\bar{u}_2u_3\bar{u}_3 + \bar{u}_2\bar{u}_3^2]
\end{aligned} \tag{140}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{R\sqrt{3}}{36}[-7A^3 + 33AC^2] + \frac{3\sqrt{3}}{16}[A^2C + C^3] \\
\mathcal{B} &= \frac{R\sqrt{3}}{36}[-21A^2\bar{A} + 33\bar{A}C^2 + 66AC^2] + \frac{3\sqrt{3}}{16}[A^2C + 2A\bar{A}C + 3C^3] \\
\mathcal{C} &= \frac{R\sqrt{3}}{36}[-21A^2B + 66ACD + 33BC^2] + \frac{3\sqrt{3}}{16}[A^2D + 2ABC + 3C^2D] \\
\mathcal{D} &= \frac{R\sqrt{3}}{36}[-42A\bar{A}B + 66(ACD + \bar{A}CD + BC^2)] + \frac{3\sqrt{3}}{16}[2A\bar{A}D + 2ABC + 2\bar{A}BC + 6C^2D] \\
\mathcal{E} &= \frac{R\sqrt{3}}{36}[-21\bar{A}^2B + 66\bar{A}CD + 33BC^2] + \frac{3\sqrt{3}}{16}[2\bar{A}BC + \bar{A}^2D + 3C^2D] \\
\mathcal{F} &= \frac{R\sqrt{3}}{36}[-21AB^2 + 33AD^2 + 66BCD] + \frac{3\sqrt{3}}{16}[B^2C + 2ABD + 3CD^2] \\
\mathcal{G} &= \frac{R\sqrt{3}}{36}[-21\bar{A}B^2 + 33\bar{A}D^2 + 66BCD] + \frac{3\sqrt{3}}{16}[B^2C + 2\bar{A}BD + 3CD^2] \\
\mathcal{H} &= \frac{R\sqrt{3}}{36}[-42AB\bar{B} + 66(AD^2 + BCD + \bar{B}CD)] + \frac{3\sqrt{3}}{16}[2B\bar{B}C + 2ABD + 6CD^2] \\
\mathcal{J} &= \frac{R\sqrt{3}}{36}[-7B^3 + 33BD^2] + \frac{3\sqrt{3}}{16}[B^2D + D^3] \\
\mathcal{K} &= \frac{R\sqrt{3}}{36}[-21B^2\bar{B} + 66BD^2 + 33\bar{B}D^2] + \frac{3\sqrt{3}}{16}[B^2D + 2B\bar{B}D + 3D^3]
\end{aligned} \tag{141}$$

D'où finalement  $\varepsilon(u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2, u_3, \bar{u}_3)$  d'après l'expression de  $H_{b3}$  et (136) :

$$\begin{aligned}
i\varepsilon = & \frac{Au_1^3 - \bar{A}\bar{u}_1^3}{3\omega_1} + \frac{Bu_1^2\bar{u}_1 - \bar{B}u_1\bar{u}_1^2}{\omega_1} + \frac{Cu_1^2u_2 - \bar{C}\bar{u}_1^2\bar{u}_2}{2\omega_1 + \omega_2} + \frac{Du_1\bar{u}_1u_2 - \bar{D}u_1\bar{u}_1\bar{u}_2}{\omega_2} + \\
& + \frac{\bar{E}u_1^2\bar{u}_2 - E\bar{u}_1^2u_2}{2\omega_1 - \omega_2} + \frac{\mathcal{F}u_1u_2^2 - \bar{\mathcal{F}}\bar{u}_1\bar{u}_2^2}{\omega_1 + 2\omega_2} + \frac{\mathcal{G}\bar{u}_1u_2^2 - \bar{\mathcal{G}}u_1\bar{u}_2^2}{2\omega_2 - \omega_1} + \frac{\mathcal{H}u_1u_2\bar{u}_2 - \bar{\mathcal{H}}\bar{u}_1u_2\bar{u}_2}{\omega_1} + \\
& + \frac{\mathcal{J}u_2^3 - \bar{\mathcal{J}}\bar{u}_2^3}{3\omega_2} + \frac{\mathcal{K}u_2^2\bar{u}_2 - \bar{\mathcal{K}}u_2\bar{u}_2^2}{\omega_2} + \\
& + \sqrt{3}\left(\frac{RA}{12} + \frac{3C}{16}\right)\left[\frac{u_1u_3^2}{2\omega_3 + \omega_1} - \frac{2u_1u_3\bar{u}_3}{\omega_1} + \frac{u_1\bar{u}_3^2}{\omega_1 - 2\omega_3}\right] + \\
& + \sqrt{3}\left(\frac{R\bar{A}}{12} + \frac{3C}{16}\right)\left[\frac{\bar{u}_1u_3^2}{2\omega_3 - \omega_1} + \frac{2u_1u_3\bar{u}_3}{\omega_1} - \frac{\bar{u}_1\bar{u}_3^2}{\omega_1 + 2\omega_3}\right] + \\
& + \sqrt{3}\left(\frac{RB}{12} + \frac{3D}{16}\right)\left[\frac{u_2u_3^2}{\omega_2 + 2\omega_3} - \frac{2u_2u_3\bar{u}_3}{\omega_2} + \frac{u_2\bar{u}_3^2}{\omega_2 - 2\omega_3}\right] + \\
& + \sqrt{3}\left(\frac{R\bar{B}}{12} + \frac{3D}{16}\right)\left[\frac{\bar{u}_2u_3^2}{2\omega_3 - \omega_2} + \frac{2\bar{u}_2u_3\bar{u}_3}{\omega_2} - \frac{\bar{u}_2\bar{u}_3^2}{\omega_2 + 2\omega_3}\right] \tag{142}
\end{aligned}$$

Avec  $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 1$  et  $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \omega_2 < 0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < \omega_1 < 1 = \omega_3$  on constate qu'il n'y a de difficultés dues aux dénominateurs nuls que si  $\omega_1 + 2\omega_2 = 0$  (résonance d'ordre 3) .

#### IV-2-2—Détermination des termes intéressants de $H_{34}$ .

Hormis le cas de résonance  $\omega_1 + 2\omega_2 = 0$  on obtient  $H_{33} = 0$  et donc :

$$\left. \begin{aligned} H_{a2} + H_{a3} + H_{a4} = H_{b2} + H_{b3} + H_{b4} = H_{32} + H_{34} + (5^{\text{e}} \text{ordre}) \\ H_{a2} \equiv H_{b2} \quad ; \quad H_{a3} \equiv H_{b3} \quad ; \quad H_{a4} \equiv H_{b4} \end{aligned} \right\} \tag{143}$$

Donc :

$$\left. \begin{aligned} H_{34} = & (\text{termes d'ordre 5 et plus}) + H_{a4} + \\ & + (\text{termes du 4}^{\text{e}} \text{ordre issus de } H_{a3}) + \\ & + (\text{termes du 4}^{\text{e}} \text{ordre issus de } H_{b2} - H_{32}) \end{aligned} \right\} \tag{144}$$

$H_{34}$  est un polynome homogène de degré 4 en  $n_3, p_3, q_3, x_3, y_3, z_3$  mais on peut aussi bien l'écrire en fonction des variables complexes  $u_i, \bar{u}_i$  avec  $u_1 = n_b + ix_3$  ;  $u_2 = p_b + iy_3$  ;  $u_3 = q_b + iz_3$  et  $n_b = n_3 + 2^{\text{e}} \text{ordre}$  etc....

La simplification suivante  $H_3 \rightarrow H_4$  est analogue à celle (134) , elle portera sur les termes du 4<sup>e</sup> ordre et permettra d'éliminer tous ceux qui ne sont pas résonants sans modifier les autres .

Nous nous intéresserons donc seulement aux termes résonants de  $H_{34}$  et nous écrirons :

$$\left. \begin{aligned} H_{34} = & D_{11}u_1^2\bar{u}_1^2 + D_{12}u_1u_2\bar{u}_1\bar{u}_2 + D_{22}u_2^2\bar{u}_2^2 \\ & + D_{13}u_1\bar{u}_1u_3\bar{u}_3 + D_{23}u_2\bar{u}_2u_3\bar{u}_3 + D_{33}u_3^2\bar{u}_3^2 \\ & + Eu_1u_2^3 + \bar{E}\bar{u}_1\bar{u}_2^3 \\ & + \text{termes non résonants} + (5^{\text{e}} \text{ordre}) \end{aligned} \right\} \tag{145}$$

Les termes  $Eu_1u_2^3$  et  $\bar{E}\bar{u}_1\bar{u}_2^3$  ne subsistent que lors de la résonance d'ordre 4 suivante:

$$\omega_1 + 3\omega_2 = 0$$

Nous poserons :

Termes du 4<sup>e</sup> ordre issus de  $H_{b2} - H_{32} = h_{24}$

Termes du 4<sup>e</sup> ordre issus de  $H_{a3} = \varphi$ .

Cependant :

$$\begin{aligned} H_{b2} &= \frac{1}{2}[\omega_1(n_b^2 + x_b^2) + \omega_2(p_b^2 + y_b^2) + \omega_3(q_b^2 + z_b^2)] \\ H_{32} &= \frac{1}{2}[\omega_1(n_3^2 + x_3^2) + \omega_2(p_3^2 + y_3^2) + \omega_3(q_3^2 + z_3^2)] \\ u_1 &= n_b + ix_3 \quad ; \quad n_3 = n_b + i\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial u_1} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial \bar{u}_1}\right) \quad ; \quad x_b = x_3 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial u_1} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial \bar{u}_1} \\ u_2 &= p_b + iy_3 \quad ; \quad p_3 = p_b + i\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial u_2} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial \bar{u}_2}\right) \quad ; \quad y_b = y_3 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial u_2} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial \bar{u}_2} \\ u_3 &= q_b + iz_3 \quad ; \quad q_3 = q_b + i\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial u_3} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial \bar{u}_3}\right) \quad ; \quad z_b = z_3 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial u_3} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial \bar{u}_3} \end{aligned}$$

Donc  $h_{24}$  est donnée par :

$$h_{24} = \sum_{j=1}^3 \omega_j \left[ \left( \frac{\partial\varepsilon}{\partial u_j} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varepsilon}{\partial \bar{u}_j} \right)^2 \right] \quad (146)$$

De même pour  $\varphi$ , c'est à dire pour les termes du 4<sup>e</sup> ordre issus de  $H_{a3}$ , il nous faut considérer (137) et (138) avec les termes du 2<sup>e</sup> ordre négligés dans (138) soit avec (129) :

$$\begin{aligned} x &= Au_1 + \bar{A}\bar{u}_1 + Bu_2 + \bar{B}\bar{u}_2 + \delta x \\ z &= \frac{i}{2}(\bar{u}_3 - u_3) + \delta z \\ \delta x &= i(A - \bar{A})\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial u_1} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial \bar{u}_1}\right) + i(B - \bar{B})\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial u_2} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial \bar{u}_2}\right) \\ \delta z &= \frac{\partial\varepsilon}{\partial u_3} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial \bar{u}_3} \\ \text{et donc } \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \end{aligned} \quad (147)$$

avec :

$$\varphi_1 = \delta x \left\{ \frac{R\sqrt{3}}{12}[-7x^2 + 11y^2 - 4z^2] + \frac{3\sqrt{3}}{8}xy \right\}$$

et

$$\varphi_2 = -z\delta z \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y \right\} \quad (147)$$

#### IV-2-2-1 détermination de $h_{24}$ :

On en déduit donc d'après l'expression de  $\varepsilon$  (142) la forme de  $h_{24}$  :

$$\begin{aligned} h_{24} = & \alpha_{11}u_1^2\bar{u}_1^2 + \alpha_{22}u_2^2\bar{u}_2^2 + \alpha_{33}u_3^2\bar{u}_3^2 \\ & + \alpha_{12}u_1\bar{u}_1u_2\bar{u}_2 + \alpha_{13}u_1\bar{u}_1u_3\bar{u}_3 + \alpha_{23}u_2\bar{u}_2u_3\bar{u}_3 \\ & + \beta u_1u_2^3 + \bar{\beta}\bar{u}_1\bar{u}_2^3 \end{aligned} \quad (148)$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = & \frac{2}{\omega_1}[(A\bar{B} + \bar{A}B) - 2(B^2 + \bar{B}^2)] - \frac{D^2 + \bar{D}^2}{\omega_2} \\ & + \frac{2\omega_2}{4\omega_1^2 - \omega_2^2}(C\mathcal{E} + \bar{C}\bar{\mathcal{E}}) \\ \alpha_{22} = & -\frac{(\mathcal{H}^2 + \bar{\mathcal{H}}^2)}{\omega_1} + \frac{2}{\omega_2}[(\mathcal{J}\bar{\mathcal{K}} + \bar{\mathcal{J}}\mathcal{K}) - 2(\mathcal{K}^2 + \bar{\mathcal{K}}^2)] \\ \alpha_{33} = & -\left(\frac{1,5\omega_1}{\omega_1^2 - 4\omega_3^2} + \frac{3}{\omega_1}\right)\left\{\left(\frac{RA}{6} + \frac{3C}{8}\right)^2 + \left(\frac{R\bar{A}}{6} + \frac{3\bar{C}}{8}\right)^2\right\} \\ \alpha_{12} = & \frac{4}{\omega_1}\left\{- (B\mathcal{H} + \bar{B}\bar{\mathcal{H}}) + \frac{\omega_2}{(\omega_1 + 2\omega_2)}(\mathcal{F}\bar{\mathcal{H}} + \bar{\mathcal{F}}\mathcal{H}) + \frac{\omega_2}{(\omega_1 - 2\omega_2)}(\mathcal{H}\mathcal{G} + \bar{\mathcal{H}}\bar{\mathcal{G}})\right\} + \\ & + \frac{4}{\omega_2}\left\{- (D\mathcal{K} + \bar{D}\bar{\mathcal{K}}) + \frac{\omega_1}{(\omega_1 + 2\omega_2)}(C\bar{D} + \bar{C}D) + \frac{\omega_1}{\omega_2 - 2\omega_1}(D\bar{\mathcal{E}} + \bar{D}\mathcal{E})\right\} \\ \alpha_{13} = & \frac{4\sqrt{3}}{\omega_1}\left[B\left(\frac{RA}{6} + \frac{3C}{8}\right) + \bar{B}\left(\frac{R\bar{A}}{6} + \frac{3\bar{C}}{8}\right)\right] \\ & + \frac{2\sqrt{3}}{\omega_2}\left[D\left(\frac{RB}{6} + \frac{3D}{8}\right) + \bar{D}\left(\frac{R\bar{B}}{6} + \frac{3\bar{D}}{8}\right)\right] \\ \alpha_{23} = & \frac{2\sqrt{3}}{\omega_1}\left[\mathcal{H}\left(\frac{RA}{6} + \frac{3C}{8}\right) + \bar{\mathcal{H}}\left(\frac{R\bar{A}}{6} + \frac{3\bar{C}}{8}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{\omega_2}\left[D\left(\frac{RB}{6} + \frac{3D}{8}\right) + \bar{D}\left(\frac{R\bar{B}}{6} + \frac{3\bar{D}}{8}\right)\right]\right] \\ \beta = & -\frac{4\omega_1}{(\omega_1 + 2\omega_2)(\omega_2 + 2\omega_1)}C\mathcal{F} + \frac{2\omega_1}{\omega_2(\omega_1 - 2\omega_2)}D\mathcal{G} - \frac{4}{(\omega_1 + 2\omega_2)}\mathcal{J}\mathcal{F} - \frac{2}{\omega_1}\mathcal{H}\mathcal{K} \end{aligned} \quad (149)$$

