



**HAL**  
open science

# Contributions à l'observation et à la commande tolérante aux fautes des systèmes incertains

Rihab Lamouchi

► **To cite this version:**

Rihab Lamouchi. Contributions à l'observation et à la commande tolérante aux fautes des systèmes incertains. Modélisation et simulation. Conservatoire national des arts et métiers - CNAM; Université de Gabès (Tunisie), 2017. Français. NNT : 2017CNAM1134 . tel-01683146

**HAL Id: tel-01683146**

**<https://theses.hal.science/tel-01683146>**

Submitted on 12 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



le cnam

École Doctorale d'Informatique, Télécommunications et Électronique  
Centre d'Études et de Recherche en Informatique et Communications  
École Nationale d'Ingénieurs de Gabès  
Laboratoire Modélisation, Analyse et Commande des Systèmes

## THÈSE DE DOCTORAT

présentée par : **Rihab LAMOUCI**

soutenue le : **30 Septembre 2017**

pour obtenir le grade de :

**Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers**

*Discipline/Spécialité* : **Informatique**

**Contributions à l'observation et à la commande  
tolérante aux fautes des systèmes incertains**

### THÈSE DIRIGÉE PAR

M. RAISSI Tarek

*Professeur, Cnam, Paris, France*

M. AOUN Mohamed

*Maitre de Conférences Habilité, ENIG, Tunisie*

### RAPPORTEURS

Mme. KSOURI Moufida

*Professeur, ENIT, Tunisie*

M. EFIMOV Denis

*Maitre de Conférences Habilité, INRIA, France*

### PRÉSIDENT

M. ABDELKRIM M. Naceur

*Professeur, ENIG, Tunisie*

### EXAMINATEURS

M. BARKAOUI Kamel

*Professeur, CNAM, Paris, France*

Mme. LTAIEF Mejda

*Maitre de Conférences Habilité, ENIG, Tunisie*

M. BOUTAYEB Mohamed

*Professeur, Université de Lorraine, France*

# Dédicace

*Je dédie ce travail à mes chers parents,  
mes frères et mon mari.*

# Remerciements

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont été effectués au Centre d'Etude et De Recherche en Informatique et Communications (CEDRIC) sous la direction de **Tarek RAÏSSI**, Professeur des Universités au Conservatoire Nationale des Arts et Métiers (Paris) et le laboratoire de recherche Modélisation, Analyse et Commande de Systèmes (MACS) sous la direction de **Mohamed AOUN**, Maître de conférences à l'École Nationale d'Ingénieurs de Gabès. Cette thèse est co-encadrée par **Messaoud AMAIRI**, Maître Assistant Habilité à l'ENIG.

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mes directeurs de thèse **Tarek RAÏSSI** et **Mohamed AOUN**, pour la confiance qu'ils m'ont donnée, leurs disponibilités, leurs qualités scientifiques et leurs nombreux conseils pendant toute la durée de ma thèse. Veuillez trouver ici toute ma profonde reconnaissance.

Je tiens également à remercier vivement mon co-encadrant de thèse **Messaoud AMAIRI**. Je lui exprime toute ma reconnaissance et ma gratitude pour son suivi régulier, ses encouragements et ses conseils judicieux, qui ont permis l'accomplissement de ce travail.

J'adresse aussi mes sincères remerciements à Monsieur **Mohamed Naceur ABDELKRIM**, Professeur à l'ENIG, pour avoir accepté d'être le président du jury de cette thèse.

---

J'exprime mes profond remerciements à Madame **Moufida KSOURI**, Professeur à l'ENIT, et Monsieur **Denis EFIMOV**, Maître de conférences habilité à INRIA, qui m'ont fait l'honneur d'avoir accepté de rapporter cette thèse.

Que Madame **Mejda LTAIEF**, Maître de conférences à l'ENIG, Messieurs **Mohamed BOUTAYEB**, Professeur à l'Université de Lorraine, et **Kamel BARKAOUI**, Professeur au CNAM, trouvent ici ma profonde gratitude d'avoir accepté de faire partie de jury de cette thèse en tant qu'examineurs.

Mes sincères remerciements s'adressent à tous les membres de laboratoires MACS et CEDRIC pour leur encouragement et l'excellente ambiance de travail qu'ils ont créée. Enfin, mes remerciements vont à tous ceux qui m'ont soutenu et qui ont contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce travail.

# Résumé

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire portent sur la synthèse d'observateurs intervalles pour la commande tolérante aux fautes de systèmes incertains. La présence de défauts, d'incertitudes et de perturbations peut provoquer des réactions indésirables du système commandé. Dans ce contexte, nous avons développé deux approches de commande tolérante aux fautes basées sur des observateurs intervalles dans le cas où les défauts et les incertitudes sont inconnus mais bornés. La première approche, dite passive, permet de garantir la stabilité du système en boucle fermée y compris en présence de défauts actionneurs et/ou composants. La seconde approche, dite active, permet de compenser l'effet des défauts et d'assurer la stabilité et les performances désirées du système. Ces contributions sont validées par des simulations numériques.

**Mots-clés :** Commande tolérante aux fautes, systèmes linéaires à paramètres variables, observateurs intervalles, FTC active, FTC passive, incertitudes.

# Abstract

The research work presented in this thesis focuses on the design of interval observers for fault-tolerant control of uncertain systems. The presence of faults, uncertainties and disturbances in automated systems often causes undesirable reactions. In this context, two approaches of fault tolerant control have been developed based on interval observers in the case where the faults and the uncertainties are unknown but bounded. The first approach is passive and consists in ensuring the closed-loop system stability even in the presence of actuator and/or component faults. The second approach, an active one, compensates the fault effect and ensures the system stability and desired performances. These contributions are validated through numerical simulations.

**Keywords :** Fault tolerant control, linear parameter varying systems, interval observers, active FTC, passive FTC, uncertainties.

# Table des matières

<b>Notations et Acronymes</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Commande tolérante aux fautes et observateurs intervalles</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Système avec défauts . . . . .	7
1.2.1 Définitions . . . . .	7
1.2.2 Type de défauts . . . . .	7
1.2.3 Evolution des défauts . . . . .	8
1.2.4 Modélisation des défauts . . . . .	9
1.3 Système tolérant aux fautes . . . . .	11
1.3.1 Diagnostic et détection de défauts . . . . .	12
1.3.2 Commande tolérante aux fautes . . . . .	13
1.4 Méthodologies de commande tolérante aux fautes . . . . .	14
1.4.1 Approches conventionnelles . . . . .	14
1.4.2 Approches ensemblistes . . . . .	21
1.5 Observateurs intervalles . . . . .	25
1.5.1 Observabilité et commandabilité . . . . .	25

1.5.2	Définitions et lemmes préliminaires . . . . .	26
1.5.3	Structure générale . . . . .	27
1.5.4	Observateurs intervalles pour des systèmes non linéaires . . . . .	29
1.5.5	Observateurs intervalles pour les systèmes LTI . . . . .	31
1.5.6	Transformation des systèmes linéaires aux systèmes non négatifs	33
1.5.7	Observateurs intervalles pour les systèmes LPV . . . . .	37
1.6	Conclusions . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Approche passive à base d'observateurs intervalles</b>	<b>41</b>
2.1	Introduction . . . . .	41
2.2	Préliminaires . . . . .	42
2.3	Systèmes LPV avec défauts actionneurs . . . . .	43
2.3.1	Position du problème . . . . .	43
2.3.2	Observateur Intervalle . . . . .	45
2.3.3	Synthèse de la commande tolérante aux fautes . . . . .	50
2.3.4	Application à un système à trois réservoirs . . . . .	54
2.4	Système LPV avec défauts composants . . . . .	61
2.4.1	Position du problème . . . . .	61
2.4.2	Observateur intervalle . . . . .	62
2.4.3	Analyse quantitative de l'estimation . . . . .	66
2.4.4	Synthèse de la commande tolérante aux fautes . . . . .	70
2.4.5	Exemple numérique . . . . .	73
2.5	Conclusions . . . . .	76
<b>3</b>	<b>Approche active à base d'observateurs intervalles</b>	<b>78</b>

3.1	Introduction . . . . .	78
3.2	Observateur intervalle pour l'estimation des défauts . . . . .	80
3.2.1	Découplage . . . . .	81
3.2.2	Estimation d'état . . . . .	84
3.2.3	Estimation de défaut . . . . .	90
3.2.4	Exemple numérique . . . . .	93
3.3	Observateur intervalle pour la compensation active des défauts . . . . .	97
3.3.1	Observateur intervalle . . . . .	98
3.3.2	Compensation de défaut et analyse de stabilité . . . . .	102
3.3.3	Exemple numérique . . . . .	105
3.4	Conclusions . . . . .	109
	<b>Conclusion générale</b>	<b>110</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>112</b>

# Table des figures

1.1	Différentes localisations de défaut. . . . .	7
1.2	Evolution temporelle des défauts. . . . .	8
1.3	Modélisation des défauts. . . . .	10
1.4	Principe d'une boucle de commande tolérante aux fautes. . . . .	12
1.5	Principe d'un système de commande passive tolérante aux fautes. . .	15
1.6	Principe d'un système de commande active tolérante aux fautes . . .	17
2.1	Système à trois réservoirs. . . . .	55
2.2	Niveau de liquide du premier réservoir $h_1$ [m]. . . . .	59
2.3	Niveau de liquide du deuxième réservoir $h_2$ [m]. . . . .	59
2.4	Niveau de liquide du troisième réservoir $h_3$ [m]. . . . .	60
2.5	Evolution de la première composante $x_1$ . . . . .	75
2.6	Evolution de la deuxième composante $x_2$ . . . . .	75
2.7	Evolution de la troisième composante $x_3$ . . . . .	76
3.1	Evolution de la deuxième composante $x_2$ . . . . .	95
3.2	Evolution de la troisième composante $x_3$ . . . . .	95
3.3	Evolution du défaut $f_1$ . . . . .	96
3.4	Evolution du défaut $f_2$ . . . . .	96

3.5	Evolution du défaut $f_3$ . . . . .	97
3.6	Compensation active de défaut basée sur un observateur intervalle. . .	98
3.7	Evolution de la première composante $x_1$ . . . . .	106
3.8	Evolution de la deuxième composante $x_2$ . . . . .	107
3.9	Evolution de la troisième composante $x_3$ . . . . .	107
3.10	Zoom de la deuxième composante $x_2$ . . . . .	108
3.11	Evolution des bornes supérieure et inférieure de l'erreur avec compensation.	108

# Notations et Acronymes

## Notations

$t$	Variable de temps
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}^n$	Espace réel euclidien de dimension $n$
$\mathcal{L}_\infty$	Ensemble de tous les signaux $u$ avec la propriété $\ u\  < \infty$
$I_n$	Matrice d'identité de dimensions $n \times n$
$E_p$	Matrice dont tout les éléments sont égales à 1 et de dimension $p \times 1$ .
$ x $	Valeur absolue d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$
$\ x\ $	Norme euclidienne d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$
$A^T$	Transposée de la matrice $A$
$A^{-1}$	Inverse de la matrice $A$
$A^*$	Pseudo-inverse de la matrice $A$
$A^+$	Matrice de $\mathbb{R}^{n \times m}$ définie par $A^+ = \max(0, A)$
$A^-$	Matrice de $\mathbb{R}^{n \times m}$ définie par $A^- = A^+ - A = \max(0, -A)$
$\ A\ _2$	Norme matricielle de $A$ avec $\ A\ _2 = \sqrt{\max_{i=1, \dots, n} \lambda_i(A^T A)}$
$\lambda(A)$	Vecteur des valeurs propres de $A$
$\lambda_{min}(A)$	Valeur propre minimale de la matrice $A$
$\lambda_{max}(A)$	Valeur propre maximale de la matrice $A$
$P \succ 0$	$P$ est définie positive
$P \prec 0$	$P$ est définie négative
$P = P^T$	$P$ est symétrique.

## Acronymes

FTC	Commande tolérante aux fautes
FDD	Diagnostic et détection de défauts
FDI	Détection et isolation de défauts
AFTC	Commande active tolérante aux fautes
PFTC	Commande passive tolérante aux fautes
PIM	Méthode de pseudo-inverse
LMI	Inégalité matricielle linéaire
LTI	Linéaire Invariant dans le temps
LTV	Linéaire variant dans le temps
LPV	Linéaire à Paramètres Variants
ISS	Stable entrée-sortie

# Introduction générale

Aujourd'hui, en raison de la complexité croissante des technologies industrielles, le traitement des défauts des systèmes automatiques est devenu une tâche difficile. En effet, bien que les systèmes industriels soient généralement conçus pour fonctionner de manière optimale, la dégradation des performances se produit inévitablement. Cela est dû au vieillissement des composants du système, qui doivent être surveillés pour éviter des pannes dont les conséquences peuvent être néfastes. Le traitement des défauts est également nécessaire pour permettre la reconfiguration de la commande de manière à récupérer, autant que possible, une performance optimale. À ce fait, les chercheurs de la communauté de la commande des systèmes se sont concentrés sur une stratégie de synthèse d'une commande spécifique, appelée commande tolérante aux fautes (Fault Tolerant Control (FTC)).

Dans la littérature, la commande tolérante aux fautes est généralement classée en deux approches : passive et active. L'approche passive utilise des techniques de la commande robuste pour rendre la boucle fermée insensible à un ensemble connu de défauts. L'avantage de cette approche est qu'elle ne nécessite pas d'information en ligne lors de l'apparition de fautes. En effet, elle n'a besoin ni d'un module de diagnostic pour détecter la présence de défauts ni d'un bloc de reconfiguration. Cependant, elle est uniquement applicable pour certains types de défauts dont les caractéristiques sont connues à l'avance. L'approche active de commande tolérante aux fautes, au contraire de l'approche passive, utilise des techniques d'ajustement

en temps réel des régulateurs de la boucle de commande. Afin de maintenir la stabilité et les performances imposées dans le cahier des charges, il est nécessaire d'identifier en ligne les fautes.

Les systèmes linéaires à paramètres variants (LPV) ont été largement étudiés dans la littérature de la communauté automatique. Un système LPV est un système linéaire dont les matrices de sa représentation d'état dépendent d'un vecteur de paramètres variants dans le temps. La plupart des méthodes FTC ont été proposées pour les systèmes linéaires invariants dans le temps. Cependant, ces dernières années, l'intérêt des systèmes LPV a augmenté en raison de la possibilité d'utiliser une telle méthodologie pour traiter les systèmes non linéaires.

Les problèmes d'analyse et de synthèse de commande tolérante aux fautes (FTC) pour les systèmes LPV ont été largement traités dans la littérature. Dans [Bennani, Van der Sluis, Schram, and Mulder 1999], une approche LPV robuste pour la commande FTC dans le contexte d'un problème de contrôle des avions a été proposée. Récemment, [Sloth, Esbensen, and Stoustrup 2010] propose une étude comparative de commande LPV passive et active pour les éoliennes. Dans [de Oca, Puig, Witczak, and Dziekan 2012], une procédure de synthèse d'une commande FTC pour l'identification des défauts en utilisant des techniques LPV est proposée. L'identification des défauts est basée sur l'utilisation d'un observateur à entrée inconnue. Les auteurs de [Patton and Klinkhieo 2010] ont proposé de combiner l'estimation de défauts réalisée à l'aide d'un estimateur LPV et leurs compensations afin d'assurer certaines performances.

Généralement, la détection et la commande tolérante aux fautes sont fondées sur l'observation/estimation de l'état/paramètres du système, leurs performances dépendent crucialement de la qualité de ces estimations. Cependant, la dynamique

du système est souvent affectée par des variations de paramètres, de perturbations et de bruits de mesure. De plus, dans la majorité des applications réelles, certains paramètres physiques ne sont pas connus, seules les bornes de variation peuvent être disponibles. Ainsi, ces incertitudes peuvent avoir des influences sur le comportement du système, d'où l'intérêt des observateurs intervalles. Ces derniers permettent de calculer l'ensemble des valeurs admissibles et fournissent une borne inférieure et une borne supérieure de l'estimée à chaque instant. Les observateurs intervalles ont initialement été introduits dans [Gouzé, Rapaport, and Hadj-Sadok 2000] et appliqués dans de nombreux travaux tels que [Mazenc and Bernard 2010], [Chebotarev, Efimov, Raïssi, and Zolghadri 2013], [Wang, Bevly, and Rajamani 2015], [Chebotarev, Efimov, Raïssi, and Zolghadri 2015b], [Briat and Khammash 2016] ...

Dans ce contexte, les contributions de cette thèse peuvent être divisées en deux parties : la première partie est de concevoir une stratégie de commande passive tolérante aux fautes pour des systèmes LPV soumis à des défauts actionneurs et composants. La deuxième partie est dédiée à la synthèse d'une commande active tolérante aux fautes pour les systèmes LPV en présence des défauts actionneurs.

Le manuscrit est structuré comme suit :

Le **chapitre 1** présente un état de l'art sur la commande conventionnelle tolérante aux fautes et sur les observateurs intervalles. Tout d'abord, les principaux concepts et définitions des systèmes tolérants aux fautes sont décrits. Ensuite, les différentes méthodes de commande tolérante aux fautes proposées dans la littérature sont présentées.

La seconde partie du chapitre 1 est consacrée à l'étude des observateurs intervalles pour les systèmes linéaires et non-linéaires. Des résultats sur les

observateurs intervalles classiques se basant sur la théorie des systèmes coopératifs sont rappelés. Finalement, des travaux développés récemment sur les observateurs intervalles pour des systèmes LPV à temps discrets sont présentés.

Dans le **chapitre 2**, nos contributions dans la commande passive tolérante aux fautes sont présentées en deux parties. Dans la première, la construction d'un observateur intervalle associé aux systèmes LPV avec défauts actionneurs est détaillée. La synthèse d'observateur est basée sur une structure de Luenberger à temps discret où les incertitudes et les défauts sont considérés inconnus mais bornés. Dans la deuxième partie, le problème de synthèse de la FTC passive pour des systèmes LPV discrets en présence de défauts composants est traité. Basée sur l'observateur intervalle et un retour d'état linéaire, la commande passive tolérante aux fautes est proposée. La loi de commande permet d'accommoder l'effet des défauts et préserver la stabilité du système en boucle fermée pour le cas sain et défaillant. Des exemples de simulation sont détaillés tout au long du chapitre.

Dans le **chapitre 3**, nous nous intéressons au développement de la loi de commande active tolérante aux fautes. Dans la première partie du chapitre, nous proposons une approche d'estimation, basée sur le principe de découplage des défauts, en utilisant des observateurs intervalles à entrées inconnues.

Une méthode de compensation de défauts actionneurs pour des systèmes LPV est proposée dans la deuxième partie. Une loi de commande additive est calculée en utilisant les observateurs intervalles permettant de compenser l'effet de défaut. Les méthodologies développées sont illustrées à travers des exemples numériques.

Enfin, une conclusion générale résume les travaux présentés et dresse un ensemble de perspectives pour des travaux de recherche.

