UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (Paris 7)
SORBONNE PARIS CITÉ

UNIVERSITÉ DE SZEGED

École doctorale « Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences et didactique des disciplines »
Laboratoire de didactique André Revuz

École doctorale de mathématiques et informatique
Institut Bolyai

Doctorat

Didactique des mathématiques

Katalin GOSZTONYI

Traditions et réformes de l'enseignement des mathématiques à l'époque des 'mathématiques modernes' : le cas de la Hongrie et de la France

Hagyomány és reform a matematikaoktatásban a 'New Math' idején : Magyarország és Franciaország reformjainak összehasonlítása

Thèse dirigée par M. Alain KUZNIAK / M. József KOSZTOLÁNYI

Jury :

Mária B. SZENDREI, Université de Szeged, examinatrice
Renaud d'ENFERT, Université de Picardie, examinateur
Jean-Luc DORIER, Université de Genève, rapporteur
Viviane DURAND-GUERRIER, Université Montpellier 2, examinatrice
József KOSZTOLÁNYI, Université de Szeged, directeur
Alain KUZNIAK, Université Paris Diderot, directeur
Ödön VANCSÓ, Université Eötvös Loránd de Budapest, rapporteur

REMERCIEMENTS

Cette thèse n'aurait pas pu être réalisée sans le soutien scientifique et humain de nombreuses personnes.

Je suis avant tout reconnaissante à mes deux directeurs de thèse, Alain Kuzniak et József Kosztolányi. Ils m'ont fait confiance ainsi qu'à mon projet, et ont accepté de m'accompagner et de me guider pendant l'aventure de la recherche doctorale, même sans se connaître à l'avance, et malgré les circonstances langagières et organisationnelles difficiles de cette thèse en cotutelle. Mon directeur hongrois, József m'a soutenu surtout par ses connaissances profondes de la réforme de Varga, alors que mon directeur français, Alain m'a guidé dans mes choix théoriques, méthodologiques et thématiques, dans la mise en place des analyses... bref, dans l'apprentissage du métier de chercheur.

Je remercie Alain Bernard d'avoir accompagné ce travail du point de vue de l'historien des mathématiques : c'est en grande partie grâce à son aide qu'une perspective historique pouvait être intégrée dans ma recherche. C'est en outre la collaboration avec lui qui m'a permis de participer au projet de recherche interdisciplinaire du labex HASTEC, intitulé « Séries de problèmes au croisement des cultures », et de prendre contact avec des enseignants français dans le cadre d'un stage ; son soutien amical m'a aidé à dépasser plusieurs moments difficiles de la période doctorale.

Ma thèse n'aurait pas pu être réalisée sans le soutien de Michèle Artigue qui m'a accueilli en tant que directrice du LDAR et de l'école doctorale à l'époque où j'ai décidé de me lancer dans des études doctorales. Elle m'a aidée de nombreux conseils, m'a présentée aux personnes qui pouvaient me soutenir davantage, y compris mon futur directeur de thèse. Les discussions avec elle étaient et restent toujours enrichissantes et particulièrement formatives.

Je suis reconnaissante à András Máté que je connais depuis le début de mes études universitaires. C'est lui qui m'a formé en philosophie des mathématiques ; et les discussions menées avec lui concernant l'épistémologie mathématique de certains mathématiciens hongrois ont joué un rôle essentiel à la définition de l'idée fodamentale de ma thèse.

La première personne qui m'a encouragé à commencer une thèse était Catherine Goldstein, lors de mon premier court séjour en France, dans le cadre d'un programme d'échange entre l'ENS de Paris et le Eötvös Collegium de Budapest. J'ai pu mener plusieurs discussions enrichissantes avec elle depuis cette première rencontre.

Je suis reconnaissante à de nombreux chercheurs qui ont pris du temps pour discuter avec moi et me conseiller : Christine Chambris, Marie-Jeanne Perrin, Christophe Hache, Janine és Marc Rogalski, Viviane Durrand-Guerrier, Claire Margolinas, Hélène Gispert, Renaud d'Enfert, Karine Chemla, sans être exhaustive.

Je remercie particulièrement à ceux et celles qui, en tant qu'acteurs des réformes que j'ai étudiées, ont partagé avec moi leur souvenirs et ont donné leurs avis sur mes analyses : Mária Halmos, Éva Szeredi, Mara Kovács, Erzsébet Csahóczi, Eszter C. Neményi, Lóránt Pálmay en Hongrie ; Jeanne Bolon et Josette Adda en France.

Merci à toute la communauté des deux laboratoires et écoles doctorales : l'Institut Bolyai et l'École Doctorale Mathématique et Informatique à Szeged, le Laboratoire de Didactique André Revuz et l'École Doctorale Savoirs Scientifiques de m'avoir chaleureusement accueillie malgré le fait que j'ai passé seulement la moitié de mes années doctorales dans chacun de ces établissements. J'y ai découvert des milieux inspirant et une ambiance conviviale. Je suis particulièrement reconnaissante à la communauté des jeunes chercheurs du LDAR pour le travail collectif stimulant et pour les moments amicaux qui m'ont soutenue et m'ont apporté beaucoup de plaisir lors de mes séjours parisiens.

Merci à mon grand-père, Ervin Deák qui, faisant lui-mème des recherches en didactique des mathématiques, m'a fait découvrir ce domaine depuis mon jeune âge, et qui m'a sans doute transmis, en partie sans que je m'en rende compte, son attitude et ses perspectives de chercheur.

Je remercie finalement mes amis et ma famille pour leur présence, pour leur patience quand j'étais loin d'eux et pour leur soutien pratique et émotionnel qui m'a accompagnée pendant toute cette aventure.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE **9**

PARTIE I LE CONTEXTE HISTORIQUE DES DEUX REFORMES **27**

1 Introduction 29

2 Le mouvement des « mathématiques modernes » à l'échelle internationale 31

2.1 Les débuts de la coopération internationale sur l'enseignement des mathématiques au début du 20e siècle 31

2.2 La dynamique internationale à l'époque des « mathématiques modernes » 32

3 La réforme des « mathématiques modernes » en France : éléments du contexte historique 34

3.1 Une réforme précédente importante : la réforme de 1902 34

3.2 Transformations du système éducatif et discours sur l'enseignement des mathématiques après la seconde guerre mondiale 35

3.2.1 La modernisation du système éducatif, et le rôle des mathématiques dans la formation des citoyens *36*

3.2.2 Enseigner les « mathématiques modernes » *38*

3.2.3 L'influence de Piaget et des pédagogies nouvelles *39*

3.3 La réforme des « mathématiques modernes » 41

3.4 La suite de la réforme dans les années 1970 46

4 La réforme de Tamás Varga en Hongrie : éléments du contexte historique hongrois 48

4.1 L'établissement du système éducatif public en Hongrie et l'émergence d'une culture mathématique au tournant des 19e et 20e siècles 49

4.1.1 Le contexte historique : la Monarchie Austro-hongroise *49*

4.1.2 L'établissement et réformes du système éducatif public *51*

4.1.3 L'émergence d'une culture mathématique *52*

4.2 Mathématiciens au cercle de Karácsony, après la seconde guerre mondiale 55

4.2.1 Une courte période démocratique *55*

4.2.2 Le cercle de Karácsony et les mathématiciens *56*

4.2.3 L'installation de la dictature communiste *60*

4.3 Le mouvement de réforme dirigé par Varga entre 1963 et 1978 61

4.3.1 Le contexte historique et le système éducatif *61*

4.3.2 Les expérimentations et le mouvement de réforme de Tamás Varga *63*
4.3.3 La réforme de l'enseignement des mathématiques en Hongrie *67*
5 Conclusion 70
PARTIE II ÉPISTEMOLOGIE : CONCEPTIONS SUR LA NATURE DES MATHEMATIQUES ET REFLEXIONS SUR SON ENSEIGNEMENT A L'ARRIERE-PLAN DES REFORMES 75
1 Introduction 77
2 Une épistémologie « bourbakiste » en France 79
2.1 L'épistémologie de Bourbaki 79
2.1.1 La méthode axiomatique et les structures mathématiques *80*
2.1.2 Abstraction et langage formel *82*
2.1.3 Modernité et vérités éternelles *83*
2.1.4 La méthode axiomatique comme formateur de l'esprit *86*
2.2 Les discours sur la nature des mathématiques autour de la réforme 87
3 Une épistémologie « heuristique » en Hongrie 89
3.1 Les principes des mathématiciens hongrois 90
3.1.1 Une science en plein développement *90*
3.1.2 Intuition, « quasi-empiricisme » et le « raisonnement plausible » en mathématiques *91*
3.1.3 L'heuristique, ou la logique de la découverte *95*
3.1.4 Les mathématiques comme activité par essence dialogique *96*
3.1.5 Prudence face au langage formel *97*
3.1.6 L'aspect ludique et créatif des mathématiques, les liens avec des arts *99*
3.2 L'exemple du *Jeux avec l'infini* de Rózsa Péter, et des « séries de problèmes » 99
3.3 La conception « heuristique » à l'arrière-plan de la réforme de Varga 105
4 Conclusion 107
PARTIE III UNE ANALYSE DIDACTIQUE DES DEUX REFORMES 111
Introduction 113
Chapitre 1 Les outils théoriques de l'analyse didactique 121
1 L'analyse des programmes – l'approche écologique 121
2 L'analyse des pratiques – la Théorie des Situations Didactiques 122

2.1 Un problème de vocabulaire 127
3 L'analyse des manuels scolaires et des livres de professeurs 130
4 Autres outils théoriques 131
4.1 Dialectique outil-objet et phases de Douady 131
4.2 Paradigmes de géométrie et de probabilités 131
4.2.1 Les paradigmes de géométrie 131
4.2.2 Les paradigmes de probabilité 133
Chapitre 2 L'analyse générale des programmes 135
1 La construction des textes des programmes 135
2 Le contenu et la structure des programmes 136
2.1 Les programmes français 136
2.2 Le programme hongrois 139
3 Conclusion 142
Chapitre 3 L'introduction de la notion de nombres au début de l'école élémentaire ... 145
1 L'analyse écologique des programmes : la notion de nombre et les grandeurs 147
1.1 Les programmes français 147
1.1.1 Le programme de 1970 148
1.1.2 La notion de nombres dans les fiches de travail françaises 150
1.1.3 Le programme de 1977 152
1.2 Le programme et hongrois 152
1.2.1 Le programme et le livre du maître 152
1.2.2 Les fiches de travail hongroises 155
2 Les livres du maître et les pratiques pédagogiques envisagées en France 158
2.1 Les livres « Math et calcul » d'Eiller 158
2.1.1 La construction des livres du maître 158
2.1.2 Analyse de situations 162
2.2 Le projet ERMEL 166
2.2.1 La construction des livres ERMEL 166
2.2.2 Analyse de situations 171
3 Les livres du maître et les pratiques pédagogiques envisagées en Hongrie 174
3.1 La construction des livres du maître 175
3.2 Analyse de situations 178

3.2.1 Mettre les objets en ordre *178*
3.2.2 Devinette avec le matériel cuisenaire *179*
3.2.3 Mettre la table : la correspondance terme à terme *182*
3.2.4 La fiche 11 : introduction des signes de nombres *184*
3.2.5 Préparer sa droite numérique *185*
4 Conclusion 189
Chapitre 4 Un exemple de l'école moyenne : le théorème de Pythagore 195
1 Les programmes de la géométrie 196
1.1 Les programmes français 196
1.1.1 Les programmes de 1969/1970 ..... *196*
1.1.2 Les programmes de 1977 ..... *199*
1.2 Le programme hongrois 201
2 Le théorème de Pythagore dans les programmes de la géométrie 203
2.1 Les programmes français 203
2.2 Le programme hongrois 204
3 Les manuels scolaires et les livres de professeurs de l'école moyenne en France 207
3.1.1 Les manuels scolaires français du programme « mathématiques modernes » *207*
3.2 Le traitement du théorème de Pythagore dans les manuels et livres de professeurs 212
3.2.1 Les manuels français des « mathématiques modernes » *212*
3.2.2 Un exemple de 1977 ..... *217*
4 Les manuels scolaires et livres de professeur de l'école moyenne en Hongrie 222
4.1 Le théorème de Pythagore dans le manuel scolaire hongrois 225
4.1.1 L'introduction du théorème dans le manuel scolaire *225*
4.1.2 L'introduction de la démonstration dans le livre du professeur *231*
4.1.3 La série des tâches dans le manuel scolaire associée au théorème de Pythagore *232*
5 Conclusion 234
Chapitre 5 Une spécificité thématique du programme de Varga : l'enseignement de la combinatoire et des probabilités 239
1 Le programme de Varga : construction et considérations épistémologiques 241

1.1 Les raisons d'enseigner ces domaines 241
1.2 Le programme de la combinatoire 244
1.3 Le programme des probabilités 246
1.4 Paradigmes de probabilité dans le programme de Varga 247
1.5 Quelques exemples de situations de probabilités 250
1.5.1 Jeu de soustraction avec lancement de dé 250
1.5.2 Le jeu avec trois disques : comparaison des stratégies, développement des représentations 252
1.5.3 Arriver à l'école à l'heure : estimations concernant les problèmes de la vie courante 254
2 « Séries de problèmes » chez Varga : l'exemple de la combinatoire 256
2.1 Combinatoire au début de l'école élémentaire : une « série de problèmes » à caractère ludique 257
2.1.1 La construction des tours colorées – le développement des outils de représentation 261
2.2 Deux autres exemples de l'école moyenne 264
3 L'émergence de ces domaines en France dans les années 1970 265
3.1 Problèmes de combinatoire dans les manuels de 1977 : l'exemple de *Math et calcul* 267
3.2 La combinatoire dans ERMEL 270
3.3 Les publications françaises de Varga – l'échange des idées entre les deux pays . 272
3.4 L'expérimentation de Brousseau sur l'enseignement des probabilités 273
3.4.1 Une comparaison des processus longs de Brousseau et de Varga 279
4 Conclusion 285
CONCLUSION GENERALE 291
BIBLIOGRAPHIE 321

INTRODUCTION GENERALE

1 LES QUESTIONS NAÏVES : L'ORIGINE DE LA PROBLEMATIQUE

Cette recherche s'est inspirée des expériences personnelles que nous avons vécues en tant qu' « apprentie-enseignante », étudiante dans la formation des enseignants de mathématiques en Hongrie. Futurs enseignants de mathématiques, nous avons souvent entendu parler de l'existence d'une certaine « tradition hongroise » de l'enseignement des mathématiques, qui serait centré sur la résolution des problèmes et qui chercherait à « faire découvrir des mathématiques » aux élèves. Les succès de cette tradition concerneraient avant tout la formation des élèves surdoués ce dont témoignent leurs excellents résultats aux Olympiades Internationales. Puis, toujours selon cette histoire, cette tradition s'est étendue sur l'enseignement général grâce à la réforme de Tamás Varga, dans les années 1960 et 1970.

Dans les discours de la communauté hongroise de l'enseignement des mathématiques, Tamás Varga apparaît comme un des plus grands maîtres hongrois de l'enseignement des mathématiques. On lui rend hommage, entre autres, à travers le nom du colloque annuel des enseignants de mathématiques, d'un prix destiné aux enseignants et d'une compétition organisée aux élèves de 12-14 ans[1]. De nombreux animateurs de cette communauté, la majorité des formateurs d'enseignant, pensent que cet héritage garde de l'actualité et doit être maintenu. On considère cependant la diffusion comme un grand obstacle : seule une minorité des enseignants hongrois semble vraiment suivre les principes de cette tradition, et la formation et la transmission semblent présenter des difficultés[2].

Personnellement, nous avons eu souvent l'occasion d'entendre le nom de Varga grâce à certains membres de notre famille qui se sont investis dans son mouvement de réforme. Et malgré cela, nous n'avons eu que des informations très superficielles sur son activité, sur des principes de sa réforme ou, plus généralement, sur cette « tradition hongroise ». Le meilleur accès à cette tradition semblait être l'observation personnelle : nous avons eu la chance d'assister au cours de quelques anciens collègues et disciples de Varga, ainsi qu'aux activités

[1]Varga Tamás Napok : http://mathdid.elte.hu/html/vtn.html, Varga Tamás Díj http://www.vtamk.hu/magyar/oldalak/az_alapitvany/, et Varga Tamás Matematikaverseny http://www.mategye.hu/?pid=vargatamasverseny (dernières consultations le 19 septembre 2015).

[2] On peut se faire une impression de ce discours commun grâce à quelques documents écrits : les actes des Journées Tamás Varga (par ex. Scharnitzky &Török 2002, Pálfalvi 2007) ou d'un recueil d'entretien avec des enseignants de mathématiques, considérés éminents (Gordon-Győri et. al 2007). En langue française, un dossier publié dans la revue Tangente (2009, n°126) sous le titre « Le miracle hongrois » représente l'image qu'on construit sur l'enseignement des mathématiques en Hongrie.

de Lajos Pósa, le représentant contemporain probablement le plus reconnu de l'approche dite « faire découvrir des mathématiques »[3]. Mais, ni lors des discussions personnelles, ni dans le cadre de la formation, nous n'avons pu trouver de description approfondie des caractéristiques de cette tradition, ni de l'œuvre de Varga.

Cette situation nous a paru paradoxale : il existe apparemment une tradition que la communauté reconnaît comme ayant de la valeur, qu'on juge importante à maintenir et à diffuser, mais le seul moyen de la transmettre repose sur l'expérience personnelle, sur l'observation ; et une diffusion plus large se heurte apparemment à des obstacles. Il manque des descriptions pertinentes, dépassant quelques généralités vagues ; il manque des analyses scientifiques, historiques ou didactiques.

En choisissant le thème de la réforme de Varga, notre recherche vise à combler cette lacune. Est-ce qu'il existe vraiment une tradition hongroise de l'enseignement des mathématiques, et si oui, en quoi consiste-elle ? Qu'est-ce que la réforme de Varga ? Comment pourrait-on la caractériser ?

En cherchant à répondre à ces questions, au-delà de notre curiosité personnelle, nous avons espéré pouvoir contribuer aux recherches didactiques hongroises : mieux comprendre la tradition dans laquelle on s'inscrit, approfondir les réflexions sur ses propres principes, pour pouvoir la transformer et la développer de manière cohérente mais aussi critique, en cherchant aussi à répondre aux défis de l'enseignement contemporain. Nous espérons aussi fournir une ressource utile pour concevoir la formation des enseignants de mathématiques en Hongrie, pour son enrichissement et un renouvellement conforme aux attentes de la communauté. Avec l'analyse de « la méthode de Varga », nous avons espéré, en outre, mieux comprendre en quoi consiste un enseignement par « résolution de problèmes », visant à « faire découvrir des mathématiques », et quel est le rapport de cette « méthode » avec les ambitions contemporaines de l'enseignement, comme le développement des compétences ou l'enseignement par problèmes et par démarche d'investigation[4].

Selon ses anciens collègues, Varga a suivi avec attention les réformes de nombreux pays de la même époque, s'inscrivant ainsi dans le mouvement international dit « New Math » ou

[3] Pour la « méthode » de Lajos Pósa, le site d'une colonie de vacances mathématique en donne une courte description en anglais https://sites.google.com/site/mathematicscamp/oktatasi-alapelveink. (Dernière consultation le 4 mai 2015).

[4] Il s'agit des éléments récurrents dans les programmes des deux pays (par exemple http://eduscol.education.fr/cid48727/mathematiques-college.html, http://kerettanterv.ofi.hu/02_melleklet_5-8/index_alt_isk_felso.html ainsi que dans les études internationaux comme PISA http://www.oecd.org/pisa/pisafaq/ (dernières consultations le 19 septembre 2015).

« mathématiques modernes », mais ce qu'il a conçu est pourtant « original », « un équilibre particulièrement bien réussi des ambitions du mouvement »[5]. Il nous semblait donc intéressant de considérer la réforme de Varga dans son contexte international. Quel est son rapport au mouvement international – et comment elle est liée aux « traditions » existant en Hongrie ?

Notre réflexion sur le sujet s'est nourri, par ailleurs, de nos expériences vécues en France, lors de nos séjours dans un laboratoire de didactique (le LDAR) et dans un poste d'assistante dans un lycée français de province (Ambert). Au lycée, nous avons découvert des différences importantes entre l'enseignement hongrois et français des mathématiques, au niveau du contenu, de l'organisation du programme et des méthodes d'enseignement. Au LDAR, nous avons rencontré une riche culture de la recherche didactique, dont l'analogue est très peu développé en Hongrie. Enfin, nous étant déjà intéressées au mouvement de réforme international des « mathématiques modernes », nous avons découvert avec surprise la différence des récits sur la réforme française et hongroise de la même époque. On la considère comme un moment particulièrement important de l'histoire de l'enseignement des mathématiques, dans les deux cas. Mais, alors qu'en Hongrie on en parle comme d'un succès et l'on cherche à maintenir l'œuvre de Varga dont on considère la diffusion comme le plus grand obstacle, en France au contraire la réforme de 1969/70 est souvent considérée dépassée et comme un échec.

Ces expériences ont suscité chez nous de nombreuses questions nouvelles. D'où viennent les différences entre l'enseignement dans les deux pays ? Sont-elles en rapport avec l'époque des mathématiques modernes ?

D'où vient la différence des récits sur les deux réformes ?

D'où vient la différence au niveau de l'existence des recherches didactiques ? Pourquoi une culture didactique riche en France, et pourquoi son absence en Hongrie, alors que le pays est fièr de ses traditions d'enseignement ?

Pourrait-on se servir de la didactique française pour répondre à notre question originale ? Peut-on y trouver des outils théoriques et méthodologiques efficaces pour la description de l'œuvre de Varga ?

Une thèse ne peut sans doute pas répondre à toutes les questions que se pose une jeune enseignante curieuse : mais l'ensemble de ces questions naïves ont contribué à la conception de notre recherche.

[5] C'est un point récurrent dans les entretiens avec des collègues (Bibliographie §5). Voir aussi (Szendrei 2007).

2 PROBLEMATIQUE DE LA THESE, LES CHOIX THEORIQUES ET METHODOLOGIQUES

Notre recherche part d'une question assez générale : comment caractériser la réforme dirigée par Tamás Varga ? Pour pouvoir essayer de répondre à cette question, il faut la préciser : qu'est-ce que ça veut dire, caractériser une réforme ? En effet, ce problème est au cœur de notre questionnement original : quels sont les outils théoriques et méthodologiques qui permettent de fournir une description pertinente d'un système aussi complexe qu'une réforme d'enseignement ?

Dans les paragraphes suivants, nous allons argumenter sur les différents choix théoriques et méthodologiques que nous faisons pour notre recherche, délimitant ainsi notre problématique. Nous expliquerons notre choix de faire une étude comparative entre la réforme de Varga et la réforme française appelée « mathématiques modernes ». Nous parlerons de l'approche double, historique et didactique que nous suivrons pour cette étude et qui sera la base de notre modèle général. Nous parlerons brièvement des outils théoriques de notre analyse didactique et enfin, nous expliquerons des raisons d'étudier uniquement des ressources écrites, principalement des documents officiels associés aux réformes.

2.1 Une étude comparative

Nous proposons de faire notre étude sous une forme comparative. Quelle est la pertinence de la comparaison dans ce cas ? Elle est motivée d'une part par la prise en compte du contexte international. Elle sert en outre comme un outil méthodologique pour « sortir » de la tradition dont nous nous sentons l'héritière : la comparaison nous aide à prendre de la perspective par rapport à notre objet d'étude original. Au lieu d'étudier seulement la réforme hongroise et l'influence des publications internationales sur elle, nous étudions parallèlement la mise en place de la réforme dans deux pays différents.

2.1.1 Le choix du pays

Pourquoi comparer la Hongrie à la France ? Il y a bien sur une raison pragmatique : nos expériences vécues en France et la possibilité d'une thèse en cotutelle motivent assez naturellement ce choix. Mais il y a bien d'autres arguments pour une comparaison franco-hongroise des réformes des « mathématiques modernes ».

(1) Une raison méthodologique : il existe des recherches développées, historiques et didactiques, sur la réforme française des « mathématiques modernes » qui nous économisent

ce travail et qui peuvent aussi servir comme modèles pour la méthodologie de notre recherche.

(2) Des arguments historiques : comme nous le verrons plus loin (Partie I, §2.2), la France est un des pays moteurs dans le mouvement international, ayant une influence sur de nombreux autres pays à l'époque. Il existe aussi des interactions directes entre Varga et ses collègues français, Varga effectue plusieurs voyages en France dans les années 1970, il traduit des textes français en hongrois (Revuz 1963/1973) et il publie des travaux en français (Dumont & Varga 1973, Glaymann & Varga 1973). Varga suggère par ailleurs lui-même que les deux réformes sont particulièrement adaptées à une comparaison (Varga 1975 p. 48).

(3) Au-delà de ces arguments historiques, la comparaison promet d'être particulièrement intéressante d'un point de vue épistémologique et didactique. En effet, une des caractéristiques du mouvement de réforme des « mathématiques modernes » est l'attention particulière accordée à la nature des mathématiques, et à l'image que transmet l'enseignement de cette science (par ex. Gispert 2010, Gispert & Schubring 2011). L'influence d'une épistémologie « bourbakiste » est un lieu commun par rapport à la réforme française, soutenu par des recherches historiques diverses (par ex. Barbazo & Pombourcq 2010, d'Enfert & Gispert 2011). Dans le cas hongrois par contre, Varga se déclare successeur de Pólya (par ex. Varga 1975 p. 37), et il est souvent mentionné comme le représentant d'une tradition de « faire découvrir des mathématiques ». Il semble donc y avoir deux conceptions très différentes sur la nature des mathématiques et sur leur enseignement, l'une mettant l'accent sur la méthode axiomatique-déductive et sur la nature abstraite des mathématiques, l'autre insistant sur les démarches d'investigation et sur la résolution des problèmes.

Cette observation nous permet de poser des nouvelles questions : quel est l'arrière-plan épistémologique de la réforme hongroise et française ? Quel est le rôle de ces épistémologies dans la conception de la réforme ? Comment la vision sur la nature des mathématiques influence les différentes éléments de chaque système d'enseignement : les programmes, les ressources, les méthodes d'enseignement ?

De ce point de vue, l'étude comparative entre la réforme française et hongroise peut être considérée comme une étude de cas concernant un problème plus général, notamment le lien entre l'arrière-plan épistémologique et les caractéristiques didactiques de l'enseignement des mathématiques.

2.1.2 Le choix de la période

Tamás Varga date de 1962 le démarrage de son mouvement de réforme, quand un colloque international de l'UNESCO fut organisé à Budapest sur l'enseignement des mathématiques. Il a commencé des expérimentations en 1963 qui ont mené à un projet de réforme élaboré en 1972 et introduit officiellement, au niveau national en 1978.

En France, le programme de la réforme dite « mathématiques modernes » fut introduit à partir de 1969 pour le collège et le lycée et de 1970 pour l'école primaire, suite au travail de la commission Lichnerowicz. Un nouveau programme a été introduit dès 1977.

On peut donc voir que la dynamique de la réforme est différente dans les deux pays, le processus est plus lent en Hongrie qu'en France. L'introduction officielle de la réforme hongroise est parallèle plutôt avec le programme français de 1977, remplaçant le programme des « mathématiques modernes » ; alors que la conception de la réforme s'enracine dans tous les deux pays dans les années 1960. La conception de la réforme hongroise est très peu changée dans les années 1970, il s'agissait plutôt d'une introduction ralentie[6].

Pour cette raison, il nous semble pertinent de comparer la réforme des « mathématiques modernes » à la réforme de Varga. Nous allons en outre prendre en considération, plus ponctuellement, le programme français de 1977 et les changements qu'il a apportés par rapport au programme précédent.

Notre analyse didactique sera donc centrée sur les documents liés au programme de 1978 pour la Hongrie, aux programmes de 1969/70 et de 1977 pour la France.

2.1.3 Le choix des niveaux scolaires

Avant de pouvoir argumenter nos choix concernant les niveaux scolaires à étudier, il faut dire quelques mots sur le système scolaire des deux pays et sur le vocabulaire lié.

Le système scolaire des deux pays est légèrement différent au moment de la réforme[7]. L'éducation obligatoire concerne les élèves de 6 à 15 ans en France, de 6 à 14 ans en Hongrie. En France, on trouve une école primaire de cinq ans suivi d'un « collège » de quatre ans. Le collège n'est pas encore unique au moment de la réforme des mathématiques modernes, il existe des établissements de différents types, mais leur programme est unique. Le collège unique est créé en 1975. Le « collège » est considéré comme le premier cycle de

[6] Nous allons examiner de plus près la dynamique de l'introduction des deux réformes dans la partie historique de la thèse.

[7] On va voir lors de l'analyse historique que les systèmes scolaires ont subit des transformations importantes au cours de l'histoire, et tout particulièrement dans les décennies après la deuxième guerre mondiale – ici, nous parlons uniquement de leur état au moment de la réforme.

l'enseignement secondaire, les études peuvent être poursuivies dans le deuxième cycle du secondaire, durant trois ans, dans différents types d'établissements dont le lycée.

En Hongrie, c'est l'*általános iskola* (« école générale ») de huit ans, obligatoire et unique, qui est découpée en deux cycles : son premier cycle de quatre ans correspond à peu près à l'école primaire française, son deuxième cycle de quatre ans au collège français. Les études peuvent être poursuivies dans des différents établissements secondaires, durant également quatre ans.

On trouve donc trois cycles dans chaque cas (avec un décalage d'un an entre les deux systèmes), dont les deux premiers sont obligatoires et suivent un programme unique. Dans tous les deux cas, pour le premier cycle il s'agit des maîtres ayant une formation générale, alors que les enseignants sont des spécialistes dans les deux cycles suivants. Il y a en même temps une différence importante : l'általános iskola hongrois est un établissement unique, les élèves restent au même endroit, et les classes ne sont pas réorganisées chaque année, les mêmes élèves restent ensemble pendant huit ans. Seuls les derniers quatre ans de l'éducation sont considérés comme le niveau « secondaire ». En France par contre, il s'agit de trois établissements différents, dont les deux derniers constituent le niveau secondaire de l'éducation. Cette différence s'avèrera significative du point de vue de la réforme.

La figure ci-dessous présente schématiquement les deux systèmes (sans tenir compte des différents types d'établissement parallèles).

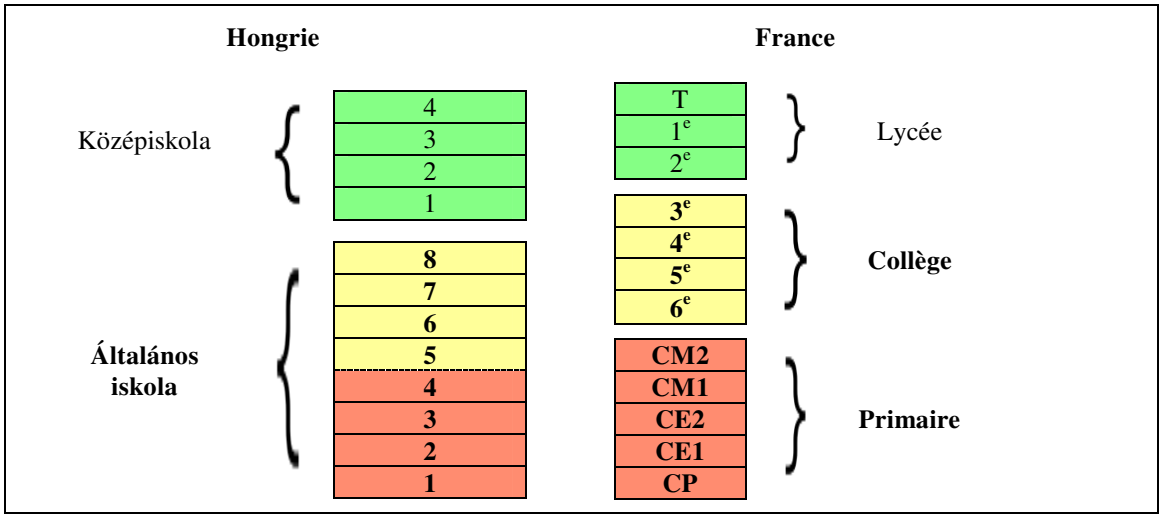


Figure 1 : Comparaison du système scolaire hongrois et français de l'époque de la réforme
En gras les niveaux que nous étudions dans la thèse.

Pour référer sans ambiguïté aux différents cycles des deux systèmes scolaires, il nous semble nécessaire d'introduire un vocabulaire particulier. Les expressions « primaire » et « secondaire » ont changé de signification durant l'histoire de l'enseignement française, comme on le verra plus loin ; le mot « cycle » porte aussi des significations multiples et nous

ne le retenons donc pas pour la suite. Nous allons appeler « école élémentaire » le premier cycle des deux systèmes, l'école primaire en France, la première moitié de l'általános iskola en Hongrie. Nous utiliserons l'expression « école moyenne » pour le deuxième cycle, pour le collège français et la deuxième moitié de l'általános iskola hongrois. (Nous utiliserons ces expressions pour désigner les niveaux scolaires en général, mais dans certains cas, quand nous parlons uniquement du cas français et sans risque d'ambiguïté, nous garderons les expressions françaises pour plus de commodité.) Nous parlerons parfois du troisième cycle sous le nom du « lycée » : en effet, nous ne nous intéresserons qu'à la formation générale dans le cadre de la thèse, et nous ne prenons pas en considération des formations professionnelles.

La numération des niveaux scolaires sont différentes aussi dans les deux cas : en Hongrie, à l'époque, on numérote de 1 à 8, ensuite on recommence de 1 à 4. En France, après les désignations particulières des années de l'école élémentaire, on numérote du 6e jusqu'au 1e et enfin on parle de « classe terminale ». Pour éviter des ambiguïtés, nous parlerons dans la thèse des « grades », numérotés de 1 à 12. (De nouveau, nous ferons quelques exceptions en référant directement à certaines ressources françaises, quand la désignation originale n'apporte pas de risque d'ambiguïté.)

En France, la réforme est orientée « du haut vers le bas », pas seulement à l'égard du rythme de son introduction (en 1969 pour le collège et le lycée, en 1970 pour le primaire), mais aussi dans ses objectifs qui cherchent à harmoniser l'enseignement avec les niveaux plus élevés : le lycée avec l'université, le primaire avec le collège. Cela signifie aussi que la réforme du secondaire est plus longuement travaillée et plus profonde que celle du primaire. En Hongrie, le « sens » de la réforme est inverse : Varga commence ses expérimentations à l'école élémentaire et ne les prolonge à l'école moyenne que plus tard, avec moins d'investissement. Le programme de Varga se limite à l'éducation obligatoire, les premiers huit ans de l'éducation ; la réforme du programme du lycée, introduite également en 1978, est beaucoup moins importante.

Vu cette différence, il n'est pas évident de choisir les niveaux scolaires à comparer : la réforme française gère ensemble l'enseignement « secondaire », c'est-à-dire l'école moyenne et le lycée, et c'est ce qui est le plus significatif par rapport à la réforme du niveau élémentaire. La réforme de Varga concerne par contre l'école élémentaire et moyenne, et c'est au niveau élémentaire où elle est la plus importante.

Nous proposons donc d'étudier les réformes au niveau de l'école élémentaire et de l'école moyenne. Ce choix large nous parait nécessaire pour obtenir une image pertinente des deux

réformes : seule l'étude de l'élémentaire serait insuffisante pour la France, seule l'étude de l'école moyenne serait insuffisante pour la Hongrie. De plus, ce choix nous permet de parcourir l'éducation obligatoire de l'époque. Nous ne pouvons évidemment pas étudier le programme entier de 8 ou 9 ans en détails : après une étude globale des programmes, nous allons donc choisir quelques extraits de programme pour une étude plus approfondie, issus des différents niveaux de l'éducation.

Nous n'étudions par contre pas le niveau du lycée : pas seulement pour des raisons de délimitation de notre objet d'étude, mais aussi parce que les programmes ne sont pas uniques à ce niveau, et enfin, parce que l'œuvre de Varga ne concerne pas le niveau du lycée.

2.1.4 Une comparaison inévitablement déséquilibrée

Dans le cas des études comparatives internationales, la partialité est un risque important[8] : et c'est particulièrement vrai pour les cas, comme le nôtre, où le chercheur venant d'une de ces cultures travaille solitairement. Nous avons obtenu notre formation en Hongrie et nous sommes observateurs en France : notre relation avec les deux systèmes éducatifs est radicalement différent.

Non seulement l'interprétation des résultats d'une recherche, mais aussi les choix thématiques et méthodologiques peuvent introduire, souvent inconsciemment, un déséquilibre dans une étude comparative et influencer les résultats de la comparaison. C'est sans doute vrai pour notre cas aussi. Nous avons vu par exemple que le choix du niveau scolaire étudié en est un facteur important ; nous allons voir aussi, lors des choix de chapitres de programmes à étudier, qu'il n'est pas facile de trouver des thèmes également pertinents du point de vue des deux réformes.

Encore un facteur risque de déséquilibrer notre étude. Dans plusieurs des cas, nous nous appuyons sur plusieurs recherches existantes concernant la France, dont nous ne ferons qu'une synthèse, alors que nous faisons nous-mêmes la majorité des analyses correspondantes concernant la Hongrie. Nous ne ferons donc pas toujours le même type de travail dans le cas hongrois et français.

Nous nous inspirons cependant de la méthodologie des recherches françaises pour développer notre recherche sur la Hongrie ; de plus, nous essayons d'appliquer les théories didactiques développées en France sur le cas hongrois. Nous nous retrouverons face à des

[8] Pour rendre compte des discussions du groupe « études comparatives en didactique des mathématiques » à CERME 2015, nous référons au papier de David Clarke, présenté dans ce groupe (Clarke 2015).

problèmes de transmissibilité : quelles sont les possibilités et les limites de l'adaptation sur un nouveau contexte des théories et méthodologies développées dans un contexte particulier ?

Il nous semble donc nécessaire de reconnaître, dès le départ, que notre comparaison est inévitablement déséquilibrée. Mais ce n'est pas forcément contradictoire avec nos objectifs originaux. Comme nous l'avons signalé plus haut, le choix de l'approche comparative nous sert en partie comme un outil méthodologique pour sortir de la culture hongroise : même si elle ne l'élimine pas complètement, la comparaison nous aide justement à diminuer notre partialité naturelle envers notre culture originelle. Permettant de travailler parallèlement dans deux milieux, en étant en contact régulier avec des chercheurs français et hongrois, la thèse en cotutelle constitue un facteur important pour approcher une certaine objectivité. Enfin, consciente de l'impossibilité de suivre une approche parfaitement équilibrée face à notre objet d'étude, nous chercherons à rester critique sur les risques de partialité : nous essayerons d'identifier des choix qui peuvent introduire un certain déséquilibre dans notre approche.

2.2 Une approche double, historique et didactique

Nous proposons deux entrées à notre étude : historique et didactique.

(1) Du premier point de vue, il s'agit de considérer une réforme d'enseignement comme produit de facteurs divers issus de son contexte historique : du contexte politique, socio-économique, culturel, scientifique, pédagogique. Des recherches en histoire de l'éducation cherchent à interpréter les différentes caractéristiques de l'enseignement (en l'occurrence des mathématiques) en fonction des interférences complexes entre les ambitions variées des divers acteurs et des conditions déterminées par des institutions (par ex. Belhoste, Gispert & Hulin 1996, d'Enfert & Kahn 2010, 2011, Karp & Schubring 2014). Nous prendrons particulièrement en considération deux facteurs : d'un part le contexte du mouvement de *réforme international*, intitulé « New Math », ou « mathématiques modernes », d'autre part des « *traditions* d'enseignement des mathématiques » *particulières à chaque pays*. C'est ce qui inspire dans le titre de notre thèse les expressions « tradition et réforme ».

Nous mettons entre guillemets le mot « tradition », car il ne s'agit pas nécessairement de quelque chose stable, ni de quelque chose d'homogène au niveau d'un pays : on verra en effet que les « traditions d'enseignement des mathématiques » se développent et se transforment justement en lien avec le mouvement de réforme dans la seconde moitié du 20e siècle. L'analyse historique nous servira entre autre à identifier des acteurs principaux qui pouvaient influencer la réforme de la Hongrie et de la France. Nous montrerons qu'il existe en effet un

groupe de mathématiciens actifs autour de la conception de la réforme, qui expriment dans chacun des deux cas une vision spécifique sur la nature des mathématiques et sur leur enseignement. Nous nous intéresserons particulièrement à cet arrière-plan épistémologique de chaque réforme, et nous chercherons à éclaircir leurs effets sur les différentes caractéristiques des réformes. Nous référerons à des « traditions » française et hongroise dans ce sens spécifique. Même s'il y a des raisons de supposer que leur effet est plus général et plus durable, nous ne pourrons pas aller aussi loin avec notre recherche dans le cadre de la thèse.

(2) D'un point de vue didactique, nous nous intéressons aux réformes comme des projets pour transformer des aspects divers de l'enseignement des mathématiques, les programmes, les méthodes d'enseignement et les ressources entre autres, constituant des éléments d'un système complexe et cohérent. En effet, nos ressources primaires et secondaires insistent souvent sur l'interdépendance de ces différents aspects, et soulignent avant tout la transformation du contenu et de la structure des programmes et des méthodes d'enseignement. Nous cherchons donc des outils d'analyse didactiques qui permettent de tenir compte de ces éléments.

Nous nous servons avant tout de la didactique française. Pour l'étude des programmes, nous nous inspirons de l'approche écologique (Artaud 1997) qui permet d'interpréter l'organisation du programme au-delà de prendre simplement en considération son contenu. Pour comprendre les liens entre les méthodes d'enseignement et le contenu mathématique, nous nous appuyons sur la Théorie de Situations Didactiques (TSD), développée par Brousseau (1998), avec certains des développements plus contemporains de la théorie. Les notions « d'adidacticité » et de « contrat » issues de la TSD s'avèreront particulièrement utiles pour comprendre ce que les différents auteurs de l'époque des réformes appellent « méthodes actives ». Nous utiliserons en outre plus ponctuellement plusieurs autres théories didactiques, comme la dialectique outil-objet de Douady (1986), ou la notion des paradigmes en géométrie (Houdement & Kuzniak 2006) et en probabilité (Parzysz 2011).

Nous ne détaillons pas ici ces choix de théories didactiques : nous revenons sur ce sujet au début de la partie didactique de la thèse (Chapitre 1).

2.2.1 Une étude systémique

Dans le cas des deux approches, historique et didactique, il s'agit de penser en système. Pour des recherches didactiques, plusieurs modèles théoriques existent qui visent à prendre en considération les éléments d'un système d'enseignement et les relations entre eux. En lien avec des études TIMMS, (Schmidt et al. 1996) introduit par exemple la notion de

« pedagogical flow », suggérant qu'il existe un certain courant d'enseignement caractéristique pour chaque pays qui détermine des différentes caractéristiques des programmes, de ressources et des pratiques. Leur modèle, connu comme le « modèle SMSO » prend en considération des interdépendances complexes au sein d'un système éducatif :

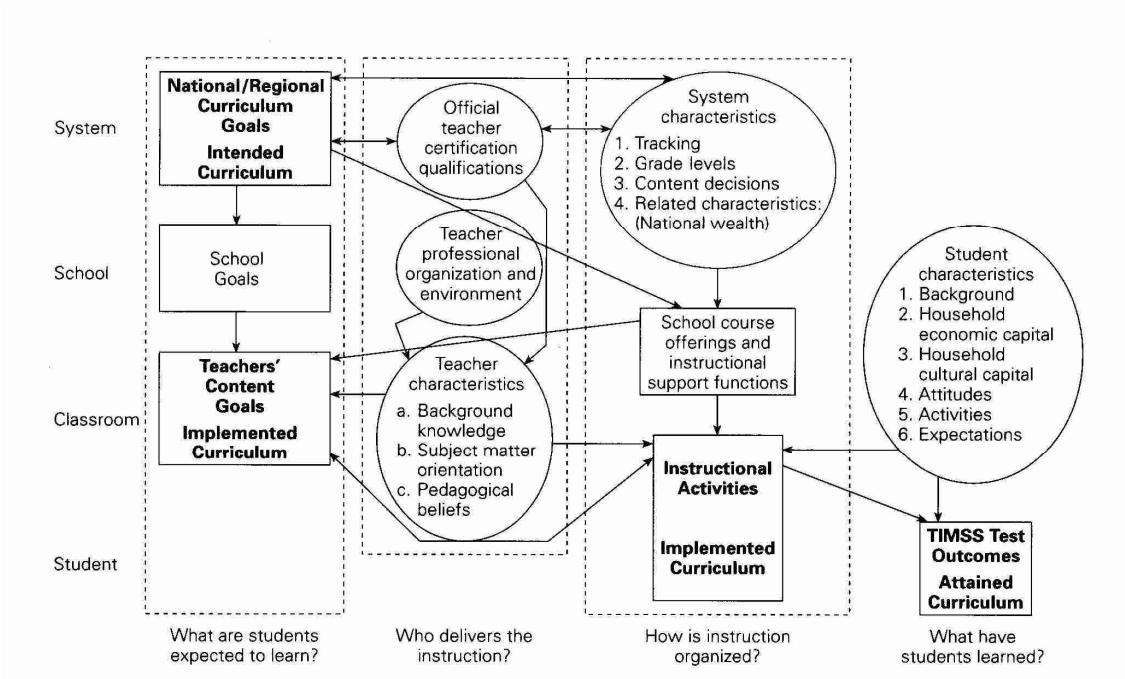


Figure 2 : le modèle SMSO

Cependant, il ne prend pas en compte les effets politiques, économiques, sociaux, culturels etc. venant de l'extérieur du système. Il ne différencie pas non plus les particularités d'enseignement d'une discipline concrète.

Chevallard (2002) réfléchit avec une structure plus large : son modèle *des niveaux de codétermination* comprend « la société », « l'école » et « la pédagogie » comme niveaux supérieurs déterminant l'enseignement d'une discipline, en l'occurrence des mathématiques. En même temps, son modèle strictement hiérarchique ne permet pas de révéler la complexité des voies d'influence entre ces différents éléments. Un autre contrainte de ce modèle pour notre recherche consiste en sa limitation à l'étude des institutions : il considère des individus comme représentants de certaines institutions, mais ne prend pas en considération leur personnalité, leurs parcours et leurs ambitions spécifiques.

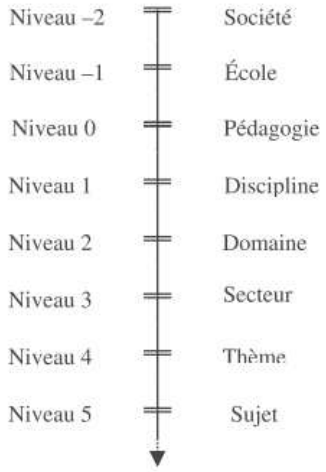


Figure 3 : les niveaux de codétermination (Chevallard 2002a)

2.2.2 Le modèle général de la thèse

Nous proposons pour notre étude un modèle plus souple, mais permettant de prendre en considération des différentes aspects qui nous intéressent. Nous définissons trois niveaux de ce modèle : (1) le contexte historique d'une réforme, (2) son arrière-plan épistémologique conçu par les acteurs-mathématiciens principaux et (3) les caractéristiques didactiques d'une réforme.

Figure 4 : le modèle général de la thèse

C'est ce modèle qui permet de structurer notre thèse, et formuler nos questions de recherche. Nous consacrons une partie de la thèse pour chaque niveau et nous étudierons les questions suivantes :

1, Quels sont les éléments du contexte historique qui influencent la réforme française et hongroise de l'époque des « mathématiques modernes » ?

2, Quel est l'arrière-plan épistémologique de chaque réforme ? Quelle est la conception des acteurs principaux sur la nature des mathématiques et sur son enseignement, dans le cas de la réforme française et hongroise ?

3, Quelles sont les caractéristiques didactiques de ces deux réformes, prenant en considération tout particulièrement les programmes, les ressources et les pratiques pédagogiques envisagées par les réformateurs ? Peut-on identifier un « pedagogical flow » cohérent dans le cas hongrois et français ?

4, Quelles sont les voies d'influence entre ces différents niveaux ? Comment le contexte historique et l'arrière-plan épistémologique influencent-ils les caractéristiques didactiques des réformes ?

2.3 Le choix des ressources : une étude des documents écrits

Avant de terminer l'introduction, il nous semble important de préciser encore un point. Nous allons expliquer nos choix de ressources spécifiquement pour chaque partie de la thèse ; nous insistons ici seulement sur un choix concernant l'analyse didactique.

La réforme des pratiques pédagogiques se situe au centre de notre problématique – mais pour leur étude, nous nous retrouvons face à une difficulté méthodologique importante. Ce type de recherche didactique nécessiterait notamment des observations en classe, ce qui n'est évidemment pas possible pour les classes des années 1970. Il existe quelques vidéos de l'époque, mais peu nombreuses, sans contexte et dans des circonstances trop artificielles (en studio et pas en vrais classes). Il serait donc difficile à accéder aux pratiques d'enseignement dans les classes ordinaires.

Nous devons donc déclarer à ce point que *l'étude des pratiques ordinaires n'est pas l'objectif de notre thèse* : nous nous intéressons aux *pratiques envisagés par les concepteurs des réformes*, et nous nous appuyons *uniquement sur des sources écrites* (programmes, instructions, manuels scolaires et livres de professeurs) pour faire un travail de *reconstitution de ces pratiques*. Il ne s'agit évidemment pas de reconstruction complète des pratiques : les ressources donnent des instructions détaillées sur certains points et se taisent sur d'autres, laissant une liberté aux enseignants qui mettent en œuvre les programmes. On verra qu'il existe des différences importantes entre les ressources sur ce niveau : ce qu'elles explicitent et ce qu'elles ne traitent pas. Rien que ces différences vont permettre déjà de tirer des conséquences importants sur la conception des réformateurs concernant les pratiques des enseignants.

Il y aurait éventuellement d'autres moyens pour accéder aux pratiques des années 1970 : faire par exemple des entretiens avec des enseignants (ou avec des élèves) de l'époque, ou bien observer des classes ordinaires d'aujourd'hui et en tirer des conséquences sur les pratiques de l'époque. Nous avons plusieurs raisons de ne pas suivre cette piste (c'est-à-dire, nous limiter à l'analyse des textes dans une première étape, et renvoyer leur comparaison avec des pratiques actuelles aux perspectives de la thèse) :

(1) Une prudence méthodologique : les observations en classe nécessitant une méthodologie très différente de celle des autres aspects de notre recherche, il nous a paru irréaliste d'intégrer des telles observations dans la thèse, dans deux différents pays, surtout dans les conditions de la cotutelle.

(2) Un danger d'anachronisme : même si l'époque étudiée n'est pas très éloignée (en effet, nous avons eu la chance de voir enseigner, il y a quelques années encore, certains anciens collègues de Varga, et également certains enseignants français qui avaient été débutants à l'époque des « mathématiques modernes »), beaucoup de changement sont arrivés à l'éducation depuis des années 1970, et nous devons supposer que les pratiques de ces enseignants ont progressé d'une façon importante. Interpréter donc les pratiques envisagées par des réformateurs de l'époque des « mathématiques modernes » en se basant sur des pratiques modernes pourrait amener à des anachronismes. Il nous paraît plus prudent, et plus fructueux aussi, de séparer le travail en deux étapes : analyser d'abord les pratiques attendues aux années 1970, et les comparer, dans une deuxième étape (comme une suite de la thèse), avec les pratiques observables aujourd'hui[9].

(3) Une vigilance sur l'analyse textuelle : nos premières interprétations sur les documents étudiés s'inspirait fort, et naïvement, des expériences d'enseignement qui nous étaient familières. Mais nous avons dû constater que ces interprétations étaient fort différentes de celles des lecteurs français qui avaient connu des expériences différentes. Ce problème nous a obligée à clarifier les raisons de nos interprétations et montrer des indices dans les textes qui confirmaient notre lecture. En fait, nous nous inspirons ici d'une certaine vigilance des recherches historiques : de nombreuses recherches historiques s'intéressent aussi aux différentes pratiques où leurs textes analysés s'inscrivent, mais n'ayant pas un accès direct à ces pratiques, et étant conscients que ces pratiques peuvent être radicalement différentes de leur correspondants contemporains, les chercheurs sont obligés à trouver des indices textuels pour reconstituer les pratiques de l'époque[10]. Cette vigilance nous semble être au fond similaire à celle nécessaire pour notre recherche comparative en didactique.

(4) Un regard sur les « ressources » : les enseignants de l'époque se trouvaient face à des changements importants concernant tous les aspects de l'enseignement des mathématiques, et, même si des formations continues étaient proposées dans les deux pays, la majorité des enseignants étaient obligés de mettre en place ces changements en s'appuyant uniquement sur les documents écrits. En se concentrant sur l'analyse de ces sources, nous nous mettons dans une position similaire à celle de ces enseignants : ce point de vue permet d'interpréter ces

[9] Nous avons d'ailleurs fait des entretiens avec certains acteurs de la réforme dans les deux pays (Voir la liste des entretiens dans la bibliographie, §5), et les informations ainsi obtenus peuvent compléter l'analyse textuel, mais ne la remplacent pas, et en tout cas, ne sont pas suffisants pour pouvoir décrire les pratiques ordinaires de l'époque. Nous appuyons sur ces entretiens avant tout dans la partie historique de la thèse, et beaucoup moins dans l'analyse didactique.

[10] Voir par exemple (Lamassé 2014) ou les études du recueil du projet collaborative « séries de problèmes » (A. Bernard (ed.), *Les séries de problèmes, un genre au carrefour des cultures*. EDP sciences: SHS Web of Conferences. à paraître).

documents en tant que *ressources*, et de comprendre comment les enseignants devaient s'en servir, comment ils pouvaient construire leur propre pratique à partir de ces documents, et quelles étaient les difficultés potentielles qu'ils pouvaient rencontrer lors de ce processus. On verra qu'il y a des différences significatives entre les sources hongroises et françaises sur ce point, et l'étude de ces différences donnera beaucoup d'informations sur les pratiques attendues par les concepteurs des réformes.

3 LA STRUCTURE DE LA THESE

La thèse, conformément au modèle général que nous avons retenu, comprend trois parties principales :

- une partie historique
- une partie épistémologique
- une partie didactique.

Les deux premières fournissent le contexte d'interprétation pour la partie didactique, cette dernière constituant la partie essentielle de notre étude.

La partie historique s'inspire des méthodes des recherches sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques. Nous nous appuyons sur des recherches existantes concernant le mouvement de réforme internationale des « mathématiques modernes » et concernant l'histoire de l'enseignement en France. Pour le cas hongrois, nous pouvons nous servir de quelques recherches générales sur l'histoire du système éducatif et sur l'histoire des mathématiques hongroise. Nous utiliserons en outre comme ressources primaires des documents officiels de l'époque, des remémorations écrites des acteurs et des témoins des réformes, et quelques entretiens que nous avons enregistrés avec des acteurs des réformes.

Après un résumé des recherches historiques concernant le mouvement international, nous nous intéresserons aux éléments du contexte historique de la réforme française et hongroise : les motifs politiques, socio-économiques, mathématiques et pédagogiques des réformes, les changements des deux systèmes éducatifs, les acteurs principaux, le dynamique de l'introduction des réformes. Nous remonterons dans l'histoire, jusqu'au début du 20e siècle, pour identifier des facteurs influençant la réforme des « mathématiques modernes » dans les deux cas.

La partie épistémologique s'appuie sur la partie précédente : l'analyse historique révélera le rôle particulièrement important des mathématiciens dans la conception des deux réformes

étudiées, et un fort intérêt des réformateurs pour les questions d'épistémologie des mathématiques. Nous pourrons ainsi montrer la présence d'une épistémologie « bourbakiste » à l'arrière-plan de la réforme française ; quant au cas hongrois, nous définirons un groupe de mathématiciens à l'arrière-plan de la réforme qui expriment une position épistémologique cohérente, mais différente de la position « bourbakiste ».

Nous analyserons des écrits divers des mathématiciens en question (surtout des conférences sur l'enseignement des mathématiques, des œuvres de vulgarisation, et peu de textes directement philosophiques) pour pouvoir résumer les principes de leur conception sur la nature des mathématiques et sur leur enseignement. Dans le cas français, de manière similaire à la partie historique, il existe des recherches sur lesquelles nous pouvons nous appuyer ; dans le cas hongrois, il en existe beaucoup moins, nous essayerons donc nous-mêmes d'élucider les principes de cette conception et confirmer qu'il s'agit d'une épistémologie cohérente et spécifique, en parenté avec celle de Pólya et de Lakatos, que nous allons nommer « heuristique ».

La troisième partie, la plus longue et la plus importante, vise à étudier les caractéristiques didactiques de la réforme française et hongroise. Nous consacrerons un chapitre distinct (Chapitre 1) pour les questions méthodologiques de cette partie que nous ne résumons que très brièvement ici. Nous commençons notre étude avec une analyse globale du contenu et de la structure des programmes, s'inspirant de l'approche écologique (Chapitre 2). Puisqu'il s'agit du programme entier de l'école élémentaire et de l'école moyenne, nous ne pouvons pas fournir une analyse détaillée des programmes complets : nous procéderons de choisir des extraits de programmes que nous jugeons représentatives d'un point de vue ou d'un autre.

Nous consacrerons ainsi les trois derniers chapitres à trois exemples, concernant différents niveaux scolaires et différents domaines mathématiques. Chaque fois nous nous intéresserons d'abord à l'écologie des programmes : nous chercherons à interpréter la place et la fonction spécifique que l'extrait choisi remplit dans l'ensemble du programme. Cette analyse nous aidera à comprendre entre autres l'arrière-plan épistémologique des choix de chaque programme. Nous nous intéresserons ensuite chaque fois aux pratiques pédagogiques : nos différents exemples sont accompagnés de différents types de ressources (fiches de travail et livres du maître, manuels scolaires, articles) et ils nous permettront d'éclaircir différentes aspects des pratiques envisagées par des réformateurs. Nous appliquerons les termes de la TSD, complétés par quelques autres outils théoriques, pour interpréter ces pratiques. Nos différentes exemples permettront en outre de prendre en considération des échelles

différentes, de l'introduction d'une notion et de l'étude d'une situation jusqu'à la construction des processus d'enseignement sur le plus long terme.

Notre premier exemple (Chapitre 3) est l'introduction de la notion des nombres naturels au grade 1 : nous étudierons pour cet exemple des fiches de travail et des livres du maître de l'école élémentaire.

Notre deuxième exemple (Chapitre 4) est le théorème de Pythagore, dans le contexte du programme de géométrie de l'école moyenne. Nous analyserons dans ce chapitre des manuels scolaires de l'école moyenne.

Notre troisième et dernier exemple (Chapitre 5) concerne un thème caractéristique de l'œuvre de Varga, l'enseignement de la combinatoire et des probabilités. Ce thème n'est pas présent dans le programme français des « mathématiques modernes » de l'école élémentaire et de l'école moyenne, mais apparaît ponctuellement dans la suite de la réforme, tout particulièrement dans les différentes expérimentations menées dans les années 1970. Outre des documents officiels, nous étudierons ici également quelques articles didactiques des acteurs de l'époque.

Nous avons référé plus haut aux difficultés des choix de thèmes pour cette étude comparative. Les exemples choisis n'ont pas forcément la même pertinence pour les deux réformes étudiées, et l'image qu'on obtient sur les réformes peut changer en fonction de ces choix. Nous argumenterons plus en détails ces choix dans l'introduction de la partie didactique et dans les introductions de chaque chapitre.

PARTIE I
LE CONTEXTE HISTORIQUE DES DEUX REFORMES

1 INTRODUCTION

Cette partie de la thèse a pour objectif d'identifier des éléments du contexte historique des réformes de l'enseignement des mathématiques que nous allons étudier dans la partie III. Quels types d'éléments de contexte sont ici en jeu ?

La structure et les changements du système éducatif représentent évidemment un facteur qui influence le développement de l'enseignement d'une discipline : en effet, on verra qu'une grande partie des réformes de l'enseignement des mathématiques (même si ce n'est pas le cas pour la totalité d'entre elles) se sont déroulées dans le contexte d'une réorganisation générale du système éducatif.

Les divers facteurs politiques et socioéconomiques jouent aussi un rôle, et pas seulement par la voie du système éducatif – comme dans le cas du renforcement du poids des mathématiques pour répondre aux besoins économiques à l'époque des « mathématiques modernes », ou par la transformation du public enseigné, la massification de l'éducation par exemple. Ils jouent aussi directement sur les éléments du contenu mathématique ou sur les questions épistémologiques : on verra plusieurs exemples de ce phénomène, comme le refus d'une approche concrète et pratique des mathématiques pour des raisons nationalistes en France dans l'entre deux guerres (§3.1), ou bien le rapport observable entre la position de l'élit dans une société et le rôle accordé au formalisme dans l'enseignement des mathématiques (§3.2.2 et 4.2.3).

L'influence de la science mathématique est indéniable : rapprocher le contenu de l'enseignement à l'état actuel de la science, c'est un argument récurrent pour des réformes disciplinaires de l'époque moderne. Mais cet « état actuel » peut être ambigu, et sa définition dépend des acteurs : on verra que dans le cas de la réforme des « mathématiques modernes », même si tout le monde se réfère aux avancements globaux des mathématiques, et plusieurs caractéristiques communes des réformes découlent de cette idée au niveau international, ces « avancements » des « mathématiques modernes » ne signifient pas la même chose dans chaque pays. On pourra observer des différences importantes dans l'épistémologie et dans le contenu des programmes français et hongrois, en lien étroit avec la culture mathématique qui les entoure, et tout particulièrement avec l'œuvre des mathématiciens qui se mobilisent pour rénover l'éducation.

Ce dernier exemple montre bien l'importance qu'il y a à prendre en considération des acteurs qui interviennent dans l'élaboration des réformes, regardant à la fois le niveau

institutionnel et personnel. Sont-ils des politiciens ? Des mathématiciens, de la sphère savante, universitaire ? Des psychologues ou spécialistes des sciences de l'éducation ? Des enseignants du niveau élémentaire ou secondaire ? Le caractère d'une réforme dépend fortement de l'arrière-plan institutionnel des intervenants : leur formation, leur connaissance du terrain, leurs ambitions. En outre, les acteurs principaux, leur parcours, leur culture, leur avis personnel s'avèrent également importants dans certains cas : il ne suffit donc pas de réduire l'étude au niveau institutionnel.

Enfin d'autres aspects, d'un contexte culturel, philosophique plus large, peuvent aussi jouer un rôle. Bien sûr, il serait difficile d'embrasser le contexte culturel en général, mais on peut identifier quelques éléments pertinents : tel sera le cas du courant structuraliste en France dans les années 1950 et 1960 (§3.2.1), ou bien d'une école pédagogique, socio-psychologique émergeant en Hongrie dans les années 1940 autour de S. Karácsony (§4.2.2).

Dans les analyses qui suivent, nous comparons l'histoire française et hongroise en les situant dans leur contexte international. En effet, depuis le début du 20e siècle, une coopération internationale peut être observée, dans plusieurs périodes, sur la rénovation de l'enseignement des mathématiques : c'est le cas de la fondation de l'ICMI sous la direction de Félix Klein au début du 20e siècle, ou bien le mouvement des « mathématiques modernes » dans les décennies 1950, 1960 et 1970. On va voir que les changements au niveau national sont étroitement liés à ces mouvements internationaux dans tous les deux pays ; de plus, le caractère international de la réforme est un argument fort et récurrent des acteurs pour convaincre leur public (politicien, professionnel ou le grand public).

Bien que notre recherche se concentre sur l'étude des réformes de l'époque des « mathématiques modernes », nous abordons brièvement, dans l'analyse historique, une autre période, celle du début du 20e siècle. Ce choix n'est pas inédit : plusieurs études historiques, internationales et françaises comparent ces deux périodes (par ex. Belhoste, Gispert & Hulin 1996 ; Gispert & Schubring 2011). Une des raisons de ce choix est l'importance particulière de ces deux moments de l'histoire de l'enseignement des mathématiques, à la fois au niveau international, en France et en Hongrie. Pour la France, un renouvellement important de l'enseignement secondaire ; pour la Hongrie l'émergence du système éducatif public et aussi d'une culture mathématique : les réformes du début du 20e siècle restent des points de référence importants même après la seconde guerre mondiale. Un autre argument souligné par les historiens français est la transformation radicale de la notion de « modernité » d'une réforme à l'autre, en fonction des changements du contexte épistémologique et socioculturel.

Dans le cas hongrois par contre, on verra plutôt une continuité du point de vue épistémologique.

Ainsi, la prise en compte de cette histoire précoce permettra d'éclaircir davantage le contexte, et apportera des éléments d'explication aux différences identifiables entre les réformes « mathématiques modernes » des deux pays.

Notre analyse historique est une étude comparative, mais, comme nous l'avons signalé dans l'introduction de la thèse, il s'agit d'une comparaison déséquilibrée. Pour ce qui concerne l'histoire internationale et française, nous pouvons nous appuyer sur les recherches récentes sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques : les chapitres correspondants (§2 et 3) consistent principalement en un résumé des travaux existants. Ce résumé va nous servir à la fois de contexte d'interprétation des documents de la réforme dans les parties suivantes, et pour base de comparaison avec le cas hongrois.

Concernant la Hongrie par contre (§4), ce type d'étude manque encore, surtout pour la deuxième moitié du 20e siècle. Outre quelques œuvres d'histoire générale et de l'éducation, nous nous appuyons donc sur quelques documents officiels, de correspondances, d'articles de l'époque présentant le déroulement de la réforme, et sur des remémorations écrites et oralesx des collègues de Varga. Une étude systématique des archives des institutions du système éducatif serait probablement nécessaire pour une reconstitution plus complète de cette histoire, mais qui dépasse les cadres de cette thèse et reste une des perspectives possibles de notre recherche.

2 LE MOUVEMENT DES « MATHEMATIQUES MODERNES » A L'ECHELLE INTERNATIONALE

2.1 Les débuts de la coopération internationale sur l'enseignement des mathématiques au début du 20e siècle

L'enseignement des mathématiques est l'objet d'une coopération internationale depuis le début du 20e siècle. Suite à une réforme introduite en France en 1902 dans l'enseignement secondaire, et un mouvement parallèle en Allemagne, nommé le « projet de Meran », la Commission Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques (CIEM ou ICMI) est fondée en 1908, sous la direction de Felix Klein (Gispert & Schubring 2011). La coopération

concerne principalement le second degré et la transition entre le niveau secondaire et l'université ; une attention particulière est mise sur l'enseignement des fonctions. Outre les deux pays directeurs, la France et l'Allemagne, plusieurs autres pays rejoignent le mouvement ; du côté hongrois par exemple, c'est Manó (Emmanuel) Beke, disciple de Klein, professeur du second degré et puis de l'université, qui prend un rôle actif dans l'ICMI (Kántor & Schubring 2008).

La première guerre mondiale limite les coopérations internationales : l'ICMI ne continue son activité qu'à partir de la fin des années 1920, et seulement à un niveau réduit. Une réelle coopération internationale est relancée dans les années 1950, avec le mouvement des « mathématiques modernes » (Gispert & Schubring 2011).

2.2 La dynamique internationale à l'époque des « mathématiques modernes »

On fait souvent remonter le démarrage du mouvement international dit « New Math », ou « mathématiques modernes » au « choc Spoutnik » en 1957, quand l'URSS lance le satellite Spoutnik1 (Gispert & Schubring 2011, Kilpatrick 2012). Cet évènement attire l'attention des pays occidentaux, plus particulièrement des États-Unis sur l'importance du développement technique dans la compétition de la guerre froide, et les pousse à accorder une attention particulière à l'enseignement des mathématiques, jugé nécessaire pour pouvoir répondre aux défis techniques et économiques de l'époque. L'OECE (devenu plus tard OCDE)[11] lance des échanges internationaux pour promouvoir une réforme de l'enseignement des mathématiques.

En fait, cette attention politique rejoint une dynamique, principalement de mathématiciens et de psychologues, existant depuis le début des années 1950 au sein de plusieurs organismes internationaux. Gispert (2010) résume la diversité d'acteurs, discours et intentions existants dans cette période.

La Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement mathématique (CIEAEM) est créée en 1952 à l'initiative de Caleb Gattegno. L'ambition de l'organisme est d'allier les résultats de la pédagogie et la psychologie moderne, avant tout de Jean Piaget, avec des mathématiques renouvelés dans l'esprit du groupe Bourbaki ; et ce qui permet de réunir ces deux approches, c'est la notion de structure. Le premier livre publié par la CIEAEM en 1955 illustre bien ces ambitions, contenant des articles de Piaget, Gattegno et de trois mathématiciens français, Gustave Choquet, Jean Dieudonné et André Lichnerowicz.

[11]Organisation européenne de coopération économique, qui se transforme en Organisation de coopération et développement économique plus tard.

Relancée en 1952 après la seconde guerre mondiale, l'ICMI se concentre plutôt sur le rôle social des mathématiques, dans des sociétés industrielles et dans un contexte de massification de l'éducation. Contrairement à la CIEAEM, qui s'intéresse à l'axiomatisation des mathématiques, les discours de l'ICMI mettent aussi un certain accent sur les applications diverses, industriels, économiques, commerciales etc.

L'OECE, à partir de 1958, reprend les différentes perspectives soulevées par la CIEAEM et l'ICMI. On voit apparaître plusieurs personnages centraux de ces deux organismes aux rencontres organisés à Royaumont (1959), Dubrovnik (1960) et Athènes (1963), et dans les ouvrages publiés par l'OCDE suite à ces colloques.

Enfin, le Bureau international de l'éducation de l'UNESCO, dirigé par Piaget, contribue également au mouvement international, publiant plusieurs recommandations très développées sur l'enseignement des mathématiques. C'est d'ailleurs le seul organisme parmi les précédents s'intéressant aussi à l'enseignement au niveau élémentaire.

Les motifs et ambitions des divers organismes internationaux sont donc connexes, mais pourtant divers et parfois contradictoires. Parmi les motifs, on trouve le développement économique et industriel des pays concernés, la compétition technique de la guerre froide, la massification de l'éducation, le développement des mathématiques et de la psychologie de l'enfant. Le rôle des mathématiques dans l'éducation intellectuelle est particulièrement accentué, mais ses possibilités d'applications sont également soulignées. On se préoccupe de la rénovation de l'enseignement des mathématiques suivant des avancements contemporains de la discipline, y compris les nouveaux domaines (comme l'algèbre linéaire, le calcul différentiel, le calcul des probabilités et la statistique) ainsi que les formes et méthodes modernes de la science mathématiques (comme le langage formel, le focus sur les structures, l'axiomatisation). Une des caractéristiques des discours de l'époque est une attention particulière consacrée aux questions épistémologiques des mathématiques. L'approche bourbakiste y semble être dominante, mais pas unique : Pillips (2014) analyse par exemple les débats menés sur ces questions aux États-Unis.

La dynamique internationale est maintenue dans les décennies suivantes, et les réformes sont mises en place dans de nombreux pays pendant les années 1960 et 1970. Elle est loin d'être limitée aux pays du « bloc occidental » : plusieurs pays du « bloc de l'Est » se représentent dès le début des années 1960, avant tout la Pologne avec l'équipe de Krygovska, et la Hongrie, avec Tamás Varga et ses collègues. Ils sont présents aux diverses réunions, et

prennent des positions responsables dans les organismes divers[12]. Deux numéros de l'*Educational Studies in Mathematics*, consacrés aux réformes diverses du monde (Freudenthal 1978) laissent juger de l'ampleur du mouvement : les cas de 16 pays, appartenant à cinq continents, sont traités.

3 LA REFORME DES « MATHEMATIQUES MODERNES » EN FRANCE : ELEMENTS DU CONTEXTE HISTORIQUE

3.1 Une réforme précédente importante : la réforme de 1902

La réforme de l'enseignement secondaire du début de 20e siècle est liée à un problème structurel du système éducatif français. Les *lycées classiques*, « l'ordre secondaire » de l'éducation, lieux de formation de l'élite intellectuelle et sociale, offrent une éducation classique et humaniste, avec peu de contenu scientifique et mathématique, centré sur l'argumentation abstraite, déductive. Il existe, toujours pour les classes sociales supérieures, des *collèges modernes*, mettant plus d'accent sur les sciences, et visant leurs applications. La plus grande partie de la population a accès à une formation plutôt pratique, préparant à des carrières industrielles ou de commerce dans les *cours supérieures* de « l'ordre primaire ». Ici, les mathématiques et les sciences jouent un rôle important, et sont présentées sous une forme pratique, centrée sur les applications. Au début du 20e siècle, l'absence de formation scientifique dans les lycées classiques paraît désormais intenable pour l'élite, face au développement industriel du pays : la réforme mise en place entre 1902 et 1905 concerne donc le programme des lycées et vise à équilibrer les humanités classiques avec les « nouvelles humanités », y compris les mathématiques, les sciences et les langues vivantes. (Gispert 2008, Gispert & Schubring 2011, Gispert 2014)

Concernant les mathématiques, ce n'est pas seulement leur place qui grandit considérablement dans le programme, mais elles changent aussi de caractère épistémologique. Borel, dans une conférence de 1904, dit : « *…on peut signaler bien des moyens qui pourraient être employés pour introduire plus de vie et de sens du réel dans notre enseignement mathématique*. ». (cité dans Gispert 2008) Poincaré insiste sur une approche de la géométrie par les objets physiques concrets et par l'expérimentation au lieu d'une approche euclidienne traditionnelle (Gispert 2014 p. 233). Les mathématiques introduites par la réforme ont

[12] Voir par exemple les remémorations sur le site de la CIEAEM : http://www.cieaem.org/?q=node/18 [dernière consultation le 27 mai 2015]

principalement un caractère pratique et concret, expérimental, centré sur les applications, et précédant l'initiation à l'argumentation déductive. Le contenu subit également des changements, le domaine des fonctions est introduit dans le programme. Cette réforme inspire aussi celle de Félix Klein en Allemagne et le mouvement de l'ICMI ; on y retrouve des caractéristiques similaires (Gispert & Schubring 2011).

La réforme reçoit des critiques dès son introduction, principalement dans l'esprit de défendre des valeurs classiques de la formation de l'élite, et contre un caractère pratique de cette formation, l'approche pratique étant considéré une caractéristique de l'ordre primaire. Après la première guerre mondiale, un élément nationaliste s'ajoute à ces critiques : l'approche concrète et pratique est rejetée comme « typiquement allemande » face aux valeurs classiques latines de la culture française. La priorité du latin est rétablie dans les lycées au détriment de la formation scientifique, dès 1925. En même temps, dans le système primaire, les formations du niveau moyen, offrant un enseignement mathématique pratique et appliqué, voient un succès croissant. (Gispert 2008, Gispert & Schubring 2011). Cette double structure du système éducatif, ainsi que le rôle que les mathématiques y jouent, passera par une transformation progressive importante au cours des décennies qui suivent la seconde guerre mondiale. C'est ce que nous détaillerons dans le point suivant.

3.2 Transformations du système éducatif et discours sur l'enseignement des mathématiques après la seconde guerre mondiale

La réforme des « mathématiques modernes » mise en place en 1969/70 est précédée d'un discours long et complexe de plusieurs décennies (d'Enfert & Kahn 2010, 2011). Ce qu'on a vu au niveau international est vrai pour la France aussi : la modernisation de l'enseignement des mathématiques est motivée par des ambitions diverses, souvent connexes, mais pas toujours cohérentes. Les études historiques soulignent le rôle, d'une part, d'une volonté politique : un processus de démocratisation du système éducatif en lien avec le développement économique et social du pays, ce qui amène entre autres à un renforcement de l'importance des mathématiques dans l'éducation, et lui accorde le statut des « humanités modernes » remplaçant le latin. D'autre part, on insiste sur le rôle du développement des mathématiques, et d'une volonté des mathématiciens de moderniser le contenu du programme, le rapprocher de l'état contemporain de la science. Enfin, on souligne l'influence des recherches psychologiques de Piaget, et des ambitions pédagogiques visant à diffuser les « méthodes actives » dans l'enseignement.

Un grand nombre d'acteurs s'expriment dans ces discours. Comme on l'a vu dans le §2.2, plusieurs mathématiciens français interviennent sur le sujet dès les années 1950 : J. Dieudonné, G. Choquet, A. Lichnerowicz sont membres fondateurs du CIEAEM, parlent et publient sur les questions de l'enseignement des mathématiques. Les enseignants de mathématiques (principalement de l'ordre secondaire et des universités) discutent la nécessité de la réforme, mènent des expérimentations et s'expriment dans le cadre de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP). Les discours politiques autour de la transformation du système éducatif et des programmes mobilisent en outre une diversité d'interlocuteurs au-delà de ces cercles de mathématiciens : hommes d'états, syndicalistes, inspecteurs etc. Dans ce chapitre, nous tenterons de résumer les éléments principaux de ces discours.[13]

3.2.1 La modernisation du système éducatif, et le rôle des mathématiques dans la formation des citoyens

Après la seconde guerre mondiale, le système éducatif français porte encore l'héritage de deux ordres d'enseignement parallèles, l'ordre secondaire consacré à la formation de l'élite, et l'ordre primaire offrant une éducation pratique à la majorité du jeune public ; après cinq ans d'école élémentaire, les élèves continuent leurs études dans des filières diverses, plus ou moins longues (d'Enfert-Kahn 2010b p. 14). Les décennies suivantes voient, jusqu'en 1975, la création progressive d'un collège unique. Il s'agit d'un processus de démocratisation de l'enseignement, par la massification de l'accès à l'enseignement du second degré et par la création d'un « tronc commun » qui est censé mettre en valeur le principe d'égalité dans le système éducatif. Ce processus politique a pour origine à la fois 'un besoin économique et 'une question de justice sociale :

> La réforme Berthoin marque […] le temps des décisions : décision de s'appuyer sur la démographie scolaire, alors en pleine croissance, pour « investir à plein profit » dans ce capital humain que forment les élèves, afin d'élargir la base sociale du recrutement des élites et élever le niveau général des qualifications, et améliorer ainsi les performances de l'économie nationale ; décision également d'introduire un peu plus de justice sociale dans une institution scolaire restée très cloisonnée, par la création d'un enseignement moyen permettant d'orienter les élèves selon leurs « aptitudes » et non plus selon leur origine sociale ou géographique. (d'Enfert-Kahn 2011b p. 8-9)

[13] Les discours sur l'enseignement des mathématiques dans les décennies qui suivent la seconde guerre mondiale seront traités en profondeur dans la thèse en cours d'Aurélie Mabille, dont le titre provisoire est « Mathématiques, modernité et enseignement dans les années 1950. Lieux et rhétorique des discours de mathématiciens. »

La réforme Berthoin en 1959 prolonge jusqu'à 16 ans la scolarité obligatoire, et crée un « cycle d'observation », un premier cycle du seconde degré (6e et 5e) avec un tronc commun mis en place dans des établissements divers[14], avant d'orienter les élèves vers les différentes filières. La réforme Fouchet, en 1963, prolonge ce premier cycle, jusqu'à la fin de la troisième. (Gispert 2014, d'Enfert & Kahn 2011b) C'est enfin avec la réforme Haby que le « collège unique » sera mise en place en 1975. (Barbazo & Pombourcq 2010 p. 116)

La réforme des « mathématiques modernes » s'inscrit donc dans le cadre d'une transformation structurelle importante de l'éducation, qui doit toucher aussi les programmes. Pour l'école moyenne, il s'agit d'offrir le même enseignement à tous les élèves : comment unifier la formation d'une grande masse d'élèves de différentes origines, ambitions et aptitudes, qui vont continuer dans des filières différentes ? Pour l'école élémentaire, l'enjeu n'est plus de donner un « bagage de connaissances pratiques nécessaires pour 'entrer dans la vie' » aux élèves qui terminent, en majorité, leur éducation à la fin de l'école élémentaire ; mais de les préparer à la suite des études au second degré (d'Enfert 2010 p. 55).

En même temps, le développement industriel, comme à l'échelle internationale, motive aussi en France le renforcement du rôle des mathématiques dans l'éducation des jeunes : le pays a besoin d'un nombre croissant de techniciens, d'ingénieurs, de scientifiques (Charte de Chambéry 1968 p. 6, Bkouche, Charlot & Rouche 1991 p. 30-35). Les discours de l'époque proposent de renouveler à nouveau la notion d' « humanisme » et de l'élargir aux sciences et aux techniques (d'Enfert 2010).

Il faut en outre prendre en compte l'influence du courant structuraliste, particulièrement en sciences humaines, qui voit dans les mathématiques un langage général, un modèle de pensée pour toutes les sciences

> Ainsi donc, dans l'espace de quelques années, des spécialistes aussi éloignés en apparence les uns des autres que les biologistes, les linguistes, les économistes, les sociologues, les psychologues, les ingénieurs des communications et les mathématiciens, se retrouvent subitement au coude à coude et en possession d'un formidable appareil conceptuel dont ils découvrent progressivement qu'il constitue pour eux un langage commun. (Lévi-Strauss, « Les mathématiques de l'homme », 1954 ; cité dans Gispert 2008)

[14] « Collège d'enseignement général » (CEG), « Collège d'enseignement technique » (CET), premier cycle des lycées

Les mathématiques deviennent donc discipline prioritaire de l'éducation : elles prennent de fait le rôle du latin, et apparaissent comme « un élément essentiel de 'l'humanisme moderne' » (d'Enfert 2010 p. 121), offrant une des principales bases de la culture moderne.[15]

3.2.2 Enseigner les « mathématiques modernes »

Ce renforcement et cette modernisation de l'enseignement des mathématiques est activement soutenu par les mathématiciens et des enseignants de mathématiques. Comme on l'a vu, les mathématiciens français se mobilisent dès les années 1950, au niveau international, pour discuter de la rénovation de l'enseignement des mathématiques : avant tout Jean Dieudonné, directeur du groupe Bourbaki ; Gustave Choquet, premier président de la CIEAEM, et qui a introduit les « nouvelles mathématiques » dans son enseignement à la faculté de Paris pendant les années 1950 ; et André Lichnerowicz, le futur directeur de la commission préparant la réforme de 1969 (Gispert 2010).

L'APMEP, fondé en 1910, discute aussi activement ces questions : dès la fin des années 1940, de vifs débats sont menés sur les besoins de modernisation de l'enseignement des mathématiques. Bien que certains défendent un esprit proche de la réforme de 1902 (comme M. Weber ou M. Fréchet), les voix demandant une rénovation selon l'esprit axiomatique des « mathématiques modernes » deviennent rapidement dominantes au sein de l'association pendant les années 1950, et tout particulièrement sous la direction de Gilbert Walusinski. Une commission dénommée « Axiomatique et redécouverte » est créée en 1950 ; de nombreux mathématiciens, favorables à l'axiomatique sont invités à faire des conférences (d'abord Laurent Schwarz, ensuite M Glaeser, G. Choquet, M. Boulignard entre autres), et la publication de ces conférences dans les bulletins de l'association contribuent à l'acculturation des professeurs du secondaire aux « mathématiques modernes » (Barbazo & Pombourcq 2010 p. 62-70).

> Influencés par les travaux du groupe Bourbaki, les « modernisateurs » partent du constat que les mathématiques sont une science vivante et que celles qui sont enseignées n'ont guère évolué depuis de nombreuses décennies. Ils souhaitent donc ouvrir l'enseignement à l'esprit des mathématiques contemporaines – et plus particulièrement à l'algèbre moderne – qui mettent au premier plan la notion de structure et privilégient, sous le nom de « méthode axiomatique », l'étude des lois auxquelles obéissent les objets mathématiques plutôt que des objets eux-mêmes. (d'Enfert 2010 p. 126)

[15] Selon (Bkouche, Charlot & Rouge 1991), ce remplacement du latin va jusqu'au point que les mathématiques deviennent discipline principale de sélection des élèves à partir de la réforme des « mathématiques modernes ».

Pour les mathématiciens modernisateurs, il s'agit donc de renouveler les programmes selon l'esprit bourbakiste, pour enseigner les mêmes mathématiques « de la Maternelle à la Sorbonne » – selon la formule de G. Walusinski (cité par d'Enfert 2010 p. 126). On met l'accent sur la notion d'ensemble, sur le langage moderne unique, algébrique des mathématiques, sur l'étude des structures, et sur la méthode axiomatique.

On peut donc voir que les « humanités modernes » envisagés dans les années 1950 et 1960 ont un caractère très différent de celui introduit au cours de la réforme de 1902 (Gispert & Schubring 2011 p. 96). Si la réforme du début du 20e siècle a visé un enseignement des sciences pratiques, concrètes et applicables, le mouvement des « mathématiques modernes » cherche, au contraire, à initier tous les élèves au langage formel et aux méthodes des mathématiques contemporaines, « abstraites par nature », dans l'espoir de contribuer ainsi au développement de la personnalité et à la formation de l'esprit (d'Enfert 2011 p. 64). Dans la partie II, nous allons étudier plus en détails l'épistémologie mathématique sous-jacente à ce mouvement de pensée.

Il faut néanmoins remarquer que cette approche « moderniste » des mathématiques n'est pas soutenue par tout le monde. Comme le souligne d'Enfert (2010), certains professeurs de classes préparatoires et de supérieur, comme J. Hadamard ou M. Fréchet par exemple, critiquent la modernisation du contenu en le jugeant trop abstrait pour un grand nombre de futurs « utilisateurs » des mathématiques, et n'être convenable que pour une élite plus étroite, les futurs mathématiciens.

> Au fond, ce sont deux conceptions de la démocratisation qui s'affrontent ici : aux « modernisateurs » qui veulent faire partager les « vraies » mathématiques à l'ensemble des élèves, leurs contradicteurs opposent les destins scolaire et social différenciés de ces derniers. (d'Enfert 2010 p. 130)

Mais ces contradicteurs, actifs dans les années 1950, seront absents de la commission Lichnerowicz, créée en 1966 pour élaborer le programme de la réforme des « mathématiques modernes ». Cette dernière réforme, conçue principalement par des mathématiciens universitaires, cherchera avant tout une correction des programmes du point de vu théorique (d'Enfert 2010 p. 132).

3.2.3 L'influence de Piaget et des pédagogies nouvelles

Les discours sur la modernisation du contenu mathématique sont étroitement liés à une réflexion sur le renouvellement des méthodes pédagogiques. En réalité, les tentatives d'introduction d'une pédagogie active ne concernent pas seulement les mathématiques. La massification de l'enseignement secondaire, la diversification de l'origine sociale et des

finalités des élèves, l'installation des nouveaux types de classes demandent la remise en question des méthodes d'enseignement.[16]

Dans l'enseignement des mathématiques, ces tentatives remontent aux années 1920-1930, où l'installation d'une « méthode de découverte » est censée éveiller la curiosité des élèves et motiver un travail de résolution de problèmes : « opposée à l'enregistrement passif, la méthode active consiste surtout, pour le professeur, à faire un cours dialogué en sollicitant la participation des élèves. » (d'Enfert 2010 p. 127)

Cette conception reste en vigueur par les instructions officielles du programme de 1945 ; mais ce n'est pas tout à fait la même signification que les réformateurs de l'après-guerre accordent aux méthodes actives pour l'enseignement des mathématiques. Pour les modernisateurs de l'APMEP, il s'agit d'une initiation à la recherche :

> Mettre les élèves en position de recherche, c'est leur permettre de faire des mathématiques comme un mathématicien, c'est-à-dire les initier aux « vraies » mathématiques et non à leur caricature. Dans cette perspective, les mathématiques sont vues comme un monde à explorer, et chaque problème comme une aventure singulière. La relation pédagogique est également redéfinie : le professeur n'est plus un « démonstrateur de théorèmes », mais le meneur d'un jeu dont les règles sont clairement définies et où le droit à l'erreur est reconnu. (d'Enfert 2010 p. 128)

L'introduction des méthodes actives est étroitement liée aussi à l'influence des recherches psychologiques menées par Piaget. Comme on l'a vu, Piaget participe aux discours internationaux sur la rénovation de l'enseignement des mathématiques, au CIEAEM et à l'UNESCO par exemple (§2.2). Le lien que les modernisateurs identifient entre les structures des mathématiques modernes et le développement des structures mentales décrit par Piaget est un argument fort pour la cohérence de leur conception, pour renouveler l'enseignement entier des mathématiques dans l'esprit des mathématiques modernes. Car, si on met l'accent sur le développement des structures mathématiques dans l'enseignement, en cohérence avec le développement mental des enfants, on fournit ainsi l'outil de pensée le plus efficace possible aux élèves (d'Enfert 2011).

Cette conception est particulièrement influente pour la réforme de l'école élémentaire. Pour ce dernier, dans les années 1950, l'accent était encore plutôt mis sur l'apprentissage des compétences de bases, principalement des méthodes de calcul, ce qui découlait de la massification de l'éducation secondaire, et avait pour objectif de bien préparer tous les élèves à la poursuite de leurs études : le contenu du programme de 1945 était allégé, mais son esprit,

[16] Par exemple, (Savoye 2010) ou (Bishop, d'Enfert, Dorison & Kahn 2011) montrent comment les ambitions de démocratisation et l'installation des nouveaux types de classes correspondent à l'expérimentation d'une diversité de méthodes pédagogiques.

ainsi que les méthodes, ont peu changées. Pourtant, à partir des années 1960, on voit apparaître l'ambition à la fois d'une rénovation pédagogique, orientée vers l'utilisation des méthodes actives, et de l'établissement d'une plus grande cohérence entre l'esprit des programmes du premier degré et celui du seconde degré, ce dernier étant alors en plein bouleversement dans le sens des « mathématiques modernes » (d'Enfert 2011).

L'APMEP ouvre son activité vers le premier degré au début des années 1960. En 1964, elle crée une « Grande commission » qui doit préparer un plan de rénovation général de l'enseignement des mathématiques commençant par l'école maternelle. En même temps, l'Institut pédagogique national (IPN) lance des expérimentations sous la direction de Nicole Picard. Comme le souligne (d'Enfert 2011), ce dernier projet est

> […] largement nourri des idées de deux émules de Piaget, Caleb Gattegno et Zoltan P. Dienes. Il se fonde sur la conviction que, plus que leurs aînés, les jeunes enfants ont le goût de la recherche et sont capables de créativité, ce qui permet d'aborder la discipline autrement, de façon non traditionnelle : par le recours au jeu, par l'utilisation d'un matériel pédagogique innovant comme les réglettes Cuisenaire (encore appelées « nombres en couleur ») et les blocs logiques ou multibases de Dienes, et plus généralement par l'étude de « situations » mathématiques. Plus encore, les expérimentations réalisées dans les classes semblent confirmer les possibilités de renouvellement pédagogique qu'offre une approche moderne des mathématiques. Commentant huit années de recherches « sur l'abstraction de concepts mathématiques pour enfants de 6 à 11 ans », Nicole Picard conclut : « ce qui me semble important, c'est la découverte sur le tas que la quasi-totalité des enfants est capable d'invention, que les mathématiques constituent sur ce plan une discipline tout à fait exceptionnelle où l'on peut être à la fois créateur et juge objectif de sa création. Une discipline par laquelle, si on y fait de la recherche, on peut prendre conscience que l'on est quelqu'un d'intelligent, capable d'autonomie de pensée ». (d'Enfert 2011 p. 63)[17]

Ces deux projets vont alimenter le travail de la commission ministérielle pour réformer l'enseignement de l'éducation élémentaire.

3.3 La réforme des « mathématiques modernes »

En 1966 donc, quand la commission ministérielle, sous la direction d'André Lichnerowicz est mise en place, il existe un consensus général sur la nécessité de la réforme : un grand nombre d'acteurs divers y sont engagés avec des motivations multiples. Les besoins économiques et sociaux, pour lesquels on accorde une importance stratégique au niveau politique international, rencontrent un processus de démocratisation du système éducatif, une volonté de rénovation pédagogique, ainsi que des ambitions de mathématiciens et d'enseignants de

[17] Nous allons voir que c'est l'approche qui ressemble le plus à celle adapté par Varga en Hongrie.

rendre l'enseignement des mathématique plus cohérent, « de la Maternelle aux Facultés », avec le développement contemporain de la science. Ce sera un peu plus tard, au cours des discussions et de la mise en place du projet de la commission, que les désaccords seront approfondis et amèneront à des débats violents sur la réforme au début des années 1970 (d'Enfert & Gispert 2011).

Souhaitant et encourageant la réforme, l'APMEP l'anticipe avec ses propres propositions : déjà en 1964, le bureau de l'APMEP déclare qu'il « se tient à la disposition de toute commission ministérielle chargée de la révision des programmes ». L'association « informe le ministre que [son bureau] a entrepris au sein d'une "grande commission" l'étude d'une réforme d'ensemble sur l'enseignement des mathématiques de la Maternelle aux Facultés […] pour tenir compte de l'évolution rapide des idées en mathématiques et en pédagogie ». (cité par d'Enfert & Gispert 2011 p. 31). Cette commission change de nom, et devient « Commission Recherche et Réforme » en 1966, au moment de l'installation de la commission ministérielle, mais continue son travail avec le but « d'animer, de suivre attentivement les travaux de la Commission ministérielle » (cité dans Barbazo & Pombourcq 2010 p. 221) ; la commission Lichnerowicz s'inspirera en effet plusieurs fois des propositions de l'APMEP. Par ailleurs, l'APMEP est largement représenté dans la commission ministérielle : au départ, par deux tiers des membres de ces dernier. (Barbazo & Pombourcq 2010) La charte de Chambéry, publié par l'APMEP en 1968 suite à un colloque à Chambéry, montre un enthousiasme et un engagement profond de la part de l'association pour soutenir le processus réformateur lancé au niveau ministériel.[18]

Lichnerowicz, le directeur de la commission a à la fois une légitimité savante, en tant que mathématicien et physicien théoricien, professeur au Collège de France, membre de l'Académie des sciences ; une légitimité sur le versant enseignant, ayant été président de l'ICMI de 1963 à 1966 ; mais il a aussi une expérience politique des questions d'enseignement et de recherche (d'Enfert & Gispert 2011 p. 29).

À la création de la commission, ses membres sont principalement des spécialistes des mathématiques : professeurs de faculté, professeurs de lycée et inspecteurs généraux. En outre, un physicien, un psychologue et un chercheur de l'Institut pédagogique national (IPN) participent à ce travail. Son effectif augmente rapidement, jusqu'à une quarantaine de membres, et sa composition se diversifie avec des professeurs et inspecteurs généraux de

[18] Nous analyserons le contenu de la charte dans la partie II (§2.2).

sciences physiques, des professeurs de l'enseignement technique, des enseignants du premier degré, des industriels, des représentants des éditeurs. (d'Enfert & Gispert 2011 p. 33).

Les nouveaux programmes sont introduits progressivement, pour une classe après l'autre, à partir de 1969 (pour la sixième et pour la seconde). La commission étend son travail aussi pour le niveau élémentaire et pour la formation des maîtres à partir de 1969 (d'Enfert 2011 p. 66), dont le programme est introduit à partir de 1970.[19]

La commission prévoit au départ une action sur une longue durée, une transformation progressive des programmes, accompagnée d'expérimentations. De nombreuses expérimentations sont menées à partir d'automne 1968 dans diverses académies, surtout concernant l'introduction de l'ensemble des réels. (Barbazo & Pombourcq 2010 p. 85) Mais si les premières étapes, concernant des programmes des classes de sixième et cinquième ainsi que de seconde et de premier au lycée, correspondent à peu près à ce projet préliminaire et rencontrent un accord général, une crise éclate autour des programmes de la quatrième et de la troisième, surtout concernant la géométrie.

Parmi les raisons de cette crise, selon (d'Enfert et Gispert 2012 p. 34), on trouve d'une part une rupture forte, du point de vue mathématique, avec les programmes traditionnels, et d'autre part une confrontation avec certaines réalités scolaires. En effet, cette rupture est marquée pas seulement par rapport aux programmes précédents, mais aussi par rapport aux programmes des classes de sixième et de cinquième, où les notions « modernes » apparaissaient principalement comme traductions des situations concrètes. À partir de la quatrième par contre, et surtout dans le champ de la géométrie, « premier exemple de mathématisation » (prog. fr. é.m. 1972, p. 68), les principes de la réforme : une méthode purement logique, déductive, l'élimination des recours à l'intuition, l'unité théorique de « la mathématique », de son langage et sa structure, apparaissent presque sans compromis, et bouleversent avant tout l'enseignement de la géométrie.[20]

Le changement est particulièrement radical par rapport aux programmes et traditions de l'ancien ordre primaire, centré sur un apprentissage pratique, basé sur le concret et visant les applications. Ce bouleversement épistémologique est d'autant plus problématique que la plus grande majorité des enseignants est issue de ce monde primaire ; en outre, à cause de l'augmentation rapide des effectifs scolaires, un grand nombre d'enseignants du niveau moyen sont des anciens instituteurs, sans formation particulière aux mathématiques. Les

[19] L'analyse de ces programmes sera l'objet de la partie III.

[20] Les principes mentionnés seront développés dans la Partie II, nous examinerons les programmes dans la partie III (Chapitre 2), et plus particulièrement les programmes de géométrie dans le Chapitre 4.

enseignants des anciens lycées, ayant suivi une formation universitaire en mathématiques et habitués à « l'idéal d'une science abstraite, théorique, déductive, visant à former l'esprit et à donner une culture générale », restent en une petite minorité (d'Enfert et Gispert 2012 p. 37). En effet, les membres de la commission, venant principalement du monde secondaire, n'ont pas suffisamment pris en compte cette difficulté.

Les inspecteurs généraux, ainsi que les syndicats signalent le problème, et l'impossibilité d'une formation suffisante et assez rapide pour préparer les masses d'enseignants à enseigner les programmes envisagés. En fait, la formation initiale et continue est un point crucial de la conception de l'APMEP et celle de la commission Lichnerowicz : la fondation des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM), suggérée par l'APMEP dès 1966, reprise par la commission ministérielle, et mise en place à partir de 1969, doit servir à la fois le développement continue d'une « réforme vivante » et la formation des enseignants (Barbazo & Pombourcq 2010 p. 224-228). Il s'agit aussi d'utiliser une diversité des médias, y compris la télévision (Barbazo & Pombourcq 2010 p. 223). Mais ces efforts sont loin d'être suffisants pour dépasser le fossé qui sépare les ambitions de la réforme de la culture et des connaissances des enseignants du terrain.

Le problème se pose aussi au niveau des élèves. Il s'agit, dans le nouveau système éducatif, de proposer un programme du premier cycle qui soit identique pour tous les élèves. Or, le programme montrant les mathématiques comme une science purement abstraite est critiqué par plusieurs mathématiciens, et surtout par des physiciens, pour ne convenir qu'à une petite élite restreinte des élèves qui seront des futurs mathématiciens. Mais selon eux, même des élèves des écoles d'ingénieurs ou des filières des sciences expérimentales auraient besoin des mathématiques en lien avec « la réalité ». (d'Enfert & Gispert 2011 p. 41-44)

Les critiques ne viennent pas seulement de l'extérieure, la commission même est partagée, et l'APMEP aussi le juge trop lourd et théorique.

> L'objectif de cette dernière n'est pas de compromettre une réforme d'ensemble qu'elle a appelée de ses vœux et qu'elle juge toujours nécessaire, mais au contraire de la sauver en faisant en sorte que les ambitions initiales – rendre accessibles les mêmes mathématiques à tous les élèves par une rénovation conjointe des contenus et des méthodes d'enseignement – soient vraiment réalisées. Alors que les adversaires de la réforme réclament des mathématiques différenciées selon les destins scolaires puis professionnels des élèves, l'APMEP prône au contraire sa généralisation à toutes les filières de l'enseignement moyen, collèges d'enseignement technique inclus. Cela implique, selon ses dirigeants, une adaptation des programmes (les connaissances exigibles des élèves seraient limitées à un noyau de notions et de savoir-faire essentiels) et une transformation des pratiques professorales (travail en équipe,

travail sur fiche, différenciation, etc.) allant dans le sens d'une réelle prise en compte de la diversité des classes et des orientations ultérieures des élèves. (d'Enfert & Gispert 2011 p. 47-48)

La crise éclatant en 1971 ne cesse pas de s'approfondir, et les nouveaux manuels scolaires, accentuant encore le formalisme abstrait et la théorisation, n'aident pas non plus à apaiser les débats. (Bkouche, Charlot & Rouche 1991 p. 29). La polémique est largement médiatisée : les médias vont jusqu'à accuser la réforme pour le suicide d'un instituteur en janvier 1972. (d'Enfert 2011 p. 73) La commission Lichnerowicz termine son travail après la démission de son président en juin 1973 (Gispert 2008).

Avant de finir ce chapitre, ajoutons quelques mots sur la réforme du premier degré. Quand la responsabilité de la commission ministérielle s'élargit au champ de l'école élémentaire, en 1969, elle peut s'appuyer sur les projets proposés par l'APMEP et l'IPN. Le premier est plus prudent : il propose un renouvellement du programme qui soit immédiatement applicable, mais qui sécurise aussi des enseignants. Le second projet propose une transformation plus profonde et audacieuse, qui devrait être réalisée sur le long terme. La commission Lichnerowicz prévoit « la publication simultanée d'un 'programme transitoire' (celui de l'APMEP) immédiatement applicable, et d'un 'programme définitif' (celui de l'IPN) qui entrerait progressivement en vigueur à partir de 1973. » Les syndicats soutiennent aussi le projet de cette double introduction prudente. Mais enfin, seul le premier projet va aboutir (d'Enfert 2011 p. 67-68). Ainsi, le programme s'appelle désormais « mathématiques » au lieu de l'ancien « calcul » ; il introduit une approche mathématique structurale ; il étale le processus d'acquisition des notions et techniques diverses, particulièrement des techniques opératoires, conformément à la théorie de Piaget ; il donne place à une pédagogie active – mais on insiste aussi sur les éléments de continuité, soulignant qu'il s'agit principalement d'un allègement des programmes qui ne nécessite pas de connaissances particulières des mathématiques modernes des maîtres ; et on garde même une référence à l'initiation à « la vie courante », caractéristique du programme ancien (d'Enfert 2011 p. 70-72).[21] Comme le conclut Renaud d'Enfert, la réforme de l'école élémentaire, bien qu'elle apporte des changements importants, reste ambiguë et inachevée.

[21] Nous traiterons le programme de l'école élémentaire dans la partie III, Chapitre 2 et Chapitre 3.

3.4 La suite de la réforme dans les années 1970

La période qui suit la réforme des « mathématiques modernes », mise en place par la commission Lichnerowicz, a été jusqu'ici moins explorée par les études historiques. On peut pourtant décrire quelques processus qui caractérisent cette décennie.

Du point de vue des programmes, une nouvelle réforme arrive en 1977 pour le niveau élémentaire ainsi que pour le niveau moyen, dans le cadre de la réforme Haby établissant le collège unique (Barbazo & Pombourcq 2010 p. 116). Il ne s'agit pas d'un refus complet des programmes des « mathématiques modernes », de nombreux éléments de la réforme précédente sont gardés, mais leur révision est pourtant importante, surtout au niveau moyen. Par exemple, les instructions, citant l'avis de l'Académie des Sciences (réf) refusent l'enseignement systématique de l'axiomatisation, et insistent plutôt sur la pratique des méthodes de démonstration. Le contenu et l'organisation mathématique du programme de collège reste similaire au précédent, y compris la rupture importante entre le premier et deuxième cycle du collège, mais insiste sur la liberté de l'enseignant concernant l'ordre et les méthodes de présentation. Le programme de l'école élémentaire demeure « mathématique », et garde l'essentiel du contenu et de la structure du programme précédent, assoupli pourtant essentiellement le programme, et met davantage l'accent sur l'étude des « situations » et sur « la résolution des problèmes ».[22] Le changement est plus radical à partir des années 1980 (Barbazo & Pombourcq 2010 p. 123, Gispert 2008) quand de nombreux éléments des « mathématiques modernes » disparaissent : par exemple, et contrairement au cas hongrois, les éléments de logique et de la théorie des ensembles sont supprimés du programme de l'école élémentaire. Mais l'étude de cette période plus contemporaine dépasse les cadres de la présente thèse.

Cependant, les effets du mouvement des « mathématiques modernes » ne se limitent pas à la seule rédaction des programmes. Comme on l'a vu, un grand nombre d'acteurs étaient engagés pour le renouvellement de l'enseignement des mathématiques, et l'APMEP, ainsi que certains autres acteurs ont insisté pour un développement continu, pour « faire vivre la réforme » (Charte de Chambéry, p. 8). Un grand nombre d'expériences ont été lancées dans les années 1960 pour préparer et améliorer la réforme. Les expériences ne s'arrêtent pas avec l'échec du projet de Lichnerowicz, et amènent à une certaine progression de l'enseignement des mathématiques, même si cette dernière n'est pas toujours officialisée.

[22] Le changement des programmes sera détaillé dans la partie III, Chapitre 2

Un des exemples est celui de l'INRP (Institut National de Recherche Pédagogique, l'ancien IPN), qui continue des expérimentations pendant les années 1970. Son équipe publie, à partir du milieu des années 1970, une série de recueils intitulée « ERMEL » (« Équipe de Recherches en Mathématiques à l'École Élémentaire ») : il offre ainsi une ressource pratique permettant d'initier un grand nombre d'enseignants du niveau élémentaire aux contenus et méthodes nouvelles de l'enseignement des mathématiques (Audigier et al. 1977, introduction).[23] C'est par ailleurs à l'INRP que le directeur de la réforme hongroise Tamás Varga est invité, au début des années 1970, pour présenter son travail sur l'enseignement de la combinatoire et des probabilités[24], ce qui a pour conséquence plusieurs publications franco-hongroises (Dumont & Varga 1973, Glaymann &Varga 1973).

Un autre exemple, particulièrement intéressant pour notre étude, est le cas de Guy Brousseau. Instituteur, et participant des échanges nationaux et internationaux sur la rénovation de l'enseignement des mathématiques depuis les années 1950, il a été conduit à mener, à la demande de Lichnerowicz, une étude expérimentale au sein du Centre régionale de recherche pédagogique (CRDP) de Bordeaux sur les « conditions limites d'une recherche en pédagogie des mathématiques » (Brousseau 1998 p. 17-20, Barbazo & Pombourcq 2010 p. 228). Il a suivi des expérimentations dont le centre est, à partir du début des années 1970, l'École Jules Michelet, devenu Centre d'Observation et de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques (COREM). L'influence de Brousseau sur l'enseignement français général reste limitée ; par contre, ces expérimentations lui ont permis de commencer à développer sa théorie didactique, la Théorie des Situations Didactiques (TSD) pendant des années 1970. La communauté didactique française y reconnait l'émergence de sa discipline, et considère la TSD, jusqu'à aujourd'hui, comme théorie fondatrice, et comme l'une des théories principales de la recherche didactique française (Brousseau 1998).[25]

Les IREM, fondés en lien avec la réforme des « mathématiques modernes » pour la formation des enseignants, mais aussi pour conduire des expérimentations et recherches pédagogiques, et alimenter « une réforme continue », se multiplient et continuent à

[23] Des exemples issus de la série ERMEL seront étudiés dans la partie III, Chapitre 3Chapitre 5.