#### IV-2-2-2—Détermination de $\varphi_1$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & l_{11}u_1^2\bar{u}_1^2 + l_{22}u_2^2\bar{u}_2^2 + l_{33}u_3^2\bar{u}_3^2 + l_{12}u_1\bar{u}_1u_2\bar{u}_2 \\ & + l_{13}u_1\bar{u}_1u_3\bar{u}_3 + l_{23}u_2\bar{u}_2u_3\bar{u}_3 + m u_1u_2^3 + \bar{m}\bar{u}_1\bar{u}_2^3 \end{aligned} \quad (151)$$

avec :

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \frac{8k_1c_1}{i\omega_1} \left\{ \bar{\varphi}_{11}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + 2\varphi_{1\bar{1}}(\mathcal{B} - \bar{\mathcal{B}}) - \varphi_{11}(\bar{\mathcal{A}} + \bar{\mathcal{B}}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{8k_2c_2}{i} \left\{ \bar{\varphi}_{11} \left( \frac{\mathcal{C}}{\omega_2 + 2\omega_1} + \frac{\bar{\mathcal{E}}}{2\omega_1 - \omega_2} \right) + \varphi_{1\bar{1}} \left( \frac{\mathcal{D} - \bar{\mathcal{D}}}{\omega_2} \right) - \varphi_{11} \left( \frac{\bar{\mathcal{C}}}{\omega_2 + 2\omega_1} + \frac{\mathcal{E}}{2\omega_1 - \omega_2} \right) \right\} \right\} \\
l_{22} &= \frac{8k_1c_1}{i} \left\{ \bar{\varphi}_{22} \left( \frac{\mathcal{F}}{2\omega_2 + \omega_1} + \frac{\mathcal{G}}{2\omega_2 - \omega_1} \right) + \varphi_{2\bar{2}} \left( \frac{\mathcal{H} - \bar{\mathcal{H}}}{\omega_1} \right) - \varphi_{22} \left( \frac{\bar{\mathcal{F}}}{2\omega_2 + \omega_1} + \frac{\bar{\mathcal{G}}}{2\omega_2 - \omega_1} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{8k_2c_2}{i\omega_2} \left\{ \bar{\varphi}_{22}(\mathcal{J} + \mathcal{K}) + 2\varphi_{2\bar{2}}(\mathcal{K} - \bar{\mathcal{K}}) - \varphi_{22}(\bar{\mathcal{J}} + \bar{\mathcal{K}}) \right\} \\
l_{33} &= \frac{8k_1c_1\sqrt{3}}{i} \left\{ \left( \frac{RA}{12} + \frac{3C}{16} \right) \left( \frac{\bar{\varphi}_{33}}{2\omega_3 + \omega_1} - \frac{\varphi_{33}}{2\omega_3 - \omega_1} - \frac{2\varphi_{3\bar{3}}}{\omega_1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{R\bar{A}}{12} + \frac{3C}{16} \right) \left( \frac{\bar{\varphi}_{33}}{2\omega_3 - \omega_1} - \frac{\varphi_{33}}{2\omega_3 + \omega_1} + \frac{2\varphi_{3\bar{3}}}{\omega_1} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{8k_2c_2\sqrt{3}}{i} \left\{ \left( \frac{RB}{12} + \frac{3D}{16} \right) \left( \frac{\bar{\varphi}_{33}}{2\omega_3 + \omega_2} - \frac{\varphi_{33}}{2\omega_3 - \omega_2} - \frac{2\varphi_{3\bar{3}}}{\omega_2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{R\bar{B}}{12} + \frac{3D}{16} \right) \left( \frac{\bar{\varphi}_{33}}{2\omega_3 - \omega_2} - \frac{\varphi_{33}}{2\omega_3 + \omega_2} + \frac{2\varphi_{3\bar{3}}}{\omega_2} \right) \right\} \\
l_{12} &= \frac{8k_1c_1}{i} \left\{ \frac{2\varphi_{2\bar{2}}}{\omega_1}(\mathcal{B} - \bar{\mathcal{B}}) + \bar{\varphi}_{12} \left( \frac{2\mathcal{C}}{\omega_2 + 2\omega_1} + \frac{\mathcal{D}}{\omega_2} \right) - \varphi_{12} \left( \frac{2\bar{\mathcal{C}}}{\omega_2 + 2\omega_1} + \frac{\bar{\mathcal{D}}}{\omega_2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \varphi_{1\bar{2}} \left( \frac{\mathcal{D}}{\omega_2} + \frac{2\mathcal{E}}{\omega_2 - 2\omega_1} \right) - \bar{\varphi}_{1\bar{2}} \left( \frac{\bar{\mathcal{D}}}{\omega_2} + \frac{2\bar{\mathcal{E}}}{2\omega_1 - 2\omega_2} \right) + \varphi_{1\bar{1}} \left( \frac{\mathcal{H} - \bar{\mathcal{H}}}{\omega_1} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{8k_2c_2}{i} \left\{ \varphi_{2\bar{2}}(\mathcal{D} - \bar{\mathcal{D}}) + \bar{\varphi}_{12} \left( \frac{2\mathcal{F}}{2\omega_2 + \omega_1} + \frac{\mathcal{H}}{\omega_1} \right) - \varphi_{12} \left( \frac{2\bar{\mathcal{F}}}{2\omega_2 + \omega_1} + \frac{\bar{\mathcal{H}}}{\omega_1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \varphi_{1\bar{2}} \left( \frac{2\mathcal{G}}{2\omega_2 - \omega_1} - \frac{\bar{\mathcal{H}}}{\omega_1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \bar{\varphi}_{1\bar{2}} \left( \frac{\bar{\mathcal{H}}}{\omega_1} - \frac{2\mathcal{G}}{2\omega_2 - \omega_1} \right) + \varphi_{1\bar{1}} \left( \frac{2\mathcal{K}}{\omega_2} - \frac{2\bar{\mathcal{K}}}{\omega_2} \right) \right\} \\
l_{13} &= \frac{16k_1c_1}{i\omega_1} \left\{ \varphi_{3\bar{3}}(\mathcal{B} - \bar{\mathcal{B}}) + \varphi_{1\bar{1}} \frac{R\sqrt{3}(\bar{\mathcal{A}} - \bar{\mathcal{A}})}{12} \right\} \\
&\quad + \frac{8k_2c_2}{i\omega_2} \left\{ \varphi_{1\bar{1}} \frac{R\sqrt{3}(\bar{\mathcal{B}} - \bar{\mathcal{B}})}{6} + \varphi_{3\bar{3}}(\mathcal{D} - \bar{\mathcal{D}}) \right\} \\
l_{23} &= \frac{8k_1c_1}{i\omega_1} \left\{ \varphi_{3\bar{3}}(\mathcal{H} - \bar{\mathcal{H}}) + \varphi_{2\bar{2}} \frac{R\sqrt{3}(\bar{\mathcal{A}} - \bar{\mathcal{A}})}{6} \right\} \\
&\quad + \frac{8k_2c_2}{i\omega_2} \left\{ \varphi_{2\bar{2}} \frac{R\sqrt{3}(\bar{\mathcal{B}} - \bar{\mathcal{B}})}{6} + 2\varphi_{3\bar{3}}(\mathcal{K} - \bar{\mathcal{K}}) \right\} \\
m &= \frac{8k_1c_1}{i} \left\{ \varphi_{22} \left( \frac{2\mathcal{C}}{\omega_2 + 2\omega_1} + \frac{\mathcal{D}}{\omega_2} \right) + \varphi_{12} \left( \frac{\mathcal{F}}{\omega_1 + 2\omega_2} + \frac{\mathcal{G}}{2\omega_2 - \omega_1} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{8k_2c_2}{i} \left\{ \varphi_{22} \left( \frac{\mathcal{H}}{\omega_1} + \frac{2\mathcal{F}}{2\omega_2 + \omega_1} \right) + \varphi_{12} \left( \frac{\mathcal{J} + \mathcal{K}}{\omega_2} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{152}$$

(152)

(153)

Où on a posé :

$$\begin{aligned}
\varphi_{11} &= \frac{R\sqrt{3}}{12}(-7A^2 + 11C^2) + \frac{3\sqrt{3}}{8}AC \\
\varphi_{1\bar{1}} &= \frac{R\sqrt{3}}{6}(-7A\bar{A} + 11C^2) + \frac{3\sqrt{3}}{8}(AC + \bar{A}C) \\
\varphi_{22} &= \frac{R\sqrt{3}}{12}(-7B^2 + 11D^2) + \frac{3\sqrt{3}}{8}BD \\
\varphi_{2\bar{2}} &= \frac{R\sqrt{3}}{6}(-7B\bar{B} + 11D^2) + \frac{3\sqrt{3}}{8}(BD + \bar{B}D) \\
\varphi_{12} &= \frac{R\sqrt{3}}{6}(-7AB + 11CD) + \frac{3\sqrt{3}}{8}(AD + BC) \\
\varphi_{1\bar{2}} &= \frac{R\sqrt{3}}{6}(-7\bar{A}B + 11CD) + \frac{3\sqrt{3}}{8}(\bar{A}D + BC) \\
\varphi_{33} &= \varphi_{\bar{3}\bar{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{12} \\
\varphi_{3\bar{3}} &= -\frac{R\sqrt{3}}{6}
\end{aligned} \tag{154}$$

#### IV-2-2-3-Détermination de $\varphi_2$ :

Nous avons :

$$\varphi_2 = \frac{i}{2}(u_3 - \bar{u}_3)\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_3} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_3}\right)\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y\right]$$

On trouve d'après les expressions de  $\varepsilon$ ,  $x$  et  $y$  données dans (142) et (129) :

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \frac{48\omega_3}{\omega_1^2 - 4\omega_3^2}\left(\frac{RA}{6} + \frac{3C}{8}\right)\left(\frac{R\bar{A}}{8} + \frac{3C}{8}\right)u_1\bar{u}_1u_3\bar{u}_3 + \\
&+ \frac{48\omega_3}{\omega_2^2 - 4\omega_3^2}\left(\frac{RB}{6} + \frac{3D}{8}\right)\left(\frac{R\bar{B}}{8} + \frac{3D}{8}\right)u_2\bar{u}_2u_3\bar{u}_3
\end{aligned} \tag{155}$$

soit

$$\varphi_2 = d_{13}u_1\bar{u}_1u_3\bar{u}_3 + d_{23}u_2\bar{u}_2u_3\bar{u}_3$$

#### IV-2-3-Détermination des termes venant de $H_{a4}$ :

L'expression de  $H_{a4}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
H_{a4} &= g_{11}u_1^2\bar{u}_1^2 + g_{22}u_2^2\bar{u}_2^2 + g_{12}u_1\bar{u}_1u_2\bar{u}_2 + g_{33}u_3^2\bar{u}_3^2 + g_{13}u_1\bar{u}_1u_3\bar{u}_3 + \\
&+ g_{23}u_2\bar{u}_2u_3\bar{u}_3 + g' u_1u_2^3 + \bar{g}' \bar{u}_1\bar{u}_2^3
\end{aligned} \tag{156}$$

avec :

$$g_{11} = \frac{25R}{8}A\bar{A}C(A + \bar{A}) - \frac{45R}{8}C^3(A + \bar{A})$$

$$-\frac{6}{128}[(-37A^2\bar{A}^2 + 3C^4) + 41C^2(A^2 + \bar{A}^2 + 4A\bar{A})] \quad (157)$$

$$g_{22} = \frac{25R}{8}B\bar{B}D(B + \bar{B}) - \frac{45R}{8}D^3(B + \bar{B}) - \quad (158)$$

$$-\frac{6}{128}[(-37B^2\bar{B}^2 + 3D^4) + 41D^2(B^2 + \bar{B}^2 + 4B\bar{B})]$$

$$g_{12} = \frac{25R}{4}B\bar{B}C(A + \bar{A}) - \frac{45R}{4}[CD^2(A + \bar{A}) + C^2D(B + \bar{B})] -$$

$$-\frac{24}{128}[(-37A\bar{A}B\bar{B} + 3C^2D^2) + 41(A\bar{A}D^2 + B\bar{B}C^2) +$$

$$+ 41BCD(A + \bar{A}) + 41\bar{A}CD(B + \bar{B})] \quad (159)$$

$$g_{33} = -\frac{9}{64} \quad (160)$$

$$g_{13} = \frac{5R}{4}C(A + \bar{A}) + \frac{3}{16}(A\bar{A} + 11C^2) \quad (161)$$

$$g_{23} = \frac{5R}{4}D(B + \bar{B}) + \frac{3}{16}(B\bar{B} + 11D^2) \quad (162)$$

$$g' = \frac{25R}{4}(B^3C + 3AB^2D) - \frac{45}{24}RD^2(AD + 3BC) -$$

$$-\frac{1}{32}\{-37AB^3 + 3CD^3 + 123BD(AD + BC)\} \quad (163)$$

D'où finalement l'expression des termes résonants de  $H_{34}$  :

$$H_{34} = D_{11}u_1^2\bar{u}_1^2 + D_{22}u_2^2\bar{u}_2^2 + D_{12}u_1\bar{u}_1u_2\bar{u}_2 + D_{13}u_1\bar{u}_1u_3\bar{u}_3 + D_{23}u_2\bar{u}_2u_3\bar{u}_3 + D_{33}u_3^2\bar{u}_3^2 +$$

$$+ Eu_1u_2^3 + \bar{E}\bar{u}_1\bar{u}_2^3 \quad (164)$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &= \alpha_{11} + l_{11} + g_{11} \quad ; \quad D_{22} = \alpha_{22} + l_{22} + g_{22} \\ D_{33} &= \alpha_{33} + l_{33} + g_{33} \quad ; \quad D_{12} = \alpha_{12} + l_{12} + g_{12} \\ D_{13} &= \alpha_{13} + l_{13} + g_{13} + d_{13} \quad ; \quad D_{23} = \alpha_{23} + l_{23} + g_{23} + d_{23} \\ E &= \beta + m + g' \quad ; \quad \bar{E} = \bar{\beta} + \bar{m} + \bar{g}' \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

Tous développements faits on obtient :

$$D_{11} = \frac{\omega_2^2(81 - 696\omega_1^2 + 124\omega_1^4)}{576(2\omega_1^2 - 1)^2(1 - 5\omega_1^2)} \quad (166)$$

$$D_{12} = \frac{\omega_1\omega_2(43 + 64\omega_1^2\omega_2^2)}{24(2\omega_1^2 - 1)(2\omega_2^2 - 1)(1 - 5\omega_1^2)(1 - 5\omega_2^2)} \quad (167)$$

$$D_{22} = \frac{\omega_1^2(81 - 696\omega_2^2 + 124\omega_2^4)}{576(2\omega_2^2 - 1)^2(1 - 5\omega_2^2)} \quad (168)$$

$$D_{13} = \frac{2\omega_1\omega_2^2}{3(4 - \omega_1^2)(2\omega_1^2 - 1)} \quad (179)$$

$$D_{23} = \frac{2\omega_2\omega_1^2}{3(4 - \omega_2^2)(2\omega_2^2 - 1)} \quad (170)$$

$$D_{33} = \frac{-\omega_1^2\omega_2^2}{144 + 12\omega_1^2\omega_2^2} \quad (171)$$

enfin pour la résonance  $\omega_1 + 3\omega_2 = 0$  :

$$E = 0,41323 - 0,37806i \quad (172)$$

On notera la symétrie des indices 1 et 2 .