# Chapitre 1

## Commande tolérante aux fautes et observateurs intervalles

### 1.1 Introduction

Au cours des dernières décennies, la complexité des installations industrielles n'a cessé d'augmenter avec le développement technologique. Cette complexité peut entraîner des défaillances pouvant avoir un impact négatif sur les performances. Ces défauts proviennent essentiellement des actionneurs, des capteurs ou du procédé lui-même. Par conséquent, afin d'améliorer la fiabilité et la sécurité d'une installation industrielle tout en garantissant des performances satisfaisantes, différentes stratégies ont été proposées dans la littérature pour minimiser les dommages humains et matériels. Dans ce rapport, nous nous intéressons à la commande tolérante aux fautes qui a comme objectif principal de maintenir le bon fonctionnement du système en présence de défauts.

Les travaux de recherche sur la commande tolérante aux fautes ont mobilisé une large communauté de chercheurs dans plusieurs domaines. Des synthèses bibliographiques intéressantes ont été proposées par exemple dans [Zhang and Jiang 2008] et [Staroswiecki and Gehin 2001]. Plusieurs axes de recherche ont été développés tels que l'analyse de la reconfigurabilité du système, la redondance

matérielle et analytique et l'analyse de la fiabilité. Dans le domaine industriel, la commande tolérante aux fautes a été implantée dans diverses applications militaires et civiles pour accommoder l'effet des défauts dans différents domaines tels que les systèmes de contrôle des avions, les véhicules sous-marins, les centrales nucléaires et aussi les systèmes de guidage de missiles [Noura, Sauter, Hamelin, and Theilliol 2000],[Ye, Wang, Bing, Malik, and Zeng 2001],[Liao, Wang, and Yang 2002],[Jiang and Zhang 2006],[Alwi, Edwards, and Tan 2009],[Pirmoradi, Sassani, and De Silva 2009],[Varma and Kumar 2010].

Dans la majorité des applications réelles, la dynamique du système est affectée par des incertitudes, de perturbations et de bruits de mesure. Dans le cas où il est difficile de décrire les perturbations par des lois de probabilité, les techniques conventionnelles comme les filtres de Kalman, basés sur des lois de probabilité, ne sont plus efficaces pour résoudre le problème d'estimation. Une alternative intéressante est d'utiliser des observateurs intervalles. Ces derniers permettent de calculer l'ensemble des valeurs admissibles et fournissent une borne inférieure et une borne supérieure de l'estimée à chaque instant. Les observateurs intervalles ont été introduits dans [Gouzé, Rapaport, and Hadj-Sadok 2000] et appliqués dans de nombreux travaux tels que [Bernard and Gouzé 2004],[Moisan, Bernard, and Gouzé 2009],[Nejjari, Puig, de Oca, and Sadeghzadeh 2009],[Mazenc and Bernard 2010],[Wang, Bevely, and Rajamani 2015],[Zheng, Efimov, and Perruquetti 2016] . . . .

Ce chapitre introductif présente un état de l'art sur les systèmes de commande tolérante aux fautes et les observateurs intervalles. La première partie est consacrée à la présentation des notions de commande tolérante aux fautes. Après quelques définitions sur les terminologies employées dans le domaine des systèmes soumis à

des défauts, les principaux concepts de systèmes tolérants aux fautes seront décrits. Cette partie se termine par une présentation de quelques méthodes de commande tolérante aux fautes conventionnelle et ensembliste.

La deuxième partie de ce chapitre présente le contexte général des observateurs intervalles. Plusieurs méthodes de synthèse d'un observateur intervalle pour des systèmes linéaires et non-linéaires invariants dans le temps seront détaillées.

## 1.2 Système avec défauts

### 1.2.1 Définitions

Un défaut peut être défini comme un écart, non souhaité, d'au moins un paramètre du système par rapport à son état normal [Isermann and Ballé 1997]. La défaillance est une interruption permanente de la capacité du système d'accomplir sa mission dans des conditions de fonctionnement spécifiées.

### 1.2.2 Type de défauts

Selon sa localisation dans la boucle, un défaut peut être de type : actionneur, procédé et capteur, cette décomposition conduit à trois types de défauts comme le montre la figure 1.1 [Blanke and Schröder 2006; Staroswiecki and Gehin 2001].

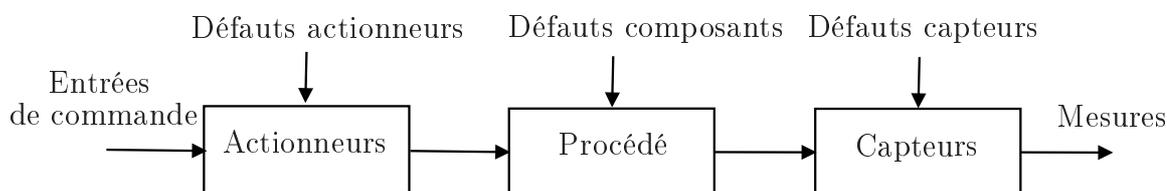


FIGURE 1.1 – Différentes localisations de défaut.

#### 1.2.2.1 Défaut actionneur

Un défaut actionneur agit au niveau de la partie opérative et détériore ainsi le signal de commande du système. Il est un dysfonctionnement pouvant conduire à

une perte totale (une vanne qui reste bloquée dans sa position initiale ou coupure d'un fil électrique) ou partielle (fuite hydraulique ou pneumatique ou encore la chute de la tension d'alimentation) de l'actionneur [Staroswiecki and Gehin 2001; Blanke and Schröder 2006].

### 1.2.2.2 Défaut composant

Un défaut composant est dû à des changements dans les paramètres physiques du procédé, il correspond à une dégradation des composants du système et peut être modélisé par un changement sur les paramètres internes. C'est un défaut qui ne peut pas être classifié ni parmi les défauts capteurs, ni parmi les défauts actionneurs [Staroswiecki and Gehin 2001; Blanke and Schröder 2006].

### 1.2.2.3 Défaut capteur

Un défaut capteur se caractérise par un écart entre la valeur réelle de la grandeur et sa mesure. Il fournit une mauvaise image de l'état physique du système [Staroswiecki and Gehin 2001; Blanke and Schröder 2006].

## 1.2.3 Evolution des défauts

Les défauts peuvent être distingués par leur forme et leur évolution dans le temps [Szigeti 1991; Isermann, Schwarz, and Stolzl 2002]. Ils peuvent être de faible ou de forte amplitude, brusques, intermittents ou plutôt graduels (Figure 2.3).

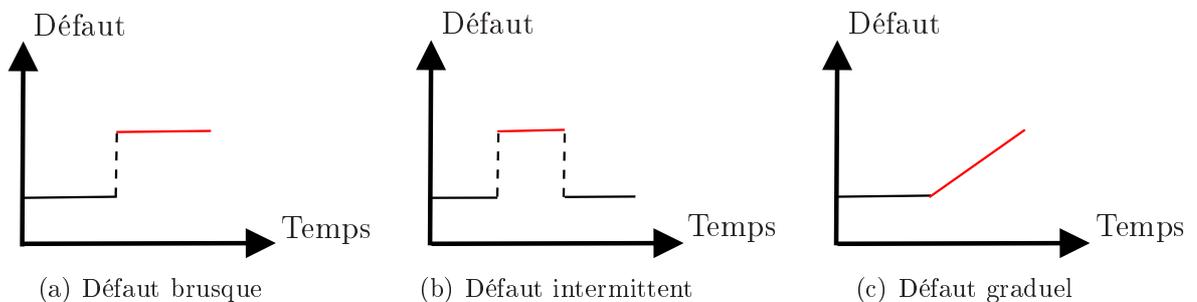


FIGURE 1.2 – Evolution temporelle des défauts.

### 1.2.3.1 Défaut abrupte ou brusque

Le défaut brusque (dit aussi abrupte) se produit instantanément suite à un dommage matériel (Figure (1.2.a)). Il est caractérisé par un comportement temporel discontinu. Il peut conduire à une panne brutale et affecter la stabilité du système.

### 1.2.3.2 Défaut intermittent

Un défaut intermittent apparaît et disparaît rapidement (Figure (1.2.b)). Ce type de défaut caractérise par exemple des faux contacts ou une panne intermittente des capteurs.

### 1.2.3.3 Défaut graduel

Un défaut graduel représente des changements paramétriques lents dans le temps (suite au vieillissement par exemple) comme le montre la figure (1.2.c). Il est plus difficile à détecter à cause de ses dynamiques lentes en fonction de temps. Mais il est également moins sévère.

## 1.2.4 Modélisation des défauts

Les défauts sont souvent modélisés par des signes additifs ou multiplicatifs modifiant le signal sein comme le montre la figure (1.3).

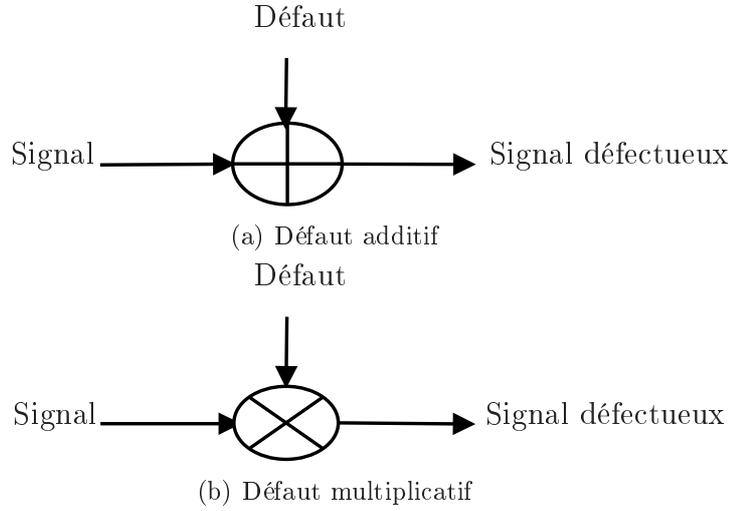


FIGURE 1.3 – Modélisation des défauts.

#### 1.2.4.1 Défaut additif

Un défaut additif est modélisé par un terme additif qui peut influencer l'entrée ou la sortie du système. Cependant, il n'affecte pas la structure du système. Les défauts additifs sont souvent traités par la commande FTC. La représentation d'état d'un système linéaire invariant dans le temps avec un défaut additif est donnée par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ff_k \\ y_k = Cx_k + Du_k + Ef_k \end{cases} \quad (1.1)$$

avec  $x_k$  est l'état,  $u_k$  l'entrée,  $y_k$  la sortie du système et  $f_k$  est un signal décrivant le défaut additif. Les matrices  $A, B, C$  et  $D$  sont respectivement les matrices d'évolution, de commande, d'observation et transmission directe du système. Les matrices  $F$  et  $E$  sont les matrices des directions d'effets du défaut sur l'état et sur la sortie.

#### 1.2.4.2 Défaut multiplicatif

Un défaut multiplicatif est modélisé par des erreurs sur les paramètres des matrices du modèle du système. Ce type de défaut est généralement utilisé pour représenter des défauts actionneurs et capteurs. Un défaut multiplicatif sur

l'actionneur peut être modélisé par un changement abrupt sur l'action nominale de la commande, comme suit :

$$u_k^f = \Gamma_k u_k \quad (1.2)$$

avec  $\Gamma_k = \text{diag} (\gamma_1^a, \gamma_2^a, \dots, \gamma_m^a) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\gamma_i^a \in \mathbb{R}$ .

La représentation d'état d'un système linéaire invariant dans le temps avec un défaut multiplicatif sur l'actionneur peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B\Gamma_k u_k \\ y_k = Cx_k + D\Gamma_k u_k \end{cases} \quad (1.3)$$

### 1.3 Système tolérant aux fautes

La commande tolérante aux fautes permet au système de continuer sa mission en présence de défaut éventuellement avec des performances dégradées. Si le système en boucle fermée reste stable avec des performances acceptables, la commande est dite commande tolérante aux fautes (FTC) [Donghua and Ding 2000]. Souvent, ce type de système se compose de deux modules en cascade : un module de diagnostic et détection de défauts et un module de commande tolérante aux fautes. Le principe général d'une boucle de commande tolérante aux fautes est expliqué par la figure 1.4.

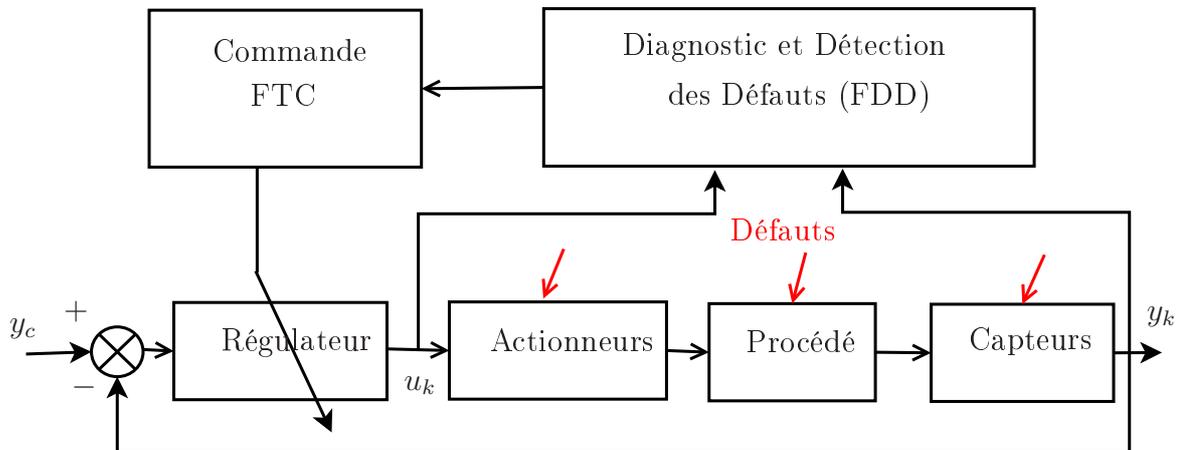


FIGURE 1.4 – Principe d'une boucle de commande tolérante aux fautes.

### 1.3.1 Diagnostic et détection de défauts

Le rôle du module FDD dans la boucle de FTC est d'extraire, à partir des signes d'entrée et sortie, les informations complètes sur l'apparition, l'emplacement et la sévérité des défauts. Il permet généralement de garantir trois tâches : Détection, Isolation et Identification [Blanke and Schröder 2006; Staroswiecki and Gehin 2001].

#### 1.3.1.1 Détection

La détection de défaut permet d'indiquer si un défaut s'est produit ou non sur le système.

#### 1.3.1.2 Isolation

L'isolation de défaut permet de déterminer l'emplacement d'un défaut dans le système. Le défaut peut être au niveau du capteur, de l'actionneur ou interne au système.

### **1.3.1.3 Identification**

L'identification de défaut permet d'estimer précisément la taille et la nature d'un défaut et de classifier ce défaut par son degré de sévérité.

## **1.3.2 Commande tolérante aux fautes**

La commande tolérante aux fautes est un module qui assure un fonctionnement acceptable du système défectueux pour que ce dernier puisse atteindre ses objectifs. Généralement, ce module est aussi appelé accommodation de défaut ou reconfiguration de la commande.

### **1.3.2.1 Reconfiguration**

La commande tolérante aux fautes basée sur la reconfiguration peut être considérée comme étant une commande à commutation. En effet, basée sur les informations des défauts données par le module de diagnostic, cette commande permet de reconfigurer la structure du régulateur pour maintenir un degré acceptable de tolérance aux fautes.

### **1.3.2.2 Accommodation**

L'accommodation consiste en une modification des paramètres ou de la structure du régulateur pour éviter les conséquences d'un défaut. Les entrées sorties entre le régulateur et le système restent inchangées. L'objectif initial de la commande est atteint même si les performances peuvent se dégrader.

## 1.4 Méthodologies de commande tolérante aux fautes

### 1.4.1 Approches conventionnelles

La commande tolérante aux fautes est généralement composée de deux approches passive et active. Les techniques FTC passives sont des lois de commande qui traitent les défauts comme de perturbations du système. Ainsi, dans certains cas, la loi de commande possède des capacités inhérentes de tolérance aux défauts, permettant au système de faire face à la présence de défaut. D'autre part, les techniques FTC actives compensent les défauts soit en utilisant une loi de commande précalculée, soit en synthétisant en ligne une nouvelle stratégie de commande. L'adaptation de la loi de commande se fait en utilisant certaines informations sur le défaut pour satisfaire les objectifs de commande avec une dégradation de performance minimale après l'occurrence de défauts.

#### 1.4.1.1 Approche passive

Les systèmes FTC passifs sont basés sur des techniques de commande robuste. L'objectif principal de l'approche passive est de synthétiser un régulateur avec des paramètres fixes qui rend le système en boucle fermée robuste à un ensemble connu de défauts sans utilisation d'information en ligne sur les défauts. Basée sur la connaissance a priori des défauts, l'approche passive n'a besoin ni d'un module de diagnostic pour détecter la présence de défauts, ni d'un bloc de reconfiguration. Avec ce type de commande, le système altéré continue à fonctionner avec le même régulateur.

Un schéma général d'un système de FTC passive est représenté sur la figure 1.5.

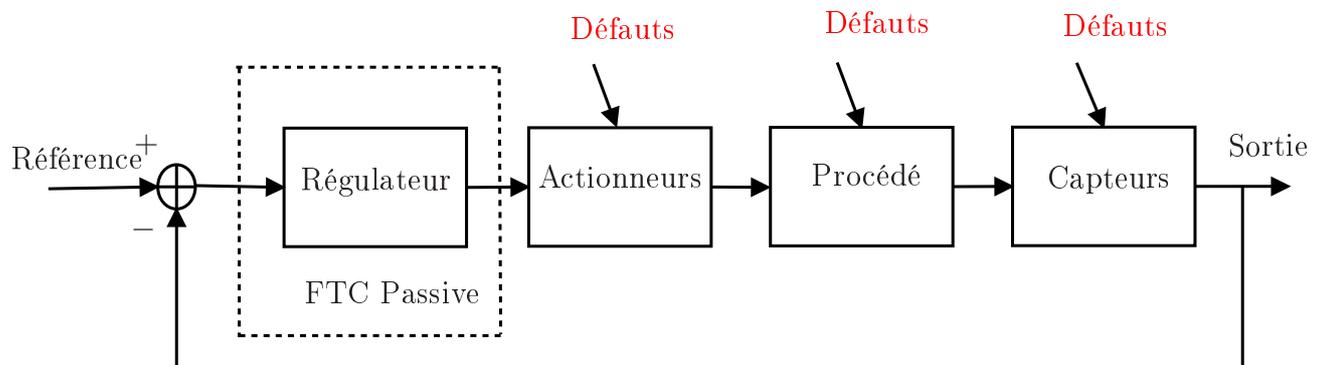


FIGURE 1.5 – Principe d'un système de commande passive tolérante aux fautes.

Dans la littérature, il existe deux approches principales de la FTC passive : l'approche de commande fiable et l'approche de commande robuste.

**Commande fiable :** Cette approche a pour but de rendre le système en boucle fermée fiable de sorte qu'il assure la stabilité et les performances désirées en présence d'un ensemble donné des défauts capteurs et actionneurs [Sebe and Suyama 2014]. La synthèse consiste à rechercher un régulateur qui optimise les performances de fonctionnement défectueux dans le pire cas pour tous les défauts possibles (souvent pannes de capteur ou d'actionneur). Dans [Ackermann 2012], une méthode graphique a été proposée permettant de choisir un gain de commande par retour d'état pour que le système atteigne la stabilité même en présence d'un défaut capteur. D'autres méthodologies de synthèse sont discutées dans [Jiang and Zhao 2000], [Zhao and Jiang 1998] et [Yang, Wang, and Soh 2000].