[24] Information fournie par Josette Adda lors d'une discussion orale le 20 janvier 2015. Dans le CV de Varga qui accompagne sa thèse, seuls deux courts séjours sont mentionnés : en 1970 et en 1973, à Quimper aux écoles d'étés pour enseignants ; des conférences dans différentes universités françaises ; et en outre les publications mentionnées – mais le cadre institutionnel n'est précisé dans aucun de ces cas.

[25] Nous allons étudier en détail l'une de ces expérimentations, concernant l'enseignement des statistiques et des probabilités dans la partie III, Chapitre 5 (§3.4). L'article de (Brousseau, Brousseau et Warfield 2001) n'illustre pas seulement le type d'expérimentations menées au COREM, mais aussi l'émergence des éléments de la TSD au cours de ces expérimentations. De l'autre côté, la TSD sera l'un de nos outils théoriques principaux pour les analyses didactiques da la partie III. Nous y reviendront dans le Chapitre 1 de la partie III (§2).

fonctionner. Aux trois premiers instituts, établis en 1968 à Paris, Lyon et Strasbourg, d'autres s'ajoutent dans les années suivantes (Barbazo & Pombourcq 2010 p. 224-234), et leur nombre augmente progressivement : aujourd'hui, 28 IREM se trouvent en France[26]. Ces instituts sont des lieux de rencontre entre les différents acteurs s'intéressant à l'enseignement des mathématiques : enseignants de tous les niveaux, mathématiciens, psychologues, ou, plus récemment, des didacticiens ainsi que des historiens des mathématiques. Les groupes de travail qui se réunissent dans ces cadres mènent des expérimentations, publient des ressources et organisent des formations destinées aux enseignants. Les IREM, dès leur fondation, ont joué aussi un rôle crucial dans l'émergence des recherches didactiques en France : plusieurs équipes de recherche actuelles étaient créés, à l'origine, au sein des IREM.[27]

La réforme des « mathématiques modernes » a été décrite dès les années 1980 comme un échec, et c'est aujourd'hui encore la description qu'on en donne souvent en France.[28] De fait, beaucoup d'éléments de la réforme ont disparu depuis, considérés comme des impasses ou des exagérations (en effet, la rupture au niveau des programmes est beaucoup plus importante que dans le cas de la Hongrie par exemple). Pourtant, le rôle décisif de la réforme est indéniable dans l'histoire de l'enseignement des mathématiques en France, et ses effets restent présents, pas seulement dans le programme, mais aussi concernant les dynamiques des communautés ayant une influence sur l'enseignement des mathématiques.

4 LA REFORME DE TAMAS VARGA EN HONGRIE : ELEMENTS DU CONTEXTE HISTORIQUE HONGROIS

L'histoire de l'enseignement des mathématiques n'a fait l'objet ni du même type ni du même nombre de recherches en Hongrie que dans le cas français, surtout en ce qui concerne la deuxième moitié du 20e siècle. Dans le cadre de cette thèse, nous ne pouvons pas tenter de reconstituer un panorama général de cette histoire, ou une histoire continue de l'enseignement des mathématiques au 20e siècle au même niveau que ce qui a été fait sur le cas français. Nous essaierons tous simplement de révéler quelques éléments du contexte historique qui nous paraissent pertinents pour l'analyse épistémologique et didactique suivant dans les parties II et III, et qui permettent une comparaison avec l'histoire française de l'enseignement des

[26] http://www.cfem.asso.fr/cfem/adirem [dernière consultation le 10 mai 2015]
[27] *idem*
[28] Voir par exemple les mémoires de Walusinski qui parle de « L'histoire d'un échec » (Walusinski 1986) ou le livre de (Bkouche, Charlot & Rouge 1991) parlant du « virage des mathématiques modernes ».

mathématiques. Ainsi, nous nous concentrerons sur trois différentes périodes qui nous semblent décisives dans l'histoire de l'émergence de la réforme de Varga : la première est le tournant du 19e et du 20e siècle, la période de l'établissement du système éducatif public et l'émergence d'une culture mathématique hongroise (§4.1) ; la seconde les années suivant la deuxième guerre mondiale, une courte période de démocratie et aussi d'une réforme importante du système éducatif quand Varga a participé, avec plusieurs mathématiciens éminents, dans les réflexions sur le renouvellement de l'enseignement (§4.2). La troisième période enfin concernera les décennies 1960 et 1970, l'époque où le mouvement de réforme dirigé par Tamás Varga a eu lieu (§4.3). On peut voir que ces périodes correspondent à peu près à celles soulignées par les recherches françaises et internationales pour leur importance distinguée dans le développement de l'enseignement des mathématiques.

Nous commencerons chaque fois par un bref résumé du contexte d'histoire générale, politique, économique et sociale de la Hongrie ; nous traiterons ensuite des changements importants du système éducatif ; et enfin des éléments concernant l'histoire de l'enseignement des mathématiques.

4.1 L'établissement du système éducatif public en Hongrie et l'émergence d'une culture mathématique au tournant des 19e et 20e siècles

4.1.1 Le contexte historique : la Monarchie Austro-hongroise

Pendant la période en question, la Hongrie fait partie de l'Empire des Habsbourg. L'année 1867 marque un changement important dans sa situation: c'est le moment du « compromis austro-hongrois », l'établissement de la Monarchie Austro-Hongroise, c'est-à-dire un système avec deux états partiellement indépendants, avec seulement trois ministères communs, mais par ailleurs avec deux parlements et deux gouvernements responsables, sous le règne du même empereur. Pour la Hongrie, jusqu'alors principalement rurale et disposant d'une structure sociale quasi féodale, ce compromis signifie le début d'un développement socio-économique très important. Il s'agit avant tout d'une industrialisation et urbanisation rapide, centrée sur quelques régions urbaines, et plus particulièrement sur Budapest. Fondée en 1873 par la réunion des villes de Pest, Buda et Óbuda, la nouvelle capitale devient, au début du 20e siècle, l'une des métropoles les plus dynamiques d'Europe.

Une nouvelle classe moyenne bourgeoise se forme pendant cette époque, sur la base d'une ancienne bourgeoisie peu nombreuse, d'origine allemande et juive (ces derniers passant à

travers d'une assimilation massive, suite à leur émancipation légale en 1867 (Gergely 2003 p. 420) ; des membres appauvris de la noblesse ; et des classes inférieures montantes.

Ce développement social, accompagné des réformes diverses du système éducatif (§4.1.2), entraîne aussi une progression de la vie culturelle. Au début du 20e siècle, des ateliers de haut niveau sont fondés dans différents domaines de la culture et des sciences : en littérature, arts plastiques, mathématiques, sciences expérimentales et sciences sociales[29]. Les jeunes intellectuels parlent souvent de nombreuses langues étrangères et s'orientent vers l'Europe occidentale, avec l'ambition de rejoindre la dynamique culturelle internationale du tournant du siècle (Romsics 2010, Frank 2011).

Les écrits commémoratifs et les études historiques soulignent souvent la « créativité » comme caractéristique importante de la vie culturelle et scientifique de cette époque (Frank 2011, Békés 2004). Outre d'autres explications possibles, philosophiques et culturelles, que nous ne développerons pas ici, nous pouvons remarquer une raison probable, prenant son origine dans le développement rapide décrit ci-dessus : les représentants de la nouvelle classe intellectuelle émergeante se réunissent dans des lieux urbains ouverts comme les cafés, ils travaillent dans un contexte peu institutionnalisé et largement interdisciplinaire.[30] On verra que cet idéal de « créativité », l'importance de la personnalité et de l'originalité reste caractéristique pour l'enseignement des mathématiques même dans les périodes ultérieures.

Le développement spectaculaire de quelques centres urbains cache des tensions croissantes dans la structure socioéconomique du pays, maintenu par le système politique rigide : entre la nouvelle classe moyenne et l'ancienne élite gouvernante, dans les régions rurales gardant une structure quasi-féodale, entre les ethnies différents etc. Ces tensions vont exploser après la première guerre mondiale, et contribuer à la décomposition de la Hongrie historique, suivie de l'établissement d'un régime conservateur et autocratique dans la période d'entre deux guerres. Nous soulignons particulièrement l'effet de la loi sur le 'numerus clausus' de 1920, qui introduira un quota ethnique aux universités, et poussera ainsi un grand nombre de jeunes scientifiques d'origine juive (jusqu'alors largement surreprésentés à l'université) à quitter le pays pendant les années 1920-1930.

[29] Par exemple, l'atelier psychoanalytique de Budapest, dirigé par Sándor Ferenczy, est parmi des premiers du monde.

[30] Un exemple représentatif de la vie culturelle de cette époque est la revue littéraire « Nyugat » (« Occident ») qui publie, outre des œuvres littéraires hongroises, des nouveautés scientifiques de domaines divers, et les traductions des œuvres étrangères, principalement allemandes, françaises, anglaises, italiennes… Une description plastique de ce milieu intellectuel se trouve dans un recueil de nouvelles intitulé « Kornél Esti » de Dezső Kosztolányi, un des auteurs de la revue Nyugat.

Mais l'époque de la Monarchie, entre 1867 et 1914, représente une période décisive, particulièrement pour le développement scientifique ultérieur, et reste un point de repère même pour les mouvements modernisateurs de la deuxième moitié du 20e siècle. Ce fait peut fournir un élément explicatif de la plus grande cohérence entre la réforme hongroise de l'enseignement des mathématiques du tournant du siècle et celle de l'époque des « mathématiques modernes », en comparaison avec le cas français où l'on a vu plutôt une rupture entre ces deux réformes.

4.1.2 L'établissement et réformes du système éducatif public

Pendant la période de la Monarchie, le développement socio-économique et culturel est soutenu également par les réformes du système éducatif. Dès le compromis, le ministre József Eötvös lance des projets divers pour établir un système éducatif public. L'école élémentaire obligatoire entre 6 et 12 ans, gratuite pour les pauvres, est installée à partir de 1868[31]. L'éducation secondaire est réformée en plusieurs étapes pendant l'époque de la Monarchie (Németh & Pukánszky 1996). Les études élémentaires peuvent être poursuivies dans différents types d'établissement secondaires : dans les lycées classiques (« *gimnázium* ») ou scientifiques (« *reáliskola* »), tous les deux délivrant le diplôme du baccalauréat et l'accès aux universités[32] ; dans les écoles dites « *polgári* » (« école bourgeoise ») qui durent quatre ans et forment les cadres de l'administration et du commerce ; et dans différentes écoles professionnelles. (Romsics 2010 p. 41-44.) Ces différents établissements donnent différents types et niveaux de formation, mais ils ne sont pas isolés entre eux (Gergely 2003 p. 466-467) : contrairement au cas français, où les différents « ordres » d'enseignement conservent l'état social, le nouveau système éducatif hongrois cherche plutôt à soutenir la mobilité sociale, nécessaire pour la formation d'une bourgeoisie et d'une élite intellectuelle. Une partie du système reste maintenue par les églises, mais le rôle de l'État augmente significativement (Gergely 2003 p. 465).

Des réformes sont également effectuées au niveau de l'enseignement supérieur, multipliant l'accès à la formation universitaire et augmentant sa qualité. Au début de la période, une seule université existe en Hongrie, l'Université de Budapest, fondée par Péter Pázmány au 17e siècle[33]. La formation supérieure des ingénieurs, existant depuis la fin du 18e siècle, obtient le

[31] En fait, seulement une école élémentaire d'une durée de quatre ans devient réellement effective, l'accès aux classes supérieures n'est pas général avant 1945. Nous remarquons que la réforme est à peu près simultanée avec la réforme similaire mise en place en France par le ministre Jules Ferry en 1882.
[32] Les études dans les lycées scientifiques ne peuvent être poursuivies qu'à l'Université Technique.
[33] originairement à Nagyszombat.

titre d'université en 1871, et a lieu à l'Université Technique (Molnár & Zsidi 2006 p. 31). Les universités sont créées aussi dans d'autres villes, à Kolozsvár en 1872, à Pozsony et à Debrecen en 1912 (Romsics 2010 p. 45).[34] Elles disposent d'une autonomie importante dans la conception de leurs programmes.

Pour la formation publique des enseignants, des instituts de formation des enseignants sont créés, attachés aux universités ; le premier en 1870 à l'Université de Budapest. En outre, le « Mintagimnázium » (« Lycée Modèle ») est fondé en 1872 pour donner lieu aux stages des futurs enseignants du secondaire (Németh & Pukánszky 1996). Le physicien Loránd Eötvös, ministre de l'éducation pour une courte période, crée le Collegium Eötvös[35] en 1895, d'après le modèle de l'École Normale Supérieure de Paris, avec l'intention de former des enseignants-chercheurs de haut niveau.

4.1.3 L'émergence d'une culture mathématique

Pour ce qui concerne les mathématiques, avant l'époque de la Monarchie, il n'existait que très peu de recherches mathématiques en Hongrie qui soient pertinentes au niveau international : Farkas et János Bolyai représentent plutôt une exception, et travaillent dans un certain isolement (Hersch & John-Steiner 1993). L'apparition soudaine de très nombreux mathématiciens internationalement reconnus à partir de la fin du 19e siècle est donc assez étonnante et a déjà inspiré plusieurs recherches[36]. Parmi les raisons permettant d'expliquer ce phénomène, outre le développement général du pays décrit ci-dessus, on souligne souvent quelques facteurs liés plus directement aux mathématiques que nous détaillerons dans la suite.

Parallèlement aux réformes du système éducatif, l'enseignement des mathématiques est réformé à plusieurs reprises, son rôle augmente dans chaque type d'établissement, et les mathématiciens hongrois de haut niveau interviennent pour la rédaction des programmes et des manuels, comme Gyula Kőnig et de Manó Beke (Szénássy 2008 p. 224). Ce dernier est par ailleurs disciple de Félix Klein, et un de ces collègues plus proches à la fondation de l'ICMI et dans le mouvement international dirigé par Klein (Kántor & Schubring 2008) : la commission de réforme du programme hongrois, établie en 1906, s'inspire de ce mouvement.

[34] Après le traité de Trianon qui clôt, pour la Hongrie, la première guerre mondiale, l'Université de Kolozsvár (aujourd'hui en Roumanie) est déménagée à Szeged, celle de Pozsony (aujourd'hui Bratislava, en Slovaquie) à Pécs, pour les garder sur le territoire hongrois.
[35] Nommé d'après son père József.
[36] Voir par exemple Frank (2011) ou le projet interdisciplinaire « Réception et créativité » (http://zeus.phil-inst.hu/recepcio/htm/masodik.htm, dernière consultation le 6 octobre 2015) dont plusieurs études concernent l'histoire des sciences, notamment dans les tomes (Békés 2004) et (Palló 2004).

Beke et le programme de Klein restent des références importantes pour les mathématiciens hongrois, y compris lors de la réforme dirigé par Varga (Péter 1977 p. 10, Varga 1975 p. 6-7).

Au niveau universitaire, une formation mathématique était disponible à la Faculté des Lettres[37] de l'Université des Sciences de Budapest, à l'Université Technique, et à l'Université de Kolozsvár – ce dernier a disposé d'une Faculté de Sciences et des Mathématiques dès sa fondation en 1872.

Contrairement au cas français, il n'existe pas, en Hongrie, de vie mathématique organisée jusqu'à la fin du 19e siècle. La « Mathematikai és Physikai Társulat » (Société Mathématique et Physique) est créée en 1891, et commence à publier la revue « Mathematikai és Physikai Lapok », ainsi qu'une autre revue adressée aux lycéens, intitulée « Középiskolai Matematikai Lapok » (« Journal Mathématique pour Lycéens », KÖMAL), à partir de 1894. Ce dernier a pour objectif de retrouver et motiver des jeunes talents mathématiques du pays, créer des liens entre eux dès leur jeune âge, et contribuer ainsi à la construction d'une communauté scientifique hongroise. En outre des articles, le KÖMAL propose des problèmes à résoudre : les lycéens peuvent envoyer leurs solutions aux éditeurs, les meilleures solutions, ainsi que les noms et les photos des meilleurs résolvants de chaque année sont publiés dans le journal.[38] La société organise aussi des compétitions mathématiques pour lycéens et étudiants (Frank 2011). Le journal et les compétitions établissent une culture de résolution de problèmes, ce qui joue un rôle important dans la formation des jeunes mathématiciens tout au long du 20e siècle et jusqu'à aujourd'hui.[39]

Le rôle de Lipót Fejér

Dans le développement des mathématiques au tournant du siècle en Hongrie, certains personnages semblent jouer un rôle crucial. Professeur à l'Université des Sciences de Budapest à partir de 1911, et connu par ailleurs pour ses résultats sur les séries de Fourier, Lipót Fejér (1880-1959) est réputé pour être le premier mathématicien hongrois ayant formé une école mathématique cohérente autour de lui (Kántor 2006 p. 573). L'avis de Pólya indique bien l'importance qu'on accorde au rôle de Fejér :

[37] À l'Université de Budapest, jusqu'en 1949, c'est la Faculté des Lettres qui donne lieu à la formation en mathématiques et en sciences expérimentales (http://www.elte.hu/tortenet, dernière consultation le 25 mai 2015). Cette organisation institutionnelle permet de suivre des cours pluridisciplinaires aux jeunes mathématiciens (voir par exemple la liste des cours de Kerékjártó dans Gáll 2004 p. 236, cité en français dans le mémoire de master en cours d'Alicia Filipiak. On verra dans le chapitre suivant (4.2.2) que la culture littéraire joue un rôle important dans la pensée de plusieurs mathématiciens qui influencent la réforme de Varga.

[38] Le journal KÖMAL fonctionne selon le même système jusqu'à aujourd'hui. Son site, ainsi que la compétition de résolution de problèmes est disponible aussi en anglais : http://www.komal.hu/info/bemutatkozas.e.shtml.

[39] Le projet CIRMATH étudie récemment des questions similaires concernant la circulation mathématiques dans les périodiques du 18e au 20e siècle. (http://cirmath.hypotheses.org/, dernière consultation le 6 octobre 2015).

> Why did Hungary produce so many mathematicians of our time? Many people have asked this question which, I think, nobody can fully answer. There were, however, two factors whose influence on Hungarian mathematics is manifest and undeniable, and one of these was Leopold Fejér, his work, his personality. The other factor was the combination of a competitive examination in mathematics with a periodical. (Pólya 1961 p. 501)

Ses anciens étudiants, pas seulement des mathématiciens, se souviennent de lui comme d'un enseignant exerçant une influence particulière sur le développement de leur culture mathématique, mais aussi sur leur personnalité et leurs visions concernant l'enseignement : son influence concerne plusieurs générations de mathématiciens jusqu'aux années 1950 (Frank 2011). C'est ce qui rend sa personne particulièrement intéressant pour notre étude, car il a enseigné la majorité des mathématiciens qui nous intéresseront dans le chapitre suivant (§4.2.2) ; et les témoignages laissés par ses disciples divers font apparaître plusieurs caractéristiques d'une épistémologie mathématique qui caractérisera plus tard également la pensée des concepteurs de la réforme de Varga (cf. Partie II §3). Pour en donner quelques exemples :

> Fejér gave very short, very beautiful lectures. They lasted less than an hour. You sat there for a long time before he came. When he came in, he would be in a sort of frenzy. He was very ugly-looking when you first examined him, but he had a very lively face with a lot of expression. *The lecture was thought out in very great detail, with dramatic denouement. He seemed to relive the birth of the theorem; we were present at the creation*. He made his famous contemporaries equally vivid; they rose from the pages of the textbooks**.** *That made mathematics appear as a social as well as an intellectual activity.* (Ágnes Berger, cité dans Hersch-Steiner 1993. p. 18. C'est moi qui souligne.)

> When Fejér stumbled upon an article which was written in such a mystical style that it was impossible to understand, he said: oh, these young people, these young people, their ambition is that if someone read their paper, they should think what a genious the author was, discovering such things the reader would have never even thought about. On the other hand – he went on –, *if I write a paper, my ambition is that the reader should think: - What's the big deal? Even I could have done that.* That is why all of Fejér's papers were so easy to understand and enjoyable to read. (László Kalmár in Szabó 2005 p. 457. Ma traduction et c'est moi qui souligne)

Pólya explique, dans son article cité, comment le personnage et l'activité artistique (surtout musical) de Fejér a impressionné la communauté de ses disciples. Il fait le lien entre le talent « raconteur » de Fejér et sa capacité d'éveiller l'intérêt pour des problèmes mathématiques. Pólya insiste aussi sur le style écrit de Fejér, soigné pour le rendre intuitif :

> Fejér's great influence on Hungarian mathematicians is due not only to his scientific work but also to his personality. […] The hours spent in continental coffee houses with Fejér discussing mathematics and

> telling stories are a cherished recollection for many of us. Fejér presented his mathematical remarks with the same verve as his stories, and this may have helped him in winning the lasting interest of so many younger men in his problems. […]
>
> It was not given to him to solve very difficult problems or to build vast conceptual structures. Yet he could perceive the significance, the beauty, and the promise of a rather concrete, not too large problem, foresee the possibility of a solution, and work at it with intensity. And, when he had found the solution, he kept on working at it with loving care, till each detail became fully intuitive and the connection of the details in a well-ordered whole fully transparent.
>
> It is due to such care spent on the elaboration of the solution that Fejér's papers are very clearly written and easy to read, and most of his proofs appear very clear and simple. Yet only the very naïve may think that it is easy to write a paper that is easy to read, or that it is a simple thing to point out a significant problem that is capable of a simple solution. (Pólya 1961 p. 505)

Les citations ci-dessus permettent de supposer, au-delà de l'importance de Fejér dans le développement d'une culture mathématique hongroise, également une influence qu'il pouvait exercer sur l'émergence d'une culture d'enseignement des mathématiques en Hongrie. On verra en effet dans suite, que les caractéristiques accordées à l'enseignement de Fejér réapparaissent dans l'arrière-plan épistémologique de la réforme de Varga. L'accent mis sur le caractère humain et social des mathématiques, sur les processus de création mathématique, sur la nature dramatique des mathématiques et leurs liens avec des arts ou sur le rôle de la personnalité, l'importance d'une simplicité et clarté intuitive, ou l'accent sur la résolution des problèmes au lieu de la construction des grands structures : ce sont des caractéristiques qu'on retrouvera plus tard dans la réforme de Varga, et chez les mathématiciens qui la soutiennent, tous disciples par ailleurs de Fejér.

L'étude de l'œuvre de Fejér dépasserait les cadres de la présente thèse ; nous signalons simplement qu'il nous semblerait intéressant d'essayer de tracer le fil du développement de l'enseignement des mathématiques entre son personnage et la réforme ultérieure. Il faut noter en même temps que l'approche basée sur l'intuition rapproche cette conception des réformes françaises et allemandes du début du 20e siècle.

4.2 Mathématiciens au cercle de Karácsony, après la seconde guerre mondiale

4.2.1 Une courte période démocratique

Les années qui suivent la seconde guerre mondiale représentent une période ambiguë dans l'histoire de la Hongrie : une guerre perdue, un pays en ruine après le passage du front allemand-russe ; la libération sous le règne d'un gouvernement de l'extrême droite et de

l'occupation allemande ; mais en même temps, l'occupation russe. L'armée russe est en effet présente et la future domination communiste peut être pressentie de plus en plus dès cette époque ; mais jusqu'en 1948, le pays vit une courte période démocratique, multipartite, avec une dynamique sociale et culturelle importante. Des réformes radicales de démocratisation ont lieu : elles introduisent avant tout une redistribution des terres, visant à réformer le système arriéré et socialement injuste de l'agriculture ; ainsi que la réforme du système éducatif en 1945, l'introduction d'une école unique de 8 ans, dite « *általános iskola* » (« école générale »). Cette forme institutionnelle, existant jusqu'à aujourd'hui en Hongrie, consistent en deux cycles de 4 ans : un premier cycle qui correspond à l'école élémentaire, avec un maître principal, et un deuxième cycle avec des enseignants spécialisés, correspondant à peu près au « collège » français. Dès 1945, la Hongrie dispose donc d'un système éducatif unifié et obligatoire pour les élèves de 6 à 14 ans.[40]

Nous soulignons ici une différence entre le système hongrois et français, qui aura de l'importance dans l'analyse didactique ultérieure : en Hongrie – contrairement à la France où les enseignants travaillent pendant une année avec une classe – un enseignant accompagne *a priori* la même classe pendant tout un cycle de 4 ans. De plus, les classes restent ensemble pendant 8 ans, et ne sont pas redistribuées. Dans ce système, les relations personnelles entre enseignant et élèves deviennent plus importantes, et l'on s'appuie plus sur l'existence d'une mémoire collective que dans un système où l'on reconstruit des classes et où l'on change d'enseignant chaque année.[41]

La période de l'après-guerre donne aussi lieu à divers mouvements culturels et intellectuels, libérés de l'oppression de la censure des années précédentes, et motivés par la dynamique de la reconstitution du pays. Nous nous intéressons particulièrement à un de ces mouvements, celui dirigé par Sándor Karácsony sur les questions de l'éducation, où plusieurs mathématiciens participent, y compris le jeune Tamás Varga.

4.2.2 Le cercle de Karácsony et les mathématiciens

Sándor Karácsony (1891-1952) est un pasteur calviniste, éducateur, auteur de nombreux œuvres de psychologie, pédagogique, linguistique et philosophique, professeur à l'Université de Debrecen à partir de 1934. Il était particulièrement connu et populaire pendant les années

[40] Dans la suite, nous appliquerons les termes « école élémentaire » et « école moyenne » pour ces deux cycles de l'école hongroise, conformément à la terminologie retenue dans l'introduction.

[41] De l'autre côté, l'argument souvent souligné pour le système appliqué en France, pour la redistribution des classes et le changement des enseignants, est la dépendance réduite des élèves d'un enseignant, et la meilleure mise en valeur du principe de l'égalité. On va voir dans la partie III comment ces principes, exprimés dans la structure du système éducatif, influencent des caractéristiques didactiques de l'enseignement des mathématiques.

1930 et 1940, pour son système théorique original, basé sur une psychologie sociale, et surtout pour son activité éducative étendue : il édite des périodiques, organise la vie des adolescents au sein du scoutisme et ensuite dans des cadres indépendants (Kontra 1992).

Dans des années 1940, un cercle intellectuel interdisciplinaire se forme autour de sa personne : ce groupe d'intellectuels divers se retrouve régulièrement pour discuter des questions d'éducation. Ce qui donne l'intérêt de cette communauté pour notre recherche, c'est la participation des mathématiciens : outre le jeune Tamás Varga, plusieurs mathématiciens de premier ordre fréquentent ce cercle, y compris quelques importants soutiens ultérieurs de la réforme de Varga : László Kalmár, Rózsa Péter et János Surányi[42]. Par ailleurs, Karácsony est en relation proche avec Árpád Szabó, le futur historien des mathématiques et avec le jeune Imre Lakatos, futur philosophe des sciences : le premier étant philologue classique à l'Université de Debrecen à l'époque, le deuxième étudiant à la même université. Gurka (2001), Máté (2006) et Szabó (2013) ont insisté sur l'importance des relations entre ces différentes personnes, et sur les diverses influences entre eux. Il faut tout particulièrement souligner l'influence de Karácsony sur la pensée de Kalmár et de Lakatos, et les interactions de Lakatos avec Kalmár et Szabó.

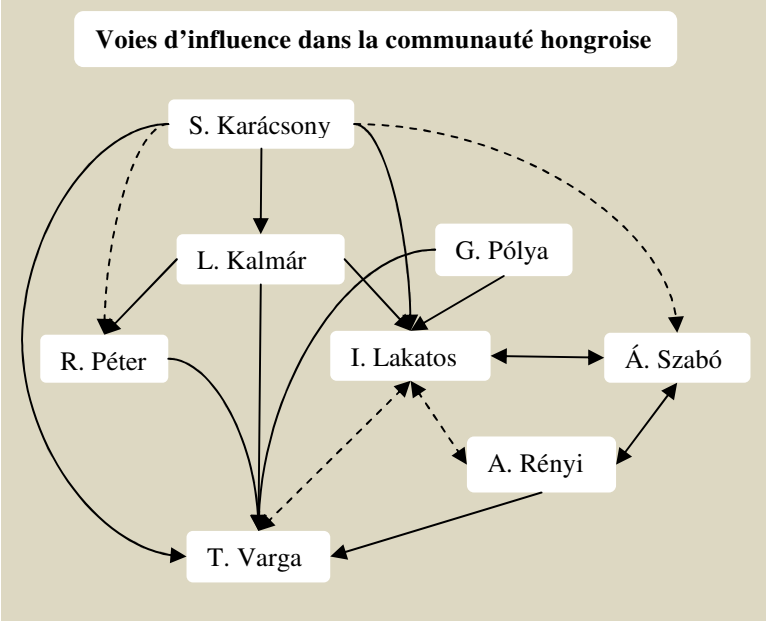


Figure 1 : voies d'influence entre les personnages hongrois de notre étude. *Les flèches pleines indiquent les influences confirmées par les ressources primaires ou secondaires ; les flèches pointillées indiquent des influences supposables.*

La nature de l'influence de Karácsony est encore peu étudiée, mais on peut certainement souligner l'effet d'une approche de psychologie sociale, insistant sur le rôle éducatif de la communauté ; une conception démocratique de l'éducation ; et enfin, l'importance qu'il accorde à l'intuition et au rôle de la visualisation dans le développement de la pensée (Kontra 1992, Szabó 2013). Nous allons voir que ce sont des éléments importants de l'épistémologie

[42] Kalmár, particulièrement actif dans le cercle, le rejoint dès 1941 (Szabó 2005 p. 7), et c'est dans ce cadre qu'il publie un article sur la nature et l'enseignement des mathématiques, que nous allons étudier dans la partie suivante (Kalmár 1942/2011). Pour la participation de Varga et Péter, voir (Kontra 1992 p. 88 et Máté 2006). Concernant János Surányi, l'information est fournie par son fils, László Surányi (entretien le 29 décembre 2013). Pour le soutien que ces mathématiciens ont apporté à la réforme de Varga, voir par exemple (Szendrei 2005, p. 429 ou Halmos &Varga 1978 p. 226)

de cette communauté de mathématiciens, et tout particulièrement de la réforme de Varga (cf. Partie II, §3).

Le cercle de Karácsony cesse ses activités à la fin des années 1940, à cause de l'hostilité du nouveau régime communiste. En même temps, les mathématiciens mentionnés resteront en contact intense, entre autres au sein de l'Institut de Recherche fondé par Alfréd Rényi en 1950 ; en plus, Árpád Szabó et Imre Lakatos y sont également employés par Rényi à certaines périodes[43]. Par exemple, c'est ici que Lakatos, à la demande de Varga et de Rényi, traduit le livre *How to solve it ?* de G. Pólya en hongrois. Dans sont institut, Rényi donnera également naissance à une équipe travaillant sur les programmes des classes spécialisées en mathématiques, sous la direction de J. Surányi à partir des années 1960, et cette équipe travaillera en collaboration proche avec Varga. Nous reviendrons sur la communauté de ces mathématiciens dans la partie II, où nous essayerons de montrer qu'ils représentent une épistémologie mathématique cohérente et originale, qui fournit un arrière-plan épistémologique de la réforme de Varga.

Une courte biographie des mathématiciens en question ce trouve dans l'annexe. Nous insistons ici seulement sur quelques éléments biographiques qui semblent jouer un rôle pertinent dans la formation de la pensée de ces mathématiciens sur la nature des mathématiques et sur son enseignement. Nous soulignons avant tout les domaines principales de leur recherche : Kalmár et Péter, commençant leur carrière en lien avec l'école de Hilbert, s'intéressant aux problèmes de la logique et de la fondation des mathématiques ; tous les deux ont fait un travail important autour des théorèmes de Gödel, de Church, de Gentzen (Máté 2008). On va voir dans la partie II (§3.1.1) de quelle manière leur intérêt de recherche mathématique influence leur pensée épistémologie. Kalmár s'investi en outre, dès les années 1960, dans des recherches informatiques. Rényi est connu avant tout pour ses recherches sur la théorie des probabilités, et plusieurs parmi ces mathématiciens travaillent sur différents domaines des mathématiques discrètes, comme la combinatoire ou la théorie des graphes. Il s'agit des domaines qui sont peu présents dans l'arrière-plan de la réforme française, ni dans la réforme française des « mathématiques modernes » elle-même, mais qui occupent en même temps une place importante du programme de réforme de Varga : ce fait nous permet de supposer l'influence importante de l'activité chercheur des mathématiciens qui soutiennent chaque réforme.

[43] Lakatos entre 1953 et 1956, Szabó à partir de 1957 (Máté 2006)

Un autre élément à souligner est l'investissement de ces mathématiciens hongrois dans la vulgarisation des mathématiques et dans les questions d'éducation. Rózsa Péter est la plus engagée sur ce champ : enseignante au niveau moyen pendant quelques années avant la deuxième guerre mondiale et formatrice d'enseignant après la guerre elle est particulièrement intéressée pour les questions d'enseignement des mathématiques. Elle en écrit et parle régulièrement et elle soutient très activement le mouvement de réforme de Varga. Kalmár et Rényi sont moins directement investis sur les questions de l'enseignement publique, Varga les mentionne pourtant comme soutiens importants de sa réforme (par ex. Halmos & Varga 1978 p. 226). Kalmár peut exercer son influence surtout à travers ses réflexions et sa pratique sur l'enseignement supérieur[44], alors que Rényi par la création d'un groupe de recherche sur l'enseignement des mathématiques dans l'institut de recherche mathématique qu'il a dirigé.

Kalmár, Péter et Rényi sont tous auteurs des œuvres de vulgarisation très populaires : plusieurs parmi ces textes sont publiés régulièrement jusqu'à aujourd'hui et traduits à nombreuses langues étrangères[45]. Kalmár est réputé pour ses lettres mathématiques écrites dans un style intuitif et suggestif, largement diffusées dans la communauté mathématique dont plusieurs étaient publiées posthume. Le livre *Jeux avec l'infini* de Rózsa Péter apparaît en 1944 ; les *Dialogues* d'Alfréd Rényi, et ses *Lettres sur la probabilité* sont publiés dans les années 1960. Nous reviendrons plusieurs fois sur ces textes, pas seulement pour une analyse épistémologique (Partie II), mais nous montrerons également que certains entre eux, avant tout le livre de Péter, ont effectivement servi de ressource pour la réforme de Varga (Partie III, Chapitre 3,Chapitre 4).

Dans ces textes, on voit apparaître une épistémologie cohérente et assez différente de celle de l'école bourbakiste : ils insistent sur le développement permanent et organique des mathématiques, à travers une série de problèmes et de tentatives de solution ; sur le caractère dialogique des mathématiques ; sur sa nature « quasi-expérimentale » ; sur son aspect créatif et ludique, ses liens avec les arts ; sur l'importance d'une approche concrète, basée sur l'intuition ; et ils refusent l'utilisation excessive du langage formel. Nous détaillerons l'analyse de la position épistémologique de ces mathématiciens dans la partie II : nous essayerons de montrer qu'il s'agit en effet d'une conception cohérente, très proche également de l'approche « heuristique » de Pólya, ou de la philosophie de Lakatos, développée plus tard et connue au niveau internationale.

[44] Voir par exemple (Kalmár 1942/2011) que nous analyserons en détails dans la partie II.
[45] En langue française, le livre de Rózsa Péter était publié en 1977 sous le titre *Jeux avec l'infini*, et a vécu une deuxième édition en 2014. Le deuxième *Dialogue* de Rényi était également traduit en français en 2011.

4.2.3 L'installation de la dictature communiste

À partir de 1947, le processus de prise de pouvoir du parti communiste est accéléré ; la dictature communiste, sous la direction de Mátyás Rákosi, s'installe en 1949. Les bouleversements politiques, économiques et sociaux apportés par cette transformation concernent aussi le système éducatif. Les églises sont exclues de l'éducation, tous les établissements sont pris par l'État, et l'éducation religieuse et morale est remplacée par une formation idéologique au « marxisme-léninisme ». Les programmes publiés en 1950 règlementent très strictement l'éducation et limitent la liberté pédagogique des enseignants ; le choix des manuels scolaires n'est plus possible, l'édition des manuels est monopolisée par l'État. L'autonomie des universités et de l'Académie est limitée aussi, le système scientifique du pays est réformé d'après le modèle soviétique.

Un changement radical de l'élite avait déjà été introduite d'une part avec la disparition d'environ 600 000 personnes d'origine juive pendant la seconde guerre mondiale en raison de l'holocauste, d'autre part avec la condamnation, après la guerre, de l'ancienne élite gouvernante, l'émigration massive devant l'emprise croissante du pouvoir communiste, et la perte de pouvoir de l'aristocratie suite à la répartition des terres. Ce changement est forcé par le régime de Rákosi, entre autres par des relégations à la campagne, mais aussi par les outils de l'éducation : par exemple, plusieurs des lieux de formation de l'élite intellectuelle sont éliminés (l'exemple le plus représentatif est probablement le Collegium Eötvös), et les enfants de l'ancienne élite subissent une discrimination au bénéfice des enfants d'ouvriers et de petits paysans, dans la poursuite de leurs études (Romsics 2010).

La dictature totale installée par le régime de Rákosi, basée sur l'usage de la force, est suivi d'une révolution en 1956, puis d'une période de répression. La dictature ne sera assouplie qu'à partir des années 1961-1962.

L'enthousiasme et l'engagement politique est obligatoire à l'époque, un langage militant pour le communisme, saluant les pays soviétiques apparaît partout, y compris dans les revues et les manuels scolaires mathématiques. Il est intéressant d'observer par exemple dans l'éditorial du premier numéro de la revue *Matematikai Lapok*, comment l'esprit de la démocratisation de l'éducation et de la culture mathématique, au fond similaire aux préoccupations françaises de l'époque, s'exprime sous le langage politique suivant :

> Avant la libération, la pratique scientifique des mathématiques était l'œuvre d'à peine quelques douzaines d'aristocrates intellectuels. Par conséquent, les résultats des sciences mathématiques variées

> n'étaient connus que pour une petite communauté, ce qui a rendu leur science isolée presque aussi mystique que le savoir mathématique des prêtres égyptiens. […]
> Mais la société construisant le socialisme a besoin, pas d'idéalistes enfermés dans leur tour d'ivoire, mais des masses ayant une pensée saine, éduquée dans l'esprit du matérialisme dialectique. Pour l'enseignement des mathématiques, cela signifie qu'ils doivent mieux connaître le développement de la science, les inhérences de ses résultats et leurs relations avec la réalité objective [...] (Alexits 1949 p. 6-7. Ma traduction)

En fait, l'épistémologie mathématique découlant de cette idéologie, appuyée sur « le matérialisme dialectique », insistant avant tout sur l'anti-formalisme, sur l'importance de partir du concret et sur une approche historique, n'est pas contradictoire avec l'épistémologie mathématique de la communauté des mathématiciens influençant la réforme de Varga, que nous allons étudier dans la partie II. Mais, mis à part cette courte période du début des années 1950 au cours desquelles ces références obligatoires, politiquement motivées, apparaissent aussi chez plusieurs d'entre eux, leur épistémologie est fondée plutôt sur une culture classique, antique et humaniste renaissante, ainsi que sur les philosophies mathématiques du 20e siècle (par ex. Rényi 1973, Péter 1977, Kalmár 1967).

4.3 Le mouvement de réforme dirigé par Varga entre 1963 et 1978

4.3.1 Le contexte historique et le système éducatif

Bien qu'on n'ait pas de preuve de l'influence de l'assouplissement de la dictature sur le démarrage de la réforme de Varga, il faut remarquer la coïncidence temporelle : on a toute raison de supposer que la libéralisation modérée du système communiste et l'ouverture internationale ont pu faire partie des conditions qui ont rendu possible le lancement des expérimentations de Varga.

En effet, le régime de János Kádár, installé après la révolution de 1956 et ainsi responsable de la répression qui l'a suivie, change sa politique à partir du début des années 1960, et cherche un compromis avec la société. En 1960, une amnistie libère de nombreux prisonniers politiques de la révolution ; les victimes de plusieurs procès politiques des années 1950 sont réhabilitées ; les forces responsables de la terreur sont supprimées ; et en général, le régime, tout en restant une autocratie communiste, cherche désormais un accord avec les différents groupes de la société au lieu de s'appuyer sur la force. Parallèlement avec un lent progrès du niveau de vie dans les décennies 1960 et 1970, la vie privée devient plus libre, les discours culturels et scientifiques sont moins contrôlés, à condition de ne pas être explicitement critiques contre le régime. Cet assouplissement de la dictature va de pair avec une certaine

ouverture internationale : non seulement la reconnaissance internationale du régime est consolidée (l'Organisation des Nations Unies l'accepte en 1963), mais les voyages privés vers l'occident deviennent possibles aussi, même s'ils restent contrôlés et en un nombre limité. (Romsics 2010 p. 418-421)

Cette période donne aussi lieu à une certaine libéralisation de l'éducation. Báthory (2001) lie les programmes de 1961 à la consolidation du régime, mais, selon lui, le vrai changement prend place à partir de 1972, notamment avec une résolution du Parti sur l'éducation (Kardos & Kornidesz 1990 p. 662-680).

La structure du système éducatif reste fondamentalement inchangée pendant toute l'époque communiste : une école unique et obligatoire de 8 ans, organisée en deux cycles, suivie des différentes possibilités de l'éducation secondaire de 4 ans : lycée, lycée professionnel (les deux délivrant le baccalauréat), et écoles professionnelles. Il y a quelques efforts pour prolonger l'éducation obligatoire, mais ils ne deviennent pas réellement effectifs à l'époque (Romsics 2010 p. 459), principalement à cause des obstacles économiques (Báthory 2001 p. 12).

En même temps, à partir des années 1970, le système passe par une libéralisation lente et progressive[46]. La direction de l'éducation reste centralisée, mais, un plus grand nombre d'acteurs, et d'une plus grande diversité, peuvent s'exprimer que par le passé. Le « Cinquième congrès de l'éducation »[47] se réunit en 1970 et publie des recommandations pour un renouvellement du système éducatif et de la pédagogie. Après la résolution du Parti en 1972, un travail parallèle commence dans plusieurs ateliers. La préparation d'une réforme des programmes se déroule au ministère de l'éducation et dans l'Institut National de la Pédagogie (Országos Pedagógiai Intézet, OPI), jusqu'à son introduction officielle en 1978. Ce travail est accompagné d'une part des recherches pédagogiques dans l'OPI, d'autre part du travail d'une nouvelle commission de l'Académie des Sciences sur l'éducation publique. Ce dernier était focalisé sur la nature et le contenu de la culture dont la société future aurait besoin, et qui doit être transmis dans l'éducation (Báthory 2001 p. 23). La commission a publié les résultats de son travail en 1976 (« Livre blanc » 1976).

Bien que, selon Báthory, le travail de ces différents ateliers ait été peu harmonisé, ce n'est pas le cas en mathématiques : on verra (§4.3.2) que les travaux de l'équipe de Varga, au sein de l'OPI, étaient déjà très avancés à cette époque, et plusieurs de ses collègues et soutiens

[46] Báthory (2001) considère une résolution du Parti de 1972 le début d'une longue période de réforme éducative qui aurait durée jusqu'aux années 2000.
[47] Le précédent a eu lieu en 1948. (Báthory 2001 p. 13)

mathématiciens ont participé dans la commission académique, Rózsa Péter, János Surányi, C. Neményi Eszter entre autres (« Livre blanc » 1976 p. 400 et entretien avec E. Deák le 28 décembre 2013).

La résolution de 1972 propose, entre autres, de rendre les programmes plus flexibles ; augmenter le niveau des manuels scolaires, dont les auteurs doivent être les « meilleurs représentants des sciences et de la pratique pédagogique » ; préparer deux manuels alternatifs pour les matières les plus importantes ; tout en renforçant l'unité du contenu enseigné, faire plus d'attention au développement des « aptitudes personnelles » de chacun ; encourager les recherches pédagogiques (cité par Báthory 2001 p. 192-193). Le rôle de l'idéologie est réduit, dans les programmes de 1978 ainsi que dans les recherches pédagogiques : outre des pédagogues classiques du régime qui cherchent l'éducation du « type humain socialiste », les nouvelles approches, sociologiques, sensibles à la mobilité sociale, aux inégalités et aux problèmes d'élitisme, gagnent plus de terrain (Báthory 2001 p. 28). Ce type de sensibilité est d'ailleurs présent aussi dans le travail de la commission académique, qui, bien que mené par l'élite intellectuelle, cherche des solutions éducatives valables pour l'intégralité de la société (Báthory 2001 p. 25).

Les années 1970, et la réforme de 1978 représentent donc encore une rénovation dirigée centralement, « du haut vers le bas », mais avec l'intention désormais d'une plus grande flexibilité, d'une influence idéologique réduite, et d'une plus grande sensibilité à la diversité sociale et individuelle des élèves. Les années 1980 vont aller plus loin dans ce sens, laissant (bien que plutôt implicitement) entrer en jeu des mouvements venant « du bas », c'est-à-dire des enseignants ; et avec l'autorisation des institutions travaillant selon les « programmes alternatifs » (les programmes élaborés localement dans l'établissement et accrédités) entre autres choses (Báthory 2001 p. 83-87).

On verra que la réforme de Varga s'inscrit dans cette direction générale du développement de l'éducation, et devance même un peu le développement général. Son programme est partagé en éléments obligatoires et facultatifs ; il insiste sur la liberté des enseignants, sur la diversité des contextes et des élèves, et il tente de soutenir des enseignants, par de nombreux conseils explicités dans les livres du maître, dans leurs choix et adaptations.

4.3.2 Les expérimentations et le mouvement de réforme de Tamás Varga

Le mouvement de réforme de l'enseignement des mathématiques des décennies 1960 et 1970 est associé en Hongrie au nom de Tamás Varga. Une courte biographie de Varga se trouve dans l'annexe I.2. Varga participe au développement de l'éducation au niveau national depuis

la fin des années 1940 : il écrit et édite des manuels scolaires, et il intervient également dans la formation des enseignants. Mais c'est à partir des années 1960 qu'il lance le projet expérimental qui devient ensuite base de la réforme de 1978.

Selon plusieurs écrits commémoratifs et résumés des collègues (par ex. Klein 1980 p. 30-31), l'événement qui marque le début de ses expérimentations est une série de conférences de Z. P. Dienes, qui est intervenu au second Congrès Hongrois des Mathématiques en 1960. Varga commence des expérimentations dans une classe de l'école élémentaire l'année suivante, en 1961, mais qui échouent rapidement. En 1962, un Symposion Mathématique International de l'UNESCO est organisé à Budapest, qui lui donne d'une part suffisamment d'inspiration pour relancer ses expérimentations, et qui d'autre part lui apporte une reconnaissance internationale (Szendrei 2007 p. 2).

Les expérimentations dites « Komplex Matematikatanítási Kísérlet » (Expérimentation de l'Enseignement des Mathématiques Complexe) sont lancées au cours de l'année scolaire 1963-1964 dans deux classes parallèles de l'école élémentaire du Váci utca, au centre-ville de Budapest. Varga élabore le programme, les fiches de travail et d'autres matériaux au fur et à mesure, en interaction permanente avec des institutrices des classes expérimentales (Szendrei 2005 p. 443).[48] Le projet est progressivement élargi à plusieurs établissements et niveaux : une deuxième école de Budapest (Jázmin utcai általános iskola) le rejoint en 1965, une troisième (Szinyei-Merse utcai általános iskola) en 1966. En 1967, deux nouvelles classes sont lancées dans la première école, en outre une première école de province (de Székesfehérvár) joint les expérimentations. Dans la même année, dès la fin des études élémentaires des premières classes expérimentales, l'étude est prolongée pour le niveau moyen[49]. A partir de ce moment, le nombre des classes participantes augmente à un rythme très soutenu : au cours de l'année scolaire 1970-1971, presque une centaine de classes participent au projet (Klein 1980 p. 31-32).

Le travail est dirigé de l'Institut Pédagogique Nationale (OPI), où le directeur de département est Andor Cser, les collègues de Varga au départ sont Endréné Gádor et Sándor Pálfy (Szendrei 2005 p. 428). Dès le début, il invite quelques jeunes enseignants sortant de l'université, qui sont intéressés par son travail. C'est le cas de Mária Halmos ou d'Eszter C.

[48] Concernant le déroulement des expérimentations, nous nous appuyons aussi sur les informations fournies par Mária Halmos et Eszter C. Neményi, collègues de Varga dès les années 1960 (le 2 janvier, 10 novembre et 5 décembre 2013) ; et en outre, sur les souvenirs d'Anna Deák, une ancienne élève d'une des classes expérimentales, entrée en première année en 1967.

[49] Nous rappelons qu'il y a deux cycles dans l'éducation obligatoire, 4+4 ans ; les deux ont lieu dans le même établissement, les classes restent ensemble pendant 8 ans. Les enseignants accompagnent les classes pendant un cycle entier. Tout cela permet un travail continu pour les expérimentations. Pour les premières expérimentations du deuxième cycle, voir le manuscrit de leur programme provisoire.

Neményi par exemple (entretiens du 10 novembre et du 5 décembre 2013) ; Neményi écrit son mémoire de diplôme sur le programme des expérimentations. Ces jeunes collègues peuvent rejoindre deux équipes de recherche, travaillant sur l'enseignement des mathématiques : l'une est celle de l'OPI, pour organiser et diriger des expérimentations du niveau élémentaire et moyen ; l'autre est celle de l'Institut de Recherche Mathématique, sous la direction de János Surányi, pour élaborer le programme des nouvelles classes expérimentales spécialisées en mathématiques du lycée Fazekas de Budapest.[50] La collaboration entre ces deux équipes est étroite : Halmos par exemple, étant membre de l'équipe de l'Institut Mathématique, reste une co-auteure et collaboratrice proche de Varga (outre les manuels scolaires et livres du maître écrits ensemble, voir par ex. Halmos & Varga 1978). Varga met aussi l'accent sur la collaboration avec des maîtres du terrain (Szendrei 2005 p. 429).

Bien qu'ils soient dans des classes expérimentales, les élèves doivent accomplir les mêmes exigences curriculaires que les autres dans des classes « normales ». Pour Varga, ce n'est pas un réel problème : il considère que les programmes actuels sont trop pauvres et ennuyeux, et ne stimulent pas suffisamment le développement intellectuel des élèves. Il insiste à plusieurs reprises sur la plus grande richesse de son propre programme qui permet d'apprendre l'essentiel du programme classique, mais permet d'acquérir aussi beaucoup de connaissances supplémentaires. Selon lui, son programme propose en outre une organisation mathématique correspondant mieux à l'état contemporain de la science et permettant également une compréhension plus profonde des notions mathématiques, plutôt qu'un simple entrainement mécanique ; et tout cela, dans une forme plus intéressante et amusante pour les élèves.

Le projet a pour nom « complexe », ce terme portant une signification volontairement ambiguë : il désigne à la fois la complexité, l'intégrité du contenu mathématique qui apparaît dans le programme, au lieu des chapitres distincts de calcul et de mesure ; l'intégration organique d'une rénovation du programme avec le renouvellement des méthodes

[50] Les classes spécialisées en mathématique existent jusqu'à aujourd'hui, dans plusieurs établissement du pays ; mais la plus connue et efficace reste celle de Fazekas, dont les élèves obtiennent régulièrement des prix aux Olympiades internationales, et nombre d'entre eux sont devenus des mathématiciens reconnus au niveau international. La première classe spécialisée est presque légendaire, comprenant des mathématiciens comme László Lovász, Miklós Laczkovich, Lajos Pósa et József Pelikán. Lovász, lauréat du prix Wolf et du prix Kyoto entre autres, président de l'International Mathematical Union entre 2007 et 2010, est maintenant président de l'Académie de Sciences de la Hongrie. Pósa, qui publie ensemble avec P. Erdős dès son adolescence, abandonne la recherche mathématique après l'obtention de son diplôme, et rejoint l'équipe mentionnée de Surányi, à l'Institut Mathématique. Il est connu aujourd'hui pour son travail extrascolaire avec des élèves doués en mathématique : il éduque de nombreux jeunes mathématiciens, et sa méthode est reconnue comme modèle par de nombreux enseignants (en français sur lui, voir le n°126 de la revue Tangente). Nous mentionnons enfin Éva Szeredi, également élève de cette première classe expérimentale, devenue ensuite didacticienne des mathématiques, collaboratrice et co-auteur de l'équipe de Varga à partir des années 1970.

pédagogiques ; et enfin, la diversité des approches utilisées : recherches sur l'enseignement des mathématiques, psychologie, pédagogie, neurosciences (Varga 1972, Szendrei 2005 p. 424).

Parmi les principes régulièrement mentionnés de Varga, on trouve la structure « spiralée » du programme[51], l'enseignement d'une diversité des domaines mathématiques dès le plus jeune âge et l'approfondissement lent, progressif et cohérent des sujets ; la résolution des problèmes ; l'importance d'établir l'enseignement sur de nombreuses expériences ; la variété de l'organisation du travail, y compris entre autres le travail individuel avec des instruments et le travail en groupes ; une direction démocratique du travail en classe ; l'activité des élèves, leur prise de responsabilité dans l'apprentissage ; l'éducation à l'autonomie ; appui sur la motivation interne des enfants au lieu de l'externe ; la prise en compte de la diversité des élèves, les différences personnelles ; et l'importance d'une éducation esthétique (par ex. Varga 1967b, 1975).

Nous allons étudier de plus près les principes de ce projet dans la partie II, et les détails de la version du programme mise en place en 1978 dans la partie III. Ici, nous voulons insister sur les différentes voies d'influence qui pouvaient former le travail de Varga. Nous avons déjà souligné l'influence, sur son travail, des discours internationaux du mouvement « mathématiques modernes ». Ses collègues décrivent souvent cette influence de façon critique : selon eux, Varga « a suivi un large panorama des conceptions et expérimentations existantes, en a récupéré les meilleures idées, mais évité, avec sagesse, les exagérations, et a élaboré son propre système, bien équilibré » (par ex. Császár 1993, Szendrei 2005, entretien avec M. Halmos le 2 janvier 2013).

Varga insiste particulièrement, à plusieurs reprises sur l'influence de Pólya (par ex. Varga 1975 p. 37-38), et aussi sur ses rapports complexes avec Dienes : avec ce dernier, il décrit, dans sa thèse, des influences mutuelles, mais aussi de différences entre eux (Varga 1975 p. 38-40). Cependant, outre les divers effets venant de la scène internationale, nous avons insisté aussi sur le rôle des mathématiciens hongrois (§4.2.2) : cette dernière voie d'influence est beaucoup moins mise en valeur que les précédents, mais dans (Halmos & Varga 1978) par exemple, il en parle aussi, mentionnant les noms de Kalmár, Péter, Rényi, Hajós et Turán. Cet aspect de l'œuvre de Varga va nous intéresser particulièrement dans la suite : nous essaierons de montrer comment l'effet de cette communauté de mathématiciens hongrois contribuera à donner une originalité à la conception de Varga. L'influence des mathématiciens hongrois

[51] Il réfère dans sa thèse au livre Bruner, inventeur de cette notion.

semble concerner l'approche épistémologique suivie par Varga, et également le contenu : les domaines principaux de ces mathématiciens, comme la logique, la combinatoire, les probabilités sont mis en valeur dans le programme de 1978 (Partie III, Chapitre 5), mais on peut aussi supposer que l'axiomatisation de la géométrie de Hajós influence le programme de Varga (cf. Partie III, Chapitre 4).

Il faut enfin parler de l'influence de la psychologie et de la pédagogie : Piaget, comme pour la majorité des projets de l'époque, est une référence très importante pour Varga aussi, mais pas la référence unique. Bien qu'il ne se réfère pas à des expériences soviétiques de l'enseignement des mathématiques, il mentionne des recherches psychologiques et pédagogiques de Souhomlinski et de Davidov. On a vu (§4.2.2) l'effet probable de Karácsony. En outre, il faut mentionner la femme de Varga, Ágnes Binét, qui est également psychologue, et collègue proche du plus important psychologue hongrois de l'époque, Ferenc Mérei (voir Mérei & V. Binét 1970). Le fort intérêt de Varga pour la psychologie s'explique aussi parle fait qu'un suivi psychologique accompagnait ses expérimentations (Klein 1980). En somme, on peut dire que l'arrière-plan psychologique de l'œuvre de Varga paraît relativement complexe et mériterait une recherche plus approfondie qui dépasse les cadres de cette thèse[52].

Nous remarquons en même temps que Varga est profondément intégré dans la dynamique internationale de la rénovation de l'enseignement des mathématiques, surtout à partir des années 1970 et 1980 : il participe dans le travail de différents organismes internationaux, il voyage et publie dans plusieurs pays, y compris la France (cf. §3.4)[53]. En outre de s'intégrer dans son projet des expériences diverses ainsi accumulées, il semble également exercer une certaine influence, au niveau international, avant tout dans les domaines de l'enseignement de la logique, la combinatoire et des probabilités[54].

4.3.3 La réforme de l'enseignement des mathématiques en Hongrie

Les expérimentations de Varga ne sont pas les seules menées en Hongrie pendant les années 1960 : on en trouve sans doute beaucoup moins que dans le cas français, mais il existe

[52] Cette recherche est d'autant plus compliquée car les références sont politiquement influencées à l'époque, et par conséquence, pas toujours fiables. On a vu que l'absence de références à l'œuvre de Karácsony s'explique probablement par des raisons politiques. L'inverse est possible concernant les références soviétiques, qui sont presque obligatoires à l'époque : dans sa thèse par exemple, Varga déclare commencer la liste des relations internationales avec des « pays soviétiques », en même temps, ces références apparaissent rarement dans d'autres publications, et selon ses collègues (voir particulièrement l'avis de M. Halmos et E. Deák), l'influence russe est infime dans la réalité.

[53] Pour plus de détails, voir sa biographie dans l'annexe.

[54] Josette Adda confirme son influence sur l'enseignement de la logique (entretien le 20 janvier 2015). Pour la combinatoire et les probabilités, voir Partie III, chapitre 5 (§3.3).

quelques autres essais (Szendrei 2005 p. 428, Forrai et al. 1972). Le plus connu est probablement celui de Ferenc Lénárd, mené dans l'école Arany János, la « méthode des variations » (Lénárd 1972) : il s'agit d'une méthode alternative pour enseigner le calcul.

En 1968, une commission ministérielle est fondée, sous la direction de János Szendrei, pour examiner les expérimentations existantes, et, sur cette base, faire une proposition pour le renouvellement de l'enseignement des mathématiques en Hongrie. La commission prépare son rapport en 1970 (qui servira la préparation de la résolution de 1972), et choisit le travail de Varga pour base du nouveau programme national, bien que ce dernier ne soit pas complètement identique avec le programme original des expérimentations[55] (Láng 1976). Selon Lóránt Pálmay, un des membres de cette commission, la raison de ce choix était la qualité scientifique et pédagogique de ce travail, ainsi que sa nature complexe et globale : les autres expérimentations n'ont concerné qu'une nouvelle méthode sans modification du programme, ou un seul domaine, ou seulement un niveau spécial de l'éducation (voir aussi Szendrei 2005 p. 428). Pálmay confirme aussi que la commission, qui était composée principalement de spécialistes de l'enseignement des mathématiques, a eu carte blanche du ministère pour suivre des critères professionnels lors de la décision.

Le projet de Varga devient donc la base d'un futur programme officiel, et la préparation d'introduction se centre sur l'OPI. Le travail prend ainsi de plus grandes dimensions : des établissements rejoignent en masse les expérimentations, il faut préparer le programme officiel, des manuels, des fiches de travail et des documents d'accompagnement, former des enseignants et informer le grand public (Varga 1975, p 25-35.). Une « version préliminaire » du programme est introduite à partir de 1974, dans moins de 8% des classes de première année, et la proportion des classes concernées augmente progressivement jusqu'en 1978 (Klein 1980 p. 32), quand le programme de la réforme devient obligatoire, parallèlement avec l'introduction des nouveaux programmes des autres matières (§4.3.1). Selon l'avis unanime des collègues[56], même cette introduction progressive était trop rapide : Varga aurait préféré une introduction plus lente, basée sur le volontariat, pour avoir le temps de préparer convenablement tous les enseignants participants (voir aussi Varga 1975 p. 4, 33-34, et Varga 1980). Mais cette approche était en contradiction contradictoire avec la direction centralisée du système éducatif, l'introduction étalée sur 4 ans peut donc être considérée comme un compromis.

[55] Ce dernier fait est précisé dans une lettre de János Szendrei, le 1e novembre 1974, qui accompagne sa thèse.
[56] Entretien avec M. Halmos, E. Csahóczi et Cs. Kovács le 10 novembre 2013.

Le nouveau programme n'a pas été mis en place sans débats : par exemple, la soutenance de thèse de Varga, en 1975, fondé sur son travail d'élaboration du programme, a été accompagnée de débats violents (entretien avec Ervin Deák). Des conflits éclatent entre autres avec la direction de la formation des enseignants de l'université ELTE, le plus grand centre de formation du pays (entretien avec L. Pálmay, le 26 juillet 2012). Mais Varga a de nombreux alliés, un grand nombre de mathématiciens et d'éducateurs soutiennent sa conception[57] ; le travail de la commission académique, entre 1973 et 1976, est également cohérente avec l'approche de Varga (« Livre blanc » 1976, p. 1). Par ailleurs, les débats ne se limitent pas aux cercles professionnels étroits, mais apparaissent aussi dans la presse publique[58].

L'introduction ne se fait donc pas sans difficultés, et le programme suivant, mis en place en 1985, apportera de nouvelles modifications. Toutefois, les changements que le programme de Varga a subis depuis 1978 semblent être moins importants que dans le cas des programmes des « mathématiques modernes » en France. On peut reconnaître une plus grande continuité dans le programme[59] ainsi que dans les manuels et fiches de travail : ceux des même auteurs restent disponibles jusqu'à aujourd'hui[60], et on peut y retrouver des traces qui remontent à l'époque de Varga.

Les continuités et des ruptures dans les programmes suivants demanderaient une étude plus approfondie ; ici, et pour conclure cette analyse historique, nous insistons simplement sur les récits existant dans la communauté hongroise d'enseignement des mathématiques concernant la réforme de Varga. Varga bénéficie d'une reconnaissance forte et générale aux yeux de la communauté aujourd'hui, et son œuvre est toujours considérée comme actuelle et pertinente. Selon l'avis des collègues, le problème principal lors de l'introduction du programme était le système éducatif peu flexible, la préparation insuffisante des maîtres, et le conservatisme du public : c'est ce qui a nécessité un compromis entre l'idéal de la conception de Varga (un idéal qui n'est pas remis en question par la communauté d'aujourd'hui), et les réalités scolaires (par ex. Pálfalvi 2000, Szendrei 2005, entretien avec M. Halmos le 2 janvier 2013).

---

[57] Pour donner un exemple : il se trouve, dans l'héritage de R. Péter, une lettre adressée au ministre de la culture et de l'éducation, à Aczél, qui laisse comprendre que Péter était interrogée personnellement par le ministère pour donner son avis sur la rénovation nécessaire de l'enseignement des mathématiques. Rózsa Péter est par ailleurs réputée comme un des protecteurs les plus engagées du projet de Varga (entretiens avec L. Pálmay, E. Deák).

[58] Voir par exemple l'article collectif du Département Mathématique de l'OPI (OPI Matematikai Osztály 1983) qui conclut un long débat sur les pages de la revue Köznevelés, une périodique sur l'éducation.

[59] Par exemple, des éléments de la logique et de la théorie des ensembles restent présents dans le programme du primaire ; on continue à utiliser les blocs logiques et les réglettes de Dienes etc. Pálfalvi (2000) insiste sur la continuité de la structure du programme entre 1978 et 1997.

[60] Les fiches de travail de C. Neményi, plusieurs fois renouvelés pour le primaire étaient utilisés jusqu'en 2013. Une nouvelle série de manuels de collège des auteurs de ceux de 1978, de Szeredi, Kovács et Csahóczi, en collaboration avec d'autres auteurs plus jeunes, est utilisée jusqu'à présent.

Quelles sont les raisons de cette absence quasi-totale des critiques professionnels internes ? Il ne faut sans doute pas négliger la qualité du travail de Varga, qui s'est inspiré de nombreuses sources, et a été mûri pendant une longue période d'expérimentations et à travers de débats divers : nous aurons l'occasion d'analyser amplement cette œuvre dans la partie III. Dès les années 1960, Varga insiste sur des aspects qui sont entre-temps devenus courants au niveau international, et qui rendent sa conception plus actuelle : les liens avec le monde réel, le développement des « compétences », un appui sur les outils pédagogiques coopératifs et sur les démarches d'investigation par exemple.

Mais tout cela ne suffit pas à expliquer l'absence de critiques et de réels renouvellements. On peut aussi souligner le nombre réduit des acteurs indépendants pouvant intervenir pendant la période des expérimentations, et la possibilité limitée de débats dans les années 1960 et 1970. En outre, on ne peut pas négliger le rôle du manque de ressources financières pour des recherches didactiques ultérieures : les équipes de l'OPI et de l'Institut Mathématique ont été supprimées après le changement de régime, peu après la mort de Varga, et n'ont pas eu d'équivalent jusqu'à aujourd'hui. L'éducation des élèves doués, comme avant, reste soutenue et animée. Mais pour ce qui concerne la recherche générale sur l'enseignement des mathématiques, surtout au niveau élémentaire et moyen, « l'époque d'or » semble être celle de Varga, sans réelle poursuite ultérieure.

5 CONCLUSION

En comparant les mouvements de réforme des décennies 1960 et 1970 de la France et de la Hongrie, de nombreux points communs peuvent être identifiés. Avant tout, les deux mouvements s'inscrivent dans la même dynamique internationale : les acteurs principaux participent au travail des mêmes organismes, et s'inspirent, au moins partiellement, des mêmes sources et des mêmes discours internationaux. Une coopération directe existe aussi entre les acteurs des deux pays.

Malgré la différence des systèmes politiques, les éléments pertinents du contexte socioéconomique sont très similaires : les deux pays passent par un processus d'industrialisation, et procèdent à une massification et à une démocratisation de leur système éducatif. L'unification de l'école moyenne constitue un contexte direct pour la réforme des mathématiques modernes en France, de la réforme Berthoin en 1959 jusqu'à celle de Haby en 1975 ; en Hongrie, la création de l'école moyen unique, au sein des « általános iskola » de 8

ans, était fait plus tôt, dès 1946, mais Varga le mentionne même en 1978 comme une des raisons qui ont rendu nécessaire la réforme de l'enseignement des mathématiques (Halmos & Varga 1978).

En ce qui concerne les acteurs, un point commun remarquable est l'investissement des mathématiciens dans le mouvement : la sphère universitaire et académique prend une responsabilité importante dans les réformes des deux pays. Leur intervention ne se limite pas au contenu de la réforme, mais concerne aussi des questions épistémologiques. Un des enjeux principaux de la réforme est de rapprocher l'enseignement des mathématiques de l'état contemporain de la science. Par ailleurs, on trouve dans les deux pays une diversité d'acteurs, y compris des psychologues et des enseignants de mathématiques.

Enfin, nous mentionnons la réception de la réforme : dans les deux pays, les concepteurs sont conscients de l'ampleur des changements et mettent beaucoup l'accent sur l'information du public professionnel et de la société, par différents outils de formation et par les divers médias ; mais, malgré tous les efforts, la réforme crée des débats publics violents et une résistance importante. Quelques années après leur mise en place, et devant l'abondance des critiques, les réformes voient des révisions plus ou moins essentielles.

Au-delà de ces similitudes, plusieurs différences importantes peuvent être observées entre la réforme hongroise et française. Pour ce qui concerne le système scolaire, bien que le contexte d'introduction d'une école moyenne unique soit présent dans les deux cas, l'enjeu est relativement différent à l'époque des réformes en question. En France, dans les années 1960, il s'agit d'une unification des programmes, qui sera poursuivie par l'introduction du collège unique. En Hongrie, cette unification structurelle s'est déroulée déjà dans les années 1940, avec une uniformisation strictement réglée des programmes ; dans les décennies 1960 et 1970, il s'agit plutôt d'une lente libéralisation, et des possibilités de différentiation, c'est-à-dire de tenir compte de la diversité des élèves. Cette différence dans les tendances a plusieurs conséquences sur les réformes, comme on verra plus loin ; pour en donner un exemple, nous mentionnons le rôle (plus précisément, un rôle probable parmi d'autres) du langage formel. Si ce dernier permet, pour la réforme française, d'assurer l'uniformité des mathématiques enseignées dans tous le pays, la réforme de Varga met plutôt l'accent sur les langages personnels des élèves.

La dynamique des deux réformes est relativement différente, ce qui peut-être dû à la disparité des systèmes politiques : en France, un plus grand nombre d'acteurs peuvent intervenir, outre la commission Lichnerowicz (qui comporte elle-même beaucoup de membres

avec des affiliations diverses), différentes personnes et communautés : association des enseignants, syndicats, instituteurs, etc. expriment leur avis et influencent la réforme. Plusieurs centres se créent pour promouvoir la réforme : avant tout les IREM, lieux de formation des enseignants pour les préparer aux changements, deviennent aussi lieux d'expérimentation, de débats et de critiques. La diversité d'intervenants, d'avis et d'ambitions est à la fois source de ruptures et de contradictions dans la réforme, mais aussi d'une dynamique continue de correction et de développement après la réforme.

En Hongrie, malgré la lente libéralisation mentionnée, la publicité du processus de réforme et les possibilités d'intervention sont plus limitées et contrôlées. Il semble que la réforme est conçue principalement par l'équipe de Varga, avec un soutien plus ou moins direct de plusieurs mathématiciens, et avec la participation de nombreux enseignants dans les expérimentations. C'est vrai aussi des manuels scolaires : en France, il y a une diversité de manuels, en Hongrie, une seule série de manuels scolaires est disponible, écrit par la même équipe que le programme[61]. Cependant, la période d'expérimentation est beaucoup plus longue en Hongrie qu'en France : 15 années se passent du début des expérimentations jusqu'à l'introduction générale des nouveaux programmes. Par conséquent, la réforme hongroise est d'un côté plus cohérente[62] et mieux établie sur des expériences ; d'un autre côté, elle subit une dynamique de correction plus réduite que la française : après la mort de Varga (mais probablement à cause de plusieurs raisons simultanées), cette dynamique est très affaiblie.

La suite des réformes paraît être relativement différente aussi : en France, il y a des modifications plus radicales, et malgré de nombreux éléments durables de la réforme des « mathématiques modernes », on s'en souvient plutôt comme d'un échec. En Hongrie par contre, l'effet de la réforme semble être plus durable, et bien qu'il y ait des modifications depuis dans les programmes, elle bénéficie d'une reconnaissance générale, et reste un point de repère important pour la communauté. En même temps, la dynamique de la communauté didactique et des IREM, émergeant autour de la réforme française, s'étend et reste vivante – en Hongrie par contre, cette dynamique faiblie à partir du milieu des années 1980.

Concernant les acteurs principaux, il est intéressant d'observer leur arrière-plan institutionnel : en France, malgré la diversité des intervenants qui expriment leur avis, les études historiques insistent sur la domination des mathématiciens universitaires pour la

[61] Pour une comparaison internationale des manuels scolaires dans un contexte similaire, entre la France, l'Angleterre et la Pologne dans les années 1950 et également dans les années 2000, voir la thèse de C. Radtka (2013)

[62] On verra au moment où nous étudierons les programmes que, quand la réforme française est marquée par plusieurs ruptures, Varga met particulièrement l'accent sur la continuité et la cohérence du programme.

construction du programme des « mathématiques modernes », qui met ainsi l'accent sur la cohérence théorique, souvent au détriment des considérations pédagogiques. En Hongrie, bien que les mathématiciens jouent un rôle important, la réforme est dirigée de l'Institut Pédagogique, avec l'intervention active de plusieurs enseignants du terrain ; les questions pédagogiques et psychologiques obtiennent, dans la conception de Varga, une très grande attention. Par ailleurs, l'influence de la psychologie est aussi un facteur remarquable dans la comparaison : en France, on se réfère principalement à l'influence de Piaget, le terrain hongrois semble être un peu plus complexe de ce point de vue.

Nous remarquons que dans l'analyse de la réforme des deux pays, un accent plus grand semble être accordé, dans le cas français, aux divers institutions et collectivités ; quand en Hongrie, il s'agit plutôt de l'intervention des individus. Il n'est pas clair si cette différence observée découle du déséquilibre méthodologique de notre étude ou révèle une différence réelle entre les deux pays. Elle peut prendre son origine, en partie, dans la nature de nos sources : pour la France, nous disposons d'amples études historiques, pour la Hongrie, nous ne pouvons nous appuyer pour l'instant que sur des mémoires personnelles, naturellement plus subjectives et plus orientées vers le rôle des personnes. Mais il est possible que ce ne soit pas la seule explication. Peut y contribuer, à nouveau, la différence des systèmes politiques (l'existence ou la restriction de la possibilité de s'organiser en collectivités, et d'exprimer publiquement les avis différents) – mais aussi, éventuellement, une différence culturelle entre les deux pays. L'identification d'une telle différence serait d'autant plus intéressante que, comme on le verra dans l'analyse didactique, elle est observable aussi sur les programmes des réformes, et même sur les conceptions didactiques émergeant dans les deux pays : en France, les questions institutionnelles sont souvent soulignées, en Hongrie, on met souvent l'accent sur la personnalité et sur la diversité individuelle. Des recherches plus approfondies et plus cohérentes quant à leur méthodologie seraient nécessaires pour mieux comprendre les raisons de cette différence[63].

Il y a une différence aussi dans le sens du déroulement de la réforme : en France, elle commence aux niveaux supérieurs, l'enjeu est en fait le rapprochement de l'éducation secondaire à la formation universitaire, renouvelée dans les années 1950. La réforme de l'enseignement élémentaire est une deuxième étape, elle vient de la nécessité de le rendre plus cohérent avec le secondaire, mais devient moins profonde que celle du secondaire, et reste

[63] Cela signifie, d'un côté, des recherches plus centrées sur l'aspect institutionnel pour le cas hongrois. De l'autre côté, nous signalons que des recherches en histoire des mathématiques avec un focus biographique sont menées récemment en France : voir par exemple la thèse de Paumier (2014) sur Laurent Schwartz.

plus ou moins inachevée. En Hongrie par contre, Varga réfléchit, dès le début, à la nécessité de rénover l'enseignement dans son intégralité, en commençant par le début de la scolarité. Ses expérimentations commencent au niveau élémentaire, et remontent plus tard vers l'école moyenne, mais c'est la réforme des quatre premières années qui reste la mieux élaborée.

Enfin, soulignons un point qui nous intéressera particulièrement dans la suite. Nous avons vu que l'intervention des mathématiciens est importante dans les deux pays, et qu'il s'agit de rapprocher l'enseignement de l'état contemporain des sciences. Toutefois, cet « état actuel » ne signifie pas exactement la même chose pour les mathématiciens des deux pays[64]. Il y a des différences au niveau du contenu mathématique à intégrer dans le programme (priorité de l'étude des structures, algèbre, théorie des ensembles en France ; mathématiques discrètes, logique, probabilités en Hongrie) et, de manière peut-être plus importante encore, au niveau de l'épistémologie mathématique. Si en France, l'épistémologie dominante à cette époque suit l'esprit de Bourbaki, en Hongrie on peut identifier une autre conception, partagée par les mathématiciens influençant la réforme, que l'on pourrait appeler « heuristique » (d'après l'œuvre de G. Pólya), ou bien « lakatosien » (d'après son représentant tardif, mais le plus connu)[65]. Ce sont ces conceptions épistémologiques que nous examinerons dans la partie suivante.

[64] Ne parlant ici que de ceux et celles qui interviennent pour la réforme, car les avis de la communauté entière des mathématiciens sont probablement plus variés dans chaque pays.

[65] Il est intéressant de remarquer que la réforme française marque une rupture, au niveau épistémologique, avec la réforme du début du 20e siècle ; en Hongrie par contre, on peut observer une certaine continuité, explicitée même par les acteurs.

PARTIE II
ÉPISTEMOLOGIE : CONCEPTIONS SUR LA NATURE DES MATHEMATIQUES ET REFLEXIONS SUR SON ENSEIGNEMENT A L'ARRIERE-PLAN DES REFORMES

1 INTRODUCTION

Dans la partie I, nous avons montré que des mathématiciens participent activement dans le mouvement de réforme de l'époque des mathématiques modernes, en France ainsi qu'en Hongrie. Nous avons vu aussi que les discours sur les mathématiques à enseigner ne se limitent pas aux questions de contenu, mais concernent également des questions épistémologiques. En parlant des « mathématiques modernes », on remet en question l'image transmise par l'éducation sur la nature des mathématiques.

Dans la partie II, nous examinerons de plus près ces questions épistémologiques. Nous étudierons principalement les discours des mathématiciens qui soutiennent la réforme française et hongroise. Nous essayerons de montrer que malgré de nombreuses préoccupations communes, venant du développement des mathématiques au 20e siècle, les mathématiciens français et hongrois qui sont à l'arrière-plan de la réforme prennent deux positions épistémologiques très différentes et que ces différences épistémologiques amènent à des conceptions différentes sur l'enseignement des mathématiques.

Il faut souligner que nous ne tentons pas à donner un panorama des discours de l'époque sur la nature des mathématiques et sur leur enseignement, dans les deux pays en question[66]. Nous avons vu dans la partie I qu'il existait de vifs débats sur ces questions, et les avis exprimés dans chaque pays sont loin d'être homogènes. Nous nous concentrerons uniquement sur l'avis de quelques mathématiciens qui interviennent plus ou moins directement dans le mouvement de réforme et qui y exercent une influence importante.

En France, nous avons vu que la position épistémologique dominante de l'époque est celle associée au nom de Bourbaki. Il faut souligner qu'il ne s'agit pas nécessairement d'une position partagée par tous les membres de Bourbaki : nous n'étudions n'y l'œuvre individuel de ces mathématiciens, ni les débats existants au sein du groupe[67]. Ce qui nous intéresse ici, c'est la « façade bourbakiste » : l'image sur les mathématiques que les adeptes associent à l'œuvre collectif du groupe, à partir de leur *Éléments de mathématique* et à partir de quelques textes programmatiques, avant tout ceux de Dieudonné. Quand nous référons à l'épistémologie « bourbakiste », il s'agit de cette image formée sur l'œuvre de Bourbaki, qui

[66] Nous référons à nouveau à la thèse en cours d'Aurélie Mabille qui tente de donner un panorama plus exhaustif des discours français de l'époque. Nous renvoyons en outre le lecteur intéressé vers la thèse d'Anne-Sandrine Paumier (2014) sur Laurent Schwartz et la vie collective des mathématiques dans la seconde moitié du 20e siècle et vers la thèse de Catherine Radtka (2013) qui examine l'image transmis sur les sciences dans les manuels scolaires anglais, français et polonais des années 1950 et des années 2000.

[67] réf

apparaît à l'arrière-plan de la réforme française. Nous étudierons ainsi principalement les écrits divers de Dieudonné, Choquet et Lichnerowicz[68], trois mathématiciens dont nous avons vu qu'ils ont activement pris part au mouvement de réforme en France, et nous essayons de résumer leur conception sur la nature des mathématiques (§2). « Porte-parole » principal du groupe Bourbaki (Corry 2001 p. 25), Dieudonné est l'auteur de plusieurs textes épistémologiques visant à diffuser l'approche bourbakiste ; Choquet et Lichnerowicz s'expriment sur ce sujet surtout dans le contexte de l'enseignement. Outre ces sources primaires, nous pouvons nous appuyer aussi sur quelques sources secondaires, l'épistémologie bourbakiste étant l'objet de nombreuses recherches.

Pour ce qui concerne le cas hongrois, il n'existe pas de groupe de mathématiciens aussi bien défini qui servirait de référence pour la réforme, comme Bourbaki dans le cas français. On ne trouve pas non plus un discours épistémologique aussi explicite autour de la réforme qu'en France. Il est pourtant possible d'identifier une communauté de mathématiciens influençant la réforme de Varga, constituée de László Kalmár, Rózsa Péter, Alfréd Rényi entre autres. Comme nous l'avons souligné dans la partie I (§4.2.2), plusieurs études ont attiré l'attention sur l'existence des réflexions épistémologiques dans cette communauté depuis les années 1940, sur les contacts de ces personnes avec le psychologue-pédagogue Sándor Karácsony ou encore avec le philologue classique et historien des sciences Árpád Szabó, et sur leur influence probable (avant tout de Kalmár) sur la philosophie ultérieure d'Imre Lakatos (Gurka 2001, Máté 2006, 2008). Nous avons insisté aussi sur les liens, moins directs mais existants, avec György Pólya. Nous allons faire référence à cette communauté avec l'expression « l'école hongroise » (sans suggérer qu'il s'agirait d'une approche généralement partagée par tous les mathématiciens hongrois, ni que cette position épistémologique se limiterait à la Hongrie).

La position épistémologique de cette « école hongroise » peut être reconstituée à l'aide des œuvres de vulgarisation de ces mathématiciens et de quelques conférences concernant les questions de l'enseignement[69]. Nous essayerons de montrer (§3) qu'il s'agit en effet d'une conception cohérente sur la nature des mathématiques et sur leur enseignement, proche de la position de Pólya et de Lakatos. Nous allons nommer cette conception « heuristique » : nous essayerons de montrer en effet que l'idée d'une heuristique est récurrente dans

[68] Les deux derniers n'étaient pas membres du groupe Bourbaki. Choquet est pourtant proche au groupe, est c'est lui qui introduit un enseignement « bourbakiste » des mathématiques à l'université dans les années 1950 (Mashall 2002 p. 138).

[69] Máté (2008) suggère une approche similaire en s'intéressant à l'épistémologie de Kalmár et de Péter. En étudiant deux articles de Kalmár et *Jeux avec l'infini* de Péter, il insiste avant tout sur la position faillibiliste de ces deux mathématiciens. Nous allons arriver à des résultats similaires (cf. §3.1.2).

l'épistémologie des mathématiciens de « l'école hongroise ». Après l'analyse des textes divers et l'identification de quelques principes de cette conception, nous examinerons de plus près l'un des textes en question, le livre de vulgarisation de Rózsa Péter, intitulé *Jeux avec l'infini* (Péter 1944/1977). Nous essayerons de montrer (§3.2) que cette œuvre peut être interprétée comme un sorte de modèle pour la réforme ultérieure de Tamás Varga.

2 UNE EPISTEMOLOGIE « BOURBAKISTE » EN FRANCE

2.1 L'épistémologie de Bourbaki

Le groupe se cachant derrière le nom de « Nicolas Bourbaki » a été fondé en 1935 par quelques jeunes mathématiciens français[70]. Insatisfaits de l'enseignement des mathématiques au niveau supérieur en France, ils ont décidé de rédiger ensemble un nouveau manuel d'analyse pour leurs cours universitaires, tenant compte du développement contemporain des mathématiques. Le projet a rapidement dépassé les cadres originaux, et a conduit à la rédaction des *Éléments de mathématique*, publiés pendant plusieurs décennies sur des milliers de pages, visant à fournir tout un panorama de la science mathématique (au singulier !), organisée dans un grand système unique et cohérent, partant de la théorie des ensembles. Á travers les *Éléments*, Bourbaki a exercé une influence profonde sur les mathématiques du 20e siècle, pas seulement sur le contenu des recherches, mais aussi sur le style des traités mathématiques, et plus généralement sur la vision concernant la nature des mathématiques (Houzel 2004, Corry 2001).

Bourbaki n'a jamais été particulièrement intéressé par l'enseignement primaire ou secondaire. Au départ, les membres ont visé une réforme au niveau supérieur, pour la formation des mathématiciens, mais ces premières intentions ont bientôt été éclipsées par le projet de rédaction des *Éléments* (Houzel 2004). C'est avec Choquet, à partir des années 1950 que l'œuvre de Bourbaki commence effectivement à transformer la formation universitaire des mathématiques (Revuz 1996 p. 75).

Principal porte-parole du groupe (Corry 2001 p. 25), Dieudonné exprime son avis sur l'enseignement secondaire à plusieurs reprises dans la période du mouvement des « mathématiques modernes », dans les décennies 1950 et 1960 : on a vu qu'il était même membre fondateur du CIEAEM, avec Choquet et Lichnerowicz entre autres. Mais Dieudonné,

[70] Les membres fondateurs sont Claude Chevalley, Jean Dieudonné, René de Possel, Henri Cartan, Szolem Mandelbrojt, Jean Delsarte, André Weil, le physicien Jean Coulomb et Charles Ehresmann (Houzel 2004 p. 53).

ainsi que Choquet, limitent leurs suggestions au niveau des dernières années du lycée et ils se déclarent tous les deux incompétents concernant le sujet de l'enseignement dans les classes inférieures (Dieudonné 1964, Choquet 1964), même s'ils font quelques remarques concernant l'enseignement au collège dans leur écrits, comme on verra dans la suite[71]. Toutefois, la vision accordée à Bourbaki, centrée sur la méthode axiomatique et sur la notion des structures, a largement déterminé les discours sur la nature des mathématiques pendant le mouvement de réforme, et cela bien au delà des frontières de la France (Barbazo 2010, Houzel 2004, Corry 2001).

2.1.1 La méthode axiomatique et les structures mathématiques

En 1948, Dieudonné publie, sous le nom de Nicolas Bourbaki, un article intitulé *L'architecture des mathématiques* qui est devenu le texte programmatique probablement le plus connu de Bourbaki (Corry 2001 p. 25). Ce texte commence par le problème de l'unité des mathématiques dans un contexte de croissance rapide du nombre des travaux mathématiques. La « méthode axiomatique » apparaît comme une réponse à ce problème :

> Aujourd'hui, au contraire, nous croyons que l'évolution interne de la science mathématique a, malgré les apparences, resserré plus que jamais l'unité de ses diverses parties, et y a créé une sorte de noyau central plus cohérent qu'il n'a jamais été. L'essentiel de cette évolution a consisté en une systématisation des relations existants entre les diverses théories mathématiques, et se résume en une tendance qui est généralement connue sous le nom de « méthode axiomatique ». (Bourbaki 1948 p. 37)

Cette méthode axiomatique consiste à élucider des propriétés fondamentales des « objets » d'une théorie mathématique permettant de déduire toutes les autres propriétés comme théorèmes. En posant ces premières propriétés comme axiomes, la théorie peut être organisée dans un système axiomatique formel, sans tenir compte des autres caractéristiques des « objets » originaux : la théorie est ainsi applicable sur n'importe quels objets portant les mêmes propriétés fondamentales (Bourbaki 1948, Corry 2001 pp. 26-27).

Dans un écrit plus tardif, Dieudonné compare la méthode axiomatique à un jeu d'échec. Corry résume ainsi l'idée :

> […] In the latter one does not speak about truths, but rather about following correctly a set of stipulated rules. If we transpose that idea into mathematics —wrote Dieudonné— we arrive to Hilbert's conception: mathematics becomes a game, in which the pieces are graphical signs, that are distinguished from each

[71] Choquet était pourtant un intervenant régulier des conférences organisées par l'APMEP, et a joué un rôle très important dans la diffusion de la méthode axiomatique et de l'approche structurelle des mathématiques au sein de l'association, comme le montre Barbazo (2010). Il a aussi participé dans le travail de la commission Lichnerowicz (rapport de la commission 1967, p. 245).

other by their form alone, and not by their contents (Dieudonné 1962, p. 551, cité dans Corry 2001 p. 27).

Comme le signale Corry, le programme basé sur la « méthode axiomatique », accordé un peu abusivement à Hilbert[72], correspond bien au travail que Bourbaki fait dans les *Éléments* :

> Dieudonné's rendering of Hilbert's position, though not absolutely faithful as an historical description, is the one that more faithfully describes the kind of mathematics that developed under the influence of Bourbaki's own textbooks. These books present the various domains discussed on them as defined by a list of apparently meaningless axioms, and all the results are derived with reference only to these axioms, while explicitly excluding any kind of motivation or intuition. The trademark of these texts is that they exclude any external references (though there are many cross-references) as well as any reliance on figures, even in domains which are so strongly geometrically motivated as topology. The axiomatic image of mathematics more closely associated to the name of Bourbaki – and the one I will refer to here – is the image according to which mathematics is a series of formal theories, at the basis of which stand axioms without any specific, intuitive meaning, and the results of which are supported by formally constructed proofs without any appeal to external intuitions. (Corry 2001 pp. 27-28)

Dans la conception bourbakiste, la méthode axiomatique est étroitement liée à la notion des « structures mathématiques ». Les deux notions ne sont pourtant pas identiques : Corry (2001 p. 29) insiste sur le fait que la première remonte à Hilbert alors que la deuxième est inspirée par le livre *Moderne Algebra* de Van der Waerden. Waerden défini des structures de l'algèbre d'une façon strictement axiomatique ; Bourbaki reprend l'idée et l'étend sur l'ensemble des mathématiques.

Dieudonné décrit ainsi la notion des structures mathématiques :

> Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique, est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature *n'est pas spécifiée* ; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations où interviennent ces éléments […] ; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les *axiomes* de la structure envisagée. Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure, *en s'interdisant toute autre hypothèse* sur les éléments considérés (en particulier, toute hypothèse sur leur « nature » propre. (Bourbaki 1948 p. 40)

Les structures mathématiques sont de différents types : Dieudonné parle des structures algébriques, topologiques et celles définies par une relation d'ordre. Elles s'organisent en outre en une hiérarchie, dont au sommet se trouvent des « structures-mères », les structures les plus générales et plus fondamentales :

[72] On verra plus tard que le mathématicien hongrois Kalmár interprète différemment la conception de Hilbert : nous revenons sur cette question dans la conclusion (§4).

> Au lieu des compartiments bien délimités de l'Algèbre, de l'Analyse, de la Théorie des Nombres et de la Géométrie, nous verrons, par exemple, la théorie des nombres premiers voisiner avec celle des courbes algébriques, ou la géométrie euclidienne avec les équations intégrales ; et le principe ordonnateur sera la conception d'une hiérarchie de structures, allant du simple au complexe, du général au particulier.
> Au centre sont les grands types de structures, dont nous avons énuméré tout à l'heure les principaux, les structures-mères, pourrait-on dire. Dans chacun de ces types règne déjà une assez grande diversité, car il faut distinguer la structure la plus générale du type considéré, avec le plus petit nombre d'axiomes, et celles qu'on obtient en l'enrichissant d'axiomes supplémentaires dont chacun apporte sa moisson de nouvelles conséquences. (Bourbaki 1948 p. 43)

Le travail de mathématicien moderne consiste ainsi, selon Bourbaki, à étudier les différentes structures mathématiques, à les combiner, à y introduire des axiomes nouveaux et à élucider davantage de liens entre les structures (Bourbaki 1948 p. 45).

2.1.2 Abstraction et langage formel

Le caractère abstrait des mathématiques joue un rôle central dans cette conception. Dieudonné reconnait que certaines notions mathématiques peuvent trouver leur origine intuitive dans le monde physique et dans les besoins pratiques, mais il insiste sur le fait que même les premières notions mathématiques, comme celle du nombre ou l'espace sont « déjà fort abstraites » (Dieudonné 1955 p. 48). C'est justement le processus d'abstraction « poussé à l'extrême » qui donne la puissance universelle aux mathématiques (Dieudonné 1955 p. 61). La force des mathématiques est avant tout dans cette capacité d'abstraction et dans le travail abstrait sur les notions vidées de contenu ; et si elles se trouvent adaptées pour l'étude des phénomènes du monde réel, cela ne concerne pas les mathématiques elles-mêmes, seulement leurs *applications*.

> Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de *formes* abstraites – les structures mathématiques ; et il se trouve – sans qu'on sache bien pourquoi – que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ces formes, comme par une sorte de préadaptation. Il n'est pas niable, bien entendu, que la plupart de ces formes avaient à l'origine un contenu intuitif bien déterminé ; mais c'est précisément en les vidant volontairement de ce contenu qu'on a su leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance, et qu'on les a rendues susceptibles de recevoir des interprétations nouvelles, et de remplir pleinement leur rôle élaborateur. (Bourbaki 1948 p. 47)

Dieudonné refuse ainsi toute réflexion sur la nature des « êtres » mathématiques, les considérant comme « pseudo-problèmes métaphysiques » : selon eux, « les structures mathématiques deviennent, à proprement parler, *les seuls 'objets'* de la mathématiques » (Bourbaki 1948 p. 40).

Les mathématiques étant considérées comme la science des *formes abstraites*, le porteur de ces formes, le *langage formel* des mathématiques obtient une attention particulière. En fait, on trouve peu de réflexion explicite sur la question du langage dans les écrits programmatiques de Bourbaki, c'est plutôt le langage mathématique introduit dans leur œuvre qui peut exercer une influence. En tout cas, les adeptes du courant bourbakiste identifient souvent les mathématiques à son langage : entre autres, on retrouvera cette idée dans la plupart des documents officiels et des manuels scolaires français de la réforme des « mathématiques modernes »[73].

2.1.3 Modernité et vérités éternelles

Corry (2001) insiste sur le fait que Bourbaki considère des mathématiques comme porteur des « vérités éternelles ». Le contenu, les théorèmes mathématiques sont absolument sûrs, et la méthode axiomatique, dégagée enfin par Bourbaki, assure la plus grande clarté et précision possible pour leurs démonstrations, évitant ainsi toutes sortes d'ambiguïtés qui avaient pu causer des crises de fondements. Mais la forme et les problèmes de cette science sont également arrivés à l'étape ultime de leur développement :

> To summarize, then, one can see how Bourbaki's images of mathematics, especially as formulated and promoted by the group's most active speaker, Jean Dieudonné, put forward the idea that not only the body of mathematical knowledge is a collection of eternal truths, but that this is also the case for the images of knowledge as well. In particular, the structural image of mathematics is the ultimate stage of a necessary process of historical development, and it is bound to remain unchanged in the future. After the publication of the *Eléments*, so suggested Dieudonné, future developments in mathematics would proceed squarely within the basic framework stipulated by the structural image put forward in this treatise: more complex structures would perhaps be developed, that combine in new ways the mother-structures and the other, already known, structures built on the latter. Above all, new and more sophisticated knowledge would be gained about all these structures. But beyond that, our knowledge that mathematics is a hierarchy of structures and that mathematical knowledge advances by further elucidating the individual structures that compose the hierarchy – this image would remain unchanged and as eternal as any of the specific theorems that have been proved about any of those individual structures. (Corry 2001 p. 40)

En effet, la vision de Bourbaki (ou au moins de Dieudonné) sur l'histoire des mathématiques est d'un caractère téléologique : son état élaboré dans l'œuvre de Bourbaki est l'étape ultime et idéale de son développement. Bien que Dieudonné insiste sur la nature vivante des mathématiques et sur son développement permanent, les futurs avancements qu'il envisage ne

[73] Pour une analyse de ce phénomène, voir (Chevallard 1980)

concernent plus le fond de l'œuvre bourbachique. Nous citons à nouveau Corry (2001) sur ce point :

> Another interesting example of the sweeping validity claims associated with Bourbaki's work appears in a book published by Dieudonné in 1977 (and translated into English in 1982) under the name of *A Panorama of Pure Mathematics. As seen by Nicolas Bourbaki*. Dieudonné presents in this book an overview of many branches of mathematics and of the main problems addressed in each of them. He put forward a picture of mathematics as divided into two great parts: a "classical" and a "live" one. The classical part is that part of mathematics embodied in the various volumes of Bourbaki's *Eléments*. No more and no less. The live part is that one which is still in a process of being constituted: it is still changing and therefore it is unstable, but eventually, as it stabilizes, it will be added to the *Eléments* and thus it will become part and parcel of "classical" mathematics. Moreover, so asserts Dieudonné, the reader interested in knowing what are the most important parts of this live mathematics, will find it by consulting the proceedings of the Seminar Bourbaki, currently held a the University of Paris. This is obviously a very "non-classical" definition, one may say, of what classical mathematics is, and also of what live mathematics is. (Corry 2001 p. 36)

> Yet a third, and last, instance I would like to mention here, of Bourbaki's way to present a certain system of images of knowledge as eternally valid, is Bourbaki's historiography. Bourbakian historiography is manifest mainly in the collection of articles published as *Eléments d'histoire des mathématiques* (1969), as well as through the many historical writings of individual Bourbaki members, especially Dieudonné. […] Bourbaki's historiography is the classical example of that approach according to which the importance of mathematical ideas in the past is judged by pondering their relevance to present conceptions. Bourbaki is not the only representative of this trend in the history of mathematics, but what is singular about Bourbaki is that the framework of reference he adopted for making historical judgment is one that, as was said above, is meant to remain unchanged in the future as well! Thus, Bourbaki (especially Dieudonné) interestingly combine in historiography two different aspects: a Whigish approach to past history and a belief in the eternal character, not only of the truth of mathematical theorems and results, but also of its present organization. (Corry 2001 p. 37)

Cette vision sur l'histoire a des conséquences importantes concernant les questions de l'éducation.

Dieudonné s'oppose à plusieurs reprises à l'image d'une science figée, transmise dans l'éducation, et pour montrer le caractère vivant des mathématiques, il promeut, avec un élan d'avant-garde, la *modernité* au détriment de l'*ancien*. En effet, comme le dit Choquet, il existe « une voie royale » pour les mathématiques (Choquet 1964 p. 11) que Bourbaki a enfin réussi à dégager. Pourquoi cacher donc cette voie, en chargeant les étudiants du passage lourd et superflu à travers toutes les notions historiques ? Le slogan célèbre de Dieudonné, « A bas Euclide » exprime cet éloge de la modernité, que les bourbakistes considèrent comme

porteuse d'une « économie de pensée » essentielle. Lichnerowicz, à son tour, exprime également sa critique contre un enseignement des mathématiques « de type historique » (Lichnerowicz 1955, p. 65).

L'exemple principal illustrant la critique contre l'enseignement traditionnel est, pour Dieudonné et pour Choquet aussi, l'enseignement de la géométrie. Nous citons ici l'introduction de *L'enseignement de la géométrie* de Choquet, un livre de 1964 où il soumet une axiomatique moderne de la géométrie élémentaire à l'intention des enseignants du secondaire.

> L'axiomatique d'Euclide-Hilbert est basée sur les notions de longueur, d'angle, de triangle. Elle cache à merveille la structure vectorielle de l'espace, au point que de nombreux siècles ont ignoré la notion de vecteur. Le fait qu'un triangle soit la moitié d'un parallélogramme n'a pas empêché qu'on mette l'accent pendant plus de vingt siècles sur l'étude détaillée des hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices des triangles, sur les cas d'égalité des triangles, et sur les relations métriques dans le triangle. On voyait le triangle, mais non le parallélogramme qui aurait pu conduire aux vecteurs.
>
> Certes le triangle gardera toujours une place intéressante, due à ce qu'il est le polygone plan le plus simple, et qu'un triangle détermine un plan et un seul. Mais il faut freiner énergiquement le goût pervers qui entraîne vers les points remarquables du triangle, et vers des relations métriques parfois élégantes mais inutiles.
>
> Notre faveur doit aller à des méthodes qui reposent sur les notions fondamentales que vingt siècles de mathématiques ont fini par dégager: notion d'ensemble, relations d'ordre et d'équivalence, loi algébrique, espace vectoriel, symétrie, transformations.
>
> Non seulement ces méthodes permettront d'utiliser très tôt les outils simples et efficaces de l'algèbre, apportant ainsi une économie de pensée ; mais par les recours qu'elles supposent à des notions fondamentales, elles enrichiront la structure mentale de nos élèves et les prépareront aux tâches de l'avenir. (Choquet 1964 p. 10)[74]

Choquet insiste donc sur l'importance de choisir un système axiomatique convenable, basé sur les outils algébriques modernes : par sa généralité, cette approche apportera, selon lui, une « économie de pensée » importante aux élèves. On verra plus loin (Partie III, Chapitre 4) que la réforme française suivra fidèlement cette conception, et repoussera considérablement l'étude des propriétés des figures géométriques pour laisser la place à une construction algébrique de l'espace affine et euclidienne.

[74] Le texte est la version légèrement modifiée d'une conférence apparue dans une brochure de l'APM en 1961. Le texte original contient à cet endroit une référence explicite au fameux slogan de Dieudonné, « Á bas Euclide ». De la part de Dieudonné, on trouve par ailleurs des considérations similaires à celles de Choquet dans l'introduction de son livre *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, paru également en 1964.

2.1.4 La méthode axiomatique comme formateur de l'esprit

Il est par ailleurs très clair dans le texte de Choquet – et c'est une idée récurrente chez les mathématiciens français proches de la réforme des « mathématiques modernes » – que l'intérêt principale de l'enseignement des mathématiques est pour lui dans la formation de l'esprit, dans l'apprentissage d'un mode de pensée qui aidera les élèves dans leurs futures tâches diverses. Dans ce sens, les mathématiques jouent également le rôle des « humanités modernes » selon la conception des mathématiciens.

Ce mode de pensée pour laquelle « la mathématique moderne » sert de modèle, consiste essentiellement en la méthode axiomatique, c'est-à-dire dans la démonstration et dans l'organisation du savoir. La découverte des nouvelles connaissances ou la « résolution de problèmes » joue très peu de rôle dans cette conception. Dieudonné parle à plusieurs reprises de l'intuition mathématique qui permet les nouvelles découvertes : mais, selon lui, c'est justement la méthode axiomatique qui alimente le mieux l'intuition, et en outre « une longue fréquentation » des êtres mathématiques.

> […] on ne saurait trop insister sur le rôle fondamental que joue, dans ses recherches, une *intuition* particulière, qui n'est pas l'intuition sensible vulgaire, mais plutôt une sorte de divination directe (antérieure à tout raisonnement) du comportement normal qu'il semble en droit d'attendre, de la part d'êtres mathématiques qu'une longue fréquentation lui a rendu presque aussi familiers que les êtres du monde réel. […]
>
> C'est dire que, moins que jamais, la mathématique est réduite à un jeu purement mécanique de formules isolées ; plus que jamais, l'intuition règne en maîtresse dans la genèse des découvertes ; mais elle dispose désormais des puissants leviers que lui fournit la théorie des grands types de structures, et elle domine d'un seul coup d'œil d'immense domaines unifiés par l'axiomatique, où jadis semblait régner le plus informe chaos. (Bourbaki 1948 pp. 42-43)

En fait, dans la présentation de Dieudonné, les processus de découverte apparaissent comme peu rationalisables (et donc sans doute peu enseignables). C'est encore plus clair dans un autre article consacré au sujet de l'intuition, dans lequel il insiste sur le caractère personnel de cette dernière, sur la nécessité d'un génie pour les grandes découvertes, inexplicables par essence, et, avant tout, sur les liens forts entre l'intuition et l'abstraction mathématique (Dieudonné 1981).[75]

[75] Il est particulièrement intéressant de comparer son commentaire avec celui de G. Pólya sur un découvert d'Euler. « Je crois qu'Euler a été le premier à avoir eu cette idée de la fonction génératrice. […] Il y a une espèce de miracle dans cette idée que la façon dont se comporte cette suite doit se réfléchir en quelque sorte sur la fonction et *vice versa*. Intuition extraordinaire, mais dont l'origine est inexplicable à mon avis. » dit Dieudonné (1981 p. 11). Pólya (1958) au contraire, cherche à donner une reconstruction rationnelle du processus de découverte d'Euler, comme on le verra plus tard. Par ailleurs, Dieudonné se réfère justement à Pólya comme promoteur, à côté de Hardy, d'une certaine pratique dans « l'intuition combinatoire » mais qui est, selon

Par conséquent, c'est avant tout la pratique de la méthode axiomatique et la « fréquentation » quotidienne des objets mathématiques qui permet d'élever selon lui, pas seulement les compétences dans la démonstration, mais aussi le pouvoir créateur en mathématiques.

2.2 Les discours sur la nature des mathématiques autour de la réforme

Dieudonné et Choquet rendent clairs le fait que leurs propositions concernent uniquement l'université et les dernières années du lycée. Ils se déclarent incompétents pour les questions d'enseignement des niveaux inférieurs ; toutefois ils soulignent que les élèves plus jeunes ne sont psychologiquement pas suffisamment mûrs pour l'apprentissage des mathématiques abstraites, il faut donc chercher des solutions intermédiaires.

> Il y a maintenant un accord unanime, dans tous les pays, sur les deux principes suivants:
> 1) Pour les jeunes enfants, l'enseignement de la géométrie ne peut être déductif. Ce doit être un enseignement basé sur l'observation; son but est l'élaboration des concepts fondamentaux à partir de l'expérience.
> 2) Pour le mathématicien, la façon la plus élégante, la plus profonde, la plus rapide, de définir le plan (ou l'espace), est de le définir comme espace vectoriel sur R, à deux (ou trois) dimensions, muni d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique $u.v$ telle que $u.u > 0$ pour tout vecteur $u \neq 0$. […]
> De nombreux professeurs de l'enseignement du second degré témoignent, par leur expérience, que cette définition peut être déjà utilisée avec grand profit par les élèves de 17 ans (classe terminale des lycées) ayant étudié antérieurement le produit scalaire. Cette méthode permet dans ces classes une économie de pensée considérable, et conduit tout naturellement à des démonstrations basée sur de véritables méthodes. [...]
> Le problème est moins simple aux âges intermédiaires, disons entre 13 et 16 ans. L'enfant commence à comprendre ce qu'est une démonstration; chez certains s'éveille une véritable soif de logique, indiquant que le temps est venu d'aborder sérieusement le raisonnement déductif. On va donc faire établir par l'enfant des morceaux de raisonnement déductif, en prenant soin de lui faire toujours préciser ses prémisses.
> […]
> On peut donc résumer ainsi la situation : nous connaissons une voie royale basée sur les notions « espace vectoriel et produit scalaire » ; mais ces notions ne peuvent être « parachutées » sans préparation, surtout à un âge où l'on ne possède pas bien la notion d'opération algébrique. (Choquet 1964 pp. 9-11)

Il existe donc une contradiction entre le caractère abstrait des mathématiques, la « voie royale » que connaissent les mathématiciens d'un côté, et les capacités psychologiques des élèves de l'autre. Explicité également par Lichnerowicz (1955), cette tension est sans doute

Dieudonné, seulement « un cas extrême et je ne crois pas que ce soit le plus intéressant » (Dieudonné 1981 p. 11).

l'une des sources principales des débats de l'époque entre les ambitions mathématiques et pédagogiques de la réforme (Partie I §3.2.3). On verra dans la partie III que le problème préoccupe des auteurs des programmes et des manuels et qu'ils y cherchent des solutions diverses. Ces premières solutions subiront de nombreuses critiques et inspireront ainsi indirectement les premières recherches didactiques à partir des années 1970. Mais dans les années précédant la réforme des mathématiques modernes, il s'agit plutôt d'un optimisme concernant cette question ; on insiste sur l'harmonie entre l'esprit « bourbakiste » des mathématiques et les ambitions pédagogiques : c'est ce qu'on voit dans le premier rapport de la commission Lichnnerowicz de 1967 (Boulletin APMEP 258 p. 245-27) ainsi que dans la charte de Chambéry, publiée par l'APMEP en 1968.

