

Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement.

Aurélie Chesnais

▶ **To cite this version:**

Aurélie Chesnais. Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement.. Education. Université de Montpellier, 2018. tel-02046178

HAL Id: tel-02046178
https://hal.science/tel-02046178

Submitted on 13 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Montpellier

Ecole Doctorale I2S

Note de synthèse

En vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches

Aurélie Chesnais

Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement

Date de soutenance : 26 novembre 2018

Membres du jury

M. Denis BUTLEN	Université de Cergy-Pontoise	Rapporteur
Mme Lalina COULANGE	Université de Bordeaux	Rapporteur
Mme Viviane DURAND-GUERRIER	Université de Montpellier	Assesseur
Mme Claire MARGOLINAS	Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand	Rapporteur
Mme Susan PREDIGER	Technische Universität Dortmund	Assesseur
M. Jean-Yves ROCHEX	Université Vincennes-Saint-Denis – Paris 8	Assesseur
M. Fabrice VANDEBROUCK	Université Denis Diderot – Paris 7	Assesseur

Ce qui distingue l'homme comme espèce n'est pas seulement sa capacité d'apprendre mais également celle d'enseigner.

Jérôme Bruner, 1983

Table des matières

Note de synthèse : un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement 5

Introduction 5

Chapitre 0 - présentation rapide du cadre théorique et méthodologique 7

Cadre théorique 7

Du côté des élèves 8

Du côté des enseignants 9

Implications méthodologiques 10

L'étude de l'objet d'apprentissage 11

L'analyse des tâches 11

Caractérisation des pratiques : scénario et déroulement 12

Apprécier l'effet des pratiques sur les apprentissages 14

Retour sur les pratiques – les logiques d'action sous-jacentes 14

Précisions sur les corpus des différentes études mentionnées dans la note 15

Chapitre I – les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves 16

La question des inégalités scolaires 16

Contexte actuel des recherches sur les inégalités scolaires 16

Deux premiers résultats qui questionnent 18

Quelques apports de mes recherches pour nourrir le débat 23

Discussion 36

Conclusion sur les apports de mes travaux concernant la question des inégalités scolaires 41

Comment mes recherches sur les inégalités scolaires alimentent la compréhension plus générale du processus d'enseignement-apprentissage 43

Les effets des pratiques sur les apprentissages 43

Le fonctionnement des pratiques enseignantes 46

Chapitre II – étudier le processus d'enseignement-apprentissage dans le contexte scolaire : quel cadre théorique pour quelles questions ? 49

Les motivations de l'émergence d'une nouvelle approche théorique 49

Retour sur des outils théoriques et méthodologiques 50

L'analyse des tâches 51

L'analyse des déroulements 53

L'appréciation des effets des pratiques sur les apprentissages 54

Le fonctionnement des pratiques enseignantes 55

Les analyses de contenus 56
Un exemple à propos de la symétrie orthogonale 57
Un exemple à propos de la notion de mesure 59
Conclusion sur les analyses de contenus 65
Quelques éléments concernant la question de la formation 67
Conclusion 68
Chapitre III – le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques 71
Quelques études exploratoires autour de la question du rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques 73
La complexité des pratiques langagières relatives à la symétrie orthogonale et aux relations entre objets mathématiques 74
Quelle prise en charge de ces enjeux langagiers en tant qu'objets d'apprentissage et d'enseignement ? 79
La prise en charge d'*autres enjeux langagiers* dans les classes de mathématiques 92
Le rôle du langage dans l'activité des enseignants 101
Conclusions provisoires 103
Problématiser les questions liées au rôle du langage dans le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques 104
Langage, mathématiques et apprentissage des mathématiques : situer le débat 104
Caractériser les pratiques langagières mathématiques 106
Langage et apprentissage des mathématiques 111
Conclusion et perspectives 119
Langage et enseignement des mathématiques 119
Langage et inégalités scolaires 120
Pour conclure 122
Conclusion générale 124
Références 125

Note de synthèse : un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement

Introduction

Les questions initiales qui m'ont amenée à l'enseignement des mathématiques puis à la recherche en didactique portaient sur la compréhension de ce qui se produit au quotidien dans les classes de mathématiques, en particulier dans des classes où les attendus de l'école ne semblent pas rencontrer si facilement les dispositions que les élèves ont construites hors d'elle – voire à l'intérieur même –, et du rôle social de l'école au sein d'une société comme la société française actuelle.

Le choix de l'objet initial de mes recherches – la question des inégalités scolaires – est ainsi à la fois une conséquence logique de mes questionnements d'enseignante de mathématiques et de citoyenne. L'inscription dans l'approche théorique présentée dans cette note est ce qui m'a permis de les formaliser en tant que problématiques de recherche, et de les explorer.

Après une rapide présentation de cette approche, je propose de revenir sur un ensemble de travaux conduits depuis mon engagement dans le champ de la didactique des mathématiques.

La synthèse de mes travaux débute ainsi par ceux qui ont porté sur la problématique des inégalités scolaires dans leurs liens avec l'origine socio-culturelle des élèves et les pratiques enseignantes. Il s'agit, à partir d'un point de vue didactique dont la contribution doit être resituée dans le débat sociologique plus large, d'apporter des éléments concernant la compréhension des mécanismes de formation des inégalités scolaires à l'intérieur de la classe de mathématiques. Je présente ainsi dans la première partie tout d'abord ce débat et la manière dont mes travaux peuvent contribuer à l'avancée de la réflexion. Je montrerai notamment comment ils appellent à ne pas négliger la complexité des processus en jeu, surtout s'il s'agit de penser les conditions d'une 'amélioration du système'. En particulier – et il me semble qu'il y a là un point où la nécessité de recherches conjointes entre sociologues et didacticiens trouve sa pleine justification –, mes travaux montrent que l'on ne peut faire l'économie d'une conceptualisation du fonctionnement des pratiques enseignantes prenant en considération cette complexité. L'étude de la construction des inégalités scolaires constitue aussi un moyen d'explorer la question plus large du fonctionnement du processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques dans le cadre scolaire. Il s'agit ainsi de mieux comprendre le fonctionnement des pratiques enseignantes dans différents contextes et leurs effets sur les apprentissages des élèves. La fin de la première partie sera l'occasion de mettre en évidence ce que mes travaux concernant les inégalités scolaires apportent comme éléments de réponse à ces questions plus générales.

Ces recherches m'ont également amenée, dans de multiples allers-retours entre le travail expérimental et l'élaboration théorique, à revenir sur les fondements de l'approche didactique

articulant les apports de Piaget et Vygotsky[1], ancrée en théorie de l'activité, dans laquelle s'inscrivent mes travaux. Il s'agit en particulier de mieux comprendre ses spécificités et comment elles amènent à formuler les questions d'une manière originale au regard d'autres cadres théoriques de la didactique des mathématiques française, ainsi qu'à développer des outils théoriques et méthodologiques adaptés aux problématiques ainsi formalisées. Ces réflexions font l'objet de la deuxième partie : je propose de revenir sur quelques outils de la recherche et la manière dont ils sont mis en œuvre pour étudier l'enseignement des mathématiques, l'apprentissage des mathématiques, et aussi les contenus mathématiques eux-mêmes, à partir d'un point de vue piloté par l'intérêt pour l'activité des sujets, en en considérant les dimensions psychologique et sociale différemment d'autres approches théoriques.

J'expose dans la troisième et dernière partie l'état de ma réflexion concernant les recherches plus récentes que j'ai menées et qui portent sur le rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, qui me paraît pertinent à interroger, non seulement pour son intérêt propre, mais aussi au regard de mes recherches sur les inégalités scolaires. Je propose de présenter les résultats obtenus dans de premières études exploratoires, puis de montrer la manière dont cela amène à problématiser plus précisément certaines questions qui sont apparues comme essentielles. Cette thématique émergeant logiquement de mes travaux précédents, je reviendrai également à cette occasion sur des questions d'ordre théorique, ainsi que sur les apports potentiels de telles recherches en lien avec mon premier objet d'étude, à savoir la construction des inégalités scolaires. Il s'agira également de poser quelques jalons pour repositionner ces travaux dans un panorama de recherches internationales sur le sujet.

Dans l'ensemble de la note, je ne mentionne des recherches que j'ai menées que les éléments qui alimentent le fil de la réflexion choisi ; aussi, j'ai bien conscience que certaines synthèses ou évocations peuvent être trop parcellaires pour se faire une idée précise du travail conduit, en particulier de sa méthodologie ou de l'ensemble des résultats, et je prie le lecteur de m'en excuser ; je mentionnerai systématiquement les références permettant d'avoir accès aux éléments complémentaires.

Enfin, je souhaite rappeler que mes recherches, même si j'ai choisi dans l'ensemble d'écrire cette note à la première personne du singulier (sauf pour les parties se référant à des travaux menés en collaboration directe avec d'autres chercheurs), doivent beaucoup aux échanges que j'ai pu avoir avec de nombreux chercheurs, dans des collaborations institutionnalisées ou plus informelles, didacticiens des mathématiques ou non. En particulier, il s'agit des collaborations que j'ai développées avec les didacticiens de la physique et de la chimie du Laboratoire Interdisciplinaire de Recherches en Didactique, Éducation et Formation (LIRDEF) de l'Université de Montpellier, avec les chercheurs du réseau REcherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages (RESEIDA), avec de nombreux membres du Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) de l'université Denis Diderot Paris 7, avec les membres du groupe Langage EnseigneMent et apprentissage des MathématiquEs (LEMME), avec les didacticiens du français et spécialistes de sciences du langage de l'équipe Activité, Langage, Formation et Apprentissage (ALFA) du LIRDEF, enfin avec les membres de l'équipe de Didactique et Épistémologie des MAthématiques (DEMA) de l'Institut de Mathématiques Alexander Grothendieck de Montpellier (IMAG), pour ne citer que ceux-là…

[1] Je retiens l'orthographe du nom choisie par Janine Rogalski.

Chapitre 0 - présentation rapide du cadre théorique et méthodologique

Je ne présente ici que les éléments principaux du cadre théorique mobilisé dans mes recherches. Il s'agit de resituer le cadrage théorique général des différentes recherches que j'ai menées (sans rentrer dans les détails de chaque étude, ce qui sera fait si nécessaire lorsque l'une d'entre elle sera mentionnée dans la suite du texte).

Ce cadre théorique est issu du travail initial de Robert et Rogalski, poursuivi par un certain nombre de chercheurs (dont notamment les co-auteurs de Vandebrouck, 2013). Je ne fais qu'en reproduire ici les éléments cadrant l'utilisation que j'en fais dans mes recherches[2], mais j'invite le lecteur à se reporter aux publications de Rogalski et Robert, aux livres édités par Vandebrouck (2008) ou Vandebrouck et al. (2013), ou encore à Abboud et al. (2017). Davantage de détails sur mon utilisation de ce cadre théorique et les implications méthodologiques dans mes propres recherches figurent en outre dans Chesnais (2009a, 2013, 2014a), ou, plus précisément pour les aspects méthodologiques, dans Chesnais (2009b, 2014a). Par ailleurs, la partie II sera l'occasion d'approfondir ce qui fait la spécificité de ce cadre au regard d'autres théories didactiques et d'en préciser certains aspects.

Cadre théorique

L'objectif de mes recherches étant d'étudier le fonctionnement du processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques en milieu scolaire, le cadre théorique construit inclut des hypothèses quant aux mathématiques, à leur apprentissage et à leur enseignement permettant d'appréhender « suffisamment » la complexité de la classe de mathématiques pour permettre d'explorer, au moins dans une certaine mesure, des questions telles que la différenciation des apprentissages en fonction des élèves et la variabilité – ainsi que les possibilités de développement – des pratiques enseignantes.

Ce qui le caractérise particulièrement est l'ancrage en théorie de l'activité telle qu'elle a été spécifiée à l'enseignement des mathématiques par Robert et Rogalski (Robert & Rogalski 2002, 2005 ; Robert 2001, 2008a, 2008b, Rogalski 2008) :

« L'objet de cette théorie est une activité finalisée et motivée : le sujet vise l'atteinte de buts d'action et ce sont les mobiles de son activité qui sont le moteur de ses actions. La théorie vise l'analyse des processus en jeu chez le sujet agissant, et les processus par lesquels son activité évolue et par lesquels il se développe. Elle s'appuie sur deux notions clés : celle de sujet et celle de situation. Elle différencie par ailleurs tâche et activité, qui sont respectivement « du côté de la situation » et « du côté du sujet » (Rogalski, 2008, p. 23). »

Les activités – d'un enseignant, d'un élève ou autre – constituent ainsi

[…] tout ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche : non seulement ses actes extériorisés, mais aussi les inférences, les hypothèses qu'il fait, les décisions qu'il prend dans ce qu'il fait et ce qu'il se retient de faire ; l'activité comprend aussi la manière dont le sujet gère son temps, et également son état personnel – en termes de charge de travail, de fatigue, de stress, et aussi de plaisir pris au travail –, ainsi que ses interactions avec autrui dans la situation de travail ». (Ibid., p. 24)

[2] Par souci d'homogénéité du texte, je continue à utiliser la première personne du singulier, dans la logique d'une note de synthèse, mais, particulièrement en ce qui concerne cette partie, ce qui est présenté est simplement *mon* interprétation et *mon* usage d'une réflexion collective sur la base des travaux de Robert et Rogalski.

Les « pratiques » d'un enseignant désignent alors l'ensemble de ses activités avant, pendant et après la classe, en lien avec son enseignement.

J'en retiens essentiellement que les pratiques des enseignants influent sur les apprentissages des élèves *via* les activités qu'elles provoquent, notamment par le choix des tâches mathématiques (situations) proposées aux élèves et l'accompagnement de la réalisation de ces tâches.

Du côté des élèves

L'apprentissage d'une connaissance à un niveau scolaire donné est référé à l'idée de niveau de conceptualisation (Robert, 2008a), défini par l'acquisition de la disponibilité[3] sur un ensemble de tâches des dimensions outil et objet de la connaissance visée, et comprend son organisation avec les connaissances antérieures ainsi que la maîtrise des signifiants (langagiers et non langagiers) associés. Cette acception des apprentissages permet dans une certaine mesure de rendre opératoire l'idée de concept au sens de Vergnaud (1990) et notamment celle d'invariant opératoire.

Cela amène à poser la question de la caractérisation du potentiel, en termes d'apprentissage, des tâches proposées aux élèves, ainsi que celle de l'évaluation du degré de conceptualisation atteint par les élèves. Cela nécessite de disposer de certaines hypothèses sur « ce qui fait apprendre », hypothèses qui servent ensuite de critères pour apprécier le potentiel, en termes d'apprentissage, des activités que les tâches proposées par l'enseignant peuvent provoquer chez les élèves. Les hypothèses retenues sont issues des théories de Piaget et de Vygotsky, articulées et replacées dans le contexte de l'enseignement des mathématiques dans un cadre scolaire, auxquelles on ajoute les références à la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990) et la notion d'étayage de Bruner (1983). Comme l'explique Rogalski (2008), ces théories sont en effet complémentaires : la théorie piagétienne « offre […] un cadre théorique producteur pour étudier les acquisitions des élèves en mathématiques (et traiter la relation élèves-savoir dans le triangle didactique) », tandis que la théorie de Vygotsky « permet de situer l'action et l'impact de l'action didactique » (p. 443) sur le développement, facilitant ainsi l'analyse de l'intervention enseignante dans le triangle didactique. Le constructivisme piagétien éclaire entre autres les mécanismes, internes au sujet, de restructuration des connaissances résultant de la régulation de l'action par le sujet, mécanismes que Piaget décrit par la dynamique d'assimilation/accommodation (ibid., p. 434 et suivantes). Une « utilisation orientée par la visée didactique » (ibid., p. 438) de la théorie de Vygotsky fournit quant à elle des concepts qui paraissent féconds pour penser l'apprentissage en lien avec le développement dans le cadre de la didactique des mathématiques. Janine Rogalski cite notamment « l'approfondissement théorique du mode d'évolution des concepts [qui] est un apport fort de la théorie de Vygotsky, directement pertinent pour toute didactique d'un domaine disciplinaire ». Elle développe alors la distinction entre concepts quotidiens et concepts scientifiques : les premiers, appelés aussi « concepts spontanés » (ibid., p. 438) sont les « concepts issus de l'interaction de l'enfant avec le monde des objets sans qu'il y ait eu d'intervention didactique », tandis que les seconds sont « issus de la production scientifique collective antérieure et […] deviennent par la suite ailleurs des objets d'enseignement ». L'idée essentielle est liée aux modes de développement de ces concepts :

Concepts quotidiens/spontanés et concepts scientifiques se développent en interaction, dans un processus de « double germination ». […] D'une part, la germination des concepts quotidiens se fait du « bas » vers le

[3] Rappelons que Robert (2008a) distingue ainsi les connaissances mobilisables et disponibles, les premières désignant celles que l'élève est capable d'utiliser dans une tâche où la connaissance à utiliser est indiquée, les secondes correspondant à celles pouvant être mobilisées spontanément par l'élève.

« haut », vers ce qui est « général », à partir de l'interaction avec les objets du monde de l'action (comme dans le constructivisme piagétien). D'autre part, la germination des concepts scientifiques se fait du « haut » vers le « bas », avec « les mots pour le dire en général », en se concrétisant ultérieurement. (ibid., p. 441)

Un autre apport essentiel de Vygotsky est le concept de Zone Proximale de Développement (ZPD[4]). C'est la zone « située entre le niveau présent de développement, attesté par ce que l'enfant est capable de faire/de résoudre, de façon autonome, et ce que l'enfant peut faire/résoudre avec l'aide d'autrui (adulte, enseignant, pair plus développé) » (ibid., p. 442). L'idée essentielle est que :

Pour la réussite de l'apprentissage, on ne peut faire apprendre que si on utilise des situations relevant de cette zone ; si les situations sont au-delà de la ZPD, les aides ne produiront au mieux qu'un effet de copie immédiate (ou de « récitation », Vygotsky parle de « mécanique verbale »), et pas un apprentissage ; si les situations sont en deçà de la ZPD l'enfant/l'élève n'a rien à apprendre : il fait fonctionner ce qu'il a déjà conçu. (ibid., p. 442)

Enfin, Janine Rogalski pointe « un composant spécifique de l'approche vygotskienne qui est très pertinent du point de vue de la didactique des disciplines » :

L'assimilation des concepts scientifiques n'est possible qu'avec deux médiations, d'une part, une médiation sociale instrumentée : les concepts scientifiques ont un rapport médiatisé avec le monde des objets à la fois par autrui et par des instruments psychologiques – au premier chef, le langage ; et d'autre part, une médiation par d'autres concepts. (ibid., p.440)

Ces hypothèses sur 'ce qui fait apprendre' sont ensuite adaptées aux mathématiques et à la situation scolaire. Les facteurs identifiés comme particulièrement influents sur les apprentissages sont alors : les dynamiques organisées entre savoirs contextualisés et décontextualisés ; les dialectiques entre sens et techniques ; la nature des tâches proposées aux élèves, les formes de travail (individuel ou collectif, écrit ou oral) et leur durée, mais également les discours qui accompagnent les situations – notamment les aides prodiguées par l'enseignant dans la résolution des tâches. Une spécificité des mathématiques étant le caractère fortement cumulatif des connaissances, est aussi considérée la façon dont les liens sont organisés entre les connaissances anciennes et nouvelles.

Du côté des enseignants

La double approche didactique et ergonomique des pratiques (Robert et Rogalski, 2002, 2005), fournit le cadre théorique d'analyse des pratiques, prenant en considération dans une certaine mesure le point de vue des enseignants. Il s'agit notamment de considérer que les pratiques sont certes le produit de l'objectif – didactique – de faire apprendre les élèves, mais dépendent aussi – aspect ergonomique – du fait que l'enseignant est un professionnel exerçant un métier, avec ce que cela implique notamment de contraintes en partie indépendantes des enjeux didactiques. Des considérations liées au métier peuvent en effet prendre le pas sur d'autres plus strictement didactiques. Par exemple, lorsque l'enseignant choisit les exercices qu'il fera traiter aux élèves sur un thème donné, il le fait non seulement en tenant compte des apprentissages mathématiques susceptibles d'en résulter, mais aussi du temps dont il dispose pour les traiter, éventuellement de l'intérêt qu'il suppose que les énoncés présentent aux yeux des élèves etc.

Pour appréhender le système complexe des pratiques des enseignants, les pratiques sont décomposées en cinq composantes imbriquées, à recomposer ensuite pour apprécier le travail de l'enseignant : la composante personnelle sert à regrouper tout ce qui concerne les caractéristiques individuelles de l'enseignant (âge, formation, conceptions et connaissances des mathématiques et de

[4] Plusieurs dénominations ont été associées à ce sigle ; celle employée par Janine Rogalski a été conservée ici.

leur enseignement, expérience, etc.) ; la composante sociale permet d'apprécier la prise en compte des facteurs liés à la composition sociale de l'établissement et des classes, aux collègues, etc. ; la composante institutionnelle permet de traduire la prise en compte des contraintes liées à l'institution (les programmes, les horaires …) ; la composante cognitive donne à voir ce qui a trait aux contenus d'enseignement (le choix des exercices, le texte de la leçon …) ; enfin, la composante médiative concerne les choix que fait l'enseignant dans la gestion de la classe, notamment en termes d'improvisation (part respective et nature du travail individuel et collectif, gestion du temps ...) et le discours qu'il tient (particulièrement les aides au travail des élèves et les exploitations qu'il en fait).

La double approche croise ces cinq composantes avec trois niveaux d'organisation. Notons qu'il s'agit dans les deux cas d'une décomposition effectuée *par le chercheur* afin d'approcher la complexité des pratiques des enseignants mais que la compréhension de l'activité de l'enseignant suppose ensuite de les recomposer (sous forme de « logiques d'action »[5]).

Ces niveaux sont liés à trois échelles de temps différentes : le niveau micro concerne les gestes élémentaires au moins en partie automatisés ; le niveau local correspond à la classe au quotidien, c'est « le niveau où se rencontrent les préparations et les improvisations » (Robert 2008a) ; le niveau global correspond au niveau du projet, à l'échelle du chapitre, de l'année, voire au-delà. Ces différents niveaux ne sont pas indépendants mais correspondent à différentes catégories d'invariants des pratiques.

L'approche ergonomique amène à considérer que les pratiques des enseignants sont à la fois *complexes* – i. e. non réductibles à une somme de composantes indépendantes entre elles –, *cohérentes* – c'est-à-dire que les prises de décision des enseignants obéissent à des logiques d'action sous-jacentes invariantes et assumées, que l'on peut en partie reconstituer grâce aux traces observables du travail des enseignants, aux contraintes connues et à des entretiens. Par ailleurs, les pratiques sont en partie *stables* (notamment la composante médiative) dans des conditions ordinaires et sans intervention particulière ; c'est-à-dire que, pour des enseignants expérimentés, on observe certaines régularités intra-individuelles de gestion en classe, indépendamment des notions et des classes singulières (Robert 2007), ce qui légitime notamment certaines inférences faites à partir de l'étude de quelques séances.

Du côté des élèves comme des enseignants, ce sont les régularités et la variabilité qui sont recherchées, tant interindividuelles qu'intra-individuelles. En effet, c'est la répétition et l'accumulation de certaines caractéristiques des pratiques qui ont un effet en termes d'apprentissages chez les élèves, de même que c'est ce qui permet d'identifier des éléments des logiques sous-jacentes aux pratiques.

Implications méthodologiques

Les activités des élèves sont l'élément central, intermédiaires entre les pratiques des enseignants dont elles sont en grande partie la conséquence, et les apprentissages des élèves dont elles constituent la source. La méthodologie de la recherche est donc pilotée par la nécessité de caractériser ces activités et s'articule en quatre temps : étude de l'objet d'apprentissage, analyse des

[5] Cette expression désigne non pas des principes éventuellement explicitables par les acteurs, mais une recomposition du chercheur de lignes directrices permettant d'expliquer ou même éventuellement de prédire les prises de décisions des enseignants.

pratiques des enseignants, étude de leurs effets sur les apprentissages des élèves, retour sur les logiques d'action sous-jacentes aux pratiques.

L'échelle à laquelle je travaille est, en général, celle du « chapitre » ou de la « séquence », c'est-à-dire de l'ensemble des séances d'une année scolaire portant de manière centrale sur une notion donnée.

L'étude de l'objet d'apprentissage

S'intéresser aux activités des élèves d'un point de vue didactique, c'est-à-dire en visant des inférences sur les apprentissages susceptibles d'en découler, suppose en premier lieu d'identifier les caractéristiques de la notion objet d'apprentissage visé susceptibles de jouer un rôle dans le processus. Il s'agit ainsi de déterminer le « relief » que l'on peut mettre sur les mathématiques à enseigner (Robert et al., 2012). Cela inclut des éléments historiques et épistémologiques permettant de cerner le concept en jeu, des éléments didactiques qui incluent les difficultés d'apprentissage possibles, enfin l'analyse des programmes d'enseignement qui explicite les objectifs et les enjeux de cet enseignement à un niveau donné.

L'analyse des tâches

Les enseignants provoquent les activités des élèves via les tâches qu'ils leur proposent, incluses dans des scénarios d'enseignement (cf. infra) qu'ils élaborent. C'est l'analyse de ces tâches qui permet de déterminer les activités possibles des élèves. Une tâche correspond à l'unité la plus petite (en général, une question d'un exercice) permettant de comprendre le travail de l'élève, c'est-à-dire permettant de comprendre son activité. L'analyse en est faite en fonction des caractéristiques de la tâche (énoncé, nature, variables didactiques, etc.) et de sa fonction dans le scénario, au regard des résultats de l'analyse de la notion.

L'activité déployée par un élève sur une tâche – donc les apprentissages qui vont en découler – dépend de la *procédure de résolution* à laquelle il recourt. Cela désigne ce que l'élève peut faire pour résoudre la tâche, de son point de vue et non du point de vue du professeur ou du savoir ; en particulier, cela inclut des procédures justes et fausses, attendues (les réponses justes attendues et les erreurs anticipées) par l'enseignant ou non. Par exemple, pour obtenir le symétrique d'un point par rapport à une droite, un élève peut procéder avec un calque, par pliage, en traçant la perpendiculaire à l'équerre puis en reportant la longueur à la règle ou au compas, en construisant le symétrique uniquement au compas, ou en le plaçant "en face" au jugé ; en sixième, la procédure au jugé est non valide pour la plupart des tâches, les procédures avec calque et pliage peuvent être utilisées en début de chapitre mais doivent être rapidement abandonnées, tandis que les procédures de construction géométrique (réalisation d'un tracé avec des instruments de géométrie et justifié par des propriétés mathématiques) sont celles dont l'acquisition est visée.

Chaque procédure de résolution est caractérisée par les connaissances qu'elle nécessite et leurs *mises en fonctionnement* (Robert, 1998, 2008b), c'est-à-dire la manière dont elles doivent être utilisées. Pour chaque connaissance en jeu dans la mise en œuvre d'une procédure, il faut identifier s'il s'agit d'une connaissance *nouvelle* (il s'agit d'une des premières utilisations de cette connaissance), *récente* (il s'agit d'une connaissance liée à la nouvelle notion, mais qui a été déjà travaillée en plusieurs occasions) ou *ancienne* (il s'agit d'une connaissance étudiée plus tôt dans l'année, voire durant les années antérieures). De même, il faut déterminer son *niveau de mise en fonctionnement*, c'est-à-dire son caractère *mobilisable* ou *disponible* (cf. note 3 et Robert, ibid.).

L'activité est aussi très différente selon que l'utilisation de cette connaissance est *simple* (la connaissance est appliquée telle qu'elle a été présentée dans la leçon), *isolée* (elle est appliquée sans lien avec une autre connaissance) ou si elle nécessite une (ou des) *adaptation(s)*, c'est-à-dire s'il faut l'appliquer d'une manière différente ou dans un contexte différent de celui dans lequel elle a été d'abord travaillée. Robert (1998, 2003b, 2008b) distingue sept types d'adaptations, qui produisent des transformations différentes d'une même connaissance pour la résolution d'une tâche :

- Reconnaissance des modalités d'application des notions, théorèmes, méthodes, formules (A1)
- Introduction d'intermédiaires (notations, points, expressions etc.) (A2)
- Mélanges de plusieurs notions, changements de point de vue, changements ou jeux de cadres[6] (Douady, 1987), mises en relation (A3)
- Introduction d'étapes, organisation de calculs ou de raisonnements (que ces étapes soient indiquées ou non) (A4)
- Utilisation des questions précédentes dans un problème (A5)
- L'existence de choix, forcés ou non (A6)
- La confrontation à un manque de connaissances (A7)

Même si on peut penser que, par exemple, introduire un intermédiaire soi-même, en particulier dans les petites classes, peut représenter pour un élève une difficulté plus grande que le fait d'utiliser les questions précédentes d'un problème, ce classement n'est pas hiérarchisé a priori en fonction de la difficulté que représente le type d'adaptation pour un élève. En effet, chaque adaptation peut être plus ou moins difficile selon le contexte ou selon les élèves. L'adaptation A1 peut notamment être facilitée par un *effet de contrat didactique* (Brousseau, 1986), par exemple si l'enseignant a déjà mentionné que, dès qu'il était écrit « justifier », cela impliquait d'utiliser telle propriété.

Les adaptations des connaissances nécessaires à la résolution d'une tâche constituent toutefois des critères de « difficulté » de la tâche. Ainsi, une tâche peut être qualifiée de *difficile* ou *complexe* lorsque plusieurs adaptations sont répétées, cumulées ou pour certains cas particuliers d'adaptations : une adaptation de type A2, de type A4 non usuelle et/ou non indiquée, ainsi que certaines adaptations A1 (lorsque la configuration est inhabituelle) et certaines adaptations A3 sont en général difficiles, notamment parce qu'elles nécessitent une prise d'initiative originale (on trouvera des exemples dans Chesnais, 2009a, à propos de la symétrie orthogonale en sixième).

Les adaptations des connaissances sont ainsi à la fois *moyen* et *critère* d'apprentissage : on ne peut en effet parler de conceptualisation que si la connaissance est disponible pour résoudre un certain nombre de tâches, y compris nécessitant des adaptations.

Caractérisation des pratiques : scénario et déroulement

Le *scénario* désigne le projet d'enseignement que l'enseignant élabore en amont de la classe : cela inclut les contenus – exercices et leçons –, leur organisation et les prévisions de gestion (par exemple ce qui sera traité en classe ou à la maison) ; le *déroulement* désigne la mise en œuvre d'un scénario dans la classe.

[6] Les jeux de cadre désignent des passages d'un cadre à un autre : par exemple, lorsque, pour construire une figure (cadre géométrique), il faut préalablement résoudre une équation (cadre algébrique).

Le scénario est d'abord reconstitué chronologiquement à partir des énoncés des exercices proposés, des cours écrits et d'entretiens menés avec les enseignants. Il fait ensuite l'objet d'une analyse *a priori* : chaque énoncé est « converti » en tâches mathématiques à résoudre et ces dernières sont analysées pour déterminer les activités d'élèves qu'elles sont susceptibles de provoquer.

Le scénario est aussi analysé globalement : organisation des tâches entre elles, ensemble des connaissances (anciennes et nouvelles) abordées, répartition et fréquence des adaptations rencontrées et choix globaux faits au regard des résultats de l'analyse préliminaire de la notion.

L'objectif de l'analyse du scénario est ainsi de reconstituer l'*itinéraire cognitif* défini par l'enseignant pour « mettre les élèves sur le chemin des connaissances » (Robert, 2008b). Il s'agit de mettre en évidence les objectifs d'apprentissages et les enjeux principaux, tels qu'ils apparaissent dans le scénario, en complétant et en confortant les analyses par les déclarations de l'enseignant lors des entretiens. Les activités prévues éclairent ce qui est recherché : la conceptualisation visée de la notion en jeu et l'articulation de cette notion avec les autres notions du programme voire avec l'ensemble des mathématiques scolaires, en particulier avec les connaissances anciennes.

L'étude du déroulement s'appuie sur l'enregistrement vidéo des séances par caméra fixe en fond de salle de classe souvent doublé d'un enregistrement audio par un micro porté par l'enseignant, de façon à avoir connaissance des échanges « privés »[7] (Chesnais, 2009a) entre l'enseignant et les élèves ou un groupe d'élèves. L'objectif est de caractériser au plus près les tâches effectives et donc les activités des élèves. En effet, si les tâches prescrites aux élèves sont initialement définies par les énoncés des exercices, elles peuvent être modifiées (minorées ou au contraire enrichies) par les déroulements, c'est-à-dire par la manière dont l'enseignant va éventuellement reformuler les questions, les aides qu'il va procurer, le temps qu'il va laisser aux élèves pour chercher… Étudier le déroulement revient donc à repérer les traces des activités que les élèves développent en classe ainsi que tout ce qui peut influer sur celles-ci. Notons que les activités réelles des élèves restent hors de portée, notamment parce qu'une partie se passe dans les têtes, mais aussi parce qu'approcher les activités individuelles des élèves aurait nécessiterait une méthodologie très lourde et que cela ne constitue pas l'objectif principal des recherches. Ainsi est déterminée une enveloppe d'activités possibles : les activités *a maxima* et *a minima*, c'est-à-dire les activités que la tâche et son déroulement peuvent engendrer au maximum – autrement dit les plus riches et celles dont le potentiel d'apprentissages est le plus important – et au minimum.

Afin d'analyser les déroulements, chaque séance est découpée en *épisodes*. Je distingue cinq types d'épisodes : exercices, cours, corrections – de travaux traités à la maison ou lors d'une séance précédente –, récitation/rappels de cours, autres (non mathématiques par exemple, lorsque l'enseignant règle des problèmes de discipline) ; le découpage correspond aux interventions de l'enseignant (du type : « on corrige l'exercice qui était à faire », « maintenant, on passe dans le cahier de leçons » …). Chaque épisode est ensuite découpé en *phases* selon la forme de travail – individuel, en petits groupes, en classe entière – et le contenu (telle tâche, tel énoncé de cours, le traitement d'une question d'élève si celle-ci provoque un développement …).

Les analyses sont ensuite menées en considérant plusieurs échelles : l'échelle du chapitre, l'échelle des séances, l'échelle des épisodes et l'échelle des phases. In fine, il s'agit de déterminer, dans la

[7] Les échanges « privés » sont les échanges à voix basse entre l'enseignant et un élève lorsqu'il passe dans les rangs par exemple, ou les échanges entre élèves dans un travail en petits groupes.

mesure du possible, ce qui reste à la charge des élèves de manière individuelle et/ou collective par rapport aux tâches initialement prescrites. En outre, notamment dans les phases de cours, je m'intéresse aussi aux questions posées par l'enseignant, aux aides qu'il dispense, à la répartition du travail entre l'enseignant et les élèves sur le contenu et la formulation, ainsi que les apports supplémentaires éventuels.

À propos des aides que l'enseignant dispense, il faut distinguer les aides *productives* et les aides *constructives* (Robert et Hache, 2013) : les premières, qui interviennent fréquemment avant ou pendant une tâche, ont pour but d'aider l'élève à la résoudre, souvent en la réduisant ; les secondes, apportées plutôt pendant ou après le travail des élèves sur la tâche, ont pour but la construction directe de connaissances, par exemple en établissant des liens avec d'autres connaissances ou par un discours sur les méthodes.

Plus globalement, on s'intéresse également à la question des « proximités » (Robert & Vandebrouck, 2014) qu'organise l'enseignant entre les activités des élèves et les savoirs visés.

Apprécier l'effet des pratiques sur les apprentissages

Dans un troisième temps, l'analyse des productions des élèves[8] doit permettre d'émettre des hypothèses sur les apprentissages qui ont été construits. Il ne s'agit que d'hypothèses dans la mesure où d'une part, la réussite à une tâche dépend de bien d'autres facteurs que les apprentissages (notamment affectifs), d'autre part, réussite au contrôle, par exemple, et conceptualisation ne sont pas nécessairement équivalents (une réussite au contrôle peut ne pas être la trace d'une conceptualisation, mais par exemple d'un effet de contrat ; de même, un échec ou une absence de réponse n'est pas nécessairement synonyme d'absence d'apprentissage) ; enfin, la question de la pérennité des apprentissages se pose de toutes façons.

Mais l'interprétation des résultats aux contrôles est délicate. L'échec à un exercice différent de ce qui a été traité en classe n'a pas la même signification que l'échec à un type d'exercice qui a été traité, éventuellement plusieurs fois. De manière plus précise, le degré de difficulté doit aussi être comparé à celui des exercices traités durant le chapitre : le contrôle peut être plus ou moins difficile par rapport à ce qui a été traité ; par exemple, il peut présenter des adaptations des connaissances plus difficiles que celles qui ont été rencontrées. C'est pourquoi une deuxième analyse tient compte de l'écart entre ce qui a été traité durant le chapitre et ce qui est proposé dans les contrôles. J'utilise pour cela un double processus : d'une part tenter de repérer les effets des caractéristiques saillantes des scénarios et déroulements sur les productions des élèves, d'autre part mettre en relation les réussites et échecs constatés sur des tâches données avec le déroulement de tâches similaires traitées durant l'enseignement, qui portent sur les mêmes connaissances ou qui mobilisent le même type d'adaptations.

Retour sur les pratiques – les logiques d'action sous-jacentes

Dans un quatrième temps, un retour sur l'ensemble des analyses précédentes, en centrant le regard sur les pratiques, permet d'identifier des éléments des logiques d'action qui les sous-tendent, c'est-à-dire de ce qui en pilote la cohérence. Ces logiques d'action sont reliées à certains déterminants des

[8] Je m'appuie en particulier sur les productions des élèves dans les contrôles ou des tests pour apprécier les apprentissages des élèves sur une notion donnée.

pratiques – éventuellement extérieurs à la classe. Les analyses sont guidées par les cinq composantes présentées précédemment, articulées avec les trois niveaux d'organisation des pratiques (cf. supra).

L'influence des éléments liés aux différentes composantes et niveaux d'organisation des pratiques sont interprétées en termes de contraintes et ressources[9] qui pèsent sur les pratiques, celles-ci étant vues comme un « compromis » entre différents enjeux (Rogalski, 2007).

Précisions sur les corpus des différentes études mentionnées dans la note

Les recherches menées et en particulier les données recueillies sont, outre celles de la thèse et des données plus ponctuelles recueillies dans des contextes particuliers (sur lesquels je reviendrai le moment venu), issues de projets (projet Transition[10], ANR FORMSciences[11], projet ESPE sur le langage 2017 et 2018[12]) ou de travaux menés au sein de groupes IREM[13] (« Transition école-collège » et « Didactique »).

Ces données consistent essentiellement en des enregistrements vidéos et/ou audio de séances de classes, accompagnées de documents liés (cahiers, documents de préparation des enseignants, copies d'élèves etc.), des productions d'élèves lors des évaluations menées par l'enseignant ou de tests proposés par des chercheurs, et quelques entretiens avec les enseignants. Les données ont été recueillies essentiellement dans des classes de CM2 et de sixième des académies d'Ile-de-France, de Toulouse et de Montpellier.

La plupart des travaux portent sur le thème de la symétrie orthogonale, au niveau sixième. Je ne rentrerai pas, dans la première partie, dans les détails des analyses du contenu, mais ceux-ci figurent dans Chesnais (2009a, 2012a, 2014a) ; je reviendrai en revanche dans la deuxième partie sur le choix de cette notion et ses implications, ainsi que sur certains éléments des analyses de contenus menées.

---

[9] L'idée de « ressources » est ici à entendre dans un sens large : il s'agit autant des ressources matérielles (manuels, programmes…) que des connaissances de l'enseignant, sa disponibilité etc.

[10] Projet mené de 2012 à 2015 avec Valérie Munier et Karine Molvinger (porteur), financé à hauteur de 20000 euros par la région Languedoc-Roussillon dans le cadre de l'appel à projets « Chercheurs d'avenir 2011 ».

[11] J'ai participé au projet ANR FORMSCIENCES portant sur « La formation des professeurs des écoles à l'enseignement des sciences par la démarche d'investigation : impacts sur les pratiques d'enseignement et les compétences des élèves », appel d'offres ANR Apprentissages 2013 (2014-2017, 645 000 euros).

[12] Le premier, en 2017 en réponse à l'appel d'offre de l'ESPE-LR 2017 (4000 euros), dont j'étais le porteur, avait pour titre « Rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et des sciences expérimentales ». Le deuxième, en 2018, co-porté avec Catherine Dupuy, en réponse à l'appel d'offre de l'ESPE-LR 2018 (4000 euros) s'intitule « Rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage et formation des enseignants ».

[13] J'ai ainsi créé et piloté, à l'IREM de Montpellier, un groupe incluant des enseignants de CM2 et de sixième sur la transition école-collège qui a fonctionné pendant deux ans et je pilote depuis quatre ans le groupe « Didactique », incluant des enseignants de collège et lycée, deux PRAG de l'université et un chercheur en mathématiques.

Chapitre I – les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves

La question des inégalités scolaires

Contexte actuel des recherches sur les inégalités scolaires

La question des inégalités scolaires dans leurs liens avec les inégalités sociales – question elle-même liée à celle de la « démocratisation scolaire » (Rochex, 2001) – est un thème central de la sociologie de l'éducation, notamment en France depuis les années 60 et les travaux de Bourdieu et Passeron (1964). Les recherches sur le sujet s'accordent sur le fait que les inégalités scolaires résultent de mécanismes de nature multiple et s'exerçant à diverses échelles (Kherroubi et Rochex 2004, Baluteau 2014), mais aussi sur la nécessité d'étudier les processus par lesquels elles se construisent à *l'intérieur même* de la classe, en croisant les regards sociologique et didactiques (Rochex et Crinon, 2011, Baluteau 2014). Quelques travaux en didactique des mathématiques se sont également intéressés à cette question (Perrin-Glorian, 1993, Butlen, Peltier-Barbier et Pézard 2002, Peltier et al. 2004, Butlen et Pézard 2003, Charles-Pézard 2010, Charles-Pézard, Butlen et Masselot 2012, Margolinas et Laparra 2011, Coulange 2011, 2012a et b, 2014), en l'abordant souvent sous l'angle de la question connexe des « élèves en difficultés » (Perrin-Glorian, 1993), mais ces travaux restent rares et portent essentiellement sur le primaire.

De nombreuses recherches menées en France, notamment au sein ou en lien avec le réseau RESEIDA[14] fondent leurs travaux sur une «hypothèse relationnelle » (Bautier & Goigoux, 2004, Rochex & Crinon, 2011) qui consiste à considérer

> *la production des inégalités en matière d'apprentissages et d'accès au(x) savoir(s) comme résultant de la confrontation entre, d'une part, les caractéristiques et les dispositions sociocognitives et socio langagières des élèves, lesquelles […] les préparent de façon inégale à faire face aux réquisits des apprentissages scolaires et, d'autre part, l'opacité et le caractère implicite de ces réquisits, des modes de fonctionnement du système éducatif, des pratiques professionnelles et des modes de travail qui y sont mis en œuvre ou exigés des élèves. (Rochex & Crinon, ibid., p. 9).*

Ainsi, l'ouvrage *La construction des inégalités scolaires,* coordonné par Rochex et Crinon, recense-t-il un certain nombre de phénomènes susceptibles de contribuer à la construction d'inégalités d'apprentissage, car responsables du fait que les élèves « fréquentent des univers de travail et de savoirs différenciés, et inégalement productifs en termes d'activité intellectuelle et d'apprentissages potentiels » (p. 178). Deux processus sont ainsi identifiés, dont la récurrence serait susceptible d'expliquer la construction des inégalités scolaires : la « différenciation passive » et la « différenciation active » qui « tiennent aux pratiques et aux situations pédagogiques, au choix, à l'organisation, à l'enchainement et à la conduite des tâches et activités, aux genres discursifs et d'interactions langagières » (p. 176). La première, vue comme résultant d' « une pédagogie de l'abstention pédagogique », ou encore liée aux « pédagogies invisibles ou implicites », à la suite de Bourdieu, Passeron et Bernstein (Rochex, 2011a), qualifie des modes de faire des enseignants qui,

[14] REcherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages. Ce réseau regroupe autour de l'équipe ESCOL-CIRCEFT de l'Université Paris 8 des chercheurs de différentes disciplines (sciences de l'éducation, didactiques, sociologie, psychologie) s'intéressant aux inégalités scolaires.

faute de désigner et d'enseigner explicitement ce qui relève des enjeux d'apprentissage pertinents, conduisent à ce que soient exigés de tous les élèves des savoirs, des compétences, des modes de faire qui ne sont pas ou guère enseignés, ni même parfois nommés ou désignés à tous. (Rochex, 2011a, p. 91)

Ils sont par ailleurs liés aux caractères « transparent », « invisible » ou « incident » (Rochex et Crinon, op. cité) des savoirs en jeu, qui génèrent des « malentendus » (Bautier et Rochex 1997, Bautier et Rayou 2009) et différencient les apprentissages des élèves du fait de l'inégale répartition entre ceux-ci des prédispositions pertinentes qui permettent de lever les implicites et décoder la transparence (Rochex et Crinon, 2011).

La seconde désigne

[des] modes de faire différenciés selon les caractéristiques – réelles ou supposées – des élèves auxquels les agents scolaires sont confrontés, qui, par effet de cumul, conduisent à ce qu'ils fréquentent, dans l'ordinaire des classes et à l'insu des divers protagonistes impliqués, des univers de savoirs différenciés que l'on peut dès lors caractériser comme inégalement productifs en termes d'activité intellectuelle et d'apprentissages potentiels. (ibid., p. 91-92).

L'identification de ces phénomènes lève de nouvelles questions qui restent largement ouvertes (Rochex, 2011b). Quelles sont les « causes » de ces phénomènes ? Quelles en sont réellement les conséquences ? Comment sortir du paradoxe qui consiste à considérer que les inégalités résultent à la fois de trop et de trop peu de différenciation[15] ? Quelles alternatives existe-t-il pour les pratiques enseignantes et quelles sont les conditions de leur mise en œuvre ?

Les travaux que je présente ici visent à contribuer à la compréhension des processus de construction des inégalités scolaires dans la classe de mathématiques et, au-delà, à poser les questions – liées entre elles – des causes, des alternatives possibles et des conditions de leur mise en œuvre. Différents travaux évoquent deux éléments qu'il me semble souhaitable d'investiguer davantage : d'une part l'idée de « coconstruction » de ces phénomènes (Bautier et Rayou 2009, p. 12 et Rochex, 2011a, p. 94) qui suppose l'influence même des élèves sur la mise en œuvre de processus de différenciation ; d'autre part, l'idée que ces processus résultent à la fois du fait que ces phénomènes et leurs effets se produisent « à l'insu » des enseignants (Rochex, 2011a, p. 92 et 2011b, p. 176) et du « souci réel […] de prendre en considération les différences qu'ils perçoivent chez leurs élèves et de « différencier » en conséquence […] » (Rochex, 2011b, p. 177).

Admettant ainsi l'hypothèse relationnelle et le fait que le contexte n'est pas neutre, ni quant aux pratiques enseignantes, ni quant à leurs effets sur les apprentissages des élèves, mes travaux visent à investiguer les questions suivantes.

Quelle part des différences entre les deux contextes relève d'une différenciation active défavorable aux apprentissages et quelle part d'une adaptation nécessaire et/ou inévitable à la contingence ? Dans quelle mesure ces différences sont-elles responsables de l'aggravation des écarts ou susceptibles de les réduire, ou du moins d'en limiter l'aggravation ? Quelles sont les contraintes qui participent à générer les phénomènes de différenciation ? Existe-t-il des alternatives et, en supposant une réponse positive, quelles sont les conditions et quel est le « coût » de leur mise en œuvre ?

Cela m'amène notamment à questionner la pertinence des catégories de différenciation active / passive et à plaider pour un affinement de l' « hypothèse relationnelle ». En outre, j'entends montrer

[15] D'autant plus que l'adaptation au public est reconnue comme une compétence à valoriser sur le terrain (Monfroy, 2013).

qu'une conceptualisation du fonctionnement des pratiques enseignantes et des contraintes qui s'exercent, prenant en considération les enjeux liés aux savoirs (i.e. de nature didactique) est nécessaire, surtout s'il s'agit de penser des alternatives et les conditions de leur mise en œuvre.

Deux premiers résultats qui questionnent

Je propose d'exposer dans cette partie, brièvement, deux résultats issus de ma thèse (Chesnais, 2009a) et repris dans diverses publications (Chesnais 2009b, 2011, 2012a, 2013, 2014a, Chesnais et al. 2009), qui serviront ensuite de base au développement de l'argumentation, par la mise en perspective avec les recherches que j'ai menées ultérieurement.

Des pratiques différentes en éducation prioritaire et milieu ordinaire mènent à des apprentissages différents en défaveur des élèves de l'éducation prioritaire

La première partie de mon travail de thèse a consisté à comparer, à partir d'une observation 'naturaliste', les pratiques de deux enseignants expérimentés mais non experts : Denis, agrégé, qui cumule sept années d'expérience essentiellement en éducation prioritaire, et Martine, certifiée, qui a plus de vingt années d'expérience et exerce dans un établissement « ordinaire »[16]. Le travail a porté sur le thème de la symétrie orthogonale.

Cette comparaison a mis en évidence des points communs mais aussi d'importantes différences, tant en ce qui concerne la composante cognitive que la composante médiative, ainsi que dans les productions des élèves dans les contrôles – l'approximation des apprentissages des élèves (cf. supra).

On retrouve ainsi chez Denis et Martine des caractéristiques largement partagées dans les pratiques ordinaires des enseignants de mathématiques du secondaire : des scénarios relativement proches de ce que l'on peut trouver dans les manuels et plus éloignés de scénarios construits dans d'autres contextes, notamment produits par la recherche en didactique (Chesnais, 2012a), en termes d'organisation et de contenus, d'alternance d'« activités », cours et exercices d'entrainement, et par le peu voire l'absence de tâches où les savoirs sont réellement problématisés. Notons que cela a permis d'illustrer à nouveau un des résultats de Roditi (2001) concernant les pratiques ordinaires, à savoir le fait que les scénarios conçus par les enseignants sur une notion donnée restent en général dans une « enveloppe » qui s'avère restreinte si on la compare aux choix didactiques possibles pour l'apprentissage de cette notion. Du point de vue de la composante médiative, on retrouve chez Denis et Martine une organisation relativement « classique » dans les classes de collège en France, alternant des phases de travail individuel sur des exercices et des phases collectives en classe entière (aucun des deux ne pratiquant le travail en petits groupes) consacrées à la correction d'exercices ou à des phases de « cours », accordant plus ou moins de responsabilité aux élèves dans l'élaboration des contenus.

Cependant, on observe également des différences nettes entre les pratiques des deux enseignants, correspondant, notamment en ce qui concerne le scénario, à des objectifs différents en termes d'apprentissages liés à la symétrie orthogonale et plus globalement à la géométrie. Cela m'a amenée à positionner ces deux scénarios comme étant proches respectivement des deux extrémités d'un « gradient », établi en fonction d'une analyse des contraintes liées à l'enseignement de la symétrie

[16] Cet adjectif est ici employé pour signifier qu'un établissement ne relève pas de l'éducation prioritaire. Il est employé avec une autre signification dans la note dans l'expression « pratiques ordinaires » : il s'agit alors de désigner les pratiques que les enseignants mettent en œuvre au quotidien sans l'intervention d'un quelconque dispositif de recherche ou d'accompagnement.

orthogonale en sixième et faisant du scénario de Martine un scénario nettement plus ambitieux (Chesnais, 2012a).

Il ressort également des analyses que certaines caractéristiques des pratiques de Denis apparaissent comme typiques de pratiques assez répandues en éducation prioritaire : les objectifs d'apprentissage principaux sont liés à la maîtrise de « techniques » (dans le sens de procédés de type algorithmique, notamment pour les constructions aux instruments) plus que conceptuels, les enjeux plus complexes – et surtout plus conceptuels – étant repoussés hors de la classe dans le travail à faire à la maison etc. Ainsi, notamment, le scénario de Denis est axé sur la construction de symétriques de figures avec les instruments (avec une certaine ambition dans la complexité des figures) qui reste ancré dans une « géométrie instrumentée »[17], quand celui de Martine est davantage orienté vers une 'maîtrise conceptuelle' de la symétrie orthogonale et s'inscrit dans un objectif plus global d'entrée dans une « géométrie théorique » (même le travail sur les constructions est davantage orienté vers la maîtrise des propriétés de la symétrie que vers les aspects techniques).

Dans les déroulements, dans la classe de Denis, la part de travail autonome des élèves sur les tâches du scénario est souvent réduite à l'application d'une procédure indiquée par l'enseignant (éventuellement, même, pas à pas), les phases collectives contiennent peu d'apports au-delà de la 'bonne réponse' et du pointage de quelques erreurs quand il s'agit d'épisodes d'exercices, ou au-delà de l'énoncé de savoir visé dans les épisodes de cours. Enfin, on observe une tendance à l'« algorithmisation » des procédures. Chez Martine, la part de travail individuel des élèves est plus importante et porte sur des tâches plus complexes : par exemple, un certain nombre d'adaptations potentielles – déjà plus nombreuses dans les tâches choisies que chez Denis – sont laissées à la charge des élèves, au moins en partie et dans un premier temps, ce qui est très rarement le cas chez Denis.

Cette comparaison conduit, compte tenu de mes hypothèses théoriques, à penser que les caractéristiques des pratiques de Martine sont propices à générer des activités potentiellement plus favorables aux apprentissages que celles de Denis : propriétés de cohérence mathématique et de progressivité du scénario, objectifs d'apprentissages concernant les conceptions erronées et le changement de paradigme géométrique ; nombreux apports pendant les déroulements, liens, explicitation des décontextualisations, généralisations, validations, justifications, formulations, part importante laissée aux élèves dans la résolution des tâches et les interactions.

La comparaison des productions des élèves des deux classes en contrôles tend en outre à confirmer cette hypothèse. Sans faire une présentation exhaustive[18], voici quelques exemples des résultats principaux : la tâche de construction du symétrique d'un point sur papier blanc avec un axe oblique, très emblématique du chapitre, est réussie par 76 % des élèves de Denis dans une configuration simple et par respectivement 80 % et 63 % des élèves de Martine dans deux configurations complexes différentes ; la construction du symétrique d'une figure coupée par l'axe – qui constitue un enjeu important du programme de sixième – est réussie par 50 % des élèves de Denis dans le cas

[17] Je ne rentre pas ici dans le débat entre les différentes théorisations proposées notamment par Berthelot et Salin (2001) en termes de géométrie du constat et géométrie déductive ou encore de problématique pratique et problématique théorique ou par Houdement et Kuzniak (2006) en termes de paradigmes ou encore Perrin-Glorian, Mathé et Leclercq (2013) en termes de géométrie à finalité pratique et géométrie théorique, la distinction « grossière » entre géométrie instrumentée et théorique étant ici suffisante pour mon propos.

[18] Que l'on peut trouver dans Chesnais 2009a, 2011.

d'un rectangle dans une configuration simple et par 68 % des élèves de Martine dans le cas d'un cercle dans une configuration complexe. Les taux sont donc proches, mais on observe tout de même qu'ils semblent traduire une plus grande maîtrise dans la classe de Martine dans la mesure où les taux sont en général supérieurs et pour des tâches faisant intervenir des configurations plus complexes. En ce qui concerne les « tâches de preuve »[19], (Lima 2006, Chesnais ibid.), on note que, pour une tâche relativement élémentaire[20], la moitié des élèves de Martine mais seulement deux parmi ceux de Denis se sont placés dans le nouveau paradigme ; en outre, parmi ces élèves, huit sur dix ont cité une propriété adaptée à la situation dans la classe de Martine, mais aucun chez Denis.

Les apprentissages apparaissent donc comme différenciés entre les deux classes. Toutefois, si on les réfère aux scénarios et déroulements, on observe que l'écart entre les deux classes est limité en ce qui concerne les tâches qui correspondent aux objectifs principaux *communs* aux deux scénarios, mais la différence est très nette en ce qui concerne les objectifs qui étaient davantage représentés dans le scénario de Martine – et qui sont aussi les plus ambitieux conceptuellement. On ne peut donc pas forcément conclure en termes de différence *d'efficacité* des pratiques, même si, dans l'absolu, les apprentissages diffèrent entre les deux classes.

Ainsi, aussi triviale que soit cette conclusion – en attendant d'y revenir – il semblerait que, lorsque des élèves d'établissements ordinaires sont exposés à des pratiques a priori davantage porteuses en termes d'apprentissages et que des élèves d'établissements relevant de l'éducation prioritaire sont exposés à des pratiques moins favorables, les effets en sont des différences importantes dans les apprentissages, à la défaveur des élèves de l'éducation prioritaire.