**Commande robuste :** La commande passive tolérante aux fautes peut être abordée par l'approche robuste des systèmes incertains. En effet, si les erreurs de modélisation et les perturbations affectent la dynamique nominale du système à un niveau inacceptable, elles peuvent être considérées, dans un certain sens, comme des défauts. Ainsi, l'analyse de robustesse aide à synthétiser un régulateur de sorte que le système devienne insensible à ces défauts. Ces approches sont généralement basées

sur la théorie de retour d'état [Keating, Pachter, and Houppis 1997] ou la théorie de la commande robuste  $H_\infty$  [Zhou and Ren 2001], [Niemann and Stoustrup 2003].

La FTC passive peut être mise en oeuvre aisément en tant que régulateur fixe. Il peut compenser les défauts anticipés en utilisant la redondance matérielle telle que des actionneurs et des capteurs multiples. Cependant, l'inconvénient d'une telle approche est sa capacité de tolérance aux pannes très limitée et nécessite une connaissance a priori des défauts.

Il faut noter aussi que la plupart des systèmes à commander peuvent avoir une redondance physique limitée. Il n'est pas facile d'augmenter la configuration matérielle en raison des coûts ou des restrictions physiques. Ceux-ci peuvent limiter l'application de FTC passive pour commander ce type de systèmes. Une alternative est d'utiliser une autre approche de FTC, dite FTC active, qui peut être synthétisée en utilisant à la fois une redondance physique et analytique pour s'adapter à des défauts imprévus.

#### 1.4.1.2 Approche active

Contrairement à l'approche passive, l'approche active de commande tolérante aux fautes (AFTC) utilise des techniques d'ajustement en ligne des régulateurs afin de maintenir, au moins, la stabilité du système et, au mieux, le comportement nominal. Un schéma global de FTC active est représenté par la figure 1.6.

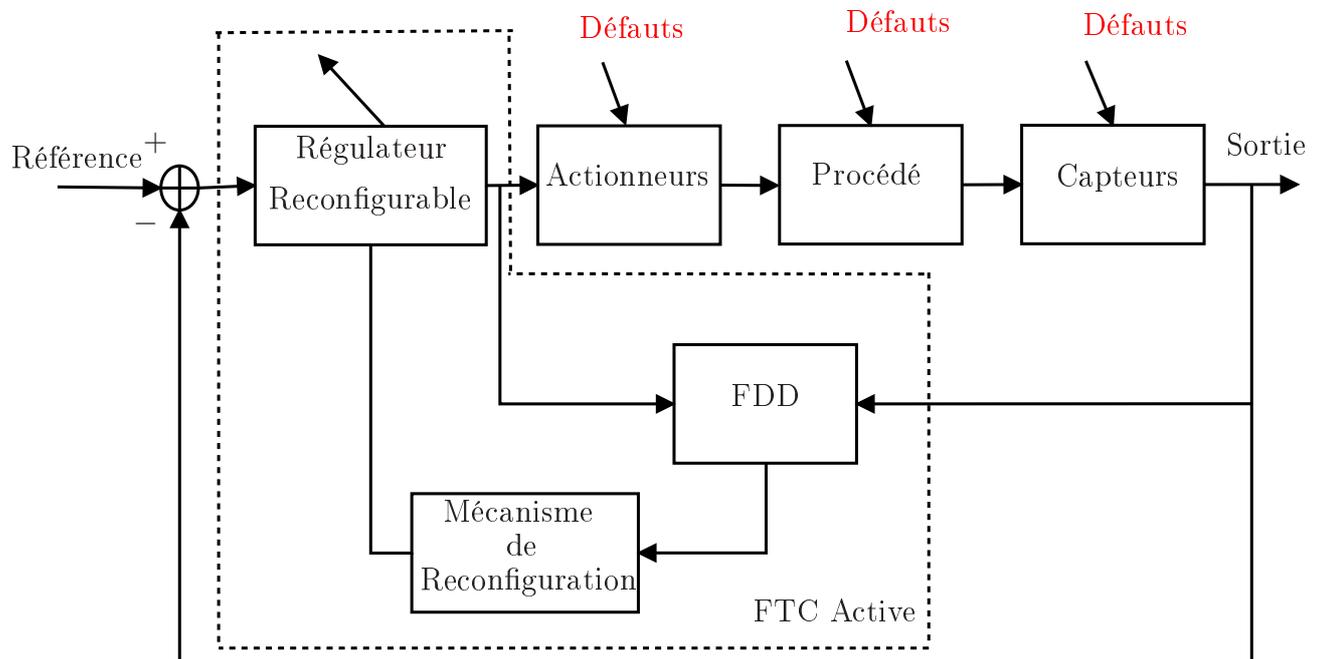


FIGURE 1.6 – Principe d'un système de commande active tolérante aux fautes .

Les approches FTC actives sont classiquement caractérisées par un module de détection et de diagnostic de défauts en ligne (FDD) et un mécanisme de reconfiguration de commande. A partir des informations fournies par le module FDD, la reconfiguration permet de modifier la loi de commande ou la structure du régulateur. Sur la base de cette architecture, les objectifs de synthèse d'une FTC active sont : l'élaboration d'un schéma efficace de FDD pour fournir des informations sur les défauts et la reconfiguration du système de commande pour assurer la stabilité et des performances acceptables en boucle fermée.

Plusieurs méthodes de AFTC ont été proposées dans la littérature [Zhang and Jiang 2008; Khelassi 2011; Kanev 2004], telles que la méthode de pseudo-inverse, placement de structure propre, multi-modèle, régulateur à commutation, commande adaptative, commande prédictive, neuro-flou, approches par modèles de référence. Dans le paragraphe suivant, nous présenterons brièvement quelques-unes de ces méthodes.

**Pseudo inverse :** La méthode de pseudo-inverse (PIM) a été proposée dans [Caglayan, Allen, and Wehmuller 1988]. Elle est l'une des plus citées en raison de sa simplicité de calcul et de sa capacité à gérer une très grande classe de défauts du système [Gao and Antsaklis 1991]. La PIM considère un système linéaire nominal avec une loi de commande par retour d'état linéaire, sous l'hypothèse que le vecteur d'état est disponible. Elle permet une représentation générale du système défectueux où la nouvelle loi de commande reconfigurée est calculée avec la même structure. Le principe de la méthode de pseudo-inverse (PIM) est de modifier la matrice de gain de retour d'état dans la loi de commande de telle sorte que le système reconfiguré se rapproche approximativement du modèle nominal.

Les avantages de cette approche résident dans le fait qu'elle est bien adaptée à la mise en oeuvre en ligne en raison de sa simplicité. En outre, elle permet des changements dans toutes les matrices du modèle du système défectueux. Le principal inconvénient de cette méthode est que la loi de commande optimale ne stabilise pas toujours le système en boucle fermée. Une méthode pseudo-inverse modifiée a été développée dans [Gao and Antsaklis 1991] permettant de résoudre ce problème sous la contrainte supplémentaire que le système en boucle fermée résultant reste stable.

**Placement de structure propre :** La méthode de placement de structure propre pour la reconfiguration de régulateur est considérée comme étant une technique plus puissante que PIM [Konstantopoulos and Antsaklis 1996]. Le principe est de placer les valeurs propres du système en boucle fermée et leurs vecteurs propres associés, en utilisant des lois de commande par retour d'état, afin d'assurer les performances du système en boucle fermée. L'objectif principal est précisément de synthétiser une matrice de gain de retour d'état de sorte que les valeurs propres en boucle fermée du système reconfiguré soient équivalentes à celles du système nominal [Zhang and Jiang 2001].

L'avantage de cette méthode est que les spécifications de performance sont

données en fonction de la structure propre du système qui peut être déterminée pour assurer la stabilité et atteindre des performances dynamiques spécifiées. Il s'avère que les performances du système utilisant cette méthode pourraient ne pas être optimales, puisque les problèmes de désadaptation de modèle et les incertitudes du module FDD ne peuvent pas être facilement intégrés dans ce cadre d'optimisation.

**Multi-Modèles** : L'idée d'utiliser plusieurs modèles pour la commande reconfigurable a été introduite au début des années 1990 [Narendra, Driollet, Feiler, and George 2003]. Cette méthode appartient à la classe des méthodes basées sur la structure de la commande adaptative. Dans cette approche, un ensemble de modèles linéaires est utilisé pour décrire le système pour différents modes de fonctionnement ou dans diverses conditions défectueuses.

De cette façon, étant donnée une batterie prédéfinie de modèles, une batterie de régulateurs est synthétisée. La notion de modèle multiple a été utilisée pour différentes applications dans la communauté FTC. Dans [Theilliol, Sauter, and Ponsart 2004], [Zhang and Jiang 2001], cette notion est utilisée pour caractériser le module FDD au lieu de la reconfiguration du régulateur.

**Régulateur à commutation** : De façon similaire à la méthode multi-modèles, le point de départ de la méthode basée sur un régulateur à commutation est un ensemble de modèles locaux qui représentent le système à certaines situations prédéfinies de défauts. Un régulateur est alors synthétisé pour chaque modèle afin qu'il puisse être actif lorsque le modèle associé correspond le mieux au comportement dynamique actuel du système. La différence avec la méthode multi-modèles est qu'aucune fusion d'actions de commande n'est effectuée ici, mais seulement une commutation, c'est-à-dire, qu'un seul régulateur est actif à chaque instant [Yamé, Kinnaert, Staroswiecki, and Wu 2003; Mahmoud, Jiang, and Zhang 2001].

Un inconvénient des approches basées sur la commutation du régulateur est qu'elles ne peuvent traiter qu'un ensemble limité de défauts prédéfinis. Néanmoins, l'avantage est que l'incertitude du modèle peut facilement être considérée en synthétisant les régulateurs locaux robustes par rapport à ces incertitudes.

**Commande adaptative :** Les méthodes de commande adaptative sont très appropriées pour l'approche FTC active en raison de leur capacité à ajuster automatiquement les paramètres du régulateur en fonction des changements du système pour assurer les performances désirées [Rodrigues 2005]. Ces méthodes ne nécessitent pas des blocs de "mécanisme de reconfiguration" et de "FDD". Cependant, ceci est souvent vrai pour les défauts composants et actionneurs, mais pas pour certains défauts capteurs.

Il existe deux approches de commande adaptative : directe et indirecte [Åström and Wittenmark 2013] [Dumont and Huzmezan 2002]. Dans l'approche indirecte, il y a deux étapes pour la synthèse de régulateur. La première étape permet l'estimation des paramètres du système. La deuxième consiste à utiliser cette information pour la synthèse du régulateur. Dans l'approche directe, le régulateur est synthétisé directement sans estimer les paramètres du système.

**Commande prédictive :** L'approche à base de commande prédictive pour les systèmes AFTC est une stratégie pertinente industriellement et a reçu dernièrement beaucoup d'attention [Maciejowski 2002; Maciejowski and Jones 2003]. Elle est efficace pour résoudre des problèmes de commande optimale à contraintes multiples multivariables.

Dans cette stratégie, un modèle interne du procédé est utilisé pour prédire la dynamique du système sur un horizon de temps fini. Avec sa capacité d'auto reconfiguration, la commande prédictive est considérée comme et une stratégie intéressante pour la tolérance aux pannes. Le problème avec ces approches découle du

fait qu'un processus d'optimisation est exécuté à chaque instant d'échantillonnage, ce qui rend le problème difficile à traiter.

**Méthode neuro-floue :** Les méthodes basées sur les réseaux de neurones et la logique floue ont également reçu une grande attention dans le domaine de la FTC [Rodrigues 2005]. Ces méthodes ont l'avantage d'être applicables à la FTC pour des systèmes non linéaires qui sont habituellement modélisés au moyen d'un modèle flou de Takagi-Sugeno comme, par exemple, dans [Takagi and Sugeno 1985]. Les capacités d'apprentissage de ces méthodes permettent d'adapter le modèle et le régulateur après l'apparition d'un défaut dans le système.

**Approches par modèles de référence :** L'approche de modèles de référence pour les systèmes FTC actifs est intéressante pour concevoir un régulateur en ligne. L'objectif est d'imiter les caractéristiques de performance du modèle de référence, avec ou sans défauts. Un avantage de l'utilisation de cette approche est qu'elle ne nécessite pas un schéma FDD. En outre, cette méthode a une capacité d'accommodation de défauts en ligne limitée en raison de la nécessité d'un modèle en défaut, ce qui introduit des difficultés pour traiter les incertitudes de modèle [Zhang and Jiang 2002; Bodson and Groszkiewicz 1997].

## 1.4.2 Approches ensemblistes

### 1.4.2.1 Problématique

La synthèse d'une commande tolérante aux fautes nécessite souvent la détermination d'un modèle du système. Ce modèle peut être obtenu par des méthodes probabilistes ou ensemblistes. Les méthodes probabilistes permettent une estimation des paramètres (ou de l'état) du système lorsque les incertitudes et les perturbations sont connues. Cependant, en pratique, il existe de nombreux cas où on ne dispose pas des propriétés statistiques sur les incertitudes. La solution ici

est d'utiliser l'approche ensembliste. Son principe général est de supposer que les variables incertaines appartiennent à un ensemble borné connu. Puis, une méthode ensembliste est appliquée pour obtenir un ensemble, consistant avec les bruits et les perturbations, contenant de manière garantie l'état réel du système.

Dans cette thèse, l'approche ensembliste est utilisée en raison de sa capacité à gérer les incertitudes et les perturbations. Le paragraphe suivant présente les différentes formes géométriques d'ensembles.

#### 1.4.2.2 Représentation ensembliste

Dans le domaine de l'estimation ensembliste, l'ensemble admissible contenant de manière garantie l'état du système peut être approximé par une forme géométrique tels que : le polytope, le zonotope, l'ellipsoïde et l'intervalle.

##### **Polytope**

Le polytope est considéré comme l'ensemble convexe le plus utilisé dans le domaine de l'automatique. Grâce à sa flexibilité et sa représentation (représentation par des sommets ou représentation par des demi-espaces), il permet une approximation très précise de n'importe quel ensemble convexe [Bronstein 2008], [Lay 2007], [Scibilia, Olaru, and Hovd 2011]. Le principal inconvénient du polytope est lié au nombre de ses sommets. En effet, même si un polytope permet d'approximer n'importe quel ensemble convexe, la complexité des calculs peut augmenter avec le nombre de sommets même dans une dimension d'espace faible.

##### **Zonotope**

Le zonotope est un cas particulier de polytope convexe, plus précisément c'est un polytope symétrique. Similaire au polytope, un zonotope peut être représenté par des demi-espaces et par ses sommets. L'avantage majeur du zonotope est la réduction de complexité des calculs.

### **Ellipsoïde**

L'ellipsoïde a reçu une grande importance dans le domaine de l'estimation ensembliste en raison de sa faible complexité [Schweppe 1968]. Il est utilisé dans plusieurs domaines de l'automatique (estimation, identification, diagnostic, etc.) [Durieu, Walter, and Polyak 2001], [Chernousko 1993], [Kurzanskiy and Varaiya 2006], [Polyak, Nazin, Durieu, and Walter 2004]. Malgré sa simple représentation. En effet, l'ensemble ellipsoïdal ne permet pas une approximation précise sous certaines opérations (somme, intersection, etc.).

### **Intervalle**

Un moyen très simple de définir les incertitudes consiste à utiliser la notion d'intervalle. Ceci est basé sur l'idée d'inclure des erreurs numériques dans un intervalle. De plus, l'analyse par intervalles permet de simplifier la plupart des opérations standards [Moore 1966], [Hansen 1965], [Jaulin, Kieffer, Didrit, and Walter 2001]. Cette approche est développée dans de nombreux domaines tels que l'identification, le diagnostic, l'estimation, etc.

En dépit de la simplicité de l'analyse par intervalles, un inconvénient de cette approche est le pessimisme des résultats de calcul en raison des effets de dépendance et d'enveloppement [Moore 1966], [Kühn 1999], [Jaulin, Kieffer, Didrit, and Walter 2001].

#### **1.4.2.3 Méthodes existantes**

Généralement, le diagnostic et la commande tolérante aux fautes sont basés sur l'observation de l'état ou/et des paramètres du système. Dans cet esprit, plusieurs méthodes de commande tolérante aux fautes utilisant les approches ensemblistes d'estimation d'état ont été récemment proposées.

Dans [Puig 2010], une commande tolérante aux fautes basée sur des méthodes ensemblistes a été développée. Ces dernières ont pour but de vérifier la consistance

entre le comportement observé et prédit en utilisant des formes géométriques simples et approximer l'ensemble exact de l'état ou des paramètres. Un défaut est indiqué lorsqu'une inconsistance entre le comportement mesuré et le comportement prédit par un modèle du système sain est détectée. Le même principe a été utilisé pour estimer les modèles intervalles pour la détection de défauts.

Une autre méthodologie d'estimation ensembliste basée sur les polytopes pour la commande tolérante aux fautes a été étudiée dans [Stoican 2013]. Une étude sur l'apparition de défauts pour des systèmes multi-capteurs et les modes de détection, ainsi que la conception de lois de commande a été développée.

[Blesa, Rotondo, Puig, and Nejjarı 2014] développe un algorithme de détection et d'isolation de défauts et une commande tolérante aux fautes pour des éoliennes en se basant sur des observateurs intervalles et des capteurs/actionneurs virtuels. En effet, seule la détection des défauts est basée sur l'utilisation d'observateurs intervalles avec une description inconnue mais bornée du bruit et des erreurs de modélisation. Ensuite, l'isolation des défauts est basée sur l'analyse en ligne des signatures des défauts observées et leur adéquation aux signatures obtenues à l'aide d'une analyse structurelle. Finalement, la commande tolérante aux fautes est basée sur l'utilisation de capteurs/actionneurs virtuels.

Récemment, une technique de commande tolérante aux fautes, basée sur l'approche de multi-modèles pour les systèmes linéaires avec des perturbations et des bruits des mesures bornés, a été proposée dans [Chabane, Maniu, Camacho, Alamo, and Dumur 2016]. La consistance de chaque modèle avec les mesures est vérifiée à chaque période d'échantillonnage en utilisant une estimation d'état ensembliste.

Le travail présenté dans ce manuscrit porte sur la commande tolérante aux fautes basée sur l'estimation ensembliste en utilisant des intervalles.

## 1.5 Observateurs intervalles

Dans la suite du rapport, les notations et les définitions suivantes sont utilisées.

### 1.5.1 Observabilité et commandabilité

La commandabilité et l'observabilité sont deux concepts majeurs de la théorie de la commande développées pour la représentation d'état des systèmes. Elles permettent de caractériser respectivement la possibilité que la commande exerce une influence sur un des états et la possibilité d'obtenir une certaine information d'un des états. Elles ont été introduites par Kalman en 1960 et peuvent être définies de la façon suivante.