#### IV-3—La résonance $\omega_1 + 3\omega_2 = 0$ .

Après la simplification de  $H_3$  à  $H_4$  les termes non résonants de  $H_{34}$  ont disparu et l'on obtient :

1 )- Les paramètres :

$$(n_4, p_4, q_4, x_4, y_4, z_4) \quad (173)$$

Ces paramètres sont équivalents à  $n_b, p_b, q_b, x_b, y_b, z_b$  (différences du 2<sup>e</sup> ordre )et à  $n_3, p_3, q_3, x_3, y_3, z_3$  (différences du 3<sup>e</sup> ordre) .

2 )-Les variables auxiliaires .

$$Z_{41} = n_4 + ix_4 ; \quad Z_{42} = p_4 + iy_4 ; \quad Z_{43} = q_4 + iz_4 \quad (174)$$

3 )- L'expression de  $H_4$  en fonction des variables auxiliaires .

$$\begin{aligned} H_4 = & \frac{1}{2}[\omega_1 Z_{41} \bar{Z}_{41} + \omega_2 Z_{42} \bar{Z}_{42} + \omega_3 Z_{43} \bar{Z}_{43}] + \\ & + D_{11} Z_{41}^2 \bar{Z}_{41}^2 + D_{12} Z_{41} \bar{Z}_{41} Z_{42} \bar{Z}_{42} + D_{22} Z_{42}^2 \bar{Z}_{42}^2 + D_{13} Z_{41} \bar{Z}_{41} Z_{43} \bar{Z}_{43} + \\ & + D_{23} Z_{42} \bar{Z}_{42} Z_{43} \bar{Z}_{43} + D_{33} Z_{43}^2 \bar{Z}_{43}^2 + E Z_{41} Z_{42}^3 + \bar{E} \bar{Z}_{41} \bar{Z}_{42}^3 + 5^e \text{ordre} \end{aligned} \quad (175)$$

Le cas de résonance  $\omega_1 + 3\omega_2 = 0$  soit  $\omega_1 = \sqrt{0,9}$  ;  $\omega_2 = -\sqrt{0,1}$  ;  $\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{15 - \sqrt{213}}{30} = 0,013516$  n'a que trois intégrales et quasi-intégrales indépendantes (Section II-4 ) :

-L'intégrale première de l'Hamiltonien soit  $H_a = H_b = H_4 = \dots = H_N$

-La somme  $q_N^2 + z_N^2$  égale à  $Z_{N3} \bar{Z}_{N3}$

-La somme  $\omega_1(n_N^2 + x_N^2) + \omega_2(p_N^2 + y_N^2)$  égale à  $\omega_1 Z_{N1} \bar{Z}_{N1} + \omega_2 Z_{N2} \bar{Z}_{N2}$  .

Bien entendu la différence  $\mathcal{H}_N = H_N - \frac{1}{2}[\omega_1 Z_{N1} \bar{Z}_{N1} + \omega_2 Z_{N2} \bar{Z}_{N2} + \omega_3 Z_{N3} \bar{Z}_{N3}]$  est elle même une quasi-intégrale (non indépendante) . Sa partie principale est :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{44} = & D_{11} Z_{41}^2 \bar{Z}_{41}^2 + D_{12} Z_{41} \bar{Z}_{41} Z_{42} \bar{Z}_{42} + D_{22} Z_{42}^2 \bar{Z}_{42}^2 + \\ & + D_{13} Z_{41} \bar{Z}_{41} Z_{43} \bar{Z}_{43} + D_{23} Z_{42} \bar{Z}_{42} Z_{43} \bar{Z}_{43} + D_{33} Z_{43}^2 \bar{Z}_{43}^2 + \\ & + E Z_{41} Z_{42}^3 + \bar{E} \bar{Z}_{41} \bar{Z}_{42}^3 + 5^e \text{ordre} \end{aligned} \quad (176)$$

Si ces intégrales et quasi-intégrales permettaient d'empêcher toute évacion du voisinage de l'origine il y aurait "stabilité à tous les ordres" .

Ceci se reconnait en cherchant si l'on peut avoir  $Z_{43} \bar{Z}_{43} = 0$  ;  $\omega_1 Z_{41} \bar{Z}_{41} + \omega_2 Z_{42} \bar{Z}_{42} = 0$  et  $\mathcal{H}_{44} = 0$  en dehors de l'origine .

On est ainsi conduit à la condition suffisante suivante de stabilité :

$$|D_{11} + 3D_{12} + 9D_{22}| > 6\sqrt{3}|E| \quad (177)$$

Dans le cas étudié  $\omega_1 + 3\omega_2 = 0$  on obtient :

$$\begin{aligned} D_{11} + 3D_{12} + 9D_{22} &= -\frac{4671}{4480} = -1,04263 \\ |E| &= 0,56008 \quad ; \quad 6\sqrt{3}|E| = 5,82054 \end{aligned} \quad (178)$$

La condition (177) n'est pas satisfaite et il y a lieu de présumer l'instabilité ce que l'on vérifie en remarquant que pour  $Z_{N3} \bar{Z}_{N3} = 0$  et  $\omega_1 Z_{N1} \bar{Z}_{N1} + \omega_2 Z_{N2} \bar{Z}_{N2} = 0$  on obtient :

$$\frac{d^2}{dt^2}(Z_{41} \bar{Z}_{41}) = 8Z_{41} \bar{Z}_{41} \left[ (D_{11} + 3D_{12} + 9D_{22}) \mathcal{H}_N + [108E\bar{E} - (D_{11} + 3D_{12} + 9D_{22})^2] Z_{41}^2 \bar{Z}_{41}^2 \right] + \quad (179)$$

+ ordre supérieur

Compte tenu de la non vérification de (177) le coefficient de  $Z_{41}^3 \bar{Z}_{41}^3$  dans la dérivée seconde de  $Z_{41} \bar{Z}_{41}$  est positif et il y a "instabilité puissance 3" , c'est à dire vitesse d'évasion en général de l'ordre du cube de la distance ce qui permet d'affiner un peu le résultat présenté en ( III-3-2 ) .

#### IV-4—Les résonances d'ordre cinq et plus .

Nous avons jusqu'ici rencontré deux résonances entrainant l'instabilité :

A ) Une résonance d'ordre 3 obtenue pour  $\omega_1 + 2\omega_2 = 0$  soit  $\omega_1 = \sqrt{0,8}$  et  $\omega_2 = -\sqrt{0,2}$  .

B ) une résonance d'ordre 4 obtenue pour  $\omega_1 + 3\omega_2 = 0$  soit  $\omega_1 = \sqrt{0,9}$  et  $\omega_2 = -\sqrt{0,1}$

Hormis ces cas et les deux cas limites ( le cas où  $\omega_2 = 0$  ;  $\omega_1 = 1$  et le cas où  $\omega_1 = -\omega_2 = \sqrt{0,5}$ ) la quasi-intégrale  $\mathcal{H}_N$  a pour expression :

$$\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_{N4} + \mathcal{H}_{N5} + \mathcal{H}_{N6} + \dots$$

avec

$$\mathcal{H}_{Nk} = \mathcal{O}(Z_{Nj}^k) \quad ; \quad j = 1, 2, 3 \quad (180)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{N4} &= \text{partie principale de } \mathcal{H}_N \\ &= D_{11} Z_{N1}^2 \bar{Z}_{N1}^2 + D_{12} Z_{N1} \bar{Z}_{N1} Z_{N2} \bar{Z}_{N2} + D_{22} Z_{N2} \bar{Z}_{N2} + \\ &\quad + D_{13} Z_{N1} \bar{Z}_{N1} Z_{N3} \bar{Z}_{N3} + D_{23} Z_{N2} \bar{Z}_{N2} Z_{N3} \bar{Z}_{N3} + D_{33} Z_{N3}^2 \bar{Z}_{N3}^2 \end{aligned} \quad (181)$$

Les six coefficients  $D_{11}$  à  $D_{33}$  sont les fractions rationnelles ci-après des pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  , ils ont déjà été donnés en (166)-(171) . On notera la symétrie des indices 1 et 2 .

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{\omega_2^2(81 - 696\omega_1^2 + 124\omega_1^4)}{576(2\omega_1^2 - 1)^2(1 - 5\omega_1^2)} \\ D_{12} &= \frac{\omega_1\omega_2(43 + 64\omega_1^2\omega_2^2)}{24(2\omega_1^2 - 1)(2\omega_2^2 - 1)(1 - 5\omega_1^2)(1 - 5\omega_2^2)} \\ D_{22} &= \frac{\omega_1^2(81 - 696\omega_2^2 + 124\omega_2^4)}{576(2\omega_2^2 - 1)^2(1 - 5\omega_2^2)} \\ D_{13} &= \frac{2\omega_1\omega_2^2}{3(4 - \omega_1^2)(2\omega_1^2 - 1)} \\ D_{23} &= \frac{2\omega_2\omega_1^2}{3(4 - \omega_2^2)(2\omega_2^2 - 1)} \\ D_{33} &= \frac{-\omega_1^2\omega_2^2}{12(4 - \omega_1^2)(4 - \omega_2^2)} \end{aligned} \quad (182)$$

avec en fonction des masses  $m_1$  et  $m_2$  des deux corps primaires :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{m_1^2 - 25m_1m_2 + m_2^2}}{2(m_1 + m_2)} \right\}^{1/2} \\ \omega_2 &= -\left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{m_1^2 - 25m_1m_2 + m_2^2}}{2(m_1 + m_2)} \right\}^{1/2} \\ \omega_3 &= 1 \\ m_1^2 - 25m_1m_2 + m_2^2 &> 0 \quad ; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < \omega_1 < 1 \quad ; \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} < \omega_2 < 0 \quad ; \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 &= 1 \end{aligned} \quad (183)$$

Soit , en admettant  $m_1 \geq m_2$  :

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} \sqrt{81 - 48\omega_1^2\omega_2^2} \quad (184)$$

S'il n'y a pas résonance entre les trois pulsations  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  les trois quasi-intégrales  $Z_{N1}\bar{Z}_{N1}$  ,  $Z_{N2}\bar{Z}_{N2}$  et  $Z_{N3}\bar{Z}_{N3}$  suffisent à empêcher les évasions et à établir la "stabilité à tous les ordres" .

Les résonances sont des relations de la forme :

$$\begin{aligned} a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 &= 0 \\ a_1, a_2, a_3 &: \text{des entiers non tous nuls} \end{aligned} \quad (185)$$

Rappelons qu'à cause de la symétrie  $z/-z$  du problème initial , l'ordre de la résonance (le degré des plus simples termes correspondants de  $\mathcal{H}_N$  ) est  $|a_1| + |a_2| + |a_3|$  si  $a_3$  est pair mais deux fois plus si  $a_3$  est impair .

S'il n'y a qu'une seule résonance (185) il reste deux quasi-intégrales indépendantes du type  $a_j Z_{Nk} \bar{Z}_{Nk} - a_k Z_{Nj} \bar{Z}_{Nj}$  . S'il y a deux résonances indépendantes les trois pulsations  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  sont des nombres rationnels par exemple  $\omega_1 = 0,8$  ;  $\omega_2 = -0,6$  ;  $\omega_3 = 1$  , et une seule quasi-intégrale du type  $\sum b_k Z_{Nk} \bar{Z}_{Nk}$  subsiste : la quasi-intégrale  $I_N = \omega_1 Z_{N1} \bar{Z}_{N1} + \omega_2 Z_{N2} \bar{Z}_{N2} + \omega_3 Z_{N3} \bar{Z}_{N3}$  .

Cette dernière quasi-intégrale est une combinaison des précédentes et existe dans tous les cas ; associée avec la quasi-intégrale  $\mathcal{H}_N$  elle permet souvent d'assurer la stabilité à tous les ordres : il suffit pour cela qu'il soit impossible de s'échapper de l'origine avec  $\mathcal{H}_{N4}$  nul et  $I_N$  nul .

Posons :

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= Z_{N1} \bar{Z}_{N1}; A_2 = Z_{N2} \bar{Z}_{N2} \quad ; \quad A_3 = Z_{N3} \bar{Z}_{N3} \\ \text{donc} : A_1 &\geq 0 ; A_2 \geq 0; A_3 \geq 0 \\ \mathcal{H}_{N4} &= D_{11}A_1^2 + D_{12}A_1A_2 + D_{22}A_2^2 + D_{13}A_1A_3 + D_{23}A_2A_3 + D_{33}A_3^2 \\ I_N &= \omega_1A_1 + \omega_2A_2 + \omega_3A_3 \end{aligned} \right\} (186)$$

Si  $0,2 < \omega_2^2 < 0,5$  et donc  $0,5 < \omega_1^2 < 0,8$  on obtient :

$$\left. \begin{aligned} D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{13}, D_{23} &> 0 \\ I_N = 0 &\text{ entraine } \omega_2A_2 + \omega_3A_3 \leq 0 \\ \text{et donc} & \\ D_{23}A_2A_3 + D_{33}A_3^2 &\geq \frac{\omega_1^2A_3^2}{12(4-\omega_2^2)} \left[ \frac{8}{1-2\omega_2^2} - \frac{\omega_2^2}{4-\omega_1^2} \right] \geq 0 \end{aligned} \right\} (187)$$

Pour  $I_N = 0$  la quantité  $\mathcal{H}_{N4}$  est positive en dehors de l'origine et il y a stabilité à tous les ordres ;

Des raisonnements analogues conduisent encore à la stabilité à tous les ordres dans les deux cas suivants :

A-) Si  $0 < \omega_2^2 < 0,0791238$  on obtient de même qu' $I_N = 0$  entraîne  $\mathcal{H}_{N4} > 0$  en dehors de l'origine (par  $D_{13} > 0$  ;  $D_{11}A_1^2 + D_{12}A_1A_2 + D_{22}A_2^2 \geq 0$  ;  $D_{23}A_2A_3 + D_{33}A_3^2 \geq 0$ ).

B-) Si  $0,1241447 < \omega_2^2 < 0,2$  on obtient au contraire qu' $I_N = 0$  entraîne  $\mathcal{H}_{N4} < 0$  en dehors de l'origine .

Le nombre  $0,1241447\dots$  est racine de :

$$972 - 7119x - 7017x^2 + 10084x^3 + 2564x^4 + 960x^5 = 0$$

et correspond à

$$\mathcal{H}_{N4} = 0 \quad \text{pour} \quad A_1 = 0 \quad ; \quad A_2 = 1 \quad ; \quad A_3 = -\omega_2$$

Il n'y a donc que le petit segment :

$$0,0791238 \leq \omega_2^2 \leq 0,1241447 \quad (188)$$

où l'analyse par les quasi-intégrales  $\mathcal{H}_N$  et  $I_N$  est insuffisante pour conclure à la stabilité à tous les ordres et où donc les résonances risquent de provoquer des instabilités de type "puissance -m" .

On peut noter que :

1) La limite inférieure  $\omega_2^2 = 0,0791238$  correspond au dernier cas développé en III-3-2 .