Les élèves de ZEP peuvent apprendre (presque) aussi bien que les autres

La deuxième partie de mon travail de thèse a consisté à proposer à Denis, l'année suivant celle des observations mentionnées dans la partie précédente, de modifier son enseignement de la symétrie orthogonale, dans une classe de sixième nécessairement différente de l'année précédente, mais ayant un profil identique. Je reviendrai plus loin sur le dispositif expérimental et les modifications apportées, mais voici les résultats obtenus en ce qui concerne les productions des élèves en contrôles[21].

[19] Tâches dans lesquelles il s'agit de justifier une propriété d'une figure à partir des données et de propriétés, typique de l'entrée dans la géométrie théorique.

[20] Il s'agissait de justifier que deux segments donnés ont même longueur, en s'appuyant sur le fait qu'ils sont symétriques et en mobilisant la propriété de conservation des longueurs par la symétrie axiale.

[21] Les comparaisons ont été facilitées par le fait que Denis m'a confié l'élaboration des énoncés des contrôles, qui incluaient donc des tâches issues des contrôles de Martine et Denis de l'année précédente.

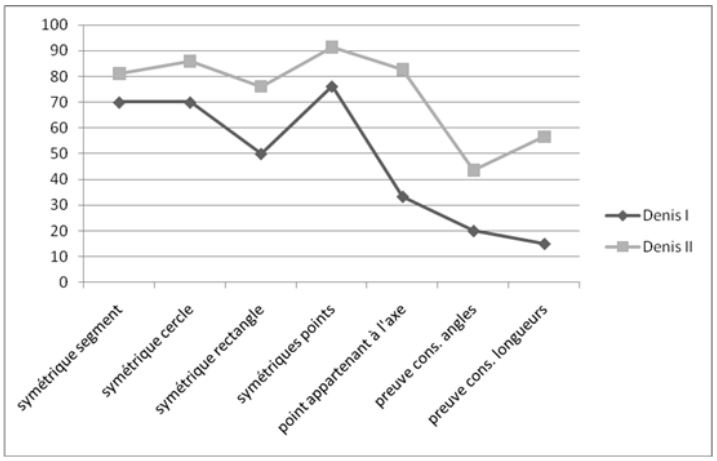


Figure 1. Comparaison des résultats des élèves de Denis I et Denis II.

Les productions des élèves lors de cette deuxième année montrent une nette amélioration des résultats par rapport à l'année précédente (cf. Figure 1). Les quatre premières tâches consistent à construire des symétriques de figures sur papier blanc avec un axe oblique. Les trois autres sont des tâches de preuve faisant respectivement intervenir les propriétés suivantes : le symétrique d'un point de l'axe est lui-même ; la symétrie conserve les mesures des angles ; la symétrie conserve les longueurs. On observe essentiellement que les taux de réussite de la deuxième année sont assez nettement supérieurs (avec des écarts de 10 à 50 points) à ceux de la première année, même pour les tâches déjà relativement bien réussies. Les écarts les plus importants concernent les tâches de preuve et, pour les constructions, celle du symétrique du rectangle, qui présentait la difficulté particulière que l'axe coupait la figure.

En outre, les résultats de cette deuxième année s'approchent nettement de ceux des élèves de Martine la première année sur de nombreuses tâches (les tâches relativement élémentaires de reconnaissance d'axes de symétrie dans une figure et de constructions), voire les dépassent pour certaines, notamment les constructions de symétriques de points (cf. Figure 2).

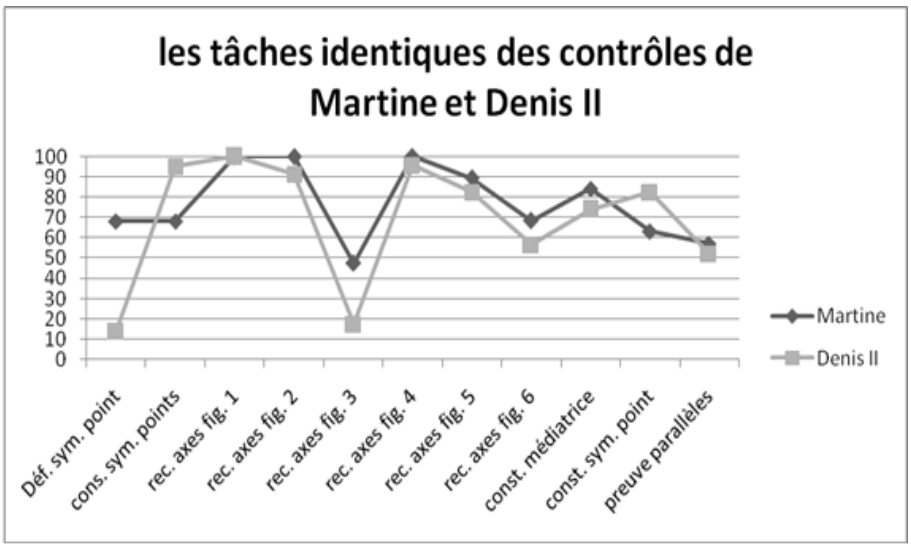


Figure 2. *Comparaison des résultats des élèves de Martine et Denis II.*

Cependant, pour quelques tâches, l'écart entre les taux de réussite dans la classe de Martine et dans celle de Denis la deuxième année reste important à la défaveur des élèves de Denis (notamment

pour la tâche consistant à restituer la définition du symétrique d'un point par rapport à une droite, la plus à gauche sur la Figure 2, et celle concernant la reconnaissance d'axes de symétrie dans une figure particulièrement complexe, la tâche « rec. axes fig.3 » sur la Figure 2). La comparaison des productions sur une tâche de preuve similaire entre les deux classes (et un peu plus complexe que celle mentionnée dans la figure 2) a par ailleurs montré qu'un écart net persiste dans la compréhension des enjeux de ce type de tâches entre les deux populations (Chesnais, 2009a, 2011).

L'expérimentation a ainsi mis en évidence – s'il fallait le confirmer – la possibilité, à certaines conditions, d'améliorer nettement les productions des élèves de sixième de l'éducation prioritaire presque à la hauteur de celles des élèves de milieu ordinaire, même si cela semble plus difficile pour certains enjeux, notamment la restitution d'une définition, les tâches de preuve et les tâches particulièrement complexes.

À propos de ces réserves, la question reste entière de savoir si la limitation de la progression des taux de réussite sur ces enjeux s'explique par le fait que l'expérimentation était trop limitée (ne portant que sur un seul chapitre, relativement tard dans l'année alors que l'entrée dans la géométrie théorique – en particulier la compréhension du « contrat » lié aux tâches de preuves – est l'enjeu de toute l'année) et le fait que la restitution d'une définition n'était pas une tâche à laquelle les élèves de Denis avaient l'habitude d'être confrontés autant que ceux de Martine ; ou si c'est la nature même des tâches considérées, notamment le fait qu'elles cumulent des difficultés liées aux connaissances mathématiques en jeu, au paradigme géométrique et à des pratiques langagières spécifiques, qui est en cause, du fait des caractéristiques connues des élèves de l'éducation prioritaire en termes de rapport au savoir et au langage (Charlot, Bautier et Rochex 1992, Lahire 1993, Bautier 1995, 2007). Notons en outre que le fait de considérer ici le niveau sixième pose la question de l'influence des réelles différences entre les deux populations d'élèves arrivant au collège, avérées par de multiples évaluations.

Quelle interprétation de ces résultats ?

Ces résultats confirment une nouvelle fois des faits déjà bien établis : d'une part, il semble que l'on peut mettre en lien des inégalités en termes d'apprentissage entre élèves selon le contexte – à la défaveur des élèves de l'éducation prioritaire – avec la fréquentation par les élèves dans les classes d' « univers de travail et de savoirs différenciés » (cf. supra) ; d'autre part, ces écarts ne semblent pas irréductiblement liés à des différences entre les élèves, l'enseignement reçu jouant également un rôle. Ces résultats peuvent être interprétés en termes de ce que les sociologues qualifient de « différenciation active » (cf. supra). Toutefois, si les analyses didactiques comme celles que j'ai réalisées permettent de caractériser des différences et leurs liens avec des différences dans les apprentissages des élèves, en revanche, rien ne permet d'affirmer ce qui semble parfois sous-jacent à certaines analyses en termes de « différenciation active », à savoir que : les pratiques de Denis résulteraient de choix faits *a priori* et il est *possible* pour Denis de faire des choix différents, d'autre part l'idée que si Denis avait été dans un contexte différent, il n'aurait pas fait les mêmes choix.

Ce serait nier la complexité des processus en jeu et notamment celle du fonctionnement des pratiques enseignantes et des contraintes qui s'exercent. En effet, si l'on admet la complexité du fonctionnement des pratiques, la coconstruction de ce qui se déroule en classe entre enseignant et élèves et le fait que les choix d'un enseignant (singulier) sont le fruit de nombreuses contraintes et sont limités par ses ressources propres, aboutissant à des « compromis » (Rogalski, 2007), la question des effets, des marges de manœuvre et des conditions d'investissement de ces marges de manœuvre

par chaque enseignant n'est pas si simple. Le travail de Charles-Pézard, Butlen et Masselot (2012) le montre bien à propos des enseignants du premier degré : même une formation étayée par la recherche, avec un accompagnement et sur du temps long ne suffit pas à ce que tous les enseignants dépassent certaines contradictions fortement préjudiciables aux apprentissages.

Je propose donc de montrer comment les recherches que j'ai menées peuvent nourrir la réflexion sur ces questions. Elles apportent des éléments sur les conditions qui permettent de mieux faire apprendre les élèves de l'éducation prioritaire, ainsi que sur la variabilité des pratiques enseignantes en fonction du contexte et des contraintes qui s'exercent sur les enseignants, notamment en lien avec la prise en compte des élèves.

Quelques apports de mes recherches pour nourrir le débat

La question des conditions de l'amélioration des apprentissages des élèves de l'éducation prioritaire

Revenons sur la deuxième partie de ma thèse. Le dispositif expérimental de la deuxième année a consisté à proposer à Denis d'appliquer dans sa classe le scénario que Martine avait conçu l'année précédente, avec un accompagnement du chercheur. L'expérimentation lui a été présentée comme une occasion de « tester », dans une classe de l'éducation prioritaire, un scénario conçu pour des élèves « ordinaires ». L'accompagnement a consisté essentiellement en un entretien pour lui présenter le scénario, durant lequel les échanges ont porté sur des éléments de la logique de sa construction (liée aux enjeux conceptuels autour de la symétrie orthogonale) afin qu'il se l'approprie, et quelques éléments didactiques concernant la symétrie orthogonale (notamment les conceptions erronées classiques[22]). Un document d'une page résumant ces éléments et servant à éclairer certains choix lui a notamment été remis.

J'ai ainsi comparé les déroulements d'une part à ceux de Martine la première année – il s'agit alors des déroulements mis en place par deux *enseignants différents* à partir d'un *même scénario* –, d'autre part à ceux de Denis la première année (je réfèrerai dans la suite à Denis I et Denis II) –, c'est-à-dire, rappelons-le, pour un *même enseignant*, les déroulements correspondant à deux *scénarios différents*. Dans les trois cas la durée totale de la séquence est similaire (une douzaine de séances).

La comparaison des déroulements a montré des différences entre Denis I et Denis II dont une partie constitue un rapprochement avec des éléments observés dans les pratiques de Martine. Ainsi par exemple, les proportions obtenues pour les épisodes de cours, corrections et exercices sur l'ensemble de la séquence sont identiques entre Martine et Denis II, alors qu'ils étaient différents entre Martine et Denis I (les détails figurent dans Chesnais, 2009a, 2011 et 2014a). En particulier, le travail sur des exercices a occupé davantage de temps (en durée absolue et relative) dans la classe de Denis II que dans celle de Denis I. La répartition entre travail individuel et collectif sur les épisodes d'exercices s'est également modifiée pour atteindre une proportion d'environ un tiers / deux tiers, comme dans la classe de Martine, alors que la répartition était moitié / moitié pour Denis I : l'une des

[22] Les 'conceptions erronées classiques' de la symétrie orthogonale ont fait l'objet de nombreuses recherches (notamment Grenier, 1988). Il s'agit par exemple de la confusion avec la symétrie centrale, la conception de transformation d'un demi-plan dans un autre (liée à l'idée du miroir) qui induit en particulier que, lorsqu'une figure est coupée par l'axe de la symétrie, seule la partie située d'un côté de l'axe est considérée lors de la construction de sa figure symétrique. On trouvera davantage de détails dans Chesnais (2009a, 2012a).

conséquences de ces deux éléments est que les élèves de Denis I et Denis II ont passé sensiblement le même temps (en durées absolues) à travailler en autonomie sur des exercices. Bien entendu, le fait d'appliquer le même scénario peut expliquer en partie les similitudes entre ce qui est observé dans les classes de Denis II et Martine, par exemple parce que le temps consacré aux corrections dépend de la quantité de travail donné à la maison, ce qui était fixé dans le scénario ; toutefois, Denis était, dans une large mesure, libre de la gestion du temps au cours des séances et, si le temps passé sur les exercices est nettement plus important que la première année, les élèves n'ont pas travaillé davantage de manière individuelle. Une explication possible est que, comme précisé à propos des déroulements de la première année, lors de la réalisation de tâches difficiles – supposant des adaptations des connaissances –, Denis (la première année comme la seconde) laisse peu les élèves travailler individuellement, prenant rapidement le travail en charge ; or, les tâches proposées en classe dans le scénario de Martine sont en moyenne plus complexes que celles du scénario de Denis.

On note également une place un peu plus importante laissée aux élèves (collectivement) lors des phases collectives pour l'élaboration, la justification et la validation des réponses, même si cela reste moindre que dans la classe de Martine. L'évolution pourrait s'expliquer par le fait que le nouveau scénario fournit aux élèves les éléments conceptuels – par exemple le lien entre les aspects dynamique et statique de la symétrie – nécessaires à l'élaboration et à la justification des réponses, ce qui est moins le cas du scénario de Denis I. L'analyse de la nature du travail durant les épisodes d'exercices met quant à elle en évidence une simplification[23] des tâches – voire une prise en charge – très proche de la manière de faire de Denis I, notamment pour les tâches les plus difficiles, qui sont aussi celles dont les enjeux sont souvent les plus 'conceptuels'. Notons que cela correspond aux tâches pour lesquelles l'écart entre les taux de réussite reste important entre les élèves de Martine et ceux de Denis II.

Par ailleurs, on observe lors des phases de travail collectif sur les exercices des apports plus nombreux de la part de Denis II que de Denis I (en ce qui concerne les liens, l'explicitation des décontextualisations, des « règles du jeu mathématique » …), un peu à la manière de Martine. Par exemple, lors de la réalisation de la première tâche de preuve à propos de la symétrie orthogonale en classe, non seulement Denis identifie explicitement le savoir en jeu, mais il fait aussi le lien avec des tâches de preuve traitées plus tôt dans l'année, dans le chapitre sur les droites parallèles et perpendiculaires : « Denis : comment on fait une démonstration, une preuve ? Comment on a fait pour les droites perpendiculaires et parallèles ? ». Or, aucune intervention de ce type n'avait été repérée la première année.

Plusieurs éléments semblent donc concourir à la qualité des apprentissages des élèves de Denis II : l'ambition théorique et la cohérence du scénario ainsi que le fait que les tâches qu'il contient sont susceptibles de provoquer des activités 'suffisamment' riches. Toutefois, la transmission d'un scénario ne conduit pas toujours à sa mise en œuvre de façon aussi porteuse en termes d'apprentissages que ce qu'il porte a priori, comme l'ont montré depuis longtemps les travaux sur les ingénieries didactiques et qui sera confirmé une nouvelle fois plus loin avec l'étude portant sur Matthieu. Cela appelle plusieurs hypothèses (Chesnais, 2011) : la première est que le scénario de Martine présenterait une forme de « robustesse » (Robert, 2007). On peut ainsi supposer que ses caractéristiques, proches à certains égards de scénarios 'classiques' dans les classes (cf. supra)

[23] La simplification des tâches est le résultat d'indications de l'enseignant (aides procédurales) qui prennent en charge une partie de la tâche (souvent, celle qui engendre une adaptation).

'garantissent' un minimum pour les activités des élèves et certaines caractéristiques des déroulements. Par exemple, la présence d''activités d'introduction' explicitement et directement liées à des énoncés de savoir garantit non seulement la présence de certains enjeux d'apprentissage, mais favorise aussi probablement l'identification des savoirs visés, à la fois par les élèves et par les enseignants, en séparant les enjeux en objectifs bien circonscrits et relativement limités ; toutefois, cela limite *a priori* les activités potentielles par rapport à des tâches plus ambitieuses comme celles produites par la recherche. Par ailleurs, si certaines caractéristiques des déroulements découlent directement du scénario, d'autres semblent liées au fait que l'accompagnement proposé à Denis lui a donné des « clés » (la cohérence et donc l'articulation des tâches et des parties, la fonction de chaque tâche dans le scénario etc.) pour une mise en œuvre du scénario porteuse en termes d'apprentissages, notamment pour enrichir des éléments de la composante médiative (en lui fournissant par exemple des éléments sur les conceptions erronées pour interpréter les difficultés des élèves). Ainsi, la mise en œuvre du scénario de façon porteuse en termes d'apprentissages est aussi favorisée par un enrichissement des ressources de l'enseignant, à la fois par le scénario lui-même et par l'accompagnement, favorisant ainsi des compromis plus efficaces en termes d'apprentissages.

Une dernière hypothèse est liée au fait que les pratiques de Denis II (notamment concernant la composante médiative) sont restées très proches de ce qui avait été observé chez Denis I et relativement éloignées de celles de Martine[24] : peut-on supposer *a priori* qu'il serait souhaitable que la gestion de Denis évolue davantage ? En particulier, la question reste de savoir si des déroulements plus proches de ceux observés dans la classe de Martine auraient donné des résultats encore meilleurs ou si les caractéristiques des déroulements de Denis constituent une *adaptation* nécessaire à ses élèves qui a permis cette évolution des résultats – grâce au changement de scénario. Par ailleurs, la question reste posée de la possibilité pour Denis de faire évoluer davantage ses pratiques, d'autant que la composante médiative des enseignants est identifiée comme nettement plus stable que la composante cognitive (Robert, 2007). Il est d'ailleurs probable que l'évolution constatée dans l'expérimentation reste conjoncturelle et liée à l'accompagnement par le chercheur : rien ne permet d'affirmer qu'elle ait eu des conséquences sur les pratiques de Denis au-delà de cette séquence sur la symétrie orthogonale dans cette classe de sixième[25]. Cela montre également la complexité des pratiques : en effet, Denis I et Denis II sont la *même personne*, mais placée dans des conditions différentes (en particulier, un scénario différent et un dispositif expérimental particulier[26]) : les choix des enseignants ne résultent pas de façon univoque de choix faits a priori (en particulier, en éducation prioritaire, on peut penser au choix de réduire les ambitions des scénarios en lien avec la représentation des difficultés des élèves, cf. Baluteau 2013, 2014), mais sont le fruit de contraintes et ressources multiples qui impliquent des « compromis » (Rogalski, 2007).

[24] Un exemple détaillé de l'analyse de l'épisode concernant l'élaboration de la définition du symétrique d'un point (Chesnais, 2009, b et c) montre ainsi des caractéristiques des déroulements beaucoup plus proches de ceux de Denis I (sur des tâches différentes) que de ceux de Martine (sur la même tâche), mais j'y reviendrai plus loin.

[25] Précisons que malgré ce qui avait été envisagé, il n'a pas été possible de poursuivre les observations sur la symétrie orthogonale en sixième les années suivantes car Denis n'a plus eu en charge de classes de sixième.

[26] Les élèves sont également différents, mais je fais l'hypothèse que ce facteur-là joue peu, étant donné le profil identique des deux classes.

Ainsi, la question des facteurs qui ont présidé à la conception par Denis I d'un scénario moins porteur en termes d'apprentissages que celui de Martine reste posée. S'agit-il de choix a priori faits par Denis car il considèrerait que certaines choses seraient « trop difficiles pour ces élèves » ? Qu'elles seraient trop difficiles ou trop risquées *pour lui* à mettre en œuvre avec *ces* élèves compte tenu des contraintes et des ressources dont il dispose ? Ses ressources lui auraient-elles permis de concevoir un scénario plus ambitieux s'il avait été dans un établissement ordinaire ?

Je fais l'hypothèse qu'envisager un scénario plus ambitieux en éducation prioritaire aurait représenté un coût très important pour Denis (surtout ramené à ce qui peut être perçu comme une prise de risque et un coût de mise en œuvre) et qu'il ne disposait peut-être pas des ressources nécessaires. Par exemple, d'une part, Denis consacre beaucoup de temps et d'énergie à « faire tourner sa classe » (pour garantir à minima la « paix scolaire », Charles-Pézard 2010), l'une des modalités qu'il a choisie pour cela impliquant de proposer un 'devoir maison' chaque semaine à toutes ses classes et donc de le corriger, ce qui est très chronophage. D'autre part, il dit lui-même (lors d'un entretien) qu'« on ne [lui] a jamais appris à faire un cours de sixième » ou, à propos du scénario de Martine – qu'il identifie comme étant nettement plus ambitieux, sans jamais dire que ce n'est pas à la portée de ses élèves – que ce sont des choses « qui ne lui viennent pas forcément à l'esprit » : il lui manque des ressources probablement quant aux connaissances de type didactique sous-jacentes (conceptions erronées, aspects de la symétrie, connaissances des élèves de CM etc.), mais aussi des ressources concernant plus largement les spécificités de l'éducation prioritaire, non seulement pour la conception du scénario, mais aussi pour en assurer une mise en œuvre efficace. Notons que l'on retrouve ici des éléments pointés par Charles-Pézard, Butlen et Masselot (2012) concernant les enseignants du premier degré.

La variabilité des pratiques enseignantes

Un deuxième point sur lequel mes recherches contribuent à alimenter le débat est celui de la variabilité des pratiques enseignantes en fonction du contexte.

L'élargissement du corpus pour l'étude de l'enseignement de la symétrie orthogonale en sixième

À la suite de ma thèse, j'ai élargi le corpus de données concernant l'enseignement de la symétrie orthogonale. Des scénarios et des vidéos de séances de classe ont ainsi été recueillis ainsi que des productions d'élèves en contrôles et dans des tests dans des classes de CM2 et de sixième dans divers types d'établissements :

- une expérimentation dans le prolongement de celle de la thèse a concerné deux enseignants d'établissements ordinaires – voire favorisés – : Quentin et Maurice ont ainsi mis en œuvre dans leurs classes de sixième le scénario de Martine.
- puis le projet sur la transition école-collège ainsi que la création d'un groupe IREM sur ce thème a permis de recueillir des données auprès de cinq autres enseignants de collège, exerçant dans des contextes différents (Sébastien, Marianne, Fabien, Inès, Matthieu et Maryse), ainsi que des enseignants de CM2 (Louis, Clémentine et David).

Sans pour autant atteindre une validité statistique, cet élargissement du corpus a permis d'établir un certain nombre de résultats qui ont donné lieu à différentes communications et publications (Chesnais et al., 2009, Abboud-Blanchard et al. 2012, Chesnais 2014b, 2014c, 2014d, 2015, à paraître, Barrier et al., 2014).

Dans Chesnais (2014b), je présente les résultats d'une analyse comparative des pratiques de neuf enseignants de sixième, dont Denis (I et II) et Martine (cf. tableau 1).

Enseignant	Type d'établissement (proportion de PCS défavorisées en sixième)	Nombre de classes
Martine	Ordinaire (12 %)	1
Denis (I et II)	E. P.[27] (53 %)	2 classes similaires deux années de suite
Quentin	Ordinaire (15 %)	1
Maurice	Ordinaire (9 %)	2 classes similaires
Sébastien	E. P. (71 %)	1
Marianne	Mixte[28] (56 %)	1
Fabien	Mixte (56 %)	1
Inès	Ordinaire (8 %)	2 classes : une « bonne classe » et une classe « moins bonne »
Matthieu	E. P. (63 %)	1

Tableau 1. Enseignants, établissements et classes pris en compte dans l'étude.

Le corpus a permis de comparer huit scénarios différents (ceux de Martine, Denis I, Marianne, Sébastien, Inès et Fabien) et les déroulements dans sept classes (celles de Martine, Denis I et Denis II, Marianne, Sébastien, Quentin et Maurice[29]), ainsi que les productions des élèves en contrôles dans 12 classes – car je disposais de données recueillies dans deux classes pour certains enseignants et dans une classe supplémentaire (celle de Matthieu). Tous ces enseignants ont plus de cinq années d'expérience. Toutefois, certaines de leurs caractéristiques sont différentes : Martine, Maurice et, dans une moindre mesure, Marianne et Inès, ont un peu plus d'années d'expérience que les autres ; par ailleurs Quentin et Maurice ont suivi un master de formation de formateurs incluant une importante dimension didactique et Matthieu participe depuis des années à des groupes IREM et a suivi un master de didactique des sciences, même s'il ne l'a pas terminé.

Chesnais (2014b) présente ainsi les choix de scénario et de déroulements faits par les enseignants en ce qui concerne deux éléments de savoir particuliers : la définition du symétrique d'un point par rapport à une droite, et sa construction, qui représentent des éléments clés de l'enseignement de la symétrie orthogonale en sixième.

Dans les scénarios, j'ai identifié la part de travail dévolue aux élèves dans l'élaboration de ces objets (notamment via les exercices proposés) ainsi que des traces de la cohérence mathématique de l'articulation des contenus dans une optique d'entrée dans la géométrie théorique (dont ces objets sont emblématiques en sixième). En ce qui concerne les déroulements, les indicateurs retenus pour caractériser les activités des élèves concernent la part et la nature des tâches dévolues aux élèves, ainsi que les conditions dans lesquelles elles sont réalisées (travail individuel ou collectif, durées), en y ajoutant les apports réalisés par l'enseignant, au-delà des tâches prévues dans le scénario, ainsi que l'identification des savoirs en jeu et la prise en considération des enjeux langagiers.

[27] Éducation Prioritaire.

[28] Marianne et Fabien exercent dans le même établissement qui n'est pas labellisé « éducation prioritaire » au moment des observations mais qui accueille un assez fort pourcentage d'élèves de milieu social défavorisé et sera labellisé l'année suivante.

[29] Rappelons que Denis II, Quentin et Maurice appliquent le scénario de Martine (comme relaté dans Chesnais 2014b et Abboud-Blanchard et al., 2012)

Les résultats montrent que les choix des enseignants sont très variés en ce qui concerne les scénarios. Martine et, dans une moindre mesure, Marianne font le choix de faire travailler la définition pour elle-même puis la procédure de construction[30] comme découlant de la définition de l'objet, ce que je considère comme représentant des indices de cohérence mathématique orientée vers une entrée dans la géométrie théorique. Cette cohérence est moins importante dans le scénario de Denis I et de Sébastien qui mentionnent la définition et la construction, mais soit la construction n'est vue que comme « illustration » de la définition (scénario de Denis I), soit la construction est vue avant la définition (scénario de Sébastien). Quant à Inès et Fabien, leurs scénarios n'incluent pas la définition : la construction est travaillée pour elle-même, ce qui indique que c'est la maîtrise de l'algorithme qui est visé, plus que des enjeux conceptuels liés à l'entrée dans une géométrie axiomatique. Du point de vue du travail prévu pour les élèves, les choix sont là aussi très variés : seules Martine, et dans une moindre mesure Marianne, prévoient de laisser à la charge des élèves une part de l'élaboration des contenus, via des exercices (c'est-à-dire qu'une « activité d'introduction », pour reprendre le terme couramment employé par les enseignants, est prévue dans le scénario pour introduire ces connaissances), les autres les introduisant directement dans la leçon.

En ce qui concerne les déroulements, trois constats s'imposent[31] : Premièrement, on observe de nombreuses différences, y compris en termes de déroulements entre des enseignants appliquant le même scénario. En outre, la répartition des enseignants en fonction de l'ambition de leurs choix varie selon les critères, mais peu : les enseignants qui dévoluent peu de chose aux élèves sont aussi globalement ceux qui font peu d'apports et prennent le moins en considération l'identification des objets de savoir en jeu et les enjeux langagiers. Deuxièmement, dans les classes relevant de l'éducation prioritaire, les choix semblent un peu plus pilotés par des objectifs liés à la maîtrise d'algorithmes qu'à des objectifs plus conceptuels, mais peut-être pas autant qu'on pourrait le supposer : plutôt que l'absence d'éléments théoriques, c'est leur place et surtout l'organisation retenue qui semblent différentes, notamment en faisant passer les éléments théoriques *après* les éléments procéduraux. Enfin, il apparaît qu'un certain nombre de caractéristiques sont largement partagées, quel que soit le contexte d'enseignement. Il s'agit notamment du caractère limité du travail sur les enjeux langagiers et du peu d'identification des objets de savoir en jeu.

Les choix faits par les enseignants sont donc très variés – tout en restant dans une certaine « enveloppe » (Roditi, 2008) qui semble, elle, très largement partagée – et n'apparaissent pas si différenciés en fonction du type d'établissement. En particulier, il apparaît que les pratiques de Marianne, qui exerce dans un établissement « mixte » présentent des caractéristiques nettement plus porteuses en termes d'apprentissages que nombre d'autres enseignants quel que soit le contexte – se rapprochant ainsi à certaines égards de celles de Martine. Tandis que les pratiques d'Inès et de Maurice, dans des établissements très favorisés, présentent des caractéristiques a priori peu porteuses en termes d'apprentissages, et proches par certains aspects des caractéristiques que

[30] Par construction d'une perpendiculaire et report de longueur, ce qui constitue un véritable *problème de construction* (Chevallard et Jullien, 1990-1991), en sixième, notamment compte tenu du caractère non directement opératoire de la définition (Chesnais, 2009b), j'y reviendrai plus loin.

[31] Ces constats résultent non seulement de l'étude exposée dans Chesnais 2014b, mais aussi d'études plus détaillées, notamment des comparaisons plus fines des déroulements sur une même tâche dans des classes différentes (Chesnais 2009b, 2009c, 2012c, 2014e, 2015, Abboud-Blanchard et al. 2012, Barrier et al. 2014).

l'on a citées précédemment (à propos des pratiques de Denis) comme étant typiques de pratiques en éducation prioritaire.

D'autres études menées qui confortent ces résultats

En dehors de cette étude sur l'enseignement de la symétrie orthogonale en sixième, j'ai également mené une autre recherche, toujours dans le cadre du projet sur la transition école-collège comparant les pratiques de Matthieu sur deux années consécutives, la première dans un établissement très défavorisé[32], la seconde dans un établissement ordinaire (Chesnais, à paraître). Cette étude a porté sur l'enseignement de la notion d'angle et a révélé des choix de scénario ambitieux : son scénario est en effet basé sur une ressource produite par un groupe d'enseignants chapeauté par un chercheur en didactique et publiée dans la revue Repères-IREM[33] et dont la référence est Chevalier et David-Chevalier (2006). Le scénario est en outre *commun* aux deux contextes. L'enseignant revendique cette constance : il explique ainsi, dans un entretien, qu'il considère que ses choix de scénario sont dictés par une adéquation au savoir visé et non au public. Rappelons que Matthieu est un enseignant « bien mieux outillé que la moyenne » du point de vue didactique, comme mentionné ci-dessus. Je reviendrai plus loin sur les détails de cette étude qui montre que la mise en œuvre et les effets sont différenciés entre les deux publics.

Enfin, une étude comparant les pratiques d'enseignantes expérimentées non expertes de CM2 de la même école relevant de l'éducation prioritaire et concernant la symétrie axiale (Chesnais, 2014d) a révélé des pratiques très différentes, inégalement porteuses en termes d'apprentissage, par le choix des objectifs et la nature des tâches proposées : Séverine vise une association de la symétrie axiale au pliage, une compréhension globale de l'effet sur les figures et le dépassement de certaines conceptions erronées, via des manipulations et des tâches relativement « riches » de type « problèmes » ; tandis que les objectifs de Sophie sont essentiellement « techniques », concernant la maîtrise du procédé de construction de symétriques sur quadrillage et par l'usage des instruments de géométrie, via des déroulements où l'enseignant montre la technique et les élèves l'appliquent.

Une dernière étude (Molvinger et al., 2017) porte sur une enseignante de CM2 débutante (Hannah) en éducation prioritaire, qui fait le choix à propos de l'enseignement de la notion de masse de faire travailler ses élèves selon des modalités exigeantes : la séquence est pensée en termes de « démarche d'investigation »[34], à partir d'une situation dans laquelle il y a potentiellement beaucoup d'enjeux d'apprentissages qui sont rarement pris en charge dans les classes (comme la dissociation masse-volume) et qui inclut des phases de manipulation longues aux déroulements complexes.

Ces deux dernières études, portant sur le premier degré, illustrent à nouveau les conclusions de Butlen, Peltier-Barbier et Pézard (2002) concernant la variété des e-genres d'enseignement des mathématiques dans le primaire : les pratiques de Séverine relèvent ainsi du e-genre 3, tandis que celles de Sophie relèvent du genre majoritaire 2 ; celles de Hannah semblent relever d'une tentative

---

[32] L'enseignant Matthieu dans cette étude est le même que celui mentionné précédemment. L'établissement dans lequel il exerce la première année est celui mentionné ci-dessus à propos de l'étude rapportée dans Chesnais (2014b).

[33] Rappelons qu'il s'agit d'une « revue d'interface qui s'adresse aux enseignants de mathématiques et vise à diffuser «la réflexion menée en commun entre praticiens et chercheurs » (site des IREM, www.univ-irem.fr, consultation le 2 avril 2017), en particulier dans les groupes IREM.

[34] Je ne reviendrai pas ici sur le fait que, du point de vue didactique, il ne s'agit pas à proprement parler d'une démarche d'investigation, mais elle est conçue comme telle par l'enseignante. (cf. Molvinger et al., 2017, pour davantage de détails).

pour mettre en œuvre des pratiques relevant du genre 3, même si la mise en œuvre peut dénaturer la situation proposée aux élèves.

Conclusions sur la variabilité des pratiques en fonction du contexte

Même si la modestie des effectifs ne permet pas de garantir la valeur statistique des observations, les différentes études mentionnées montrent, d'une part, que les pratiques ne sont pas systématiquement différenciées selon les contextes, d'autre part qu'il existe une certaine variété entre les pratiques des enseignants en éducation prioritaire, étendant là le résultat de Butlen, Peltier-Barbier et Pézard (2002) concernant les pratiques en primaire. Par exemple, qu'il s'agisse de choix de scénarios ou de déroulements, certains enseignants font des choix ambitieux, a priori plus porteurs en termes d'apprentissages, quel que soit le contexte dans lequel ils enseignent. Certaines pratiques en éducation prioritaire apparaissent ainsi comme plus ambitieuses et a priori plus porteuses en termes d'apprentissages que certaines en établissement ordinaire.

Cela permet de laisser penser que des « alternatives [aux pratiques peu porteuses en termes d'apprentissage en éducation prioritaire] sont possibles » (Butlen, Masselot et Pézard, 2003), autant dans le premier degré qu'au début du secondaire. En outre, cela montre que l'effet du contexte sur les pratiques n'est pas systématique, d'autres facteurs interviennent, confirmant la complexité des déterminants des pratiques.

La question de la possibilité pour tous les enseignants d'investir les marges de manœuvre existantes reste posée, compte tenu du coût qu'elles représentent, ainsi que celles des conditions qui rendraient cela possible. L'expérimentation menée dans la classe de Denis II montre ainsi que certaines choses peuvent évoluer, mais seulement dans une certaine mesure et moyennant un coût notamment en connaissances à avoir – donc potentiellement en termes de formation nécessaire.

Cela fait écho au travail de Charles-Pézard, Butlen et Masselot (2012) ou de Coulange (2012a) qui montrent bien le poids de contraintes variées (ressources à disposition des enseignants – leurs connaissances, la formation reçue, les manuels disponibles etc. –, poids de l'institution et du collectif d'enseignants …) dans les pratiques des enseignants ainsi que la complexité des conditions à réunir pour faire évoluer les pratiques en éducation prioritaire par la formation.

La question des effets de ces différences de pratiques sur les apprentissages, en fonction du contexte, reste également à explorer et c'est ce que je propose maintenant.

Des effets en termes d'apprentissages corrélés au contexte

J'ai analysé les productions des élèves des neuf enseignants de l'étude présentée précédemment concernant la symétrie orthogonale en sixième (Chesnais, 2014b) en contrôles ou dans des tests, à propos de tâches concernant la restitution de la définition et la construction du symétrique d'un point, afin de les mettre ensuite en regard des analyses de pratiques. Les résultats sont résumés dans les tableaux suivants, le premier (Tableau 2) concernant la restitution de la définition par les élèves[35], le second (Tableau 3), la construction.

Enseignant[36]	Type établissement	Restitution de la définition du symétrique d'un point

[35] Les résultats sont présentés en pourcentage pour permettre les comparaisons, malgré les effectifs relativement faibles.

[36] Denis I n'apparaît pas dans ce tableau car cette tâche n'a pu être évaluée.

		Réponse correcte	Réponse partiellement correcte[37]	Réponse fausse ou non réponse
Martine	Ordinaire (12 %)	68	18	14
Quentin	Ordinaire (15 %)	62	12	27
Maurice B	Ordinaire (9 %)	38	24	38
Maurice A	Ordinaire (9 %)	30	45	25
Denis II	E.P. (53 %)	14	38	48
Inès A	Ordinaire (8 %)	7	39	54
Marianne	Mixte (56 %)	0	47	53
Inès B	Ordinaire (8 %)	0	27	73
Sébastien	E.P. (71 %)	0	10	90
Fabien	Mixte (56 %)	0	7	93
Matthieu	E.P. (63 %)	0	5	95

Tableau 2 : taux de restitution de la définition en fonction du contexte ordonné par taux de réponse correcte décroissant.

Le taux de restitution de la définition semble lié au type d'établissement : les classes situées dans des établissements ordinaires ont en général de meilleurs résultats que les autres. Toutefois, on note deux exceptions : les classes d'Inès qui, bien qu'appartenant à un établissement favorisé, obtiennent de « mauvais » résultats et la classe de Denis II où plus de la moitié des élèves produisent une réponse au moins partiellement correcte, malgré l'appartenance à l'éducation prioritaire. Le taux de réponses partiellement correct est aussi nettement plus élevé dans la classe de Marianne que dans les autres classes d'établissements mixtes ou relevant de l'éducation prioritaire.

	Type établissement	Construction du symétrique d'un point
Maurice B	Ordinaire (9 %)	100
Denis II	E.P. (53 %)	91
Maurice A	Ordinaire (9 %)	90
Martine	Ordinaire (12 %)	80
Inès B	Ordinaire (8 %)	79
Quentin	Ordinaire (15 %)	78
Marianne	Mixte (56 %)	76
Denis I	E.P. (53 %)	76
Sébastien	E.P. (71 %)	62
Fabien	Mixte (56 %)	43
Inès A	Ordinaire (8 %)	27
Matthieu	E.P. (63 %)	15

Tableau 3 : taux de réussite pour la construction du symétrique d'un point en fonction du contexte, ordonné par taux de réponse correcte décroissant.

[37] La tâche a été identifiée par l'élève, mais il ne restitue qu'une des deux propriétés (parmi l'orthogonalité et l'équidistance à l'axe).

La tâche de construction est mieux réussie que la tâche de définition dans toutes les classes. La hiérarchie des classes en fonction du taux de réussite n'est pas tout à fait la même, mais on voit apparaître à nouveau un lien entre taux de réussite et type d'établissement, ainsi que les mêmes exceptions. On note même une accentuation de ces exceptions, dans le cas de la classe de Denis II, très performante, et pour une classe d'Inès, qui obtient un résultat particulièrement faible, y compris lorsqu'on le compare aux classes de Sébastien, Marianne, Denis I et Fabien, correspondant pourtant à un contexte très défavorisé.

Les résultats des classes de l'enseignement ordinaire semblent donc en moyenne meilleurs que ceux des classes de l'éducation prioritaire, mais ce n'est pas systématique. Certaines classes de l'enseignement prioritaire obtiennent de meilleurs résultats que ceux attendus, tandis que certaines classes de l'enseignement ordinaire en obtiennent de moins bons.

Or ces résultats font largement écho aux résultats de la partie précédente concernant les pratiques des enseignants, permettant ainsi de relier les caractéristiques des pratiques aux productions des élèves en contrôles : les « exceptions » constatées dans les résultats des élèves correspondent aux « exceptions » constatées sur les pratiques en fonction du contexte. Toutefois, l'effet (dans un sens comme dans l'autre), semble très lié au contexte voire au niveau même de la classe (si l'on considère les écarts observés entre la « bonne classe » d'Inès et sa classe « plus faible »).

Cela semble confirmer que certaines pratiques sont « plus efficaces » que d'autres quel que soit le contexte, mais que leur effet reste corrélé au contexte. Les inégalités scolaires résulteraient alors d'une question de proportion plus importante en éducation prioritaire de pratiques moins porteuses en termes d'apprentissages ? Hypothèse qui serait d'ailleurs à relier au fait que la population des enseignants est différenciée, notamment par l'expérience, les enseignants de l'éducation prioritaire étant en moyenne nettement moins expérimentés – si ce n'est novices[38]. Ou le facteur déterminant serait-il la différenciation passive, avec l'hypothèse que les pratiques enseignantes ne sont pas si différenciées en fonction des contextes ? Les études présentées précédemment tendent à étayer cette dernière hypothèse, puisque les choix les moins porteurs en termes d'apprentissages semblent avoir des effets davantage négatifs en éducation prioritaire.

L'étude suivante permet de montrer que des choix de scénarios a priori plus porteurs que d'autres en termes d'apprentissages, d'après des critères didactiques, semblent aussi contenir des « risques » plus importants de différenciation passive et donc de différenciation potentielle des apprentissages selon les contextes.

Des caractéristiques des pratiques a priori porteuses en termes d'apprentissages pour tous les élèves, mais…

Comme je l'ai déjà mentionné précédemment, j'ai étudié la mise en œuvre par un même enseignant (Matthieu), dans une classe d'un établissement d'éducation prioritaire (classe 1) et dans une classe d'un établissement ordinaire l'année suivante (classe 2), d'une même séquence d'enseignement, répondant à certains critères d'exigence didactique (cf. supra et Chesnais, à paraître). Le thème en est la notion d'angle en sixième.

[38] Je n'ai pas étudié spécifiquement cette variable-là dans mes travaux, mais, même si mes études n'incluent que des professeurs expérimentés, il faut bien reconnaître que ceux exerçant en éducation prioritaire sont en moyenne plus jeunes (les exceptions sont Quentin et Marianne, qui constituent chacun un contre-exemple de leur catégorie). L'expérience de Marianne serait-elle un facteur déterminant pour son « efficacité » en éducation prioritaire ?

Le scénario est légèrement adapté par Matthieu[39] et complété, car la ressource ne couvre pas l'ensemble des enjeux du chapitre en sixième, mais de manière identique dans les deux classes à quelques détails près. Les contenus sont organisés essentiellement autour de tâches complexes pour faire émerger des connaissances sur les mesures des angles de figures élémentaires (carré, triangle équilatéral et isocèle) puis des tâches plus simples autour de l'utilisation du rapporteur pour mesurer ou construire des angles de mesures donnée, enfin des tâches moyennement complexes visant à mettre en évidence l'utilité de la notion d'angle (il s'agit d'exercices sur les caps en navigation ou le mesurage de longueur distantes et la construction de polygones). L'organisation des séances est également très similaire dans les deux classes et entre les séances. Celles-ci débutent presque systématiquement par un épisode de calcul mental sur des contenus sans rapport avec le chapitre en cours, s'ensuit une phase de rappel de ce qui a été traité lors des séances précédentes, enfin de nouvelles tâches sont proposées. Une seule séance (dans chaque classe) déroge à cette organisation car elle contient essentiellement un épisode de cours visant à l'institutionnalisation d'un certain nombre de connaissances rencontrées dans les situations, ainsi que leur formalisation dans une trace écrite. Ces éléments m'inclinent à considérer qu'il n'y a pas de différenciation active du scénario de la part de Matthieu, à la fois en ce qui concerne les aspects cognitifs et médiatifs.

Les analyses des déroulements m'ont permis de mettre en évidence des éléments communs aux deux classes et susceptibles de générer de la différenciation passive. Tout d'abord, la faible identification des savoirs en jeu – non seulement par la part très réduite des temps d'institutionnalisation, mais aussi par la nature des aides et apports produits par l'enseignant : notamment, durant les nombreux temps de synthèse et de rappels, les échanges portent sur ce qui a été réalisé en lien avec les buts des situations (« on a classé les figures par familles », « on a trouvé la mesure des angles du triangle équilatéral », par exemple), incluant également des éléments de structuration (par exemple sur les liens entre les situations), mais ces éléments sont essentiellement liés à la structure du scénario en lien avec le but (l'enchainement des situations est présenté comme ayant pour but final de reconstituer une boite polyédrique), sans que les liens en termes de savoirs en jeu soient explicites.

De façon similaire, à l'échelle des situations, les synthèses et rappels portent sur l'avancée dans les situations, mais certains savoirs en jeu ne sont pas pointés ni surtout décontextualisés. Par exemple, l'additivité des mesures d'angles mobilisée dans la deuxième situation du scénario et nécessaire à la résolution des tâches suivantes est présente « en-actes », mais reste de fait implicite et contextualisée. Or les échanges lors de la deuxième séance dans la classe d'éducation prioritaire révèlent qu'il n'est pas évident pour certains élèves, alors que l'on vient de déterminer la mesure des angles aigus du triangle rectangle isocèle en en juxtaposant deux (et donc supposant que la mesure de l'angle ainsi formé est égale à la somme des mesures de chacun des deux), que la procédure est adaptable au cas de trois angles (pour déterminer la mesure des angles du triangle équilatéral). De même, le fait qu'une mesure correspond à une quantité d'unités reste implicite (par exemple lorsque l'enseignant pointe qu'il faut « compter les graduations » et non pas se contenter de lire la graduation située en face du côté de l'angle) et l'on peut douter que cela permette aux élèves de

[39] Notamment, Matthieu ne retient pas l'étape de construction d'un «rapporteur simplifié», proposée dans l'article et qui permet, même si cela n'est pas explicité dans la ressource, de travailler des enjeux conceptuels autour de la mesure, via la mesure avec un étalon arbitraire (Chesnais et Munier, 2016) : il choisit d'introduire très tôt dans le chapitre la mesure des angles en degrés. Par ailleurs, il ne réalise pas la dernière étape du scénario, j'y reviens plus loin.

concevoir une mesure comme quantité d'unités, compte tenu des difficultés habituelles connues à ce propos et de l'absence de travail sur la mesure avec étalon arbitraire dans la séquence.

Par ailleurs, on observe certaines différences du point de vue médiatif entre les deux déroulements : on a pu observer que Matthieu propose plus souvent dans la classe 1 que dans la classe 2 des aides qui aboutissent à la réduction des tâches auxquelles sont confrontés les élèves. Ces aides sont souvent des indications de pistes soit données par l'enseignant, soit résultant de la mutualisation de propositions d'élèves et font l'objet de phases collectives que Matthieu insère au milieu des phases de recherche individuelle sur les tâches complexes ; notons que certaines phases de ce type sont aussi observables dans la classe 2, sur les tâches particulièrement complexes.

Détaillons un épisode qui montre bien ces différences, leurs causes, leurs liens avec les aspects cognitifs et la complexité de penser des alternatives car il met bien en évidence le rôle joué par les élèves eux-mêmes dans la différenciation.

Dans le scénario, il s'agit de partir d'une boite polyédrique dont les faces sont des carrés, des triangles rectangles isocèles et des triangles équilatéraux, et dont tous les élèves, ainsi que le professeur, disposent d'un patron. Les faces une fois découpées ont été classées par « familles » lors de la première séance, c'est-à-dire selon la famille des carrés, des triangles rectangles isocèles et des triangles équilatéraux (les élèves ayant travaillé par groupes, chaque élève du groupe disposant d'un patron à une échelle différente des autres, les familles contiennent des figures semblables mais non nécessairement isométriques). Ces familles ont été caractérisées par des propriétés énoncées par les élèves : angles droits et côtés égaux pour les carrés, un angle droit et deux côtés égaux pour les triangles rectangles isocèles ; mais, si les élèves des deux classes ont cité la propriété d'égalité des longueurs pour les triangles équilatéraux, en revanche, la propriété d'égalité des angles n'a été proposée que dans la classe 2 (ordinaire).

La deuxième situation consiste à calculer les mesures des angles des triangles équilatéraux et isocèles à partir de la mesure de l'angle droit (90°) qui a été donnée par l'enseignant. L'un des buts est donc d'établir que la mesure des angles du triangle équilatéral est 60° : la procédure attendue consiste à constater que la juxtaposition de trois angles de triangle équilatéral donne un angle superposable à celui obtenu en juxtaposant deux droits puis à calculer le double de 90 et enfin le tiers du résultat. Notons qu'il s'agit d'une procédure très complexe en sixième, en termes d'adaptations (étapes, mélange numérique / grandeurs et mesures / géométrie etc.), qu'en outre elle repose sur l'utilisation (implicite) de l'additivité des mesures d'angles et que la validation est instrumentée.

S'il est établi que, pour n'importe quel triangle équilatéral, ses trois angles sont égaux entre eux et que les angles des triangles équilatéraux sont égaux deux à deux (autrement dit que tous les angles de tous les triangles équilatéraux sont égaux entre eux[40]), alors il suffit d'en prendre trois au hasard et d'appliquer la procédure. Mais, ces propriétés triviales pour le mathématicien (on peut même considérer qu'elles relèvent de la définition du triangle équilatéral) sont loin de l'être pour un élève de sixième, pour qui, d'une part, la notion de triangle renvoie encore au dessin et non à la figure, d'autre part, la notion d'angle n'est justement pas encore construite (et en particulier pas le fait que la grandeur angle est invariante par isométrie ou, autrement dit, que la grandeur angle « ne dépend

[40] Qui s'exprime aussi, dans le langage expert par « le triangle équilatéral a ses trois angles égaux entre eux », « le », dans son sens générique correspondant à une quantification universelle, pouvant être remplacé par « tout » ou par « un ».

pas de la longueur des côtés », Piaget, Inhelder et Szeminska 1960, Berthelot et Salin 1994-1995) ; enfin, que la notion de triangle équilatéral est plutôt associée à l'égalité de la longueur des côtés (la propriété d'égalité des angles est vue en général en sixième). Autrement dit, pour un élève de sixième, parler *du* triangle équilatéral a encore peu de sens et renvoie au mieux à un élément générique de la collection de tous les triangles qui ont leurs trois côtés égaux, mais n'implique rien quant aux angles. Notons que ces questions ont des implications langagières particulièrement complexes, associées à des enjeux logiques de quantification sur lesquels je reviendrai plus longuement dans la troisième partie de cette note. En effet, du point de vue mathématique, ces propriétés concernent LE triangle équilatéral, comme figure, mais, tant que celle-ci « n'existe pas », il faut évoquer « tous les triangles équilatéraux » ou « chaque triangle équilatéral ».

Pour revenir à la tâche, la propriété d'égalité entre eux des angles d'un triangle équilatéral particulier est nécessaire, a minima, pour appliquer la procédure mentionnée ci-dessus, au moins pour établir que la mesure des trois angles d'un triangle équilatéral *donné* est 60° et généraliser ensuite à tous les triangles équilatéraux en identifiant que ce résultat est valable pour différentes tailles de triangles équilatéraux (et en vérifiant même éventuellement en les superposant que les angles de deux triangles équilatéraux de taille différente sont égaux). Or les élèves de la classe 2 (ordinaire) disposent de cette propriété avant de s'atteler à la résolution de la tâche (car elle a été mentionnée dans la caractérisation de la famille), mais pas ceux de la classe 1. Il faut donc considérer que l'établissement de la propriété (par superposition des angles) constitue une première étape (supplémentaire) de la tâche dans la classe 1. Cela en fait une tâche extrêmement complexe, dont on peut douter qu'elle soit à la portée d'un élève de sixième, sauf à considérer que les élèves vont s'appuyer sur leur perception visuelle et admettre, plus ou moins implicitement, l'égalité des angles.

L'analyse du déroulement montre que, dans la classe 2, quelques réponses sont proposées par les élèves au bout de 2 minutes de recherche et presque tous les binômes proposent des solutions au bout de 10 minutes, tandis que dans la classe 1, seuls deux élèves proposent des réponses au bout de 6 minutes, lorsque l'enseignant engage à mutualiser des pistes, et seules 5 réponses – partielles de surcroît – ont été trouvées lorsqu'il arrête la recherche au bout de 6 minutes supplémentaires. L'activité des élèves est ainsi réduite par l'enseignant et donc susceptible d'avoir pour conséquence une différenciation des apprentissages. Par ailleurs, l'analyse de l'épisode montre que la propriété clé citée plus haut et le fait que le triangle équilatéral n'est pas construit en tant que figure restent transparents pour Matthieu : non seulement il ne le pointe pas explicitement lors de l'élaboration du raisonnement, mais lors des phases collectives, ses formulations alternent de façon apparemment aléatoire entre « les triangles équilatéraux » et « le triangle équilatéral », témoignant que, pour lui, il y a équivalence entre considérer tous les représentants de la classe ou l'un d'entre eux de façon générique ; par ailleurs, lors des phases de synthèse, l'égalité des angles entre deux pièces de même forme mais de taille différente est vérifiée *après* la formulation du raisonnement, comme si cela n'intervenait pas dans celui-ci.

Cette analyse montre plusieurs choses : tout d'abord l'effet différenciateur (passif) de la transparence pour l'enseignant du rôle joué par un élément de savoir dans les tâches proposées aux élèves ; ensuite, le rôle joué par les élèves dans la différenciation : la différence initiale vient du fait que les élèves de la classe 2 mentionnent la propriété clé, et non les autres. Enfin, cela montre comment les différences du point de vue cognitif influent sur le médiatif dans le déroulement de l'épisode, provoquant la réduction des activités des élèves de la classe 1 par rapport à celles des élèves de la classe 2.

Qu'en est-il des alternatives possibles ? Tout d'abord, l'alternative de « laisser chercher les élèves » dans la classe 1 pour ne pas réduire la tâche est-elle réaliste compte tenu du temps que cela aurait pris et du fait que des phases de recherche infructueuses longues peuvent être source de désintéressement des élèves à la tâche et, par conséquent, de difficultés de gestion limitant encore certainement davantage les effets potentiels en termes d'apprentissages ? Ensuite, Matthieu aurait-il dû (pu ?) mentionner la propriété lors de la synthèse concernant la situation 1 dans la classe 1, afin d'établir les prérequis nécessaires à la résolution de la deuxième ou cela n'aurait-il de toutes façons servi à rien, dans la mesure où cela ne correspondait pas aux activités des élèves ? Dans les deux cas, il semble que l'enseignant soit soumis à des dilemmes difficiles à trancher…

La dernière alternative – mais qui n'était pas à la portée de Matthieu – concerne la non-transparence de la propriété en jeu. Plusieurs facteurs me semblent pouvoir l'expliquer : d'une part, cet élément est également transparent dans la ressource (l'article de Repères-IREM) dont est issu le scénario de Matthieu ; d'autre part, je fais l'hypothèse que la naturalisation de la notion de triangle équilatéral en tant que figure est responsable de cette transparence, notamment parce que, à la charnière entre géométrie instrumentée et théorique, elle correspond à une quantification qui est en quelque sorte « cachée » dans le langage – dans la différence entre UN triangle équilatéral et LE triangle équilatéral, voire différents usages du déterminant « le » (j'y reviens dans la troisième partie de la note).

Compte tenu des ressources de Matthieu et des contraintes, le compromis trouvé, même si l'on peut penser qu'il est responsable de l'écart potentiel dans les apprentissages entre les deux classes, me semble relever davantage d'une adaptation nécessaire, inévitable voire souhaitable par certains aspects, à la contingence – aux élèves – que d'une « différenciation active ».

Pour conclure sur cette étude, elle montre que des choix de scénario ambitieux, même avec des enseignants expérimentés voire experts, sont loin de résoudre les problèmes de différenciation entre les publics, comme l'avaient déjà montré depuis longtemps les difficultés de diffusion des ingénieries didactiques dans des « classes faibles » (Perrin-Glorian, 1993, 2011). Notons que l'étude que nous avons menée à propos de l'enseignante de CM2 débutante en éducation prioritaire (Hannah), citée plus haut, a également mis en évidence des résultats mitigés en termes d'apprentissages malgré des choix de scénario ambitieux (Molvinger et al., 2017).