**Observabilité :** Si la connaissance d'un vecteur de sorties sur un horizon temporel d'un système dynamique permet de reconstituer tout l'état de celui-ci, alors on dit que le système avec ce vecteur de sorties est observable.

Pour un système linéaire avec représentation d'état  $(A, B, C, D)$ , la paire  $(A, C)$  est observable si et seulement si la matrice d'observabilité

$$\mathcal{O}_{A,C} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang  $n$  égale à la dimension du système.

**Commandabilité :** Si un système dynamique peut de se déplacer d'un point quelconque de son espace à un autre point quelconque au moyen d'une commande appropriée, on dit alors qu'il est commandable.

Pour un système linéaire avec représentation d'état  $(A, B, C, D)$ , la paire  $(A, B)$  est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité

$$\mathcal{C}_{A,B} = (B|AB|\dots|A^{n-1}B)$$

est de rang  $n$  égale à la dimension du système.

### 1.5.2 Définitions et lemmes préliminaires

Pour une entrée mesurable et localement bornée  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , le symbole  $\|u\|_{[t_0, t_1]}$  désigne sa norme  $L_\infty$  définie par  $\|u\|_{[t_0, t_1]} = \sup\{|u_t|, t \in [t_0, t_1]\}$ ,  $\|u\| = \|u\|_{[0, +\infty)}$ .

Pour deux vecteurs  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  et deux matrices  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , les relations d'ordre  $x_1 \leq x_2$  et  $A_1 \leq A_2$  doivent être interprétées élément par élément.

$\max(A, B)$  de deux matrices  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{r \times s}$  et  $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{r \times s}$  de même dimensions est une matrice d'entrée  $m_{i,j} = \max(a_{i,j}, b_{i,j})$ .

**Lemme 1.1** [*Chebotarev, Efimov, Raïssi, and Zolghadri 2013*] Soient  $\underline{x}, x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , si  $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$  alors,

$$\underline{x}^+ \leq x^+ \leq \bar{x}^+ \text{ et } \bar{x}^- \leq x^- \leq \underline{x}^- \quad (1.4)$$

De même, soient  $\underline{A}, A, \bar{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , si  $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$  alors,

$$\underline{A}^+ \leq A^+ \leq \bar{A}^+ \text{ et } \bar{A}^- \leq A^- \leq \underline{A}^- \quad (1.5)$$

□

**Lemme 1.2** [*Chebotarev, Efimov, Raïssi, and Zolghadri 2013*] Soit  $x, \bar{x}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ .

1. Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est une matrice constante, alors

$$A^+ \underline{x} - A^- \bar{x} \leq Ax \leq A^+ \bar{x} - A^- \underline{x} \quad (1.6)$$

2. Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est une matrice vérifiant  $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$  pour  $\underline{A}, \bar{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , alors

$$\underline{A}^+ \underline{x}^+ - \bar{A}^+ \underline{x}^- - \underline{A}^- \bar{x}^+ + \bar{A}^- \bar{x}^- \leq Ax \leq \bar{A}^+ \bar{x}^+ - \underline{A}^+ \bar{x}^- - \bar{A}^- \underline{x}^+ + \underline{A}^- \underline{x}^- \quad (1.7)$$

□

**Définition 1.1** *La matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est dite stable au sens de Schur si la norme de toutes ses valeurs propres est inférieure à 1; elle est dite non négative si tous ses éléments sont non négatifs, et elle est Metzler si tous ses éléments hors diagonale ne sont pas négatifs.*

**Lemme 1.3** *Un système décrit par :*

$$x_{k+1} = Ax_k + u_k$$

*avec  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est non négatif si et seulement si la matrice  $A$  est non négative,  $u_k \geq 0$  et  $x_{k_0} \geq 0$ . Dans ce cas le système est dit coopératif [Hirsch and Smith 2005].*

**Lemme 1.4** [Farina and Rinaldi 2011]

*Toute matrice  $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$  est stable au sens de Schur si et seulement s'il existe une matrice diagonale  $D \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$  tel que  $A^T D A - D \prec 0$ .*

### 1.5.3 Structure générale

Pour les systèmes non linéaires, des techniques d'estimation d'état ont été développées grâce à l'analyse par intervalles et à la propagation des contraintes [Kieffer, Jaulin, and Walter 2002; Walter and Kieffer 2003]. Dans ce cadre, on distingue principalement deux approches pour l'estimation d'état. La première est basée sur le mécanisme de prédiction/correction similaire au filtre de Kalman [Jaulin 2002; Raïssi, Ramdani, and Candau 2004]. La deuxième approche est basée sur une structure en boucle fermée où le gain de l'observateur est choisi pour imposer une dynamique coopérative pour l'erreur d'observation [Gouzé, Rapaport, and Hadj-Sadok 2000; Moisan, Bernard, and Gouzé 2009]. Cette condition de coopérativité est étroitement liée à la notion de monotonie [Gouzé, Rapaport, and Hadj-Sadok 2000].

Les structures des observateurs intervalles sont en général basées sur des observateurs classiques de type Luenberger [Moisan, Bernard, and Gouzé 2009;

Bernard and Gouzé 2004; Efimov, Fridman, Raïssi, Zolghadri, and Seydou 2012]. Dans ce cas, l'idée consiste à transformer un problème incertain en un problème déterministe en utilisant les théorèmes de comparaison [Müller 1927; Smith 1995]. Deux observateurs déterministes sont ainsi construits pour calculer les bornes inférieure et supérieure du domaine du vecteur d'état.

On considère le système à temps discret suivant [Dinh 2014] :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k) \\ y_k = h(x_k, v_k) \end{cases} \quad (1.8)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $u_k \in \mathbb{R}^q$  est l'entrée,  $y_k \in \mathbb{R}^p$  est la sortie,  $f$  et  $h$  sont deux fonctions et  $w_k$  et  $v_k$  sont respectivement la perturbation et le bruit. L'état initial, la perturbation et le bruit sont bornés par des quantités connues telles que pour tout  $k \geq 0$ , on a :

$$\begin{cases} \underline{w}_k \leq w_k \leq \bar{w}_k \\ \underline{v}_k \leq v_k \leq \bar{v}_k \\ \underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Une structure de l'observateur intervalle pour le système (1.8) peut être donnée par :

$$\begin{cases} \bar{z}_{k+1} = \bar{f}(\bar{z}_k, \underline{z}_k, \bar{w}_k, \underline{w}_k, \bar{v}_k, \underline{v}_k, u_k, y_k) \\ \underline{z}_{k+1} = \underline{f}(\bar{z}_k, \underline{z}_k, \bar{w}_k, \underline{w}_k, \bar{v}_k, \underline{v}_k, u_k, y_k) \\ \bar{x}_k = \bar{h}(\bar{z}_k, \underline{z}_k, \bar{w}_k, \underline{w}_k, \bar{v}_k, \underline{v}_k, u_k, y_k) \\ \underline{x}_k = \underline{h}(\bar{z}_k, \underline{z}_k, \bar{w}_k, \underline{w}_k, \bar{v}_k, \underline{v}_k, u_k, y_k) \end{cases} \quad (1.10)$$

avec  $\bar{z}_0 = \bar{g}(\bar{x}_0, \underline{x}_0)$  et  $\underline{z}_0 = \underline{g}(\bar{x}_0, \underline{x}_0)$  où  $\bar{f}, \underline{f}, \bar{h}, \underline{h}, \bar{g}, \underline{g}$  sont des fonctions dans les domaines appropriés.

Le système (1.10) est un encadreur du système (1.8) si pour toute condition initiale  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$  nous avons  $\underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k$ .

Ce système est un observateur intervalle du système (1.8) si dans le cas où  $w = v = 0$ , il existe un réel positif  $M$  et un temps  $K$  tels que  $\forall k \geq K \|\bar{x}_k - \underline{x}_k\| \leq M$ .

Dans la suite, quelques résultats récents de la littérature sont rappelés. Ils portent sur la construction d'observateurs intervalles pour les systèmes non linéaires, linéaires invariant dans le temps et linéaires à paramètres variables.

#### 1.5.4 Observateurs intervalles pour des systèmes non linéaires

Le problème de l'estimation d'état pour les systèmes non linéaires a été envisagé dans plusieurs travaux. Une structure d'observateur intervalle pour les systèmes non-linéaires à temps continu a été proposé dans [Meslem and Ramdani 2011]. Une autre solution a été présentée dans [Raïssi, Efimov, and Zolghadri 2012] où une synthèse d'observateur intervalle pour les systèmes non-linéaires a été développé. Il a été prouvé aussi qu'un observateur intervalle stable peut être construit pour des systèmes pour lesquels une linéarisation partielle est disponible. Récemment, dans [Zheng 2015] un observateur a été synthétisé pour les systèmes non-linéaires incertains et non observables où les incertitudes sont présentées par un vecteur des paramètres invariant dans le temps et inconnues.

Cette section présente la technique de [Dinh 2014] pour la construction d'observateur intervalle pour les systèmes non-linéaires à temps discret invariant dans le temps.

Soit le système non-linéaire invariant dans le temps suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(y_k, x_k, w_k), k \in \mathbb{N} \\ y_k = h(x_k) \end{cases} \quad (1.11)$$

avec  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $w_k \in \mathbb{R}^l$  où  $y_k \in \mathbb{R}^p$  est la sortie.

Soit l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 1.1** [*Dinh 2014*]

Il existe une fonction  $f_c : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}^n$  tel que

$$f(y, x, w) = f_c(y, x, x, w, w), \quad \forall (y, x, w) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \quad (1.12)$$

et, pour toute  $y, b, d$  fixes, la fonction  $(a, c) \mapsto f_c(y, a, b, c, d)$  est non décroissante, et pour tout  $y, a, c$  fixes, la fonction  $(b, d) \mapsto f_c(y, a, b, c, d)$  est non croissante. De plus, pour toute séquence  $y_k$  qui converge en norme vers zero, les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} a_{k+1} = f_c(y_k, a_k, b_k, 0, 0), \\ b_{k+1} = f_c(y_k, b_k, a_k, 0, 0), \end{cases} \quad (1.13)$$

convergent vers l'origine.

Le théorème suivant permet de définir une structure de l'observateur intervalle pour le système (1.11)

**Théorème 1.1** [*Dinh 2014*]

Supposons que le système (1.11) satisfait l'hypothèse (1.1). Soit la séquence  $w_k$  bornée par deux séquences connues  $\bar{w}_k, \underline{w}_k$ , pour tout entier  $k \geq 0$  tel que :

$$\underline{w}_k \leq w_k \leq \bar{w}_k \quad (1.14)$$

alors le système

$$\begin{cases} \bar{z}_{k+1} = f_c(y_k, \bar{z}_k, \underline{z}_k, \bar{w}_k, \underline{w}_k), \\ \underline{z}_{k+1} = f_c(y_k, \bar{z}_k, \underline{z}_k, \bar{w}_k, \underline{w}_k), \end{cases} \quad (1.15)$$

avec les conditions initiales

$$\bar{z}_{k_0} = \bar{x}_{k_0}, \underline{z}_{k_0} = \underline{x}_{k_0}, \quad (1.16)$$

et les bornes de  $x_k$

$$\bar{x}_k = \bar{z}_k, \underline{x}_k = \underline{z}_k, \quad (1.17)$$

est un observateur intervalle pour le système (1.11).

**Preuve 1.1** *La preuve est donnée dans [Dinh 2014]*

Le paragraphe suivant développe l'approche de [Efimov, Perruquetti, Raïssi, and Zolghadri 2013a] pour la construction d'observateur intervalle des systèmes LTI en se basant sur la théorie des systèmes coopératifs.

### 1.5.5 Observateurs intervalles pour les systèmes LTI

On considère le système LTI suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + b_k, \\ y_k = Cx_k + v_k, \end{cases} \quad (1.18)$$

avec  $x_k \in \mathbb{R}^n$  est l'état ;  $y_k \in \mathbb{R}^p$  est la sortie ;  $b : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n, b \in \mathcal{L}_\infty$  est l'entrée ;  $v : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}^p, v \in \mathcal{L}_\infty$  est le bruit des mesures ;  $A$  et  $C$  sont des matrices réelles.

Les hypothèses suivantes seront utilisées dans la suite.

**Hypothèse 1.2** *L'état  $x_k$  est borné ( $x \in \mathcal{L}_\infty$ )*

**Hypothèse 1.3** *Il existe une matrice  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  tel que :*

1. *La matrice  $A - LC$  est stable au sens de Schur.*
2. *La matrice  $A - LC$  est non négative.*

**Hypothèse 1.4** *Il existe deux fonctions  $\underline{b}, \bar{b} : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n, \underline{b}, \bar{b} \in \mathcal{L}_\infty$  tel que  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$*

$$\underline{b}_k \leq b \leq \bar{b}_k$$

**Hypothèse 1.5**  *$\|v\| < V$  avec  $0 \leq V < +\infty$  est une constante.*

Une structure de l'observateur intervalles pour le système (1.18) est donnée par :

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \underline{b}_k + L(y_k - C\underline{x}_k) - \bar{L}V, \\ \bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + \bar{b}_k + L(y_k - C\bar{x}_k) + \bar{L}V, \end{cases} \quad (1.19)$$

avec  $\underline{x}_k$  et  $\bar{x}_k$  sont les bornes supérieure et inférieure de l'état  $x_k$ ,  $\bar{L} = (L^+ + L^-)E_{(p \times 1)}$

**Théorème 1.2** [Efimov, Perruquetti, Raïssi, and Zolghadri 2013a]

Supposons que les hypothèses 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5 sont vérifiées. Alors,  $\forall t \in \mathbb{Z}_+$  les variables  $\underline{x}_k, \bar{x}_k$  données par l'équation (1.20) sont bornées et

$$\underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k$$

tel que  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$

**Preuve 1.2** L'équation (1.18) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$x_{k+1} = (A - LC)x_k + L[y_k - v_k] + b_k$$

alors les dynamiques de l'erreur d'observation  $\underline{e}_k = x_k - \underline{x}_k$  et  $\bar{e}_k = \bar{x}_k - x_k$  sont données par :

$$\begin{cases} \underline{e}_{k+1} = (A - LC)\underline{e}_k + \underline{d}_k, \\ \bar{e}_{k+1} = (A - LC)\bar{e}_k + \bar{d}_k, \end{cases} \quad (1.20)$$

où  $\underline{d}_k = [\bar{L}v_k - Lv_k] + [b_k - \underline{b}_k]$ ,  $\bar{d}_k = [\bar{L}v_k - Lv_k] + [\bar{b}_k - b_k]$ . D'après les hypothèses 1.4 et 1.5, on a  $\underline{d}, \bar{d} \in \mathcal{L}_\infty$  et  $\underline{d}_k \geq 0, \bar{d}_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+$ . Par la suite, selon l'hypothèse 1.2, les variables  $\underline{e}_k$  et  $\bar{e}_k$  sont aussi bornées. D'après l'hypothèse 1.3,  $\underline{e}_k \geq 0$  et  $\bar{e}_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+$ , ceci implique la relation de bornitude suivante :  $\underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k \forall k \in \mathbb{Z}_+$ .

Il est important de noter qu'il n'est pas toujours possible de trouver un gain  $L$  tel que la matrice  $A - LC$  est stable au sens de Schur et non négative à la fois. Afin de relaxer cette restriction un changement de coordonnées invariant dans le temps pour les systèmes LTI a été proposé dans [Efimov, Perruquetti, Raïssi, and Zolghadri 2013a]. Cette transformation est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 1.3** [Efimov, Perruquetti, Raïssi, and Zolghadri 2013a]

Supposons que les hypothèses 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5 sont vérifiées. Il existe une matrice  $R \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$  tel que  $\lambda(A - LC) = \lambda(R)$  et les paires  $(A - LC, e_1), (R, e_2)$  sont observables pour  $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ . Alors, pour tout  $k \in \mathbb{Z}_+$ , les variables  $\underline{x}_k, \bar{x}_k$  sont bornées et

$$\underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k$$

tel que  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$ , avec

$$\underline{x}_k = S^+ \underline{z}_k - S^- \bar{z}_k, \bar{x}_k = S^+ \bar{z}_k - S^- \underline{z}_k,$$

$$\underline{z}_{k+1} = R \underline{z}_k + F y_k - \bar{F} V + (S^{-1})^+ \underline{b}_k - (S^{-1})^- \bar{b}_k,$$

$$\bar{z}_{k+1} = R \bar{z}_k + F y_k + \bar{F} V + (S^{-1})^+ \bar{b}_k - (S^{-1})^- \underline{b}_k,$$

$$\underline{z}_0 = (S^{-1})^+ \underline{x}_0 - (S^{-1})^- \bar{x}_0, \bar{z}_0 = (S^{-1})^+ \bar{x}_0 - (S^{-1})^- \underline{x}_0.$$

où  $S = O_R O_{A-LC}^{-1}$  ( $O_{A-LC}$  et  $O_R$  sont respectivement les matrices d'observabilité des paires  $(A - LC, e_1)$ ,  $(R, e_2)$ ),  $F = S^{-1}L$  et  $\bar{F} = (F^+ + F^-)E_{p \times 1}$ .

**Preuve 1.3** La preuve est donnée dans [Efimov, Perruquetti, Raïssi, and Zolghadri 2013a].

Étant donné la difficulté de satisfaire la coopérativité tout en assurant la stabilité de l'observateur dans la base initiale, un changement de coordonnées invariant dans le temps a été présenté dans la section précédente pour relaxer certaines limitations liées à ces deux conditions. Dans [Mazenc and Bernard 2010, 2011], ce problème a été aussi résolu en utilisant un changement de coordonnées variant dans le temps pour la synthèse des observateurs pour les systèmes à temps continu. Récemment, cette transformation a été étendue à la classe des systèmes à temps discret. Dans [Dinh 2014], un changement de coordonnées pour les systèmes à temps discret a été proposé. Il permet de transformer un système LTI stable en un système stable et coopératif. La transformation est basée sur une représentation de Jordan.

### 1.5.6 Transformation des systèmes linéaires aux systèmes non négatifs

Il a été démontré dans [Dinh 2014] que tout LTI stable peut être transformé en un système stable et coopératif, et ainsi un observateur intervalle peut être synthétisé.

**Théorème 1.4** *On considère le système suivant :*

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.21)$$

avec  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice constante stable au sens de Schur. Alors, il existe un changement de coordonnées à temps variant  $h_x = \mathcal{R}_k x_k$ , où  $(\mathcal{R}_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une séquence des matrices inversibles tel qu'il existe une constante  $\mathcal{C} \geq 0$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $|\mathcal{R}_k| + |\mathcal{R}_k^{-1}| \leq \mathcal{C}$ , qui permet de transformer (1.21) en un système linéaire exponentiellement stable et positif.

Deux cas se présentent. Le premier est celui d'une matrice d'état supposée stable où toutes ses valeurs propres sont réelles. Le problème de non négativité est alors directement résolu par un changement de coordonnées que représente la jordanisation. Le second est celui d'une matrice d'état supposée stable mais possédant des valeurs propres complexes alors la forme de Jordan n'est plus coopérative et un deuxième changement de coordonnées, variant dans le temps, est nécessaire pour obtenir une forme coopérative.