La charte s'inscrit très clairement dans le courant « bourbakiste » pour ce qui concerne la vision sur la nature des mathématiques. Outre le fait de se référer explicitement à Bourbaki, elle reprend de nombreuses idées, expressions de l'article programmatique rédigé par Dieudonné, *L'architecture des mathématiques* : on y retrouve même la métaphore de la reconstruction des villes, introduit par ce dernier (Bourbaki 1948 p. 45).

> **La mathématique est une science vivante** : le foisonnement des découvertes s'y conjugue avec une réorganisation de son architecture ; les notions ensemblistes acquises à la fin de XIXe siècle, la notion de structure qui sert d'armature à l'œuvre de Bourbaki peuvent être comparées, quant à leurs effets, au rôle qu'aurait un urbaniste disposant de crédits pour supprimer les bidonvilles.
> [...]
> Aujourd'hui les notions ensemblistes, les structures fondamentales de l'algèbre, les idées de base de la topologie irriguent toutes les mathématiques d'un sang neuf qui a la vertu de rendre mieux accessible un niveau d'abstraction anciennement réservé à des initiés privilégiés. (Charte de Chambéry 1968 p. 3)

En même temps, l'APMEP milite pour une progression au niveau pédagogique qu'elle juge également important. Selon la charte, même si « Bourbaki » n'est pas accessible directement aux jeunes élèves, les deux ambitions sont en harmonie et l'une renforce l'autre :

> [...] il n'est pas question d'introduire toute la mathématique moderne, brutalement, n'importe quand et à n'importe qui. Personne ne songe à faire lire Bourbaki aux enfants du Cours Préparatoire.
> [...] En réalité, le vocabulaire et le symbolisme modernes ne sont pas le fait d'un snobisme ridicule dont les élèves devraient souffrir. Non seulement la difficulté de leur tâche ne sera pas augmentée mais encore l'esprit moderne peut et normalement doit apporter un progrès sur le plan purement pédagogique. Il apporte, dit André Revuz, de « *grandes idées simples et très puissantes* » qui aideront les élèves. (Charte de Chambéry 1968 pp. 4-5)

On retrouve ici également l'idée de l'économie de pensée, fourni par les mathématiques modernes. En cohérence avec cette idée, la charte insiste aussi sur la puissance des

mathématiques dans la formation de l'esprit, contre une simple transmission des techniques de calcul utilisables dans « la vie courante ».

> En effet, l'acquisition des techniques (numération, opérations sur les nombres, ...) n'est pas abandonnée. Mais la notion de nombre gagnera à être préparée par des rudiments de grammaire des ensembles et de logique. Les enfants sauront compter et calculer plus tard peut-être que ne l'imposent les programmes actuels, mais ils le sauront mieux. D'autre part, du fait de la prolongation de la scolarité obligatoire, la mission de l'école primaire n'est plus d'enseigner les connaissances indispensables dans la vie courante mais surtout de former les esprits, de donner à chacun la capacité de s'adapter aux conditions largement imprévisibles de l'avenir. (Charte de Chambéry 1968 p. 4)

3 UNE EPISTEMOLOGIE « HEURISTIQUE » EN HONGRIE[76]

L'influence internationale de Bourbaki est indéniable dans les décennies suivant la deuxième guerre mondiale, sur le contenu des recherches mathématiques, mais également concernant les visions sur la nature des mathématiques ; et la Hongrie n'échappe sans doute pas non plus à cette influence. En même temps, nous avons insisté sur le rôle d'une communauté de mathématiciens hongrois (Partie I §4.2) dans la conception de l'arrière-plan épistémologique de la réforme de Varga. Il ne s'agit pas d'un groupe strictement défini, plutôt d'individus qui sont liés l'un à l'autre par des relations diverses et qui se retrouvent fréquemment dans différents cadres, comme celui du cercle de Karácsony ou de l'Institut de Recherche Mathématique d'Alfréd Rényi. Ces mathématiciens publient rarement des textes programmatiques comme le fait par exemple Dieudonné : leurs conceptions sur la nature des mathématiques peuvent être reconstituées avant tout à partir de leurs œuvres de vulgarisation, très populaires et diffusées jusqu'à aujourd'hui, et à partir de quelques écrits concernant les questions de l'enseignement des mathématiques. Enfin, contrairement à Bourbaki, la conception sur la nature des mathématiques de cette communauté a été l'objet de peu d'études jusqu'ici ; il en manque une analyse générale. Les études existant sur ce sujet révèlent pourtant l'existence d'une telle conception, et montrent comment cette communauté, avant tout László Kalmár, pouvait influencer dans les années 1940 et 1950 la pensée du jeune Imre Lakatos, qui a développé sa philosophie des sciences plus tard, à partir des années 1960 (Gurka 2001, Máté 2006, Máté 2008, Szabó 2013).

En analysant quelques écrits de László Kalmár, Rózsa Péter, Alfréd Rényi, György Pólya et Tamás Varga, nous tentons ici de montrer qu'il s'agit en effet d'une conception cohérente

[76] Cette analyse était présentée dans (Gosztonyi 2012).

et essentiellement différente de la « bourbakiste », et nous essayons de dégager les principes fondamentales de la conception de cette « école hongroise ».

En ce qui concerne Pólya, nous avons souligné qu'il n'était pas directement membre de la communauté des années 1940, formé autour de Karácsony et dans l'Institut de Rényi. Il nous semble pourtant intéressant d'intégrer son œuvre dans cette analyse, pas seulement parce qu'il avait suivi à peu près la même formation que les autres mathématiciens en question, et qu'il reconnaît décisive pour sa futur conception[77], mais aussi parce que ses écrits sont diffusés et pris en considération dans la communauté en question, et constituent l'une des références fondamentales du projet de Varga[78].

3.1 Les principes des mathématiciens hongrois

3.1.1 Une science en plein développement

L'un des premiers textes publiés sur ce sujet, et l'un des plus étudiés par des recherches historiques est une conférence de Kalmár, intitulée *Le développement de la rigueur mathématique de l'intuition jusqu'à la méthode axiomatique*, paru en 1942 dans un recueil d'articles du cercle de Karácsony.

Dans ce texte, Kalmár cherche à reconstituer le développement de la rigueur mathématique, et à en tirer des conclusions sur les questions de l'enseignement universitaire de l'analyse. Il souligne qu'il ne s'agit pas d'une étude historique : ce qu'il propose, c'est plutôt une « reconstruction rationnelle » du processus (similairement à la méthode ultérieure de Lakatos[79]).

> I will not discuss the issues from a historical perspective, I leave this task to someone with a thorough knowledge of the history of mathematics. Instead, I will describe the road that individual mathematicians travel while constructing for themselves a rigorous system of mathematical concepts and theorems. And I will describe this path as I see it in hindsight. I realize that often I am no longer seeing the road that I actually travelled, but see instead the shortest path that I could have taken to get to where I am standing now. (Kalmár 1942/2011 p. 270)

Kalmár suggère qu'il faut guider les étudiants à travers un processus de développement similaire, même au niveau universitaire.

> Now, however far we have gotten in this developmental process, and whatever our opinion might be about the steps ahead, we must realize that if we want to introduce others to mathematics, we must help

[77] Voir la préface de l'édition hongroise (Pólya 1969 pp. 9-10).
[78] De plus Pólya a lui-même encouragé la réforme hongroise (Kalmár 1967b).
[79] « The dialogue form should reflect the dialectic of the story ; it is meant to contain a sort of *rationally reconstructed or 'distilled' history*. » (Lakatos 1976a p. 5)

> them so they, too, can follow along this path, for it is only through these levels that they can reach our position. (Kalmár 1942/2011 p. 282)

Les recours à l'histoire, la présentation des mathématiques comme une science en pleine évolution sont fréquents chez les membres de « l'école hongroise ». Rényi par exemple choisis des contextes historiques pour ses œuvres de vulgarisation en les écrivant en forme de dialogues platoniciens ou galiléens (*Dialogues sur les mathématiques*) ou encore comme des fausses lettres de Pascal (*Lettres sur les probabilités*). Comme il l'explique dans la postface des *Dialogues*, il voulait présenter ses objets « in statu nascendi », dans « la fraîcheur de leur création » (Rényi 1965/2005 p. 100). L'expression est très similaire à celle utilisée par Pólya dans la préface de *How to solve it* : en apprenant les méthodes de résolution des problèmes, les mathématiques apparaissent « 'in statu nascendi', in the process of being invented ».

Sans chercher à reconstruire l'histoire des mathématiques, Rózsa Péter guide aussi ses lecteurs à travers un processus de développement des mathématiques, guidé par une dialectique de problèmes et de tentatives de réponses : nous reviendrons sur cet exemple plus en détails dans la suite (§3.2).

3.1.2 Intuition, « quasi-empiricisme » et le « raisonnement plausible » en mathématiques

Selon Kalmár, le processus de développement des mathématiques part de l'intuition, inspirée par des expériences. Il faut remarquer ici que le mot hongrois utilisé par Kalmár, « szemlélet », traduit en anglais et en français par « intuition », réfère très clairement à une dimension visuelle. Il peut être en lien avec le mot allemand « Anschauung ». En effet, la visualité joue un rôle central dans la conception des mathématiciens hongrois ; et c'est un des aspects où l'on peut reconnaître une certaine parenté avec les théories linguistiques, psychologiques et pédagogiques de Karácsony (Szabó 2013).

> The point of departure for our journey is the intuition. Everyone accepts that our geometrical concepts – like point, line, surface, direction, angle, length, area, volume, etc. – derive from the contents of intuition. If we consider things closely, we realize that the same holds for the concepts of arithmetic, too: five chalks, half an apple – these denote clear contents of intuition. But there is general agreement among experts that certain rather abstract concepts of mathematics have nothing whatsoever to do with intuition. Set theory is perhaps the most abstract branch of mathematics; […]; nonetheless, at the most rudimentary level of concept formation, we imagine sets intuitively, as though they were like sacks into which someone has put their elements. (Kalmár 1942/2011 p. 270)

Dieudonné insiste sur le caractère abstrait même des notions mathématiques les plus simples ; Kalmár au contraire, souligne le fait que même les notions les plus abstraites ont pour origine

une certaine image intuitive. L'intuition mathématique est progressive selon lui, et loin d'être limitée aux expériences physico-sensuelles : l'approfondissement de l'étude des notions mathématiques, la déduction logique des nouvelles notions alimentent l'image mentale que le mathématicien peut construire de son objet d'étude.

> As soon as we recognize, via logical steps, a property we could not read off the picture originally, we return to the picture, coloring it with the newly unveiled property. Thus the picture becomes more colorful and vivid, so we can read off it the new, hitherto hidden properties as well. For mathematicians, this development of intuition amply makes up for the fading effect of the abstraction process; they are even emboldened enough to carry out another round of abstraction on the newly re-colored concepts gotten through abstraction. (Kalmár 1942/2011 p. 272)

L'explication intuitive, expressive est essentielle en effet pour Kalmár, en ce qui concerne l'enseignement ou la diffusion des connaissances mathématiques. Il est célèbre entre autres pour ses lettres d'un style vif, facile d'accès, adressées aux collègues et aux amis non-mathématiciens pour leur expliquer certaines notions ou théorèmes.

Son article de 1942 passe à travers différents étapes du développement de la rigueur mathématique, de l'intuition jusqu'à l'axiomatique formelle. En même temps, tout en reprenant la métaphore du jeu d'échec (Kalmár 1942/2011 p. 278), il refuse la possibilité d'une création mathématique basée uniquement sur l'axiomatique formelle.

> [The formal axiomatic approach] is given in principle only; in reality, pursuing it for its own sake would be a game only, not mathematics. Its significance resides in its utility as a working principle, when it comes to examining various questions within Hilbert-style proof theory: whether arithmetic is free of contradiction, or whether all problems of arithmetic (or some other system) can be solved. (Kalmár 1942/2011 pp. 278-279)

Son interprétation sur le projet de Hilbert diffère donc de celle de Bourbaki : pour Kalmár, la méthode axiomatique formelle remplit une fonction bien définie et limité à la théorie des démonstrations[80], mais ne peut pas être la base d'une réelle création mathématique. Selon lui, cette dernière doit toujours s'appuyer sur l'intuition, le processus de découverte passe nécessairement à travers une phase heuristique, et l'axiomatisation ultérieure ne peut que cacher ce processus.

> There are no mathematicians, however abstract their subject matter might be, who do not initially think intuitively, "heuristically" during their research; subsequently, they would cast their results in axiomatic form, thereby camouflaging how they arrived at them. (Kalmár 1942/2011 p. 282)

[80] Ou proof theory en anglais.

Dans un article plus tardif (Kalmár 1967), il va plus loin encore sur ce sujet. Intitulé *Foundations of mathematics – whither now ?*, ce texte était originalement présenté au « Colloquium in the Philosophy of Sciences », organisé par Lakatos à Londres en 1965. Il y rend clair que ses réflexions sur la nature des mathématiques déroulent, au moins en parti, des recherches autour des problèmes du fondement des mathématiques dans lesquelles il s'était lui-même beaucoup investi. Il reprend sa reconstruction du développement des mathématiques, partant des « faits empiriques », utilisant la déduction et l'abstraction pour inventer ensuite la méthode axiomatique. Tout en reconnaissant l'importance de ces méthodes, il discute l'ambition de définir les mathématiques comme une science purement déductive :

> The invention of deductive inference, of abstraction, and of the axiomatic method, was very fruitful for the development of mathematics. But it tempted mathematicians to regard mathematics as a 'pure deductive science', and to forget that their axioms were originally abstracted from empirical facts, and their rules of deductive inference are valid because they have been tested in the actual thinking practice of mankind. (Kalmár 1967 p. 188)

Il prend en compte les différentes écoles cherchant les fondements : intuitionniste, logiciste et formaliste, et montrant les limites de chacun, il suggère que leurs efforts cherchant à établir un fondement absolument sûr pour les mathématiques sont arrivés dans une impasse. Nous citons particulièrement un passage discutant l'approche formaliste, pour montrer comment il base sa critique contre l'idée d'une science purement formelle et déductive sur des arguments mathématiques :

> The most important of these negative results [of proof theory] are Löwenheim's and Skolem's theorems, Gödels's incompleteness theorems, the existence of non-standard models, and Gödel's and Cohen's results on the independence of Cantor's Continuum Hypothesis in the usual axiomatic systems of Set Theory. These negative results showed that we have to give up the classical idea that the primitive ideas of a branch of mathematics can be implicitly defined by a system of axioms; instead, we now think that an axiom system defines the common properties of all models of it, standard and non-standard, a point of view adopted long ago in Algebra. Soon we will speak of 'an arithmetic of natural numbers' or 'a set theory', just as we now speak of a group or a ring. (Kalmár 1967 p. 191)

Selon Kalmár, il est temps d'accepter le fait que les mathématiques ne peuvent pas être une science purement déductive, ni complètement infaillible : elles garderaient nécessairement une certaine base empirique, tant au niveau des notions que dans leurs méthodes, et restent ainsi inévitablement faillibles.

Les actes contiennent également des débats après les textes des conférences, et on y trouve parmi d'autres des réactions de Lakatos sur l'intervention de Kalmár. Après avoir situé la

proposition de son collègue dans tout un courant « empiriste », il suggère de distinguer deux positions épistémologiques principales par rapport aux théories scientifiques, une « quasi-Euclidienne » et une « quasi-empirique ». Ces remarques jettent la base de son article ultérieure *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics ?* (Lakatos 1976b), où il discute les possibilités d'établir une épistémologie « quasi-empirique » des mathématiques.[81]

Lakatos s'inspire sans doute aussi des propositions de Pólya. Sans aller jusqu'à nier l'infaillibilité des mathématiques, Pólya défend des idées très similaires quand il parle du « raisonnement plausible » dans (Pólya 1954/1958). Déjà dans *How to solve it*, il distingue deux faces des mathématiques, une euclidienne, systématique et déductive, une autre, la découverte mathématique, qui est expérimentale et inductive (Pólya 1945 p. vii). Dans la préface de *Les mathématiques et le raisonnement plausible*, il développe cette idée :

> Le raisonnement démonstratif est sûr, à l'abri des controverses et définitif. Le raisonnement plausible est hasardeux, il peut être controversé et il est provisoire. Le raisonnement démonstratif pénètre les sciences aussi profondément que le font les mathématiques mais il est incapable, par lui-même (comme les mathématiques) de conduire à des connaissances essentiellement nouvelles sur le monde qui nous entoure. Tout ce que nous apprenons de neuf sur ce monde implique l'intervention du raisonnement plausible, seul type de raisonnement dont nous fassions usage dans la vie courante. Le raisonnement démonstratif a des règes rigides, codifiées et clarifiées par la logique (formelle ou démonstrative) qui est la théorie du raisonnement démonstratif. Les règles du raisonnement plausible sont mouvantes et il n'en existe aucune théorie qu'on puisse comparer, sous le rapport de la clarté, à la logique démonstrative ou sur laquelle un accord comparable puisse être réalisé.
>
> [...]
>
> On considère les mathématiques comme constituant une science démonstrative. Mais ce n'est là qu'un aspect de la question. Les mathématiques achevées, présentées sous une forme définitive, paraissent purement démonstratives et ne comportent que des preuves. Mais les mathématiques en gestation ressemblent à toute autre connaissance humaine au même stade de développement. Vous devez deviner un théorème mathématique avant de le démontrer; vous devez deviner le principe général de la démonstration avant d'entrer dans les détails. Vous devez combiner les observations et vous fier à des analogies ; vous devez essayer et essayer encore. Le résultat du travail créateur du mathématicien est un raisonnement démonstratif, une preuve ; mais la preuve est découverte, par un raisonnement plausible, elle est d'abord devinée. (Pólya 1954/1958 pp. ix-x)

[81] Voir la première note de bas de page concernant l'origine de l'article.

3.1.3 L'heuristique, ou la logique de la découverte

On a vu chez Dieudonné qu'il considère les processus de découverte mathématique essentiellement irrationnels ; et il est loin d'être le seul à soutenir cette position[82]. Pólya, au contraire, base son « heuristique » sur la suggestion selon laquelle ces processus sont au moins partiellement rationnels, qu'il existe des méthodes de découverte que l'on peut analyser, comprendre et pratiquer, et qu'il est possible de développer ainsi ses compétences dans la résolution des problèmes. Bien évidemment, il ne s'agit pas de méthodes sûres :

> Je ne pense pas qu'il existe une méthode absolument sûre pour apprendre à deviner. Au reste si cette méthode existe, je ne la connais pas et je ne prétends certainement pas la décrire dans les pages qui vont suivre. L'utilisation efficace du raisonnement plausible est affaire de pratique, on l'apprend par l'imitation et l'habitude. J'essayerai de faire de mon mieux pour aider le lecteur désireux d'apprendre le raisonnement plausible, mais je ne peux lui offrir que des exemples à imiter et l'occasion de s'entraîner. (Pólya 1954/1958 p. xi)

On peut toutefois en dire plus que les attribuer simplement au génie du mathématicien. C'est ce qu'il souligne par rapport à l'un de ses premiers exemples analysés, qui est une découverte d'Euler :

> Cette analogie (passage du fini à l'infini) est pleine de dangers. Comment Euler fit-il pour les éviter ? Il avait du génie, répondons certains, mais ce n'est évidemment pas une explication. Euler avait des raisons subtiles d'avoir confiance en sa découverte. Nous pouvons comprendre ses raisons avec un peu de bon sens, sans avoir besoin d'aucune pénétration particulière, spécifique du génie. (Pólya 1954/1958 p. 19)

Pólya (et son disciple Lakatos) ne sont pas les seuls à défendre cette position. En fait, c'est ce que suggère aussi Rényi en essayant de présenter ses thèmes 'in statu nascendi', et c'est ce qu'essaye de faire sentir Rózsa Péter aussi dans les *Jeux avec l'infini*, en montrant comment les notions mathématiques se construisent en cherchant des solutions aux problèmes mathématiques et comment les tentatives de solutions conduisent à se poser de nouvelles questions (§3.2).

Kalmár, dans son article de 1942, critique le type d'enseignement qui consiste à rester au niveau intuitif uniquement, qu'il juge dépassé ; mais il critique également celui qui commence immédiatement par l'axiomatique. Il explique en détails pourquoi le seul axiomatique ne permet ni aux futurs utilisateurs de comprendre les mathématiques, ni aux futurs mathématiciens de produire de la recherche. Il conclut en suggérant qu'il faut, et qu'il est possible, de faire comprendre aux étudiants les processus de découverte en mathématiques.

[82] Popper suggère par exemple que seul la vérification des découvertes scientifiques est un processus rationnel, apte à une analyse logique, les processus d'émergence des nouvelles idées sont par contre irrationnelles et seul la psychologie est compétente pour leur analyse (Popper 1997 pp. 35-37).

> […] with a small amount of extra effort, we can always present things in such a way that we honestly reveal how we came to realize those things, or how we could have come to realize them, and we could wait until later to cast the theory in its final form. It is not at all a problem – in fact, it is a good thing – if our students eventually come away with the impression: this was no big deal, I could have arrived at it myself. It also fits better with the scientific perspective if we present the process of development rather than the axiomatic theory in its finished form; for it is not the latter that expresses the present state of science, but the fact that this is where the developmental path has led us. (Kalmár 1942/2011 p. 287)

Quand ils parlent de l'enseignement, les mathématiciens hongrois suggèrent, similairement aux concepteurs de la réforme française, que les mathématiques portent une valeur éducative générale, et servent à apprendre à penser. À ce sujet, nous citons encore Pólya :

> […] mathematics, besides being a necessary avenue to engineering jobs and scientific knowledge, may be fun and may also open up a vista of mental activity on the highest level. (Pólya 1945/1990 p. XXXV)

> […] Thanks to such guidance, the student will eventually discover the right use of these questions and suggestions, and doing so he will acquire something that is more important than the knowledge of any particular mathematical fact. (Pólya 1945/1990 p. 5)

Mais « penser mathématiquement » ne se limite pas à la seule démonstration pour les mathématiciens de « l'école hongroise » : cela implique aussi des méthodes de la découverte et de la résolution de problèmes. Ils pensent que de telles méthodes peuvent être, au moins partiellement, comprises et apprises : et insistent sur l'importance de les enseigner.

3.1.4 Les mathématiques comme activité par essence dialogique

À quoi doit-on le développement de la « rigueur mathématique » ? Selon Kalmár, cela est dû au caractère social et discursif des mathématiques. Ce sont le désir du partage des idées et les difficultés de la communication qui motivent les mathématiciens à élaborer des moyens de persuasion.

> The major incentive that prompts us to break away from the intuition is, I think, the fact that humans, including mathematicians, are social creatures. They like to communicate to others what strikes them as interesting and notable.

On peut reconnaître dans cette idée aussi une parenté avec la conception de Karácsony qui a développé une sorte de théorie socio-psychologique (Szabó 2013).

> This is when they are in for the first round of disappointments. It turns out that what is obvious to me based on my intuition might inspire a puzzled look from others. […]
> The easiest way to handle this is by listing, before presenting a certain idea, the concepts and the properties of those concepts to which I will refer as evidently given by my intuition. Those to whom I am

> presenting my proof can examine these one by one, check them against their own intuition, to see whether they likewise find clear what these "basic concepts" mean, and whether they likewise find these "basic truths" evident. […] (Kalmár 1942/2011 p. 272)

Ce passage, qui se poursuit plus avant, peut rappeler certains dialogues de Platon. L'idée du lien entre la dialectique et les mathématiques grecques a en effet été suggérée par Árpád Szabó, et Kalmár fait explicitement référence à cette proposition de Szabó dans un article plus tardif (Kalmár 1967).

L'idée du dialogue est récurrente chez nos autres auteurs aussi. Écrivant ses livres de vulgarisation en forme de dialogues et de lettres, Rényi explique ce choix avec des arguments pédagogiques et épistémologiques:

> The Socratic dialogue presents thoughts while they are being created and dramatizes ideas. By so doing it keeps the attention awake and facilitates understanding.
>
> [...]
>
> I had still another reason for choosing this form: it is my firm belief that the Socratic method is basically cognate with the mathematical method. In this belief I was very much strengthened by the recent fundamental research work of Arpad Szabó, which has thrown quite a new light on the origin of Ancient Greek mathematics. (Rényi 1967 p. 90)

Pólya pense l'enseignement des mathématiques également en forme dialogique.

> Moreover, when the teacher solves a problem before the class, he should dramatize his ideas a little and he should put to himself the same questions wich he uses when helping the students. (5. Teacher and student in Pólya 1990 p. 5)

Si l'objectif de l'enseignement des mathématiques est d'apprendre à découvrir, les élèves sont vus dans cette conception comme partenaires dans un processus de découvert, guidé par l'enseignant. C'est ce qu'on peut observer dans *Jeux avec l'infini* de Rózsa Péter, organisé selon une dialectique de questions et réponses, et c'est également le principe organisateur du *Preuves et réfutations* de Lakatos, écrit sous la forme d'un dialogue fictif en classe.

3.1.5 Prudence face au langage formel

On a vu, la formalisation joue un certain rôle communicatif chez Kalmár : elle aide la médiation des idées mathématiques, la persuasion de la communauté. Le langage mathématique actuel est donc le résultat d'une évolution répondant à certains problèmes, de la même manière que les notions et les théorèmes mathématiques. Par conséquent, si les étudiants doivent être initiés à la logique du développement des mathématiques, cela concerne également le langage des mathématiques.

Les mathématiciens de « l'école hongroise » mettent souvent en garde contre la formalisation excessive, surtout en ce qui concerne l'enseignement publique. Il ne s'agit pas de refuser toute formalisation, mais de veiller à introduire le langage formel à bon escient, lentement et après une préparation convenable, quand les élèves ont compris les idées sous-jacentes. Pólya, dans le paragraphe de *How to solve it* traitant les notations, fait la remarque suivant :

> Not only the most hopeless boys in the class but also quite intelligent students may have an aversion for algebra. There is always something arbitrary and artificial about notation; to learn a new notation is a burden for the memory. The intelligent student refuses to assume the burden if he does not see any compensation for it. The intelligent student is justified in his aversion for algebra if he is not given ample opportunity to convince himself by his own experience that the language of mathematical symbols assist the mind. To help him to such experience is an important task of the teacher, one of his most important tasks. (Pólya 1990 p. 140)

Rózsa Péter critique très souvent l'enseignement « formaliste » des mathématiques. Comme elle l'explique dans une conférence[83], l'approche « formaliste », qui « veut commencer l'enseignement par l'algèbre abstrait », fait des mathématiques « un squelette cliquetant », présentant une structure vide et cachant le chemin qui amène à sa découverte. On ne peut apprécier l'algèbre abstrait que si l'on parcourt le processus de généralisation, l'identification des analogies entre la structure des différents domaines mathématiques qui donne la richesse de l'algèbre (Péter 2004 pp. 200-201). Elle clarifie sa proposition à l'aide d'une plaisanterie d'un écrivain hongrois :

> Ce sujet me rappelle toujours un dialogue entre un père et son fils curieux, écrit par Karinthy : « Papa, c'est quoi le téléphone ? » « Imagine un teckel immense dont les pieds antérieurs sont à Pest, le pieds postérieurs à Buda[84]. Si tu tapes sur sa queue à Pest, le teckel aboie à Buda. » « Et qu'est que c'est, le télégraphe sans fil ? » « La même chose sans teckel. » L'enseignement formaliste des mathématiques commence l'explication tout de suite « sans teckel ». (Péter 2004 p. 201)

Écrit dans un style littéraire et avec très peu de formule, son *Jeux avec l'infini* donne un exemple suggestif de cette approche. Nous étudierons (§3.2) l'un des rares passages où elle introduit une nouvelle formule : nous verrons dans cet exemple que la formule mathématique n'apparaît pas comme un objet mathématique a priori donné, mais plutôt comme résultat d'un processus de généralisation de problèmes variés, rempli de sens provenant des expériences divers.

[83] Le texte mentionne qu'il s'agit d'une conférence à l'École Supérieure des Beaux-arts (Képzőművészeti Főiskola), mais l'édition ne donne pas de références concernant la date.
[84] Budapest est coupé en deux par le Danube, l'un des côté est Buda, l'autre est Pest.

3.1.6 L'aspect ludique et créatif des mathématiques, les liens avec des arts

Dans plusieurs des citations ci-dessus, on peut observer des références aux aspects affectifs, comme la curiosité, ou le plaisir. L'accent qui est mis sur la résolution des problèmes et sur la découverte mathématique va de pair, chez ces mathématiciens, avec un certain intérêt pour le rôle de la créativité dans l'activité mathématique. Plusieurs d'entre eux cherchent en outre des liens avec des arts et tout particulièrement avec la littérature[85].

Ces aspects sont particulièrement explicites chez Rózsa Péter qui insiste souvent sur l'unité des « deux cultures », des mathématiques et des arts (par ex. Péter 2004). Son livre de vulgarisation est également basé sur ce principe, cherchant « à remonter aux sources affectives qui sont communes à l'écrivain et au mathématicien » (Péter 1944/1977 p. 14). Même le titre, *Jeux avec l'infini* souligne le rôle central qu'elle accorde au ludique dans l'activité du mathématicien, et le jeu, la curiosité, le plaisir de la découverte et de la création libre apparaissent dans son livre comme quelques-uns des principaux moteurs de la recherche mathématique. Elle insiste souvent sur le caractère humain des mathématiques, où la personnalité et certaines questions esthétiques jouent un rôle important, tout comme dans les arts. (Péter 2004).

3.2 L'exemple du *Jeux avec l'infini* de Rózsa Péter, et des « séries de problèmes »[86]

Nous analysons plus en détails le livre de vulgarisation de Rózsa Péter, intitulé *Jeux avec l'infini*, qu'elle a écrit pendant la deuxième guerre mondiale. Témoignant l'intérêt de son auteur pour les questions d'éducation ainsi que sa passion pour les arts, le livre reste très populaire, il est régulièrement réédité en Hongrie et a été traduit dans douze langues (dont le français en 1977[87]). Il semble aussi avoir eu une influence sur l'enseignement, et tout particulièrement sur la réforme de Varga : par exemple, le premier livre du maître qui accompagne le programme réformateur de 1978 se réfère explicitement à *Jeux avec l'infini* pour ce qui concerne certaines questions mathématiques et didactiques. C'est une des raisons d'étudier plus en détails ce texte, au-delà même des aspects épistémologiques : nous tenterons

[85] On peut observer dans leur biographies que plusieurs de ces mathématiciens ont une culture littéraire important (notamment Pólya, Rényi, Péter et Tamás Varga lui-même).
[86] L'analyse de *Jeux avec l'infini* de Rózsa Péter s'inscrit dans un projet de recherche d'histoire des sciences intitulé « Séries de problèmes au carrefour des cultures », mené au sein du labex HASTEC depuis 2012. Le passage suivant est la reprise des extraits d'un article publié dans le cadre de ce projet (Gosztonyi 2015). Une version préliminaire de cette analyse a en outre été publiée dans le Bulletin APMEP (Gosztonyi 2014).
[87] Une nouvelle édition française a paru en 2014.

de montrer plus loin qu'il est aussi une sorte de modèle (Partie III, Chapitre 3, Chapitre 4) pour la rédaction des ressources de l'équipe de Varga.

Le *Jeux avec l'infini* est adressé avant tout aux littéraires, aux « non-mathématiciens », pour « offrir à des esprits curieux une vue d'ensemble de notre discipline », pour leur faire sentir « la joie de la découverte » (Péter 1977 p. 9.). L'auteur mène ses lecteurs des notions mathématiques les plus simples aux résultats contemporains les plus abstraits, comme les théorèmes de Church ou de Gödel. Elle emploie pour cela un style littéraire riche en références historiques et culturelles, presque sans employer aucune formule. Notre analyse vise pourtant à dévoiler derrière le texte continu, facile à lire, une structure complexe et sophistiquée, fondée sur un enchaînement de questions et de problèmes.

Notre étude concerne les chapitres 4 et 5 du livre. Le chapitre 4 commence par un court discours sur les nombres « amis » et les nombres « parfaits », ce qui établit la transition avec le chapitre précédent (portant sur les questions de divisibilité des nombres naturels), et amène rapidement à des questions simples mais non résolues de la théorie des nombres. L'auteur en profite pour insister sur l'importance du pouvoir créatif et de la curiosité humaine dans la recherche mathématique.

> L'homme, pour sa propre commodité, a créé la suite des nombres naturels, qui permet de compter les objets et de faire un certain nombre d'opérations. Seulement, bien que l'ayant créée, l'homme n'a pas la maîtrise de cette suite : elle possède désormais ses propres règles, que l'homme n'avait absolument pas prévues. Tel un apprenti sorcier, il contemple les yeux éblouis, les djinns qu'il a libérés. Le mathématicien crée, à partir de rien, un univers nouveau.[88] Mais les régularités mystérieuses et inattendues de cet univers « captivent » l'homme, au sens étymologique du terme, et, de créateur, il se transforme en chercheur, il s'adonne à la recherche des secrets de sa création devenue indépendante de lui. (Péter 1944/1977 p. 41.)

La suite du chapitre en donne un exemple, décrivant une expérience de classe :

> Recherche séduisante qui n'exige pour ainsi dire aucune formation, mais seulement une certaine dose de curiosité. C'est ainsi qu'un jour une de mes élèves de sixième me dit : « Je me suis aperçue, il y a longtemps déjà, qu'en additionnant des nombres qui se suivent, si je m'arrête à un nombre impair, par exemple à 7, j'obtiens un nombre qui est égal au produit de ce nombre et de son milieu ; par exemple, le milieu de 7 est 4 (par « milieu » elle voulait dire, de toute évidence, le chiffre qui se trouve au milieu de la séquence allant de 1 à 7 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), et 7×4 = 28. Quant à la somme des nombres allant de 1 à 7, 1+2+3+4+5+6+7 fait également 28. Je sais que c'est toujours comme ça, mais je ne sais pas pourquoi. »

[88] « L'apprenti sorcier » réfère à un poème de Goethe de même titre. La phrase suivante est une paraphrase d'une célèbre citation de János Bolyai : « J'ai créé, à partir de rien, un univers nouveau. » écrit-il à son père en lui présentant son invention, la géométrie hyperbolique. (Lettre du 3 novembre 1923, citée par exemple dans Prékopa et al. 2004)

> « C'est une progression arithmétique, me dis-je, mais comment l'expliquer au niveau de la sixième ? » Pour commencer, je soumis le problème à la classe : « Suzy a un problème intéressant… » (Péter 1944/1977 p. 41.)

C'est ainsi que commence un long processus de recherche : les élèves trouvent rapidement la réponse à la question ; l'auteur-enseignant remarque que « Jamais je n'aurais su expliquer la solution aussi bien qu'elle » [elle : Ève, une autre élève de la classe] (p. 42). La solution est complétée par une métaphore explicative d'une autre élève : « C'est comme dans un cahier ! » (p. 42).

Mais le processus ne s'arrête pas ici. La question, ainsi que la méthode utilisée pour y répondre, amène à d'autres questions, à des problèmes analogues, ou bien très différents en apparence mais qui ont un point commun avec le problème original. On étudie la méthode du jeune Gauss, répondant à un problème similaire et on cherche à généraliser la méthode sur toutes les suites arithmétiques. On découvre l'analogie de la méthode avec une autre, issue de la géométrie, du calcul des aires. Dans le chapitre 5, intitulé « Variations sur un thème principal », on réinvestit le problème original de Susie dans des domaines divers des mathématiques et on décontextualise petit à petit la solution.

À la fin de ce processus, dans le chapitre 5, on arrive à une formule, qui est censée résumer la solution d'une variété de problèmes différents :

> La formule ci-dessus […] ne signifie rien de précis en elle-même, et chacun peut s'en servir pour exprimer son expérience individuelle. Pour les uns, elle exprimera le nombre des diagonales d'un polygone de n côtés, pour les autres, le nombre de façons de mettre n élèves « en rangs par deux ». La formule exprime avant tout notre satisfaction de voir toute cette diversité ramenée à une unité. (Péter 1944/1977 p. 53.)

Notre schéma d'analyse (Figure 1) essaye de présenter la structure de cet extrait comme une série de problèmes, et de rendre compte des « étapes » de cette série : des problèmes et des solutions, ou des questions et des réponses, et des liens qui enchaînent ces étapes.

Ce schéma laisse plusieurs problèmes d'analyse ouverts concernant l'identification des étapes et des liens entre elles qui mériteraient un développement ultérieur ; il permet en même temps de mettre en lumière certaines caractéristiques du texte de Péter, et de le comparer à d'autres textes. Nous ne détaillons pas ici les difficultés[89], nous en mentionnons seulement

[89] Nous avons détaillé les perspectives et des limites de cette schématisation dans (Gosztonyi 2015). Nous ne répétons pas ici cette discussion puisque nous ne retenons pas ce type de schématisation dans la suite de la thèse. Nous retenons par contre la notion de « séries de problèmes » et l'intérêt de l'étude de l'enchaînement des problèmes qui s'avèrera pertinent pour l'analyse de la réforme de Varga.

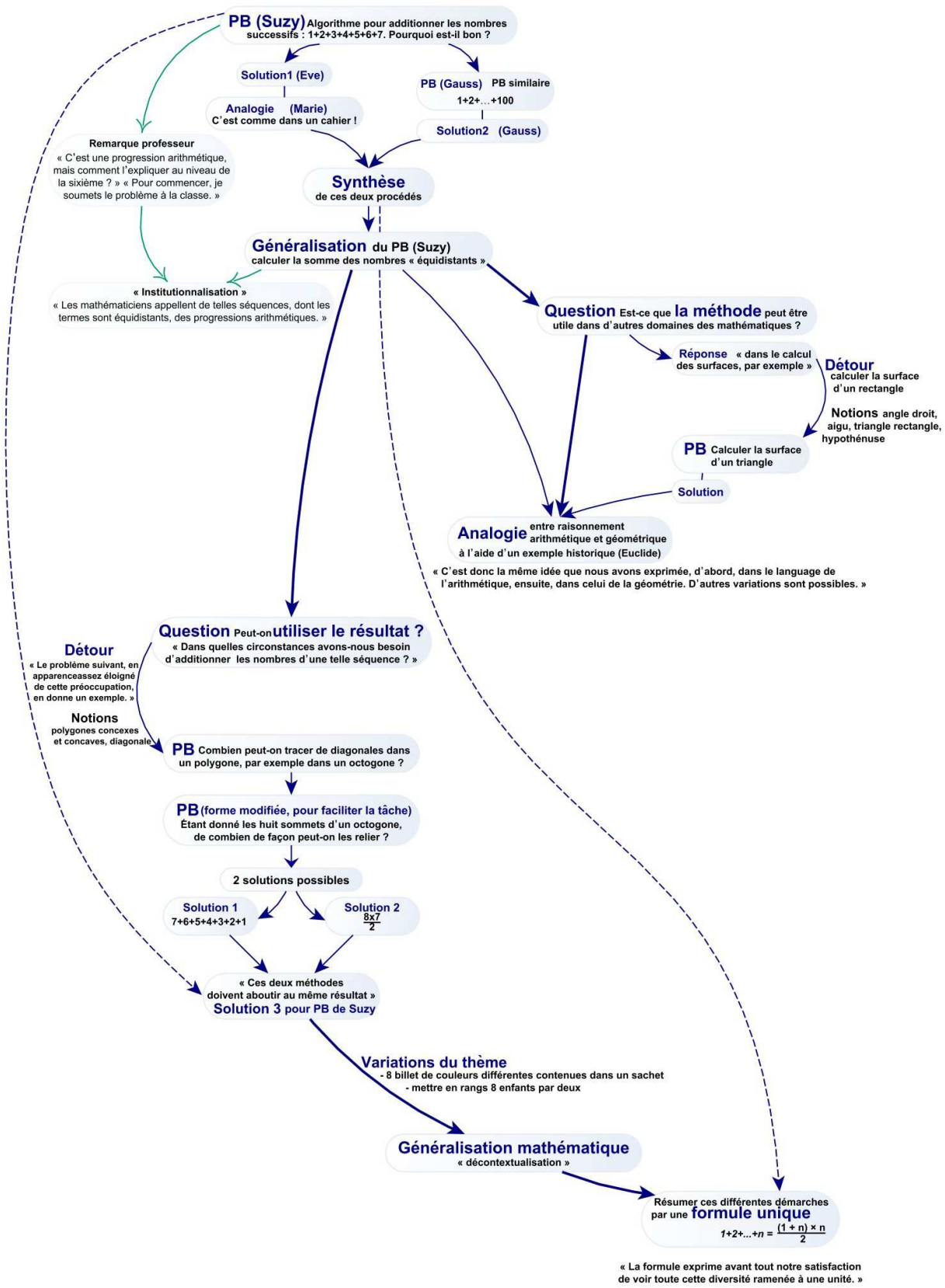


Figure II.1 : Schéma d'analyse de l'extrait de *Jeux avec l'infini* (Gosztonyi 2015 p. 6)

une qui concerne la catégorisation des étapes et la terminologie qu'on y utilise. Le seul terme « problème » paraît insuffisant, car ces « problèmes » sont de natures très différentes : les « problèmes » consistant à trouver un algorithme pour additionner des nombres successifs ou calculer la surface d'un triangle se situent à un niveau différent des « problèmes » qui demandent comment utiliser notre résultat ou réinvestir la méthode de notre solution dans d'autres champs mathématiques. Au stade actuel de l'analyse, nous distinguons deux niveaux : celui des « problèmes » de la première catégorie et celui de « questions de recherche » pour la deuxième. Cette distinction nous paraît fructueuse pour des raisons que nous exposerons plus loin.

La schématisation du texte de Rózsa Péter nous semble intéressante pour plusieurs raisons. Elle permet avant tout de dévoiler, derrière un texte simple et transparent en première apparence, une structure complexe et sophistiquée qui prend la forme d'un jeu dialectique de questions, de tentatives de réponses et de nouvelles questions qui émergent de ces tentatives. On voit une démarche pédagogique fondée sur des problèmes, mais il ne s'agit pas de problèmes mathématiques isolés qu'on abandonne après la solution, bien au contraire ; ce sont des questions de recherche autour de problèmes et de leurs solutions : des essais de réinvestissement des méthodes utilisées ou des résultats, la comparaison des différentes solutions d'un même problème, la dialectique établie entre différents domaines mathématiques à l'aide de l'analogie, qui font avancer les lecteurs/élèves, guidés par l'auteur/enseignant, dans le processus de construction et de développement des connaissances mathématiques.

La distinction entre « problèmes » et « questions de recherche » permet aussi de découvrir une analogie entre le texte de Rózsa Péter et le *How to solve it* de Pólya.[90] Au début de son livre, Pólya propose une liste de questions qui servent à aider les lecteurs quand ils veulent résoudre des problèmes. Par exemple : « Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu. Pourriez-vous vous en servir ? Pourriez-vous vous servir de son résultat ? Pourriez-vous vous servir de sa méthode ? » ou « Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ? Un problème plus général ? Un problème plus particulier ? Un problème analogue ? » (Pólya 1945/1965, après la table des matières). D'une part, on voit que ce sont des questions très similaires qui guident la démarche de Rózsa Péter ; de l'autre, cette comparaison attire l'attention sur le fait que la majorité des questions

[90] Les deux livres datent de la même période et ont été rédigés pendant la deuxième guerre mondiale, l'un aux États-Unis, l'autre en Hongrie. On peut supposer qu'il n'y avait pas de communication directe entre les deux auteurs.

proposées par Pólya renvoient à un contexte de problèmes déjà résolus, ou proposent de modifier ou faire varier le problème original (donc créer une série de problèmes...) En fait, cette approche permet de ne plus voir dans les questions de Pólya un questionnaire pour résoudre des problèmes isolés, mais un guide pour construire progressivement un espace organisé de problèmes qui permet d'y situer les nouveaux problèmes émergeants.[91]

Le livre de Péter met en œuvre les différentes principes qu'on pouvait identifier chez des mathématiciens hongrois. Les mathématiques apparaissent dans ce texte comme une création humaine en plein développement, basée sur une diversité d'expériences. L'aspect créatif et ludique de ce processus est explicitement souligné. La fin du livre montre clairement que, similairement à Kalmár, Rózsa Péter s'inspire aussi des grands résultats négatifs autour des fondements pour établir sa conception sur la nature des mathématiques :

> Arrivée à ce point, je suis contrainte de m'arrêter, car je me heurte aux limites de la pensée mathématique contemporaine. Notre époque est celle des remises en cause : les mathématiques ont fait leur devoir dans ce domaine, puisqu'elles ont mis au jour leurs propres limites. Mais s'agit-il de limites infranchissables ? Si l'on considère l'histoire des mathématiques, on voit qu'elles ont réussi à sortir de toutes les impasses où elles semblaient enfermées. La démonstration de Church comporte également un point qui donne à réfléchir : il a dû formuler avec précision ce que nous devons entendre par « raisonnement mathématiques tels que nous les concevons aujourd'hui », si l'on veut traiter cette notion par des procédés mathématiques. Formuler une idée, c'est la délimiter ; or, toutes les limites sont étroites et les problèmes indécidables les font éclater.
>
> Elles seront en tout cas repoussées par l'évolution future des mathématiques, même si nous ne voyons pas encore comment et dans quels sens. La grande leçon que l'on peut dégager dès maintenant est celle-ci : les mathématiques ne sont pas immuables et fermées sur elles-mêmes ; elles sont vivantes et mouvantes. Nous avons beau essayer de les figer en les enfermant dans des cadres préconçus, elles trouvent toujours une brèche pour s'en échapper avec la violence qui caractérise les organismes vivants. (Péter 1944/1977 p. 293)

Contrairement donc à Bourbaki, Péter ne pense pas que les mathématiques sont arrivées à l'étape ultime du développement pour ce qui concerne leurs méthodes ou leur forme. Au contraire, la notion contemporaine de la précision mathématique, ainsi que les formes d'expression doivent continuer leur développement organique face aux nouveaux problèmes rencontrés, dans des directions encore imprévisibles.

En ce qui concerne la démarche pédagogique présentée dans *Jeux avec l'infini*, le professeur apparaît comme un guide expérimenté dans un processus de recherche, une activité

[91] L'analogie entre l'approche de Péter et de Pólya devient encore plus apparent si l'on prend en considération le livre *Mathematics and plausible reasoning* de Pólya (1954). Pour résoudre des problèmes mathématiques, il y propose de les transformer progressivement à l'aide des techniques comme la généralisation, la particularisation et l'analogie, et construire ainsi toute une série de problèmes au lieu de s'occuper avec un seul problème unique.

conjointe des élèves et de l'enseignant, organisée autour d'une série de problèmes. L'utilisation du langage formel des mathématiques mérite également l'attention : les démonstrations et les raisonnements ne sont pas présentés sous forme abstraite et générale, mais chaque fois sur des exemples concrets. Toutefois, ces exemples sont toujours génériques, les raisonnements permettent de comprendre des idées, des théorèmes généraux. Le langage formel n'intervient qu'à la fin du processus : il aide à décontextualiser et à unifier divers problèmes et solutions analogues. Le langage formel est donc résultat du traitement des problèmes, au lieu d'en être un outil a priori.

Enfin, nous attirons l'attention sur une question stylistique, la forme semi-dialoguée de l'extrait. Une partie du texte prend la forme d'un dialogue et distingue clairement les voix des élèves et celle de l'enseignant ; dans d'autres parties, on n'entend qu'un narrateur qui masque les voix dialoguant entre elles. On va retrouver cette solution rhétorique dans certains manuels scolaires des années 1970 (cf. Partie III, Chapitre 4).

3.3 La conception « heuristique » à l'arrière-plan de la réforme de Varga

À l'arrière-plan de la réforme hongroise, on peut donc observer une conception sur la nature des mathématiques qui est radicalement différente de l'approche bourbakiste, et qu'on pourrait nommer « heuristique ». Sans écrire des textes programmatiques, les membres de « l'école hongroise » expriment leurs avis sur la nature des mathématiques dans leurs œuvres de vulgarisation et dans leurs écrits discutant des questions de l'enseignement.

Ces mathématiciens considèrent non seulement que le contenu des mathématiques développe sans cesse mais aussi que leur forme et leurs méthodes sont en pleine évolution. Selon eux, les élèves doivent être guidés à travers un processus de développement similaire. Ils accordent un rôle important à l'intuition et aux expériences variées dans le développement des mathématiques, et ils soulignent l'importance d'alimenter l'intuition à l'aide d'expériences multiples, riches et diverses, à tous les niveaux de l'éducation. C'est ce qui doit précéder aussi, selon eux, l'introduction du langage formel. Ils considèrent l'activité mathématique dialogique par essence, comme un processus dialectique de questions, de problèmes et de tentatives pour y répondre. L'enseignement des mathématiques doit être également une activité conjointe de l'enseignant et de la classe, où l'enseignant agit comme un guide expérimenté lors d'un processus collectif de découverte, passant au travers d'une série de problèmes. Ces mathématiciens pensent que la logique des découvertes mathématiques est en partie compréhensible et qu'on peut améliorer ses compétences à découvrir : ils mettent donc

l'accent sur les processus de découverte dans l'enseignement des mathématiques. Ils considèrent en même temps la découverte comme un processus créatif, et ils insistent sur ses liens avec le domaine affectif et avec la création artistique.

Tamás Varga souligne à plusieurs reprises l'influence de ces mathématiciens sur la réforme qu'il a conçue (Varga 1978, Láng 1976). Il est pourtant rarement explicite sur les questions concernant la nature des mathématiques. En fait, quand Varga écrit des principes de la réforme, il met l'accent avant tout sur les questions pédagogiques : le développement psychologique de l'enfant, l'importance de la motivation interne, la prise en compte de la personnalité et de la diversité des élèves, l'éducation à une pensée autonome et au débat démocratique. Sur plusieurs questions fondamentales concernant la réforme du programme, il se réfère par ailleurs aux ambitions du mouvement international, par exemple : renouveler le contenu et la structure du programme pour le rendre plus cohérent avec l'état moderne des mathématiques ; présenter les mathématiques comme une science cohérente, dès le plus jeune âge ; faire comprendre les notions mathématiques au lieu d'entrainer les élèves au calcul mécanique (par ex. Varga 1972, 1975).

En même temps, l'image des mathématiques qui ressort de ses écrits semble être très cohérente avec la conception « heuristique » que nous avons décrite ci-dessus. On trouve des références récurrentes à la résolution des problèmes, à l'initiation à la découverte mathématique (on se réfère souvent à l'approche de Varga avec l'expression « faire découvrir des mathématiques »), aux dialogues entre l'enseignant et la classe, ou encore à l'importance de la diversité des expériences concrètes qui doivent alimenter des processus d'abstraction lents et progressifs. Il souligne souvent l'aspect ludique, artistique des mathématiques, et l'importance des éléments affectifs (en lien avec des questions pédagogiques). Nous citons sur ce dernier sujet deux textes, d'une part une lettre de sa jeunesse adressée à Kalmár, qui rend compte de ses premières expériences d'enseignement et illustre ses relations avec Kalmár et Karácsony ; d'autre part son dernière article posthume (Varga 1987), qui résume peut-être le plus clairement l'approche de Varga sur la nature des mathématiques.

[…] il y a deux matières. Pas l'arithmétique et la géométrie, bien sûr ; Mais

1) Calculer le monde

2) Jouer avec les nombres (et avec des figures, des objets… c'est aussi confluent avec des sciences de la nature que le point 1)

1) est le côté sciences

> du *moi* et *lui*.[92]

2) le côté arts

[…] J'ai toujours préféré l'aspect artistique. J'ai remarqué cela en découvrant que c'est que j'ai eu envie de montrer aux élèves de la première année. (Lettre à Kalmár de 1946, publié dans Szabó 2005, p. 403. Ma traduction.)

Du plus bas au plus haut niveau, les mathématiques émergent de l'expérience : des essais, des conjectures et de leurs contrôles, de leur rejet ou leur confirmation. Elles sont pourtant la création libre de l'esprit humain. Pont entre les « deux cultures », plein de ludique et d'esthétique : elles sont aussi un art. (Varga 1987 p. 28. Ma traduction.)

Nous tenterons de montrer dans la partie III que l'épistémologie mise en œuvre dans la réforme de Varga rejoint en effet la conception des mathématiciens hongrois qui le soutiennent.

4 CONCLUSION

La réforme française et hongroise de l'époque des « mathématiques modernes » s'inspirent, toutes les deux, des réflexions épistémologiques approfondies des mathématiciens qui y interviennent. Ces réflexions sont liées aux questions épistémologiques que pose le développement des mathématiques au 20e siècle ; mais les réponses données à ces questions sont différentes dans les deux cas. Ces réflexions sont aussi en rapport avec la pratique de recherche de leurs concepteurs ; mais pour les mathématiciens français en question, ces pratiques concernent surtout la réorganisation des mathématiques et le développement des grandes théories unificatrices comme l'algèbre abstrait ou la topologie, alors que dans le cas hongrois, il s'agit plutôt de la logique, de l'informatique, des probabilités et des mathématiques discrètes. Cette différence dans les expériences de recherche peut être une source parmi d'autres de la divergence des deux conceptions sur la nature des mathématiques.

Pour l'approche « bourbakiste », c'est la méthode axiomatique perfectionnée par Bourbaki qui permet de résoudre en pratique le problème des fondements[93]. Cette méthode apporte la plus grande clarté et précision possible aux mathématiques. La restructuration sur la base de la théorie des ensembles, et l'élaboration du langage formel moderne font des mathématiques

[92] Il s'agit probablement d'une référence aux expressions de Karácsony.

[93] En effet, contrairement à Kalmár ou Péter, Bourbaki a pratiquement ignoré les problèmes et le développement moderne de la logique mathématique, Pour Bourbaki, le problème des fondements semble être plutôt une question pragmatique qu'il considère avoir résolu par la construction des *Éléments de mathématique*. (Mashaal 2002 pp. 122-125).

une science unifiée, cohérente. Une des caractéristiques principales de cette « mathématique moderne » est l'abstraction poussée à l'extrême : les mathématiques sont la science des formes vides, et c'est justement ce vide qui lui donne sa pertinence universelle. Les mathématiques sont par essence abstraites et déductives. Même si certaines notions mathématiques simples s'inspirent des sources empiriques, ces sources ne sont pas vraiment pertinentes : ces notions deviennent mathématiques dès qu'elles se libèrent de toute trace empirique. L'intuition est nécessaire pour la recherche, mais elle est essentiellement irrationnelle et personnelle, et ne fait donc nullement partie de « la méthode » des mathématiques. Ce qui alimente le mieux l'intuition du chercheur mathématicien, c'est en fait justement la méthode axiomatique, et la « fréquentation » des notions des mathématiques modernes.

Selon l'approche « bourbakiste », les mathématiques sont arrivées à l'étape ultime de leur développement, pour ce qui concerne leur forme et leur organisation. Bourbaki a réussi à dégager « la voie royale » aux mathématiques : c'est ce qu'il faut donc suivre également pour l'enseignement. Il n'y a pas de raison de confondre les élèves par des problèmes et notions dépassées : il faut les initier le plus rapidement possible au langage moderne, à l'étude des structures et à la méthode axiomatique. Un tel enseignement leur apportera « une économie de pensée » significative, et armera les futurs citoyens d'outils efficaces face aux défis de la vie moderne. Les limites de cet enseignement sont principalement liées au développement psychologique de l'enfant, qui mûrit seulement progressivement pour l'acquisition de la réelle pensée mathématique.

Selon l'approche que nous avons nommée « heuristique », partagée par des mathématiciens de « l'école hongroise » soutenant la réforme de Varga, les mathématiques connaissent, au contraire, un développement permanent : leur contenu, leur forme, leurs méthodes évoluent sans cesse. La conséquence qu'ils tirent de la crise des fondements et des résultats négatifs de la théorie de la démonstration est que les mathématiques doivent continuer à se transformer pour répondre aux défis du présent et du futur. Le langage formel n'est qu'une étape, loin d'être ultime, de cette progression.

Les mathématiques ne sont pas une science absolument sûre, et ne peuvent pas être débarrassées de leurs bases empiriques. Au contraire, c'est la diversité des expériences (pas seulement physico-sensorielles mais aussi, et surtout, mentales) qui alimente les nouvelles découvertes et qui aident ainsi le développement des mathématiques. Les moteurs de ce développement sont des problèmes : il s'agit d'une dialectique de questions et de réponses. L'activité mathématique est par essence dialogique, une création collective des esprits

humains. Ce processus de création est plaisant, ludique, et contient aussi un caractère esthétique.

L'enseignement des mathématiques doit guider les élèves à travers un processus similaire de développement. Les notions, le langage et les méthodes modernes ne sont ni compréhensibles, ni utiles sans connaître les problèmes auxquels ils répondent. Une entrée immédiatement abstraite cache justement l'essence : le fonctionnement de l'activité mathématique.

Les mathématiciens de « l'école hongroise » pensent aussi, similairement aux « bourbakistes » français, qu'il faut apprendre aux élèves à penser mathématiquement. Mais cette « pensée mathématique » ne se limite pas, pour les membres de « l'école hongroise », à la démonstration et à l'organisation du savoir : ils accordent une grande importance aux méthodes de la découverte qui, sans être sûres ou universelles, peuvent être développées par l'enseignement. Ainsi, il faut donner aux élèves l'occasion d'accumuler de nombreuses expériences variées, et l'enseignant doit les guider à travers une série convenablement organisée de problèmes. L'enseignement doit donc prendre la forme d'un dialogue entre l'enseignant et la classe, lors d'un processus de redécouverte collective des mathématiques. Ce processus doit être alimenté par la curiosité naturelle des élèves, par leurs questions, par leur envie ludique et leur goût artistique. L'apprentissage des mathématiques devient ainsi un processus plaisant, tenant compte des personnalités diverses des élèves, mais permet également d'éduquer leur pensée autonome et leur esprit critique.

Nous ne sommes pas dans la mesure de situer ces deux conceptions dans l'histoire internationale de la philosophie des mathématiques. Dans l'annexe II, nous proposons quelques remarques concernant cette question, inspirées par l'article déjà cité de Corry (2001), qui étudie l'influence de Hilbert sur l'épistémologie de Bourbaki, et traite aussi des courants « anti-bourbakistes » développés à partir des années 1980 : nous suggérons de reconstituer un fil d'influence alternatif passant de Hilbert par Kalmár et jusqu'à Lakatos (ce dernier étant un des personnages clef, au niveau international, de la critique de l'épistémologie bourbakiste).

Mais au-delà de ces remarques, un tel travail de reconstruction ne peut pas faire partie de la présente thèse. Notre objectif dans cette partie était simplement de clarifier les bases épistémologiques de la réforme française et hongroise de l'époque des « mathématiques modernes », pour pouvoir ensuite montrer, dans la partie III, comment ces approches épistémologiques sont mises en pratique par les concepteurs des réformes, et comment elles

influencent les caractéristiques des deux réformes. C'est ce que nous examinerons par la suite, dans la partie consacrée à l'analyse didactique des réformes.

PARTIE III
UNE ANALYSE DIDACTIQUE DES DEUX REFORMES

INTRODUCTION

1 LES QUESTIONS DE LA PARTIE DIDACTIQUE

Après l'étude de leur contexte historique et de leur arrière-plan épistémologique, nous procédons à l'analyse didactique des réformes de l'enseignement des mathématiques.

Comme nous l'avons précisé plus haut, nous étudions principalement le programme hongrois de 1978, lié au nom de Varga, concernant l'école élémentaire et moyenne, et les programmes français de l'école élémentaire (1970) et l'école moyenne (1969), connus sous le nom de réforme des « mathématiques modernes ». Pour le cas français, nous prenons aussi en considération les programmes de 1977 et quelques autres ressources des années 1970, pour équilibrer l'analyse au niveau du temps, et pour comprendre la dynamique des changements suivant la réforme des « mathématiques modernes ». Concernant la réforme de Varga, nous allons étudier les documents officiels associés à la réforme de 1978 (programme, livres du professeur, manuels scolaires). Nous devons cependant insister ici sur la continuité avec les documents provisoires préparés antérieurement, à la fin des années 1960 et au début des années 1970 par l'équipe de Varga[94].

Dans l'introduction de la thèse, nous avons souligné le caractère systémique d'une réforme (§2.2.1), touchant à la fois des aspects divers de l'enseignement d'une discipline. Dans la partie historique, on a vu que les acteurs mettent l'accent sur la réforme du contenu et de la structure du programme de l'enseignement des mathématiques, en cohérence avec la rénovation des pratiques pédagogiques, le renforcement notamment des « méthodes actives » (Partie I). Nous nous intéresserons donc avant tout à ces deux aspects et aux liens entre eux.

[94] Les anciens collègues de Varga confirment une telle continuité dans les entretiens (M. Halmos, E. Neményi). Nous disposons de peu de documents des années 1960, nous avons par contre accès à plusieurs documents publiés au début des années 1970, liés au programme provisoire que la commission ministérielle a accepté en 1972 et qui a été introduit progressivement à partir de 1974. Une comparaison superficielle de ces documents montre des changements plus importants par rapport aux documents précoces des années 1960, mais les principes de la structure du programme, de nombreux éléments du contenu et beaucoup d'activités étaient déjà présents, y comprisdans ces documents précoces. Par rapport aux documents du début des années 1970 par contre, nous ne trouvons que des modifications mineures. Une comparaison plus soigneuse serait probablement nécessaire pour décrire le développement du projet ; il nous semble en tout cas que la réforme a gagné sa forme quasi finale au début des années 1970. Cela confirme la pertinence de comparer la réforme de Varga avec la réforme française des « mathématiques modernes ».

1, **Quelles sont les caractéristiques du contenu et de la structure des programmes de la réforme française et hongroise ?**
2, **Comment les réformateurs envisagent-ils les pratiques pédagogiques ? Que les « méthodes actives » signifient-elles dans chaque cas ?**
3, **Quels sont les liens entre le programme, les pratiques envisagées et les ressources associées à chaque réforme ?**

Nous essayerons de montrer que les différentes caractéristiques de chaque réforme constituent un système cohérent dans les deux cas, et qu'elles sont chaque fois des réalisations didactiques de l'épistémologie mathématique sous-jacente, d'une conception « bourbakiste » dans un cas et d'une conception « heuristique » dans l'autre cas.

1.1 L'étude des programmes

Notre première question concernera la construction des programmes de mathématiques. Les acteurs des réformes de l'époque insistent sur le renouvellement du contenu d'une part, conformément aux développements récents de la science mathématique, et d'autre part sur la structuration du programme, permettant de présenter les mathématiques comme une science cohérente, dès le début de l'école élémentaire. Nous examinerons comment ces objectifs sont mis en œuvre : en quoi consiste le renouvellement du contenu et qu'est-ce qui assure la cohérence du programme dans une réforme et dans l'autre ? Nous nous inspirons pour cette étude de *l'approche écologique* (Artaud 1997), qui s'intéresse à la logique de l'organisation des programmes de mathématiques et aux raisons d'être des éléments de contenu au sein d'un programme.

Nous ferons d'abord une analyse globale des programmes : nous nous concentrerons sur l'apparition ou sur l'absence des différents domaines mathématiques et à la logique globale qui organise les programmes. D'un point de vue global uniquement, nous comparerons les programmes de l'époque des « mathématiques modernes » aux programmes précédents dans chaque pays pour pouvoir rendre compte des changements.

Nous entrerons dans l'analyse plus détaillée à l'aide de trois exemples choisis. Nous examinerons chaque fois un élément du contenu par rapport à son contexte dans chacun des programmes : la place qu'il y occupe, la fonction qu'il y remplit, ses relations avec d'autres éléments du programme, au sein d'un domaine mathématiques ou entre les domaines. Dans certains cas, cette analyse sera plutôt locale, limitée au contexte direct d'une seule notion ; dans d'autres cas, nous prendrons en considération des échelles plus grandes, un chapitre ou

même un domaine entier. Nous entrerons plus ou moins dans les détails en fonction de l'échelle qui aura été choisie à chaque fois.

Ces études écologiques pourront dévoiler plusieurs choix épistémologiques des programmes. Dans les cas échéants, nous pourrons compléter ces analyses avec l'étude des différents *paradigmes* (Houdement & Kuzniak 2006, Parzys 2011) suivis par les programmes.

Au-delà des programmes, nous prendrons aussi en considération des manuels scolaires et des livres de professeurs pour l'étude écologique et épistémologique des exemples choisis. Il faut ici signaler une différence entre les ressources hongroises et françaises : en Hongrie à cette époque, il n'y avait qu'une seule série de manuels scolaires avec des livres de professeur associés. Ces documents ont été rédigés par la même équipe que celle du programme lui-même, et on peut donc supposer qu'il existe une certaine cohérence entre toutes ces ressources. Cependant, en France l'édition des manuels scolaires est libre, une grande diversité de manuels et de livres de professeurs est disponible, et ceux-ci suivent plus ou moins fidèlement les préoccupations des auteurs des programmes. Pour notre étude, il a donc été nécessaire de faire des choix parmi les manuels français.

Au-delà des critères pragmatiques (notamment la disponibilité des documents dans les bibliothèques que nous avons utilisées), nous avons essayé de suivre deux critères principaux : nous avons cherché des manuels répandus à l'époque, et les manuels des auteurs proches de la conception de la réforme. Ainsi, nous étudions par exemple la série *Math et calcul* pour son utilisation fréquente aux années 1970 (Chambris 2008 p. 515)[95], la collection Queysanne-Revuz pour l'engagement de Revuz dans le mouvement de réforme.

1.2 L'étude des pratiques pédagogiques envisagées

Notre deuxième question concernera les pratiques pédagogiques. Comme nous l'avons précisé dans l'introduction, nous ne cherchons pas à étudier les pratiques ordinaires de l'époque (qui peuvent être très différentes de celles envisagées par les réformateurs[96]). Nous nous concentrerons uniquement sur les pratiques envisagées par les concepteurs des réformes et par des auteurs des manuels. Il s'agit donc d'une *étude indirecte* : nous n'accéderons pas à des pratiques réelles qu'il serait possible d'observer, nous tenterons de *reconstituer* des pratiques

[95] En fait, Chambris dit que « la collection Math et Calcul est considérée comme un best-seller pour les années 80 ». Plusieurs autres didacticiens français confirment l'utilisation répandue de cette collection même dans les années 1970.

[96] J. Bolon raconte par exemple (entretien le 28 mars 2013) que les enseignants n'ont souvent pas connu les livres de maîtres et qu'ils ont utilisé uniquement les fiches de travail. Ainsi, ils n'étaient même pas conscients des pratiques suggérées par les auteurs de ces livres.

à travers des sources écrites : des programmes, des instructions officielles, des manuels scolaires et des livres de professeur.

1.2.1 Les méthodes actives

Nous nous intéresserons avant tout à l'utilisation des « méthodes actives ». On a vu qu'elle se trouve parmi les préoccupations principales de la réforme des deux pays : on cherche avant tout à mettre en cohérence l'apprentissage des mathématiques avec les recherches sur la psychologie de l'enfant. Nous interrogerons nos différentes ressources pour comprendre ce que « l'activité » signifie dans chacun des cas, et son rapport au contenu mathématique : quelle autonomie, quelle responsabilité est laissée aux élèves dans le processus d'apprentissage ? Quel est le rôle de l'enseignant dans ce processus ?

Nous nous servirons de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau (1998) : les notions d'*adidacticité* et de *contrat didactique* s'avèreront particulièrement pertinentes pour notre analyse. Nous nous appuierons plus ponctuellement sur quelques développements plus récents de la TSD comme la notion de *potentiel d'adidacticité* (Hersant & Perrin-Glorian 2003) ou la structuration du milieu (Margolinas 2002), ainsi que sur le travail de Douady (1986).

1.2.2 Une étude indirecte : recours aux ressources écrites

Nous fondrons nos analyses sur des sources écrites. Mais cela pose des difficultés importantes : contrairement à l'observation en classe, où l'on peut concevoir la recherche en fonction des aspects qui nous intéressent, les ressources écrites ne contiennent qu'une description partielle des pratiques, et ne permettent pas forcément de répondre à toutes les questions qu'on se pose. Nos premiers essais pour analyser des « situations » décrites dans les manuels scolaires et livres de professeurs se sont heurtés à des difficultés : les descriptions des « situations » se sont montrées trop fragmentaires pour en reconstituer suffisamment d'éléments analysables à l'aide de la TSD. Nous avons fait une interprétation de ces fragments mais sans pouvoir la justifier et sans que notre lecture soit cohérente avec celle des autres[97]. De plus, les sources hongroises et françaises s'avéraient à peine comparables, car elles ont fourni des informations de différentes natures sur les pratiques envisagées.

Il nous semblait donc nécessaire, avant de procéder à la reconstitution des pratiques, d'étudier nos sources elles-mêmes. Comment sont-elles construites ? Quel est le contexte de

[97] La différence est significative entre les interprétations des lecteurs français et hongrois avec qui nous avons pu discuter. Sur ce point, c'est en effet le contexte de la cotutelle qui à révélé les insuffisances de notre approche première et qui nous a ainsi permis de concevoir une recherche mieux fondée.

la description d'une « situation » ? Comment ces ressources sont-elles censées être utilisées ? À qui s'adressent les manuels scolaires ? Comment l'enseignant est-il censé se documenter à partir des manuels scolaires et des livres de professeurs ?

Nous chercherons une réponse à ces questions à l'aide d'une analyse globale de la structure des ressources, de leur introduction, de leurs consignes d'utilisation et de leur langage, style utilisé. Cette étude globale permettra de mettre en contexte la description des « situations », et de mieux comprendre comment les auteurs des ressources envisagent la mise en place des pratiques d'enseignement à partir de ces textes écrits.

1.2.3 Le travail de l'enseignant : dans la classe et sur le long terme

Le travail de l'enseignant ne se limite pas au travail en classe. L'enseignant prépare la séance, et conçoit éventuellement les processus d'enseignement sur le plus long terme. Nous nous intéresserons particulièrement à ce dernier aspect suite à l'importance accordée aux « séries de problèmes » dans le contexte hongrois, que nous avons identifiée lors de l'analyse de l'arrière-plan épistémologique (§L'exemple du *Jeux avec l'infini* de Rózsa Péter, et des « séries de problèmes »3.2) : si les élèves doivent être guidés à travers toute une série bien structurée de problèmes, l'enseignant doit concevoir ce processus.

L'étude de la construction des ressources, avant tout des livres de maîtres montrera par ailleurs que les différentes ressources laissent du travail de différents niveaux à la charge de l'enseignant. Les niveaux définis par Margolinas (2002) dans le cadre de la structuration du milieu nous serviront à tenir compte de la responsabilité laissée aux enseignants par les différents auteurs.

2 LA STRUCTURE DE LA PARTIE DIDACTIQUE

La partie didactique de notre thèse comprend cinq chapitres. Avant d'entrer dans les analyses, nous donnons un résumé des différents outils théoriques que nous utiliserons dans cette partie (Chapitre 1). Nous commençons l'analyse par l'étude globale des programmes (Chapitre 2).

Les trois chapitres suivants sont consacrés à trois exemples choisis :

3, L'introduction de la notion de nombres au début de l'école élémentaire

4, La géométrie à l'école moyenne et le théorème de Pythagore

5, L'enseignement de la combinatoire et des probabilités

Nous avons suivi plusieurs critères pour choisir nos exemples. Nous avons veillé à en étudier chaque fois de différents :

- niveaux scolaires
- domaines mathématiques
- types de ressources
- aspects des pratiques d'enseignement.

Ainsi, notre premier exemple (Chapitre 3) concerne l'enseignement de l'arithmétique au tout début de l'éducation obligatoire. Le choix du thème est motivé par les travaux de Chambris (2008, 2010) qui étudie l'articulation entre les nombres et les grandeurs dans les différents programmes français du 20e siècle. Nous ferons sur ce sujet une analyse écologique ponctuelle, autour de l'introduction de la notion des nombres naturels au grade 1 dans le programme français et hongrois de la réforme. Nous étudierons dans ce chapitre quelques ressources de l'école élémentaire : des fiches de travail et des livres de maître. Une analyse globale des livres du maître nous permettra d'étudier les différents niveaux du travail des enseignants, envisagé par les différents auteurs des ressources. Nous analyserons ensuite quelques exemples de situations.

Notre deuxième exemple (Chapitre 4) concerne l'autre domaine principal des programmes, la géométrie, au niveau de l'école moyenne. Le choix du thème plus concret n'est pas évident, les programmes des deux pays étant très différemment construits. Le théorème de Pythagore est un thème central pour le programme hongrois et moins pour le programme français ; en même temps, en situant le théorème dans son contexte et grâce à l'approche écologique, l'interprétation de l'importance réduite de ce théorème fournira justement des informations pertinentes sur le programme français des « mathématiques modernes ». Ce sujet nous permettra en outre d'étudier de nombreuses questions épistémologiques, par exemple le rôle des démonstrations dans l'enseignement ou la relation de la géométrie à la réalité physique. Nous nous servirons de la notion des paradigmes de géométrie (Houdement & Kuzniak 2006) pour cette analyse.

Du point de vue des ressources et des pratiques, ce chapitre nous donnera l'occasion d'étudier des manuels scolaires et des livres du professeur du collège. Au-delà du fait qu'ils constituent des ressources pour les élèves, nous montrerons que les manuels scolaires peuvent être considérés aussi comme des ressources pour les enseignants, et nous examinerons le fait qu'ils fournissent des modèles d'enseignement pour ce qui concerne la gestion des séances.

Notre dernier exemple (Chapitre 5) s'inspire de l'œuvre de Varga, particulièrement connu pour ses travaux sur l'enseignement de la combinatoire et des probabilités. Cet exemple permet d'illustrer une caractéristique importante de son programme, la diversité des domaines mathématiques et l'articulation dialectique entre eux (cf. Chapitre 2). Ce thème a aussi une

pertinence historique, car ce sont des domaines dans lesquels Varga publie en français, et un réel échange peut être observé entre les deux pays.

En même temps, la comparaison est particulièrement difficile sur ce sujet, car les domaines de la combinatoire et des probabilités sont absents du programme français du primaire et du collège de 1969/70. Cependant, la combinatoire apparaît ponctuellement dans le programme et des manuels de 1977, et les deux domaines sont objets de plusieurs expérimentations menées au sein de l'INRP et des IREM au cours des années 1970. Il nous semble intéressant d'étudier les raisons écologiques et épistémologiques de l'absence de ces domaines dans les programmes de 1969/70 et de leur apparition dans la suite : nous considérons ce changement comme un indicateur pertinent de la dynamique des recherches émergeantes suite à la réforme des mathématiques modernes. Pour l'analyse épistémologique, nous nous servirons de la notion des paradigmes de probabilité (Parzys 2011).

Au-delà des documents étudiés jusqu'ici, nous compléterons dans ce chapitre la liste de nos ressources par quelques articles didactiques des acteurs de l'époque. Un article rétrospectif de Brousseau, décrivant ses expérimentations sur l'enseignement des probabilités menées au début des années 1970 (Brousseau, Brousseau & Warfield 2001), nous semble particulièrement intéressant. Nous utiliserons la théorie de Brousseau comme un de nos outils théoriques principaux pour nos analyses – mais ici, il apparaît comme un acteur de l'époque, permettant de situer l'émergence de sa théorie dans son contexte historique. Les travaux de Varga sur la combinatoire d'un côté, et l'article de Brousseau de l'autre nous permettront enfin d'analyser deux conceptions différentes concernant la construction des processus d'enseignement longs.

Dans l'introduction de la thèse, nous avons discuté des risques d'une comparaison déséquilibrée. On peut voir que le choix des exemples comporte effectivement de tels risques : il est difficile de choisir des thèmes également pertinents pour les deux réformes. Les chapitres 4 et 5 s'inspirent plutôt des caractéristiques du programme de Varga et paraissent moins favorables pour la réforme française[98]. Ce choix est conforme avec nos préoccupations originales, notamment avec la recherche d'une caractérisation de la réforme de Varga. Nous avons veillé cependant à concevoir nos études d'une façon permettant de tirer des conclusions pertinentes sur le cas français aussi ; et nous espérons finalement, à travers notre regard inspiré par le cas hongrois, pouvoir enrichir les regards existants sur la réforme française.

[98] L'étude de l'enseignement des décimaux serait par exemple particulièrement pertinente pour la réforme française, mais beaucoup moins pour la réforme hongroise.

CHAPITRE 1

LES OUTILS THEORIQUES DE L'ANALYSE DIDACTIQUE

Dans l'introduction de la partie didactique, nous avons décrit la construction de cette partie de notre étude, et nous avons fait référence à plusieurs théories didactiques sur lesquelles nous nous appuyons lors de nos analyses. Le présent chapitre sert à résumer les éléments de ces différentes théories que nous utilisons pour nos analyses dans la suite. Il s'agit avant tout de l'approche écologique pour l'analyse des programmes et de la Théorie des Situations Didactiques pour l'analyse des pratiques d'enseignement. En outre, plus ponctuellement, nous nous servons de la notion des paradigmes de géométrie et de probabilités, et enfin de la notion de dialectique outil-objet et des phases définies par Douady.

1 L'ANALYSE DES PROGRAMMES – L'APPROCHE ECOLOGIQUE

Nous nous intéressons au contenu et à la structure des programmes, aux caractéristiques qui assurent leur cohérence interne. Pour l'étude de ces questions « l'approche écologique », développée dans le cadre de la Théorie Anthropologique de la Didactique (TAD), nous paraît un outil efficace.

La TAD prend son origine dans les travaux d'Yves Chevallard sur la transposition didactique, étudiant le processus par lequel un système de savoir savant est transformé en un système de savoir enseigné. Un développement plus récent de la théorie est la notion des *niveaux de codétermination* (Chevallard 2002) à laquelle nous avons déjà fait référence dans l'introduction de la thèse.

L'approche écologique (Artaud 1997) s'inscrit dans ce contexte théorique par son regard systémique. La notion est issue de l'écologie biologique et de la notion de l'*écosystème* : étudier un ensemble d'êtres vivants, avec leur environnement, en prenant compte de leurs interdépendances, des raisons d'existences ou de non-existences dans cet ensemble. La didactique des mathématiques s'en inspire pour étudier les systèmes de savoirs mathématiques, ou des *organisations mathématiques* ; identifier les interdépendances théoriques-logiques des éléments de savoir mathématique, les raisons d'existences des éléments de savoir particuliers dans un système donné, et les fonctions qu'ils y remplissent. L'approche écologique emprunte aussi de la biologie les notions *niche* et *habitat* :

> Je l'ai mentionné plus haut, un objet ne pouvant pas vivre isolé, il sera nécessaire de faire vivre un complexe d'objets autour des fonctions génératrices. Il convient donc d'examiner les différents lieux où l'on trouve des fonctions génératrices et les objets avec lesquels elles entrent en association, ce que l'on appellera les habitats. Puis regarder en chacun de leurs habitats, la niche écologique qu'elles occupent, c'est-à-dire, en quelque sorte, la fonction qui est la leur. (Artaud 1997 p. 111.)

Sans toujours utiliser les termes écologiques, nous retenons cette approche pour l'analyse des programmes : c'est dans ce sens que nous allons parler de la place et la fonction qu'une notion ou un domaine mathématique remplit dans l'ensemble du programme.

Nous retenons en outre la notion des *chaînes trophiques* (Artaud 1997 p. 112) de l'approche écologique. À l'exemple des besoins d'alimentation des êtres vivants, on cherche à identifier les besoins théoriques d'un savoir dans une organisation mathématique, et reconstruire ainsi des chaînes d'interdépendances des éléments de savoir.

2 L'ANALYSE DES PRATIQUES – LA THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES

La deuxième question de notre analyse didactique concerne les pratiques pédagogiques. La Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau nous paraît pertinente pour analyser les pratiques d'enseignement envisagées par des réformes françaises et hongroises, pas seulement parce qu'il s'agit d'une théorie fondatrice de la didactique des mathématiques en France, et d'une théorie très développée, mais aussi parce que les réflexions de Brousseau sont largement ancrées dans les débats de l'époque « des mathématiques modernes ». On l'a vu en effet (Partie I §3.2.3), la question des pratiques fait partie des préoccupations importantes de cette époque : l'influence piagétienne et celle des pédagogies actives en génèrent des vives discussions. Brousseau s'inspire de ces approches (avant tout de celle de Piaget ou de Dienes) mais s'y oppose aussi en partie[99].

> De nombreux travaux ont montré le caractère erroné de considérer l'apprentissage comme un simple enregistrement de ce qui est communiqué par autrui : l'apprentissage n'est pas un processus de simple transfert, ni un processus linéaire et continu. Brousseau s'oppose aux thèses constructivistes en définissant l'apprentissage comme un double processus :
> - un processus d'adaptation (assimilation et accomodation) à un milieu qui est producteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres : notion de milieu et de situation adidactique
> - et un processus d'acculturation par l'entrée dans des pratiques d'une institution : notions de contrat didactique et de l'institutionnalisation. (Bessot 2011 p. 32)

[99] Dans (Brousseau 2012) il explique comment l'émergence de la TSD est ancrée dans le contexte des expériences et débats de l'époque des « mathématiques modernes ».

Une des notions centrales de la théorie de Brousseau est la *situation adidactique*. Il s'agit en effet d'une notion émergeant de l'influence piagétienne et des théories constructivistes de l'apprentissage (voir par ex. Brousseau 1986 p. 48) : d'une prise en compte de l'insuffisance de la transmission directe du savoir de l'enseignant à l'élève, et de la nécessité de l'activité intellectuelle de l'élève dans un processus d'apprentissage, ou autrement dit, de la nécessité que l'élève construise lui-même ses propres connaissances. Selon la TSD, une situation est adidactique quand l'enseignant construit un milieu avec lequel l'élève peut entrer en interaction et qui permet à l'élève, par ses rétroactions, de construire ou modifier ses connaissances sans l'intervention directe de l'enseignant. En fait, c'est ce qui explique le terme « adidactique » : un milieu adidactique est consciemment construit par l'enseignant, avec des visées didactiques ; il imite en même temps des situation-problèmes, des milieux non-didactiques qu'on rencontre dans la vie courante et qui permettent un apprentissage hors de l'institution scolaire.

Brousseau suppose non seulement « l'existence d'au moins une situation spécifique de chaque 'connaissance' », mais aussi « l'existence d'au moins une *situation fondamentale* dans chaque classe des situations spécifiques d'une même connaissance. » (Brousseau 2012 p. 115). Une situation fondamentale doit être suffisamment riche pour pouvoir générer tout un ensemble d'autres situations, et ainsi tout un champ de connaissances associés.

> On peut envisager de multiplier les situations didactiques qui illustrent chacune un aspect différent comme le suggère Moore […] mais cette stratégie didactique est douteuse : elle demande beaucoup de temps, elle donne une image trop riche et trop parcellaire et il se peut que jamais le sens d'ensemble ne soit transmis. Il est donc avantageux de disposer d'une situation fondamentale qui puisse générer ce champ. La fonction d'une situation fondamentale est de résumer ce sens global de façon à permettre ensuite de déployer le nombre et la diversité de ses occurrences suivant les nécessités et les possibilités de l'enseignement. (Brousseau, 2005 p. 174)

Brousseau distingue des différents types de situation adidactique : d'*action*, de *formulation* et de *validation*. L'ordre de ces différents types de situations porte une certaine importance :

> L'action, puis la formulation puis la validation culturelle et l'institutionnalisation semblent constituer un ordre raisonnable pour la construction des savoirs. Cet ordre est souvent observé dans la genèse historique des notions où nous voyons des formes proto-mathématiques, puis para-mathématiques se succéder et précéder leurs formes mathématiques proprement dites. Il semble s'opposer à l'ordre inverse où les savoirs sont d'abord réorganisés en discours communicables selon le destinataire puis seulement « appliqués » à des situations personnelles et « convertis » en décisions. En fait, il n'y a pas de loi générale qui qualifierait ou disqualifierait l'un ou l'autre de ces processus. Il faut examiner les propriétés de chacun dans chaque cas. (Brousseau 1997, p. 9)

Comme on l'a vu plus haut, les situations adidactiques ne représentent qu'une phase de l'enseignement selon la théorie de Brousseau, qui doit être alternée avec des phases de l'intervention de l'enseignant : la *dévolution* et l'*institutionnalisation*.

> La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (adidactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert. (Brousseau 1990, p.135)

Cette notion est strictement liée à la notion du contrat didactique, qu'on présentera plus loin. La nécessité de la phase d'institutionnalisation découle de la différence que Brousseau définit entre *connaissances* et *savoirs* :

> Le fonctionnement des connaissances est différent de celui des savoirs, aussi bien dans les rapports entre les institutions que dans l'activité isolée des sujets. Les " savoirs " sont les moyens sociaux et culturels d'identification, d'organisation, de validation et d'emploi des connaissances. La même notion comme connaissance et comme savoir n'a pas les mêmes propriétés, ni comme moyen de recherche, ni comme possibilité d'expressions, ni comme instrument de conviction ou comme argument et elle n'est pas apprise de la même manière. (Brousseau 1997, p. 10)

Selon Brousseau, les situations adidactiques permettent donc la construction des *connaissances*, mais pour les transformer en *savoirs*, c'est-à-dire en objets culturels validés institutionnellement, l'enseignant doit intervenir directement, en tant que représentant de l'institution. Il nous sera intéressant d'observer l'apparition (ou la non-apparition) de ces différentes phases dans nos ressources et d'étudier les liens entre eux, indiquant la relation entre connaissances personnelles et savoir institutionnel dans la conception des différents auteurs.

Encore une notion de la théorie de Brousseau joue un rôle important dans nos analyses, notamment la notion du *contrat didactique*.

> Alors se noue une relation qui détermine – explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement – ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre. Ce système d'obligations réciproques ressemble à un contrat. Ce qui nous intéresse ici est le *contrat didactique*, c'est-à-dire la part de ce contrat qui est spécifique du « contenu » : la connaissance mathématique visée. (Brousseau 1986, 51.)

Il s'agit donc des attentes, implicites dans la majorité des cas, que les partenaires, l'enseignant et l'élève posent l'un envers l'autre, en fonction de leur conception sur les rôles 'enseignant' et 'élève'. Pour comprendre le sens de « l'activité » des élèves dans nos différentes ressources, nous allons étudier quels types de contrats, quels types de partage de

responsabilités y sont suggérés, implicitement ou plus explicitement, par nos différentes ressources.

Depuis le fondement de la théorie, la TSD a vécu de nombreux développements, elle était complétée, entre autres, pour répondre aux besoins de l'analyse des classes ordinaires. Nous référons avant tout à un article de Perrin-Glorian et Hersant (2003), qui étudient l'interdépendance du milieu et du contrat didactique dans le contexte de l'analyse des classes ordinaires, et proposent une structuration du contrat en distinguant *macro-*, *méso-* et *microcontrat*, valables sur plus long terme, sur l'échelle d'une activité ou sur une échelle épisodique. Elles définissent également différents types de contrat en fonction de la présence ou l'absence du milieu et aux différentes phases de la transmission des éléments de savoir (Perrin-Glorian & Hersant 2003, pp. 241-244). Nous allons parfois référer aux types de contrat ainsi définis.

Nous retenons en outre la notion des *potentialités adidactiques* que Perrin-Glorian et Hersant utilisent pour l'analyse a priori des situations. En effet, similairement à leurs analyses a priori, nous ne pouvons pas tenir compte de la mise en place réelle des situations que nous trouvons dans nos ressources écrites, et nous ne pouvons pas directement étudier leur caractère adidactique : il nous sera donc pertinent de parler plutôt des potentialités que ces situations fournissent pour insérer une certaine adidacticité à leur réalisation effective en classe.

Un autre complément de la TSD dont nous nous servons concerne le travail de l'enseignant. Comme le précise Margolinas, il s'agit d'un changement de perspective par rapport aux préoccupations originales de la TSD, consistant à considérer l'enseignant au lieu « d'un élément du dispositif permettant de réaliser des situations », plutôt « comme un sujet dont on cherche à étudier l'activité » (Margolinas 2002 p. 141). Quand nous nous intéressons aux manuels scolaires et livres de professeurs comme ressources pour le travail de l'enseignant, il s'agit d'une approche similaire. Nous allons constater en particulier, que le travail laissé à la charge des enseignants par les différentes ressources sont de différentes nature et concernent différentes échelles. Nous nous servons des *niveaux d'activité du professeur*, définis par Margolinas (2002 p. 142), pour rendre compte de ces différences. Margolinas en définit cinq, et les désigne par des numéros :

Niveau noosphérien ou idéologique	+3
Niveau de construction ou de conception d'un thème	+2
Niveau du projet de leçon	+1
Niveau de la situation didactique	0
Niveau d'observation ou de dévolution	-1

Tableau III.1.1 : les niveaux d'activité du professeur (Margolinas 2002 p. 142)

Nous nous servons des niveaux +2, +1 et 0, le travail de préparation sur le long terme, le projet de leçon et la gestion de la classe lors de la séance, pour caractériser le travail que les différents auteurs de l'époque des « mathématiques modernes » attendent des enseignants.

Nous attirons finalement l'attention sur un point de débat concernant la nature des situations adidactiques, qui nous paraît pertinent pour nos analyses. Dans son cours donné à Montréal, Brousseau donne la définition suivante :

> Les situations "a-didactiques" sont les situations d'apprentissage dans lesquelles le maître a réussi à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants de ce que l'élève va faire : ce sont celles qui fonctionnent sans l'intervention du maître au niveau des connaissances. Nous avons fabriqué des situations a-didactiques de toutes sortes. Le maître était là pour faire fonctionner la machine, mais, sur la connaissance elle-même, ses interventions étaient pratiquement annulées. (Brusseau 1997 p. 47-48)

Cette définition comporte une certaine ambiguïté, notamment concernant l'affirmation que la situation adidactique fonctionne « sans l'intervention du maître au niveau des connaissances ». Qu'est-ce que ça veut dire ? Une situation n'est adidactique que si l'enseignant n'y intervient pas du tout ? Selon Brousseau, l'enseignant est là pour « faire fonctionner la machine » : il peut donc intervenir dans sa fonction « pédagogique » mais ces interventions ne concernent pas la construction des connaissances et la transmission du savoir, et tombent donc hors de la portée de la didactique des mathématiques. En effet, dans les exemples que Brousseau présente, les enseignants interviennent dans les phases adidactiques (posent des questions, encouragent des élèves etc.), mais ces interventions ne sont pas analysées dans le cadre de la théorie.

Margolinas attire l'attention sur ce problème en donnant une description un peu caricaturale du processus théorique dévolution – situation adidactique – institutionnalisation :

> 1 – Le maître est actif, il parle à la classe, et présente le problème, parfois réduit à la consigne. Ce serait la phase de dévolution.
>
> 2 – Le maître ne dit plus rien, il n'intervient en aucun cas, le problème étant devenu celui des élèves. Ce serait la phase adidactique, quasi-isolée du maître.
>
> 3 – Le maître intervient à nouveau activement pour institutionnaliser le savoir. Ce serait la phase d'institutionnalisation. (Margolinas 1993, p. 35)

Margolinas insiste sur l'insuffisance de cette schématisation. Selon son interprétation, la dévolution n'est pas une phase de la situation didactique, séparée des autres phases dans le temps, plutôt un processus qui nécessite une négociation continue entre l'enseignant et les

élèves dans une situation adidactique. De ce point de vue, la caractéristique principale d'une situation adidactique n'est pas le manque d'intervention de l'enseignant, plutôt la responsabilité que l'élève doit accepter dans le processus d'apprentissage (Margolinas 1993).

Il paraît en même temps qu'il n'y a pas d'accord complet sur cette question dans la communauté didactique utilisant la TSD. Par exemple, Perrin-Glorian et Hersant (2003) semblent suggérer que le manque d'intervention de l'enseignant caractérise l'idéal de la situation adidactique, la responsabilité des élèves n'étant pas complète si l'enseignant intervient.

> Brousseau précise que la situation adidactique est une situation idéale, vers laquelle on tend [...] En effet, si on cherche, dans l'analyse des séquences ordinaires, un milieu avec lequel l'élève interagit sous sa seule responsabilité, sans intervention du maître, on risque de descendre beaucoup dans le découpage des savoirs et d'arriver à quelque chose de peu signifiant. (Perrin-Glorian – Hersant 2003, p. 223)

Dans un autre article, Hersant (2004) introduit la notion du « cours dialogué » : elle le situe entre l'idéal d'une situation adidactique, où l'enseignant n'intervient pas, et les contraintes de la pratique ordinaire où l'enseignant est obligé d'intervenir à cause des différentes raisons. Le dialogue apparaît donc comme un compromis entre l'idéal théorique et des contraintes de la réalité.

Cette ambiguïté d'interprétation de la notion de l'adidacticité (manque d'intervention de l'enseignant ou responsabilité des élèves dans l'apprentissage) va devenir important pour nous, quand nous comparons les pratiques suggérés par des réformateurs français et hongrois : les documents français semblant suggérer des phases distinguées de travail individuel et de l'intervention de l'enseignant, alors que les documents hongrois insistent plutôt sur l'importance du dialogue et en même temps sur les astuces visant à faire accepter aux élèves une responsabilité dans l'apprentissage.

2.1 Un problème de vocabulaire

Les notions « situation » et « problème » sont centraux pour la théorie de Brousseau (ce dernier est par ailleurs étroitement lié à la notion d'obstacle que Brousseau emprunte de Bachelard et analyse à plusieurs reprises).

> Poser un problème consiste à trouver une situation avec laquelle l'élève va entreprendre une suite d'échanges relatifs à une même question qui fait « obstacle » pour lui, et sur laquelle il va prendre appui pour s'approprier, ou construire, une connaissance nouvelle. (Brousseau 1998 p. 126)
>
> […] according to Brousseau (2006, p.2): « the notion of situation includes, extends, enlarges and diversifies the notion of problem ». Any problem set up in a classroom is explicitly or implicitly part of a

> situation seen as a system of relationships between the teacher, the group of students and mathematical knowledge, and the situation is considered the minimal unit of analysis for understanding what could be or is actually at stake from a cognitive point of view in the solving process. (Artigue & Houdement 2007 p. 366)

On pourrait dire, par un schéma très simplifié, qu'une « situation adidactique » est un ensemble constitué d'un « problème » et d'un « milieu » dans le sens de la TSD.

En même temps, les termes « situation » et « problème » apparaissent dans les ressources françaises et hongroises de notre étude avec une signification variée, ainsi qu'une diversité d'expressions synonymes, comme « exercice », « tâche » ou « jeu ». Le sens de ces termes divers n'est pas toujours bien défini, il y a des coïncidences, le même terme peut cependant porter des significations diverses dans différents contextes.

Les documents français utilisent souvent les termes « situation », « problème » et « exercice ». On trouve assez souvent le mot « situation » dans les ressources du niveau élémentaire pour désigner toute sorte d'activité à mettre en place en classe, décrite généralement avec précisions quant au matériel à utilisé et au déroulement de l'activité. Les manuels scolaires du niveau moyen utilisent principalement le terme « exercice » pour désigner les énoncés recueillis à la fin des chapitres, après le texte des « cours ». Dans certains cas, le terme « problème » apparaît aussi dans ces manuels scolaires.

Artigue et Houdement (2007) ont examiné l'utilisation des termes « situation » et « problème » au niveau élémentaire dans différentes périodes de l'enseignement des mathématiques en France. Selon elles :

> In the 1945 syllabus, the word problem refers to word-problems tightly connected to the daily life or to professional questions [...] Problem solving is an individual task serving to test and reinvest in specific contexts the already taught mathematical knowledge, and also to show students the usefulness of mathematics in their ordinary and professional lives. [...] They are essentially numerical problems and their complexity depends on the number of operations involved in finding the result. […]
>
> The program of 1970, inspired by the New Maths, breaks with this utilitarian vision of the problem solving and mathematics at primary school, considered as an obstacle to mathematical understanding. The word problem disappears from the text of the syllabus but is still present in the comments, associated with the following action: deducing new information from known information. The term situation seems to be preferred to the term problem, but not with the meaning given to it later in the TDS. A situation denotes here a context familiar to the students. Situations are given a double didactical functionality: they serve to « motivate the introduction of new notions » and also to « apply properties or relations previously established by the students ». For the first time, methodological elements are included in the syllabus, describing steps in the solving process such as: « analyze the situation, extricate chains of

elementary situations, and schematize them to put in evidence the mathematical relations describing them ». […]

The rejection of the abstraction of the New Math period revolutionizes problem solving with the emergence of a new idea, that of situation-problème (problem-situation in the following), which appears in the syllabus in 1978 (grades 2 and 3). The new expression is indeed used for supporting the introduction of more open and real problems, potentially a source of many different questions, not only strictly mathematical questions. These questions can generally have many different answers and their solution requires looking for additional information. [...] The syllabus makes explicit three different roles given to problem-situations in the learning process: approaching and building new mathematical tools, reinvesting previous experiences, expressing the creative power of one's self and testing reasoning modes (in more complex problem-situations), and it also emphasizes the fact that working on complex problem-situations is not only an individual task. (Artigue & Houdement 2007 pp. 369-370)

Dans le cas hongrois, le mot « problème » (probléma) apparaît parfois dans les textes théoriques, mais est très rarement utilisé dans les manuels scolaires ou dans les livres du maître pour désigner un énoncé concret. On utilise surtout le mot « tâche » (feladat) comme terme général, et dans certains cas le mot « exercice » (gyakorlat). Au niveau élémentaire, on trouve en outre souvent le terme « jeu » (játék) ; on ne voit cependant pas d'expression correspondant au terme français « situation ».

Varga semble utiliser le mot « problème » dans un sens large, similairement à Pólya[100] : une question qui présente une difficulté, car on ne dispose pas d'outil directement utilisable pour y répondre. Un « problème » dans l'enseignement des mathématiques constitue dans ce sens un cas particulier des « tâches », ce dernier terme désignant toute sorte d'énoncé qui demande une activité des élèves. Un « exercice » est une « tâche » dont on dispose d'une méthode de résolution. Un « exercice » sert à s'entrainer à l'application d'une méthode apprise au préalable – un « problème » demande de construire sa méthode soi-même.

Étant donné cette variété de termes utilisés dans les deux pays, nous ne cherchons pas à fixer une terminologie bien définie. En référant à la théorie de Brousseau, nous utilisons le terme « situation » comme terme technique de la théorie. Nous utilisons le terme « problème » dans un sens large, similairement à Varga ou Pólya (mais cette utilisation nous semble être également cohérente avec celle de Brousseau). Nous gardons par ailleurs les termes utilisés dans chaque texte étudié ; nous allons insérer quelques réflexions, après l'analyse des textes, sur le sens et la pertinence de ces expressions pour nos différentes ressources.

[100] « Solving a problem means finding a way out of a difficulty, a way around an obstacle, attaining an aim which was not immediately atteinable. » (Pólya 1962/1981 p. ix)

3 L'ANALYSE DES MANUELS SCOLAIRES ET DES LIVRES DE PROFESSEURS

Nous nous appuyons sur des sources écrites, avant tout sur des manuels scolaires, des fiches de travail et des livres de professeurs, pour reconstituer des pratiques d'enseignement envisagées par les réformateurs. Il faut souligner que cette reconstruction est loin d'être évidente : les documents donnent des instructions précises sur certains cas et expliquent peu d'autres ; exigent très strictement certains éléments de pratiques d'enseignement, et laissent une grande liberté sur d'autres aspects, restent ambigus ou encouragent explicitement les enseignants à prendre une certaine autonomie.

Notre premier essai d'analyse, chercher des exemples de situations dans ces documents et les étudier directement à l'aide de nos outils théoriques, à échoué rapidement : dans les différents sources, les descriptions des situations prennent des formes radicalement différentes, ne traitent pas les même questions, pas avec le même niveau de détails, et en général, elles sont peu compréhensibles sans leur contexte.

Ces problèmes nous ont amenée à étudier nos sources dans leur intégralité : prendre en compte leur structure, les types de contenus qu'elles comportent, leur introduction et les consignes d'utilisation. Ces analyses permettent de comprendre comment le lecteur (l'élève ou l'enseignant) est censé utiliser le document donné, quelle est la fonction des différentes parties du document, quels sont les points que l'auteur vise à déterminer, et de l'autre côté, où, pourquoi et dans quelle mesure il laisse une liberté au lecteur. Ces questions paraissent intéressantes, bien au-delà de faciliter l'analyse des situations : elles révèlent en fait elles-mêmes des caractéristiques importantes des conceptions des réformateurs.

Nous n'adaptons pas de cadre théorique particulièrement conçu pour analyser les manuels scolaires, bien que l'analyse de ces documents joue un rôle important dans notre travail : une des raisons de ce choix est la trop grande diversité des types de documents que nous utilisons (fiches de travail pour le primaire, manuels scolaires pour le secondaire, livres de professeurs…), l'autre que nous n'avons pas trouvé de cadre particulièrement adapté aux questions que nous nous posons.

4 AUTRES OUTILS THEORIQUES

4.1 Dialectique outil-objet et phases de Douady

Nous servons plus ponctuellement, surtout dans le chapitre 3, des notions introduites par Douady (1986). Partant, d'une approche piagétienne, elle suggère que « l'enseignement doit intégrer dans son organisation des moments où *la classe simule une société de chercheurs en activité* » (Douday 1986 p. 12). Cela signifie avant tout de mettre en place un processus dialectique entre deux aspects, *outil* et *objet* des notions mathématiques.

> […] nous disons qu'un concept est *outil* lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un même outil peut être *adapté* à plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème. Par *objet*, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement. (Douady 1986 p. 9)

Douady appelle *dialectique outil-objet* un processus d'enseignement spécial qu'elle découpe en plusieurs phases :

a) Ancien
b) Recherche nouveau implicite
c) Explicitation et institutionnalisation locale
d) Institutionnalisation statut objet
e) Familiarisation – réinvestissement
f) Complexification de la tâche ou nouveau problème (Douady 1986 pp. 14-21)

Lors de cette dialectique, les *jeux de cadres*, l'articulation des différentes « cadres » (ou des domaines mathématiques) jouent un rôle important.

Le processus ainsi décrit sert avant tout à l'ingénierie didactique et ne peut bien sûr pas être appliqué directement à l'analyse des ressources qui nous intéressent. Il nous fournira pourtant un référentiel intéressant pour caractériser le niveau de complexité des processus d'enseignement que nous trouvons dans les livres de maîtres.

4.2 Paradigmes de géométrie et de probabilités

4.2.1 Les paradigmes de géométrie

Houdement et Kuzniak (2006) proposent d'emprunter le terme *paradigme* de Kuhn pour une utilisation en didactique, et notamment en didactique de la géométrie pour caractériser un ensemble de croyances, savoirs et pratiques correspondantes.

> La fécondité des crises et la genèse des nouveaux problèmes qu'elles ont engendrés ont rendu pour nous nécessaire l'introduction de la notion de paradigme avec le sens que lui donne Kuhn (1962) dans son ouvrage sur les révolutions scientifiques. Nous retiendrons en particulier deux facettes de ce concept.
>
> 1) Le mot paradigme, dans son aspect global, désigne l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Il fixe la manière correcte de poser et d'entreprendre la résolution d'un problème. Dans ce sens, Kuhn parle aussi de matrice disciplinaire qui permet de regrouper les théories et plus généralement les connaissances d'un groupe qui travaille sur le même sujet ;
>
> 2) Dans un deuxième sens plus local, Kuhn utilise aussi le terme de paradigme pour caractériser les exemples significatifs qui sont donnés aux étudiants pour leur apprendre à reconnaître, à isoler et à distinguer les différentes entités constitutives du paradigme global. Cela renvoie à la pratique par les individus de leur champ disciplinaire.
>
> Cette vision présente l'avantage de concilier deux composantes de la formation d'enseignants. Le premier point rappelle l'intégration dans le paradigme des croyances à des savoirs partagés par une communauté scientifique. Le second intègre une perspective d'enseignement du paradigme en faisant référence aux pratiques qui en sont constitutives. (Houdement & Kuzniak 2006 p. 178)

Pour l'enseignement de la géométrie, les auteurs distinguent trois paradigmes, qui sont désignés à l'aide des numéros, mais sans que cette numérotation indique une évaluation ou une hiérarchie. Houdement et Kuzniak insistent sur les différentes façons de concevoir l'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif dans le cadre de chaque paradigme.

Le premier paradigme de géométrie (G1), également nommé « géométrie naturelle »,

> […] a pour source de validation la réalité, le sensible. […] L'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif s'exercent sur des objets matériels, ou matérialisés, grâce à la perception ou la mise en œuvre d'expériences mécaniques réelles comme le pliage, le découpage ou leur pendant virtuel. (Houdement & Kuzniak 2006 p. 180)

Le paradigme de « géométrie axiomatique naturelle » (G2), ne porte pas sur des objets sensibles mais des objets hypothétiques, idéaux, dont les figures sont seulement des représentations, et le raisonnement n'est pas attaché à l'activité mécanique.

> Dans cette Géométrie la source de validation se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible. Mais le problème du choix des axiomes se pose. La relation avec la réalité subsiste encore dans cette Géométrie, dans la mesure où elle s'est constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux. L'axiomatisation proposée est certes une formalisation, mais elle n'est pas formelle car ici la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique qui renvoie à la réalité. […] La Géométrie II peut s'exercer moyennant une axiomatisation partielle, voire des îlots d'axiomatisation. (Houdement & Kuzniak 2006 p. 181)

Le troisième paradigme (G3) est nommé « géométrie axiomatique formaliste ». Dans ce cas

> […] le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique l'emporte. […] Une différence essentielle avec la Géométrie II porte sur la complétude du système d'axiomes : en Géométrie III, l'axiomatisation n'est plus partielle. (Houdement & Kuzniak 2006 p. 181)

Nous retenons la notion de ces trois paradigmes pour caractériser la géométrie enseignée dans la réforme française et hongroise (Chapitre 4). Ils nous serviront à décrire comment les principes épistémologiques de chaque réforme sont traduits en savoirs, techniques et modes de raisonnement dans le cas de l'enseignement de la géométrie : on pouvait voir en effet (Partie II) que les aspects caractérisant les paradigmes de géométrie (intuition, expérience, raisonnement déductif) sont des questions cruciales de l'arrière-plan épistémologique des deux réformes.

4.2.2 Les paradigmes de probabilité

La notion de paradigme était aussi reprise pour la didactique d'autres domaines mathématiques, dont la didactique des probabilités (Parzysz 2011). Parmi des différentes positions épistémologiques traditionnelles concernant la théorie des probabilités, on distingue souvent une « laplacienne » ou « classique », une « fréquentiste » et une « bayesienne ». Parzysz réfère notamment à un article de Henry (2009) qui donne une revue historique détaillée des différentes approches. Ce dernier suggère que

> Laplace a joué pour les probabilités le rôle d'Euclide pour la géométrie. A partir de principes clairement énoncés et de définitions abstraites, il a construit une théorie mathématique dans laquelle il démontre les théorèmes les plus importants pour les applications. (Henry 2009 p. 75)

Henry cite Laplace :

> La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. (cité par Henry 2009 p. 75).