L'invisibilité de certains éléments ainsi que l'influence des élèves eux-mêmes semblent jouer un rôle déterminant, mais la complexité des processus en jeu et des contraintes rend la question des alternatives particulièrement ardue. Toutefois, renoncer à de telles tâches ne semble pas souhaitable, mais un enjeu serait peut-être, pour les élèves les moins à même d'en bénéficier directement, d'organiser une progression introduisant des tâches intermédiaires permettant de construire progressivement (à l'échelle d'une année au moins) les conditions de leur efficacité. Ces conditions se traduisent probablement au moins pour une part en termes d'instauration d'un contrat didactique approprié, prenant en charge la question de la construction d'un rapport au savoir adéquat. Cela rejoint un peu, par exemple, les objectifs du dispositif de « bilans de savoirs » proposé par Butlen et Pézard (2003).

Discussion

Les travaux présentés ci-dessus mettent en évidence des constats similaires à ceux des travaux mentionnés dans l'introduction quant à ce qui, à l'intérieur de la classe, est susceptible de provoquer des différences dans les apprentissages, du fait d'une différenciation des univers de savoirs

fréquentés par les élèves. Mais il me semble que mes travaux éclairent différemment le fonctionnement de ces phénomènes.

Tout d'abord, ils montrent le rôle prépondérant des différences entre élèves dans la coconstruction de ces phénomènes dans la classe.

À propos des élèves

Les travaux déjà existants mettent en évidence des différences dans « les caractéristiques et les dispositions sociocognitives et sociolangagières des élèves » (Rochex et Crinon, 2011, p. 9) entre les deux publics, notamment au début du secondaire. Les travaux de didactique des mathématiques qui se sont intéressés à cette question ont en particulier montré des écarts non seulement dans les connaissances des élèves (avérées aussi par les multiples évaluations institutionnelles), mais aussi dans certaines aptitudes, comme : la capacité à changer de point de vue, l'idée qu'on ne peut obtenir une réponse juste que si l'on connaît la méthode de résolution, la recherche de procédures algorithmiques, la difficulté à aborder un problème ou à vérifier une solution, la difficulté plus ou moins grande à gérer la distance avec le réel dans la modélisation de situations concrètes, ainsi que la difficulté à identifier les objets de savoir en jeu dans les situations (Perrin-Glorian, 1993) qui s'apparente à la difficulté de scondarisation des tâches scolaires (Bautier et Goigoux, 2004) ; liste à laquelle il faut ajouter des éléments liés au langage, sur lesquels je reviendrai dans la troisième partie, et la difficulté représentée pour certains élèves par les énoncés *généraux* (Butlen et Pézard, 2003). Ces éléments apparaissent comme révélateurs, en mathématiques, des différences dans les rapports au savoir, au langage et à l'école (Charlot, Bautier et Rochex, 1992).

Ainsi, si les résultats de ma thèse montrent que l'écart entre les deux populations n'est pas (encore) rédhibitoire en sixième pour l'accès des élèves de l'éducation prioritaire aux savoirs visés par les programmes scolaires (au moins dans une certaine mesure), il a tout de même des conséquences sur le « coût » nécessaire pour y parvenir.

Pour penser le rôle des élèves dans le processus de construction des inégalités d'apprentissage dans la classe, rappelons que :

L'élève est un déterminant central de l'activité de l'enseignant. Il peut s'agir de l'élève individuel, de l'ensemble des élèves, et de la classe comme entité. Les choix des scénarios (organisation des tâches-élèves) et de leur déroulement en classe dépendent des acquis antérieurs des élèves, des modes de fonctionnement que l'enseignant évalue comme possibles dans la classe. Les interventions didactiques de l'enseignant en classe dépendent de l'activité des élèves, individuellement ou collectivement. La réalisation des tâches produit un "retour" sur l'activité de l'enseignant et un éventuel ajustement ultérieur, des tâches proposées mais aussi de sa propre activité. (Rogalski, 2013, p. 8).

Cela amène ainsi à remettre en question une vision trop « simpliste » du processus d'enseignement-apprentissage que l'expression « effet des pratiques sur les apprentissages » peut potentiellement induire : les pratiques ne sont pas indépendantes des élèves, une part importante de ce qu'il se passe en classe est « co-construit » - même si l'enseignant garde le monopole de la cohérence. Les marges de manœuvre des enseignants sont ainsi limitées, les choix de déroulements étant contraints par ce que produisent effectivement les élèves ; de même le sont les choix de scénarios, dans la mesure où les anticipations des enseignants tiennent compte de ce qu'ils « savent » des élèves. Et même si l'on fait l'hypothèse que les enseignants ont des représentations négatives des capacités des élèves, les

éléments exposés dans le paragraphe précédent montrent que les difficultés sont au moins en partie objectives[41].

Ainsi, la nuance peut sembler subtile entre dire que les différences dans les apprentissages sont le fruit de la « différenciation des univers de travail et de savoirs fréquentés par les élèves », ou des différences dans les pratiques des enseignants, voire du fait que « les enseignants n'offrent pas les mêmes possibilités aux élèves » (Baluteau 2014, p. 52), mais elle n'est pas neutre : la dernière, particulièrement, semble aller dans le sens de la vision « simpliste » du fonctionnement des pratiques enseignantes dénoncée dans le paragraphe précédent. Ces nuances m'apparaissent d'autant plus importantes qu'elles ne sont pas neutres quant à ce qu'elles supposent – implicitement – des facteurs de la différenciation ainsi que de l'existence d'alternatives et des conditions de leur mise en œuvre, c'est-à-dire des conditions d'une évolution vers une limitation des inégalités.

Ce que montrent les recherches présentées, c'est que les différences entre les deux types de publics sont susceptibles d'influer de deux manières non indépendantes sur la construction des inégalités : d'une part directement sur les apprentissages des élèves (confrontés aux mêmes pratiques mais étant différents, ces pratiques n'ont pas le même effet), d'autre part en influant sur les décisions des enseignants, à la fois aux échelles micro, locale et globale, tant dans la conception des scénarios que dans les déroulements, du point de vue cognitif et médiatif.

Retour sur l'hypothèse de différenciation passive

Le premier type d'influence des caractéristiques des élèves sur les différences constatées entre les classes s'apparente à la différenciation passive. Ainsi, mes travaux montrent que, à pratiques similaires et même avec des pratiques a priori porteuses en termes d'apprentissages, les effets restent dépendants du contexte. Deux facteurs semblent jouer un rôle essentiel dans ce processus : les caractéristiques mêmes des élèves et la transparence / invisibilité de certains éléments clé.

Je ne reviens pas sur les élèves, mais la question de la transparence appelle quelques commentaires.

La transparence (Margolinas et Laparra, 2011) ou l'invisibilité (Bautier et al., 2011) de certains éléments dans les classes apparaît comme un des facteurs majeurs de la différenciation des apprentissages. Il me semble qu'il faut en distinguer de deux types : d'une part la transparence d'éléments de savoirs, nécessaires pour résoudre certaines tâches qui, de fait, ne rendent ces dernières réalisables que par les élèves ayant déjà les connaissances en question ou ceux capables de faire des inférences ou de décoder des implicites ; d'autre part la transparence de l'identification des objets de savoir en jeu et des objectifs du travail scolaire, laissant là encore à la charge des élèves des éléments qui correspondent à une capacité particulièrement différenciée entre les deux populations. Ce dernier point rejoint la notion de secondarisation des tâches et l'idée de « pédagogies invisibles ou implicites » (cf. supra). Notons que cela concerne aussi de manière essentielle certains aspects langagiers – de manière liée aux deux éléments précédents – et je reviendrai sur ce sujet dans la troisième partie.

Quels sont les facteurs qui permettent d'expliquer ces phénomènes de transparence ou d'invisibilité et quelles conditions pour l'éviter ?

---

[41] Il ne s'agit pas de dire a priori que des élèves issus de milieu socio-culturels ne sont pas autant capables d'apprendre que d'autres, mais qu'ils sont plus éloignés des réquisits de l'école et de l'entrée dans les savoirs scolaires, d'autant plus si l'on se place à l'entrée du secondaire où les inégalités d'apprentissage sont déjà largement installées.

Pour la transparence de certaines connaissances mathématiques, il s'avère qu'il s'agit souvent de savoirs « cachés par « ignorance », sachant que ce terme désigne l'ignorance d'une institution et non pas l'ignorance d'un individu » (Margolinas, 2014, p. 20). L'auteur ajoute que ces savoirs ne sont souvent pas reconnus par l'institution scolaire, or « le professeur ne peut légitimer lui-même les savoirs comme objets d'enseignement » (ibid.). Margolinas prend l'exemple « paradigmatique » de l'énumération, mais on retrouve aussi cela dans l'étude concernant Matthieu, dans la mesure où les savoirs concernés (par exemple la notion de figure, notamment en lien avec le passage d'une géométrie instrumentée à une géométrie théorique, mais aussi les enjeux liés à la mesure, Chesnais et Munier 2016) ne sont que très peu pris en compte dans les programmes, les différentes ressources des enseignants, voire la recherche en didactique (cf. infra).

Ainsi, la formation des enseignants, qui apparaît a priori comme une piste possible pour pallier cette transparence, n'est probablement même pas suffisante (comme le remarque Margolinas à propos de l'énumération), d'une part parce que ces savoirs doivent d'abord avoir été identifiés[42] pour ne pas rester invisibles *aussi* dans la formation, d'autre part, parce que la composante institutionnelle limite sa portée. La difficulté est à mon sens d'autant plus importante qu'il ne s'agit pas à proprement parler de connaissances « mathématiques »[43] ou, du moins, si on les considère comme mathématiques, d'un type très particulier : des connaissances qui concernent l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques[44]. Une autre question (éventuellement de formation également) est celle des outils qui permettraient aux enseignants non pas nécessairement d'acquérir ces connaissances, mais de développer une posture de questionnement des savoirs et des productions des élèves, ainsi que des gestes professionnels de déroulements qui leur permettent de repérer (et d'analyser) les difficultés des élèves. Je ne m'étendrai pas sur cette piste, mais noterai simplement qu'elle renvoie à la « dénaturalisation » des connaissances mathématiques, pointée comme un des enjeux de la formation des enseignants par Robert et al. (2012) ainsi qu'à la « vigilance didactique » (Charles-Pézard, 2010). Cette question reste toutefois très ardue, comme le montre le fait qu'on ait pu observer de tels phénomènes chez Matthieu, pourtant particulièrement bien outillé par rapport à la moyenne des enseignants et dont la séquence, de plus, se base sur un article de revue spécialisée.

En ce qui concerne le deuxième type de transparence, les pistes parfois évoquées concernent l'explicitation des attendus et des enjeux des tâches scolaires. Il s'agit également d'expliciter davantage les attendus et enjeux de savoirs des tâches et du travail mathématique. Je ne me hasarderai pas à avancer des hypothèses sur les causes au-delà d'une forme de naturalisation, là aussi, chez les enseignants, des « règles du jeu » mathématiques et de la classe de mathématiques. Notons simplement que cela est peut-être encore aggravé, en sixième, par des discontinuités dans les attendus par rapport à l'école élémentaire, qui ne sont pas toujours bien identifiés là non plus, par les enseignants – les enseignants du secondaire connaissant en général assez mal le fonctionnement de l'école élémentaire –, mais peut-être même par l'institution scolaire. Toutefois, il me semble que mes travaux permettent de poser la question de la plus ou moins grande « robustesse » des tâches et des scénarios (cf. supra) : la robustesse serait la plus ou moins grande

[42] Cela constitue à mon sens l'un des objectifs de la recherche en didactique des mathématiques, mais le chantier est vaste.

[43] Brousseau lui-même dit qu'il n'est pas évident de faire reconnaître, par les mathématiciens, l'énumération comme une connaissance mathématique.

[44] Ce débat dépasse le cadre de ce travail mais mérite à mon sens un intérêt certain, en particulier en vue de la formation des enseignants. Je rejoins en cela Coulange et Robert (2015).

dépendance aux conditions de mise en œuvre des effets des tâches sur les activités des élèves. Ainsi, il apparaît que des tâches plus « complexes », au sens de plus riches selon les critères didactiques, peuvent être aussi potentiellement plus différenciatrices car moins robustes, du fait que l'objet d'apprentissage y est plus « caché »[45] : elles nécessitent ainsi une plus grande vigilance didactique (Charles-Pézard, ibid.), pas toujours à la portée des enseignants au quotidien, comme le montrent non seulement les résultats ci-dessus, mais également les travaux de Laparra et Margolinas (2011) ou Coulange (2011), et comme le laissaient déjà pressentir les recherches en didactiques sur la transmission des ingénieries dès les années 1980 (cf. notamment Perrin-Glorian, op. cité). Par ailleurs, le rôle de l'enseignant apparaît essentiel dans l'identification des objets de savoir en jeu, de tous ordres (à la fois notionnels et concernant la nature épistémologique de l'activité mathématique). Margolinas et Laparra (2011) invoquent ainsi l'importance du processus d'institutionnalisation et Coulange (2011, 2012b) propose de considérer non seulement la phase ascendante de ce processus, mais aussi une forme descendante, s'appuyant d'ailleurs dans sa note de synthèse sur l'exemple de Denis et Martine développé précédemment pour en mettre en évidence l'importance. Du point de vue du cadre théorique de cette note, il s'agit surtout de considérer le rôle du professeur dans l'étayage (au sens de Bruner), de l'activité de l'élève et de la transformation des activités en apprentissages, via les apports de l'enseignant et les « proximités » (Robert et Vandebrouck, 2014) qu'il installe[46].

Les phénomènes de différenciation passive sont donc moins le fruit d'une « indifférence aux différences » selon la fameuse formule, que d'une difficulté pour les enseignants à repérer et traiter les effets de ces différences efficacement, notamment parce qu'ils ne sont pas assez outillés. En outre, cette question dépasse largement, on l'a vu, l'échelle des pratiques enseignantes ou même de la formation des enseignants, même si l'on peut penser que certaines pistes à cette échelle pourraient permettre de limiter ces phénomènes.

Retour sur l'hypothèse de différenciation active

Au-delà des phénomènes de différenciation passive, mes recherches ont aussi mis en évidence, comme les travaux mentionnés en introduction, des différences dans certains phénomènes observables dans les classes selon les contextes. Mais il me semble que ces différences relèvent davantage d'une exacerbation de certaines contraintes que d'un véritable fonctionnement différent.

De ce fait, l'appellation de « différenciation active » me semble peu pertinente, d'autant plus qu'elle induit potentiellement une vision « simpliste » des phénomènes en jeu, en sous-estimant d'une part le rôle des élèves dans la co-construction des phénomènes à l'intérieur de la classe – ou, pour le dire autrement, l'influence des élèves sur les pratiques enseignantes – d'autre part la complexité des contraintes qui s'exercent sur les pratiques enseignantes.

Or, penser les alternatives et les conditions de leur mise en œuvre suppose de prendre en considération cette complexité. Je rejoins en cela Monfroy (2013) qui plaide pour conceptualiser davantage la notion d'adaptation, notamment pour appréhender le fait que l'adaptation au public est perçue très positivement par les enseignants, même si je pense que l'enjeu est davantage de considérer les modalités et les processus de cette adaptation que de préciser l'idée d'adaptation.

---

[45] Je ferais même l'hypothèse que les situations adidactiques sont particulièrement peu robustes du point de vue de l'identification des objets de savoirs en jeu, même si cela mérite d'être étudié plus sérieusement.

[46] Je reviendrai dans la deuxième partie sur les implications et les raisons de cette différence dans les deux points de vue.

Ainsi, poser la question des « alternatives réalistes » suppose d'intégrer la question des contraintes qui s'exercent sur les pratiques, dont on a montré qu'elles jouent un rôle déterminant dans les processus de différenciation des apprentissages.

Les pistes pour penser ces alternatives sont multiples : du point de vue des scénarios, il est évidemment nécessaire que les choix soient ambitieux en termes d'objectifs d'apprentissages et en termes d'activités des élèves, c'est-à-dire qu'ils répondent à des critères d'exigence « purement didactiques ». Cependant, il s'agit aussi de prendre en considération la robustesse des scénarios et des tâches, en lien avec le fonctionnement des pratiques ordinaires. Ainsi, l'élaboration et la diffusion de ressources doivent prendre en compte cette condition, pour pouvoir s'insérer dans des pratiques ordinaires sans un coût trop grand (au sens de l'importance des ressources nécessaires pour dépasser certaines contraintes)[47]. L'expérimentation menée avec Denis II m'a ainsi amenée à considérer certains critères pour un scénario qui serait un « bon candidat » pour l'enseignement de la symétrie orthogonale en sixième (Chesnais, 2012a) : l'ambition et la cohérence mathématique apparaissent comme des critères incontournables, mais également le fait d'être conçu de façon relativement proche des « pratiques ordinaires », avec des tâches dont les objectifs d'apprentissages sont suffisamment « lisibles ». Par ailleurs, il s'agit peut-être aussi, plutôt que de fournir des scénarios complets aux enseignants, d'identifier des « grandes lignes » et des « étapes (voir des tâches) clé ». En ce qui concerne les déroulements, l'exercice d'une très grande vigilance didactique apparaît comme nécessaire et difficilement à la portée des enseignants au quotidien compte tenu de leur formation. Elle s'appuie notamment sur un repérage et une analyse poussés des productions des élèves ainsi qu'un étayage des activités des élèves dans la résolution des tâches mais aussi dans la transformation des activités en apprentissages, « adapté » aux activités des élèves, au sens de *situés dans la ZPD* (avec la difficulté du rapport entre la classe et les élèves qui suppose une forme d'appréciation de la « ZPD de la classe », comme « moyenne » des ZPD des élèves, cf. Rogalski, 2013, Bridoux et al. 2016). Notons en outre que cet étayage doit prendre en considération non seulement le *faire* mais aussi le *dire* (Vergnaud 1990, Perrin-Glorian 1993, Chappet-Pariès et Robert 2014). La troisième partie de cette note de synthèse permettra de revenir sur les enjeux liés au *dire*.

Ainsi, les pistes d'améliorations, du point de vue des recherches en didactique, concernent tout d'abord la poursuite de la réflexion sur les scénarios, à la fois sur chaque notion mathématique, mais aussi plus transversalement ; ensuite, la poursuite de l'exploration des modalités de déroulements mises en œuvre par les enseignants, de leur appréciation en termes d'effets sur les apprentissages potentiels des élèves ; enfin, la question de la formation des enseignants constitue un vaste chantier, dont Charles-Pézard, Butlen et Masselot ont montré le coût et la complexité en ce qui concerne les pratiques des enseignants du premier degré au début de leur carrière.

Conclusion sur les apports de mes travaux concernant la question des inégalités scolaires

Mes travaux confirment à nouveau des observations faites notamment par les contributeurs de l'ouvrage de Rochex et Crinon (2011), mais pointent la complexité des processus en montrant les contradictions voire dilemmes auxquels les enseignants sont ainsi confrontés (voir également la partie III de cette note pour des exemples plus spécifiques liés aux aspects langagiers), entre la

[47] Notons que les principes qui sont à l'origine des développements des travaux sur l' « ingénierie de deuxième génération » (Perrin-Glorian, 2011) sont similaires, même s'ils n'amènent pas nécessairement tout à fait les mêmes conclusions.

nécessité de s'adapter aux productions des élèves au risque de limiter les apprentissages potentiels ou ne pas différencier au risque de compromettre tout apprentissage car se trouvant alors hors de la ZPD des élèves. Notons que cette idée de dilemme et de tensions particulièrement vifs en éducation prioritaire est aussi un élément pointé par Butlen, Peltier-Barbier et Pézard (2002) et qui les a menés à identifier cinq « contradictions » principales en ce qui concerne le premier degré.

Il apparaît de ce point de vue que la catégorisation dichotomique entre phénomènes de différenciation passive et active est à questionner, surtout dans l'optique d'envisager des alternatives possibles et les conditions de leur mise en œuvre. En revanche, l'une des pistes qu'il me semblerait souhaitable d'explorer davantage, surtout en vue de la formation, est celle d'identifier ce qui relève de choix conscients et volontaires de la part des enseignants, en lien avec le contexte, d'autre part ce qui se produit à leur insu.

Dans cet objectif, il me semble nécessaire de prendre en considération de façon différenciée les trois niveaux d'organisation des pratiques, car je fais l'hypothèse que, d'une part, les caractéristiques des élèves n'influent pas de la même manière sur les choix des enseignants à chacun de ces niveaux, d'autre part que ce qui pilote les choix à ces différents niveaux ne correspond pas au même « degré de conscience » de la part des enseignants.

Du point de vue des perspectives de recherche, la compréhension du fonctionnement des pratiques enseignantes – notamment des contraintes qui s'exercent – et des effets sur les apprentissages des élèves reste nécessaire pour mieux penser des alternatives *réalistes* et les conditions de leur mise en œuvre. Un projet de recherche a été élaboré[48] qui vise à suivre des élèves régulièrement tout au long d'une année scolaire (au moins), dans des classes de collège d'établissements défavorisés, en travaillant avec les enseignants sur ce qu'ils proposent en géométrie et plus particulièrement pour la prise en charge du passage à la géométrie théorique. Ce projet devrait être mis en œuvre au moins en partie durant l'année 2018-2019 si les conditions sont réunies.

Au-delà de perspectives de recherches en didactique des mathématiques, il me semble que les travaux présentés montrent que certains déterminants des phénomènes identifiés comme responsables de la différenciation des apprentissages selon le contexte dépassent largement le cadre de la classe et l'échelle des enseignants. Ainsi, certains éléments influent sur les composantes institutionnelles et sociales des pratiques et sans qu'une action par la formation des enseignants puisse suffire à les réguler. Notons enfin que certaines manières de faire largement partagées par les enseignants sont certainement le fruit de représentations des mathématiques, de l'enseignement, de l'apprentissage, des élèves de l'éducation prioritaire largement véhiculées dans le système scolaire (y compris par certaines injonctions officielles), dans les formations d'enseignants, voire en dehors du système scolaire, qui découlent de déterminants sociaux et historiques et qui gagneraient peut-être à être davantage questionnés du point de vue sociologique pour mieux outiller le regard critique à toutes les échelles du système scolaire, mais aussi celui des chercheurs en didactiques. Les travaux sur les doxas (Rochex et Crinon, 2011) me semblent constituer un premier pas dans ce sens.

[48] Et soumis à l'ANR en 2017-2018 dans la catégorie Projets Jeune Chercheur – Jeune Chercheuse, mais sans succès.

Comment mes recherches sur les inégalités scolaires alimentent la compréhension plus générale du processus d'enseignement-apprentissage

Les recherches menées sur les inégalités scolaires, au-delà des résultats obtenus concernant ces questions, servent aussi de support à l'exploration plus générale des conditions des apprentissages mathématiques ainsi qu'à celle du fonctionnement des pratiques enseignantes et des conditions d'une évolution vers une plus grande efficacité en termes d'apprentissages pour les élèves.

Comme la plupart des autres chercheurs en didactique travaillant sur ces questions, je considère ainsi la question des inégalités scolaires comme produisant un « effet loupe » (Peltier et al., 2004).

Les effets des pratiques sur les apprentissages

L'importance des déroulements

Un scénario (ou un élément d'un scénario, une tâche) est porteur a priori d'un certain nombre d'enjeux d'apprentissage que le didacticien peut reconstituer à partir d'une analyse tenant compte d'un certain nombre d'éléments (cf. supra, la notion de « relief »), incluant l'analyse de la notion (avec des éléments historiques et épistémologiques), les difficultés connues ou prévisibles des élèves (typiquement les obstacles épistémologiques et les conceptions erronées classiques), les programmes etc. (je reviendrai dans la deuxième partie sur les caractéristiques/conditions de telles analyses). L'analyse du potentiel d'une tâche du scénario en termes d'apprentissages tient également compte de sa place dans le scénario, c'est-à-dire, dans une certaine mesure, de *l'intention* de l'enseignant lors du choix de cette tâche, ce qui amène à limiter l'enveloppe des apprentissages possibles par rapport à une analyse de la tâche isolée (par exemple, le potentiel d'une tâche dépend des connaissances qui ont été vues avant). Notons que ce que le chercheur décèle comme apprentissage possible dans le scénario n'est pas nécessairement tout à fait concordant avec ce que l'enseignant y projette.

Ce que montrent les études menées (les miennes mais aussi nombre d'autres, y compris les travaux menés dans le cadre des ingénieries didactiques), c'est que le fait que l'utilisation d'un scénario débouche effectivement sur les apprentissages visés est très dépendant de la mise en œuvre du scénario dans la classe – autrement dit, des déroulements. L'approche théorique de mes recherches permet la prise en charge de cette question par l'hypothèse que les apprentissages résultent des *activités* que les élèves développent en réponse aux tâches qui leur sont proposées. Il s'agit alors de s'intéresser aux *tâches effectivement prescrites* lors du déroulement, qui peuvent présenter un écart avec les *tâches initialement prescrites* dans le scénario (Chesnais, 2009b). De nombreux facteurs peuvent contribuer à cet écart : la durée et les conditions (travail individuel, en petits groupes ou collectifs) et les interventions de l'enseignant (aides ou autres qui peuvent enrichir, modifier ou au contraire restreindre la tâche en prenant en charge une partie de sa réalisation). Ainsi par exemple, dans la tâche de construction du symétrique d'un sommet d'un triangle par rapport à la droite portant le côté opposé mentionnée dans Chesnais (2012a), Denis, lors de sa mise en œuvre, prend en charge l'adaptation A1 concernant la reconnaissance de la configuration en demandant aux élèves de repasser en vert le point et en rouge la droite : on peut penser que le fait que l'adaptation ne soit plus à la charge des élèves influe sur les apprentissages potentiels des élèves.

Notons que les comparaisons de Martine et Denis II (Chesnais, 2009a, 2009b, 2011), ou encore de Matthieu entre sa classe 1 et sa classe 2 (Chesnais, à paraître), ou encore la comparaison de Maryse et Marianne (Barrier et al. 2014, Chesnais 2018) illustrent bien cette influence du déroulement, en comparant la mise en œuvre de tâches identiques dans des contextes différents.

Ensuite, à partir de la tâche « effectivement prescrite », les interventions de l'enseignant peuvent également plus ou moins favoriser la « transformation des activités en apprentissages », c'est-à-dire le fait que les activités développées sur les tâches aient des conséquences à plus long terme en termes de conceptualisation. Cet aspect est à relier à la difficulté des élèves à identifier les savoirs visés dans les tâches (Perrin-Glorian, 1993), c'est-à-dire à secondariser les tâches scolaires (Bautier et Goigoux, 2004), difficulté largement mise en cause dans l'explication des inégalités d'apprentissage (Bautier et Rayou 2009, Rochex et Crinon 2011). Dans mes travaux, j'ai en particulier cherché à identifier ce qui concourt (ou non) à l'identification par les élèves des objets de savoir en jeu dans les tâches. Plus généralement, il s'agit de rechercher les « proximités » (Robert et Vandebrouck 2014, Chesnais, Horoks, Robert et Rogalski, soumis) organisées par les enseignants, en particulier les « proximités discursives », c'est-à-dire les interventions qui visent à « rapprocher » les activités des élèves et les connaissances « déjà-là » des savoirs visés (en s'inspirant de l'idée de Zone Proximale de Développement). On peut ainsi penser que les occasions de proximités manquées par les enseignants, laissant à la charge des élèves la transformation des activités en apprentissage sont particulièrement sources de différenciation. Ainsi, la comparaison de huit enseignants à propos de l'élaboration de la définition du symétrique d'un point (Chesnais 2014b) met en évidence des différences dans l'identification des savoirs en jeu : certains explicitent systématiquement la « question initiale » (Chesnais, 2009b), celle à laquelle répond le savoir visé (par exemple, avant l'élaboration de la définition, Martine demande aux élèves d'écrire les conditions que doivent remplir un point A et un point A' pour être symétriques par rapport à une droite donnée) ; d'autres (Marianne et Sébastien) explicitent a posteriori ce qui a été fait (par exemple, Marianne annonce : « ça, c'est la définition du symétrique d'un point ») ; enfin, chez certains enseignants (Denis et Maurice), quelques interventions visent manifestement cette identification mais en restant très elliptique, comme l'intervention de Denis II qui conclut l'exercice portant sur l'élaboration de la définition du symétrique d'un point par « pour que ça marche, il faut deux conditions », sans expliciter à quoi renvoie « ça marche », ni conditions *de quoi.*

À partir d'une même tâche ou d'un même scénario, les apprentissages susceptibles d'en résulter peuvent ainsi être très différents, à la fois selon les classes et même selon les élèves à l'intérieur d'une même classe, ce qu'a pu montrer la comparaison de mise en œuvre d'un même scénario par plusieurs enseignants, par exemple Martine, Denis II, Quentin et Maurice sur le scénario de Martine (Chesnais 2014b, Abboud-Blanchard et al. 2012) ou encore d'une même tâche (Barrier et al. 2014, Chesnais et al. 2009). Notons une fois encore que les élèves de l'éducation prioritaire sont manifestement particulièrement sensibles à ces variations.

Ces résultats font en outre écho à ceux des mises en œuvre d'ingénieries didactiques dans les années 1980 qui montraient un relatif échec de ces situations en classe ordinaire ou défavorisée du fait de « distorsions » dans la mise en œuvre, résultant de décisions des enseignants au niveau du déroulement, par exemple concernant les durées et déroulement des phases de recherche individuelle ou le contenu de l'institutionnalisation (Grenier 1988, Perrin-Glorian 1993, 2011).

Qu'est-ce qu'un « bon déroulement » ?

Un « bon déroulement » est un déroulement qui favorise non seulement la qualité et la quantité des apprentissages potentiels, mais encore pour le maximum d'élèves : ces critères constituent déjà potentiellement des sources de tensions voire de dilemmes dans la gestion des élèves individuellement et du collectif (la classe) (Rogalski, 2008).

Le cadre théorique décrit au début de cette note de synthèse, notamment les apports de Piaget et Vygotsky, inclinent à penser que les propriétés d'un « bon déroulement » incluent le fait qu'une part « suffisamment importante » des tâches soit à la charge des élèves (avec des durées suffisantes), avec un étayage « adéquat » et des « conditions favorables » à la transformation des activités en apprentissages. Évidemment, il resterait à préciser les critères d'une « importance suffisante », de l' « adéquation » de l'étayage et du caractère « favorable » des conditions de la transformation des activités en apprentissages.

Ces éléments ne peuvent être définis de façon absolue : d'une part, l'hypothèse de la ZPD implique de considérer qu'une des conditions est celle de l'adaptation aux activités effectivement développées par les élèves en classe (avec la difficulté de la gestion de l'hétérogénéité – individu VS collectif – déjà évoquée plus haut et qui conduit à développer l'idée de « ZPD de la classe », suggérée par Bridoux et al., 2016) ; d'autre part, les pratiques résultant de compromis (cf. supra) ne peuvent être considérées comme optimisant toutes les dimensions considérées : les critères ne peuvent servir qu'à déterminer un déroulement potentiellement plus porteur en termes d'apprentissage qu'un autre[49].

Mes travaux semblent donc étayer les hypothèses du cadre théorique qui conduisent à retenir les critères suivants comme étant essentiels (Chesnais, 2014b) :

- Part et nature des tâches dévolues aux élèves individuellement et part dévolue à la classe
- Les apports réalisés par l'enseignant, en particulier en termes d'aides, d'identification et de structuration des savoirs en jeu
- La prise en considération des enjeux langagiers

Qu'est-ce qu'un « bon scénario » ?

La partie précédente incite à distinguer deux choses : la première concerne le potentiel d'un scénario *a priori*, c'est-à-dire indépendamment de sa mise en œuvre.

En effet, on peut considérer que certains scénarios ou certaines tâches sont plus porteuses a priori, en elles-mêmes, en termes d'apprentissages, que d'autres. La comparaison des scénarios de Martine et Denis dans la première partie de la thèse est à ce titre particulièrement représentative. De même, la comparaison entre des scénarios ou des tâches recueillies dans des pratiques ordinaires avec des situations élaborées par des chercheurs sur les mêmes sujets montre que ces dernières sont a priori plus porteuses en termes d'apprentissages – cela a été mis en évidence par exemple par Perrin-Glorian et Douady à propos de l'enseignement des aires et des décimaux, Roditi à propos de la multiplication des décimaux, ou encore dans la comparaison réalisée dans Chesnais (2012a) entre différents scénarios proposés sur la symétrie orthogonale, dont l'ingénierie proposée par Grenier (1988).

[49] Ce qui explique, entre autres, que l'on s'intéresse aux pratiques ordinaires et que la méthodologie privilégiée dans les travaux soit celle de comparaisons de pratiques enseignantes en faisant varier divers paramètres.

Les critères d'un « bon scénario » sont alors ceux que j'ai dégagés plus haut comme critères d'un « bon scénario » en éducation prioritaire, mais avec l'idée que certaines caractéristiques sont encore plus cruciales pour ce public.

Par ailleurs, l'efficacité d'un scénario, aussi « bon » soit-il en termes de d'apprentissages visés, dépend de sa mise en œuvre, comme les recherches sur l'éducation prioritaire le mettent particulièrement en évidence (constat qui rejoint celui fait par Perrin-Glorian, 1993, et 2011 à propos des tentatives de diffusion des ingénieries didactiques dans des « classes faibles »). Aussi, il semble nécessaire d'ajouter des critères permettant d'évaluer le potentiel d'un scénario compte tenu (au moins dans une certaine mesure) de la manière dont il est susceptible d'être mis en œuvre. Il s'agit à la fois de tenir compte du fait que les déroulements peuvent non seulement induire que les objectifs d'apprentissage effectivement poursuivis ne soient pas les mêmes que ceux prévus a priori par le scénario, mais aussi qu'ils peuvent induire une différenciation des apprentissages selon les élèves. Cela amène à considérer des critères de « robustesse » (Robert, 2007) des scénarios et des tâches et amène à considérer que l'ambition en termes d'objectifs d'apprentissage et de qualité des activités des élèves n'est corrélée avec la robustesse (cf. supra) que jusqu'à un certain point (l'idée étant qu'il se produirait des « effets de seuil »), du fait de la multiplicité des contraintes qui pèsent sur le processus d'enseignement-apprentissage dans la classe. C'est là également que le rôle de l'enseignant apparaît comme prépondérant, à la fois pour étayer les activités des élèves et pour la transformation des activités en apprentissages.

Le fonctionnement des pratiques enseignantes

Ce que montre la synthèse des recherches précédentes, c'est une forme de variabilité dans les pratiques ordinaires des enseignants. Même si cette variabilité reste globalement à l'intérieur d'une enveloppe restreinte par rapport à ce qui est didactiquement possible, à la fois en ce qui concerne les scénarios et les déroulements, il semblerait qu'elle ait une influence non négligeable sur la variabilité des apprentissages des élèves. Cela rejoint l'idée d' « effet maître » (Bressoux, 2001), dont on sait qu'il ne permet pas d'expliquer tout à fait les effets du système scolaire, mais il s'agit ici de se placer à l'échelle qui semble didactiquement pertinente, notamment dans l'objectif d'envisager des évolutions par la formation.

L'étude des causes de cette variabilité renvoie à la complexité des pratiques.

D'une part, du point de vue de leurs déterminants : les pratiques des enseignants résultent de leurs conceptions des mathématiques, des élèves, de l'apprentissage, de l'enseignement etc., mais aussi d'éléments relevant des autres composantes que la composante personnelle. Les études ci-dessus montrent bien notamment que l'effet du contexte (éducation prioritaire ou non) n'est pas univoque, ni systématique, qu'on le considère du point de vue de la composante sociale (avec tout ce que ce contexte a de spécifique, dans le fonctionnement des établissements, les caractéristiques des élèves etc.) ou du point de vue de la composante personnelle (via les représentations que les enseignants en ont). On y voit aussi comment influent des éléments relevant de la composante institutionnelle, les injonctions ou préconisations de l'institution scolaire jouant parfois comme inhibiteurs d'éléments potentiellement favorables aux apprentissages. Robert (2013) indique en outre qu'une aggravation ces dernières années de la multiplicité des préconisations, parfois leur contradiction voire leur opacité contribue à dessiner de nouveaux équilibres. De même, la composante sociale joue, non seulement par les pratiques des collègues (dont Charles-Pézard, Butlen et Masselot, 2012,

ont bien montré comment elles influent sur la formation des pratiques des enseignants débutants), mais aussi via les élèves.

En effet, les études mentionnées dans cette note montrent bien le rôle « central » (Rogalski, 2013) des élèves dans les pratiques de l'enseignant, même s'il ne faut pas le considérer comme unique. Les élèves influent ainsi de plusieurs manières ; leurs caractéristiques sociales semble notamment jouer un rôle, de par son influence sur les dimensions non seulement cognitive mais aussi sociale (probablement aussi psychologique et affectif, mais cela dépasse le cadre de nos recherches) du processus d'enseignement-apprentissage en classe.

Par ailleurs, l'imbrication des différents niveaux de fonctionnement génère également de la complexité. En effet, l'activité de l'enseignant imbrique en permanence des visées et des contraintes qui relèvent des niveaux micro, local et global qui sont eux aussi susceptibles de générer des tensions voire des dilemmes. Par exemple, les enjeux des situations concernant la symétrie orthogonale en sixième contiennent à la fois des objectifs liés à la maîtrise de cette notion, mais aussi liés aux « règles du jeu géométrique » (liées notamment au « contrat » de la géométrie théorique), voire au-delà, des mathématiques (par exemple la notion même de définition d'un objet), rendant le travail d'identification et de structuration des objets de savoir en jeu délicat.

Enfin, la question du rapport entre les élèves individuels, l'ensemble des élèves et la classe induit également de la complexité, non seulement en termes de ZPD, mais aussi dans la construction de la paix scolaire (Charles-Pézard, 2010).

Ainsi, cette complexité (des enjeux et des contraintes) du processus d'enseignement dans la classe de mathématiques est-elle responsable de tensions et dilemmes auxquels les enseignants sont soumis et pour lesquels ils sont amenés à réaliser des compromis. En outre, cela permet à mon sens d'expliquer les difficultés de diffusion des ingénieries didactiques et, plus globalement, des modèles d'enseignement conçus par les chercheurs, en pointant les variables qui limitent l'application des modèles sous-jacents. Cela explique également ce qui peut être interprété parfois comme des formes de 'résistances' à des évolutions, en formation, ou, du moins, de la nécessité de formations relativement coûteuses (en temps et en dispositifs) pour faire évoluer les pratiques. Ainsi, par exemple, la thèse de Sonia Yvain[50] montre-t-elle que la faible prise en charge de la modélisation[51] dans les classes de mathématiques du secondaire peut s'expliquer par le cumul de nombreuses contraintes relevant des différentes composantes des pratiques, ainsi que la difficulté de la prise en charge de ces contraintes dans une formation, y compris dans un dispositif élaboré (Yvain, 2015).

Or la prise en considération de cette complexité apparaît indispensable pour questionner la (co)construction des inégalités scolaires dans les classes de mathématiques ainsi que la question des alternatives et, de fait, de la formation des enseignants (par exemple Robert et al. 2012, Robert et Vivier 2013, Butlen et Robert 2013, Charles-Pézard, Butlen et Masselot 2012) ou encore la question de la diffusion de ressources (Perrin-Glorian 2011).

Cela justifie à nouveau pourquoi les difficultés de diffusion des ingénieries didactiques ont eu pour conséquence le développement de recherches sur l'enseignant (Margolinas et Perrin-Glorian 1997, Margolinas 2005, Perrin-Glorian 2011, Butlen et Robert 2013) qui, elles-mêmes, en retour,

[50] Que je co-encadre avec Viviane Durand-Guerrier.

[51] Sonia Yvain s'est particulièrement intéressée, dans le processus de modélisation, à la mathématisation horizontale (Yvain,

« interroge[nt] la didactique » (Butlen et Robert, ibid., p. 57). Les développements des recherches sur le rôle de l'enseignant ont ainsi déclenché des enrichissements des modèles initiaux des théories didactiques « classiques » (Margolinas et Perrin-Glorian 1997, Margolinas 2005, Perrin-Glorian 2011, Butlen et Robert, 2013) : la Théorie des Situations Didactiques (par exemple Margolinas, 1992) et la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999). Ont également émergé de nouvelles approches comme la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique (Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, 2000) et la double approche didactique et ergonomique des pratiques des enseignants de mathématiques (Robert et Rogalski, 2002). En ce qui concerne la double approche et les travaux qui ont suivi, il s'agit aussi de développer un autre point de vue sur le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques, se distinguant d'une part par la manière de formuler les questions – qui se restreignent alors au fonctionnement du processus d'enseignement-apprentissage dans le cadre scolaire – d'autre part par le fait d'adopter des fondements théoriques en partie différents de ce qui forme le noyau commun des théories précédemment citées. C'est ce que je propose d'exposer et d'illustrer dans la partie suivante.

Chapitre II – étudier le processus d'enseignement-apprentissage dans le contexte scolaire : quel cadre théorique pour quelles questions ?

Cette partie de la note vise à prendre du recul sur l'approche théorique retenue dans mes travaux. Il ne s'agit pas de refaire une présentation complète du cadre théorique et des outils méthodologiques[52], mais de mettre en évidence certaines spécificités de cette approche dans le champ de la didactique des mathématiques.

Après un rapide retour sur les motivations de l'émergence d'une nouvelle approche théorique dans le champ de la didactique des mathématiques, je propose de revenir successivement sur quelques éléments théoriques puis méthodologiques en montrant leur pertinence pour mes questions de recherche. Cela permettra de montrer comment les études que j'ai menées alimentent la réflexion théorique, ainsi que de présenter quelques pistes de développement. En particulier, je propose de présenter de manière un peu plus détaillée le point de vue amené par cette approche sur les analyses de contenus, en développant le résultat de deux études que j'ai menées, l'une en ce qui concerne la symétrie orthogonale, l'autre à propos de *mesure*, dans une approche interdidactique mathématiques-physique. Enfin, je propose quelques éléments concernant la question de la formation des enseignants avant de conclure.

Les motivations de l'émergence d'une nouvelle approche théorique

Comme rappelé précédemment, le constat de difficultés dans la diffusion des ingénieries didactiques dans les années 1980 a infléchi le cours du développement de la didactique des mathématiques (Margolinas et Perrin-Glorian 1997, Perrin-Glorian 2011, Butlen et Robert 2013). La recherche d'explications concernant les 'écarts au modèle' du fonctionnement des pratiques ordinaires par rapport au rôle de l'enseignant dans la Théorie des Situations a ainsi amené progressivement à problématiser le rôle de l'enseignant dans cette théorie, notamment par le développement du modèle de structuration du milieu ou la Théorie Anthropologique du Didactique par le développement de l'étude des praxéologies didactiques. La double approche didactique et ergonomique des pratiques propose, elle, une autre voie : Robert (2001) puis Robert et Roglaski (2002) proposent ainsi d'étudier les pratiques enseignantes *dans leur complexité* (Roditi, 2011, p. 36), c'est-à-dire en prenant en considération non seulement la question des objectifs de l'enseignement en termes d'apprentissages des élèves, mais aussi le point de vue du travail spécifique de l'enseignant.

> *Concernant l'enseignant, ce ne sont pas les « propriétés » ou le « fonctionnement » de la position occupée par l'enseignant dans un système didactique qui sont en jeu ici, à la différence de la perspective qui pourrait être adoptée par une didactique stricto sensu qu'on pourrait définir comme « science des procédés didactiques ». Il s'agit en revanche de prendre en compte la diversité des enseignants, de se poser la question du développement et de la formation de leur compétence professionnelle individuelle. (Rogalski, 2013, p. 3).*

Il s'agit donc d'étudier le fonctionnement du processus d'enseignement-apprentissage dans les classes en tant que tel – et non comme une instance d'un processus didactique plus général – à partir de *théories* (notamment celles de Piaget et Vygotsky), mais sans *modèle* a priori du processus. Cela a

[52] L'essentiel en est présenté dans la partie 0 de cette note, mais aussi dans Chesnais 2009a et b, et on pourra retrouver davantage de détails dans Robert 2008a, 2008b, Robert et Hache 2013, Rogalski 2008, 2013.

notamment amené les tenants de cette approche à s'intéresser de manière spécifique aux pratiques enseignantes ordinaires[53]. Ce qui est visé alors est d'étudier l'influence de caractéristiques individuelles et sociales des sujets quand la Théorie des Situations vise précisément à élaborer un modèle qui transcende ces caractéristiques, et la Théorie Anthropologique du Didactique s'intéresse à la dimension institutionnelle des conditions et contraintes et de leurs retombées sur l'enseignement et l'apprentissage. Il s'agit ainsi, en faisant un pas supplémentaire vers la prise en considération de la dernière étape du processus de transposition didactique – vers le « savoir appris » – de mieux comprendre la variabilité des apprentissages des élèves.

Ce projet implique d'adopter une théorie des sujets qui permette de prendre en considération ces aspects : c'est l'inscription dans la théorie de l'activité et le travail de Vygotsky qui amènent à considérer des sujets pas seulement systémiques et institutionnels, mais à voir l'enseignant – puis l'élève – « comme sujet-personne, non comme sujet didactique » c'est-à-dire comme « individu mu par des motifs propres, dans des situations particulières » (Rogalski, 2013, p. 3). Issue d'un questionnement sur le fonctionnement des pratiques enseignantes qui a amené à développer une « double approche » des pratiques enseignantes, cette approche a ainsi, en quelque sorte 'par ricochet', débouché sur un « épaississement », aussi, du 'sujet élève'.

Par ailleurs, cette approche implique globalement une démarche spécifique, en quelque sorte 'inverse' du fonctionnement de la recherche en didactique jusque-là[54] : il s'agit de partir de l'étude de classes ordinaires pour repérer des régularités et variabilités en faisant varier certains facteurs (les classes, les notions, les niveaux, les enseignants, les contextes etc.), à partir d'hypothèses sur leur influence. Les travaux présentés dans la première partie de cette note illustrent cette idée quant à l'étude de l'influence du contexte de l'éducation prioritaire sur les pratiques enseignantes – et les apprentissages des élèves.

Notons que le développement de cette approche théorique est aussi motivé par la visée de la formation des enseignants (qui a joué un rôle également dans l'évolution de la didactique dans les années 90, notamment du fait de la création des IUFM) qui ne peut, a priori, faire l'économie de ces questions.

Je reviens maintenant sur certains outils théoriques et méthodologiques avant de montrer comment l'approche centrée sur les sujets renouvelle également le point de vue sur les contenus.

Retour sur des outils théoriques et méthodologiques

Des éléments qui concernent la dimension psychologique et la dimension sociale du processus ont ainsi été introduits dans la théorie, même si cela reste partiel – par ailleurs, l'influence de la dimension affective et de l'inconscient est reconnue, mais ces aspects ne sont pas pris en considération dans les recherches menées jusque-là. Il s'agit alors d'intégrer des éléments issus de la psychologie cognitive concernant les contenus et le processus d'apprentissage[55], spécifiés à

[53] Cf. note 16 pour des précisions sur les deux significations du mot « ordinaire » employées dans la note.

[54] Dans la Théorie des Situations, en particulier, il s'agit davantage de tester un modèle en le soumettant à la contingence, même si l'élaboration théorique se nourrit du travail expérimental dans un processus d'allers-retours.

[55] Suivant en cela Vergnaud : « La spécificité des apprentissages mathématiques est dans les mathématiques elles-mêmes. Cela ne signifie pas que la théorie de l'apprentissage des mathématiques soit toute entière contenue dans les mathématiques » (1990, p. 156).

l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Tout en gardant des éléments issus de la théorie de Piaget et des théories « classiques » de la didactique des mathématiques, sont ainsi intégrés des éléments issus des travaux de Vygotsky et de Vergnaud (Robert 2008a et b, Rogalski 2003, 2008, 2013) : la théorie des champs conceptuels, la distinction entre concepts quotidiens et scientifiques, la notion de Zone Proximale de Développement et le rôle du langage. La notion d'étayage, introduite par Bruner (1983) dans la lignée des travaux de Vygotsky, est également mobilisée.

L'apprentissage, en tant que produit, est référé à la conceptualisation, dans une forme d'opérationnalisation de la définition de concept issue de la théorie de Vergnaud : il est ainsi défini par la disponibilité des dimensions objet et outil des notions (Douady, 1987), pour résoudre un ensemble de tâches données, et comprend la structuration des connaissances entre elles et la maîtrise de signifiants (langagiers et non langagiers) associés (Robert et Hache, 2013).

L'apprentissage en tant que processus est vu comme transformation du sujet par son activité (par la « double boucle de régulation », « la situation modifie l'état aussi bien de la situation que de l'acteur qui agit », Rogalski, 2003, 2008). L'une des hypothèses importantes issue des théories vygotskiennes est le fait que cette transformation est possible à partir d'une activité située *dans la Zone Proximale de Développement (ZPD) du sujet* (ibid.). L'élève appréhende ainsi de nouvelles tâches à partir du répertoire conceptuel disponible, y compris en mobilisant des éléments non pertinents du point de vue de la tâche lorsqu'on la perçoit par rapport aux savoirs de référence, car l'élève reconnaît une apparente « parenté » des situations mais qui n'est souvent « que partielle et éventuellement illusoire » (Vergnaud, 1990, p. 140). C'est pourtant la mobilisation de ces éléments, jouant le rôle de « précurseurs » (Rogalski, 2006) qui peut ensuite permettre d'élaborer une réponse adéquate à la tâche – éventuellement grâce à l'intervention d'autres personnes. Notons que les notions de concepts quotidiens et scientifiques apportent également des éléments pour penser cette transformation, j'y reviendrai plus loin.

Ainsi, l'élément clé de cette approche est la centration sur les *activités des élèves*, avec la distinction entre *tâche* et *activité* (Rogalski, 2008, 2013). Les activités des élèves sont vues comme sources des apprentissages et comme résultant – pas uniquement, mais pour une large part – des pratiques des enseignants, intégrant le choix des tâches mais pas seulement.

En outre, les recherches sur les inégalités scolaires (Butlen et al., 2002, notamment) ont amené l'intégration d'éléments issus de la sociologie pour questionner l'influence de facteurs sociaux, même si « l'influence de ces facteurs culturels et sociaux est relativement difficile à cerner » (Butlen et al., 2002, p. 43). Les travaux présentés dans la première partie constituent ainsi une tentative pour prendre en compte une part des « facteurs socio-culturels » qui « peuvent jouer comme un filtre entre l'élève et l'école » (Robert et Hache, 2013).

L'analyse des tâches

La démarche décrite ci-dessus peut aussi être interprétée comme visant, entre autres, à intégrer des éléments qui « dépassent » l'activité mathématique dans l'activité d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques[56] des sujets. C'est ainsi que les notions de *tâche* et de *situation*

[56] Brousseau (1986) écrit que « le travail intellectuel de l'élève doit être *par moments* comparable à [l'] activité scientifique [du mathématicien] » (c'est moi qui souligne). Il s'agit donc de s'intéresser aussi à ce qui n'est pas réductible à l'activité scientifique dans l'activité d'apprentissage.

n'ont pas la même signification que dans d'autres théories didactiques (cf. Vergnaud, 1990, déjà pour la notion de situation, puis Rogalski 2008 et Coulange 2012b). Elles sont ainsi à entendre au sens de la théorie de l'activité et de la psychologie ergonomique (cf. Rogalski, 2008, 2013).

La part mathématique des tâches reste ainsi essentielle de par l'idée d'adaptation (au sens de Piaget), les apprentissages pouvant en résulter étant dépendants de la cohérence et de la consistance des scénarios du point de vue épistémologique, mais on considère que la tâche *des élèves* et son potentiel en termes d'apprentissages ne sont pas entièrement définis par les mathématiques.

Les analyses des tâches proposées aux élèves sont ainsi pilotées par la distinction entre tâche et activité. La détermination des activités possibles en réponse à une tâche résulte non seulement de l'analyse de la tâche mathématique sous-jacente, mais aussi de l'interprétation que l'élève peut faire de la tâche – éventuellement éloignée de celle attendue du point de vue mathématique (du fait de la reconnaissance « partielle et éventuellement illusoire » de « parenté », cf. la citation de Vergnaud ci-dessus). Les analyses des activités *possibles*[57] intègrent ainsi de potentielles interprétations différenciées, entre les élèves, d'une même tâche mathématique compte tenu de leurs connaissances antérieures, des programmes, de la place de la tâche dans le scénario et, éventuellement, de rapports au savoir et au langage différenciés.

Par exemple, si l'on considère la tâche « construire le symétrique d'un point par rapport à une droite », en sixième, on peut s'intéresser aux différentes techniques de construction possibles, certaines valables du point de vue mathématique (équerre et usage de la règle graduée, équerre et compas, compas uniquement etc.), ou non (reporter une longueur au compas au jugé ou placer le symétrique sur une ligne horizontale, à égale distance de la droite[58]) mais on intègre également dans les différentes procédures possibles le fait de faire une construction au jugé ou par pliage, même si cela ne correspond pas aux attendus d'une construction mathématique : ces alternatives reposent sur des interprétations erronées de la nature même de la tâche par les élèves du point de vue mathématique. De même, deux tâches proposées aux élèves qui correspondent à la même tâche mathématique sous-jacente peuvent correspondre à deux tâches différentes pour les élèves (et générer des activités éventuellement très différentes) selon leur interprétation de la consigne. Ainsi, dans des cas où il s'agit de trouver la mesure d'un angle à partir d'un dessin à main levée, on peut observer des différences dans les productions d'élèves entre des consignes comme « donne la mesure de l'angle sans utiliser d'instrument de mesure » et « calcule la mesure de l'angle » : dans les deux cas, il s'agit de trouver la mesure de l'angle par un raisonnement sur les propriétés de la figure, mais la première consigne amène parfois certains élèves (qui n'ont pas encore construit l'idée de la « figure ») à répondre en donnant une valeur 'au jugé', estimant qu'il n'est pas possible de faire mieux sans instrument et que c'est donc ce qu'attend la consigne.

Par ailleurs, c'est le fait de considérer non seulement l'activité mathématique, mais celle d'un sujet 'en train d'apprendre les mathématiques', qui nous amène à considérer les *mises en fonctionnement des connaissances* et en particulier les *adaptations* (cf. supra, Robert 2008a, Robert et Hache 2013).

---

[57] J'ai parlé, dans Chesnais (2009a, 2009b) de « procédures de résolution possibles ».

[58] Cette procédure est associée à une conception erronée de la symétrie, liée à la prégnance des axe horizontaux et verticaux (Grenier 1988, Chesnais 2009a).

Le repérage des adaptations est directement lié au fait de s'attacher à décrire le potentiel des tâches en termes *d'activité*. Celles-ci ne sont ainsi pas internes aux mathématiques ou aux tâches, mais elles sont relatives aux procédures que peut développer un sujet : elles sont « du côté de l'activité (du sujet) » et non « du côté de la tâche ». Une adaptation pour un sujet n'en est donc pas forcément une pour un autre – à un même niveau scolaire, mais a fortiori selon le niveau. Ainsi, par exemple, dans Chesnais 2009a, à propos de la symétrie orthogonale en sixième, la construction du symétrique d'un point par rapport à une droite dans un cas élémentaire contient comme adaptation, au début de l'apprentissage, le fait d'établir des étapes (construire d'abord la perpendiculaire, la prolonger, reporter la longueur), mais cette adaptation n'en est plus une, au moins pour certains élèves, à la fin de la sixième. De même, on a pu voir dans l'analyse du corpus sur l'enseignement de l'angle en sixième, dans la classe de Matthieu (cf. supra et Chesnais, à paraître) que le passage de l'additivité de *deux* mesures d'angles à *trois* constitue une adaptation pour certains élèves mais est transparente pour d'autres – et pour l'enseignant. Enfin, certains « changements de points de vue » (Robert 2008a, Robert et Hache 2013) constituent là encore des adaptations pour certains élèves mais non pour d'autres : par exemple, dans Chesnais (2009a), le passage du fait que les points d'un cercle sont tous à égale distance du centre au fait que le centre est à égale distance des points du cercle constitue un changement de point de vue non anodin en sixième, alors qu'il est négligeable par la suite. Ces adaptations, et particulièrement les changements de points de vue, apparaissent ainsi typiquement comme des « candidats à la transparence pour les enseignants ».

L'intérêt porté aux sujets implique donc de considérer qu'une tâche n'a pas de potentiel en termes d'apprentissage mathématique en soi, mais que cela dépend du relief et de certaines caractéristiques des élèves. Notons que les modes de mise en fonctionnement des connaissances, et notamment les adaptations constituent de fait à la fois des *moyens* et des *critères* d'apprentissage.

Par ailleurs, à l'échelle des scénarios, l'analyse intègre non seulement l'étude de l'organisation des savoirs en jeu du point de vue mathématique, mais aussi dans une certaine mesure l'intentionnalité de l'enseignant qui a conçu le scénario. En effet, il s'agit de considérer qu'un scénario n'a pas de potentiel en soi par rapport au savoir visé, mais que cela dépend de la manière dont l'enseignant l'envisage ainsi que des éléments du relief.

L'analyse des déroulements

L'apprentissage des mathématiques en milieu scolaire est considéré dans cette approche comme résultant d'une adaptation (au sens de Piaget) de l'élève, mais en accordant un rôle prépondérant à la *médiation* opérée par l'enseignant (et par les pairs) entre le savoir et l'élève, qui ne se réduit pas à la dévolution et l'institutionnalisation.