2) S'il n'y a qu'une seule résonance de type (185) les quasi-intégrales  $a_j Z_{Nk} \bar{Z}_{Nk} - a_k Z_{Nj} \bar{Z}_{Nj}$  avec  $\{j, k\} = \{1, 2, 3\}$  , quasi-intégrales dont  $I_N$  est une combinaison , permettent d'affiner l'analyse : l'évasion se fait pour  $A_j = \lambda a_j$  ;  $j = \{1, 2, 3\}$  ce qui exige:

$$a_1 a_2 \geq 0 \quad ; \quad a_1 a_3 \geq 0 \quad ; \quad a_2 a_3 \geq 0$$

(on se ramène à  $a_1, a_2, a_3 \geq 0$  et la résonance est dite positive ).

$$\mathcal{H}_{N4}(a_1, a_2, a_3) = D_{11}a_1^2 + D_{12}a_1a_2 + D_{22}a_2^2 + D_{13}a_1a_3 + D_{23}a_2a_3 + D_{33}a_3^2 = 0 \quad (189)$$

Cependant aucun cas de ce type n'a été trouvé . Ainsi pour la résonance  $3\omega_2 + \omega_3 = 0$  (soit  $\omega_1 = \frac{\sqrt{8}}{3}$  ;  $\omega_2 = -\frac{1}{3}$  ;  $\omega_3 = 1$  ) on obtient  $\mathcal{H}_{N4}(a_1, a_2, a_3) = \mathcal{H}_{N4}(0, 3, 1) = \frac{10907}{23520} \neq 0$

Les développements de la théorie de la stabilité montrent que les cas résiduels n'ont que fort peu de risques de ne pas être eux aussi "stables à tous les ordres " ainsi que le

montre l'étude des deux cas limites  $\omega_2^2 = 0,0791238$  soit  $\frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0,0109136$  ( section III-3-2 ) et  $\omega_2^2 = 0,1241447\dots$  soit  $\frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0,0163767$  tous deux sans résonance .

#### IV-5—Etude du cas limite $\omega_1 = -\omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left[ \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{9 - \sqrt{69}}{18} = 0,03852\dots \right]$$

A cause des facteurs  $1 - 2\omega_1^2$  ou  $1 - 2\omega_2^2$  dans les dénominateurs la méthode générale ne convient plus , mais l'expression (97)-(100) de l'hamiltonien  $H_a$  reste utilisable avec  $R = \frac{\sqrt{23}}{4}$  .

Les simplifications  $H_a \rightarrow H_b$  ;  $H_b \rightarrow H_3$  ;  $H_3 \rightarrow H_4 \rightarrow \dots H_N$  , doivent être quelques peu modifiées .

Avec la transformation linéaire  $H_a \rightarrow H_b$  la plus simple expression possible des termes du second degré est :

$$\left. \begin{aligned} H_{b2} &= \frac{n_b^2 + p_b^2 + q_b^2 + z_b^2}{2} + \omega(p_b x_b - n_b y_b) \\ \omega &= \omega_1 = -\omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} (190)$$

Cette expression est obtenue grâce à la transformation linéaire symplectique suivante (liée de manière simple à la limite des transformations générales  $H_a \rightarrow H_b$  ) :

$$\begin{pmatrix} n \\ p \\ x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} n_b \\ p_b \\ x_b \\ y_b \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} n_b \\ p_b \\ x_b \\ y_b \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} n \\ p \\ x \\ y \end{pmatrix} ; \quad q = q_b \quad \text{et} \quad z = z_b \quad (191)$$

$$M = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 49\sqrt{10} & \sqrt{115} & 5\sqrt{230} & 10\sqrt{5} \\ 9\sqrt{230} & -37\sqrt{5} & 15\sqrt{10} & 10\sqrt{115} \\ 9\sqrt{230} & 8\sqrt{5} & 40\sqrt{10} & 10\sqrt{115} \\ -5\sqrt{10} & 0 & 0 & -50\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad (192)$$

$$M^{-1} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 40\sqrt{10} & 0 & -5\sqrt{230} & -15\sqrt{10} \\ 10\sqrt{115} & -50\sqrt{5} & -10\sqrt{5} & -10\sqrt{115} \\ -9\sqrt{230} & 5\sqrt{10} & 49\sqrt{10} & 9\sqrt{230} \\ -8\sqrt{5} & 0 & \sqrt{115} & -37\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad (193)$$

On obtient directement les termes des troisièmes et quatrièmes degrés avec :

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{100} [9n_b \sqrt{230} + 8p_b \sqrt{5} + 40x_b \sqrt{10} + 10y_b \sqrt{115}] \\
 y &= -\frac{1}{20} [n_b \sqrt{10} + 10y_b \sqrt{5}] \\
 z &= z_b \\
 \text{et :} \\
 H_{b3} = H_{a3} &= \frac{\sqrt{69}}{144} (-7x^3 + 33xy^2 - 12xz^2) + \frac{3\sqrt{3}}{16} (x^2y + y^3 - 4yz^2) \\
 H_{b4} = H_{a4} &= \frac{1}{128} [37x^4 - 246x^2y^2 - 3y^4 + 24x^2z^2 + 264y^2z^2 - 48z^4] \\
 &+ \frac{\sqrt{23}}{96} (25x^3y - 45xy^3 + 60xyz^2)
 \end{aligned} \tag{194}$$

Au premier ordre les dérivées des paramètres  $n_b, p_b, q_b, x_b, y_b, z_b$  sont :

$$\begin{aligned}
 \frac{dn_b}{dt} &= -\frac{\partial H_{b2}}{\partial x_b} = -\omega p_b & \frac{dx_b}{dt} &= \frac{\partial H_{b2}}{\partial n_b} = n_b - \omega y_b \\
 \frac{dp_b}{dt} &= -\frac{\partial H_{b2}}{\partial y_b} = +\omega n_b & \frac{dy_b}{dt} &= \frac{\partial H_{b2}}{\partial p_b} = p_b + \omega x_b \\
 \frac{dq_b}{dt} &= -\frac{\partial H_{b2}}{\partial z_b} = -z_b & \frac{dz_b}{dt} &= \frac{\partial H_{b2}}{\partial q_b} = q_b
 \end{aligned} \tag{195}$$

Les paramètres principaux , ceux qui correspondent aux  $z_k$  de l'équation (12) , sont donc :  $(n_b + ip_b)$  ;  $(n_b - ip_b)$  ;  $(x_b + iy_b)$  ;  $(x_b - iy_b)$  ;  $(q_b + iz_b)$  ;  $(q_b - iz_b)$  avec leurs dérivées au premier ordre reliées très simplement :

$$\begin{aligned}
 \frac{d(n_b + ip_b)}{dt} &= i\omega(n_b + ip_b) + (2^e \text{ ordre}) \\
 \frac{d(n_b - ip_b)}{dt} &= i\omega(n_b - ip_b) + (2^e \text{ ordre}) \\
 \frac{d(x_b + iy_b)}{dt} &= (n_b + ip_b) + i\omega(x_b + iy_b) + (2^e \text{ ordre}) \\
 \frac{d(x_b - iy_b)}{dt} &= (n_b - ip_b) - i\omega(x_b - iy_b) + (2^e \text{ ordre}) \\
 \frac{d(q_b + iz_b)}{dt} &= i(q_b + iz_b) + (2^e \text{ ordre}) \\
 \frac{d(q_b - iz_b)}{dt} &= -i(q_b - iz_b) + (2^e \text{ ordre})
 \end{aligned} \tag{196}$$

En conséquence l'application du théorème de quasi-résonance décrit dans le chapitre I montre que les simplifications  $H_b \rightarrow H_3 \rightarrow H_4 \rightarrow \dots \rightarrow H_N$  conduisent à des

paramètres  $n_N, p_N, q_N, x_N, y_N, z_N$  dont  $n_b, p_b, q_b, x_b, y_b, z_b$  sont les parties principales , et qui correspondent à l'hamiltonien suivant  $H_N$  développable en série entière convergente dans un voisinage de l'origine :

$$\begin{aligned}
H_N &= \frac{n_N^2 + p_N^2 + q_N^2 + z_N^2}{2} + \omega(p_N x_N - n_N y_N) + \\
&+ \sum_{\vec{\alpha}} J(\vec{\alpha})(n_N + ip_N)^{\alpha_1} (n_N - ip_N)^{\alpha_2} (x_N + iy_N)^{\alpha_3} \cdot \\
&\cdot (x_N - iy_N)^{\alpha_4} (q_N + iz_N)^{\alpha_5} (q_N - iz_N)^{\alpha_6}
\end{aligned} \tag{197}$$

avec :

$$\left. \begin{aligned}
\vec{\alpha} &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \\
\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 &\in \mathbb{N} \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 &\geq 3 \\
J(\vec{\alpha}) &\in \mathbb{C} \\
J(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_5) &= \bar{J}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \\
&\text{(condition de réalité)}
\end{aligned} \right\} \tag{198}$$

Et avec la condition de quasi-résonance :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 \leq N \Rightarrow \{\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4; \alpha_5 = \alpha_6\} \tag{199}$$

Dans ces conditions on retrouve aisément la quasi-intégrale  $q_N^2 + z_N^2$  et on en découvre une autre :  $n_N y_N - p_N x_N$  .

Puisque  $H_N$  est une intégrale première la discussion de la stabilité est aisée : si la quasi-intégrale  $H_N + \omega(n_N y_N - p_N x_N)$  est minimale à l'origine il y a "stabilité à tous les ordres" (et même stabilité stricte pour le problème plan pour lequel la diffusion d'Arnold est impossible) sinon il aura instabilité d'un type analogue à celui du cas où  $\frac{m_2}{(m_1 + m_2)} = 0$  ;  $\omega_1 = 1$  ;  $\omega_2 = 0$  , instabilité en quelque sorte "linéaire" et que l'on peut appeler "instabilité puissance-un" .

Pour  $N \geq 4$  le caractère minimal à l'origine de  $H_N + \omega(n_N y_N - p_N x_N)$  dépend essentiellement du coefficient  $J(0, 0, 2, 2, 0, 0)$  qui est réel :

$$H_N + \omega(n_N y_N - p_N x_N) = \frac{n_N^2 + p_N^2 + q_N^2 + z_N^2}{2} + J(0, 0, 2, 2, 0, 0)(x_N^2 + y_N^2)^2 + etc... \tag{200}$$

Si  $J(0, 0, 2, 2, 0, 0)$  est positif la quasi-intégrale  $H_N + \omega(n_N y_N - p_N x_N)$  est minimale à l'origine et il y a stabilité à tous les ordres .

Si  $J(0, 0, 2, 2, 0, 0)$  est négatif l'évasion de  $r = \sqrt{x_N^2 + y_N^2}$  est gouvernée par :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \underbrace{2H_N + Q\sqrt{2} - q_N^2 - z_N^2}_{\text{quasi-intégrale}} - 2r^4 J(0, 0, 2, 2, 0, 0) - \frac{Q^2}{r^2} + (\text{ordresup.}) \quad (201)$$

où

$$Q = n_N y_n - p_N x_N = \text{quasi-intégrale} \quad (202)$$

Ce qui , pour  $J(0, 0, 2, 2, 0, 0) < 0$  , donne des “évasions puissance-un ” intermédiaires entre l'évasion exponentielle et l'évasion puissance-deux . Si  $J(0, 0, 2, 2, 0, 0) = 0$  il faut examiner les  $J(\alpha)$  d'ordre 4 et 6 .

Il nous reste donc à déterminer  $J(0, 0, 2, 2, 0, 0)$  et pour cela à étudier les simplifications  $H_b \rightarrow H_3$  et  $H_3 \rightarrow H_4$  dans le cadre du problème plan (  $q_N$  et  $z_N$  négligés ) .

La simplification  $H_b \rightarrow H_3$  est une transformation canonique destinée à faire disparaître les termes du 3<sup>e</sup> degré tout en conservant ceux du 2<sup>e</sup> degré .

Cette simplification peut s'exprimer par la méthode de Von Zeipel : (où  $S$  est la fonction génératrice ) .

$$S = n_3 x_b + p_3 y_b + \varepsilon(n_3, p_3, x_b, y_b) \quad (203)$$

$\varepsilon$  est un polynôme homogène approprié du 3<sup>e</sup> degré et la transformation est :

$$\begin{aligned} n_b &= \frac{\partial S}{\partial x_b} = n_3 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_b} & ; & \quad p_b = p_3 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_b} \\ x_3 &= \frac{\partial S}{\partial n_3} = x_b + \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_3} & ; & \quad y_3 = y_b + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_3} \end{aligned} \quad (204)$$

Cette transformation conduit à :

$$H_b(n_b, p_b, x_b, y_b) \equiv H_3(n_3, p_3, x_3, y_3) \quad (205)$$

avec une expression identique pour les termes du second degré :

$$H_{32} = \frac{n_3^2 + p_3^2}{2} + \omega(p_3 x_3 - n_3 y_3) \quad (206)$$

le polynôme homogène du 3<sup>e</sup> degré  $\varepsilon$  est déterminé par la condition de disparition des termes  $H_{33}$  du 3<sup>e</sup> degré :

$$H_{32}(n_3, p_3, x_3, y_3) = H_{b2} + H_{b3} + (\text{ordre4}) \quad (207)$$

Pour déterminer simplement  $\varepsilon$  il est commode d'utiliser les variables complexes suivants  $u_1$  et  $u_2$  :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= n_3 + ip_3 \\
 u_2 &= x_b + iy_b \\
 \text{soit :} \\
 n_3 &= \frac{1}{2}(u_1 + \bar{u}_1) \quad ; \quad p_3 = \frac{i}{2}(\bar{u}_1 - u_1) \\
 x_b &= \frac{1}{2}(u_2 + \bar{u}_2) \quad ; \quad y_b = \frac{i}{2}(\bar{u}_2 - u_2)
 \end{aligned}
 \tag{208}$$

Donc , avec  $\varepsilon = \varepsilon(u_1, u_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$  polynôme homogène du 3<sup>e</sup> degré :

$$\begin{aligned}
 n_b &= n_3 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_b} = \frac{1}{2}(u_1 + \bar{u}_1) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_2} \\
 p_b &= p_3 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_b} = \frac{i}{2}(\bar{u}_1 - u_1) + i\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_2}\right) \\
 x_3 &= \frac{1}{2}(u_2 + \bar{u}_2) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_1} \\
 y_3 &= \frac{i}{2}(\bar{u}_2 - u_2) + i\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_1}\right)
 \end{aligned}
 \tag{209}$$

En conséquence la différence  $H_{32} - H_{b2}$  est :

$$\begin{aligned}
 H_{32} - H_{b2} &= \frac{n_3^2 + p_3^2 - n_b^2 - p_b^2}{2} + \omega(p_3 x_3 - n_3 y_3 - p_b x_b + n_b y_b) \\
 &= \omega i \left\{ \bar{u}_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_1} - u_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_2} - u_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} \right\} \\
 &\quad - u_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} - \bar{u}_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_2} + (\text{ordre 4})
 \end{aligned}
 \tag{210}$$

Cette différence doit , au 4<sup>e</sup> ordre près , être égale  $H_{b3}$  qui est donné en (194) c'est à dire :

$$\begin{aligned}
 H_{b3} &= \frac{\sqrt{69}}{144}(-7x^3 + 33xy^2) + \frac{3\sqrt{3}}{16}(x^2y + y^3) \\
 \text{avec} \\
 x &= \frac{1}{100}[u_1(9\sqrt{230} - 8i\sqrt{5}) + \bar{u}_1(9\sqrt{230} + 8i\sqrt{5}) + u_2(40\sqrt{10} - 10i\sqrt{115}) + \\
 &\quad + \bar{u}_2(40\sqrt{10} + 10i\sqrt{115})] + 2^{\text{e}} \text{ordre} \\
 y &= -\frac{1}{40}[(u_1 - \bar{u}_1)\sqrt{10} + (\bar{u}_2 - u_2)10i\sqrt{5}] + 2^{\text{e}} \text{ordre}
 \end{aligned}
 \tag{211}$$

Nous recherchons le coefficient  $J(0, 0, 2, 2, 0, 0)$  du terme en  $(x_4^2 + y_4^2)^2$  de  $H_4$ , nous sommes donc particulièrement intéressés par les termes en  $x_b, y_b$  de  $H_b$  et  $\varepsilon$  c'est à dire par les termes en  $u_2^3, u_2^2\bar{u}_2, u_2\bar{u}_2^2, \bar{u}_2^3$ .