### Transformation LTI

La mise en oeuvre de cette transformation est basée sur la forme canonique de Jordan où pour tout  $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  il existe un changement de coordonnées linéaire invariant dans le temps

$$g_k = \mathcal{P}x_k \quad (1.22)$$

qui transforme le système (1.21) en

$$g_{k+1} = \overline{\mathcal{J}}g_k \quad (1.23)$$

avec

$$\mathcal{J} = \text{diag}\{\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots, \mathcal{J}_s\} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (1.24)$$

où les matrices  $\mathcal{J}_i$  peuvent être partitionnées en deux groupes. Les premières  $r$  matrices  $\mathcal{J}_i$  sont associées aux  $r$  valeurs propres réelles de  $A$  de multiplicité  $n_i$ . Les

autres matrices correspondent aux valeurs propres complexes de multiplicité  $m_i$ . On a alors  $n = \sum_{i=1}^r n_i + \sum_{i=r+1}^s 2m_i$ . Les  $r$  premières matrices sont données par

$$\mathcal{J}_i = \begin{pmatrix} -\mu_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mu_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -\mu_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \quad (1.25)$$

où les  $\mu_i$  sont des nombres réels positifs. Les matrices  $\mathcal{J}_i, i = r+1, \dots, s$  sont données par

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_i & I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_i & I_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & I_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathcal{M}_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m_i \times 2m_i}, \quad (1.26)$$

avec

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} -\kappa_i & \omega_i \\ -\omega_i & -\kappa_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \quad (1.27)$$

Étant donné que le système (1.21) est supposé stable, les valeurs de  $\kappa_i$  et  $\mu_i$  sont positifs. De plus,  $\omega_i \neq 0$ . Lorsque la matrice  $A$  ne possède aucune valeur propre complexe alors le changement de coordonnées LTI  $g_k = \mathcal{P}x_k$  transforme le système initial en un système coopératif. En présence de valeurs propres complexes, cette transformation n'est pas suffisante et ceci est dû à la présence des termes  $\omega_i$  et  $-\omega_i$  hors de la diagonale. Il convient alors d'appliquer un second changement de coordonnées qui ne touche pas aux  $r$  premières matrices  $\mathcal{J}_i$ , mais transforme les matrices  $\mathcal{J}_i$  associées aux valeurs propres complexes en une forme coopérative.

### Transformation LTV

On considère le système (1.23). En utilisant les Lemmes A.2 et A.3 dans [Dinh 2014], on peut déduire que pour tout système

$$a_{k+1} = \mathcal{J}_i a_k, \quad (1.28)$$

Il existe une matrice non négative et stable au sens de Schur  $h_i$  et une séquence  $(\mathcal{Q}_{k,i})$  des matrices inversibles bornée en norme par 1 et d'inverse borné en norme par 1 tel que le changement de coordonnées suivant :

$$b_k = \mathcal{Q}_{i,k} a_k \quad (1.29)$$

donne

$$b_{k+1} = h_i b_k. \quad (1.30)$$

Dans la suite, on considère le changement de coordonnées suivant :

$$h_k = \overline{\mathcal{Q}}_k g_k, \quad (1.31)$$

avec

$$\overline{\mathcal{Q}}_k = \text{diag}\{\mathcal{Q}_{k,1}, \mathcal{Q}_{k,2}, \dots, \mathcal{Q}_{k,s}\} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (1.32)$$

Alors

$$h_{k+1} = \overline{\mathcal{Q}}_{k+1} \overline{\mathcal{J}} g_k = \overline{\mathcal{Q}}_{k+1} \overline{\mathcal{J}} \overline{\mathcal{Q}}_k^{-1} h_k = \overline{h} h_k. \quad (1.33)$$

Finalement, le changement de coordonnées

$$h_{k+1} = \mathcal{R}_k x_k, \quad (1.34)$$

avec  $\mathcal{R}_k^{-1} = \overline{\mathcal{Q}}_k \mathcal{P}$  donne le système à temps invariant exponentiellement stable suivant :

$$h_{k+1} = \overline{h} h_k, \quad (1.35)$$

avec  $\mathcal{R}_k^{-1} = \mathcal{P}^{-1} \overline{\mathcal{Q}}_k^{-1}$ , ce qui implique que les séquences  $\mathcal{R}_k$  et  $\mathcal{R}_k^{-1}$  sont bornées en norme.

Dans la suite, quelques résultats récents de la littérature pour la construction d'observateurs intervalles pour le cas des systèmes LPV sont introduits.

### 1.5.7 Observateurs intervalles pour les systèmes LPV

La description de dynamiques non-linéaires par des modèles LPV attire de plus en plus d'attention au sein de la communauté scientifique grâce à la disponibilité de techniques génériques de synthèse. Les modèles LPV sont caractérisés par des équations d'état où les matrices d'état et de commande dépendent d'un vecteur d'ordonnancement  $\rho$  variant dans le temps. Le vecteur  $\rho$  est souvent supposé mesurable ou fonction de variables directement mesurables. Dans un contexte à erreurs bornées,  $\rho$  est supposé inconnu mais variant dans un domaine compact connu a priori.

Plusieurs travaux sont développés pour la synthèse d'observateurs intervalles pour des systèmes LPV [Raïssi, Videau, and Zolghadri 2010; Efimov, Fridman, Raïssi, Zolghadri, and Seydou 2012; Thabet, Raïssi, Combastel, and Zolghadri 2013; Efimov, Raïssi, and Zolghadri 2013b; Wang, Bevly, and Rajamani 2015; Chebotarev, Efimov, Raïssi, and Zolghadri 2015b]. Un observateur intervalle est proposé dans [Efimov, Perruquetti, Raïssi, and Zolghadri 2013a] pour le cas où le paramètre d'ordonnancement  $\rho_k$  est connu. Un autre observateur intervalle pour la classe des systèmes LPV à temps continu a été proposé dans [Chebotarev, Efimov, Raïssi, and Zolghadri 2015b]. Dans ce travail, deux classes de modèles sont considérées : le cas général des systèmes LPV et ceux non négatifs. Récemment, dans [Efimov, Raïssi, Perruquetti, and Zolghadri 2016] une méthodologie d'estimation des systèmes LPV à temps discret avec un vecteur d'ordonnancement non mesurable est étudiée. La stabilité et la coopérativité de l'observateur intervalle sont exprimées en termes d'inégalité matricielle. Cette méthodologie sera détaillée dans la suite.

On considère un système LPV décrit par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = [A_0 + \Delta A(\rho_k)]x_k + Bu_k + d_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (1.36)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  est l'entrée,  $y_k \in \mathbb{R}^p$  est la sortie. Le vecteur de paramètres d'ordonnancement  $\rho \in \Pi$  est considéré inconnu et seulement l'ensemble des valeurs admissibles  $\Pi$  est donné,  $\rho \in \mathcal{L}_\infty^r$ . Les matrices  $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  sont connues.  $\Delta A : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  est une fonction matricielle supposée continue par morceaux et connue.  $d_k$  et  $v_k$  sont respectivement la perturbation et le bruit supposés bornés.

Les hypothèses suivantes seront utilisées dans la suite.

**Hypothèse 1.6** [*Efimov, Raïssi, Perruquetti, and Zolghadri 2016*]

$$\underline{d}_k \leq d_k \leq \bar{d}_k \text{ and } |v_k| \leq V \quad \forall k \in \mathbb{N}_+, \underline{d}_k, \bar{d}_k \in \mathcal{L}_\infty^n \text{ et } V \in \mathbb{R}_+.$$

**Hypothèse 1.7** [*Efimov, Raïssi, Perruquetti, and Zolghadri 2016*]

$$\underline{\Delta A} \leq \Delta A(\rho) \leq \overline{\Delta A} \quad \forall \rho \in \pi, \underline{\Delta A}, \overline{\Delta A} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

On note que pour une matrice  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , le système (1.36) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$x_{k+1} = [A_0 - LC]x_k + \Delta A(\rho_k)x_k + L[y_k - v_k] + Bu_k + d_k \quad (1.37)$$

D'après le Lemme 1.2 et l'Hypothèse 1.7, pour  $\underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k$ , on a :

$$\begin{aligned} \underline{\Delta A}^+ \underline{x}_k^+ - \overline{\Delta A}^+ \bar{x}_k^- - \underline{\Delta A}^- \bar{x}_k^+ + \overline{\Delta A}^- \underline{x}_k^- &\leq \Delta A(\rho_k)x_k \\ &\leq \overline{\Delta A}^+ \bar{x}_k^+ - \underline{\Delta A}^+ \bar{x}_k^- - \overline{\Delta A}^- \bar{x}_k^+ + \underline{\Delta A}^- \underline{x}_k^- \end{aligned} \quad (1.38)$$

pour  $\underline{x}_k, \bar{x}_k, x_k \in \mathbb{R}^n, \rho_k \in \pi$  et  $k \in \mathbb{N}_+$ .

Une structure de l'observateur intervalle est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = (A - \bar{L}C)\bar{x}_k + Bu_k + [\bar{\Delta A}^+ \bar{x}_k^+ - \underline{\Delta A}^+ \bar{x}_k^- - \bar{\Delta A}^- \underline{x}_k^+ + \underline{\Delta A}^- \underline{x}_k^-] + \bar{d}_k \\ \quad + \bar{L}y_k + |\bar{L}|VE_p \\ \underline{x}_{k+1} = (A - \underline{L}C)\underline{x}_k + Bu_k + [\underline{\Delta A}^+ \underline{x}_k^+ - \bar{\Delta A}^+ \underline{x}_k^- - \underline{\Delta A}^- \bar{x}_k^+ + \bar{\Delta A}^- \bar{x}_k^-] + \underline{d}_k \\ \quad + \underline{L}y_k + |\underline{L}|VE_p \end{cases} \quad (1.39)$$

où  $\underline{x}_k$  et  $\bar{x}_k$  sont les bornes supérieure et inférieure de l'estimé  $x_k$ ,  $\underline{L}$  et  $\bar{L}$  sont les gains de l'observateur.

L'objectif est de déterminer deux gains  $\bar{L}$  et  $\underline{L}$  afin que l'observateur (1.39) assure la stabilité de  $\underline{x}_k$  et  $\bar{x}_k$  en supposant que l'état  $x_k$  est borné et la commande  $u_k$  est connue.

**Hypothèse 1.8** [Efimov, Raïssi, Perruquetti, and Zolghadri 2016]

Il existe deux gains  $\underline{L}$  et  $\bar{L}$  tels que :  $A_0 - \underline{L}C, A_0 - \bar{L}C \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$

**Théorème 1.5** [Efimov, Raïssi, Perruquetti, and Zolghadri 2016]

Supposons que les hypothèses 1.6, 1.7 et 1.8 sont valides,  $x_k \in \mathcal{L}_\infty^n$  et  $u \in \mathcal{L}_\infty^m$ . Alors, les solutions de (1.36) et (1.39) vérifient :

$$\underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k, \forall k \in \mathbb{N}_+$$

tel que  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$ . De plus, s'il existe des matrices définies positives et symétriques  $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  et  $H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  et une constante  $\gamma > 0$  telle que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Psi & G^T P & G^T P \\ PG & P - \gamma I_{2n} & P \\ PG & P & P - H \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (1.40)$$

$$\Psi = G^T P G - P + \gamma \eta^2 I_{2n} + Q \quad (1.41)$$

$$G = \begin{bmatrix} A_0 - \underline{L}C + \underline{\Delta A}^+ & 0 \\ 0 & A_0 - \bar{L}C + \bar{\Delta A}^+ \end{bmatrix}, \quad (1.42)$$

avec  $\eta = \sqrt{2}(\|\underline{\Delta A}^+ - \bar{\Delta A}^+\|_2 + \|\underline{\Delta A}^-\|_2 + \|\bar{\Delta A}^-\|_2)$ , alors,  $\underline{x}_k, \bar{x}_k \in \mathcal{L}_\infty^n$ .

**Preuve 1.4** *La preuve est donnée dans [Efimov, Raïssi, Perruquetti, and Zolghadri 2016].*

Le Théorème 1.5 permet une étude de stabilité de l'observateur intervalle pour le système LPV (1.36). Une analyse permettant de quantifier la précision d'estimation intervalle et de calculer une limite conservative pour la convergence de  $\bar{x} - \underline{x}$  pour les systèmes LPV à temps discret sera développé dans le chapitre 2.

## 1.6 Conclusions

Dans ce chapitre, quelques résultats de la littérature portant sur la commande tolérante aux fautes ont été rappelés en premier lieu. Différentes méthodes de commande tolérante aux fautes ont été présentées dans les cas conventionnel et ensembliste. En second lieu, les méthodologies de synthèse d'un observateur intervalle pour les systèmes linéaires et non-linéaires ont été détaillées. Cet observateur est composé de deux observateurs inférieur et supérieur basés sur une structure de Luenberger. La construction des observateurs est basée sur la coopérativité de l'erreur d'observation. Cette propriété peut être relaxée en utilisant deux changements de coordonnées invariant dans le temps puis variant dans le temps pour la construction des observateurs intervalles destinés au cas des systèmes LTI. La dernière partie de ce chapitre a été dédiée à la construction d'un observateur intervalle pour le système LPV.

Dans le chapitre suivant, nous allons nous appuyer sur les résultats présentés pour construire des observateurs intervalles pour la commande passive tolérante aux fautes pour des systèmes LPV.

# Chapitre 2

## Approche passive à base d'observateurs intervalles

### 2.1 Introduction

La méthode de la FTC passive consiste à utiliser un régulateur robuste qui traitera tous les défauts connus a priori. Étant donné que ni la détection et le diagnostic en temps réel des défauts (FDD) ni la reconfiguration du régulateur ne sont nécessaires, le même régulateur est utilisé en absence ou en présence de défauts sur le système. En présence d'un défaut, un fonctionnement dégradé doit assurer l'objectif principal en termes de performances sans reconfiguration du contrôleur.

L'inconvénient majeur de l'approche FTC passive est que le régulateur ne peut être fiable que pour une classe de défauts connus a priori. Cependant, elle présente l'avantage d'éviter le temps de retard requis dans l'approche FTC active pour le diagnostic en ligne des défauts et la reconfiguration du régulateur. Cet avantage est très important dans des situations pratiques où le temps pendant lequel le système défectueux reste stabilisable est très court.

Différents travaux ont été proposés, basés principalement sur la commande robuste tels que : optimisation linéaire multi-objectifs et techniques basées sur les Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) [Liao, Wang, and Yang 2002], la théorie de retour d'état [Keating, Pachter, and Houppis 1997], la méthode

$H_\infty$  [Niemann and Stoustrup 2002], la théorie de la stabilité absolue [Benosman and Lum 2009].

Dans un contexte à erreurs inconnues mais bornées, plusieurs techniques d'estimation d'état ont été développées pour les systèmes non linéaires, grâce à l'analyse par intervalles et à la propagation de contraintes [Kieffer, Jaulin, and Walter 2002; Walter and Kieffer 2003]. Parmi ces techniques, on distingue l'approche basée sur une structure en boucle fermée où le gain de l'observateur est choisi afin d'imposer une dynamique coopérative pour l'erreur d'observation. Cette approche utilise deux observateurs déterministes basés sur une structure de Luenberger. Elle permet d'estimer des bornes minorante et majorante pour le vecteur d'état [Lamouchi, Raïssi, Amairi, and Aoun 2016b]. En utilisant la théorie des observateurs intervalles, une commande tolérante aux fautes pour les systèmes Linéaires à Paramètres Variants (LPV) est développée [Lamouchi, Amairi, Raïssi, and Aoun 2016a].

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des systèmes LPV à temps discrets soumis à des défauts actionneurs. Dans une deuxième partie des défauts composants sont considérés. Des observateurs intervalles sont synthétisés dans les deux cas. Par la suite, une commande tolérante aux fautes basée sur un retour d'état linéaire est calculée en fonction des bornes de l'observateur.

## 2.2 Préliminaires

**Définition 2.1** [Jiang and Wang 2001; Sontag 2008]

*Une fonction  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction de classe  $\mathcal{K}$  si elle est continue strictement croissante et  $\alpha(0) = 0$ . Elle est dite de classe  $\mathcal{K}_\infty$  si elle est de classe  $\mathcal{K}$  et  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha(s) = +\infty$  (radialement non bornée). Une fonction  $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction de classe  $\mathcal{KL}$  si pour une valeur fixe  $t \geq 0$ ,  $\beta(\cdot, t)$  est de classe  $\mathcal{K}$  et pour une valeur fixe  $s \geq 0$ ,  $\beta(s, \cdot)$  est décroissante et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(s, t) = 0$ .  $\square$*

**Définition 2.2** [*Jiang and Wang 2001; Sontag 2008*]

Un système décrit par :

$$x_{k+1} = f(x_k, w_k) \quad (2.1)$$

est globalement stable entrée-état s'il existe une fonction  $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \in \mathcal{KL}$  et une fonction  $\alpha \in \mathcal{K}$  tel que pour chaque entrée (ou perturbation)  $w \in \mathcal{L}_\infty$  et chaque condition initiale  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ , la relation

$$|x(k, w)| \leq \beta(|x(0)|, k) + \alpha(\|w\|), \forall k \geq 0 \quad (2.2)$$

est vérifiée.  $\square$

**Définition 2.3** [*Jiang and Wang 2001; Sontag 2008*]

Une fonction continue  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  est dite fonction ISS-Lyapunov pour le système (2.1) s'il existe  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty$  et  $\sigma \in \mathcal{K}$  tel que

$$\alpha_1(|x_0|) \leq V(x_0) \leq \alpha_2(|x_0|) \quad (2.3)$$

$$V(f(x_0, w)) - V(x_0) \leq -\alpha_3(|x_0|) + \sigma(|w|) \quad (2.4)$$

$\square$

**Lemme 2.1** [*Jiang and Wang 2001; Sontag 2008*]

Si le système (2.1) admet une fonction ISS-Lyapunov, alors il est stable entrée-état.  $\square$

## 2.3 Systèmes LPV avec défauts actionneurs

### 2.3.1 Position du problème

Soit un système à temps discret décrit par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A + \Delta A(\rho))x_k + Bu_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $u_k \in \mathbb{R}^q$  est l'entrée,  $y_k \in \mathbb{R}^p$  est la sortie;  $w_k$  et  $v_k$  sont respectivement la perturbation et le bruit. Le vecteur de paramètres d'ordonnancement  $\rho \in \Pi$  est considéré inconnu et seulement l'ensemble des valeurs admissibles  $\Pi$  est donné.  $\Delta A : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  est une fonction matricielle supposée continue par morceaux et connue.

Dans la suite, un défaut actionneur additif est considéré dans le système (2.5). Par conséquent, le système avec défaut peut être décrit par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A + \Delta A(\rho))x_k + Bu_k + Ff_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$  est une matrice connue et  $f_k \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur des défauts actionneurs.

Les hypothèses suivantes seront utilisées dans la suite.