> *L'enseignant détermine l'activité de l'élève tout d'abord par les tâches mathématiques qu'il lui demande d'accomplir. Tout au long de la réalisation de la tâche, il exerce une médiation entre l'élève et le savoir mathématique à acquérir : aide au démarrage, aides à la réalisation (procédurales ou constructives), évaluation de la production, identification du savoir en jeu. Il peut participer à la construction de la réflexivité chez l'élève – y compris en faisant des mathématiques devant lui – et intervenir ainsi sur le développement de la dimension constructive de l'activité chez l'élève. (Rogalski, 2013, p. 6).*

Les analyses intègrent donc ce que l'enseignant « ajoute » aux tâches (Robert et Hache, 2013) lors des déroulements.

Il s'agit de repérer l'étayage que l'enseignant propose aux élèves, non seulement pour réaliser les tâches mathématiques, mais aussi pour favoriser la transformation des activités en apprentissages, ce qui apparaît comme un élément a priori fortement différenciateur.

Les analyses de déroulements (appelées aussi « analyses a posteriori » dans Chesnais 2009b), qui visent à repérer les activités potentielles[59] des élèves, sont ainsi pilotées par le repérage des tâches qui sont effectivement à la charge des élèves, en identifiant tout ce qui contribue à les modifier, par rapport aux tâches initialement prescrites (celles inférées à partir du scénario) : on repère ainsi la nature des tâches effectivement prescrites et tout ce qui contribue à réduire ou au contraire à enrichir les tâches proposées aux élèves. Il s'agit aussi de repérer les durées et formes de travail (individuel, en petits groupes ou binôme, collectif). Le repérage des aides de l'enseignant et de leur fonction (procédurale ou constructive[60]), notamment en lien avec les adaptations potentielles repérées dans l'analyse a priori est un élément clé ; de même, la manière dont sont pris en charge la formulation et la validation des procédures et des connaissances lors des phases de synthèse et de cours (par exemple la prise en charge de la généralisation, j'y reviendrai dans la troisième partie). Il s'agit notamment de mettre au jour d'éventuels éléments qui resteraient potentiellement transparents ou invisibles et dont on fait l'hypothèse que cela représente un obstacle, au moins pour certains élèves.

Au-delà de la résolution des tâches, il s'agit également de repérer les apports des enseignants, ainsi que, de manière essentielle, les modalités de l'identification et la structuration des connaissances en jeu (Chesnais, 2009b). En effet, l'hypothèse sous-jacente est que ces éléments sont déterminants en termes de risque de différenciation comme l'étayent les travaux présentés dans la première partie. Notons que certains de ces éléments sont susceptibles d'être interprétés en termes de « proximités » (Robert et Vandebrouck 2014, Chesnais et al., soumis), un outil que j'ai encore peu exploité dans mes travaux, mais qui offre la possibilité de mieux prendre en charge l'identification du potentiel de ce qui advient dans le déroulement pour rapprocher les connaissances « déjà-là » des élèves avec les savoirs visés. Autrement dit, cela peut servir à identifier la manière dont la ZPD des élèves[61] est potentiellement atteinte ou non, élément qui semble prépondérant pour étudier la variabilité des apprentissages. En outre, cet outil permettrait de prendre en charge la question de *l'adaptation* des pratiques enseignantes aux élèves.

Notons que l'on s'intéresse de manière centrale, dans ces analyses, au *discours* de l'enseignant. Cela amène également à poser la question du rôle du langage dans l'activité des élèves et de l'enseignant, c'est ce qui fait l'objet de la troisième partie.

L'appréciation des effets des pratiques sur les apprentissages

Les analyses précédentes permettent de déterminer les activités potentielles des élèves, donc de faire des inférences sur les apprentissages susceptibles d'en découler.

J'ai toutefois essayé également de valider ces inférences en tentant d'évaluer les apprentissages effectivement réalisés (comme l'ont fait d'autres chercheurs travaillant dans cette approche, notamment Horoks, 2006). Il ne s'agit bien sûr que d'une approximation, car évaluer un degré de

[59] Rappelons qu'il ne s'agit que d'activités *potentielles*, dans la mesure où d'une part, nous ne nous sommes pas donné, dans les recherches actuelles, les moyens méthodologiques de repérer les activités effectives de chaque élève, d'autre part, une part des activités se déroulant « dans les têtes », nous n'y avons pas accès. Il ne s'agit donc de déterminer qu'une *enveloppe* d'activités potentielles, délimitée par des activités *a minima* et *a maxima* (Robert 2008a, Chesnais 2009a, Robert et Hache 2013).

[60] Rappelons qu'une aide n'est pas, là encore, procédurale ou constructive dans l'absolu, mais que cela dépend des élèves et de leur ZPD (Robert, 2008a).

[61] Qui pose, rappelons-le, la question de l'identification d'une « ZPD de la classe » (cf. supra) à partir des ZPD de chaque élève.

conceptualisation reste très complexe et nécessiterait notamment d'intégrer la question du temps long (Robert et Hache, 2013).

Toutefois, la méthodologie adoptée dans Chesnais (2009a), à la fois descendante et ascendante, a permis d'étayer les hypothèses théoriques sur l'effet des pratiques enseignantes sur les apprentissages, à partir de l'analyse des activités potentielles. Un des éléments clé est de distinguer une appréciation en quelque sorte « dans l'absolu » des apprentissages réalisés, et une analyse qui tient compte de la distance entre l'enseignement reçu et les tâches supports de cette appréciation, comme détaillé à propos de la comparaison de Denis et Martine (Chesnais, 2009a, 2011).

Ces analyses me semblent essentielles pour revenir sur les hypothèses faites sur le potentiel des scénarios et déroulements en termes d'apprentissages, notamment dans la mesure où certains facteurs ne sont pas encore réellement pris en compte dans le cadre théorique (notamment ceux liés aux facteurs socio-culturels, cf. supra) : mes recherches étayent ainsi, me semble-t-il, l'hypothèse de cohérence de l'approche théorique quant aux facteurs d'apprentissage et ouvre la voie à une prise en considération plus précise, d'une part des facteurs socio-culturels, notamment en lien avec les questions de langage (cf. partie III).

Le fonctionnement des pratiques enseignantes

L'étude des pratiques enseignantes amène non seulement à tenir compte de l'intégration des éléments précédents dans notre approche de l'apprentissage, mais aussi à intégrer des éléments issus de la psychologie ergonomique, puisque le sujet enseignant n'est pas considéré seulement par rapport à l'objectif de faire apprendre les élèves, mais aussi par le fait qu'il est un professionnel exerçant un métier. C'est ainsi que s'est développée la double approche et l'idée des cinq composantes des pratiques – cognitive, médiative, institutionnelle, personnelle et sociale (Robert et Rogalski 2002, Robert 2008b, Robert et Hache 2013).

Cela a amené les chercheurs qui ont développé cette approche (notamment les contributeurs de l'ouvrage Vandebrouck et al., 2013) à chercher à identifier la variabilité inter et intra individuelle des pratiques enseignantes, en étudiant l'influence de certains paramètres (les classes, les notions, le contexte – éducation prioritaire ou non – etc.), ainsi que les conditions de possibles alternatives de ces pratiques. Il s'agit essentiellement de faire des inférences quant à des « logiques d'action » sous-jacentes aux pratiques, reconstituées à partir des analyses de scénario et de déroulement, en prenant en considération les contraintes qui s'exercent et dont nous avons connaissance.

Les travaux synthétisés dans la première partie posent ainsi la question de l'effet du contexte de l'éducation prioritaire sur les pratiques des enseignants de mathématiques. Ils montrent essentiellement la complexité des processus en jeu par l'imbrication de contraintes relevant des différentes composantes, mais aussi des différents niveaux d'organisation des pratiques. Ils confirment en outre le rôle central joué par les élèves dans les pratiques enseignantes. Enfin, ils semblent étayer le postulat de l'approche théorique selon lequel la variabilité interindividuelle des pratiques enseignantes, à une échelle fine, a une influence sur la variabilité des apprentissages des élèves. Par ailleurs, les résultats étayent l'hypothèse (formulée par exemple dans Robert et al., 2012, ou Robert et Vivier, 2013) que, si une certaine variabilité des pratiques et des marges de manœuvre existe, tout n'est pas possible pour un enseignant donné, compte tenu des contraintes et ressources qui influencent les pratiques de chaque enseignant, au-delà de celles qui sont partagées par tous les enseignants (si les contraintes institutionnelles sont relativement partagées, certaines contraintes relevant des autres composantes le sont moins).

Notons que les méthodologies restent qualitatives, les moyens d'une étude quantitative restant hors de portée pour le moment à mon sens, compte tenu de la complexité des données à recueillir (notamment du fait du rôle prépondérant attribué aux déroulements) et de la finesse des analyses à mener.

Une piste qui serait à explorer pour identifier davantage les logiques d'action sous-jacentes aux pratiques, est celle de l'apport d'entretiens menés avec des enseignants. Certains des travaux menés en suivant la même approche théorique que celle de mes travaux s'appuient parfois sur des entretiens (notamment Roditi, 2001) pour faire valider par les enseignants les inférences faites à partir de l'analyse des données recueillies quant à un certain nombre de choix qui ont présidé à l'élaboration du scénario et aux déroulements. De même, j'ai mené quelques entretiens avec les enseignants dont j'ai analysé les pratiques, mais l'une des limites est qu'il ne s'agit que de *discours sur les pratiques*, ne donnant accès qu'à ce que l'acteur reconstitue lui-même (voire souhaite mettre en avant – éventuellement inconsciemment, en réponse aux attentes supposées du chercheur ou de l'institution etc.) de ses logiques d'action. Or il est probable que certains éléments, sans être pour autant inaccessibles aux enseignants[62], ne sont pas possibles à 'attraper' par ce moyen. La piste des « entretiens d'auto-confrontation », qui vise à renseigner « l'expérience ou conscience pré-réflexive ou compréhension immédiate de son vécu de l'acteur à chaque instant de son activité » (Theureau, 2002) est une des options que nous avons commencé à explorer (par exemple dans Molvinger et al., 2017) et fait l'objet également actuellement d'un travail en collaboration avec Serge Leblanc, au sein du « projet ESPE Langage 2018 » que je pilote avec Catherine Dupuy. La question de l'apport d'entretiens à nos recherches didactiques reste toutefois encore largement ouverte.

Les analyses de contenus

L'approche théorique retenue dans mes travaux amène également des études de contenus spécifiques, du fait qu'elles sont faites en prévision d'une analyse en termes d'activités menées par des sujets (Robert et Hache, 2013). Il s'agit en effet d'identifier des éléments susceptibles de jouer un rôle dans la conceptualisation. Cela amène à prendre en considération non seulement des éléments historiques et épistémologiques, mais également

[c]ertaines distinctions [qui] ne sont intéressantes que parce qu'elles entrainent des différences significatives dans la manière dont les élèves s'y prennent pour traiter les situations ainsi différenciées ; le mathématicien lui-même n'y prend plus garde et, si l'on s'en tenait aux mathématiques constituées, on négligerait des distinctions qui sont importantes pour la didactique. (Vergnaud, 1990)

Ainsi, sont intégrés aux analyses

d'autres éléments qui interviennent dans les choix de l'itinéraire cognitif à proposer aux élèves, notamment liés à la plus ou moins grande proximité des notions à introduire avec ce qui précède. (Robert et Hache, p. 35)

Cela amène à penser les analyses en termes de « niveaux de conceptualisation » (ibid.).

Je me suis notamment intéressée à l'influence, sur l'apprentissage de certaines notions, de précédents niveaux de conceptualisation, voire celle de concepts quotidiens, sur l'apprentissage de

[62] Rappelons que nous ne nous intéressons qu'à ce qui relève des décisions conscientes ou préconscientes (Robert 2008a).

notions mathématiques. En effet, Vygotsky identifie un rapport de « double germination » entre les concepts quotidiens et scientifiques[63] (Rogalski, 2003, 2008).

La germination des concepts scientifiques se fait du « haut » vers le « bas » […] les concepts quotidiens frayent la voie à la germination des concepts scientifiques par les significations qu'ils assurent, et les concepts scientifiques préparent la voie par leur organisation et les médiations qu'ils proposent et « tirent » vers le haut les concepts quotidiens dans leur germination. […] L'acquisition opérationnelle a lieu quand les deux types de concepts se sont rencontrés et que deux processus se sont engagés. Le premier processus est celui d'une réorganisation des concepts quotidiens, réorganisation qui va dans le sens d'un mode d'existence davantage organisé en système. Le second est un processus de prise de signification des concepts scientifiques pour devenir des concepts pour l'action. (Rogalski, 2003, p. 253).

Je propose ainsi de développer deux exemples sur lesquels j'ai travaillé : tout d'abord, en ce qui concerne la symétrie orthogonale, j'ai été amenée à distinguer deux aspects qui peuvent être perçus du point de vue quotidien comme respectivement statique et dynamique. Ces aspects sont amenés à jouer à la fois comme levier et obstacle dans la construction de la symétrie orthogonale comme transformation géométrique et de l'axe de symétrie en termes d'invariance globale. De même, en ce qui concerne la mesure, nous avons identifié, avec Valérie Munier, l'influence de l'aspect *empirique* de la mesure – issu à la fois des sciences expérimentales et de l'enseignement des mathématiques en primaire – sur l'enseignement des mathématiques du secondaire, montrant que *l'invisibilité* de cet aspect à différents niveaux pose d'importantes difficultés pour l'enseignement et l'apprentissage dans différents domaines des mathématiques ainsi qu'en physique.

Il ne s'agit pas de reproduire une analyse complète du relief sur ces contenus, mais de montrer ce qui, dans mes analyses, illustre l'intérêt du point de vue théorique retenu, en mettant en évidence des éléments problématiques pour l'enseignement et l'apprentissage des notions. En ce qui concerne le premier exemple, à propos de la symétrie orthogonale, je ne m'étendrai pas sur les implications sur l'enseignement et l'apprentissage, largement pointées ailleurs. Je propose en revanche de développer davantage le deuxième exemple, à propos de la mesure, pour montrer les difficultés d'apprentissage et d'enseignement que cette analyse permet d'anticiper.

Un exemple à propos de la symétrie orthogonale

Pour résumer les idées principales que j'ai développées dans Chesnais (2009a) et reprises dans Chesnais (2012a), j'ai été amenée dans ma thèse à considérer l'influence de l'aspect quotidien[64] que l'on peut attribuer à la symétrie orthogonale sur son apprentissage en sixième – comme concept mathématique ou du moins en voie de le devenir.

Le concept quotidien recouvre grossièrement la perception d'une symétrie bilatérale 'approximative' avec un axe vertical – sans l'associer à la notion mathématique sous-jacente. Il précède le concept scientifique, à la fois historiquement et dans le développement de l'enfant, même si l'un et l'autre sont liés. En mathématiques, la symétrie orthogonale est aujourd'hui définie comme une transformation du plan, mais une étude de la genèse historique du concept de symétrie montre qu'elle était, avant d'être redéfinie à partir de la transformation géométrique, associée à l'harmonie,

[63] Rappelons que seuls les seconds peuvent être considérés comme des concepts au sens de la théorie des champs conceptuels, mais je garde ici la dénomination de Vygotsky.

[64] J'ai parlé dans ma thèse de son statut d' « objet de culture partagée dans la société », Grenier (1988) parlait d' « objet familier » etc.

l'équilibre d'une figure ou d'un objet, « le rapport, la proportion, la régularité des parties nécessaires pour composer un beau tout » (Diderot et D'Alembert 1751-1765, p.735).

De là découle l'identification d'un aspect « statique » et d'un aspect « dynamique »[65] du concept quotidien comme pouvant jouer un rôle dans l'apprentissage de la symétrie orthogonale. En m'inspirant de la démarche de Grenier et Laborde (1987), définissant des « niveaux d'appréhension des transformations » permettant d'accéder à la symétrie comme transformation géométrique, j'ai ainsi défini quatre *paliers* dans la conceptualisation de la notion d'axe de symétrie, caractérisant continuités et ruptures à installer pour passer de l'aspect statique du concept quotidien (à dépasser) à la propriété mathématique d'invariance globale :

- Palier 1 : la perception de la 'régularité' des deux parties d'une figure, à rapprocher de l'idée de « milieu d'une figure » ; il s'agit d'une propriété entièrement perceptive, très proche du concept quotidien en jeu dans la perception de la régularité (d'un papillon par exemple).
- Palier 2 : si on plie la figure ou que l'on retourne un calque, il y a superposition (propriété liée à l'utilisation d'un instrument).
- Palier 3 : l'image de ce qui est d'un côté de l'axe par la symétrie est ce qui est de l'autre côté de l'axe ; intervention de la transformation, éventuellement liée au pliage, mais conçue comme transformation d'un demi-plan dans un autre.
- Palier 4 : l'image de la figure par la symétrie est la figure elle-même : accès à la notion d'invariance globale.

Par ailleurs, les aspects dynamique et statique du concept quotidien ont à la fois une forte proximité et des différences avec les aspects logiques de « propriété » et « relation » associés au concept mathématique (Barrier et al. 2014, Chesnais, Durand-Guerrier et Perrin-Glorian, à paraître, ou Chesnais, 2018). La propriété renvoie plutôt à l'aspect statique, et la relation, à l'aspect dynamique, mais, par exemple, l'articulation entre propriété et relation diffère de celle des aspects statique et dynamique du concept quotidien. En effet, dans le concept quotidien, l'aspect statique est préexistant et omniprésent, alors que l'idée de mouvement ou déplacement – en tant que concept quotidien approchant de la notion de transformation (Bkouche, 1991) – en est quasiment absente, et ne peut être vue, au mieux, que comme mouvement de pliage permettant de superposer les deux parties d'une figure (qui ne permet pas de penser la symétrie orthogonale comme transformation du plan). Dans le concept mathématique en revanche, la transformation *préexiste* en quelque sorte – du moins depuis que la symétrie orthogonale est définie comme élément du groupe des isométries du plan – puisque la présence d'axes de symétrie dans une figure n'est que le corollaire de l'existence d'une symétrie orthogonale la conservant globalement.

Ma thèse ainsi que les autres analyses de séances de classes de sixième sur la symétrie menées depuis m'ont permis d'identifier des effets de ces éléments dans le processus d'enseignement-apprentissage. Pour ne citer qu'un exemple, lors de la résolution d'une tâche où il s'agit de construire le symétrique du point A, Denis demande aux élèves « où il va aller le point A ? » (Chesnais, 2009a).

[65] Notons que la distinction de conceptions dynamiques et statiques pour un concept donné n'est pas nouvelle : certaines conceptions du cercle ont ainsi été identifiées chez des élèves de l'école primaire (Artigue et Robinet 1982) de même que certaines conceptions de la convergence des suites (Robert 1982). Cela évoque aussi le travail de Sfard (1991), même si la référence en termes de concepts et conceptions y est moins claire, mélangeant en quelque sorte ce qui pourrait être interprété du point de vue français en termes de concept/conceptions et en termes de dialectique outil / objet (Douady, 1987).

Cela permet de désigner la relation qui lie A et A' (on pourrait y voir, de façon sous-jacente, une idée « quotidienne » d'*image par une transformation*), et peut donc constituer à la fois un levier et un obstacle – pour penser ensuite par exemple le caractère symétrique de la relation ou encore l'invariance des points de l'axe. De même, l'ancrage quotidien sur l'idée de miroir et le pliage est éventuellement générateur d'obstacles dans l'apprentissage, en ce qu'il est porteur de conceptions erronées, notamment celle de transformation d'un demi-plan dans un autre, qui feront obstacle à la construction de la symétrie orthogonale comme transformation *du plan*.

Un exemple à propos de la notion de mesure

Dans une approche inter-didactique entre mathématiques et physique, en collaboration avec Valérie Munier, nous nous sommes intéressées à la notion de *mesure*. Les résultats mentionnés dans cette partie sont issus de Munier, Chesnais et Molvinger (2017), Chesnais et Munier (2016), Munier et Chesnais (2016) et Chesnais et Munier (soumis).

À partir d'une étude épistémologique menée sur le rôle de la mesure en physique et en mathématiques, nous avons été amenées à distinguer les notions de *mesure empirique* et *mesure théorique*. La première est le résultat de l'application d'un processus de mesurage (avec une dimension matérielle, mobilisant des instruments[66]), par nature décimale et soumise à incertitude, tandis que la seconde est un nombre réel, donné ou établi à partir de données et de démonstrations. Il ne s'agit pas à proprement parler du rapport entre un concept quotidien et un concept scientifique, mais les problèmes que pose l'articulation de ces deux aspects de la mesure dans l'enseignement et l'apprentissage me semble très similaire, probablement du fait d'un « saut » dans le rapport que ces deux aspects de la mesure entretiennent avec le monde matériel.

Une mesure est définie, en mathématiques, comme une application d'un ensemble d'objets, à valeurs dans R+, via l'ensemble des grandeurs (cf. Chevallard et Bosch 2002, ou encore Perrin 2011 pour une définition rigoureuse). Cependant, comme le note Perrin-Glorian (1989-90), le sens du mot a évolué encore récemment (au cours du XXème siècle), à la fois dans la « noosphère » et dans le cadre scolaire. Les mesures étaient d'abord non dissociées des grandeurs, puis associées à des aspects pratiques, des contextes de la vie courante, avant d'être associées progressivement à des aspects théoriques. Perrin-Glorian note même que le sens du mot ne fait pas encore totalement consensus, à la fin des années 80[67]. De manière connexe, les grandeurs sont également, à une époque, exclues des mathématiques, en particulier pour le travail sur les nombres, ce que note notamment Lebesgue (1975, cité par Brousseau, 2002). Les programmes scolaires suivent cette tendance, comme le pointent Brousseau (ibid.) et Chevallard et Bosch (2001), excluant également la dimension matérielle de la mesure, ainsi que les pratiques familières associées ou celles issues d'autres sciences.

Du point de vue historique, dans les travaux d'Euclide, la mesure n'est pas encore un nombre, mais un rapport entre deux grandeurs (Dhombres, 1978), l'une étant prise pour référence. Aujourd'hui, les deux concepts peuvent être définis l'un par rapport à l'autre (Chevallard et Bosch, 2002, Perrin, ibid.) : un point de vue est de définir une fonction mesure, puis une grandeur comme classe d'équivalence de cette fonction ; à l'inverse, on peut définir la mesure comme quantification des

[66] Il peut s'agit d'instruments de mesure conventionnels (règle graduée, rapporteur, ampèremètre etc.) ou de mesurage avec des étalons arbitraires (par exemple, pour mesurer des longueurs, des allumettes, des pas etc.).
[67] Et ce n'est toujours pas le cas aujourd'hui, notamment chez les enseignants (Passelaigue et Munier, 2015).

grandeurs et résultat d'un processus de « mesurage » (appelé aussi « procédé de mesure », « opération pratique de mensuration » (Rogalski, 1979, p. 566), « mesure pratique » (Lebesgue, 1975, p. 28) : la mesure est alors le rapport entre la grandeur mesurée et la grandeur choisie comme étalon, ou encore le nombre de reports de l'étalon nécessaire pour « couvrir » la grandeur : Chevallard et Chambris (2015) parlent ainsi de « nombrement ».

Notons que, même dans cette dernière définition, la mesure comme le mesurage restent « théoriques » : la question des aspects matériels ne relève pas des mathématiques et les aléas liés à ces aspects sont considérés comme un « bruit » (Houdement et Kuzniak, 2002), le plus souvent ignoré : on n'en trouve aucune mention dans la plupart des travaux de mathématiciens qui évoquent la question de l'enseignement de la mesure, comme Lebesgue (1975), ou Perrin (2011). Dans la brochure APMEP des années 80 (1982), qui a fait longtemps référence dans le monde de l'enseignement, les incertitudes sont mentionnées[68] rapidement à la p. 15, mais il n'y est plus fait référence dans la suite de la brochure. Rouche (2006) insiste sur la différence entre les aspects matériels et théoriques en mathématiques à l'école (par exemple pour les fractions, sur le partage des tartes), mais n'en déduit pas explicitement des spécificités pour ce qui concerne la mesure. Dans les travaux portant sur les mathématiques, tout mesurage est donc considéré comme « tombant juste » (« en supposant […] que l'opération se fait exactement », Chevallard et Chambris, 2015), sans incertitude, ce qui suppose une infinie précision, c'est-à-dire la possibilité de répéter infiniment des étapes[69].

Le fait qu'une mesure théorique n'est pas accessible par mesurage peut servir de support à de nouvelles questions théoriques en mathématiques, en particulier à propos des nombres : notamment celle de l'existence des nombres rationnels puis irrationnels (cf. la question de l'incommensurabilité), en lien avec la question des approximations (et le calcul infinitésimal), mais cela ne prend pas en considération les problématiques liées au caractère aléatoire de la mesure empirique.

Si les questions liées à la mesure empirique n'ont pas de légitimité en mathématiques, nous défendons qu'elles sont, d'une part, fondamentales dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, d'autre part largement sous-estimées voire invisibles, non seulement dans l'enseignement et l'apprentissage, mais aussi dans la plupart des recherches en didactique, françaises et anglo-saxonnes (cf. infra). Notons que Brousseau (1988) choisit d'ailleurs précisément « l'exemple du mesurage » (p. 19) pour illustrer la nécessité pour les professeurs d' « assumer une épistémologie » et pour montrer l'importance et la difficulté de ce rôle. Il y montre notamment que les solutions « classiques » apportées par les enseignants aux difficultés posées dans les classes par l'écart entre mesurage effectif et mesure théorique mènent à des impasses problématiques : il évoque ainsi le « « divorce » entre les concepts mathématiques enseignés et les activités effectives des élèves » (p. 19) ou le fait que « le professeur doit sournoisement violer les rapports théorie/pratique que ses convictions pédagogiques lui font mission de professer » (ibid.). Brousseau y défend également l'existence d'alternatives (avec un exemple sur lequel je reviens plus loin), mais en restant très évasif.

---

[68] Il est précisé que : « l'imperfection […] des procédés physiques d'évaluation d'une grandeur fait qu'un mesurage est nécessairement approximatif : il convient donc de fournir une autre information, appelée incertitude, sur la plus ou moins bonne qualité du mesurage. »

[69] Ce qui contribue d'ailleurs à la difficulté de conceptualisation des nombres réels (Lebesgue, 1975).

Les trois exemples suivants (tirés de Chesnais et Munier, 2016), et repris dans (Munier et Chesnais, 2016) permettent d'illustrer le type de problèmes qui peuvent se poser :

Premier exemple : dans le cadre d'une étude sur la transition école-collège, nous avons fait passer des tests à des élèves en fin de sixième (Munier et al., 2014). L'une des tâches consistait à leur demander, dans une première question, de construire un angle de 89° ; dans une seconde, ils devaient dire si cet angle était droit et justifier leur réponse. La première tâche est très largement réussie, mais parmi les élèves la réussissant, moins des deux tiers répondent correctement à la seconde. Plus d'un élève sur dix justifie sa réponse (qu'elle soit positive ou négative) à partir de l'utilisation de l'équerre et 6% des élèves mentionnent la « règle du 1° près[70] », avec des réponses dont celle-ci est un exemple typique : « je le sais car un angle droit est de 90° et l'angle ABC est de 89°et ce n'est qu'un degré avant ».

Deuxième exemple : dans le cadre du même projet sur la transition école-collège, nous avons pu observer une séance de classe en cinquième en physique, lors de laquelle il s'agit de compléter « l'égalité mystère » : 1L = … dm^3. La tâche proposée aux élèves consiste à mesurer les arêtes d'une brique de lait de 1 litre et d'en calculer le volume par l'application de la formule du volume d'un pavé droit. Le résultat obtenu par les élèves est de 1,026 dm^3. L'enseignant conclut alors, sans discussion : « On est proche de 1, donc ça veut dire que le volume de la brique, il est de 1 dm^3 » (Munier et al., 2017).

Troisième exemple : dans l'article de Jacquier (1995), après que les élèves ont calculé la longueur d'un côté d'un triangle rectangle et trouvé $\sqrt{50}$, l'auteur relève que de nombreux élèves sont gênés par ce résultat (« Il faut écrire BD=7,07 car $\sqrt{50}$, pour une longueur, ça ne veut rien dire »).

Ces exemples illustrent la variété des contextes dans lesquels les problèmes liés à la mesure se posent (mathématiques ou physique, dans le domaine numérique, des grandeurs et mesures ou de la géométrie) et le fait qu'on peut les interpréter comme une difficulté pour traiter l'écart entre une forme de réalité (matérielle) et le modèle, entre l'empirique et le théorique, le mesurage matériel et le travail « abstrait » sur la mesure.

Nos recherches ont montré que ces enjeux sont très peu pris en charge, à la fois dans les recherches en didactique des mathématiques, dans les instructions officielles, et dans les manuels, non seulement en ce qui concerne le domaine des grandeurs et mesures, mais aussi dans les domaines dans lesquels ces questions sont susceptibles d'apparaître, en géométrie et en statistiques. Je présente ici rapidement quelques-uns des éléments pointés dans les publications citées pour soutenir ces affirmations et j'invite le lecteur à consulter ces dernières pour davantage de détails (notamment pour ce qui concerne la physique, dont je ferai peu état ici).

La prise en compte des aspects empirique et théorique de la mesure dans le domaine des grandeurs et mesure

Les travaux de recherche en didactique des mathématiques, les instructions officielles et les manuels, il s'agit de construire les notions visées dans ce domaine[71] sur la base d'un travail empirique (avec

[70] Cette « règle », communément établie dans les classes, est liée à l'usage du rapporteur (du fait de sa précision au degré), c'est-à-dire au *mesurage empirique*.

[71] Sont en jeu la construction de certaines grandeurs et la notion de mesure (Chesnais et Munier, 2016).

des mesurages effectifs), mais les enjeux liés à la mesure empirique, notamment la dispersion et les incertitudes, sont comme « niés ».

Dans les travaux de recherche en didactique française[72] (notamment, Bessot et Eberhard 1983, Douady et Perrin-Glorian 1983, Vergnaud 1983, Brousseau et Brousseau 1991), la notion de précision est utilisée pour faire apparaître par exemple l'idée de fractionnement de l'unité, mais elle n'est pas liée aux incertitudes. Ces dernières ne constituent qu'un « bruit » qu'il est nécessaire d' « évacuer ». Ainsi, par exemple, Douady et Perrin-Glorian (ibid.), dans leur ingénierie sur les aires, précisent que,

[…] aux erreurs de mesure près, les deux méthodes doivent donner le même résultat. Les pièces ont été choisies pour que ce soit effectivement le cas, sans être gêné par les erreurs de mesure. (p. 45).

Parfois, elles sont considérées comme produisant des « erreurs » qui servent de levier pour valider ou invalider une procédure (notamment dans Bessot et Eberhard, ibid.).

Le travail de Brousseau et Brousseau (1991) sur la masse est le seul qui mentionne un peu plus explicitement ces questions, les pointant comme inévitables et devant être prises en charge, mais la notion d'incertitude ou le rapport entre mesurage empirique et théorique ne constituent pas pour autant des enjeux d'apprentissage spécifiques des situations proposées. C'est dans Brousseau (1988) que l'on trouve le plus d'éléments : l'auteur y défend pour la situation de la pesée du verre d'eau, que « le modèle d'une mesure entière et déterministe convient parfaitement », pourvu que l'on élimine la question du rôle des « erreurs de mesure aléatoires » par « un processus d'activités, de communications de résultats, d'échanges de garanties, de réflexions et de débats ». Il indique en outre qu'il est nécessaire par ailleurs d' « organiser des situations où l'équilibre entre prévision sûre et prévision précise prend son sens ».

En ce qui concerne les instructions officielles[73], on trouve quelques mentions de ces enjeux, mais elles restent très générales (présentes dans la définition du socle commun, dans les « chapeaux » des programmes ou dans quelques documents d'accompagnement), et ne sont pas déclinées spécifiquement dans les programmes. Notons en outre qu'elles sont encore moins présentes dans les textes officiels parus ces dernières années en France qu'à d'autres époques (Chesnais et Munier, 2016).

Dans les manuels, nous avons pu constater que la question des incertitudes et de la dispersion ne sont globalement pas prises en compte et sont éludées de diverses manières. Ainsi, pour ne citer qu'un exemple, sur une étude d'une dizaine de manuels de sixième à propos de la mesure des angles, nous n'avons trouvé qu'un seul manuel, datant de 2005 (Phare) qui mentionnait que la mesure obtenue à l'aide du rapporteur est nécessairement approchée, via une remarque dans la leçon (« le rapporteur ne permet d'avoir qu'une valeur approchée de la mesure d'un angle »). Cela le menait toutefois à des difficultés dans la suite, quand il s'agissait de travailler sur certaines propriétés des mesures théoriques, comme l'additivité, étant alors obligé d'évacuer la dispersion des mesures empiriques, par une forme de 'pirouette' (en choisissant des « erreurs » qui se compensent) :

[72] Nous avons pu établir un constat similaire en ce qui concerne les recherches anglo-saxonnes (Munier et Chesnais, soumis).

[73] L'étude a été menée sur les instructions officielles françaises, mais aussi les instructions officielles aux Etats-Unis (Chesnais et Munier, soumis). Les constats faits sont similaires pour les deux pays.

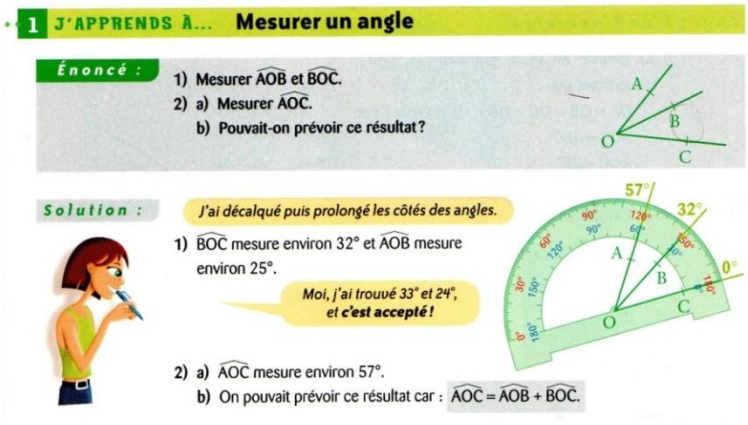


Fig. 3. Extrait du manuel Phare (2005).

Notons que tout cela a disparu de l'édition suivante du manuel.

La prise en compte des aspects empirique et théorique de la mesure dans le domaine de la géométrie

Le rôle de la mesure dans l'enseignement de la géométrie en France est central (« la mesure apparaît en filigrane de la géométrie enseignée » (Houdement et Kuzniak, 2001), voire parfois « abusif »[74] (Lebesgue, 1975), lié au choix de travailler dans un niveau de conceptualisation « à la Euclide »[75] de la géométrie (Robert, 2003a). Les difficultés que cela provoque sont interprétées par Houdement et Kuzniak (2003) en termes de perturbation liée à l'approximation *du point de vue numérique*, mais notre hypothèse est qu'au-delà de la question du numérique se pose un problème propre au « monde géométrique » (ibid.), lié à la différence entre mesure empirique et mesure théorique.

Les difficultés principales se posent dans les rapports entre géométrie théorique et géométrie instrumentée, non seulement au moment de l'introduction de la géométrie théorique, mais aussi dans le travail de géométrie théorique, lorsqu'il est articulé avec un travail instrumenté, dans une logique de modélisation (Chesnais et Munier, 2016, Munier et Chesnais, 2016). En effet, le travail de géométrie instrumentée suppose de travailler sur des dessins (au sens de Parzysz, 1988, ou Laborde et Capponi, 1994), avec des mesures empiriques, donc entachées d'incertitudes, tandis que la géométrie théorique, portant sur les figures, suppose de considérer des mesures théoriques (éventuellement en lien avec les mesures empiriques de dessins correspondants). La question de la précision et de la dispersion des mesures pourrait même servir de levier pour une entrée dans la géométrie théorique, à certaines conditions (Houdement, 2007).

Or, tout d'abord, nos analyses de manuels nous ont permis de montrer que ce levier n'est pas exploité, l'exigence de raisonnement sur les valeurs théoriques étant fondée sur l'affirmation qu'un dessin aux instruments n'est « pas suffisamment précis » ou sur le fait que cela permet une économie, mais qui n'est pas motivée et apparaît comme arbitraire (via l'usage des dessins à main levée ou l'interdiction d'utiliser les instruments) : le levier est ainsi essentiellement un « dressage » (Salin, 2008) plutôt qu'une motivation intrinsèque aux mathématiques.

---

[74] Notamment le théorème de Thalès, traité comme concernant les mesures, alors qu'il porte essentiellement sur des rapports de grandeurs.

[75] Aline Robert désigne ainsi le niveau de conceptualisation visé en géométrie dans le secondaire en France : il s'agit essentiellement de la géométrie euclidienne, mais à laquelle on « ajoute » les nombres réels (en lien avec les mesures) et les transformations.

De plus, il apparaît que ces enjeux sont très faiblement pris en charge, voire traités de façon problématique potentiellement pour l'apprentissage. Par exemple, des tâches où il s'agit de conclure par le calcul sur une propriété qui est déjà « évidente » sur le dessin (cf. l'exercice de gauche ci-dessous) ou qui contredit fortement le dessin, lorsqu'il est à main levée (cf. l'exercice de droite) (notons que Coppé et al. (2005) ont déjà pointé les difficultés potentielles posées par l'utilisation de ce type de dessin).

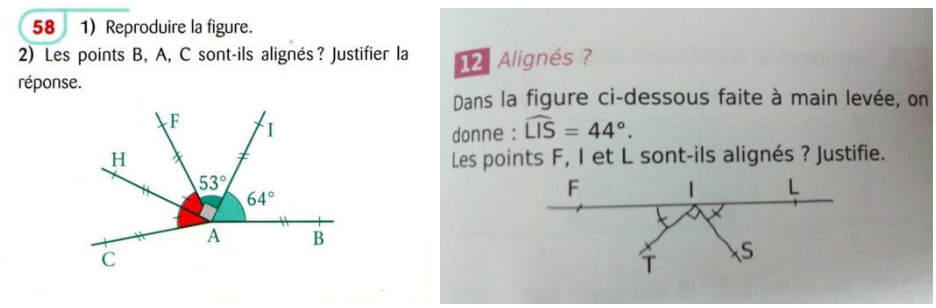


Fig. 4. Exemples d'exercices problématiques

Pour citer un dernier exemple, très emblématique, voici un exercice où l'usage du mot « mesure » de façon indifférenciée pour désigner des mesures empiriques ou théoriques est problématique :

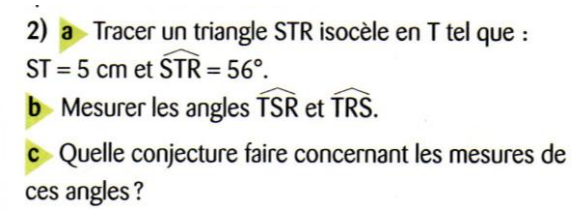


Fig. 5. Exemple d'exercice illustrant la polysémie du mot mesure.

Les élèves auront obtenu deux nombres à la question b, et leur demander ensuite de *conjecturer* quelque chose sur ces deux valeurs n'a pas de sens : soit elles sont égales, soit différentes, soit éventuellement différentes mais proches, mais il s'agit d'un constat et non d'une conjecture ! En revanche, les questions prennent davantage de sens (du point de vue mathématique) si l'on remplace la question b. par « détermine les mesures *empiriques* des deux angles » et la question c. par « quelle conjecture faire concernant les mesures *théoriques* de ces angles ? ». La question de l'accessibilité pour les élèves de cette tâche reste toutefois posée… Par ailleurs, s'il s'agit là de travailler sur la propriété d'égalité des mesures des angles à la base d'un triangle isocèle, la question de la généralisation, au-delà d'un seul triangle, n'est pas prise en charge.

Une étude de manuels de différents niveaux du collège autour de l'élaboration de propriétés ou théorèmes, vue comme modélisation, a également montré une très faible prise en charge de ces enjeux : lorsque les propriétés ou théorèmes sont établis à partir de mesures empiriques, les manuels évacuent la question de l'éventuelle non correspondance entre les mesures empiriques et théoriques soit par l'usage d'un logiciel, soit en choisissant les valeurs de façon à ce qu'elles « tombent juste », ou, au mieux, en laissant cette question à la charge du déroulement ou d'un logiciel (on retrouve là des traces des solutions « classiques » mentionnées par Brousseau dont il a pointé les impasses auxquelles elles conduisent).

Notons que le cas de l'introduction de Pi en lien avec la formule du périmètre du cercle en sixième diffère légèrement : quatre manuels sur sept choisissent une entrée par des mesures empiriques

réalisées sur des objets physiques par les élèves et la dispersion des mesures empiriques est largement mise en évidence, mais sans proposer de prise en charge de son traitement ensuite. Cela met bien en évidence, justement par contraste avec les résultats précédents, la confusion déjà pointée entre la problématique des incertitudes et celle de l'approximation : ce qui est en jeu pour Pi est le fait d'avoir une valeur que l'on ne peut pas écrire sous forme décimale et donc considérée comme approchée, plutôt que le fait d'avoir une valeur empirique.

Pour conclure concernant la géométrie, si l'on se réfère à l'exemple concernant l'angle de 89° évoqué précédemment, il est probable que dans de nombreuses tâches, les « règles du jeu » autour de la mesure sont opaques pour les élèves et porteuses de confusion. En effet, on peut supposer que, au moins pour certains élèves, une mesure est le résultat d'un mesurage dans le milieu matériel, ce qui hypothèque largement la compréhension de certaines consignes (et, plus largement, la compréhension des enjeux de la géométrie). Il semble par ailleurs que les auteurs de manuels agissent « comme si » les notions de figure et de mesure théorique étaient construites ou transparentes, « comme si » les règles du jeu géométrique (lien entre dessin et figure) étaient transparentes, « comme si » les mesures empiriques étaient des mesures exactes et qu'il y avait (devrait y avoir) coïncidence entre les deux.

Globalement, quels que soient les domaines dans lesquels elle est susceptible de jouer un rôle, la dispersion des mesures (empiriques) et la notion d'incertitude associée apparaissent donc comme très peu prises en charge par les recherches en didactique, les instructions officielles et les manuels. Or cela nous semble problématique, d'une part parce qu'elles constituent en soi des notions importantes dans la conceptualisation de la notion de mesure ; d'autre part parce qu'elles pourraient servir de support pour motiver l'entrée dans la géométrie théorique[76] et qu'elles sont utilisées par la suite comme un « exemple paradigmatique en statistique » de phénomène de variabilité (Chevallard et Wozniak, 2003) : comment les utiliser comme levier pour l'apprentissage si elles n'ont jamais été reconnues ? Enfin, même si je ne l'ai que très peu développé ici, on peut penser que cela a des conséquences sur la question de la construction des nombres réels, en lien avec la question de l'approximation. Par ailleurs, nier ces aspects hypothèque pour une part la construction du sens de la géométrie théorique et, plus largement, la compréhension de la distinction entre modèle et réalité, donc une large part du sens de l'activité scientifique.

Toutefois, comme nous l'avions précisé dans nos articles, penser la prise en charge de ces questions dans l'enseignement et l'apprentissage n'est pas aisé, de même que les questions de formation des enseignants afférentes, même si nous pensons que la distinction explicite entre mesure empirique et théorique constitue une piste.

Conclusion sur les analyses de contenus

Les éléments que ces analyses de contenus font apparaître, à propos de la notion de symétrie orthogonale ou de la mesure, qui traverse plusieurs domaines, apparaissent comme jouant un rôle dans l'apprentissage des mathématiques (potentiellement comme levier et/ou comme obstacle). Toutefois, ils sont aussi très peu pris en charge dans l'enseignement, voire de façon problématique, par leur *invisibilité*, à la fois dans l'enseignement, dans les instructions officielles et, pour certains,

[76] Au-delà de la mention très rapide du fait qu' 'un dessin n'est pas précis', mais par une prise en compte réelle de la question de la précision, comme l'appellent de leurs vœux Brousseau (cf. la citation supra) ou encore Houdement (2007).

dans les recherches en didactique des mathématiques. Pour paraphraser Vergnaud (cf. supra), il me semble qu'il s'agit typiquement de « distinctions » auxquelles « le mathématicien lui-même [ne] prend plus garde », que l'on néglige parce que l'on s'en tient aux « mathématiques constituées », mais qui « sont importantes pour la didactique » car elles constituent des « distinctions […] intéressantes […] parce qu'elles entrainent des différences significatives dans la manière dont les élèves s'y prennent pour traiter les situations ainsi différenciées ».

Ces éléments ont pu apparaître parce que les analyses de contenus sont pilotées par l'objectif d'analyser des activités d'apprentissage des mathématiques et non pas seulement par la référence « aux mathématiques constituées ». Notons que l'interprétation de l'exemple de la mesure en termes de rapport entre un concept quotidien et un concept scientifique est discutable, la mesure empirique étant elle-même un savoir scolaire, mais mon point de vue (qui nécessiterait d'être davantage étayé théoriquement) est que le rapport entre concepts quotidiens et scientifiques – pointé précédemment dans la citation de Rogalski – éclaire aussi la question de l'ancrage des connaissances nouvelles sur des connaissances anciennes. En effet, lorsque ces dernières sont suffisamment 'naturalisées', elles jouent un rôle similaire aux concepts quotidiens, c'est-à-dire à la fois de levier pour aider à la « prise de signification » des nouvelles connaissances, et d'obstacle. L'idée est alors, pour les mathématiques, de concevoir l'apprentissage non pas comme un passage d'un état (des concepts quotidiens) à un autre (fait de concepts scientifiques), mais comme une succession de cycles, certains niveaux de conceptualisation, une fois « naturalisés », formant le « terreau » d'un niveau de conceptualisation supérieur[77].

Cela confère une forme de « relativité » aux analyses (comme pour les analyses de tâches et de scénarios, relatives aux sujets), que l'on retrouve aussi à une autre échelle des analyses de contenus menées au sein de cette approche théorique : ainsi, l'idée de notion FUG (Formalisatrice, Unificatrice et Généralisatrice, Robert et Hache, 2013) ou encore l'idée de « relief » (Robert et al., 2012, Robert et Hache 2013) qui se réfèrent à l'activité de sujets en train d'apprendre les mathématiques (par exemple, en intégrant les programmes scolaires ou les conceptions erronées) et qui ne sont pas liées uniquement à l'épistémologie des mathématiques.

L'identification de ce type d'éléments, l'étude de l'influence sur l'apprentissage et de leur prise en charge dans l'enseignement voire dans la formation constituent un vaste chantier pour la didactique des mathématiques. En particulier, l'existence plus globale des notions de mouvement, voire de temps mériteraient une attention particulière, comme l'indiquait déjà Vergnaud (1991) et l'incitent à penser les divers travaux ayant pointé l'influence de tels aspects dans les conceptions de certaines notions mathématiques (notamment Artigue et Robinet, 1982, à propos du cercle ou Robert, 1982, à propos des suites). Une perspective inter-didactique mathématiques-physique paraît particulièrement pertinente à cet égard. En effet, l'influence de l'idée de mouvement et du temps comme sources de conceptions erronées en physique a déjà été largement pointée, par exemple en ce qui concerne la notion de force (Viennot, 1996). Les difficultés posées par le rapport entre les aspects empirique et théorique de la mesure, tout autant que la question de sa fécondité, restent à

[77] Notons que cela fait écho à l'idée de secondarisation vue également comme succession de cycles, par exemple chez Gobert (2014) même si cette dernière centre le point de vue sur les questions langagières (j'y reviendrai dans la partie III).

approfondir, d'une part en mathématiques, notamment en lien avec la construction des nombres[78] ; d'autre part en lien avec la question de l'enseignement de la géométrie dans le secondaire et plus largement les enjeux de modélisation, question pour laquelle, là encore, l'approche interdidactique mathématiques-physique s'annonce prometteuse.

Quelques éléments concernant la question de la formation

La problématique de la formation des enseignants est constitutive des motivations initiales de l'élaboration de cette approche théorique. Les travaux menés amènent à une manière spécifique de penser l' 'amélioration du système', non pas 'descendante' de la recherche vers le terrain, mais en concevant des formations « à l'envers » (Robert et al. 2012, Robert et Vivier 2013). En effet, il s'agit là encore de « partir des pratiques », les apports de la recherche fournissant des outils aux enseignants (et aux formateurs) pour favoriser la prise de conscience des choix et l'identification de marges de manœuvre ; la démarche est également 'inverse' dans la mesure où l'idée est de « remonter » des choix des enseignants au niveau micro à leurs choix au niveau local, enfin de les mettre en rapport avec les contraintes plus globales. Notons que certains de ces principes se retrouvent dans nombre de recherches sur la formation des enseignants, autant en France avec le développement des ingénieries de deuxième génération (Perrin-Glorian, 2011), que dans les travaux sur le travail collaboratif[79] entre enseignants ou entre enseignants et chercheurs, à l'internationale. L'approche développée par Robert présente toutefois une certaine originalité dans ce panorama, du fait qu'elle est sous-tendue par une approche théorique prenant en considération les sujets.

La question de la formation constitue ainsi une problématique fondamentale, sur laquelle mes contributions restent jusqu'ici très modestes, mais qui fait partie de mes pistes de recherches. Je propose de revenir sur les quelques travaux auxquels j'ai participé sur ce thème.

Le travail mené dans ma thèse puis avec deux autres enseignants (cf. partie I, Abboud-Blanchard et al. 2012 et Chesnais 2014b) m'a amenée à faire des hypothèses sur les qualités d'un scénario pour être un bon « candidat » en tant que « ressource » pour être transmise à un enseignant (cf. partie I et Chesnais, 2012a), en particulier en lien avec la notion de robustesse (Robert, 2007). Le « transfert du scénario » apparaissait ainsi comme alimentant une réflexion sur le rôle potentiel du collectif des enseignants sur le développement des pratiques, même si, dans ce cas, le scénario avait été diffusé *via* le chercheur.

Par ailleurs, l'approche théorique développée dans cette note plaide pour la prise en considération de la complexité des pratiques dans la formation et l'un des éléments pointé pour favoriser cette démarche est l'usage de vidéos en formation (Robert et al. 2012, Robert et Vivier 2013). Un travail initié au sein du « symposium Frengly »[80] en collaboration avec Alf Coles et Julie Horoks nous a ainsi amenés à questionner le rôle, dans l'usage de vidéos en formation, des théories sous-jacentes à la conception de la formation, en comparant différentes approches (Coles, Chesnais et Horoks, 2014, à

[78] Un travail a été initié en ce sens dans le cadre d'une étude sur la géométrie repérée, au sein du groupe Didactique de l'IREM de Montpellier (Chesnais et al., 2018).

[79] Je m'en tiendrai ici à cette dénomination qui se veut générique pour englober les nombreuses et très diverses formes de travail collaboratif envisagées dans les recherches, dont une énumération de références dépasse le cadre de mon propos.

[80] Il s'agit d'un groupe de travail piloté par Maha Abboud-Blanchard et Alf Coles, réunissant des chercheurs français et anglo-saxons autour de la question de la complémentarité des travaux menés dans diverses traditions didactiques.

paraître). L'exemple que j'ai particulièrement développé visait à montrer comment l'approche théorique de mes recherches sous-tend une formation d'enseignants du secondaire débutants. La formation en question vise la prise de conscience de la nécessité d'une forme d'analyse a priori des tâches ainsi qu'une réflexion sur les outils possibles de ces analyses, à partir de la notion d' « adaptation des connaissances » : l'usage de vidéos permet de pointer l'intérêt d'un tel questionnement pour l'enseignant (en particulier s'il est débutant).

Enfin, j'ai mené un travail au sein du projet ANR FORMSciences en collaboration avec des didacticiens des sciences physiques et chimiques concernant les effets d'une formation continue longue sur les pratiques d'enseignants du premier degré (à propos de l'enseignement des sciences) et, in fine, sur les apprentissages des élèves. Ma collaboration à ce projet a consisté en une participation à une réflexion théorique concernant les outils qui permettent d'appréhender la problématique posée. Ce travail s'inscrit dans la continuité du travail engagé précédemment au sein du projet Transition école-collège sur l'extension de l'usage de l'approche théorique de mes recherches pour l'étude des pratiques d'enseignement des sciences (initié dans Molvinger et al., 2017, mais encore largement inabouti). Notre travail a notamment débouché sur la mise en évidence à la fois de l'utilité, mais aussi des limites, d'une « approche par les connaissances » des enseignants (mobilisant le cadre des « Pedagogical Content Knowledge », en référence à Shulman, 1986, et Magnusson et al., 1999). Nous avons ainsi pointé la nécessité d'élaborer un cadre théorique intégrant la question des effets sur les apprentissages pour penser la formation et ses effets sur les pratiques des enseignants[81]. La pertinence de s'appuyer sur les travaux menés sur les pratiques dans l'approche théorique défendue dans cette note apparaît alors comme évidente, mais non suffisante ; le travail est toutefois encore à peine ébauché (Chesnais, Cross et Munier 2016, 2017) même si la piste d'une articulation avec des approches issues des sciences de l'éducation a été initiée.

La question de la formation des enseignants constitue donc une piste de recherche importante, en germe dans plusieurs de mes travaux. Ainsi, au-delà de la poursuite de la réflexion engagée dans les travaux mentionnés ci-dessus, en s'inscrivant dans leur prolongement ainsi que dans celui de la thèse de Sonia Yvain, une thèse co-encadrée avec Valérie Munier devrait débuter en septembre 2018. Le sujet (encore peu formalisé) en est la question de la prise en compte en formation de la problématique de mise en œuvre de tâches 'ayant une certaine consistance didactique' par les enseignants du secondaire débutants.

Conclusion

J'espère avoir montré dans cette partie la pertinence de l'approche théorique développée par de nombreux chercheurs[82] à partir des travaux de Robert et Rogalski à la fin des années 1990 pour comprendre les effets des pratiques enseignantes sur les apprentissages des élèves, ainsi que le fonctionnement de ces pratiques.

Au-delà des questions liées au fonctionnement des pratiques enseignantes et à la formation, historiquement fondatrices de cette approche, il s'agit d'appréhender différentes dimensions du processus d'enseignement-apprentissage dans le cadre scolaire. Les cinq composantes des pratiques

[81] Dont la difficulté tient au fait qu'il s'agit d'un quadruple chantier (Robert et Vivier, 2013) : celui des pratiques des formateurs, des formations, des effets sur les pratiques et des effets de celles-ci sur les apprentissages des élèves.

[82] Notamment les contributeurs de Vandebrouck et al. (2013)

font ainsi écho aux différentes dimensions de l'activité de l'élève et du processus même d'enseignement-apprentissage. C'est à la fois la conséquence et la motivation de la prise en compte des « sujets-personnes » (Rogalski, 2013). L'un des apports essentiel est la prise en compte de l'aspect cognitif du processus, du côté des élèves. Un deuxième apport concerne le renforcement de la prise en compte de la dimension socio-culturelle du processus, visée à laquelle mes travaux ont particulièrement cherché à contribuer.

Il me semble qu'une perspective de développement est d'intégrer encore davantage cette dernière dimension, rejoignant en cela la perspective proposée par Vandebrouck (2018), citant Radford (2011) et, d'une certaine manière, le choix de Charles-Pézard et al. déjà en 2012 d' « ajouter une dimension sociale » dans l'approche théorique retenue, pour l'étude des inégalités scolaires. Je propose ainsi trois pistes pour renforcer l'intégration de la dimension socio-culturelle du processus dans l'approche théorique.

D'une part, il s'agit de prendre davantage en considération la dimension sociale du processus d'enseignement-apprentissage dans la classe en étudiant le rapport entre la classe, les élèves en tant qu'entité et les élèves individuellement (Rogalski, 2013). La réflexion est ainsi à poursuivre sur l'idée de « ZPD de la classe » en étudiant les modalités de la prise en compte des ZPD des élèves par les pratiques enseignantes, ainsi que sur l'identification du rôle des élèves dans la levée des implicites liés à la transparence/invisibilité de certains éléments (cf. partie I, mais aussi Chappet-Pariès et al. 2017). Rappelons que l'idée de « proximités » (Robert et Vandebrouck, 2014) apparaît comme un outil privilégié pour cela. Cela permettrait d'aller un peu plus loin, concernant la question de la différenciation des effets des pratiques en termes d'apprentissages, en intégrant la variabilité interindividuelle, du côté des élèves.