Pour  $H_{b3}$  ces termes sont :

$$\begin{aligned}
 & Au_2^3 + Bu_2^2\bar{u}_2 + \bar{B}u_2\bar{u}_2^2 + \bar{A}\bar{u}_2^3 \\
 & \text{avec :} \\
 & A = \frac{-148\sqrt{690} + 3571i\sqrt{15}}{28800} \\
 & B = \frac{-4\sqrt{690} - 11i\sqrt{15}}{384}
 \end{aligned} \tag{212}$$

Avec  $H_{32} - H_{b2} = H_{b3} + 4^e$  ordre et avec (210) les termes correspondants de  $\varepsilon$  sont :

$$\frac{Ai}{3\omega}u_2^3 + \frac{Bi}{\omega}u_2^2\bar{u}_2 - \frac{\bar{B}i}{\omega}u_2\bar{u}_2^2 - \frac{\bar{A}i}{3\omega}\bar{u}_2^3 \tag{213}$$

Examinons maintenant la simplification  $H_3 \rightarrow H_4$ . Cette simplification élimine les termes non résonants du 4<sup>e</sup> degré de (197) mais conserve les termes résonants et en particulier le terme recherché  $J(0, 0, 2, 2, 0, 0)(x_4^2 + y_4^2)^2$  avec  $N = 3$  ou 4, il nous suffit donc d'obtenir ce terme dans  $H_{34}$  sans faire la transformation  $H_3 \rightarrow H_4$ .

Or :

$$x_3^2 + y_3^2 = u_2\bar{u}_2 + 3^e \text{ ordre} \tag{214}$$

et, puisque  $H_3 = H_b$  et  $H_{33} = 0$  on a :

$$H_{34} = H_{b2} - H_{32} + H_{b3} + H_{b4} + 5^e \text{ ordre} \tag{215}$$

Il nous suffit donc de travailler avec les variables  $(u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2)$ , d'étudier les termes du 4<sup>e</sup> degré de  $H_{b2} - H_{32} + H_{b3} + H_{b4}$  et d'obtenir le coefficient du terme en  $u_2^2\bar{u}_2^2$ .

Les termes du 4<sup>e</sup> degré de  $H_{b2} - H_{32}$  sont  $2\frac{\partial\varepsilon}{\partial u_2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial \bar{u}_2}$ , ils donnent un terme de  $(4A\bar{A} + 20B\bar{B})$  dans le coefficient  $J(0, 0, 2, 2, 0, 0)$  soit  $151451/55296$ .

Les termes du 4<sup>e</sup> degré de  $H_{b3}$  exigent la connaissance des quantités du 2<sup>e</sup> ordre négligées dans (211) soient :

$$\begin{aligned}
 \delta x &= \frac{1}{100}[9\sqrt{230}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial u_2} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial \bar{u}_2}\right) + 8i\sqrt{5}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial u_2} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial \bar{u}_2}\right)] \\
 \delta y &= -\frac{\sqrt{10}}{20}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial u_2} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial \bar{u}_2}\right)
 \end{aligned} \tag{216}$$

soient, pour les termes en  $u_2^2, u_2\bar{u}_2, \bar{u}_2^2$  :

$$\begin{aligned}\delta x &= u_2^2 \left[ \frac{-2593\sqrt{69} - 11032i\sqrt{6}}{28800} \right] + \frac{131\sqrt{69}}{960} u_2 \bar{u}_2 + \bar{u}_2^2 \left[ \frac{-2593\sqrt{69} + 11032i\sqrt{6}}{28800} \right] \\ \delta y &= u_2^2 \left[ \frac{1373\sqrt{3} + 224i\sqrt{138}}{28800} \right] - \frac{11\sqrt{3}}{192} u_2 \bar{u}_2 + \bar{u}_2^2 \left[ \frac{1373\sqrt{3} - 224i\sqrt{138}}{28800} \right]\end{aligned}\quad (217)$$

ce qui conduit pour le coefficient  $J(0, 0, 2, 2, 0, 0)$  à un second terme valant  $-30955/18432$

Il reste à calculer les termes en  $u_2^2 \bar{u}_2^2$  venus de  $H_{b4}$  grâce à (194) et à (211) ce qui fournit un dernier terme égal à  $-1015/1024$ .

D'où en définitive :

$$J(0, 0, 2, 2, 0, 0) = \frac{151451}{55296} - \frac{30955}{18432} - \frac{1015}{1024} = \frac{59}{864}\quad (218)$$

Le coefficient  $J(0, 0, 2, 2, 0, 0)$  étant positif la quasi-intégrale  $H_N + \omega(n_N y_N - p_N x_N)$  est minimale à l'origine et donc le cas limite étudié :

$$\omega_1 = -\omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{(9 - \sqrt{69})}{18} = 0,03852\dots\quad (219)$$

est stable pour le problème plan et "stable à tous les ordres " pour le problème tri-dimensionnel .

Cette conclusion entraine sans doute que lorsque  $\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}$  est légèrement supérieur à la valeur limite  $\frac{(9 - \sqrt{69})}{18}$  il existe une petite zone invariante autour de l'origine , zone dont la taille se réduit et tend vers zéro quand  $\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}$  tend vers la valeur limite : les solutions initialement extrêmement proche de l'origine peuvent certes s'évader mais pas très loin .

Une telle conséquence n'aurait pas lieu d'être si le cas limite avait été instable (fig :

IV-2) .

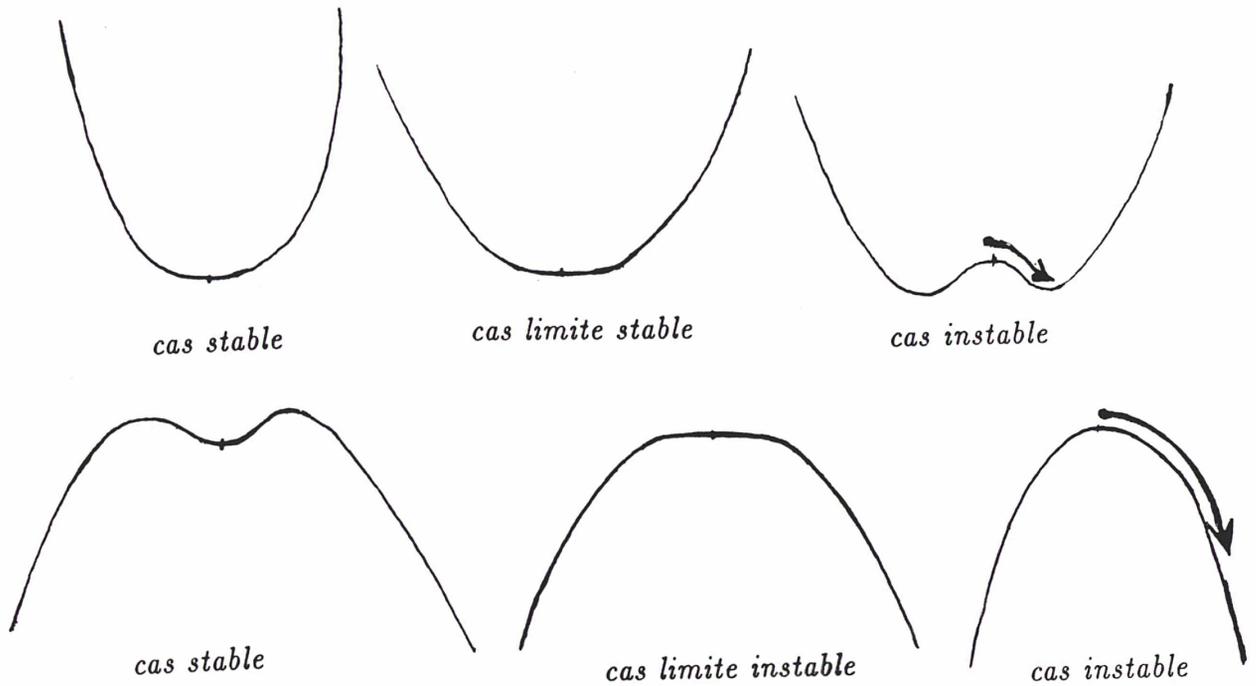


fig.IV-2 : Mouvements dans un potentiel simple .  
 Différence entre un cas limite stable et un cas limite instable .

#### IV-6— Mouvements de Lagrange -Les cas de trois masses quelconques . Les cas de mouvements elliptiques .

L'étude a essentiellement porté jusqu'ici sur les mouvements de Lagrange du cas restreint ( $m_3$  infinitésimale ) avec orbites circulaires ( $e = 0$ ) .

Dans ces premiers cas , qu'ils soient plan ou tri-dimensionnel , l'expression de la quasi-intégrale  $\mathcal{H}_N$  et celle des quasi-intégrales du type  $\sum_k e_k(p_{Nk}^2 + q_{Nk}^2)$  liées aux pulsations  $\omega_k$  suffit presque toujours à la détermination de la stabilité ou de l'instabilité .

Dans les cas plus généraux envisagés dans cette section la quasi-intégrale  $\mathcal{H}_N$  devient très difficile à obtenir , mais les pulsations  $\omega_j$  restent accessibles et des conclusions partielles déjà très détaillées peuvent être obtenues .

Il convient tout de même de distinguer le cas restreint ( $m_3$  infinitésimale ) du cas général ( $m_1, m_2, m_3$  positif ) .

Dans le premier cas avec les axes "tournants-pulsants" habituels et l'anomalie vraie  $v$  du mouvement des deux corps primaires pour paramètre de description, l'hamiltonien du problème est une généralisation simple de celui de (95) :

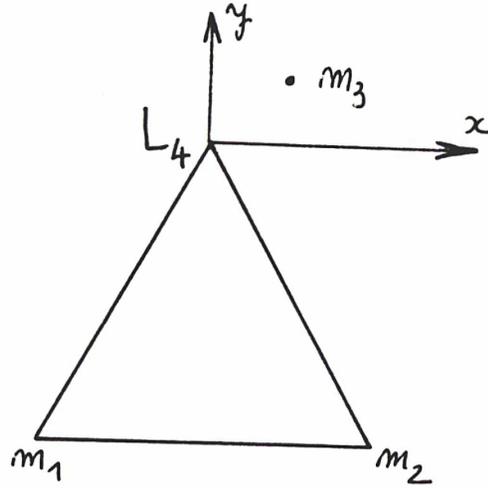


fig.IV-3 : Problème elliptique

L'hamiltonien est :

$$H = \frac{(n+y)^2 + (p-x)^2 + q^2 + z^2}{2} - \frac{1}{1 + e \cos v} \left[ \alpha \left( \frac{1}{s_1} + \frac{s_1^2}{2} \right) + \beta \left( \frac{1}{s_2} + \frac{s_2^2}{2} \right) \right] \quad (220)$$

avec

$x, y, z$  : coordonnées de  $m_3$  dans les axes issus de  $L_4$  et avec l'unité "pulsante" égale à la distance  $r_{12}$ .

$n, p, q$  : paramètres conjugués de  $x, y, z$ .

$e$  = exentricité du mouvement des deux corps primaires

$v$  = anomalie vraie du mouvement des deux corps primaires et paramètre de description :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dv} &= \frac{\partial H}{\partial n} & ; & \quad \frac{dn}{dv} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{dy}{dv} &= \frac{\partial H}{\partial p} & ; & \quad \frac{dp}{dv} = -\frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned} \quad (221)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \\ \beta &= \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \\ \alpha + \beta &= 1 \\ s_1 &= \frac{r_{13}}{r_{12}} & ; & \quad s_1^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + z^2 \\ s_2 &= \frac{r_{23}}{r_{12}} & ; & \quad s_2^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + z^2 \end{aligned} \right\} (222)$$

L'Hamiltonien  $H$  a donc la période  $2\pi$  (pulsation correspondante :  $\omega_0 = 1$ ) et il a deux degrés de liberté si le problème est plan ( $q \equiv z \equiv 0$ ), trois degrés si le problème est tri-dimensionnel.

Les pulsations propres correspondant à ces degrés de liberté sont  $\omega_1, \omega_2$  dans le cas plan et  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  dans le cas tri-dimensionnel.

Ces pulsations propres  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  proviennent de l'analyse du premier ordre liée à la partie quadratique de l'Hamiltonien :

$$H_2 = \frac{(n+y)^2 + (p-x)^2 + q^2 + z^2}{2} - \frac{3}{8(1+e\cos v)} [x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{3}xy(\alpha - \beta)] \quad (223)$$

Nous savons déjà que pour  $e = 0$  (cas circulaire) :

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= +\left\{\frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 - 27\alpha\beta}]\right\}^{1/2} \\ \omega_2 &= -\left\{\frac{1}{2}[1 - \sqrt{1 - 27\alpha\beta}]\right\}^{1/2} \\ \omega_3 &= +1 \end{aligned} \right\} (224)$$

et l'on voit que dans l'analyse du premier ordre,  $q$  et  $z$  sont découplés de  $n, p, x, y$  et  $\omega_3$  est égal à  $+1$  quel que soit  $e$ .