Il s'agit donc, pour l'approche laplacienne, d'établir un modèle théorique basée sur un ensemble de cas équiprobables, et calculer la probabilité des évènements sur cette base. Ainsi, la probabilité d'un évènement est obtenue par une formule simple : le nombre de cas favorables divisé par le nombre de tous les cas possibles.

Les limites de cette approche se situent dans la possibilité d'établir un modèle convenable. En fait, il est très rare qu'on puisse définir un ensemble de cas équiprobables pour un évènement étudié : ces situations apparaissent surtout dans les jeux de hasard (comme le

lancement des dés ou des pièces de monnaie) dont le modèle théorique peut s'appuyer sur des arguments de symétrie.

La conception fréquentiste approche la notion de probabilité du côté de l'observation du réel, et s'appuye pour cela sur la statistique. La probabilité d'un évènement est définie ici comme un nombre approché par la fréquence relative de l'évènement en question lors des expériences répétées. On ramène cette idée à Bernoulli « Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins a posteriori, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables » (Bernoulli, 1713, cité dans Parzysz 2011 p. 129). Pour la théorisation moderne de cette approche, on cite souvent (Henry 2009, Parzysz 2011, Batanero 2015) le mathématicien hongrois Rényi : « Nous considérons […] la probabilité comme une valeur indépendante de l'observateur, qui indique approximativement avec quelle fréquence l'événement considéré se produira au cours d'une longue série d'épreuves. » (Rényi, 1966, cité dans Parzysz 2011 p. 129).

Cette approche est également dite objectiviste :

> « … la théorie mathématique des probabilités ne s'occupe pas de jugements subjectifs ; elle concerne les probabilités objectives, qui peuvent être mesurées comme des grandeurs physiques ». (Rényi 1966) La grandeur en question serait une sorte de degré d'incertitude et l'instrument de mesure, la répétition un grand nombre n de fois de la même expérience aléatoire. (Henry 2009 p. 79)

Une approche subjectiviste est théorisée plus récemment par Bayes. Sans entrer dans les détails de cette approche qui n'existait pas encore dans la période que nous étudions, nous citons simplement la description donnée par Carranza et Kuzniak (2008) :

> In the Bayesian approach, a probability is a measure of belief in a certain state of affairs given a certain state of knowledge. Probability is not an intrinsic characteristic of the object but a measure of certainity (a degree of belief), given by a subject to a proposition. (Carranza & Kuzniak 2008 p. 1).

Parzys (2011) reprend les approches laplacienne et fréquentiste pour en proposer une interprétation en termes de paradigmes. Il insiste sur l'analogie avec les paradigmes de géométrie : l'approche fréquentiste correspond à un P1, basée sur l'observation du monde réel et des actions sur celui-ci, alors que l'approche laplacienne constitue un P2, basée sur une modèle théorique et sur des démonstrations mathématiques pour lesquels les expériences ne sont plus objets ou instruments d'étude, seulement des illustrations permettant d'élaborer des conjectures.

Nous nous servons de la notion des paradigmes de probabilité dans notre dernier chapitre, pour caractériser l'enseignement des probabilités chez Varga et dans l'expérimentation de Brousseau.

CHAPITRE 2

L'ANALYSE GENERALE DES PROGRAMMES

Nous commençons notre analyse avec une étude générale des programmes. Nous cherchons d'une part à savoir quels sont les nouveaux éléments du contenu dans chaque pays, considérés correspondants aux mathématiques « modernes » de l'époque. D'autre part, nous essayons de comprendre ce que l'unité des mathématiques, un des slogans principaux du mouvement de réforme signifie dans chacun des cas : qu'est-ce qui assure la cohérence interne des programmes des deux pays ?

Nous n'entrons pas ici dans les détails : ce sera l'enjeu des chapitres suivants. Nous étudions avant tout l'apparition ou l'absence des différents domaines mathématiques, et les grands principes organisateurs de chaque programme, explicitement décrits dans les préfaces ou dans les instructions, ou identifiables dans l'ordre d'apparition des domaines. Cette première analyse nous servira à situer dans leur contexte les trois thèmes choisis que nous étudierons par la suite.

Nous nous référerons pour cette analyse à un tableau comparatif (annexes III.2.1 et III.2.2) récapitulant le contenu des programmes par années scolaires et par domaines. Pour l'école élémentaire, nous avons inséré dans ce tableau les programmes français de 1945, 1970 (« mathématiques modernes ») et 1977, et le programmes hongrois de 1946, 1962 et 1978 (Varga). Pour l'école moyenne, les programmes français de 1960-64 (le premier programme unifié à ce niveau), 1969 (« mathématiques modernes ») et 1977 ; et les programmes hongrois déjà cités (1946, 1962, 1977). Sans analyses détaillées des programmes précédents, ces tableaux permettent pourtant de rendre compte de quelques changements fondamentaux apportés par les réformes de l'époque des « mathématiques modernes ».

1 LA CONSTRUCTION DES TEXTES DES PROGRAMMES

Comme nous l'avons signalé plus haut (Introduction §2.1.3), les programmes des différents niveaux scolaires sont regroupés différemment en Hongrie et en France. En France, les programmes du niveau élémentaire (grades 1 à 5) sont publiés séparément du programme du niveau moyen (grades 6 à 9) : ce dernier étant considéré comme niveau « secondaire » de l'éducation, et associé plutôt au lycée. En Hongrie, les premières 8 années sont considérées

comme de l'enseignement « primaire », et les programmes du niveau élémentaire et moyen apparaissent ensemble depuis 1946, lors de la fondation de « l'általános iskola » unique.

Les textes des programmes français sont généralement découpés en « programme » et « instructions », la première partie récapitulant brièvement le contenu mathématique, la deuxième donnant des instructions mathématiques et pédagogiques plus détaillées pour la mise en œuvre. Les instructions sont souvent constituées de plusieurs différents textes officiels, publiés à différents moments : les programmes de 1969 et 1970 gardent par exemple des instructions générales de 1945 (contenant surtout des considérations pédagogiques) et les complètent avec des commentaires et instructions particulières pour chaque niveau scolaire, détaillant le contenu mathématique des programmes.

Un découpage en programmes et instructions se trouve dans les programmes hongrois aussi, jusqu'aux années 1970. La réforme de Varga rompt avec ces traditions : après un court résumé introductif des principes d'organisation du contenu et des principes pédagogiques, on trouve un texte long et détaillé du programme (65 pages), contenant de nombreux exemples illustratifs[101]. Il n'y a par contre pas d'instructions publiées avec le texte du programme : elles sont intégrées dans les livres du maître officiels[102] (que nous étudierons dans le chapitre suivant).

2 LE CONTENU ET LA STRUCTURE DES PROGRAMMES

2.1 Les programmes français

Le programme du niveau élémentaire de 1945 est encore appelé « calcul », et conformément à son nom, met l'accent sur le calcul numérique et sur l'utilisation des unités de grandeurs de la vie courante, y compris le calcul des aires, des surfaces et des volumes. L'étude expérimentale des figures géométriques simples et les constructions avec des outils divers sont introduites à partir du cycle élémentaire (grades 2-3). Le programme du niveau moyen est varié en fonction

[101] Nous avons inséré dans les annexes (III.2.3) un court extrait de la traduction anglaise du programme de Varga. La traduction est faite d'après une version provisoire du programme et n'est pas entièrement identique avec le programme officiel ; permet en même temps de prendre connaissance avec sa forme de présentation et son style.

[102] Comme on l'a souligné précédemment, la publication des manuels scolaires n'est pas libre en Hongrie à l'époque : la seule collection officielle des manuels scolaires et livres du maîtres est écrit par le même équipe que le programme.

des filières diverses[103]. Au « cours supérieur » du primaire et en classe de Sixième (grade 6) du secondaire, il est encore très concentré à la pratique de calcul et de mesure. En classe de Cinquième (grade 7) du secondaire, il est découpé en « Arithmétique » et « Géométrie », et à partir de la classe Quatrième (grades 8 et 9), en « Arithmétique », « Algèbre » et « Géométrie ». On y trouve entre autres l'étude des fractions, des décimaux, des équations et inéquations au premier degré, les notions fondamentales de la géométrie euclidienne, la notion de vecteur ; la dernière année, la notion de la racine carrée et les équations du second degré ou les notions de la trigonométrie.

Le programme de 1960 (qui ne concerne que le niveau moyen) apporte peu de changement dans le contenu du programme. Ce n'est pas le cas par contre du programme de la réforme des mathématiques modernes. Les changements sont moins importants mais pourtant visibles au niveau élémentaire. Au lieu de « calcul » unique, le texte du programme est découpé en trois parties à partir de la deuxième année : « éléments de mathématique », « exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques », « exercices pratiques de mesure et de repérage ». Le programme du cours préparatoire de 1945 a demandé par exemple les éléments suivants :

> Étude concrète des nombres de 1 à 5, puis de 5 à 10, puis de 10 à 20. Formation, décomposition, nom et écriture. Usage des pièces et billets de 1, 2, 5, 10 francs, du décimètre et du double décimètre gradués en centimètres.
>
> Les nombres de 1 à 100. Dizaines et demi-dizaines. Compter par 2, par 10, par 5. Usage du damier de cent cases et du mètre à ruban.
>
> Exercices et problèmes concrets d'addition, de comparaison et de soustraction (nombres d'un chiffre, puis de deux chiffres, de multiplication et de division par 2 et 5. (Prog. fr. é.é. 1945)

Le programme de 1970 remplace les précédents avec cinq points succincts :

> Activités de classement et de rangement.
>
> Notion de nombre naturel.
>
> Nommer et écrire des nombres.
>
> Comparer deux nombres.
>
> Somme de deux nombres. (Prog. fr. é.é. 1970 p. 3)

On peut voir que le programme est très allégé, parmi les 4 opérations il ne reste que l'addition, et les applications sur les « problèmes » de la vie courante disparaissent également. En même temps, la notion d'ensemble est introduite implicitement, et au lieu de l'étude « des

[103] Nous rappelons que le programme français de ce niveau n'est unifié qu'en 1960. En 1945, il varie en fonction des différents types d'établissement : il existe encore des « cours supérieurs » de l'ordre primaire et plusieurs filières de l'ordre secondaire.

nombres concrets », l'accent est plutôt mis sur la « notion de nombre naturel » et sur les relations entre les nombres.

En effet, comme le soulignent les commentaires officiels :

> L'ambition d'un tel enseignement n'est donc plus essentiellement de préparer les élèves à la vie active et professionnelle en leur faisant acquérir des techniques de résolution de problèmes catalogués et suggérés par « la vie courante », mais bien de leur assurer une approche correcte et une compréhension réelle des notions mathématiques liées à ces techniques.
>
> […]
>
> Des expériences nombreuses, réalisées en France et à l'étranger, permettent dès maintenant l'élaboration d'un programme adapté à un enseignement rénové et accessible aux élèves. Mais la mise en œuvre d'un tel enseignement suppose que tous les maîtres aient pu y être préparés et demande, de ce fait, un certain délai. En attendant qu'une information suffisante soit donnée aux maîtres et qu'un programme entièrement rénové puisse être enseigné correctement dans nos écoles, il a paru indispensable de prendre des mesures provisoires partielles et sans doute modestes mais immédiatement applicables : alléger le programme actuel, en donner une rédaction différente qui réponde mieux aux finalités actuelles de l'école élémentaire, l'accompagner de commentaires qui, sans introduire pratiquement de terminologie nouvelle, annoncent et préparent une rénovation plus profonde et plus satisfaisante. (Prog. fr. é.é. 1970 p. 4)

Les instructions expliquent ensuite comment la notion du nombre doit être introduite sur la base de la notion d'ensemble. Nous revenons sur ce sujet dans le chapitre 3 (§1.1).

Les deux premières années de l'école moyenne, le changement le plus manifeste est l'apparition d'un chapitre « relations », contenant les notions et notations fondamentales de la théorie des ensembles. Selon l'introduction du programme, ce premier chapitre joue un rôle crucial pour assurer la cohérence du programme :

> Les différentes parties du programme sont étroitement interdépendantes et devront être traitées en liaison les unes avec les autres. En particulier les idées de la première partie devront être utilisées dans l'étude de toutes les autres qui en fourniront des motivations et des applications. (Prog. fr. é. m. 1969 p. 13)

Pour le reste, le programme de ces années concerne les domaines de l'arithmétique et de la géométrie, ce dernier par une approche concrète et expérimentale.

Le programme de Quatrième et de Troisième (grades 8 et 9) marquent par contre une rupture importante par rapport aux classes précédentes, et surtout concernant la géométrie :

> À la fin de l'année scolaire, la géométrie, née de l'expérience, devra apparaître aux élèves comme une véritable théorie mathématique ; c'est-à-dire que des faits ayant été admis (axiomes), d'autres en sont déduits (théorèmes). (Prog. fr. é.m. 1969 p. 15)

Les domaines enseignés restent principalement l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie, comme dans les programmes précédents ; ils sont complétés par une révision des notions de

relations au début de Quatrième et avec l'étude des fonctions numériques en Troisième. Mais le contenu change radicalement : en arithmétique et algèbre, il s'agit de construire la structure de l'ensemble des nombres réels ; en géométrie, s'appuyant sur la notion des réels, construire axiomatiquement la structure du plan et de l'espace affine et euclidien. L'enjeu principal est donc d'étudier deux grandes structures axiomatiques, celles des nombres et de l'espace. La priorité accordée à une construction axiomatique se manifeste aussi dans le fait que l'étude des fractions est repoussée à la fin du collège, après l'introduction de l'ensemble des réels ; ou pour donner un exemple de la géométrie, dans la priorité de l'étude de la géométrie affine par rapport à la géométrie euclidienne. Ce type d'organisation prend apparemment en considération la commodité pour une construction axiomatique au lieu de l'utilité pratique ou l'intuitivité des notions mathématiques.

Les différents domaines sont en effet strictement liés l'un à l'autre, dans un ordre hiérarchique : la notion des nombres s'appuie sur celle des ensembles, et la géométrie sur la notion du nombre réel. Le langage ensembliste et algébrique joue également un rôle unificateur dans ce programme.

En ce qui concerne le programme de 1977, le plus important changement par rapport au programme des « mathématiques modernes » est le rejet de l'approche axiomatique ; les domaines du programme précédent restent présents mais avec un allégement important du contenu et de leur dépendance hiérarchique.

2.2 Le programme hongrois

Similairement aux programmes français, les programmes hongrois de 1946 et de 1962 sont constitués de l'étude de l'arithmétique, de la géométrie et de la mesure. Plus précisément, ces programmes ne s'appellent pas encore « mathématiques », mais « calcul et mesure » (számtan-mértan), la géométrie étant intégrée dans la partie « mesure ».

Le programme de 1946 est centré sur l'apprentissage des opérations numériques et sur le calcul de différentes grandeurs, courantes dans la vie pratique : l'étude de la géométrie consiste par exemple majoritairement en calculs de longueurs, d'aires et de volumes, complétés de l'étude de quelques propriétés des figures géométriques, et de quelques construction euclidiennes aux deux dernières années. L'algèbre est limitée à l'étude des équations du premier degré, au grade 8, dans ce programme.

Le programme de 1962 met davantage l'accent sur l'étude de la géométrie euclidienne : aux constructions, aux propriétés des figures, leurs symétries et similitudes. L'algèbre obtient

un peu plus de place, l'observation des propriétés des opérations est attendue dès le début de l'école moyenne. L'étude des fonctions linéaires est également intégrée dans le programme. Les instructions mettent plus d'accent sur la pensée logique, insistent en même temps sur les liens avec la vie pratique, offrent beaucoup d'exemples d'application, et demandent de construire des notions mathématiques à partir de la réalité matérielle.

La réforme de Varga apporte un renouvellement profond du contenu mathématique. Le programme de 1978 regroupe le contenu mathématique en 5 grands thèmes :

- Ensembles, logique
- Arithmétique, algèbre
- Relations, fonctions, séries
- Géométrie, mesure
- Combinatoire, probabilités, statistiques

Il s'agit donc d'un enrichissement et d'une diversification importante du contenu. L'étude de l'algèbre et des relations, des fonctions est renforcée ; similairement à la réforme française, le domaine des ensembles apparaît dans le programme. Mais en plus, Varga introduit aussi la logique, la combinatoire, les probabilités et les statistiques, domaines absents de la réforme française. On l'a vu, il s'agit des domaines principaux de recherche de plusieurs mathématiciens hongrois de l'arrière-plan de la réforme : ce fait peut expliquer l'apparition de ces domaines. Nous étudierons en outre, dans le chapitre 5 (§1.1), des arguments didactiques de Varga pour introduire la combinatoire et les probabilités dans le programme des niveaux élémentaire et moyen.

En comparaison avec la réforme française, on peut identifier certaines tendances similaires, notamment la réduction du rôle du calcul mécanique, une priorité donnée au développement de la pensée et à une construction mathématique des notions. Les références directes à la « vie pratique » et aux applications sont réduits en Hongrie aussi par rapport aux programmes précédents, même si l'introduction insiste sur l'importance maintenu de ces aspects : l'argument principal du décalage des priorités est le rôle croissant des calculateurs et ordinateurs dans tous les domaines de la vie (Prog. h. 1978 p. 7). Cependant, le contenu théorique est beaucoup moins exigeant dans le programme de Varga que dans la réforme française ; il n'est pas question de construire l'ensemble des réels ou une théorie axiomatique de la géométrie, et les exigences en calcul algébrique formel sont moins importantes aussi. L'accent est plutôt mis sur la variété des domaines traités et sur une diversité d'approches pour chaque notion.

Varga souligne en outre que le changement par rapport aux programmes précédents ne consiste pas seulement à introduire des nouveaux domaines, mais aussi à introduire le plus de thèmes possibles dans les niveaux précédents, dans une forme convenable à l'âge des élèves. Ainsi, il remarque par exemple que les probabilités étaient traitées dans les programmes précédents du lycée, mais elles apparaissent désormais dès la première année de l'école élémentaire (Varga 1980 p. 1). Un autre exemple :

> The main ideas of most mathematical disciplines appear rather early, most of them in the first few grades, so far as, and in the way as, they can be motivated to and assimilated by average children of the given age. Thus the approach to numbers through counting and measuring and the early use of the number line suggests some vague idea of the real numbers as early as in grade two, though the existence of irrational ratios only becomes clear six to eight years later. (Halmos & Varga 1978 p. 231)

Les 5 grands thèmes sont présents parallèlement chaque année, tout au long du programme. L'introduction du programme précise plusieurs principes de son organisation. Il s'agit d'introduire les divers domaines du programme dès les premières années, et de revenir sur les mêmes notions mathématiques plusieurs fois dans les années successives pour leur approfondissement progressif[104]. Les différents domaines doivent être articulés. Varga décrit ainsi ces principes dans un article :

> Not only do topics appear soon and run through the whole curriculum, they are also *interwoven* in it, with the intention of being integrated into mathematics as a whole. Like threads in a cloth, they disappear and appear again in various combinations. (Halmos & Varga 1978 p. 231)

Dans sa thèse, Varga détaille l'idée de l'articulation des domaines. Il s'agit des liens variés entre eux, moins hiérarchiques que dialectiques : il n'y a pas un seul domaine qui assure la cohérence des mathématiques étudiées, ils s'alimentent plutôt mutuellement. Ainsi par exemple, la notion d'ensemble remplit un certain rôle organisateur, similairement à la réforme française, mais la notion de fonction est au moins aussi importante : selon Varga, dans ce sens, son programme s'inspire du projet de Félix Klein (Varga 1975 pp. 5-6). L'étude des nombres et de la géométrie s'alimentent mutuellement ; les problèmes de combinatoire et de probabilités motivent l'étude des opérations ou l'introduction des fractions etc. Nous étudierons plusieurs exemples de la dialectique des domaines dans les chapitres suivants.

Un autre principe de la construction du programme est la distinction entre thèmes obligatoires et recommandés, et en outre, entre thèmes obligatoires à traiter et connaissances exigées pour chaque année. Ces distinctions servent d'une part la construction progressive des

[104] Dans la thèse, Varga réfère au livre de Bruner, *The Process of Education*, introduisant le terme d'un « programme spiralé ».

notions, permettent d'accumuler des expériences concernant des notions mathématiques, tout en laissant murir les connaissances pendant plusieurs années avant de les formuler comme savoirs institutionnels. D'autre part, cette construction sert aussi la différenciation, un principe beaucoup mis en exergue dans l'introduction du programme ainsi que dans d'autres écrits de Varga : associée à la diversité des formes de travail (individuel, en petit groupes ou en classe entière), elle doit permettre d'adapter l'enseignement et les exigences aux niveaux variés des élèves.

> The education being centrally organized, with syllabi for each grade valid over the country, they are to be flexible enough to fit the needs of every child in every classroom. For this reason:
> the syllabus for each grade consists of *compulsory* topics to be covered by the whole class, and *suggested* topics for enrichment to be assigned to, or tackled by, only some of them;
> a part of the compulsory topics is summed up at the end of each year in the form of *requirements*, some of which are distinguished from the rest as *minimal requirements*; many concepts and skills not appearing as requirements in the school year where they are first mentioned in the syllabus, get enrolled to them in subsequent years when they are supposed to become ripened. (Halmos & Varga 1978 p. 232)

3 CONCLUSION

En comparant le programme des deux réformes, on peut constater que les ambitions des réformateurs – la rénovation du contenu, la restructuration pour assurer une cohérence interne des mathématiques – sont mises en œuvre dans les deux cas, mais pas exactement dans le même sens.

Les programmes précédant la réforme montrent beaucoup de similitude : ils traitent principalement l'arithmétique, la mesure, la géométrie et un peu d'algèbre ; l'accent est sur les calculs numériques avec les grandeurs diverses de la vie courante, et sur l'étude des figures de la géométrie euclidienne. La réforme des deux pays montre certaines tendances similaires de changement par rapport à ces programmes précédents, réduit notamment le rôle des calculs mécaniques pour donner place à une construction mathématique des notions, aux éléments de nouveaux domaines mathématiques et pour mettre plus d'accent sur l'éducation de la pensée. En même temps, dès les analyses générales du programme, nous avons pu identifier des différences importantes entre les deux réformes.

En France, l'enrichissement du contenu consiste surtout en l'introduction des notions ensemblistes et des théories axiomatiques modernes des nombres et de la géométrie. L'unité des mathématiques est assurée par l'appui sur les notions d'ensemble et de relations, par

l'utilisation du langage formel moderne et la méthode axiomatique. Le lien entre les différents domaines est hiérarchique, les notions premières d'une théorie sont basées l'une sur l'autre (et notamment, la notion des nombres s'appuie sur celle des ensembles, les notions fondamentales de la géométrie sont définies à l'aide des nombres).

En Hongrie, les domaines étudiés sont plus variés, cependant les théories mathématiques sont moins développées dans le programme de la réforme. Le principe organisateur du programme est un développement spiralé des notions, créant une articulation dialectique entre les domaines. Au lieu d'une hiérarchie, l'accent est plutôt mis sur la diversité des approches pour chaque notion, où les différents domaines se nourrissent mutuellement.

Dans la suite, nous examinerons de plus près, sur quelques exemples, comment sont mis en œuvre ces principes organisateurs : comment chaque programme construit la notion de nombres (Chapitre 3), comment ils organisent l'étude de la géométrie (Chapitre 4) et quelle est la fonction de la diversité des domaines dans le programme de Varga (Chapitre 5).

CHAPITRE 3

L'INTRODUCTION DE LA NOTION DE NOMBRES AU DEBUT DE L'ECOLE ELEMENTAIRE

Notre premier exemple s'inspire des travaux de Christine Chambris : elle montre (Chambris 2008, 2010) comment la notion de nombres est articulée avec celle des grandeurs dans les programmes français de l'école élémentaire avant 1970, et comment cette articulation a marqué une rupture avec la réforme des mathématiques modernes. Chambris étudie surtout le cours élémentaire (grades 2 et 3) ; nous nous concentrerons sur le cours préparatoire (grade 1), au tout début de l'éducation obligatoire, pour montrer comment la notion de nombres naturels a été construite sur celle d'ensembles dans le programme français de la réforme. En comparaison avec la construction du programme hongrois, nous trouverons des points communs, mais également des différences significatives, le programme hongrois suggérant une double introduction de la notion de nombres, basée à la fois sur les ensembles et sur la mesure.

Nos ressources pour ce chapitre sont des programmes et des instructions officielles, des fiches de travail et des livres du maître. Les fiches de travail remplacent pour l'école élémentaire, très souvent dans cette période, les manuels scolaires : elles servent d'une part pour l'activité autonome des élèves, d'autre part elles doivent être intégrées, selon les instructions des livres du maître, dans des processus d'enseignement plus complexes, utilisant différents instruments pédagogiques et des méthodes actives. (Tout cela ne signifie pas que ces pratiques ont été nécessairement suivies par les enseignants : en France par exemple, souvent ils n'ont utilisé que des fiches de travail et ne connaissaient même pas les suggestions des livres du maître[105]. Mais nous insistons à nouveau sur le fait que notre étude ne concerne pas les pratiques ordinaires ; nous nous intéressons ici aux pratiques suggérées par les concepteurs des réformes et des auteurs des manuels.)

Pour la Hongrie, comme nous l'avons déjà signalé plus haut, il existe une seule série officielle de fiches et de livres du maître, écrite par la même équipe que le programme. Les livres du maître servent également d'instructions pour le programme. Pour la France, nous devions choisir parmi de nombreuses séries. Nous étudierons avant tout la série d'Eiller, intitulée « Math et Calcul », une série très utilisée à l'époque (Chambris 2008 p 515) ; elle est

[105] Information fournie par Jeanne Bolon et Alain Kuzniak.

particulièrement intéressante aussi pour ses livres très structurés, détaillés et informatifs. Pour l'étude des fiches, nous prenons en considération la collection dirigée par Nicole Picard, chargée de recherche à l'IPN à partir de 1965, membre de la commission Lichnerowicz et ayant un rôle important dans l'introduction du nouveau programme de l'école élémentaire (Bolon 2012). Enfin, nous étudierons la série ERMEL, une édition de l'INRP qui apparaît à partir de 1977, et qui est un guide d'enseignants basé sur des expérimentations étendues : elle nous permettra de comprendre le sens des changements des pratiques envisagées qui émergent dans les années 1970 comme réaction à la réforme.

Après l'analyse écologique des programmes, des fiches de travail et des livres du maître (§1), nous nous intéresserons de plus près aux livres du maître mentionnés français (§2) et hongrois (§3). Nous étudierons d'abord leur introduction et leur structure, ensuite quelques situations décrites dans ces livres. Nous chercherons ainsi à caractériser les pratiques pédagogiques envisagées par les auteurs. Nous nous intéresserons particulièrement à la nature de l'autonomie et de la responsabilité dont les élèves doivent disposer dans le processus d'apprentissage selon ces ressources : nous faisons l'hypothèse que derrière le terme de « méthodes active » sur lequel insiste chacun de ces textes, se cachent des pratiques relativement différentes de ce point de vue. Nous nous appuierons sur les notions d'*adidacticité* et de *contrat didactique* de la TSD pour cette analyse. Nous nous référerons parfois également aux phases définies par Douady.

Nous nous intéresserons en outre au rôle de l'enseignant, dans la classe mais aussi dans la conception des processus d'enseignement. En effet, l'étude des livres du maître révèle des différences importantes sur ce point : les textes donnent beaucoup d'indications aux maîtres concernant les pratiques souhaitées. Les différents livres ne mettent pas l'accent sur les mêmes aspects de l'activité de l'enseignant : il est donc intéressant d'observer quelles sont les questions traitées dans chaque livre, celles qui n'est pas discuté (restant ainsi à la charge de l'enseignant), et quelles sont des raisons de ces choix. C'est en outre sur ce point que l'analyse de l'introduction et de la structure des livres nous sera utile. Pour caractériser le travail de l'enseignant, nous nous servirons également des *niveaux* définis par Margolinas.

1 L'ANALYSE ECOLOGIQUE DES PROGRAMMES : LA NOTION DE NOMBRE ET LES GRANDEURS

1.1 Les programmes français

Chambris montre dans sa thèse (Chambris 2008) que le lien entre nombres et grandeurs, deux domaines étroitement articulés dans les programmes français avant 1970, a été rompu avec la réforme des « mathématiques modernes » dans l'éducation élémentaire. Depuis les années 1930 et jusqu'à la réforme, la notion des nombres, le sens et les techniques des opérations sur les nombres s'appuyaient fortement sur l'étude des grandeurs : par exemple, les opérations numériques sont souvent ramenées aux opérations sur les longueurs, et l'enseignement de la numération s'appuie sur les unités de mesure. Les « chaînes trophiques » longues et complexes sont construites sur l'articulation de ces domaines. La référence systématique au système métrique a permis de lier l'enseignement des mathématiques aux les pratiques de la vie courante.

La réforme de 1970 élimine ces références aux grandeurs pour l'enseignement du domaine numérique. Le programme jusqu'alors partagé en calcul et arithmétique d'une part, géométrie d'autre part est réorganisé en 1970, et comporte trois parties : numérique, géométrie, mesure (Chambris 2008 pp. 64-65). L'arithmétique est ainsi coupée en deux, le domaine des nombres et le domaine des grandeurs : quelque part, ce sont les domaines du discret et du continu qui sont ainsi séparés (Chambris 2010 p. 11). Il s'agit d'une transformation radicale de l'organisation mathématique : la notion de nombres est désormais basée sur celle de l'ensemble, et elle constitue une structure mathématique abstraite, sans ou avec très peu de références à la réalité physique et aux pratiques quotidiens.

Une des raisons de ce changement a été, selon Chambris, de vouloir « prendre de la distance par rapport aux problèmes suggérés par la vie courante » (Chambris 2008 p. 458). « D'une certaine façon, en 1970, on a essayé d'enseigner les nombres 'sans contexte' en pensant qu'on pourrait ainsi transférer à tous les contextes » (Chambris 2008 p. 537). On y retrouve bien des intentions mathématiques, sociales et épistémologiques identifiés, dans les parties I et II, par rapport à la réforme.

Chambris montre également qu'il y a une certaine réintroduction prudente, à partir de la fin des années 1970, des grandeurs dans l'enseignement des nombres, mais les « réseaux trophiques » denses de l'avant de la réforme, l'articulation riche des deux domaines n'étaient

jamais reprises et par ailleurs, l'arrière-plan théorique, le savoir savant de référence n'était pas rediscuté depuis l'époque des « mathématiques modernes » (Chambris 2010 p. 8).

1.1.1 Le programme de 1970

Si l'on s'intéresse maintenant à l'introduction de la notion de nombres naturels lors de la première année de l'école élémentaire dans le programme de 1970, on voit en effet qu'elle s'appuie purement sur la notion d'ensemble. Comme on a vu dans le chapitre précédent (Chapitre 2), le texte du programme est très succinct, il ne contient que 5 lignes :

> Activités de classement et de rangement.
> Notion de nombre naturel.
> Nommer et écrire des nombres.
> Comparer deux nombres.
> Somme de deux nombres. (Programme 1970 p. 3)

On voit d'une part que le programme du cours préparatoire est limité à l'étude des nombres naturels, et d'autre part que cette notion est précédée par des activités de classement et de rangement, c'est-à-dire des activités liés à la notion d'ensemble et de relations ; bien que ces derniers domaines ne constituent pas de chapitre particulier du programme.

Les instructions donnent plus d'informations:

> C'est par des manipulations nombreuses d'ensembles d'objets que les enfants élaborent peu à peu la notion de nombre naturel. Il est essentiel de bien comprendre que le nombre naturel n'est ni un objet, ni une propriété attachée à des objets, mais une propriété attachée à des ensembles.
> Pour dégager la notion de couleur, qui est une propriété d'objets, on pratique des exercices de classement portant sur des objets variés dont la forme, la matière, la taille... sont différentes, afin de répartir ces objets selon leur couleur.
> […]
> La notion de nombre naturel comme propriété d'un ensemble apparaîtra dans la mesure où l'on pourra établir une mise en correspondance terme à terme entre ensembles. La possibilité d'établir une telle correspondance est indépendante de la nature et de la disposition des objets qui constituent les ensembles. (Programme 1970 p. 7)
>
> *L'emploi systématique de la correspondance terme à terme permet de classer des ensembles et d'attribuer à chaque classe un nombre* : ainsi, la classe de tous les ensembles qui ont autant d'objets que l'on a de doigts dans une main définit le *nombre naturel "cinq"*.
> Cinq doigts, cinq enfants, cinq fruits, etc. ne sont pas des nombres. Le nombre cinq est une propriété *commune* à l'ensemble des doigts d'une main, à un groupe d'enfants, au contenu d'une coupe de fruits.

> Dans le premier exemple, si la correspondance un à un est impossible, il y a plus de portemanteaux que d'enfants ou plus d'enfants que de portemanteaux. On insistera sur le sens des expressions : *autant que, plus que, moins que*. (Programme 1970 p. 8)

La notion de nombre est donc introduite en tant que propriété d'ensembles ; les instructions précisent qu'il faut distinguer clairement cette notion de ses utilisations concrètes sur différents objets. La technique d'identification d'une classe d'ensemble correspondant à un nombre est la correspondance terme à terme.

C'est donc la notion des nombres cardinaux qui est introduite ici. L'aspect ordinal est également évoqué plus tard, bien qu'avec beaucoup moins d'insistance, sous le titre « comparer deux nombres ». La comparaison concerne d'abord l'égalité (et le terme « autant que »), ensuite dans les cas de non-égalité, on introduit les signes >, <, et les termes « plus que », « moins que ». (Cet ordre de présentation n'est d'ailleurs pas impératif : les instructions déclarent dès le départ la liberté de l'enseignant de choisir l'ordre qui lui convient. En même temps, les manuels que nous avons étudiés suivent l'ordre suggéré par le programme.)

Nous proposons ici un organigramme schématique de l'organisation mathématique du programme. Le livre du maître d'Eiller que nous étudierons plus tard offre un organigramme beaucoup plus détaillé (voir annexe III.3.4)

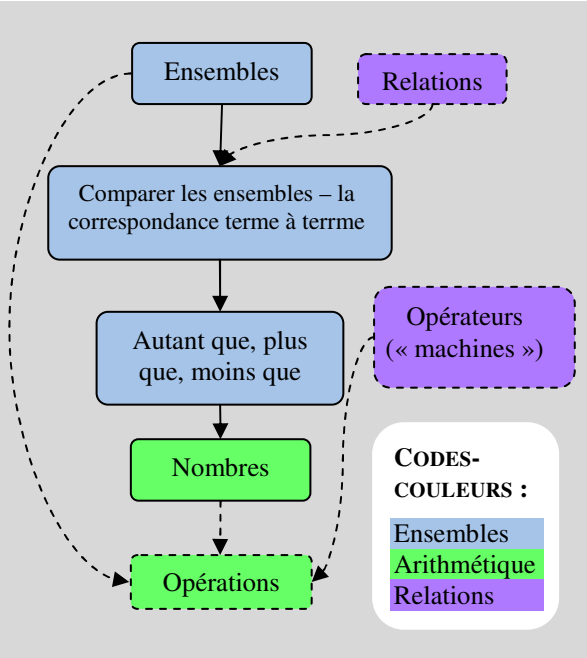


Figure III.3.1 : « réseau trophique » de la notion de nombre dans le programme français. *Nous analysons en détails l'articulation des domaines de la mesure et des ensembles, nous signalons seulement vaguement, avec des flèches pointillées, l'intervention d'autres domaines*

Pour ce qui concerne la mesure, son rôle est réduit dans le programme de 1970 et elle est considérée avant tout comme un champ d'*application* des nombres. Le programme ne traite pas la mesure (ni la géométrie par ailleurs) au cours préparatoire, il demande la pratique de la mesure avec des outils habituels (la règle graduée, la balance, le calendrier) au cours élémentaire, et une étude plus systématique de la mesure des différentes grandeurs, ainsi que le choix des unités au cours moyen.

Selon les instructions, on commence par la comparaison de grandeurs diverses et, « peu à peu, au cours des activités précédentes, va se dégager l'idée que de nombreuses comparaisons

peuvent s'exprimer en utilisant des nombres » (Prog. fr. 1970 p. 33). Les unités de mesure sont d'abord choisies par les enfants.

> La nécessité de la communication des résultats amènera à choisir, pour tous les enfants de la classe, pour tous les groupes d'enfants travaillant en équipe, la même unité. On arrivera ainsi peu à peu à l'utilisation des unités légales. (Prog. fr. 1970 p. 33-34)

On verra qu'en Hongrie, l'étude de la mesure s'organisera similairement, en commençant par la comparaison des grandeurs, puis en passant par la mesure avec des unités arbitraires pour étudier enfin les systèmes de mesure habituels ; mais en Hongrie, cette construction servira à *fonder* la notion des nombres et non à l'*appliquer*.

1.1.2 La notion de nombres dans les fiches de travail françaises

Les fiches de travail que nous avons étudié, de la collection d'Eiller et de Picard, suivent l'organisation du programme pour construire la notion de nombres. Après quelques fiches introductives concernant la topologie, elles mettent l'accent sur l'étude des relations et des classements (voir quelques exemples de fiches dans l'annexe III.3.1). Les fiches 6 et 7 d'Eiller introduisent des notions d'ensemble et d'appartenance : sur la première, il faut entourer des fleurs, des fruits ou des animaux de différents types, et sur la deuxième, il faut décider de différents symboles s'ils appartiennent à un ensemble dessiné. La comparaison des ensembles intervient à partir de la fiche 9 (« Autant que ») et la fiche 11 (Plus que… moins que…), qui demandent l'utilisation de la correspondance terme à terme. La notion de relation apparaît sur les fiches 13 (avec l'exemple des petits des animaux) et 14 (formes et couleurs) : cette notion est ensuite appliquée à la comparaison des ensembles. Les nombres sont introduits sur la fiche 16 comme cardinaux d'ensembles.

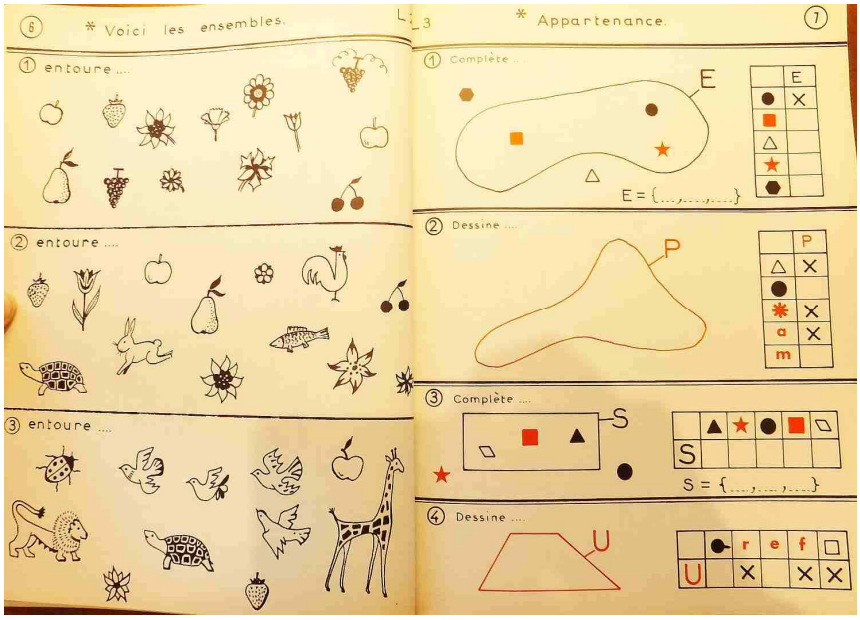


Figure III.3.2 (Eiller fiches gr. 1, 1971 fiches 6 et 7)

Picard suit un processus similaire mais plus lent, laisse plus de place à l'étude des relations, des classements et des comparaisons d'ensembles avant d'introduire la notion de nombres. Elle consacre plusieurs fiches à la correspondance terme à terme, et introduit le signe d'égalité sur l'égalité des symboles, avant de l'appliquer aux ensembles. La fiche 31 introduit un nouvel outil de représentation, les colonnes graduées : il faut colorer autant de cases qu'il y a d'éléments de l'ensemble en question. Cette représentation aide ensuite, sur la fiche 32, à comparer les cardinaux de deux ensembles : le nombre des cases colorées est directement comparable en dessinant les deux colonnes l'une à côté de l'autre. Suite à la fiche 33, traitant la notion « autant que », les nombres apparaissent à partir de la fiche 34.

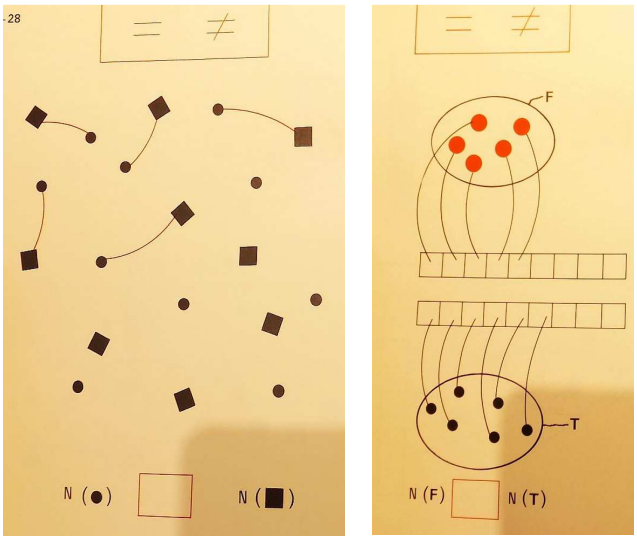


Figure III.3.3 (Picard fiches gr. 1, 1970, fiches 28 et 32)

1.1.3 Le programme de 1977

Le programme de 1977 est un peu plus détaillé et plus structuré que le précédent. Il regroupe le programme du grade 1 dans quatre chapitres : « manipuler et connaître les objets et les collections d'objets », « connaître le nombre », « calculer sur les nombres » et « se situer dans l'espace et l'organiser ». Il accentue donc plus explicitement des activités prénumériques et il donne également lieu à une certaine étude de l'espace (ce dernier chapitre, nouveau par rapport au programme précédent, est pourtant considéré comme un ensemble d'activités qui « ne relèvent pas directement des mathématiques » (Prog. fr. gr. 1 1977 p. 29) et il n'est nullement lié à l'étude des nombres). Mais en ce qui concerne l'organisation mathématique du programme, l'introduction de la notion de nombres reste inchangée.

1.2 Le programme et hongrois

1.2.1 Le programme et le livre du maître

Comme on l'a vu (Chapitre 2, §2.2), le programme hongrois est structuré en cinq grands domaines qui sont présents parallèlement dès le début de la première année. Les ensembles y constituent un domaine autonome avec la logique, bien qu'on souligne que « Le rôle principal de ce domaine est d'établir la cohérence du programme mathématique et de souligner ses liens avec des différents aspects de la vie » (Programme hongrois p. 17). Pour la première année, on y trouve des activités similaires à celles suggérées en France : les classements, rangements d'objets selon différentes propriétés. (Mais, contrairement au programme français, ce domaine reste présent dans les années suivantes.)

La notion de nombre naturel intervient dans le domaine intitulé « arithmétique, algèbre ». Le programme vise à introduire la notion « des nombres comme propriétés d'ensembles et comme des nombres de mesure[106] » (Programme hongrois p. 18). Il s'agit donc d'une double initiation : à la fois par les ensembles, suivant l'esprit des « mathématiques modernes », mais aussi par la mesure. Le livre du maître est encore plus explicite sur cette question : il demande les deux introductions de la notion de nombres en parallèle. Il contient deux sous-chapitres distincts, au sein du chapitre « Arithmétique, algèbre » : un sur la comparaison des grandeurs et de la mesure, l'autre sur la comparaison d'ensembles, la correspondance terme à terme et le nombre cardinal. Nous signalons par ailleurs que l'introduction du chapitre arithmétique cite

[106] L'expression hongroise « mérőszám » faisant référence aux nombres associés à une mesure, elle correspond à peu près à l'expression française « nombres concrets ».

deux extraits de Rózsa Péter, dont l'un de *Jeux avec l'infini*, pour soutenir ses arguments[107] : le livre de vulgarisation de Péter, devient ainsi une référence mathématique et didactique dans un texte officiel.

La mesure est intégrée dans le domaine « géométrie, mesure » du programme. En même temps, le livre du maître insiste sur la différence entre les deux, et sur la rupture avec le programme précédent :

> Il n'y a pas très longtemps, les mathématiques de l'école étaient constituées uniquement de calcul et de mesure jusqu'à la 7e année. Il y a désormais beaucoup d'autres sujets, mais la mesure y reste une partie importante, sous le nom *géométrie*. On ne l'appelle pas géométrie par snobisme mais pour signaler que ce n'est pas le mesurage qui est la partie la plus importante. Du mesurage, on ne parle même pas ici, mais dans le chapitre traitant des nombres. (Livre du maître h. gr. 1 1978 p. 208. Ma traduction.)

En effet, dans le chapitre « Géométrie » du livre, il ne s'agit pas de mesure, mais des problèmes liés aux figures géométriques, aux transformations et à la topologie. La mesure avec la comparaison des grandeurs et des unités de mesure est traitée dans le premier sous-chapitre mentionné du chapitre « arithmétique ».

L'étude de la mesure commence avec la comparaison de grandeurs diverses. C'est ici qu'on introduit les termes « plus » et « moins » (grand, lourd etc.) et les signes >, < ; la notion d'égalité intervient après ces deux derniers, comme un cas particulier de la comparaison des grandeurs. Ensuite suit la mesure avec des unités : bien que les unités du système métrique soient introduites, en première année l'accent ne doit pas être mis, selon le livre du maître, sur la connaissance des unités conventionnelles, mais sur l'expérience variée de la pratique du mesurage avec des unités diverses, arbitrairement choisies (on suggère entre autres de mesurer des longueurs à l'aide des différentes réglettes du matériel Cuisenaire, ou du poids à l'aide de sucres en morceaux). Enfin, pour la mesure des longueurs, on prépare des mètres à ruban qui deviennent une base de la notion de nombre et un modèle de la droite numérique.

Le deuxième sous-chapitre, traitant la notion de nombre cardinal, ressemble plus à l'organisation mathématique observée dans le cas français : on compare des ensembles, on passe par des appariements, de la correspondance terme à terme pour définir l'égalité et les nombres comme cardinaux des ensembles. Comme pour la mesure, et contrairement au cas

[107] La citation, dans sa traduction française : « Pour parvenir à la constitution de cette suite [des nombres naturels], une capacité d'abstraction peu commune était nécessaire. En effet, ces chiffres ne sont que des reflets de la réalité : 3 ne désigne pas ici trois doigts, rois pommes ou trois pulsations artérielles, mais ce qui est commun à tout cela, à savoir la quantité abstraite de chacun de ces objets. Quant aux très grands nombres, ce n'est même pas à partir de la réalité que l'homme les a obtenus : personne n'a jamais compté un milliard de pommes, ni un milliard de pulsations artérielles ; on ne fait qu'imaginer ces nombres par analogie avec les petits nombres discernables dans la réalité. Mais l'imagination, précisément, ne connaît pas de limites en ce domaine. » (Péter 1977 p. 20)

français, les notions « plus que » et « moins que » sont traités avant l'égalité ; les signes >, <, et = sont introduits aussi pour la comparaison des ensembles, peu après leur introduction pour la mesure. La notion de l'ordinaire est traitée par la mise en ordre de grandeurs, mais également par la mise en ordre des ensembles. Enfin, la droite numérique fournit une représentation des nombres qui permet d'articuler les approches différentes.

Nous traiterons plus loin en détails la situation proposée dans le livre pour la création de la droite numérique (§3.2).

On peut donc observer une articulation dense entre les différents domaines mathématiques pour l'introduction de la notion de nombres. Sans entrer dans les détails, nous signalons que les deux autres grands domaines du programme interviennent également dans cette articulation. L'étude de la composition et décomposition des nombres naturels est en lien avec des problèmes de combinatoire, et permet en même temps de donner un sens aux opérations ; les jeux de lancement de pièces de monnaie et de dés (par exemple lancer 5 pièces de monnaie et noter le nombre des piles et des faces) préparent même de futurs problèmes de probabilités, mais ils servent ici comme expériences pour la décomposition des nombres. L'étude des fonctions intervient sous la forme de « jeux de règles » : on essaye de découvrir la « règle » d'une machine, un opérateur simple sur les nombres. (Des « machines » similaires sont par ailleurs proposées par les instructions françaises aussi, en référence aux opérations numériques comme relations, et elles se trouvent également dans les livres d'Eiller).

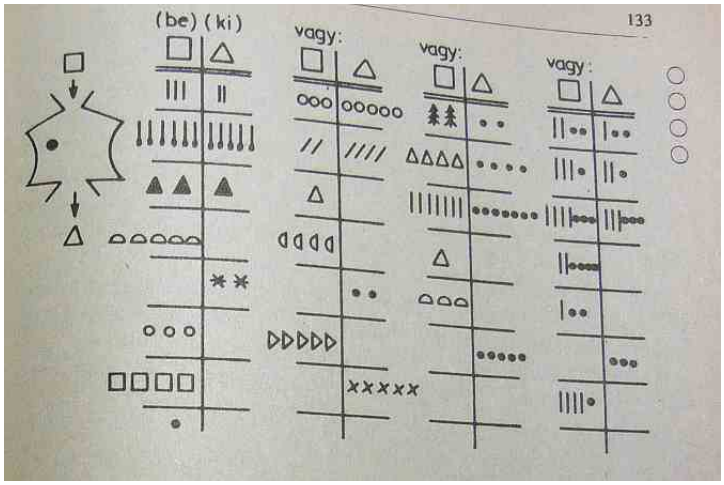


Figure III.3.4 : « jeux de règle » (Livre du maître h. gr. 1 1978 p. 133)

L'organigramme suivant tente d'illustrer le « réseau trophique » établi dans le programme hongrois.

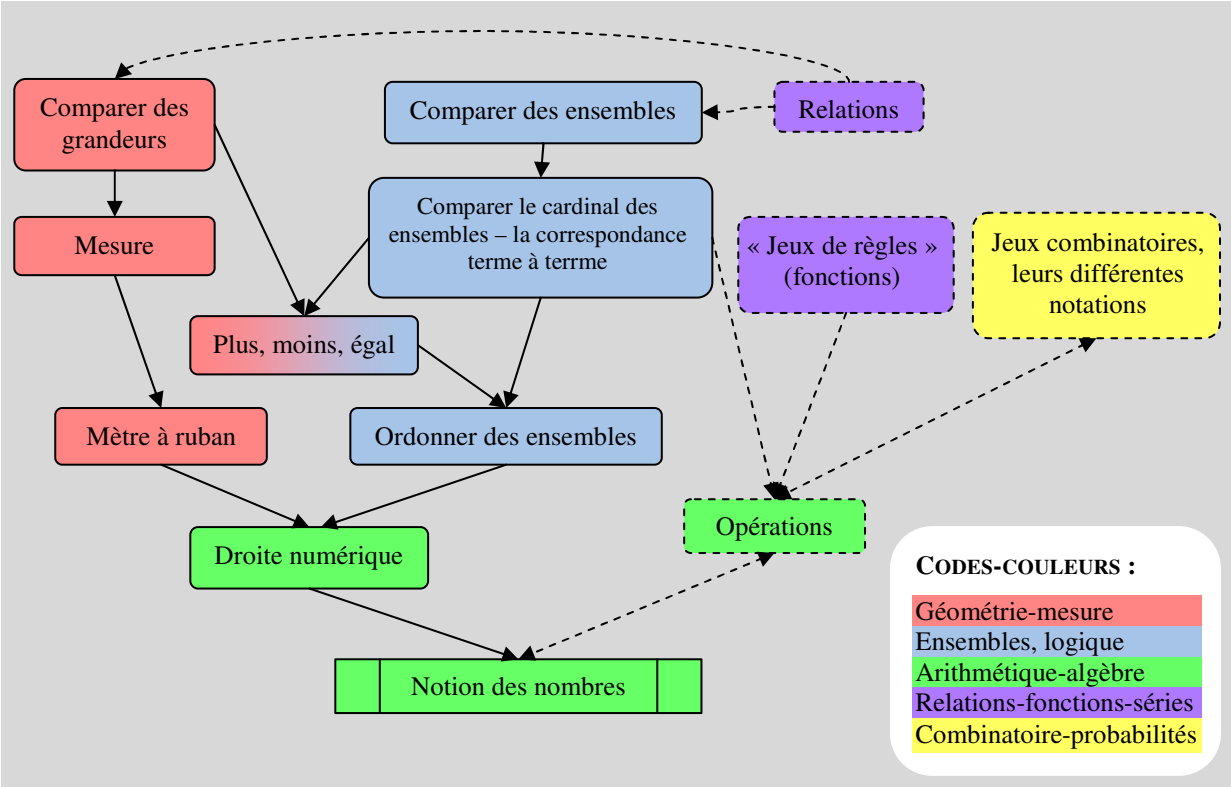


Figure III.3.5 : « réseau trophique » de la notion de nombre dans le programme hongrois. *Nous analysons en détails l'articulation des domaines de la mesure et des ensembles, nous signalons seulement vaguement, avec des flèches pointillées, l'intervention des domaines des relations et fonctions et de la combinatoire*

Une autre caractéristique du programme hongrois est l'ouverture vers les extensions de la notion de nombre : sans introduire d'autres types de nombres, on « fait sentir » aux enfants que cela peut devenir possible, voire nécessaire. Selon le livre du maître, la mesure permet de découvrir par exemple que le résultat n'est pas forcément descriptible exactement à l'aide d'un nombre naturel ; quant à la droite numérique, on fait sentir qu'elle peut être continuée « vers la gauche » aussi, ce qui correspondra aux nombres relatifs.

1.2.2 Les fiches de travail hongroises

On retrouve les traces de cette articulation également dans les fiches de travail associées au programme de Varga. Les onze premières fiches se trouvent dans l'annexe (III.3.2).[108] On peut avant tout observer qu'elles comportent chacune d'une à trois tâches différentes, parfois

[108] Nous remarquons que le recueil contient quatre séries de fiches ; contrairement aux fiches françaises qui sont censées d'être utilisées principalement pour le contrôle du savoir acquis, la majorité des fiches hongroises doivent intervenir, selon les commentaires du livre du maître, dans les processus d'apprentissage, principalement en travail individuel (parmi d'autres types d'activités que nous étudierons plus loin). La première série sert l'introduction et l'approfondissement des connaissances nouveaux pour tous les élèves ; la deuxième série sert à combler des lacunes des élèves plus faibles, la troisième à occuper les élèves plus avancés. La quatrième série remplit la fonction du contrôle (Livre du maître h. gr. 1 1978 p. 363).

connexes, mais parfois liées à des thèmes complètement différents (on verra que cette structure est en lien étroit avec les pratiques pédagogiques suggérées, organisées également en plusieurs courtes activités différentes dans le cadre d'une séance). Ainsi, chacune de ces premières fiches comprend au moins une tâche préparant la notion de nombre, mais on y trouve également d'autres tâches, liées par exemple au thème de la topologie ou aux séries.

La première fiche fait travailler sur des relations et introduit un signe, le tracé, pour indiquer des relations : c'est ce qu'on utilisera ensuite pour les ensembles et la correspondance terme à terme. La fiche 3[109] travaille d'abord la notion d'ensemble, ensuite la notion de grandeurs et l'expression « plus grand que ». Les grandeurs et les ensembles sont traités dans la suite aussi, en parallèle : sur la fiche 4, l'exercice consiste à compléter un tableau avec les dessins plus petits et plus grands que ceux du milieu ; la fiche 7 contient un tableau similaire pour travailler les termes « plus » et « moins [nombreux] ». Les signes > et < sont introduits sur la fiche 5 pour comparer les ensembles ; la correspondance terme à terme sur la fiche 8.

Le lien entre la comparaison des ensembles et la comparaison des grandeurs est établi dès la fiche 9, à l'aide d'une technique de représentation, similaire à celle que l'on a vu chez Picard : les colonnes graduées dont les cases sont remplies de ronds. Elles peuvent être considérées comme ensembles de points, mais on peut également comparer leur hauteur pour décider où il y a plus de points. Cette représentation, objet d'étude pour la première tâche, devient un outil dans la tâche suivante pour la comparaison des ensembles nombreux : les éléments d'un ensemble sont associés aux ronds de la colonne, et il suffit ensuite de comparer la hauteur des deux colonnes pour comparer deux ensembles. Il s'agit d'une représentation transitoire qui aidera à établir la notion de cardinal d'un ensemble, à partir de la fiche 11.

[109] Par erreur d'édition, la fiche 2 manque de l'édition de 1978, la page 2 comprend la fiche 3.

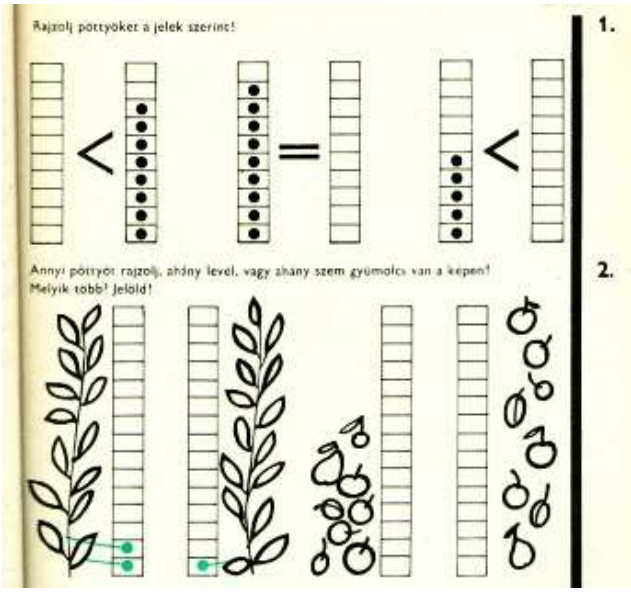


Figure III.3.6 : Fiche 11 tâches 1 et 2 (Fiches h. gr. 1 1978)

La fiche 10 traite la comparaison des ensembles : il faut regrouper les ensembles qui contiennent la même quantité d'éléments. On n'utilise pas encore de chiffres écrits, mais les commentaires accompagnant les fiches suggèrent que les nombres soient prononcés à l'oral. C'est sur la fiche 11 que l'écriture des nombres apparaît la première fois : il faut associer les figures aux chiffres, par l'intermédiaire des colonnes graduées. Nous reviendrons sur cette tâche plus en détail lors de l'analyse des situations (§3.2) La deuxième tâche de cette fiche utilise la droite numérique : ce sera la représentation graphique stabilisée des nombres, utilisée dans la suite également pour les différentes extensions de la notion des nombres. La figure illustre l'articulation des deux approches, « cardinal » et « mesure » : le premier correspond aux pas du petit garçon, le deuxième à la distance parcourue.

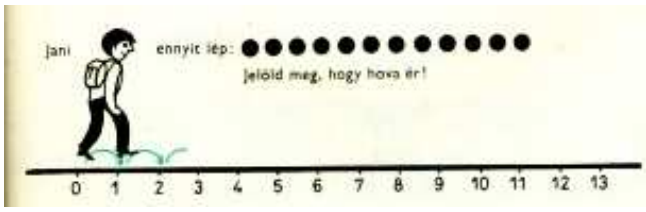


Figure III.3.7 : Fiche 11, tâche 3 (Fiches h. gr. 1 1978)

L'utilisation des colonnes graduées remplies de ronds n'est pas propre à Varga : des représentations similaires apparaissent dans les livres français, chez Picard et chez Eiller aussi. Mais l'apparition de cette représentation est ponctuelle chez les auteurs français, elle sert l'illustration de l'utilisation des signes > et <, mais sans être basée sur une étude systématique des grandeurs (cf. §2.1.2). La particularité de la construction de Varga est l'articulation systématique des deux approches, par les ensembles et par les grandeurs, en partie à l'aide de cet outil de représentation graphique.

2 LES LIVRES DU MAITRE ET LES PRATIQUES PEDAGOGIQUES ENVISAGEES EN FRANCE

2.1 Les livres « Math et calcul » d'Eiller

La série des fiches de travail et des livres du maître « Math et calcul », comme on l'a déjà mentionné, est une des plus utilisées dans les années 1970 et 1980. Apparue juste après la réforme de 1970, elle a été modifiée et rééditée plusieurs fois suite aux réformes successives des décennies suivantes. Cette série nous intéresse aussi pour ses livres de maîtres particulièrement détaillés et bien structurés, en comparaison avec de nombreux autres manuels de l'époque. Ainsi, l'étude des livres d'Eiller permet de donner une image assez détaillée des pratiques d'enseignement envisagées par leur auteur.

2.1.1 La construction des livres du maître

Le livre du grade 1 commence par une première partie concernant les raisons et enjeux de la réforme de 1970. Eiller explique les raisons du changement, « d'ordre mathématique », « d'ordre économique et social » et « d'ordre psychologique » : il inscrit donc son livre très explicitement dans les discours et le mouvement de réforme de l'époque (cf. Partie I §3.2). L'introduction générale comprend en outre une présentation détaillée de la « Psychologie de l'enfant de 5 à 7 ans ».

La deuxième et plus importante partie du livre est intitulée « La mathématique et ses applications pédagogiques », elle traite le contenu du programme et son exploitation pédagogique dans un ordre thématique. D'une part, le titre « la mathématique » au singulier, montre à nouveau un fort engagement pour la réforme (cf. Partie II, §2.1), et suggère par ailleurs une hiérarchisation entre les mathématiques et leur pédagogie, la deuxième étant, selon lui, une application de la première. Cette logique est explicitée dans le premier chapitre, qui est en fait une introduction pédagogique sous le titre « Organisation des activités », traitant la répartition du programme et des méthodes d'enseignement suggérés par l'auteur (voir annexe III.3.3).

La structure de la double introduction est par ailleurs reprise dans les livres du maître des classes supérieures : chacun commence par un traitement de la psychologie de l'enfant de l'âge en question, et par des consignes générales concernant l'organisation des activités. Cette partie introductive est suivie du traitement du contenu du programme dans un ordre thématique, chaque fois avec des explications mathématiques et des consignes très détaillées sur la mise en place pédagogique.

L'introduction : considérations pédagogiques

Nous nous intéressons ici particulièrement à l'introduction pédagogique qui se trouve dans le livre du maître du CP. L'auteur porte avant tout une attention particulière à l'organisation du programme. Un organigramme (outil régulièrement utilisé par les manuels français de l'époque) permet de présenter l'organisation mathématique des notions. La répartition annuelle suggérée est principalement basée sur cette organisation, bien qu'elle ne soit pas entièrement identique (voir annexes, III.3.4 et III.3.5).

A Les thèmes

Pour des raisons mathématiques et pédagogiques, des différentes parties du programme ont été regroupées autour de **cinq thèmes centraux,** et les activités annexes, autour de deux **thèmes supplémentaires**. A chacun de ces six thèmes, on a affecté un ou plusieurs « indicatifs » que l'on retrouve dans les fiches de contrôle.

Thème	Indicatif(s)	Rubriques correspondantes du programme
Exploration et organisation de l'espace	E	
Logique et ensembles	L	① ② ④ ⑤
Relations Applications Opérateurs	R C O *	① ② ④ ⑤
Les nombres et la numération	N	③
Addition. Problèmes et schémas	A P **	① ⑤
Initiation à la géométrie	G	

* La lettre C se rapporte à l'ordre sur les nombres entiers.
La lettre O se rapporte aux opérateurs numériques ou non.
** La lettre A se rapporte à l'addition.
La lettre P se rapporte aux problèmes.

B Répartition

À l'intérieur de chaque thème, il a été rétabli une progression correspondant à l'**enchaînement** des notions qui s'y rapportent. Nous verrons par la suite que la *progression pédagogique ne peut pas toujours suivre l'ordre de filiation théorique des notions mathématiques*.

Ensuite, on ne peut étudier successivement les différents thèmes au cours de l'année, parce qu'il existe des liens entre eux et qu'il faut graduer les difficultés. C'est pourquoi nous proposons aux maîtresses et aux maîtres du cours préparatoire une **progression chronologique** leur permettant d'avancer sur « tous les fronts ».

On pourra bien sûr modifier cette trame et éventuellement se restreindre aux thèmes qui se rapportent strictement au programme. (Eiller livre du maître gr. 1, 1972 p. 25)

On voit donc une réflexion approfondie sur l'organisation, mathématique et didactique, du programme. Le regroupement des thèmes rappelle ce qu'on a vu chez Varga ; ils ont cependant un rapport moins articulé, dialectique l'un avec l'autre, comme dans le programme hongrois, plutôt hiérarchique : la logique, les ensembles, les relations servent l'étude des nombres. La géométrie et la mesure, thèmes qui ne font pas partie du programme officiel du cours préparatoire, sont classées comme « activités d'éveil », « supplémentaires » par rapport aux « thèmes centraux ». Eiller cherche apparemment une certaine articulation, même si elle est seulement ponctuelle, entre nombres et mesure : le chapitre « pratique de la mesure » est

inséré après l'étude des premiers nombres (ce qui permet l'application des nombres pour la mesure, comme le suggère également son organigramme) et de l'ordre des cardinaux ; mais on verra qu'il ne s'agit pas d'une réelle utilisation du concept de la mesure, plutôt d'une illustration visuelle des signes > et < (nous analyserons la leçon en question plus en détails dans le chapitre suivant).

L'organisation didactique, la progression chronologique est élaborée et décrite en détails : elle n'est pas présentée comme obligatoire aux enseignants, mais elle est recommandée, et le livre est construit pour que le lecteur puisse suivre cet ordre sans difficulté. La suite du livre est structurée en « leçons », chaque leçon correspondant à une étape de la progression. Il suffit que l'enseignant cherche dans le tableau les pages indiquées du livre du maître et des fiches de travail, correspondant à l'étape suivante de la progression. En termes des *niveaux d'activité* proposés par (Margolinas 2002), le travail du niveau *constructeur* (+2) est fourni par le livre, l'enseignant est invité à travailler au niveau du *projet de leçon* (+1), voire seulement au niveau de la mise en place de la leçon (0) : on verra que les descriptions des leçons sont souvent assez détaillées pour être utilisées presque immédiatement en classe.

L'introduction comprend également une présentation détaillée des méthodes d'enseignement suggérées par les auteurs. Le chapitre démarre avec une constatation remarquable sur les dilemmes de l'enseignant du primaire :

> A priori, l'enseignant ne peut être que très embarrassé, car il devra élaborer une pédagogie tenant compte à la fois de la nature de la mathématique et de celle de l'enfant. Or, si la mathématique est par essence abstraite et déductive, les psychologues nous apprennent que l'enfant est incapable de raisonnement logique, dépourvu d'esprit de synthèse, et qu'il a sur le monde une vue essentiellement subjective.
> Alors comment faire ?
> […]
> C'est à partir du réel sous toutes ses formes que l'enseignant se propose de faire appréhender par les élèves une loi ou une notion mathématique préalablement élaborée par la pensée adulte. Il sera donc amené à trouver des « situations » à partir desquelles s'exercera l'activité de mathématisation dont nous allons donner une description très schématique. (Eiller livre du maître gr. 1, 1972 p. 30)

Selon Eiller, il y a donc une contradiction fondamentale entre la nature des mathématiques, une science « par essence abstraite et déductive », et la pensée des enfants, psychologiquement incapables de pensée mathématique. Le départ du réel, la « situation » qui permet une activité de mathématisation n'est donc pas l'origine naturelle des concepts mathématiques, mais une construction artificielle à visée pédagogique.

Cette conception épistémologique est radicalement différente de celle de Varga (cf. Partie II §3.1.2), et explique en partie la différence qu'on trouvera dans la gestion des « situations ». Bien que, dans les deux cas, le processus d'apprentissage parte souvent de l'étude d'une situation sensible, « réelle » (comme la manipulation des objets physiques ou le dessin), on verra que Varga les enchaîne et les accumule souvent sans institutionnaliser, alors qu'Eiller les boucle chaque fois par l'introduction d'une nouvelle notion ou des éléments du langage institutionnel. On peut supposer qu'une raison de cette différence est justement dans l'épistémologie différente : pour Varga, la gestion de la situation est une activité effectivement mathématique, au niveau de l'élève – mais pour Eiller, ce n'est pas le cas, et il faut du savoir institutionnalisé pour qu'un réel apprentissage mathématique soit effectué.

Par ailleurs, Eiller précise également qu'il ne s'agit pas, au niveau de l'école élémentaire, de *faire* réellement des mathématiques, seulement d'acquérir quelques notions (Eiller livre du maître gr. 1 1972 p. 30).

Pour l'organisation du travail de la classe, il propose d'alterner des séances de travail en groupes et des « leçons d'acquisition ». Pour ce dernier, il propose aux maîtres « un schéma qui, à l'expérience, s'est révélé le plus efficace ». Il insiste sur l'importance de préciser les intentions pédagogiques, la durée de la séance (45 min. maximum), et de prévoir le matériel nécessaire. Une leçon est censée comporter les phases suivantes :

> **Déroulement de la leçon**
>
> ***Phase manipulatoire***. C'est la phrase d'exploration, de jeu et d'observation où la situation est proposée aux enfants qui manipulent individuellement ou par équipes.
>
> ***Phase orale***. La situation est analysée et des éléments de réponse formulés. C'est à ce stade qu'est généralement introduit le vocabulaire nouveau qu'il convient d'utiliser le plus correctement possible.
>
> ***Phase représentative***. La situation est traduite par les schémas, des tableaux ou des diagrammes qui permettent de mémoriser des concepts.
>
> ***Phase de contrôle***. Le but est de vérifier l'acquisition des connaissances au moyen d'exercices sur des fiches ou à traiter dans le cahier. (Eiller livre du maître gr. 1, 1972 p. 31)

Constituant la partie essentielle du livre du maître, les descriptions des leçons suivent en effet cette conception : elles contiennent chaque fois des rubriques « intentions pédagogiques », et « matériel » ainsi que le « déroulement de la leçon », structurée selon les phases décrites dans l'introduction ; des phases manipulatoires sur des objets physiques sont généralement suivis d'un travail important sur les représentations (voir la description de quelques leçons dans l'annexe III.3.6). Nous remarquons dès maintenant que les phases suggérées ici correspondent relativement bien aux phases décrites dans la TSD (surtout aux deux premières, action et

formulation), bien que leur mise en place soit différente par bien des aspects de la conception de Brousseau, comme on le verra plus loin. En tout cas, les termes de la TSD s'avèreront relativement bien adaptés à l'analyse des « leçons » d'Eiller (et en tout cas beaucoup plus facilement adaptables qu'aux pratiques d'enseignement décrites chez Varga : cf. §3.2).

Nous analysons ici deux « leçons » suggérés par le livre du maître : l'introduction de la correspondance terme à terme, et l'étude de l'ordre des nombres naturels.

2.1.2 Analyse de situations

La correspondance terme à terme, et la notion de « autant que »

Notre premier exemple est la leçon visant à introduire la technique de la correspondance terme à terme et la notion « autant que » (cf. annexe III.3.6). Elle se situe dans le chapitre consacré aux relations des ensembles et aux relations numériques. La notion « autant que » précède celles de « plus que » et « moins que », conformément au programme.

La situation suggérée par Eiller se déroule dans la salle d'éducation physique : le lieu permet un mouvement libre des enfants dans un espace relativement grand. Le milieu matériel est constitué par des cerceaux (« un par joueur »). Les élèves sont invités à vérifier s'il y a un cerceau pour chaque enfant. Selon l'auteur, ils peuvent procéder de deux façons :

- ou bien chaque enfant prend un cerceau en main ;
- ou bien un petit camarade peut tracer un trait entre l'enfant et le cerceau.

S'il y a un cerceau par enfant, on dira qu'il y a *autant* d'enfant que de cerceaux. (Eiller livre du maître gr. 1, 1972 p. 117)

Dans la description donnée, la méthode de vérification n'est pas indiquée clairement : on ne sait pas si elle doit être cherchée par les élèves ou si elle est suggérée par l'enseignant. En tout cas, si la première méthode peut être trouvée par les enfants, la deuxième est peu intuitive ou économique : car elle suppose que les enfants ne bougent pas, à part un élève qui doit faire un travail physique long, introduisant un outil de représentation qui est le dessin, peu transparent et mal adapté à un travail dans l'espace physique. En fait, cette deuxième méthode impose l'idée d'un outil graphique généralement appliqué pour la représentation de la correspondance terme à terme, sans que cette méthode soit une solution idéale, économique et efficace à la question posée. Cette deuxième méthode est reprise dans la suite, où l'exercice est répété avec différentes organisations spatiales des cerceaux et des enfants (et les enfants ne peuvent donc plus bouger librement dans la salle), pour « montrer que la relation '*autant que...*' est indépendante de la disposition spatiale des objets » (p. 117).

Le problème lui-même est assez simple, et sa solution effective est prévue au tout début de la situation : la question « Y a-t-il un cerceau pour chaque enfant ? » invite assez naturellement à prendre un cerceau par enfant. Le reste, la partie essentielle de la situation, bien qu'elle vise à rendre les élèves *actifs* dans le sens physique, n'est en fait pas *adidactique*, car ne demande pas un travail autonome de construction de connaissances. L'activité des élèves sert plutôt comme illustration pour l'introduction de l'expression « autant que » ; et d'un outil de représentation fourni par l'enseignant.

La suite de la leçon sert à « faire sentir intuitivement que la relation 'autant que…' est symétrique et transitive » (p. 116). En effet, un exercice illustre chacune de ces propriétés. Mais à nouveau, il s'agit d'*illustrations* : ce sont des méthodes et outils de représentations, très probablement introduits par l'enseignant, qui doivent faire sentir les propriétés en question, sans qu'ils fournissent une solution idéalement adaptée et économique à un véritable problème. Ainsi, malgré l'activité apparente des élèves, le contrat suggéré par le livre d'Eiller reste d'un type magistral.

Ordre sur les cardinaux, signes >, <, =

Cette leçon se trouve dans le chapitre intitulé « Ordre dans **N** ». Selon la progression annuelle, les notions « autant que », « plus que », « moins que » ont déjà été introduits, les relations d'équivalence et de l'ordre ont déjà été traitées sur les ensembles. Les nombres de 1 à 6 ont été introduits, et la leçon précédente a été une initiation à la mesure des longueurs. Ici, l'objectif est « la découverte de la relation d'ordre dans **N** à partir de la comparaison d'ensembles » et « l'introduction des signes >, <, =, en ayant recours aux 'échelles', en lien avec la mesure » (Eiller livre du maître gr. 1, 1972 p. 168).

Les élèves travaillent individuellement, chacun avec quatre boîtes remplies de différents nombres d'objets (des éléments d'un matériel pédagogique comme le block logique ou le matériel Spira ; 2, 4, 5 et 6 pièces respectivement). Ils doivent tracer des flèches entre les boîtes, de la relation « … *contient plus d'objets que*… » pour la première moitié de la classe, et « … *contient moins d'objets que*… » pour le reste des élèves. L'utilisation des flèches pour décrire une relation d'ordre entre éléments d'un ensemble a été introduite précédemment : il s'agit ici d'un réinvestissement. La correspondance terme à terme a

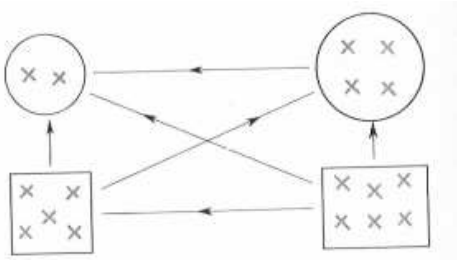


Figure III.3.8 (Eiller livre du maître gr. 1, 1972 p. 168)

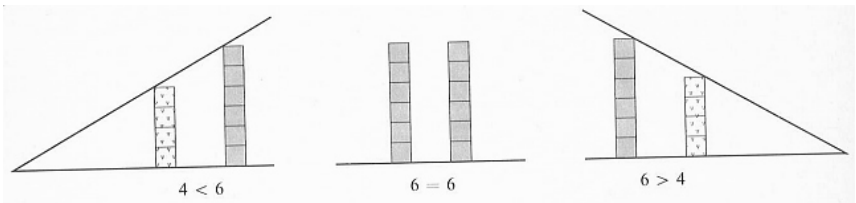
été utilisée pour définir les relations « plus que », « moins que » : on rappelle ici les élèves à cette technique. En somme, il s'agit, dans cette partie de la situation, d'un réinvestissement des techniques utilisées précédemment et la mise ensemble de l'utilisation des flèches avec la comparaison des ensembles.

L'enjeu réel de la situation est la transition des relations d'ordre des ensembles vers les relations d'ordre des nombres. C'est ce qui se passe au cours de l'étape suivante où les boîtes sont fermées, les élèves écrivent sur le couvercle de chaque boîte le nombre de ses éléments, et doivent rétablir les flèches entre ces boîtes. On fait expliquer aux élèves pourquoi un nombre est plus grand que l'autre, en les renvoyant à la correspondance terme à terme.

Il s'agit de nouveau d'une situation s'appuyant sur des « méthodes actives », mais avec un potentiel d'adidacticité très limité. Dans la première étape, il s'agit a priori de techniques de solution déjà acquises, et elles se présentent comme directement transmissibles pour la deuxième étape ; le problème le plus important est probablement un problème de formulation, l'explication des relations d'ordre parmi les nombres.

La partie suivante vise à introduire les signes >, < et =. Nous citons le livre :

> On dispose de deux ensembles d'objets (plus de quatre objets pour chacun d'eux). On veut comparer leurs cardinaux.
>
> - Que peut-on faire ? On peut effectuer les correspondances terme à terme.
> - Peut-on comparer les cardinaux des deux ensembles en se servant des cubes ? Attendre les suggestions des élèves.
> - On pourra superposer sur une grande règle plate autant de cubes qu'il y a d'éléments dans le premier ensemble, puis on fera une deuxième pale comprenant autant d'éléments que le second ensemble. En utilisant une seconde règle plate, on peut aboutir à une « visualisation » des signes <, = >. Voir à ce sujet des figures suivantes :



(Eiller livre du maître gr. 1, 1972 pp. 169-170)

Dans ce cas non plus on ne peut pas parler de réel potentiel d'adidacticité, même pas de réel problème. Pour la question originale, on dispose déjà d'une technique de solution (la correspondance terme à terme) ; la nouvelle méthode sert simplement à la visualisation des signes institutionnels dont l'introduction est l'enjeu de la situation. L'auteur insiste sur le fait qu'il ne s'agit pas d'un réel appui sur la mesure, malgré le lien établi ponctuellement :

> Il importe de noter que l'**on s'est placé dans une situation très particulière faisant appel à la mesure**. Il est bien évident que si l'on opérait avec des blocks de tailles différentes, on n'obtiendrait pas du tout les mêmes résultats. En fait, c'est bien en se servant des correspondances terme à terme que l'on peut comparer les cardinaux de deux ensembles. (Eiller livre du maître gr. 1, 1972 p. 169)

Les colonnes construites à l'aide de cubes ne servent donc pas comme une technique mathématique pour résoudre de problèmes, plutôt comme ostensifs, pour fournir une illustration suggestive, aidant l'acquisition des notations institutionnelles.

En résumé, on peut voir que le livre *Math et calcul* vise à s'inscrire très explicitement dans l'esprit de la réforme des mathématiques modernes, dans la construction du programme ainsi que dans ses méthodes. Il cherche à utiliser des méthodes actives et des instruments pédagogiques divers pour rendre les élèves actifs. Mais cette activité ne signifie pas de réelle responsabilité des élèves dans le processus d'apprentissage : il est en général facile de répondre aux questions posées, grâce aux techniques disponibles – il s'agit souvent de faux problèmes, et le processus de découverte de la solution est étroitement dirigé par l'enseignant. Une grande partie de ces situations visent en fait à introduire des termes ou des notations institutionnelles, et les activités servent plutôt d'illustration au savoir institutionnel, fournit par l'enseignant.

En ce qui concerne les processus d'enseignement en termes de *phase*s de Douady, il s'agit de cycles relativement courts, limités à une séance. La phase « recherche » est simple et courte, on passe rapidement à l'institutionnalisation, et les nouveaux éléments de savoir prennent vite le statut d'objet. Peu de place semble être laissée aux réinvestissements et aux complexifications (bien qu'on ait beaucoup moins d'informations sur les séances en forme de « travail en groupe » indiquées dans l'introduction, mais rarement traitées dans la suite : le livre présente surtout des « leçons »). En fait, chaque leçon apparaît comme une brique autonome dans un processus linéaire de construction du savoir mathématiques : chaque séance aboutit à l'acquisition d'un nouvel élément de savoir qui s'accumulent de leçon à leçon.

La remarque suivant de Brousseau semble être bien adaptée à ce type de contrat :

> Dans les stratégies présentées plus haut, le savoir émis est supposé 'nouveau'. Le savoir ancien ne sert qu'à présenter les conditions de son apprentissage, ou à le construire par superposition et à l'intégrer par une genèse standard donnée par l'organisation culturelle des savoirs. Il correspondrait aux apprentissages que Piaget comparait aux assimilations. (Brousseau 1997 p. 53)

Le travail important sur les différentes représentations, que l'on peut observer ici aussi, est à nouveau caractéristique de l'esprit des « mathématiques modernes ». Chez Eiller, ces

représentations deviennent très souvent objets d'étude pour eux-mêmes, au lieu de fournir un outil efficace pour la résolution de problèmes et pour la construction des connaissances des élèves.

En même temps, le livre semble être un outil facilement utilisable pour les enseignants : la progression annuelle découpe le processus d'enseignement en leçons, et les descriptions des leçons sont assez détaillées pour être utilisées directement. Le contrat du type magistral que le livre suggère aux enseignants permet de guider strictement les séances et éviter une bonne partie des imprévus, tout en assurant une activité aux élèves. Ce fait peut éventuellement expliquer le grand succès de la série.

2.2 Le projet ERMEL

L'ERMEL est une publication particulière, résultat de plusieurs années de recherche collaborative d'instituteurs, psychologues et professeurs de mathématique, conduite à l'INRP à partir de 1972. La publication a pour double objectif de fournir à la fois un bilan des recherches, et une ressource utile aux enseignants du terrain ou en formation (ERMEL gr. 1 1977 p. 6). On a vu (Partie I, §3.4) qu'il s'agit d'un des projets émergeants du mouvement de la réforme, mais qui prend en charge également sa critique et qui cherche à surmonter les impasses de la réforme.

2.2.1 La construction des livres ERMEL

Le livre est structuré en trois parties : la première traite des « aspects théoriques et objectifs pédagogiques » ; la deuxième offre une progression annuelle contenant « la description de l'ensemble des activités qui ont été présentées aux enfants dans le cadre des recherches menées » (ERMEL gr.1 1977 p. 7) : on détaille chaque fois les objectifs, un plan des activités et quelques travaux d'élèves, à titre d'exemple. Enfin, la troisième partie, intitulée « séquences pédagogiques », contient la transcription de quelques séances : ils sont présentés toujours en deux colonnes, la transcription est accompagné des commentaires de l'enseignant.

La progression, comme il est précisé dans l'avant-propos, n'est pas « linéaire » dans le sens où elle ne suit pas l'ordre logique des thèmes mathématiques : « un même thème mathématique est parfois sous-jacent à plusieurs chapitres de la progression et inversement un même chapitre de la progression peut relever de plusieurs thèmes mathématiques » (p. 6). On voit donc, de nouveau, une réflexion sur l'organisation didactique qui n'est pas identique à l'organisation mathématique.

L'ERMEL est similaire à *Math et Calcul* dans le sens où l'on offre une progression annuelle fixée qui peut être entièrement suivie par l'enseignant. En même temps, ERMEL refuse le découpage de la progression en « leçons », suivant un argument remarquable :

> C'est par un choix volontaire que nous avons refusé, et de découper les chapitres de la progression en « leçons », transformant cette partie en un recueil rigide de fiches ponctuelles, et de proposer des exercices de contrôle après chaque apprentissage. En effet, la pratique des classes nous a appris que toute unité prédécoupée contraint plus ou moins les enseignants à la reproduire telle quelle : elle devient alors un *modèle*, ce qui rend plus difficile aux instituteurs une démarche de travail avec la progression. Il nous a semblé plus riche de présenter un ensemble d'activités en précisant le plus possible les buts des diverses étapes.
>
> Le souci de laisser les enseignants définir eux-mêmes leur propre découpage en séquences repose sur d'autre constatations : c'est une façon de permettre à chacun d'adapter le rythme de travail à sa classe […] ; de laisser à chacun une marge d'initiative quant au couplage des activités […]. De plus, nous pensons que cette liberté d'élaboration personnelle qui est laissée aux instituteurs est le lieu d'un travail où chacun est amené à poser et se poser des questions, à saisir des difficultés, invisibles à la seule lecture, à essayer des exercices inédits, à chercher des voies plus courtes ou plus efficaces. (ERMEL gr. 1, 1977 p. 8)

Cette citation montre très clairement comment la structuration de la ressource dépend des choix pédagogiques, et des conceptions des auteurs sur le travail de l'enseignant. Les auteurs du projet ERMEL, participants eux-mêmes à une action-recherche, trouvent plus fructueux de laisser une plus grande liberté, également une plus grande responsabilité à leurs collègues : pas seulement parce que ceci permet une meilleure adaptation aux besoins et caractéristiques de la classe, mais aussi parce que la réflexion autonome et critique de l'enseignant sur son travail leur semble nécessaire pour promouvoir la qualité de son enseignement. C'est dans ce sens aussi qu'ils recommandent ERMEL comme ressource de formation.

> C'est bien une telle attitude que nous avons cherché à provoquer, malgré son ascétisme (il est tellement plus sécurisant et plus facile aussi de distribuer des fiches toutes prêtes !) parce que nous pensons qu'elle seule est réellement formatrice. (ERMEL gr. 1, 1977 p. 8)

Avec les termes des niveaux de Margolinas, ERMEL offre donc la progression annuelle, et économise ainsi le travail au niveau +2 aux enseignants ; il encourage par contre, et laisse en partie à la charge des enseignants, le travail au niveau +1, la préparation des séances. En outre, l'intégration de la troisième partie, la transcription des séquences montre que les auteurs sentent le besoin de réfléchir également du niveau 0, de la gestion concrète de la classe :

> Il nous a semblé important de pouvoir donner une idée de ce qu'on peut attendre des enfants à propos d'une séquence donnée : leurs réflexions, leurs tâtonnements, la façon dont ils s'expriment, etc.
> Nous avons retranscrit également les réponses et consignes de l'enseignant telles qu'elles se sont exprimées spontanément. Il est intéressant de voir sur des exemples comment on peut permettre aux enfants de découvrir et de s'approprier certains concepts. (ERMEL gr. 1, 1977 p. 7)

En effet, on verra que l'ERMEL prévoit une autonomie plus importante des élèves que le livre d'Eiller, ce qui signifie plus d'imprévu pour les enseignants : les transcriptions visent à offrir des illustrations sur les possibilités de gérer ces situations. En même temps, il est précisé qu'on n'offre pas de modèles : « ces leçons n'ont pas été choisies parce qu'elles étaient particulièrement bien réussies » ; « elles sont critiquables comme l'est toute leçon » (ERMEL gr. 1 1977 p. 7). Bien que l'on sente donc l'intérêt de ce travail du niveau 0, on ne propose pas de réflexion *didactique* au-dessus ; on présente des réactions « *spontanées* » des enseignants. Comme le dit Brousseau, on illustre la façon dont l'enseignant « fait fonctionner la machine » (Brousseau 1997 p. 47).

Avant de passer à l'analyse des exemples de situations, il nous semble intéressant de dire quelques mots sur la deuxième partie de l'introduction, intitulée « Objectifs généraux : Initiation au langage mathématique », qui présente des réflexions remarquables sur l'arrière-plan épistémologique du projet ERMEL. Dès le titre, on attire l'attention sur la priorité du langage dans l'approche des mathématiques. En effet, selon les auteurs, « faire des mathématiques, c'est toujours au bout du compte écrire » (p. 10).

Contrairement à Eiller, ERMEL insiste sur le fait que l'on veut faire « faire des mathématiques » aux enfants, qu'il ne suffit pas d'acquérir des éléments de savoir ; « faire comprendre aux élèves ce qu'ils font » en mathématiques est, selon eux, à la fois un projet nécessaire pour leur réussite scolaire sur le long terme, et bien plus ambitieux qu'une acquisition mécanique des techniques opératoires. (p. 14). Les auteurs réfèrent sur ce sujet à Bourbaki, selon qui le réussit en mathématiques nécessite la « fréquentation journalière des êtres mathématiques » (p.11), et citent Bachelard : « La mathématique est une pensée, une pensée sûre de son langage » (p. 15).

Pour les auteurs d'ERMEL, la caractéristique particulière du langage mathématique est qu'il est a priori un langage écrit : contrairement à la langue maternelle où « l'écriture apparaît comme le code second d'une langue qui est déjà présente oralement », « l'écriture n'est pas pour les mathématiques un code second, mais un code unique » (p. 15). L'activité mathématique consiste donc en des transformations successives d'énoncés (p. 10) ; c'est un

travail de « mise en relation des signes » (p. 15), et, en fin de compte, un travail de rédaction, « la mise au net du cheminement qui aboutit au terme souhaité par la voie la plus courte » (p. 11)[110].

On attire l'attention sur le fait que « s'exprimer rigoureusement n'est pas un préalable à l'activité mathématique, mais l'effet d'une telle activité » : que la priorité ne doit pas être donnée aux « leçons de vocabulaire », mais aux activités qui font du « sens » aux énoncés mathématiques et qui amènent progressivement à l'usage du langage mathématique rigoureux. De plus, pour les élèves de CP qui ont encore peu de pratique dans l'écriture, le travail de raisonnement, par ailleurs a priori écrit, peut se faire plutôt à l'oral.

A cette critique des « leçons de vocabulaire » s'ajoute une autre critique, des démarches répandues visant des « méthodes actives » : on peut y reconnaître le type de démarche suivi aussi par Eiller :

> La démarche habituellement choisie consiste à revenir des mots vers les choses, de l'abstrait vers le concret, de fournir à la pensée le support d'une action. Pour de nombreux enseignants, désireux de rompre avec un enseignement traditionnel sans tomber dans l'aridité abstraite de la théorie des ensembles, la légitime méfiance à l'égard du verbalisme et le privilège accordé aux méthodes actives se sont ainsi conjugués pour produire ce qu'on pourrait appeler une « pédagogique du concret ». Dans une telle démarche se trouvent réunies de façon plus ou moins élucidée, une certaine conception de ce que sont les mathématiques (une activité opératoire), une idée du développement intellectuel de l'enfant (une succession de stades ordonnés en fonction des types d'opération qui y sont ou non possibles), enfin une représentation de ce que doit être l'intervention pédagogique (la préparation de situations dans les quelles les enfants puissent exercer l'activité opératoire que leur maturité psychologique leur permet).
> La liaison très fort ainsi établie entre l'exercice d'une pensée et la multiplication d'actions a comporté un risque pédagogique important. On glisse vite d'une pédagogie de l'action sur les choses à une pédagogie du « concret » : comme si, à force de manipuler les jetons bleus et jaunes, à force d'accrocher des étiquettes aux ensembles, à force de relier par des traits chaque élément d'une collection à chacun des éléments d'une autre, le « sens » mathématique de la bipartition, du dénombrement, ou de la correspondance terme à terme allait peu à peu se déposer dans l'esprit de l'enfant. Au CP les trois étapes de toute séquence mathématique bien conduite (et qui sont la manipulation, la représentation, la symbolisation) rejoignent dans la conscience spontanée des enseignants l'idée que les enfants ont besoin comme d'un appui ou d'un tremplin, du « matériel » (réglettes, blocs logiques, jetons, comme jadis des bûchettes) grâce auquel ils construisent leur activité mathématique. (ERMEL gr. 1, 1977 p. 17)

La critique concerne principalement la distinction du « concret » et de « l'abstrait ». On attire l'attention sur le fait que les instruments pédagogiques sont plutôt « abstraits » que

[110] Nous tirons l'attention sur le contraste avec la conception des mathématiciens hongrois étudiés, selon qui il ne s'agit pas nécessairement de chercher « la voie la plus courte », mais la rédaction suit souvent d'autres critères : être facilement compréhensible, intuitif, esthétique, plaisant…

« concrets » dans le sens où la richesse des objets quotidiens y est réduite à quelques propriétés visant à illustrer des notions mathématiques : il s'agit des expériences sensorielles, mais qui ne sont pas nécessairement « concrètes ». La manipulation de ces matériaux, selon les auteurs, peut masquer des notions réellement mathématiques, être insuffisante ou même constituer un obstacle à l'apprentissage si l'enfant confond les objets, la manipulation, et l'opération illustrée. L'ERMEL suggère « non d'abandonner, mais d'élargir la notion de manipulation ». « Manipuler, ce n'est pas seulement manier des objets physiques » ; « manipuler le nombre 20 pour en donner le maximum d'écritures additives, c'est jouer directement avec les symboles » (p. 18). L'accent doit de toute façon être mis, sur l'activité intellectuelle : « faire des mathématiques, avec ou sans blocs logiques » doit être « penser ».

On voit que l'activité, les « méthodes actives » ont ici un sens différent à celui vu dans le manuel ordinaire de l'époque des mathématiques modernes. On garde les cycles manipulation-représentation-symbolisation, on utilise toujours des matériaux, mais l'accent passe de la manipulation physique à l'activité intellectuelle. Il s'agit bien de laisser un rôle actif aux élèves dans la construction de leurs connaissances, et donc de prévoir une certaine adidacticité dans le processus d'apprentissage. On verra grâce à deux exemples concrets comment ERMEL vise à mettre cela en place.

En somme, on peut dire que ERMEL s'inscrit clairement dans l'esprit du mouvement « mathématiques modernes », à la fois du côté mathématique et psycho-pédagogique, dans le sens où il insiste sur « faire des mathématiques », sur « comprendre » et « penser » au lieu des acquisitions mécaniques. On verra également un travail significatif sur les représentations. Il critique pourtant les courants visant prioritairement et excessivement un travail sur le vocabulaire et les symboles au lieu de la pensée : dans ce sens, il adhère aux critiques de la réforme de 1969/70. Il critique également le travail pédagogique trop superficiel des décennies précédentes qui se contente, selon les auteurs, de manipuler des objets ; ERMEL propose une recherche didactique plus approfondie, cherchant la cohérence des ambitions mathématiques et pédagogiques. Mais la priorité accordée au langage écrit, la conception de l'activité mathématique comme *rédaction* et *mise en relation des signes* semble être une position proche du courant français des « mathématiques modernes » (cf. Partie II, §2.1.2), ainsi que des cycles passant chaque fois de la manipulation vers la représentation et les symboles.

2.2.2 Analyse de situations

Distribution de cubes

Cette situation s'inscrit dans le chapitre consacré à la correspondance terme à terme, préparant cette dernière notion en introduisant l'idée de l'équipotence (voir le plan du chapitre dans l'annexe III.3.7). La description de l'activité est la suivante :

> Les enfants sont répartis en groupes de 3 ou 4, et disposent d'une soixantaine de cubes.
> - Phase de jeu libre.
> - Consigne : « Se partager les cubes ».
> - Le maître constate que les parts sont très inégales, s'en étonne et demande aux enfants de trouver un moyen pour que la partition soit plus équitable.
>
> Il faut laisser les enfants s'organiser : la situation seule suffira à sanctionner leur travail.
>
> Par retouches successives on peut espérer qu'ils parviendront à résoudre les différents problèmes qui se posent :
>
> donner un cube à chaque enfant
> choisir un point de départ
> choisir un ordre ... puis un « tour »
> ne pas distribuer le reste.
>
> - L'exigence d'une vérification de l'équipotence des « donnes » introduit aux techniques de correspondance terme à terme. (ERMEL gr. 1, 1977 p. 163)

La situation comprend un réel potentiel d'adidacticité : c'est ce qu'exprime la phrase « Il faut laisser les enfants s'organiser : la situation seule suffira à sanctionner leur travail. » Avec les termes de la TSD, on construit un milieu rétroactif qui provoque l'apprentissage des élèves. La première étape est une rencontre avec le matériel ; la deuxième, le partage des cubes, introduit déjà une consigne, mais insuffisante : elle reste ambiguë, le partage ne signifie pas nécessairement pour les enfants une distribution en quantités égales. L'enseignant modifie donc le milieu en cours de route en complétant la consigne avec l'idée d'équitabilité : cette modification prévue permet de souligner la notion centrale de la situation, l'idée de l'équipotence. Le partage équitable est un problème qui a du sens (pas seulement intellectuel, mais également affectif) pour les enfants, et qui motive la recherche d'une méthode fiable. En effet, dans la transcription de la séance correspondante (pp. 270-277, voir annexe III.3.8), les enfants expriment leur mécontentement du travail de leur camarade et qu'ils trouvent le résultat injuste.

La situation comprend également une phase de validation : ce sera la méthode de vérification de l'équipotence qui amènera à l'introduction aux techniques de correspondance terme à terme, thème principal du chapitre.

En regardant la transcription de la séance, on voit en effet que l'enseignant intervient peu, et que ses interventions se limitent principalement à la dévolution. Par exemple :

> - Comment peux-tu être sûr que tu as donné à tous le même nombre de cubes ?
> […]
> - Comment faire ?
> […]
> Je leur explique qu'ils doivent se débrouiller, sans reprendre de cubes dans la réserve de matériel.
> […]
> - Et si on vérifiait ? Je voudrais, moi, être certaine que vous avez le même nombre de cubes. (ERMEL gr. 1, 1977 p. 272-273)

Ces interventions permettent de préciser les règles du jeu, encourager les élèves à continuer la réflexion, articuler action et formulation, passer d'une phase a l'autre (phase de validation après l'action). Mais la construction de la connaissance visée, des techniques permettant de créer des ensembles équipotents reste à la charge des élèves.

Il s'agit donc d'une réelle situation adidactique, dans son plan ainsi que dans la version réalisée dont la transcription est offerte dans le livre : le rôle de l'enseignant consiste à construire un milieu rétroactif et faire le travail de dévolution ; les connaissances visées sont construites par les élèves, offrant une solution efficace au problème posé. On peut observer une phase d'action et de formulation (les deux ne sont pas distinguées), suivie d'une phase de validation.

Les nombres – désignation des boîtes

Le chapitre 7 du livre traite de l'introduction de la notion de nombre. Il s'agit d'une série d'activités sur des diverses collections d'objets, classées selon leurs cardinaux et rangés dans des boîtes. La désignation des boîtes – des classes de collections équipotentes – permet d'introduire la notion de nombre comme cardinal, et la mise en ordre des boîtes la notion ordinal[111].

Parmi les collections proposées, on trouve par exemple une feuille de 2 gommettes, un sac de 25 jetons bleus, une chaîne de 25 trombones etc. que les enfants classent d'abord selon les critères librement choisis, ensuite selon le critère « autant que ».

L'activité de désignation des boîtes émerge d'un problème soulevé par la situation précédente, notamment le classement des nouvelles collections d'objets. En effet, lorsqu'une

[111] Une situation similaire de mise en ordre des boîtes se trouve d'ailleurs chez Eiller aussi (Eiller livre du maître gr. 1 1972 pp. 170-171).

collection nouvelle doit être mise dans la boîte convenable, il faut trouver cette dernière si l'on ne veut pas faire chaque fois des essais avec des collections de chaque boîte.

La situation précédente a posé le problème de la désignation de chaque boîte.

Quelle solution trouver ?

Certains enfants proposent de se servir des « numéros », c'est-à-dire des symboles de la comptine qu'ils connaissent.

D'autres proposent des symboles permettant un repérage des boîtes (en particulier quand ils ne connaissent pas le « numéro » correspondant).

On s'aperçoit que ce type de signe permet sans répétitions ni omission de faire un essai dans toutes les boîtes, sans pour autant apporter une information quant au contenu de la boîte.

D'autres enfants enfin proposent de sortir une collection et de la fixer sur le couvercle ou de la dessiner sur celui-ci.

N.B. : On retrouve là, la situation de désignation travaillée en début d'année qui consistait, dans le cas d'une partition, à désigner une classe par l'un de ses éléments. (ERMEL gr. 1, 1977 p. 176)

On voit de nouveau une situation portant un potentiel adidactique important. Les élèves se trouvent en face d'un milieu rétroactif, le problème de la désignation émerge lors des interactions avec ce dernier (difficultés de trouver la boîte convenable, annoter des essais déjà effectués), et la technique attendue émerge comme une solution pour ce problème (« On s'aperçoit que ce type de signe permet sans répétition ni omission de faire un essai dans toutes les boîtes »).

Dans une première étape, les annotations ne sont pas institutionnelles : elles sont des choix d'élèves pour résoudre le problème soulevé. Dans l'étape suivante, ERMEL suggère de comparer différents moyens de désignations, leurs avantages et inconvénients, et propose le classement suivant :

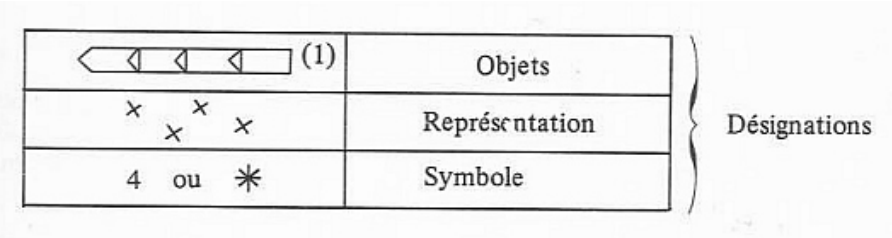


Figure III.3.9 (ERMEL gr. 1, 1977 p. 177)

La distinction porte ici sur différents types de désignations, l'écriture des nombres comme signes institutionnels et les symboles choisis par les enfants apparaissent au même niveau ;

l'institutionnalisation, la stabilisation des écritures de nombres comme signes conventionnels se fera plus tard.

Les situations décrites dans ERMEL sont en effet proches du modèle proposé dans le cadre de la théorie de Brousseau : il s'agit de situations avec un milieu rétroactif, l'interaction de l'élève avec le milieu permet la construction de ses connaissances. Le travail principal de l'enseignant consiste en la construction du milieu, et il intervient peu pendant le déroulement de la situation. On y trouve des phases d'action, de formulation et de validation.

On voit également, dans ERMEL, des cycles plus ou moins conformes aux phases décrites par Douady : les connaissances nouvelles apparaissent comme outils pour résoudre un problème posé, et suivant leur explicitation, deviennent objets d'étude avant leur institutionnalisation comme éléments de savoir. En effet, chaque situation correspond à peu près à un élément de savoir, vise à introduire ce dernier. ERMEL présente quelques séries de situation relativement longues, où l'on transforme progressivement le milieu de départ, et le nouveau problème émerge lors de la résolution du précédent (notre deuxième extrait cité s'inscrit par exemple dans une telle série). Chaque étape de ce processus correspond à un nouvel élément du savoir mathématique visé, et dans ce sens, même s'ils ne suivent pas nécessairement un ordre logique mathématique, ces processus sont « linéaires » (on verra que ce ne sera pas le cas chez Varga).

3 LES LIVRES DU MAITRE ET LES PRATIQUES PEDAGOGIQUES ENVISAGEES EN HONGRIE

Comme on l'a vu, il s'agit dans le cas hongrois d'un guide d'enseignant officiel, écrit par la même équipe de l'Institut Pédagogique que le programme, l'équipe dirigée par Tamás Varga. Le livre rempli à la fois le rôle d'‘instructions officiels' et de ‘livre du maître' (suivant la terminologie française). Le livre publié en 1978, accompagnant le programme introduit la même année, bien que désigné « première édition », n'est pas la toute première version : en fait, pour le programme provisoire, en vigueur à partir de 1974, une version précédente de ce guide avait déjà été publiée. La préface du livre de 1978 indique quelques changements dans sa structure suite aux expériences des années précédentes, pour le rendre « plus transparente et ainsi plus facilement utilisable » (Livre du maître h. gr. 1, 1978 p. 5). On voit donc, ici aussi,

une réflexion explicite sur la structuration d'un livre du maître, en lien avec les possibilités d'utilisation et la conception des auteurs sur le travail attendu des enseignants.

3.1 La construction des livres du maître

Le livre est structuré en deux parties. La première contient « une sorte de description didactique du contenu du programme de l'année », dans un ordre thématique, suivant les cinq grands domaines définis par le programme.

La deuxième partie contient différents documents complémentaires :

- une *proposition* de progression annuelle par semaines
- une *proposition* de progression annuelle par leçons
- la description du plan de quelques séances, *à titre d'exemple*
- commentaires aux fiches de travail
- un tableau d'organisation, présentant un résumé schématique de la répartition annuelle des différents thèmes

Dans l'annexe (III.3.9), nous présentons la copie de quelques pages du livre pour illustrer sa construction : de la première partie, de la progression annuelle par semaines et du tableau d'organisation. Nous proposons aussi la traduction complète de la préface du livre (annexe III.3.10).

Cette accumulation des différentes versions de répartition annuelle pourrait laisser supposer que l'on offre une progression strictement fixée – mais en fait, la situation est justement l'inverse. L'introduction de la deuxième partie souligne : les documents complémentaires n'offrent que des suggestions mais « en général, il en faut dévier suivant les circonstances et « les besoins des enfants » (Livre du maître h. gr. 1, 1978 p. 276). Le texte propose quelques principes pour ces transformations : par exemple, aller plus vite au début avec des élèves plus avancés, ou au contraire, garder plus de temps aux divers expériences manipulatoires si nécessaire ; suivre plutôt l'ordre de présentation proposée pour la construction de la notion de nombres, prendre plus de liberté dans la mise en ordre d'autres thèmes.