**Hypothèse 2.1**  $\underline{\Delta A} \leq \Delta A(\rho) \leq \overline{\Delta A}$ ,  $\forall \rho \in \Pi$  et  $\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . □

**Hypothèse 2.2**  $\underline{f}_k \leq f_k \leq \overline{f}_k$ ,  $\forall f_k \in \mathbb{R}^q$  avec  $\underline{f}_k, \overline{f}_k \in \mathbb{R}^q$ . □

**Hypothèse 2.3** Pour deux séquences connues  $\overline{w}_k$  et  $\underline{w}_k$ , les inégalités  $\underline{w}_k \leq w_k \leq \overline{w}_k$  sont vérifiées pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $-\overline{V}E_p < v_k < \overline{V}E_p$ , où  $\overline{V}$  est une constante positive. □

L'hypothèse 2.1 indique que la matrice  $\Delta A(\rho)$  est bornée et elle appartient à l'intervalle  $[\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}]$ . Même si la valeur du vecteur d'ordonnancement  $\rho$  n'est pas disponible pour la mesure, le calcul de  $\underline{\Delta A}$  et  $\overline{\Delta A}$  est possible pour un ensemble donné  $\Pi$  et une fonction  $\Delta A : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  connue. Les hypothèses 2.2 et 2.3 indiquent, respectivement, que le vecteur de défaut appartient à l'intervalle  $[\underline{f}_k, \overline{f}_k]$  et que la perturbation  $w_k$  et le bruit de mesure  $v_k$  sont inconnus mais bornés.

L'objectif est de stabiliser de manière robuste le système (2.6) avec une commande par retour d'état même en présence de défauts actionneurs et de perturbations externes.

### 2.3.2 Observateur Intervalle

Le système LPV (2.6) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + \psi(x_k) + Bu_k + \varphi(f_k) + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (2.7)$$

avec  $\psi(x_k) = \Delta A(\rho)x_k$  et  $\varphi(f_k) = Ff_k$ .

Une structure d'observateur intervalle pour le système (2.7) est donnée par [Lamouchi, Raïssi, Amairi, and Aoun 2017b] :

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = (A - LC)\bar{x}_k + Bu_k + \bar{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \bar{\varphi}(\bar{f}_k, \underline{f}_k) + \bar{w}_k + Ly_k + |L|\bar{V}E_p \\ \underline{x}_{k+1} = (A - LC)\underline{x}_k + Bu_k + \underline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \underline{\varphi}(\bar{f}_k, \underline{f}_k) + \underline{w}_k + Ly_k - |L|\bar{V}E_p \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $\bar{x}_k$  et  $\underline{x}_k$  sont des bornes supérieure et inférieure de  $x_k$ ,  $\bar{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) = \overline{\Delta A}^+ \bar{x}_k^+ - \underline{\Delta A}^+ \bar{x}_k^- - \overline{\Delta A}^- \underline{x}_k^+ + \underline{\Delta A}^- \underline{x}_k^-$ ,  $\underline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) = \underline{\Delta A}^+ \underline{x}_k^+ - \overline{\Delta A}^+ \underline{x}_k^- - \underline{\Delta A}^- \bar{x}_k^+ + \overline{\Delta A}^- \bar{x}_k^-$ ,  $\bar{\varphi}(\bar{f}_k, \underline{f}_k) = F^+ \bar{f}_k - F^- \underline{f}_k$ ,  $\underline{\varphi}(\bar{f}_k, \underline{f}_k) = F^+ \underline{f}_k - F^- \bar{f}_k$ .

L'observateur intervalle (2.8) dépend des fonctions  $\underline{\psi}$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $\underline{\varphi}$  et  $\bar{\varphi}$ . Ces fonctions dépendent aussi des variables  $\underline{x}^-$ ,  $\underline{x}^+$ ,  $\bar{x}^-$ ,  $\bar{x}^+$ , qui sont calculées par la fonction  $\max(\cdot)$ . L'observateur intervalle (2.8) est alors non-linéaire et globalement lipschitzien.

On introduit les erreurs d'observation  $\bar{e}_k = \bar{x}_k - x_k$  et  $\underline{e}_k = x_k - \underline{x}_k$ . Leur dynamiques sont définies par :

$$\begin{cases} \bar{e}_{k+1} = (A - LC)\bar{e}_k + \bar{\Gamma}_k(\bar{x}_k, \underline{x}_k) \\ \underline{e}_{k+1} = (A - LC)\underline{e}_k + \underline{\Gamma}_k(\bar{x}_k, \underline{x}_k) \end{cases} \quad (2.9)$$

avec  $\bar{\Gamma}_k(\bar{x}_k, \underline{x}_k) = \bar{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) - \psi(x_k) + \bar{\varphi}(\bar{f}_k, \underline{f}_k) - \varphi(f_k) + \bar{w}_k - w_k + |L|\bar{V}E_p + Lv_k$  et  $\underline{\Gamma}_k(\bar{x}_k, \underline{x}_k) = -\underline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \psi(x_k) - \underline{\varphi}(\bar{f}_k, \underline{f}_k) + \varphi(f_k) - \underline{w}_k + w_k + |L|\bar{V}E_p - Lv_k$ .

**Remarque 2.1** Les fonctions  $\overline{\Gamma}_k(\overline{x}_k, \underline{x}_k)$  et  $\underline{\Gamma}_k(\overline{x}_k, \underline{x}_k)$  sont globalement Lipschitziennes, alors pour  $\underline{x}_k \leq x_k \leq \overline{x}_k$  et pour une norme sous-multiplicative  $\|\cdot\|$ , il existe des constantes positives  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  et  $b_3$  tels que [Zheng, Efimov, and Perruquetti 2016] :

$$\begin{cases} \|\overline{\Gamma}_k(\overline{x}_k, \underline{x}_k)\| \leq a_1 \|\overline{x}_k - x_k\| + a_2 \|\underline{x}_k - x_k\| + a_3 \\ \|\underline{\Gamma}_k(\overline{x}_k, \underline{x}_k)\| \leq b_1 \|\overline{x}_k - x_k\| + b_2 \|\underline{x}_k - x_k\| + b_3 \end{cases} \quad (2.10)$$

Les valeurs de  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  peuvent être calculées en utilisant le Lemme 6 dans [Zheng, Efimov, and Perruquetti 2016].  $\square$

Les conditions pour l'estimation intervalle de (2.7) à travers (2.8) sont données par le théorème 2.1.

**Théorème 2.1** [Lamouchi, Raïssi, Amairi, and Aoun 2017b]

Supposons que les hypothèses 2.1, 2.2 et 2.3 sont vérifiées, la matrice  $A - LC$  est non négative et  $x_k \in \mathcal{L}_\infty^n$ . Si l'état initial  $x_0$  vérifie  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \overline{x}_0$ , alors la solution de (2.8)  $x_k$  satisfait :

$$\underline{x}_k \leq x_k \leq \overline{x}_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

De plus, s'il existe des matrices définies positives et symétriques  $Q, P$  et  $W$  tel que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Upsilon & -D^T P \\ -PD & -W \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (2.12)$$

$$\Upsilon = D^T P D - P + \alpha(\|W + P\|)I + Q \quad (2.13)$$

avec  $D = A - LC$  et  $\alpha = 3 \max((a_1^2 + b_1^2), (a_2^2 + b_2^2))$ , alors  $\underline{x}_k, \overline{x}_k \in \mathcal{L}_\infty^n$ .  $\square$

**Preuve 2.1** D'après le Lemme 1.2 et l'hypothèse 2.1, on a pour  $x_k \in \mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} \underline{\Delta A}^+ x_k^+ - \overline{\Delta A}^+ x_k^- - \underline{\Delta A}^- x_k^+ + \overline{\Delta A}^- x_k^- &\leq \psi(x_k) \\ &\leq \overline{\Delta A}^+ x_k^+ - \underline{\Delta A}^+ x_k^- - \overline{\Delta A}^- x_k^+ + \underline{\Delta A}^- x_k^- \end{aligned} \quad (2.14)$$

D'après le Lemme 1.2 et l'hypothèse 2.2, on a pour tout  $f_k \in \mathbb{R}^q$  :

$$F^+ \underline{f}_k - F^- \bar{f}_k \leq F f_k \leq F^+ \bar{f}_k - F^- \underline{f}_k \quad (2.15)$$

Alors, les vecteurs  $\underline{\psi}(\underline{x}_k, \bar{x}_k)$ ,  $\bar{\psi}(\underline{x}_k, \bar{x}_k)$ ,  $\underline{\varphi}(\underline{f}_k, \bar{f}_k)$  et  $\bar{\varphi}(\underline{f}_k, \bar{f}_k)$  sont construits tels que :  $\underline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) \leq \psi(x_k) \leq \bar{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k)$ ,  $\underline{\varphi}(\underline{f}_k, \bar{f}_k) \leq \varphi(f_k) \leq \bar{\varphi}(\underline{f}_k, \bar{f}_k)$ . De plus, le bruit de mesure et les perturbations vérifient :  $\underline{w}_k \leq w_k \leq \bar{w}_k$  et  $-\bar{V}E_p < v_k < \bar{V}E_p$ . Ceci implique que,  $\bar{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) - \psi(x_k) \geq 0$ ,  $\psi(x_k) - \underline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) \geq 0$ ,  $\bar{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) - \varphi(x_k) \geq 0$ ,  $\varphi(x_k) - \underline{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) \geq 0$ ,  $\bar{w}_k - w_k \geq 0$ ,  $w_k - \underline{w}_k \geq 0$ ,  $|L|VE_p + Lv_k \geq 0$ ,  $|L|VE_p - Lv_k \geq 0$ . Dans ce cas,  $\bar{\Gamma}_k$  et  $\underline{\Gamma}_k$  sont non négatives.

Étant donné que  $A - LC$  est positive,  $\bar{\Gamma}_k$  et  $\underline{\Gamma}_k$  sont positives, si  $\bar{x}_0$  et  $\underline{x}_0$  sont choisis de telle sorte que  $\bar{e}_0$  et  $\underline{e}_0$  sont positives, les dynamiques des erreurs d'observation  $\bar{e}_k$  et  $\underline{e}_k$  sont alors positives pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Il reste maintenant à montrer que les variables  $\bar{x}_k, \underline{x}_k$  restent bornées  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Pour cet objectif, soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\bar{e}_k, \underline{e}_k) = \bar{e}_k^T P \bar{e}_k + \underline{e}_k^T P \underline{e}_k \quad (2.16)$$

La variation de la fonction de Lyapunov est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(k+1, \bar{e}_{k+1}, \underline{e}_{k+1}) - V(k, \bar{e}_k, \underline{e}_k) \\ &= \bar{e}_k^T (D^T P D - P) \bar{e}_k + 2\bar{e}_k^T D^T P \bar{\Gamma}_k + \bar{\Gamma}_k^T P \bar{\Gamma}_k + \underline{e}_k^T (D^T P D - P) \underline{e}_k \\ &\quad + 2\underline{e}_k^T D^T P \underline{\Gamma}_k + \underline{\Gamma}_k^T P \underline{\Gamma}_k \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pour avoir un découplage complet entre  $\{\underline{e}_k, \bar{e}_k\}$  et  $\{\underline{\Gamma}_k, \bar{\Gamma}_k\}$ , une matrice  $W$  est introduite pour obtenir les inégalités suivantes :

$$2\bar{e}_k^T D^T P \bar{\Gamma}_k = 2\bar{e}_k^T D^T P W^{-0.5} W^{0.5} \bar{\Gamma}_k \leq \bar{e}_k^T D^T P W^{-1} P D \bar{e}_k + \bar{\Gamma}_k^T W \bar{\Gamma}_k \quad (2.18)$$

$$2\underline{e}_k^T D^T P \underline{\Gamma}_k = 2\underline{e}_k^T D^T P W^{-0.5} W^{0.5} \underline{\Gamma}_k \leq \underline{e}_k^T D^T P W^{-1} P D \underline{e}_k + \underline{\Gamma}_k^T W \underline{\Gamma}_k \quad (2.19)$$

L'utilisation de ces inégalités dans (2.17) donne :

$$\begin{aligned}
 \Delta V &\leq \bar{e}_k^T (D^T PD - P + D^T PW^{-1}PD) \bar{e}_k + \underline{e}_k^T (D^T PD - P + D^T PW^{-1}PD) \underline{e}_k \\
 &\quad + \bar{\Gamma}_k^T (W + P) \bar{\Gamma}_k + \underline{\Gamma}_k^T (W + P) \underline{\Gamma}_k \\
 &\leq \bar{e}_k^T (D^T PD - P + D^T PW^{-1}PD) \bar{e}_k + \underline{e}_k^T (D^T PD - P + D^T PW^{-1}PD) \underline{e}_k \\
 &\quad + 3 \|W + P\| (a_1^2 \|\bar{e}_k\|^2 + a_2^2 \|\underline{e}_k\|^2 + a_3^2) + 3 \|W + P\| (b_1^2 \|\bar{e}_k\|^2 + b_2^2 \|\underline{e}_k\|^2 + b_3^2) \\
 &\leq \bar{e}_k^T (D^T PD - P + D^T PW^{-1}PD) \bar{e}_k + \underline{e}_k^T (D^T PD - P + D^T PW^{-1}PD) \underline{e}_k \\
 &\quad + \alpha \|W + P\| \bar{e}_k^T \bar{e}_k + \alpha \|W + P\| \underline{e}_k^T \underline{e}_k + 3 \|W + P\| (a_3^2 + b_3^2) \\
 &\leq \bar{e}_k^T (D^T PD - P + D^T PW^{-1}PD + \alpha \|W + P\| I) \bar{e}_k + \underline{e}_k^T (D^T PD - P \\
 &\quad + D^T PW^{-1}PD + \alpha \|W + P\| I) \underline{e}_k + 3 \|W + P\| (a_3^2 + b_3^2) \\
 &\leq -\bar{e}_k^T Q \bar{e}_k^T - \underline{e}_k^T Q \underline{e}_k^T + 3 \|W + P\| (a_3^2 + b_3^2).
 \end{aligned}$$

En utilisant (2.12) on a  $\Delta V \leq -\bar{e}_k^T Q \bar{e}_k^T - \underline{e}_k^T Q \underline{e}_k^T + \beta$  avec  $\beta = 3 \|W + P\| (a_3^2 + b_3^2)$ , ce qui implique la bornitude des dynamiques des erreurs d'estimation  $\bar{e}_k, \underline{e}_k$ . Les variables  $\bar{x}_k, \underline{x}_k$  sont alors bornées  $\forall k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Souvent, il n'est pas possible de trouver un gain  $L$  pour que  $A - LC$  soit non négative. Cette restriction peut être relaxée par un changement de coordonnées  $z_k = Rx_k$  pour lequel  $E = R(A - LC)S$  est non négative avec  $S = R^{-1}$ . L'existence d'une telle transformation est assurée par le lemme suivant :

**Lemme 2.2** [Efimov, Perruquetti, Raïssi, and Zolghadri 2013a]

Soient les matrices suivantes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . S'il existe une matrice  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  tel que  $A - LC$  et  $S$  ont les mêmes valeurs propres et deux vecteurs  $e_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $e_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  tels que les paires  $(A - LC, e_1)$ ,  $(S, e_2)$  sont observables, alors, il existe une matrice non singulière  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tel que  $R(A - LC)R^{-1}$  est non négative.

$\square$

Une procédure simple pour choisir  $R$  peut être proposée pour le cas de valeurs propres réelles (non nécessairement simples). Par exemple, si la paire  $(A, C)$  est

observable, on peut déterminer un gain  $L$  tel que  $(A - LC)$  possède des valeurs propres réelles. On choisit alors une matrice  $R$  sous une forme triangulaire inférieure avec les valeurs propres de  $(A - LC)$  sur la diagonale et des éléments non négatifs en dehors de cette diagonale.

En outre, il a été démontré dans [Mazenc, Dinh, and Niculescu 2014] en utilisant la forme canonique de Jordan, qu'il est toujours possible de transformer n'importe quelle matrice carrée constante à une matrice non négative avec une transformation constante ou variable dans le temps.

En introduisant la variable  $z_k = Rx_k$ , le système (2.7) peut être représenté par :

$$\begin{cases} z_{k+1} = Ez_k + \psi(z_k) + RBu_k + \varphi_z(f_k) + R w_k \\ y_k = CSz_k + v_k \end{cases} \quad (2.20)$$

avec  $\psi(z_k) = R\Delta A(\rho)S z_k$  et  $\varphi_z(f_k) = RF f_k$ .

L'observateur intervalle de système (2.20) dans la base  $z$  est donné par :

$$\begin{cases} \bar{z}_{k+1} = E\bar{z}_k + RBu_k + \bar{\psi}(\bar{z}_k, \underline{z}_k) + \bar{\varphi}_z(\bar{f}_k, \underline{f}_k) + \bar{\rho}_z(\bar{w}_k, \underline{w}_k) + RLy_k + R|L| \bar{V}E_p \\ \underline{z}_{k+1} = E\underline{z}_k + RBu_k + \underline{\psi}(\bar{z}_k, \underline{z}_k) + \underline{\varphi}_z(\bar{f}_k, \underline{f}_k) + \underline{\rho}_z(\bar{w}_k, \underline{w}_k) + RLy_k - R|L| \bar{V}E_p \end{cases} \quad (2.21)$$

où  $\bar{\psi}(\bar{z}_k, \underline{z}_k) = (\bar{\sigma}^+ \bar{z}_k^+ - \underline{\sigma}^+ \bar{z}_k^- - \bar{\sigma}^- \underline{z}_k^+ + \underline{\sigma}^- \underline{z}_k^-)$ ,  $\underline{\psi}(\bar{z}_k, \underline{z}_k) = (\underline{\sigma}^+ \underline{z}_k^+ - \bar{\sigma}^+ \underline{z}_k^- - \underline{\sigma}^- \bar{z}_k^+ + \bar{\sigma}^- \bar{z}_k^-)$ ,  $\bar{\sigma} = S^+(R^+ \bar{\Delta A} - R^- \underline{\Delta A}) - S^-(R^+ \underline{\Delta A} - R^- \bar{\Delta A})$ ,  $\underline{\sigma} = S^+(R^+ \underline{\Delta A} - R^- \bar{\Delta A}) - S^-(R^+ \bar{\Delta A} - R^- \underline{\Delta A})$ ,  $\bar{\varphi}_z(\bar{f}_k, \underline{f}_k) = R^+(F^+ \bar{f}_k - F^- \underline{f}_k) - R^-(F^+ \underline{f}_k - F^- \bar{f}_k)$ ,  $\underline{\varphi}_z(\bar{f}_k, \underline{f}_k) = R^+(F^+ \underline{f}_k - F^- \bar{f}_k) - R^-(F^+ \bar{f}_k - F^- \underline{f}_k)$ ,  $\bar{\rho}_z(\bar{w}_k, \underline{w}_k) = R^+ \underline{w}_k - R^- \bar{w}_k$  et  $\underline{\rho}_z(\bar{w}_k, \underline{w}_k) = R^+ \bar{w}_k - R^- \underline{w}_k$ . avec la condition initiale :

$$\begin{cases} \bar{z}_0 = R^+ \bar{x}_0 - R^- \underline{x}_0 \\ \underline{z}_0 = R^+ \underline{x}_0 - R^- \bar{x}_0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Les erreurs d'estimation sont maintenant définies dans la nouvelle base par :  $\bar{e}_k = \bar{z}_k - z_k$  et  $\underline{e}_k = z_k - \underline{z}_k$ . Leurs dynamiques sont représentées par :

$$\begin{cases} \bar{e}_{k+1} = E\bar{e}_k + \bar{\Gamma}(\bar{z}_k, \underline{z}_k) \\ \underline{e}_{k+1} = E\underline{e}_k + \underline{\Gamma}(\bar{z}_k, \underline{z}_k) \end{cases} \quad (2.23)$$

avec  $\bar{\Gamma}(\bar{z}_k, \underline{z}_k) = -\psi(z_k) - \varphi_z(f_k) + \bar{\psi}(z_k^+, z_k^-) + \bar{\varphi}_z(\bar{f}_k, \underline{f}_k) + \bar{\rho}_z(\bar{w}_k, \underline{w}_k) - R w_k + R|L| \bar{V} E_p + R L v_k$  et  $\underline{\Gamma}(\bar{z}_k, \underline{z}_k) = \psi(z_k) + \varphi_z(f_k) - \underline{\psi}(z_k^+, z_k^-) - \underline{\varphi}_z(\bar{f}_k, \underline{f}_k) - \underline{\rho}_z(\bar{w}_k, \underline{w}_k) + R w_k + R|L| \bar{V} E_p - R L v_k$ .