Une deuxième piste, mais qui reste plus prospective, est celle d'intégrer davantage la dimension historico-culturelle du processus d'enseignement-apprentissage (pointée notamment par Radford, 2011). La première entrée est de questionner le rôle de la dimension socio-culturelle du langage en tant qu'instrument psychologique privilégié du processus d'enseignement-apprentissage, travail déjà initié dans l'étude des inégalités scolaires et sur lequel je reviens dans la troisième partie ; la seconde serait de questionner la dimension historique et culturelle des savoirs mathématiques eux-mêmes. Une des pistes que j'ai identifiée concerne la symétrie orthogonale et consiste à remettre en perspective la distinction entre aspects statique et dynamique de la symétrie avec la construction historique du concept de symétrie orthogonale[83] : cela me semble pouvoir éclairer le processus d'enseignement-apprentissage d'une autre manière ; par ailleurs, à une autre échelle, la prise en charge par le langage verbal de ces deux aspects est différente selon les langues[84] : Il me semble que cela ouvre des perspectives de recherche intéressantes, par exemple en comparant l'enseignement de la symétrie orthogonale en France, en Angleterre ou aux US, et en Allemagne (des collaborations sont en cours de construction dans cette optique).

Enfin la dernière piste, qui fait l'objet de la troisième partie de cette note de synthèse, concerne les questions liées au rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Ces

[83] En effet, le concept mathématique lui-même est conceptualisé de façon très différente dans la géométrie d'Euclide et à partir du moment où il est retravaillé avec la notion de transformation géométrique (Chesnais, 2009a, 2014a).

[84] En particulier entre le français, avec la polysémie de l'adjectif « symétrique » et l'anglais et l'allemand qui utilisent un équivalent de « réflexion » pour désigner la transformation géométrique, cf. partie III.

questions constituent une autre motivation pour intégrer davantage la dimension sociale et cognitive du processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques en même temps qu'elle permet d'approfondir certains aspects de la construction des inégalités scolaires. Notons que la dimension sociale est ici à entendre dans un double sens : non seulement en référence au rôle du collectif et notamment de l'enseignant dans le processus d'enseignement-apprentissage, mais aussi au caractère historico-culturel des savoirs et des instruments psychologiques en jeu dans le processus, notamment du langage (Radford, 2011).

Chapitre III – le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques

Cette partie est de nature nettement plus prospective que le reste. Elle porte sur une préoccupation plus récente dans mes travaux – quoique présente en filigrane depuis le début – et ne s'appuie pour l'instant que sur quelques études isolées qui ont surtout permis de faire émerger des questions. Il s'agit de faire un bilan de ces quelques études exploratoires et d'en dégager des pistes de recherche, en esquissant la problématisation d'un certain nombre de questions dans le cadre théorique exposé précédemment.

L'intérêt porté au langage[85] émerge naturellement des questions de recherche précédemment évoquées : en effet, d'une part le rôle clé joué par les aspects langagiers dans les inégalités scolaires est pointé par les travaux sociologiques (Lahire 1993, Bautier 1995, Rochex et Crinon 2011), d'autre part les théories dans lesquelles s'ancre le cadre théorique de mes recherches attribue un rôle central au langage dans le processus de conceptualisation et plus largement dans le processus d'enseignement-apprentissage (cf. Vygotsky, 1934/1997, Vergnaud, 1990, 1991).

En ce qui concerne le premier point – le lien avec les inégalités scolaires –, notons que les travaux les plus récents croisant point de vue sociologique et didactique en mathématiques (notamment Margolinas et Laparra, 2011 et Coulange, 2011) placent la question du langage – et plus généralement du caractère « littératié » des pratiques mathématiques – au cœur de leurs problématiques. Notons que cela fait également écho au développement de nombreux travaux sur le langage dans la communauté internationale de *Mathematics Education*, en particulier en lien avec l'idée de « diversity » : si cette dernière est essentiellement appréhendée en termes de diversité de langues[86] (« multilingualism »), intégrant moins explicitement la question de l'origine socio-culturelle que les travaux français, elle est néanmoins associée à des enjeux « politiques » et « sociaux » autour de la notion d' « equity » (Radford et Barwell 2016, Planas 2016, Planas et al. 2017). Les enjeux liés au langage sont ainsi largement reconnus comme particulièrement différenciateurs en termes d'apprentissages en mathématiques.

Ce questionnement amène ainsi – et c'est là le deuxième point –, toujours dans la logique de cette note de synthèse, en partant de la question des inégalités scolaires, à questionner plus largement le rôle du langage dans le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques, rejoignant en cela une problématique très actuelle dans la communauté de didactique des mathématiques

[85] Ce terme est pour le moment employé dans un sens très large (comme dans l'expression « Rôle du langage » dans le titre des actes de l'école d'été de didactique des mathématiques de Carcassonne en 2011 ou encore dans « Language and Communication in Mathematics Education », titre du numéro spécial de la revue ZDM en 2014), mais je préciserai plus loin l'usage précis que j'en fais.

[86] Notons que le fait que « language » en anglais est l'unique traduction à la fois de « langue » et « langage » en français n'est certainement pas anodin de ce point de vue et mériterait d'être questionné. En particulier, il me semble que la façon française d'aborder la question des inégalités scolaires, séparant les enjeux de langue et de langage, ainsi que les problématiques liées à l'origine sociale et le multilinguisme pourrait éclairer autrement les problématiques anglo-saxonnes ; à l'inverse, prendre en compte le multilinguisme dans la question des inégalités scolaires en lien avec l'origine sociale pourrait peut-être enrichir la recherche française.

française[87] (Barrier et Mathé, 2014, Artigue et al., à paraître). Il s'agit également d'une thématique vive, quoique moins récente, dans la communauté internationale de *Mathematics Education* (Austin et Howson 1979, Pimm 2004, Planas 2016, Radford et Barwell 2016, Planas et al. 2017). L'intérêt renouvelé pour le langage dans cette communauté est lié d'une part à l'accroissement des préoccupations liées à la diversité et au multilinguisme dans de nombreux pays (amenant Barwell, 2016, à parler d'une problématique de « superdiversity ») ; d'autre part, sur la base de travaux dont la tradition remonte à plusieurs décennies, axés d'abord sur la préoccupation pour les questions de « communication » et d' « interactions » dans les classes de mathématiques, se sont développées de nouvelles théories accordant une place centrale au langage dans la classe de mathématiques. Elles ont émergé dans le cadre du développement de l'usage de la « théorie socioculturelle » pour étudier les phénomènes d'enseignement et apprentissage des mathématiques (Radford et Barwell, 2016, Planas et al., 2017) et sont fondées pour la plupart sur les travaux de Vygotsky et/ou Bakhtine. La plupart mettent au cœur de leurs préoccupations l'approche sémiotique (notamment Radford, 2011) et certaines adoptent même l'hypothèse des mathématiques vues comme un langage (« mathematics as discourse », Sfard, 2000, 2001), sur la base d'une interprétation des travaux de Vygotsky, j'y reviendrai plus loin.

Le caractère plus tardif de l'émergence des problématiques liées au langage dans la communauté de didactique des mathématiques française est probablement lié à la spécificité des cadres théoriques français, notamment la Théorie des Situations et la Théorie Anthropologique du Didactique qui n'accordent pas une place centrale au langage (Bosch et Perrin-Glorian, 2013), la Théorie des Situations l'envisageant surtout par le rôle de la formulation, la Théorie Anthropologique du Didactique via la notion plus générale d'ostensifs (Bosch et Chevallard, 1999). Par ailleurs, le fait que les mathématiques soient ou non un langage est un débat qui semble faire l'objet d'un consensus par la négative depuis longtemps en France (cf. Chevallard 1980, Vergnaud 1990, Duval 1995).

En outre, suivant Duval (1995) et Radford et Barwell (2016), il me semble que la thématique du langage est une bonne entrée pour questionner les théories, en ce qu'elle éclaire, par la place et le rôle que celles-ci lui attribuent, les conceptions des mathématiques, de l'apprentissage et de l'enseignement (voire de la didactique des mathématiques) qui les sous-tendent.

De manière à la fois plus large et plus « naïve », il me semble que l'avènement d'un intérêt pour le langage dans l'histoire de la recherche en didactique des mathématiques – et dans le domaine de *Mathematics Education* – est relativement « naturel », dans la mesure où le langage est nécessairement en permanence au cœur du processus d'enseignement-apprentissage, comme il est au cœur de la plupart des activités humaines. En effet, notamment du fait même de la relation entre pensée et langage ou entre culture et langage, les savoirs eux-mêmes (et la notion même de « savoirs ») ne peuvent exister sans langage, de même que l'apprentissage – y compris sa relation au développement (Vygotsky 1934/1997, Schneuwly 2008) – et, bien sûr, l'enseignement. Au-delà de son caractère omniprésent, le langage présente aussi l'intérêt de cristalliser une forme de complexité du processus d'enseignement-apprentissage en ce que s'y incarnent/impriment les dimensions à la fois psychologique, affective, cognitive, culturelle, sociale et politique du processus. Rejoignant de ce point de vue Radford et Barwell (2016), on peut considérer qu'intégrer explicitement une

[87] En témoignent notamment la présence d'un thème « Rôle du langage » à l'école d'été de didactique des mathématiques de Carcassonne en 2011 ou encore le numéro spécial « Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques » de la revue Spirale – Revue de recherches en éducation en 2014.

préoccupation pour le langage dans les recherches en didactique des mathématiques participe d'une prise en compte croissante de la complexité des processus à l'œuvre, dans une évolution « naturelle » du champ.

Je propose de faire tout d'abord une synthèse de ce qui, dans les différents travaux que j'ai menés, concerne explicitement le thème du langage, en mettant à chaque fois en évidence les questions que cela soulève. Dans un deuxième temps, je reviendrai sur la manière dont ces premières études m'amènent aujourd'hui à problématiser le rôle du langage dans le processus d'enseignement-apprentissage au sein de mon approche théorique, et situerai ce point de vue par rapport au panorama des recherches sur le sujet en didactique des mathématiques française et par rapport à certains travaux menés dans la communauté internationale de *Mathematics Education*.

Quelques études exploratoires autour de la question du rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques

Ces premières études ont été menées avec un point de vue encore relativement naïf et peu problématisé qui incluait de considérer la question du langage (essentiellement le *langage verbal*, Bronckart, 2013), à travers quatre entrées[88] (Chesnais et Dreyfus 2012, Chesnais 2014c) : les pratiques langagières mathématiques comme *objet d'apprentissage*, le langage comme *moyen d'apprentissage*, le langage comme *moyen d'enseignement* et le langage comme *outil du chercheur*. Pour le premier, il s'agit, dans la lignée de Vergnaud (1990, 1991), de considérer que les mathématiques, sans être un langage, incluent une « forme prédicative » des connaissances, formalisée via des pratiques langagières spécifiques. En tant que moyen d'apprentissage, il s'agit de considérer le rôle du langage comme instrument psychologique et social privilégié (Vygotsky, 1934, Rogalski, 2008) dans le processus de conceptualisation des mathématiques. Le troisième aspect concerne le rôle du langage comme media privilégié de l'activité de l'enseignant pour réguler les activités des élèves, dans les composantes cognitive *et* médiative. Enfin, il ne faut pas négliger un quatrième et dernier aspect, le rôle méthodologique de l'étude du langage pour le chercheur, comme trace privilégiée de l'activité des élèves et de l'enseignant.

Dans la suite du texte, le terme « langage » désignera des usages de la langue dans des contextes précis, autrement dit des « pratiques langagières », ou encore des « activités langagières » au sens de Bronckart (2013) ou Rebière (2013). M'intéressant essentiellement aux pratiques langagières *verbales*, c'est-à-dire à celles qui mobilisent la « langue naturelle » (Bronckart, 2013), (notamment le français), je parlerai également de « pratiques discursives » (Rebière, 2013). Notons que ces acceptions des termes langage et langue naturelle correspondent pour l'essentiel à celles de Laborde[89] (1982), sur lesquelles je reviendrai plus loin, et à celles d'autres didacticiens ayant des préoccupations proches des miennes (Coulange 2014, Gobert 2014, Bulf, Mathé et Mithalal 2014, Barrier, Chesnais et Hache 2014, Hache 2015 etc.).

Je propose d'illustrer le propos par différentes études menées concernant ces quatre axes. Elles ont notamment consisté à investiguer une partie de la complexité des pratiques langagières associées à un objet d'apprentissage ciblé, la symétrie orthogonale, élargissant ensuite à la question de la prise en compte, dans le langage, des *relations* entre objets (au sens de la logique mathématique), puis

[88] Ces « quatre entrées » sont issues de collaborations avec des didacticiens du français, notamment avec Jean-Charles Chabannes, Yves Soulé et Martine Dreyfus, au sein du LIRDEF.
[89] Même si les conceptions sous-jacentes de ce qu'est la *langue* sont un peu différentes (Rebière, 2013).

d'explorer la manière dont ces enjeux sont pris en charge dans les classes, à la fois comme objet et moyen d'apprentissage pour les élèves ; enfin, d'autres études ont mis en évidence des problématiques plus générales associées aux pratiques langagières des enseignants. Certains éléments sont plus détaillés que d'autres, afin de faire ressortir les questions qui me semblent les plus importantes.

La complexité des pratiques langagières relatives à la symétrie orthogonale et aux relations entre objets mathématiques

Quelques éléments concernant les pratiques langagières associées à la symétrie orthogonale[90]

La symétrie orthogonale se présente comme un exemple paradigmatique de certains phénomènes langagiers, notamment en lien avec les aspects logiques, depuis que Vergnaud (1991, repris dans 2001 et 2007) l'a utilisée pour illustrer à propos des mathématiques le fait que « la complexité n'est pas que dans le faire, elle est aussi dans le dire » (2007, p. 4), c'est-à-dire dans ce qu'il appelle alors la « forme prédicative [de la connaissance] (qui consiste à énoncer des relations des objets entre eux) », par opposition à la « forme opératoire de la connaissance (qui permet d'agir en situation) ». Il met notamment en évidence des « ruptures » dans les formes prédicatives des connaissances dont « l'accumulation [ajoutée à celle des ruptures conceptuelles dans les formes opératoires] engendre des difficultés pour les élèves ». Par exemple, il pointe un « saut » entre deux énoncés liés à la symétrie orthogonale :

« 1. La forteresse est symétrique.
2. Le triangle A'B'C' est symétrique du triangle ABC par rapport à la droite (d).
En effet, on peut noter que l'adjectif « symétrique » passe ici « du statut de prédicat à une place, à celui de prédicat à trois places ». (2007, p. 6).

Ce saut est lié au changement de catégorie logique à laquelle chacun des énoncés fait référence, d'une propriété dans le premier cas à un prédicat à trois places dans le second et qui se traduisent dans le langage verbal par le même adjectif ('symétrique'), utilisé dans des formes syntaxiques différentes.

La symétrie orthogonale constituant le thème mathématique retenu pour ma thèse, j'ai également cherché à investiguer la complexité des pratiques langagières (essentiellement verbales) associées à cette notion, sans toutefois, dans un premier temps, en chercher une portée exemplaire pour des phénomènes plus généraux. J'ai ainsi, dans la lignée Vergnaud (ibid.) ou Durand-Guerrier (2013) et pour une part même, en collaboration avec cette dernière[91], pris en compte la question des aspects logiques sous-jacents. Les résultats synthétisés dans cette partie ont été présentés dans (Chesnais 2012b, Barrier, Chesnais et Hache 2014, Chesnais, Durand-Guerrier et Perrin-Glorian, 2017, Chesnais 2018).

Les principaux résultats concernent la polysémie du mot *symétrique* ainsi que la complexité lexicale et grammaticale des formes langagières permettant de décrire les différents aspects logiques de la symétrie. Ainsi l'adjectif symétrique peut être employé, comme dans l'exemple de Vergnaud (cf. supra), pour désigner une propriété d'objet (phrase 1) ou une relation entre objets (phrase 2, cas

[90] Je ne reviens pas ici sur les différentes appellations de la symétrie (axiale, orthogonale et par rapport à une droite) commentées déjà par Grenier (1988) : il s'agit d'un point qui aurait pu figurer dans cette partie, mais sur lequel je ne me suis pas particulièrement attardée dans les travaux que j'ai menés.
[91] Notamment dans le cadre des projets sur le langage financés par l'ESPE-LR en 2017 et 2018.

d'un prédicat ternaire). Mais il peut également désigner un prédicat binaire (Barrier, Chesnais et Hache 2014, Chesnais, Durand-Guerrier et Perrin-Glorian, 2017), lorsqu'il est employé pour qualifier deux figures[92] pour lesquelles il existe un troisième élément (une droite) telle que ces deux figures et cette droite satisfont le prédicat ternaire – autrement dit qu'il existe une droite par rapport à laquelle ces deux figures sont symétriques l'une de l'autre.

Certaines formes langagières, communes dans le langage expert, peuvent être porteuses d'ambiguïté. Ainsi, par exemple, évoquer deux figures F et G comme étant symétriques peut renvoyer, soit au fait que chacune des deux figures considérées possède la propriété de symétrie, soit que la paire de figures satisfait la relation *être symétrique l'une de l'autre*. Par exemple, selon la première interprétation, une paire de figures formée d'un cercle et d'un carré rend la phrase vraie, tandis que, suivant la deuxième, aucune paire de figures formée d'un cercle et d'un carré ne peut rendre cette phrase vraie (ibid.). Notons que mentionner ici l'axe en ajoutant par exemple « par rapport à la droite (d) » ne restreint pas l'ambiguïté.

Par ailleurs, certaines variations à première vue légères dans les formulations, laissant penser qu'il s'agit seulement de *formuler autrement la même idée,* sont en réalité porteuses de changements de point de vue, même si les propositions sont équivalentes du point de vue mathématique. Notons que cela rejoint l'idée qu' « il n'existe pas de reformulation innocente » car « toute reformulation génère/signale des modifications de signification » (Rebière, 2013, p. 224). Par exemple, la formulation « F et G sont symétriques par rapport à *d* » est couramment employée dans les usages experts pour remplacer « F est symétrique de G par rapport à *d* », mais la première renvoie plutôt à une propriété du couple tandis que la seconde renvoie à la relation entre les deux éléments du couple ; l'énoncé « F et G sont symétriques l'une de l'autre par rapport à *d »* fait ainsi le lien quant à lui entre les deux aspects logiques ; je le considère comme une *'forme factorisée'* exprimant la relation entre F, G et *d*. Il y a équivalence entre les trois formulations (au sens de l'équivalence mathématique), mais pas tout à fait du point de vue des catégories logiques mobilisées, et donc du point de vue de ce que cela peut évoquer pour un individu, a fortiori un élève en cours d'apprentissage. Par ailleurs, on peut noter que la seconde met moins en évidence le caractère symétrique (au sens logique du terme) de la relation de symétrie, la seconde indiquant un lien fonctionnel, mais sans le supposer bijectif. Ces variations sont « naturalisées[93] » pour un individu disposant d'un certain degré de conceptualisation de la symétrie orthogonale (notamment dans les pratiques de référence), mais il me semble raisonnable de penser que ce n'est pas si simple pour un élève en cours d'apprentissage et doit faire l'objet d'une certaine vigilance de la part du chercheur.

En outre, notons que le mot *symétrique* peut également être employé comme nom commun, féminin ou masculin, dans des expressions comme « La figure F est le/la symétrique de G par rapport à (d) ». Là encore, si ces variations sont anodines pour l'expert, on peut s'interroger sur les conséquences que cela peut avoir pour les élèves.

Notons enfin, à propos des usages du mot symétrique, que les constats précédents se posent différemment en anglais et en allemand qu'en français. En effet, l'usage de l'équivalent (« symmetric » en anglais et « symmetrisch » en allemand) est presque exclusivement réservé à la *propriété* des figures, alors que la relation et l'image sont désignés par des termes qui n'ont pas la

[92] Je prends pour l'instant le mot figure dans le sens d'une unité figurale 2D, 1D ou 0D, comme dans Chesnais, Durand-Guerrier et Perrin-Glorian (à paraître) mais j'y reviendrai plus loin.
[93] Je reviendrai plus loin sur le choix de ce terme.

même racine, comme « mirror image » ou « reflection » en anglais, « spiegelbield » ou « spiegeln » en allemand, dont on peut noter qu'ils font référence, dans les deux langues, à l'idée de miroir (Chesnais, 2018).

Exprimer une relation de symétrie suppose aussi de disposer d'éléments langagiers pour indiquer les autres éléments de la relation. Ainsi, il est d'usage d'utiliser la préposition « de » pour désigner le deuxième élément. On peut noter que l'usage de cette préposition, très fréquente en mathématiques (Laborde, 1982) est préférée dans ce cas à l'usage de la préposition « à » traditionnellement utilisée dans les relations géométriques élémentaires entre objets de même nature (une droite est parallèle/perpendiculaire à une autre etc.), tandis que « de » est plutôt utilisé pour désigner des relations entre éléments de nature différente, voire pour indiquer l'appartenance (la médiatrice *d*'un segment, le milieu *d*'un segment, le centre *d*'un cercle, un point *d*'une droite, le sommet *d*'un quadrilatère…). Ce « nouvel » usage de la préposition « de » ici est en lien avec le fait qu'il s'agit d'une transformation géométrique à rapprocher de son usage dans les formulations de relations fonctionnelles (l'image *d*'un nombre par une fonction). Quant à la désignation du troisième élément, on observe une certaine variété des usages de référence : « symétriques par rapport à *d* », « dans/par la symétrie d'axe *d* »…

Enfin, la différenciation entre « symétrie » et « symétrique », indispensable et usuelle pour l'expert s'avère elle aussi être un saut associé par Vergnaud à un processus de « nominalisation » (1990, 2001, 2007) dans lequel la symétrie elle-même devient « objet de pensée », saut potentiellement problématique dans l'apprentissage.

Un dernier élément que j'identifie comme faisant partie des éléments potentiellement problématiques en ce qui concerne les pratiques langagières associées à la symétrie en vue de son enseignement est lié à son caractère négatif comme isométrie. En effet, en dehors des formulations expertes – celle employée dans la phrase précédente ou encore le nom d' « antidéplacement » voire la formulation en termes de non-conservation de l'orientation des angles-orientés –, cette propriété est difficile à formuler verbalement à un niveau élémentaire (Chesnais et Mathé, 2014). En effet, les mots que l'on peut être tenté d'employer sont les mots « tourner » et « retourner », par exemple en disant que la symétrique d'une figure par rapport à un axe est sa « retournée » par rapport à cet axe – celui-ci donnant alors la « direction » de ce retournement (ibid.). Or le mot « tourner » renvoie a priori plutôt à la symétrie *centrale*, ou plus généralement à une rotation, tout en étant employé aussi dans le quotidien pour « tourner une page », qui est très proche, en termes d'action, du pliage associé à la symétrie axiale ; quant au mot « retourner », il pourrait tout aussi bien être appliqué, dans son sens quotidien, à la symétrie centrale. Négocier le sens des termes dans la classe (par exemple, parler de « propriété de retournement », Chesnais et Mathé, ibid. ou Chesnais, Bonicel et al., 2013) est alors indispensable et nécessite d'associer le travail sur le langage à des actions (notamment des pliages ou des manipulations de calque, comme détaillé dans Chesnais et Mathé, ibid. ou Chesnais, Durand-Guerrier et Perrin-Glorian, 2017).

Les questions qui émergent de ces premiers constats concernent leurs conséquences pour l'enseignement et l'apprentissage de la notion de symétrie orthogonale. Au-delà de la symétrie orthogonale, on peut questionner le caractère généralisable de ces éléments. Par exemple, y aurait-il des éléments qui pourraient être étendus à d'autres relations mathématiques ou à des enjeux de distinction entre différents aspects logiques associés à un concept mathématique ? Elles mettent en outre en évidence des problématiques liées à la question du rapport entre langage

formel et « naturel » en mathématiques (Mesnil 2016, Hache 2015) : la difficulté tient au fait que le langage naturel introduit des imprécisions et ambiguïtés par son caractère à la fois « réducteur » () et « foisonnant » (Vergnaud, 2001, p. 297 et 302), ambiguïtés qui sont levées dans la formalisation logique (Vergnaud, 2001, Durand-Guerrier, 2013). Par ailleurs, le langage verbal en mathématiques mobilise la « langue naturelle » (Laborde, 1982) mais avec des usages spécifiques plus ou moins éloignés des usages quotidiens, ce qui en fait à la fois un levier et une source de malentendus[94].

La complexité des formes langagières (verbales) associées aux relations entre objets mathématiques

Les éléments mentionnés ici sont issus de l'étude rapportée dans Chesnais, Munier, Molvinger (2013) et ont été repris dans Chesnais (2014e).

Dans le cadre du projet sur la transition école-collège[95], la question des relations en lien avec la symétrie a été élargie à celle des *relations entre objets*. Cette question, commune aux didactiques des mathématiques et de la physique, est identifiée à la fois comme fondamentale dans ces disciplines et comme particulièrement problématique (Viennot 1992, Vergnaud 1981, 1991). En particulier, notre intérêt s'est porté, en prolongeant le travail concernant la symétrie, sur la relation entre les grandeurs masse, volume et masse volumique. Nous avons ainsi fait passer des tests à 250 élèves en fin de CM2, dans 14 classes dont 8 relevant de l'éducation prioritaire, en cherchant à identifier d'éventuelles différences entre les deux populations (éducation prioritaire ou non). Les deux items suivants visaient à identifier la capacité des élèves à considérer des relations entre trois objets et à les exprimer langagièrement.

Item S : Explique ce que c'est pour toi deux figures symétriques par rapport à un axe[96].

Item MV : Est-ce qu'à ton avis les deux verres peuvent peser « pareil » ? Explique pourquoi.

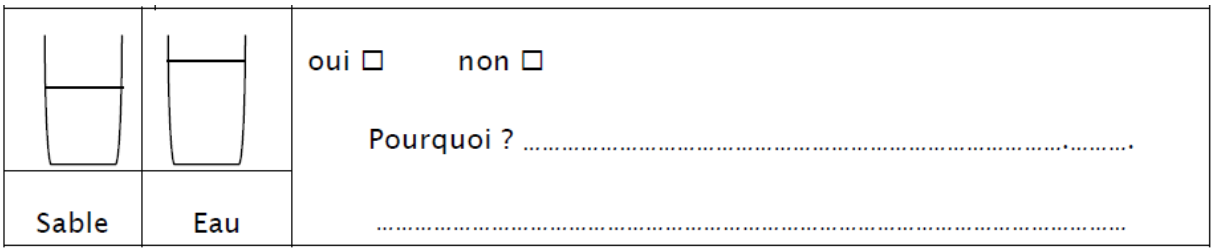


Fig. 6. Items sur la symétrie (S) et la masse volumique (MV) posés dans les tests du projet Transition

La question posée dans l'item S vise, à partir d'une formulation en termes de propriété d'un couple de figures, à savoir si les élèves sont capables de la caractériser en termes de relation (ternaire).

Dans l'item MV, nous n'attendons pas que les élèves mobilisent explicitement la notion de masse volumique à ce niveau scolaire, mais ils peuvent, dans leurs explications, comparer les masses des deux verres en tenant compte des volumes de chaque verre *et* du fait que les deux matières ne sont pas les mêmes. Les élèves peuvent ainsi mettre en relation la masse, le volume et la matière –

[94] Le terme de « malentendu » est employé ici dans son acception courante, mais on peut considérer que ce type de malentendus contribue à des « malentendus » au sens de Bautier et Rochex (1997).

[95] Rappelons que ce projet portait sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et des sciences et mettait l'accent sur la question du rôle de la transition école-collège dans la construction des inégalités scolaires.

[96] La formulation est incorrecte grammaticalement, mais correspondait à une volonté de se rapprocher d'une forme orale, considérée comme plus simple pour les élèves.

implicitement, la masse volumique de cette matière. Nous avons repéré, dans un premier temps, les élèves dont la justification, même incomplète, permet de penser qu'ils mobilisent cette relation pour répondre. Par exemple, un élève qui écrit « oui, parce qu'il y a peu de sable et beaucoup d'eau » n'exprime explicitement que la différence de volume mais prend nécessairement en compte la différence de masse volumique des deux matières pour répondre que la masse peut être la même. Puis, parmi ces élèves, nous identifions ceux qui expriment cette relation complètement (c'est-à-dire en mentionnant explicitement la masse, le volume et la matière ou sa masse volumique) ; une réponse emblématique est : « parce que le sable est plus lourd que l'eau donc si un verre est moin rempli sa fait à peu près le même poid[97] » (Chesnais, Munier et Molvinger, 2013).

Les données ont été traitées à l'aide de tests du Khi2 pour mettre en évidence d'éventuelles différences entre les populations d'éducation prioritaire et de milieu ordinaire. Les résultats sont les suivants. À propos de la symétrie axiale, l'interprétation de l'item S est différenciée entre les deux populations : la répartition entre les élèves qui répondent en termes de propriété, en termes de relation ou de manière ambigüe est significativement différente. En effet, davantage d'élèves de l'enseignement ordinaire répondent en termes de *relation* (Khi2 = 12,6), davantage d'élèves de l'éducation prioritaire répondent en termes de *propriété* d'une figure (Khi2 = 8) (comme par exemple : « c'est une ligne qui partage une figure en deux » ou de manière ambigüe (Khi2 = 6) (« C'est quelque chose d'exactement pareil quand on le plie bord à bord. »)

Par ailleurs, davantage d'élèves dans l'enseignement ordinaire prennent en compte les *trois* objets, que ce soit parmi les élèves qui expriment une relation ou sur l'ensemble des élèves (Khi2 = 6,9 ; Khi2 = 14,4) ; on trouve par exemple des réponses du type : « Deux figures symétriques se sont des figures qui se supperposent grâce à un axe de symétrie. » Les autres élèves qui identifient une relation expriment pour la plupart une relation entre deux figures sans faire mention de l'axe : « Deux figures symétrique c'est 2 figures qui sont identiques l'une de l'autre. »

À propos de l'item MV, le nombre d'élèves qui mobilisent la relation entre les trois grandeurs pour répondre est significativement plus important dans l'enseignement ordinaire (Khi2 = 14,5). De même, parmi ceux qui mobilisent la relation, davantage l'expriment complètement (Khi2 = 4,6) avec des réponses du type : « oui, car le sable est plus lourd que l'eau mais comme le niveau des deux verres ne sont pas identiques, les poids sont compensés »).

Comme nous l'indiquions déjà dans la conclusion de l'étude concernée, ces résultats doivent être pris avec précautions et soulèvent davantage de questions qu'ils n'en résolvent, d'autant que ces tests n'avaient pas été spécifiquement conçus dans l'optique d'une étude des aspects langagiers. Cela pose notamment la question du rapport entre ce qui est dit et ce qui est fait (aspects opératoire et prédicatif de la connaissance). Plusieurs exemples, liés à d'autres items du questionnaire, montrent que certains élèves sont capables de *faire*, c'est-à-dire de produire une réponse montrant une certaine compréhension des phénomènes, sans pour autant sembler capables de *verbaliser* la relation entre les trois objets dans leur justification ; cela traduit selon nous un certain degré de conceptualisation, mais moins avancé que celui atteint par des élèves capables de faire *et* de verbaliser.

[97] Les réponses des élèves sont reproduites telles quelles, en conservant l'orthographe, la syntaxe et la ponctuation.

Réciproquement, cela indique que, si la conceptualisation est indissociable des formes langagières qui l'accompagnent, il ne faut pas pour autant réduire les connaissances des élèves à ce qu'ils verbalisent – ce qu'ils verbalisent *dans une situation donnée* étant de surcroît à distinguer de ce qu'ils seraient *capables* de verbaliser, par exemple au moment de la production de la réponse ou dans une situation d'interaction orale. Par ailleurs, les données montrent une forte variabilité entre les classes – au-delà de la différence entre les deux populations – ce qui amène à questionner les liens entre les différences observées et les pratiques enseignantes, au-delà de la question de l'origine sociale des élèves. Notamment, comme cela a été pointé dans la partie I, là encore, certaines classes de l'éducation prioritaire et certaines classes de l'enseignement ordinaire se distinguent des autres classes du même groupe (sans qu'il s'agisse des mêmes classes pour tous les critères).

Les questions qui émergent concernent le rapport entre le dire et le faire des élèves, non seulement à un moment donné comme indicateur d'un niveau de conceptualisation (indicateur potentiellement pour l'enseignant *et* pour le chercheur), mais aussi sur la manière dont fonctionne la dialectique entre ces deux aspects dans le processus de conceptualisation. Il s'agit autant d'une question de recherche concernant le fonctionnement du processus de conceptualisation que de ses implications méthodologiques pour les recherches en didactique quant au fait de s'appuyer sur les productions langagières comme traces privilégiées de l'activité des élèves.

Les deux études présentées jusque-là permettent d'identifier des caractéristiques des pratiques langagières mathématiques (en particulier la polysémie du terme « symétrique » et la complexité des formes non seulement lexicales mais aussi syntaxiques traduisant les relations), dont on fait l'hypothèse qu'elles sont amenées à jouer un rôle dans le processus de conceptualisation. Par ailleurs, la deuxième étude montre une certaine différenciation dans la capacité de manier ces formes langagières entre les élèves de l'éducation prioritaire et de milieu ordinaire. Cela nous amène à questionner leur prise en charge dans la classe, notamment dans la mesure où ils sont éventuellement porteurs d'obstacles et, potentiellement, de différenciation.

Quelle prise en charge de ces enjeux langagiers en tant qu'objets d'apprentissage et d'enseignement ?

Les études synthétisées ici portent sur la question de la prise en charge, dans les manuels et dans les classes, des caractéristiques des pratiques langagières de référence en ce qui concerne la symétrie orthogonale.

Une première étude de manuels

Une étude de six manuels de sixième (Chesnais, 2012b) a permis de mettre en évidence que ces enjeux sont très peu pris en charge au sens où ils apparaissent comme très peu « pensés » si l'on considère une question de cohérence dans le discours. On note ainsi une grande variabilité des formes langagières à la fois à l'intérieur d'un même manuel (par exemple avec une alternance apparemment non contrôlée entre les formulations « A est le symétrique de B /A et B sont symétriques », « A est symétrique de B / A est le symétrique de B ») ; et entre manuels (« le/la symétrique de la figure F » ; un seul manuel emploie « le point A a pour symétrique B »). Notons que seuls deux manuels sur six contiennent quelques éléments explicites de type « méta » (Robert et Robinet, 1996) sur ces formulations et ces variations :

On dit que A′ est le symétrique de A par rapport à (d) ou que A et A′ sont symétriques par rapport à (d). (Triangle 2005)

vocabulaire : les figures F et F′ sont symétriques par rapport à la droite (d). La figure F′ est le symétrique de la figure F par rapport à la droite (d). La figure F est le symétrique de la figure F′ par rapport à la droite (d). (Phare 2005).

Par ailleurs, on observe des variations entre les titres et le reste du texte avec souvent des titres très courts[98], éventuellement ambigus. Ainsi, le titre « Des figures symétriques » est employé soit pour introduire une partie concernant les axes de symétrie de figures (le caractère symétrique comme propriété d'une figure), soit une partie sur la propriété d'un couple de figures / relation entre deux figures, voire sur la relation ternaire. On trouve de même souvent le titre « Symétrique d'un point », alors que le mot « symétrique » est majoritairement employé comme adjectif en dehors des titres.

On trouve également très peu d'occurrences des expressions « l'une de l'autre » ou « d'elle-même » qui permettraient de discriminer entre les deux interprétations possibles de l'adjectif symétrique et parfois une omission de « par rapport à », y compris dans des cas où cela rend incorrect l'expression : « on a construit le symétrique du point A ».

Enfin, on trouve des expressions extrêmement complexes dans certaines consignes d'exercices. Ainsi, même pour un expert, certaines nécessitent de l'attention pour les interpréter : « construire le symétrique M' de M par rapport à (EF) et M'' de M' par rapport à (FG). » La complexité est encore renforcée par une apparente absence de contrôle de cette variabilité. Ainsi, dans un manuel, on trouve dans deux exercices successifs deux usages différents de l'adjectif symétrique dans deux consignes très similaires : « A' et B' sont les symétriques de A et B par rapport à (d). » puis, dans l'exercice suivant « A et A' sont symétriques par rapport à la droite (d). » On peut même faire l'hypothèse que c'est finalement davantage sur un effet d'habitude des usages du symbole « ' » pour désigner le symétrique d'un point donné que l'expert va s'appuyer pour identifier quels points sont symétriques les uns des autres.

Un dernier exemple édifiant : « […] trace la droite (D1) telle que le segment [AB] soit son symétrique par rapport à cette droite. Trace de même les droites (D1) et (D2) pour les segments [AC] et [BC]. » L'interprétation des articles démonstratifs « son » et « cette » dans la première phrase sont particulièrement problématiques. En effet, du point de vue strictement grammatical, « son symétrique » pourrait être employé pour dire « le symétrique *de (D1)* ». Interpréter correctement la première phrase nécessite, on peut le penser, une certaine familiarité avec la symétrie orthogonale et ses propriétés (par exemple le fait que l'image d'une droite ne peut pas être un segment). Je n'ai reproduit ici la deuxième phrase que pour montrer jusqu'où peut aller la complexité du fait du caractère synthétique manifestement recherché dans certains énoncés.

En ce qui concerne l'usage de la préposition « de », même si je m'y suis moins intéressée, on peut noter ici la similarité du titre « Symétrique d'un point » avec un autre titre potentiel dans un manuel comme « Milieu d'un segment », alors qu'ils renvoient à des significations très différentes de la préposition « de » (cf. supra). Quant à la mention du troisième objet de la relation, quand elle n'est pas omise, il semble qu'il n'y ait pas d'autre formulation que la locution « par rapport à » (même si, là encore, l'étude a été moins systématique).

[98] On peut faire l'hypothèse que (là encore !), différentes contraintes s'exercent : non seulement celles liées au contenu, mais aussi les contraintes d'édition dont on sait qu'elles sont parfois contradictoires… le fait de privilégier des titres courts peut ainsi faire partie des attentes d'un éditeur.

Quelques résultats d'études de séances de classes

Je présente tout d'abord rapidement des résultats généraux issus d'une étude exploratoire des scénarios de cinq enseignants de sixième et du déroulement d'une séance par enseignant. Je détaille ensuite davantage des comparaisons de séances de classes pour faire apparaître des phénomènes qui me semblent dignes d'intérêt pour le didacticien.

Des résultats généraux

Là encore, les principaux résultats concernent les usages de l'adjectif « symétrique ».

Une première étude de quelques séances de classes sur la symétrie orthogonale en sixième pour cinq enseignants (Chesnais, 2012b), a permis de mettre en évidence un certain nombre d'éléments quant à la prise en charge dans les classes de certaines pratiques langagières associées à la symétrie (notamment les difficultés autour des usages du mot « symétrique » et de l'expression « par rapport à »). Il s'agissait d'identifier les modes de prise en charge de ces éléments en lien avec leurs effets potentiels sur les apprentissages des élèves, ainsi que les logiques sous-jacentes à ces modalités du point de vue du fonctionnement des pratiques enseignantes – incluant, toujours, la question de l'effet du contexte (éducation prioritaire ou milieu ordinaire). Même si cette étude n'avait pas de caractère systématique, elle a permis de mettre en évidence quelques résultats et de préciser des questions.

Les résultats obtenus indiquent, de manière similaire à ce qui a été vu pour les manuels, globalement très peu de prise en charge explicite de ces enjeux, mais néanmoins des différences entre les classes. Tout d'abord, du point de vue du scénario, par exemple, deux enseignants sur les cinq prévoient des exercices où il s'agit de « faire des phrases avec le mot symétrique ». De même, dans la leçon, on trouve la présence plus ou moins importante de commentaires 'méta', comme dans les manuels : l'une des enseignantes (Martine) fait écrire que les formulations du type « A et B sont symétriques » et « A est le symétrique de B » sont équivalentes et une autre (Maryse) mentionne que le mot « symétrique » peut être employé à la fois comme adjectif et nom commun et, dans ce dernier cas, féminin ou masculin. Par ailleurs, dans les titres des leçons, on retrouve, comme dans les manuels, le fait que la mention de l'axe est omise.

Selon les classes, le travail sur l'usage de ces pratiques langagières spécifiques apparaît plus ou moins « déconnecté » de l'activité mathématique, travaillé pour lui-même : c'est à des moments précis que l'enseignant pose des questions aux élèves sur les mots à employer, essentiellement avec des questions très ponctuelles voire parfois déconnectées des enjeux de sens. Ainsi, par exemple, dans la classe de Denis, lors d'un exercice où il s'agit de compléter des « phrases à trous », l'argument avancé pour refuser le mot « perpendiculaire » dans une phrase où il n'est pas pertinent est que « on l'a déjà utilisé [dans une autre phrase] » jouant ainsi sur des effets de contrat et non sur le sens. La comparaison de Maryse et Marianne présentée plus loin illustre des différences entre les deux enseignantes sur le lien entre l'activité des élèves et les aspects langagiers.

Du point de vue des pratiques langagières des enseignants eux-mêmes dans la classe, il apparaît que, comme dans les manuels, aucun d'entre eux n'utilise « l'une de l'autre » ou « entre elles » pour spécifier l'usage de l'adjectif « symétrique » comme renvoyant à une relation entre figures. Certains enseignants emploient également des formes très elliptiques/incomplètes/imprécises comme « c'est symétrique », « il faut faire le symétrique ». De même la mention de l'axe et l'emploi de « par rapport à » est très variable chez les enseignants, de Martine et Marianne qui l'emploient presque systématiquement à deux d'entre eux (Sébastien et Denis) qui ne l'emploient jamais, les

formulations étant toujours elliptiques. Je propose plus loin une étude plus systématique de ces éléments dans le cadre de trois comparaisons de séances de classes.

Lors du travail sur la propriété d'une figure (la présence d'axes de symétrie), certains enseignants emploient « d'elle-même » ou « est sa propre symétrique », même si cela n'est pas toujours cohérent avec le degré de conceptualisation de l'axe de symétrie travaillé (plus souvent au palier 3, c'est-à-dire en lien avec l'idée que la présence d'un axe de symétrie est liée au fait que les deux parties de la figures situées de chaque côté de l'axe sont symétriques l'une de l'autre, plutôt qu'en référence à l'invariance globale, cf. partie II, Chesnais 2009a, 2012a).

Un élément qui apparaît dans les pratiques de certains enseignants, en particulier chez Denis (Chesnais, 2009a) est une substitution de termes courants au vocabulaire mathématique : par exemple, le mot « symétrique » est souvent remplacé par des mots comme « reflet », « ombre » etc. Ce résultat, associé à d'autres concernant les classes relevant de l'éducation prioritaire (cf. infra) fait écho à celui de Pariès (2004) indiquant que les enseignants qui exercent dans ce contexte tendent à utiliser moins les termes experts. Le questionnement didactique concernant ce constat rejoint celui développé plus globalement dans la première partie : sachant que le vocabulaire courant peut renvoyer à des concepts quotidiens, il est difficile d'interpréter les logiques sous-jacentes auxquelles cela correspond dans les pratiques des enseignants, de même qu'évaluer les effets potentiels : s'agit-il d'un moyen de se positionner dans la ZPD des élèves, est-il anticipé ou apparaît-il en réaction aux productions des élèves ? Favorise-t-il l'engagement des élèves dans la tâche ou est-il davantage source d'obstacles hypothéquant les apprentissages ?

L'un des résultats qui me semble important est aussi l'écart entre oral et écrit. Ainsi, les formes employées à l'écrit sont souvent nettement plus complètes et structurées que les formes employées à l'oral, dans toutes les classes, probablement de la même manière que dans les usages experts.

Les usages des prépositions, en lien avec la mention des différents objets de la relation, n'ont pas fait l'objet d'une étude systématique, mais il me semble intéressant de mentionner ici une observation faite dans des classes de CM2 (Chesnais et Mathé, 2015). On a ainsi pu repérer que, parfois, lorsqu'il est question de la relation binaire, certains élèves et enseignants parlent d'une figure symétrique *par rapport à* une autre ou symétrique *à* une autre. On peut faire l'hypothèse que cela sera problématique pour distinguer ensuite relation binaire et ternaire et les arguments de l'une et l'autre.

Enfin, à propos des usages de « symétrie » et « symétrique », j'ai pu observer dans certains corpus qu'elle n'est pas évidente pour les élèves (Chesnais, 2009a) ni même pour certains professeurs des écoles (qui évoquent parfois « la symétrie d'une figure » pour signifier *l'image* d'une figure par symétrie). Une étude plus systématique serait intéressante à mener en sixième où l'objet « symétrie orthogonale » va émerger plus clairement, notamment lorsque l'on va s'intéresser aux « propriétés de conservation de la symétrie » (qui est précisément le contexte auquel Vergnaud (1991, 2007) associe la nécessité du mot, en lien avec le processus de nominalisation).

Trois comparaisons de séances de classes menées sur des tâches identiques

Une première comparaison

La situation concernée est présentée et analysée dans Chesnais, Bonicel et al. (2013) et la comparaison des deux séances est détaillée dans Chesnais, Durand-Guerrier et Perrin-Glorian (à paraître).

Il s'agit de comparer deux séances menées dans des classes de sixième sur la base d'un même exercice élaboré dans le cadre d'un groupe IREM sur la transition école-collège (Chesnais, Bonicel et al., 2013). Les deux enseignants concernés, Antoine et Fabien[99], sont des enseignants expérimentés, faisant partie du groupe IREM et enseignant tous les deux dans des établissements accueillant un public plutôt défavorisé. L'énoncé est le suivant :

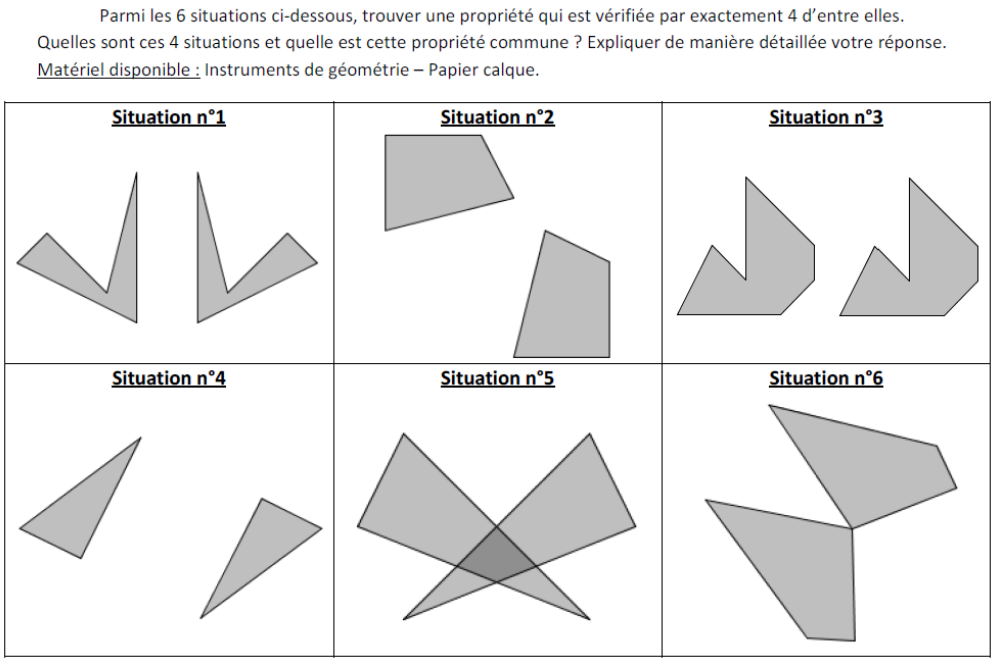


Fig. 7 énoncé de l'activité d'introduction à la symétrie orthogonale en sixième (Chesnais, Bonicel et al., 2013).

Envisagé comme première rencontre avec la symétrie orthogonale en sixième, cet exercice vise à faire 'ré-émerger' la symétrie orthogonale[100] en tant que *propriété* de couples de figures caractérisée par la *relation* (entre les deux figures) de superposition par pliage, en lien avec la « propriété de retournement »[101]. La relation ternaire pouvait également être en jeu de façon secondaire, à partir d'un travail sur l'axe (en lien notamment avec le pliage), d'autant que la trace écrite visée est la « définition » (déjà travaillée, au moins implicitement, à l'école élémentaire) de deux figures symétriques par rapport à un axe comme étant *superposables par pliage le long de cet axe*. Le choix des « situations » visait aussi un travail sur les conceptions erronées classiques de la symétrie, comme la confusion avec d'autres transformations – notamment symétrie centrale et translation – ou encore la conception de la symétrie comme transformation d'un demi-plan dans un autre (Grenier 1988, Chesnais 2012a). Sont évidemment nécessairement inclus, dans la situation, des

[99] Il s'agit du même enseignant que celui prénommé Fabien dans l'étude Chesnais 2014b (cf. partie I).

[100] Je ne m'étendrai pas ici sur le fait que la consigne était choisie pour ne pas trop induire l'intérêt pour la symétrie, ce qui s'est confirmé dans les déroulements, de nombreux élèves cherchant plutôt des propriétés du type de la présence d'angles droits ou de parallèles dans les figures. Je ne relate ici que les observations directement liées aux enjeux liés aux différents aspects logiques de la symétrie mais on trouvera davantage de précisions dans Chesnais, Bonicel et al. (2013).

[101] On peut imaginer que la propriété du couple pourrait aussi être caractérisée par la superposition du couple sur lui-même en cas de retournement (réalisé à l'aide d'un calque par exemple), mais le groupe avait fait l'hypothèse que cet aspect était très peu travaillé en CM2 et avait donc peu de chances d'apparaître, tout en en laissant la possibilité.

enjeux liés aux formes langagières associées à ces aspects (cf. supra) et c'est ce sur quoi a porté plus spécifiquement mon attention dans la comparaison des séances dans les deux classes. Je me suis intéressée en particulier aux formes langagières visant à caractériser la relation entre les deux figures car je fais l'hypothèse que c'est un enjeu important en sixième, en particulier en éducation prioritaire, compte tenu des résultats obtenus dans mes différents travaux et rappelés supra. Ainsi, je me suis attachée à analyser les usages des mots « symétrique » et « superposer », ainsi qu'aux formes apparentées. Les réponses attendues[102] sont des réponses en lien avec le pliage (du type : dans quatre cas, je peux superposer les figures quand je les décalque, en pliant) ou le retournement (du type : l'une est la retournée de l'autre ou si j'en décalque une et que je retourne, je peux la superposer avec l'autre) ou mentionnant la symétrie (du type : les deux figures sont symétriques ou d'autres formes langagières, mobilisant éventuellement d'autres catégories logiques). Notons que je ne mentionne ici que le fond des réponses possibles, sans m'attacher à la forme, par souci d'économie du texte, car je ne reproduis dans cette note que quelques résultats car je ne m'intéresse ici qu'à quelques aspects langagiers qui ont joué un rôle dans le déroulement et que je mentionnerai directement dans l'exposition des résultats.

Le résultat principal est que, si certaines formes langagières employées, par les élèves ou par les enseignants, *explicitent* une relation, elles restent rares tout au long de la séance. Une exception notable dans la classe de Fabien est une phase de quelques minutes où il s'agit d'identifier, en les matérialisant par des mouvements de calque, la relation qui lie les figures dans les couples : l'usage de mots de la famille de « superposer » est alors plusieurs fois associé à l'usage de « l'une sur l'autre », et les formulations sont parfois « dépliées », explicitant qu'il y a un objet initial, que l'on manipule pour le superposer sur un deuxième et qu'on dit alors que les deux objets se superposent (en ajoutant éventuellement « l'un sur l'autre »). Toutefois, l'expression se fige très vite en « elles se superposent », qui ne permet pas de rendre explicite le caractère relationnel de la propriété considérée (du fait de sa forme 'factorisée'[103]). En dehors de ces phases, la plupart des formes langagières employées restent très elliptiques, le sens de l'adjectif *symétrique* alternant de signifiant la relation entre les éléments des couples à la propriété du couple, voire comme propriété d'une « situation » sans que cela soit explicite, voire qu'il soit même possible de discriminer à quel type d'objet il est attribué. Notamment, dans la classe d'Antoine, dans le premier extrait analysé dans Chesnais, Durand-Guerrier et Perrin-Glorian (à paraître), domine l'emploi de formes telles que « elle est symétrique » et « elles sont symétriques », voire « c'est symétrique » sans qu'il soit toujours possible de savoir à quoi renvoie le pronom « elle » (et encore moins, le « c' »). Ainsi, dans l'ensemble des deux séances, la majeure partie des formulations employant des mots de la famille de 'superposer' ou de 'symétrique', sont 'factorisées' (« elles se superposent », « elles sont symétriques »), incomplètes (ne mentionnant pas toujours les objets en jeu), voire encore moins explicites (comme : « ça se superpose », « c'est symétrique »).

[102] Je ne reproduis ici que les réponses attendues dans le cas des élèves qui font le lien avec l'idée de symétrie, cf. Chesnais, Bonicel et al., 2013 pour une analyse a priori plus complète.

[103] Notons que le pronom réfléchi « se » traduit pour l'expert le fait qu'il s'agit d'une relation, mais persiste néanmoins pour le novice potentiellement une ambiguïté (la même que dans « elles sont symétriques ») : s'agit-il de deux figures qui *se superposent chacune à elles-mêmes* (il s'agit alors plutôt d'une propriété de la figure) ou de deux figures qui *se superposent l'une sur l'autre* (vu comme propriété du couple ou relation entre les deux membres du couple) ?

Enfin, le dernier résultat concerne le rapport entre oral et écrit. En effet, dans les deux classes, c'est au moment du passage à la trace écrite (qui dure moins de deux minutes), que chacun des deux enseignants accole « l'une de l'autre » à l'adjectif 'symétrique'.

On retrouve ainsi des éléments similaires à ceux observés dans l'étude des manuels, comme la variabilité des formes employées, mais avec une présence d'ambiguïtés encore plus importantes, du fait notamment du caractère oral des productions langagières.

Une deuxième comparaison

La deuxième comparaison est présentée dans Barrier et al. (2014) et reprise dans Chesnais (2018). J'ai comparé deux séances, chez les enseignantes Marianne et Maryse, portant sur le même exercice, dans lequel il s'agit de dire si des couples de figures sont symétriques ou non par rapport à un axe donné. Je ne reviens ici que sur un des résultats. Dans les deux classes, il s'agit du premier exercice du chapitre (il est issu du manuel commun aux deux classes), visant à faire (re-)mobiliser par les élèves la symétrie orthogonale déjà vue à l'école primaire, en lien avec l'usage du calque ou du pliage. Les enjeux langagiers associés sont a priori également en jeu. Ainsi, la trace écrite visée est, comme dans la comparaison précédente, la « définition » de deux figures symétriques par rapport à un axe comme étant superposables par pliage le long de cet axe. La consigne est « Préciser, dans chaque cas, si les deux figures sont symétriques par rapport à la droite (d). ». Je m'intéresse ici au cas c) :

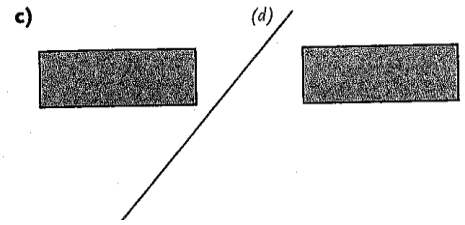


Fig. 8. Troisième cas de l'exercice tiré du manuel Phare, chapitre sur la symétrie orthogonale

Ce qui est en jeu ici est la relation ternaire et plus précisément le rôle de l'axe, dans la mesure où les deux rectangles sont symétriques mais pas par rapport à la droite (d). On peut ainsi considérer que l'expression « par rapport à » fait partie des objets d'apprentissage visés, comme moyen de mentionner le troisième argument de la relation. Notons que l'énoncé omet « l'une de l'autre », mais le contexte ne laisse pas de place à l'ambiguïté.

Les élèves peuvent produire une réponse positive (i.e. erronée), pour essentiellement deux raisons : (1) l'axe proposé est négligé, la symétrie est considérée comme une relation entre deux figures (ou comme propriété d'un couple de figures) ; (2) l'axe est pris en considération, mais les caractéristiques de la relation entre les trois objets ne sont pas maîtrisées. Par exemple, les élèves peuvent considérer que les figures sont bien « en face » l'une de l'autre, car ils n'associent pas encore « en face » avec une direction perpendiculaire à l'axe, mais plutôt à une direction horizontale (ce qui est lié à une conception erronée « classique » de la symétrie, liée à la prégnance des axes verticaux, Grenier 1988, Tavignot 1993, Chesnais 2009a). Notons que les élèves peuvent néanmoins aboutir à une réponse correcte (négative), en s'appuyant sur cette conception : en effet, la « distance » des rectangles à la droite est légèrement supérieure pour le rectangle de droite.

En outre, les réponses peuvent être issues de considérations uniquement perceptives (visuelles), ce qui correspondrait à la procédure « experte », mais peuvent être renforcées ou contredites par l'utilisation d'instruments comme le calque ou la règle graduée.

Les déroulements associés à cette tâche s'avèrent très différents dans les deux classes.