L'outil-clé pour la planification de la progression annuelle est le tableau d'organisation de la fin du livre, car il contient « un ordre chronologique de la construction de chaque thème et des liens logiques entre les différents idées » (Livre du maître h. gr. 1, 1978 p. 276). Ce tableau aide également une « préparation thématique » : en effet, les auteurs suggèrent plutôt de se préparer pour des périodes plus longues que séance par séance :

> Á l'aide du tableau d'organisation, on peut adopter une méthode de *planification thématique*. Avant le commencement de chaque thème, cette méthode demande plus de temps que la préparation séance par séance. En même temps, avec une planification thématique, on peut mieux assurer la construction cohérente de chaque thème, l'établissement des liens internes et de ceux entre les différents thèmes, et on peut plus convenablement prévoir des points à souligner. En suivant une telle méthode, la préparation aux séances peut être constituée d'une harmonisation régulière du projet thématique et du processus réel d'apprentissage. (Livre du maître h. gr. 1, 1978 p. 277)

La progression annuelle par leçons est donc peu recommandée, elle est adressée plutôt aux enseignants plus réticents à changer leurs pratiques habituelles et à prendre une plus grande autonomie dans la préparation :

> Nous avons également préparé une proposition de progression annuelle par séances pour ceux qui craignent encore d'abandonner leur méthode de planification habituelle : la planification par séances. Le contenu de cette progression, plus concret, plus abondant et plus détaillé peut également aider des maîtres qui suivent le nouveau programme pour la première fois. (Livre du maître h. gr. 1, 1978 p. 277)

L'apparition de ces diverses versions de la progression peut être interprétée dans le contexte de la transformation du système éducatif, d'un système extrêmement centralisé où les progressions sont prescrites à un niveau national, vers une plus grande autonomie des enseignants. En fait, les auteurs expriment une intention claire de laisser aux enseignants une responsabilité importante dans l'élaboration de leur progression annuelle ; les progressions concrètes proposées sont considérées plutôt comme un outil de compromis entre la vision des auteurs sur la pratique d'enseignant, leurs ambitions formatrices, et les attentes des maîtres du terrain.

La responsabilité laissée aux enseignants du niveau +2 dans la préparation de leur progression apparaît encore plus importante si l'on examine de plus près la construction de la première partie du livre et les liens entre les deux parties. En effet, bien que le programme soit loin d'être linéaire – au contraire, une articulation dense et permanente des thèmes est demandée – la présentation des activités proposées suit, dans la première partie, un ordre thématique. De plus, la progression annuelle par séances, ainsi que quelques instructions du livre, indiquent que les séances ne doivent pas prendre la forme d'une « leçon », mais contiennent chaque fois 3 ou 4 différentes activités courtes, parfois connexes, parfois indépendantes et liées même à différents domaines. En fait, les thèmes divers doivent progresser effectivement en parallèle, suivant parfois des fils d'idées indépendants, mais se croisant de temps en temps dans quelques nœuds.

Dans les progressions proposées, on se réfère aux activités par leur titre (dans les cas rare où il y en a) ou par des mots-clés, et on donne parfois des numéros de pages. Par ailleurs, la

première partie thématique du livre est un texte quasi-continu, mélangeant des commentaires mathématiques et didactiques du programme avec la description des activités ; il n'est structuré que par quelques intertitres, quelques illustrations, et des ronds à la marge indiquant les activités. En fait, cette forme de présentation n'est pas du tout adaptée pour une préparation séance par séance, car il est relativement difficile de repérer une activité dans le texte, et surtout de comprendre ses objectifs et sa place dans la progression sans lire un chapitre entier. Et pour mettre en place le développement parallèle des thèmes, comme demandé, il faut avoir une vue d'ensemble du livre dans son intégralité.

Voici ce que dit la préface du livre de la première partie :

> La description didactique du contenu du programme offre un résumé du contenu mathématique *par thèmes*, et montre aussi des exemples d'activités, de tâches. À l'intérieur de chaque thème, l'ordre des tâches peut en général être suivi dans l'enseignement. Là où c'est possible, nous avons essayé de proposer suffisamment d'activités concrètes pour toute l'année. Dans d'autres cas (par ex. fonctions, phrases avec trous sur les nombres) nous proposons des types de tâches, des formes qui permettent aux collègues de créer facilement des tâches similaires.
>
> En outre, un *titre* est donné à certaines tâches, à celles qui peuvent être reprises plusieurs fois au début de l'année (éventuellement même plus tard).
>
> Un rond plein (●) désigne, sur la marge, les tâches, jeux. Les variations d'une idée de base sont désignées par un rond vide (○). Dans certains cas, des tâches très étroitement liées sont réunies par un seul rond.
>
> Par la formulation des tâches, nous essayons de fournir un modèle au langage concis, simple, parfois volontairement flou que nous suggérons d'utiliser dans l'enseignement élémentaire. (Livre du maître h. gr. 1, 1978 p. 5. Ma traduction.)

On trouve donc un ordre partiel offert par le livre, « à l'intérieure d'un thème », mais qui demande, comme on l'a vu, un travail important de l'enseignant pour en faire un projet complet de progression annuelle. Au niveau des tâches, pour certains thèmes, on en décrit suffisamment pour organiser les activités de l'année, mais parfois il faut faire des sélections et dans d'autres cas, les activités doivent être élaborées par les enseignants, suivant quelques modèles donnés. On a vu aussi qu'une séance ne se limite pas à une situation, mais il faut concilier diverses activités, et y articuler la progression de plusieurs thèmes. C'est-à-dire, pas seulement au niveau +2 mais également au niveau +1 un travail important reste à la charge de l'enseignant. On verra parla suite, lors de l'analyse des situations, que le livre contient aussi un grand nombre de petites réflexions et conseils concernant le niveau 0.

En somme, on peut dire que la réforme de Varga laisse une grande liberté et attend une grande autonomie de la part des enseignants, du planning de leurs projets d'enseignement

jusqu'à la gestion de la classe. Il ne s'agit pas d'un manque de réflexion sur ces différents niveaux, mais bien de choix didactiques conscients : on verra que le livre contient de nombreuses réflexions, petits conseils concernant tous les niveaux, cherchant plutôt à encourager les enseignants à un travail autonome que d'offrir des solutions toutes faites. La tâche que l'on attribue ainsi aux enseignants est assez complexe et demande des compétences mathématiques et didactiques importantes. En outre, on peut voir dans le livre des indices des conflits entre les pratiques ordinaires et celles attendues par le nouveau programme. Les auteurs essayent d'offrir des solutions de compromis aux enseignants ayant des difficultés à s'adapter aux pratiques nouvellement attendues : la complexité de la structure du livre doit en partie sans doute à ces efforts.

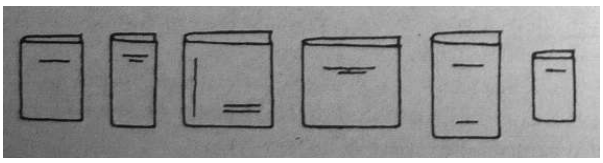
3.2 Analyse de situations

Dans la suite, nous présentons cinq situations décrites dans le livre du maître de la première année, concernant l'introduction de la notion de nombres, soit de la partie 'mesure', soit de la partie 'ensembles'. L'une des situations est liée à une fiche de travail et présentée parmi les commentaires des fiches. Nous essayons garder la typographie originale dans nos traductions, y compris les illustrations et les signes ● et ○ qui indiquent les tâches et leurs variations.

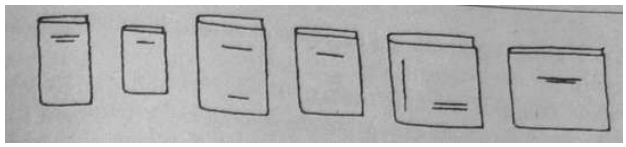
3.2.1 Mettre les objets en ordre

Notre premier exemple se trouve dans le chapitre préparant la notion de nombres à travers de la 'mesure'. Elle fait partie d'une série de petites activités visant à comparer des grandeurs diverses : longueurs, aires, poids, durées etc.

● Les comparaisons peuvent être suivies de la mise en ordre des choses.

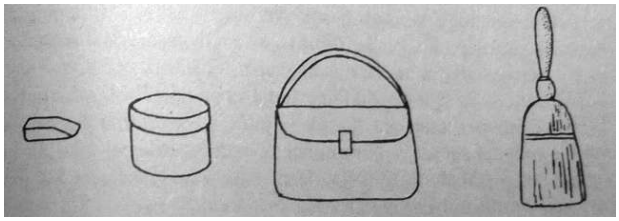


Elles peuvent se faire suivant différents critères. Quelqu'un regarde par exemple l'épaisseur des livres. Pour quelqu'un d'autre, c'est leur « grandeur » qui est le plus important. D'autres rangent peut-être les mêmes livres selon leur poids. Les enfants peuvent aussi observer qu'un livre est plus large, l'autre est plutôt allongé, et les mettent en ordre suivant cette considération.



C'est une tâche intéressante quand les élèves doivent continuer, compléter une série commencée par le maître (ou par un élève) en devinant eux-mêmes la propriété qui a défini l'ordre des premiers éléments.

○ Par exemple tout le monde prend un objet quelconque (un cahier, un crayon, un livre, une gomme, un caillou, une boîte, un sac etc.). Le maître dépose, devant la table par terre ou sur la table, 3 ou 4 objets dans l'ordre suivant :



Les enfants placent leurs objets choisis dans la série. En même temps, ils observent le travail des autres, et le corrigent s'ils ne sont pas d'accord. Ils ne révèlent qu'après avoir créé et corrigé la série quelle règle ils ont suivie. (Ici, par exemple, la hauteur). (Livre du maître h., gr. 1, 1978 pp. 98-99. Ma traduction)

Dès ce premier exemple, on peut observer quelques caractéristiques du style du livre. Il s'agit d'un texte continu, peu structuré ; en fait, il donne souvent des idées de situations partiellement élaborées plutôt que des situations entièrement définies. Dans ce cas, on trouve une série de petites activités plutôt qu'une seule ; il manque des énoncés précis, le déroulement n'est pas toujours détaillé non plus ; par contre, les auteurs donnent plusieurs indications de ce qu'on peut attendre des élèves.

On peut reconnaître une intention claire d'intégrer un potentiel d'adidacticité dans la situation : d'abord le choix des critères d'ordre, ensuite leur reconnaissance sont laissés à la charge des élèves, ainsi que la mise en ordre elle-même. Les situations contiennent une ambiguïté voulue : le problème de la mise en ordre a plusieurs solutions potentielles, et la découverte de la diversité de possibilités est un des enjeux de ces situations. C'est justement cette ambiguïté qui rend le milieu rétroactif : ce sont les désaccords entre les élèves qui les poussent à reconnaître et identifier plusieurs choix possibles, et formuler le leur.

Les activités décrites ci-dessus interviennent dans une série d'activités diverses concernant la comparaison des grandeurs. Il ne s'agit pas tellement d'une situation distinguée pour introduire un élément de savoir, comme on pouvait le voir dans les livres français ; l'accent est plutôt mis sur la diversité des situations associées à une notion.

Ici nous limitons notre analyse aux situations individuelles, mais nous reviendrons sur la question de la structure des séries plus longues dans le chapitre 5 (§2), pour poursuivre ainsi l'étude des processus d'acquisition de savoir dans la conception de Varga.

3.2.2 Devinette avec le matériel cuisenaire

Ce jeu est un autre exemple du même chapitre. Au moment de cette situation, le matériel cuisenaire est déjà connu des élèves : ils l'ont utilisé par exemple pour mesurer les différents

objets, ils ont aussi l'expérience de comparaison des longueurs des réglettes (mais ils n'ont probablement pas fait une mise en ordre exhaustive du matériel). La devinette est par contre un jeu nouveau auquel les élèves ne jouaient probablement pas encore dans la classe. Il s'agit donc aussi, dans le cadre de cette situation, d'un apprentissage des règles du jeu : de son fonctionnement, des stratégies efficaces.

> Ce jeu offre une bonne occasion pour pratiquer la comparaison des grandeurs.
> On cache une réglette, il faut deviner laquelle. Les élèves peuvent poser des questions, telles que « Est-elle plus grande que la violette ? », « plus grande que la bleue ? », « plus petite que la rouge ? ». Ils ont une réglette de chaque couleur devant eux, et peuvent mettre de côté les réglettes qui ne sont plus possibles.
> Un exemple: on cache la réglette noire.
> « Est-elle plus longue que la jaune ? » « Oui. » (Ils mettent de côté la blanche, la rouge, la vert clair, la violette, la jaune.)
> « Est-elle plus petite que la noire ? » « Non. » (Beaucoup peuvent croire qu'elle doit être plus grande que la noire et mettent de côté la noir aussi, en plus de la vert foncé. On peut revenir à ce problème à la fin du jeu ; on peut proposer par exemple de comparer une réglette noire avec une autre noire, et voir si l'une est plus grande que l'autre.)
> « Est-elle plus petite que la bleue ? » « Oui. » (Ceux qui se sont trompé tout à l'heure peuvent maintenant croire avoir trouvé la réponse, et suggérer : c'est la brune qui était cachée. Les autres veulent par contre continuer à poser des questions. Écoutons-les, même si c'était effectivement la brune qui était cachée.)
> Au début, il y aura probablement beaucoup de questions inutiles. Certains élèves peuvent les récuser : si une réglette est plus grande que la jaune, elle est évidemment plus grande que la rouge. Dans ce cas, on peut introduire une nouvelle règle : si quelqu'un sait la réponse à une question, il peut répondre à la place du maître. Plus tard, on peut introduire l'objectif de deviner avec le moins de questions possibles. (Livre du maître h. gr. 1. 1978, p. 99-100. Ma traduction.)

Cette situation nous paraît être un exemple particulièrement intéressant pour étudier le partage des responsabilités entre l'enseignant et les élèves dans le processus d'apprentissage, selon la conception de Varga. Peut-on appeler cette situation « adidactique » ? L'enseignant intervient, car il s'agit d'un dialogue entre le maître et la classe ; mais ces interventions ne sont en majorité pas didactiques. En fait, on peut distinguer deux types d'interventions : les réponses « oui » et « non » de l'enseignant sont définies par les règles du jeu et font ainsi partie d'un milieu adidactique. La responsabilité de l'apprentissage est aux élèves ; la connaissance visée, la mise en ordre des réglettes apparaît comme une stratégie permettant de résoudre le problème posé, deviner la réglette cachée.

L'autre type d'intervention concerne la gestion des réactions d'élèves, pour laquelle le livre donne plusieurs petits conseils : quoi faire quand certains élèves se trompent, quand un

désaccord se produit entre eux. Les suggestions du livre montrent justement à l'enseignant comment on peut transformer la situation en cours, tout en gardant son caractère adidactique : faire avancer le processus, tout en laissant la responsabilité aux élèves. La modification des règles du jeu apporte par exemple une petite transformation du milieu au cours de route.

Il ne s'agit pas des interventions, modifications a priori prévues : c'est un travail au niveau 0, au niveau de la gestion de la situation. Selon les remarques du livre hongrois, l'enseignant doit improviser, réagir aux interventions des élèves – en même temps, cette improvisation ne doit pas être entièrement « spontanée » (comme elle était selon les auteurs d'ERMEL), ni limitée au « fonctionnement de la machine », mais suit apparemment des principes didactiques, et apporte des transformations réelles à la situation. Les remarques sur les réactions possibles d'élèves, les consignes pour leur gestion semblent tendre à initier les enseignants à « l'art » de ce travail, sans définir à l'avance leurs interventions.

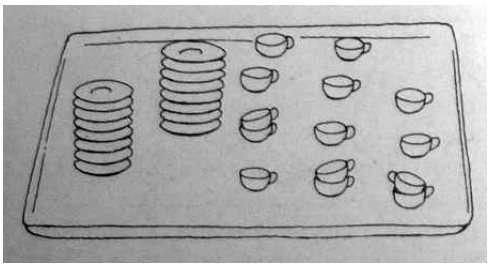
Par ailleurs, comme dans le cas précédent, il ne s'agit pas d'une seule situation, mais de toute une série : le livre suggère de la reprendre plusieurs fois, dans une forme identique ou légèrement modifiée. On voit de nouveau une situation sans phase d'institutionnalisation explicitement demandée par le livre. Elle sert la familiarisation, le réinvestissement des connaissances concernant la comparaison des grandeurs et la notion d'ordre ; elle approfondit en outre la connaissance du matériel, repris encore plusieurs fois dans la suite, et permet aussi un travail en logique, à travers des règles du jeu. De nouvelles connaissances sur la comparaison des grandeurs peuvent émerger à travers les épisodes qui se produisent éventuellement : par exemple la transitivité de la relation d'ordre (« si une réglette est plus grande que la jaune, elle est évidemment plus grande que la rouge ») ou la notion de « pas plus grand que », à travers l'épisode de la réglette noir.

Ce dernier épisode est le seul où le livre semble suggérer une certaine institutionnalisation : notamment, revenir au problème à la fin du jeu, et expliciter qu'une réglette n'est pas plus grande qu'une autre identique. Le problème de la comparaison des réglettes identiques peut amener à la notion d'égalité ; et en effet, directement après le jeu de la devinette, c'est un chapitre sur la notion d'égalité qui suit dans le livre. La situation de la devinette ne vise pas *a priori* à introduire la notion d'égalité ; mais les auteurs montrent comment on peut se servir des épisodes éventuels, des malentendus, des débats entre les élèves pour enchaîner des problèmes et pour guider la classe vers des nouvelles connaissances.

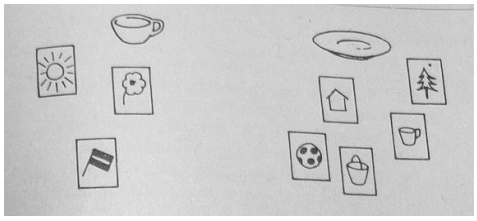
3.2.3 Mettre la table : la correspondance terme à terme

Les activités similaires semblent être des vrais « classiques » à l'époque : elles se trouvent également dans tous les manuels français que nous avons consultés, au moment de l'introduction de la correspondance terme à terme. Dans le livre du maître hongrois, cette situation se trouve, d'une façon similaire, dans la partie introduisant la notion de nombre à travers la notion d'ensembles, et sert à introduire la correspondance terme à terme comme technique de comparaison. Elle est précédée de la comparaison des ensembles de petit cardinal qui pouvaient être comparés par perception directe. Contrairement aux livres français, et similairement au chapitre 'mesure' du livre hongrois, les notions de « plus grand que » et « plus petit que » étaient déjà introduites ; « autant que » apparaît comme un cas particulier de la comparaison, suivant les deux autres notions.

- Sur un plateau, on apporte par exemple des tasses et des sous-tasses (des verres et des assiettes à dessert ; des cuillères et des fourchettes ; des verres et des brosses à dents, éventuellement en lien avec le cours d'études environnementales quand on fait l'apprentissage de la méthode adéquate pour se laver les dents ; etc.). Apportons autant d'objet qu'il ne soit pas facile à déterminer leur quantité par simple perception ou en les comptant. On peut par exemple ranger les assiettes dans une ou deux piles, et les tasses une par une ou deux par deux, à la façon habituelle.



On demande aux enfants à nouveau ce qu'ils pensent, quel ensemble est plus (moins) nombreux : les tasses ou les assiettes. Il est important que tout le monde prenne position. Ils expliquent l'un après l'autre ce qu'ils pensent, ou ceux qui pensent que les assiettes sont moins nombreuses se lèvent, ou bien ils inscrivent leur symbole*[112] sur le tableau magnétique sous les dessins d'une assiette et d'une tasse pour désigner l'ensemble qu'ils jugent le moins nombreux :



Ou, par voie de « scrutin secret », ils dessinent l'objet dont ils pensent qu'il y en a plus.

Comme si cela n'avait rien à voir avec la décision sur le problème précédent, on demande à quelqu'un de mettre la table en mettant une tasse sur chaque assiette. Les enfants seraient surpris ou contents de voir

[112] Á l'école maternelle et au début de l'école primaire, un « symbole », le dessin d'un objet quotidien est attribué à chaque enfant pour identifier leurs objets personnels à l'école.

que par exemple deux assiettes n'ont pas eu de tasses, et formulent même instinctivement la relation désormais vérifiée : eh non, y'a plus d'assiettes ?!
Ils découvrent la correspondance terme à terme comme une méthode pour décider quel ensemble a le plus, et lequel a le moins d'éléments.

* Même plus tard, on peut utiliser ces cartes établies sur une feuille métallique, portant le symbole (plus tard le numéro, le nom ou le monogramme) des élèves. (Livre du maître h. gr. 1, 1978 pp. 112-113. Ma traduction.)

On peut observer dans cette situation le rôle accordé à l'estimation. Varga pense que l'estimation est une compétence importante qui doit être développée en mathématiques[113], et cette situation suit en effet toute une série de comparaisons d'ensembles par estimation (parfois volontairement trompeuses). En même temps, l'estimation joue aussi le rôle de la dévolution : c'est l'incertitude de l'estimation (plus précisément, le résultat ambigu de la phase d'estimation, et les désaccords dans la classe) qui motive les élèves à chercher une méthode fiable pour comparer deux ensembles. En effet dans le livre, un accent est mis sur les méthodes pour recueillir les avis des élèves : plusieurs techniques sont proposées pour permettre que les avis divers apparaissent et que chaque élève s'engage.

On voit, de nouveau, une intention claire de donner un caractère adidactique à la situation, bien que la technique de la correspondance terme à terme soit proposée par l'enseignant. En fait, 'mettre la table' n'apparaît pas, au départ, comme une solution au problème posé, mais comme une activité indépendante (et sans doute familière aux enfants). Ce sont des élèves qui sont chargés d'identifier cette technique comme méthode de solution pour le problème précédent. En fait, il serait éventuellement possible qu'un élève propose cette technique avant l'enseignant, surtout que le milieu, le choix des tasses et des sous-tasses comme ensembles, suggère lui-même l'idée (c'est sans doute la raison pour laquelle les situations similaires qui consistent à « mettre la table » sont répandues) ; le livre suggère toutefois que les élèves doivent être guidés pour faire cette découverte.

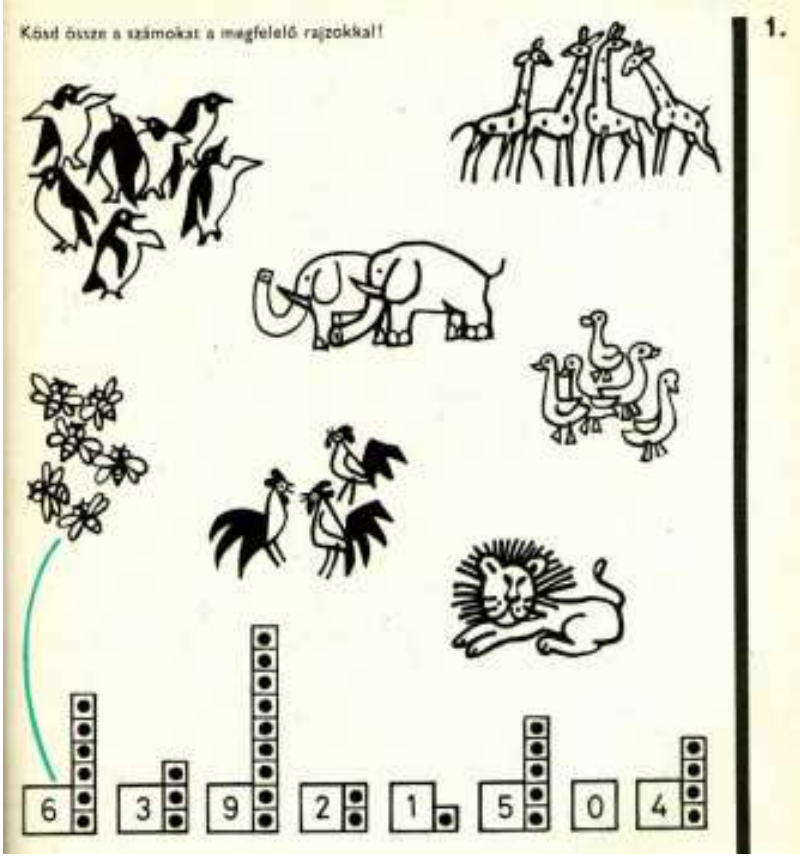
Le contrat que l'on peut observer ici n'est pas tout à fait constructiviste, diffère un peu de celui que l'on pouvait voir dans ERMEL. Le processus d'apprentissage n'est pas entièrement fondé sur l'interaction avec un milieu rétroactif : l'enseignant intervient pendant la situation, transforme et complète progressivement le milieu, mais tout en laissant la responsabilité de la construction des connaissances à la charge des élèves. Nous nommons ce type de contrat *découverte guidée* : nous allons approfondir son analyse avec les exemples qui suivent.

[113] Nous revenons sur cette question dans le chapitre 5 (§1), à propos de l'enseignement des probabilités.

Sans la demander explicitement, la dernière phrase de l'extrait laisse penser qu'une phase d'institutionnalisation doit clore cette fois la situation : la correspondance terme à terme est reconnue par la classe comme une méthode adaptée à la comparaison des ensembles.

3.2.4 La fiche 11 : introduction des signes de nombres

Nous avons déjà évoqué cette fiche dans le §1.2.2 : c'est la fiche où, après l'introduction des colonnes gradués comme outils de comparaison d'ensembles, on accorde les signes des nombres. Les commentaires précisent que les nombres comme caractéristiques d'ensembles, c'est-à-dire comme cardinaux soient introduits d'abord à l'oral : ici, l'enjeu est d'introduire leurs signes écrits.



On attache les nombres aux ensembles d'abord à l'oral, c'est ensuite que les enfants prennent connaissance des signes des nombres aussi. Cette tâche peut être donnée comme travail individuel, même si certains élèves ne connaissent pas encore les chiffres. La correspondance terme à terme entre les dessins et les séries des points accompagnant les chiffres sera la base de la liaison.

Il est bien d'introduire une nouvelle technique de la correspondance terme à terme* : marquer, sur l'image choisie, une figure correspondant au premier point, puis celle correspondant au deuxième point etc. Un grand nombre de traces pourrait rendre le travail trop confus.

C'est la première fiche dans laquelle les élèves rencontrent un élément de tâche avec lequel ils ne savent éventuellement pas quoi faire : ils ne trouvent pas de dessin correspondant au nombre 9, et il n'y a pas de

signe de nombre correspondant à sept dessins. Il est important de les habituer assez tôt à l'idée que toutes les tâches n'ont pas toujours de solution, et elles n'en ont pas forcément qu'une seule. Ils peuvent compléter la tâche par une nouvelle image et par un nouveau signe de nombre s'ils le veulent, ou ajouter 2 pingouins aux 7 qui sont sur la fiche : laissons cela à la charge des enfants. Même l'enfant qui laisse sans paire les éléments sans correspondant a bien résolu la tâche. (Livre du maître h. gr. 1 1978 p. 373. Ma traduction.)

Il s'agit ici d'un travail individuel, où le milieu est constitué par la fiche, avec des figures, les colonnes graduées et les chiffres associés à ces derniers. La fiche sert d'une part à la familiarisation à la notion de cardinal (introduit précédemment à l'oral, selon les commentaires). D'autre part, le nouveau savoir visé consiste dans ce cas en la connaissance des chiffres, des signes institutionnels des nombres : c'est-à-dire, la fiche joue un rôle dans l'institutionnalisation, bien qu'elle soit traitée dans le cadre d'un travail individuel.

Ce qui nous intéresse particulièrement dans cet exemple, c'est le travail presque explicite sur le (macro)contrat : « Il est important de les habituer assez tôt à l'idée que toutes les tâches n'ont pas une solution, et elles n'en ont pas forcément qu'une seule. ». A travers des exemples volontairement ambigus ou erronés, les élèves doivent apprendre à prendre en charge une certaine responsabilité dans le processus d'apprentissage : s'appuyer avant tout sur leur pensée critique au lieu de s'en remettre à l'autorité de l'enseignant et des consignes. Dans le cas de cette fiche, c'est cet aspect où la tâche représente le plus de potentiel adidactique.

3.2.5 Préparer sa droite numérique

Notre dernière exemple est issu du chapitre 'nombres comme ensembles', plus précisément du sous-chapitre intitulé « Ordonner les nombres, ordinal. Relations entre les nombres ». La droite numérique apparaît comme une représentation de l'ensemble des nombres naturels, permettant pas seulement articuler la notion de cardinal avec l'ordinal, mais aussi d'établir le lien entre la notion de nombres comme propriétés d'ensembles et comme « nombres de mesure ».

- On rattache aux expériences précédentes la création de la *droite numérique*. Pour commencer, il est bien d'utiliser une droite numérique dessinée par les enfants eux-mêmes. (Ce n'est pas un problème si cela prend plus de temps.)
  - La première version de la droite numérique peux être préparée sur une bande en carton, environ 20 ou 25 cm longue, qu'on donne aux enfants (ou qu'ils amènent). On dit que cette bande est un chemin où, par exemple, un petit garçon marche. On se met d'accord que les pas du garçon sont toujours aussi longs qu'une réglette blanche du matériel cuisenaire. (Choix de l'unité.) Le garçon part du côté gauche de la bande. (C'est l'origine.) On demande les élèves de marquer le point où le petit garçon arrive après 3 pas. Laissons les élèves mesurer les trois pas à leur propre façon : en mettant 3 réglettes blanches l'une à côté

de l'autre ou en déposant une réglette bleue à l'extrémité gauche de la bande et en marquant l'autre extrémité de la réglette. On leur demande également d'écrire sous ou sur la marque le chiffre 3.

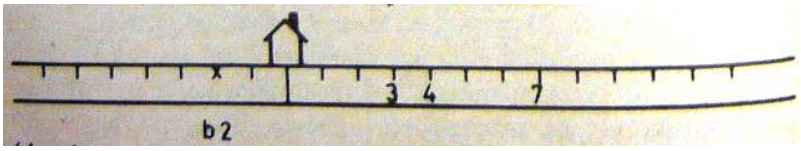
Ensuite, le garçon part de nouveau du début, et il fait par exemple cinq pas. Les élèves marquent cela aussi. On leur demande de marquer respectivement les endroits, où le petit garçon arrive après 1, 2, 3, 4, ... 14, 15, 16, ... pas. (Il n'est pas important de le travailler pendant toute la séance : à la deuxième ou troisième occasion, la droite numérique prendra enfin forme, plus précisément une partie d'elle.) Sur la droite numérique, ils vont retrouver les nombres dans le même ordre que ce qu'ils ont vu dans les cas des rangements.

○ Á une autre occasion, ça sera par exemple un lapin qui sautille sur la bande. Ses sauts sont aussi longs que la réglette rose. Avec ce choix d'unité, une nouvelle droite numérique sera créée ; on marque les nombres cette fois en rouge par exemple.

L'autre côté de la bande peut être utilisée davantage pour préparer d'autres droites numériques, par exemple avec la réglette bleue comme unité.

○ Il est intéressant de préparer encore une version de la droite numérique, dés la première année. Les élèves plient la bande en deux, le point de départ est cette fois au milieu de la bande, une petite maison par exemple. En ce cas, il ne suffit plus de dire que le garçon fait 3 pas, il faut ajouter qu'à droite ou à gauche. Il est souhaitable que ce soient les élèves qui reconnaissent eux-mêmes cette nécessité. Par exemple, on peut commencer à marquer les nombres de la droite numérique comme la première fois : le petit garçon fait 3 (4, 7, 2 etc.) pas à partir de la maison.

Les élèves marquent les pas également sur un dessin au tableau. Par exemple :



(On peut graduer ce dessin à l'avance.)

Si aucun élève ne réclame l'indication de la direction, on peut dire après trois ou quatre données qu'à notre avis, le petit garçon est arrivé à un autre endroit que ce qu'ils ont marqué. On leur demande de chercher encore. Enfin, on peut leur montrer où il arrive, selon nous, après 2 pas par exemple. Par rapport à cet endroit (marqué avec x sur la figure) ce sont les élèves qui disent enfin que le petit garçon est allé cette fois à gauche. Au début, on peut distinguer ces nombres à l'aide d'un « g » [« b » en hongrois, sur la figure]. (Livre du maître h., gr. 1 1978 pp. 130-131. Ma traduction.)

On voit de nouveau une série de situations ; et en fait, même une seule situation est répartie en petites activités sur plusieurs séances. On ne prépare pas qu'une seule « droite numérique », mais plusieurs différentes : ce n'est pas une seule situation adaptée qui permet l'acquisition de la notion abstraite, plutôt une série d'expériences concrètes diverses qui alimente le processus d'abstraction.

La « droite numérique » est préparée ici par les élèves eux-mêmes[114] : en fait, ce n'est pas au début un outil de représentation des nombres, surtout pas une représentation institutionnelle : elle apparaît comme la visualisation d'un problème concret (le trajet du petit garçon), et se transformera progressivement en une représentation pour l'ensemble des nombres. En même temps, cette forme de représentation n'est pas inventée par les élèves, mais anticipée par l'enseignant. La responsabilité est ainsi partagée entre l'enseignant et les élèves : d'une part, au moins la première situation est adidactique dans le sens où les élèves ont la responsabilité de choisir leur méthode de construction du trajet du petit garçon ; d'autre part, la représentation est suggérée par l'enseignant, à travers la construction du milieu du problème, mais les élèves sont chargés, au moins partiellement, d'y reconnaître l'ensemble ordonné des nombres (« Sur la droite numérique, ils vont retrouver les nombres dans le même ordre que ce qu'ils ont vu dans les cas des rangements. »).

La dernière variation introduit à nouveau une ambiguïté dans la situation : il est attendu des élèves qu'ils reconnaissent cette ambiguïté et qu'ils trouvent une méthode de solution (par exemple, l'indexation des nombres). On s'appuie avant tout sur un processus collectif et sur les désaccords potentiels entre les élèves ; mais s'ils n'arrivent pas, l'enseignant est invité à provoquer ce processus par l'explicitation de l'ambiguïté (« Si aucun élève ne réclame l'indication de la direction, on peut dire après trois ou quatre données qu'à notre avis, le petit garçon est arrivé à un autre endroit que ce qu'ils ont marqué. »).

La notion de nombres relatifs n'est pas l'objet du programme de la première année. Il ne sera pas institutionnalisé ici : le problème de la promenade dans les deux sens permet de faire émerger l'idée de la relativité, on fournit aussi une technique pour trouver une solution, une certaine indexation, mais les nombres du « côté gauche » ne sont pas traités ici comme une extension de l'ensemble des nombres, et la représentation ne prend pas sa forme institutionnelle non-plu. La situation reste dans la phase de « recherche de nouveau implicite », éventuellement de « l'institutionnalisation locale », et ne serait reprise que dans les années suivantes, quand on traitera les nombres relatifs[115].

En résumé, on peut voir dans le cas du livre du maître hongrois, une conception d'enseignement basée sur l'enchaînement de petites activités courtes et variées. En effet, on y trouve moins des situations permettant chaque fois d'introduire un nouvel élément de savoir,

[114] On peut observer ici un point commun avec ERMEL, où l'on insiste aussi sur l'intérêt des outils de représentation préparés par les élèves eux-mêmes.

[115] Nous rappelons que les maîtres hongrois gardent leurs classes pendant quatre ans : ils ont ainsi la possibilité de s'appuyer sur les expériences de ce genre vécues dans les années précédentes.

qu'un principe d'accumulation des expériences diverses lors d'un processus plus long. D'une part, on demande aux enseignants de construire des séances contenant plusieurs petites activités diverses qui doivent former des processus cohérents sur le plus long terme, d'autre part, lors de la description des « tâches », on décrit moins des situations entièrement élaborées que des consignes et suggestions aidant l'enseignant à concevoir toute une série de situations autour d'un problème.

En essayant de caractériser le processus d'enseignement envisagé avec les termes de phases de Douady, on y trouve moins de cycles tels qu'ils sont décrits dans l'article (Douady 1986), mais des processus plus longs et plus complexes : une situation peut remplir à la fois le rôle de différentes phases pour différents types de connaissances ou domaines mathématiques ; l'articulation du rôle objet et outil d'une notion est longue, et l'institutionnalisation est souvent retardée, parfois de plusieurs années. En même temps, ces processus sont moins définis par le livre, on n'y trouve que des consignes partielles pour les construire.

Les descriptions de situations que nous avons étudiées présentent un potentiel d'adidacticité important, bien qu'elles ne soient pas des « situations adidactiques » dans le sens classique. Les phases de travail individuel sont alternées avec des dialogues collectifs entre l'enseignant et les élèves. Les phases longues avec un milieu rétroactif seul et sans intervention de l'enseignant sont rares, il est plus courant que l'enseignant soit censé transformer progressivement la situation en fonction des réactions d'élèves. En même temps, les auteurs envisagent de laisser une responsabilité importante à la charge des élèves dans le processus d'apprentissage, et donnent de nombreuses consignes aux enseignants pour guider ce processus tout en laissant de la responsabilité aux élèves. De telles interventions de la part de l'enseignant doivent dépendre des réactions d'élèves et ne peuvent donc pas être prévues entièrement à l'avance ; en même temps, les commentaires du livre montrent que ces interventions ne sont pas considérées comme « spontanées », mais sont censées suivre des considérations didactiques. Nous avons nommé ce type de contrat « découverte guidée ».

La nature collective de ces situations joue par ailleurs un rôle très important : ce sont souvent des désaccords ou des malentendus entre les élèves qui font avancer le processus et provoquent l'émergence d'un nouvel élément de connaissance. On y retrouve l'idée décrite par Kalmár, selon laquelle le moteur du développement des mathématiques est en partie leur nature sociale et collective, et que ce sont les désaccords entre leurs idées primitives qui poussent les mathématiciens à développer les notions mathématiques (cf. Partie II §3.1.4). De plus, selon le livre du maître, les ambiguïtés sont parfois volontairement cachées dans

l'énoncé : au travers de ces situations, les auteurs encouragent explicitement un travail sur le contrat, une certaine déconstruction de l'autorité du maître et des énoncés qui sont censés être remplacés par la pensée critique des élèves.

4 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons comparé avant tout la construction de la notion de nombres naturels dans les programmes de la réforme hongroise et française. Dans les deux cas, nous pouvions observer un accent mis sur une construction mathématique de cette notion qui ne se limite pas à l'apprentissage mécanique de la comptine et des opérations, mais demande la compréhension de la notion, et l'étude des relations entre les nombres. La construction de la notion s'appuie sur celle des ensembles : c'est également un point commun entre les deux réformes, en cohérence avec les principes du mouvement international de l'époque. La différence importante entre les deux conceptions, du point de vue écologique, consiste à établir un lien entre la notion de nombre et la mesure. Quand la réforme française réduit le rôle de la mesure dans le programme et introduit une rupture radicale entre les deux domaines, la réforme hongroise insiste sur l'articulation entre ces derniers.

Cette différence dans la construction de la notion de nombres est un exemple, du tout début de la scolarité, illustrant la logique différente de la construction des programmes dans les deux pays : comme on l'a vu (cf. Chapitre 2), pour rendre le programme cohérent, la réforme française suit plutôt une construction hiérarchique et s'appuie avant tout, dans cette hiérarchie, sur la notion d'ensembles et de relations. Le programme hongrois par contre cherche plutôt des liens dialectiques entre les domaines, sans établir une hiérarchie stricte entre eux : c'est ce qu'on peut observer avec l'exemple des nombres et de la mesure aussi, où la construction de la notion de nombres est demandée sur deux bases parallèles, celle des ensembles et celle de la mesure.

On peut observer grâce à notre exemple quelques choix épistémologiques qui se cachent derrière la différence écologique des programmes. Comme l'a montré Chambris (2008), les références à la mesure sont considérées comme des références à 'la vie courante', alors que l'objectif, à l'époque des « mathématiques modernes », est la construction des notions mathématiques abstraites qui soient ensuite applicables dans toutes sortes de contextes. La réforme de Varga insiste par contre sur l'importance d'un processus d'abstraction lent et

progressif partant du concret et sur l'appui sur les expériences des élèves : de ce point de vue, la mesure sert comme un des domaines permettant de donner du sens à la notion de nombres.

La distinction des deux domaines est par ailleurs en lien avec une distinction entre 'discret' et 'continu', comme le montre Chambris (2010) pour le cas français. Dans le cas hongrois, l'articulation des deux domaines apporte également l'articulation du discret et du continu : c'est ce qu'on peut observer par exemple avec l'utilisation de la droite numérique. On verra dans le chapitre suivant (§4.1.2) que cette articulation réapparaît plus tard aussi dans le programme hongrois.

Pour les élèves de l'école élémentaire, on offre des fiches de travail dans les deux pays. On y peut reconnaitre beaucoup de similitudes, surtout concernant les domaines des ensembles et la notion de cardinal ; mais de nombreuses fiches concernant d'autres domaines se ressemblent aussi, à tel point que l'on peut supposer l'effet d'une diffusion internationale de fiches[116] :

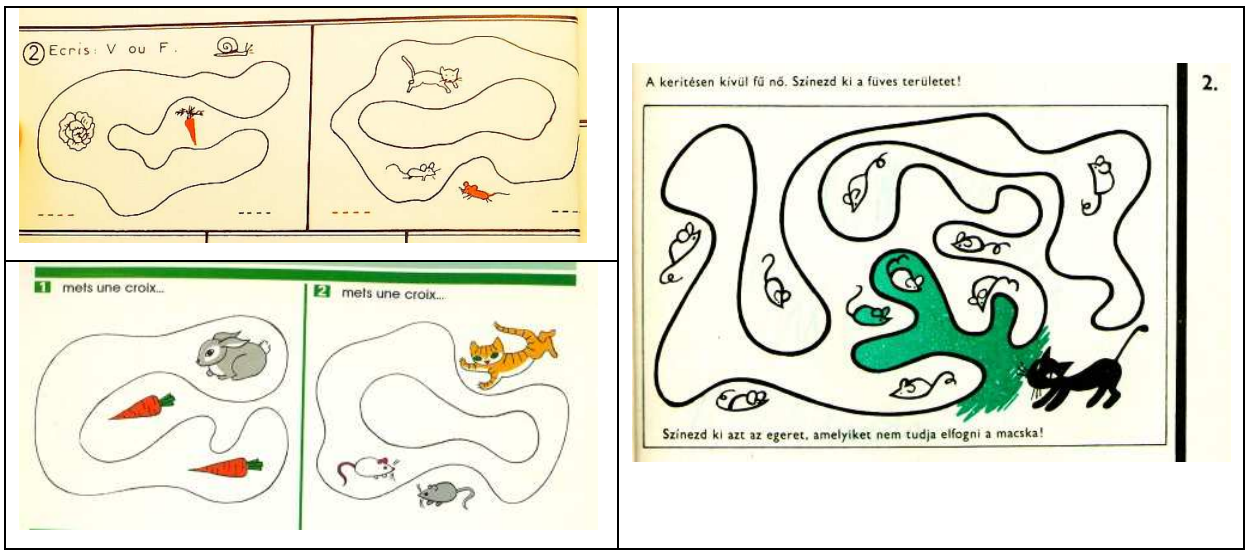


Figure III.3.10 : à gauche des fiches d'Eiller, à droite une fiche hongroise (Eiller gr. 1 1971 fiche 2, et Eiller gr. 1 1977 fiche 2 ; fiches hongroises gr. 1, 1978 fiche 6)

Par contre, les fiches liées à la comparaison des grandeurs, observables dans le cas hongrois ne sont pas présentes parmi les fiches françaises du grade 1. La seule exception est la colonne graduée qui apparaît chez Eiller et Picard aussi : mais nous avons montré que cette représentation joue seulement un rôle ponctuel et illustratif pour l'introduction des signes > et <, et n'établie pas une réelle articulation entre les domaines des nombres et de la mesure, comme c'est le cas dans la réforme de Varga.

Nous avons étudié aussi des instructions officielles et des livres du maître pour caractériser les pratiques pédagogiques envisagées par les auteurs et par les concepteurs des réformes. La

[116] L'exploration des voies de circulation de ces ressources demanderait pourtant une étude sur une plus grande échelle.

comparaison des structures des livres du maître et des consignes d'utilisation a dévoilé des différences importantes dans l'autonomie et la responsabilité accordée aux enseignants. Le livre *Math et calcul*, un des livres accompagnant la réforme française, offre un guide très développé et structuré pour les maîtres : il propose une progression annuelle du programme et des plans de « leçons », c'est-à-dire des séances élaborées. Ce livre laisse ainsi très peu de responsabilité à la charge des enseignants, responsabilité qui se limite avant tout à la mise en place des séances. Produit des expérimentations répandues des années 1970, ERMEL vise à attribuer plus de responsabilité aux enseignants, surtout au niveau +1, en ce qui concerne la préparation des séances : les auteurs considèrent que ce travail autonome est un critère nécessaire d'un enseignement de bonne qualité.

La réforme de Varga accorde aux enseignants une responsabilité encore plus importante : contrairement aux ressources françaises que nous avons étudiées, le programme et le livre du maître hongrois invitent les maîtres à prendre part dans l'élaboration de leur progression annuelle, et pour la préparation des séances, donnent moins de plans élaborés que des idées et conseils divers.

Une autre différence importante entre nos ressources concerne la gestion des séances : *Math et calcul* ne la problématise pas ; l'ERMEL fournit des exemples de transcriptions pour illustrer les interventions possibles d'élèves et des réactions *spontanées* d'enseignants. Le livre hongrois offre cependant un grand nombre de petites réflexions et consignes concernant les problèmes de la gestion des séances, suggérant ainsi que les interventions improvisées des enseignants doivent être le fruit d'une réflexion *didactique* et qu'elles ne sont pas entièrement spontanées.

C'est-à-dire que les différents livres de maître ne laissent pas le même type de travail aux enseignants : Eiller leur accorde peu d'autonomie, ERMEL insiste sur leur responsabilité au niveau +1, la réforme hongroise demande cependant, de la part des maîtres, une activité didactique autonome et responsable sur les niveaux +2, +1 et 0, suivant la catégorisation de Margolinas.

Nous avons enfin étudié quelques exemples de « situation » pour pouvoir caractériser des processus d'enseignement envisagés par chaque réforme ; nous nous sommes particulièrement intéressée au partage de responsabilité entre l'enseignant et les élèves.

Avant tout, nous soulignons le fait que chacune de nos ressources (programmes et instructions ainsi que des livres du maître) insistent sur l'importance des « méthodes actives » et sur l'utilisation des outils de manipulation (comme le bloc logique, le bloc de Dienes, les réglettes Cuisenaire etc.), conformément à l'esprit des mouvements de l'époque. On peut par

ailleurs observer derrière ces conceptions des arguments psychologiques plus ou moins explicités. Par contre, nous avons trouvé des différences importantes derrière ce que chacun appelle « méthode active » : chez Eiller, l'activité des élèves est globalement limitée à l'activité physique, et ne signifie pas d'autonomie d'élèves dans la construction de leurs connaissances mathématiques. Le contrat ressemble à un contrat magistral : la responsabilité du processus d'apprentissage reste entièrement du côté de l'enseignant, les activités servent avant tout l'illustration des éléments de savoir institutionnel, fournis par l'enseignant. L'ERMEL, ainsi que Varga, prévoient par contre une responsabilité importante des élèves dans le processus de construction de leurs connaissances : dans ces cas, c'est l'activité *intellectuelle* des élèves qui est accentuée.

Les documents français accompagnant la réforme des « mathématiques modernes » insistent sur l'organisation mathématique du programme, et bien qu'ils indiquent l'importance des principes pédagogiques et psychologiques, la mise en place de ces derniers, et leur articulation avec les considérations mathématiques semble être moins approfondie. Ce n'est pas le cas par contre de l'ERMEL : il témoigne des réflexions poussées de ce point de vue qui semblent être en lien avec les théories didactiques émergeantes de l'époque. Quelques caractéristiques restent présentes, telles qu'une réflexion approfondie sur l'arrière-plan théorique du programme ; une progression annuelle élaborée, tenant compte de l'organisation mathématique du programme, mais aussi des considérations didactiques ; un arrière-plan épistémologique qui voit les mathématiques avant tout comme un langage écrit, et met ainsi un fort accent sur l'étude des signes, des représentations ; des pratiques pédagogiques centrées sur les « situations » qui servent à l'introduction des nouvelles notions à l'aide des milieux construits.

La différence essentielle réside dans le caractère de ces situations. Alors qu'elles sont chez Eiller courtes, centrées souvent sur des questions simples, peu problématisées, et elles sont guidés par un contrat du type magistral, ERMEL propose des situations bien plus complexes. Ces dernières sont constituées d'un problème qui a du sens pour les élèves et dont la solution leur pose une difficulté, et d'un milieu rétroactif qui permet aux élèves d'évaluer leurs solutions sans nécessité de validation de la part de l'enseignant. La connaissance attendue peut émerger comme un outil efficace pour la résolution du problème posé, et peut être objet d'institutionnalisation dans une phase suivante du processus. Il s'agit d'un contrat plutôt du type constructiviste, où la responsabilité de l'enseignant consiste essentiellement en la construction de la situation, ainsi qu'en la dévolution et l'institutionnalisation ; l'élève doit de son côté prendre la responsabilité de la construction de ses connaissances mathématiques.

Il est peu étonnant d'observer dans ERMEL une démarche ressemblant au modèle de la « situation adidactique » proposé par Brousseau : en effet, les deux conceptions émergent dans le cadre d'une même dynamique en France dans les années 1970, autour des projets expérimentaux à la fois développant et critiquant la réforme, au sein des IREM ou à l'INRP. Il faut souligner en même temps que les pratiques conçues dans le cadre de ces projets ne sont sans doute pas les mêmes que les pratiques ordinaires : un indice de ce fait est que dans la période en question c'est toujours Eiller qui reste une ressource populaire parmi les maîtres.

Les démarches d'enseignement conçues dans le cadre de la réforme de Varga montrent également un caractère adidactique, dans la mesure où elles cherchent à charger les élèves d'une responsabilité importante dans le processus d'apprentissage. Mais elles sont différentes, à plusieurs aspects, des démarches de l'ERMEL. Il n'y a pas *une* situation distinguée, associée à un élément de savoir : on insiste plutôt sur la diversité, sur l'articulation des approches, venant souvent de différents domaines. Les « situations » sont plus courtes, mais reprises plusieurs fois avec des variations plus ou moins importantes, et des situations très diverses sont articulées. Ces reprises et articulations sont censées soutenir l'émergence lente et progressive des notions mathématiques, avec une institutionnalisation retardée, parfois de plusieurs années (nous rappelons que les enseignants hongrois accompagnent la même classe pendant plusieurs années, ce qui rend plus facile ces démarches étendues sur le long terme).

Il y a également une différence au niveau de la construction et la gestion des situations. On y trouve rarement des situations « adidactiques » dans le sens classique où l'enseignant ne serait pas censé intervenir : il s'agit plutôt de dialogues entre la classe et l'enseignant, où les interventions de l'enseignant guident un processus collectif de la résolution des problèmes posés ou émergés, et de la construction progressive du savoir mathématique. Nous avons donné le nom de « découverte guidée » à ce type de contrat. Nous avons vu aussi que le caractère collectif de ce processus joue souvent un rôle central dans la construction des notions. Ce sont souvent des ambiguïtés et malentendus, volontairement provoqués par la conception des situations, qui lancent les débats collectifs[117]. Les imprévus cachés dans ce type de démarche, l'adaptation nécessaire des interventions de l'enseignant en 'temps réel' : c'est ce qui peut expliquer qu'on ne trouve pas des situations entièrement élaborées dans le livre du maître hongrois, plutôt des descriptions vagues complétées par de petites annotations qui délivrent des idées ou des conseils divers. Ces unités ne sont pas appelées « situations »

[117] Nous remarquons que, contrairement aux ressources françaises qui favorisent l'étude des mathématiques *écrites*, chez Varga l'accent est plutôt sur l'activité *orale* – conformément au principe du dialogue que nous avons pu identifier dans l'arrière-plan épistémologique hongrois.

dans le texte hongrois, mais « tâches » (feladat). On pourrait dire que l'unité principale de cette démarche n'est pas la « situation », comme dans le cas français, avec un milieu élaboré, et correspondant à un élément de savoir, mais plutôt le « problème », une question dont la solution pose une difficulté aux élèves, et dont le processus de résolution entraîne un apprentissage.

Nous distinguons ainsi deux aspects essentiels du travail de l'enseignant dans la conception de Varga : l'un, au niveau 0 de Margolinas, est la gestion des dialogues autour d'un problème ; l'autre, au niveau +2 est la préparation de la progression par la mise en ordre des problèmes (Partie II, §3.2). Les remarques du livre du maître semblent suggérer que l'on doive suivre des considérations sophistiquées pour ces deux aspects – en même temps, le livre ne donne pas de consignes bien définies pour ce travail, dont les principes restent ainsi peu explicités. Dans les deux chapitres suivants, nous essayerons d'explorer quelques uns de ces principes : le chapitre 4 nous donnera d'occasion d'une étude des dialogues en classe (§4), et dans le chapitre 5 (§2), nous tenterons de caractériser des processus plus longs.

CHAPITRE 4

UN EXEMPLE DE L'ECOLE MOYENNE : LE THEOREME DE PYTHAGORE

Après l'étude de l'enseignement de l'arithmétique au début de l'école élémentaire, notre deuxième exemple concerne un autre domaine principal des programmes, et un autre niveau scolaire : la géométrie à la fin de l'école moyenne.

Nous avons choisi de nous concentrer sur l'étude du théorème de Pythagore pour plusieurs raisons. Nous verrons lors de l'analyse des programmes de géométrie que le programme hongrois et français sont construits de façon très différente, qu'ils comportent peu de point communs entre eux et même ces points interviennent souvent à des niveaux scolaires très différents : il n'est donc pas facile de trouver un élément adapté à la comparaison. En général, le théorème de Pythagore est un théorème significatif de l'enseignement de la géométrie, présent d'habitude dans les programmes des différents pays et époques : il peut donc être un choix qui facilite la comparaison – même si son importance est très réduite dans le programme français des mathématiques modernes, comme on le verra plus loin[118].

Ce théorème apparaît vers la fin de l'école moyenne (dernière année dans les programmes français, avant-dernière dans le programme hongrois) : complétant le chapitre précédent concernant le grade 1, cette étude permet donc d'encadrer l'enseignement obligatoire de l'époque. Pour le programme hongrois, le théorème de Pythagore est l'un des premiers théorèmes enseignés, et il est ainsi censé servir d'initiation à la démonstration mathématique. Cependant, dans le cas français, on verra que l'étude écologique de l'importance réduite de ce théorème permettra également de tirer des conclusions pertinentes concernant l'enseignement de la géométrie. Le théorème de Pythagore s'avèrera bien adapté pour pouvoir comparer les deux programmes concernant plusieurs questions pertinentes de l'enseignement des mathématiques : le rôle et la forme des démonstrations, le langage mathématique utilisé, le rôle des figures en géométrie, et enfin le rôle des relations entre la géométrie et l'espace physique.

Dans le chapitre 3, nous avons analysé les ressources de l'école élémentaire. Dans le présent chapitre, nous examinerons les ressources de l'école moyenne : des manuels scolaires et des livres de professeur. Nous examinerons avant tout leur structure, leurs caractéristiques

[118] L'autre théorème traditionnellement significatif des programmes français, le théorème de Thalès n'est pas présent dans le programme hongrois sous cette forme (le nom « Thalès » désigne un autre théorème important, concernant des triangles rectangles écrits dans un cercle, qui apparaît au début du lycée dans les programmes hongrois).

langagières et stylistiques et leur utilisation envisagée. Nous allons nous intéresser aux destinataires de ces manuels, et nous allons nous demander dans quelle mesure ils peuvent être interprétés comme sources de modèles d'enseignement. Nous allons chercher à reconstituer les pratiques pédagogiques que suggèrent ces ressources, y compris des livres de professeur. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons tout particulièrement aux formes de gestion des séances.

Nous commencerons la présentation par l'étude des programmes de la géométrie (§1), ensuite nous étudierons plus particulièrement la place et la fonction du théorème de Pythagore dans les programmes (§2). Nous poursuivrons avec la présentation des manuels scolaires et des livres de professeurs français (§3) et hongrois (§4) de l'école moyenne, et nous détaillerons chaque fois l'analyse de la présentation du théorème de Pythagore dans ces documents (§3.2 et 4.1). Ces deux derniers chapitres donnent lieu à l'analyse des pratiques d'enseignement suggérés par des auteurs des manuels.

Pour effectuer nos analyses, en plus des outils théoriques utilisés jusqu'ici, nous nous appuierons sur un outil spécialement conçu pour la didactique de la géométrie : la notion des *paradigmes géométriques* (Kuzniak & Houdmement 2006).

1 LES PROGRAMMES DE LA GEOMETRIE

1.1 Les programmes français

1.1.1 Les programmes de 1969/1970

Dans le programme français des « mathématiques modernes », l'étude de la géométrie est marquée par un déséquilibre et une rupture profonde entre le primaire, les deux premières années du collège et les deux dernières années du collège. Il est intéressant d'observer avant tout la longueur des commentaires concernant la géométrie dans les instructions des différents niveaux scolaires : au primaire, des 38 pages du programme, seulement 7 traitent de la géométrie et de la mesure ; des 13 pages des « instructions particulières pour les classes des Sixième et Cinquième » 3 concernent ces sujets. Des 38 pages des « instructions particulières pour les classes des Quatrième et Troisième » en revanche, 28 sont consacrées à « l'introduction à la géométrie ». Si le domaine de la géométrie a une importance inférieure jusqu'à la sixième, il devient le thème principal du programme à partir de la quatrième.

Dans le primaire, la géométrie est complètement absente du programme de la première année. Dans celui des années suivantes, on trouve des « Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques » et des « Exercices pratiques de mesure et de repérage » ; les instructions soulignent qu'il s'agit à l'école élémentaire des activités pratiques, manuelles, liées à l'expérience et à l'étude du milieu : tracer, dessiner, plier, découper, utiliser des instruments etc. Le contenu est limité sur le traitement de quelques figures planes fondamentales ainsi que du cube et du pavé.

Au début du collège, en Sixième (gr. 6), on trouve des chapitres sur « l'étude d'objets géométriques et physiques donnant lieu à mesures » et sur des « méthodes de repérage » ; en cinquième (gr 7), une « première étude concrète de l'espace ». Le contenu concerne toujours la description des droites, des objets plans et de quelques solides simples. Il s'agit encore d'« observer » et de « décrire » des objets concrets, « physiques ». En interprétant le programme en termes de paradigmes géométriques, il s'agit, jusqu'au niveau de la cinquième, d'un travail en G1. Les titres des chapitres distinguent clairement ces études de la géométrie « proprement dite » et indiquent que ces activités ne sont considérées que comme préparatoires à une « véritable » étude mathématique de la géométrie.

C'est dans les instructions pour les deux dernières années du collège que l'on trouve un chapitre d'« introduction à la géométrie de Quatrième et de Troisième ». Ce texte marque explicitement une rupture avec les années précédentes :

> Dans l'enseignement élémentaire les enfants ont pris un premier contact avec la « géométrie », c'est-à-dire qu'ils ont étudié les formes des objets usuels, à propos desquels ils ont fait de nombreuses manipulations de toute nature (découpages, coloriages, calques, mesures…) ainsi que des calculs numériques ; dans le cycle d'observation les professeurs ont pris soin de ne pas récuser cet acquis ; au contraire, ils en ont pris occasion pour faire étudier des relations et exécuter des calculs.
>
> En Sixième et Cinquième, l'observation d'objets de l'espace physique, les constructions graphiques opérées avec les outils usuels, constituent une préparation essentielle à l'étude de la géométrie proprement dite, bien que le mot **géométrie** prenne en Quatrième un sens différent de son sens initial.
>
> La géométrie en Quatrième et Troisième offre le premier exemple de mathématisation d'une réalité physique. (Prog. fr. é.m. 1972 p. 68)

Cette citation explique l'importance radicalement augmentée de la géométrie à partir de la Quatrième (gr. 8) : c'est ici que la géométrie devient une « véritable théorie mathématique », de plus, un premier exemple visant à initier les élèves à un processus de mathématisation. Selon le programme de la Quatrième,

> À la fin de l'année scolaire, la géométrie, née de l'expérience, devra apparaître aux élèves comme une véritable théorie mathématique ; c'est-à-dire que des faits ayant été admis (axiomes), d'autres en sont

déduits (théorèmes). Mais il est absolument indispensable que de nombreuses manipulations, des exercices pratiques utilisant les instruments de dessin aient précédé à la fois l'énoncé des axiomes et tout raisonnement. (Prog. fr. é.m. 1972. p. 15)

En classe de Quatrième donc, en partant d'un paradigme G1, on doit arriver à un paradigme type G3, c'est-à-dire une théorie géométrique axiomatisée. L'introduction ci-dessus insiste sur l'importance de bien construire ce passage – le programme et les instructions donnent en même temps peu de conseils concrets pour sa réalisation. Le passage envisagé semble consister, en tout cas, en la reconnaissance de quelques axiomes à partir des observations ; ensuite, les autres propriétés seront déduites de ces axiomes reconnus[119].

La notion première de la géométrie introduite au Quatrième est celle de la droite. Le texte des instructions illustre vaguement comment l'axiomatisation de cette notion est imaginée :

Nous considérons alors comme intuitifs les faits suivants :

- une droite physique est un ensemble de points physiques,
- l'expression « le point C est entre A et B » a une signification,
- il existe deux sens de parcours sur une droite physique.

Nous avons d'autre part l'intuition d'un certain « écartement » de deux points qui nous amène de façon naturelle à attacher à tout couple de points (A, B) un nombre réel positif, appelé la distance de ces points, noté d(A, B), et auquel nous attribuons les propriétés suivantes :

d(A, B) = d(B,A)

d(A, B) ≥ 0 par définition, d(A, B) = 0 si et seulement si A = B,

si C est entre A et B on a d(A, B) + d(A, C) + d(C, B)

Il résulte de cette dernière propriété que, si P, Q, R sont trois points quelconques sur une droite, on a d(P, R) ≤ d(P, Q) + d(Q, R)

[…]

A partir de cette observation du double-décimètre, nous ferons sentir aux élèves la possibilité et l'intérêt d'établir une correspondance bijective entre une droite physique et l'ensemble **R** des réels, correspondance déterminée dans l'espace concret par le choix du point origine associé au nombre 0, du sens de parcours et de l'unité de longueur […] (Prog. fr. é.m. 1972 p. 64)

On a vu dans la partie épistémologique (Partie II §2.1.3) que Dieudonné et Choquet interprètent les dernières années du collège comme une période transitoire de l'enseignement des mathématiques, où l'élève doit arriver d'une pensée intuitive à un discours axiomatique, abstrait. Le programme semble viser justement ce passage, sans le considérer problématique : les axiomes sont considérés intuitifs, et une fois les axiomes reconnus, on s'éloigne de l'observation et de l'intuition, et on peut suivre une démarche purement abstraite et déductive.

[119] Comme on verra plus loin (§1.1.2), ce programme sera critiqué entre autres à cause de l'absence de l'initiation à l'argumentation et à la démonstration elle-même avant d'établir une structure strictement axiomatique.

D'autre part, ce programme de géométrie s'appuie sur la notion de l'ensemble des réels. En effet, l'ensemble des réels est construit aussi au quatrième, dans une forme axiomatique, juste avant l'introduction de la géométrie : le programme suit ainsi un ordre de présentation axiomatique, strictement hiérarchique, et suit la construction des *Éléments* de Bourbaki[120].

La géométrie euclidienne classique, synthétique, centrée sur l'étude des figures, est complètement éliminée du programme des « mathématiques modernes » : il s'agit d'une géométrie basée sur les réels. De plus, le programme du Quatrième introduit la géométrie affine, très éloignée de l'intuition[121] ; la géométrie affine euclidienne, contenant la notion de distance n'apparaît qu'au troisième. Au lieu des figures, l'accent est mis sur la description de la droite, du plan et de l'espace à l'aide des projections, des vecteurs et des repères.

1.1.2 Les programmes de 1977

Le programme français de 1977 représente un important recul par rapport au programme de 1969/70 au niveau de la géométrie. Dès le primaire, la géométrie devient plus importante. Au CP, un chapitre apparaisse sous le titre « se situer dans l'espace et l'organiser », bien que, selon les instructions,

> Dans ce domaine, de nombreuses activités ne relèvent pas directement des mathématiques. […] Ces activités contribuent cependant toutes à la formation de la pensée logique et préparent de façon intuitive et empirique la prise de conscience de propriétés géométriques qui seront dégagées par la suite. (Prog. fr. é.é. 1980 p. 29)

À l'école primaire à partir du CE, les chapitres « mesure » et « géométrie » prennent une place plus importante que dans le programme précédent. Les instructions soulignent que « les activités géométriques contribuent à la formation de la pensée logique au même titre que les activités numériques » et à partir du CM, outre des observations et manipulations des objets concrets, de « l'accumulation des expériences » comme dit le programme, on propose aussi de « conduire à un premier niveau d'abstraction », « sans recourir à des définitions formelles ». (Prog. fr. é.é. 1980, p. 60)

Le contenu est plus riche qu'en 1969 : au CP, on met l'accent sur la découverte de l'espace et du plan, par l'étude des orientations, déplacements, par des pavages, mosaïques, frises, jeux de constructions etc. Au CE et au CM, outre de la découverte des différents objets

[120] La construction des *Éléments de mathématique* et les détails d'édition peuvent être consultés sur le site http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/publications#elements-math1 (dernière consultation le 17 octobre 2015)

[121] Voir la remarque de Gispert & Schubring (2011 p. 96.)

géométriques (solides, surfaces et lignes), on insiste aussi sur leur constructions et sur l'utilisation des instruments.

Le programme du collège marque toujours une rupture entre les premiers et les derniers deux ans, même si elle est beaucoup assouplie. En Sixième et Cinquième, on trouve des chapitres intitulés « observation d'objets géométriques et physiques », les chapitres intitulés « géométrie » apparaissent au quatrième et au troisième. Par rapport aux premiers deux ans, les instructions soulignent toujours que

> Il ne s'agit pas, à proprement parler, d'activités mathématiques, mais d'activités concernant des objets physiques ; elles donnent lieu à de nombreuses observations, à l'emploi d'un vocabulaire précis, ainsi qu'à des mesures et des calculs, et elles éveillent la curiosité des enfants. (Prog. fr. é.m. 1977 p. 53)

Et même si l'initiation au raisonnement est attendue dès ce niveau, c'est à partir du Quatrième qu'on demande l'argumentation déductive à une façon régulière. En même temps, il ne s'agit plus, en Quatrième et Troisième, d'une construction complètement axiomatique, on insiste sur le rôle de l'observation et l'expérimentation, pas seulement pour acquérir les notions premières, mais aussi pour conduire les élèves vers un raisonnement déductif. En terme de paradigmes, on peut dire que ce programme tend toujours de G1 vers G3, mais d'une part, ralenti ce passage et envisage de passer par G2, et d'autre part, ne demande pas d'élaboration complète de G3 au niveau de l'école moyenne.

Les instructions citent sur ce sujet l'avis de l'académie des Sciences :

> Toute la difficulté de l'enseignement de la géométrie dans les classes de Quatrième et de Troisième provient du fait qu'il faut partir de l'intuition acquise en Sixième et Cinquième par l'usage expérimentale des instruments de dessin […] et, à partir de cette intuition, amener progressivement l'élève à raisonner et à manipuler consciemment les instruments pour lui faire acquérir peu à peu la notion du plan euclidien. (…) Il n'est pas question de donner à l'élève une présentation axiomatique de la géométrie. En revanche, il devra apprendre à faire des courts raisonnements, à partir des faits géométriques considérés comme évidents et donc admis comme vrais. Dans cet apprentissage de la réflexion et de la méthode déductive, il importe que le maître observe strictement quelques règles. Tout d'abord, les faits que l'on admet à un instant donné et qui vont servir de base au raisonnement doivent être clairement énoncés et ne prêter à aucune confusion dans l'esprit de l'élève. Ensuite le raisonnement doit être rigoureux, il ne doit jamais faire appel à des hypothèses non explicitement formulées et a fortiori doit se garder des cercles vicieux. Enfin il faut éviter qu'une propriété simple, qui est presque évidente aux yeux de l'enfant, soit déduite par le raisonnement d'une autre propriété moins évidente ou plus compliquée, car lors l'élève ne pourra pas comprendre quelle est la règle du jeu. (Prog. fr. gr. 8, 1977 p. VIII)

Le contenu, réduit par rapport au programme précédent, reste centré sur l'étude des projections, des vecteurs et des repères. Mais le nouveau programme est moins explicit sur l'organisation mathématique du contenu du programme, insiste beaucoup plus sur la liberté

des enseignants que le programme des « mathématiques modernes », et essaye de rétablir l'équilibre entre l'étude des nombres et de la géométrie :

> Il est souhaitable que durant les deux années les professeurs mènent de front l'étude du calcul et celle de la géométrie ; c'est ainsi que pourront s'éclairer mutuellement les notions d'ordre dans R et sur la droite, la notion de fraction et celle d'échelle régulière, etc. Il importe qu'il n'y ait pas de cloison étanche entre les deux disciplines ; l'une et l'autre peuvent de façon égale concourir à la formation du raisonnement.
> Le programme de 1971 semblait subordonner l'étude de la droite à celle des réels ; on observera qu'avec le programme actuel l'ensemble R n'intervient en géométrie de Quatrième que par un petit nombre de ses propriétés, qui prolongent les propriétés de D étudiées en Cinquième on pourra donc parler de distance dès le début de la classe de Quatrième. (circulaire n°78-392 du 16 novembre 1978)

1.2 Le programme hongrois

Le programme de Varga, comme on l'a vu (Chapitre 2), est très différemment construit que les programmes français : car il n'est pas divisé en 'programme' et 'instructions', mais présent le contenu attendu accompagné par beaucoup d'exemples. En géométrie, comme en général, on insiste sur la continuité et sur l'articulation dialectique avec des autres domaines. Le livre de professeur du grade 6 liste les plus importants points où la géométrie s'attache aux autres domaines dans le programme : les objets géométriques peuvent être vus comme des ensembles de points ; la droite numérique, et plus tard les repères lient la géométrie à l'algèbre et à l'arithmétique ; les graphiques illustrent les fonctions, et en même temps, les transformations géométriques peuvent être vus comme des fonctions ; les figures géométriques peuvent amener à des problèmes de combinatoire. Le lien entre ces différents domaines n'est pas hiérarchisé : la géométrie s'appuie sur les autres domaines, fournit cependant des exemples illustratives des notions plus abstraites, et sert souvent comme modèle visuel pour les notions d'autres domaines mathématiques. Cette dernière fonction de la géométrie est apparent par exemple dans le cas des nombres réels : le plan euclidien peut être caractérisé à l'aide des repères et des coordonnés, mais en même temps la droite, notion première, fournit un modèle intuitif pour l'ensemble des nombres réels. Cette fonction de la droite apparaît dès la première année du primaire (cf. chapitre 3 §3.2.5)

> À l'aide de la mesure, on établi une relation entre les points de la droite et entre les nombres réels : entre un très important ensemble de points et un très important ensemble de nombres. Il est bien de construire cette relation dès la première année du primaire. Sur la droite numérique, les différents nombres n'apparaissent que des points distincts :

> mais la droite numérique suggère déjà la continuation à l'autre côté du 0 pour les nombres (négatifs entiers), et la place entre les entiers pour les nombres non-entiers (fractions, irrationnels). Il apparaitrait plus tard que des couples de nombres permettent de trouver n'importe quel point du plan, et des triples de nombres n'importe quel point de l'espace, si certaines directions et unités de mesure sont données. Ainsi, la relation entre les nombres et l'espace ne se limite pas à la droite numérique, mais pourra être complété à l'aide des coordonnées. (Les coordonnées des points de la droite numérique est le nombre qui s'y trouve.) (Livre du prof. h. gr. 1, p. 209. Ma traduction)

La relation entre le domaine numérique et le domaine de la géométrie est donc établie par une analogie : cette analogie aide à étendre l'ensemble des nombres, mais aussi à caractériser l'espace à l'aide des repères.

Dans la partie II, nous avons montré l'importance de l'analogie, de l'intuition, de la visualité et des expériences dans la tradition hongroise : dans le programme de Varga, la géométrie remplit une fonction importante au développement de la pensée mathématique, basée sur l'intuition visuelle des élèves, et fournit des expériences visuelles variés pour les autres domaines des mathématiques.

Dès le départ, le programme parle des notions géométriques, mais, surtout au niveau élémentaire, les exemples renvoient souvent à des manipulations avec des objets réels. La mesure ne constitue pas de chapitre séparé, comme dans les programmes français, mais est intégrée dans la géométrie. En outre, dès la première année, on demande des activités liées non seulement à la découverte et à la construction des figures solides, planes et des lignes (droites et courbes), mais aussi aux symétries, aux transformations, à la topologie et aux graphes. (Une grande majorité de ces thèmes n'apparaît pas, en même temps, parmi des connaissances exigées aux premières années de l'école élémentaire. Comme on l'a vu, le programme de Varga fait une distinction entre les thèmes étudiés en classe, et des connaissances effectivement exigés dans l'année en question.) Ces thèmes seront poursuivis au niveau moyen aussi.

La géométrie enseignée à l'école moyenne reste principalement euclidienne classique, synthétique, sans intervention des vecteurs et des repères. Le point, ligne, droite, plan, surface, morceau d'espace… sont notions premières, avec quelques propriétés reconnus mais pas nécessairement explicités (voir le livre de professeur du grade 6, p. 136-138) C'est l'étude des figures planes et parfois des solides qui est mise au centre du programme de géométrie : le plus important changement par rapport aux programmes précédents est probablement la mise en avant des transformations, en tant que fonctions géométriques, outre des l'étude des constructions (euclidiennes et autres) et des symétries. Les vecteurs sont introduits au grade 8 (à la dernière année de l'école moyenne), en tant que caractéristiques des translations, et sans

qu'ils deviennent bases des études géométriques. Les repères jouent peu de rôle en géométrie au collège (bien qu'ils soient introduits pour traiter des graphes des fonctions).

Les démonstrations sont progressivement introduites au cours de l'école moyenne, les premiers théorèmes apparaissent au grade 7. Au programme de Varga, l'étude de la géométrie tend progressivement d'un paradigme G1 vers un paradigme G2, mais l'accent est plutôt sur la continuité et sur l'articulation des deux paradigmes que sur la rupture (on verra dans sur l'exemple du théorème de Pythagore (§4.1), comment cette continuité est construite).

2 LE THEOREME DE PYTHAGORE DANS LES PROGRAMMES DE LA GEOMETRIE

2.1 Les programmes français

Comme on l'a vu, la géométrie du programme français des « mathématiques modernes », au niveau du Quatrième, est une géométrie affine basée sur les réels. Les structures euclidiennes contenant la notion de distance apparaissent en Troisième. Selon les instructions :

> Dans la présentation du programme, la relation d'orthogonalité entre directions apparaît la première, on en déduit la définition des projections orthogonales, puis la comparaison des graduations euclidiennes en imposant une relation de symétrie aux rapports de projection orthogonale ; nous suivrons cet ordre dans l'étude expérimentale du plan physique, où la notion de distance physique n'interviendra qu'en dernier lieu. D'autres présentations sont possibles. (Prog. fr. é.m. 1972 p. 83)

Le théorème de Pythagore s'inscrit dans ces cadres : selon l'organisation proposée par l'instruction, il se dérive directement d'une propriété du rapport de projection orthogonale.

> La démonstration conduisant à $|c(\Delta, D)| < 1$ a montré incidemment que, si un triangle ABC est rectangle en A et si D, D', Δ, sont des axes portés par AB, AC, BC, on a $c(\Delta, D)^2 + c(\Delta, D')^2 = 1$; ceci s'écrit : $AB^2/BC^2 + AC^2/BC^2 = 1$, d'où enfin le théorème de Pythagore $AB^2 + AC^2 + BC^2$. (Prog. fr. é. m. 1972 p. 86)

La démonstration est donc très simple (la réciproque est un peu plus longue), mais demande l'appui d'un autre théorème relativement complexe, et l'utilisation d'un langage formel développé. Le théorème de Pythagore, dans ce cas, ne porte principalement pas sur une figure géométrique qui est le triangle, mais contribue à la caractérisation du plan euclidien : déroule d'une propriété du rapport de projection orthogonale et intervient dans la définition des repères orthonormés du plan euclidien. Il n'est pas un théorème distingué, seulement une brique parmi beaucoup d'autres qui intervienne à la construction d'un outil algébrique pour la description du plan et de l'espace.

On verra (§3.2) que la majorité des manuels scolaires étudiés reprend cette organisation mathématique et cette démonstration (parmi des manuels scolaires étudiés, seulement celui de Polle suit une organisation différente, et fait intervenir les vecteurs pour démontrer le théorème). Le théorème de Pythagore y est intégré dans un chapitre sur le plan euclidien et ne reçoit pas de chapitre séparé.

On a vu (partie II, §2.1.3) comment Choquet a lutté pour « l'élimination des triangles » du programme, et pour la description de l'espace avec des outils algébriques. On peut observer sur l'exemple du théorème de Pythagore comment c'est mise en pratique dans son livre :

> Proposition 39.1.
> a. Dans tout parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.
> b. Dire qu'un parallélogramme est un rectangle équivaut à dire que ses diagonales sont égales. (Choquet 1964 p. 64)

Même si le programme et la majorité des manuels scolaires des « mathématiques modernes » ne vont pas aussi loin (avec l'exception de Revuz, comme on verra plus loin), la réforme suit clairement la direction définie par Choquet, en diminuant significativement l'importance de l'étude des figures au bénéfice de l'étude de la « notion d'ensemble, relations d'ordre et d'équivalence, loi algébrique espace vectoriel, symétrie, transformations ».

Le programme de 1977, comme on l'a vu, donne beaucoup moins d'indication sur l'organisation mathématique à suivre, au contraire, insiste sur la liberté des enseignants. Mais dans le programme, le « Propriété de Pythagore et sa réciproque » apparaît après la notion des vecteurs, des équations d'une droite dans un repère et la projection orthogonale, et avant « l'orthogonalité de deux vecteurs rapportés à un repère orthonormé » (Prog. fr. e. m. 1977 p. VI). Le programme semble donc suggérer une organisation mathématique similaire au programme précédent. Une bonne partie des manuels scolaires vont garder cette même organisation, mais on trouve des manuels, nouvellement faites pour le programme en question, qui remettent en question l'organisation mathématique (cf. §3.2.2).

2.2 Le programme hongrois

Le théorème de Pythagore est le premier point du programme de géométrie du grade 7. Les instructions (intégrées avec le livre du professeur) le situent comme un des plus importants théorèmes mathématiques :

> S'il fallait citer les dix théorèmes mathématiques les plus importants, le théorème de Pythagore ne pourrait pas être omis. Peut-être même pas parmi les trois plus importants, si on prend l'applicabilité comme critère principal, directement, ou à travers d'autres relations mathématiques qui y sont liés. En plus d'être important, il est simple : des enfants ordinairement développés peuvent le comprendre autour de dix ans, et peuvent apprendre ses applications simples. Notre programme situe ce thème dans la 7e année en attendant que les élèves de 12 ou 13 ans comprennent non seulement le théorème, mais aussi sa démonstration. La série de tâches ci-dessous est conçu pour amener les élèves à la démonstration dite « hindoue ». La démonstration hindoue, sans préparation, pourrait apparaître comme si elle tombait du ciel. Bien qu'elle soit facile à suivre, personne n'aurait l'impression d'avoir pu la découvrir elle-même. (Livre du prof. h. gr. 7, 1981 p. 103. Ma traduction)

Nous attirons avant tout l'attention sur la fin de cette citation : sur l'idée qu'une démonstration ne doit pas « tomber du ciel » ; il faut construire un processus permettant de faire l'impression « qu'on aurait pu la découvrir soi-même ». Pas seulement l'idée, les expressions utilisées rappellent aussi aux textes des membres de « l'école hongroise » (Partie II §3.1).

Le théorème de Pythagore, dans l'organisation mathématique du programme hongrois, ne nécessite que quelques connaissances algébriques minimales (multiplication des sommes et des différences, carré d'une expression de deux termes). Pour ce qui concerne la géométrie, la démonstration soutenue par le livre de professeur, ainsi que par le manuel, est la démonstration qu'on appelle ici « hindoue » : un puzzle de figures planes. Le livre du professeur insiste sur l'importance d'une pratique en calculs d'aires sur une grille avant d'introduire le théorème de Pythagore et sa démonstration. Il est intéressant à souligner ici, que le théorème de la géométrie euclidienne continue est préparé par des activités de géométrie discrète, où la construction géométrique est remplacé par le dessin (précise, car définie par les nœuds de la grille) ; et la mesure (physique et imprécise) par la calcule exacte. Le livre de maître insiste sur l'intérêt de ces activités pour les futures études en géométrie, plus particulièrement pour la géométrie analytique en repère orthonormé : ces activités permettent par exemple à obtenir des expériences préparant la notion du coefficient directeur. (Cet exemple illustre donc entre autres choses comment des différents activités mathématiques permettent d'obtenir des expériences préparant des notions mathématiques plusieurs années à l'avance.)

Le théorème de Pythagore, dans sa forme principale acceptée par le programme hongrois, ne nécessite pas la connaissance des nombres réels, car il s'agit d'une relation entre aires et pas entre longueurs. En effet, l'ensemble des réels n'est pas introduit dans le programme hongrois de l'école moyenne ; et selon le programme, l'introduction de la notion de la racine

carrée doit être liée au théorème de Pythagore. La racine carrée apparaît par ailleurs effectivement dans le chapitre géométrie du programme, juste après le théorème de Pythagore[122].

Le problème des réels devient pertinent dès que l'on interprète le théorème en tant qu'un rapport entre des *distances*. Le livre de professeur consacre un long passage à cette question :

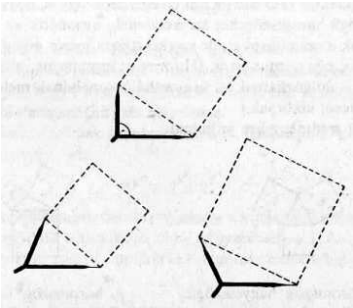
> [Les élèves] ne doivent considérer qu'une seule chose pour transmettre sur les longueurs de segments ce qui était appris sur les carrés: si l'aire de deux carrés est égal, alors leur côté est égal aussi, mais si l'aire d'un est plus grande que celle de l'autre, alors son côté est plus grand aussi. C'est intuitivement évident. Ils peuvent ensuite en déduire les rapports des segments obliques aussi, car ils peuvent comparer les carrés construits au-dessus. Pour cela, la notion de la racine carrée n'est pas nécessaire, ni un algorithme de calcul de racine carrée, ni de pouvoir trouver ces valeurs dans un tableau. Tout cela viendra ultérieurement (et il n'y aura pas forcément besoin de tout cela – de la notion de la racine carrée oui, bien sûr). Pour l'instant, il ne s'agit pas de déterminer des longueurs, seulement de les comparer. (Livre du prof. h. gr. 7, 1981 p. 110. Ma traduction)

La comparaison des longueurs est donc renvoyée à la comparaison des aires. Cette approche suffit pour justifier que le théorème de Pythagore donne un rapport entre les longueurs, mais ne suffit pas de l'appliquer sur le calcul des longueurs (sauf les cas exceptionnelles des triplets pythagoriciens). Le livre de professeur suggère de faire sentir le problème par un travail d'approximation, à travers d'un problème de recherche des distances données sur une grille (Livre du prof. h. gr. 7 1981 p. 104-106). Ainsi, le théorème de Pythagore sera appliqué pour le calcul des distances en utilisant des approximations, et en laissant ouvert la question de l'étude des nombres précis qui apparaissent (ce travail est renvoyé au lycée). Cette solution s'inscrit dans une stratégie plus générale, qu'on pouvait déjà observer à l'école élémentaire, concernant la droite numérique (Chapitre 3 §3.2.5) : on fait sentir que la notion des nombres pourrait être étendue dans la suite, sans définir cette extension. Pour la préparation de l'introduction de l'ensemble des réels, deux modèles apparaissent parallèlement dans le programme : les décimaux et la droite numérique.

Le livre déclare enfin le rôle du théorème de Pythagore dans l'apprentissage de la logique : c'est ici qu'on doit comprendre la relation d'un théorème à son inverse. Le livre précise que la démonstration de l'inverse n'est pas obligatoire à enseigner, mais la compréhension de son énoncé, et de son rapport au théorème original est attendue. On propose plusieurs façons d'*illustrer* l'inverse : ces illustrations peuvent amener à des démonstrations précises, mais le

[122] Le livre du professeur ne traite pas ce thème ; dans le manuel scolaire, la notion de la racine carrée apparaît dans le chapitre arithmétique, mais sur la base du calcul des longueurs des côtés de carrés à partir de leur aire.

livre laisse une liberté aux enseignants à définir le niveau de cette précision. Nous citons un exemple :



On illustre le triangle rectangle à l'aide d'un compas. Les deux branches du compas ne doivent pas être égales. Si on ferme un peu les branches, le troisième côté imaginaire diminue, et ainsi le carré dessiné (ou imaginé) sur ce côté aussi. Les deux autres côtés ne changent pas. Dans le triangle rectangle, la somme des carrés des ces deux côtés était égal au carré du troisième côté ; dans le triangle acutangle, le carré écrit sur le troisième côté serait plus petit que la somme des deux autres. Dans le triangle obtusangle par contre, il sera plus grand, car le troisième côté sera aussi plus grand quand on ouvre mieux le compas. (C'est intuitivement évident, mais on peut démontrer aussi.)
Sur un plus haut niveau de la déductivité, on pourrait poser la question: d'où dérive-t-il qu'en ouvrant mieux les branches[123], le troisième côté du triangle (pour ne plus parler de compas) agrandit, et en les refermant, il diminue. À la 7e année, on peut accepter ce fait comme un axiome ; bien sûr sans prononcer le mot « axiome ». (Livre du prof. h. gr. 7, 1981 p. 114-115. Ma traduction.)

Ce passage illustre clairement la mise en œuvre d'un principe épistémologique qu'on pouvait identifier chez « l'école hongroise » (Partie II §3.1.2) : la précision mathématique n'est pas quelque chose stable et a priori donnée, mais le résultat d'un développement continu qui part de l'intuition. Avec les termes de Pólya, il s'agit d'un argument « plausible », basé sur une analogie. La « démonstration », contenant également quelques éléments de G2, s'appuie sur une analogie intuitive entre les triangles et le compas (G1) : le mouvement physique du compas illustre une transformation des triangles en G2.

3 LES MANUELS SCOLAIRES ET LES LIVRES DE PROFESSEURS DE L'ECOLE MOYENNE EN FRANCE

3.1.1 Les manuels scolaires français du programme « mathématiques modernes »

Nous étudions dans ce chapitre les collections de Queysanne-Revuz, de Monge, de Maugin et de Polle-Clopeau.

[123] En hongrois, le mot « szár » désigne à la fois les branches du compas et les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle : ce fait renforce l'analogie entre le triangle et le compas.

Un des caractéristiques le plus apparent de ces manuels scolaires est l'utilisation très poussée du langage formel. C'est particulièrement visible dans les manuels des grades 8 et 9, mais observable également dans les manuels des premiers deux ans de l'école moyenne. En effet, conformément au commentaire du programme, (Prog. fr. é. m. 1969 p. 52) les auteurs mettent explicitement l'accent sur l'utilisation d'un langage mathématique précis et sur l'initiation à l'argumentation déductive.

Monge souligne par exemple, dans l'avertissement de chacun de ses manuels, que « nous avons veillé à employer un style simple et précis : nous avons soigneusement évité les abus de langage et les formulations incorrectes » (Monge gr. 8, 1971 p. 4). Ce langage ne se limite pas aux formules, mais on y trouve, dès le manuel du Sixième, un langage mathématique figé, avec un vocabulaire réduit, de sens bien définit des mots. Par ailleurs, les formules prennent en effet une place importante des manuels de l'époque, comme on pourra voir sur l'exemple du théorème de Pythagore.

Le livre de professeur de la collection Queyzanne-Revuz (gr. 6, 1969 p. 16) consacre deux pages aux « remarques pédagogiques sur l'utilisation du langage et du symbolisme » ; il y insiste sur une introduction par le langage courant, mais aussi sur le passage le plus rapide possible vers l'utilisation d'un langage mathématique formel.

Le langage formel de la théorie des ensembles est introduit par exemple dès le premier chapitre de son manuel de Sixième (« Ensembles et éléments ») (Queysanne-Revuz gr. 6, 1969). On y trouve les paragraphes suivants : « Un peu de vocabulaire », « Ensembles et éléments », « Soyez fidèle à un langage précis », « Une écriture commode », « Comment écrire un ensemble », « Un dessin qui parle ». Ces titres illustrent bien que l'accent porte sur l'utilisation commode des notions et du langage mathématique institutionnel et précis. Le troisième paragraphe, qui appelle les élèves à être « fidèle à un langage précis », est particulièrement intéressant de ce point de vue :

> Dès votre inscription parmi les Eclaireurs, adoptant leur langage, vous êtes devenu un *louveteau* de votre *meute*. Vous vous comprenez entre initiés sans risque de confusion.
>
> Pour vous, un louveteau est un garçon inscrit parmi les Eclaireurs. Votre meute **comprend** un certain nombre de louveteaux dont vous pourriez dresser la liste. Vous savez que votre ami Roger Durant **appartient** à votre meute, mais que votre sœur n'y appartient pas, ni Jacques Dupont, qui est d'une autre meute, ni Louis Dubois, qui n'est pas Eclaireur. Votre tente non plus n'appartient pas à votre meute, car en mathématique, **l'appartenance** n'est pas une question de possession : votre meute ne comprend que des louveteaux et non pas leur équipement.
>
> Alors, puisque vous voilà devenu un modeste mathématicien, adoptez, entre mathématiciens, *le langage des mathématiciens*, et employez-le avec *précision et fidélité*. (Queyzanne-Revuz gr. 6, 1969 p. 7).

L'exemple montre bien le mode d'utilisation des exemples du langage courant dans le manuel de Revuz : ils servent d'illustrations pour initier les élèves à l'utilisation correcte des notions mathématiques définies par les mathématiciens. Mais l'exemple devient particulièrement parlant par le choix de son thème : Revuz explicite ainsi que l'enjeu de l'apprentissage des mathématiques est bien une *initiation* à une *institution préexistante*, et pour y être initié, il faut avant tout accepter les règles bien définies par cette institution.

En termes de contrat dans le sens de la TSD, on voit ici l'établissement explicit de ce que Perrin-Glorian et Hersant (2003) appellent un *macrocontrat*, c'est-à-dire un contrat pour le long terme, et notamment de type d'*initiation* (réf Perrin-Glorian et Hersant 2003 p. 239-242). Il s'agit d'une transmission directe du savoir, dans ce cas de l'utilisation du langage mathématique: la tâche des élèves est de s'approprier ce savoir institutionnel et l'appliquer avec « précision et fidélité ».

Les instructions du programme soulignent l'importance d'appliquer des méthodes de la « pédagogie active ». (Prog. fr. é. m. 1969 p. 22) Les préfaces des manuels scolaires insistent sur ces instructions ; toutefois, ils offrent peu d'aide pour la mise en place des méthodes actives. Leur texte est descriptif, il suit en gros l'ordre logique d'un traité mathématique « moderne » : il définit des notions, introduit des notations, décrit des propriétés et donne en complément quelques exemples. La transparence et la clarté sont renforcées par des outils typographiques, qui découpent et structurent clairement les textes. À partir de la Quatrième, ce sont des définitions, des théorèmes et des démonstrations qui s'enchaînent dans les textes, avec quelques exemples, mais sans questions ou problématisation du sujet traité[124]. En fait, le développement purement déclaratif du contenu mathématique, préférant une organisation axiomatique-déductive à partir de la Quatrième, correspond surtout aux méthodes d'enseignement d'un cours magistral.

Ces principaux textes, appelés « leçons » dans plusieurs collections (comme celle de Monge ou de Polle et Clopeau), sont complétés de deux façons différentes : on trouve d'une part des « exercices » après chaque chapitre, d'autre part, dans certaines collections, des marges contenant des illustrations, des questions et des exercices. (Dans le manuel de Monge, les figures géométriques sont entièrement renvoyées à la marge, soulignant ainsi qu'ils ne font pas partie intégrante du discours mathématiques, elles servent uniquement d'illustration.)

[124] C'est la collection Queysanne-Revuz qui en fait une certaine exception avec ses métadiscours sur les mathématiques, adressés aux élèves à la deuxième personne du pluriel, comme on l'a vu avec l'exemple des Éclaireurs plus haut.

Pour ce qui concerne les marges, le « mode d'emploi » fourni dans l'avant-propos du manuel de Polle et Clopeau en dit ce qui suit :

> **Mode d'emploi du livre**
>
> Lire la partie de la page écrite sur le fond blanc : d'abord un paragraphe entier, marqué par un point chiffré […] ; puis chercher à répondre aux questions posées dans la bande couleur en regard, dite « bande auto-contrôle ».
>
> L'élève dispose ici d'un test lui permettant de savoir s'il a compris ce qu'il vient de lire ; si le test est négatif, il faut reprendre l'étude du texte écrit sur le fond blanc.
>
> Qui sait répondre à toutes les questions de la bande auto-contrôle au point 3 peut considérer qu'il a compris ce point et passer alors à l'étude du point 4. (Polle-Clopeau gr. 6, 1973 p. 7)

Le livre présente donc des « leçons », du savoir institutionnel que le lecteur a pour tâche de comprendre et de s'approprier. Les questions et exercices de la marge servent au contrôle et à l'acquisition du savoir. On retrouve donc à nouveau le type de contrat d'initiation, en ce qui concerne la lecture du livre. L'avant-propos du manuel de Sixième précise en effet que « le livre doit permettre *une étude solide des leçons* », « un *éventuel rattrapage* d'un élève qui n'aurait pu assister à une leçon », et enfin « faciliter l'initiation des parents soucieux de suivre les études de leurs enfants et les aider à contrôler l'assimilation des connaissances ». En ce qui concerne la mise en place pédagogique de ces cours, le livre renvoie à « la liberté pédagogique de chaque maître » (Polle-Clopeau gr. 6, 1973 p.6).

La structuration des manuels de Queysanne-Revuz fournit un guide plus explicite pour la mise en place pédagogique des leçons. Le livre du professeur de la classe de Sixième explique que

> Le manuel de l'élève est découpé en 32 chapitres correspondant en gros à une semaine de travail. Dans chacun de ces chapitres on trouvera :
>
> 1° En bleu tout ce qui concerne la participation de l'élève à la construction même du cours : examen des situations concrètes puis de situations mathématiques.
>
> 2° En noir la présentation de ces situations, les commentaires consécutifs au travail collectif des élèves et les conclusions qu'il convient d'en tirer.
>
> 3° En rouge les plus importantes de ces conclusions ; il n'est pas question de faire apprendre par cœur ces conclusions (Cf. remarques pédagogiques sur l'ensemble du manuel p. 16.)
>
> 4° Des exercices sur les notions étudiées dans le chapitre. Ces exercices sont répartis suivant les paragraphes auxquels ils se rapportent : un numéro rouge le rappelle.
>
> 5° Quelques exercices de révision du programme du Cours Moyen (Queysanne-Revuz gr. 6, 1969 p. 2)

Des codes-couleurs sont donc appliqués dans les manuels scolaires pour distinguer des différents types d'activités que les auteurs suggèrent de mettre en place. Selon les auteurs, les

processus ainsi décrits permettent aux élèves de « dégager les conclusions et formulations essentielles » :

> Conformément aux Instructions Ministérielles, les *Travaux Pratiques* sont non seulement intégrés au texte mais participent au développement des trente-deux chapitres du manuel ; chacun de ces chapitres, centré sur l'étude d'une question, correspond en gros à une semaine de travail. Ainsi, à partir de situations familières et concrètes, c'est l'élève lui-même qui est amené à dégager les conclusions et formulations essentielles. (Queyzanne-Revuz gr. 6, 1969 p. 5)

Nous examinons ici un exemple issu de leur manuel de Sixième, concernant le domaine de la géométrie. Le premier chapitre de géométrie de Queysanne-Revuz porte sur la « longueur des segments d'une droite » (gr 6, 1969, p. 126-134, voir annexe III.4.1) : il permet de voir à la fois la mise en place d'une « pédagogie active » et le processus d'initiation aux termes mathématiques à partir du réel, comme envisagé par les auteurs.

Le texte attire tout d'abord l'attention sur l'ambiguïté de l'utilisation du terme « mesure » dans le langage quotidien, et précise le sens mathématique du terme. Le chapitre suggère ensuite une activité : la graduation d'une droite tracée sur une feuille de papier. Le livre donne des instructions précises pour réaliser l'activité dans la pratique :

Il s'agit simplement ici de graduer une droite tracée sur une feuille de papier.

Tracez sur votre feuille une droite xy sur laquelle vous marquerez deux points a et m.

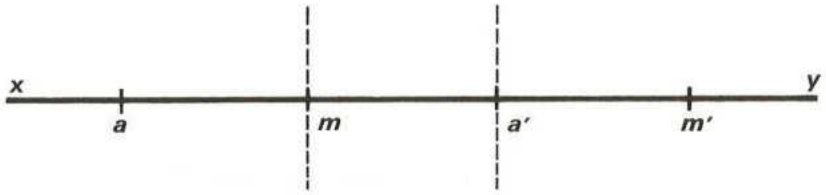
Pliez votre feuille de manière que le pli passe par m et que les demi-droites mx et my se recouvrent exactement. Percez d'une pointe, au point a, les deux épaisseurs de papier ainsi superposées.

CHAPITRE 16 129

Ouvrez votre feuille bien à plat et marquez a' au second trou, qui correspondait au point a lors de votre pliage (fig. 1).

$[am]$ et $[ma']$ sont deux segments de la droite xy; leur intersection est le singleton $\{m\}$.

fig. 1



Recommencez l'opération précédente en faisant passer le pli par a', de telle sorte que les demi-droites $a'x$ et $a'y$ se recouvrent, et en perçant les deux épaisseurs de papier au point m. Vous obtenez un nouveau point m'.

Vous avez ainsi un moyen de réaliser expérimentalement une graduation dont les repères a, m, a', m', ..., sont *régulièrement espacés*.

Figure III.4.1 (Queyzanne-Revuz gr. 6 1969 pp. 128-129)

L'activité des élèves est donc strictement guidée, et amène à une notion définie par le livre (ou par l'enseignant). Il n'y a pas de problème posé, on ne peut donc pas parler de potentiel d'adidacticité. Malgré les intentions déclarées dans l'avant-propos, cette activité ne permet guère aux élèves de « dégager des conclusions par eux-mêmes ».

Pour ce qui concerne l'expérience physique, elle n'est donc pas la base d'un travail cognitif, elle sert plutôt d'illustration de la notion mathématique abstraite visée : il ne s'agit donc pas de travail dans un paradigme G1. Et en effet, après cette première activité initiative, on passe à un travail sur les représentations, sans recours à l'expérience physique.

On l'a vu, le programme demande de partir en effet des expériences physiques, réelles, avant de définir une notion mathématique, mais qui doit être ensuite clairement distinguée des observations physiques. C'est ce qui est réalisé dans le manuel de Queyzanne-Revuz.

Pour ce qui concerne les « méthodes actives », on voit donc que les manuels scolaires de l'époque des « mathématiques modernes » offrent peu de soutien aux enseignants, et même dans le cas exceptionnel de Queyzanne-Revuz, il s'agit plutôt d'une activité servant l'illustration des notions introduites par l'enseignant, sans autonomie laissée aux élèves dans le processus d'apprentissage. Au-delà de quelques remarques générales, les livres de professeurs n'apportent pas non plus d'aide d'un point de vue pédagogique : ils contiennent surtout des corrigés d'exercices. Pour l'application de la pédagogie moderne, les auteurs de manuels renvoient souvent aux fiches de travail ou aux cahiers d'exercice. En même temps, ces cahiers semblent comporter surtout des « exercices d'application » ou de « contrôle » : ils servent avant tout le contrôle d'acquisition et la stabilisation du savoir transmis au cours. Nous examinerons de plus près les exercices de fin de chapitres liés au théorème de Pythagore.

3.2 Le traitement du théorème de Pythagore dans les manuels et livres de professeurs

3.2.1 Les manuels français des « mathématiques modernes »

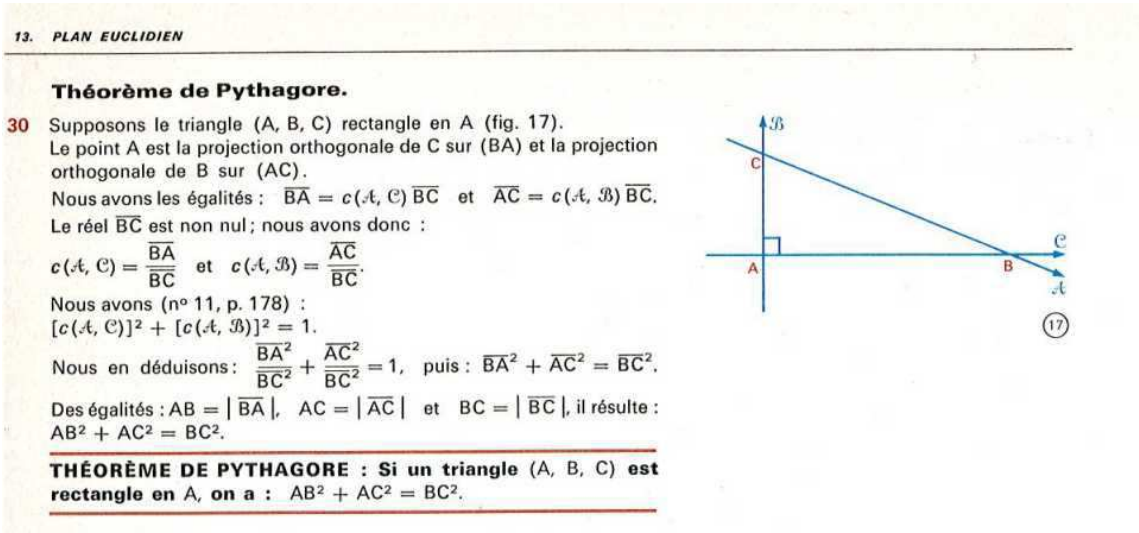
Le manuel scolaire de Monge situe le théorème de Pythagore dans la même organisation mathématique que le programme, et reprend aussi la démonstration qui y est proposée. Le théorème de Pythagore se trouve dans la partie III, intitulée « Plan euclidien », qui comporte les chapitres suivants :

11. Compléments de géométrie affine plane
12. Orthogonalité

13. Plan euclidien

14. Norme d'un vecteur. Repère orthonormé

La notion de l'orthogonalité et la projection orthogonale sont introduites dans le chapitre 12 : ce dernier sera une notion centrale qui permet de caractériser le plan euclidien dans le chapitre suivant. Pour définir un plan euclidien, la notion de distance est définie au début du chapitre 13, ensuite un nouvel axiome est introduit : « l'axiome de symétrie du rapport de projection orthogonale ». C'est sur ces notions que le théorème de Pythagore s'appuie. Plus tard, dans le chapitre 14, le théorème de Pythagore intervient pour caractériser les vecteurs orthogonaux, et définir des repères orthogonaux.



13. PLAN EUCLIDIEN

Théorème de Pythagore.

30 Supposons le triangle (A, B, C) rectangle en A (fig. 17).
Le point A est la projection orthogonale de C sur (BA) et la projection orthogonale de B sur (AC).
Nous avons les égalités : $\overline{BA} = c(\mathcal{A}, \mathcal{C})\,\overline{BC}$ et $\overline{AC} = c(\mathcal{A}, \mathcal{B})\,\overline{BC}$.
Le réel $\overline{BC}$ est non nul ; nous avons donc :

$$c(\mathcal{A}, \mathcal{C}) = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \quad \text{et} \quad c(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Nous avons (n° 11, p. 178) :
$[c(\mathcal{A}, \mathcal{C})]^2 + [c(\mathcal{A}, \mathcal{B})]^2 = 1.$

Nous en déduisons : $\dfrac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2} + \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} = 1$, puis : $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$.

Des égalités : $AB = |\overline{BA}|$, $AC = |\overline{AC}|$ et $BC = |\overline{BC}|$, il résulte :
$AB^2 + AC^2 = BC^2$.

THÉORÈME DE PYTHAGORE : Si un triangle (A, B, C) est rectangle en A, on a : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Figure III.4.2 (Monge gr. 9 1972 p. 194)

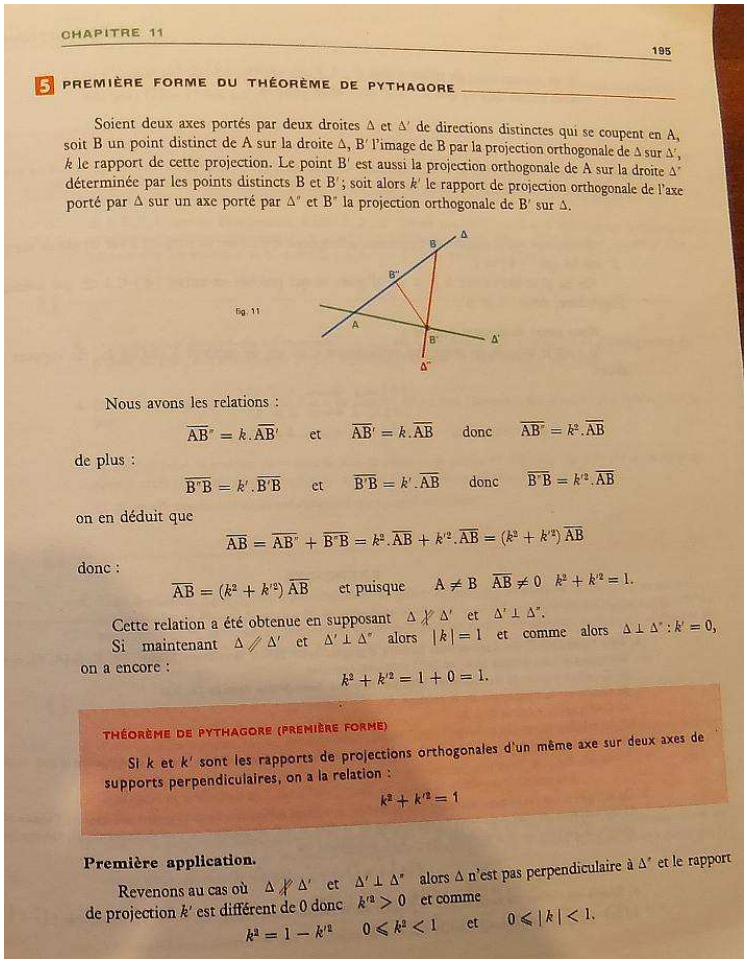
« c(*A*,*C*) » désigne le rapport de projection orthogonal des axes *A* et *C*. Le théorème de Pythagore est déduit de la définition du rapport de projection orthogonale et d'une propriété, démontrée précédemment, de ce rapport. La démonstration est ainsi réduite à quelques simples transformations algébriques – mais elle nécessite par contre la connaissance et la gestion des symboles d'un langage formel, et s'appuie en outre sur un autre théorème assez lourd, dont la démonstration requiert un page entière (p. 177-178, voir l'annexe III.4.2)

Si l'on ce concentre maintenant sur les caractéristiques textuelles et paratextuelles de l'extrait du manuel, on peut observer qu'il s'agit d'un texte purement théorique, axiomatique-déductif. Même sur ce court extrait, on peut observer une structuration forte, apportée par des outils typographiques : paragraphes numérotés, lettres en gras, traits en couleur organisent visuellement le texte. La figure est sur la marge, fonctionne comme illustration, mais ne fait pas partie intégrante du texte mathématique. Il est d'ailleurs intéressant d'observer que la figure accompagnant le théorème de Pythagore représente des axes et pas vraiment un triangle comme objet géométrique. Cette observation confirme notre constatation selon laquelle le

théorème de Pythagore, dans le programme et dans les manuels français, ne porte pas sur l'objet géométrique ce qu'est un triangle, mais joue un rôle dans la caractérisation du plan euclidien, et plus précisément des axes orthogonaux.