Les fonctions  $\bar{\Gamma}_k(\bar{z}_k, \underline{z}_k)$  et  $\underline{\Gamma}_k(\bar{z}_k, \underline{z}_k)$  sont globalement lipschitziennes, alors pour  $\underline{z}_k \leq z_k \leq \bar{z}_k$  et pour une norme sous-multiplicative choisie  $\|\cdot\|$ , il existe des constantes positives  $c_1, c_2, c_3, d_1, d_2$  et  $d_3$  tel que :

$$\begin{cases} \|\bar{\Gamma}(\bar{z}_k, \underline{z}_k)\| \leq c_1 \|\bar{z}_k - z_k\| + c_2 \|\underline{z}_k - z_k\| + c_3 \\ \|\underline{\Gamma}(\bar{z}_k, \underline{z}_k)\| \leq d_1 \|\bar{z}_k - z_k\| + d_2 \|\underline{z}_k - z_k\| + d_3 \end{cases} \quad (2.24)$$

Dans la nouvelle base, la structure de l'observateur (2.21) est similaire à celle dans (2.8).

**Théorème 2.2** [Lamouchi, Raïssi, Amairi, and Aoun 2017b]

Soit une matrice  $R$  non singulière telle que la matrice  $R(A - LC)S$  est non négative. Alors, la solution de (2.21) satisfait :

$$\underline{z}_k \leq z_k \leq \bar{z}_k, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.25)$$

avec  $\underline{z}_0 \leq z_0 \leq \bar{z}_0$ .

De plus, s'il existe des matrices symétriques définies positives  $Q, P$  et  $W$  telle que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :

$$\Phi_z = \begin{bmatrix} \Upsilon_z & -E^T P \\ -P E & -W \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (2.26)$$

$$\Upsilon_z = E^T P E - P + \alpha_z (\|W + P\|) I + Q \quad (2.27)$$

avec  $E = R(A - LC)S$  et  $\alpha_z = 3 \max((c_1^2 + d_1^2), (c_2^2 + d_2^2))$ , alors  $\underline{z}_k, \bar{z}_k \in \mathcal{L}_\infty^n$ .  $\square$

**Preuve 2.2** La preuve est similaire à celle du Théorème 2.1.  $\square$

### 2.3.3 Synthèse de la commande tolérante aux fautes

Cette section est dédiée à la synthèse d'une loi de commande assurant la stabilité du système (2.6) en présence de défauts et de perturbations. L'avantage principal de

cette approche est de stabiliser deux systèmes complètement déterministes (la borne inférieure et supérieure de l'observateur) au lieu du système LPV dont le vecteur d'ordonnement est inconnu.

Puisque l'observateur intervalle (2.8) est composé de deux observateurs classiques, une loi de commande peut être calculée en utilisant la borne inférieure ou supérieure  $(\bar{x}_k, \underline{x}_k)$  tel que suggéré dans [Mazenc, Dinh, and Niculescu 2013].

**Théorème 2.3** *Supposons que les hypothèses 2.1, 2.2 et 2.3 sont vérifiées et l'état initial  $x_0$  vérifie  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$ . Soit*

$$u_k = -K\bar{x}_k \quad (2.28)$$

où  $K$  est un gain de retour. S'il existe des matrices  $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, P = P^T \succ 0$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, Q = Q^T \succ 0$ ,  $W \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, W = W^T \succ 0$  et une constante  $\gamma > 0$  tel que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Upsilon & G^T P & G^T P \\ PG & P - \gamma I_{2n} & P \\ PG & P & P - W \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (2.29)$$

$$\Upsilon = G^T P G - P + Q + \gamma \alpha^2 I_{2n},$$

$$G = \begin{bmatrix} A - LC + \overline{\Delta A}^+ - BK & 0 \\ -BK & A - LC + \underline{\Delta A}^+ \end{bmatrix},$$

et

$$\alpha = \sqrt{2}(\|\underline{\Delta A}^+ - \overline{\Delta A}^+\|_2 + \|\underline{\Delta A}^-\|_2 + \|\overline{\Delta A}^-\|_2),$$

alors  $\underline{x}_k, \bar{x}_k$  et  $x_k \in \mathcal{L}_n^\infty$ . □

**Preuve 2.3** *L'observateur intervalle (2.8) peut être réécrit comme suit :*

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = (A - LC + \overline{\Delta A}^+) \bar{x}_k + Bu_k + \overline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \bar{\delta}_k \\ \underline{x}_{k+1} = (A - LC + \underline{\Delta A}^+) \underline{x}_k + Bu_k + \underline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \underline{\delta}_k \end{cases} \quad (2.30)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) = (\overline{\Delta A}^+ - \underline{\Delta A}^+) \bar{x}_k^- - \overline{\Delta A}^- \underline{x}_k^+ + \underline{\Delta A}^- \underline{x}_k^- \\ \underline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) = (\underline{\Delta A}^+ - \overline{\Delta A}^+) \underline{x}_k^- - \underline{\Delta A}^- \bar{x}_k^+ + \overline{\Delta A}^- \bar{x}_k^- \\ \bar{\delta}_k = \overline{\varphi}(\bar{f}_k, \underline{f}_k) + \bar{w}_k + Ly_k + |L|\bar{V}E_p \\ \underline{\delta}_k = \underline{\varphi}(\bar{f}_k, \underline{f}_k) + \underline{w}_k + Ly_k - |L|\bar{V}E_p. \end{cases} \quad (2.31)$$

En remplaçant la commande (2.28) dans (2.30), on obtient :

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = (A - LC + \overline{\Delta A}^+ - BK) \bar{x}_k + \tilde{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \bar{\delta}_k \\ \underline{x}_{k+1} = (A - LC + \underline{\Delta A}^+) \underline{x}_k - BK \bar{x}_k + \underline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \underline{\delta}_k \end{cases} \quad (2.32)$$

Les dynamiques de  $\bar{x}_k$  et  $\underline{x}_k$  dans (2.32) sont couplées (les dynamiques  $\bar{x}_k$  et  $\underline{x}_k$  dependent à la fois de  $\bar{x}_k$  et  $\underline{x}_k$ ). Les fonctions  $\tilde{\psi}$  and  $\underline{\psi}$  sont globalement Lipschitziennes. De plus, on a  $|\underline{x}_k^-| \leq |\underline{x}_k|$ ,  $|\underline{x}_k^+| \leq |\underline{x}_k|$ ,  $|\bar{x}_k^-| \leq |\bar{x}_k|$  et  $|\bar{x}_k^+| \leq |\bar{x}_k|$ , alors :

$$\begin{cases} \left| \underline{\psi}(\bar{x}, \underline{x}) \right| \leq \left\| \underline{\Delta A}^+ - \overline{\Delta A}^+ \right\|_2 |\underline{x}| + (\left\| \underline{\Delta A}^- \right\|_2 + \left\| \overline{\Delta A}^- \right\|_2) |\bar{x}|, \\ \left| \tilde{\psi}(\bar{x}, \underline{x}) \right| \leq \left\| \overline{\Delta A}^+ - \underline{\Delta A}^+ \right\|_2 |\bar{x}| + (\left\| \overline{\Delta A}^- \right\|_2 + \left\| \underline{\Delta A}^- \right\|_2) |\underline{x}|. \end{cases} \quad (2.33)$$

Pour étudier la stabilité asymptotique du système (2.32), on introduit le système auxiliaire suivant :

$$\xi_{k+1} = G\xi_k + \chi(\xi_k) + \delta_k \quad (2.34)$$

$$\text{avec } \xi_k = \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \bar{x}_k \end{bmatrix}, \quad \chi(\xi_k) = \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_k \\ \underline{\psi}_k \end{bmatrix}, \quad \delta_k = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_k \\ \underline{\delta}_k \end{bmatrix}, \quad |\chi(\xi_k)| \leq \alpha |\xi_k| \text{ et } \delta_k \in \mathcal{L}_\infty^{2n}.$$

Soit la fonction de Lyapunov quadratique définie positive donnée par :

$$V_k = \xi_k^T P \xi_k \quad (2.35)$$

La variation  $\Delta V$  de la fonction  $V$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \Delta V &= V_{k+1} - V_k \\
 &= \xi_k^T G^T P G \xi_k - \xi_k^T P \xi_k + \xi_k^T G^T P \chi(\xi_k) + \chi^T(\xi_k) P G \xi_k + \chi^T(\xi_k) P \chi(\xi_k) + 2\xi_k^T G^T P \delta_k \\
 &\quad + 2\delta_k^T P \chi(\xi_k) + \delta_k^T P \delta_k \\
 &\leq \xi_k^T (G^T P G - P) \xi_k + \xi_k^T G^T P \chi(\xi_k) + \chi^T(\xi_k) P G \xi_k + \chi^T(\xi_k) P \chi(\xi_k) + 2\xi_k^T G^T P \delta_k \\
 &\quad + 2\delta_k^T P \chi(\xi_k) + \delta_k^T (P - W) \delta_k + \gamma \alpha^2 \xi_k^T \xi_k - \gamma \chi^T(\xi_k) \chi(\xi_k) + \xi_k^T Q \xi_k \\
 &\quad - \xi_k^T Q \xi_k + \delta_k^T W \delta_k \\
 &\leq \begin{bmatrix} \xi_k \\ \chi(\xi_k) \\ \delta_k \end{bmatrix}^T \Phi \begin{bmatrix} \xi_k \\ \chi(\xi_k) \\ \delta_k \end{bmatrix} - \xi_k^T Q \xi_k + \delta_k^T W \delta_k
 \end{aligned}$$

Si les conditions du théorème 2.3 sont vérifiées, alors  $\underline{x}_k$  et  $\bar{x}_k$  restent bornées pour tout  $u_k \in \mathbb{R}^q$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , ce qui implique la bornitude de  $x_k$ .  $\square$

**Remarque 2.2** Si  $A - LC$  n'est pas positive, une transformation de coordonnées  $z_k = Rx_k$  est nécessaire tel que  $E = R(A - LC)S$  est non négative avec  $S = R^{-1}$ . Dans ce cas, la stabilité peut être obtenue dans la base de coordonnées  $z_k = Rx_k$ .  $\square$

Dans la base  $z$ , l'observateur intervalle (2.21) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \bar{z}_{k+1} = (E + \bar{\sigma}^+) \bar{z}_k + RBu_k + \bar{\psi}(\bar{z}_k, \underline{z}_k) + \bar{\delta}_k^z \\ \underline{z}_{k+1} = (E + \underline{\sigma}^+) \underline{z}_k + RBu_k + \underline{\psi}(\bar{z}_k, \underline{z}_k) + \underline{\delta}_k^z \end{cases} \quad (2.36)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{\psi}(\bar{z}_k, \underline{z}_k) = (\bar{\sigma}^+ - \underline{\sigma}^+) \bar{z}_k^- - \bar{\sigma}^- \underline{z}_k^+ + \underline{\sigma}^- \underline{z}_k^- \\ \underline{\psi}(\bar{z}_k, \underline{z}_k) = (\underline{\sigma}^+ - \bar{\sigma}^+) \underline{z}_k^- - \underline{\sigma}^- \bar{z}_k^+ + \bar{\sigma}^- \bar{z}_k^- \\ \bar{\delta}_k^z = \bar{\varphi}_z(\bar{f}_k, \underline{f}_k) + \bar{\rho}_z(\bar{w}_k, \underline{w}_k) + RLy_k + R|L| \bar{V}E_p \\ \underline{\delta}_k^z = \underline{\varphi}_z(\bar{f}_k, \underline{f}_k) + \underline{\rho}_z(\bar{w}_k, \underline{w}_k) + RLy_k - R|L| \bar{V}E_p. \end{cases} \quad (2.37)$$

Sous certaines hypothèses 2.1, 2.2 et 2.3 et en se basant sur le changement de variables  $z_k = Rx_k$ , la procédure de stabilité est donnée par le théorème 2.4.

**Théorème 2.4** *Soit une matrice  $R$  non singulière telle que la matrice  $R(A-LC)S$  est non négative. Alors, la solution de (2.36) satisfait :*

$$\underline{z}_k \leq z_k \leq \bar{z}_k, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.38)$$

avec  $\underline{z}_0 \leq z_0 \leq \bar{z}_0$ . Soit

$$u_k = -K\bar{x}_k \quad (2.39)$$

où  $K$  est un gain de retour. S'il existe des matrices  $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $P = P^T \succ 0$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $Q = Q^T \succ 0$ ,  $W \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $W = W^T \succ 0$  et une constante  $\gamma > 0$  tel que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :

$$\Phi_z = \begin{bmatrix} \Upsilon & G_z^T P & G_z^T P \\ PG_z & P - \gamma I_{2n} & P \\ PG_z & P & P - W \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (2.40)$$

$$\Upsilon = G_z^T PG_z - P + Q + \gamma \alpha_z^2 I_{2n},$$

$$G_z = \begin{bmatrix} E + \bar{\sigma}^+ - RBKS^+ & RBKS^- \\ -RBKS^- & E + \underline{\sigma}^+ - RBKS^+ \end{bmatrix},$$

et

$$\alpha_z = \sqrt{2}(\|\underline{\sigma}^+ - \bar{\sigma}^+\|_2 + \|\underline{\sigma}^-\|_2 + \|\bar{\sigma}^-\|_2),$$

alors  $\underline{z}_k, \bar{z}_k$  et  $z_k \in \mathcal{L}_\infty^n$ . □

**Preuve 2.4** *La preuve est similaire à celle du Théorème 2.3.*

### 2.3.4 Application à un système à trois réservoirs

Soit un système de trois réservoirs (Figure 2.1) inspiré de [Noura, Theilliol, Ponsart, and Chamseddine 2009; Rotondo, Nejjari, and Puig 2014]. Ce système se compose de trois réservoirs pouvant être remplis par trois pompes identiques et indépendantes délivrant les flux de liquide  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$ .

Les réservoirs sont interconnectés l'un à l'autre par l'intermédiaire de deux tuyaux  $Q_{12}$  et  $Q_{23}$ , tandis que le tuyau de sortie du système est situé au niveau du troisième réservoir et fournit un écoulement  $Q_{N3}$  au consommateur. Les niveaux de liquides  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$  sont utilisées comme variables d'état dans le modèle. L'aire de chaque réservoir cylindrique est  $A = 1,54 \times 10^{-2} m^2$  et les constantes d'écoulement des tuyaux d'interconnexion et du tuyau de sortie sont respectivement  $c_{12} = 6 \times 10^{-4} m^{5/2}/s$ ,  $c_{23} = 13 \times 10^{-4} m^{5/2}/s$  et  $c_3 = 15 \times 10^{-4} m^{5/2}/s$ .

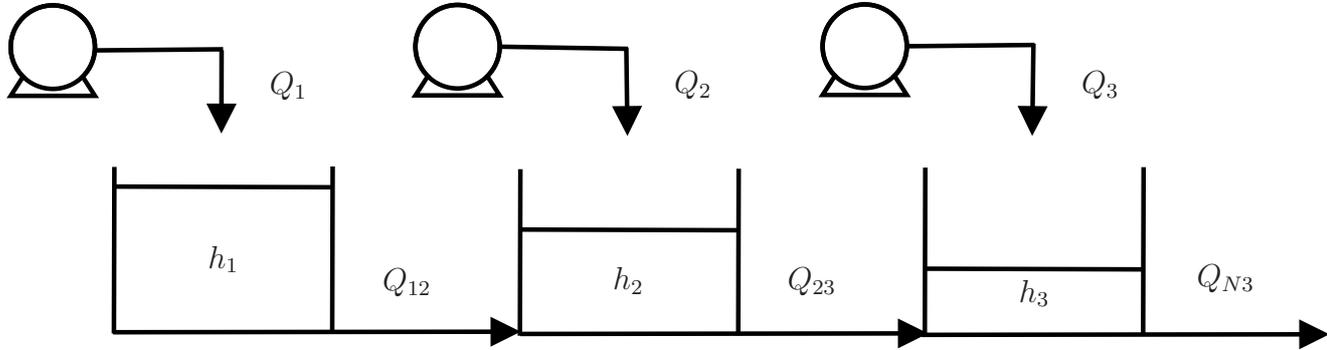


FIGURE 2.1 – Système à trois réservoirs.

Le modèle non-linéaire du système de trois réservoirs est obtenu à partir du bilan de masse et de la loi de Torricelli.