Dans le cas général ( $m_1, m_2, m_3$  positifs) l'Hamiltonien est nettement plus complexe :

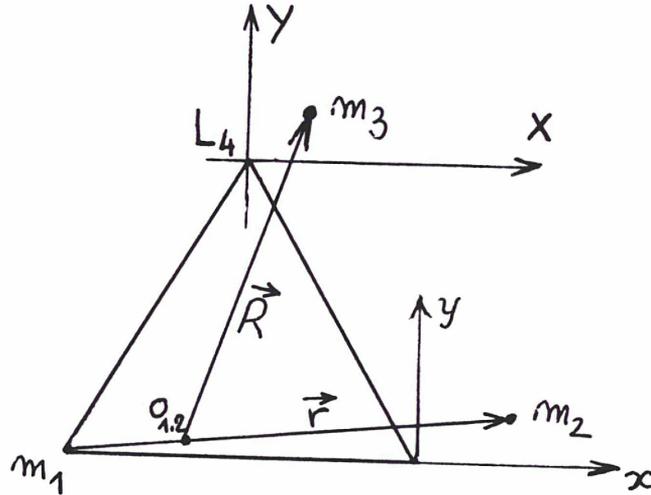


fig. IV-4 : Problème général. Axes tournants pulsants.

$$\begin{aligned} H &= \frac{(n+my)^2 + (p-mx)^2 + q^2 + m^2z^2}{2m} + \frac{(N+MY)^2 + (P-MX)^2 + Q^2 + M^2Z^2}{2M} \\ &- \frac{1}{1+e\cos v} \left[ \frac{M_1M_2}{\mathcal{M}} \left( \frac{s_{12}^2}{2} + \frac{1}{s_{12}} \right) + \frac{M_1M_3}{\mathcal{M}} \left( \frac{s_{13}^2}{2} + \frac{1}{s_{13}} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{M_2M_3}{\mathcal{M}} \left( \frac{s_{23}^2}{2} + \frac{1}{s_{23}} \right) \right] \end{aligned} \quad (225)$$

Avec , dans des axes “tournants pulsants ” identiques à ceux ci-dessus :

$$\left. \begin{array}{c} 1+x \\ y \\ z \end{array} \right\} \quad (226)$$

composantes du vecteur  $\vec{r}_{12} = \vec{r}$  (premier vecteur de Jacobi ) .

$$\left. \begin{array}{c} X + \frac{1}{2} - \beta \\ Y + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ Z \end{array} \right\} \quad (227)$$

composantes du deuxième vecteur de Jacobi , le vecteur  $\vec{R}$  depuis  $O_{12}$  , centre de masse de  $m_1$  et  $m_2$  jusqu'à  $m_3$  . (x,y,z,X,Y,Z sont identiquement nuls pour le mouvement de Lagrange étudié ) .

et avec :

$$\left. \begin{array}{l} \beta = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \\ \alpha = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} = 1 - \beta \\ m = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} = \beta m_1 = \alpha m_2 \\ \mathcal{M} = m_1 + m_2 + m_3 \\ M = \frac{m_3(m_1 + m_2)}{\mathcal{M}} \end{array} \right\} \quad (228)$$

n,p,q,N,P,Q : paramètres conjugués de x,y,z,X,Y,Z .

e= exentricité du mouvement étudié .

v= anomalie vraie du mouvement de Lagrange et paramètre de description : voir (221).

$$\left. \begin{array}{l} s_{12}^2 = (1+x)^2 + y^2 + z^2 \\ s_{13}^2 = \left(X + \frac{1}{2} + \beta x\right)^2 + \left(Y + \frac{\sqrt{3}}{2} + \beta y\right)^2 + (Z + \beta z)^2 \\ s_{23}^2 = \left(X - \frac{1}{2} - \alpha x\right)^2 + \left(Y + \frac{\sqrt{3}}{2} - \alpha y\right)^2 + (Z - \alpha z)^2 \end{array} \right\} \quad (229)$$

Comme pour le problème restreint l'Hamiltonien est autonome si  $e = 0$  et périodique (période  $2\pi$  ) si  $e \neq 0$  mais il a ici 4 degrés de liberté dans le cas plan et 6 dans le cas tri-dimensionnel .

Plusieurs de ces degrés de liberté sont liés à l'existence des intégrales premières , moment cinétique , énergie , et correspondent à des instabilités du type “instabilité orbitale”.

Considérons par exemple deux mouvements de Lagrange très voisins mais avec des périodes légèrement différentes : les 3 corps du premier vont peu à peu s'écarter des corps correspondants du second .

On pourrait aussi obtenir une lente dérive des directions de périapse , mais si l'on met de coté de telles instabilités et si l'on n'étudie que la stabilité des distances mutuelles et celle du plan des trois corps on peut profiter des intégrales premières pour réduire le nombre des degrés de liberté du problème étudié [27] .

On peut réduire le nombre de degrés de liberté à 3 (problème plan ) ou 4 (problème tri-dimensionnel ) . On peut même gagner encore un degré de liberté si le mouvement de référence est elliptique ( $e \neq 0$ ) et si l'on admet un hamiltonien non autonome , comme l'est déjà alors celui de (225) . En effet dans ce dernier cas il est aisé de choisir un mouvement lagrangien de référence ayant même moment cinétique et même énergie que le mouvement voisin étudié alors que ce n'est pas toujours possible si  $e = 0$  .

L'identité des moments cinétiques se traduit par les trois conditions :

$$2(mx + p + px - yn + PX - YN) + (MY - N)\sqrt{3} + (\alpha - \beta)(MX + P) \equiv 0 \quad (230)$$

$$2(q + qx - nz + QX - NZ) + MZ\sqrt{3} + (\alpha - \beta)Q \equiv 0 \quad (231)$$

$$2(mz + zp - yq + ZP - YQ) - Q\sqrt{3} + (\alpha - \beta)MZ \equiv 0 \quad (232)$$

Les pulsations propres sont fournies par la partie quadratique de l'hamiltonien :

$$H_2 = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{2m}[(n + my)^2 + (p - mx)^2 + q^2 + m^2 z^2] + \\ & + \frac{1}{2M}[(N + MY)^2 + (P - MX)^2 + Q^2 + M^2 Z^2] - \\ & - \frac{3}{8\mathcal{M}(1 + e\cos v)}[4m_1 m_2 x^2 + m_1 m_3 (X + \beta x + Y\sqrt{3} + \beta y\sqrt{3})^2 + \\ & + m_2 m_3 (\alpha x - X + Y\sqrt{3} - \alpha y\sqrt{3})^2] \end{aligned} \right\} \quad (233)$$

Les paramètres  $q, z, Q, Z$  sont découplés des autres et , compte-tenu des termes du premier ordre de (231) et (232) , conduisent à :

$$\left. \begin{aligned} Q &= Q_0 \cos(v - v_0) \\ Z &= \frac{Q_0}{M} \sin(v - v_0) \\ q &= \frac{Q_0}{2} [(\beta - \alpha) \cos(v - v_0) - \sqrt{3} \sin(v - v_0)] \\ z &= \frac{Q_0}{2m} [\sqrt{3} \cos(v - v_0) + (\beta - \alpha) \sin(v - v_0)] \end{aligned} \right\} \quad (234)$$

avec les deux constantes d'intégration  $Q_0$  et  $v_0$  , la période  $2\pi$  et la la pulsation correspondante  $\omega_3$  toujours égale à 1 et déjà rencontrée en (224) dans le cas restreint .

Pour les huit autres paramètres  $n, p, x, y, N, P, X, Y$  on peut distinguer le cas  $e = 0$  et le cas  $e \neq 0$ .

Le cas  $e = 0$  est simple à étudier. L'hamiltonien quadratique  $H_2$  est autonome, de signature  $(+, +, +, +, 0, -, -, -)$  et conduit aux pulsations propres  $0, 1, \omega_1, \omega_2$ , dont les signes s'accordent avec la signature, avec des expressions généralisant (224) :

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= +\left\{\frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 - 27S}]\right\}^{1/2} > 0 \\ \omega_2 &= -\left\{\frac{1}{2}[1 - \sqrt{1 - 27S}]\right\}^{1/2} \leq 0 \\ S &= \frac{(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \end{aligned} \right\} (235)$$

C'est la pulsation propre 0 qui est éliminée par la réduction due à l'utilisation des intégrales premières et donc dans le problème circulaire général les pulsations propres importantes sont, avec (235) et avec  $\omega_{\text{circulairegénéral}} = \omega_{cg} = 1$  :

$$\begin{aligned} \omega_1, \omega_2, \omega_{cg} &= 1 \text{ dans le cas plan} \\ \omega_1, \omega_2, \omega_{cg} &= 1, \quad \omega_3 = 1 \text{ dans le cas tri-dimensionnel} \end{aligned} \quad (236)$$

Si au contraire  $e \neq 0$  il est commode d'écrire :

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 2p - N\sqrt{3} + (\alpha - \beta)P \\ I_2 &= 2mx + MY\sqrt{3} + (\alpha - \beta)MX \\ I_4 &= 2my - MX\sqrt{3} + (\alpha - \beta)MY \end{aligned} \right\} (237)$$

Les équations hamiltoniennes conduisent alors à :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI_2}{dv} &= -\frac{dI_1}{dv} = I_3 + I_4 \\ \frac{dI_3}{dv} &= I_1 + I_2\left(\frac{3}{1 + e\cos v} - 1\right) \\ \frac{dI_4}{dv} &= I_1 - I_2 \end{aligned} \right\} (238)$$

A cause de (230) la somme  $I_1 + I_2$  est nulle au second ordre près et :

$$\frac{d^2 I_2}{dv^2} = I_2\left(\frac{3}{1 + e\cos v} - 4\right) \quad (239)$$

Cette équation linéaire a deux solutions indépendantes :

$$\begin{aligned} I_2 &= \sin v(1 + e\cos v) \\ I_2 &= (1 + e\cos v)[\cos v + 3\mathcal{M}e^2(1 - e^2)^{-3/2}\sin v] - 2e \end{aligned} \quad (240)$$

avec  $\mathcal{M}$  l'anomalie moyenne du mouvement lagrangien de référence .

Les quantités  $I_1$  et  $I_2$  peuvent être choisies identiquement nulles si , sans changer le moment cinétique , on modifie un peu l'énergie et l'instant de passage au périapse du mouvement lagrangien de référence (lequel acquies alors la même énergie que le mouvement voisin étudié) . Une petite rotation de ce mouvement lagrangien permet alors d'annuler  $I_3$  et  $I_4$  .

Ces modifications correspondent précisément à la réduction due aux intégrales premières , elles permettent d'éliminer  $n, p, x, y$  et conduisent à l'hamiltonien quadratique suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \frac{N}{M} \quad ; \quad \mathcal{P} = \frac{P}{M} \\ H_2(X, Y, \mathcal{N}, \mathcal{P}) &= \frac{(\mathcal{N} + Y)^2 + (\mathcal{P} - X)^2}{2} - \\ &\quad - \frac{3}{8(1 + e \cos v)} \left[ X^2 \left( 1 + \frac{3m_3}{\mathcal{M}} \right) + 2XY\sqrt{3} \frac{m_1 - m_2}{\mathcal{M}} + 3Y^2 \frac{m_1 + m_2}{\mathcal{M}} \right] \\ \frac{dX}{dv} &= \frac{\partial H}{\partial \mathcal{N}} = \mathcal{N} + Y \quad ; \quad \frac{d\mathcal{N}}{dv} = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad ; \quad \text{etc...} \end{aligned} \quad (241)$$

On notera que si  $m_3 \rightarrow 0$  on retrouve la part en  $n, p, x, y$  de  $H_2$  donné en (223) et ces deux hamiltoniens sont en fait équivalents si l'on fait la transformation canonique suivante avec un angle  $u$  approprié :

$$\begin{aligned} X &= x_1 \cos u - y_1 \sin u \quad ; \quad \mathcal{N} = n_1 \cos u - p_1 \sin u \\ Y &= x_1 \sin u + y_1 \cos u \quad ; \quad \mathcal{P} = n_1 \sin u + p_1 \cos u \end{aligned} \quad (242)$$

d'où :

$$H_2(x_1, y_1, n_1, p_1) = \frac{(n_1 + y_1)^2 + (p_1 - x_1)^2}{2} - \frac{3}{4(1 + e \cos v)} [x_1^2(1 + N_1) + (y_1^2(1 - N_1))] \quad (243)$$

avec :

$$N_1 = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_1 m_2 - m_1 m_3 - m_2 m_3}}{(m_1 + m_2 + m_3)} \quad (244)$$

soit , avec  $S$  défini en (235) :

$$N_1 = \sqrt{1 - 3S} \quad (245)$$

Ce  $N_1$  est valable aussi bien dans le cas restreint que dans le cas général , c'est le  $N$  des équations (69) et (75) , il conduit immédiatement aux équations différentielles (75) c'est à dire en otant les indices un :

$$\begin{aligned} 2(1 + e \cos v) \left[ \frac{d^2 x}{dv^2} - 2 \frac{dy}{dv} \right] &= 3(1 + N)x \\ 2(1 + e \cos v) \left[ \frac{d^2 y}{dv^2} + 2 \frac{dx}{dv} \right] &= 3(1 - N)y \end{aligned} \quad (246)$$

Les pulsations propres  $\omega_1$  et  $\omega_2$  associées à l'hamiltonien (241), ne dépendent donc que de  $e$  et de  $S$ , leurs valeurs étant données en (235) pour  $e = 0$ . Ainsi, pour le premier ordre, le problème général est ramené au problème restreint.

Le système (246) est décomposable, en effet considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 4N(1 + e\cos v)\frac{dx}{dv} &= (e^2 \sin 2v - 2Nes\sin v)x + [e^2 \cos 2v + 4N(1 + e\cos v) - 3N^2 - Q]y \\ 4N(1 + e\cos v)\frac{dy}{dv} &= (e^2 \cos 2v - 4N(1 + e\cos v) - 3N^2 + Q)x - [e^2 \sin 2v + 2Nes\sin v]y \end{aligned} \quad (247)$$

Le système linéaire (247) n'est que d'ordre 2 et ses solutions sont des solutions particulières du système (246) pourvu que :

$$Q = \pm[e^4 + 2N^2e^2 + 9N^4 - 8N^2]^{1/2} \quad (248)$$

c'est à dire, avec  $N = \sqrt{1 - 3S}$  :

$$Q = \pm[e^4 + e^2(2 - 6S) + 1 - 30S + 81S^2]^{1/2} \quad (249)$$

Avec  $Q < 0$  on obtient la pulsation propre positive  $\omega_1(0, 5 \leq \omega_1 \leq 1)$  et avec  $Q \geq 0$  on obtient la pulsation  $\omega_2(-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \omega_2 \leq 0)$ .

Les approximations suivantes au voisinage de  $S = 0$  ou de  $e = 0$  peuvent être obtenues:

1) Au voisinage de  $S = 0$  :

$$\omega_1 = 1 - \frac{9S(3 + e^2)}{4[1 + e^2 + \sqrt{1 - e^2}](1 + e^2)^{1/2}(1 - e^2)^{1/4}} + O(S^2) \quad (250)$$

$$\omega_2 = -\frac{3\sqrt{3S}(1 + e^2)^{1/2}}{2(1 - e^2)^{5/4}} + O(S^{3/2}) \quad (251)$$

2) Au voisinage de  $e = 0$  :

$$\omega^2 = \frac{1 - \varphi}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{3e^2(2 + 27S)}{8(2\varphi - 1)} + O(e^4) \quad (252)$$

avec

$$\begin{cases} \varphi = \frac{Q}{N} = \pm\{1 - 27S + 2e^2 + \frac{e^4}{1 - 3S}\}^{1/2} \\ \text{pour } \omega_1 : \varphi \leq 0 ; \omega_1 > 0 \\ \text{pour } \omega_2 : \varphi \geq 0 ; \omega_2 \leq 0 \end{cases} \quad (253)$$

Dans le cas général les pulsations propres ont été obtenues numériquement par Madame Françoise Rannou-Montigny avec un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 et des calculs sur CDC-CYBER 170/855 et sur CRAY-XMP416 avec une précision de 14 décimales et des mots de 64 caractères .

On en déduit les discussions suivantes .

#### IV-6-1-Cas circulaire général . Trois masses quelconques -Orbites circulaires.

Dans ce cas l'hamiltonien est autonome , sa période et la pulsation  $\omega_0$  correspondante ne jouent donc aucun rôle . Le paramètre essentiel est le rapport  $S$  :

$$S = \frac{(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \quad (254)$$

avec :

$$\left. \begin{array}{l} S > \frac{1}{27} : \text{ instabilité exponentielle } \\ S \leq \frac{1}{27} : \text{ cas critique } \end{array} \right\} \quad (255)$$

Dans le cas critique les pulsations importantes sont les trois ou quatre pulsations propres définies en (234) (235) (236) :

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 = \{0,5[1 + \sqrt{1 - 27S}]\}^{1/2} \in [\frac{\sqrt{2}}{2}; 1] \\ \omega_2 = -\{0,5[1 - \sqrt{1 - 27S}]\}^{1/2} \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0] \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 = 1 \end{array} \right\} \quad (256)$$

$\omega_{cg} = 1$  (cg : circulaire général )

$\omega_3 = 1$  : dans le cas tridimensionnel

Il y a bien sûr la résonance  $\omega_{cg} = \omega_3$  mais par chance ces deux pulsations propres ayant le même signe elles n'induisent pas de résonance positive dangereuse pour la stabilité (voir (51) en section II-4-2) .