La collection Queyzanne-Revuz va plus loin encore dans « l'élimination des triangles » : l'énoncé du théorème de Pythagore n'y parle même pas de triangle. Le théorème intervient ici aussi dans la construction des outils algébriques pour caractériser le plan euclidien, et tout particulièrement pour introduire les notions d'orthogonalité et de distance. Le manuel évoque deux versions du théorème dont la première apparaît dans le chapitre 11 (« Orthogonalité des droites du plan »), la deuxième dans le chapitre 12 (« Distance du plan euclidien »). Dans sa première forme : « Si k et k' sont les rapports de projections orthogonales d'un même axe sur deux axes de supports perpendiculaires, on a la relation : $k^2 + k'^2 = 1$. » (Queyzanne-Revuz gr. 9, 1972 p. 195). Et dans sa deuxième forme : « Si A, B et C sont trois points distincts du plan Euclidien, les droites (AC) et (AB) sont orthogonales si et seulement si : $[d\,(B, C)]^2 = [d\,(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2$. » (Queyzanne-Revuz gr. 9, 1972 p. 207). Il s'agit donc en effet des propriétés du plan euclidien : le livre ne parle pas du tout des propriétés des triangles rectangles.

On trouve, dans ce manuel aussi, l'utilisation d'un langage formel poussé, et un traitement purement algébrique du théorème, dans lequel les figures ne jouent que le rôle d'illustration. Similairement au manuel de Monge, le discours déductif du manuel vise un travail dans le paradigme G3.



CHAPITRE 11 195

5 PREMIÈRE FORME DU THÉORÈME DE PYTHAGORE

Soient deux axes portés par deux droites Δ et Δ' de directions distinctes qui se coupent en A, soit B un point distinct de A sur la droite Δ, B′ l'image de B par la projection orthogonale de Δ sur Δ', k le rapport de cette projection. Le point B′ est aussi la projection orthogonale de A sur la droite Δ'' déterminée par les points distincts B et B′ ; soit alors k' le rapport de projection orthogonale de l'axe porté par Δ sur un axe porté par Δ'' et B″ la projection orthogonale de B′ sur Δ.

fig. 11

Nous avons les relations :

$$\overline{AB''} = k.\overline{AB'} \quad \text{et} \quad \overline{AB'} = k.\overline{AB} \quad \text{donc} \quad \overline{AB''} = k^2.\overline{AB}$$

de plus :

$$\overline{B''B} = k'.\overline{B'B} \quad \text{et} \quad \overline{B'B} = k'.\overline{AB} \quad \text{donc} \quad \overline{B''B} = k'^2.\overline{AB}$$

on en déduit que

$$\overline{AB} = \overline{AB''} + \overline{B''B} = k^2.\overline{AB} + k'^2.\overline{AB} = (k^2 + k'^2)\,\overline{AB}$$

donc :

$$\overline{AB} = (k^2 + k'^2)\,\overline{AB} \quad \text{et puisque} \quad A \neq B \quad \overline{AB} \neq 0 \quad k^2 + k'^2 = 1.$$

Cette relation a été obtenue en supposant $\Delta \not\perp \Delta'$ et $\Delta' \perp \Delta''$.

Si maintenant $\Delta \parallel \Delta'$ et $\Delta' \perp \Delta''$ alors $|k| = 1$ et comme alors $\Delta \perp \Delta'' : k' = 0$, on a encore :

$$k^2 + k'^2 = 1 + 0 = 1.$$

THÉORÈME DE PYTHAGORE (PREMIÈRE FORME)

Si k et k' sont les rapports de projections orthogonales d'un même axe sur deux axes de supports perpendiculaires, on a la relation :

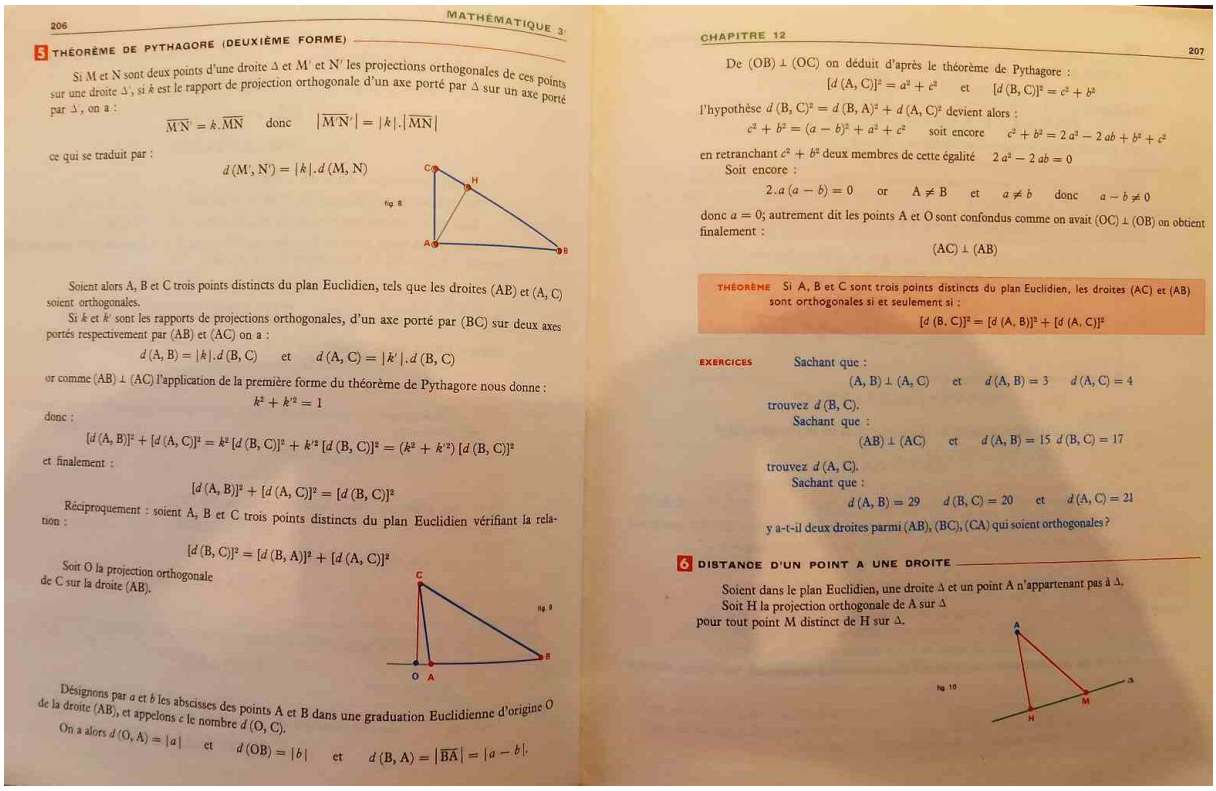
$$k^2 + k'^2 = 1$$

Première application.

Revenons au cas où $\Delta \not\perp \Delta'$ et $\Delta' \perp \Delta''$ alors Δ n'est pas perpendiculaire à Δ'' et le rapport de projection k' est différent de 0 donc $k'^2 > 0$ et comme

$$k^2 = 1 - k'^2 \qquad 0 \leqslant k^2 < 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant |k| < 1.$$

Figure III.4.3 (Queyzanne-Revuz gr. 9, 1972 p. 195)



206 MATHÉMATIQUE 3

5 THÉORÈME DE PYTHAGORE (DEUXIÈME FORME)

Si M et N sont deux points d'une droite Δ et M′ et N′ les projections orthogonales de ces points sur une droite Δ', si k est le rapport de projection orthogonale d'un axe porté par Δ sur un axe porté par Δ', on a :

$$\overline{M'N'} = k.\overline{MN} \quad \text{donc} \quad |\overline{M'N'}| = |k|.|\overline{MN}|$$

ce qui se traduit par :

$$d(M', N') = |k|.d(M, N)$$

fig. 8

Soient alors A, B et C trois points distincts du plan Euclidien, tels que les droites (AB) et (A, C) soient orthogonales.

Si k et k' sont les rapports de projections orthogonales, d'un axe porté par (BC) sur deux axes portés respectivement par (AB) et (AC) on a :

$$d(A, B) = |k|.d(B, C) \quad \text{et} \quad d(A, C) = |k'|.d(B, C)$$

or comme (AB) ⊥ (AC) l'application de la première forme du théorème de Pythagore nous donne :

$$k^2 + k'^2 = 1$$

donc :

$$[d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2 = k^2[d(B, C)]^2 + k'^2[d(B, C)]^2 = (k^2 + k'^2)[d(B, C)]^2$$

et finalement :

$$[d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2 = [d(B, C)]^2$$

Réciproquement : soient A, B et C trois points distincts du plan Euclidien vérifiant la relation :

$$[d(B, C)]^2 = [d(B, A)]^2 + [d(A, C)]^2$$

Soit O la projection orthogonale de C sur la droite (AB).

fig. 9

Désignons par a et b les abscisses des points A et B dans une graduation Euclidienne d'origine O de la droite (AB), et appelons c le nombre $d(O, C)$.

On a alors $d(O, A) = |a|$ et $d(OB) = |b|$ et $d(B, A) = |\overline{BA}| = |a - b|$.

CHAPITRE 12 207

De (OB) ⊥ (OC) on déduit d'après le théorème de Pythagore :

$$[d(A, C)]^2 = a^2 + c^2 \quad \text{et} \quad [d(B, C)]^2 = c^2 + b^2$$

l'hypothèse $d(B, C)^2 = d(B, A)^2 + d(A, C)^2$ devient alors :

$$c^2 + b^2 = (a - b)^2 + a^2 + c^2 \quad \text{soit encore} \quad c^2 + b^2 = 2a^2 - 2ab + b^2 + c^2$$

en retranchant $c^2 + b^2$ deux membres de cette égalité $2a^2 - 2ab = 0$

Soit encore :

$$2.a(a - b) = 0 \quad \text{or} \quad A \neq B \quad \text{et} \quad a \neq b \quad \text{donc} \quad a - b \neq 0$$

donc $a = 0$; autrement dit les points A et O sont confondus comme on avait (OC) ⊥ (OB) on obtient finalement :

$$(AC) \perp (AB)$$

THÉORÈME Si A, B et C sont trois points distincts du plan Euclidien, les droites (AC) et (AB) sont orthogonales si et seulement si :

$$[d(B, C)]^2 = [d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2$$

EXERCICES

Sachant que :

$$(A, B) \perp (A, C) \quad \text{et} \quad d(A, B) = 3 \quad d(A, C) = 4$$

trouvez $d(B, C)$.

Sachant que :

$$(AB) \perp (AC) \quad \text{et} \quad d(A, B) = 15 \quad d(B, C) = 17$$

trouvez $d(A, C)$.

Sachant que :

$$d(A, B) = 29 \quad d(B, C) = 20 \quad \text{et} \quad d(A, C) = 21$$

y a-t-il deux droites parmi (AB), (BC), (CA) qui soient orthogonales ?

6 DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE

Soient dans le plan Euclidien, une droite Δ et un point A n'appartenant pas à Δ.

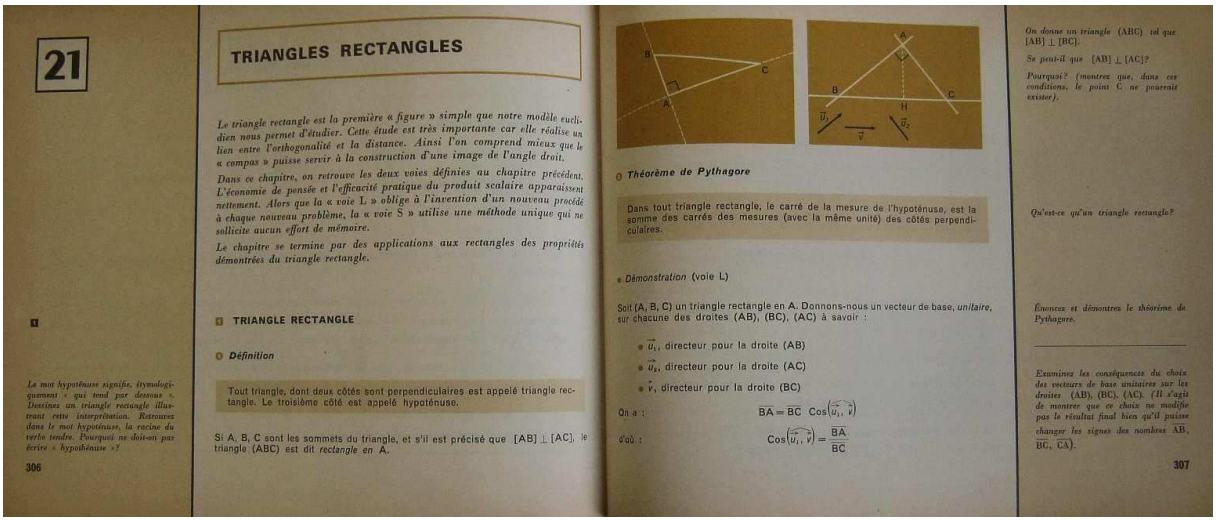
Soit H la projection orthogonale de A sur Δ

pour tout point M distinct de H sur Δ.

fig. 10

Figure III.4.4 (Queyzanne-Revuz gr. 9, 1972 pp. 206-207)

Le manuel de Polle-Clopeau est le seul parmi les manuels étudiés qui, se différenciant de l'organisation mathématique du programme, situe le théorème de Pythagore après la construction du plan euclidien, comme l'une des premières conséquences de ce dernier. (Il s'agit de la partie « Géométrie plane euclidienne », dont le premier chapitre est « Triangles rectangles ») Ici, le théorème porte effectivement sur une figure qui est le triangle rectangle, et sert à présenter « la richesse du modèle posé » (Polle-Clopeau gr. 9, 1972 p. 305).



21

TRIANGLES RECTANGLES

Le triangle rectangle est la première « figure » simple que notre modèle euclidien nous permet d'étudier. Cette étude est très importante car elle réalise un lien entre l'orthogonalité et la distance. Ainsi l'on comprend mieux que le « compas » puisse servir à la construction d'une image de l'angle droit.

Dans ce chapitre, on retrouve les deux voies définies au chapitre précédent. L'économie de pensée et l'efficacité pratique du produit scalaire apparaissent nettement. Alors que la « voie L » oblige à l'invention d'un nouveau procédé à chaque nouveau problème, la « voie S » utilise une méthode unique qui ne sollicite aucun effort de mémoire.

Le chapitre se termine par des applications aux rectangles des propriétés démontrées du triangle rectangle.

1 TRIANGLE RECTANGLE

1 *Définition*

Tout triangle, dont deux côtés sont perpendiculaires est appelé triangle rectangle. Le troisième côté est appelé hypoténuse.

Si A, B, C sont les sommets du triangle, et s'il est précisé que [AB] ⊥ [AC], le triangle (ABC) est dit *rectangle en A*.

Le mot hypoténuse signifie, étymologiquement « qui tend par dessous ». Dessinez un triangle rectangle illustrant cette interprétation. Retrouvez dans le mot hypoténuse, la racine du verbe tendre. Pourquoi ne dois-on pas écrire « hypothénuse » ?

306

1 *Théorème de Pythagore*

Dans tout triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse, est la somme des carrés des mesures (avec la même unité) des côtés perpendiculaires.

• *Démonstration* (voie L)

Soit (A, B, C) un triangle rectangle en A. Donnons-nous un vecteur de base, *unitaire*, sur chacune des droites (AB), (BC), (AC) à savoir :

• $\vec{u}_1$, directeur pour la droite (AB)

• $\vec{u}_2$, directeur pour la droite (AC)

• $\vec{v}$, directeur pour la droite (BC)

On a : $\overline{BA} = \overline{BC}\ \mathrm{Cos}(\widehat{\vec{u}_1, \vec{v}})$

d'où : $\mathrm{Cos}(\widehat{\vec{u}_1, \vec{v}}) = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$

On donne un triangle (ABC) tel que [AB] ⊥ [BC].

Se peut-il que [AB] ⊥ [AC]?

Pourquoi? (montrez que, dans ces conditions, le point C ne pourrait exister).

Qu'est-ce qu'un triangle rectangle?

Énoncez et démontrez le théorème de Pythagore.

Examinez les conséquences du choix des vecteurs de base unitaires sur les droites (AB), (BC), (AC). (Il s'agit de montrer que ce choix ne modifie pas le résultat final bien qu'il puisse changer les signes des nombres $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$).

307

Figure III.4.5 (Polle-Clopeau gr. 9 1972 pp. 306-307)

Son importance consiste, pourtant, dans sa puissance pour la caractérisation du plan euclidien.

> Le triangle rectangle est la première « figure » simple que notre modèle euclidien nous permet d'étudier. Cette étude est très importante car elle réalise un lien entre l'orthogonalité et la distance. Ainsi l'on comprend mieux que le « compas » puisse servir à la construction d'une image de l'angle droit. (Polle-Clopeau gr. 9 1972 p. 306)

La démonstration du théorème s'appuie sur les vecteurs. Une des spécialités du manuel est qu'il définit, dès le chapitre précédent, deux voies parallèles de développement : la « voie L » plus proche à la lettre du programme et sans produit scalaire, et la « voie S » introduisant la notion de produit scalaire. Concernant ces deux voies, l'introduction du chapitre sur les triangles rectangles souligne :

> L'économie de pensée et l'efficacité pratique du produit scalaire apparaissent nettement. Alors que la « voie L » oblige à l'invention d'un nouveau procédé à chaque nouveau problème, la « voie S » utilise une méthode unique qui ne sollicite aucun effort de mémoire. (p. 306)

C'est donc l'idée de « l'économie de pensée » souvent rencontrée dans les discours épistémologiques accompagnant la réforme (Partie II, §2.1.4), qui est mise en œuvre ici : au

lieu de présenter une diversité de méthodes, les auteurs favorisent « l'efficacité » et la puissance d'une « méthode unique » qui s'appuie dans ce cas particulier sur la notion de produit scalaire.

En effet, on trouve deux démonstrations différentes du théorème de Pythagore dans le manuel de Polle-Clopeau. La première, du « voie L », reprend à peu près la démonstration du programme, en termes de vecteurs et de la fonction « cosinus », mais s'appuie sur le même théorème préalable, appelé « condition d'orthogonalité ». La deuxième, la « voie S », s'appuie sur la notion du produit scalaire, et est effectivement très court : elle ne consiste qu'en quelques transformations algébriques.

Le livre, à l'instar des autres, suit un discours déductif, sans potentialités adidactiques. On voit des questions dans la marge, mais, comme les conseils d'utilisation du livre l'ont précisé, il s'agit des questions de contrôle, qui permettent au lecteur de vérifier s'il a bien compris le texte (par exemple : « Qu'est-ce qu'un triangle rectangle ?» « Énoncez et démontrez le théorème de Pythagore »).

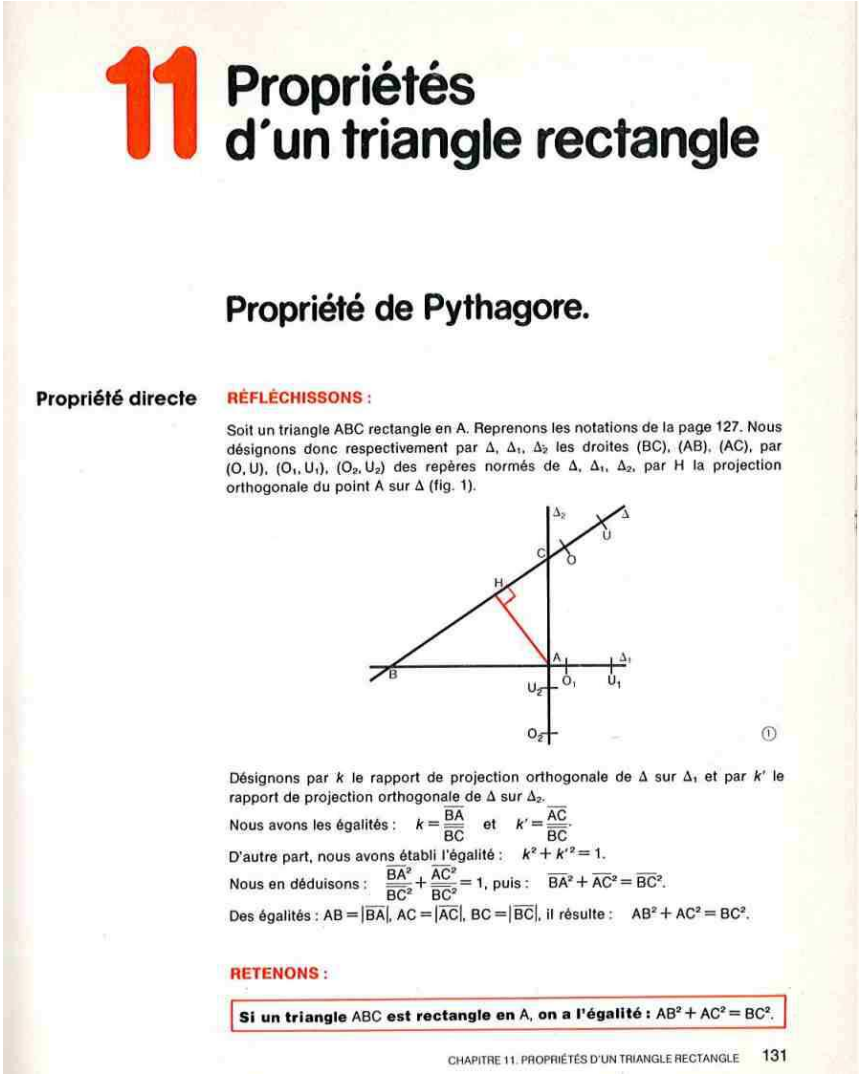
Dans chacun des manuels étudiés, des exercices suivent le texte du « cours ». Il Ces exercices sont de deux types : des exercices de calcul, qui nécessitent l'application du théorème (ou d'autres théorèmes du chapitre) sur des exemples numériques concrets, ou sur des valeurs données algébriquement. D'autres types d'exercices requièrent des démonstrations : ils nécessitent la combinaison de quelques théorèmes appris au préalable, et un travail algébrique (dans certains cas assez complexe) sur les énoncés. Les exercices visent beaucoup plus rarement à la mise en œuvre des connaissances géométriques ; toutefois, chez Monge et chez Revuz aussi, on trouve des exercices qui nécessitent l'utilisation des propriétés de la médiane, une notion étudiée l'année précédente (voir les exercices de Monge dans l'annexe III.4.3).

Les exercices des livres permettent donc un travail autonome, parfois assez complexe, des élèves. Ils demandent l'application d'une part des éléments de savoir, d'autre part des techniques de démonstration apprises au préalable. Ils permettent le contrôle des acquisitions et la stabilisation du savoir mathématique, ils ne servent cependant pas à introduire de nouvelles connaissances. L'introduction des connaissances nouvelles est laissée entièrement au cours, dans une forme linéaire et déductive.

3.2.2 Un exemple de 1977

On a vu comment le programme change en 1977 ; plusieurs éditeurs de manuels reprennent cependant leurs manuels avec des modifications légères par rapport aux éditions du début des

années 1970. La structure s'adapte au nouveau programme, mais le contenu, le style change très peu : c'est le cas par exemple des collections de Monge ou de Maugin. L'exemple de Monge est très parlant : il introduit, avant les démonstrations, un appelle à « réfléchir », sans doute pour la conformité aux nouvelles instructions, mais sans poser aucune question, et reproduisant la démonstration de la version précédente.



11 Propriétés d'un triangle rectangle

Propriété de Pythagore.

Propriété directe

RÉFLÉCHISSONS :

Soit un triangle ABC rectangle en A. Reprenons les notations de la page 127. Nous désignons donc respectivement par Δ, Δ_1, Δ_2 les droites (BC), (AB), (AC), par (O, U), (O_1, U_1), (O_2, U_2) des repères normés de Δ, Δ_1, Δ_2, par H la projection orthogonale du point A sur Δ (fig. 1).

Désignons par k le rapport de projection orthogonale de Δ sur Δ_1 et par k' le rapport de projection orthogonale de Δ sur Δ_2.

Nous avons les égalités : $k = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$ et $k' = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

D'autre part, nous avons établi l'égalité : $k^2 + k'^2 = 1$.

Nous en déduisons : $\frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2} + \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} = 1$, puis : $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$.

Des égalités : $AB = |\overline{BA}|$, $AC = |\overline{AC}|$, $BC = |\overline{BC}|$, il résulte : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

RETENONS :

Si un triangle ABC **est rectangle en** A, **on a l'égalité :** $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

CHAPITRE 11. PROPRIÉTÉS D'UN TRIANGLE RECTANGLE 131

Figure III.4.6 (Monge gr. 9, 1980 p. 131)

On peut remarquer cependant que les notations sont simplifiées, la marge a disparu, la figure est désormais intégrée dans le texte (même si elle n'est pas partie intégrante de la démonstration qui reste algébrique), et enfin, que la « propriété de Pythagore » intervient désormais dans un chapitre consacré aux triangles.

L'exemple illustre donc certains recules et compromis par rapport à la réforme des « mathématiques modernes » qui sont conformes au nouveau programme : mais le discours déductif et algébrique reste présent dans la nouvelle version, et l'organisation mathématique semble peu changée.

En même temps, des nouvelles collections de manuels scolaires apparaissent à la fin des années 1970. Celle de Deledicq et Lassave représente un exemple de critique radicale contre les « mathématiques modernes ». Le titre même de la collection *« Faire » des mathématiques* est parlant. L'avant-propos de Gilbert Walusinski souligne en effet « la priorité accordée aux exercices, à la recherche » comme originalité du manuel. Le livre du professeur de Quatrième consacre quelques pages à « L'initiation à la démonstration » et à la « Présentation de la géométrie » (Deledicq-Lassave livre du prof. gr. 8, 1979 pp. 5-10). Selon les auteurs, « démontrer n'est pas le seul objectif des mathématiques (p. 5). Ils définissent de nombreux objectifs, du « heuristique » à travers du « classificatoire, calculatoire, logique » entre autres jusqu'au « critique » et « prédictif », et ils analysent différents composants nécessaires pour « savoir démontrer », dont l'apprentissage « ne commence pas, selon eux, en quatrième et ne finit pas en troisième ». Tout en reconnaissant l'intérêt de la méthode axiomatique-déductive en mathématiques, ils remettent en question l'intérêt d'un traitement axiomatique dans l'enseignement du niveau moyen :

> Comment une telle exposition de la géométrie atteint-elle les objectifs qui nous semblent, en quatrième, être modestement (?) les suivants :
>
> - se familiariser (dans un but *opérationnel*) avec les êtres géométriques classiques
> - apprendre l'activité de *démonstration*
>
> Les questions que nous avons posées plus haut, à droite du texte page précédente, précisent notre souci, au niveau des élèves :
>
> (1) La transitivité du parallélisme, les énoncés liant parallélisme et orthogonalité sont tout aussi immédiats que l'énoncé d'Euclide !
>
> (2) Le choix des axiomes ne peut être fait qu'à postériori ; s'il est fait alors par le professeur il ne peut être perçu que comme arbitraire !
>
> (3) Soyons sérieux : les démonstrations les plus difficiles sont au tout début de toute progression axiomatique ; l'élève est donc censé d'apprendre, à la fois, ce qu'est (et à quoi sert) une démonstration et ce qu'est le processus de modélisation.
>
> (4) L'initiation à la démonstration n'est déjà pas facile, en plus, on ne peut aboutir qu'à des résultats évidents ; ce n'est pas seulement une question de motivation mais surtout de compréhension : à quoi cela peut-il servir de démontrer des évidences ? (Deledicq-Lassave livre du prof. gr. 8, 1979 p. 9)

Le traitement mathématique convenable et celui convenable pour l'enseignement des mathématiques ne sont donc plus identiques ici : refusant cette grande idée directrice des années 1960, Deledicq et Lassave soulignent que la méthode axiomatique-déductive ne peut justement pas être apprise au travers d'une présentation axiomatique-déductive du programme.

Certains chapitres du manuel proposent de nombreux exercices, en distinguant différents types : des « exercices d'introduction » avant le résumé du « cours guidé », et ensuite des exercices « pour s'entraîner », « pour démontrer », « pour chercher et pour appliquer » C'est ce qu'on trouve dans le chapitre « Pythagore » aussi (Deledicq-Lassave gr. 9, 1980 pp. 57-64).

Le théorème obtient donc un chapitre autonome. « Basé sur un seul énoncé », selon le livre du professeur, « sa richesse ne peut venir que de la variété des points de vue » (Deledicq-Lassave livre du prof. gr. 9, 1980 p. 63) : il propose entre autres la comparaison d'aires, des activités de mesure de distances, des puzzles, le réinvestissement de l'énoncé dans d'autres situations géométriques, y compris la géométrie de l'espace, et le réinvestissement pour des nouvelles démonstrations.

Dans le manuel scolaire, on trouve en effet tous ces types d'exercices. Les exercices d'introduction visent à faire découvrir l'énoncé par des activités de mesure répétées. Ensuite suit l'énoncé – sans démonstration. La démonstration, en forme de puzzle, est repoussée à la fin du chapitre. Selon le livre du professeur,

> […] notre expérience de classes de troisième nous laisse à penser que la démonstration de l'énoncé de Pythagore à partir d'un quelconque autre énoncé du cours de troisième ne peut servir de motivation à son introduction. Par contre, lorsque cet énoncé est introduit, utilisé, compris, il peut être formateur de montrer qu'il est possible de le retrouver à partir de la trigonométrie par exemple. (Deledicq-Lassave livre du prof. gr. 9, 1980 p. 63)

D'un point de vue géométrique, Deledicq et Lassave abandonnent l'approche algébrique et rendent leur place à l'étude des figures. Après quelques exercices de calcul qui nécessitent l'utilisation des opérations algébriques simples, la majorité des énoncés portent sur des figures diverses : objets géométriques variées du plan et de l'espace, et également des figures ludiques qui nécessitent un certain travail de modélisation (comme la position de l'échelle par rapport au mur ou la délivrance de la princesse).

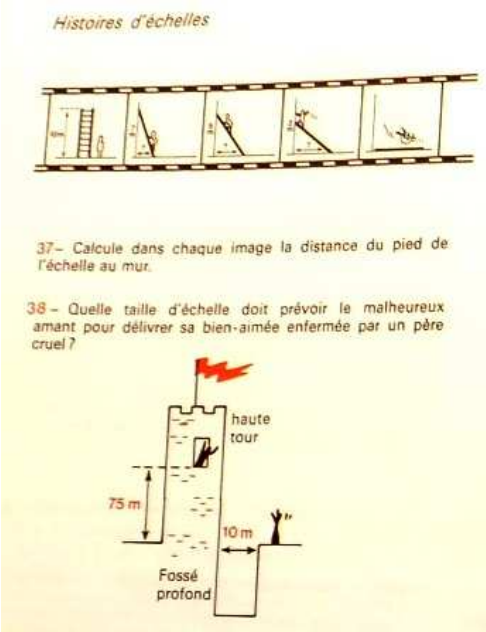


Figure III.4.7 (Deldicq-Lassave gr. 9 1980 p. 62)

Le théorème est approché par un travail dans le paradigme G1, par la mesure sur des figures. Dans la suite, c'est un paradigme G2 qui est appliqué, sans articulation entre les deux. Suite à la décision des auteurs, argumentée dans le livre du professeur, la position de « l'énoncé de Pythagore » est ici ambiguë : il est accepté sur la base d'un travail en G1 qui est censé faire découvrir la relation mais que remplace à la fois une démonstration en G2, et appliqué dans la suite comme un théorème lors d'un travail en G2.

Le livre de Deledicq et Lassave remet donc en question plusieurs principes importants de la réforme des « mathématiques modernes ». En géométrie, profitant de la liberté assurée par le nouveau programme, ils privilégient une approche par des figures au lieu d'une approche algébrique. Ils donnent la priorité à l'activité mathématique des élèves contre l'enseignement de la méthode axiomatique déductive, voyant les deux approches contradictoires. Ils proposent de nombreuses activités de fonction variées, et fournissent des conseils aux enseignants pour concevoir des processus d'apprentissages qui rendent les élèves actifs. Ils insistent sur l'apprentissage des processus de démonstration qui ne peut être commencé, selon eux, par l'axiomatique. L'exemple du théorème de Pythagore montre en même temps que l'ambition de motiver l'activité des élèves relègue chez eux la démonstration au second plan.

Ce manuel scolaire semble être pourtant exceptionnel à l'époque, ce que confirme également l'avant-propos cité de Walusinski. D'autres manuels scolaires semblent proposer plutôt des assouplissements prudents par rapport aux éditions précédentes, prenant en considération des contraintes et des arguments pédagogiques, mais maintenant encore les principes des « mathématiques modernes ».

4 LES MANUELS SCOLAIRES ET LIVRES DE PROFESSEUR DE L'ECOLE MOYENNE EN HONGRIE

En Hongrie, comme on l'a signalé précédemment, une seule série de manuels existe ; elle a été écrite par la même équipe que le programme et les livres du professeur. Ces manuels sont apparemment très différents des manuels français de l'époque des « mathématiques modernes » : ils contiennent de nombreuses illustrations, pas seulement mathématiques, et des signes didactiques visuels. Le signe ci-dessous signifie par exemple qu'il est recommandé d'interrompre la lecture, et de réfléchir sur la question posée avant de continuer.

Figure III.4.8 (Manuel h. gr. 5 1979 p. 4)

Les livres de professeur insistent, tout comme au niveau élémentaire, sur un développement parallèle et articulé des thèmes, bien que cette articulation des thèmes soit beaucoup moins développée pour l'école moyenne. Les manuels suivent un ordre thématique (sans que ce soit l'ordre demandé du développement annuel). Chaque chapitre contient une partie 'cours' suivie d'une série de tâches. Par contre, la partie 'cours' n'imite pas un cours magistral et ne suit pas l'ordre déductif d'un traité mathématique, comme les manuels scolaires français, mais s'appuie souvent sur une solution rhétorique différente : présente des dialogues fictifs des élèves. Le livre du professeur donne l'instruction suivante sur l'utilisation de ces textes :

> Le manuel présente un traitement possible de chaque thème. On peut introduire un problème à travers des tâches présentées. On peut guider les élèves pour créer dans la classe des discussions, débats similaires à ce qui est décrit dans le manuel. Si la classe n'est pas suffisamment active, on peut poser des questions à la place des élèves pour provoquer un débat. Les enfants du livre se trompent souvent, défendent des positions fausses, mais peuvent se convaincre les uns les autres, et on parvient enfin à distinguer les opinions justes des opinions fausses. Ne corrigeons pas les erreurs nous-mêmes, guidons plutôt les élèves, ou laissons-les se guider les uns les autres pour qu'ils reconnaissent et corrigent les erreurs par eux-mêmes.
>
> Après la séance, on peut donner la lecture du texte du manuel pour devoir à la maison. (Livre du prof. h. 1981 gr. 5, p. 5. Ma traduction.)

Les dialogues présentés dans les manuels peuvent donc être utilisés pour la lecture *a posteriori* par des élèves ; mais ils servent avant tout comme *modèles d'enseignement*. Il ne s'agit donc pas de reproduire à l'identique ces situations dans la classe, mais plutôt de mettre en place quelque chose de similaire.

Avant de présenter le chapitre consacré au théorème de Pythagore, nous étudions ici un autre extrait de manuel, à la fois pour insister sur la continuité des caractéristiques de ces documents tout au long de l'école moyenne, et pour présenter d'avantage de caractéristiques de ces dialogues, reprenant plusieurs spécificités des « séries de problèmes » de Rózsa Péter.

L'un des extraits qui nous paraît particulièrement remarquable est celui sur l'introduction de la notion de distance des ensembles de points la première année de l'école moyenne (grade 5, pp. 215-218). Le chapitre en question (voir annexe III.4.4) est introduit par un problème : mesurer la distance d'un fauteuil à une table. Les élèves du manuel se rendent compte d'un désaccord entre eux sur le résultat, et concluent qu'il faut se mettre d'accord sur la définition de la distance. Après un débat, ils fixent une définition : ils acceptent la longueur du plus long segment entre les deux objets comme distance. Ensuite ils sont confrontés à un nouveau problème : la distance d'un stylo à une tache. Ils découvrent que la définition acceptée précédemment donne un résultat contraire à leur intuition. Dans le cas du troisième problème (la distance d'un point à une droite), la définition précédente ne permet même pas de déterminer une distance entre les deux figures. Il paraît donc souhaitable de modifier la définition : les élèves se mettent d'accord sur une autre définition, qui permet de répondre de façon satisfaisante aux trois problèmes cités (la longueur du plus court segment entre les deux ensembles de points). Ce sera la définition retenue par le manuel.

On voit donc ici un modèle d'enseignement organisé autour d'une série de problèmes. Si l'on examine cette série d'abord selon les paradigmes géométriques, on voit un passage du paradigme G1 vers le paradigme G2. Dans le cas du fauteuil et de la table, il s'agit effectivement de mesurer la distance avec un mètre à ruban. Le deuxième problème reste encore en G1, mais approche l'abstraction (on se limite sur un plan où la tâche peut facilement être vue comme une figure géométrique et le point du stylo comme un point du plan). Le troisième problème est clairement un problème du G2, car, en plus d'être confronté à des figures géométriques dont le dessin est seulement une illustration, les élèves doivent aussi se rendre compte de l'infinité de la droite, ce qui ne peut pas être représenté sur un plan physique.

Les problèmes de cet extrait servent à mettre en contexte une notion mathématique : la distance des ensembles de points. Le premier problème n'est pas une illustration bien adaptée à la notion mathématique à introduire, au contraire : dans le cas du fauteuil et de la table, il n'est pas du tout évident de choisir une définition convenable de la distance[125]. Le premier

[125] Si l'objectif était l'illustration qui amène le plus directement possible à la définition visée, la distance d'une maison de la rivière serait par exemple un problème mieux adapté.

problème souligne justement l'ambiguïté de la notion du langage courant, et c'est la reconnaissance de cette ambiguïté qui va motiver la recherche collective d'une définition convenable.

La définition de cette notion n'est donc pas donnée a priori : elle est créée par un consensus de la communauté, conformément aux intuitions des membres de cette communauté concernant le sens de la notion. La création de cette notion est un processus dialectique où les problèmes successifs jouent le rôle de contre-exemples : ils déstabilisent la première définition acceptée et amènent à une définition applicable à un niveau plus général. Le processus garde une nature ouverte : la définition retenue paraît satisfaisante, mais n'exclut pas que de nouveaux problèmes apparaissent dans le futur, nécessitant un développement ultérieur de la définition.[126] Ce processus montre par ailleurs une ressemblance remarquable avec ce qu'on trouve dans *Preuves et réfutations* d'Imre Lakatos : un jeu dialectique des tentatives de preuve, de définitions et de contre-exemples, présenté aussi sous la forme d'un dialogue entre élèves fictifs d'une classe.

Dans d'autres dialogues issus de ces manuels, on peut identifier davantage de fonctions remplies par de telles séries de problèmes : elles permettent par exemple de motiver la démonstration mathématique ou aident à justifier un algorithme en créant différents contextes d'interprétation[127].

Il est intéressant d'observer la similitude stylistique entre les dialogues des manuels scolaires et le texte de Rózsa Péter. Dans les deux cas, il s'agit de textes quasi-continus et peu structurés (avec de nombreuses illustrations dans le cas des manuels). En fait, les manuels présentent aussi des textes semi-dialogués : bien que les dialogues marqués des élèves prennent une place importante, ils sont interrompus par des passages narratifs et des passages où les voix des parlants ne sont pas distinguées. (C'est le cas, dans l'extrait cité, des problèmes eux-mêmes, quand dans certains autres extraits les élèves se proposent des problèmes l'un à l'autre[128]). Si l'on interprète ces textes en tant que modèles d'enseignement, comme c'est suggéré dans le livre du professeur, il est raisonnable de supposer que les

[126] En effet, lors d'une présentation dans un contexte mathématique universitaire, j'étais rappelée à l'insuffisance de cette définition si on veut prendre en compte des ensembles bornés et ouverts. Comme ce problème n'apparaît pas dans le contexte du collège, la définition acceptée est suffisante pour ce niveau, mais doit être révisée et généralisée à un niveau ultérieur.

[127] Le premier sera le cas du théorème de Pythagore où les variations d'un problème amènent à des méthodes de solution radicalement différentes, comme on le verra plus loin. Quant au deuxième type de fonction mentionné, c'est le cas par exemple de la comparaison des fractions (Manuel h. gr. 5 1979 pp. 31-35, voir annexe III.4.5). Une étude systématique de ces dialogues serait sans doute nécessaire pour faire un catalogue des différentes fonctions que les séries de problèmes peuvent y remplir.

[128] Voir l'exemple de la comparaison des fractions dans l'annexe III.4.5.

passages « anonymes » représentent la voix de l'enseignant. On peut les interpréter aussi comme des passages dont le responsable n'est pas défini à l'avance : il peut être dit par un élève, sinon le professeur peut intervenir. Comme on l'a vu, le livre du professeur précise en effet qu'on attend des dialogues *similaires*, mais pas exactement les *mêmes* dans les classes : c'est-à-dire, les textes des manuels permettent d'illustrer des types d'interventions qu'on peut espérer des élèves et des types d'interventions que l'enseignant peut faire pour guider et faire avancer la recherche collective.

Si l'on interprète ces dialogues, et l'instruction liée, avec des termes de la TSD, on peut clairement identifier un milieu portant des potentiels adidactiques. Dans le cas du fauteuil et de la table, les élèves vont nécessairement arriver à des mesures différentes, et c'est ainsi la réponse du milieu qui les force à se mettre d'accord sur la définition. Les nouveaux problèmes modifient le milieu et provoquent une adaptation de la part des élèves. En même temps, la nature des interventions de l'enseignant n'est pas bien définie à l'avance, et dépend beaucoup des réactions de la classe. (Ceci sera encore plus clair dans l'extrait sur le théorème de Pythagore.) Comme on l'a vu, le livre du professeur souligne que « si la classe n'est pas suffisamment active, on peut poser des questions à la place des élèves pour provoquer un débat. » Les phases adidactiques et des interventions de l'enseignant ne sont donc pas clairement distinguées, il s'agit beaucoup plus, à nouveau, d'un dialogue entre la classe et l'enseignant. On retrouve le type de contrat qu'on pouvait identifier au niveau élémentaire, et ce qu'on a nommé « découverte guidée ».

4.1 Le théorème de Pythagore dans le manuel scolaire hongrois

4.1.1 L'introduction du théorème dans le manuel scolaire

Le théorème de Pythagore, présenté comme l'un des plus importants théorèmes mathématiques par le livre du professeur hongrois, reçoit un chapitre indépendant dans le manuel scolaire correspondant (gr. 7). Le chapitre est précédé, en ce qui concerne le thème de la géométrie, de chapitres sur la symétrie centrale, sur 'des triangles' (différentes propriétés des triangles), sur des constructions euclidiennes ; et suivi par la similitude et le calcul des aires, des surfaces et des volumes. Il s'agit donc d'un contexte d'étude des figures géométriques euclidiennes, principalement dans le paradigme G2, en passant parfois par G1. Le théorème de Pythagore n'est pas le premier théorème ou la première démonstration dans le manuel (on trouve déjà de courtes démonstrations dans les manuels des années précédentes), mais il est l'un des premiers théorèmes désigné en tant que tel, accompagné d'une

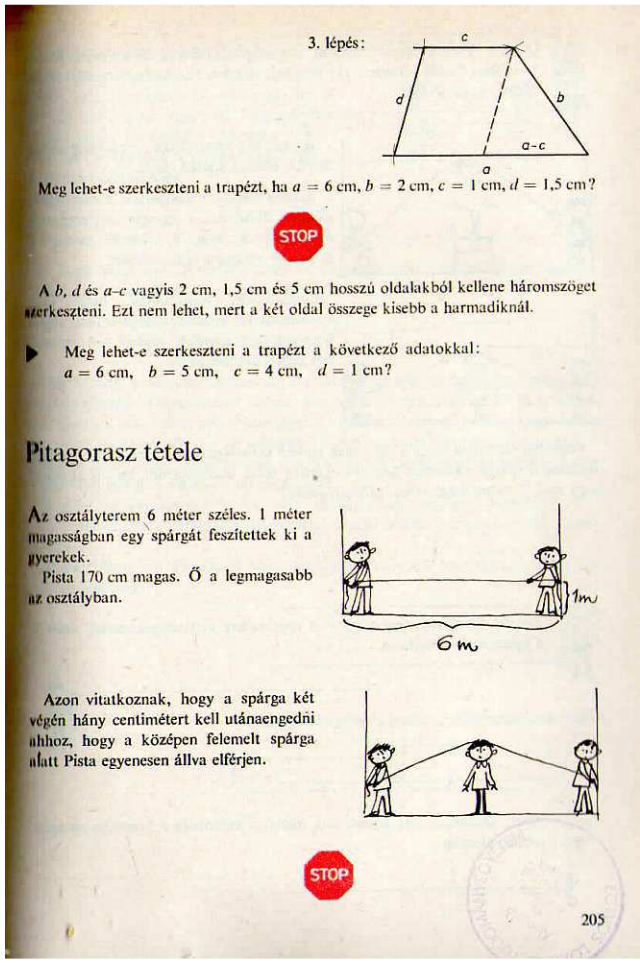
démonstration relativement longue et complexe. On verra que la petite série de problèmes introduisant le théorème vise à établir un passage du paradigme G1 vers le paradigme G2, en motivant ainsi la démonstration.

LE THEOREME DE PYTHAGORE

La salle de classe est large de 6 mètres. Les enfants ont tendu une ficelle à hauteur d'un mètre.
Pista mesure 170cm. Il est le plus grand de la classe.

Ils se disputent sur la longueur dont il faut lâcher la ficelle aux deux bouts pour que Pista puisse passer debout sous la ficelle.

STOP



3. lépés:

Meg lehet-e szerkeszteni a trapézt, ha $a = 6$ cm, $b = 2$ cm, $c = 1$ cm, $d = 1{,}5$ cm?

STOP

A b, d és $a-c$ vagyis 2 cm, 1,5 cm és 5 cm hosszú oldalakból kellene háromszöget szerkeszteni. Ezt nem lehet, mert a két oldal összege kisebb a harmadiknál.

▶ Meg lehet-e szerkeszteni a trapézt a következő adatokkal: $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $c = 4$ cm, $d = 1$ cm?

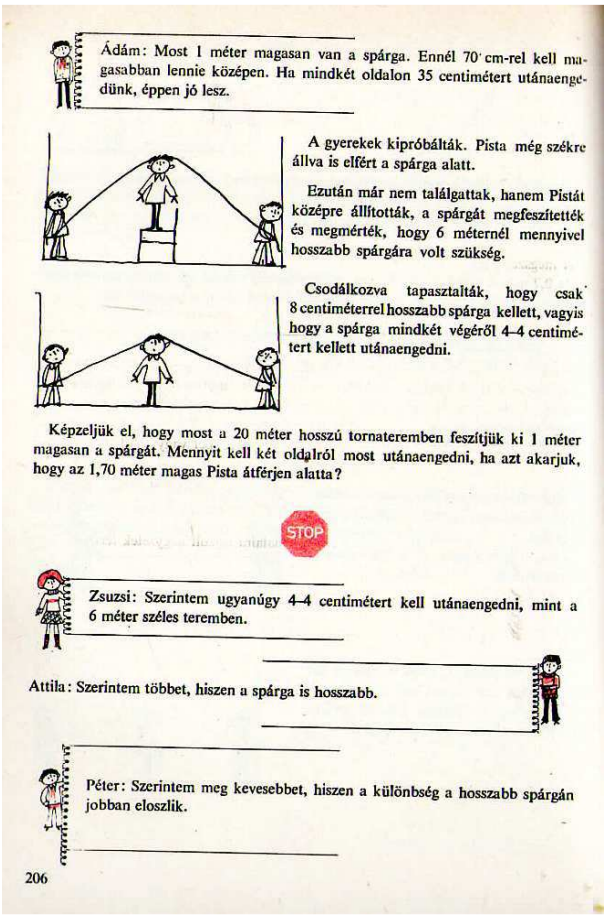
Pitagorasz tétele

Az osztályterem 6 méter széles. 1 méter magasságban egy spárgát feszítettek ki a gyerekek.
Pista 170 cm magas. Ő a legmagasabb az osztályban.

Azon vitatkoznak, hogy a spárga két végén hány centimétert kell utánaengedni ahhoz, hogy a középen felemelt spárga alatt Pista egyenesen állva elférjen.

STOP

205



Ádám: Most 1 méter magasan van a spárga. Ennél 70 cm-rel kell magasabban lennie középen. Ha mindkét oldalon 35 centimétert utánaengedünk, éppen jó lesz.

A gyerekek kipróbálták. Pista még székre állva is elfért a spárga alatt.

Ezután már nem találgattak, hanem Pistát középre állították, a spárgát megfeszítették és megmérték, hogy 6 méternél mennyivel hosszabb spárgára volt szükség.

Csodálkozva tapasztalták, hogy csak 8 centiméterrel hosszabb spárga kellett, vagyis hogy a spárga mindkét végéről 4–4 centimétert kellett utánaengedni.

Képzeljük el, hogy most a 20 méter hosszú tornateremben feszítjük ki 1 méter magasan a spárgát. Mennyit kell két oldalról most utánaengedni, ha azt akarjuk, hogy az 1,70 méter magas Pista átférjen alatta?

STOP

Zsuzsi: Szerintem ugyanúgy 4–4 centimétert kell utánaengedni, mint a 6 méter széles teremben.

Attila: Szerintem többet, hiszen a spárga is hosszabb.

Péter: Szerintem meg kevesebbet, hiszen a különbség a hosszabb spárgán jobban eloszlik.

206

Ádám: La ficelle est maintenant à 1 mètre de hauteur. Elle doit être à 70 cm plus haut au milieu. Si l'on ajoute 35 centimètres à chacun des deux bouts, ça va passer tout juste.

Les enfants ont fait l'essai. Pista est même passé debout sur une chaise.

Ils n'ont pas fait plus d'essais, mais ils ont placé Pista au milieu, ils ont tendu la ficelle et ils l'ont mesuré.

Ils ont remarqué avec surprise qu'il ne fallait que 8 centimètres de plus de ficelle, il fallait donc laisser 4 centimètres à chaque côté.

Imaginons maintenant qu'on tende la ficelle à hauteur d'un mètre dans la salle de sport qui est large de 20 mètres. Combien de mètres faut-il laisser de chaque côté si l'on veut que Pista, qui mesure 1m70, passe au-dessous ?

STOP

Zsuzsi: À mon avis, il faut laisser 4 centimètres de chaque côté, de même que dans la salle qui faisait 6 mètres large.

Attila: Je pense qu'il en faut plus, car la ficelle est cette fois plus longue.

Péter: Je pense qu'il en faut moins, car la différence se répartie mieux sur une ficelle plus longue.

Zsuzsi: Inutile de se disputer, construisons le triangle produit à échelle réduite. Prenons 20 centimètres au lieu de 20 mètres ! Autrement dit, faisons une réduction de proportion 1:100. Il suffit de construire la partie rouge de la figure.

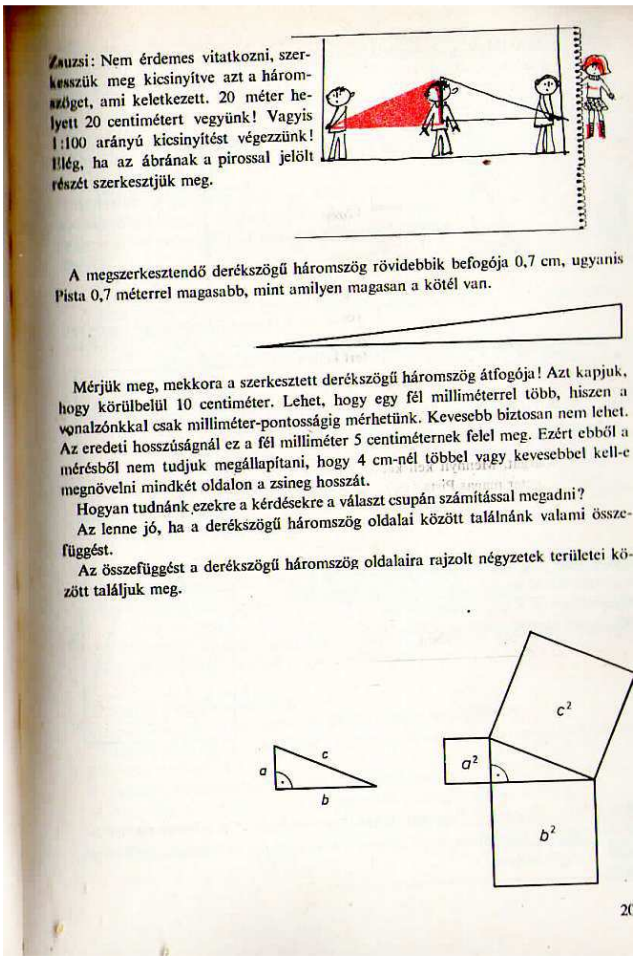
Le côté le plus court mesure 0,7 cm, parce que Pista mesure 0,7 m de plus que la corde.

On mesure l'hypoténus du triangle rectangle construit et on trouve environ 10 centimètres. Peut-être un demi-millimètre de plus - car il n'est pas possible de mesurer au-delà d'un millimètre d'exactitude avec notre règle – mais sûrement pas moins. Pour les longueurs originales, ce demi-millimètre correspond à 5 centimètres. On ne peut donc pas juger à l'aide de cette mesure si la longueur de la ficelle doit être agrandie de plus ou moins 4 cm.

Comment pourrait-on répondre à ces questions seulement à l'aide de calcul ?

Il serait utile de trouver un rapport entre les côtés du triangle rectangle.

Ce rapport peut être trouvé entre les carrés dessinés sur les côtés du triangle rectangle.



Zsuzsi: Nem érdemes vitatkozni, szerkesszük meg kicsinyítve azt a háromszöget, ami keletkezett. 20 méter helyett 20 centimétert vegyünk! Vagyis 1:100 arányú kicsinyítést végezzünk! Elég, ha az ábrának a pirossal jelölt részét szerkesztjük meg.

A megszerkesztendő derékszögű háromszög rövidebbik befogója 0,7 cm, ugyanis Pista 0,7 méterrel magasabb, mint amilyen magasan a kötél van.

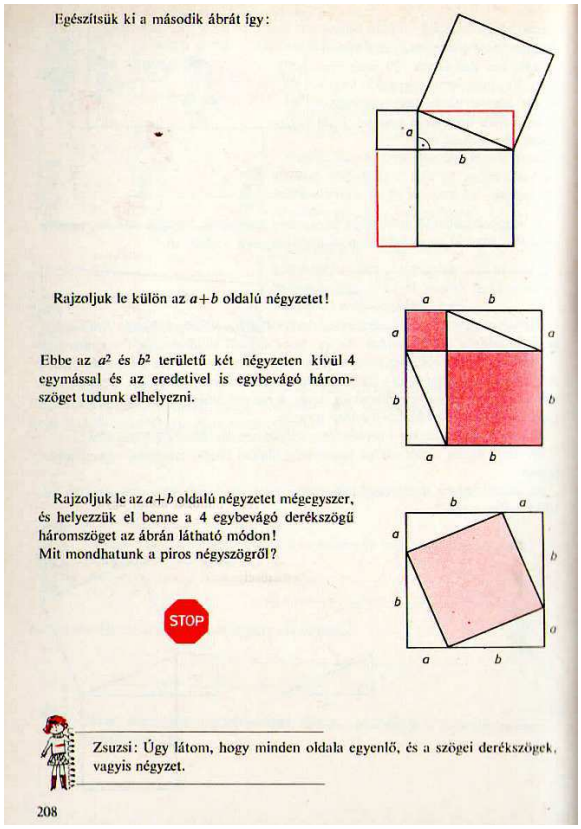
Mérjük meg, mekkora a szerkesztett derékszögű háromszög átfogója! Azt kapjuk, hogy körülbelül 10 centiméter. Lehet, hogy egy fél milliméterrel több, hiszen a vonalzónkkal csak milliméter-pontosságig mérhetünk. Kevesebb biztosan nem lehet. Az eredeti hosszúságnál ez a fél milliméter 5 centiméternek felel meg. Ezért ebből a mérésből nem tudjuk megállapítani, hogy 4 cm-nél többel vagy kevesebbel kell-e megnövelni mindkét oldalon a zsineg hosszát.

Hogyan tudnánk ezekre a kérdésekre a választ csupán számítással megadni?

Az lenne jó, ha a derékszögű háromszög oldalai között találnánk valami összefüggést.

Az összefüggést a derékszögű háromszög oldalaira rajzolt négyzetek területei között találjuk meg.

20



Egészítsük ki a második ábrát így:

Rajzoljuk le külön az $a+b$ oldalú négyzetet!

Ebbe az a^2 és b^2 területű két négyzeten kívül 4 egymással és az eredetivel is egybevágó háromszöget tudunk elhelyezni.

Rajzoljuk le az $a+b$ oldalú négyzetet mégegyszer, és helyezzük el benne a 4 egybevágó derékszögű háromszöget az ábrán látható módon!
Mit mondhatunk a piros négyszögről?

STOP

Zsuzsi: Úgy látom, hogy minden oldala egyenlő, és a szögei derékszögek, vagyis négyzet.

208

Complétons la figure de cette façon:

Dessinons séparément le carré du côté $a+b$.

Dans ce carré, on peut mettre, en plus des deux carrés de l'aire a^2 et b^2, 4 triangles coïncidant entre eux et avec l'original.

Dessinons encore une fois le carré du côté $a+b$, et mettons dedans les 4 triangles rectangles coïncidents suivant la figure. Qu'est-ce qu'on peut dire du quadrilatère rouge ?

STOP

Zsuzsi: Il me semble que ses côtés sont égaux entre eux et ses angles sont droits, c'est donc un carré.

Attila: Ses côtés sont sûrement égaux car chacun de ses côtés est l'hypoténuse du triangle rectangle original. Mais je ne vois pas pourquoi ses angles ont 90°.

Un angle noir et un angle gris font ensemble 90°, car ils sont les deux angles aigus du même triangle rectangle.

Un angle noir, rouge et gris font ensemble 180°. D'où le fait que l'angle rouge a 90°, le quadrilatère est donc effectivement un carré.

Le quadrilatère rouge est effectivement un carré, notamment le carré dessiné sur l'hypoténuse du triangle rectangle original.

On peut lire des deux figures que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

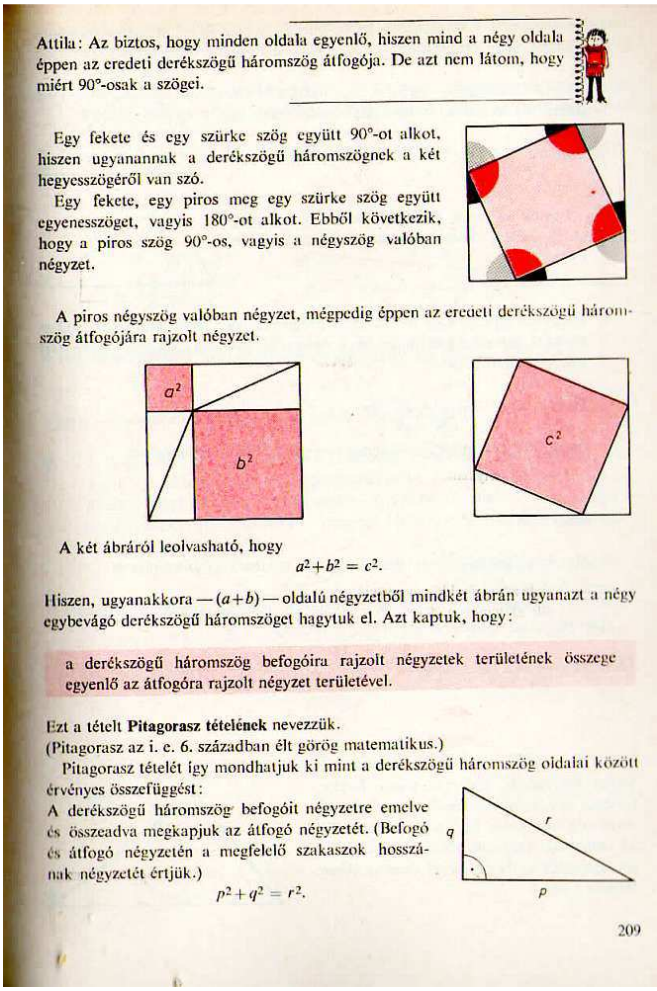
Car d'un carré du même côté – $(a+b)$ – on a enlevé les mêmes 4 triangles rectangles coïncidents. On obtient que :

dans un triangle rectangle, la somme des aires des carrés dessinés sur les deux côtés de l'angle droit est égale à l'aire du carré dessiné sur l'hypoténuse.

Ce théorème est appelé **le théorème de Pythagore**.
(Pythagore est un mathématicien grec du 6e siècle av. J.-C.)

On peut exprimer le théorème de Pythagore comme une relation entre les côtés d'un triangle rectangle :
En élevant au carré les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, et en les additionnant on obtient le carré de l'hypoténuse. (Par "le carré des côtés" on comprend le carré des longueurs des segments correspondants.)

$$p^2 + q^2 = r^2$$



Attila: Az biztos, hogy minden oldala egyenlő, hiszen mind a négy oldala éppen az eredeti derékszögű háromszög átfogója. De azt nem látom, hogy miért 90°-osak a szögei.

Egy fekete és egy szürke szög együtt 90°-ot alkot, hiszen ugyanannak a derékszögű háromszögnek a két hegyesszögéről van szó.
Egy fekete, egy piros meg egy szürke szög együtt egyenesszöget, vagyis 180°-ot alkot. Ebből következik, hogy a piros szög 90°-os, vagyis a négyszög valóban négyzet.

A piros négyszög valóban négyzet, mégpedig éppen az eredeti derékszögű háromszög átfogójára rajzolt négyzet.

A két ábráról leolvasható, hogy

$$a^2+b^2 = c^2.$$

Hiszen, ugyanakkora — $(a+b)$ — oldalú négyzetből mindkét ábrán ugyanazt a négy egybevágó derékszögű háromszöget hagytuk el. Azt kaptuk, hogy:

a derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével.

Ezt a tételt **Pitagorasz tételének** nevezzük.
(Pitagorasz az i. e. 6. században élt görög matematikus.)
Pitagorasz tételét így mondhatjuk ki mint a derékszögű háromszög oldalai között érvényes összefüggést:
A derékszögű háromszög befogóit négyzetre emelve és összeadva megkapjuk az átfogó négyzetét. (Befogó és átfogó négyzetén a megfelelő szakaszok hosszának négyzetét értjük.)

$$p^2+q^2 = r^2.$$

209

Figure 9 (Manuel h. gr. 7 1980 pp. 205-209)

Le problème de départ est un problème de G1 : La salle de classe est large de 6 mètres. Les enfants ont tendu une ficelle à hauteur d'un mètre. Pista, le plus grand élève de la classe mesure 170 cm. Combien faut-il ajouter à la longueur de la ficelle pour que Pista puisse passer debout sous la ficelle ? La première tentative de solution est un essai, une estimation basée sur des arguments : cette solution échoue. La deuxième tentative est une solution typiquement G1, la mesure, qui amène à une solution convenable pour le problème en question.

Mais le processus ne s'arrête pas ici : une petite variation du problème change fondamentalement les possibilités de solution. Dans le deuxième problème, on ne parle plus de la salle où la classe est présente, mais d'une salle plus grande qu'il faut imaginer et où l'expérimentation n'est plus possible. La discussion autour du problème commence, à nouveau, avec des estimations basées sur des arguments, mais la réponse est loin d'être évidente et il n'y a pas de moyen de la vérifier *in situ*, contrairement au cas précédent.

Une première tentative de solution pour ce deuxième problème est la modélisation : un modèle géométrique de la salle en question pourrait permettre la mesure, similairement au problème précédent. Mais cette tentative (toujours en G1) échoue, car les instruments de modélisation et de mesure disponibles ne sont pas suffisants pour donner une approximation suffisante.

À ce point-là, plutôt que d'essayer d'améliorer des techniques de mesure, on tourne vers G2, en cherchant à répondre « seulement à l'aide de calcul », et en essayant de trouver « un rapport entre les côtés du triangle rectangle ». C'est ici que le théorème de Pythagore intervient. Générée à l'aide de la variation d'un variable de l'énoncé, la série de problèmes sert cette fois-ci la motivation du passage de G1 à G2, de la mesure vers la démonstration géométrique. Le deuxième problème sera résolu après la démonstration du théorème, et enfin, un troisième problème est ajouté à la série. Ce troisième problème (que nous n'avons pas inséré à la traduction) concernant une ficelle tendue au dessus de l'avenue d'un km long, garde une référence à la réalité physique, mais la solution expérimentale n'est même plus imaginable : le problème, ne différant de l'original que dans l'échelle d'une donnée, renvoie désormais clairement à un travail en G2.

L'extrait du manuel prend, à nouveau, une forme semi-dialoguée : outre des passages narratifs et des énoncés des problèmes dont le locuteur n'est pas explicité (on peut supposer qu'il s'agit de l'enseignant), on retrouve des dialogues entre les élèves : ils se disputent, ils proposent des estimations et des tentatives de solutions. Même la démonstration est

problématisée, étant interrompue par des questions, et par des tentatives de réponses des élèves.

L'introduction du théorème, suite à l'échec de la résolution du problème 2, n'est pas clairement associée à l'un des acteurs : on peut le voir comme une discussion dans la classe, ou comme une intervention de l'enseignant. En se rappelant de l'instruction tirée du livre de professeur[129], ce passage peut être lu comme n'ayant pas de responsable défini à l'avance :

> Comment pourrait-on répondre à ces questions seulement à l'aide de calcul ?
> Il serait bien de trouver un rapport entre les côtés du triangle rectangle.
> Ce rapport peut-être trouvé entre les carrés dessinés sur les côtés du triangle rectangle. (Manuel h. gr. 7, 1980 p. 207)

Si les deux premières phrases peuvent être lues comme des réflexions continues suite au problème précédent, la dernière serait difficile à interpréter en tant qu'intervention d'un élève, car elle suppose la connaissance préalable du théorème. Ensuite, des figures sont données qui amènent à une démonstration. Mais la démonstration n'est pas déduite directement : une question et le signe « STOP » invitent les élèves du livre, et aussi le lecteur, à une réflexion. Ainsi, la démonstration devient une production collective.

La situation présente donc de fortes potentialités adidactiques : le premier problème de la ficelle, avec le milieu physique de la salle, la ficelle et l'élève constituent un milieu antagoniste qui permet directement de vérifier les tentatives de réponse des élèves. Le dialogue lié à ce problème est mené entièrement par les élèves, illustrant donc une situation adidactique. Le deuxième problème manque par contre de milieu physique, ne permet pas une vérification directe : bien que les élèves essayent de construire une méthode de vérification par modélisation, cet essaie échoue, le milieu apparaît insuffisant pour les élèves. Le problème permet ainsi d'insister sur l'insuffisance du milieu. L'intervention, effectuée potentiellement par l'enseignant, vise à compléter le milieu par un nouvel élément, le théorème de Pythagore. Le théorème intervient ainsi comme un outil permettant de résoudre un problème : mais il devient lui-même objet d'étude, dans le cadre d'une situation avec le milieu constitué par les trois figures de la démonstration. La démonstration, comme nous l'avons mentionné plus haut, n'est pas entièrement déductive : la nature de la « quadrilatère rouge » apparaît comme un problème, et le milieu, en utilisant des connaissances mathématiques du paradigme G2, permet aux élèves de compléter la démonstration. Une fois

[129] « Si la classe n'est pas suffisamment active, on peut poser des questions à la place des élèves pour provoquer un débat. »

la démonstration terminée, le théorème reprend son rôle d'‘outil’ pour répondre au problème original concernant la ficelle dans la salle de sport.

Il s'agit donc d'un processus d'enseignement avec de potentielles phases adidactiques : en même temps, le principe du processus reste, comme dans les exemples présentés précédemment, le dialogue, soit entre les élèves soit entre l'enseignant et la classe.

4.1.2 L'introduction de la démonstration dans le livre du professeur

Le livre du professeur, pour introduire la démonstration, propose d'autres activités préparatoires en soulignant, comme on l'a vu plus haut, que la figure de la démonstration, donnée sans introduction, peut apparaître comme si elle « tombait du ciel », et même si la démonstration était compréhensible, « personne ne croyait qu'il aurait pu y arriver par elle-même ». (Livre du prof. h. gr. 7, 1980 p. 103.) Les activités préparatoires concernent des calculs d'aires des carrés « obliques » sur une grille. Selon le livre, ces problèmes peuvent naturellement amener à une des figures de la démonstration.

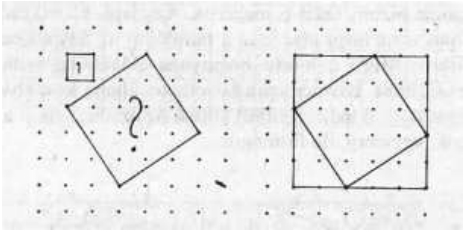
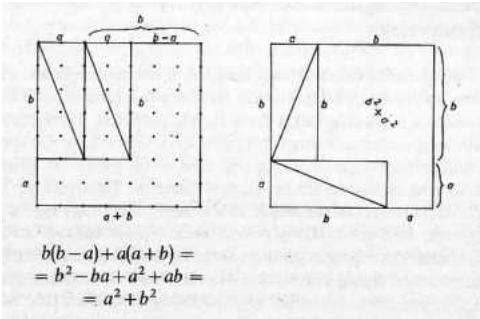


Figure 10 (Livre du prof. h. gr. 7, 1981 p. 104)

Pour la suite, le livre propose plusieurs continuations possibles. Pour les élèves plus à l'aise en algèbre, une généralisation algébrique est proposée. Pour d'autres, les transformations de la figure : translations, rotations des triangles.

> Il peut y avoir des enfants qui peuvent faire des translations dans leur imagination, mais une partie des élèves a certainement besoin de faire les transformations sur un modèle réel. Qu'ils dessinent le résultat des transformations imaginées ou qu'ils la lisent sur un modèle, il vaut mieux traiter la situation comme un problème ouvert. C'est-à-dire, au lieu d'ambitionner d'arriver le plus rapidement possible à l'autre moitié de la démonstration hindoue, encourageons les enfants à dessiner le résultat de plusieurs translations différentes ou autre déplacements, et en parler. Il est possible qu'ils arrivent ainsi à certaines autres démonstrations du théorème (voir par exemple des figures ci-dessous). Mais même s'ils ne découvrent rien de notable, ils ont passé leur temps plus utilement qu'en ayant vu directement la solution ou que s'ils y avaient été conduits par la main.



Nos figures ne sont que des exemples des différentes possibilités pour finir la démonstration algébriquement, elles montrent en même temps que la configuration connue, 'hindoue' n'est pas la seule à permettre d'en lire la relation $c^2 = a^2 + b^2$. (Livre du professeur h. gr. 7 1981 p. 105 Ma traduction.)

Le problème de démonstration est donc transformé en un problème de calcul. On voit à nouveau un fort potentiel adidactique. Le milieu (le carré sur une grille, les triangles complémentaires, le problème de calcul d'aire) porte un potentiel rétroactif : les transformations peuvent permettre ou ne pas permettre le calcul cherché. Le livre insiste sur l'importance d'une phase adidactique, et, de plus, sur la nature ouverte du problème. L'accent est sur l'expérimentation autour du problème, les expériences ainsi obtenues apparaissent plus importantes que le résultat mathématique attendu.

Le contrat que suggèrent les diverses situations décrites dans le manuel scolaire et dans le livre du professeur hongrois autour du théorème de Pythagore est marqué par le principe du dialogue et dans certains cas, par la nature ouverte des problèmes.

On voit en outre, à nouveau, un retour potentiel vers une représentation physique d'un problème de paradigme G2. Si les manuels scolaires français insistent sur la distinction précise entre expérimentation physique et notion mathématique, et n'utilisent les modèles physiques que pour une première introduction, le programme de Varga encourage au contraire le retour à l'expérimentation physique tout au long de la scolarité obligatoire, et insiste sur le pouvoir intuitif des représentations graphiques, pour construire un passage progressif et motivé vers les représentations abstraites et vers la démonstration mathématique.

4.1.3 La série des tâches dans le manuel scolaire associée au théorème de Pythagore

Avant de terminer ce chapitre, nous revenons sur le manuel scolaire pour étudier les tâches qu'il associe au théorème de Pythagore (voir l'annexe III.4.6). Les tâches en question ne suivent pas directement le chapitre consacré au théorème de Pythagore : des tâches de plusieurs chapitres géométriques sont regroupées dans un seul recueil. On peut repérer une section qui est associée au théorème de Pythagore, mais en fait, les tâches des différents

chapitres s'articulent : la section de Pythagore est du n°114 jusqu'au 133 ; à partir de 134, les tâches traitent des questions de proportion et de similitude ; mais la tâche 135 concerne un triangle rectangle qu'on peut identifier par la proportion des longueurs des côtés.

Une partie des tâches associées à Pythagore demande des calculs relativement simples, d'autres concernent différentes figures géométriques ou encore l'application du théorème réciproque. L'accent est donc mis sur un travail arithmétique et géométrique (dans un paradigme G2) ; on trouve beaucoup moins de travail algébrique, et d'énoncés demandant une démonstration.

Nous examinons de plus près un extrait de ce recueil, les tâches de 124 à 133 :

124. Quelle est la distance du point P (3;4) de l'origine du repère orthogonal ?
125. Quelle est la distance du point P (5;-12) de l'origine du repère orthogonal ?
126. Quelle est la distance du point P (-6;-8) de l'origine du repère orthogonal ?
127. Quelle est la distance de l'origine du repère orthogonal du point dont la distance d'un axe est 3 et de l'autre axe est 4 unités ? Combien existe-t-il de tels points ?
128. Quelle est la distance des points A (3;6) et B (3;11) ?
129. Quelle est la distance des points A (4;9) et B (11;9) ?
130. Quelle est la distance des points A (2;1) et B (6;4) ?
131. Quelle est la distance des points A (-1;-1) et B (3;2) ?
132. Quelle est la distance des points A (-3;-2) et B (9;3) ?
133. Les coordonnées du point A sont (x1 ; y1), du B sont (x2 ; y2). Cherche une formule qui permet de calculer la distance des deux points. (Manuel h. gr. 7, 1980 p. 257. Ma traduction.)

Les énoncés se répètent, avec une transformation légère entre 126 et 128, et avec la variation des données numériques. Cette liste de tâches pourrait servir à pratiquer l'application du calcul de la distance des points dans un repère, sur un grand nombre d'exemples indépendants. Mais la notion de distance dans un repère n'était pas introduite au préalable dans le manuel.

Si l'on regarde plus soigneusement les variables, on reconnaît une certaine progressivité entre les tâches : par exemple, distance d'un point de l'origine, avec l'introduction progressive des nombres négatifs ; ensuite, distance de deux points sur une droite parallèle à un axe, distance de deux points quelconques, et enfin la généralisation formelle. Il s'agit donc de problèmes mis en ordre : similairement aux processus rencontrés dans les textes narratifs de Péter et de Varga, cette série de problèmes permet d'élaborer progressivement une méthode de calcul de la distance des points, et amènent enfin à une généralisation et une expression formelle de la notion de distance des points dans un repère.

5 CONCLUSION

Nous avons étudié dans ce chapitre les programmes de la géométrie, plus particulièrement la place du théorème de Pythagore dans ces programmes et la fonction qu'il y remplit. L'étude des programmes a montré les éléments communs entre la réforme hongroise et française, mais aussi les différences profondes. Les deux programmes visent à introduire des éléments des mathématiques modernes dans le programme : c'est ainsi que la théorie des ensembles, les fonctions, les symétries, les transformations prennent un rôle important dans les programmes de la période. Les différences s'avèrent cependant plus profondes qu'au niveau élémentaire.

Le programme français des « mathématiques modernes » marque une rupture importante concernant l'enseignement de la géométrie : à l'école élémentaire et au début de l'école moyenne, la géométrie joue un rôle mineur, il s'agit avant tout des « observations physiques », demandant un travail dans le paradigme G1, mais qui n'est pas reconnu comme 'réelle' activité mathématique. À partir de la Quatrième par contre, la géométrie obtient une place très importante, servant à initier les élèves dans un « processus de mathématisation », ce qui signifie, dans ce cas, une initiation à la construction d'un système axiomatique-déductif. Il s'agit donc d'un travail dans le paradigme G3, sans passage par G2. L'organisation mathématique de la géométrie porte des marques de l'école Bourbaki : la géométrie est basée sur la notion des nombres réels, et est centrée sur l'étude du plan et de l'espace, d'abord affine, ensuite euclidienne. Les notions centrales sont les projections, les repères, les vecteurs. Le théorème de Pythagore s'inscrit dans cette organisation : sa démonstration est algébrique et découle d'une propriété de la projection orthogonale, et sa fonction principale n'est plus la caractérisation des triangles, mais l'intervention, parmi d'autres théorèmes, de la construction des outils mathématiques, notamment des repères, pour décrire l'espace. Le traitement de la géométrie dans le programme français des mathématiques modernes semble beaucoup rappeler la conception de Choquet, présentée dans son livre *L'enseignement de la géométrie* (1964).

Le programme hongrois insiste plutôt sur la continuité depuis l'école élémentaire jusqu'à la fin de l'école moyenne ; et les liens de la géométrie avec d'autres domaines des mathématiques (ensembles, nombres, fonctions, combinatoire etc.) sont plutôt dialectiques que hiérarchiques. La géométrie, par sa nature visuelle, offre souvent des modèles ou des exemples intuitifs pour l'étude des autres domaines mathématiques. Malgré l'introduction de nombreux éléments des mathématiques modernes, la géométrie du programme de Varga reste

centrée sur l'étude des figures[130]. Le travail géométrique, tout au long du collège, garde une articulation entre le paradigme G1 et le paradigme G2. Le théorème de Pythagore y est présenté comme l'un des théorèmes principaux du programme hongrois à l'école moyenne. Il participe à la caractérisation des triangles et sa démonstration est géométrique, basée sur le calcul des aires.

Le traitement du théorème de Pythagore dans les manuels scolaires illustre bien ces caractéristiques dans le cas des deux pays : dans les manuels français de l'époque des « mathématiques modernes », il est intégré dans un plus grand chapitre sur le plan euclidien, et apparaît comme simple conséquence d'un théorème présenté précédemment. Sa démonstration est courte, mais utilise un langage formel complexe, et pas forcément standardisé, ce qui nécessite la connaissance profonde des chapitres précédents pour pouvoir interpréter la démonstration. La démonstration est complètement algébrique : les figures ne jouent que le rôle d'illustrations complémentaires. Dans plusieurs des cas, elles ne représentent pas de triangle mais la projection orthogonale des axes.

Le manuel scolaire hongrois présente par contre un dialogue centré sur une série de problèmes, partant d'une expérience physique et d'un travail géométrique en paradigme G1, et passant progressivement vers le paradigme G2. La série de problème permet de motiver le travail en G2, l'introduction d'un théorème mathématique et l'intérêt pour sa démonstration. La démonstration, elle-même problématisée, porte sur l'aire des carrés, et requiert un travail important sur les figures géométriques. Les problèmes créent un milieu avec des potentialités adidactiques importantes, mais l'intervention de l'enseignant dans le processus de la construction du savoir reste importante.

La démonstration présentée dans le livre du professeur pour la réciproque du théorème insiste sur une articulation entre intuition et démonstration : le sens de la « démonstration » est plus proche de l'objectif d'une conviction collective satisfaisante que d'une méthode déductive entièrement stabilisée.

L'étude du style, de la structure et des pratiques pédagogiques suggérées par les manuels scolaires de l'école moyenne montre également une différence profonde entre les deux pays. Les manuels scolaires français privilégient une forme axiomatique-déductive et mettent l'accent sur le langage formel des mathématiques, considéré comme « simple et précis ». La typographie des livres contribue à la structuration forte, transparente du texte. Le texte des

[130] Il est vraisemblable que le programme de Varga s'inspire du traité de géométrie du mathématicien hongrois Hajós, très utilisé en Hongrie depuis sa première publication en 1960. Varga mentionne par ailleurs Hajós parmi les mathématiciens inspirant sa réforme (Halmos & Varga 1978 p. 226). Une étude soigneuse serait pourtant nécessaire pour confirmer l'existence des liens entre le programme et ce traité.

manuels scolaires sert avant tout à décrire des « leçons », pour permettre aux élèves de comprendre et d'apprendre le cours. Par ces traités linéaires, les manuels scolaires adaptent un contrat de type magistral : la transmission directe du savoir mathématique institutionnel. L'exemple des « Éclaireurs » au début du premier tome de la collection Queyzanne-Revuz (1969) illustre assez explicitement l'installation d'un tel contrat.

Les livres de professeurs insistent sur l'importance de l'utilisation des « méthodes actives », mais donnent peu d'indications sur la mise en place pédagogique. Une exception peut être trouvée dans le manuel scolaire de Revuz, qui suggère des activités à mettre en place avec des élèves : mais ces activités servent plutôt à illustrer le savoir mathématique transposé directement par l'enseignant, et, similairement au cas d'Eiller, ne signifient pas de réelle autonomie des élèves dans la construction de leurs connaissances mathématiques. Les « cours » des manuels sont sont suivis par quelques exercices : cette partie des manuels permet (et suggère même) un travail autonome des élèves, mais ce travail vise principalement le contrôle d'acquisition et la stabilisation du savoir, et pas la construction des nouvelles connaissances. Du point de vue de la TSD, on peut dire qu'on trouve peu de potentialité adidactique dans les manuels scolaires et livres de professeurs de la réforme française.

Les manuels scolaires hongrois présentent par contre des dialogues fictifs des élèves pour introduire de nouvelles connaissances mathématiques. Selon le livre du professeur, les dialogues peuvent servir de lecture aux élèves, mais fournissent avant tout des modèles d'enseignement : les enseignants sont invités à reproduire des dialogues similaires dans leur classe. Similairement au *Jeux avec l'infini* de Rózsa Péter, la typographie des manuels est plus ludique et structure moins strictement le texte que celle des manuels scolaires français. Le langage utilisé dans les manuels hongrois articule langage mathématique et langage naturel, en utilisant relativement peu de langage formel. Contrairement au style « simple et précis » suivi par les manuels français, les manuels hongrois semblent avoir une autre conception de la simplicité et de la clarté du style : leurs textes cherchent à imiter le discours des enfants, ne pas exempt d'ambiguïtés, à partir duquel ils élucident progressivement des formulations mathématiques plus précises. Avec l'exemple de la distance des ensembles de points, on voit, comme dans certains exemples de l'école élémentaire, comment l'ambiguïté de l'expression devient justement le moteur de la précision progressive des notions mathématiques.

Les dialogues en question sont centrés sur la discussion de quelques problèmes, ou plutôt sur de courtes séries de problèmes : ces séries de problèmes peuvent jouer différents rôles dans le processus d'apprentissage : elles créent un milieu antagoniste par exemple pour faire développer la définition d'une notion, ou pour motiver l'introduction d'un théorème. Les

textes sont en fait semi-dialogués : outre des interventions des élèves, on y trouve des passages narratifs et des interventions « anonymes » dont on peut supposer qu'ils sont des interventions potentielles des enseignants. (Nous rappelons l'instruction du livre du professeur, selon laquelle « si la classe n'est pas suffisamment active, on peut poser des questions à la place des élèves pour provoquer un débat »). Les manuels présentent donc de potentiels processus de découverte à travers une série problèmes, et offrent des indications sur les façons de construire et guider ces processus. Le type de contrat qu'ils représentent peut être appelé « découverte guidée ».

Plus clairement encore qu'au niveau élémentaire, on reconnaît l'effet des deux arrière-plans épistémologiques différents des réformes sur les programmes de géométrie de l'école moyenne. Les caractéristiques de l'enseignement de la géométrie, des manuels scolaires, et du traitement du théorème de Pythagore illustrent bien la mise en œuvre des principes des mathématiciens, discutées dans la partie II de la thèse. Si la réforme française met l'accent sur l'initiation à un système axiomatique-déductif des mathématiques modernes, à la méthode de la démonstration, à l'abstraction, à l'utilisation du langage formel moderne, à « l'économie de pensée » apportée par une méthode générale et unique, la réforme hongroise insiste surtout sur un développement dialectique des domaines mathématiques, sur le rôle de l'intuition, de la visualité et de l'expérience, sur l'initiation aux processus de découverte, sur la diversité des méthodes d'invention, et sur le caractère collectif de ces processus.

Les changements du programme français de 1977 ne se limitent pas à un assouplissement du programme des « mathématiques modernes », qui s'est avéré trop lourd : ils attirent l'attention sur certains conflits entre l'épistémologie mathématique et sa réalisation dans le cadre de la réforme. L'initiation directe à l'utilisation du langage formel empêche justement d'apprendre à abstraire ; un traitement dans l'ordre axiomatique-déductif ne permet pas de motiver la démonstration, comme procédure mathématique, ni d'apprendre à structurer le savoir mathématique. Et la transmission d'une telle mathématique « bourbakiste » ne peut se faire que par voie magistrale, malgré toutes les ambitions de rendre les élèves actifs. À la fin des années 1970, l'attention se tourne plutôt vers *l'activité mathématique* : le programme et les différents manuels scolaires semblent problématiser, beaucoup plus que précédemment, le lien entre l'arrière-plan épistémologique et l'initiation des élèves à la pensée mathématique, et cherchent l'équilibre entre ces aspects.

En Hongrie, ce dilemme se pose de façon beaucoup moins importante, car l'arrière-plan épistémologique lui-même est davantage centré sur l'activité et sur l'évolution des

mathématiques. Ainsi, mettant l'accent sur les problèmes, les nouveaux éléments de savoir apparaissent souvent comme outils pour résoudre des problèmes ; l'organisation dialectique du programme permet la réorganisation régulière du savoir mathématique ; les méthodes de démonstration apparaissent progressivement, et les imperfections, les manques des démonstrations apparaissent moins comme compromis pédagogiques que comme les étapes naturelles du développement de la pensée mathématique.

CHAPITRE 5

UNE SPECIFICITE THEMATIQUE DU PROGRAMME DE VARGA : L'ENSEIGNEMENT DE LA COMBINATOIRE ET DES PROBABILITES

Le choix de notre dernier exemple est motivé surtout du côté hongrois, et vise à étudier deux questions principales, émergeant des études précédentes.

(1) Le rôle de la combinatoire et les probabilités dans le programme de Varga, les raisons de l'enseignement de ces domaines et leurs liens avec les autres domaines du programme. Nous avons vu en effet (cf. Chapitre 2), que l'une des caractéristiques importantes de la réforme de Varga est la variété des domaines étudiés : la combinatoire et les probabilités, traitées plus ou moins ensemble dans le programme hongrois, en donnent une illustration représentative et permettent de mieux comprendre la dialectique envisagée par Varga entre les différents domaines.

La combinatoire et les probabilités sont traditionnellement l'un des centres d'intérêt des recherches mathématiques en Hongrie, pratiqués entre autres par plusieurs chercheurs soutenant la réforme[131]. De plus, il s'agit des domaines les plus soutenus de l'œuvre de Varga, son activité internationale se concentre aussi sur ces thèmes - en plus de la logique. Il publie en effet de nombreux articles sur ce sujet : leur étude nous aidera à mieux comprendre les choix qui sous-tendent l'enseignement de ces domaines, et nous allons voir que ses arguments sont étroitement liés à l'arrière-plan épistémologique de la réforme hongroise. Une analyse du programme et de quelques situations de probabilités en termes de *paradigmes de probabilité* permettra d'approfondir cette étude, et de mieux comprendre les liens entre les choix épistémologiques, la construction du programme et des pratiques pédagogiques envisagées.

(2) Pour ce qui concerne les pratiques d'enseignement, nous avons vu lors des analyses précédentes que Varga accorde un rôle important à la construction des processus d'enseignement longs, organisés autour des séries bien structurées de problèmes. Le domaine de la combinatoire nous fournit un exemple particulièrement intéressant pour étudier les caractéristiques de ces processus envisagés, puisque nous disposons, concernant ce domaine, des textes (articles, manuels scolaires et livres du maître) décrivant des processus d'enseignement longs dans une forme bien plus structurée que d'habitude.

[131] Rényi est connu pour son œuvre en probabilités, Surányi ou Turán ont une activité importante en combinatoire (cf. annexe I)

Nous commençons donc le chapitre avec l'analyse du programme de combinatoire et des probabilités de Varga (§1) : l'étude de ces articles nous aidera à comprendre les raisons de leur choix (§1.1) et la construction de ces domaines dans le programme (§1.2 et 1.3). Nous nous intéresserons particulièrement aux choix épistémologiques pour l'enseignement des probabilités (§1.4). Nous éclairerons ces études à l'aide de l'analyse de quelques situations de probabilités, décrites dans les articles de Varga (§1.5).

Ensuite, pour comprendre certaines caractéristiques des processus d'enseignement longs conçus par Varga, nous étudierons la construction de quelques collections de problèmes concernant la combinatoire, issus des livres du maître et des manuels scolaires hongrois (§2).

C'est ici que notre comparaison devient particulièrement déséquilibrée, car ces domaines sont absents des programmes français de l'époque au niveau élémentaire et moyen[132]. Nous reviendrons brièvement sur les caractéristiques de ces programmes pour rechercher de potentielless explications de cette différence entre la réforme française et hongroise (§3). À partir des années 1970 cependant, avec les critiques et corrections de la réforme et avec des expérimentations émergeantes, ces domaines apparaissent ponctuellement dans l'enseignement français. Nous reviendrons sur les ressources étudiées dans le chapitre 3, d'abord sur l'exemple du manuel scolaire *Math et Calcul* dont l'édition de 1977 intègre quelques situations de combinatoire (§3.1), et ensuite sur l'ERMEL qui contient également des problèmes de combinatoire (§3.2).

D'un point de vue historique, il est particulièrement intéressant de remarquer que la combinatoire et les probabilités sont les domaines où une collaboration directe s'effectue entre les réformateurs des deux pays. L'influence du mouvement de réforme français sur celui de la Hongrie est en général indéniable, mais sur ces domaines spécifiques, les influences sont mutuelles ou prennent même le sens inverse : Varga est plusieurs fois invité en France pour parler et publier sur ces domaines, et nous tenterons de montrer que certains éléments de son œuvre apparaissent dans les expérimentations et dans les manuels scolaires français (§3.3).

Nous traiterons enfin (§3.4) une expérimentation de Brousseau du début des années 1970 sur l'enseignement des probabilités, qui était décrite dans un article rétrospectif (Brousseau, Brousseau & Warfield 2001), et qui nous intéresse pour plusieurs raisons. Cet exemple permet avant tout une comparaison intéressante concernant les choix écologiques et épistémologiques faits par Brousseau et par Varga dans l'enseignement des probabilités. En outre, l'article de

[132] La probabilité apparaît pourtant au lycée au moment de la réforme des mathématiques modernes (Parzysz 1997).

Brousseau permet d'étudier la construction d'un processus d'enseignement long et de le comparer avec les exemples issus de Varga : nous allons voir qu'ils représentent deux conceptions assez différentes. Enfin, il s'agit d'une expérimentation précoce de Brousseau qui a joué un rôle dans l'élaboration de sa théorie didactique, comme il le confirme ultérieurement dans cet article. Sa théorie nous sert d'outil d'analyse pour nos études, mais cet article nous permet d'avoir également un regard historique sur l'œuvre de Brousseau, et de le situer dans le contexte du milieu expérimental français de l'enseignement des mathématiques dans les années 1970.

Pour ce chapitre, nous compléterons donc les types de ressources analysés : outre des programmes, manuels scolaires et livres du professeur, nous prenons en considération quelques articles didactiques : des publications de Varga et le texte mentionné de Brousseau. Ces textes, adressés aux concepteurs de l'éducation et aux formateurs plutôt qu'aux enseignants, visant aussi l'échange international sur l'enseignement des mathématiques, nous permettent d'enrichir notre regard sur les conceptions de leurs auteurs. Les raisons des choix y sont souvent plus explicitées, les processus plus longs sont plus clairement décrits que dans les ressources visant une utilisation directe par les enseignants.

Pour ce qui concerne les outils théoriques utilisés lors de nos analyses, un élément nouveau apparaît par rapport aux chapitres précédents. Dans le chapitre 4, nous avons utilisé la notion des *paradigmes géométriques* (Houdement & Kuzniak 2006) ; ici nous nous appuyons sur leurs analogues, sur les *paradigmes des probabilités* (Parzysz 2011).

1 LE PROGRAMME DE VARGA : CONSTRUCTION ET CONSIDERATIONS EPISTEMOLOGIQUES

1.1 Les raisons d'enseigner ces domaines

Parmi les cinq grands thèmes du programme de Varga, le dernier est intitulé « combinatoire, probabilités, statistiques ». Les trois domaines sont traités en effet dans une forme d'articulation dense, surtout en ce qui concerne la combinatoire et les probabilités, comme on verra plus loin.

Dans ses articles, Varga discute à plusieurs reprises les arguments principaux pour l'enseignement de ces domaines que nous tentons de résumer ci-dessous.

i. Ces domaines contribuent à un enseignement « intégré » des mathématiques, aident à créer des relations entre les différents domaines et à donner du sens aux notions mathématiques

> Integrated mathematics (multiplication with combinatorics, combinatorics integrated with probability, etc.) is more natural, more meaningful, more appealing then separate disciplines. (Varga 1982 p. 15)

Par exemple, les relations combinatoires peuvent être exprimées à l'aide de la théorie des ensembles et des fonctions (Varga 1967a p. 1). Selon Varga, la situation de l'habillage des poupées peut apparaître comme un « paradigme fondamental » pour la multiplication, alors que la construction des tours colorées offre la même chose pour les puissances (Varga 1982 p. 17, voir annexe III.5.5. Pour l'analyse de la construction des tours colorées, voir §2.1). Par « paradigme fondamental », il faut sans doute comprendre ici une situation qui permet de donner du sens à une notion mathématique et qui sert ainsi de situation de référence (sans être l'unique situation de référence) pour la notion en question. Concernant les probabilités, Varga donne l'exemple de liens avec la logique (sûre, possible, impossible), et de la notion de fréquence qui sert de champ d'utilisation des fractions ainsi que des décimaux et des pourcentages[133] (Varga 1972 p. 346, Varga 1980 p. 12).

ii. Pour l'étude de ces domaines, peu de connaissances théoriques sont nécessaires, il est possible de partir des expériences manipulatoires et de passer au travers d'un processus d'abstraction avec des enfants : ils offrent donc de bonnes illustrations pour les processus d'abstraction mathématique (Varga 1967a p. 1).

iii. Ces domaines permettent l'utilisation d'une grande variété de représentations (ordre alphabétique, diagrammes d'arbre, tableaux etc.) (Varga 1982)

iv. Ils offrent de bonnes occasions pour pratiquer l'estimation, que Varga considère comme un élément essentiel de l'activité mathématique, et même des activités intellectuelles en général.

> My own view is that estimating, guessing, predicting, mentally representing, the future and expressing our opinion about it is a human ability which should play a greater role in education than it does now. All these activities [...] get kids personally involved in learning. (Varga 1982 p. 30)

En soulignant l'importance éducative plus générale de l'estimation, Varga cite également quelques contre-arguments d'enseignants :

[133] Contrairement à la réforme française, la réforme hongroise garde une place importante à l'étude des fractions dès le niveau élémentaire. Les décimaux (y compris les développements décimaux illimités périodiques) et des pourcentages sont présentés comme formes d'écriture alternatives des fractions.

> Reasons must be strong, maybe not unrelated to sentences from "a child should not have an opinion" to "a child should have not will." If this is a correct conjecture, then the issue is a more general one about education, not necessarily school education or school math in particular. (Varga 1982 p. 30)

Cette citation montre comment l'enseignement des probabilités est lié, dans la conception de Varga, à des considérations pédagogiques plus générales visant une certaine démocratisation dans l'enseignement, l'encouragement de la diversité des opinions et du partage de responsabilité de l'apprentissage entre enseignant et élèves.

v. Les probabilités permettent en outre de présenter très tôt les mathématiques d'une autre nature, les mathématiques de l'*incertain*.

> Perhaps, the main reason for an early introduction of this branch of mathematics is that it is essentially different from other parts of mathematics. [...]
>
> Mathematics [...] does not only concern itself with certainties which can be expressed by exact statements but also with uncertain things of a chance character. This sounds strange, because it might be thought that if something is uncertain we can only state uncertain things about it. On the one hand we have everyday life, full of chance events, full of "perhaps" and "probable". On the other side there is mathematics with its perfect circles and triangles, with its exact statements which unfortunately are not a great deal of use to describe the real world. How could one somehow mix up these two sides? (Varga 1967a p. 2)
>
> [...] The words "probably", or "about" or "estimate" which we have used here hardly express for us much more than **uncertainty**. This is what separates our method of reasoning from the more usual forms of mathematics. The strength of the calculus of probability lies in the fact that we can give such words an exact meaning of a quantitative character. (Varga 1967a p. 4)

Ce dernier point est en lien apparent avec la position épistémologique de « l'école hongroise », présentée dans la partie II. Pour plusieurs mathématiciens hongrois cités, l'incertain semble jouer un rôle important dans leur conception de la nature des mathématiques. Spécialiste des probabilités, Rényi parle par exemple très similairement des « mathématiques de l'incertain » dans ses *Lettres sur les probabilités* où il écrit des fausses lettres au nom de Pascal pour présenter la théorie des probabilités au public intéressé :

> The oppressive uncertainty, about which I spoke above, has one of its roots partly in a common superstition; namely, if one does not know something with complete certitude (and indeed we are rarely in possession of complete certainty), one is inclined to believe he has no knowledge about it at all. The starting point of my reasoning is the statement that this is an erroneous belief. Partial knowledge is none the less knowledge, and incomplete certainty has certain value, especially if one is conscious of the degree of certainty of his knowledge. "Why" – somebody could object here – "can one measure the degree of knowledge; how express it by a number?" "Of course", I would answer, "it can be measured and this is exactly what people who play a game of chance are doing". (Rényi 1972 pp. 14-15)

Pólya, quant à lui, accorde également une grande importance au « raisonnement plausible », dont il développe les principes dans *Les mathématiques et le raisonnement plausible* (Pólya 1958). Selon lui, la plus grande majorité des connaissances humaines sont des hypothèses, non basées sur une vérification par des méthodes absolument sûres, s'appuyant plutôt sur des arguments plausibles pour être plus ou moins convaincu d'une proposition. Pólya propose dans son livre des 'syllogismes du raisonnement plausible' et montre aussi leur application en mathématiques. (Pólya 1958 pp IX – XV).

Mais il est facile d'identifier des liens également avec la conception « quasi-empirique » des mathématiques, proposée par Kalmár et Lakatos ; ou encore avec l'idée du plaisir porté par l'incertitude, que l'on trouve à plusieurs reprise chez Rózsa Péter : le plaisir de faire des recherches mathématiques et la curiosité ressort, dans son *Jeux avec l'infini*, en partie grâce à cette incertitude, dès les problèmes arithmétiques des plus simples et jusqu'aux théorèmes de Gödel et de Church.

Pour Varga, l'incertitude est également liée à l'aspect ludique des mathématiques : dans les jeux stratégiques par exemple, basés sur les probabilités, on peut réfléchir à la plus ou moins grande efficacité d'une stratégie, mais même la meilleure stratégie ne garantit pas le succès, il reste une place à l'excitation. Nous allons présenter plusieurs exemples de ce genre, la soustraction de nombres de deux chiffres à l'aide de dés, (Varga 1982, §1.5.1), ou le jeu avec trois disques (Varga 1970, voir §1.5.2).

En résumé, on peut donc voir que les arguments pour l'enseignement de la combinatoire et des probabilités sont très clairement liés à la conception épistémologique sous-jacente que nous avions présentée dans la partie II. L'articulation dialectique des domaines mathématiques ; l'idée d'un processus d'abstraction partant du concret, aidé par un jeu de représentations diverses (au lieu de la conception d'un langage mathématique a priori abstrait) ; l'idée des mathématiques de l'incertain, l'importance des estimations ; le rôle accordé au ludique dans l'activité mathématique ; et enfin, l'autonomie de l'élève dans l'apprentissage, l'encouragement de la diversité des opinions : sont toutes des caractéristiques de la conception de « l'école hongroise ».

1.2 Le programme de la combinatoire

Le livre du professeur du grade 6 propose un résumé des étapes du développement de la pensée combinatoire (pp.189-190) : une construction que le programme vise à suivre. On y

souligne qu'il ne s'agit pas d'apprendre à résoudre quelques types de tâches, mais plutôt de développer un mode de pensée combinatoire qui permettra aux élèves de résoudre de nouveaux problèmes rencontrés. Les étapes de ce développement sont les suivantes :

i. Créer des cas correspondant à certaines conditions données.
ii. Créer le plus possible de cas différents.
iii. Trouver tous les cas possibles.
iv. Ranger les cas, systématiser (on souligne que cet étape peut précéder l'étape iii, et servir de justification à cette dernière).
v. Chercher le nombre de cas possibles. À partir de cet étape, on ne cherche plus nécessairement à construire tous les cas, il suffit de les envisager : on avance ainsi au niveau d'abstraction.
vi. Résoudre des problèmes apparemment différents mais identiques dans leur contenu mathématique. Le livre souligne l'importance de cette étape dans le processus d'abstraction.
vii. La variation systématique des variables mathématiques. (Par exemple à l'aide d'un tableau.)
viii. Reconnaître des relations, des régularités entre les nombres du tableau.
ix. Expliquer ces régularités selon la signification de ces nombres.
x. Exprimer ces régularités avec des formules.

Ce processus nous fournit un exemple illustratif de la mise en œuvre du principe concernant la répartition de l'enseignement des notions mathématiques sur plusieurs années, en commençant dès les classes inférieures (cf. Chapitre 2). Le livre du professeur cité critique en effet l'enseignement 'habituel' de ce domaine au lycée, où l'on essaye, selon les auteurs, d'entrer à la combinatoire directement par l'étape x, et sans passer à travers ce processus de développement.

Dans le programme de Varga, les premières étapes de ce processus sont traitées dès le début de l'école élémentaire. On apprend à systématiser avec des diagrammes différents (arbre, chemin, tableau) et à chercher le nombre des cas à partir du grade 3 ou 4. Nous revenons sur ce processus dans le §2.1. On verra aussi que l'étape vi. est accentuée dès la première année, grâce à la grande diversité des tâches et aux liens établis entre les problèmes analogues.

La variation systématique des variables est l'objet d'étude à partir du grade 6. Le programme des deux dernières années contient l'étude systématique des types de tâches de

combinatoire et l'établissement des liens entre elles ; mais les formules ne sont pas enseignées jusqu'à la fin de l'école moyenne.

Nous n'entrons pas ici dans les détails de ce programme : nous aurons l'occasion d'approfondir l'étude de ces étapes dans le §2, lors de l'étude de quelques processus d'enseignement longs, à la base des extraits de manuels et de livres du professeur.

1.3 Le programme des probabilités

Dans un manuscrit d'article qui date du début des années 1980[134], Varga décrit la construction du programme des probabilités. Les probabilités, comme la plus grande majorité des domaines, sont présents dès le grade 1 dans le programme. Selon l'argument de Varga, il est plus simple de former la pensée des jeunes enfants que celle des plus âgés : il est donc préférable d'introduire la pensée probabiliste aussi tôt que possible. Varga se réfère aussi sur ce sujet à l'œuvre de J. Piaget et B. Inhelder, *La genèse de l'idée de hazard chez l'enfant*.

La construction du programme suit les étapes suivantes :

i. Activités pour distinguer des évènements sûrs, accidentels et impossibles.
ii. Activités pour construire la notion de plus ou moins probable (en se basant sur des expériences, sur une notion statistique, fréquentiste des probabilités ce qui est considéré plus général que celle basée sur les cas équiprobables, bien que certaines de ces expériences préparent dès cette phase cette dernière notion). Un processus d'abstraction, la comparaison des probabilités d'évènements différents (au début pour des évènements du même genre, plus tard pour des évènements moins similaires).
iii. La notion des cas équiprobables, basée sur des arguments de symétrie ; comparaisons des évènements sur la base des nombres d'évènements élémentaires équiprobables.
iv. Découvrir des analogies entre expériences et évènements ; chercher des classes d'équivalences.

    Les phases précédentes couvrent à peu près le programme des premiers trois grades, et ne nécessitent que l'utilisation des nombres naturels. Les phases suivantes, s'appuyant déjà sur les nombres rationnels, arrivent à partir du grade 4, l'année de l'introduction des fractions et des décimaux.
v. La relation entre fréquence relative et probabilités est établie.
vi. Calculs de probabilités sur un univers d'évènements.
vii. Probabilité conditionnelle.

[134] Nous ne disposons que ce manuscrit et ils nous manquent des coordonnées de la version publiée. Le texte date en tout cas après 1980 car il contient des références aux expériences de l'introduction de la réforme.

Le résumé ci-dessus montre qu'il s'agit d'une progression lente des notions probabilistes, étendue sur plusieurs années. Les premières étapes ne visent pas l'introduction des notions de la théorie des probabilités, beaucoup plus la familiarisation des élèves avec une mode de pensée probabiliste. Les notions mathématiques sont déconstruites en petits éléments : pour donner sens à une notion mathématique de probabilité, on passe du temps sur l'idée des évènements sûrs, possibles, impossibles, plus et moins probables, en étudiant des situations variées (nous en étudierons quelques unes dans le §1.5). C'est cette déconstruction qui permet l'introduction du domaine très tôt dans le programme, avant même l'étude des nombres rationnels. La relation entre le domaine des probabilités et l'arithmétique n'est ainsi pas hiérarchique, plutôt dialectique : les notions de probabilités s'appuient sur les nombres, mais les problèmes probabilistes motivent à leur tour l'extension de la notion de nombres contribuant, parmi beaucoup d'autres exemples, à donner du sens aux fractions et aux décimaux (voir par ex. Glaymann & Varga 1975 p. 11).

Le programme des probabilités est progressif en plusieurs sens : on peut y voir aussi un développement aux niveaux d'abstraction, et aux niveaux des paradigmes de probabilité. En ce qui concerne le premier aspect, ce développement est très similaire à celui du domaine de la combinatoire que nous étudierons dans le §2. Nous traitons le jeu des paradigmes dans le point suivant.