Marianne, dès la lecture de la consigne, demande aux élèves :

*Marianne : est-ce que c'est important le mot symétrique **par rapport** [P insiste] à la droite d ?*
E[104] *: oui*
Marianne : oui, pourquoi ?
E : oui, sinon c'est pas, sinon on peut pas savoir si elles sont symétriques.
Mais notons que l'élève, tout en répondant positivement, ne mentionne pas « par rapport à la droite *d* ».

Après quelques minutes de travail individuel, de nombreux élèves proposent une réponse positive, négligeant manifestement le rôle de l'axe (par exemple, certains ont utilisé un calque, mais n'ont décalqué que les deux rectangles[105]). Les échanges pilotés par Marianne portent ensuite sur le lien entre l'expression « par rapport à la droite *d* » dans la consigne et « l'endroit où l'on plie ».

À plusieurs reprises, notamment lors de la formulation par écrit des réponses, il s'avère que la position de certains élèves a évolué :

Marianne : par rapport à la droite d. Est-ce que c'est important de le préciser ? [P écrit la réponse au tableau]
Es : oui
Marianne : oui, pourquoi ?
E : parce que c'est la droite d, parce que ça pourrait être symétrique mais pas par rapport à la droite d.
Cette fois, on peut relever la présence de la droite dans la verbalisation de l'élève qui indique la prise en compte de la relation ternaire et l'utilisation d'éléments langagiers associés.

Si cette insistance est manifeste dans le langage de l'enseignante (plusieurs échanges sont aussi l'occasion de corriger les élèves qui utilisent « à » plutôt que « par rapport à »), des implicites forts persistent dans certaines interventions, qui ne sont pas levés. En voici un exemple :

Marianne : Donc, elle avait dit elles sont symétriques, mais en fait après quand elle a plié sur la droite d, elle s'est aperçue qu'elles n'étaient pas symétriques. »
L'omission de « par rapport à la droite *d* » à la fin de la phrase rend ici la compréhension difficile.

On peut noter que l'enseignante articule de manière étroite sa propre activité avec celles des élèves. Ce sont leurs questions, l'observation de leurs tracés ou encore leurs difficultés de formulation qui provoquent ses interventions.

On observe en outre une évolution des activités des élèves au cours de la séance, comme par exemple pour Lucien, élève en difficultés en mathématiques, et qui a répondu positivement au début :

Marianne : Le petit c, Lucien, est-ce que tu peux répondre, maintenant ?
Lucien : euh les deux rectangles sont pas symétriques
Marianne : Ne sont pas symétriques

---

[104] Dans les extraits de transcription, 'E' désigne un élève non identifié ; un prénom est précisé dans le cas contraire.
[105] Ce qui n'est pas, en soi, une erreur, puisqu'il est tout à fait possible de décalquer les deux rectangles, plier pour les faire se superposer et vérifier ensuite si le pli correspond à la droite en replaçant le calque sur le manuel.

Lucien : par rapport à la droite d
Marianne : oui, en revanche, c'est ce que tu disais tout à l'heure, tu avais bien l'impression qu'ils étaient symétriques, mais pas – je vois bien que quand je plie sur d, mes deux rectangles ne se ?
E : superposent pas.
Marianne : superposent pas, vous le voyez. En revanche est-ce que tu pourrais plier différemment pour qu'ils se superposent ?
Lucien : euh, droit, comme ça [Lucien indique par des gestes la direction verticale].
Marianne : voilà, verticalement, on voit bien que si on plie verticalement – donc [elle écrit] les rectangles ne sont pas symétriques par rapport à d.
Ce que montre également cet échange, représentatif, de ce point de vue, de la séance, c'est que Marianne articule en permanence l'aspect matériel du pliage et le langagier.

Dans la classe de Maryse, l'exercice a été traité à la maison et il s'agit de le corriger. L'objectif de Maryse est manifestement de réactiver l'usage du calque et du pliage associé à la symétrie. Toutefois, l'exercice ne semble pas pour elle contenir un objectif d'apprentissage problématique mais constitue plutôt un moyen de produire des exemples de figures symétriques sur papier calque qui serviront à illustrer la leçon qui sera écrite dans le cahier. Ce qui est particulièrement remarquable dans cette séance, en comparaison avec celle de Marianne, est le fait que les différents aspects de l'activité géométrique sont traités séparément, voire mis en opposition. L'utilisation d'un calque est présentée comme « plus simple » que la perception visuelle des propriétés de la symétrie (que les élèves semblent avoir mobilisée). Son usage est imposé par une consigne donnée en référence aux aspects matériels de l'activité : « vous avez cinq figures à décalquer, vous me prenez la règle, […] et vous me faites en rouge les axes de symétrie. » Notons d'une part que les droites que les élèves vont dessiner en rouge ne sont justement pas toutes des axes de symétrie (comme dans le cas c, par exemple) et que dessiner la droite sur le calque n'est pas une nécessité pour résoudre la tâche (cf. note précédente et Barrier et al., 2014). L'enseignante justifie sa demande non pas par rapport à l'aspect ternaire ou la caractérisation de la relation de symétrie, mais évoque seulement le fait que le calque permettra de plier, ce qui n'est pas possible sur le livre, et que cela permettra de « voir si les figures sont symétriques ou non », sans plus de précision. La procédure est ensuite écrite dans le bilan de l'exercice, mais il ne s'agit que d'une description d'actions matérielles : « on a décalqué les cinq figures. On a plié suivant la droite *d* afin de voir si les figures sont superposables. »

Après un temps de travail individuel, les réponses sont énoncées oralement. Voici l'échange concernant le cas qui nous intéresse :

Maryse : Donc [le cas] C, qu'est-ce qu'on peut dire ?
E : ne sont pas symétriques.
Maryse (avec un ton d'acquiescement): ne sont pas symétriques.
À strictement parler, cette réponse – en ne mentionnant pas l'axe – est erronée (même si on peut penser que, pour l'enseignante tout du moins, la référence à l'axe est implicite) mais, ce qui nous semble surtout problématique, c'est que l'on peut s'interroger sur la possibilité, pour les élèves qui auraient conclu positivement[106] de comprendre pourquoi leur réponse est erronée.

Quelques minutes plus tard, en écrivant au tableau les réponses pour les cas où la réponse est positive, l'enseignante s'arrête avant d'écrire « par rapport à » et revient de fait sur le cas c) :

[106] Je ne dispose pas de données précises sur ce point, mais compte tenu du déroulement dans la classe de Marianne et des réponses des élèves tout au long de la séance dans la classe de Maryse, il y en a potentiellement au moins quelques-uns.

Maryse : donc les figures b), d) et e) sont symétriques alors quand je dis symétrique, il y a quelque chose de très important qu'il ne faut pas oublier et c'est la figure du milieu, la c), qui nous permet de le dire, finalement, c'est-à-dire si j'avais mis l'axe ailleurs, dans la figure c), est-ce que vous trouvez pas que ça serait symétrique ? […] Autrement dit, dans la symétrie, ce qui est très important, c'est de dire ?
E : l'axe
Maryse : de donner l'axe. Donc à chaque fois, on va dire par rapport, par rapport à l'axe d […]

La nécessité de mentionner l'axe apparaît donc au moment de passer à l'écrit, alors qu'elle n'est pas abordée au cours des interactions orales. On peut faire l'hypothèse que ce phénomène est lié aux contraintes de « rigueur » qui sont associées à l'écrit en mathématiques. Quoi qu'il en soit, l'aspect ternaire de la relation ne semble pas avoir été identifié comme un enjeu d'apprentissage au cours de cette séance. Les interventions de l'enseignante sont surtout en rapport avec des questions de précision portant sur le contrat didactique (que *faut-il* dire ou que *faut-il* faire dans la classe de mathématiques ?), plutôt qu'en rapport étroit avec la résolution des tâches, le contenu mathématique et les activités effectivement développées par les élèves.

La comparaison de Marianne et Maryse permet donc de mettre au jour des différences dans la prise en charge de certains enjeux d'apprentissage liés aux catégories logiques en jeu, comme cela avait déjà été constaté à propos des manuels (supra et Chesnais, 2012b) : ainsi, la part langagière de l'activité est plus ou moins travaillée en lien avec la production de la réponse et la part instrumentée ; par ailleurs, les deux séances se distinguent aussi par une articulation plus ou moins forte de l'activité des deux enseignantes avec celles que leurs élèves ont déployées au cours de la tâche. Notons qu'il semble que ces enjeux sont transparents pour Maryse, au moins à certains moments.

Une troisième comparaison

Cette comparaison porte cette fois sur trois enseignants expérimentés de l'école élémentaire, en CM2 : Louis, Clémentine et David[107]. Elle a été présentée dans Chesnais et Mathé (2014) puis un aspect particulier a été approfondi dans Chesnais et Mathé (2015). Les données sont issues partiellement du projet Transition école-collège financé par la région Languedoc-Roussillon et d'un travail mené dans le cadre du groupe IREM sur la transition école-collège de l'IREM de Montpellier, mentionné précédemment. Les trois enseignants concernés faisaient partie de ce groupe. Louis et David enseignent dans un établissement relevant de l'éducation prioritaire, Clémentine dans un établissement « mixte » (cf. partie I).

La comparaison porte sur la deuxième séance du scénario élaboré pour la classe de CM2 par le groupe (Chesnais, Bonicel et al., 2013). Il s'agit d'identifier des couples de figures symétriques par rapport à un axe donné (cf. figure ci-dessous). La consigne était précisément : « dans chaque cas, a-t-on fait une symétrie axiale par rapport à la droite tracée ? » L'enjeu de la séance était d'amener les élèves à dépasser une caractérisation instrumentée (par le pliage ou le retournement du calque) des figures symétriques et à mobiliser explicitement les propriétés de la symétrie axiale rencontrées lors de la séance précédente (en particulier la conservation de la distance à l'axe et la propriété de retournement), en lien également avec un travail sur les conceptions erronées liées aux axes horizontaux et verticaux, ainsi qu'à la confusion avec d'autres transformations. Toutefois, malgré une élaboration commune de la séance, les objectifs d'apprentissage réellement en jeu dans les séances se différencient dans les déroulements des trois classes, David mettant surtout l'accent sur la

[107] Clémentine et Louis sont par ailleurs Maitres Formateurs.

validation du caractère symétrique ou non par l'usage du calque, Clémentine sur les propriétés et Louis mélangeant les deux.

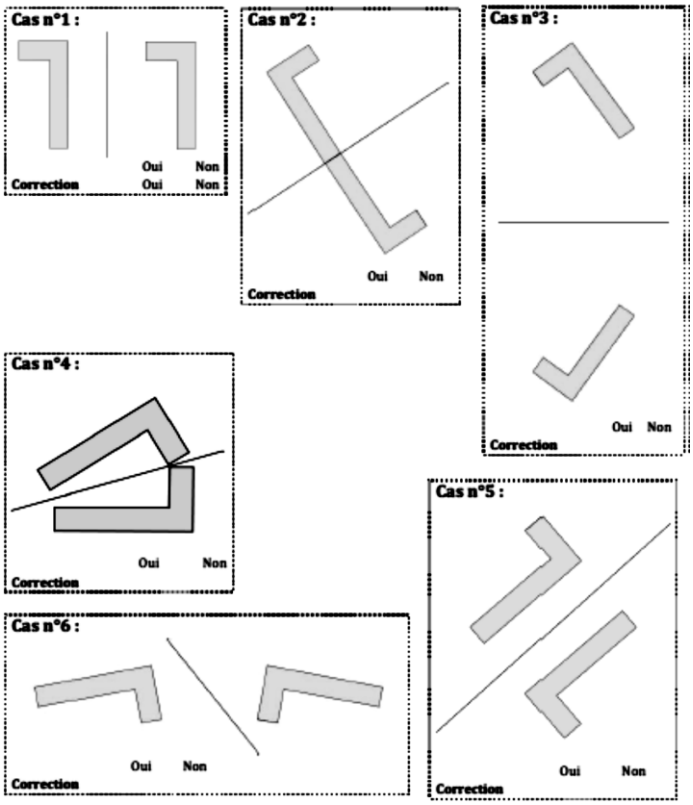


Fig. 9. Énoncé élaboré par le groupe IREM Transition et proposé à des élèves de CM2 en dimension A3 (Chesnais, Bonicel et al., 2013).

Nous nous sommes focalisées plus particulièrement sur l'enjeu lié à la « propriété de retournement » (cf. supra), et notamment à l'articulation, à son propos, entre les aspects langagier et instrumenté.

Les résultats sont les suivants : la propriété de retournement est mobilisée par les élèves dans les classes de Clémentine et de Louis, mais très peu dans celle de David. Les élèves de Clémentine emploient pour la mobiliser les expressions suivantes : la figure est « à l'envers », « retournée », « tournée », « dans/de l'autre sens », « inverse ». Un élève l'exprime même comme relation à la figure initiale : « [elle] est dans l'autre sens que la tâche[108] originelle ». Clémentine reformule systématiquement l'expression des élèves en utilisant « retourné(e) ». Le discours est accompagné de quelques gestes mais le calque et le pliage (manipulés lors de la séance précédente) sont surtout évoqués. Elle mentionne un peu la relation entre les objets, mais plutôt comme relation binaire, entre les deux figures : « la figure doit être retournée par rapport à la figure de départ », « elles sont à l'envers l'une par rapport à l'autre ». Il s'agit ici d'un exemple de l'usage de la locution « par rapport à » pour désigner le deuxième objet, comme évoqué précédemment, mais, plus tard dans la séance, la même locution est employée pour désigner l'axe.

Dans la classe de Louis, les formulations produites par les élèves sont moins variées et moins explicites : « ça va se retourner », « elle se retourne », « le retournement n'a pas été effectué », « si on plie la figure, il y a pas de retournement ». Les reformulations de Louis restent très proches du

[108] La séance précédente avait été menée avec des tâches de peinture, d'où l'utilisation de ce terme.

langage des élèves : « il y a retournement », « le retournement s'opère », jusqu'à ce que le mot « retournement » semble employé comme *synonyme* de *symétrie axiale*. Le pliage a été utilisé par les élèves pour des validations instrumentées, et on y note quelques références dans le langage de l'enseignant, mais pas de gestes.

Dans la classe de David, enfin, très peu d'interactions concernent spécifiquement la propriété de retournement et les formes langagières sont très rares et peu explicites (par exemple, « la figure il faut qu'elle soit tournée »). L'activité est alors essentiellement matérielle et David emploie alternativement « tourné » et « retourné », même si, à un moment, il insiste sur le fait que la feuille a été *retournée* et non pas *tournée* : c'est alors en s'appuyant sur des gestes faits avec les mains, en évoquant une manipulation du calque, qu'il montre la différence entre les deux mouvements. Détaillons un échange entre David et la classe, à propos du cas n°3, car il nous semble emblématique des déroulements dans cette classe. Des élèves ont conclu pour ce cas que les figures n'étaient pas symétriques par rapport à la droite donnée car ils ont imprimé au calque une rotation de 180° dans le plan autour d'un point qui situé approximativement au milieu du trait figurant l'axe potentiel et ils ont conclu que les figures ne se superposaient pas. David questionne la classe pour tenter de faire formuler que le mouvement ne correspond pas à celui de la symétrie axiale : « le calque il a pas été retourné, il a été ? E : descendu ». Devant l'écart entre la réponse produite et l'attendu (*tourné* ou éventuellement *retourné*), David semble renoncer à clarifier la confusion dans le langage et recentre l'activité sur l'action matérielle, en l'accompagnant de déictiques (« on a fait comme ça et pas comme ça »), n'introduisant qu'ensuite quelques verbalisations plus élaborées (« on l'a pas retournée, on a simplement tourné la figure »). Notons que ce déroulement évoque des déroulements d'autres séances dans des classes d'éducation prioritaire dont certains exemples ont été détaillés dans la partie I et d'autres seront présentés plus loin.

On retrouve donc des différences dans les trois classes, qui nous invitent à les interpréter en termes d'objectifs d'apprentissage différents qui, même s'ils portent tous sur la propriété de retournement, ne s'inscrivent pas dans le même objectif plus global : lié à la formulation et l'utilisation des propriétés chez Clémentine comme devant remplacer l'usage du calque ou du pliage, davantage lié à la validation instrumentée (usage du calque) chez David, et un peu plus flou chez Louis. De même, on observe des différences quant à la manière dont chacun des enseignants articule son activité avec celle des élèves.

Des résultats similaires quant à la variété des choix des enseignants sur une même tâche en lien avec la hiérarchisation de l'usage de l'instrument et des propriétés ont été observés aussi en sixième à propos d'une même tâche, mais c'était, cette fois, l'enseignant exerçant dans l'établissement le plus favorisé qui avait fait les choix les moins cohérents du point de vue mathématique (Abboud-Blanchard et al., 2012).

Conclusion sur la prise en charge des enjeux langagiers liés à la symétrie orthogonale en tant qu'objets d'apprentissage et d'enseignement

Même si ces études restent très limitées au regard des questions, j'émets l'hypothèse que les pratiques langagières associées aux différents aspects logiques de la symétrie ne font pas l'objet d'une prise en charge très consciente, raisonnée et systématique dans l'enseignement. En effet, d'une part, elles apparaissent peu organisées dans les pratiques langagières des manuels et des enseignants, d'autre part, elles ne semblent pas faire l'objet d'une attention particulière en tant qu'objet d'apprentissage, au-delà de leur simple « monstration » par l'usage qui en est fait.

Toutefois, il faut rester prudent. L'étude de quelques séances, en particulier situées au début des séquences, ne permet pas de présager de l'évolution au cours de la séquence[109] : par exemple, certains enseignants n'ont peut-être simplement pas souhaité en faire l'enjeu de ces premières séances. Cela amène néanmoins justement à questionner le fait que les enjeux autour des pratiques langagières soient éventuellement « déconnectés » de l'activité mathématique qu'elles peuvent soutenir. Ainsi, comme on a pu le voir chez Maryse, des moments spécifiques sont consacrés à un travail sur le langage (qu'il s'agisse de mentions « méta » sur le vocabulaire, d'exercices consacrés à faire des phrases utilisant le nouveau vocabulaire ou de la rédaction des réponses à l'écrit), mais ce dont ces moments font l'objet n'est pas systématiquement mobilisé au moment de l'activité mathématique associée. Notamment, l'écart entre oral et écrit constaté dans plusieurs des études menées questionne : même je fais l'hypothèse qu'il est représentatif de pratiques expertes, qu'en est-il de ses conséquences dans l'apprentissage ?

Par ailleurs, on note tout de même des différences entre enseignants, à la fois dans leurs discours, dans les modalités de la prise en charge de ces enjeux en tant qu'objets d'apprentissage – notamment du lien entre le dire et le faire, le dire soutenant plus ou moins le faire –, et dans le lien plus ou moins fort avec l'activité déployée *par les élèves*.

Trois questions me semblent émerger de ces études.

Tout d'abord, comme déjà signalé, celle de la représentativité des observations. En effet, les études ne portent que sur un nombre limité de séances. Par ailleurs, il faut noter que le fait que les enseignants considérés aient accepté de faire partie d'un projet de recherche, voire de groupes IREM, induit un biais dans les observations. Cependant, l'étude des manuels, considérés comme relativement représentatifs de ce que l'on peut observer dans les classes, si elle ne donne pas accès à la dimension orale, permet de penser que les observations réalisées sont probablement généralisables, au moins dans une certaine mesure.

La deuxième question concerne les effets de la « relativement faible » prise en charge de ces enjeux et de sa variabilité sur les apprentissages potentiels des élèves. Les seuls éléments dont nous disposons sont le fait que l'étude des productions d'élèves en fin de sixième dans des tests met en évidence des difficultés persistantes pour les élèves à identifier les différents aspects logiques associés à la symétrie orthogonale et encore plus à les formuler. Par ailleurs, même si cela reste un résultat très ponctuel, on peut noter que l'étude plus large concernant l'enseignement de la symétrie dans plusieurs classes en sixième (cf. partie I de la présente note) semble étayer l'hypothèse d'une certaine efficacité des pratiques de Marianne, au regard d'autres (en particulier compte tenu du fait qu'elle exerce en contexte d'éducation prioritaire) et il s'agit de l'enseignante chez laquelle on peut constater la prise en charge parmi les plus avancées de ces enjeux.

Enfin, la troisième question concerne les facteurs responsables de cette « relativement faible » prise en charge et de ces différences, en particulier concernant la composante personnelle des enseignants et la composante sociale (notamment le poids du contexte – éducation prioritaire ou milieu ordinaire – mais aussi les élèves singuliers). On peut ainsi faire l'hypothèse que certains enseignants considèrent que l'apprentissage des formes opératoires et prédicatives de la connaissance peuvent/doivent être, dans une certaine mesure, séparés. Par exemple, Antoine et

[109] En général, une dizaine voire une douzaine de séances sont consacrées à la symétrie orthogonale en sixième.

Fabien n'auraient tout simplement pas souhaité faire de l'enjeu de maîtrise des formes langagières associées à la symétrie l'enjeu de la première séance. L'étude de l'évolution de ces formes langagières au cours du chapitre, qui n'a pas été faite, pourrait permettre de recueillir des éléments quant à ces hypothèses. L'investigation des pratiques enseignantes pourrait aussi s'appuyer sur des entretiens avec les enseignants : certaines données ont été récemment recueillies dans ce sens mais n'ont pas encore fait l'objet d'analyses. Par ailleurs, le fait de retrouver des caractéristiques des déroulements qui évoquent l'influence du contexte d'éducation prioritaire dans lequel certains enseignants exercent (qu'il s'agisse chez David du rabattement de l'activité sur l'action au détriment du travail langagier – et du rabattement des objectifs d'apprentissage associés – ou, chez Louis, de la centration très importante sur le langage verbal, mais au risque d'un brouillage des objectifs d'apprentissage) repose la question de l'effet du contexte sur ces pratiques, à la fois du point de vue de la composante personnelle et de la composante sociale (par l'effet des élèves eux-mêmes) – voir la partie I de cette note. On retrouve ainsi le constat que les formulations sont moins à la charge des élèves en éducation prioritaire, mais la question reste de savoir si cela relève d'un choix a priori ou d'une adaptation de fait, éventuellement difficile à éviter ; notons que l'on observe tout de même que les productions langagières des élèves sont parfois très éloignées des attendus.

Toutefois, mes observations, surtout mises en rapport avec d'autres, invitent essentiellement à émettre l'hypothèse que ces enjeux ne sont pas clairement identifiés par les enseignants comme des enjeux d'apprentissage à prendre en charge spécifiquement : ils restent ainsi *invisibles* pour les enseignants (Bautier et al., 2011) et sont donc *transparents* dans les séances (Margolinas et Laparra, op. cité). Ce qui, au demeurant, renforce probablement leur caractère différenciateur par la favorisation de *malentendus* – à la fois au sens faible (courant) et au sens fort (donné par les sociologues). Mais notons que cette « invisibilité » des pratiques langagières mathématiques ainsi que de certains aspects logiques ou autres enjeux qui sont « cachés » dans le langage verbal est partagée, au-delà des enseignants de mathématiques, par les communautés mathématiques (de référence) et didactique (Vergnaud 2001 et, pour les aspects logiques, Durand-Guerrier 2013 et Mesnil 2016).

Enfin, en étendant l'usage du mot fait par Bautier mais en reprenant l'idée sous-jacente, on peut questionner ce qui apparaît comme une *invisibilité* pour au moins certains enseignants du *rôle* du langage dans l'apprentissage et l'enseignement (des mathématiques).

Ces études montrent l'intérêt de questionner davantage la manière dont les enseignants prennent en charge en classe des caractéristiques linguistiques du langage mobilisé dans l'activité mathématique, à la fois par la prise en compte explicite et par ce que leur propre langage donne à voir ou, au contraire, rend « opaque ».

Par ailleurs, la question des effets reste entière, de même que celle des déterminants, même si l'hypothèse d'une « invisibilité » globale des enjeux langagiers est avancée. Notons que ces constats sont peut-être renforcés par le fait de s'intéresser aux aspects logiques, eux-mêmes connus pour être peu pris en charge explicitement (cf. supra), ce qui justifierait de s'intéresser à d'autres enjeux pour questionner le caractère généralisable de ce phénomène didactique.

La prise en charge d'*autres enjeux langagiers* dans les classes de mathématiques

Je propose dans cette partie de synthétiser quelques résultats qui portent sur des enjeux langagiers qui dépassent le contexte d'une notion mathématique donnée, même si la plupart des études mentionnées ici portent à nouveau sur le thème de la symétrie orthogonale.

Je reviens ici sur les enjeux liés à la construction et la définition du symétrique d'un point en sixième (cf. partie I) pour questionner davantage la dimension langagière de ces enjeux et sa prise en compte dans les classes.

Enjeux liés à la construction du symétrique d'un point : distinguer définition, programme de construction et tracé

Élaborer un programme de construction du symétrique d'un point par rapport à une droite (basé sur la construction d'une perpendiculaire et le report de longueur) à partir de sa définition constitue un « problème de construction géométrique » au sens mathématique du terme, qui renvoie à la notion de constructibilité (Cf. Chevallard et Jullien, 1990-1991), en tout cas en sixième. En effet, le caractère 'non opératoire' de la définition (car elle suppose la figure construite) suppose des « changements de point de vue » (Robert, 2008a) qui constituent des adaptations (cf. supra) en sixième (par exemple le passage du fait que la droite coupe le segment en son milieu au fait que la distance du point à la droite doit être reportée) (cf. Chesnais 2009b pour davantage de détails). J'ai mentionné précédemment comment ce « problème » est pris en charge de manière différente dans des classes : pris en charge comme un problème mathématique (éventuellement même dévolu aux élèves) ou présenté comme une « méthode de construction » à appliquer, plus ou moins liée aux propriétés qui définissent l'objet et plus ou moins 'rabattue' sur le problème matériel associé (Chevallard et Jullien, ibid.) concernant la réalisation effective du tracé.

Ce qui m'intéresse ici est la question des pratiques langagières associées. J'ai ainsi distingué (Chesnais, 2014a) l'énoncé de la « définition », qui caractérise l'objet par ses propriétés, l'énoncé du « programme de construction » (la trace d'une solution au problème de construction, qui s'appuie lui aussi sur des propriétés et un usage codifié de la mention des instruments de géométrie[110]), et la « suite d'instructions matérielles » correspondante, réponse au problème technique de réalisation matérielle du tracé.

Notons que Gobert (2014) a travaillé également sur la construction du symétrique d'un point en sixième en se centrant sur les questions langagières et en mobilisant le cadre théorique des « communautés discursives » (Bernié, 2002, Rebière, 2013). Elle parle quant à elle de « niveaux de description différents »[111]. Cela me semble 'écraser' en quelque sorte la 'valence mathématique' différente de ces discours et je préfère considérer qu'ils constituent des *objets* différents, du point de vue mathématique[112].

Je ne reproduis ici que les résultats obtenus quant à la prise en charge de ces différents objets dans des classes de sixième (cf. partie I pour la présentation du corpus) et renvoie le lecteur à Chesnais (2014a) pour davantage de détails. Si j'ai déjà mentionné dans la partie I les différences dans la prise

---

[110] Par exemple, la mention de la règle est théoriquement la règle non graduée, associée au tracé des droites et segments, celle du compas au tracé des cercles ou au report de longueur. Il s'agit d'instruments « théoriques », comme dans la question des constructions à la règle et au compas de la géométrie euclidienne. Marie-Jeanne Perrin-Glorian explore ainsi le rôle potentiel de la 'codification' de l'usage des instruments dans l'apprentissage de la géométrie, notamment dans le cadre des situations de restauration de figure (Perrin-Glorian, Mathé et Leclercq 2013, Perrin-Glorian et Godin 2017, ou encore Chesnais, Durand-Guerrier et Perrin-Glorian, à paraître).

[111] Elle les qualifie de « théorique, technologique et technique » mais en précisant qu'il ne s'agit pas d'une référence à des niveaux praxéologiques au sens de la TAD.

[112] J'ai considéré, pour ma part, qu'ils relèvent de plans « matériels, procéduraux et théoriques » (Chesnais, 2014a) de l'activité mathématique, mais sans référence théorique précise non plus.

en charge du rapport entre la définition et la construction, notamment dans les scénarios, il s'agit ici de questionner, dans les déroulements, les aspects langagiers associés. En effet, ces différents discours se distinguent non seulement par leur valence mathématique, mais aussi par leurs caractéristiques du point de vue linguistique. Sans faire une étude systématique, notons que, par exemple, la définition ne fait mention que de propriétés et mobilise la « langue mathématique », articulant notamment « langue naturelle » et « langue symbolique » (Laborde, 1982), dans des pratiques typiques de la géométrie (notamment l'apposition des noms des objets dans les phrases, comme dans l'expression « le point A », cf. Laborde, ibid.). Le programme de construction utilise aussi la langue mathématique, mais peut inclure la mention d'instruments (comme dans l'expression « reporter la longueur au compas »). Quant aux potentielles listes d'instructions matérielles associées, elles visent la description de l'action et peuvent inclure des éléments qui relèvent davantage d'usages courants de la langue naturelle comme « faire glisser l'équerre ».

Si ces différents discours n'ont pas le même statut, du point de vue des mathématiques, les derniers n'ayant d'ailleurs pas de réelle existence dans les pratiques de référence, excepté dans des contextes très particuliers comme la géométrographie (Chevallard et Jullien, op. cité), on peut questionner leur rôle dans le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques et en particulier dans les classes, notamment en sixième, classe qui constitue un moment de charnière entre une « géométrie des tracés/instrumentée » et une « géométrie théorique »[113].

Les résultats obtenus montrent des différences entre les classes, lors du travail sur la construction du symétrique d'un point. Ainsi, le travail langagier autour de la construction est variable, tant du point de vue du contenu que de la part qui lui est accordée, en particulier dans les tâches proposées aux élèves. Le moment d'élaboration du programme de construction est ainsi plus ou moins associé à des discours relevant de la construction mathématique (construire la perpendiculaire à la droite d passant par A) ou de la réalisation matérielle du tracé (placer l'équerre sur la droite et la faire glisser pour que l'autre côté de l'angle droit passe par A). Or cela semble à mon sens porteur de « brouillages » potentiels, voire, de ce fait, de malentendus : « droite » désigne ici un trait et « angle droit » le coin droit de l'équerre.

Le travail de formulation du programme de construction à partir de la définition est donc plus ou moins explicitement présent et plus ou moins assimilé ou au contraire distingué ou encore articulé avec la suite d'instructions matérielles. Ainsi, par exemple, les trois discours « vivent » plus ou moins et sont articulés différemment dans les classes (Chesnais, 2014a). Pour ne donner que quelques exemples, la construction est élaborée collectivement dans la classe de Sébastien, avec des échanges exclusivement sur le plan matériel, l'enjeu étant la précision du vocabulaire (par exemple pour dire « faire glisser l'équerre le long de la droite »), puis le lien avec les propriétés est fait après coup (avec l'écriture de la définition), mais les échanges montrent que ce lien n'est pas fait par tous les élèves. Chez Martine, l'élaboration de la construction à partir de la définition est une tâche proposée aux élèves et les échanges portent sur l'aspect matériel et sur les propriétés (la définition), en faisant le lien entre les deux dans le but d'élaborer le programme de construction. Dans les classes de Marianne et Maryse, l'enjeu est plutôt la réalisation du tracé à partir du programme de construction, avec un lien entre le programme et l'utilisation des instruments (par exemple, comment placer l'équerre si on doit construire la perpendiculaire à une droite passant par un point), le lien avec la

[113] Je ne rentre pas ici dans un débat autour des différentes modélisations de cette bascule, il s'agit juste de dire que le statut des instruments (et donc des constructions) évolue.

définition n'étant fait que par Marianne. Quant aux classes de Maurice et Denis I, la construction est présentée comme *illustration* de la définition, l'enseignant montrant la procédure au tableau, les élèves n'ayant qu'à reproduire, les échanges portant essentiellement sur les aspects matériels sans lien avec les propriétés (« Denis : je pose l'équerre, je mets les pointillés, qu'est-ce que je fais ensuite ? […] On le met sur l'angle droit, ouais, et après ? […] On le met de l'autre côté. »).

Un autre enjeu lié à certains aspects des pratiques langagières mathématiques : la transparence de la quantification dans le langage

Revenons maintenant sur l'analyse détaillée d'un épisode dans l'étude concernant Matthieu, dont j'étudie la mise en œuvre de la même séquence sur les angles, issue d'une ressource « didactique », deux années de suite, dans un établissement relevant de l'éducation prioritaire puis dans un établissement ordinaire (cf. partie I et Chesnais, à paraître).

Je propose de revenir ici sur des enjeux langagiers qui interviennent dans la tâche de calcul des mesures des angles du triangle équilatéral à partir de la mesure de l'angle droit (cf. partie I). Rappelons qu'elle doit s'appuyer sur les deux propriétés d'égalité entre eux des trois angles d'un triangle équilatéral donné et de l'égalité des angles de tous les triangles équilatéraux. Comme je l'avais signalé, ces propriétés sont élémentaires pour le mathématicien et on peut même considérer qu'elles relèvent de la définition du triangle équilatéral en tant que figure, mais, pour un élève de sixième, le triangle équilatéral n'est encore défini qu'en référence au dessin (et non à la figure comme classe d'équivalence de ces dessins ou au moins comme représentant générique de ces figures semblables) et en général uniquement par rapport à l'égalité des longueurs des côtés. L'une des conséquence est qu'évoquer LE triangle équilatéral n'a pas de sens, ou plutôt, l'article défini ne peut renvoyer qu'à son usage déictique (spécifique), c'est-à-dire pour désigner un triangle équilatéral donné (par exemple *celui qu'on a dessiné au tableau*). On retrouve ici la difficulté représentée par le double sens de l'article défini, d'un côté de quantificateur universel (usage générique), de l'autre déictique et spécifique, pointée par Vergnaud (2001, p. 295). Tant que la figure « n'existe pas », il faut évoquer « tous les triangles équilatéraux » ou « chaque triangle équilatéral » ; par ailleurs, l'article défini ne pourra renvoyer qu'à son usage en tant que déictique. Notons en outre que la formulation des deux propriétés précitées n'est pas simple à un niveau élémentaire, car la formulation « tous les triangles équilatéraux ont leurs angles égaux[114] », par exemple, peut renvoyer à l'une ou à l'autre, ne permettant pas de distinguer la quantification sur les angles d'un triangle équilatéral ou sur l'ensemble des triangles équilatéraux. A l'inverse, une fois que le triangle équilatéral est défini en tant que figure, l'une des propriétés est équivalente à l'autre.

Or l'analyse des déroulements, dans la classe de Matthieu, montre que le rôle de ces propriétés dans le raisonnement attendu et, de fait, l'existence du triangle équilatéral en tant que figure, restent transparents pour l'enseignant : non seulement il ne pointe pas explicitement ces propriétés lors de l'élaboration du raisonnement, mais de plus leur validité est parfois vérifiée *après* l'élaboration du raisonnement, comme si elles n'intervenaient pas dans celui-ci. En outre, lors des phases collectives, les formulations de l'enseignant alternent de façon apparemment aléatoire entre « les triangles équilatéraux » et « le triangle équilatéral », témoignant que, pour lui, il y a équivalence entre les deux expressions.

[114] L'ajout de « entre eux » ou « deux à deux » ne réduit pas l'ambiguïté.

Plusieurs échanges témoignent du malentendu que cela engendre pour certains élèves, montrant qu'ils raisonnent sur les pièces (de la boite[115]) et non sur la figure générique, ne pouvant donc comprendre le raisonnement.

Voici un exemple, dans la classe 1, au moment de la formulation collective de la réponse que les élèves recopieront ensuite sur leur cahier, qui met en évidence le malentendu et montre que l'enseignant ne semble pas identifier la difficulté des élèves. Le malentendu ne semble pas réellement levé à la fin de la phase.

1 P si je rejoins les angles, les angles de de, quels angles ?[…]
2 E de 60°
3 P chacun fait 60, mais c'est les angles de quelle(s) pièce(s)[116] ?
4 E triangle équilatéral
5 P ((écrit au tableau)) si on rejoint trois angles
6 E les trois angles de chaque triangle, un angle de chaque triangle
7 E de chaque triangle
8 P de quel(s)[117] triangle(s) ? De n'importe quel(s) triangle(s) ? […]
9 E les 3 là, un de chaque.
10 P oui, mais de quel(s)- c'est les 3 mêmes ou c'est pas les trois mêmes ?
11 E ben ils sont pareils.
12 P ((écrit au tableau)) oui. Si on rejoint 3 angles de triangles équilatéraux (classe 1, séance 2)

Le quiproquo est flagrant aux tours de parole 8-9 où l'enseignant, lorsqu'il demande « quel triangle » attend la réponse « équilatéral » alors que l'élève l'entend comme « quelles pièces » au sens des objets matériels. Le malentendu n'est pas réellement levé, l'enseignant « renonçant » et formulant une autre question, qui résout théoriquement le problème en donnant l'argument manquant, mais de façon probablement incompréhensible pour certains élèves car trop implicite.

Ainsi, ces éléments restent transparents pour l'enseignant et invisibles aux élèves car en quelque sorte « cachés dans le langage » derrière, notamment, la polysémie des articles. Je fais l'hypothèse que la naturalisation de la notion de triangle équilatéral en tant que figure est responsable de cette transparence dans le langage employé.

Cela étaye à nouveau l'hypothèse d'invisibilité pour les enseignants d'enjeux mathématiques cachés dans le langage (cf. supra), qui ne concernent pas uniquement la question des relations logiques, mais qui sont à nouveau liés à des enjeux de logique mathématique, cette fois autour de la quantification (rejoignant les constats faits par Durand-Guerrier 2013 et Mesnil 2016).

Enjeux liés à la définition du symétrique d'un point et à son statut en mathématiques

L'étude des épisodes d'élaboration de la définition du symétrique d'un point dans les classes de sixième (Chesnais 2009b, 2013, 2014a) permet de mettre en évidence d'autres phénomènes liés au rôle du langage dans la classe de mathématiques.

L'enjeu de cette élaboration est encore une fois multiple : il s'agit d'une part d'établir cette définition et notamment la nécessité des *deux conditions* – liées à la perpendicularité et à l'équidistance[118] ;

[115] Ce qui pose encore un autre problème, à relier au paragraphe précédent, puisque l'ambiguïté ne porte pas seulement sur la confusion entre dessin et figure, mais inclut aussi les objets matériels que représentent les faces de la boite découpées dans du papier et aimantées au tableau.
[116] Il est par exemple impossible de savoir ici si l'enseignant parle au singulier en se référant au triangle équilatéral générique ou à toutes les pièces qui ont cette forme.
[117] On peut penser ici que l'enseignant parle au singulier, renvoyant au type de triangle, mais ce n'est manifestement pas explicite pour les élèves.

d'autre part, du point de vue mathématique et, de ce fait, dans un scénario d'enseignement en sixième, l'enjeu peut également être lié à la justification de la construction (cf. supra), dans une logique d'entrée dans une géométrie plus théorique. Mais elle constitue également un enjeu en soi, lié à cette entrée dans la géométrie théorique où les objets sont *définis par des énoncés*. Autrement dit, un enjeu lié à la notion même de définition en mathématiques et à sa fonction, enjeu fondamental du point de vue épistémologique. Or cela inclut, comme l'enjeu de construction mais peut-être encore davantage, des éléments liés aux pratiques langagières en mathématiques. En effet, la formulation d'une définition obéit à des contraintes mathématiques (les conditions énoncées doivent constituer des propriétés caractéristiques de l'objet), mais aussi à des contraintes liées à la forme langagière. Au-delà même de ces considérations sur les formes langagières, un enjeu lié à la fois aux pratiques langagières et aux enjeux épistémologiques est de distinguer la définition au sens des mathématiques de la définition au sens commun : il ne s'agit pas (seulement) de définir un mot mais de le caractériser par des propriétés pour ensuite pouvoir se servir de ces propriétés dans un raisonnement[119].

Comme pour la construction, ces enjeux sont plus ou moins présents dans les scénarios et déroulements étudiés (Chesnais, 2014a), mais je voudrais ici détailler d'autres résultats liés à l'étude fine de la phase de formulation de la définition dans les classes.

Par exemple, une manière assez partagée de procéder en sixième à propos du symétrique d'un point (comme à propos de l'établissement de nombre de propriétés et théorèmes géométriques, cf. Chesnais et Munier 2016) consiste à faire constater les propriétés sur un (ou quelques) cas particulier(s), souvent obtenus par pliage ou par un logiciel, éventuellement à les faire valider de façon instrumentée puis à les généraliser et les admettre comme étant caractéristiques de l'objet. Ce processus contient donc, du point de vue langagier, un enjeu de formulation des propriétés mobilisant correctement la langue mathématique, en particulier le vocabulaire et le codage des objets[120] (Laborde, Ibid.), mais aussi des formes syntaxiques indiquant la production d'un énoncé *général* à partir d'un énoncé portant sur des cas particuliers (ou encore des formes syntaxiques spécifiques – comme « on dit que », « est défini par », ou « si » etc. – mais je ne me suis pas intéressée ici à cet aspect).

Ce qui m'a semblé intéressant a trait aux phénomènes qui se produisent lorsque ces enjeux sont au moins en partie laissés à la charge des élèves et la manière dont les énoncés vont être co-construits par les élèves et l'enseignant (toujours évidemment dans l'optique d'identifier des éléments susceptibles d'avoir un effet sur les apprentissages des élèves). C'est notamment l'occasion de s'intéresser à la manière dont, lorsqu'une part de la tâche est proposée aux élèves (soit individuellement, soit collectivement), l'enseignant étaie cette élaboration d'énoncés.

---

[118] Qui peuvent être réunies par la mobilisation de la notion de médiatrice, si elle a été traitée avant (Chesnais, 2009a, 2009b).

[119] Je ne rentre pas plus loin dans le débat concernant les enjeux épistémologiques autour de la définition en mathématiques, dont le travail de Cécile Ouvrier-Buffet (2015a) offre une synthèse très complète mais qui dépasse le cadre de ce travail.

[120] Ce n'est pas spécifique de l'élaboration d'une définition, mais de tous les moments d'élaboration d'un énoncé mathématique.

Les obstacles à la formulation d'une définition, en particulier en éducation prioritaire

Par exemple, revenons sur l'épisode de l'élaboration de la définition du symétrique d'un point dans la classe de Denis II[121]. L'analyse fine des déroulements (détaillée dans Chesnais 2009 b, reprise dans Chesnais, Horoks, Robert et Rogalski, soumis) montre que, lors de la phase collective qui suit le travail individuel sur la tâche visant l'élaboration de cette définition[122], même si Denis ne laisse que peu à la charge des élèves dans l'élaboration de la définition, il se heurte à des difficultés des élèves qui semblent le faire « renoncer » et prendre cette élaboration à sa charge. Ainsi, si Denis parvient relativement facilement à « faire dire » aux élèves que les droites doivent être perpendiculaires, la formulation de la propriété d'équidistance (qui peut s'exprimer soit en termes d'égalité de longueurs, soit en termes de milieu) est plus problématique : d'une part peu d'élèves font des propositions, d'autre part, celles-ci sont « très loin » de ce qui est visé, les élèves proposant « ils se ressemblent », proposition qui est précisée à la demande de Denis et s'avère référer à des points, puis « ils sont pareils », toujours à propos des points puis des « figures », ce que Denis, par un effet Jourdain (Brousseau, 1986) attribue aux segments avant d'obtenir la réponse « égaux » en demandant ce que signifie « pareil pour des segments » ; la question suivante visant à aboutir à l'idée de milieu n'amène les élèves qu'à mentionner la nécessité de « coder » la figure (dans le sens de mettre des marques indiquant l'égalité des longueurs des segments), ce que Denis reformule lui-même par la présence d'un « milieu ». Ces échanges durent tout de même un certain temps durant lesquels la perplexité des élèves sur les attentes de l'enseignant est palpable et, même si l'on peut supposer qu'il est possible que les choses auraient pu se dérouler autrement, il n'en reste pas moins la question des conditions et du coût, cet exemple montrant bien que les élèves « partent de très loin » de ce qui est attendu.

On peut alors s'interroger sur les alternatives à ce moment pour Denis, même si, probablement, cette situation résulte de choix antérieurs : est-il possible (et souhaitable ?) pour Denis de « ne pas renoncer » à faire formuler aux élèves la propriété ? De quelles ressources doit-il disposer pour le mener à bien ? Quel coût cela représente-t-il (en temps, mais aussi peut-être en risque en termes de paix scolaire) ?

La complexité de la formulation de propriétés pour les élèves

L'étude du même épisode dans la classe de Martine, qui laisse une large part de l'enjeu de formulation aux élèves (individuellement Martine a laissé à plusieurs reprises quelques minutes aux élèves pour *écrire* les propriétés que doivent vérifier *un* point A et un point A' pour être symétriques par rapport à une droite d, puis la formulation a ensuite été élaborée « collectivement », c'est-à-dire qu'une part non négligeable de la formulation est restée à la charge de la classe (même si seuls quelques élèves y ont activement participé).

L'analyse de l'épisode montre combien cette élaboration est complexe pour les élèves, à tous les niveaux et nécessite beaucoup de temps et de nombreux échanges, passages à l'écrit et reformulations successives. L'identification même de l'enjeu de savoir (la définition du symétrique

[121] Rappelons qu'il s'agit d'un des épisodes pour lesquels les caractéristiques des déroulements chez Denis II sont les plus proches de celles observées chez Denis I et les plus éloignées de celles de Martine et qu'il s'agit en outre d'un des éléments de savoir pour lequel les apprentissages restent très différenciés entre les élèves de Martine et Denis II (cf. Chesnais, 2009a, 2009b, 2012b, partie I).

[122] Un cas particulier a été obtenu par pliage à partir d'un point A et d'une droite d : la droite (AA') a été tracée et les propriétés de perpendicularité et équidistance ont été « constatées » dans ce cas-là. Il s'agira ensuite d'étendre au cas d'un point A quelconque (en distinguant les cas où le point A appartient à la droite ou non).

d'un point, voire la notion même de définition d'un objet mathématique) n'est manifestement pas évidente.

Du point de vue de la formulation des propriétés elles-mêmes, avec un vocabulaire adéquat (notamment en utilisant les mots *perpendiculaire* et *milieu*, qui sont normalement largement connus des élèves de sixième), on observe que la perpendicularité est assez facilement formulée par les élèves, mais la propriété liée au milieu pose problème (comme dans la classe de Denis) : le changement de point de vue entre *égale distance* et *milieu* n'est pas évident à négocier langagièrement pour les élèves qui, de plus, ne disposent souvent pas en sixième de la notion de *distance d'un point à une droite*. On peut considérer, à l'instar de Gobert (2014) que la difficulté se trouve dans la nécessité, pour changer de point de vue, de *changer de sujet*, y compris au sens grammatical du terme : passer d'une considération sur les points A et A' à une considération sur le segment [AA']. Voici l'extrait concerné dans la classe de Martine, au moment où, après plusieurs tentatives infructueuses, elle interroge le meilleur élève de la classe :

Martine : Paul ?
Paul : il faut que A et A' soient / enfin que A soit / admettons à 2 cm de d et que A', il faut qu'il soit à la même distance
Martine : à la même distance, alors on a donné un nom au point d'intersection entre d et AA', on l'a appelé I, je l'avais dit, AI égal A'I . On peut dire aussi que la droite d coupe ?
E : A
Martine : AA'
E : en son milieu
Martine : en son milieu, en son milieu.
Notons que cela devra à nouveau être repris quelques minutes plus tard, lors de l'élaboration de la trace écrite dans le cahier de leçons.

On voit dans cet échange que, même pour le meilleur élève de la classe, la formulation en termes de milieu n'est pas disponible (le changement de point de vue et de sujet associé est manifestement insurmontable) et, par ailleurs, la formulation en termes de distance égale n'est disponible que sous la forme d'un exemple générique (Butlen et Pézard, 2003). L'élaboration de la formulation est ainsi très fortement étayée par Martine pour aboutir à la formulation en termes de milieu.

La complexité de la généralisation

Comme dernier point, cet exemple permet aussi de montrer des différences dans la prise en charge de l'enjeu de production de l'énoncé général (quantifié universellement) à partir de l'énoncé portant sur un (ou des) cas particuliers. Notons que cela correspond à un élément souvent invisible dans les tâches qui visent l'élaboration d'une définition ou d'une propriété au collège en géométrie, à savoir la *généralisation* des observations[123].

Ainsi, dans la classe de Denis II, la généralisation du cas particulier obtenu par pliage au cas général d'un point et une droite quelconques est complètement prise en charge par le fait que les points et droites du cas particulier sont désignés par les *mêmes lettres* que les objets de la définition : l'expression « le point A », par exemple, passe ainsi du statut de désignant le point A du cas

[123] Ce que j'ai appelé ailleurs le « deuxième niveau de conjecture » (Chesnais et Munier, 2016) avec l'idée que, lorsque l'on fait conjecturer une propriété aux élèves à partir d'un dessin, un premier niveau consiste à conjecturer que ce qu'on observe pour le dessin est vrai pour la figure (qui suppose notamment un traitement des incertitudes de mesure), le deuxième niveau étant de conjecturer que ce qu'on observe pour un ou quelques cas est vrai dans d'une manière générale.

particulier au point A générique de la définition : la généralisation est ainsi « cachée » dans la polysémie de l'article défini (passant de sa fonction déictique à sa fonction de quantification universelle, cf. supra).

Dans la classe de Martine, où les noms sont également les mêmes entre le cas particulier et la définition, on observe que la généralisation est essentiellement prise en charge par Martine, mais qu'elle est *visible* dans le passage de déterminants définis à l'emploi de déterminants indéfinis (en mentionnant « un point », « une droite » ou « deux points » comme dans l'exemple ci-dessous)

Martine : Après ce que vous avez observé, on dira que deux points A et A' sont symétriques par rapport à une droite d, dans quel type de situations ?

Toutefois, si cela apparaît pour le chercheur, on peut douter que ce soit effectivement visible pour les élèves, même si certains, dans l'expression « deux points A », peuvent peut-être 'entendre' qu'il s'agit de points 'plus généraux' ou génériques, que ceux qui sont visibles au tableau ou sur leur feuille.

Ce qui m'intéresse dans cet épisode (et d'autres), lorsque les enseignants laissent effectivement une part du travail de formulation (notamment d'une définition) à la charge des élèves est la nécessité d'un étayage fort de la part de l'enseignant. Cela semble confirmer la *complexité du dire*, au-delà de celle du faire (Vergnaud, op. cité).

Par ailleurs, on note une apparente 'faiblesse' de la prise en charge de ces enjeux par les enseignants, à la fois en termes de scénario (la formulation de la définition étant rarement motivée au-delà de la nécessité d'écrire quelque chose dans la leçon) et en termes de déroulement. On retrouve là encore une hypothèse d'invisibilité – au sens un peu élargi mentionné précédemment – de certains enjeux pour les enseignants[124] ainsi que l'invisibilité de certaines connaissances et difficultés des élèves concernant la production d'énoncés.

Conclusion sur la prise en charge dans les classes d'enjeux liés aux pratiques langagières mathématiques

Les questions qui émergent concernent trois points qui semblent communs aux différents enjeux liés aux pratiques langagières mathématiques, qu'il s'agisse des enjeux liés aux *formes linguistiques* (lexicales et syntaxiques) – qu'elles soient liées à une notion donnée ou non – ou plus largement des *usages du langage* (Bautier, 2007, cf. infra) propres aux mathématiques.

Le premier point concerne les modalités de la prise en charge par les enseignants des enjeux liés aux pratiques langagières mathématiques, notamment ce qui semble apparaître comme une faible prise en charge, de manière relativement partagée, malgré quelques différences entre enseignants. La question de la portée des résultats présentés ci-dessus, notamment en termes de représentativité, reste posée, qu'il s'agisse de questionner d'autres caractéristiques des pratiques langagières mathématiques (certains aspects des pratiques langagières mathématiques sont-ils plus ou moins bien pris en charge par les enseignants ? ce que l'on constate pour les pratiques langagières associées à la symétrie ou à la mesure[125] est-il représentatif d'autres relations ou notions ? d'autres

[124] Cela rejoint d'une certaine manière le constat d'Ouvrier-Buffet (2015b) concernant la prise en charge de ces enjeux par les enseignants : « Une place reste possible pour la construction de définitions, même si les enseignants parviennent difficilement à la cerner » (p. 9)

[125] Il me semble en effet que l'on pourrait aussi réinterpréter du point de vue langagier la question de la différenciation entre mesure théorique et empirique (avec la polysémie de « mesure ») présentée dans la deuxième partie de cette note.

notions géométriques, voire au-delà ?) ou la fréquence de ces modalités dans les classes (les quelques enseignants observés sont-ils représentatifs de pratiques enseignantes largement partagées, en géométrie ou pour d'autres domaines ? En sixième ? Certains phénomènes sont-ils spécifiques du secondaire ou du primaire ?).

Le deuxième point porte sur les effets de ces phénomènes sur les apprentissages. Ainsi, dans les exemples détaillés ci-dessus on peut s'interroger, d'une part, sur le potentiel d'appropriation par les élèves des propriétés du symétrique d'un point, de la procédure de construction, ou encore de leur formulation (à la fois de la formulation d'un programme de construction, qui peut être considéré comme un objet d'apprentissage en soi, mais aussi de la verbalisation autour des actions matérielles, dont on peut considérer qu'elles jouent potentiellement un rôle dans leur appropriation) ; d'autre part, au-delà de ces enjeux, sur les apprentissages en termes de nature de l'activité mathématique – et, de manière secondaire mais probablement liée, de *nature du travail scolaire*. En effet, je fais l'hypothèse que 'rabattre' l'enjeu de construction d'objets mathématiques avec des instruments sur les aspects matériels, viser la maîtrise de la procédure de construction pour elle-même sans la relier à la définition ou présenter la construction comme une simple « illustration » de la définition dans le cahier de leçon, ne sont pas porteurs d'une même conceptualisation de l'activité mathématique que présenter un programme de construction comme un objet mathématique, solution d'un problème de constructibilité et correspondant à des pratiques langagières spécifiques.

Enfin, on retrouve l'interrogation autour des facteurs responsables de ces caractéristiques des pratiques enseignantes et de leur variabilité : en termes d'effets de contexte (lié à la composante sociale et personnelle) et plus largement de la composante personnelle (ici notamment en lien avec les connaissances des mathématiques voire leur épistémologie, de l'apprentissage des mathématiques et de la conception de la gestion de la classe, plus ou moins pilotée par les enjeux d'apprentissage, et en particulier en lien avec la conception du langage et de son rôle dans l'apprentissage et l'enseignement). Mon hypothèse est toutefois celle d'une « invisibilité » globale des enjeux liés à la plupart des aspects langagiers dans l'apprentissage des mathématiques, à l'exception peut-être de la question du vocabulaire spécifique, mais qui reste prise en charge de façon très limitée. Cela renvoie à des questions sur les ressources dont les enseignants disposent, les alternatives et les conditions de leur viabilité, et pose, de fait, la question de la formation des enseignants (là encore, en termes d'objectifs et de moyens).

Cela amène enfin à élargir le questionnement à la problématique du langage dans les pratiques enseignantes. On retrouve ainsi deux des axes identifiés « naïvement » au début de cette partie, avec différentes catégories de questions : les premières concerneraient le *langage mathématique* et la manière dont les enseignants le prennent en charge en tant qu'*objet d'apprentissage* ; les secondes portent sur le rôle du langage (mathématique ou plus généralement) comme *moyen d'apprentissage.* Je propose de questionner maintenant davantage le rôle du langage dans l'activité des enseignants.

Le rôle du langage dans l'activité des enseignants

Il s'agit ici de s'intéresser au *langage de l'enseignant*, au rôle de l'enseignant dans les interactions didactiques mais, contrairement aux paragraphes précédents, pas nécessairement en lien avec ce qui concerne les pratiques langagières mathématiques.

Cela s'inscrit dans la lignée des recherches sur le rôle du « discours de l'enseignant », question abordée par Aline Robert et ses collaborateurs dès la fin des années 80 et dont on peut retrouver une synthèse dans Chappet-Pariès et Robert (2014). Ces recherches ont trouvé un prolongement plus

récent dans le travail sur les proximités discursives mené avec Fabrice Vandebrouck (Robert et Vandebrouck, 2014), ainsi que dans une tentative (Chesnais, Horoks, Robert et Rogalski, soumis) pour l'inscrire plus largement dans le cadre des recherches anglo-saxonnes sur le « teacher telling »[126].

Il s'agit de poser la question de ce qui peut être pris en charge par le discours de l'enseignant pour *enrichir* l'activité des élèves développée dans la réalisation des tâches qu'on leur propose, mais aussi pour prendre en charge ce qui ne découle pas directement des tâches (cf. partie II).