D'où l'analyse suivante :

1<sup>er</sup> cas - Le rapport  $S$  est tel que les pulsations propres  $\omega_1, \omega_2, 1$  n'ont pas de relation rationnelle (cas général) .

Il y a alors trois quasi-intégrales indépendantes du type  $\sum e_k(p_{Nk}^2 + q_{Nk}^2)$  :

$$\left. \begin{array}{l} (p_{N1}^2 + q_{N1}^2) \\ (p_{N2}^2 + q_{N2}^2) \\ (p_{Ncg}^2 + q_{Ncg}^2 + p_{N3}^2 + q_{N3}^2) \end{array} \right\} \quad (257)$$

Ces trois quasi-intégrales suffisent à assurer la stabilité à tous les ordres . Il y a même “rotation différentielle généralisée de Birkhoff ” dans le cas du problème plan ( $p_{N3} \equiv q_{N3} \equiv 0$ ) .

2<sup>e</sup> cas - Les pulsations propres  $\omega_1, \omega_2, 1$  ont une seule relation rationnelle :

$$\left. \begin{array}{l} a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3 = 0 \\ \overrightarrow{(a_1, a_2, a_3)} \neq 0 \quad ; \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \quad (258)$$

Il y a alors deux quasi-intégrales indépendantes du type  $\sum e_k(p_{Nk}^2 + q_{Nk}^2)$  , par exemple :

$$\left. \begin{array}{l} a_2(p_{N1}^2 + q_{N1}^2) - a_1(p_{N2}^2 + q_{N2}^2) \\ a_3(p_{N1}^2 + q_{N1}^2) - a_1(p_{Ncg}^2 + q_{Ncg}^2 + p_{N3}^2 + q_{N3}^2) \end{array} \right\} \quad (259)$$

Ces quasi-intégrales peuvent entraîner “la stabilité à tous les ordres ” . Il faut et il suffit pour cela que la résonance ne soit pas une “résonance positive ” (voir (51) section II-4-2) , c’est à dire que l’un au moins des trois produits  $a_i a_j$  soit négatif (ce qui nécessite  $a_1 a_3 < 0$  puisque  $\omega_1 > 0 \geq \omega_2$ ) .

S’il y a résonance **positive** ( $a_1 a_3 \geq 0$ ) il peut y avoir une “instabilité puissance m ” avec toutefois :

$$\left. \begin{array}{l} m \geq |a_1 + a_2 + a_3| - 1 \\ a_1, a_2, a_3 : \text{premiers entre eux dans leur ensemble} \end{array} \right\} \quad (260)$$

3<sup>e</sup> cas - Les pulsations propres  $\omega_1, \omega_2, 1$  ont deux relations rationnelles , ce qui revient à dire que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont toutes deux rationnelles (par exemple  $\omega_1 = 0,8$  ;  $\omega_2 = -0,6$  pour  $S = 64/1875$  .

Il y a alors toujours résonance positive et il n’y a plus qu’une seule quasi-intégrale du type  $\sum e_k(p_{Nk}^2 + q_{Nk}^2)$  :

$$\omega_1(p_{N1}^2 + q_{N1}^2) + \omega_2(p_{N2}^2 + q_{N2}^2) + (p_{Ncg}^2 + q_{Ncg}^2 + p_{N3}^2 + q_{N3}^2) \quad (261)$$

Cette quasi-intégrale est évidemment insuffisante pour assurer la stabilité à tous les ordres , car  $\omega_2 \leq 0$  , et il devient nécessaire d’étudier les ordres supérieurs et de rechercher la quasi-intégrale  $\mathcal{H}_N$  (comme cela l’est aussi dans le cas (260) d’une résonance positive ) .

On peut conjecturer que :

Les résonances positives d’ordre 3 :

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 + 2\omega_2 = 0 \quad ; \quad (S = 16/675) \\ 1 + 2\omega_2 = 0 \quad ; \quad (S = 1/36) \end{array} \right\} \quad (262)$$

conduisent toujours ou presque toujours à des instabilités puissance 2 .

Les résonances positives d'ordre 4 :

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 + 3\omega_2 = 0 \quad ; \quad (S = 1/75) \\ 1 + 3\omega_2 = 0 \quad ; \quad (S = 32/2187) \end{array} \right\} \quad (263)$$

conduisent très souvent (en fonction du rapport  $\frac{m_2}{m_3}$ ) ou même toujours à des instabilités puissance 3 .

Les autres résonances , même positives , conduisent à la stabilité à tous les ordres .

#### IV-6-2—Cas elliptique plan .

Dans ce cas , qu'il soit restreint ( $m_3$  infinitésimal) ou général ( $m_1, m_2, m_3$  positifs ) il y a d'abord la discussion de la figure III-6 ( section III-2-2 ) reproduite ci-après (fig. IV-6) en fonction de l'exentricité  $e$  et du rapport  $S$  . La majeure partie du domaine , en particulier toute celle pour laquelle  $S \geq 0,04478$  , correspond à des cas d'instabilité exponentielle mais il y a tout de même deux petits triangles curvilignes correspondant à des cas critiques .

Dans ces cas critiques il y a trois pulsations importantes :

$\omega_0 = 1$  dû à la période  $2\pi$  de l'hamiltonien .

$\omega_1$  et  $\omega_2$  fonctions de  $e$  et  $S$  , tirés de (250)-(253) et de l'analyse numérique du système (247)-(249) .

Comme dans le cas précédent l'essentiel est de voir s'il y a ou non une résonance positive mais celles -ci sont un peu différentes car  $\omega_0$  ne joue pas le même rôle que les pulsations propres  $\omega_1$  et  $\omega_2$  . Il nous faut :

$$\left. \begin{array}{l} a_0\omega_0 + a_1\omega_1 + a_2\omega_2 = 0 \\ \text{avec} \quad \quad \quad : \quad \overrightarrow{(a_0, a_1, a_2)} \neq 0 \quad ; \quad a_0 \in \mathbb{Z} \quad ; \quad a_1, a_2 \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \quad (264)$$

Les deux domaines du point  $\omega_1, \omega_2$  sont dessinés ci-dessous en (fig.IV-5) , ils correspon-

dent aux domaines avec les mêmes lettres de la fig.IV-6 .

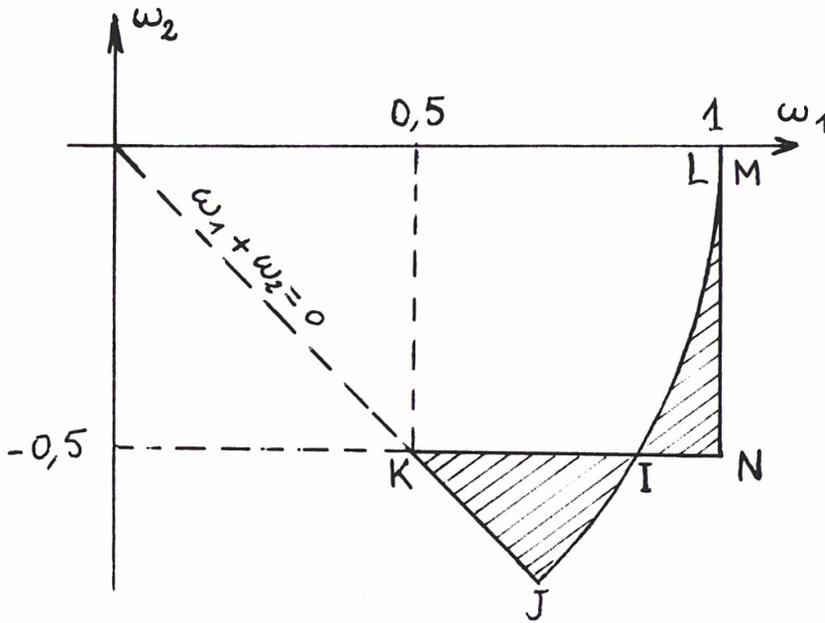


fig.IV-5 : Les deux domaines du point  $\omega_1, \omega_2$  .

$$\begin{aligned}
 LIJ : & \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = 1 \quad ; \quad e = 0 \\
 LM : & \quad \omega_1 = 1 \quad ; \quad \omega_2 = 0 \quad ; \quad S = 0 \\
 MN : & \quad \omega_1 = 1 \quad ; \quad S = 0 \quad ; \quad e = 1 \\
 NIK : & \quad \omega_2 = -0,5 \\
 KJ : & \quad \omega_1 + \omega_2 = 0 \quad ; \quad Q = 0 \quad (\text{voir}(249))
 \end{aligned}$$

On en déduit les résonances positives correspondantes :

1)- Résonances positives d'ordre 1 ou 2 (\*) sur les bords des deux domaines .

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_1 = 1 & \quad (LM \quad \text{et} \quad MN \quad ; \quad S = 0) \\
 \omega_2 = 0 & \quad (LM \quad ; \quad S = 0) \\
 2\omega_1 = 1 & \quad (\text{point} \quad K) \\
 \omega_1 + \omega_2 = 0 & \quad (KJ \quad ; \quad Q = 0) \\
 2\omega_2 = -1 & \quad (KIN)
 \end{aligned} \right\} \quad (265)$$

Ces résonances conduisent souvent à "l'instabilité puissance un " comme dans le cas  $S = 0$  ,  $\omega_1 = 1$  ,  $\omega_2 = 0$  où les mouvements de  $m_2$  et  $m_3$  sont des mouvements képlériens

(\*) L'ordre d'une résonance est ici la somme  $a_1 + a_2$  des coefficients des pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  .

indépendants (qui peuvent avoir des périodes légèrement différentes) . cependant il n'en est pas toujours ainsi comme le montre le cas limite de la section IV-5 .

2)- Résonances positives d'ordre 3 .

$$\left. \begin{array}{lll} 3\omega_1 = 2 & \text{courbe} & FG \\ 2\omega_1 + \omega_2 = 1 & \text{courbe} & CE \\ \omega_1 + 2\omega_2 = 0 & \text{courbe} & BN \\ 3\omega_2 = -1 & \text{courbe} & AN \\ 3\omega_2 = -2 & \text{courbe} & DF \end{array} \right\} \text{figure : IV - 6} \quad (266)$$

Ces résonances positives d'ordre 3 sont très dangereuses pour la stabilité et entraînent presque toujours l'apparition d'une "instabilité puissance 2" .

3)- résonances positives d'ordre 4 .

$$\left. \begin{array}{l} 4\omega_1 = 3 \\ 3\omega_1 + \omega_2 = 2 \\ 2\omega_1 + 2\omega_2 = 1 \\ \omega_1 + 3\omega_2 = 0 \\ \omega_1 + 3\omega_2 = -1 \\ 4\omega_2 = -1 \end{array} \right\} (267)$$

Ces résonances positives d'ordre 4 sont nettement moins dangereuses que les précédentes pour la stabilité (une certaine inégalité doit être satisfaite) , elles entraînent néanmoins assez souvent l'apparition d'une "instabilité puissance 3" ; c'est le cas en particulier pour la résonance  $\omega_1 + 3\omega_2 = 0$  déjà déstabilisante dans le problème restreint circulaire .

4)- Résonances positives d'ordre 5 et plus .

Ces résonances sont bien sûr "partout denses" mais heureusement elles ne sont pas en général dangereuses pour la stabilité . Pour qu'elles le deviennent il faut que soient satisfaites un certain nombre d'égalités , nombre d'autant plus élevé que l'ordre de la résonance est plus élevé car il faut considérer les termes de l'hamiltonien jusqu'au degré égal à l'ordre de la résonance .

C'est ainsi que , par exemple , dans le cas circulaire restreint plan exposé en sections III-3 et III-5 , seules les résonances positives d'ordre 1 , 3, 4 entraînent l'instabilité .

5)- Cas sans résonance positive .

Dans ce dernier cas , qui est le cas général , il y a bien sûr stabilité à tous les ordres. Rappelons toutefois que la stabilité à tous les ordres n'entraîne pas nécessairement la stabilité stricte , elle peut aussi conduire à une très lente instabilité par diffusion d'Arnold.

La section III-3-3 , montre la "stabilité effective" c'est à dire la très faible différence qu'il y en a en pratique entre stabilité stricte et "stabilité à tous les ordres" .

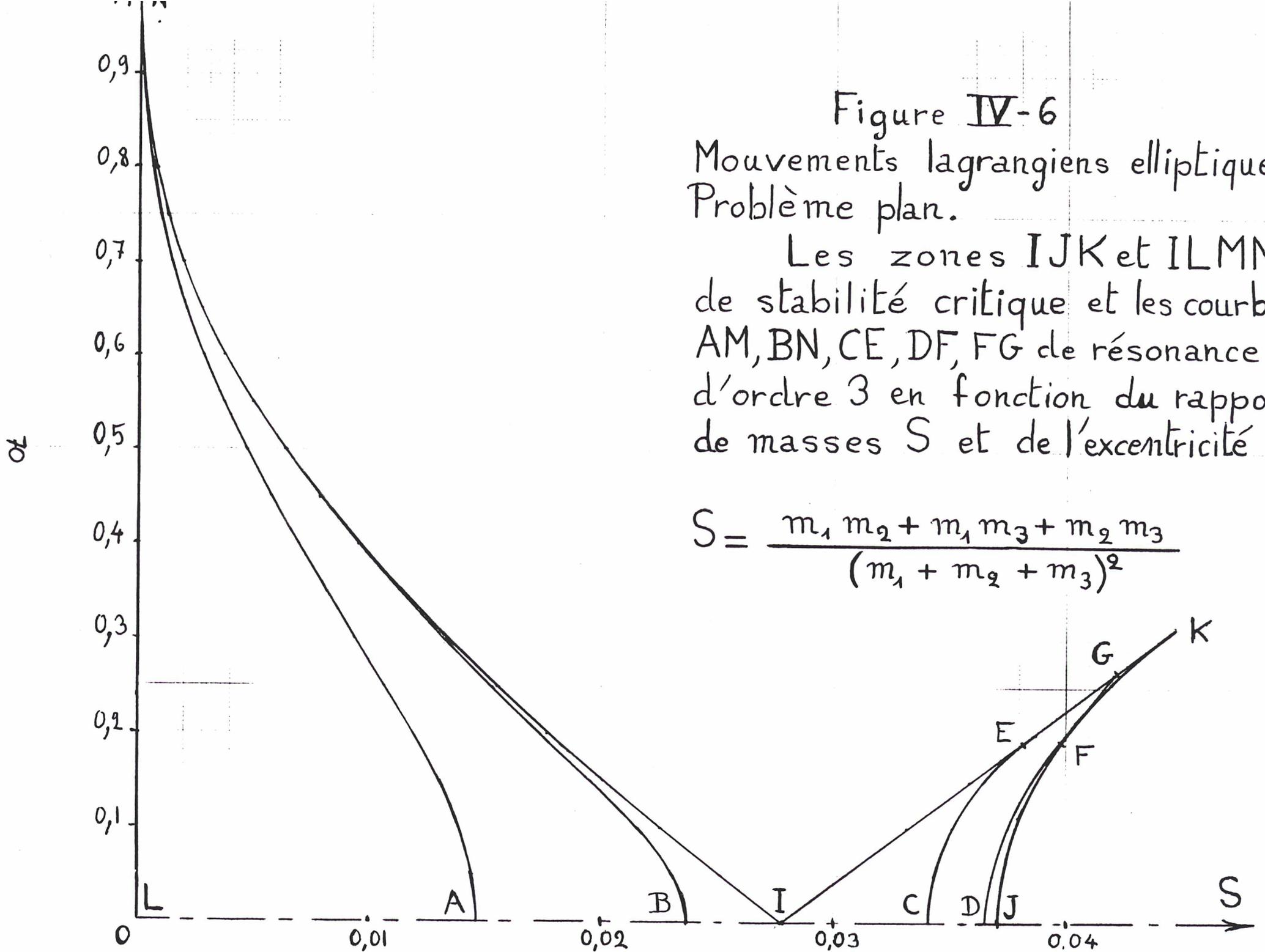


Figure IV-6

Mouvements lagrangiens elliptiques.  
Problème plan.