1.4 Paradigmes de probabilité dans le programme de Varga

La notion de *paradigme de probabilité* est introduite par Parzysz (2011), sur le modèle des paradigmes géométriques de Houdement et Kuzniak (2006). Il réinterprète ainsi différentes positions épistémologiques traditionnelles concernant la théorie des probabilités, notamment la « fréquentiste » (P1), basée sur l'observation du monde réel et sur l'expérience statistique, et la « laplacienne » ou « classique » (P2), basée sur un modèle théorique et sur la démonstration mathématique (cf. Chapitre 1 §4.2.2).

Dans le programme de Varga, on peut identifier une articulation de ces deux paradigmes. Dans les deux premières années, le programme part d'une approche logique (distinguer des évènements certains, possibles mais incertains, et impossibles). En grade 2, on commence également à faire des expérimentations probabilistes, distinguer des cas et observer leurs fréquences. En parallèle, on apprend en combinatoire à distinguer des cas différents, et énumérer tous les cas possibles d'un problème de combinatoire. À partir du grade 3, on commence à définir systématiquement le nombre des cas possibles en combinatoire, et lister

des évènements possibles en probabilités. On fait des estimations, on compare des évènements plus et moins probables.

Les exemples concrets donnés par le programme sont systématiquement variés entre, d'une part, les problèmes où l'on n'est pas dans la mesure d'établir un modèle mathématique, et l'approche adaptée est la fréquentiste, avec la statistique comme outil d'analyse ; et d'autres part des problèmes où il est possible de définir des cas équiprobables permettant une argumentation logique, passer donc de P1 à P2. Le traitement de ces problèmes reste toutefois expérimental dans tous les cas à ce niveau – éventuellement avec des estimations qui peuvent motiver les élèves à commencer à développer des modèles implicites.

> Observation et enregistrement des évènements plus et moins probables. *Exprimer de conjectures, les comparer avec l'expérience.
>
> Exemples :
>
> De six boules, deux sont rouges, les autres blanches. On en tire deux boules. De quel type de couple attend-on d'apparaître plus fréquemment ?
>
> Si j'ouvre un livre au hasard, la première lettre de la première ligne serait-elle une consonne ou une voyelle ? Qu'est-ce qui est plus probable ? (Prog. h. 1978 p. 41. Ma traduction.)

Dans le cas du premier exemple, il est possible d'établir un modèle simple de cas équiprobables, bien qu'on base l'étude sur les expériences, c'est-à-dire sur un travail en P1. Dans le cas du deuxième exemple par contre, l'établissement d'un modèle serait difficile, l'exemple est typiquement un problème à traiter en P1.

Les notions de fréquence, et de fréquence relative sont introduites en grade 4, en lien avec la notion de fractions :

> Exemple : On lance une pièce (ou un disque) six fois, le résultat est 2 fois face, 4 fois pile. Dans ce cas, la *fréquence* de la face est 2, sa *fréquence relative* est 2 sur 6, c'est-à-dire 2/6, ou différemment 1/3. (Deux sixième, ou un tiers des lancements est face.) (Prog. h. 1978 p. 49. Ma traduction.)

Le programme propose à nouveau des exemples où une argumentation établie sur un modèle mathématique simple est possible, et d'autres, venant de la vie quotidienne, où les arguments doivent rester plus intuitifs :

> Qu'est-ce qui est plus probable à ton avis, que demain il va pleuvoir, neiger, grêler ou aucun des ces cas n'arrivera ?
>
> On lance un dé. Qu'est-ce qui est plus et moins probable parmi des évènements suivants : on obtient un nombre pair ; plus petit de 3 ; plus grand de 3 ; plus petit de 5 ; plus grand de 5 ; plus petit de 7 ; plus grand de 7. (Prog. h. 1978 p. 49-50. Ma traduction.)

En grade 5 (au début de l'école moyenne), parallèlement avec une révision et aperçu général des différentes notations possibles des nombres rationnels (fractions, décimaux, pourcentages), on apprend à écrire les fréquences relatives dans ces différentes formes. *« La notion de probabilité en tant que valeur supposée autour de laquelle la fréquence relative oscille »,* est introduite soit en grade 5 soit en grade 6, selon le choix de l'enseignant. Il s'agit donc d'une définition fréquentiste, en parenté claireavec celle de Rényi. En même temps, après la définition en grade 5 de la probabilité des évènements certains et impossibles (à la base de leur fréquence relative qui est certainement 1 et 0), on commence à traiter aussi des cas équiprobables. On compare des probabilités calculées à partir d'un modèle et les fréquences relatives venant d'un grand nombre d'expériences : on articule donc P1 et P2.

Dans la suite, de plus en plus de place est accordée progressivement aux calculs théoriques, combinatoires à partir d'un modèle de cas équiprobables. On approfondit aussi l'étude des différentes représentations, et avant tout les arbres : l'étude des probabilités est donc plus concentrée sur un travail en P2. Mais le programme souligne toujours l'importance de faire des expériences, et traiter aussi des exemples non réductibles à un modèle simple de cas équiprobables.

Il s'agit donc, dans le programme, d'un passage lent et progressif de P1 vers P2, avec une articulation permanente entre les deux paradigmes. À l'école élémentaire, l'accent est mis avant tout sur une familiarisation à la pensée probabiliste, et sur la réalisation des expériences. On peut déjà commencer à utiliser des modèles simples pour interpréter les expériences réalisées, mais ces modèles restent intuitifs : ils sont explicités progressivement à l'école moyenne.

Le travail dans un paradigme laplacien est par ailleurs basé sur l'étude systématique de la combinatoire, dès le début du programme. L'étude de plus en plus systématique de l'ensemble des cas possibles dans une situation donnée, c'est à la fois objet d'étude de la combinatoire et des probabilités, tout au long de l'école élémentaire. Quand à l'école moyenne on fait des calculs en P2, on s'appuie déjà sur des expériences riches en calculs combinatoires.

De l'autre côté, on insiste toujours pour les probabilités sur l'importance des expérimentations et on suggère aussi, tout au long du programme, l'utilisation des exemples de la vie quotidienne où l'établissement d'un modèle mathématique serait difficile, et l'argumentation des élèves doit rester sur d'autres bases : c'est le cas par exemple des problèmes des lettres d'un livre ou de la météorologie.

Par rapport à l'articulation des paradigmes dans le programme de Varga, on peut en effet observer une analogie avec l'étude de la géométrie et des probabilités. Comme on a vu

(chapitre 4 §2.2), il s'agit en géométrie aussi d'un passage progressif de G1 vers G2, avec pourtant une articulation maintenue entre les deux. En fait, on peut reconnaître un des principes de la réforme de Varga derrière ces constructions : l'importance des expériences et le passage progressif du concret vers l'abstrait. La visée de l'étude est un travail théorique dans les deux cas, basée sur un raisonnement logique (G2 et P2), mais les connaissances et les outils nécessaires pour un tel travail sont acquis progressivement, à l'aide d'un travail expérimental sur la réalité sensible (G1 et P1).

1.5 Quelques exemples de situations de probabilités

Nous citons ici trois exemples de situations issues des différents articles de Varga (les extraits des textes originaux, en langue anglaise se trouvent dans les annexes III.5.1-3).

1.5.1 Jeu de soustraction avec lancement de dé

Dans ce jeu (Varga 1982 p. 27 -28, voir annexe III.5.1), les enfants doivent maximaliser la différence de deux nombres de deux chiffres – mais les quatre chiffres des deux nombres sont obtenus par lancements successifs d'un dé. Ils doivent choisir l'ordre dans lequel ils inscrivent les chiffres dans les cases de leur tableau, avec l'objectif de maximaliser leur résultat. Le jeu est repris plusieurs fois et à chaque tour, les meilleurs deux joueurs obtiennent des points. Ainsi on obtient un grand nombre d'expériences dans le cadre d'une compétition. La compétition motive des élèves à développer des stratégies : et dans cette situation probabiliste, ils doivent se rendre compte qu'il existe des stratégies meilleures et pires, mais il n'y a pas de stratégie surement gagnante.

> But can the players ever avoid being sorry in after-thought about the way they filled the boxes? A few rounds they actually play (and maybe a few more they play mentally) should convince the players that they cannot avoid that. In other words, there is no fail-safe strategy, though there are better and worse strategies. […] The question is, how often and to what extent they have to regret their choices in the long run. This is where discussion with nine-, ten-, and eleven-year olds comes in (after playing the game a couple of times). (Varga 1982 p. 29)

Cette situation est un exemple caractéristique de l'articulation des domaines. Dans ce cas, il s'agit d'un problème de familiarisation et de réinvestissement de la soustraction : la situation permet de pratiquer l'opération, approfondir la compréhension de ses propriétés, ce qui est nécessaire pour développer une stratégie efficace. Par son caractère ludique, le jeu probabiliste contribue à la dévolution de l'étude de la soustraction. De l'autre côté, la situation sert à étudier des évènements probabilistes (lancement de dé) et pose un problème de

stratégies efficaces basées sur ces évènements. De ce point de vue, c'est le contexte des nombres et de la soustraction qui donne un sens au problème, car c'est ce qui permet de distinguer des évènements plus et moins souhaitables, et motiver ainsi l'élaboration des stratégies.

On peut observer un rôle important accordé à l'aspect ludique. D'une part, cette activité rend plaisant l'apprentissage de la soustraction, et contribue à la diversité d'expériences concernant les opérations arithmétiques. D'autre part, la compétition, l'envie de gagner joue ici le rôle de la dévolution, c'est ce qui motive les élèves à prendre la responsabilité de la recherche des stratégies gagnantes. Mais, c'est caractéristique d'un jeu probabiliste, il n'existe pas de stratégie sûrement gagnante, il y reste toujours un certain imprévu, ce qui rend le jeu intéressant même après plusieurs tours. Il est intéressant d'observer des expressions liées au domaine affectif que Varga utilise à plusieurs reprises (regret, being sorry), insistant ainsi sur l'importance de l'affectif dans le processus d'apprentissage.

La situation porte des potentiels adidactiques importants. Le milieu est rétroactif, c'est à travers la compétition, la comparaison des résultats obtenus qu'on a des retours sur l'efficacité des stratégies. Il ne s'agit cependant pas de réponses 'vrai' et 'faux' : un des enjeux de la situation est justement de reconnaître que le succès occasionnel d'une stratégie ne permet pas son évaluation définitive. C'est-à-dire, l'apprentissage visé consiste, en partie, justement en la reconnaissance de la rétroactivité limitée du milieu. La validation des stratégies peut se faire en partie par l'accumulation des expériences (P1) et par l'argumentation logique (P2)[135].

D'un point de vue des paradigmes de probabilités, on voit une certaine articulation entre P1 et P2. Varga suggère des arguments logiques dès le début, mais qui sont seulement partiels :

> They soon realize that six at the first throw should go [in the first case], and one at the first throw should go [in the last case] but they are more hesitant about a five or a two. They realize that a six may follow the five and then chances are better for those who kept the upper left box free. […] (Varga 1982 pp. 28-29)

Pour pouvoir aller plus loin, on étudie des résultats lors d'une succession d'expériences du nombre des tours gagnés : la comparaison expérimentale des stratégies correspond à un travail en P1. Ce sont les limites de ce travail qui peuvent motiver ensuite une argumentation logique

[135] Cette particularité du milieu peut par ailleurs apporter des difficultés au niveau du contrat, précisément à cause des résultats imprévisibles et parce que les réponses positives du milieu ne correspondent pas nécessairement à l'évaluation logique des stratégies – ce type de difficulté est également souligné par Brousseau (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002 p 406). Sur le sujet des problèmes de validation dans l'enseignement des probabilités, voir la thèse en cours d'Assia Nechache.

sur les stratégies, visant désormais une technique de solution en P2. Varga propose pour cette situation un travail sur le long terme, avec plusieurs reprises éventuelles dans les années suivantes :

> Their intuitions lead them to different strategies which are then tested at further games. At somewhat higher level, still in the elementary school, the strategies can be formulated more precisely, incorporated into computer programs and tested more precisely in a great number of trials. At a much higher level calculating the expected values related to specific strategies and finding the best strategy may be the subject of a research for undergraduates. (Varga 1982 p. 29)

C'est un des rares cas où Varga suggère un traitement fréquentiste aussi long et complexe (intégrant même l'utilisation des ordinateurs) ; mais cette continuation n'est pas élaborée, beaucoup moins en tout cas que ce qu'on pourra voir dans l'article de Brousseau (§3.4).

Ce long processus prévu signifie aussi que le problème reste plus ou moins ouvert après son premier traitement : on en sait un peu plus sur les différentes stratégies possibles, mais on n'en dispose pas d'évaluation définitive.

1.5.2 Le jeu avec trois disques : comparaison des stratégies, développement des représentations

Dans un autre article, publié une dizaine d'années plus tôt que le précédent, Varga décrit plus en détails une situation concernant l'étude des stratégies d'un jeu de probabilité (Varga 1970 p. 24-27, voir annexe III.5.2).

Le jeu nécessite 3 disques, l'un est blanc des deux côtés, l'autre porte une marque des deux côtés, le troisième a un côté blanc, un marqué. L'enseignant tire un disque au hasard et montre aux élèves un côté au hasard : il faut deviner la nature de l'autre côté. (Varga souligne que la déclaration des conditions précédentes est nécessaire, sinon on pouvait supposer que l'enseignant influence le résultat de l'expérience.)

La situation se déroule en plusieurs étapes : dans l'article, un tableau est associé à chacune d'elles. La première étape consiste en une série de 10 jeux, les élèves marquent chaque fois leur résultats (voir tableau 1 de l'annexe III.5.2). Il s'agit à nouveau d'une compétition entre les élèves, après 10 jeux on compare qui a trouvé le résultat le plus grand nombre de fois. Dans l'étape suivante, on s'intéresse aux meilleures stratégies : similairement à l'exemple précédent, c'est la compétition qui donne du sens au problème, qui motive l'étude des stratégies possibles. On compare différentes stratégies (voir tableau 2), d'abord expérimentalement (chaque élève « prend en charge » une stratégie et on compare des résultats par séries de 10 jeux), ensuite on cherche à expliquer des différences sur une base

logique. Enfin, le tableau 3 donne des probabilités pour le nombre des jeux gagnés en fonction des différentes stratégies.

On voit un passage de P1 vers P2 ; la situation vise en fait un raisonnement logique, l'expérimentation ne joue pas ici un rôle démonstratif, sert plutôt l'accumulation des expériences concrètes sur le problème avant d'en chercher une démonstration. En effet, l'établissement d'un modèle, la définition d'un ensemble de cas équiprobables n'est pas évidente dans ce cas : il serait facile de supposer que 'blanc' et 'marqué' ont la même probabilité, mais ce modèle sera déstabilisé par les expériences. En fait, vu qu'il y a deux disques avec des côtés identiques et une seulement avec des côtés différents, la probabilité que le côté caché soit identique avec le côté montré est 2/3 : une stratégie basée sur cette argumentation sera plus efficace sur le long terme que toute autre stratégie.

Comme l'établissement d'un modèle convenable n'est pas évident dans ce cas, on peut attendre que plusieurs différentes stratégies émergent. Ces stratégies peuvent être intuitives au départ ou basées sur un modèle probabiliste ; les expériences confirment leur efficacité d'un côté (P1), et le débat en classe, le raisonnement pour la stratégie gagnante nécessite l'explicitation d'un modèle théorique adaptée de l'autre (P2).

Le niveau d'abstraction est progressivement augmenté au cours de la situation : à la première étape, il s'agit d'une série concrète de jeux où chaque élève essaye de gagner le plus de fois possibles. L'idée d'une « stratégie » émerge après cette étape quand il est demandé aux élèves d'expliciter la méthode suivie. Dans la deuxième étape, on ne s'intéresse plus aux résultats des jeux concrets mais aux stratégies, ce que représente le deuxième tableau ; les élèves ne jouent plus selon leur envie, l'enjeu n'est plus de gagner mais de vérifier l'efficacité des stratégies. Dans le troisième tableau, on n'enregistre plus des résultats des jeux déjà joués, mais on fait des prévisions, on calcule des probabilités d'évènements à l'aide d'outils mathématiques.

La première étape est ici purement ludique et contribue à la dévolution du problème mathématique qui en émerge : l'élaboration et l'évaluation des stratégies pour une situation probabiliste. Les élèves portent à nouveau une responsabilité importante dans ce processus, mais, comme dans de nombreux autres cas, la situation se déroule dans une forme dialogique entre l'enseignant et la classe.

Nous remarquons enfin quelques caractéristiques de la narration de Varga lors de la description de cette situation. Similairement à d'autres ressources de l'équipe de Varga, on voit ici aussi un texte quasi-continu, avec des informations et consignes souvent vagues. Ce qui est la particularité de ce texte, c'est qu'on peut y reconnaître, par moments, la voix de

l'enseignant, les questions et réponses à donner en classe : l'article suggère ainsi plus ou moins implicitement une certaine pratique dialogique.

« Who would explain why ? That's right ». On n'entend pas ici l'élève, seulement la réponse de l'enseignant, la validation de l'argument de l'élève. Selon la suggestion de l'article, la réponse continue à la façon suivante : « That's right. If I mix the discs thoroughly, then […] ». C'est-à-dire, ce que l'élève a exprimé avec ses propres mots, l'enseignant le reprend avec les expressions institutionnelles et en forme plus structurée, en faisant un lien direct entre l'explication personnelle de l'élève et un discours institutionnel. La responsabilité est ainsi partagée entre l'enseignant et l'élève lors de la formulation des nouvelles connaissances.

1.5.3 Arriver à l'école à l'heure : estimations concernant les problèmes de la vie courante

Notre troisième exemple, issu du même article que le premier (Varga 1982 p. 31-33, voir annexe III.5.3), représente un type de situation plus rare, toutefois systématiquement présente chez Varga : une situation probabiliste basée sur les expériences de la vie courante, pour lesquelles on ne dispose pas de modèle mathématique convenable et on ne peut ainsi pas fournir une solution de P2. Varga insiste sur l'importance de pratiquer des estimations même dans les situations où une réponse exacte n'est pas envisageable.

Dans cette situation, on discute le temps nécessaire pour chaque élève pour arriver à l'école. Après une première estimation, on pose la question du temps nécessaire pour être sûr d'arriver à l'heure. On constate qu'une sureté absolue n'est pas possible, mais on peut chercher à définir une sûreté relative, c'est-à-dire qu'on arrive à temps avec une certaine probabilité donnée. On constate également une asymétrie du problème : il est possible de définir une durée qui exclut certainement qu'on arrive à l'heure.

Cette situation permet d'approfondir le sens des notions « sûr », « possible », « impossible », « plus et moins probable » : on a vu que l'étude de ces notions est la première étape du programme de probabilités chez Varga. Mais par ailleurs, le problème ne permet pas un traitement logique, dans un paradigme laplacien, car on ne dispose pas de modèle convenable pour définir des probabilités dans un espace d'évènements. Ce problème issu de la vie courante contient trop de possibilités imprévisibles pour en déduire un modèle mathématique suffisamment fiable au niveau des élèves : la discussion suggérée par le texte vise justement à rendre compte de cette complexité du problème, et des potentialités de la pensée probabiliste qui dépassent le cadre du programme scolaire. Il n'est pas non plus

question ici d'une approche fréquentiste : on n'envisage pas d'expérimentations réelles pour tester le temps d'arriver à l'école, on cherche plutôt à évaluer les risques possibles. En fait, l'approche qui surgit ici semble être plus proche à un paradigme bayesien des probabilités, car il est basé sur les connaissances et sur l'avis subjectif des élèves. Mais il faut souligner que cette approche reste ponctuellement présente dans la conception de Varga, sans être développée en un modèle mathématique dans le programme.

Du point de vue de la TSD, on ne peut pas parler ici d'une situation adidactique car il n'y a pas de milieu rétroactif. Il ne s'agit pas non plus de transmission de savoir par l'enseignant : les élèves sont chargés de développer et exprimer leur avis sur le problème. C'est la discussion, la réflexion collective qui permet ici elle-même d'approfondir la compréhension des notions visées par la situation.

Pour conclure cette analyse de situations, on peut en effet observer une articulation des différents paradigmes : principalement entre P1 et P2 (mais on a aussi trouvé des exemples de situations, liées surtout au programme des premières années, qui visent une initiation subjectiviste à la notion de probabilités sans chercher à établir un modèle mathématique). Dans la majorité des cas, la validation est logique P2 ; la phase P1 sert plutôt à introduire la phase suivante par l'étude d'expériences concrètes.

L'articulation des paradigmes est étroitement liée au contrat didactique dans nos exemples. Dans le deux premier cas, il s'agit des jeux stratégiques qui, par leur caractère ludique, contribuent à la dévolution : c'est l'envie de gagner qui donne du sens au problème probabiliste, à la recherche d'une stratégie gagnante. L'approche fréquentiste permet de construire un milieu rétroactif : les expériences répétées confirment ou rendent douteuses les stratégies des élèves. En même temps, le caractère aléatoire des situations constitue une limite à la validation expérimentale des stratégies et oriente la recherche d'une stratégie gagnante vers l'argumentation logique (P2).

Comme dans les situations étudiées dans les chapitres précédents, on peut voir ici aussi l'importance des dialogues enseignant-classe dans le processus d'apprentissage. Le dernier exemple, plutôt exceptionnel, est particulièrement intéressant de ce point de vue, car il présente un processus dialogique, avec une certaine responsabilité des élèves dans le processus, mais sans la présence d'un milieu rétroactif.

Le court dialogue ci-dessous, issu d'un extrait de manuel scolaire du grade 6, illustre un processus de construction et de mise à l'essai d'une hypothèse de probabilités à l'aide des expérimentations (P1), validée finalement par argumentation logique (P2). L'extrait illustre

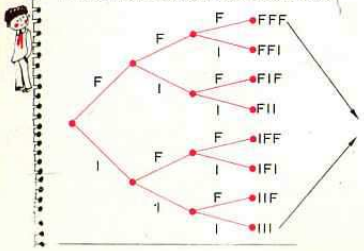
aussi l'utilisation des différents outils de représentation, tableau pour la phase expérimentale et arbre pour la démonstration.

<table>
<tr>
<td>
A gyerekek a következő kísérletet végezték: Három darab tízfilléressel dobtak egyszerre. Arra voltak kíváncsiak, melyik esemény fog gyakrabban bekövetkezni: az, hogy mindhárom pénzdarab ugyanarra az oldalára esik, vagy az, hogy csak kettő esik ugyanarra az oldalára. A kísérlet elvégzése előtt elmondták tippjeiket.

Dávid: Mivel harmadik lehetőség nincs, a két esemény közül vagy az egyik, vagy a másik következik be, és ezért mindkét esemény relatív gyakorisága $\frac{1}{2}$ körüli érték lesz.
</td>
<td>
Les élèves ont fait l'expérience suivant : ils ont lancé trois pièces de dix centimes en même temps. Ils voulaient savoir quel évènement se produira plus fréquemment : que les trois tombent sur le même côté ou bien que seulement deux tombent sur le même côté. Avant de réaliser l'expérience, ils ont dit leur prévision.
Dávid : Puisqu'il n'y a pas de troisième possibilité, soit l'un soit l'autre se produit parmi les deux évènements et la fréquence relative de chacun sera donc autour de ½.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Marci: Nem vagyok benne biztos. Gondolj arra, hogy ha mindhárom pénzdarab ugyanarra az oldalára esik, az csak kétféleképpen következhet be. Az viszont, hogy két ilyen – egy olyan többféleképpen is lehet. Például: ez fej, az a kettő írás, vagy az fej, és ez a kettő írás, vagy a harmadik fej, és a másik kettő írás, és még más esetek is vannak.

A gyerekek elkészítették a táblázatot:
<table>
<tr><th>Ennyi dobásból</th><th>20</th><th>40</th><th>60</th><th>80</th><th>100</th><th>120</th><th>140</th><th>160</th><th>180</th><th>200</th></tr>
<tr><td>I. Ennyi esetben lett csupa egyforma</td><td>10</td><td>16</td><td>19</td><td>26</td><td>31</td><td>34</td><td>40</td><td>44</td><td>48</td><td>51</td></tr>
<tr><td>II. Ennyi esetben csak kettő egyforma</td><td>10</td><td>24</td><td>41</td><td>54</td><td>69</td><td>86</td><td>100</td><td>116</td><td>132</td><td>149</td></tr>
<tr><td>Az I. esemény relatív gyakorisága</td><td>0,5</td><td>0,4</td><td>0,32</td><td>0,32</td><td>0,31</td><td>0,28</td><td>0,29</td><td>0,28</td><td>0,27</td><td>0,26</td></tr>
<tr><td>A II. esemény relatív gyakorisága</td><td>0,5</td><td>0,6</td><td>0,68</td><td>0,68</td><td>0,69</td><td>0,72</td><td>0,71</td><td>0,72</td><td>0,73</td><td>0,74</td></tr>
</table>
Bizony Marcinak volt igaza, szólt Dávid. Az első esemény az eseteknek körülbelül egynegyedében következik be. Meg is tudom mondani, mi ennek az oka.

Minden tízfilléres kétféleképpen eshet

A rajzomról az összes esetet leolvashatjátok.


Csak ez a két dobás ad csupa egyformát. Ez pedig az összes (8) lehetőség egynegyede.
</td>
<td>
Marci : Je n'en suis pas sûr. Prends en considération que ce que les trois pièces tombent sur le même côté, cela peut se produire seulement de deux façons. Par contre, il y a plus de possibilités pour deux pareil un différent. Par exemple : celle est face et les deux autres piles ou l'autre est face et ces deux sont piles ou la troisième est face et les deux autres sont piles, et il y a encore d'autres cas.

Les enfants ont préparé le tableau :
D'autant de lancement
I Dans tel nombre de cas elles étaient tous pareils
II dans tel nombre de cas étaient seulement deux pareils
I Fréquence relative du premier évènement
II Fréquence relative du deuxième évènement

En effet, Marci avait raison, dit Dávid. Le preimer évènement se produit à peu près dans un quart des cas. Je peux même expliquer pourquoi.
Chaque pièce peut tomber de deux différentes façons.
Vous pouvez lire sur ma figure l'ensemble des cas.
Seulement deux, le premier et le dernier donnent des côtés tous pareils. Et c'est le quart de toutes les possibilités (8).
</td>
</tr>
</table>

Figure III.5.1 (Manuel h. gr. 6 1981, pp. 153-154)

2 « SERIES DE PROBLEMES » CHEZ VARGA : L'EXEMPLE DE LA COMBINATOIRE

Après des exemples de situations de probabilité, nous revenons sur le domaine de la combinatoire pour étudier la construction des processus d'enseignement plus longs. Dans les chapitres précédents, nous avons montré le rôle important des séries mise en ordre de problèmes dans la conception de Varga sur les processus d'apprentissage. Ici, nous examinerons quelques collections de tâches pour étudier les principes qui les organisent en série. Les exemples du domaine de combinatoire sont particulièrement bien adaptés pour une telle étude, non seulement parce que les extraits de textes en question sont plus clairement structurés qu'habituellement, mais aussi parce qu'ils contiennent des réflexions explicites concernant leurs principes organisateurs.

Notre premier exemple est issu du livre du maître hongrois du grade 1 (le même livre que nous avons étudié dans le Chapitre 3) : le chapitre combinatoire y est relativement court ce qui nous permet de le traiter dans son intégralité (pour sa traduction française intégrale, voir annexe III.5.4). Le chapitre est par ailleurs particulièrement bien structuré par rapport à d'autres chapitres du livre, et donne de nombreuses indications sur la logique de l'enchaînement des tâches. Une des situations principales de ce chapitre, celle de la construction des tours colorées est reprise dans plusieurs autres écrits de Varga : nous complèterons l'analyse suivante avec l'étude d'un extrait d'article qui présente un long processus basée sur cette situation (annexe III.5.5).

Notre deuxième exemple concerne deux extraits des manuels scolaires de l'école moyenne (voir annexe III.5.6). Contrairement à d'autres thèmes, les chapitres de combinatoire ne contiennent pas d'explications du contenu du programme, ni des dialogues fictives d'élèves que l'on a vu dans le chapitre 4 (§4) : ils se limitent à une ou deux pages et comprennent uniquement une série de tâches. Nous étudierons la structuration de deux séries, issues des manuels des deux premières années de l'école moyenne (grades 5 et 6).

2.1 Combinatoire au début de l'école élémentaire : une « série de problèmes » à caractère ludique

La première chose qu'on peut observer dans ce chapitre du livre du maître (annexe III.5.4), c'est la très grande variété des situations : on souligne le rôle de la diversité d'expériences qui alimente l'intuition et forme ainsi une base pour le processus d'abstraction.

> Plus tard, nous décrirons davantage de tâches pour lesquelles il est possible de montrer qu'elles ne diffèrent que dans les aspects insignifiants des tâches présentées ci-dessus, mais pour les enfants, elles signifient chaque fois un nouveau problème – une nouvelle occasion donc pour enrichir leurs expériences. La diversité de l'intuition (la forme variée du même problème) est une des bases principales du processus d'abstraction. (Livre du maître hongrois gr. 1 1978 p. 248. Ma traduction.)

Les tâches proposées stimulent systématiquement tous les sens : on y trouve des activités manipulatoires, visuels, mais aussi de l'écriture et de la musique. Ces situations sont en lien avec les activités habituels, ludiques des petits enfants (coloriages, constructions, musique), et également avec des différents branches des arts.

Le rôle du ludique est très accentué dans ces situations : partant des activités ludiques, familiers pour les élèves du grade 1, on ajoute progressivement des contraintes qui introduisent dans ces situations des problèmes mathématiques. Le livre utilise souvent des expressions affectives (« jouer », « avec plaisir », « curieux »), le plaisir des enfants apparaît

comme un argument important. On insiste aussi sur les limites de l'attention et de la patience des petits enfants (p. 244-245). Comme dans les exemples de probabilités ci-dessus, la compétition sert ici aussi à motiver l'émergence des problèmes mathématiques : par exemple, le concours pour construire plus de tours différentes amène à chercher tous les cas possibles, et poser ainsi la question du nombre des cas (p. 244).

Le ludique apparaît donc dans plusieurs différents sens dans ce processus. D'une part, la situation peut être basée sur un jeu avec règles (par exemple sur une compétition), où le jeu motive l'introduction d'un problème mathématique[136]. D'autre part, les activités libres, plaisantes, créatives, similaires à la création artistique apportent un aspect ludique d'une autre nature : c'est dans un sens similaire que R. Péter présente les mathématiques en tant qu'une activité ludique dans *Jeux avec l'infini*. Enfin, la diversité des expériences, la variété peut elle-même apporter du plaisir. Ainsi, le ludique n'apparaît pas seulement au niveau des situations distinctes, mais aussi dans la conception de leur enchaînement.

La série des tâches présentée dans ce chapitre suit une structuration complexe, et le texte contient des réflexions explicites sur leur mise en ordre. On peut distinguer deux niveaux de structuration : un niveau global, concernant l'ordre des différents types de situations, utilisant différents matériaux, et un niveau local, concernant des sous-séries, des différents problèmes posés par rapport au même matériel. La double structuration est ici clairement identifiable grâce aux signes ● et ○, indiquant « les tâches » et leur « variations » selon l'introduction du livre, comme on l'a vu précédemment (chapitre 3 §3.1). En outre, les sous-séries sont souvent numérotées avec des lettres minuscules.

C'est au niveau global que le principe de la variété joue un rôle, mais ce n'est pas le seul principe à suivre : le livre indique aussi une progressivité dans l'abstraction :

> Au départ, les enfants peuvent effectivement construire des pièces données. Plus tard, on peut traiter des problèmes où les constructions sont remplacées par des colorisations, cartes de signes, écriture des signes. Dans ce sens, nous proposons de suivre l'ordre des tâches décrites ci-dessous. (Livre du maître hongrois gr. 1 1978 p. 246. Ma traduction.)

Il y a une structuration au niveau local aussi, présentée en détail sur le premier exemple, la construction des tours colorées. On y trouve des étapes suivantes :

- Phase de jeu libre, construction à la base du matériel donné (ici des éléments de construction en trois couleurs). Selon les auteurs, les élèves cherchent souvent spontanément à construire des tours aussi hautes que possible.

[136] C'est dans ce sens que Pelay (2011) parle de « contrat didactique et ludique ».

- Introduction d'une contrainte : construire des tours d'une hauteur donnée. Les élèves cherchent à construire de nombreux tours.
- Reconnaître qu'il existe des tours de différents couleurs. Chercher à construire le plus possible de tours différentes.
- Question du nombre des tours différentes.

Cette démarche est prévue pour le long terme. La situation est reprise plusieurs fois : les auteurs suggèrent que la dernière question, le véritable problème de combinatoire ne soit posée que dans les années suivantes, car jugée trop difficile pour un enfant de 6 ou 7 ans. Les élèves du grade 1 peuvent toutefois acquérir de l'expérience dans la distinction des cas possibles, dans la structuration des cas : connaissances nécessaires pour pouvoir résoudre des problèmes de combinatoire plus tard. (Le livre indique par ailleurs, en plus général aussi, que le contenu du chapitre de combinatoire peut être réparti sur plusieurs années : l'enseignant est libre d'en choisir, toute en respectant les principes de la mise en ordre des tâches.)

> Quand les élèves auront découvert que les tours *ne sont pas toutes pareilles*, on peut augmenter les conditions à nouveau : que *chaque tour soit différente*. Qui peut construire le plus de tours comme ça ? Ce n'est toujours pas le problème définitif. A la fin, on s'intéressera à toutes les différentes tours possibles et à leur nombre. Dans les cas très simples, les élèves en première année en sont déjà capables, mais pour la majorité des problèmes, il suffit en première année, de construire autant de *différentes* tours qu'ils peuvent. Car le rassemblement de tous les cas possibles suppose d'apercevoir qu'il n'y a pas d'autre variante possible.
>
> […]
>
> Pour les élèves de l'école maternelle et du début du primaire, il est souvent difficile de juger si les tours construites sont toutes différentes ou non. Ils les construisent l'une après l'autre, sans système, et ils ont aussi du mal à mettre en ordre des tours déjà construites pour voir s'il y en a qui sont identiques. Et s'ils ont un critère quelconque, ils l'oublient entre-temps, ils se mettent à se concentrer sur autre chose. Un critère peut être par exemple la couleur des pièces du dessus. Ils les comparent selon ce critère, ils rassemblent les tours qui ont la même couleur pour la pièce du dessus. Un autre critère peut être la couleur de la pièce du dessous. Il est possible aussi qu'ils séparent les uni- et multicolores. Évitons de donner des idées nous-mêmes : chacun va créer son système au fur et à mesure.
>
> Comme en première année, on n'attend pas la solution complète des problèmes de combinatoire, même dans cette forme très concrète, les tâches avec beaucoup plus de cas ne sont pas plus difficiles : car l'enfant trouve autant de cas qu' il ou elle a le temps et la patience d'inventer. Il faut par contre garder une graduation dans le nombre des restrictions pour les tâches de la même nature. C'est-à-dire, ils construisent d'abord le plus de tours, chaînes, mots etc. qu'ils peuvent, plus tard le plus d'objets différents, ensuite, plutôt seulement en deuxième, troisième ou quatrième année, ils cherchent tous les cas possibles. (Livre du maître hongrois 1978 gr1 pp. 244-245. Ma traduction.)

Outre de cette progressivité dans l'introduction des contraintes, les sous-séries peuvent être organisées selon d'autres principes aussi. Dans certains cas, utilisant le même matériel, on introduit les petites modifications amenant au même problème mathématique (on change par exemple les couleurs). Dans d'autres cas, on varie des variables mathématiquement importants (par exemple le nombre des couleurs différents ou la hauteur des tours). L'ordre des variantes est parfois fixe, dans d'autres cas il peut être varié (pour les tours colorées par exemple). Le livre indique aussi les liens entre les différentes sous-séries : le b) du coloriage des drapeaux correspond par exemple à l'e) de la construction des tours ; le d) et le e) du premier correspond au d) du dernier.

> Répétons certaines de ces tâches en ne changeant que les couleurs des éléments. (Par ex. les tâches *d), f), c).*) Pour les petits enfants, la tâche apparaît souvent nouvelle même si on modifie seulement une propriété qui ne concerne pas l'essentiel. C'est-à-dire, énonçons par ex. la tâche *d)* avec du matériel jaune, vert et blanc au lieu de rouge, blanc et bleu. Ou, après le matériel 'Gabi', donnons d'autre matériel de construction et énonçons une tâche déjà traitée avec ce nouveau matériel
> […]
> Varions aussi certaines conditions mathématiquement importantes : le nombre des couleurs, (2 au lieu de 3), la hauteur des tours, les contraintes. […] (Livre du maître hongrois gr1 1978 p. 248. Ma traduction.)

On peut bien observer sur ces passages, dont plusieurs similaires se trouvent encore dans le texte, l'utilisation du mot « problème » chez Varga. Une tâche est considéré « problème » si elle apparaît nouvelle pour les enfants, si sa solution leur pose de difficulté, s'ils doivent chercher la méthode. Les auteurs distinguent ici une définition mathématique de la science institutionnelle d'un problème du sens didactique du terme. Voici deux autres exemples, le premier concernant la construction des chemins à la base des réglettes Cuisenaire (qui n'ont pas seulement des différentes couleurs, mais aussi des longueurs différentes), la deuxième la construction des maisons de trois éléments coloriés (mur, toit, fenêtre) :

> *Combien de chemins différents peuvent être construits avec une réglette blanche, rose et bleue ?*
> Comme dans la tâche *d)* ci-dessus, il faut mettre en ordre 3 éléments. Du point de vue mathématique cela ne fait aucune différence, bien sûr, si on les met verticalement (l'un sur l'autre) ou horizontalement (l'un après l'autre). Il n'est pas non plus important qu'ils soient de longueur identique, et ils sont différents ici. Tout cela ne change pas le nombre de cas qui reste 6.
> Pour les enfants c'est pourtant un problème complètement différent. Pour eux même la direction des chemins fait une différence (s'ils vont dans des directions différentes ou s'ils sont l'un à côté de l'autre en formant « un tapis »). (Livre du maître hongrois 1978 gr. 1 p. 250. Ma traduction.)

> Par exemple le mur correspond à une couleur, la fenêtre à une autre et le toit à une troisième. Les enfants disposent de triangles et de carrés petits et grands découpés dans du papier, 2 ou 3 de chaque couleur et forme pour chaque enfant. Ils en construisent des maisons : […]
> Quand ils ont colorié des drapeaux, l'ordre bien défini a facilité la solution. Cette fois-ci, ils ne regardent pas l'ordre, mais la couleur de chaque élément : si le mur, la fenêtre ou le toit est rouge, jaune ou violet. Si on précise que chacun doit être de couleurs différentes, ceci correspond aussi à la tâche *d)* de la *Construction des tours*. (Livre du maître hongrois gr. 1 1978 p. 252. Ma traduction.)

L'enjeu de ces variations est justement la reconnaissance des analogies entre les problèmes apparemment différents, leur association, réunion sous un problème plus abstrait. Comme le dit l'extrait cité plus haut : « La diversité de l'intuition (la forme variée du même problème) est une des bases principales du processus d'abstraction ». On voit ici comment Varga donne la priorité à un *processus d'abstraction* en mathématiques, au lieu des notions *a priori abstraits* : l'abstraction est résultat d'une activité mathématique, qui consiste, pour Varga, en la reconnaissance des analogies entre les problèmes divers et en la reformulation de ces problèmes aux niveaux de plus en plus généraux. Ce processus est très similaire à celui décrit par Rózsa Péter dans *Jeux avec l'infini*, (« La formule exprime notre plaisir de voir toute cette diversité ramenée à une unité »).

C'est ainsi que les problèmes identiques d'un point de vue scientifique peuvent être reconnus différents au niveau des élèves, et leur résolution considérée donc comme une activité mathématique légitime. La mise en ordre de ces problèmes, leur variation, les jeux de distances temporels et d'approchements entre eux sont censées d'aider ce processus d'abstraction : c'est la raison que cette mise en ordre est partie constitutive d'un travail didactique. C'est ce qui explique aussi la rareté et le retardement conscient des phases d'institutionnalisation.

Il faut souligner aussi que le caractère « problème » de ces tâches dépend de leur perception par les élèves : pour certains les ressemblances peuvent apparaître tout de suite évidents quant pour d'autres cela nécessite un travail individuel ou accompagné. C'est sans doute une des raisons à laisser la mise en ordre des tâches en partie à la charge de l'enseignant, qui doit le définir en fonction des connaissances et des compétences de ses élèves.

2.1.1 La construction des tours colorées – le développement des outils de représentation

La première situation de la série ci-dessus, la construction des tours colorées est repris plusieurs fois dans des écrits de Varga, y compris des publications françaises, ainsi que

l'article anglais déjà cité de 1982 (*New topics for the elementary school math curriculum*). Ce dernier décrit en détails une progression sur plusieurs années de la situation des tours colorées (annexe III.5.5). Nous examinons ici quelques éléments de cette progression qui permettent de compléter nos analyses précédentes, tout particulièrement concernant le développement des outils de représentation liés à l'étude de la combinatoire.

Le problème de la construction des tours colorées est mis en lien, dans cet article, avec un autre problème traité précédemment, « l'habillage des poupées ». Pour ce dernier, il s'agissait d'habiller une poupée la plus de différentes façons possibles avec de 2 chapeaux et 3 manteaux ou avec 3 chapeaux et 2 manteaux. Ce problème est basé sur le principe de la multiplication qui est commutative : ainsi, les élèves ont découvert que l'interversion des variables amène au même résultat.

Dans la situation initiale de la construction des tours, les élèves travaillent en deux groupes, l'un doit construire des tours de 2 étages en utilisant des cubes de 3 différents couleurs, l'autre des tours de 3 étages en utilisant 2 différents couleurs. Chaque groupe construit autant de tours qu'il peut (l'un 9, l'autre 8), ensuite ils comparent leur résultat – et constatent avec surprise que le nombre des tours n'est pas identique.

> The unexpectedness has its roots in the previous type of activity. There it did not make a difference whether there were three cape and two coats or the other way around. Therefore kids (some at least) would expect that here too there should be a ninth row of the second kind. But whatever they try will be the same as one of the eight they have already built. (Varga 1982 p. 17)

Ainsi, le mémoire de la situation précédente fait partie constitutif du milieu, créant l'attente de l'égalité du nombre des possibilités dans les deux cas. L'échec de construire la tour manquante motive une recherche collective pour prouver le nombre de différents tours possibles. Il s'agit de chercher des structurations convenables des cas qui permettent de parcourir les possibilités. Après plusieurs types de structurations partielles, c'est ainsi que la représentation par arbres émerge :

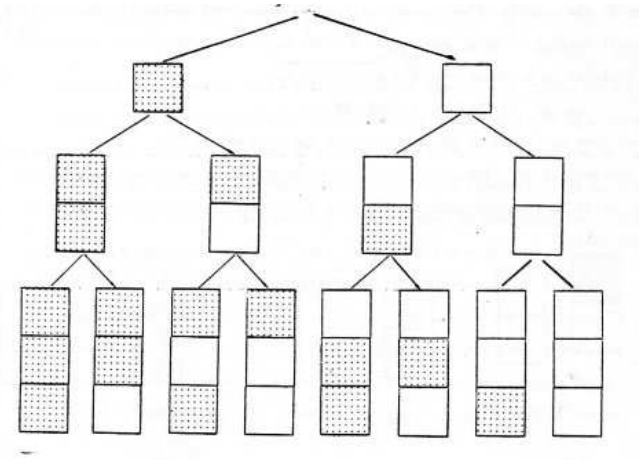


Figure III.5.2 (Varga 1982 p. 19)

Après l'examen de plusieurs variantes, on commence à varier systématiquement le variable, et étudier les changements du nombre des cas.

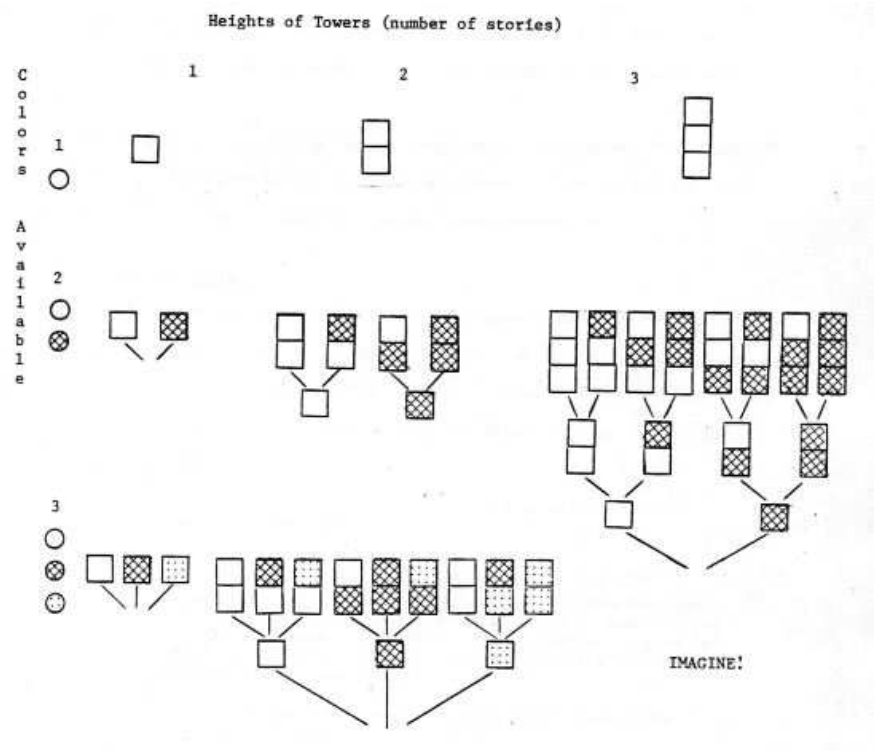


Figure III.5.3 (Varga 1982 p. 23)

Ce processus élucide progressivement la régularité derrière le nombre des cas, et permet d'abstraire à la fois l'outil de représentation : à partir d'un moment, on ne dessin plus de tours colorées, seul des arbres. L'article ne précise pas l'âge des élèves ou la longueur des processus ; en tout cas, la première activité est conçue pour les élèves de l'école élémentaire, mais la fin du processus, les formules indiquées à la fin de l'article sont destinées aux élèves de la fin de l'école moyenne ou même du lycée.

L'article suggère par ailleurs d'autres variantes aussi, susceptibles d'enrichir le processus. Propose des problèmes similaires mais d'habillage différent, mais propose également des changements de règles du problème original, amenant à un problème mathématique différent. Varga souligne aussi que les élèves comprennent souvent de travers la consigne originale, et encourage les enseignants de s'en servir pour étudier d'autres problèmes intéressants. L'idée est très différente du concept de *dévolution* de la TSD : au lieu de chercher à faire résoudre aux élèves exactement le problème qu'on veut, Varga suggère de profiter des éventuels malentendus pour enrichir la série des problèmes et aller plus loin dans la recherche collective.

2.2 Deux autres exemples de l'école moyenne

Nous présentons brièvement encore deux autres exemples, issus cette fois des manuels scolaires de l'école moyenne (voir annexe III.5.6). Cette fois on ne dispose que des commentaires très réduites dans le livre du professeur associé au manuel : mais rien que l'étude des séries de tâches elles-mêmes permet de déduire des conclusions pertinentes.

Le premier extrait est issu du tout début du manuel du grade 5, c'est-à-dire, du tout début des études à l'école moyenne. En examinant tout d'abord les énoncés, « l'habillage » des problèmes, on peut observer une grande diversité. Les énoncés désignent des situations plaisantes, ludiques et familiers aux enfants, comme la randonnée, la compétition de sport, le ramassage des fleurs (même une attention à l'équilibre entre les garçons et les filles est apparent, le ramassage des fleurs suivant directement la compétition d'escrime). D'autres énoncés sont plutôt en lien avec les quotidiens des élèves, visant même une certaine « éducation civique », comme dans le cas du parlement des pionniers[137] ou de la validation des tickets de transport. Le caractère ludique des tâches est accentué même par des noms de lieux ludiques, référant aux textes de contes populaires ou aux blagues.

Du point de vue mathématique, la série représente également une variété. Les tâches ramènent, dans la majorité des cas, aux combinaisons, mais n'y sont pas des exemples paradigmatiques : chacun représente un nouveau problème, leur résolution nécessite chaque fois une nouvelle idée. Certaines similitudes peuvent pourtant être reconnues entre eux, mais l'adaptation d'une méthode à un problème suivant demande une toujours de réflexion particulière. Le livre du professeur précise par ailleurs que dans les cas des tâches I, II, III, IV.a, V.a et VII, les élèves peuvent énumérer les solutions, mais le calcul par multiplication

[137] Rejoindre le mouvement des pionniers n'était pas obligatoire, mais fort recommandé à l'époque, et la plus grande majorité des élèves y participait.

est également possible ; dans le reste des cas par contre, l'énumération serait trop couteuse, ce qui favorise un calcul direct du nombre des cas. Le livre recommande également l'utilisation de plusieurs représentations possibles qui peuvent aider la solution (diagramme d'arbre, tableau, graphe).

Issu du manuel du grade 6, l'autre extrait est de différente nature. On ne trouve cette fois qu'un habillage par type de problème mathématique ; de plus, le changement de l'énoncé (s'assoir autour d'une table au lieu d'un banc) rend apparent le changement du contenu mathématique (distinction des permutations et des cycles). « L'habillage » sert ici à fournir des exemples paradigmatiques pour quelques types fondamentaux de problème combinatorique. En plus, le variable principal de chaque problème (nombre d'enfants à assoir) est explicitement et systématiquement varié, et un tableau aide à étudier les régularités parmi des variations. Si l'objectif de la série précédente était la présentation d'une variété et la recherche des idées et méthodes différentes, ici l'accent est désormais sur la structuration des problèmes de combinatoire, sur leur variation et généralisation consciente, et sur la systématisation des méthodes de solution.

On peut donc observer un processus similaire à celui du livre du maître de l'école élémentaire : partant d'une grande diversité d'expériences et des méthodes de solutions variées, on avance progressivement vers leur structuration et généralisation.

Par ailleurs, vu que la série du grade 5 se situe au tout début du premier manuel scolaire de l'école moyenne, on peut lui attribuer une fonction concernant l'établissement d'un contrat didactique, similairement au cas de la situation des Éclaireurs chez Revuz (cf. Chapitre 4 §3.1.1). De ce point de vu, la série du manuel hongrois suggère aux élèves qu'on s'occupe au cours de mathématiques des problèmes plaisants, qu'on attend d'eux de chercher pour chaque problème des solutions originales, et que les idées personnelles seraient appréciées.

3 L'EMERGENCE DE CES DOMAINES EN FRANCE DANS LES ANNEES 1970

Les programmes français du primaire et du collège de 1969 et 1970 ne contiennent pas les domaines de la combinatoire et des probabilités. Les probabilités apparaissent pourtant dans le programme du lycée au moment de la réforme : comme le montre (Parzysz 1997),

> elles apparaissent comme une illustration de l'intérêt des structures ensemblistes dans les sciences, l'industrie et même de la vie courante. Les élèves vont pouvoir y réinvestir pratiquement toutes leurs

> connaissances relatives aux ensembles […], ainsi que celles relatives aux correspondances entre ensembles. (Parzysz 1997 p. 19)

La théorie des probabilités doit d'ailleurs être liée aux statistiques :

> Le paragraphe relatif aux probabilités ne consiste pas à réunir et à résumer des expériences nombreuses sur certains faits, mais bien à bâtir une théorie axiomatique assez souple pour servir ultérieurement de **modèle** mathématique aux études statistiques. (Instructions au programme de Première de 1970, cité dans Parzysz 1997 p. 20)

Même si, comme le montre Parzysz, l'étude des statistiques s'appuie en fait très peu sur les probabilités. Les probabilités sont donc présentés au lycée comme un terrain d'application des structures ensemblistes et de la méthode axiomatique-déductive. Aux niveaux inférieurs par contre, les programmes des mathématiques sont concentrés sur l'étude de cette méthode elle-même et sur quelques grandes structures considérées fondamentales : ils se limitent ainsi à deux grands systèmes théoriques, celui des nombres et celui de la géométrie. Á l'école élémentaire, l'objectif principal est la construction de la notion de nombres ; à l'école moyenne, surtout deux grands structures sont étudiées, celle des nombres réels et celle de la géométrie, de l'espace affine et euclidienne. Les expérimentations des années 1960 concernent également ces domaines, l'introduction des décimaux est par exemple objet de nombreux études dès cette période (Barbazo & Pombourcq 2010 p. 85).

Comme on l'a vu, les programmes suivants, de 1977 prennent un recul important par rapport aux programmes de la réforme, en limitant l'étude des grandes théories : par exemple, la structure des nombres réels n'est plus l'objet d'étude du collège, et l'axiomatisation est en général contre-indiquée. En même temps, une plus grande attention est accordée au développement des méthodes d'argumentation et à la résolution des problèmes. C'est ainsi que la combinatoire apparaît ponctuellement, dans certains manuels scolaires qui introduisent des problèmes de dénombrement dans les chapitres consacrés aux problèmes.

Et, bien que les programmes du primaire et du collège ne traitent pas les domaines de la combinatoire, un intérêt croissant peut être observé pour leur enseignement dans la communauté didactique. Du côté de l'INRP par exemple, quelques problèmes de combinatoire sont intégrés dans l'ERMEL. Un projet expérimental concernant l'enseignement des probabilités est réalisé par Brousseau au sein du COREM. Plusieurs séminaires et conférences touchent l'enseignement de ces domaines en France, et plusieurs publications apparaissent aussi à partir du début des années 1970. Comme on l'a vu (Partie I §4.3.2), Tamás Varga lui-même est invité plusieurs fois et cosigne des publications sur l'enseignement de la combinatoire et des probabilités.

3.1 Problèmes de combinatoire dans les manuels de 1977 : l'exemple de *Math et calcul*

Le livre du maître d'Eiller du CP de 1977 introduit un chapitre sur les « situations » qui n'était pas présent dans l'édition précédente (p. 169-171). Parmi les situations traitées, il y a des « jeux de logique et de combinatoire », des « jeux logiques et arbres » et enfin des « jeux de codage et de décodage ». Les remarques préliminaires au chapitre détaillent la nature de l'activité des élèves et de l'enseignant dans ces situations.

L'activité des enfants consiste à :

- se poser des questions et formuler des hypothèses,
- recueillir des informations numériques ou non numériques,
- analyser et organiser ces informations grâce à différents modes de représentation,
- choisir les outils mathématiques les mieux appropriés pour trouver la ou les réponses aux questions posées,
- vérifier les solutions par une confrontation et une validation au niveau des équipes.

Le rôle du maître consiste à :

- encourager les recherches d'informations libres qui seront ensuite exploitées en classe,
- observer le comportement des enfants,
- guider discrètement les recherches des enfants en exerçant son action plus particulièrement sur les groupes en difficulté,
- conditionner l'environnement de manière que les élèves puissent y puiser le matériel nécessaire à l'exploitation mathématique
- stimuler la curiosité et l'imagination des enfants,
- soutenir les enfants „étouffés" par le groupe et à les aider à exprimer leurs réflexions personnelles en les valorisant,
- veiller au respect de certaines règles,
- donner certaines informations au moment opportun. (Eiller, livre du maître gr 1 1977 p. 169)

Cette description détaillée du contrat à mettre en place pour les « situations » approche le modèle des situations adidactiques ; toutefois, la description des exemples concrets est loin de faciliter la mise en œuvre de ces principes.

Le premier exemple présenté est celui de la construction des tours colorées :

A Jeux de logique et de combinatoire

Premier exemple

Distribuer aux enfants trois cubes emboîtables de couleurs différentes.
Leur demander de constituer à leur guise avec ces trois cubes une tour.
Faire représenter l'assemblage ainsi constitué :

Puis leur demander de réaliser avec les mêmes cubes une nouvelle tour en changeant la place des cubes.
Faire représenter le nouvel assemblage ainsi constitué.
Faire trouver ensuite tous les autres assemblages possibles qu'on peut constituer avec les trois cubes en changeant uniquement la place des trois cubes.
Faire représenter les assemblages au fur et à mesure de leur constitution.
On précisera aux enfants que les assemblages doivent être tous « différents ».

A cet égard, on pourra suggérer aux élèves de comparer chaque assemblage à ceux constitués, précédemment afin d'éviter la répétition d'un même assemblage.
Lorsque tous les assemblages auront été constitués on les fera dénombrer pour constater qu'il n'y en a que six.

Variante : le jeu des drapeaux

Distribuer aux enfants trois bandes de carton de couleur différente.
Demander aux enfants de placer ces bandes les unes à côté des autres afin de constituer un drapeau de trois couleurs.
On procédera comme dans l'exemple décrit plus haut pour trouver tous les drapeaux qu'on peut former avec trois bandes et en changeant uniquement leurs dispositions relatives.

Figure III.5.4 (Eiller maître 1977 pp. 169-170)

On peut y retrouver des étapes similaires à celles de Varga : jeu libre, construction d'une tour, construction d'une deuxième, construction de toutes les tours différentes. Le processus suggéré apparaît pourtant très différent de celui de Varga. Avant tout, on peut observer les formulations : « faire représenter », « faire trouver », « on précisera » etc. Malgré les consignes préliminaires qui visent à laisser une autonomie importante aux élèves pour la résolution des problèmes, l'exemple concret suggère une démarche dirigée par l'enseignant, similairement à d'autres situations d'Eiller (cf. Chapitre 3 §2.1).

Une différence remarquable par rapport à Varga est l'utilisation seulement de trois éléments : ainsi, les élèves ne peuvent construire qu'une seule tour en même temps, qu'ils doivent chaque fois déconstruire pour en faire une autre. La comparaison des tours passe ainsi directement par leur représentation, le rôle de la manipulation est très réduit. Une autre différence est l'étape manquant de la construction « d'autant de tours différents que tu peux » : Eiller passe directement à la recherche de toutes les possibilités après un deuxième exemple. Pour Varga, cette étape intermédiaire vise d'une part la dévolution du problème : la compétition motive les élèves à chercher le plus possible de variations, et la question de toutes les possibilités émerge ainsi naturellement. Dans le cas d'Eiller, ce problème de combinatoire n'est pas motivé, la question est tout simplement imposée par l'enseignant. Varga indique par ailleurs que la question de trouver toutes les possibilités est trop difficile pour un élève du grade 1, car elle nécessiterait la vérification du fait qu'il n'existe pas d'autre possibilité. Chez lui, cette justification est l'objet d'un processus de recherche relativement longue, passant par

un outil de représentation de plus en plus élaboré, celui des arbres (cf. §2.1.1), ce qui n'est pas forcément mise en place à la première année. En effet, chez Eiller, on ne trouve aucune indication concernant la justification que toutes les possibilités étaient construites : soit on considère ce problème comme évident, soit on le renvoie à une validation par l'enseignant.

Malgré la similitude apparente des deux situations, celle d'Eiller offre donc beaucoup moins de potentiel adidactique : la situation est strictement dirigée par l'enseignant, les élèves n'ont pas de possibilité à poser des questions, chercher des outils mathématiques ou valider leurs solutions : leur activité est réduit à la construction des tours différentes et au simple dénombrement des tours représentés à la fin. La situation, comme elle est décrite dans *Math et calcul*, permet d'initier des élèves dans des domaines, des questions et des techniques nouveaux des mathématiques, mais n'offre pas ce que le chapitre propose : d'occasion à l'activité mathématique autonome des élèves. La description donne en tout cas peu d'indication à l'enseignant de comment « guider discrètement », « stimuler », « soutenir » et surtout comment « conditionner l'environnement de manière que les élèves puissent y puiser le matériel nécessaire à l'exploitation mathématique ».

Dans un exemple suivant, *Math et calcul* propose aussi d'introduire le schéma d'arbre. Mais il est précisé que

> L'expérience montre que le schéma de l'arbre peut être difficilement rendu opératoire au niveau de l'école élémentaire (même au cours moyen).
> Par ailleurs, il est difficile sinon impossible de leur faire trouver ce type de schéma.
> Par contre, une première prise de conscience de l'existence de ce type de schéma n'est pas sans intérêt, mais cela essentiellement dans l'optique d'un certain mode de repérage lié à une activité logique. (Eiller, livre du maître gr. 1, 1977 p. 170)

Contrairement à Varga, Eiller ne juge pas possible de faire trouver ce schéma par les enfants. Il s'agit donc à nouveau d'illustrer un outil mathématique introduit par l'enseignant, même si c'est dans le cadre d'une activité des élèves.

Varga propose une construction du schéma, guidée par l'enseignant mais fait par les élèves, à propos de la situation des tours colorées : en cherchant le nombre des tours différentes, c'est le problème de rangement des tours qui amène à une organisation par arbres, où l'arbre représente le processus de construction des différentes tours, étage par étage. Dans la situation logique proposée par Eiller, une telle démarche n'est pas possible puisqu'il ne s'agit pas d'éléments juxtaposés mais de différentes propriétés d'un seul élément.

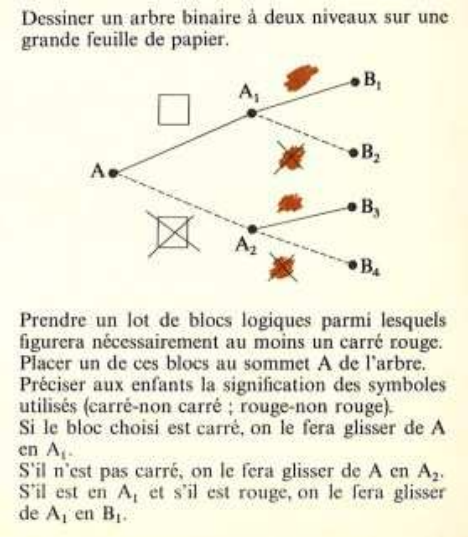


Figure III.5.5 (Eiller maître 1977 p. 170)

Le domaine de la combinatoire apparaît donc chez Eiller, mais seulement dans une forme ponctuelle, sans qu'il s'inscrive dans l'écologie du programme. Il se trouve dans le chapitre consacré aux « situations » : détachées des autres chapitres du livre, ces situations visant a priori à faire découvrir aux élèves des outils mathématiques nouveaux et donner place aux activités de résolution de problèmes. La diversification du contenu va donc ensemble avec des ambitions pédagogiques nouvelles par rapport à l'édition précédente, et conformément au nouveau programme. Mais les exemples concrets y donnent peu d'aide : ils correspondent peux à la caractérisation générale des « situations », et ne créent justement pas de conditions suffisantes pour une activité mathématique autonome des élèves.

3.2 La combinatoire dans ERMEL

Le recueil expérimental de l'INRP, ERMEL contient également des situations de combinatoire. Dans ce cas, ces situations sont intégrées dans des chapitres plus grands, traitant la notion d'ensembles ou des nombres. La « construction des maisons » se trouve par exemple dans un chapitre du cours préparatoire consacré aux classements et à l'ordre dans les ensembles (ERMEL gr. 1 1977 pp. 153-157), « l'habillage d'un silhouette » dans le chapitre du cours élémentaire traitant la notion du produit cartésien (ERMEL gr. 3 1978 pp. 97-106). Dans les deux cas, il s'agit des situations complexes, construites de plusieurs étapes. L'enjeu est chaque fois l'étude de la structuration possible d'un ensemble, et l'introduction des outils de représentation (tableaux, schéma d'arbre…) facilitant cette étude.

La situation de la construction des maisons est inscrite dans l'ERMEL sous le titre « Ordre sur un ensemble d'objets pluridimensionnels » (voir annexe III.5.7). Il s'agit, similairement à

la situation décrite chez Varga (cf. annexe III.5.4), de construire des maisons à l'aide de trois composants des blocs logiques, représentant le toit, le mur et la porte des maisons, chaque type d'élément étant disponible en trois différents couleurs. Le déroulement de la situation est également similaire à celles de Varga :

> Après une phase de manipulation libre, l'enseignant propose aux enfants de construire avec ces blocs logiques des maisons toutes différentes formées d'un toit, d'un mur et d'une porte. […]
> Au bout d'un certain temps, les enfants ne construisent que des maisons déjà obtenues. Ils peuvent se demander alors s'ils ont réellement construit toutes les maisons possibles.
> A partir de ce moment-là, et pour résoudre ce problème, se posent des questions de classement. (ERMEL gr. 1 1977 p. 153)

L'accent est ici mis sur le travail autonome des élèves, sur la découverte des différentes méthodes de classement et sur les représentations de ces classements, beaucoup plus que sur la solution elle-même, sur le nombre de toutes les possibilités. Le livre souligne en effet :

> Il y aura beaucoup de tâtonnements. Peu d'enfants, sans doute, arriveront au classement totalement ordonné. (ERMEL gr. 1 1977 p. 155)

La situation porte donc de réels potentiels d'adidacticité : la connaissance visée doit y émerger comme un outil pour résoudre un problème, l'accent est mis sur cet outil et sur sa construction autonome par les enfants. Il n'est pas attendu que l'outil soit complètement construit par tous les enfants : après la phase adidactique, le livre propose plusieurs « activités de renforcement », qui servent l'acquisition et la stabilisation des méthodes de classement complète, comme les classements faits par l'enseignant dont les élèves doivent deviner la règle, ou qui contiennent des « trous » que les élèves doivent compléter avec des éléments manquants. Il est également suggéré qu'il est important de reprendre une partie de ces activités sur « au moins une situation analogue ».

Le livre souligne les liens de cette activité avec la numération :

> En particulier, il serait bon, dans l'optique de l'ordre sur les nombres écrits dans un système de numération, d'insister sur les différents classements totalement ordonnés. (ERMEL gr. 1 1977 p. 156)

Dans ERMEL, cette activité de classement n'est pas en position isolée pour apprendre uniquement « la résolution de problèmes », comme dans *Math et calcul*, et elle n'est pas considérée non plus comme représentante d'un domaine mathématique en soit comme chez Varga : elle s'inscrit dans l'étude des ensembles, des nombres et de la numération, enrichit l'apprentissage de la construction du système numérique.

La variante de l'ERMEL de la situation de la construction des maisons montre donc beaucoup de similitude avec sa correspondante chez Varga. Le matériel, le problème original

et les différentes étapes de la situation sont très similaires dans les deux cas. Le choix du problème et l'organisation des étapes servent, dans les deux cas, l'insertion d'un potentiel d'adidacticité dans la situation, motivant la recherche des classements, structurations d'un ensemble. On peut en même temps observer, sur l'exemple de l'ERMEL, une adaptation au contexte français. D'une part, conformément au programme en vigueur en France, il ne s'agit pas ici d'enseigner la combinatoire comme domaine mathématique à son propre titre, mais de servir d'un problème de combinatoire pour préparer l'apprentissage de la notion de nombre et de la numération. Le livre propose de reprendre l'activité sur un autre matériel, mais les problèmes de combinatoire sont ensuite abandonnés pour étudier la correspondance terme à terme, alors que chez Varga, ils constituent une longue série de tâches étudiées parallèlement avec des autres domaines, et visant une articulation plus complexe entre les domaines.

L'autre différence remarquable est le passage de la manipulation concrète à la représentation :

> En ne donnant qu'un exemplaire de chaque bloc logique, l'enseignant respecte l'unicité de chaque élément d'un ensemble et favorise la représentation écrite des éléments obtenus. En effet, pour construire des nouvelles maisons, on est amené à démolir les précédentes.
> Par exemple, les enfants étant par groupes, on peut désigner un secrétaire par groupe qui, en dessinant sur une feuille les maisons obtenues, en garde la trace. (ERMEL gr. 1 1977 p.153)

Dans la suite, pour les classements, les dessins sont découpés un par un, et le classement déroule donc sur les dessins selon ERMEL.

On a vu précédemment que Varga laisse beaucoup de place à la manipulation concrète et à la stimulation des sens divers, considérant ces activités comme sources d'expériences nécessaires pour un processus d'abstraction lent. ERMEL met par contre beaucoup d'accent sur les représentations : comme on l'a vu, les mathématiques y sont considérées avant tout comme une *activité d'écriture* (cf. Chapitre 3 §2.2.1), ce qui peut expliquer cette différence.

3.3 Les publications françaises de Varga – l'échange des idées entre les deux pays

Si les situations de combinatoire des ressources françaises ressemblent à celles décrites par Varga, ce n'est probablement pas par hasard. Au début des années 1970, Varga publie plusieurs livres en français, avec des coauteurs français[138], sur l'enseignement de la

[138] Selon sa biographie, les co-auteurs ont fait le travail d'adaptation des matériaux de Varga aux circonstances françaises. Dans une attestation signée par Glaymann le 14 janvier 1977 (manuscrit), le livre était rédigé en français par Glaymann, basé sur les travaux divers de Varga publiés précédemment en anglais ; les paragraphes 1

combinatoire et des probabilités. Le premier, publié en 1973 avec M. Dumont, est un couple d'un livre du maître et de fiches de travail proposées aux élèves de 6 à 14 ans (c'est-à-dire, du grade 1 jusqu'au grade 8, ce qui correspond aux niveaux couverts par le programme de Varga). Cette publication traite les domaines de la combinatoire, des probabilités et de la statistique. Le deuxième, intitulé *Les probabilités à l'école*, écrit en collaboration avec Maurice Glaymann, est écrit à Lyon en 1973[139], et publié par CEDIC dans une série visant « la formation des maîtres en mathématiques ». Sans déterminer le niveau scolaire, le livre présent des situations permettant d'étudier la combinatoire et les probabilités. Dans ces livres, on retrouve plusieurs situations étudiées ci-dessus : par exemple le jeu avec trois disques dans (Glaymann & Varga 1975 pp. 78-83), une variante des tours colorées ou de la construction des maisons dans (Dumont & Varga 1973a pp. 25-26, pp. 85-98).

Bien évidemment, la seule existence de ces publications ne garanti pas qu'elles servent de ressources pour d'autres documents français. Il peut bien s'agir des sources communes ou d'autres voies de circulation plus complexes pour la diffusion des situations en question. « L'habillage des poupées » apparaît par exemple dans une publication française plus ancienne aussi, cosignée par Guy Brousseau et Lucienne Félix (1972 pp. 72-77), qui a précédé les publications françaises de Varga. Néanmoins le fait qu'un auteur hongrois soit invité à plusieurs reprises pour présenter et publier sur ces deux domaines spécifiques, cela laisse supposer qu'il exerçait une certaine influence concernant l'enseignement de ces domaines, et que son invitation servait justement à diffuser ses travaux en France[140]. On verra par ailleurs que Brousseau exprime une critique par rapport à (Glaymann & Varga 1975) : son commentaire confirme également qu'il s'agit d'une publication plus ou moins connue en France à l'époque, au moins dans les communautés didactiques comme celles des IREM.

3.4 L'expérimentation de Brousseau sur l'enseignement des probabilités

En collaboration avec sa femme Nadine, Guy Brousseau a mené des expériences sur l'enseignement des probabilités à l'École Jules Michelet, au sein du COREM (Partie I §3.4) dans l'année 1973-1974 avec 17 élèves. La même expérience était réalisée par ailleurs dans

à 4 du chapitre I et le chapitre II sont essentiellement l'œuvre de Varga, le reste (paragraphe 5 du chapitre I et chapitre III) est celle de Glaymann.

[139] Nous avons consulté la deuxième édition, publiée en 1975, mais la signature de l'introduction indique la date de l'écriture.

[140] Nous analysons dans la thèse des documents officiels et des articles publiés en langue anglaise qui sont apparus majoritairement après les éditions françaises. En même temps, nous avons trouvé des situations similaires dans des publications antérieurs ce qui permet de supposer que les situations en question ressortent effectivement des travaux de Varga (par. ex. 1967a, 1970, 1972). La préface du livre de Dumont et Varga (1973b p. 6) indique en effet que « ces exemples sont tirés d'expériences réalisées dans des classes expérimentales en Hongrie ».

une autre classe en parallèle, et reprise l'année suivante dans deux classes. L'article (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002) rend compte de cette expérience de la perspective de trente ans de développement de la recherche en didactique des mathématiques. Le programme de l'expérience n'était pas diffusé devant le grand public à l'époque (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002 p. 364), et elle ne pouvait ainsi pas avoir un effet direct sur l'enseignement[141]. Elle semble être pourtant caractéristique pour le milieu expérimental des IREM des années 1970, et particulièrement intéressant aussi pour le rôle qu'il a joué dans le développement de la théorie des situations didactiques de Brousseau.

> This experiment had a certain importance in the orientation of the research in didactique, which followed it in the 1970–1990. Among other things, it contributed to the appearance of the field of mathematical didactique in between the considerations of general didactique and the completely specific studies of the teaching of very particular knowledge. The fact that similar phenomena appeared in long processes dealing with the learning of knowledge as different as natural numbers and their operations, rationals and decimals, probability and statistics, logical reasoning, geometry, etc. attracted attention to didactical phenomena which were attached specifically to the teaching of mathematics, but were fairly general. The principal concepts of the theory of situations emerged from this field. (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002 p. 411)

Comme le domaine des probabilités ne faisait pas partie du programme officiel de l'école élémentaire, l'expérimentation s'est déroulée hors des cours de mathématiques, dans la partie de la journée consacrée aux activités d'éveil. Il s'agit d'un processus long, découpée en une trentaine de séances. Les auteurs le structure en six phases :

i. « An introduction to hypothesis testing » (5 sessions)
ii. « Modelling and experimenting » (3 sessions)
iii. « Graphic representation of long series » (8 sessions)
iv. « Convergence and statistical decision » (4 sessions)
v. « Decision intervals » (5 sessions)
vi. « Events and their probabilities » (7 sessions)

Seule la dénomination des phases permet de voir qu'il s'agit d'un travail essentiellement en P1 : on verra en effet que l'étude du problème de départ amène à un long processus expérimental, faisant intervenir des outils complexes de calcul et de représentation statistique. C'est seulement dans la phase 6 qu'on établie un modèle laplacien et qu'on étudie également d'autres situations probabilistes : mais cette phase, jugée plus ordinaire que les autres, n'est pas détaillée dans l'article.

[141] Elle était pourtant présentée à un séminaire de la CIEAEM en 1974, où Varga a également participé (CIEAEM 1974)

Nous résumons brièvement le processus avant d'analyser sa construction et de le comparer aux processus d'enseignement de Varga.

Phase 1 : « an introduction to hypothesis testing » (5 sessions):

Dans la situation de départ, l'enseignant rempli, devant les élèves, 3 sacs de 5 boules chacun. Les boules sont noirs et blancs, et l'enseignant fait d'une façon que personne ne connaisse la composition de sacs : on peut vérifier au toucher que chacun comporte 5 boules, mais on ne voit pas les couleurs des boules. Les élèves sont alors invités à deviner la composition des sacs à l'aide des tirages.

Après une série de tirages, les élèves arrivent à quelques conclusions partielles, constatent par exemple qu'aucun des sacs n'est monochrome. On développe progressivement des méthodes de recherche (annotation des résultats des tirages, regroupements des tirages) et on commence à établir des hypothèses concernant le contenu des sacs. Une des difficultés conceptuelles à surmonter dans cette première phase est d'accepter la nature non-déterminée de la situation : au début, plusieurs élèves attendent une correspondance directe entre la composition des sacs et les séries tirées, pensent par exemple qu'une série de 5 tirages correspondra à la composition. Les auteurs soulignent que dès cette première phase, de nombreux idées et notions apparaissent, liées aux domaines des probabilités et de la statistique : prise d'échantillon, statistique observée, prédictions etc.

L'idée des fréquences émerge à la fin de cette première phase : un élève propose, au lieu d'étudier des séries de 5 tirages comme ils ont procédé jusque-là, d'en faire des multiples de 5, et diviser les résultats avec le multiplicateur en question. Pour pouvoir choisir parmi les différentes compositions et confirmer leurs hypothèses, c'est également un élève qui propose de faire une modélisation : créer des boîtes de composition connues pour chaque composition parmi lesquels la classe hésite de choisir, faire des tirages de ces boîtes, et comparer le comportement de ces modèles avec celui des sacs originaux.

Phase 2 : « modeling and experimenting » (3 sessions)

Ces propositions sont réalisées dans la phase suivant. On modéliste les sacs de composition inconnue par des boîtes de composition connue, et on compare la statistique des tirages de ces boîtes à la statistique des sacs originaux. On varie la longueur des séries de tirages : les élèves reconnaissent progressivement l'intérêt d'en faire un grand nombre permettant d'obtenir des informations suffisamment fiables pour se convaincre. (Les critères de « suffisant » n'est cependant pas définie ce qui amènera à un conflit de contrat dans la phase suivante.)

Les deux premières phases sont organisées en une forme adidactique : le rôle de l'enseignant se limite à l'encouragement des élèves, aux rappels aux règles du jeu, à la gestion des actions et des discussions, mais sans intervention au niveau du contenu.

> The "natural" character of the dialectic set up between the past, the constitution, and the future of a simple randomizer let the professor leave these first phases entirely in the hands of the students. Some will find this phase a-didactic, conforming fairly well to constructivist theses. (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002 p. 383)

Phase 3 : « graphic representation of long series » (8 sessions)

Contrairement aux deux précédentes, la phase 3 n'est pas adidactique, l'enseignant intervient plus directement, comme le soulignent les auteurs :

> One could argue that this more directly didactical phase is premature, that it interrupts a "natural" process and that it is the sign of inopportune impatience. Possibly this impatience was dictated by the desire to justify the time spent on this experiment by exhibiting "visible" signs of learning. But the experimenters hoped that the long a-didactic phase would permit the class to accept and understand the classical knowledge. (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002 p. 384)

L'enseignant propose notamment de stabiliser la méthode de l'expérimentation : faire de très nombreux tirages et diviser le nombre des blancs et le nombre des noirs par le nombre des tirages (au lieu de l'étude des groupes de 5 tirages, comme ils ont fait jusqu'ici). On approche donc la notion institutionnelle des fréquences relatives, mais dont l'avantage n'est pas visible aux élèves à ce stade. Les élèves travaillent en groupe, préparent des tableaux de résultats cumulés suivant les instructions de l'enseignant. C'est à ce stade que les auteurs indiquent la plus importante difficulté du processus :

> At the end of the eleventh session the lassitude of the students is very apparent. They are more and more reluctant to carry out all these computations: additions and divisions, especially since they haven't had the time to reflect on what they could do with the results obtained. They miss the early days of the red thread, when each day brought questions and novelties.
> They urge the teacher to open the sacks, they claim to be certain of their contents. To which the teacher offers the counter-argument: "If you are sure of the composition of the sacks (or the bottles) there is no need to open the sacks." The situation becomes strained. The students consider that there has been a sort of breaking of a contract by the teacher.
>
> […] it is clear to the students and to the teacher that the pursuit of the drawings doesn't produce the expected revelations and that in the conditions nobody knows very well any more why to all those drawings and especially why to make any more. There's a discrepancy between the pretty strong conviction of knowing the contents of the sacks and the impossibility of proving the validity of that conviction.

> At this moment the teacher needs to clarify the terms of the reasoning which supports the students in their strategy of continuing drawings, and she needs to hold fast to her project of not opening the bottles. The reasoning is this: If you are really convinced that you are right,
>
> (1) there is no need to open the bottles;
> (2) but you can prove that you are right by showing that you can predict some things about what will happen in the next drawings, e.g., in 100 drawings there will be more whites than blacks in this bottle.
>
> If the statistics tell you how the bottle is made, then knowing how the bottle is made will let you predict the next statistics! (p. 387-388)

Les expérimentateurs suivent très conséquemment une approche fréquentiste ce qui nécessite ce travail long et monotone. En même temps les critères de validation des hypothèses ne sont pas clairs pour les élèves. C'est avant tout cette dernière circonstance qui cause, selon le commentaire des auteurs, l'ennui des élèves : ils ont accepté d'entrer dans une situation adidactique, mais le milieu ne s'avère pas suffisamment rétroactif à leurs yeux, ils n'espèrent plus de réponse satisfaisant de l'interaction avec le milieu. Le problème réside, au fond, dans le caractère probabiliste de la situation et touche ainsi le cœur de l'apprentissage visé : l'initiation des élèves dans une mode de pensée mathématique d'une nature particulière, dans les méthodes de mathématisation de l'incertain.

> Why not show the contents of the opaque bottles when the students ask for it saying that "they are sure" of the contents? The experimental verification of an hypothesis is a habit which is legitimate and well anchored in student thinking. This attitude strikes them as frustrating and offensive, contrary to the habitual "didactical contract."
> [...]
> This decision has a theoretical basis: normally one does not have the option of "breaking" the randomizers, which provide the numbers collected in the statistics. The only legitimate validations in this domain are the quality of the prediction and the consistency (non-contradiction) of the theory and the calculation of the probabilities. The best one can do is to say what one can and cannot predict, to verify that these predictions are "good enough" and to show that the calculations are compatible with "reasonable" hypotheses like "none of the marbles has any reason to show itself more often than any other."
> What would have happened if the teacher had permitted the students to verify that the bottles did indeed conform to their ideas? The students would simply have "learned" a new technique: one can "guess with certainty" the unknown composition of a bottle by making or simulating a lot of drawings. But they would have had no idea of the notion which is specific to probabilistic computations, and which is the object of the next two phases: there will always remain a doubt. All one can do is compare the cost of the error one may make with the cost of obtaining more information which will reduce the doubts and the risk of error. (pp. 391-392)

La classe accepte de continuer des tirages, et décide d'étudier des modèles pour chaque composition possible, permettant de faire des prédictions sur le comportement des sacs de différentes compositions. Pour soutenir l'étude du nombre croissant de données, l'enseignant introduit un nouvel outil de représentation, les graphiques. On change aussi de modèle : on passe à une simulation des tirages sur l'ordinateur, ce qui permet un plus grand nombre d'expériences ; les calculs sont également facilités à l'aide une calculatrice.

Phase 4 : « convergence and statistical decision » (4 sessions)

Dans cette phase, on étudie les graphiques, ce qui permet d'introduire l'idée de la convergence : les élèves observent que la proportion d'apparition des blancs pour les boîtes contenant 1, 2, 3 ou 4 pièces blancs tendent respectivement vers 0.2, 0.4, 0.6 et 0.8 quand on fait de très nombreux tirages.

L'enseignant propose alors un jeu de devinette : chaque groupe d'élève dispose des jetons pour acheter des tirages. Ils doivent deviner la composition d'une boîte (simulée par l'ordinateur) : ils perdent leurs jetons s'ils se trompent mais ils gagnent le double s'ils réussissent.

> This game is in fact the "fundamental action situation" of hypothesis testing in the sense that it is the prototype of all the problems of decision-making in probabilistic circumstances. It gives to all the essential concepts their principal function: probabilities, frequencies, convergence, confidence intervals, etc. The search for the limiting behaviors of this situation demonstrates the limits of its empirical study and justifies the recourse to mathematical reasoning. In this way it permits us to "give the students directly" a global, concrete and correct meaning for this study. The corresponding communication situation is the fundamental situation 7 of descriptive statistics. (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002 p. 396)

Phase 5 : « decision intervals » (5 sessions)

La classe formalise le processus suivi pour deviner la composition.

> The students progressively summarize the steps. The teacher holds out for formulations using specific terms:
> • We would simulate the different possible bottles.
> • We would make a lot of series of samples.
> • We would calculate the accumulated frequencies.
> • We would make enough samples for the frequencies to be well separated.
> • We would make that number of samples in the unknown bottle.
> • And we would compare the accumulated frequencies with the values we got in the simulation.
> The three last steps were formulated with the help of the teacher. (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002 p. 398)

On cherche à définir des intervalles pour choisir parmi les compositions en fonction des fréquences obtenus. On retourne au jeu de devinette, les premiers suggestions des groupes sont testées sur les « boîtes » virtuelles, jusqu'à la correction des intervalles de décision.

Phase 6 : « events and their probabilities » (7 sessions)

La dernière phase vise à remettre dans des nouveaux contextes des connaissances acquis lors des expériences précédents. Considérée plus ordinaire que les précédentes, cette phase n'est pas détaillée dans l'article. Les auteurs l'évaluent simplement dans un paragraphe :

> By the end of seven sessions, students are handling with confidence a remarkable breadth of probabilistic material: vocabulary (events), the identification of events in other experiments, the calculation of sums of probabilities, successive experiments and products of probabilities. Some of this speed of progress can be attributed to the fact that many of the tools for handling probabilistic information — set theory diagrams, trees, double entry tables — are already familiar to the students, having been used in other contexts throughout their earlier mathematical education. More, however, derives from the confidence with which they deal with the underlying concepts. The moment they begin to feel at all shaky, they fall back on what they know about the marbles in the bottles and confidence returns. And when in doubt about a result, they verify it with trials — lots and lots of trials. (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002 p. 405)

3.4.1 Une comparaison des processus longs de Brousseau et de Varga

En comparant cette expérimentation de Brousseau aux processus d'enseignement décrit chez Varga, on peut observer de nombreux points communs, mais aussi des différences importantes.

Concernant l'enseignement des probabilités, ils soulignent tous les deux l'intérêt de montrer « une nouvelle façon de voir le monde ».

> The teaching of probability has served to present to the students a new way of looking at the world. In the process proposed here, the students are immediately invited to go further, without stopping to worry about this "natural law." The fourth phase engages the student in a new relationship with this fact: how to use it? Statistics make it possible to obtain information about an unknown machine — the more results of drawings I obtain, the more I can conclude with confidence. (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002 p. 397)

On voit dans les deux cas une certaine articulation des paradigmes P1 et P2, un passage de P1 vers P2 ; mais avec une différence d'accent très important. Dans le cas de Brousseau, il s'agit d'un approfondissement des notions et techniques fréquentistes : c'est seulement dans les deux dernières phases que l'établissement d'un modèle mathématique vient en question. Varga envisage plutôt une articulation permanent entre les deux paradigmes, on y trouve souvent des entrées fréquentistes mais qui sont beaucoup moins poussées que chez Brousseau

et servent souvent à fournir une base expérimentale pour des raisonnements logiques ultérieurs.

Cette différence de paradigmes est en lien avec des choix écologiques : l'expérimentation de Brousseau lie les probabilités à la statistique, alors que ce dernier est un domaine périphérique (même si présent) du projet de Varga qui, quant à lui, met plutôt l'accent sur les liens avec la combinatoire et la logique. Il y a une autre raison écologique probable, venant de l'enseignement des nombres rationnels selon le programme des deux pays. Brousseau rappelle que l'absence d'une bonne maitrise des fractions peut créer un obstacle pour le calcul des probabilités. (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002 p. 370) En effet, dans le programme français de l'école élémentaire de 1970, les fractions ont un rôle marginal, et elles ne sont pas enseignées en tant que nombres, mais en tant qu'opérateurs. Les fractions comme un ensemble de nombres sont étudiées seulement à la fin de l'école moyenne, après la construction axiomatique de l'ensemble des réels. Dans le programme français, l'accent est sur les décimaux ; et l'approche fréquentiste, statistique suivie par Brousseau favorise justement l'utilisation de ces derniers.

Dans le programme de Varga par contre, les fractions sont amplement étudiées. Varga insiste justement sur l'intérêt de l'étude des probabilités pour l'apprentissage des fractions : le calcul des probabilités offre à la fois un terrain d'application des fractions et une motivation pour leur introduction, permettant d'enrichir leur sens. Les décimaux jouent par contre un rôle secondaire dans le programme de Varga, apparaissent comme une forme d'écriture alternative des fractions. Cette organisation favorise plutôt une approche laplacienne des probabilités.

Une autre raison de la différence peut être didactique : Brousseau décrit des difficultés des élèves pour maintenir l'intérêt pendant un processus aussi long, demandant parfois la patience pour de nombreux calculs. Alors que pour Varga, la curiosité et le plaisir des élèves est un des moteurs principaux de l'apprentissage, et la variété des expériences y joue un rôle central. Cela peut expliquer la manque d'approfondissement des méthodes statistiques, bien que de nombreuses situations de Varga visent à initier les élèves à une mode de pensée fréquentiste. Brousseau parle parfois également des aspects affectifs, du plaisir et de la motivation des élèves, mais ces questions n'apparaissent pas cruciales chez lui, et il cherche à maintenir le processus malgré l'ennui apparent des élèves, pour des raisons didactiques bien explicitées.

Dans les deux cas, les différents outils de représentation sont introduits. Chez Brousseau, des outils de représentation variés et complexes sont fournis par l'enseignant en tant qu'outils de l'analyse statistique : ils servent à représenter des données pour en tirer des constatations nouvelles (par exemple la nature convergeant des fréquences). Chez Varga, les

représentations émergent plutôt dans un processus dialectique, au cours des dialogues en classe, et participent avant tout dans le raisonnement (par exemple, les arbres permettent de prouver le nombre des cas dans une situation de combinatoire).

Quant au processus d'enseignement suivi par les deux auteurs, on voit dans les deux cas une conception partiellement constructiviste : la construction du savoir se passe avec la participation active des élèves, mais n'est pas laissé entièrement à la charge de leur travail autonome. Brousseau et Varga conçoivent tous les deux des interventions d'enseignant : la différence entre les deux processus est dans le caractère et le rythme de ces interventions. Brousseau alterne des longues phases adidactiques avec des phases d'institutionnalisation ; chez Varga, il s'agit plutôt des dialogues entre l'enseignant et la classe, articulant le rôle de ces deux phases.

En fait, il est très clair de cette expérimentation de Brousseau qu'une phase adidactique ne signifie pas, selon sa conception, la non-intervention absolue de l'enseignant. Il fait plusieurs remarques concernant les types d'intervention faits, par exemple :

> The teacher "registers" some of the students' declarations by repeating them in dubious tones, but refrains from putting them under discussion. She nonetheless notes certain ones "for herself" on the back of the board "for later." (p. 367)

Ce qui caractérise ces phases, c'est que l'enseignant n'intervient pas *au niveau de la construction du savoir mathématique*. Ce type d'intervention n'est ensuite pas théorisé dans la TSD[142]. Dans la conception de Varga par contre, ces interventions au cours du déroulement de la situation jouent apparemment un rôle important : de nombreuses remarques y réfèrent dans les livres du professeur et dans ses articles.

Brousseau insiste sur la nécessité des phases d'institutionnalisation, pour répondre aux insuffisances d'une conception d'enseignement radicalement constructiviste (avant la phase 3 dans le texte) :

> The students respond to situations offered to them with remarks, questions, suggestions and decisions that bear witness to their understanding and their discoveries. This knowledge, especially the part of it that appears in contact with the situation, is fugitive, fragile and strictly dependent on the situation in which it has made an appearance, even if it appears familiar. In order to become knowledge which the student can use or the teacher mobilize, it must be put through stages and transformations only some of which are characterized by being fixed in the memory of the students. Those are the ones most noted by teachers and evaluators. […]

[142] C'est ce que Brousseau (1997) appelle « faire fonctionner la machine », comme nous l'avons remarqué précédemment.

> These transformations of knowledge into "cultural" knowings cannot happen spontaneously. They can only happen in situations which are didactical in the strict sense. Such situations of institutionalization were only identified some years after the experiment described here. The demonstration of their necessity and the impossibility of obtaining their results in a-didactical situations convinced us of the limits of constructivism and the impossibility of radical constructivism. (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002 p. 384)

Varga suit d'autres voies pour répondre au problème mentionné. Outre des dialogues enseignants-élèves, c'est la construction des séries de problèmes qui est censée d'aider la mobilisation, les transformations, les généralisations et la stabilisation des connaissances.

La différence la plus apparent entre les deux types de processus est en effet dans leur construction. Il s'agit dans les deux cas de concevoir des processus d'enseignement longs et complexes. On a vu (Chapitre 3 §3), Varga encourage les enseignants de penser en processus plus longs au lieu de découper l'enseignement en leçons, et Brousseau insiste également sur l'intérêt d'une telle organisation.

> The dialectic character, that is, the fact that each activity is motivated by the results of the preceding one and produces the questions which engage the following one, could have constituted a difficulty. Teachers tend rather to isolate small teaching objectives which they tackle one at a time, and to try to arrange for their lessons to be as "context free" as possible and for the learning of each new piece of knowledge to depend as little as possible on the preceding ones (no doubt in the hope of avoiding perturbations caused by earlier failures). Such was not the case here because the process required only a memory of the things which had happened and not of decontextualized knowledge. Rather than constituting a difficulty, this dialectic character made it possible to maintain and sustain the interest of the students. The length of the process and the cleverness of the teacher in arranging periods of institutionalization and of participation of the whole class contributed to maintaining their interest and developing a "culture" of statistics made by the productions of the "machine." (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002 p. 407)

Mais pour Brousseau, ce qui organise ce processus, c'est un enchaînement logique des problèmes. Son expérimentation part d'une seule grande situation, considérée fondamentale, qui est suffisamment riche pour en faire émerger des différentes notions, techniques liées à tout un champ de savoir. Avec l'exception de la phase 6, tout son processus découle de cette seule situation, les nouvelles questions se posent logiquement au cours du traitement des problèmes précédents. Ce processus est par ailleurs assez similaire à ceux qu'on trouve dans ERMEL (cf. Chapitre 3 §2.2).

Les processus conçus par Varga, comme on pouvait voir sur l'exemple de la combinatoire, sont plutôt constitués d'une grande variété de situations plus courtes. Au cours du traitement d'une situation, des problèmes s'enchaînent également, le traitement de l'un fait émerger

l'autre. Mais ces situations sont systématiquement articulées avec d'autres situations très différentes.

Selon Brousseau, les connaissances obtenues dans le contexte d'une situation concrète ne sont pas transmissibles à d'autres situations : dans le cas de l'expérimentation sur les probabilités, c'est confirmé par un test entre les phases 5 et 6[143]. C'est ce qui nécessite selon lui une institutionnalisation, une décontextualisation du savoir. En critiquant le découpage en unités courtes dans l'enseignement français ordinaire, il souligne aussi les avantages, notamment que le découpage en unités permet de se baser sur les éléments de savoir décontextualisés et institutionnalisés, un long processus dialectique nécessite par contre le mémoire des éléments contextuels. Dans la TSD, un accent est mis en effet sur l'acquisition du savoir institutionnalisé, utilisable sans référence à un contexte concret. Ceci peut expliquer la théorisation des unités en termes de situations, bouclées par des moments d'institutionnalisation, et le manque de la théorisation des processus dialectiques longs, au-delà de l'enchaînement des situations d'action, de formulation et de validation – malgré la reconnaissance de leur importance pour l'expérimentation concret[144].

La conception de Varga envisage par contre un processus d'institutionnalisation lente, basée sur un contexte expérimental riche et variée : d'où la grande importance de l'organisation des séries de problèmes, ce qui permet de structurer la mémoire didactique

---

[143] On the other hand, on a specific test involving testing a hypothesis in "reasonably similar" (for a mathematician) but perceptibly different circumstances, it was determined that the differences between these students and those in a control class were insignificant. The knowledge acquired in the first five phases of this particular process was not transferable to another situation of hypothesis testing. We will return to this point later. (p. 406)
[…]
In the long process which we observed the students use a considerable amount and variety of mathematical knowledge. It is clear that the meaning of each piece of knowledge is limited to the conditions in which it was used, and a return to it in a more didactical context is essential to its durable and verifiable acquisition. This is the objective of phase six, which we have not presented here, but which had the goal of bringing out the knowledge which was the object of the process and articulating it in the classic manner. (Phase six took place some time after the test.) (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002 p. 410)

[144] Margolinas en dit ce qui suit : « J'ai montré comment, dans la séquence de Nadine et Guy Brousseau 1987 sur les rationnels et les décimaux à l'école primaire, ce sont les critères de validité qui servent de 'pivots' pour le passage d'une situation fondamentale à l'autre (Margolinas 1993), alors que Brousseau n'avait pas théorisé ce passage. » (Margolinas 2004, p. 34)
Brousseau parle de cette question plus récemment :
« Different modes of composition and articulation of these elementary situations make it possible to create composite situations and sequences of situations that form processes:
Process of mathematization: A sequence of autonomous mathematical situations that are introduced by didactical interventions of the teacher and that work together towards the construction of the same complex knowledge (e.g., rational and decimal numbers (Brousseau et al. 2004, 2007, 2008, 2009))
Genetic situation: It introduces and without other external intervention generates the sequence of situations that lead to the acquisition of a concept (e.g., how many white marbles [article cited]).
The didactical work of the teacher then consists of maintaining the intensity and the relevance of the exchanges and implementing their progress and their conclusion. Examples of process: on areas, Perrin-Glorian M.J. (1992), and on geometry, Salin M.H., Berthelot R. (1998). » (Brousseau 2014 p. 167)

collective de la classe. Si pour Brousseau, l'institutionnalisation garantie la décontextualisation et la transmissibilité sur d'autres contextes du savoir acquis dans un contexte concret, pour Varga c'est justement l'inverse : c'est la diversité des contextes et la reconnaissance des liens entre les problèmes de différents contextes qui doit déclencher un processus de généralisation et de décontextualisation progressif des notions mathématiques. Au fond, on trouve deux conceptions différentes sur les processus d'abstraction dans l'enseignement des mathématiques.

Nous remarquons enfin une différence dans la narration entre l'article de Brousseau et les écrits de Varga. Les descriptions de Brousseau sont beaucoup plus précises que celles de Varga : les interventions de l'enseignant et les élèves sont bien définis et distingués, il donne des précisions concernant du temps, des outils, des formes de travail, des questions posées par l'enseignant. Dans le cas de Varga par contre, la narration est plus vague, présente des possibilités, alternatives, mais laisse beaucoup d'aspect ambigüe.

Une des raisons de cette différence peut résider dans la nature différente des textes : Brousseau décrit une expérimentation concrète (qui était reproduite dans un nombre limité), avec la visée d'une analyse didactique et d'un témoignage historique de l'origine de ses recherches. Varga, quant à lui, se base sur un grand nombre d'expérimentations de plusieurs années. La visée de ses textes est plutôt d'aider des enseignants (dans le cas des livres du maître) ou des collègues (dans le cas des articles) à développer leur enseignement, en mettant en place des situations similaires.

Mais on peut identifier également des différences conceptuelles importantes. Les recherches de Brousseau s'appuient sur l'idéal de la reproductibilité : comme dans n'importe quelle science expérimentale, la validité de l'étude didactique nécessite les précisions soigneuses concernant les conditions de l'expérimentation, permettant ainsi sa reproduction. Sa femme Nadine Brousseau, l'enseignante de l'expérimentation exprime également dans un entretien son étonnement, d'un point de vue d'enseignant, face à la réaction très similaire des classes différentes (Antibi 2005 p. 15). Varga est par contre plus intéressé aux réactions et interventions diverses et personnelles des élèves, encourage l'improvisation, l'adaptation à l'imprévu, et aux conditions locales. C'est ce qui peut expliquer l'accent mis plutôt sur les potentialités d'une situation, sur les alternatives, sur les idées diverses pour des réactions possibles d'enseignants, et le refus, probablement conscient, des précisions concernant les détails de la mise en place.

Á la fin de son article, Brousseau exprime sa critique au livre de Varga et Glaymann, considéré comme exemple d'une expérience probabiliste « ordinaire » :

> The experiment created a limited milieu in which the students very "naturally" invested their acquired knowings and developed a variety of pieces of "practical" knowledge (whether to create a graph or calculate a percentage of draws, etc). But any statistical experiment (such as those conducted by Tamas Varga and Maurice Glayman), would have had the same results. What is proper to this experiment is having introduced these practices in the context of a process which justifies them rationally and leaves the responsibility for explaining them largely to the students, to show the students that the comprehension of mathematics is not a rare practice, revealed to the elite and handed down to a population of ignoramuses, but a capacity shared by humans, and, given favorable conditions, a legitimate requirement. This is why we feel that the process cannot a priori be replaced by a random didactical organization. The more so in that it is not usual to specify the method along with the knowledge to be taught. (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002 p. 410)

En effet, le livre en question ne décrit que des situations dépourvues de leur contexte et c'est ce qui peut donner lieu à la critique de Brousseau. Ce qui est mal visible dans ce livre, ce sont les processus longs basés sur les « séries de problèmes », conçus souvent sur une échelle de plusieurs années qui permettent selon la conception de Varga la construction progressive du savoir mathématique avec une participation active des élèves. Les principes de la construction de ces processus sont rarement explicités dans l'œuvre de Varga, et ce fait constitue clairement un obstacle majeur pour la mise en pratique de sa conception par ses lecteurs (avant tout par les enseignants du terrain qui en étaient censées). Ce que nous avons tenté de montrer à travers des analyses précédentes, c'est que des telles principes sont pourtant présentes implicitement dans ses écrits, et qu'une étude de la structure de ses textes complétée d'une analyse didactique soigneuse de la narration des situations décrites peuvent mettre en lumière des telles principes dévoilant une conception sophistiquée de la construction des processus d'enseignement des mathématiques.

4 CONCLUSION

Les domaines de la combinatoire et des probabilités marquent une différence importante entre la réforme hongroise et française : ils obtiennent une attention distinguée dans le cas hongrois alors qu'ils sont absents du programme français du primaire et du collège de l'époque (bien que les probabilités apparaissent dans le programme du lycée au moment de la réforme). Cette différence doit en partie à la culture mathématique de chaque pays : ils sont considérés secondaires dans les recherches mathématiques françaises à l'époque (Parzysz 2011 p. 127),

alors qu'ils sont des terrains de recherches très accentués en Hongrie, et sont au centre d'intérêt de plusieurs mathématiciens hongrois soutenant la réforme. Une autre raison de la différence concerne l'écologie des programmes : puisque la réforme française met l'accent sur la construction des grandes structures, en nombre réduit mais en une très grande profondeur théorique, la combinatoire et les probabilités y trouvent peu de place. En Hongrie par contre, ils contribuent à la diversité des domaines enseignés et à l'articulation dialectique des domaines.

En Hongrie, ces domaines sont considérés particulièrement bien adaptés pour représenter l'image des mathématiques correspondant à la conception épistémologique des réformateurs. Varga souligne dans ses écrits que l'étude de la combinatoire et des probabilités permet d'initier les élèves aux processus d'abstraction mathématique, justement parce qu'elle ne nécessite pas de base théorique poussée. En partant des problèmes concrets, manipulatoires, expérimentales, on peut développer progressivement des méthodes d'argumentation à l'aide des outils de représentation divers. Selon lui, ces domaines fournissent des occasions riches et variées pour créer des liens entre les différents domaines mathématiques, et illustrent en outre bien le caractère ludique des mathématiques. La pensée probabiliste, la mathématique de l'incertain joue un rôle important dans la conception de plusieurs mathématiciens de « l'école hongroise », ainsi que le caractère « quasi-empirique » des mathématiques, que le domaine des probabilités est particulièrement adapté à présenter. Les articles de Varga témoignent également des considérations pédagogiques plus générales concernant l'enseignement de ce domaine, et notamment l'encouragement de l'expression des avis divers et personnels des élèves : selon lui, l'enseignement des probabilités en offre de bonne occasion.

Du point de vue de l'arrière-plan épistémologique français, ces arguments peuvent compter plutôt pour contre-arguments contre l'enseignement de ces domaines. (Comme on a vu, même quand la théorie des probabilités apparaît dans le programme du lycée, c'est en tant que terrain d'application de la théorie des ensembles.) Au niveau élémentaire, c'est au cours des années 1970 quand ces domaines apparaissent dans les projets expérimentaux, et ponctuellement dans les manuels ordinaires français, au moment où l'enseignement des méthodes d'argumentation et de la résolution des problèmes obtient une plus grande attention. Les choix épistémologiques différents peuvent ainsi expliquer la différence importante entre les deux réformes concernant l'intégration de ces domaines.

Nous avons utilisé la notion des paradigmes de probabilité pour approfondir l'analyse épistémologique de l'enseignement de ce domaine. Nous avons pu comparer, de ce point de vue, l'expérimentation de Brousseau avec le programme de Varga. Dans les deux cas, nous

avons pu trouver un certain passage de P1 vers P2, mais avec des accents très différents. Chez Brousseau, il s'agit d'un travail important en P1, développant des outils statistiques complexes et variés, et le passage à P2 n'arrive qu'à la fin du processus (que les auteurs de l'article de 2001 ne jugent même pas important de détailler). Chez Varga, on voit plutôt une articulation dynamique entre les deux paradigmes où le travail en P1 sert moins à introduire des techniques mathématiques poussées, plutôt à donner place à l'accumulation des expériences concrets et à une motivation d'un travail déductif en P2. Cette articulation de P1 et P2 semble être analogue avec l'articulation des paradigmes de géométrie qu'on pouvait observer dans le chapitre précédent. Conformément à ce choix d'articulation des paradigmes, les probabilités sont liées chez Varga à la fois aux statistiques et à la combinatoire, mais les outils statistiques sont beaucoup moins élaborés que chez Brousseau, l'accent est plutôt mis sur la combinatoire (nécessaire pour faire les calculs sur les modèles probabilistes en P2). Nous avons suggéré en outre que cette différence entre le choix des paradigmes peut être lié à l'apprentissage différente des nombres rationnels : l'approche de Brousseau favorise plutôt l'utilisation des décimaux conformément au programme français de l'époque, alors que l'approche de Varga nécessite plutôt l'utilisation des fractions.

Pour ce qui concerne les pratiques pédagogiques, les exemples issus du domaine de la combinatoire et des probabilités nous ont permis de confirmer nos observations précédentes et de les compléter avec quelques nouveaux aspects. Du côté français, nous nous sommes intéressées aux nouveautés qu'apportent les développements et les critiques de la réforme dans les années 1970. Le manuel scolaire ordinaire que nous avons étudié, *Math et calcul* intègre dans la nouvelle édition de son livre du maître du grade 1 un nouveau chapitre sur les « situations ». La description de ces « situations » correspond aux attentes des instructions officielles qui demandent de mettre un plus grand accent sur la résolution des problèmes. En même temps, l'étude des situations concrètes suggérées par Eiller a montré peu de changement de contrat par rapport à celui adapté dans la première édition : les situations sont courtes, sans réelle connexion entre eux et contiennent peu de potentiel adidactique. Bien que, selon les instructions des auteurs, les élèves devaient eux-mêmes poser des questions, choisir des outils mathématiques et chercher des méthodes de solution dans ces situations-problèmes, la description des exemples concrets suggère plutôt une direction fermée de ces situations, où ces éléments sont fournis par l'enseignant.

Dans ERMEL par contre, similairement aux exemples étudiés dans le chapitre 3 (§2.1.2), nous avons trouvé des situations d'un fort potentiel d'adidacticité, visant à faire les élèves construire leur outils mathématiques eux-mêmes en réponse au problème posé. En ce qui

concerne Brousseau, les situations de son expérience semblent bien correspondre à son modèle théorique : des phases adidactiques longues sont alternées avec des phases d'institutionnalisation. Nous avons vu par ailleurs que Brousseau confirme lui-même le rôle de cette expérimentation dans l'émergence de la TSD. Nous pouvons aussi observer une certaine similitude de ce point de vue entre les situations conçus dans ERMEL et chez Brousseau.