Je ne citerai ici que quelques exemples ponctuels tirés de différentes études que j'ai menées. Il s'agit de ce que j'ai pu appeler dans Chesnais (2009b) ou Chesnais (2014a) des préoccupations concernant les « apports » des enseignants en particulier dans les phases collectives, notamment en ce qui concerne la structuration des savoirs et l'identification des objets de savoir en jeu (qu'il s'agisse de concepts mathématiques ou plus globalement des règles du jeu mathématique – et du jeu scolaire), dont on sait qu'il s'agit d'éléments particulièrement différenciateurs du fait de la difficulté pour certains élèves de secondariser les tâches scolaires (Bautier et Goigoux, 2004, Perrin-Glorian 1993).

Citons un premier exemple pour clarifier ce qui est en jeu ici : dans la comparaison entre Martine et Denis, ce qu'ils explicitent de la structuration du déroulement du chapitre est différent. Par exemple, au moment de passer de l'action globale de la symétrie sur les figures à l'action de la symétrie sur les points[127], Martine, elle, se réfère à la progression dans le savoir :

Martine : Deuxième paragraphe, on va s'intéresser au symétrique d'un point. Au lieu d'avoir des figures complètes où on se dit celle-là elle est symétrique de l'autre ou pas, on va s'intéresser au symétrique d'un point. Donc ça va être paragraphe 2, symétrique d'un point.

Tandis que Denis se réfère à la progression dans le chapitre (du point de vue de ce que j'aurais envie de qualifier de jeu « purement scolaire », dont la légitimité n'est pas uniquement ancrée dans celle des savoirs) :

Denis : On a fait grand 1, ce matin, maintenant, vous marquez grand 2, image [en écrivant au tableau], grand deux, en chiffres romains, image de figures usuelles par symétrie, on va noter, axiale.

Cependant, la question reste du rôle de ces interventions dans l'enrôlement des élèves : on peut faire l'hypothèse que les choix de Denis sont a priori moins porteurs en termes d'apprentissage car moins portés par la logique des savoirs (« l'univers de savoirs fréquenté n'est pas le même », Rochex et Crinon 2011, cf. partie I), et qu'il pourrait s'agir d'une forme d'adaptation au public de l'éducation prioritaire. Mais cette adaptation est-elle nécessairement négative ou s'agit-il aussi de permettre l'enrôlement des élèves dans le travail en s'inscrivant dans une logique de progression dans le travail qui est « plus proche » de la leur ? On retrouve ici un écho de la question de la ZPD, mais il s'agit non pas d'aspects liés directement aux apprentissages mais plutôt au travail scolaire, apparaissant justement comme non réductibles l'un à l'autre.

Un deuxième exemple concerne cette fois-ci davantage ce que l'enseignant « rajoute » aux activités des élèves pour favoriser leur « transformation en apprentissage », notamment les « proximités » (Robert et Vandebrouck, 2014) qu'il organise – ou pas si l'on pense aux « occasions de proximités

[126] De nombreux travaux anglo-saxons portent sur cette question : je ne citerai que Smith (1996) qui (re)pose la question du rôle du « teacher telling » dans le cadre du basculement de formes « traditionnelles » d'enseignement des mathématiques à des formes promouvant « an active view of learning mathematics », lié aux réformes dans de nombreux pays du monde ; et Baxter and Williams (2010) qui posent le « dilemma of telling » en le reliant à la question de l'étayage (« scaffolding »), au sens de Bruner (1983).

[127] Étape clé du chapitre (Chesnais, 2012a).

manquées » (ibid.) qui peuvent être reconstruites par le chercheur – pour tenter de rapprocher le savoir « déjà-là » et l'activité effective des élèves du savoir visé. La notion de proximité n'était pas à l'époque encore théorisée, mais je m'étais intéressée à des éléments qui me semblent aujourd'hui pouvoir être repris de ce point de vue.

Ainsi, dans la comparaison menée dans (Chesnais, 2014a) de séances concernant la définition et la construction du symétrique d'un point dans les classes de huit enseignants (cf. partie I), je m'étais attachée à repérer la présence, dans le discours des enseignants, de moyens pour les élèves de faciliter l'identification des enjeux des tâches et des savoirs visés. J'ai pu ainsi identifier que, par exemple en ce qui concernait la définition, les pratiques des enseignants se situaient sur un gradient. Ainsi, certains explicitent systématiquement la « question initiale », i. e. celle à laquelle répond le savoir visé : par exemple, avant l'élaboration de la définition, Martine demande aux élèves d'écrire les conditions que doivent remplir un point A et un point A' pour être symétriques par rapport à une droite donnée (cf. supra) ; d'autres (Marianne et Sébastien) explicitent *a posteriori* ce qui a été fait : par exemple, Marianne annonce : « ça, c'est la définition du symétrique d'un point » ; enfin, chez certains enseignants (Denis et Maurice), quelques interventions visent manifestement cette identification mais en restant très elliptiques, comme l'intervention de Denis II qui conclut l'exercice portant sur l'élaboration de la définition du symétrique d'un point par « pour que ça marche, il faut deux conditions », sans expliciter à quoi renvoie « ça marche », ni conditions *de quoi.* De même, l'exemple développé plus haut, concernant la comparaison de l'épisode d'élaboration de la définition du symétrique d'un point dans les classes de Martine et Denis, contient aussi des éléments susceptibles d'être interprétés en termes de différence de proximités organisées par les enseignants (concernant les discours qu'ils portent sur les règles du jeu géométrique notamment), comme proposé dans Chesnais, Horoks, Robert et Rogalski (soumis).

L'intérêt d'une entrée par le langage sur ces questions est de permettre, il me semble, d'aborder la question des logiques d'action sous-jacentes au discours des enseignants. On retrouve là aussi une tentative pour prendre en considération, au-delà de l'idée d'adaptation, la dimension sociale, voire historico-culturelle du processus d'enseignement-apprentissage (cf. partie II et Schnewly 2008, Radford 2011).

Conclusions provisoires

Ces exemples mettent en évidence le fait que les questions liées au rôle du langage dans le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques sont multiples et complexes, emboîtant plusieurs niveaux et dimensions.

Ce qui ressort des premières études mentionnées ci-dessus consiste essentiellement en des questions, sous forme d'hypothèses.

Une première hypothèse concerne les modalités d'une prise en charge potentiellement porteuse d'un certain nombre d'enjeux liés aux pratiques langagières mathématiques dans la classe. D'une part, il apparaît que ces enjeux sont plus ou moins pris en charge explicitement en tant qu'enjeux d'apprentissage selon les classes. D'autre part, en tant que moyen d'apprentissage, la dialectique entre le faire et le dire semble également plus ou moins organisée et prise en charge.

La principale hypothèse sur les pratiques enseignantes concerne alors l'invisibilité ou transparence des enjeux liés aux pratiques langagières mathématiques et, plus généralement, du rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage.

Ces éléments alimentent enfin des hypothèses quant au lien avec le contexte à la fois du point de vue des effets en termes d'apprentissages et des effets du contexte sur les pratiques enseignantes, ainsi que concernant la formation des enseignants, mais j'y reviendrai plus loin.

Problématiser les questions liées au rôle du langage dans le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques

Les exemples montrent la multiplicité des enjeux, des questions et leur complexité. Je propose dans cette partie d'ébaucher une problématisation de certaines de ces questions dans le cadre théorique de mes recherches. Il s'agit en particulier de clarifier pourquoi on peut faire l'hypothèse que certains éléments pointés dans les exemples présentés (notamment certaines caractéristiques des pratiques langagières mathématiques ainsi que certaines variations dans les classes) ne sont pas neutres dans le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques.

Les exemples présentés montrent que s'intéresser au rôle du langage dans le processus d'enseignement-apprentissage suppose de questionner le rapport entre langage et mathématiques, entre langage et conceptualisation des mathématiques, et enfin entre langage et enseignement des mathématiques, chaque problématique incluant la précédente mais ne s'y réduisant pas. Cela nécessite en outre de s'intéresser au langage en tant qu'outil pour le chercheur, comme trace de l'activité des élèves et des enseignants.

Je propose, après avoir situé globalement mon approche dans le panorama des recherches françaises et anglophones sur le sujet, de présenter successivement des éléments liés aux deux premières de ces problématiques en précisant quelques outils méthodologiques ; la troisième sera abordée dans la conclusion, comme piste de recherche. Quant à la quatrième, étant d'un autre ordre et, en quelque sorte, transversale, elle ne sera pas abordée à part mais évoquée ponctuellement.

Langage, mathématiques et apprentissage des mathématiques : situer le débat

Tout d'abord, en suivant Vergnaud, il ne s'agit pas de considérer que les mathématiques sont un langage mais qu'elles comportent une dimension langagière, qui présente une certaine spécificité :

> *Les mathématiques sont une connaissance et non pas un langage : même si les mathématiques constituées peuvent être représentées par des textes, des énoncés et des mots, et par des représentations algébriques, graphiques ou autres, ce sont les concepts et les théorèmes qui constituent le contenu des mathématiques, non pas les formes langagières et symboliques qu'ils prennent. (Vergnaud, 1991, p. 79-80).*

Notons qu'en France, dans la communauté de didactique des mathématiques en tous les cas, ce débat (Chevallard, 1980) semble relativement tranché depuis longtemps et les différents cadres théoriques semblent s'accorder sur ce point (Vergnaud 1990, 2001, Bosch et Perrin-Glorian 2013, Duval 1995). Les questions langagières et, plus largement, de sémiotique, sont abordées par la question de la manipulation des ostensifs (Bosch et Chevallard, 2001) ou de registres de représentation sémiotique (Duval, 1995) qui, pour importants qu'ils soient, ne sont considérés que comme les « instruments » et « ingrédients » de l'activité mathématique (Bosch et Chevallard, ibid., p. 95). Si la question du rôle du langage ne se pose pas dans tous les cadres théoriques de la même façon, le langage *verbal* est néanmoins pointé comme jouant un rôle central par Duval (1995) et Vergnaud (1990, 2001, 2007) dans le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques. Toutefois, celui-ci n'a encore fait l'objet que de peu de travaux spécifiques, probablement du fait que les théories françaises, si elles lui reconnaissent un rôle, n'en font pas un objet spécifique (Margolinas 2003, Bosch et Perrin-Glorian 2013).

En revanche, dans le champ de *Mathematics Education*, cette thématique est ancienne et a donné lieu à de nombreux travaux (la première revue importante de travaux sur ce thème, menée par Austin et Howson et publiée dans *Educational Studies in Mathematics* date de 1979 et référence près de 13 pages de bibliographie). Ils y développent déjà la distinction, similaire à celle que j'ai faite un peu naïvement au début de cette partie, entre les préoccupations liées d'une part au langage dans les mathématiques, d'autre part au rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (p. 162). Par ailleurs, ils proposent une structuration du champ, reprise ensuite, notamment dans les thèmes des groupes portant sur le langage au colloque CERME, en termes de « language of the learner », « language of mathematics » et « language of the teacher ». Ils y mettent l'accent sur l'intérêt des apports de la linguistique pour les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. La conférence de Pimm à ICME 10 en 2004 est l'occasion d'une nouvelle revue de travaux, près de 25 ans plus tard, qui évoque surtout l'évolution amenée par l'approche pragmatique en linguistique en termes d' « analyse de discours ». Pimm avait introduit, dans son ouvrage « Speaking mathematically », en 1987, l'idée de « Mathematics as language »[128], qui a évolué plus tard vers le développement de théories s'appuyant sur l'idée renouvelée de mathématiques vues comme un langage, notamment l'approche de Sfard (« discursive approach » : « mathematics as discourse » / « as communication », Sfard 2000, 2001) qui a ravivé au plan international le fameux débat. Celle-ci oppose ainsi les approches « néo-piagétiennes » et les approches « néo-vygotskiennes » en les qualifiant *d'incommensurables* car reposant, selon elle, sur des conceptions différentes des mathématiques, platonicienne d'une part et relativiste d'autre part (Sfard, 2000, p. 297). Par ailleurs, Radford et Barwell (2016) d'une part, et Planas, Morgan et Schütte (2017) d'autre part, ont réalisé plus récemment deux revues de travaux portant sur des problématiques liées au langage respectivement parmi les travaux menés au sein de la communauté de PME et de CERME. Les deux articles concluent à l'enrichissement, la diversification et la complexification dans les dernières décennies des approches et des questions visant à appréhender les différentes dimensions du rôle du langage dans la classe de mathématique (cognitif, psychologique, social, politique ou encore affectif). Ils pointent notamment la prise en considération de la question du savoir mathématique comme construction historico-culturelle et de ses conséquences dans l'étude du processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques. Ils s'accordent en outre sur le fait que la conceptualisation des rapports entre langage et mathématiques ainsi qu'entre langage et apprentissage dans les différentes théories est déterminante du regard porté sur le processus d'enseignement-apprentissage, tout en concluant à un accord général sur l'importance du rôle du langage dans la construction du savoir mathématique. Ce qui ressort est essentiellement une importance croissante accordée à la prise en compte de la dimension sociale et politique du langage dans les recherches, au-delà de la dimension cognitive.

Les travaux français inspirés de la théorie de l'activité (Robert et Rogalski, 2002, 2005, Vandebrouck 2018, Abboud-Blanchard et al, 2017), dans lesquels je m'inscris, proposent un positionnement intermédiaire entre deux types de positions, en présentant notamment l'originalité d'articuler les apports de Piaget et Vygotsky et en considérant que le débat sur l'opposition entre approches « néo-piagétiennes » et « néo-vygotskienne » n'est pas réductible au débat sur la vision platonicienne des objets mathématiques. Notre approche suppose en effet de considérer, en dehors du débat sur l'

[128] Alors qu'Austin et Hawson se positionnaient clairement d'une autre manière « Mathematics is not a language – a means of communication – but an activity and a treasure house of knowledge acquired over many centuries » (ibid., p. 176).

« existence » des objets mathématiques, que les mathématiques sont un construit historico-culturel, « déposé » dans la culture, mais dont l'appropriation par un sujet – la conceptualisation – suppose la construction de ces connaissances en lien avec les situations qui leurs donnent sens (au sens de la théorie des champs conceptuels, Vergnaud, 1991) et qu'intervient dans ce processus la médiation d'outils sémiotiques également marqués par une dimension historico-culturelle – notamment le langage verbal (Rogalski 2006, 2008). Notons qu'il s'agit d'une autre interprétation des travaux de Vygotsky que celle proposée par Sfard[129], la nôtre étant plus proche de celle proposée par Radford, sans pour autant aller aussi loin dans la prise en considération de l'influence de cette dimension sociale, historique et culturelle des savoirs.

Cela n'empêche pas pour autant de cumuler les apports des différents points de vue sur le rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, tout en les réinterprétant parfois dans mon propre cadre. Ainsi, l'un des éléments essentiel sur lesquels tous s'accordent est notamment qu'étudier l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques suppose avant tout de caractériser les pratiques langagières mathématiques, en tant que constitutives de l'activité mathématique.

Caractériser les pratiques langagières mathématiques

Un outil permettant d'appréhender le caractère spécifique des pratiques langagières mathématiques est celui de « communauté discursive » (Jaubert, Rebière et Bernié 2012, Rebière 2013), retenu par de nombreux didacticiens des mathématiques français travaillant sur la question du langage (notamment Coulange 2014, Gobert 2014, Hache 2015, Barrier et al. 2014, ou Bulf, Mathé et Mithalal 2014). En particulier, pour caractériser ces spécificités, je retiens l'idée de « genres seconds de discours », issue des travaux de Bakhtine (Rebière, ibid.).

Les genres premiers de discours, peu élaborés, permettent de gérer, dans l'immédiateté de l'échange, les interactions de la vie quotidienne et ils sont étroitement liés à l'action. Les genres seconds du discours sont en revanche plus complexes. Ils recouvrent des pratiques langagières souvent écrites, mais pas uniquement, qui permettent de gérer les échanges culturels qui supposent la mise à distance de l'action et sa réorganisation, sur le plan langagier, selon des formes reconnues (cf. les pratiques de recherche et les modes de production qui leur sont liés). (Rebière, 2013, p. 229).

Il s'agit donc de caractériser les pratiques mathématiques en tant que « genre second », en vue d'envisager les questions liées à l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques.

Caractériser les pratiques langagières mathématiques en tant que genre second suppose donc de caractériser des « formes linguistiques », c'est-à-dire des aspects lexicaux ou syntaxiques, mais également des « usages de la langue » spécifiques, car ceux-ci jouent, d'après Bautier (2007) un rôle prépondérant dans les apprentissages à l'école :

*[…] les **usages de la langue** sont à distinguer des formes linguistiques (le lexique et la syntaxe). Même s'il existe un lien étroit entre les deux, il est plus important si l'on veut comprendre et intervenir dans la différenciation socio-langagière à l'école, de poser la question en termes de différences d'usages plutôt que de différences de lexique ou de syntaxe. (Bautier, 2007, p. 75)*

Puis, plus loin :

Il s'agit bien de situer la question de la langue à l'école par rapport à son rôle dans les apprentissages, rôle qui ne se réduit malheureusement pas à des difficultés de compréhension des consignes et des textes dues à des faiblesses de lexique ou même de syntaxe, comme c'est le plus souvent dit parce que c'est le plus « évident ». Si ces

[129] La distinction entre ces deux approches s'apparente à la distinction faite par Schneuwly (2008) entre « deux filons de lecture et usage vygotskien » (p. 22).

faiblesses et insuffisances existent, et doivent être corrigées, elles sont loin d'épuiser les origines des difficultés, lesquelles sont davantage liées à la confrontation avec un univers de pensée et de langage peu familier des élèves, comme l'a bien montré B. Lahire. (p. 76)

Ces *usages* spécifiques sont précisément ceux qui font le caractère second des pratiques langagières mathématiques, comme nous le verrons plus loin.

L'essentiel des travaux portant sur le rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans les travaux francophones et anglophones se sont ainsi concentrés plutôt sur les aspects syntaxiques et lexicaux, mais il me semble que certains travaux, en particulier en didactique des mathématiques française, même s'ils ne mettent pas en avant la dimension langagière, peuvent être relus de façon intéressante avec le point de vue *usages du langage* en mathématiques. Notons en outre que cette distinction est moins aisée en anglais, du fait que « language » traduit à la fois « langue » et « langage », ce qui pourrait expliquer que les travaux anglophones sur le langage consacrent une part importante aux questions de multilinguisme, la question de la langue occupant une place centrale.

Les aspects lexicaux et syntaxiques

En ce qui concerne les dimensions linguistiques, il me semble que certains des travaux menés en France concernant la question du rapport entre langage verbal et mathématique (à commencer par le travail pionnier de Laborde en 1982) sont porteurs de préoccupations – et résultats – très similaires à celles et ceux des travaux anglo-saxons. Ils s'accordent notamment tous sur le fait que, si l'activité mathématique peut théoriquement être entièrement exprimée en langage formel, l'utilisation de la langue naturelle dans l'activité mathématique est à la fois nécessaire et porteuse d'ambiguïtés (Austin et Howson 1979, Pimm 1987 et, pour les références françaises, Vergnaud 2001, 2007, Durand-Guerrier 2013, Hache 2015, Mesnil 2016), non seulement du fait de différences voire de conflits entre usages courants et usages dans le cadre des mathématiques mais aussi du fait de sa nature même ; par ailleurs, ils s'accordent sur le fait que l'activité mathématique nécessite d'articuler l'usage de la langue naturelle et d'autres registres de représentation sémiotique, en particulier celui du langage symbolique (Duval, 1995). Laborde (1982), dans son travail pionnier en France dans ce domaine, définit la « langue mathématique », qui résulte de l'interaction de deux « codes » : celui des écritures symboliques et celui de la langue naturelle (le français par exemple) et est, de ce fait, constituée de formulations intégrant des écritures symboliques, des termes lexicaux ayant un sens spécifique en mathématiques et des tournures syntaxiques privilégiées, se distinguant en cela de la « langue courante » (p. 19), ou, pour le dire autrement[130], des *usages* courants (ou encore quotidiens) de la langue naturelle.

On retrouve par ailleurs pointés dans les travaux, qu'il s'agisse de travaux portant sur la langue anglaise ou sur la langue française, de nombreuses spécificités lexicales communes comme l'utilisation d'un vocabulaire spécifique (comme *logarithme* ou *hypoténuse*) ; les usages spécifiques de termes de la langue courante[131] ; la nominalisation de certains adjectifs[132] ou déterminants,

[130] Je ne considère ainsi pas, à la différence de Laborde, que les pratiques langagières mathématiques relèvent d'une « langue » spécifique, mais plutôt du croisement de différentes langues.

[131] Pimm, (1987) développe ainsi un exemple sur le conflit entre le sens commun de « diagonal » et le sens mathématique, qui s'applique tout autant au français qu'à l'anglais (p. 83 et suivantes).

[132] Comme « diagonal » justement, en anglais comme en français.

notamment les déterminants cardinaux (un[133], deux, trois etc.) ; les usages réglés par la logique mathématique de certaines conjonctions (donc, si, alors etc.) pointés par les travaux anglo-saxons et, en France, déjà par Laborde (1982), puis plus précisément par Durand-Guerrier (2013), ou encore Hache (2015) à propos de la conjonction « avec » ; les usages des déterminants définis ou indéfinis réglés par la quantification mathématique (le/un, chaque, tous etc.), là encore pointés en France par Durand-Guerrier (2013), notamment[134].

Des éléments qui me semblent moins étudiés en France en tant que tels, mais pointés par Pimm pour l'anglais (comme il le dit lui-même, il y a fort à parier que cela ne concerne pas que cette langue) me semblent également à considérer pour le français, comme le fait que le langage mathématique, au-delà de *mots* spécifiques, regorge de *locutions* qui se « comportent comme des idiomes » (Pimm, p. 86) : les équivalents français des exemples qu'il propose sont « si et seulement si », « racine carrée », « valeur absolue », « plus grand diviseur commun » ou encore « angle droit » etc. ; certains ont en effet fait l'objet d'une attention particulière dans certaines des études que j'ai menées, comme « axe de symétrie », « symétrique de… par rapport à… » (Chesnais, 2012b et c, 2018) ou encore « équation de droite » (Chesnais, Cerclé et al., 2015)[135].

Au-delà des questions lexicales, certains aspects liés à la syntaxe ont également été pointés en ce qui concerne le français et l'anglais, comme la fréquence des appositions et propositions relatives (par exemple Laborde, 1982), ou l'usage des connecteurs logiques (en particulier en lien avec les enjeux de logique, cf. supra) mais cela reste une thématique encore largement à explorer.

Notons que, pour l'exploration de ces spécificités des usages de la langue naturelle en mathématiques, les liens avec la logique apparaissent en France comme un élément central, mais ils n'épuisent pas les enjeux, notamment en ce qui concerne le rapport entre les usages courants et mathématiques de certains noms communs, comme l'illustre l'exemple que j'ai développé concernant la symétrie orthogonale (en rapport avec les aspects statique et dynamique de la symétrie).

L'ensemble des enjeux liés aux « formes linguistiques » (Bautier, op. cité) spécifiques des pratiques langagières mathématiques me semble assez bien circonscrit par la catégorisation proposée par Pimm (2004), que je reproduis ici en omettant les listes de références bibliographiques associées à chaque thème qui portent quasiment exclusivement sur la langue anglaise :

(a) aspects of voice, reference (human and otherwise) and mathematical agency […], including pronominal structure and shifts […], deixis […], nominalisation and verb mood […] and addressivity […];
(b) instances of meta-discourse, including propositional attitude and politeness […], hedging […] and modality […];
(c) components of temporal structure, including verb tense and sequential markers […];

---

[133] Notons qu'il y a là une différence entre français et anglais : l'usage du mot *un* en français comme déterminant cardinal d'une part et article indéfini d'autre part pose des difficultés spécifiques en mathématiques, contrairement à l'anglais qui distingue *one* et *a/an*.

[134] Il ne s'agit que du français et de l'anglais mais cela peut laisser penser à une forme d'universalité du fonctionnement des formes langagières en mathématiques – notamment de la fonction de la langue naturelle en mathématiques. Toutefois, comme le rappelle Radford (2011), il ne faudrait pas négliger d'autres formes socioculturelles possibles, aveuglés par une forme d'ethnocentrisme occidental.

[135] Signalons à ce propos un petit texte de Chevallard (1997) à propos de la locution « triangle équilatéral » et de son caractère « plus qu'à demi figé » dans lequel un extrait de transcription de séance de classe illustre de nombreux phénomènes liés au langage verbal dans la classe de mathématiques et au rapport des pratiques langagières mathématiques avec le langage naturel.

(d) elements of style, including both mathematical and mathematics educational genres and specific genre features […]. (p. 2).

Notons que Pimm, se référant à Balacheff[136], propose également de tenir compte du caractère « détemporalisé, dépersonnalisé et décontextualisé » des textes mathématiques, tout en questionnant cette affirmation, notamment parce qu'en anglais, certains connecteurs logiques utilisés en mathématiques (comme *then* ou *when*) sont des connecteurs temporels, de façon nettement plus forte qu'en français.

Il me semble qu'il serait pertinent d'explorer en français certaines des pistes pointées par la catégorisation de Pimm qui, à ma connaissance, ne le sont encore que très peu.

Ma modeste contribution à cette entreprise inclut l'identification de quelques spécificités des usages de la langue liés à la symétrie orthogonale et à initier des investigations sur la question plus générale des relations. Une piste qui me semble, dans cette lignée, mériter d'être poursuivie en lien notamment avec les enjeux d'enseignement et d'apprentissage de la géométrie mais pas seulement est celle qui concerne l'usage des prépositions qui servent à signifier des relations (par exemple « de », cité dans l'étude sur la symétrie orthogonale, par rapport à « à ») ; une deuxième piste est celle de l'usage des déterminants et des pronoms dont je fais l'hypothèse que les usages associés dans les pratiques mathématiques sont largement transparentes, aux mathématiciens, aux enseignants, voire aux didacticiens.

Au-delà des questions lexicales et syntaxiques : les « usages »

Suivant la recommandation de Bautier (op. cité), intéressons-nous maintenant non plus aux formes langagières (lexique et syntaxe), mais aussi aux *usages* du langage.

Il me semble que certains travaux français peuvent être considérés comme contribuant à explorer cette question, mais souvent en lien avec celle de l'utilisation d'autres registres de représentation que le langage verbal – ce qui n'est pas étonnant car cela fait partie des spécificités les plus « évidentes » des mathématiques (Duval, 1995). En ce qui concerne plus spécifiquement le langage verbal, certains travaux français contribuent à cette entreprise, même s'ils ne mettent pas nécessairement la dimension langagière en avant. Il s'agit particulièrement de ceux menés sur le raisonnement et la démonstration (par exemple Arsac 1998 ou Duval 1993) ou encore la question des « situations de formulation » dans la théorie des situations (Brousseau 1986, Bosch et Perrin-Glorian, 1993) et le travail de Gobert (2013, 2014).

Il me semble que cela reste une question encore largement ouverte, mais néanmoins fondamentale pour élucider les liens entre rapport au langage des élèves et apprentissages, en particulier parce que le rapport au langage est lié à l'origine socio-culturelle des élèves.

Ainsi par exemple, l'étude mentionnée précédemment à propos du symétrique d'un point concernant la notion de *construction* en géométrie, en lien avec la notion de *définition,* montre à mon sens la nécessité d'approfondir l'étude des aspects langagiers liés à ces pratiques mathématiques. Plus généralement, je considère comme une piste de recherche à approfondir, en particulier en géométrie, celle de la question de la prise en charge *par le langage verbal* du caractère *non matériel* des objets mathématiques (principalement à partir du secondaire). Ainsi, si les élèves

[136] La référence citée par Pimm est Balacheff, N. (1998). Aspects of proof processes in pupils' practice of school mathematics. In Pimm, D. (Ed.) *Mathmatics, Teachers and Children*, London, Hodder and Stoughton, pp. 216-235.

comprennent rapidement que « construire » en mathématiques ne renvoie pas à l'utilisation de briques et de ciment, il est toutefois beaucoup plus difficile de comprendre qu'un problème mathématique de construction renvoie à un problème théorique, et n'a que peu à voir avec l'usage physique d'instruments (le problème « technique » éventuellement associé, cf. Chevallard et Jullien, op. cité), sans lui être tout à fait étranger ; de même que comprendre que l'appellation « carré » ou « mesure » désignent des objets théoriques et non des objets directement liés à l'espace physique.

L'une des difficultés – et des pistes – est, en revenant au caractère second des discours mathématiques, d'élucider le type de liens et les ruptures entre les pratiques langagières quotidiennes et mathématiques, c'est-à-dire d'identifier un processus de secondarisation (au sens de Jaubert, Rebière et Bernié 2012 ou Rebière, 2013) des pratiques quotidiennes. En particulier, une des entrées est de questionner le rapport au « vrai », à « l'action », aux « objets » – matériels ou, justement, non matériels –, à la « subjectivité » etc. (Bautier, op. cité, p. 76).

Enfin, une autre piste est celle de la question de la *généralité* des énoncés mathématiques et ses liens avec la quantification (Durand-Guerrier, 2013), notamment par le caractère problématique que cela peut représenter dans l'apprentissage pour certains élèves (Butlen et Pézard, 2003). Les deux études mentionnées précédemment – concernant l'élaboration de la définition du symétrique d'un point chez Martine et Denis II ou l'usage des déterminants chez Matthieu à propos des triangles équilatéraux – s'inscrivent dans cette optique.

Je rejoins ainsi Rebière (2013) qui pointait comme nécessaire la caractérisation des spécificités des pratiques langagières mathématiques pour étudier le rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage en insistant sur le fait que ce travail ne pouvait être mené à bien que par des didacticiens des mathématiques. Elle mentionnait en outre le caractère « naturalisé » et « traditionnellement considéré comme un outil transparent » du langage (p. 222) comme un obstacle conséquent, mais qui doit être dépassé.

Les pratiques langagières mathématiques de la classe

Une dernière question qu'il me semble nécessaire d'aborder concernant les pratiques langagières mathématiques est celle de circonscrire ce que cette expression recouvre lorsque l'on s'intéresse au processus d'enseignement-apprentissage, même s'il ne s'agit pas tant d'en définir des frontières que de les élargir au-delà des pratiques de la communauté mathématique de référence.

En effet, les paragraphes précédents font référence aux pratiques langagières de la communauté des mathématiciens, considérant qu'elles jouent un rôle en tant que pratiques de référence dans la transposition didactique, mais il me semble pertinent de considérer également certaines pratiques langagières propres aux classes de mathématiques qui n'ont pas nécessairement de référent dans le savoir savant, ce qui rejoint l'idée des « communautés discursives disciplinaires scolaires » (Rebière, 2013) et celle de Pimm (cf. l'ajout de « and mathematics educational » dans la citation précédente).

Cela inclut la question des formulations « intermédiaires » ou « transitoires » ainsi que celle du discours méta-mathématique (Robert et Robinet, 1996) ou d'accompagnement (Chappet-Pariès et Robert, 2014) qui sont peut-être pour une part nécessaires à l'activité mathématique, mais surtout nécessaires à l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Perrin-Glorian donne notamment l'exemple de la notion de « superposition » à propos de la symétrie orthogonale (qui apparaît également dans l'étude concernant Fabien et Antoine) et l'on peut aussi ranger dans cette catégorie ce que j'ai mentionné dans les exemples d'études développées précédemment à propos de

la formulation de la « propriété de retournement ». Il me semble que rentre aussi dans cette catégorie la question des « programmes de construction ».

Voici un exemple emblématique du type de problématique qui peut être associé à cette question, pointé dans Chesnais (2009a) : lorsque Denis demande aux élèves ce qu'on « utilise » pour construire le symétrique d'un point, une 'bonne élève' répond « la définition » quand un élève en difficultés répond « l'équerre ». Notons que cela renvoie aussi à la problématique précédente liée à la question du rapport second au concret et à l'action en mathématique. Il s'agit alors d'usages de la langue naturelle *spécifiques de la classe de mathématiques*. Il s'agit alors de « pratiques langagières mathématiques scolaires » (Rebière, op. cité).

Toutefois, circonscrire ces pratiques langagières devient difficile : considère-t-on que tout ce qui est prononcé dans la classe de mathématiques relève de pratiques langagières mathématiques (éventuellement seulement scolaires) ? Ce n'est pas mon point de vue (cf. infra), car je considère qu'une partie du langage jouant un rôle dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques dans les classes n'a pas de raison d'être considéré comme mathématique, tout en ayant un sens spécifique dans la classe de mathématiques (par exemple « apprendre une leçon »). Ainsi, il s'agit de considérer du langage qui n'est pas lié directement à l'activité mathématique, mais qui conditionne l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Toutefois, la question de définir une frontière reste ouverte (mais est-il possible, voire souhaitable, de la trancher ?).

Du point de vue des perspectives, il s'agit de ne pas perdre de vue la nécessité d'inscrire la question du langage verbal dans la question plus générale de la dimension sémiotique, en particulier en interrogeant d'une part le lien entre le langage verbal et les autres registres de représentation sémiotique qui interviennent dans l'activité mathématique, d'autre part, en questionnant le rapport entre langage verbal et gestes, comme les travaux de Radford notamment invitent à le faire. J'ai participé dans ce sens à de premières tentatives à propos de la symétrie, dans le cadre de collaborations (Barrier et al., 2014, Chesnais et Mathé 2014, 2015, Chesnais, Durand-Guerrier et Perrin-Glorian, 2017), mais la question reste à approfondir.

Une dernière piste serait de questionner les apports d'une prise en compte plus globale du caractère littératié des mathématiques, comme l'ont initié Claire Margolinas et Marceline Laparra (Margolinas et Laparra, 2011, Laparra et Margolinas, 2016).

Langage et apprentissage des mathématiques

Si le langage mathématique peut avoir le statut *d'objet* d'apprentissage (et d'enseignement) dans la classe, il s'agit ici de considérer le rôle du langage verbal en général (incluant le langage mathématique mais ne s'y limitant pas) comme *moyen* dans le processus de conceptualisation. À la suite de Vygotsky (1934/1997) et Vergnaud (2001, 2007), il s'agit ainsi de considérer le langage comme média essentiel, à la fois par sa dimension sociale et cognitive, de l'activité de l'élève.

Vergnaud (1991) pointe ainsi, à propos de « la question typiquement vygotskienne de l'accompagnement de l'action et de la pensée par le langage » (p. 80), « différents rôles possibles des activités langagières dans le fonctionnement de la pensée » (p. 81), au-delà de la fonction de communication (p. 85) :

- *rendre explicite ce qui n'était qu'implicite et lui donner ainsi un caractère public, qui permet de le soumettre au débat et à la preuve ;*
- *d'accompagner et d'aider la pensée dans son travail d'identification des propriétés, des relations et des objets, et dans son travail de programmation et de contrôle de l'action ;*

- *contribuer à la transformation du statut des connaissances, en favorisant notamment l'élaboration d'objets de niveau de plus en plus élevé. (p. 85)*

Cela rejoint d'une certaine manière l'idée que l'apprentissage se fait à la fois *dans* et *par* le langage (Gobert, 2013, s'inspirant de Rebière, 2013). Cette position se distingue en revanche de celle des tenants de la « discursive approach » (à la suite de Sfard), en considérant que l'activité, comme les mathématiques ou l'apprentissage, ne sont pas des phénomènes exclusivement langagiers. Elle se distingue également de la position adoptée sur le rôle du langage dans la Théorie des Situations ou de la Théorie Anthropologique du Didactique (Bosch et Perrin-Glorian 2013, Margolinas et Laparra 2011, Coulange 2014, Gobert 2014, Mathé 2012, Bulf, Mathé et Mithalal 2014) par le fait de considérer l'apprentissage des mathématiques comme un processus ayant une dimension sociale (lié à l'idée vygotskienne que toute fonction cognitive apparaît d'abord collectivement, avant d'être intériorisée), en mettant de plus l'accent sur la part *individuelle* du processus (intériorisation), en articulant un point de vue mathématique *et* cognitif (cf. partie II) sur la base des théories de Piaget et Vygotsky. Dans cette approche, le rôle de l'enseignant ne se limite pas à la dévolution et l'institutionnalisation d'une situation.

Ces considérations m'amènent à m'intéresser au « rôle du langage dans l'activité mathématique *et dans la relation didactique*[137] » (Vergnaud, 1991, p. 83) en déclinant trois « grandes questions » à propos de chacune desquelles on peut établir quelques postulats et des questions plus précises.

La première concerne le rapport dialectique du développement du *dire* et du *faire* dans le processus de conceptualisation : le développement de nouveaux concepts est indissociable du développement de nouveaux moyens langagiers. Les pratiques langagières mathématiques (à condition de ne pas y inclure seulement celles de la communauté mathématique de référence) sont évidemment au cœur de cette problématique. La deuxième porte sur le rôle de la dimension langagière dans le développement de l'activité de l'élève : le rôle des verbalisations orales et écrites, qu'elles soient produites par l'élève lui-même, ses pairs ou l'enseignant, seul ou en collaboration, incluant du « langage mathématique » ou pas uniquement[138]. Enfin, la troisième porte sur le rôle du langagier (métamathématique, aussi avec une dimension méta sur *l'apprentissage* des mathématiques) en lien avec l'idée d'explicitation, notamment en s'intéressant davantage au langage de l'enseignant avec l'idée d'étayage.

Ces trois entrées sont en outre à croiser avec la prise en compte des formes linguistiques et des usages du langage.

Le rapport dialectique du développement du dire et du faire dans la conceptualisation

Vygotsky pointe le rôle fondamental du langage (verbal) dans la conceptualisation :

[…] toutes les fonctions psychiques supérieures sont unies par une caractéristique commune, celle d'être des processus médiatisés, c'est-à-dire d'inclure dans leur structure, en tant que partie centrale et essentielle du processus dans son ensemble l'emploi du signe comme moyen fondamental d'orientation et de maîtrise des processus psychiques. Dans la formation des concepts, ce signe est le mot, qui sert de moyen de formation des concepts et devient par la suite leur symbole. Seule l'étude de l'utilisation fonctionnelle du mot et de son développement, de ses diverses formes d'application, […] peut fournir la clé permettant d'analyser la formation des concepts. (p. 209).

---

[137] C'est moi qui souligne.

[138] Comme production langagière n'incluant pas que du langage mathématique, on peut penser notamment aux narrations de recherche.

Notons que, pour ce qui concerne les mathématiques, d'autres signes que le langage verbal interviennent dans la formation des concepts (cf. notamment les travaux de Duval), mais il s'agit de mettre ici l'accent sur le rôle spécifique du langage verbal, pointé tant par Duval que par Vergnaud, ce dernier qualifiant ainsi le langage naturel comme « métalangage de tous les symbolismes » (2001, p. 298).

L'idée centrale est que le travail langagier est une partie intégrante du processus de conceptualisation, même si celui-ci ne s'y réduit pas, notamment du fait de l'importance de l'action et des situations (Vergnaud, 1990, 1991), rejoignant ici la position des autres théories didactiques françaises.

Différentes questions se posent selon que l'on considère la conceptualisation d'une notion donnée ou que l'on se place à une autre échelle.

À l'échelle d'une notion donnée, il s'agit d'identifier les pratiques langagières susceptibles de lui être associées (celles de la communauté mathématique de référence, mais aussi celles qui relèvent des usages quotidiens susceptibles de jouer un rôle, et celles qui pourraient constituer des pratiques intermédiaires) et analyser le rôle de ces pratiques langagières dans le développement de l'activité des élèves. C'est ce que j'ai initié concernant la symétrie, en identifiant plusieurs éléments lexicaux et syntaxiques et en tentant d'identifier leur rôle dans l'apprentissage du concept. L'étude reste à poursuivre, qu'il s'agisse de s'intéresser au langage des élèves ou à l'articulation du langage du professeur avec l'activité de l'élève en questionnant la manière dont celui-ci fait émerger ou introduit de nouvelles pratiques langagières et en régule l'utilisation.

À une échelle un peu plus large, comme par exemple lorsque l'on s'intéresse aux *relations*, il s'agit d'identifier des notions « clé » qui constituent des niches (Artaud, 1997) potentielles de travail sur ces aspects et de mener des études croisant ces différentes notions, ce qui n'est pas sans poser certaines difficultés méthodologiques. Par ailleurs, l'approche inter-didactique mathématiques physique est une entrée qui semble féconde (cf. partie II).

Enfin, à une échelle encore plus large, on peut s'intéresser par exemple au rapport entre langage verbal et logique (notamment la question de la quantification) ou à certains *usages du langage* comme la définition, les programmes de construction ou la démonstration. Cela suppose alors des études plus longitudinales en repérant d'éventuelles étapes clé.

Rôle de la dimension langagière dans le développement de l'activité de l'élève

Il s'agit ici de prendre en considération ce que Vergnaud pointe, à la suite de Vygtosky, quant au rôle du langage naturel dans l'accompagnement de l'activité, comme « métalangage de tous les symbolismes » :

Aucun diagramme, aucun symbolisme non langagier, aucune algèbre ne peut remplir sa fonction sans un accompagnement langagier, fût-il intérieur. En d'autres termes, le langage naturel est le métalangage de tous les symbolismes. […] Dans tous les cas, c'est grâce à des commentaires en langage naturel que ces symbolismes peuvent remplir leur rôle. (2012, p. 298).

Ce rôle est d'autant plus fondamental qu'il s'agit ici de concepts scientifiques dont l'assimilation nécessite, contrairement aux concepts quotidiens qui émergent directement de l'interaction de l'enfant avec le monde des objets (Rogalski, 2006, p. 250),

une médiation sociale instrumentée : les concepts scientifiques ont un rapport médiatisé avec le monde des objets à la fois par autrui et par des instruments psychologiques – au premier chef, le langage (Rogalski, 2006, p. 252)

Précisons en outre que Rogalski précise qu'il s'agit là d'un apport de l'approche vygotskienne « très pertinent du point de vue de la didactique des disciplines », qui « s'éloigne clairement de l'approche constructiviste centrée sur l'interaction avec l'objet, dans la théorie piagétienne, qui concerne, il faut le rappeler, le développement structural du sujet épistémique » et que cela « ne se réduit pas à la prise en compte de la médiation sociale dans le développement » (p. 252). Notons que ces positions rejoignent celles de Radford (2011) sur ce dernier point, dans le positionnement entre différentes lectures des travaux de Vygotsky (Schneuwly, op. cité).

Le rôle du langage naturel dans l'accompagnement de l'activité est alors de rendre explicite ce qui n'était qu'implicite pour en faire des outils puis des objets de pensée, identifier des propriétés, des relations et des objets, contribuer à la transformation du statut des connaissances (Vergnaud, ibid., p. 85).

Et si le langage *mathématique* a ainsi vocation à devenir un outil d'accompagnement de l'activité mathématique, dans l'activité d'apprentissage des mathématiques, on peut considérer que toute production langagière, aussi éloignée soit-elle d'un langage que l'on qualifierait de mathématique, a un rôle à jouer. C'est en effet, dans l'idée de secondarisation, plus une considération relative qu'absolue : il n'y a pas un *avant* et un *après*, mais la conceptualisation est un processus qui n'est jamais achevé et les pratiques langagières (avec les concepts) s'enrichissent et se complexifient à chaque degré de conceptualisation atteint[139]. L'évolution des pratiques langagières des élèves sont ainsi moyen, objet et indicateur de l'apprentissage (et le langage est à la fois moyen, (mi)lieu et trace de l'activité).

On s'intéressera donc non seulement au langage de l'activité mathématique (y compris le méta), mais aussi au rôle du langage du point de vue de l'accompagnement de l'activité d'apprentissage des mathématiques : cela inclut les aides de l'enseignant (dans leur fonction productive et constructive, cf. Robert, 2008a), la manière dont le discours de l'enseignant étaye l'activité des élèves, à la fois sur le faire et sur le dire, enfin le discours de l'enseignant sur le dire et sur le faire.

Les questions de recherche associées concernent la manière dont cela est pris en compte dans les classes. On peut ainsi s'intéresser à la manière dont l'enseignant valorise le rôle du langage mathématique comme accompagnant l'activité mathématique, à la fois dans son activité et dans ses discours. Par exemple, on a vu (cf. supra) comment l'accompagnement de la production d'une construction (par exemple la construction de la perpendiculaire dans la construction du symétrique d'un point) peut être accompagnée par différents types de discours : les uns portant sur la dimension matérielle (je pose l'équerre et je la fais glisser), les autres sur les propriétés (j'utilise l'équerre pour construire la perpendiculaire à la droite qui passe par le point). De même, la comparaison de

[139] Ainsi, il ne s'agit donc pas de dire que tant que le novice n'emploie pas un vocabulaire expert, il n'est pas en train de faire des mathématiques, mais que précisément dans l'activité d'apprentissage, le point de départ n'est pas (toujours) mathématique. Toutefois, les pratiques de référence (par exemple le vocabulaire expert ou la pratique de rédaction d'une démonstration) restent « un horizon » même si certaines pratiques langagières « intermédiaires » sont visées ou peuvent être visées à un moment donné comme étant *mathématiques* dans la classe (idée de communauté discursive mathématique scolaire, Rebière 2013) : par exemple, dire qu'une figure est « retournée » par rapport la figure initiale dans une symétrie orthogonale, à condition que le sens de ces mots soit négocié (par exemple, « retourné » doit être introduit en lien avec des actions matérielles sur des instruments, Chesnais et Mathé, 2014, 2015). Notons qu'il ne s'agit pas non plus de dire que l'emploi d'un vocabulaire expert serait nécessairement indicateur de conceptualisation en soi, mais qu'il faut considérer l'utilisation fonctionnelle du mot, son développement et ses diverses formes d'application (Vygotsky, op. cité, 209).

Marianne et Maryse sur l'identification de la non symétrie des rectangles par rapport à la droite donnée montre comment, chez Marianne, l'utilisation de « par rapport à » dans le discours accompagne le fait de chercher à prendre en compte le rôle du troisième objet dans la relation, nettement plus que chez Maryse. Ou encore, chez Antoine et Fabien, comment le travail sur l'identification de la relation de symétrie est accompagnée par des usages langagiers, notamment autour des mots de la famille de « superposer » et des mots de la famille de « symétrie » en lien avec des prépositions, sans pour autant que certaines formes plus explicites pour traduire la relation n'apparaissent réellement comme outils.

L'étude de séances de classes doit alors viser à appréhender les pratiques langagières mises en œuvre par l'enseignant lui-même (par exemple son propre usage du langage mathématique ou du langage en général pour soutenir la résolution d'une tâche) ainsi que d'apprécier les potentielles pratiques langagières mises en œuvre par les élèves, à travers les occasions favorisées par le scénario et le déroulement. On s'intéressera alors aux productions langagières orales et écrites (en faisant l'hypothèse qu'elles ne jouent pas le même rôle), en prenant en considération la part individuelle et collective, ainsi que la part qui reste respectivement à la charge des élèves, de la classe (vue collectivement) et de l'enseignant. Notons en outre qu'il ne s'agit pas d'analyser ces productions langagières dans l'absolu, mais surtout d'analyser l'écart éventuel entre ces productions et l'ensemble de l'activité (autrement dit, le rôle effectif du langagier dans l'activité), l'écart entre les productions langagières collectives, de l'enseignant et des élèves, enfin l'écart entre ces productions langagières, celles « déjà-là » et les pratiques qui sont visées. En effet, il me semble que l'idée de Zone Proximale de Développement s'applique aussi à la dimension langagière (sans pouvoir pour autant séparer la dimension langagière du reste) : ainsi, on a vu dans plusieurs exemples, en éducation prioritaire, que les élèves « partent de plus loin » sur la capacité à produire des énoncés mathématiques, ce qui pourrait expliquer certains choix des enseignants ou en tout cas me semble justifier une forme *d'adaptation* de la part des enseignants (cf. partie I), même si les modalités les plus porteuses de cette adaptation en termes d'apprentissages restent à discuter. Enfin, il est nécessaire de s'intéresser aux aspects « méta » que l'enseignant met en jeu en ce qui concerne le langage : le rôle des pratiques langagières (mathématiques notamment, mais pas seulement) est-il explicitement pris en compte par l'enseignant et comment ?

L'une des questions qui reste problématique est celle de l'évaluation des effets sur les apprentissages des élèves : de ce point de vue aussi, il est impossible de dissocier la question de la maîtrise des pratiques langagières de celle de la conceptualisation, même si on peut essayer, comme nous l'avons fait dans Chesnais, Molvinger et Munier (2013) d'identifier certains éléments que les élèves sont capables de mobiliser pour résoudre certaines tâches sans pour autant être capables de les verbaliser, encore moins d'une manière experte. Mais il est encore plus impensable d'isoler les effets du travail langagier sur la conceptualisation : c'est précisément par son articulation avec l'ensemble de l'activité que l'on peut penser son effet. Ce qui semble certain, c'est la nécessité de travailler au moins à l'échelle d'un chapitre, pour espérer voir des évolutions dans les productions langagières des élèves sur une notion donnée. Pour ce qui concerne des caractéristiques langagières plus larges (des formes langagières mathématiques mais qui ne sont pas spécifiques d'une notion, comme l'usage des connecteurs logiques, des déterminants etc.) il me semble qu'il est nécessaire de cumuler des études locales, comme celle menée dans le cas de Matthieu pour l'usage des déterminants en lien avec la construction de la notion de triangle équilatéral par exemple, avec des études plus longitudinales en identifiant de potentielles étapes clés et des niches.

Les outils théoriques et méthodologiques de l'étude

La secondarisation (au sens de Rebière 2013, ou de Gobert 2013, 2014) apparaît comme un bon outil, pour analyser l'évolution du langage des élèves. En effet, cela permet d'identifier des déplacements (Rebière 2013, Gobert 2014) dans le langage, indicateurs de « déplacements », de « reconfigurations » et de « dénivellations » (ibid.), vus comme indicateurs potentiels de progression dans le processus de conceptualisation. Ce concept présente l'avantage de permettre de considérer non pas seulement l'écart à la norme (mathématique) des productions langagières des élèves, mais la manière dont, relativement, elles deviennent « de plus en plus mathématiques » (à penser en termes d'enrichissement, d'épaississement[140], de plus grande précision, d'apparition de nouveaux objets et de nouvelles fonctions dans le langage etc.) dans des cycles : « un énoncé premier vers un énoncé second qui devient premier puis second pour être premier d'un second devenant à son tour premier … » (Gobert, 2014, p. 67). Il s'agit alors d'identifier comment des pratiques langagières qui ne sont pas au départ « mathématiques » se transforment progressivement, devenant « plus mathématiques » (par exemple les usages des verbes « utiliser » ou « superposer », cf. supra) : cela recouvre ainsi l'identification de pratiques intermédiaires et la manière dont elles se *construisent* comme pratiques langagières *mathématiques* dans la classe[141].

Gobert pointe alors que

« la palette méthodologique s'outille de toutes les ressources disponibles d'étude de la langue […] les usages des pronoms personnels, de verbes […], les articulations temporelles, les éléments marquant une dialectique entre chronologie et déduction. […] les marqueurs langagiers de champs sémantiques, réductions syntaxiques permettant de dépouiller un groupe de mots de ce qui l'ancre dans un contexte matériel précis, pronominalisation, usages du « ça » ou de mots invariables, conjonctions de coordinations et de compléments circonstanciels… » (p. 67)

Ces indicateurs relèvent des formes linguistiques, mais ils ne doivent pas être utilisés dans le seul but de mesurer les écarts à la norme des pratiques langagières mathématiques en termes de lexique et de syntaxe des énoncés.

Un autre élément qui semble intéressant est la nominalisation (au sens de Vergnaud 1991, 2007) : un objet passe ainsi d' « outil de pensée » à « objet de pensée », comme il l'illustre avec l'apparition de la locution « symétrie orthogonale » entre les phrases 1 et 2 de la citation mentionnée au début de cette partie. On peut considérer que c'est une étape dans la conceptualisation de cet objet – sans assimiler pour autant la conceptualisation de l'objet à sa manipulation dans le langage. Il me semble que cela rejoint en outre ce que Sfard nomme « objectification », c'est-à-dire le moment où un

---

[140] Cette idée d'épaississement est fréquemment mobilisée par les didacticiens du français pour caractériser l'évolution de productions langagières (voir notamment Chabanne et Bucheton, 2002) et me semble une piste à questionner en mathématiques.

[141] La question de la spécificité à une classe donnée (dans l'idée qu'une classe de mathématique se construit comme communauté discursive mathématique scolaire), liée à la question de la relativité des pratiques langagières de la classe par rapport à la norme que représentent les pratiques de référence reste toutefois une question ouverte, tranchée différemment selon les cadres théoriques (débat abordé d'une certaine manière par Radford, 2011). Ma position est celle, fondée sur le travail de Vygotsky, d'une articulation nécessaire des logiques de (re-)construction individuelle que constitue la conceptualisation comme processus d'intériorisation avec la logique d'acculturation à des savoirs à dimension historico-culturelle. La Théorie des Situations pointe également des deux logiques, (cf. notamment Bessot 2011) mais le processus d'institutionnalisation constitue à mon sens une partie seulement de la réponse, sans être suffisant parce qu'il ne s'intéresse pas à la part du processus qui concerne l'intériorisation, in fine, par le sujet élève.

élément apparaît comme « objet » dans le langage des élèves – même si, dans sa théorie, la manipulation dans le langage est précisément ce qui caractérise l'apprentissage.

Si tous ces potentiels indicateurs semblent pertinents pour identifier des processus de secondarisation, la centration sur les effets en termes de conceptualisation qui m'intéresse particulièrement suppose de hiérarchiser cette liste en fonction des « pratiques spécifiques du champ » (Gobert, ibid., p. 75), c'est-à-dire en fonction de préoccupations liées à l'épistémologie des mathématiques. Ces choix doivent être en outre guidés, globalement, pas la préoccupation (notamment lorsqu'on s'intéresse à des élèves de l'éducation prioritaire) d'identifier les continuités et ruptures potentielles entre des usages plus quotidiens et des usages spécifiques des pratiques langagières mathématiques en tant que genre second, en se référant notamment à ce que Bautier identifie comme pouvant faire obstacle, pour certains élèves, à l'entrée dans les pratiques langagières spécifiques des savoirs académiques. Elle définit ainsi un rapport au langage dans lequel

- *le langage est censé dire le monde dans une transparence de celui-ci plus que dans sa « reconstruction » et son élaboration dans et par le langage justement. Il est censé, ce faisant, dire la vérité, le vrai des choses, des choses « comme elles sont », c'est-à-dire comme l'élève les vit… La langue ne peut alors guère faire l'objet d'un travail spécifique qui dépasserait la simple « mise aux normes ».*
- *le langage est d'abord pensé comme exprimant la subjectivité, les affects, comme permettant de se dire ou de partager de la connivence ou, à ce titre, il s'agit d'être davantage dans le partage, la réminiscence de l'expérience commune que dans la communication sur un objet non connu d'un des interlocuteurs ; notons qu'alors la question du travail de la langue et de ce qui est vécu comme une mise en conformité avec les normes scolaires ne peut être que non pertinent et violent ;*
- *le langage est, au-delà de l'expression de la subjectivité, ce qui permet de manifester (et non justement d'élaborer) l'identité du jeune, identité vécue simultanément sur le registre individuel et sur celui du groupe auquel il souhaite s'identifier. Pour les élèves dont nous parlons, il y a comme identification de soi à ce que l'on dit, adhérence de soi avec le langage. Posture qui, là encore, va à l'encontre de la compréhension des demandes scolaires qui sont des demandes de mise à distance ;*
- *le langage est alors produit dans l'immédiateté du dire, y compris l'écriture qui se fait au fil de la plume.*

Ce rapport au langage est très éloigné de celui que suppose la plupart des activités scolaires où le langage est outil des apprentissages, outil d'élaboration. […] il s'agit là sans doute d'un indice d'une familiarité plus grande avec l'oralité et les valeurs qui la sous-tendent qu'avec l'écriture et celles qui lui sont liées. (p. 76-77)

Une note est associée à la dernière phrase qui précise que

« oralité » et « écriture » sont à entendre ici non pas comme renvoyant à une simple utilisation d'un « canal » de communication oral ou écrit, mais bien à des pratiques socio-langagières renvoyant au monde, à des habitudes de vie, à des valeurs.

L'auteur se préoccupe dans l'article essentiellement des conséquences de ces éléments sur l'étude de la langue et l'étude des conséquences sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques reste largement à faire, même si les travaux de Gobert (2013, 2014), Coulange (2011, 2014) ou encore Margolinas et Laparra sur la question du rapport entre oralité et littératie (2011, 2016) ouvrent la voie.

Dans cette idée, nous avions ainsi retenu, dans une première tentative dans Chesnais, Munier et Molvinger (2013, cf. supra),

- la mise à distance de l'action et du réel
- l'existence de « plusieurs voix » : la manière dont les élèves interprètent les tâches proposées, correspondant à des postures différenciées par rapport aux attentes des tâches du point de vue mathématique et scolaire qui pourraient être interprétées en termes de voix différentes.

- les objets du discours : il s'agit d'identifier si les énoncés des élèves portent sur les objets des disciplines mathématiques et physique ; l'usage du lexique spécifique en est un indicateur sans être suffisant.