Les zones IJK et ILMN de stabilité critique et les courbes AM, BN, CE, DF, FG de résonance d'ordre 3 en fonction du rapport de masses  $S$  et de l'excentricité  $e$ .

$$S = \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}$$

### IV-6-3- Résultats numériques pour la figure IV-6 .

$S(e)$  pour les courbes AN , BN , IN , IK , CE , DF et FG .

e	$S_{AN}$	$S_{BN}$	$S_{IN}$	$S_{IK}$	$S_{CE}$	$S_{DF}$	$S_{FG}$
0	$\left\{ \begin{array}{l} 32/2187 \\ 0,01463 \end{array} \right.$	16/675	1/36	1/36	64/1875	80/2187	
0,05	0,01443	0,02307	0,02515	0,03046	0,03437	0,03683	
0,1	0,01384	0,02150	0,02259	0,03318	0,03512	0,03755	
0,15	0,01295	0,01953	0,02011	0,03592	0,03645	0,03866	PointF
0,2	0,01187	0,01742	0,01774	0,03866	PointE	PointF	0,04006
0,25	0,01065	0,01531	0,01549	0,04137			0,04166
0,3	0,00938	0,01326	0,01336	0,04403			PointG
0,35	0,00811	0,01132	0,01137	PointK			
0,4	0,00688	0,00950	0,00953				
0,45	0,00572	0,00783	0,00784				
0,5	0,00464	0,00631	0,00632				
0,55	0,00366	0,00495	0,00495				
0,6	0,00280	0,00377	0,00377				
0,65	0,00205	0,00276	0,00276				
0,7	0,00142	0,00191	0,00191				
0,75	0,00092	0,00123	0,00123				
0,8	0,00054	0,00072	0,00072				
0,85	0,00027	0,00035	0,00035				
0,9	0,00010	0,00013	0,00013				
0,95	0,00002	0,00002	0,00002				
1	0	0	0				

Les points limites :

	e	S
PointE	0,19285	0,038274
PointF	0,19116	0,039800
PointG	0,26443	0,042258
PointK	0,31447	0,044781

La courbe limite JFK est simple , son équation est  $Q = 0$  soit :

$$S = \frac{[5 + e^2 - \sqrt{16 - 8e^2 - 8e^4}]}{27} \quad (268)$$

avec donc pour  $e = 0$  :

$$S = S_J = \frac{1}{27} = 0,037037... \quad (269)$$

#### IV-6-4—Cas elliptique tri-dimensionnel .

L'analyse de ce cas est très semblable à celle du cas précédent avec l'instabilité exponentielle hors des triangles curvilignes IJK et ILM de la figure IV-6 et l'instabilité puissance 2 sur les courbes tracées dans ces deux triangles , mais il y a aussi la différence essentielle suivante .

En plus de la pulsation  $\omega_0 = 1$  et des deux pulsations propres  $\omega_1(e, S)$  et  $\omega_2(e, S)$  du cas précédent il y a aussi la pulsation propre  $\omega_3 = 1$  due aux petits mouvements normaux au plan d'orbite .

L'égalité des pulsations  $\omega_0$  et  $\omega_3$  entraîne une situation particulière : il y a toujours résonance positive .

A cause de la symétrie  $+z/-z$  l'ordre de cette résonance , c'est à dire le degré du premier terme correspondant de l'hamiltonien , est 4 et non pas 3 . C'est un facteur favorable : la résonance est souvent dangereuse sans l'être presque toujours ; Il y a cependant peut être de larges zones des triangles IJK et ILM de la figure IV-6 où le mouvement est instable dans le cas elliptique tri-dimensionnel ( "instabilité puissance 3 " ) .

Ce problème difficile mériterait d'être étudié .

## CONCLUSIONS

Le théorème de quasi-résonance et les notions qui y sont associées permettent une étude approfondie des solutions critiques des systèmes hamiltoniens .

L' application de ces notions aux mouvements lagrangiens du problème des trois corps fournit un grand nombre de résultats nouveaux qui élargissent considérablement ce qui avait été obtenu de manière classique .

Il reste toutefois deux domaines où des progrès importants sont encore à faire .

1) La question de la diffusion d'Arnold .

Cette très lente instabilité est encore mal comprise et menace en théorie la plupart des systèmes "stables à tous les ordres " , même si en pratique ses effets peuvent être généralement négligés .

2) Dans le problème lagrangien elliptique tri-dimensionnel existe une résonance générale d'ordre 4 qui menace de détruire la stabilité dans une grande proportion des "cas critiques " ou cas "stable au premier ordre " .

## REFERENCES

- [1]-ARNOLD V.I. (1961) : The stability of the equilibrium position of hamiltonien system of ordinary differentiel equations in the general elliptic case . Dokl. Akad. Nauk ., U.S.S.R , 137 , pp.255.257.
- [2]- ARNOLD V.I (1976) :Méthodes mathématiques de la mécanique classique . Mir-Moscou .
- [3]-ALOTHMAN ALRAGHEB , A. (1986) :Influence des Perturbations d'ordre élevé sur la stabilité des solutions des systèmes hamiltoniens (Cas a deux degrés de liberté ) . Thèse d'Etat . Observatoire de Paris .
- [4]- BENNETT , A .(1965) : Chracteristic Exponents of the Five Equilibrium Solutions in the Elliptically Restricted Problem . Icarus , 4 , pp. 177-187 .
- [5]- BIRKHOFF , G.D. (1927) : Dynamical Systems . Amer. Math. Society. New-York.
- [6]- BROUCKE , R. (1976) : On the Characteristic Exponents of the General Three-body Problem . V. Szebehely and B.P. Tapley (ed.). Long-Time Predictions in Dynamics.
- [7]- CAPODANNO , P. (1980) : Théorie de la stabilité . Cours de 3<sup>eme</sup> cycle . Université de Besançon .
- [8]- DANBY , J.M.A. (1964) : Stability of the triangular points in the Elliptic Restricted Problem of Three-Bodies . The Astronomical Journal , vol. 69 , n<sup>o</sup>2 pp. 165-172 .
- [9]- DEPRIT , A. (1966) : Motion in the vicinity of the tiangular Libration Centers . Lectures in Applied Mathematics , vol. 6 , Part 2 . American Math. Society.
- [10]- DEPRIT ,A. DEPRIT-BARTHOLOMÉ , A. (1967) : Stability of the Triangular Lagrangien Points . The Astrnomicl Journal , vol. 72 , n2 . pp. 173-179.
- [11]- DEPRIT ANDRÉ , JACQUES HENRARD , J.F.PRICE , and ARNOLD ROM .(1969) : Birkhoff's normalization . Celestial Mechanics n<sup>o</sup>1 , pp.222-251.
- [12]- DEPRIT , A. ; HENRARD , J.(1970) : The Trojan manifold-Survey and conjectures G.E.O. Giacaglia (ed.) Periodics orbits , Stability and Resonances .1-18 .
- [13]- FLOQUET , G. (1883) : Sur les équations différentielles linéaires à coefficients

périodiques . Annales de l'Ecole Normale Supérieure de Paris 2<sup>e</sup> série (12) pp.47-89 .

[14]- GIORGILLI, A. ; DELSHAMS , A. ; FONTICH , E. ; GALGANI , L. ; SIMO , C. (1989) : Stability for a Hamiltonian System near an Elliptic Equilibrium Point , with an Application to Restricted Three Body Problem . Journal of differential Equations ,77 ; pp. 167-198 .

[15]- GREBENIKOV, E.A. (1964) : On the stability of the Lagrangien Triangle Solutions of the Restricted Elliptic Three-body Problem . Soviet. Astronomy. vol. 8 , n3 . pp.451-459 .

[16]- HENON , M. ; ROELS , J. (1967) :Recherche des courbes invariantes d'une transformation ponctuelle plane conservant les aires . Bull. Astron. , série 3 , 2, pp.267-285.

[17]- KARABALLI , A. (1986) : Sur la régularisation des collisions doubles et la recherche des formes normales au voisinage de l'équilibre dans les systèmes hamiltoniens . Thèse d'Etat . Observatoire de Paris .

[18]- KOVALEVSKY , J. (1963) :Introduction à la mécanique céleste . Librairie Armand colin , Paris .

[19]- LAGRANGE (1773) : Essai sur leproblème des 3 corps . Paris ,œuvres de Lagrange , vol. 6 .

[20]-LEONTOVICH , A.M. (1962) : On the stability of Lagrange's periodic Solutions of the restricted three-body problem . Dokl. Akad. Nauk. , U.S.S.R. , 143 , pp.525-528 .

[21]- LIAPOUNOFF , A. (1949) : Problème général de la stabilité du mouvement . Annales de l'Université de Toulouse (2) , t.9 , pp.203-469.

[22]- LOSCO , L. (1978) : Sur une propriété des exposants caractéristiques des systèmes hamiltoniens . Journal de Mécanique . vol. 17 n2 .

[23]- MARCHAL , C. (1968) : Etude de la stabilité des solutions de Lagrange du problème des trois corps . Cas où l'exentricité et les trois masses sont quelconques . Séminaire du bureau des Longitudes (1967-1968) .

[24]- MARCHAL , C. (1980) : The Quasi-Integrals . Celest. Mech. , n21 . pp. 183-191.

[25]- MARCHAL , C. (1988) : Le Théorème de quasi-résonance . C.R.Acad.Sci.Paris , t.306. Série II , pp.505-508 .

[26]-MARCHAL , C. (1988) : The near-resonance theorem : Analysis of the vicinity of periodic solutions of analytic differential systems . A.E.ROY , Ed. Kluwer Academic Publishers . pp.427-448 .

[27]- MARCHAL , C. (1990) : The three-body problem . Elsevier Science Publishers B.V.

[28]- MARKEEV , A.P. (1968) : Stability of canonical system with two degrees of freedom in the presence of resonance . P.M.M. vol. 32 , n4 , pp.738-744 .

[29]- MARKEEV , A.P. (1969) : On the stability of a non autonomous hamiltonian system with two degrees of freedom . P.M.M. vol. 33 , n3 , pp.563-569 .

[30]- MOSER , J. (1968) : Lectures on Hamiltonian system . Memoirs of A.M.S. , Providence , Rhode Island .

[31]- MOULTON , F.R. (1920) : Periodic orbits , Carnegie Institution of Washington , Washington D.C.

[32]- POINCARÉ , H. (1987) : Méthodes nouvelles de la mécanique céleste . Librairie Scientifique et technique A.Blanchard , nouveau tirage .

[33]-RICHA , C. (1980) : “Cas de régularisation des singularités du problème des n-corps ” . Thèse de 3<sup>e</sup> cycle à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) .

[34]- ROELS , J. ; LOUTERMAN , G. (1970) : Normalisation des systèmes linéaires canoniques et application au problème restreint des trois corps . Celstial Mechanics . 3 , pp. 129-140 .

[35] SIEGEL , C.L.; MOSER , J.K. (1971) : Lectures on Celstial Mechanics . Springer Verlag , Berlin , Heidelberg , New-York .

[36]- SIEGEL , C.L.(1952) : “Uber die normal form analytischer Differential-Gleichungen in der Nahe einer Gleichgewichtlosung . Nach.der Akad. Wiss. Gottingen pp.21-30 .

[36]-THIRY , Y. (1970) : Les fondements de la mécanique céleste . Gordon et Breach ,Paris .

## TABLES DES MATIERES

INTRODUCTION . . . . .	1
------------------------	---

### Première partie : Etude théorique

<b>CHAPITRE I : Transformations et simplifications . . . . .</b>	<b>5</b>
I-1—Simplification du premier ordre . . . . .	5
I-2—Périodicité des termes d'ordre supérieur . . . . .	5
I-3—Théorème de Siegel . . . . .	5
I-4—Théorème de quasi-résonance . . . . .	6
<b>CHAPITRE II : Application du théorème de quasi-résonance . . . . .</b>	<b>8</b>
II-1—Réduction à l'origine . . . . .	8
II-2—Simplification des termes du second ordre . . . . .	9
II-3—Application du théorème de quasi-résonance . . . . .	11
II-4—Etude de la stabilité et de l'influence des termes d'ordre élevé - Les quasi-intégrales . . . . .	12
II-4-1—Généralisation de la rotation de Birkhoff . . . . .	12
II-4-2—Résonances et quasi-intégrales . . . . .	13
II-4-3—Les principaux types de stabilité et d'instabilité . . . . .	15

### Deuxième partie

#### Une application dans le problème des trois corps

<b>CHAPITRE III :</b>	
<b>Les solutions d'Euler et de Lagrange - Résultats classiques . . . . .</b>	<b>16</b>
III-1—Les solutions d'Euler et de Lagrange . . . . .	16

III-2—Les études du premier ordre . Stabilité . . . . .	17
III-2-1-Problème restreint circulaire plan . . . . .	18
III-2-2-Problème restreint elliptique . . . . .	20
III-2-3-Problème elliptique tridimensionnel général . . . . .	22
III-3—Stabilité . Les études des termes d'ordre supérieur . . . . .	25
III-3-1-Problème restreint circulaire plan - les équations sous forme hamiltonienne . . . . .	25
III-3-2-Discussion de la stabilité . . . . .	28
III-3-3-Problème restreint circulaire tri-dimensionnel "La stabilité effective"	28
<b>CHAPITRE IV :</b>	
<b>Stabilité des solutions de Lagrange . Les nouveaux résultats . . . . .</b>	<b>30</b>
IV-1—Problème restreint circulaire tri-dimensionnel . Les équations du mouvement . . . . .	30
IV-2—Les simplifications . . . . .	32
IV-2-1—détermination des expressions de $H_{b3}$ et de $\varepsilon$ . . . . .	37
IV-2-2—détermination des termes intéressants de $H_{34}$ . . . . .	39
IV-2-2-1—détermination de $h_{24}$ : . . . . .	41
IV-2-2-2—détermination de $\varphi_1$ : . . . . .	41
IV-2-2-3—détermination de $\varphi_2$ : . . . . .	43
IV-2-3—détermination des termes venants de $H_{a4}$ : . . . . .	43
IV-3—La résonance $\omega_1 + 3\omega_2 = 0$ . . . . .	45
IV-4—Les résonances d'ordre cinq et plus . . . . .	46
IV-5—Le cas limite $\omega_1 + \omega_2 = 0$ . . . . .	50
IV-6—Les cas de trois masses quelconques . Les cas de mouvements elliptiques .	57
IV-6-1-cas circulaires général . Trois masses quelconques . Orbites circulaires .	65
IV-6-2-cas elliptique plan . . . . .	67
IV-6-3-Résultats numériques pour la figure IV-6 . . . . .	71
IV-6-4-cas elliptique tri-dimensionnel . . . . .	72
<b>CONCLUSIONS . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>REFERENCES . . . . .</b>	<b>74</b>
<b>TABLES DES MATIERES . . . . .</b>	<b>77</b>