Chez Varga, nous avons retrouvé le type de contrat « découverte guidée », portant des potentielles d'adidacticité importantes, mais s'appuyant beaucoup plus sur le dialogue enseignant-élèves que sur des longues phases de travail autonome des élèves. Nous avons vu comment l'articulation des paradigmes de probabilité corresponde à la construction d'un milieu rétroactif : le travail en P1 sert de base expérimentale et permet de construire des hypothèses, mais présente des limites pour la validation par sa nature aléatoire. C'est ce qui motive dans la conception de Varga le passage vers la démonstration en P2[145]. Nous avons vu en outre, sur les exemples de probabilité ainsi qu'en combinatoire, un rôle important accordé au caractère ludique des situations, contribuant à leur dévolution. Le ludique y est présent dans deux sens, d'une part en forme de jeux à règles (de ce point de vue, les jeux probabilistes se sont avérés particulièrement pertinents car même les stratégies les mieux conçus n'y peuvent pas être surement gagnantes, l'incertitude permet de maintenir le plaisir du jeu, toute en motivant une activité de démonstration), d'autre part il est présent en tant qu'activité libre et créative, liée aux arts.

Mais l'objectif principal de ce dernier chapitre, par rapport aux pratiques pédagogiques, était l'étude des processus d'enseignement longs. Les « séries de problèmes » combinatoires de Varga et l'expérimentation de Brousseau nous a permis la comparaison de deux conceptions très différentes de ce point de vue. Les deux auteurs conçoivent des processus longs mais de caractère différent.

Pour Brousseau, l'enjeu principal est de trouver une *situation fondamentale* suffisamment riche pour en développer tout un champ de connaissances mathématiques. C'est à partir et autour de cette situation fondamentale que les étapes du processus sont conçus. Selon Brousseau, les connaissances développées dans le contexte d'une telle situation ne sont pas directement transmissibles sur d'autres contextes : cette transmission nécessite une décontextualisation. Les phases d'institutionnalisation, ont pour objectif de donner aux connaissances des élèves le statut d'objet, de savoir institutionnel décontextualisé, permettant

[145] Contrairement à Brousseau qui fait élaborer des techniques de validation en P1.

l'utilisation générale des éléments de savoir mathématique ainsi obtenus. Nous avons remarqué que la construction des processus longs est peu théorisé dans la TSD, au-delà de l'articulation des phases de dévolution, des phases adidactiques et de l'institutionnalisation, et en outre de la succession des situations d'action, de formulation et de validation. Il semble aussi, que la conception des tels processus longs n'est pas considérée comme un travail d'enseignant, plutôt comme un travail de chercheur. Dans ce sens aussi, la TSD montre une similitude avec la conception de l'ERMEL qui conçoit également un enchaînement longue de situations, mais fournit une progression annuelle prête aux enseignants et ne leur demande que la préparation des leçons.

Pour Varga par contre, l'accent est sur la diversité des situations et sur leur articulation. Au lieu de chercher la transmission d'une connaissance développée dans un contexte sur l'autre contexte, il cherche à faire reconnaître les analogies et liens divers entre les situations rencontrées, et amener ainsi les élèves vers une généralisation et abstraction progressive. Les phases adidactiques ne sont ainsi pas forcément suivis d'une phase d'institutionnalisation, cette dernière est souvent laissée pour plus tard, parfois de plusieurs années (en même temps, les dialogues enseignant-élèves laissent place aux institutionnalisations partielles). La mise en ordre des situations joue un rôle crucial dans ce processus, et reste en partie à la charge de l'enseignant, puisque doit dépendre de l'état des connaissances des élèves. Varga ne fournit pas de règles générales sur cette mise en ordre, mais insiste à plusieurs endroits sur l'importance de réfléchir en processus longs, et le livre du maître de son équipe donne de nombreux petits conseils concernant les possibilités d'enchaînement des problèmes.

Le chapitre combinatoire du livre du maître du grade 1 est particulièrement intéressant de ce point de vue, car présente des réflexions développées sur cette mise en ordre, et indique assez systématiquement les liens entre les différentes situations décrites. Nous y avons identifié une double structuration, d'une part la mise en ordre des problèmes posés à partir d'une situation concrète (dont le modèle est la construction des tours colorées), d'autre part l'articulation des situations diverses suivant plusieurs principes, y compris la variété du matériel ou la progressivité de l'abstraction (jeux avec des objets physiques, dessins, lettres etc.). Les exemples issus des manuels scolaires du niveau moyen ont également montré différents principes de structuration, en lien aussi avec le contrat didactique : la diversité des énoncés de la série du grade 5 correspond à une diversité de méthodes mathématiques à appliquer, amenant à une lente élucidation des méthodes plus générales ; l'homogénéité et la variation systématique des énoncés de la série du grade 6 suggèrent par contre la généralisation systématique de la méthode de résolution.

CONCLUSION GENERALE

Dans la dernière, plus longue partie de la thèse, nous avons cherché à caractériser les réformes française et hongroise de l'époque des mathématiques modernes, à travers l'analyse didactique de plusieurs exemples de thèmes. Nous commençons notre conclusion avec un résumé systématique des caractéristiques trouvées, dans l'ordre des différents aspects questionnés : les programmes, les pratiques pédagogiques, et les ressources (§1). Nous insisterons sur les diverses relations entre ces aspects et nous soulignerons la cohérence interne de chaque réforme à l'égard de ces différents aspects (§2).Nous discuterons ensuite les liens de ces caractéristiques avec l'arrière-plan épistémologique (§3) et l'influence du contexte historique sur les deux réformes (§4). Nous apporterons finalement quelques remarques complémentaires (§5 et 6), et nous proposerons quelques perspectives de recherche (§7).

1 LA CARACTERISATION DES REFORMES : RESUME DES RESULTATS DE L'ANALYSE DIDACTIQUE

1.1 Les programmes

Dans le chapitre 2, nous nous sommes intéressée au contenu et à la structure des programmes des deux réformes. Nous avons constaté qu'ils partagent ***plusieurs préoccupations cohérentes avec celles du mouvement international : l'intégration des thèmes modernes des mathématiques dans le programme, la restructuration dans une forme permettant de présenter les mathématiques comme une science cohérente. En même temps, ces principes généraux ne sont pas mis en œuvre de la même façon dans les deux cas.***

Des nouveaux éléments comme les notions de la théorie des ensembles, ou quelques notions topologiques apparaissent dans les deux pays ; cependant, ***le contenu des deux programmes comporte aussi des différences importantes***. La réforme française intègre le traitement de quelques grands systèmes axiomatiques modernes, comme l'ensemble des nombres réels ou la géométrie affine euclidienne, basée sur la notion des réels, alors que la réforme hongroise insiste sur la diversité des domaines et complète le programme avec la logique, la combinatoire et les probabilités entre autres.

La cohérence du programme est aussi assurée différemment dans les deux réformes. Dans le cas français, le principe d'organisation semble être hiérarchique : les différents domaines mathématiques s'appuient linéairement les uns sur les autres, en commençant par la théorie des ensembles, à travers les différents ensembles de nombres et jusqu'à la géométrie. Le langage formel et la méthode axiomatique jouent un rôle crucial pour assurer la cohérence du programme. ***Dans le cas hongrois, il s'agit plutôt d'une relation dialectique entre les domaines***, des connexions mutuelles : l'accent porte sur la diversité des expériences et sur un processus de généralisation progressif, par la reconnaissance des points communs entre les différentes expériences rencontrées.

La réforme française est marquée par plusieurs ruptures, entre les programmes du niveau élémentaire et moyen, mais surtout entre la première et la deuxième moitié de l'école moyenne. Cette dernière rupture est explicitée dans le programme, tout particulièrement pour le domaine de la géométrie : il s'agit de passer d'une étude expérimentale des objets physiques (considérée comme propédeutique et pas comme une « réelle » activité mathématique) à un traitement axiomatique-déductif.

La réforme hongroise insiste, au contraire, sur la continuité du programme. Cette dernière est assurée entre autres par une progression « spiralée » : les notions mathématiques émergeant à un niveau scolaire donné sont reprises et approfondies progressivement aux niveaux suivants. Cette progression est soutenue par une structure double du programme, définissant à la fois un ensemble plus large de connaissances qui doivent être introduites à un certain niveau et un ensemble plus réduit d'exigences que chaque élève doit acquérir à la fin de l'année.

Nous avons examiné ces principes d'organisation plus en détails sur trois exemples issus des programmes. Le premier concernait l'introduction de la notion des nombres naturels à l'école élémentaire. Les deux réformes ont insisté sur la construction mathématique de cette notion et sur un enseignement visant la compréhension de la notion, au lieu des « recettes de calcul » irréfléchies. Dans les deux cas, la notion d'ensemble sert de base pour la construction de la notion de nombre ; mais dans le cas français, c'est l'unique base, et comme l'a montré Chambris, il s'agit de rompre les liens existants entre nombres et mesure pour établir une structuration « moderne » des notions, alors qu'en Hongrie, l'introduction des nombres naturels sur la base de la notion d'ensemble est articulée avec celle basée sur la mesure. L'exemple du lien entre nombres et mesure illustre par ailleurs le lien des notions mathématiques avec le monde réel : la rupture entre nombres et mesure permet d'éliminer, dans le cas français, les références à 'la vie courante' ; dans le cas hongrois au contraire, elles

alimentent la diversité d'expériences, considérées comme nécessaires pour construire des notions mathématiques riches de sens.

Les nuances que nous avons pu observer sur ce premier exemple de l'école élémentaire s'avèrent plus profondes et évidentes en étudiant notre deuxième exemple, les programmes de géométrie à l'école moyenne, et l'enseignement du théorème de Pythagore. Dans la réforme française, les « observations physiques » des deux premières années donnent leur place à un traitement axiomatique de la géométrie à partir du grade 8, qui est censé offrir « un premier exemple de mathématisation ». Au delà des notions premières qui doivent être acceptées intuitivement, les références à l'intuition sont éliminées : les notions géométriques sont basées sur la notion des nombres réels et leur traitement est entièrement algébrique, s'appuyant sur un langage formel chargé ; les figures n'y remplissent qu'un rôle d'illustrations accessoires. . Conformément à l'avis de Dieudonné et Choquet, le traitement des figures de la géométrie classique est très réduit dans ce programme. Ainsi, le théorème de Pythagore ne porte plus sur la caractérisation des triangles rectangles mais apparaît comme une petite brique parmi d'autres dans la construction d'un outil algébrique pour la caractérisation du plan euclidien.

Le programme de géométrie de la réforme des « mathématiques modernes » est probablement son élément le plus critiqué : le programme suivant ne demande plus de traitement axiomatique, et laisse une plus grande liberté dans le choix d'organisation mathématique, même si l'ordre des notions du programme renvoie à une organisation similaire à celle de la réforme.

Le programme hongrois comprend, au contraire, un traitement synthétique, élémentaire de la géométrie, portant sur les figures classiques ; la nouveauté consiste surtout en un appui sur les transformations traitées comme des fonctions. Les liens avec d'autres domaines mathématiques, les ensembles, l'algèbre ou la combinatoire sont plus dialectiques que hiérarchiques ; les notions fondamentales de la géométrie restent premières, leurs définitions sont élucidées progressivement, mais tout en gardant un recours à l'intuition visuelle. C'est justement une des fonctions de l'enseignement de la géométrie dans ce programme, de fournir des exemples intuitifs, plastiques pour le traitement des notions plus abstraites comme l'ensemble, la fonction, ou encore les différentes extensions de l'ensemble de nombres (dont la droite numérique fournit un modèle et une motivation intuitive). Varga insiste aussi sur un passage progressif d'un travail expérimental matériel (que nous avons caractérisé avec la notion du paradigme G1) vers un travail démonstratif sur des figures abstraites (paradigme G2) ; sans arriver à un travail complètement axiomatique et formel, éloigné du sens visuel (G3). Le théorème de Pythagore nous en a servi d'exemple : la démonstration géométrique est

motivée par un travail en G1, et par des limites qu'impose ce travail. Les critères de la démonstration mathématique ne sont pas figés dans la réforme de Varga : au lieu d'enseigner « la méthode » mathématique, l'accent est mis sur le développement de la pensée argumentative, et les exigences de démonstration sont progressivement approfondies, en lien avec un niveau de précision convaincant pour la collectivité de la classe.

La différence entre les deux réformes est encore plus importante dans notre troisième exemple, l'enseignement de la combinatoire et des probabilités, car ces domaines sont complètement absents des programmes de l'école élémentaire et moyenne français de 1969/70, alors qu'ils jouent un rôle important tout au long du programme hongrois. Les raisons d'enseigner ces domaines sont, selon Varga, le renforcement de la diversité des domaines mathématiques et l'articulation entre eux ; la nature appropriée de ces domaines pour initier les élèves aux processus d'abstraction, partant d'expérimentations concrètes, manipulatoires et sans la nécessité de bases théoriques lourdes ; les occasions qu'ils fournissent pour la résolution des problèmes et pour des activités ludiques ; et enfin, la présentation d'une autre image des mathématiques à travers la pensée probabiliste : la mathématisation de l'incertain.

Du point de vue de la réforme française, les arguments cités par Varga paraissent secondaires sinon même des contre-arguments. Ce fait peut expliquer leur absence du programme[146], ainsi que leur apparition ponctuelle dans les manuels scolaires de 1977 (l'exemple d'Eiller), et surtout dans les expérimentations des années 1970 (l'exemple de l'ERMEL et de Brousseau).

Lors de l'analyse en termes de paradigmes de probabilité, nous avons pu identifier chez Varga un processus similaire à la géométrie : une articulation entre P1 et P2, un passage progressif du premier vers le deuxième, où les expérimentations concrètes, manipulatoires (P1) permettent de motiver l'argumentation sur des modèles abstraits (P2). Ainsi, le travail en P1 sert plutôt l'accumulation des expériences, similairement à la géométrie, mais les techniques d'une approche fréquentiste ne sont pas très développées – contrairement à l'expérimentation de Brousseau, où l'essentiel du travail est fait dans un paradigme fréquentiste, et des méthodes statistiques poussées sont développées.

[146] Les arguments ci-dessus nous semblent cohérents avec les constatations de Parzysz (1997) qui montre que l'introduction du domaine des probabilités au niveau du lycée vise à fournir un exemple illustratif sur la puissance de la pensée axiomatique.

1.2 Les pratiques pédagogiques

Du point de vue des pratiques pédagogiques, nous avons également vu plusieurs préoccupations partagées, mais aussi des différences considérables. Nous avons révélé des différences non seulement entre les deux pays, mais aussi au sein de la France, entre la réforme des « mathématiques modernes » et des expérimentations suivant la réforme. Les questions liées aux pratiques pédagogiques semblent être parmi les moteurs principaux des réflexions sur l'enseignement des mathématiques à la suite de la réforme des « mathématiques modernes » en France, allant dans un sens similaire à la Hongrie, et en conservant néanmoins certaines différences entre l'approche des deux pays.

Les réformateurs insistent sur l'importance d'utiliser des méthodes actives, en se référant entre autres aux résultats de la psychologie. Nous avons pu repérer de nombreux éléments communs, au niveau élémentaire en particulier : la similitude des matériels utilisés (comme le bloc logique, le matériel Dienes ou le matériel Cuisenaire) et des fiches de travail permettent de supposer l'effet d'une diffusion internationale.

Nous avons cependant posé la question de savoir ce que les « méthodes actives » signifient pour chaque auteur. Quel est la portée de ces « activités », quel est leur lien avec le contenu mathématique, quelles responsabilités et autonomie sont laissées aux élèves dans la construction de leurs connaissances mathématiques et quel est le rôle de l'enseignant dans ce processus ? S'appuyant sur la TSD, nous nous sommes intéressée avant tout à la nature des situations didactiques, aux potentiels d'adidacticité que portent les situations décrites dans les différentes ressources, et au contrat didactique qu'elles suggèrent. L'analyse des livres du maître a révélé en outre l'importance d'étudier des processus sur le long terme, pour pouvoir comprendre les pratiques pédagogiques envisagées dans chaque pays.

Nous avons trouvé des différences pertinentes non seulement entre la réforme hongroise et française des « mathématiques modernes », mais aussi entre les deux programmes français étudiés.

1.2.1 Le sens des « activités »

La réforme des « mathématiques modernes » en France, malgré les activités suggérées dans les différentes ressources de l'école élémentaire et moyenne, semble être dominée par un contrat du type magistral. Les activités préparatoires jouent un rôle illustratif, mais souvent sans problématisation du contenu mathématique, sans appui sur un milieu adidactique : les manipulations physiques strictement dirigées servent à illustrer, sur des

exemples concrets, des notions mathématiques imposées par l'enseignant. Hersant et Perrin-Glorian (2003) ont appelé ce type de contrat *initiation*. À l'école moyenne, au-delà de quelques activités de ce dernier type, la forme dominante d'enseignement semble être le cours magistral ; les « exercices » présentés par les manuels servent principalement le contrôle d'acquisition et la stabilisation du savoir acquis, mais contribuent peu à la construction des nouvelles connaissances.

Les ressources de la fin des années 1970 montrent des réflexions plus approfondies concernant l'activité des élèves. Elles insistent désormais sur l'importance de laisser une réelle autonomie aux élèves dans la construction de leurs connaissances mathématiques. Au niveau de l'école moyenne, nous avons vu cela sur l'exemple des manuels scolaires de Deledicq et Lassave, qui introduisent différents types d'exercices (d'introduction, pour s'entraîner, pour démontrer, pour chercher, pour appliquer). L'exemple du théorème de Pythagore a montré cependant, que l'ambition d'engager des élèves dans la recherche autonome a conduit à des compromis par rapport au contenu mathématique : le théorème est introduit par un travail en paradigme G1, et la démonstration, jugée peu intuitive, est abandonnée dans la leçon[147] bien que par la suite, c'est un travail en paradigme G2 qui est visé.

Au niveau de l'école élémentaire, nous avons avant tout étudié le recueil ERMEL, produit d'un long processus de recherche collective menée à l'INRP. Nous avons complété notre étude avec la description rétrospective des expérimentations menées par Brousseau au COREM au début des années 1970 (Brousseau, Brousseau & Warfield 2001), et qu'il reconnaît comme inspiratrices de sa théorie développée ultérieurement.

Dans ces documents, ***les « situations » du genre adidactique sont au centre des réflexions : les auteurs cherchent à concevoir des situations qui permettent aux élèves de construire des connaissances mathématiques attendues, sans transposition directe de savoir par l'enseignant***. Ces situations sont constituées d'un problème et d'un milieu rétroactif qui permet aux élèves d'évaluer leurs solutions sans nécessité de validation de la part de l'enseignant. La connaissance attendue peut émerger comme un outil efficace pour la résolution du problème posé, et peut être objet d'institutionnalisation dans une phase suivante du processus. ***Ce contrat, du type constructiviste, est très proche en effet du principe des* situations adidactiques *de Brousseau***. La responsabilité de l'enseignant y consiste essentiellement en la construction de la situation, sa dévolution, et après le processus

[147] Plus précisément, apparaît comme accessoire à la fin du chapitre.

adidactique, en l'institutionnalisation ; l'élève est chargé d'une responsabilité pour la construction de ses connaissances mathématiques. Pendant le déroulement de la situation adidactique, l'enseignant ne joue qu'un rôle régulateur (rappel des règles, encouragement des élèves etc.), ce que Brousseau a appelé « faire fonctionner la machine » dans son cours de Montréal (1997).

Dans les pratiques suggérées par des ressources hongroises, on peut identifier de forts potentiels adidactiques – mais pas dans la même forme que dans l'ERMEL ou chez Brousseau. L'accent est moins mis sur des « situations adidactiques », mais plutôt sur le dialogue permanent entre l'enseignant et la classe ; les élèves portent une responsabilité importante au cours d'un processus collectif de construction du savoir mathématique où l'enseignant joue le rôle d'un guide expérimenté. Nous avons donné à ce type de contrat le nom de « découverte guidée ». Dans les écrits de l'équipe de Varga, on trouve moins l'idée d'*une* situation distinguée, associée à un élément de savoir ; plutôt le principe de la diversité et l'articulation des « situations » plus courtes, mais reprises plusieurs fois avec des variations plus ou moins importantes. Ces reprises et articulations, y compris entre les différents domaines sont censées soutenir l'émergence lente et progressive des notions mathématiques, avec une institutionnalisation retardée, parfois de plusieurs années[148].

Nous avons mis entre guillemets le mot « situation », car une situation adidactique dans le sens de la TSD doit comporter un milieu bien défini (ce qu'on trouve en effet dans les descriptions des ressources françaises). Dans le cas hongrois, la description du milieu, y compris des énoncés, est souvent plus vague et les éléments du milieu ne sont pas toujours entièrement déterminés. En effet, nos analyses de situation ont montré que lors de ce processus dialogique suggéré dans la réforme hongroise, il s'agit d'interventions régulières de l'enseignant au niveau de la modification du milieu, en fonction des réactions d'élèves qui ne sont que partiellement prévisibles à l'avance. Les consignes du livre du maître décrivent certaines réactions possibles d'élèves et donnent des conseils pour la gestion de ces situations, tout en encourageant le maître à transformer des situations, en fonction de leur goût et des conditions particulières de la classe. Les manuels scolaires du niveau moyen, d'une façon similaire, présentent des dialogues fictifs d'élèves qui doivent servir, selon le livre du professeur, comme modèles d'enseignement, pour reproduire en classe des dialogues similaires, mais pas identiques.

[148] Nous avons également pu observer une certaine 'dialectique outil-objet', mais pas exactement dans le même sens que dans le modèle de Douady. Chez Varga, une « situation » peut remplir à la fois le rôle de différentes 'phases' pour différents types de connaissances ou domaines mathématiques, et le processus d'articulation du rôle objet et outil d'une notion est souvent long.

Ainsi, on peut dire qu'au centre de la conception de ***Varga***, il y a moins les « situations » comme unités principales que les « problèmes » : ***l'enjeu didactique est de pouvoir gérer des dialogues collectifs autour des problèmes mathématiques, tout en laissant aux élèves une responsabilité dans la résolution et ainsi dans la construction des connaissances mathématiques***.

Nous soulignons encore deux composants de cette conception qui nous semblent pertinents. L'un est le rôle du ludique. Il a un double sens chez Varga : il s'agit d'une part des situations conçues comme jeux de règles, similairement à la conception de Brousseau (qui réfère dans sa théorie à la théorie des jeux concernant ce sujet). Le terme « ludique » porte d'autre part le sens d'une activité créative, libre et plaisante, ressemblant aux arts : comme R. Péter, Varga insiste sur le caractère ludique de l'activité mathématique, et accorde un rôle à cet aspect également dans l'organisation des processus d'enseignement plus longs.

L'autre composant à souligner est le rôle des ambiguïtés dans les processus d'enseignement. En effet, la conception hongroise s'appuie souvent sur des énoncés volontairement ambigus ou même erronés. Ces ambiguïtés ont pour fonction de déclencher des débats en classe et contribuent ainsi à la dévolution : mettant en lumière des obstacles dans la construction d'une notion mathématique, les malentendus, les avis divers des élèves sont moteurs d'un éclaircissement dialectique des notions[149]. En France, on accentue souvent l'importance d'un langage et des notions mathématiques « claires et distinctes » correspondant au savoir institutionnel précis et bien défini ; dans la conception de Varga, il s'agit souvent des notions partiellement fixées, ouvertes vers un développement et transformation ultérieurs. Les ambiguïtés sont par ailleurs considérées comme formatrices au contrat didactique visé : elles contribuent à la déconstruction de l'autorité indiscutable du maître et des consignes, à l'éducation à une pensée critique autonome, et au respect des avis personnels divers.

1.2.2 Les processus d'enseignement sur le long terme

Les analyses précédentes montrent l'importance, tout particulièrement dans le cas hongrois, de prendre en considération les processus d'enseignement conçus sur le plus long terme. Le chapitre 5 nous a donné l'occasion de comparer un processus d'enseignement relativement long de Brousseau avec celui de Varga.

[149] On a vu plusieurs exemples de ce genre, par exemple l'introduction de la notion d'égalité suite au jeu de devinette avec le matériel Cuisenaire (Chapitre 3 §3.2.2), ou l'article de Varga sur la construction des tours colorées (Chapitre 5 §2.1.1).

L'expérimentation de Brousseau part en effet d'une seule grande situation, considérée fondamentale, suffisamment riche pour en faire émerger différentes notions et techniques liées à tout un champ de savoir. C'est autour de cette situation fondamentale que le processus d'enseignement progresse. Selon Brousseau, les connaissances obtenues dans le contexte d'une situation concrète ne sont pas directement transmissibles à un autre contexte. C'est ce qui nécessite selon lui une décontextualisation et une institutionnalisation des connaissances qui ont émergée, permettant de leur donner le statut d'objet, de savoir généralement utilisable – et c'est ce qui peut probablement expliquer la théorisation en termes d'alternance de situations adidactiques et de phases d'institutionnalisation, et la conception d'une dialectique des situations d'action, de formulation et de validation, sans théorisation ultérieure cependant des processus d'enseignement longs, même si dans la pratique, Brousseau conçoit des processus longs et complexes. Nous avons trouvé par ailleurs, dans ERMEL, une conception similaire à celle de Brousseau.

Dans le cas des processus conçus par l'équipe de Varga, au lieu de partir d'une situation fondamentale, ***il s'agit plutôt d'articuler une grande variété de situations plus courtes***. ***Si pour Brousseau, l'institutionnalisation garantit la décontextualisation et la transmissibilité sur d'autres contextes du savoir acquis*** dans un contexte concret***, pour Varga c'est justement l'inverse :*** c'est la diversité des contextes et la reconnaissance des liens entre les problèmes de différents contextes qui doit déclencher un processus de généralisation progressif des notions mathématiques***. Au fond, deux conceptions relativement différentes de processus d'abstraction mathématique semblent se révéler ici :*** l'une est plus proche à l'idée ***des notions « vidées de contenu »*** (Bourbaki 1948 p. 47), dont l'universalité et l'efficacité est assuré par leur décontextualisation, alors que l'autre approche plutôt l'idée d'***une « diversité ramenée à une unité »*** (Péter 1944/1977 p. 53). Il semblerait en même temps nécessaire d'étudier plus en détails des processus longs conçus par les deux auteurs pour mieux éclaircir leur conception.

Chez Varga, c'est le processus d'institutionnalisation ralenti (étendu souvent sur plusieurs années), alimenté par les analogies, les liens divers entre les problèmes, qui semble donner une grande importance à l'organisation des séries de problèmes, permettant de jouer sur la mémoire didactique collective de la classe.

Sans pouvoir offrir une caractérisation synthétique de ces séries, nous avons pu identifier plusieurs principes organisateurs. Dans les séries sur la combinatoire, on a vu des problèmes mathématiquement similaires, mais d'un habillage très varié ; des problèmes d'habillage similaire mais mathématiquement différents ; partant d'un seul problème donné, une

augmentation progressive des contraintes ; et, à un niveau plus avancé, la variation systématique des variables d'un problème. Dans les dialogues fictifs des manuels scolaires, nous avons chaque fois pu identifier le rôle catalyseur d'une série de problèmes, provoquant la construction, la déstabilisation, et ensuite la reconstruction plus approfondie d'une notion ou une méthode mathématique. Ces diverses techniques d'organisation de problèmes en série montrent une parenté proche avec les principes organisateurs de *Jeux avec l'infini* de R. Péter, de *Preuves et réfutations* de Lakatos et avec les principes explicités par Pólya, comme l'analogie, la généralisation, le réinvestissement des méthodes et des résultats, etc.

1.2.3 Le travail de l'enseignant

Les différentes conceptions sur les pratiques pédagogiques, résumées ci-dessous, demandent un travail de différente nature des enseignants et chargent ceux-ci de différentes responsabilités, que nous avons essayé de caractériser à l'aide des niveaux définis par Margolinas (2001). Nous nous sommes particulièrement intéressés à trois de ces niveaux : le niveau +2, la conception des processus plus longs, le niveau +1, le projet de leçon et le niveau 0, la gestion de la situation didactique.

Pour les pratiques envisagées en France, le niveau le plus important semble être le +1. Chacune de nos sources a fourni une progression annuelle définie : même si elles soulignent chaque fois que l'enseignant est libre de suivre d'autres progressions, elles visent à leur économiser ce travail. La construction des livres du maître (particulièrement pour le niveau élémentaire) aide les enseignants à se repérer facilement dans la progression, et retrouver chaque fois la description de l'étape suivante qu'ils doivent enseigner. ***L'élément le plus important du travail de l'enseignant est la préparation*** de la leçon, ou plutôt la préparation ***des situations*** qui correspondent à une leçon ou une suite relativement courte de leçons. Le livre d'Eiller économise par ailleurs l'essentiel de ce travail aussi aux enseignants, fournissant une description très détaillée des situations à enseigner ; l'ERMEL au contraire, insiste sur l'importance de l'autonomie de l'enseignant à ce niveau.

Enfin, pour ce qui concerne le niveau 0, on a vu que le travail de l'enseignant consiste en des phases didactiques relativement bien concevables à l'avance, comme la dévolution ou l'institutionnalisation, alternées éventuellement avec des phases adidactiques (courtes et pauvres chez Eiller, très importantes cependant dans ERMEL et chez Brousseau) où l'enseignant n'a que la tâche de la régulation pédagogique, sans action directe sur les connaissances mathématiques. Ainsi, avec une bonne préparation préalable (niveau +1), les

actions didactiques de l'enseignant au cours de la gestion de la séance (niveau 0) sont assez bien prévisibles et nécessitent peu d'adaptation.

La conception de la réforme hongroise demande par contre un travail important à tous les trois niveaux, et particulièrement aux niveaux +2 et 0. En effet, le livre du maître insiste sur l'importance de se préparer « thématiquement » pour des périodes plus longues et non « leçon par leçon ». À titre d'exemple, pour des enseignants moins courageux, le livre fournit une progression, mais encourage plutôt l'élaboration autonome de la progression. La construction du livre permet, mais ne facilite pas une préparation des leçons à partir de la progression annuelle proposée : il faut en fait lire des chapitres thématiques plus longs pour comprendre le sens des tâches décrites, de plus, il faut prendre en considération plusieurs chapitres en même temps pour pouvoir mettre en place l'articulation demandée des domaines. Pour l'école moyenne, la question de la progression est beaucoup moins développée, mais le livre du professeur mentionne également qu'il faut chercher l'articulation des domaines au lieu de suivre l'ordre thématique du manuel scolaire.

Quant au niveau 0, la pratique dialogique amène de nombreux éléments peu prévisibles à la gestion de la séance, et ces imprévus nécessitent une adaptation permanente de l'enseignant. Il ne s'agit pas seulement des régulations pédagogiques, mais de la transformation fréquente du milieu en fonction des réactions d'élèves, pour maintenir et pousser plus loin leur travail sans les décharger de la responsabilité de l'apprentissage. L'enseignant doit garder en tête des connaissances préalables des élèves qui n'étaient pas toujours institutionnalisées et dont la mobilisation peut demander un rappel du contexte de leur apparition. Il peut être nécessaire en outre de repenser, dans l'immédiat, les projets de long terme, laisser place au traitement d'un problème qui était prévu pour plus tard, si les questions ou débats des élèves y donnent lieu, et en tout cas, tenant compte de la nature ouverte des processus de construction de connaissance, penser à préparer des notions qui ne seraient introduites que plus tard, parfois dans une année ultérieure.

En somme, on peut dire que le travail demandé aux enseignants dans la conception de Varga est très complexe, concerne plusieurs niveaux à la fois, nécessite des connaissances mathématiques et didactiques riches et stables, une grande autonomie et créativité. C'est sans doute une des limites d'applicabilité de cette conception et probablement un des obstacles auxquels sa diffusion s'est heurtée au moment de la réforme, d'autant plus qu'elle est arrivée dans le milieu d'un système scolaire très autoritaire et strictement régularisé.

1.3 Les ressources

Nous avons essayé de reconstituer des pratiques d'enseignement à partir des ressources écrites. Cette approche a nécessité d'accorder une attention particulière aux caractéristiques de ces ressources, avant tout à leur structure, leur langage, leur style, et leurs consignes d'utilisation. Nous avons déjà identifié plusieurs de ces caractéristiques que nous essayons maintenant de résumer.

Pour l'école élémentaire, les pratiques envisagées étaient restituables, avant tout, à partir des livres du maître. Limités souvent à quelques remarques pédagogiques générales et aux corrigés d'exercices (surtout du côté français), les livres du professeur de l'école moyenne étaient moins informatifs de ce point de vue ; nous avons essayé de montrer cependant comment les manuels scolaires de l'époque peuvent être interprétés comme porteurs de modèles d'enseignement.

Le livre d'Eiller a fourni une progression annuelle, et des descriptions détaillées du contenu mathématique et des « leçons », associées chaque fois à une rubrique de la progression annuelle. ***Avec un tableau synoptique permettant aux enseignants de se repérer facilement et avec une description très structurée des leçons, contenant les détails du déroulement, Eiller économise une grande partie du travail de l'enseignant***. Les situations courtes d'Eiller, bouclées chaque fois par un moment d'institutionnalisation laissent peu de responsabilité aux élèves, présentent en même temps moins d'imprévu pour l'enseignant, qui peut ainsi suivre assez précisément les descriptions détaillées.

Les auteurs du recueil ERMEL soulignent en revanche, dans la préface, l'importance de laisser une certaine responsabilité à l'enseignant, pour un enseignement de meilleure qualité, surtout concernant la préparation des leçons. ***Le livre décrit ainsi des activités à mettre en place, mais sans découper la progression en leçons***. La description des situations est bien structurée ici aussi, contient des buts, du matériel nécessaire, la description de l'activité, même si elle est moins figée que dans le cas d'Eiller. La particularité du livre est sa structuration en trois grandes parties : la description théorique du contenu du programme, la description des activités dans l'ordre de la progression annuelle, et les transcriptions de quelques séances réalisées. Cette structuration permet d'une part, selon la préface, plusieurs lectures du livre : à la fois comme compte rendu des recherches et comme ressource pour les enseignants (dans ce deuxième cas, commençant la lecture par la deuxième partie). D'autre part, l'insertion des transcriptions montre une réflexion sur les problèmes de la gestion de séances, même si la préface souligne qu'il ne s'agit pas de modèles, seulement des exemples

de réactions spontanées des maîtres. En effet, laissant plus d'autonomie aux élèves dans le processus d'apprentissage, l'enseignant se trouve face à plusieurs imprévus pendant la séance, ce qui peut expliquer l'apparition de ces exemples dans le recueil.

Le livre du maître de la réforme hongroise suit une structure beaucoup moins transparente : les présentations du contenu mathématique et de la mise en place pédagogique sont mixées dans un texte quasi-continu, contenant de nombreuses propositions de tâche mais souvent avec une description seulement partielle des activités. Le livre encourage les enseignants à faire une sélection, transformer, adapter les tâches ; nous avons montré que les descriptions parfois floues et partielles contiennent plutôt des consignes d'adaptation, des remarques concernant les difficultés que le maître peut rencontrer pendant la mise en place, et quelques idées de solutions possibles. La forme de présentation semble donc correspondre d'une part à l'autonomie plus grande que la réforme hongroise vise à accorder aux enseignants, d'autre part à la réflexion didactique sur la gestion des séances, dont nous avons souligné l'existence plus haut. Les difficultés à se préparer séance par séance à partir de la progression annuelle (qui n'est insérée qu'à titre d'exemple) correspondent également à l'intention des auteurs de charger les enseignants d'une responsabilité dans l'élaboration de leur progression annuelle.

En résumé, il nous semble que la forme du livre hongrois témoigne à la fois de l'intention de laisser une grande autonomie aux enseignants à tous les niveaux de leur travail, et des efforts de leur fournir de nombreux conseils et idées pour ce travail. L'autonomie des maîtres est jugée nécessaire pour la bonne qualité de l'enseignement, et notamment pour l'adaptation aux conditions particulières de chaque classe – en même temps, il ne s'agit pas d'une liberté pédagogique absolue : les réformateurs hongrois semblent avoir une conception approfondie des pratiques pédagogiques de bonne qualité, comme on pouvait constater plus haut, mais qu'ils ne l'expriment principalement qu'à travers des exemples concrets. ***Résultat de ses ambitions complexes, le livre du maître est une ressource riche mais très difficile à utiliser*** : non seulement parce qu'il laisse une grande responsabilité à la charge des enseignants, mais aussi parce que l'enseignant doit maîtriser l'ensemble du programme afin de pouvoir s'en servir pour son travail quotidien.

En ce qui concerne les manuels scolaires de l'école moyenne, la différence entre les ressources françaises et hongroises des réformes des mathématiques modernes est très apparente. ***Les manuels scolaires français présentent le contenu du programme dans une forme déclarative, et principalement axiomatique-déductive à partir de la classe de Quatrième***. ***Ils mettent un grand accent sur l'utilisation du langage formel des mathématiques, considéré comme « simple et précis ».*** La typographie des livres contribue à

la structuration forte, transparente du texte. Selon les consignes d'utilisation, le texte des manuels scolaires sert avant tout à décrire des « leçons », pour permettre aux élèves de comprendre et d'apprendre le cours ; ces leçons sont suivies d'exercices d'application et de contrôle[150]. ***Par ces traités linéaires, les manuels scolaires de l'école moyenne soutiennent la mise en place d'un contrat du type magistral*** : la transmission directe du savoir mathématique institutionnel.

Les manuels scolaires hongrois présentent par contre des dialogues fictifs des élèves pour introduire des nouveaux éléments du savoir mathématique. Selon le livre du professeur, les dialogues peuvent servir de lecture aux élèves, mais fournissent avant tout des modèles d'enseignement : les enseignants sont invités à reproduire des dialogues similaires dans leur classe. Similairement à *Jeux avec l'infini* de Rózsa Péter, la typographie des manuels est plus ludique et structure beaucoup moins le texte que celle des manuels scolaires français. Le langage utilisé dans les manuels hongrois articule langage mathématique et langage naturel, en utilisant relativement peu de langage formel. Contrairement au style « simple et précis » suivi par les manuels français, les manuels hongrois semblent avoir une autre conception sur la simplicité et la clarté du style : ***leurs textes cherchent à imiter le discours des enfants, ils ne sont pas exempts d'ambiguïtés, qu'ils élucident progressivement grâce à des formulations mathématiques plus précises. Cette forme de présentation suggère le type de contrat que nous avons nommé « découverte guidée ».***

En résumé, nous pouvons constater que la structure, le style et le contenu des ressources sont très variés en fonction des conceptions sur la nature des mathématiques à enseigner, sur le travail de l'élève et de l'enseignant. La construction des livres du maître dépend du type et du degré d'autonomie que l'auteur vise à laisser aux enseignants, et des caractéristiques des situations didactiques envisagées. Les manuels scolaires du niveau moyen utilisent un style que les auteurs considèrent propre à l'activité mathématique : formel et axiomatique-déductif, par essence écrit pour le cas de la réforme française, peu formel, dialogique, imitant l'oralité et centré sur les problèmes pour le cas hongrois. Chacun de ces manuels peut également servir comme modèle d'enseignement ; leur structure et leur style suggèrent chaque fois un certain type de contrat aux enseignants, magistral dans le cas français, « découverte guidée » dans le cas hongrois.

[150] Une exception est la collection Queyzanne-Revuz, qui intègre des activités introductives à mettre en place en classe, les distinguant du texte du cours à l'aide de codes-couleurs. En même temps, on a vu qu'il s'agit principalement d'exemples illustratifs introduisant des nouvelles notions, sans laisser une réelle autonomie aux élèves dans le processus d'apprentissage.

2 DEUX SYSTEMES COHERENTS

Suite à ce résumé de nos résultats concernant les caractéristiques des deux réformes, nous pouvons constater qu'***il s'agit de deux conceptions particulièrement cohérentes. Les caractéristiques des programmes, des pratiques pédagogiques envisagées et des ressources sont étroitement liées l'un à l'autre, et forment un tout cohérent pour chacune des deux réformes***.

L'importance accordée à la présentation des grandes structures axiomatiques et au langage moderne, dans le cas de la réforme des « mathématiques modernes » en France, correspond à un traitement axiomatique-déductif et un style formel dans les manuels scolaires. Puisque l'accent est sur la méthode axiomatique-déductive, la présentation suit un ordre déductif. Une telle présentation ne peut être qu'institutionnellement prédéfinie, et appelle ainsi assez naturellement une transmission directe du savoir institutionnel. Même si les auteurs des programmes et des manuels insistent sur l'importance d'utiliser des « méthodes actives », ces méthodes ne peuvent pas réellement vivre dans le système et laissent en tout cas peu d'autonomie aux élèves dans l'apprentissage : le contrat typique de la réforme française de 1969/70 est un contrat magistral[151].

Dans le cas hongrois, le choix des domaines mathématiques à enseigner (et particulièrement le choix de la combinatoire et des probabilités), ainsi que la relation dialectique entre ces domaines correspond aux ambitions d'initier les élèves aux processus de découverte et à la résolution des problèmes. Le double système d'exigences (thèmes expérimentés et savoir à acquérir pour chaque année) laisse une marge de manœuvre relativement grande aux enseignants pour prendre en considération la diversité personnelle des élèves. La pratique d'enseignement dialogique et un contrat « découverte guidée » correspondent bien à ces conditions. Le langage peu formel des ressources, les dialogues fictifs des manuels scolaires, les ambiguïtés des énoncés visant à provoquer des débats en classe, la forme peu figée des guides d'enseignant cherchent à soutenir un tel type d'enseignement.

Nous ne pouvons pas parler de « pedagogical flows » dans le sens de (Smith et al. 1996), car nous n'avons pas étudié des pratiques d'enseignement ordinaires, uniquement des pratiques envisagées par les réformateurs. Nous pouvons toutefois constater, conformément à l'esprit de l'approche « pedagogical flows », l'existence des interdépendances complexes

[151] Le cas des années 1970 en France semble être plus ambiguë, voir §3.

entre les différents aspects de chacun des deux systèmes d'enseignement que nous avons étudiés. Nous remarquons par ailleurs qu'il existe des recherches, postérieures à notre époque étudiée, sur les « pedagogical flows » de la France et de la Hongrie (par ex. Schmidt et al. 1996 pour la France, Andrews & Hatch 2001 pour la Hongrie), qui semblent montrer une certaine continuité par rapport à quelques caractéristiques que nous avons pu dégager. Il nous semblerait intéressant d'étudier les caractéristiques persistantes des deux réformes en analysant l'enseignement actuel de ces pays en termes de « pedagogical flow ».

En même temps, notre étude sur l'époque des mathématiques modernes ne doit pas se limiter à une simple constatation des caractéristiques didactiques des réformes mais, grâce à nos analyses concernant leur arrière-plan historique et épistémologique, nous pouvons tenter d'en fournir des explications. Nous traitons avant tout la question de l'épistémologie qui nous semble être cruciale dans le cas des réformes des mathématiques modernes.

3 L'EFFET DE L'ARRIERE-PLAN EPISTEMOLOGIQUE

Les réformes de l'époque des mathématiques modernes fournissent des exemples particulièrement intéressants pour comprendre les relations entre l'arrière-plan épistémologique et les caractéristiques de l'enseignement des mathématiques : d'une part à cause des discours très explicites sur la nature des mathématiques, d'autre part à cause de la profondeur des réformes, transformant radicalement à la fois nombreux aspects de l'enseignement de la discipline, ce qui a permis de mettre en œuvre des conceptions avec peu de compromis.

Pour comprendre le rôle de l'arrière-plan épistémologique sur la réforme hongroise et française, nous avons d'abord identifié, dans chacun des deux pays, un groupe de mathématiciens qui ont exercé une influence importante sur la réforme du pays (parie I). Ensuite (partie II), nous avons analysé des divers écrits de ces mathématiciens, pour élucider leurs conceptions sur la nature des mathématiques et sur leur enseignement.

En France, les réformateurs réfèrent explicitement à Bourbaki pour désigner la nature des « mathématiques modernes » à enseigner. Les mathématiciens qui soutiennent la réforme et parmi lesquels nous avons analysé les écrits de Dieudonné, Choquet et Lichnerowicz, propagent une conception « bourbakiste » sur la nature des mathématiques[152]. En Hongrie, il est plus difficile de désigner un tel référentiel épistémologique, nous avons toutefois identifié

[152] Qui n'est pas forcément identique à la conception de tous les membres du groupe Bourbaki, mais qui s'inspire en tout cas de l'œuvre de Bourbaki.

une communauté de mathématiciens hongrois qui ont influencé la pensée de Varga et soutenu sa réforme, et nous avons essayé de montrer qu'ils représentent une épistémologie cohérente, mais différente de la conception « bourbakiste ». Nous avons nommé cette conception « heuristique ».

Comme nous avons pu le constater, la conception « bourbakiste » considère les mathématiques comme une science par essence abstraite et déductive. Elle voit dans la méthode axiomatique-déductive, perfectionnée par Bourbaki, « la méthode » idéale, apportant la plus grande clarté et précision possible aux mathématiques, en poussant l'abstraction à l'extrême. Selon cette conception, la restructuration sur la base de la théorie des ensembles et l'élaboration du langage formel moderne font des mathématiques une science unifiée et cohérente. Bourbaki a ainsi dégagé, selon cette conception, « une voie royale » aux mathématiques : l'enseignement doit donc suivre cette voie et initier les élèves, le plus rapidement possible, aux notions et méthodes de cette « mathématique » moderne, ainsi qu'à l'utilisation de son langage moderne, porteur de la plus grande clarté et précision possibles. Un tel enseignement apportera aux élèves « une économie de pensée » significative, et servira comme formateur d'esprit universel. Pour ce qui est de la découverte en mathématique, elle nécessite, selon cette conception, une certaine intuition ; mais cette intuition créatrice est irrationnelle, et ainsi peu enseignable. La meilleure chose qui peut l'alimenter est justement la pratique de la méthode axiomatique et la « fréquentation » des objets de la recherche mathématique, c'est-à-dire, avant tout, des structures.

L'approche « heuristique » suggère en revanche que non seulement le contenu des recherches mathématiques, mais la forme et les méthodes des mathématiques suivent aussi une évolution permanente, qui va tendre vers des directions encore imprévisibles. S'inspirant des grands résultats négatifs de la recherche des fondements des mathématiques, les membres de « l'école hongroise » ne pensent guère que le langage formel et la méthode axiomatique moderne seraient la forme et la méthode idéale et ultime des mathématiques : pour eux, ils sont la résultante d'une progression répondant à certains problèmes, et l'enseignement doit guider les élèves à travers une progression similaire pour les initier à la pensée mathématique. Les mathématiques ne peuvent pas être débarrassées de leurs bases empiriques : l'intuition mathématique s'alimente de nombreuses expériences (physiques ou mentales) variées, et s'en sert pour un processus de généralisation, d'abstraction lent et progressif : l'enseignement doit donc assurer une base expérimentale suffisamment riche et variée aux élèves Selon la conception « heuristique », les mathématiques sont une activité dialogique, sociale, conduite par une dialectique de problèmes et de tentatives de solution. Cette dialectique est

partiellement rationnelle, les processus de découverte peuvent être compris, et sont ainsi enseignables. Il s'agit en même temps d'un processus créatif, ludique et plaisant, en parenté avec l'activité artistique. Pour ces mathématiciens, le caractère formateur des mathématiques consiste, certes, en la pensée critique rationnelle, mais aussi en ses méthodes de résolution de problèmes, et en son caractère ludique, élevant ainsi le goût à la recherche sur la base de la curiosité naturelle des enfants.

En comparant ces conceptions avec les caractéristiques des deux réformes, on peut constater qu'il s'agit de deux mises en place pédagogiques particulièrement cohérentes de ces deux épistémologies différentes. Le programme, les pratiques pédagogiques, ainsi que les ressources de chaque réforme sont formés en fonction de l'arrière-plan épistémologique des deux réformes.

De la même manière que Houdement et Kuzniak (2006) utilisent le terme *paradigme* dans le cas de la géométrie, intégrant à la fois croyances, valeurs, savoirs et pratiques, ***on peut dire que les deux conceptions épistémologiques remplissent, dans le cas des deux réformes étudiés, le rôle de deux paradigmes différents des mathématiques : de ce point de vue, les deux réformes constituent deux réalisations exemplaires de ces paradigmes, « bourbakiste » en France, « heuristique » en Hongrie.***

Cette réalisation cohérente d'un tel « paradigme » dans l'enseignement des mathématiques est probablement plutôt rare. Le cas du programme français de 1977 nous semble déjà un peu plus ambigu de ce point de vue. Même si certains éléments de l'épistémologie sont remis en question dans le programme ainsi que dans certains projets expérimentaux, l'épistémologie « bourbakiste » des mathématiques paraît toujours dominante : l'enjeu semble être plutôt la recherche d'un compromis pour une meilleure mise en valeur des préoccupations pédagogiques et contre la seule dominance des considérations mathématiques.

4 L'INFLUENCE DU CONTEXTE HISTORIQUE

L'arrière-plan épistémologique semble donc être un facteur central déterminant de nombreuses caractéristiques des réformes des « mathématiques modernes ». Ce fait peut découler en partie de la contribution des mathématiciens à la conception des réformes, dans chacun des deux pays étudiés. Cependant, l'analyse sur le contexte historique nous a permis de révéler une plus grande complexité de facteurs qui influencent les deux réformes, en se renforçant ou se contredisant.

Dans la partie I, nous avons montré que les deux réformes s'inscrivent dans le même mouvement international : des acteurs principaux participent aux activités des différents organismes internationaux, suivent le mouvement d'autres pays, et il existe également des interactions directes entre les réformateurs français et hongrois, surtout au début des années 1970. Plusieurs préoccupations similaires des deux réformes peuvent ainsi s'inspirer du mouvement international, comme le renouvellement des programmes, suivant l'état moderne des mathématiques et les défis socio-économiques des sociétés modernes ; ou la prise en compte des résultats de la psychologie, et la promotion des « méthodes actives » se manifestant entre autres par l'intégration des fiches de travail et des matériels manipulatoires (comme le bloc logique, le matériel Dienes ou le matériel Cuisenaire) dans l'enseignement du niveau élémentaire de tous les deux pays.

En même temps, nous avons trouvé plusieurs facteurs qui peuvent expliquer des différences entre les deux réformes. Pour ce qui concerne le rôle des mathématiciens, outre leur position épistémologique qui s'est avérée décisive quant à leur influence sur les réformes, il faut souligner aussi leur influence sur le contenu des réformes. En effet, si l'on insiste sur l'intégration des nouveaux domaines au programme dans les deux cas, ils ne sont pas toujours identiques : le plus grand accent sur l'algèbre en France, sur la logique, la combinatoire ou les probabilités en Hongrie correspond au centre d'intérêt des mathématiciens à l'arrière-plan de chaque réforme. Sur l'exemple de la géométrie, on a vu l'influence probable des traités écrits par ces mathématiciens : la réforme française semble s'inspirer du livre de Choquet (1964), alors que dans le cas de la réforme hongroise, nous avons proposé, sans toutefois être en mesure de la prouver, l'hypothèse du rôle du livre de Hajós (1960).

Une différence apparaît aussi dans la composition des acteurs dans les deux pays : la réforme française est dominée par les mathématiciens, ce qui peut contribuer à l'explication de la dominance des considérations mathématiques au détriment des questions pédagogiques dans la conception de la réforme française. Ce n'est qu'après la réforme que les expérimentations impliquant des enseignants du terrain peuvent réellement contribuer au développement de l'enseignement des mathématiques. Dans le cas hongrois par contre, malgré leur influence importante, les mathématiciens restent dans l'arrière-plan, le projet est mené dans l'institut pédagogique national et fait intervenir de nombreux enseignants dès les années 1960.

Nous avons identifié plusieurs différences dans le système scolaire qui peuvent également expliquer certaines différences. On a vu que la réforme française est marquée par plusieurs ruptures, alors que la réforme hongroise insiste sur la continuité dans l'enseignement des

mathématiques. Ce fait est sans doute lié en partie aux ruptures institutionnelles du système français (avant tout entre l'école primaire et le collège), alors que l'éducation obligatoire déroule dans le même établissement en Hongrie. Cette différence est renforcée par le fait que les enseignants français passent une année avec leurs classes, alors que les hongrois accompagnent les mêmes élèves pendant 4 ans. La réforme de Varga s'appuie fort sur cette caractéristique du système, en encourageant la planification pour plusieurs années et la construction lente, spiralée des notions, ce qui est évidemment beaucoup plus difficile dans les conditions françaises.

Un autre facteur des systèmes scolaires vient du sens des changements des systèmes scolaires. Dans les deux pays, on a vu un processus de démocratisation de l'enseignement mais qui ne s'est pas déroulé au même rythme. En France, l'enjeu des années 1960 et 1970 est l'élimination progressive des deux ordres d'enseignement et la création du « collège unique » : la réforme des mathématiques modernes arrive au milieu de ce processus, quand les programmes du collège sont déjà unifiés mais l'enseignement se déroule encore dans différents types d'établissements. L'abstraction et le langage formel des mathématiques peuvent alors apparaître comme éléments unificateurs qui assurent l'accès de tous les élèves au même enseignement, indépendamment de leur origine géographique et sociale. La pensée abstraite considérée comme caractéristique de l'élite, l'enseignement des mathématiques abstraites pour tous les élèves peut être considéré comme un geste de démocratisation. Des recherches historiques soulignent en effet qu'une des difficultés de l'introduction de la réforme était justement la formation et la culture différente des deux anciens « ordres » d'enseignement, et la résistance des anciens enseignants de « l'ordre primaire » (d'Enfert & Gispert 2011).

En Hongrie par contre, « l'általános iskola », l'établissement scolaire unique et obligatoire de 8 ans était créé dès 1946, et le système scolaire hongrois a vécu dans les décennies suivantes une forte régulation centralisée, imposant le même programme strictement défini pour tout le monde. À partir de la fin des années 1960, l'enjeu est plutôt une libéralisation lente et prudente du système. La réforme de Varga est pionnière de ce processus (Báthory 2001), insistant sur l'autonomie des enseignants et sur la prise en considération de la diversité des élèves : nous avons pu observer l'effet de ces préoccupations sur la conception du programme et des pratiques pédagogiques de sa réforme. Ce statut pionnier signifie cependant que la réforme arrive dans un système scolaire encore assez autocratique et régularisé : plusieurs remarques de Varga (par exemple sur la fonction éducative de l'enseignement des probabilités) confirment que la réforme a rencontré une résistance importante de ce point de

vue. De plus, dans un régime communiste, la « démocratisation » a porté un sens différent qu'en France : au lieu de diffuser plus largement une culture d'« élite », il s'agit plutôt de propager la culture de classes ouvrières et paysannes. L'accès de tous aux mathématiques est moins lié dans ce cas à l'abstraction qu'à une approche concrète et empirique.

Nous soulignons enfin des différences entre la dynamique des deux réformes, liées, au moins en partie, à la différence des systèmes politiques de l'époque. La réforme française mobilise de nombreux acteurs de différents arrière-plans, diverses institutions contribuent au discours autour de la réforme, et génèrent de vifs débats. Le déroulement de la réforme est en même temps relativement rapide, avec une période d'expérimentation courte. La réforme hongroise suit une dynamique beaucoup plus lente, les expérimentations s'étendent sur plus d'une décennie, les débats semblent par contre se limiter à un nombre plus réduit d'intervenants, sous un contrôle plus fort de l'État. La plus grande harmonie entre préoccupations mathématiques et pédagogiques dans le cas hongrois peut être, en partie, conséquence de la période d'expérimentation plus longue. La réforme française des « mathématiques modernes » comporte plus de tensions entre ces préoccupations, les débats étendus autour de la réforme permettent en même temps de lancer une dynamique de recherche et d'expérimentation dans les années 1970, contribuant, au-delà de la révision de la réforme, à l'émergence d'une culture de recherche didactique.

Pour conclure cette analyse, la comparaison de ces deux réformes semble fournir un exemple très parlant des voies d'influences complexes entre différents éléments du contexte politique, socio-économique, culturel et scientifique de l'enseignement des mathématiques dans un pays. Ces éléments influencent la conception des réformes mais aussi leur réception, les perspectives et limites de réalisation.

5 LA REFORME DE VARGA ET LA DEMARCHE D'INVESTIGATION

Nous complétons notre conclusion avec deux remarques. Nous rappelons premièrement que nous avons commencé l'introduction par mentionner que l'œuvre de Varga est souvent décrite comme une approche « faisant découvrir des mathématiques » aux élèves, et mettant l'accent sur la « résolution des problèmes ». Nos analyses ont en effet permis de montrer le rôle central des problèmes et des processus de découverte mathématique dans la conception de Varga.

Les questions concernant la résolution des problèmes, des démarches d'investigation ou « l'inquiry based teaching » apparaissent non seulement dans les préoccupations politiques et dans de nombreuses initiatives pédagogiques au niveau international, mais aussi dans des recherches didactiques récentes. Nous n'avons pas pu, dans le cadre de la thèse, procéder à une étude systématique des recherches existantes sur ce sujet pour y situer l'œuvre de Varga ; seulement à titre d'exemple[153], nous nous référons à un article synthétique d'Artigue et Blomhøj (2013). Cherchant une conceptualisation de la notion de « l'inquiry based mathematics education » (IBME), les auteurs parcourent différentes théories didactiques existantes pour comprendre ce que chacune d'elles apporte à une telle conceptualisation : la Théorie des Situations Didactiques et la notion de PER introduite dans le cadre de la Théorie Anthropologique de la Didactique, pour ce qui concerne la tradition française ; l'approche néerlandaise « Realistic Mathematics Education » dérivant de l'œuvre de Freudenthal ; l'approche « Problem Solving », s'appuyant sur l'œuvre de Pólya et de Schoenfeld ; des approches mettant l'accent sur la modélisation ou sur le dialogue. Au-delà des liens historiques directs avec certaines de ces approches[154], la simple évocation de cette liste, soulignant des aspects comme les liens avec le monde réel, la résolution des problèmes ou le dialogue, permet de percevoir une certaine parenté conceptuelle de la réforme de Varga avec ce champ théorique. Il nous semblerait donc intéressant d'essayer de situer l'œuvre de Varga dans ce contexte, en espérant aussi que l'analyse de sa réforme puisse contribuer aux essais de théorisation de l'IBME. Ce travail reste une des perspectives de notre thèse ; à cet endroit, nous insistons seulement sur quelques résultats de notre analyse qui nous paraissent pertinents du point de vue d'un tel travail de conceptualisation.

(1) Notre approche systémique a montré des interdépendances fortes entre arrière-plan épistémologique, programme et pratiques. Une des particularités de l'œuvre de Varga, du point de vue de « l'inquiry based teaching » est le fait qu'un programme intégral était conçu sous cette approche : on a vu que des choix de thèmes et d'organisation du programme sont en lien étroit avec des pratiques visant la démarche d'investigation. D'autre part, nous avons trouvé derrière cette réforme une épistémologie « heuristique » conséquente. L'exemple de la réforme de Varga nous semble montrer que l'intégration des activités de résolution de problèmes ou de démarches d'investigation dans l'enseignement n'est pas seulement une

[153] Parmi les recherches existant en France, nous mentionnons l'exemple de deux thèses récentes, celles de Gardes (2013) et de Moulin (2014).

[154] Notamment avec Pólya et avec Freudenthal : en ce qui concerne ce dernier, Varga et Freudenthal reconnaissent mutuellement la parenté de leurs approches, développées indépendamment à l'origine, mais en dialogue à partir des années 1970 (Varga 1975 p 41).

question de mise en place ponctuelle des pratiques d'enseignement, mais nécessite aussi probablement une réflexion globale sur l'ensemble du programme et sur la nature des mathématiques à enseigner.

(2) Dans le contrat du type « découverte guidée », caractéristique de la conception de Varga, la gestion des dialogues semble jouer un rôle cruciale. Les nombreux petits conseils concernant ce sujet, que nous avons pu repérer dans les ressources écrites par l'équipe de Varga, donnent effectivement l'impression de l'existence des réflexions didactiques approfondies à l'arrière-plan, mais elles sont toujours présentées sur les exemples concrets, sans être résumées ou généralisées. Il nous semblerait pertinent d'essayer de décrire les principes de cette pratique dialogique.

(3) Nos analyses ont révélé un autre élément principal du travail envisagé de l'enseignant dans l'approche de Varga : l'importance d'un travail de préparation sur un plus long terme, et la conception notamment des « séries de problèmes ». L'activité de résolution des problèmes ne se limite pas, dans la réforme de Varga, au traitement des problèmes isolés, les nouvelles notions et méthodes émergent plutôt au cours d'un processus plus long, passant à travers tout un ensemble de problèmes convenablement mis en ordre. Outre la pratique dialogique, ce sont des séries de problèmes bien construites qui semblent assurer l'équilibre entre la nature ouverte des processus de découverte et l'émergence de l'apprentissage attendu. Il nous semblerait donc intéressant d'étudier plus systématiquement les principes organisateurs de ces séries.

6 UNE REMARQUE SUR LES THEORIES DIDACTIQUES

Dans l'introduction, nous avons soulevé le problème de la transmissibilité des théories didactiques dans des contextes différents de celui dans et pour lequel elles étaient conçues. Notre thèse peut être de ce point de vue perçue comme une sorte d'expérience : nous avons essayé d'utiliser la Théorie des Situations Didactiques sur une étude comparative entre la France et un autre pays, concernant en plus l'enseignement de l'époque dans laquelle la théorie était conçue. En effet, nous avons pu adopter un regard double sur l'œuvre de Brousseau grâce à l'article de celui-ci sur l'enseignement des probabilités : en plus de nous servir d'outil théorique pour nos analyses didactiques, le contexte d'émergence de la théorie est devenu, dans une certaine mesure, objet de notre étude historique. La TSD nous semble être profondément liée à son contexte particulier, notamment à la dynamique du mouvement

des mathématiques modernes et sa critique en France, à l'émergence des IREM et de la recherche didactique française. Le point de départ constructiviste, la théorisation des situations, la conception de la *situation adidactique*, cherchant à laisser une réelle autonomie aux élèves dans la construction de leurs connaissances, ou l'accent mis sur les phases de *dévolution* et d'*institutionnalisation* pour assurer l'acquisition du savoir mathématique institutionnel : ces caractéristiques de la théorie nous semblent chercher à répondre, à un niveau théorique, aux discours français de l'époque sur l'enseignement des mathématiques.

Lors de la comparaison franco-hongroise, il nous semblait plus facile à caractériser les ressources françaises que celles hongroises avec les termes de cette théorie. Si dans les exemples français il était relativement facile à repérer l'existence (ou l'absence) des situations du type adidactique, comprenant (ou pas) un milieu antagoniste, la pratique dialogique de la conception de Varga a paru moins évidente à caractériser avec ses termes, à cause des interactions permanentes entre la classe et l'enseignant, et la transformation progressive du milieu. Le statut apparemment différent des « connaissances » et « savoirs » dans les deux conceptions ; le rôle des situations fondamentales et de l'institutionnalisation dans la TSD, en même temps la rareté des phases d'institutionnalisation et l'importance de l'enchaînement des problèmes chez Varga, constituent également des difficultés pour l'application de la TSD au contexte hongrois.

L'expérience nous paraît pourtant fructueuse. D'une part, malgré les limites décrites ci-dessus, la TSD nous a servi d'outil très efficace pour nos analyses, avant tout grâce aux notions de *potentiel d'adidacticité*, *contrat didactique*, et *milieu*[155]. D'autre part, une réflexion sur les difficultés d'adaptation des notions de la TSD nous a aidée, justement, à révéler certaines caractéristiques particulières de la conception de Varga.

Des « expériences » similaires sont menées dans le cadre des recherches didactiques récentes : par exemple, un des points de départ du projet « Networking theories » est justement la diversité de l'arrière-plan culturel des théories didactiques européennes (Bikner-Ahsbahs & Prediger 2014 p. 5). Cette approche nous fournit un nouvel argument pour soutenir l'actualité d'une théorisation mieux développée de la conception de Varga, qui permettrait de l'intégrer dans le champ des recherches didactiques européennes. Nous mentionnons en même temps une différence par rapport au projet « Networking theories » : ce dernier projet analyse les mêmes situations du point de vue de plusieurs différentes théories, alors que nous avons comparé des situations créées par chaque concepteur et nous avons

[155] Sans doute pas indépendamment de l'arrière-plan partiellement constructiviste des deux conceptions et ainsi, de l'arrière-plan historique *international, commun* pour l'œuvre de Brousseau et de Varga !

étudié comment leur arrière-plan conceptuel influence la création des situations d'enseignement.

7 PERSPECTIVES

L'ambition de cette thèse était de fournir un aperçu transversal sur les deux réformes : nous avons essayé d'embrasser différents niveaux scolaires, différents domaines mathématiques, différents aspects de l'enseignement, et nous avons également adopté une méthodologie pluridisciplinaire pour cette étude. Une telle approche se heurte inévitablement de nombreuses limites, et ne peut pas approfondir tous les aspects abordés. Nous essayons ici de résumer quelques pistes, en forme de perspectives de recherche, que nous avons choisi de ne pas élaborer dans le cadre de la thèse ou qui ont émergé au cours de l'étude, et qui nous paraissent les plus pertinentes pour une analyse ultérieure. Nous les structurons selon deux catégories : nous abordons d'abord les perspectives en histoire, ensuite en didactique des mathématiques.

7.1 Perspectives en histoire de l'enseignement des mathématiques

(1) Nous avons signalé précédemment certaines limites de notre méthodologie de l'analyse historique, utilisant principalement des recherches d'histoire institutionnelle dans le cas français et s'appuyant beaucoup sur des mémoires personnelles dans le cas hongrois : la diversification des approches et l'élargissement des types de sources pourraient probablement mieux éclaircir les facteurs influençant des réformes. Nous insistons ici sur un point que nous n'avons abordé que superficiellement mais qui s'avère intéressant pour des futures recherches historiques : notamment l'influence de la psychologie sur les réformes des « mathématiques modernes ». Si le rôle de Piaget est souvent souligné dans les études historiques, le cas de Varga semble être plus complexe de ce point de vue, intégrant apparemment l'influence de Karácsony, des psychologues russes et hongroises au-delà de Piaget : une étude systématique de ces différentes voies d'influence permettrait probablement de mieux clarifier les caractéristiques de sa réforme. Enfin, il nous semblerait particulièrement éclairant d'étudier systématiquement la réception des deux réformes : une telle étude aiderait à mieux comprendre les contraintes constitués par leur contexte social, politique et institutionnel (cf. d'Enfert & Gispert 2011).

(2) Au-delà de l'approfondissement de l'étude des réformes des « mathématiques modernes » en France et en Hongrie, plusieurs types d'ouverture nous sembleraient

intéressants. Premièrement un élargissement au niveau du temps : nous avons brièvement abordé des liens entre les réformes du début du 20e siècle et celles des mathématiques modernes. Ces liens sont mieux mises à jour pour le cas français (par ex. Gispert & Schubring 2011, Barbazo & Pombourcq 2010), beaucoup moins pour la Hongrie, mais les références que nous avons trouvé dans les écrits de Varga, de Péter et de Kalmár à l'œuvre des mathématiciens du début du 20e siècle, à M. Beke, à L. Fejér ou encore à F. Klein, laissent supposer une certaine continuité entre l'enseignement des mathématiques des deux époques, qui mériterait une étude plus approfondie – d'autant plus qu'elle permettrait probablement de révéler des liens de l'enseignement hongrois avec la culture mathématique allemande. De l'autre côté, un élargissement de l'étude sur les périodes plus contemporaines serait évidemment intéressant, et permettrait de mieux comprendre l'influence des réformes des « mathématiques modernes » sur l'enseignement actuel des mathématiques.

(3) Un autre type d'élargissement possible concerne le nombre de pays étudiés. Comme nous l'avons signalé précédemment, le mouvement de réforme international des « mathématiques modernes » est souvent interprété dans le contexte de la guerre froide, et cette interprétation laisserait supposer l'existence de deux mouvements parallèles dans le « bloc de l'Ouest » et dans le « bloc de l'Est ». L'étude des cas de la Hongrie et de la France semble cependant démentir une telle hypothèse : l'influence du « bloc de l'Est » ne semble pas être dominante dans le cas de la Hongrie, les réformateurs hongrois participent aux mêmes organismes internationaux que les français, et nous avons même trouvé des traces de collaborations directes entre les deux pays. Il nous paraît intéressant d'étendre l'étude sur un plus grand nombre de pays et étudier des voies de circulation des idées au sein et entre les deux « blocs » : une telle étude permettrait probablement de mieux situer le mouvement de réforme dans son contexte politique international.

7.2 Perspectives en didactique des mathématiques

Après ces quelques pistes historiques, nous proposons quelques perspectives dans le domaine de la didactique des mathématiques. Les voies d'ouverture possibles y sont probablement encore plus diverses. Il est possible (1) d'approfondir l'étude par exemple concernant l'enseignement d'un des domaines mathématiques que nous avons traité. De ce point de vue, avant tout les domaines de la combinatoire et des probabilités semblent être pertinents qui sont récemment objets d'un intérêt croissant des recherches didactiques (Batanero 2015).

(2) Une autre piste possible concerne les questions sémiotiques. Bien qu'elles n'aient pas été au centre de notre étude, nous avons pu constater l'importance particulière accordée aux différents outils de représentation (tableaux, arbres, droite numérique etc.) dans les réformes des « mathématiques modernes ». Il nous semblerait intéressant d'approfondir leur analyse, en situant l'aspect sémiotique par rapport aux autres aspects que nous avons étudié : la nature des liens entre les différents domaines mathématiques dans le programme, le rôle accordé à l'intuition et au raisonnement déductif, ou encore les caractéristiques langagières et stylistiques des manuels scolaires. Parmi des nombreux outils théoriques construits en didactiques des mathématiques pour étudier l'aspect sémiotique de l'enseignement, nous mentionnons, à titre d'exemple, les *espaces de travail mathématiques* (Houdement & Kuzniak 2006, Kuzniak 2011), un outil construit sur les bases de la notion des paradigmes et qui permet d'articuler les aspects sémiotiques avec les aspects instrumentaux et discursifs du travail mathématique.

(3) Une des perspectives qui nous paraisse la plus prometteuse, et que nous avons évoquée déjà dans nos conclusions, concerne les pratiques pédagogiques, et tout particulièrement les liens conceptuels de la réforme de Varga avec le courant de « l'inquiry based mathematics education ». Une telle recherche nécessiterait d'une part à étudier systématiquement des différentes approches théoriques concernant l'IBME, y compris des développements contemporains de l'approche « problem solving », du « Realistic Mathematics Education », des approches dialogiques, des PER et autres pratiques existantes de démarches d'investigation, pour pouvoir situer la conception de Varga dans ce contexte. D'autre part, pour une caractérisation plus approfondie de l'approche de Varga, il nous semble nécessaire de dépasser désormais l'étude des ressources écrites et officielles, et de se tourner vers les pratiques réelles des enseignants. Pour ne pas trop s'éloigner de l'approche de Varga, il serait possible d'étudier, dans une première étape, les pratiques de quelques enseignants qui se déclarent disciples de Varga ou qui sont reconnus comme « maîtres » d'un enseignement du type « heuristique » par la communauté. (Une autre question peut être la diffusion de ces pratiques et leur adaptation par les enseignants ordinaires, mais qui demanderait probablement une étude sur une plus grande échelle.)

L'analyse des documents de la réforme hongroise a permis de dégager deux principaux éléments des pratiques d'enseignement envisagées dans l'approche de Varga : d'une part, la gestion des dialogues en classe, d'autre part la conception des « séries de problèmes » qui organisent des processus d'enseignement plus longs. Il nous semble essentiel de prévoir, et ce sera une de nos priorités, une recherche ultérieure sur les pratiques d'enseignement. Celle-ci

pourra être conçue en tenant compte de nos résultats, et en se concentrant sur ces deux aspects. Pour le premier aspect, une analyse des discours en classe semble être adéquate, à l'aide des enregistrements vidéo. Pour le deuxième aspect, c'est une étude de la documentation personnelle des enseignants qui nous semble pertinent. De telles recherches nécessiteraient évidemment l'utilisation et l'exploration de méthodologies nouvelles par rapport à celle adopté dans notre thèse. Ce point reste à explorer, mais à titre d'exemple, nous pouvons mentionner l'approche discursive (Sfard 2015) et la double approche (Robert & Rogalski 2002) pour le premier aspect, et l'approche documentaire (Gueudet & Trouche 2010) pour le deuxième, qui nous semblent potentiellement pertinentes pour des telles analyses.

(4) En ce qui concerne la construction des processus d'enseignement longs, nous avons pu comparer la conception de Varga à celle de Brousseau. Les différences que nous avons pu observer (cf. §1.2.2) mériteraient probablement une étude plus approfondie : dans le cas de Brousseau, il semble nécessaire de prendre en considération son ingénierie sur l'enseignement des nombres rationnels (cf. Margolinas 2004 p. 34 et Brousseau 2014 p. 167), et concernant Varga, d'étudier un plus grand nombre d'exemples de processus longs qu'il a conçu.

(5) Une des questions de notre recherche concernait l'influence du contexte culturel sur les caractéristiques de l'enseignement des mathématiques. Nous avons mené une étude de cas sur cette question, en étudiant la réforme des « mathématiques modernes » en Hongrie et en France. Il serait possible d'approfondir ce type d'étude, notamment en étudiant des reprises de ces deux réformes dans d'autres contextes. La réforme française a influencé des réformes de nombreux autres pays, mais la réforme de Varga a également inspiré quelques initiatives d'autres pays, il existe par exemple une « Association Varga-Neményi » en Finlande , dont les membres, enseignants de l'école élémentaire, adaptent actuellement les fiches et activités de la réforme hongroise au contexte finnois[156]. L'étude de ces reprises et adaptations pourrait contribuer à mieux comprendre les possibilités et limites de la transmission des conceptions d'enseignement des mathématiques d'un contexte à l'autre.

(6) Nous revenons finalement sur un des motifs originaux de notre recherche, notamment sur la question des besoins de formation pour les enseignants dans le cadre de la transmission d'une « tradition d'enseignement » que la communauté juge importante à maintenir. Lors de l'analyse didactique des réformes, nous avons pu constater en effet que la nature du travail attendu des enseignants est étroitement liée à la construction des ressources destinées aux

[156] http://varganemenyi.fi/ (dernière consultation le 13 octobre 2015)

enseignants ainsi qu'à d'autres caractéristiques d'un système d'enseignement. Tout particulièrement, la conception des ressources est fonction des conceptions sur les pratiques pédagogiques optimales, sur les responsabilités et l'autonomie de l'enseignant aux différents niveaux de son travail. Questions de formation et questions de ressources sont ici liées ; nos analyses nous poussent à constater, avant tout, qu'il n'y a probablement pas de règle générale, il est nécessaire à concevoir des formations et des ressources destinées aux enseignants en fonction des types de pratiques qu'on attend d'eux. Une telle recherche doit donc être liée à l'étude des pratiques d'enseignement, évoquée plus haut, et doit s'inscrire en même temps dans des courants de recherche concernant des ressources et de la formation des enseignants.

BIBLIOGRAPHIE

1 Références générales

Andrews, P. & Hatch, G. (2001). Hungary and its caracteristic pedagogical flow. In J. Winter (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics,* 21(2), 26-40. Consulté sur http://www.bsrlm.org.uk/informalproceedings.html

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique de la didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parzysz, M.-H. Salin (Eds.) *Actes de la 9e école d'été de didactique des mathématiques* (pp.101–139). Houlgate : IUFM de Caen.

Artigue M., Houdement C. (2007). Problem Solving in France: Research and Curricular Perspectives. *ZDM*, *The International Journal on Mathematics Education,* 39(5-6), 365-382.

Artigue M. – Blomhøj M. (2013). Conceptualising inquiry based education in mathematics, *ZDM*. 45(6) 797-810.

Balogh, M. (Décembre 2013) *Varga Domokos, az « abszolút pedagógus »*. Présenté au séminaire du Magyar Pedagógiai Társaság sur l'œuvre pédagogique des frères Varg(h)a. http://pedagogiai-tarsasag.hu/?p=3913

Barbazo, E. & Pombourcq, P. (2010*). Cent ans d'APMEP*. Brochure APMEP, n°192.

Batanero, C. (Février 2015). *Understanding randomness. Challenges for research and teaching*. Conférence présentée au colloque CERME9, Prague, République Tchèque (à paraître dans les actes du colloque).

Báthory, Z. (2001). *Maratoni reform. A magyar közoktatás reformjának története, 1972-2000.* Budapest : Önkonet.

Békés, V. (Ed.) (2004). *A kreativitás mintázatai*. Collection Recepció és kreativitás. Budapest : Áron Kiadó.

Belhoste, B., Gispert, H. & Hulin, N. (Eds.) (1996). *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*. Paris : Vuibert & INRP.

Bessot, A. (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In. C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F.

Vandebrouck & F. Wozniak, *En amont et en aval des ingénieries didactiques. 15e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 29-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bibliographie de Tamás Varga (1982). *Matematikai Lapok*. 30(1-3) pp. 5-7.

Bikner-Ahsbahs, A. & Prediger, S. (Eds.) (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. Springer.

Bishop, M.-F., d'Enfert, R., Dorison, C. & Kahn, P. (2011). Réformes du système éducatif et rénovation pédagogique dans les années 1960 : le cas des classes de transition. In d'Enfert & Kahn (2011) pp. 99-120.

Bkouche, R., Charlot, B. & Rouche, N. (1991). *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*. Paris : Armand Colin.

Bolon, J. (2012). L'ouverture de l'APMEP à l'enseignement élémentaire. *Bulletin de l'APMEP*, 499, 298-305. Consulté sur http://www.apmep.fr/L-ouverture-de-l-APMEP-a-l

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*. (Cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal.) Consulté sur http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/

Brousseau G. (1998). *La théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2012). Des dispositifs d'apprentissage aux situations didactiques en Mathématiques. *Éducation et didactique*, 6(2), 101-127.

Brousseau, G. (2014). Didactic Situations in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 163-170). Dordrecht : Springer.

Carranza, P. & Kuzniak, A. (2008). Duality of probability and statistics teaching in French education. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education.* Actes de l'ICMI Study 18 et du 2008 IASE Round Table Conference. Consulté sur http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=Joint_ICMI-IASE_Study_2008

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 30(3), 317-366.

Chevallard, Y. (1980). Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixante. *Recherches*, 41, 71-99. Consulté sur http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=99

Chevallard, Yves (2002a). Organiser l'étude : 1. Structures & fonctions. In J.-L Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R Floris (Eds.), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001)* (pp. 3-32). Grenoble: La Pensée Sauvage. Consulté sur http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=52

Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. In J.-L Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R Floris (Eds.), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001)* (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage. Consulté sur http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53

Clarke, D. (Février 2015). *The role of comparison in the construction and deconstruction of boundaries*. Présenté au colloque CERME9, Prague, République Tchèque (à paraître dans les actes du colloque).

Corry, L. (2001). The Origins of Eternal Truth in Modern Mathematics: Hilbert to Bourbaki and Beyond. Consulté sur http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/truth.html

Császár, Á. (1977). Péter Rózsa. *Matematikai Lapok*, 25(3-4), 257-258.

Császár, Á. (1993). Varga Tamás élő matematikája. *Matematikatanár-képzés, matematikatanár-továbbképzés* 1 (pp. 7-15). Budapest : Calibra.

Douady, R. (1986). Jeux des cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31.

d'Enfert, R. (2010). Mathématiques modernes et méthodes actives : les ambitions réformatrices des professeurs de mathématiques du secondaire sous la Quatrième République. In d'Enfert & Kahn 2010, pp. 115-130.

d'Enfert, R. (2011). Une réforme ambiguë : l'introduction des « mathématiques modernes » à l'école élémentaire (1960-1970). In d'Enfert & Kahn 2011, pp. 53-74.

d'Enfert, R. & Gispert, H. (2011). Une réforme à l'épreuve des réalités: le cas des mathématiques modernes au tournant des années 1970. *Histoire de l'Éducation*, 131, 27–49.

d'Enfert R. & Kahn P. (Eds.) (2010). *En attendant la réforme. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Quatrième République*. Grenoble : Presses universitaires de Grenoble.

d'Enfert R. & Kahn P. (Eds.) (2011). *Le temps des réformes. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Cinquième République (années 1960)*. Grenoble : Presses universitaires de Grenoble.

Frank, T. (2011). Teaching and Learning Science in Hungary, 1867–1945: Schools, Personalities, Influences. *Science & Education*, 21(3), 355-380.

Gáll, Gy. (2004). Béla Kerékjártó (A biographical sketch). *Teaching Mathematics and Computer Science*, 2(2), 231-263.

Gallai, T. & Péter, R. (1949). *Matematika a középiskolák I. osztálya számára.* Budapest : Tankönyvkiadó.

Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon.

Gergely, A. (Ed.) (2003). *Magyarország története a 19. században.* Budapest : Osiris.

Gispert, H. (2008). *L'enseignement des mathématiques au XXe siècle dans le contexte français*. http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Gispert08-reformes/Gispert08.htm

Gispert, H. (2010). Rénover l'enseignement des mathématiques, la dynamique internationale des années 1950. In d'Enfert & Kahn 2010, pp. 131-144

Gispert, H. & Schubring, G. (2011). Societal, Structural, and Conceptual Changes in Mathematics Teaching: Reform Processes in France and Germany over the Twentieth Century and the International Dynamics. *Science in Context*, 24(1), 73–106.

Gispert, H. (2014). Mathematics education in France: 1800-1980. In A. Karp & G. Schubring 2014 pp. 229-240.

Gordon Győri, J., Halmos, M., Munkácsy, K. & Pálfalvi, J. (Eds.) (2007). *A matematikatanítás mestersége – mestertanárok a matematikatanításról*. Budapest, Gondolat.

Gosztonyi, K. (2012). *Mathematical culture and mathematics education in Hungary in the XXth century*. Papier présenté au premier colloque intitulé Mathematical Cultures à Londres en septembre 2012. (À paraitre dans B. Larvor (Ed.), *Mathematical Cultures*. Springer)

Gosztonyi, K. (2014). Séries de problèmes. L'exemple des *Jeux avec l'infini* de Rózsa Péter. *Bulletin de l'APMEP*, 507, 25-31.

Gosztonyi, K. (2015). Séries de problèmes dans une tradition d'enseignement des mathématiques en Hongrie au 20e siècle. In. A. Bernard (Ed.), *Les séries de problèmes, un genre au carrefour des cultures*. EDP sciences: SHS Web of Conferences (à paraître).

Gueudet, G., & Trouche, L. (Eds.) (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Paideia. Presses Universitaires de Rennes / INRP.

Gurka, D. (2001). Kalmár László szerepe Lakatos Imre matematikafilozófiájának alakulásában. In *Recepció és kreativitás*. Consulté sur http://www.phil-inst.hu/recepcio/htm/3/310_belso.htm

Henry, M. (2009). Émergence de la probabilité et enseignement. Définition classique, approche fréquentiste et modélisation. *Repères IREM*, 74, 67-89.

Hersant, M. & Perrin-Glorian M.-J. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 23(2), 217-276.

Hersant, M. (2004). Caractérisation d'une pratique d'enseignement, le cours dialogué, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 4(2), 241-258.

Hersch, R., & John-Steiner, V. (1993). A Visit to Hungarian Mathematics, *The Mathematical Intelligencer*, 15(2), 13-26.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-195.

Houzel, C. (2004). Le rôle de Bourbaki dans les mathématiques du 20e siècle. *SMF Gazette*, 100, 52-63.

Kántor-Varga, T. (2006). *Biographies*. In Horváth János ed., *A Panorama of Hungarian Mathematics in the Twentieth Century*. Bolyai Society Mathematical Studies 14 (pp. 563-608). Budapest Berlin [etc.] : János Bolyai Mathematical Society Springer-Verlag.

Kántor-Varga, T. & Schubring, G. (2008). *Emanuel Beke*. Consulté sur http://www.icmihistory.unito.it/portrait/beke.php

Kardos, J. & Kornidesz, M. (1990). *Dokumentumok a magyar oktatáspolitika történetéből II. (1954-1972)*. Budapest : Tankönyvkiadó.

Karp, A. & Schubring, G. (Eds.) (2014). *Handbook on the history of mathematics education*, New York : Springer.

Katona, Gy. & Tusnády, G. (1970). Rényi Alfréd pedagógiai munkássága. *Matematikai Lapok*, 21(3-4), 243-244.

Kilpatrick, J. (2012). The new math as an international phenomenon. *ZDM*, *The International Journal on Mathematics Education*, 44(4), 563-571.

Klein, S. (1980). *A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata*. Budapest : Akadémiai Kiadó

Kontra, Gy. (1992). *Karácsony Sándor*. Budapest : Országos Pedagógiai Könyvtár és Múzeum.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.

Lamassé, S. (2014). Relationships between French « Practical Arithmetics » and Teaching ? In. A. Bernard & C. Proust (Eds.), *Scientific Sources and Teaching Contexts Throughout History : Problems and Perspectives* (pp. 125-154). Dordrecht : Springer.

Le miracle hongrois (2009). *Tangente*, 126, 10-26.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du* vrai et du faux *dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances – Analyse de l'activité du professeur. In J-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 141-156). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques*. HDR, Université de Provence - Aix-Marseille I.

Mashaal, M. (2002). *Bourbaki, une société secrète des mathématiciens*. Paris : Pour la science.

Máté, A. (2006). Árpád Szabó and Imre Lakatos, or the relation between history and philosophy of mathematics. *Perspectives on Science,* 14(3), 282-301.

Máté, A. (2008). Kalmár László és Péter Rózsa – matematikusok a filozófiáról. In P. G. Szabó (Ed.), *Kalmárium II* (pp. 56-71). Szeged : Polygon.

Molnár, L. & Zsidi, V. (2006). *Magyarországi világi felsőoktatási intézmények a kezdetektől 1945/1948-ig*. Budapest : Magyar Felsőoktatási Levéltári Szövetség.

Moulin, M. (2014). *Inscription du récit dans le milieu en résolution de problèmes de mathématiques*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon.

Németh, A. & Pukánszky, B. (1996). *Neveléstörténet*. Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó.

Paumier, A.-S. (2014). *Laurent Schwarz et la vie collective des mathématiques*. Thèse de doctorat, Uniersité Paris 6.

Pálfalvi, J. (2000). *Matematika didaktikusan*. Budapest : Typotex.

Pálfalvi, J. (2007). Egy szép példa Varga Tamástól. In M. Halmos, & J. Pálfalvi (Eds.), *Matematikatanár-képzés – matematikatanár-továbbképzés* (pp. 3-4). Budapest : Nyitott Könyvműhely.

Palló, G. (Ed.) (2004). *A honi Kopernikusz-recepciótól a magyar Nobel-díjakig*. Collection Recepció és kreativitás. Budapest : Áron Kiadó.

Parzysz, B. (1997). Les probabilités et la statistique dans le secondaire d'hier à aujourd'hui. M. Henry (Ed.), *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 17–38). APMEP / ADIREM.

Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de didactique et des sciences cognitives*, 16, 127-147.

Pelay N. (2011). *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard – Lyon 1.

Pintér, K. (2012). *A matematikai problémamegoldás és problémaalkotás tanításáról*. Thèse de doctorat, Université de Szeged.

Popper, K. (1997). *A tudományos kutatás logikája*. Budapest: Európa Könyvkiadó. (Originalement publié sous le titre *Logik der Forschung*. Vienne : Springer 1934)

Prékopa, A., Kiss, E., Staar, Gy., & Szenthe, J. (2004). *Bolyai-emlékönyv*. Budapest : Vincze Kiadó.

Radtka, C. (2014). *Construire la société scientifique par l'école. Angleterre, France et Pologne au prisme des manuels de sciences pour les élèves ordinaires (1950-2000)*. Thèse de doctorat, Centre Alexandre Koyré.

Rényi, Zs. (2013). *Dialógusok egy matematikusról*. Szeged : Polygon

Revuz, André (1996). La prise de conscience bourbakiste, 1930-1960. In. Belhoste-Gispert-Hulin eds. *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*. Vuibert & INRP, Paris pp. 69-76.

Robert, A. & Rogalsky, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies),* 2 (4), 505-528.

Romsics, I. (2010). *Magyarország története a XX. században.* Budapest : Osiris.

Savoye, A. (2010). Réforme pédagogique, réforme disciplinaire:l'expérience des Classes nouvelles dans l'enseignement du second degré (1945-1952). In d'Enfert & Kahn 2010, pp. 51-64.

Scharnitzky, T., & Török, T., (2002). Emlékek Varga Tamásról. In M. Halmos, M & J. Pálfalvi (Eds.), *Matematikatanár-képzés – matematikatanár-továbbképzés* 6 (pp. 3-8). Budapest : Műszaki Könyvkiadó.

Schmidt, W., Jorde, D., Cogan, L.S., Barrier, E., Gonzalo, I., Moser, U., … Wolfe, R.G. (1996). *Characterising Pedagogical Flow*. Dordrecht : Kluwer.

Sfard, A. (2015). Partcipationiste discourse on mathematics learning. In. D. Butlen, I. Bloch, M. Bosch, C. Chambris, G. Cirade, …, C. Mangiante-Orsola (Eds.), *Actes de la 17e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 79-96). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Szabó, M. (2013). Karácsony Sándor nyelvfelfogásának hatása Kalmár László korai matematikafilozófiájára. In Zvolenszky et al. (Eds.), *Nehogy érvgyűlölők legyünk. Tanulmánykötet Máté András 60. születésnapjára* (pp. 164-173). Budapest : L'Harmattan.

Szabó, P. G. (Ed.) (2005). *Kalmárium.* Szeged : Polygon.

Szalay, M. & Urbán, J. (1980). Surányi János matematikai munkássága. *Matematikai Lapok*, 28(1-3), 101-119.

Szénássy, B. (2008). *A magyarországi matematika története a XX. század elejéig*. Szeged : Polygon.

Szendrei, J. (2005). *Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról*. Budapest : Typotex.

Szendrei, J. (2007). *In memory of Tamás Varga*. Consulté sur http://www.cieaem.org/?q=node/18

Turán, P. (1970). Rényi Alfréd. *Matematikai Lapok*, 21(3-4), 199-210.

Walusinski, G. (1986). L'instructive histoire d'un échec : les mathématiques modernes (1955 – 1972). *Bulletin de l'APMEP*, 353. consulté sur http://www.apmep.fr/L-instructive-histoire-d-un-echec

2 Ressources primaires

Alexits Gy. (1949). Célkitűzéseink. Éditorial du premier numéro de la revu *Matematikai Lapok* 1(1), 1-2.

Antibi, A. (2005). *Ecole Michelet Corem – Entretien avec Nadine Brousseau*. IREM de Toulouse.

APMEP (1968). Charte de Chambéry. Étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques. *Supplément au Bulletin de l'APMEP*, 263-264.

Bourbaki, N. (1948). L'architecture des mathématiques. In F. Le Lionnais (Ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 35-47). Paris : Actes Sud, Collection « L'humanisme scientifique de demain ».

Brousseau, G., Brousseau, N. & Warfield, V. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of mathematical behavior*, 20, 363-411.

Choquet, G. (1961). Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire. Brochure de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. Paris.

Choquet, G. (1964). *L'enseignement de la géométrie*. Paris : Hermann

CIEAEM (1974), *L'enseignement des probabilités et des statistiques*. CR de la 26e rencontre, Bordeaux août 1974. IREM de Bordeaux.

Dieudonné, J. (1955). L'abstraction en mathématiques et l'évolution de l'algèbre. Piaget et al. 1955, pp. 47-61.

Dieudonné, J. (1964). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris : Hermann.

Dieudonné, J. (1981). L'abstraction et l'intuition mathématique. In *Choix d'œuvres mathématiques* (Tome 1, pp. 6-21). Paris : Hermann.

Dumont, M. et Varga, T. (1973a). *Combinatoire, statistique et probabilité de 6 á 14 ans. Fiches de travail.* Paris : O:C:D:L.

Dumont, M. et Varga, T. (1973b). *Combinatoire, statistique et probabilité de 6 á 14 ans. Guide et cemmentaires*. Paris : O:C:D:L.

Forrai, T., Jakab, A., Kiss, P., Pelle, B., Surányi, J., …, & Varga. T. (1972). *Új utak a matematika tanításában 1. Néhány hazai és külföldi kísérlet*. Budapest : Tankönyvkiadó.

Glaymann, M. & Varga, T. (1975). *Les Probabilities á L'école*. Paris : CEDIC. (Originalemnt publié en 1973.)

Hajós, Gy. (1960). *Bevezetés a geometriába*. Budapest : Tankönyvkiadó.

Halmos, M. & Varga, T. (1978). Change in mathematics education since the late 1950's – ideas and realisation Hungary. *Educational Studies in Mathematics*, 9(2), 225-244.

Kalmár, L. (1967). Foundations of Mathematics: Whither Now? In I. Lakatos (Ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics* (pp. 186-194). Amsterdam : North-Holland Publishing.

Kalmár, L. (1986). *Integrállevél*. (A. Varga, Ed.), Budapest : Gondolat.

Kalmár, L. (2011). The Development of Mathematical Rigor from Intuition to Axiomatic Method (Zs. Zvolenszky trad.). In A. Máté, M. Rédei & F.Stadler (Eds.), *Der Wiener Kreis in Ungarn/The Vienna Circle in Hungary* (pp. 269-288). Wien – New York : Springer. (Originalement publié en 1942 sous le titre A matematikai egzaktság fejlődése a

szemlélettől az axiomatikus módszerig. In S. Karácsony (Ed.) *A másik ember felé*. Debrecen : Exodus.)

Kosztolányi, D. (1933). *Esti Kornél*. Budapest : Genius. Consulté sur http://mek.oszk.hu/00700/00744/00744.htm

Lakatos, I. (1976a). *Proofs and Refutations*. Cambridge : Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1976b). A Rainessance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics. *The British Journal for the Philosophy of Science* 27/3, p. 201-223.

Láng, T. (1976, le 12 février). Nem számtan : Matematika. Beszélgetés egy új oktatási módszerről [entretien avec Tamás Varga]. *Magyar Nemzet*, p. 5.

Lénárd F. (1972). Modellalkotás variációk segítségével a gondolkodás rugalmasságának fejlesztésére az alsófokú matematikatanítás első éveiben. In. Forrai, T., Jakab, A., Kiss, P., Pelle, B., Surányi, J., …, &Varga. T. 1972, pp. 55-78.

Lichnerowicz, A. (1955). Introduction de l'esprit de l'algèbre modern dans l'algèbre et la géométrie élémentaires. In. Piaget et al. 1955, pp. 63-74.

« Livre blanc » [« Fehér könyv »] (1976). A Magyar Tudományos Akadémia állásfoglalásai és ajánlásai a távlati műveltség tartalmára és az iskolai nevelőtevékenység fejlesztésére. Polycopié. Budapest : MTA.

Mérei F. & V. Binét Á. (1970). *Gyermeklélektan*. Budapest : Gondolat Kiadó.

OPI Matematikai Osztály (1983). A torzulás-vita tanulságai. *Köznevelés*, 39(20), 16-19.

Péter, R. (1977). *Jeux avec l'infini* (G. Kassai trad.). Paris : Éditions du Seuil. (Ouvrage original publié en 1944 sous le titre *Játék a végtelennel*. Budapest : Dante Könyvkiadó.)

Péter, R. (2004). Matematika és művészet – nem két ellentétes pólus. In S. Róka & D. Valcsicsák (Eds.), *A jövő a számtantudósoké. Magyar szerzők írásai a matematikáról* (pp. 195-213). Budapest : Noran.

Piaget, J., Beth, E.W., Dieudonné, J., Lichnerowicz, A., Choquet, G., & Gattegno, C. (1955). *L'enseignement des mathématiques*. Neuchâtel : Delachaux & Niestlé.

Pólya, Gy. (1981). *Mathematical discovery. On understanding, learning and teaching problem solving*. New York : John Wiley & Sons. (Originalement publié en 1962)

Pólya, Gy. (1990). *How to solve it.* London, Penguin Books. (Firs published in 1945 by Princeton University Press.)

Pólya, Gy. (1958). *Les mathématiques et le raisonnement plausible*. Paris : Gauthier. (Originalement publié en anglais sous le titre *Mathematics and Plausible Reasoning* en deux tomes: I. *Induction and Analogy in Mathematics*, II. *Patterns of Plausible Inference*. 1954 Princeton: Princeton University Press.)

Pólya, Gy. (1961). Leopold Fejér. Leopold Fejér, *Journal of the. London Mathematical Society*, 36, 501-506.

Rényi, A. (1966). *Valószínűségszámítás*. Budapest : Tankönyvkiadó Vállalat.

Rényi, A. (1967). *Dialogues on Mathematics*, San Francisco, Holden Day Publishers. (Originalement publié en 1965 sous le titre *Dialógusok a matematikáról*. Budapest : Akadémiai Kiadó.)

Rényi, A. (1972). *Letters on Probability* (L. Vekerdi trad.). Budapest, Akadémiai Kiadó. (Originalement publié en 1967 sous le titre *Levelek a valószínűségről*. Budapest, Akadémiai Kiadó.)

Rényi, A. (2005). *Ars Mathematica. Rényi Alfréd összegyűjtött írásai*. Budapest : Typotex. (Originalement publié en 1973, Budapest : Magvető.)

Revuz, A. (1973). *Modern matematika, élő matematika* (T. Varga trad.). Budapest : Gondolat. (Originalement publié en 1963 sous le titre *Mathématique moderne mathématique vivante*, Paris : OCDL.)

Servais, W. and Varga, T. (Eds.) (1971). *Teaching school mathematics. A Unesco source book*. Middelsex : Penguin Books.

Varga, T. (1963). *A komplex matematikatanítási kísérlet 1–4. osztályos terve.* [Programme provisoire des premières classes expérimentales] Manuscrit, fond personnel de M. Halmos.

Varga, T. (1967a). *Combinatorials and probability for young children, I. Sherbrooke Matehematics Project*. University of Sherbrooke.

Varga, T. (1967b). *Komplex módszer a 6 éves kortól kezdődő matematikatanításban*. Országos Pedagógiai Intézet. [Rapport des experimentations.] Manuscrit, fond personnel de M. Halmos.

Varga, T. (1970). Probability through games. A sample of three games. In *New Trends in Mathematics Teaching II*. Paris : UNESCO.

Varga, T. (1972). Logic and probability in the lower grades. *Educational Studies in Mathematics*, 4, 346-357.

Varga, T. (1973). A valószínűségszámítás tanítása. *Kapcsolat*, 22-23, 45-71.

Varga, T. (1975). *Komplex matematikatanítás. Kandidátusi alkotás ismertetése.* Thèse, Académie des Sciences de la Hongrie.

Varga, T. (ca. 1980). A valószínűség a magyar általános iskolában. Manuscrit, fond personnel de M. Halmos.

Varga, T. (1982). New topics for the elementary school math curriculum. In. Th. C. O'Brien (Ed.), *Toward the 21st Century in Mathematics Education* (pp. 12-34). Teachers' Center Project, Southern Illionis University at Edvardsville.

Varga, T. (1987). Az egyszeregy körül. *Kritika,* 25(12), 28-31.

3 Programmes

Programmes français

Date	Niveau	Édition consultée
1945	élémentaire	http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes.htm
1945	moyen	
1960	moyen	Monge, M. & Guinchan M (1963), *Mathématiques. classe de 6e* Paris : Belin. Monge, M. & Guinchan M (1964), *Mathématiques. classe de 5e* Paris : Belin
1964	moyen	Monge, M. & Guinchan M (1965), *Mathématiques. classe de 4e* Paris : Belin Monge, M. & Guinchan M (1966), *Mathématiques. classe de 3e* Paris : Belin
1969	moyen	Ministère de l'éducation nationale (1972). *Mathématiques. Classes du premier cycle*. (2e edition). Paris : INRDP.
1970	élémentaire	*Programme et enseignement des mathématiques à l'école élémentaire* http://www.formapex.com/repertoires/550-programmes-textes-officiels
1977	élémentaire	Ministère de l'éducation (1980). *Contenus de formation à l'école élémentaire. Cycle préparatoire.* Centre national de documentation pédagogique. Ministère de l'éducation (1979). *Contenus de formation à l'école élémentaire. Cycle élémentaire*. Centre national de documentation pédagogique. Ministère de l'éducation (1980). *Contenus de formation à l'école élémentaire. Cycle moyen.* Centre national de documentation

		pédagogique.
1977	moyen	Ministère de l'éducation (1977). *Classes de sixième et de cinquième.* Centre national de documentation pédagogique. Deledicq, A., Lassave, C. & Missenard, D. (1979) *« Faire » des mathématiques. Classe de 4e. Livre du maître* (pp. V-VIII). Paris : CEDIC. Deledicq, A., Lassave, C. & Missenard, D. (1980) *« Faire » des mathématiques. Classe de 3e. Livre du maître* (pp. 4-6). Paris : CEDIC.

Programmes hongrois

Date	Niveau	Édition consultée
1945	élémentaire et moyen	Ministère de l'éducation (1946), *Tanterv az általános iskola számára.* Budapest Országos Köznvelési Tanács.
1962	élémentaire et moyen	Művelődésügyi Minisztérium (1962), Tanterv és utasítás az általos iskolák számára. Budapest : Tankönyvkiadó.
1978	élémentaire et moyen	Szebenyi P. ed. (1978), *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve.* Budapest : OPI.

4 Manuels scolaires et livres de professeur

Manuels scolaires et livres du professeur français

Niveau élémentaire

Brousseau, G. & Felix, L. (1972). *Mathématique et thèmes d'activité à l'école maternelle.* Collection Première mathématique. Paris : Hachette.

Eiller, R., Mertz, J. & Guyonnaud, M. T. (1971). *Math et calcul cours préparatoire.* (gr. 1) Paris : Hachette.

Eiller, R., Mertz, J. & Guyonnaud, M. T. (1972). *Math et calcul cours préparatoire. Document de travail pour le maître.* (gr. 1) Paris : Hachette.

Eiller, R., Guyonnaud, M. T., Mertz, J., Ravenel, R. & Ravenel, S. (1977). *Math et calcul cours préparatoire.* (gr. 1) Paris : Hachette.

Eiller, R., Guyonnaud, M. T., Mertz, J., Ravenel, R. & Ravenel, S. (1977). *Math et calcul cours préparatoire. Livre du maître*. (gr. 1) Paris : Hachette.

ERMEL (Equipe de recherche mathématique à l'école élémentaire) (1978). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cylce préparatoire.* (gr. 1) Paris : SERMAP OCDL.

ERMEL (1978). Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cylce élémentaire - Tome 2. (gr. 2) Paris : SERMAP OCDL.

Picard, N. (1970), *À la conquète du nombre I. Classe de CP.* (gr. 1). Paris : OCDL.

Niveau moyen

Collection Mauguin (1976). *Mathématique. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Librairie Istra.

Collection Mauguin (1980). *Mathématiques. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Librairie Istra.

Collection Monge (1969), *Mathématiques. Classe de sixième.* (gr. 6) Paris : Belin.

Collection Monge (1969), *Mathématiques. Classe de sixième. Guide pédagogique.* (gr. 6) Paris : Belin.

Collection Monge (1971), *Mathématiques. Classe de quatrième.* (gr. 8) Paris : Belin.

Collection Monge (1972), *Mathématiques. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Belin.

Collection Monge (1978), *Mathématiques. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Belin.

Collection Queyzanne-Revuz (1969), *Mathématique. Classe de sixième.* (gr. 6) Paris : Nathan.

Collection Queyzanne-Revuz (1969), *Mathématique. Classe de sixième. Livre du professeur* (gr. 6) Paris : Nathan.

Collection Queyzanne-Revuz (1971), *Mathématique. Classe de quatrième.* (gr. 8) Paris : Nathan.

Collection Queyzanne-Revuz (1972), *Mathématique. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Nathan.

Collection Queyzanne-Revuz (1972), *Mathématique. Classe de troisième. Livre du professeur.* (gr. 9) Paris : Nathan.

Deledicq, A., Lassave, C. & Missenard, D. (1979) *« Faire » des mathématiques. Classe de 4e. Livre du maître*. (gr. 8) Paris : CEDIC.

Deledicq, A., Lassave, C. & Missenard, D. (1980) *« Faire » des mathématiques. Classe de 3e.* (gr. 9) Paris : CEDIC.

Deledicq, A., Lassave, C. & Missenard, D. (1980) *« Faire » des mathématiques. Classe de 3e. Livre du maître.* (gr. 9) Paris : CEDIC.

Polle, R. & Clopeau G.-H. (1973), *Mathématique. Classe de sixième.* (gr. 6) Paris : Delagrave.

Polle, R. & Clopeau G.-H. (1972), *Mathématique. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Delagrave.

Manuels scolaires et livres du professeur hongrois

Niveau élémentaire

C. Neményi, E. & Varga, T. (1978) *Matematika munkalapok. 1. osztály.* (gr. 1) Budapest: Tankönyvkiadó.

C. Neményi, E., Göndöcs, L., Merő, L., & Merő, L. & Varga, T. (1978), *Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához.* (gr. 1) Budapest : Tankönyvkiadó.

Niveau moyen

Eglesz I., Kovács, Cs., Radnainé Szendrei, J., & Sztrókayné Földvári, V. (1981). *Kézikönyv a matematika 5. osztályos anyagának tanításához.* (gr. 5) Budapest : Tankönyvkiadó.

Eglesz, I., Kovács, Cs., & Sztrókayné Földvári, V. (1979*). Matematika általános iskola 5.* (gr. 5) Budapest : Tankönyvkiadó.

Eglesz, I., Kovács, Cs., & Sztrókayné Földvári, V. (1981*). Matematika általános iskola 6.* (gr. 6) Budapest : Tankönyvkiadó.

Kovács, Cs., Sz. Földvári, V., & Szeredi, É. (1980). *Matematika 7.* (gr. 7) Budapest : Tankönyvkiadó.

Radnainé Szendrei, J. & Varga, T. (1979), *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika 6. osztály.* (gr. 6) Budapest : Tankönyvkiadó.

Radnainé Szendrei, J. & Varga, T. (1981), *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika 7. osztály.* (gr. 7) Budapest : Tankönyvkiadó.

Radnainé Szendrei, J. & Varga, T. (1984), *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika 8. osztály.* (gr. 8) Budapest : Tankönyvkiadó.

5 Entretiens :

Jeanne Bolon, le 28 mars 2013

Josette Adda, le 20 janvier 2015

Lóránt Pálmay, le 26 juillet 2012

Mária Halmos, le 2 janvier 2013 (?) – pas enregistré

Mária Halmos, Erzsébet Csahóczi, Csongorné Kovács, le 10 novembre 2013

Eszter C. Neményi, le 5 décembre 2013

Ervin Deák, le 28 décembre 2013 (?)

László Surányi, le 29 décembre 2013