Ces critères nous avaient servi à étudier les productions des élèves dans les tests à propos notamment de la définition du symétrique d'un point, de la notion d'angle ou de la prise en compte de relations entre objets. Nous avions ainsi fait apparaître des différences significatives sur quelques aspects entre la population de l'éducation prioritaire et la population des établissements « ordinaires » (Chesnais, 2014e), mais il s'agit d'un chantier à peine entamé.

Ces questions me semblent cruciales, notamment en ce qui concerne la géométrie et la mesure. En effet, on retrouve dans les enjeux d'enseignement de la géométrie très précisément des enjeux de modélisation du monde physique ainsi que des enjeux d'axiomatisation, qui supposent justement une non-transparence du rapport au monde physique et surtout « une « reconstruction » et une élaboration du monde dans et par le langage » (cf. supra). C'est pourquoi la question du rapport entre objets et actions matérielles et, plus généralement, entre objets géométriques et objets physiques sont des points qui me semblent devoir retenir particulièrement l'attention des didacticiens des mathématiques, notamment de ceux qui s'intéressent aux inégalités scolaires. Les exemples mentionnés au début de cette partie et concernant notamment la définition et la construction du symétrique d'un point, dans leur rapport à l'action et au concret, constituent à mon sens un premier pas dans cette voie.

Par ailleurs, quand on s'intéresse au langage de l'élève ou des élèves, il faut prendre en considération ce que les élèves ont à faire langagièrement (part de travail langagier impliquée par les tâches proposées par les enseignants et leur mise en œuvre) : *à quoi sert* le langage (écrit et oral) dans la classe[142] ? Par exemple, j'ai pu identifier, dans différentes études, des différences dans ce qui est à la charge des élèves dans les formulations, tant à l'oral qu'à l'écrit : notamment dans la comparaison entre les huit enseignants sur la définition et la construction du symétrique d'un point, en distinguant par exemple entre des cas où les élèves n'ont qu'à répondre à des questions fermées n'appelant qu'un seul mot en réponse et des cas où les élèves ont à écrire individuellement une formulation de la définition ; ou encore, à propos de la construction, des cas où la verbalisation orale sert à décrire les actions matérielles, d'autres où elle sert à faire le lien entre la définition, les propriétés et les actions matérielles.

Les questions à explorer sont donc les suivantes : en considérant le processus de secondarisation des discours mathématiques comme une évolution progressive de formes linguistiques et d'usages langagiers courants à des formes et usages mathématiques, quelles formes prennent ces processus de secondarisation dans l'apprentissage des mathématiques ? Certaines formes sont-elles spécifiques des mathématiques ? Quels sont les indicateurs de secondarisation qui sont les plus pertinents du point de vue des mathématiques ? En se référant à la partie précédente (et aux travaux existants), on peut penser que tout ce qui est en lien avec des enjeux de logique est fondamental (usage des connecteurs, mais aussi des prépositions, des déterminants et des pronoms), mais il me semble que la question du rapport au temps et à l'action (au mouvement, par exemple) reste à creuser, comme le montrent bien les analyses de contenus menées dans la deuxième partie.

[142] Le travail de Robert et Vandebrouck (2003) sur l'usage du tableau pourrait être ainsi « revisité ».

Quels sont les ressorts/leviers de ces processus de secondarisation ? Si l'on peut penser, évidemment, au rôle des situations de formulations, il me semble que cela ne s'y réduit pas : tout ce qui concerne la part langagière de l'activité des élèves est potentiellement porteur, ainsi que la prise en compte plus ou moins explicite des enjeux langagiers – mathématiques ou pas directement – par l'enseignant (par des rétroactions sur le dire et non seulement sur le faire par exemple) ou par un travail sur le dire des élèves (y compris dans les proximités). Ainsi, il me semble qu'il faut s'intéresser plus spécifiquement aux modalités possibles dans les classes d'un travail sur la part langagière de l'activité mathématique, mais non déconnectée du reste.

Conclusion et perspectives

Je propose de revenir ici sur la question du langage dans les pratiques enseignantes, ainsi que sur les inégalités scolaires. Je terminerai sur la question du langage dans les théories didactiques.

Langage et enseignement des mathématiques

Une perspective de recherche, à peine ébauchée, consiste à poser la question des logiques sous-jacentes, dans les pratiques enseignantes, à la prise en charge de tous les aspects du rôle du langage mentionnés ci-dessus, à la fois dans les scénarios et les déroulements, dans les cinq composantes, et aux trois niveaux d'organisation des pratiques. Cela dans l'objectif d'identifier les difficultés, les dilemmes, les ressources et des leviers pour la formation.

En premier lieu, on peut s'intéresser à la prise en considération, par les enseignants, des enjeux d'apprentissage liés aux pratiques langagières mathématiques, par le choix des tâches et les déroulements, à la fois dans et par son langage, qu'il s'agisse des formes linguistiques ou des usages, ainsi que des différentes échelles.

Quant au rôle du langage dans l'apprentissage des mathématiques, il me semble essentiel de s'intéresser à la place faite à la part langagière de l'activité des élèves tant dans le choix des tâches que le déroulement et à la manière dont l'enseignant articule ses interventions (le faire et le dire) avec l'activité (le faire et le dire) développée par les élèves. Par exemple, sont en cause la nature et le volume du discours de type « méta », la place faite au travail langagier des élèves (oral et écrit), le travail sur les formulations et les reformulations etc. Il apparaît par exemple, dans les études que j'ai menées, des différences entre les enseignants concernant la manière de reformuler les expressions des élèves ou non ou encore ce qui est dévolu aux élèves individuellement et collectivement en termes de formulation. Autant de différences qui ne semblent pas neutres pour les apprentissages même si de plus amples recherches sont nécessaires pour le confirmer et en élucider les mécanismes.

Il s'agit également, d'une certaine manière, de questionner le rôle du langage dans la propre activité de l'enseignant. Dans quelle mesure le langage de l'enseignant joue-t-il un rôle de modèle ? s'agit-il d'étayer par son langage l'activité des élèves ? le langage est-il là simplement pour réguler l'activité ? quel rôle joue le passage à l'écrit, en particulier au tableau (cf. Robert et Vandebrouck, 2003) ?

Les résultats des premières études menées, en complément avec les travaux d'autres auteurs, amènent ainsi à penser que ces enjeux sont très largement transparents et invisibles en tant qu'enjeux d'apprentissage – et, de fait, d'enseignement – pour les enseignants. Questionner les facteurs de cette transparence et cette invisibilité suppose d'interroger les ressources et les contraintes qui s'exercent sur les pratiques. On peut ainsi notamment mettre en cause le fait que les

pratiques langagières et certains phénomènes révélés par l'analyse des pratiques langagières sont transparents et invisibles *dans les communautés de référence* (dans les ressources professionnelles, les instructions officielles), mais aussi largement impensées dans la *communauté mathématique* elle-même (de manière similaire aux questions logiques, Vergnaud, Durand-Guerrier, Mesnil) voire pour certains dans la *communauté de didactique des mathématiques*. Cela renvoie également aux conceptions que les enseignants ont des mathématiques, du rapport entre langage et mathématiques (à voir avec l'épistémologie des mathématiques), entre langage et apprentissage, entre langage et enseignement etc. Or, par exemple, les représentations dominantes dans la communauté mathématique sont largement celles d'un langage très normé, rigoureux, non ambigu etc. qui renvoie en fait au langage formel, mais est nettement moins vrai des pratiques langagières mobilisant le langage naturel.

Par ailleurs, il ne faut pas oublier, dans la logique de la double approche, que les choix de l'enseignant, tout autant que son langage, ne visent pas seulement à favoriser directement les apprentissages mathématiques des élèves. Par exemple, le fait de poser, dans la forme de « cours dialogué », de multiples questions n'appelant que des réponses très courtes, s'agit-il de la fonction que cela représente dans le processus de conceptualisation ou de maintenir l'attention des élèves ? De même, le passage à l'écrit a-t-il une fonction cognitive ou celle d'enrôler les élèves dans l'action – en espérant les enrôler ainsi dans l'activité ?

Autant de tensions, voire dilemmes qui doivent faire l'objet de « compromis », et les recherches doivent permettre d'identifier de meilleurs compromis que d'autres, tout en permettant d'identifier les ressources et contraintes en vue de penser l'amélioration des pratiques par la formation. Un travail en termes d'identification de « gestes professionnels langagiers » a ainsi été entrepris en ce sens avec des didacticiens du français dans le cadre du projet ESPE Langage 2018.

Notons enfin que la question ne se pose pas de la même façon selon que l'on considère l'enseignement primaire ou secondaire (et peut-être supérieur). En effet, le rapport des enseignants aux mathématiques étant différent (du fait de la spécialisation des enseignants du secondaire), on peut penser que leur rapport au langage mathématique est différent ; en outre, le fait que les enseignants du primaire assurent l'enseignement dans plusieurs disciplines différentes peut avoir des conséquences sur leur prise en compte des difficultés liées par exemple aux usages multiples de certains termes ayant des sens différents selon les disciplines.

Langage et inégalités scolaires

L'importance de mener un travail sur le rôle du langage dans le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques en vue de comprendre le processus de construction des inégalités à l'intérieur de la classe apparaît comme évidente.

L'un des éléments essentiel est la question du *rapport au langage* des élèves, particulièrement de ceux dont les pratiques langagières quotidiennes sont les plus éloignées de celles nécessaires à l'entrée dans les savoirs académiques dans le cadre scolaire. Ainsi, par exemple, me semble crucial, en ce qui concerne l'enseignement de la géométrie, de prendre en considération la question du rapport au réel et à l'action comme obstacle à l'entrée dans les pratiques langagières géométriques (cf. supra).

Par ailleurs, le point qui semble clé concernant les élèves de l'éducation prioritaire, et, plus généralement, les élèves en difficultés, est la question de la secondarisation des tâches (cf. supra). Si

cette question peut être prise en charge dans le cadre du processus d'institutionnalisation ou de situations de rappel (Perrin-Glorian, 1993), il me semble que le rôle de l'enseignant, via ses apports, essentiellement langagiers, à toutes les étapes du développement des activités des élèves est fondamental, qu'il s'agisse des aides, des verbalisations ou demandes de verbalisations, des apports (notamment contribuant à l'identification ou la structuration des objets de savoir en jeu) ou des proximités. Notons que cela n'est pas indépendant de la question de l'identification des règles du « jeu scolaire » en mathématiques c'est-à-dire du fait de distinguer ce qui relève de l'épistémologie des mathématiques et ce qui relève du fonctionnement de l'école.

À ce titre, l'hypothèse de transparence et d'invisibilité des enjeux langagiers pour les enseignants de mathématiques apparaît comme cruciale dans l'explication des inégalités, dans la mesure où on peut penser que ce qui reste transparent ou invisible est de fait susceptible de générer des malentendus, et laisse à la responsabilité des élèves de lever les implicites ou de « remplir les trous », ce qui est nécessairement dépendant des ressources des élèves individuellement, donc particulièrement différenciateur. La transparence des enjeux liés au langage est dans ce cas d'autant plus problématique que c'est justement en termes de langage que les ressources des élèves sont particulièrement différenciées en fonction du milieu socio-culturel.

Toutefois, c'est aussi précisément ce qui rend encore plus difficile dans l'éducation prioritaire la question de la distance entre d'une part, les connaissances « déjà-là », les activités des élèves et leurs pratiques langagières, d'autre part les connaissances visées et les pratiques langagières associées, générant ainsi des tensions, voire des dilemmes. La question des « bons compromis » à faire (et possibles), notamment du point de vue du langage, reste il me semble très ouverte : on a pu voir comment se refuser à utiliser le vocabulaire expert car considéré comme non maîtrisé par les élèves peut amener à mobiliser un vocabulaire quotidien porteur de malentendus, voire de conceptions erronées, hypothéquant de fait la compréhension des mathématiques en jeu par les élèves (sans parler du fait que cela introduit potentiellement un malentendu sur la fonction du vocabulaire spécifique) ; à l'inverse, j'ai pu observer aussi comment une exigence trop importante sur le langage dans une phase d'élaboration d'un raisonnement peut empêcher certains élèves de mener ce raisonnement à terme. On a pu voir aussi dans les exemples développés que les élèves de l'éducation prioritaire « partent de plus loin » sur les formulations, ce qui peut amener les enseignants à renoncer à laisser à leur charge la part langagière de l'activité.

Par ailleurs, les exigences d'utilisation d'un vocabulaire expert trop précoces, sous prétexte de familiariser les élèves avec les pratiques langagières mathématiques alors que les objets que ces pratiques langagières désignent ne sont pas encore présents dans l'activité me semblent également vecteurs d'importants malentendus : cela explique en partie il me semble par exemple que les enseignants et les élèves considèrent que la classe de sixième ne contient que des révisions, car la liste des objets à considérer est la même qu'en CM2[143] alors que, notamment en géométrie, le contrat autour des objets est amené à évoluer, le carré désignant à l'école le dessin, quand il doit s'épaissir en référence à la figure dans le passage à la géométrie théorique. Un autre exemple est la recommandation, dans les programmes de la maternelle de 2016, d'utiliser le vocabulaire expert (notamment *disque* et *cercle*, quand, dans les programmes précédents, il était question de *ronds*) :

[143] Cela a un peu changé depuis que la réforme des cycles a abouti à un programme commun pour le cours moyen et la sixième, ce qui ne résout rien mais amène au moins les enseignants à se questionner conjointement sur une progression – lorsqu'ils ont les moyens de le faire.

les enseignants s'interdisant désormais de parler de *rond* mais travaillant majoritairement avec des objets 3D se mettent à désigner par cercle et disque des objets de dimension 3[144], alors qu'on peut considérer que, précisément, disposer d'un mot comme *rond* permettait de dissocier la « forme » de l'objet mathématique (ce que ne permettent pas les termes carré, triangle etc.)

Pour conclure

La question du rôle du langage dans le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques est donc à la fois cruciale, vaste, complexe, et encore largement ouverte.

J'ai conscience que les tentatives faites ici ne constituent que des ébauches et que même la délimitation des questions reste fragile. Par exemple, à propos du rôle du langage dans la conceptualisation, dans quelle mesure peut-on isoler la question du langage verbal sans l'inclure dans celle de l'utilisation des signes, incluant les autres registres de représentation sémiotique, qu'il s'agisse de les étendre aux autres registres de représentation sémiotique au sens de Duval ou du point de vue de Radford pour qui l'usage de systèmes de représentation n'est pas dissociable de celles de gestes ou d'artefacts[145] ? Ou encore, du point de vue théorique, quels sont les outils de linguistique ou, plus globalement des sciences du langage qui sont pertinents pour étudier les questions relatives à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ? Précisons qu'en ce qui concerne ce dernier point une réflexion a été engagée au sein du projet ESPE Langage 2017 puis 2018. Nous avons initié un travail sur l'analyse d'entretiens passés par des élèves de sixième d'éducation prioritaire[146] suite à des tests portant sur les notions de symétrie orthogonale et d'angle. Le travail reste à poursuivre mais les premiers résultats semble pointer la pertinence de certains outils des sciences du langage pour la problématisation et l'exploration de questions didactiques, en permettant d'appréhender un peu plus l'« épaisseur » des productions langagières des élèves, notamment certains aspect socio-culturels dont je fais l'hypothèse qu'ils jouent un rôle dans l'apprentissage des mathématiques.

J'espère avoir toutefois montré dans cette partie comment une entrée par les questions de langage – sans pour autant isoler cette question du reste –, dans un cadre théorique ancré en théorie de l'activité, permet de pointer de nouvelles problématiques et d'en revisiter un certain nombre, en apportant un nouveau point de vue ou en enrichissant la problématisation en intégrant davantage le questionnement lié à la dimension langagière, par exemple concernant la définition mathématique.

Il me semble en outre important de retenir que le rôle attribué au langage dans les théories didactiques est révélateur d'un positionnement de la théorie en termes de conceptions des mathématiques, de leur apprentissage et de leur enseignement[147], y compris d'un point de vue très

---

[144] Pour une anecdote qui montre que cela confine parfois à l'absurde : une enseignante stagiaire de maternelle, prenant à cœur la recommandation de distinguer cercle et disque montre aux enfants un rouleau de papier essuie-tout en expliquant qu'il s'agit d'un cercle car on peut mettre le doigt dedans, contrairement à un disque qu'on écoute, ce qu'elle fait en saisissant un CD en introduisant son doigt dans le trou central…

[145] Notons que l'on peut même douter de la compatibilité de l'approche de Radford avec une théorie du processus d'enseignement-apprentissage fondée sur la conceptualisation telle que défendue dans cette note.

[146] Les données ont été recueillies dans le cadre du projet Transition école-collège.

[147] Je rejoins en cela Radford sur le fait que « N'importe quelle théorie didactique doit à un moment ou à un autre (à moins de se limiter volontairement à une espèce de position naïve) clarifier sa position ontologique et épistémologique. La position *ontologique* consiste à préciser le sens dans lequel la théorie aborde la question de la nature des objets conceptuels (dans notre cas, la nature des objets mathématiques, ses formes

large, politique. En miroir, on peut considérer que le rôle attribué au langage par les enseignants est révélateur de certains éléments déterminants de leurs logiques d'action sur un plan plus large.

On peut considérer que l'absence de consensus sur le débat même « les mathématiques sont-elles un langage ? » est source de variabilité dans toutes les communautés, si l'on se fie à Vergnaud :

les mathématiques ne sont pas un langage, mais une connaissance. C'est un point sur lequel les idées ne sont claires ni chez tous les enseignants, ni chez les psychologues, ni même chez certains mathématiciens. (2007, p. 4)

Et j'ajouterais volontiers les didacticiens, si l'on considère la communauté internationale de recherche de *Mathematics Education* !

En ce qui concerne ce dernier point, il me semble qu'un travail important reste à faire, dans mes recherches mais aussi à l'échelle de la communauté de didactique des mathématiques française, pour articuler les travaux menés au sein de la communauté française avec les travaux menés dans la communauté anglophone, dans un mouvement plus global qui a déjà été largement initié (cf. notamment Artigue et al., à paraître). Ce travail ne pourra qu'enrichir les deux partis.

d'existence, etc.). La position *épistémologique* consiste à préciser la manière dont, selon la théorie, ces objets peuvent (ou non) arriver à être connus. » (Radford, 2011, p. 7) (souligné par l'auteur).

Conclusion générale

Cette conclusion sera brève car l'essentiel des perspectives de mes recherches a été présenté au fur et à mesure des parties. Je propose simplement de revenir sur le cheminement que j'ai suivi et d'esquisser quelques perspectives un peu plus globales que celles déjà évoquées.

L'ensemble de cette note permet de mettre en évidence la pertinence de l'approche théorique adoptée dans mes recherches pour aborder un certain nombre de questions concernant le fonctionnement du processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques dans le cadre scolaire, notamment les deux objets d'étude mentionnés dans le titre, à savoir les inégalités scolaires et le rôle du langage dans le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques, dont j'espère avoir explicité la nécessaire mise en liens.

Concernant la construction des inégalités scolaires dans la classe de mathématiques, il s'agit notamment d'appréhender la différenciation des apprentissages des élèves en fonction de leur origine socio-culturelle ainsi que le fonctionnement des pratiques enseignantes, en prenant en considération la complexité des contraintes, condition dont j'espère avoir montré la nécessité pour penser des alternatives et les conditions de leur mise en œuvre. L'enjeu est de dégager des pistes liées à l'exploration d'alternatives liées aux pratiques enseignantes suffisamment *réalistes*, en incluant la question de la formation des enseignants..

La question du rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage, autre thème central de recherche dans les travaux que j'ai menés ces dernières années, amène à un prolongement et un approfondissement des travaux précédents, concernant les inégalités scolaires et le fonctionnement du processus d'enseignement-apprentissage. Cette thématique, actuelle autant dans le paysage des recherches en didactique des mathématiques françaises que dans celui de Mathematics Education ouvre de nombreuses perspectives, privilégiées dans la fin de cette note de synthèse.

Ainsi, l'approche théorique choisie pour aborder ces questions permet de les explorer de manière spécifique, en intégrant notamment un point de vue original sur les sujets, qui permet d'appréhender la question de la variabilité des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves, au-delà des contraintes systémiques et institutionnelles : il s'agit en quelque sorte d'une entrée par des dimensions du sujet qui ne sont considérées par d'autres approches que comme un « bruit » (au sens statistique du terme) ou comme des compléments nécessaires par d'autre théories didactiques. En retour, mes travaux contribuent à enrichir la réflexion théorique associée à une telle entrée. Notamment, les thématiques retenues, celle des inégalités scolaires et du rôle du langage, résonnent avec le renforcement de la prise en compte de la dimension sociale du processus d'enseignement-apprentissage. Cette prise en compte semble s'inscrire logiquement dans une perspective de développement de l'approche théorique.

Pour conclure, il me semble important de réaffirmer la fécondité de la démarche que j'ai adoptée ici de clarification des fondements théoriques de mes travaux et de questionnement de leur pertinence au regard des questions de recherche explorées. Cette démarche m'apparaît comme une condition nécessaire du dialogue entre différentes approches, en didactique des mathématiques mais aussi dans une perspective plus large qui a été la mienne (interdidactique ou dans des collaborations avec d'autres champs de recherche en éducation). Elle apparaît comme une condition nécessaire de l'identification de complémentarités et d'éventuelles divergences et constitue donc le préalable indispensable au débat.

Terminons par une remarque en forme de boutade, mais qui n'est peut-être pas si anodine : le lecteur aura noté la lourdeur des appellations telles que « l'approche théorique dans laquelle s'inscrivent mes recherches ». Cette lourdeur n'est que le résultat du fait que l'approche théorique développée à la suite des travaux de Robert et Rogalski et d'abord formalisée comme constituant une « double approche didactique et ergonomique des pratiques des enseignants de mathématiques » dépasse aujourd'hui largement, comme j'espère que mes travaux le montrent, la problématique initiale des pratiques enseignantes et de leur formation. L'appellation de « double approche », très attachée à cette problématique spécifique, me semble donc impropre à désigner l'approche théorique globale et la « nominalisation » de cette approche me semble aujourd'hui d'actualité. Si les appellations des « Théorie des Sujets Didactiques » et « Théorie de l'Activité en Didactique » ne semblent pas vraiment souhaitables à retenir[148], j'ajouterais simplement que le choix d'une appellation doit prendre en considération la nécessité d'un positionnement dans le paysage de la didactique des mathématiques française en mettant en avant ce qui fait son originalité, à savoir le point de vue sur les sujets et l'ancrage en théorie de l'activité, mais pourrait aussi intégrer des éléments liés à un positionnement dans le paysage international de *Mathematics Education* où sa spécificité, comme on l'a vu à propos des recherches sur le langage, tient plutôt à une lecture particulière des travaux de Vygotsky et leur articulation avec les travaux de Piaget.

Références

Abboud-Blanchard, M., Charles-Pézard, M., Chesnais, A. & Masselot, P. (2012). Interroger la profession d'enseignants de mathématiques : trois exemples dans l'enseignement primaire et secondaire. In Bronner A., *Actes de la XVIème École d'Été de didactique des mathématiques (Carcassonne, août 2011)*.

Abboud-Blanchard, M., Rogalski, J., Robert, A. & Vandebrouck, F. (2017). Pour une théorie de l'activité en didactique des mathématiques. *Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz*, 18.

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP). (1982) *Mots*. Brochure 46. Réflexions sur quelques mots-clés à l'usage des instituteurs et des professeurs.

Arsac G. (1998). Les limites d'un enseignement déductif de la géométrie, Petit x, 47, 5-31.

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, In Bailleul et al. (eds.), Actes de la IXème École d'Été de Didactique des Mathématiques, Houlgate, pp. 101-139.

Artigue, M., Bosch, M., Chaachoua, H., Chellougui, F., Chesnais, A., Durand-Guerrier, V., Knipping, C., Maschietto, M., RomoVazquez, A. & Trouche, L. (à paraître) *The French Didactic Tradition, Cultural Panel*, ICME 13, Hambourg, 20-25 juillet 2017. Actes à paraître sous forme d'ouvrage.

Artigue, M., Robinet, J. (1982). « Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire » - *Recherches en didactique des mathématiques*, 3-2 (5-64). Grenoble : La pensée sauvage.

Austin, J. and Howson, A. (1979) 'Language and mathematical education', *Educational Studies in Mathematics*, 10(3), 161-197.

[148] Ne serait-ce qu'à cause d'acronymes malheureux…

Baluteau, F. (2013). Enseignement des mathématiques et composition sociale des classes. Étude comparée au collège p 370. Actes en ligne du colloque *Sociologie et Didactiques : vers une transgression des frontières*, Lausanne, 13-14 septembre 2013.

Baluteau, F. (2014). La différenciation pédagogique, quels modes d'explication sociologique ? *Revue Française de Pédagogie*, 188, 51-62.

Barrier, T. & Mathé, A.-C. (2014) présentation du numéro spécial 54 de la revue spirale.

Barrier, T. Chesnais, A. & Hache, C. (2014). Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant. Spirale – revue de recherches en éducation, 54,175-193.

Barwell, R. (2016). Mathematics Education, Language and Superdiversity. In In: Halai A., Clarkson P. (eds) *Teaching and Learning Mathematics in Multilingual Classrooms*. SensePublishers, Rotterdam, 25-39.

Bautier, E. (1995). *Pratiques langagières, pratiques sociales, de la sociolinguistique à la sociologie du langage*. Paris : l'Harmattan.

Bautier, E. (2007). Maîtriser la langue, oui mais pourquoi (en) faire ? In *Apprendre et enseigner en « milieux difficiles », Sélection d'articles du bulletin XYZep*, textes choisis par le centre Alain Savary. Paris : INRP. 191 p.

Bautier, E., Catteau, C., Joigneaux, C. et Thouny, C. Des difficultés invisibles aux apprentissages non faits. In J.Y Rochex & J. Crinon (dir.) (2011) La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement, Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Bautier, E. & Goigoux, R. (2004). Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle. *Revue Française de Pédagogie*, 148, 89-100.

Bautier, É. & Rayou, P. (2009). Les inégalités d'apprentissage, Programmes, pratiques et malentendus scolaires. Paris : PUF.

Bautier, E. & Rochex, J.-Y. (1997). Ces malentendus qui font les différences. In Jean-Pierre Terrail (dir.), *La scolarisation de la France, Critique de l'état des lieux*, Paris, La Dispute, 1997, p. 105-122.

Baxter, J.A., & Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: Managing the dilemma of telling. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(1), 7-26.

Berthelot, R. & Salin, M. H. (1994–95). Un processus d'enseignement des angles au cycle III. *Grand N*, 56, 69–116.

Berthelot, R. & Salin, M. H. (2001). L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x*, 56, 5-34.

Bessot, A. (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la recherche en théorie des situations didactiques. In En amont et en aval des ingénieries didactiques (Eds Margolinas & alii), 29-56, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Bkouche, R. (1991) De la géométrie et des transformations. *Repères IREM,* 4, 134–158.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 19(1), 77-123.

Bosch, M., & Perrin-Glorian, M.-J. (2013). Le langage dans les situations et les institutions. In A. Bronner et al. (Eds.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, Actes de la XVIème école d'été de didactique des mathématiques, 21-28 août 2011, pp. 267–302. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bourdieu, P. et Passeron, J.-C. (1964). *Les héritiers. Les étudiants et la culture.* Paris : Les Éditions de Minuit.

Bressoux, P. (2001). *Réflexions sur l'effet-maître et l'étude des pratiques enseignantes*. *Les* Dossiers des Sciences de l'Education, 5, 35-52.

Bridoux, S., Grenier-Boley, N., Hache, C. & Robert, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques, analyses et exemples. Annales de didactiques et de sciences cognitives, 21, 187-233.

Bronckart, J.-P. (2013). Des interactions complexes entre *langage* verbal, opérations et raisonnements. In A. Bronner et al. (Ed.), *Questions vives* en *didactique* des *mathématiques* : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du *langage*. Actes de la XVIème école d'été de didactique des mathématiques, 21-28 août 2011, pp. 181-195. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 7(2), 33-115*.*

Brousseau, G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'A.M.Q. Montréal*, pp.14-24.

Brousseau, G. (2002). Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. In Dorier J-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (coordonné par), *Actes de la XIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Corps (Isère) du 21 au 30 août 2001*, La pensée sauvage éditions.

Brousseau G., Brousseau N. (1991) Le poids d'un récipient, étude des problèmes de mesurage en CM, *Grand N*, 50, 65-87.

Bruner, J. (1983). Le développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire. Paris : PUF. 292p.

Bulf, C., mathé, A.-C., Mithalal, J. (2014). Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique. Spirale – revue de recherches en éducation, 54, 29-48.

Butlen, D., Masselot, P., Pezard, M. (2003). De l'analyse de pratiques effectives de professeurs des écoles débutants nommés en ZEP/REP à des stratégies de formation, *Recherche et Formation,* n°44, 45-61, Paris, INRP.

Butlen, D., Peltier-Barbier, M.-L. et Pézard, M. (2002). Nommés en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en REP : contradictions et cohérence, *Revue française de pédagogie*, 41-52.

Butlen, D. et M. Pézard (2003). Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques 23(1), 41-78.

Butlen, D. et Robert, A. (2013). Interroger la profession en didactique des mathématiques, un filtre pour apprécier les activités possibles des élèves et des enseignants – et interroger la didactique ! In A. Bronner, et al. (éds.) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chabannes, J.C. et Bucheton, D. (sous la direction de) (2002). Parler et écrire pour penser, apprendre et se construire. L'écrit et l'oral réflexifs. PUF éducation et formation. 252p.

Chappet-Pariès, M. et Robert, A. (2014). Sur quoi porte le discours du professeur en classe de mathématiques (second degré) - Rétrospective non exhaustive de recherches didactiques faisant intervenir le discours d l'enseignant (1989- 2012). In Chappet-Pariès, M., Robert, A. Millon-Fauré, K., Drouhard, J.P. Sur quoi porte le discours du professeur en classe de mathématiques ? Questions méthodologiques et premiers résultats. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, 12, p. 3-51.

Chappet-Pariès, M., Pilorge, F. et Robert, A. (2017). Pour étudier le dispositif classe inversée. Analyses des moments d'exposition des connaissances en classe et de capsules vidéos. Petit x, 105, 37-72.

Charles-Pézard, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 30(2), p. 197-261.

Charles-Pézard, M., Butlen, D. et Masselot, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP : quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Charlot, B., Bautier, E., & Rochex, J-Y. (1992). *Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs*. Armand Colin, 253 p.

Chesnais, A. (2009a). *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des* contextes *différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves.* Thèse de doctorat, Université Denis Diderot – Paris 7.

Chesnais, A. (2009b) Analyse de pratiques d'enseignants – Analyse a posteriori de séances, Atelier associé au cours d'A. Robert, In Margolinas C. (Ed.) *Actes de la XVème école d'été de didactique des mathématiques* (16-23 août 2009, Clermont-Ferrand).

Chesnais, A. (2011). Apprentissages mathématiques en sixième : contextes différents, pratiques différentes et inégalités. *Revue Française de Pédagogie*, 176, 57-72.

Chesnais, A. (2012a). L'enseignement de la symétrie orthogonale en sixième : des contraintes, des ressources et des choix. *Recherches en didactique des mathématiques*, 32(2), 229-278.

Chesnais, A. (2012b). Peut-on parler de différenciation entre ZEP et non ZEP ? Questions de langage. Journées d'étude *La place du langage dans les modèles d'analyse du travail enseignant et de la co-activité dans des situations didactiques*, Montpellier, 14-15 décembre 2012.

Chesnais, A. (2012c). Pratiques enseignantes et différenciation en classes de mathématiques. Communication invitée au *Séminaire du laboratoire ACTé*, Clermont-Ferrand, 10 décembre 2012.

Chesnais, A., (2013). The study of a scenario and its application by two different teachers. In Vandebrouck F. (Ed.), *Mathematics classrooms: students' activities and teachers' practices*. Rotterdam: Sense Publishers.

Chesnais A. (2014a). Enseigner les mathématiques en ZEP. Recherche sur la géométrie en sixième. 214 p. PUR : Rennes.

Chesnais A. (2014b). Différenciation dans le processus d'enseignement-apprentissage en mathématiques en éducation prioritaire et ailleurs. *Revue Française de Pédagogie, 188, 63-73.*

Chesnais A. (2014c). *Un bilan de mes travaux concernant le rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : vers une problématisation*. Communication au séminaire de l'équipe DEMA, 25 avril 2014.

Chesnais, A. (2014d). Learning and teaching symmetry at the transition from primary to secondary school in France. *Psychology of Mathematics Education*, Vancouver, 15-20 juillet 2014.

Chesnais, A. (2014e). Difficultés langagières des élèves de milieu social défavorisé en mathématiques et en sciences à la transition école-collège. Communication lors des *journées LEMME* (Langage EnseigneMent et apprentissage des MathématiquEs), Paris, 15-16 décembre 2014.

Chesnais, A. (2015). Questions langagières dans l'étude des inégalités scolaires, du point de vue de la didactique des mathématiques. *Journées LEMME*, Clermont-Ferrand, 22 juin 2015.

Chesnais, A., (à paraître). La différenciation des pratiques enseignantes en mathématiques entre éducation prioritaire et milieu « ordinaire » : déterminants et marges de manœuvre. In Barbara Fouquet-Chauprade et Anne Soussi (Coord.), *Pratiques pédagogiques et enseignement prioritaire*. Peter Lang : Berne.

Chesnais, A. (2018). Diversity of teachers' language in mathematics classrooms about line symmetry and potential impact on students' learning. *Communication à la European Research in Mathematics Education Topic Conference ETC4 on classroom-based research on mathematics and language*, Dresden (Germany), 22-24 march 2018.

Chesnais, A., Bonicel, F., Carayon, L., Delorme, D., Destribats, A., Francis, M.-A., Mathieu, C., (2013). L'enseignement de la symétrie orthogonale à la transition école-collège, Atelier au XLème colloque COPIRELEM, Nantes, 18-20 juin 2013.

Chesnais, A., Cerclé, V., Gosselin, E., Leberre, J., Nyssen, L. (2016). Enjeux de logique et de raisonnement au croisement des cadres et registres à propos des équations de droites. In Chesnais A. et Train G. *Actes du XXIIème colloque de la CORFEM*, Nîmes, juin 2015.

Chesnais, A., Cross D. et Munier V. (2016). Quelles descriptions des formations d'enseignants pour quelles descriptions des effets sur les pratiques ? *4ème colloque international de l'ARCD*, Toulouse, 8-11 mars 2016.

Chesnais, A., Cross, D. & Munier, V. (2017). Étudier l'effet de formations sur les pratiques en termes de connaissances : réflexion sur les liens entre connaissances et pratiques. Recherches en Didactique des Sciences et des Technologies, 15.

Chesnais, A., Destribats, A., Dutaut, S., Herrmann, E. (2018). La géométrie dans le cadre repéré : une occasion de travailler les liens entre objets géométriques, grandeurs et nombres. In Chesnais A. et Train G. *Actes au XXIIIème colloque de la CORFEM*, Nîmes, juin 2016.

Chesnais, A., Dreyfus, M. (2012). Différenciation langagière dans des classes de mathématiques. Communication aux journées d'étude *« La question du langage et de l'appropriation des savoirs dans les disciplines scolaires »*, Bordeaux, 29 et 30 mai 2012.

Chesnais, A. Dumail, A. Horoks, J. Pariès, M. & Robert, A. (2009). De la circulation des savoirs mathématiques dans la classe aux activités des élèves et à leurs productions en contrôle : questionner les relations, questionner les différences, In Coulange L. et Hache C. (Eds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, Année 2009*, Paris : ARDM et IREM de Paris 7.

Chesnais, A., Durand-Guerrier, V., et Perrin-Glorian, M.-J. (2017). *Regards croisés sur quelques enjeux didactiques de l'enseignement de la symétrie orthogonale à la transition école-collège*. Atelier à la XIXème école d'été de didactique des mathématiques, Paris, 20-26 août 2017.

Chesnais, A. & Mathé, A-C. (2014). Activités d'élèves, pratiques d'enseignants, interactions langagières et apprentissages : une étude de cas. In Butlen et al. (Eds) *Actes de la XVIIème école d'été de didactique des mathématiques (Nantes, août 2013)*.

Chesnais, A. & Mathé, A-C. (2015). Articulation between students' and teacher's activity during sessions about line symmetry. *Proceedings CERME 9*, Prague.

Chesnais, A. & Munier, V. (2016). Mesure, mesurage et incertitudes : une problématique inter-didactique mathématiques / physique. In Mathé A.-C. et Mounié E. *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques 2014-2015*.

Chesnais, A. & Munier, V. (soumis). Differentiating empirical and theoretical measures: a "big idea" about measurement in mathematics and physics.

Chesnais, A., Munier, V., et Molvinger, K. (2013) Difficultés langagières spécifiques des élèves de milieu social défavorisé en mathématiques et en sciences à la transition école-collège en France (élèves de 10 à 12 ans). *Colloque de l'Association de Recherches en Éducation Française (AREF)*, Montpellier, 27-30 août 2013.

Chevalier, J-M. & David-Chevalier M-C., (2006), OMNI : objet mathématique non identifié. Un outil pédagogique au service de l'apprentissage de la notion d'angle et de sa mesure. *Repères IREM*, 63, 69-93.

Chevallard, Y. (1980). Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixante. *Recherches*, 41, 71-99.

Chevallard, Y. (1997). M'sieur ça existe un trapèze équilatéral ? A ton avis ?... Remarques sur le travail de la langue en banlieue et ailleurs. *Skholê*, numéro hors-série, pp. 137-141.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(2) 221–266.

Chevallard, Y., Bosch, M. (2001) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. Petit x, 55, 5-32.

Chevallard, Y. et Bosch, M. (2002) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. Petit x, 59, 43-76.

Chevallard, Y. et Chambris, C. (2015). Grandeurs et nombres : quelques remarques pour un programme. Sur le site de la CFEM http://www.cfem.asso.fr/actualites/GrandeursetnombresYCCC.pdf. (consultation le 21/04/2016).

Chevallard, Y. et Jullien, M. (1990-1991). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, Première partie. *Petit x*, 27, 3, 41-76.

Chevallard, Y., Wozniak, F. (2003) Enseigner la statistique au secondaire. Entre genre prochain et différence spécifique. Cours donné à la XIIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 20-29 août 2003). In Mercier, A. & Margolinas, C. (Eds), Balises pour la didactique des mathématiques, La Pensée sauvage, Grenoble, 195-218.

Coles A., Horoks J. & Chesnais A. (2014). What theoretical approaches underly the use of videos in teacher education? *Symposium Frengly*, Paris, 29 janvier – 1er février 2014.

Coles, A., Chesnais, A. & Horoks, J. (à paraître) Held, implemented and intended theories of mathematics teacher education: comparing French and UK uses of video for teacher training. Annales de didactique et de sciences cognitives.

Coppé, S. Dorier, J.-L., Moreau, V. (2005). Différents types de dessins dans les activités d'argumentation en classe de 5ème. *Petit x*, 68, 8- 37.

Coulange, L. (2011). Quand les savoirs mathématiques à enseigner deviennent incidents. Étude des pratiques d'enseignement des mathématiques d'une enseignante de cm2. In J-Y. Rochex et J. Crinon (Eds.), *La construction des inégalités scolaires*. Rennes : PUR.

Coulange, L. (2012a). Débuter en collège ZEP : quelles pratiques enseignantes ? Un zoom sur deux professeurs de mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 32/3, 361-408. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Coulange, L. (2012b). L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques. Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves. Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches. Université Paris-Diderot - Paris VII.

Coulange, L. (2014). *Les pratiques langagières au cœur de l'institutionnalisation de savoirs mathématiques*. Spirale – revue de recherches en éducation, 54, 9-28.

Coulange, L. & Robert, A. (2015). Les mathématiques dans les activités du professeur. Conséquences pour la formation. Communication au colloque *EMF 2015* (Algérie, 10-14 octobre 2015). http://emf.unige.ch/files/6214/6400/7494/EMF2015GT1COULANGE.pdf.

Dhombres, J. (1978) *Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire*. Publication de l'IREM de Nantes. Paris : CEDIC / Fernand Nathan. 338 p.

Diderot, D. et D'Alembert J. (1751-1765) *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers. Tome Quinzième. Sen-Tch / par une société de gens de lettres ; mis en ordre et publié par M. Denis Diderot et quant à la partie mathématique, par M. D'Alembert*. Paris : Briasson.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7/2, 5-32.

Durand-Guerrier, V. (2013). Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques. In Alain Bronner et al. (Ed.) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (pp. 233-265). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Duval, R. (1993). Argumenter, Démontrer, Expliquer : continuité ou rupture, *Petit X*, n°31, 37-61.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang.

Gobert, S. (2013). « Construire des significations dans et par le langage » - in : A. Bronner et al. (Eds.) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Gobert, S. (2014). Déplacements dans le processus de secondarisation. *Spirale – revue de recherches en éducation*, 54, 65-84.

Grenier D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse de l'université Joseph-Fourier, Grenoble 1.

Grenier D., Laborde, C. (1987). Transformations géométriques : le cas de la symétrie orthogonale. In Actes du colloque GRECO : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Sèvres, mai 1987.

Hache, C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec ». Petit x, 27-43.

Horoks, J. (2006). *Les* triangles semblables *en classe de seconde : des enseignements aux apprentissages - études de cas.* Thèse de doctorat, Université Denis Diderot – Paris 7.

Houdement C. (2007). A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège, *Repères IREM,* 67, 69-84.

Houdement C. et Kuzniak A. (2001). Entre géométrie et mesure : le jeu de l'approximation. In *Actes de la XIème école d'été de didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage : Grenoble.

Houdement C., Kuzniak A. (2002). Approximations géométriques. *L'Ouvert* 105 19-28. IREM de Strasbourg.

Houdement, C., Kuzniak, A. (2003). Quand deux droites sont « à peu près parallèles » ou le versant géométrique du « presque égal », *Petit x,* 61, 61-74.

Jacquier I. (1995) Quelles conceptions des nombres chez des élèves de troisième ? *Petit x,* 41, 27-50.

Jaubert M., Rebière M. et Bernié J.-P. (2012) « Communauté discursives disciplinaires scolaires et constructions de savoirs : l'hypothèse énonciative » - in : forumlecture.ch, Plate-forme internet sur la littéracie. http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf

Kherroubi M. & Rochex J-Y., (2004). La recherche en éducation et les ZEP en France. 2. Apprentissages et exercice professionnel en ZEP : résultats, analyses, interprétations. *Revue Française de Pédagogie*, n°146, p. 115-190.

Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Thèse d'état. Établissement : Université Joseph Fourier, Grenoble.

Laborde, C., Capponi, B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14/1-2, 165-209.

Lahire, B. (1993). Culture écrite et inégalités scolaires. Lyon : PUL.

Laparra, M. & Margolinas, C. (2011). Quand les maitres contribuent à leur insu à renforcer les difficultés des élèves. In J. Crinon & J.-Y. Rochex (dir.), La Construction des inégalités scolaires (pp. 111-130). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Laparra, M. & Margolinas, C. (2016). *Les premiers apprentissages scolaires à la loupe*. Bruxelles : De Boeck.

Lebesgue, H. (1975). *La mesure des grandeurs*. Albert Blanchard. 184 p.

Lima, I. (2006). *De la modélisation de connaissances d'élèves aux décisions didactiques des professeur : Etude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

Magnusson S., Krajcik J. & Borko H. (1999). Nature, sources, and development of pedagogical content knowledge for science teaching. In. J. Gess-Newsome (éd.), Examining Pedagogical Content Knowledge, Boston : Kluwer, p. 95-132.

Margolinas, C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 113-158. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (2003). Un point de vue didactique sur la place du langagier dans les pratiques d'enseignement des mathématiques. In *Colloque pluridisciplinaire Construction des connaissances et langage dans les disciplines d'enseignement*, Bordeaux, 2003.

Margolinas, C. (2005). Essai de généalogie en didactique des mathématiques. *Revue suisse des sciences de l'éducation*, 27 (3), pp.343-360.

Margolinas, C. (2014). Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques ?, *Revue française de pédagogie*, 188, 13-22.

Margolinas, C. & Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In J. Y. Rochex et J. Crinon (Eds.), *La construction des inégalités scolaires*. Rennes : PUR.

Margolinas, C. & Perrin-Glorian, M.-J. (1997). Éditorial. Des recherches visant à modéliser le rôle de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17/3, 7-16.

Mathé, A.-C. (2012) « Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en classe de géométrie » - in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32-2 (195-228).

Mesnil, Z. (2015). Logique et langage dans la classe de mathématiques et la formation. In Gandit, M. et Grugeon, B., Logique et raisonnement : quels enjeux et quelles situations d'enseignement ? Les savoirs didactiques, des ressources pour l'enseignement des mathématiques et la formation ? Actes du XXIème colloque CORFEM, Grenoble.

Molvinger, K., Chesnais, A., Munier, V. (2017). Enseigner la masse à l'école élémentaire : pratiques d'une enseignante débutante en classe de CM2 en éducation prioritaire, *Recherches en Didactique des Sciences et des Technologies*, 15.

Monfroy, B. (2013). Adapter pour enseigner ? Vers la construction du concept d'adaptation, Recherches en didactiques, 15, *Perspectives actuelles des recherches en didactiques*, 91-109.

Munier, V., Chesnais, A. et Molvinger, K. (2014). Mesure et incertitudes en mathématiques et en physique à la transition école-collège : éléments d'épistémologie et difficultés des élèves, *Actes des 8èmes rencontres de l'ARDIST, Marseille, 12-14 mars 2014*.

Munier, V. et Chesnais, A. (2016). Measure and measurement in physics and mathematics education: epistemological issues and treatment within official instructions and textbooks. *Proceedings ICME 13*, Hambourg, 20-25 juillet 2016.

Munier V., Chesnais, A. et Molvinger K. (2017). La mesure en mathématiques et en physique : enjeux épistémologiques et didactiques. In Bächtold M., Durand-Guerrier V. et Munier V. *Épistémologie et Didactiques*. 95-112. PUFC : Besançon.

Ouvrier-Buffet, C. (2015a). Modéliser l'activité de définition : vers de nouvelles perspectives en didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 35(3), 313-356.

Ouvrier-Buffet, C. (2015b). Quelles sont les conceptions d'élèves, d'enseignants, de mathématiciens contemporains sur la définition ? Repères-IREM, 100, 5-24.

Pariès, M. (2004). Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques, relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves. *Recherches en didactique des mathématiques*, 24(3), 251–284.

Parzysz B. (1988) Voir et savoir - la représentation du "perçu" et du "su" dans les dessins de la géométrie de l'espace. *Bulletin de l'APMEP* 364 339-350.

Passelaigue, D. and Munier, V. (2015). Schoolteacher Trainees' Difficulties with the Concepts of Attribute and Measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 89(3), 307-336.

Peltier-Barbier, M.-L. (Ed.). Butlen D., Masselot P., Ngono B., Pezard M., Robert A., Vergnès D., (2004). *Dur pour les élèves, Dur pour les enseignants, Dur d'enseigner en ZEP*. Grenoble : La pensée sauvage.

Perrin, D. (2011) Mathématiques d'école. *Nombres, mesures et géométrie*. Cassini 402p.

Perrin-Glorian, M.-J. (1989-1990) L'aire et la mesure, *Petit x,* 24, 5-36.

Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes «faibles». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 13(1.2), 5-118.

Perrin-Glorian, M.-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Vers une ingénierie didactique de deuxième génération? In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, et al. (Eds.), En amont et en aval des ingénieries didactiques. (pp. 57-77). Grenoble: La pensée sauvage.

Perrin-Glorian, M.J., Mathé, A.C., Leclercq, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM*, 90, 5-41.

Perrin-Glorian, M.J. & Godin, M. (2017). Géométrie plane: pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837.

Piaget, J., Inhelder, B. et Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. London: Routledge & Kegan Paul.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically - Communication in Mathematics Classrooms*. London and New York: Routledge & Kegan Paul. 217 pages.

Pimm, D. (2004). Discourse analysis and mathematics education: An anniversary of sorts. Paper presented at the International Congress of Mathematics Education.

Planas, N. (2016). Research in mathematics education and language. PNA, 11(1), 1-4.

Planas, N., Morgan, C. & Schütte, M. (2017). Mathematics education and research: Lessons and directions from two decades of research. Proceeding 10th CERME.

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectification. in : *Éléments*, 1(1 – 27).

Radford, L., & Barwell, R. (2016). Language in mathematics education research. *Second Handbook of PME*, pp. 275-313, Rotterdam: Sense.

Rebière, M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? In A. Bronner, et al. (éds.) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, Thèse d'État, Université de Paris VII.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. Recherches en Didactique des Mathématiques, 18(2), 139-190.

Robert, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, *21*(1-2), 57-80.

Robert, A. (2003a) Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation, *Petit x,* 63, 7-29.

Robert, A. (2003b) Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations individuelles introduites au démarrage es exercices cherchés en classe. *Petit x*, 62, 61-71.

Robert, A. (2007) Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en didactique des mathématiques* 27(3) 271–311.

Robert, A. (2008a). Sur les apprentissages des élèves : une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. In Vandebrouck F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants.* Toulouse : Octarès, 45-68.

Robert, A. (2008b). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. Dans F. Vandebrouck (Éd.), La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants (pp. 45-68). Toulouse : Octarès.

Robert, A. (2013). Une réflexion didactique sur les changements du métier d'enseignant de mathématiques et sa nécessaire cohérence. *Repères-IREM*, 93, 78-94.

Robert, A. & Robinet, J. (1996) Pour une prise en compte du méta en didactique des mathématiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques,* 16(2), 145-176.

Robert, A. et Hache, C. (2013). Pourquoi, comment comprendre ce qui se joue en classe de mathématiques ? In Vandebrouck, F., Robert, A., Rogalski, J., Abboud-Blanchard, M., Cazes, C., Chesnais, A., & Hache, C. (2013). *Activités des élèves et pratiques des enseignants en classe de mathématiques. Cahiers du Laboratoire de didactique André Revuz*, n°5, IREM-Paris-Diderot.

Robert, A., Penninckx, J. et Lattuati, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques, (se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos*. Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté.

Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double-approche. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, Vol. 2, 4, 505-528.

Robert, A. & Rogalski, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 269-298.

Robert, A. & Vandebrouck, F. (2003). Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en classe de seconde, *Recherches en didactique des mathématiques*, 23/3, p. 389-424.

Robert, A. & Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 34 (2/3), 239-285.

Robert A. & Vivier L. (2013). Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques : des utilisations contrastées en recherche en didactique et en formation de formateurs – quelle transposition ?, Éducation et didactique, vol. 7, no 2, p. 115-144.

Rochex, J.-Y. (2001). Echec scolaire et démocratisation : enjeux, réalités, concepts, problématiques et résultats de recherche. Revue suisse des sciences de l'éducation, 23 (2), p. 339 – 356.

Rochex, J.-Y. (2011a). Au cœur de la classe, contrats didactiques différentiels et production d'inégalités. In Rochex, J-Y. & Crinon, J. (dir.) (2011), *La construction des inégalités scolaires : Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*. Rennes : Presses universitaires de Rennes. 214 p.

Rochex, J.-Y. (2011b). Conclusion. La fabrication de l'inégalité scolaire : une approche bernsteinienne. In Rochex, J-Y. & Crinon, J. (dir.) (2011), *La construction des inégalités scolaires : Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*. Rennes : Presses universitaires de Rennes. 214 p.

Rochex, J-Y. & Crinon, J. (dir.) (2011), *La construction des inégalités scolaires : Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*. Rennes : Presses universitaires de Rennes, 2011, 214 p.

Roditi, E. (2001). *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième, étude de pratiques ordinaires*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Roditi, E. (2008). *Les pratiques enseignantes en mathématiques* : *entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'Harmattan, 2005. – 191 p.

Roditi, E. (2011). Recherches sur les pratiques enseignantes en mathématiques : apports d'une intégration de diverses approches et perspectives. Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches. Université René Descartes - Paris V.

Rogalski, J. (1979) Quantités physiques et structures numériques. Mesures et quantifications. Les cardinaux finis, les longueurs, surfaces et volumes, *Bulletin de l'APMEP,* 320 563-586.

Rogalski, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert, Recherches en didactique des mathématiques, 23/ 3, pp.343-388.

Rogalski, J. (2006). Articulation des théories de Piaget et de Vygotsky, outils pour la didactique. In C. Castela, C. & C. Houdement (Ed.), Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2004-2005 (pp. 237-262). Paris. ARDM et IREM PARIS7 (ISBN : 2-86612-276-3).

Rogalski, J. (2007). *Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant*. Communication au séminaire international : La professionnalisation des enseignants de l'éducation de base : les recrutements sans formation initiale, Sèvres, France, 11-15 juin.

Rogalski, J. (2008). Mise en regard des théories de Piaget et Vygotsky sur le développement et l'apprentissage. In Vandebrouck F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 33-44). Toulouse : Octarès.

Rogalski, J. (2013). Théorie de l'activité et cadres développementaux pour l'analyse liée des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves. In Vandebrouck, F., Robert, A., Rogalski, J., Abboud-Blanchard, M., Cazes, C., Chesnais, A., & Hache, C. (2013). *Activités des élèves et pratiques des enseignants en classe de mathématiques. Cahiers du Laboratoire de didactique André Revuz*, n°5, IREM-Paris-Diderot.

Rouche, N. (2006). *Nombres, grandeurs, proportions*. Paris : Ellipses.

Salin, M.H. (2008). Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège. Le facteur temps. *Bulletin de l'APMEP,* 478. p. 647-670.

Schneuwly, B. (2008). Eléments d'histoire des 20 années passes et propositions conceptuelles pour la suite. *In Brossard et Fijalkov (dir.) Vygotski et les recherches en éducation et en didactiques.* 256 p. Presses Universitaires de Bordeaux.

Sensevy, G., Mercier, A. et Schubauer-Leoni, M.-L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 20/3, 263-304.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22/1, pp. 1-36.

Sfard, A. (2000). Steering (Dis)course between metaphors and rigor: Using focal analysis to Investigate Emergence of Mathematical Objects. JRME 31 / 3, 2000 pp. 296-327.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meet the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. Educational Studies in Mathematics, 46, 13-57.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, vol. 15, no 2, p. 4-14.

Smith, J.P. III (1996). Efficacy and teaching mathematics by telling: A Challenge for Reform. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27(4), 387-402.

Tavignot, P., (1993). Analyse du processus de transposition didactique. Application à la symétrie orthogonale en sixième lors de la réforme de 1985. *Recherches en didactique des mathématiques*, 13/3, 257-294.

Theureau, J. (2002). L'entretien d'autoconfrontation comme composante d'un programme de recherche empirique & technologique. Conférence in II° Journées Internationales des Sciences du Sport, 12-15 Nov 2002.

Vandebrouck, F. (dir.), (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès.

Vandebrouck, F. (Ed.) (2013). *Mathematics classrooms: students' activities and teachers' practices*. Rotterdam: Sense Publishers.

Vandebrouck, F., Robert, A., Rogalski, J., Abboud-Blanchard, M., Cazes, C., Chesnais, A., & Hache, C. (2013). *Activités des élèves et pratiques des enseignants en classe de mathématiques. Cahiers du Laboratoire de didactique André Revuz*, n°5, IREM-Paris-Diderot.

Vandebrouck, F. (2018). Activity Theory in French Didactic Research. In G. Kaiser et al. (eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 Monographs*, https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_38.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant*, la *mathématique* et la *réalité : problèmes de l'enseignement des* mathématiques *à l'école élémentaire.* Berne : P. Lang. 2 1 8 p.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels [The theory of conceptual fields]. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10(2-3), 133-170.

Vergnaud, G. (1991). Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de Pédagogie*, Vol. 96, p. 79-86.

Vergnaud, G. (2001 / 2012). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance [Operational and predicative forms of knowledge]. In J. Portugais (Ed.), Actes du colloque GDM-2001.

Vergnaud, G. (2007). Représentation et activité : deux concepts étroitement associés. Recherches en éducation, 4, 9-22.

Viennot, L. (1992). Raisonnement à plusieurs variables : tendances de la pensée commune. *Aster*, *14*, 127-141.

Viennot, L. (1996*). Raisonner en Physique, la part du sens commun*. Bruxelles : De Boeck.

Vygotsky, L. (1934/1997). *Pensée et langage*. Paris : La Dispute.

Yvain S. (2015) Vers une possible dévolution de la mathématisation aux élèves dans un processus de modélisation. *Communication à la XVIIIème école d'été de didactique des mathématiques* (Brest, 19-26 août 2015).

Yvain, S. (2017). Étude de la dévolution du processus de mathématisation aux élèves. Etude épistémologique et didactique. 235-248. In Bächtold M., Durand-Guerrier V. et Munier V. *Épistémologie et Didactiques*. PUFC : Besançon.