En supposant que  $h_1(t) > h_2(t) > h_3(t)$ , le modèle s'écrit conformément à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A}(Q_1(t) - Q_{12}(t)) \\ \frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A}(Q_2(t) + Q_{12}(t) - Q_{23}(t)) \\ \frac{dh_3}{dt} = \frac{1}{A}(Q_3(t) + Q_{23}(t) - Q_{N3}(t)) \\ Q_{12}(t) = c_{12}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \\ Q_{23}(t) = c_{23}\sqrt{h_2(t) - h_3(t)} \\ Q_{N3}(t) = c_3\sqrt{h_3(t)} \end{array} \right. \quad (2.41)$$

Le système d'équations (2.41) peut être réécrit sous la forme quasi-LPV suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dt} \\ \frac{dh_2}{dt} \\ \frac{dh_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1(\rho(t)) & 0 & 0 \\ v_1(\rho(t)) & -v_2(\rho(t)) & 0 \\ 0 & v_2(\rho(t)) & -v_3(\rho(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

avec  $u_1(t) = Q_1(t)$  est le flux de la première pompe,  $u_2(t) = Q_2(t)$  est le flux de la deuxième pompe,  $u_3(t) = Q_3(t)$  est le flux de la troisième pompe et  $v(\rho(t)) = [v_1(\rho(t)) \ v_2(\rho(t)) \ v_3(\rho(t))]^T$  est le vecteur des paramètres d'ordonnancement où  $\rho(t) = [h_1(t) \ h_2(t) \ h_3(t)]^T$  tel que :

$$\begin{aligned} v_1(\rho(t)) &= \frac{Q_{12}(t)}{Ah_1(t)} = \frac{c_{12}}{A} \frac{\sqrt{h_1(t) - h_2(t)}}{h_1(t)} \\ v_2(\rho(t)) &= \frac{Q_{23}(t)}{Ah_2(t)} = \frac{c_{23}}{A} \frac{\sqrt{h_2(t) - h_3(t)}}{h_2(t)} \\ v_3(\rho(t)) &= \frac{Q_{N3}(t)}{Ah_3(t)} = \frac{c_3}{A} \frac{\sqrt{h_3(t)}}{h_3(t)} \\ b_{11} = b_{22} = b_{33} &= \frac{1}{A} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Pour permettre une implémentation numérique du schéma global, un modèle quasi-LPV à temps discret peut être obtenu en utilisant une approximation d'Euler avec une période d'échantillonnage  $T_s = 0.1s$  :

$$\begin{bmatrix} h_{1,k+1} \\ h_{2,k+1} \\ h_{3,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - v_1(\rho_k)T_s & 0 & 0 \\ v_1(\rho_k)T_s & 1 - v_2(\rho_k)T_s & 0 \\ 0 & v_2(\rho_k)T_s & 1 - v_3(\rho_k)T_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1,k} \\ h_{2,k} \\ h_{3,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}T_s & 0 & 0 \\ 0 & b_{22}T_s & 0 \\ 0 & 0 & b_{33}T_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,k} \\ u_{2,k} \\ u_{3,k} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Le système (2.44) soumis à des défauts, des perturbations et des bruits de mesure est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} h_{1,k+1} \\ h_{2,k+1} \\ h_{3,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - v_1(\rho_k)T_s & 0 & 0 \\ v_1(\rho_k)T_s & 1 - v_2(\rho_k)T_s & 0 \\ 0 & v_2(\rho_k)T_s & 1 - v_3(\rho_k)T_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1,k} \\ h_{2,k} \\ h_{3,k} \end{bmatrix} \\ \\ + \begin{bmatrix} b_{11}T_s & 0 & 0 \\ 0 & b_{22}T_s & 0 \\ 0 & 0 & b_{33}T_s \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} u_{1,k} \\ u_{2,k} \\ u_{3,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{1,k} \\ f_{2,k} \\ f_{3,k} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} w_{1,k} \\ w_{2,k} \\ w_{3,k} \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} y_{1,k} \\ y_{2,k} \\ y_{3,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1,k} \\ h_{2,k} \\ h_{3,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1,k} \\ v_{2,k} \\ v_{3,k} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.45)$$

Dans la suite, la deuxième pompe est considérée comme complètement en panne, seules la première et la troisième restent fonctionnelles, ce qui mène à un système de trois réservoirs avec deux pompes.

Des scénarios de défauts actionneurs additifs sont considérés comme suit :

$$f_k = \begin{cases} [0 \ 0 \ 0]^T & t < 100s \\ [f_{1,k} \ 0 \ 0]^T & 100s \leq t < 250s \\ [f_{1,k} \ 0 \ f_{3,k}]^T & t \geq 250s \end{cases} \quad (2.46)$$

Cela signifie que le système fonctionne dans des conditions nominales non défectueuses jusqu'à  $t = 100s$ . À partir de  $t = 100s$ , un défaut additif apparaît dans la première pompe  $f_{1,k}$ . À  $t = 250s$  un autre défaut additif apparaît dans la troisième pompe  $f_{3,k}$ .

Dans cet exemple, on suppose que le système fonctionne avec  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$  appartenant respectivement aux intervalles  $[0.6m, 1.8m]$ ,  $[0.5m, 0.3m]$  et  $[0.1m, 0.25m]$  et  $T_s = 0.1s$ . Les perturbations  $w_k$ , le bruit de mesures  $v_k$  et les défauts  $f_{1,k}$  et  $f_{3,k}$  sont des signaux uniformément distribués supposés appartenir

respectivement aux intervalles  $[-0.05m \ 0.05m]$ ,  $[-0.05m \ 0.05m]$ ,  $[4 \times 10^{-2} \ 8 \times 10^{-2}]$  et  $[4 \times 10^{-2} \ 8 \times 10^{-2}]$ .

Le gain d'observation  $L = [0.6364 \ 0 \ 0; 0 \ 1.1 \ 0; 0 \ 0 \ 1.0899]$  vérifie la condition de non négativité du matrice  $A - LC$ . Alors, toutes les conditions du théorème 2.1 et 2.3 sont vérifiées. Par conséquence, le système est un observateur intervalle de (2.44).

Soit  $u_k = -K\bar{h}_k$  la commande qui permet de stabiliser robustement le système en boucle fermée avec  $K = [0.0539 \ 0 \ 0; 0 \ 0.0169 \ 0; 0 \ 0 \ 0.0077]$ . Les états initiaux sont choisis comme suit  $h = [1 \ 0.4 \ 0.15]^T$ ,  $\bar{h} = [1.8 \ 0.5 \ 0.25]^T$ ,  $\underline{h} = [0.6 \ 0.3 \ 0.1]^T$ .

Cet exemple ne traite que la stabilisation du système des trois réservoirs. La régulation de sortie peut être considérée en utilisant un gain de preconnection ou un intégrateur.

Les résultats des simulations sont présentés sur les figures 2.2, 2.3 et 2.4, où les lignes en pointillés correspondent aux bornes inférieure et supérieure de l'état estimé et les lignes continues correspondent à l'état réel.

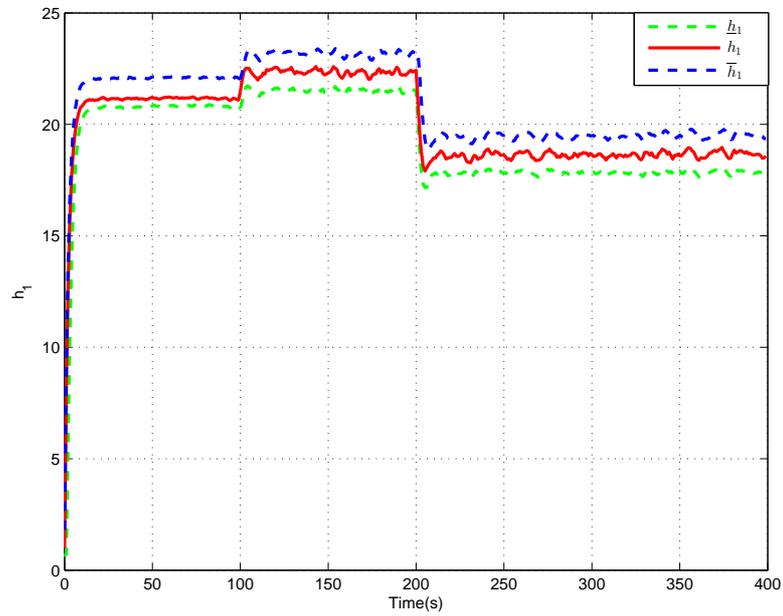


FIGURE 2.2 – Niveau de liquide du premier réservoir  $h_1$  [m].

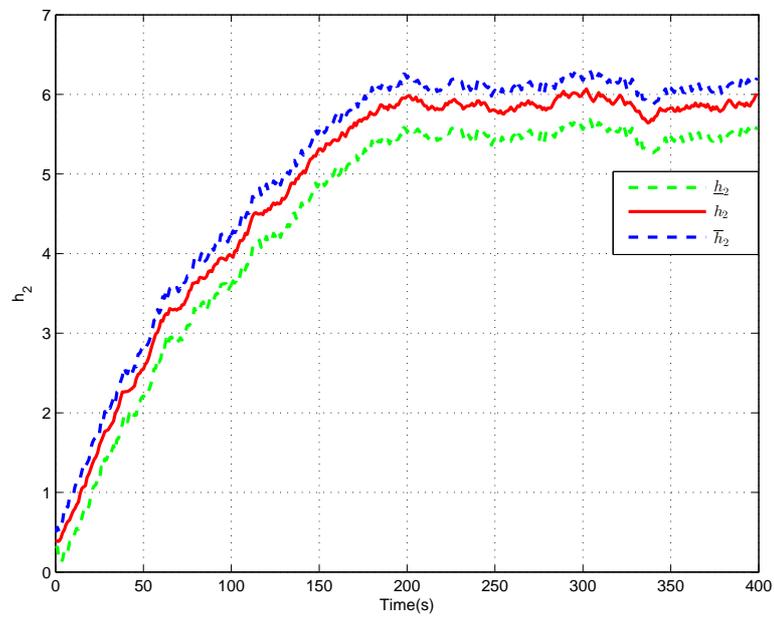


FIGURE 2.3 – Niveau de liquide du deuxième réservoir  $h_2$  [m].

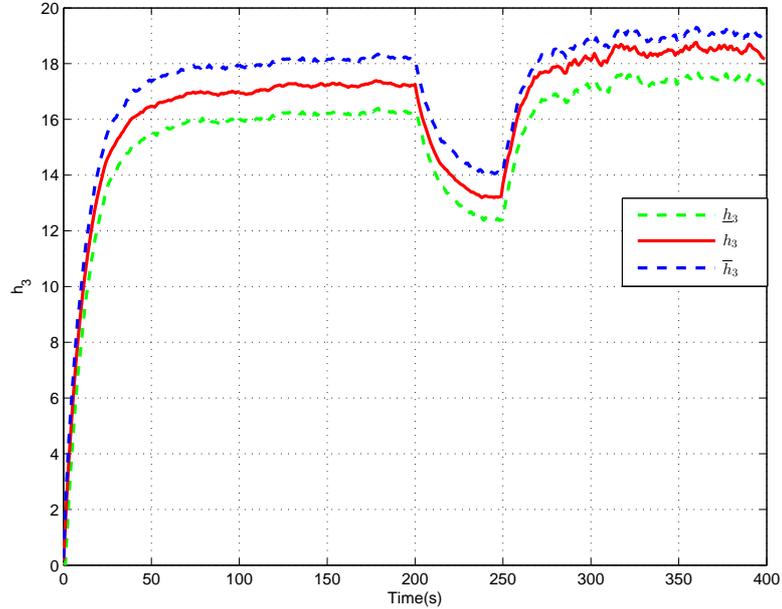


FIGURE 2.4 – Niveau de liquide du troisième réservoir  $h_3$ [m].

Les scénarios de défauts actionneurs additifs entraînent une perte des performances du système à l'instant  $t = 100s$  (défaut actionneur sur la première pompe) et l'instant  $t = 200s$  (défaut actionneur sur la troisième pompe). À partir de l'analyse des figures, on peut remarquer que l'apparition de défauts cause une modification par rapport aux niveaux nominales de liquide si aucune stratégie de commande FTC n'est utilisée.

L'approche proposée montre la capacité de récupérer les performances nominales du système en évitant la perte de stabilité due à l'apparition de défauts additifs sur l'actionneur et de perturbations

## 2.4 Système LPV avec défauts composants

### 2.4.1 Position du problème

On considère un système LPV décrit par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A(\rho_k, \eta_k)x_k + Bu_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (2.47)$$

Le vecteur des paramètres d'ordonnancement  $\rho_k \in \Pi$  est supposé inconnu mais borné. Seulement l'ensemble des valeurs admissibles  $\Pi$  est donné.  $\eta_k$  est le vecteur des paramètres des défauts composants, supposé appartenir à l'ensemble des valeurs admissibles  $\Xi$ .

Dans ce travail, on considère le cas où la matrice  $A(\rho_k, \eta_k)$  dépend de  $\rho_k$  et  $\eta_k$  tel que :

$$A(\rho_k, \eta_k) = A_0(\rho_k) + \eta_{1,k}A_1(\rho_k) + \dots + \eta_{r,k}A_r(\rho_k) \quad (2.48)$$

avec  $\eta_{i,k}$ ,  $i = 0, 1, \dots, r$  caractérisent des défauts composants du système et  $A_i(\rho_k)$ ,  $i = 0, 1, \dots, r$  sont des matrices qui dépendent de manière affine de  $\rho_k$ .

Deux cas peuvent être considérés : cas sans défaut ( $\eta_{i,k} = 0$ ) et cas avec défaut ( $\eta_{i,k} \neq 0$ ) :

$$\begin{cases} A(\rho_k, \eta_k) = A_0(\rho_k) + \sum_{i=1}^r \eta_{i,k}A_i(\rho_k) & \text{si } \eta_{i,k} \neq 0, \forall k \\ A(\rho_k, \eta_k) = A_0(\rho_k) & \text{si } \eta_{i,k} = 0, \forall k \end{cases} \quad (2.49)$$

avec  $A_0(\rho_k) = A^0 + \Delta A(\rho_k)$  et  $\Delta A(\rho_k) : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  est une fonction matricielle continue par morceaux.

En présence de défaut, le système (2.47) est décrit par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = [A^0 + \Delta A(\rho_k) + \sum_{i=1}^r \eta_{i,k}A_i(\rho_k)]x_k + Bu_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (2.50)$$

**Hypothèse 2.4**  $\underline{\rho}_k \leq \rho_k \leq \bar{\rho}_k$  et  $\underline{\eta}_{i,k} \leq \eta_{i,k} \leq \bar{\eta}_{i,k}$ ,  $\forall \rho_k \in \Pi, \forall \eta_k \in \Xi$  avec  $\underline{\rho}_k, \bar{\rho}_k, \underline{\eta}_{i,k}, \bar{\eta}_{i,k} \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Hypothèse 2.5**  $\underline{\Delta A}(\underline{\rho}_k, \bar{\rho}_k) \leq \Delta A(\rho_k) \leq \overline{\Delta A}(\underline{\rho}_k, \bar{\rho}_k)$  et  $\underline{A}_i(\underline{\rho}_k, \bar{\rho}_k) \leq A_i(\rho_k) \leq \overline{A}_i(\underline{\rho}_k, \bar{\rho}_k)$ ,  $\forall \rho_k \in \Pi$  avec  $\underline{\Delta A}(\underline{\rho}_k, \bar{\rho}_k), \overline{\Delta A}(\underline{\rho}_k, \bar{\rho}_k), \underline{A}_i(\underline{\rho}_k, \bar{\rho}_k), \overline{A}_i(\underline{\rho}_k, \bar{\rho}_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .  $\square$

**Hypothèse 2.6**  $\underline{w} \leq w_k \leq \bar{w}$ , tel que  $\bar{w}, \underline{w}$  et  $-\bar{V}E_p \leq v_k \leq \bar{V}E_p$ , avec  $\bar{V}$  est une constante positive.  $\square$

Dans la suite, pour des raisons de simplicité, on note, respectivement :  $\overline{\Delta A}(\underline{\rho}_k, \bar{\rho}_k), \underline{\Delta A}(\underline{\rho}_k, \bar{\rho}_k), \overline{A}_i(\underline{\rho}_k, \bar{\rho}_k), \underline{A}_i(\underline{\rho}_k, \bar{\rho}_k)$  par  $\overline{\Delta A}_k, \underline{\Delta A}_k, \overline{A}_{i,k}$  et  $\underline{A}_{i,k}$ .

L'objectif du travail suivant est de stabiliser le système (2.50) avec une commande par retour d'état en préservant la stabilité en présence de défauts internes et de perturbations.

## 2.4.2 Observateur intervalle

Le système LPV (2.50) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A^0 x_k + \varphi(x_k) + \psi(x_k) + Bu_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (2.51)$$

où  $\varphi(x_k) = \Delta A(\rho_k)x_k$ ,  $\psi(x_k) = \sum_{i=1}^r \eta_{i,k} A_i(\rho_k)x_k = \sum_{i=1}^r H_i(\rho_k, \eta_k)x_k$  avec  $H_i(\rho_k, \eta_k)$  donné par :

$$H_i(\rho_k, \eta_k) = \eta_{i,k} A_i(\rho_k) \quad (2.52)$$

**Hypothèse 2.7** Il existe un gain  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  tel que  $A^0 - LC$  est non négative.  $\square$

On considère une structure d'observateur intervalle pour le système (2.51) décrite par :

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = (A^0 - LC)\bar{x}_k + \bar{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \bar{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + Bu_k + \bar{w} + Ly_k + |L| \bar{V}E_p \\ \underline{x}_{k+1} = (A^0 - LC)\underline{x}_k + \underline{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \underline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + Bu_k + \underline{w} + Ly_k - |L| \bar{V}E_p \end{cases} \quad (2.53)$$

où

$$\begin{cases} \bar{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) = \sum_{i=1}^r (\bar{H}_{i,k}^+ \bar{x}_k^+ - \underline{H}_{i,k}^+ \bar{x}_k^- - \bar{H}_{i,k}^- \underline{x}_k^+ + \underline{H}_{i,k}^- \underline{x}_k^-) \\ \underline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) = \sum_{i=1}^r (\underline{H}_{i,k}^+ \underline{x}_k^+ - \bar{H}_{i,k}^+ \underline{x}_k^- - \underline{H}_{i,k}^- \bar{x}_k^+ + \bar{H}_{i,k}^- \bar{x}_k^-) \\ \bar{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) = \bar{\Delta A}_k^+ \bar{x}^+ - \underline{\Delta A}_k^+ \bar{x}^- - \bar{\Delta A}_k^- \underline{x}^+ + \underline{\Delta A}_k^- \underline{x}^- \\ \underline{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) = \underline{\Delta A}_k^+ \underline{x}^+ - \bar{\Delta A}_k^+ \underline{x}^- - \underline{\Delta A}_k^- \bar{x}^+ + \bar{\Delta A}_k^- \bar{x}^- \end{cases} \quad (2.54)$$

et

$$\begin{cases} \bar{H}_{i,k} = \bar{\eta}_{i,k}^+ \bar{A}_{i,k}^+ - \underline{\eta}_{i,k}^+ \bar{A}_{i,k}^- - \bar{\eta}_{i,k}^- \underline{A}_{i,k}^+ + \underline{\eta}_{i,k}^- \underline{A}_{i,k}^- \\ \underline{H}_{i,k} = \underline{\eta}_{i,k}^+ \underline{A}_{i,k}^+ - \bar{\eta}_{i,k}^+ \underline{A}_{i,k}^- - \underline{\eta}_{i,k}^- \bar{A}_{i,k}^+ + \bar{\eta}_{i,k}^- \bar{A}_{i,k}^- \end{cases} \quad (2.55)$$

avec  $\underline{H}_{i,k}^+ = \max\{0, \underline{H}_{i,k}\}$ ,  $\bar{H}_{i,k}^+ = \max\{0, \bar{H}_{i,k}\}$ ,  $\underline{H}_{i,k}^- = \max\{0, -\underline{H}_{i,k}\}$  et  $\bar{H}_{i,k}^- = \max\{0, -\bar{H}_{i,k}\}$ .

Pour montrer la bornitude de l'observateur (2.53), une analyse de stabilité basée sur la théorie de Lyapunov est introduite dans la suite.

**Théorème 2.5** *Supposons que les hypothèses 2.4, 2.5, 2.6 et 2.7 sont vérifiées,  $x_k \in \mathcal{L}_\infty^n$  et  $u_k \in \mathcal{L}_\infty^q$ . Si l'état initial  $x_0$  vérifie  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$ , alors l'état  $x_k$  solution de (2.53) satisfait :*

$$\underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.56)$$

De plus, s'il existe des matrices symétriques définies positives  $Q, P$  et  $W$  tel que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :

$$\Phi_x = \begin{bmatrix} \Upsilon_x & -D^T P \\ -PD & -W \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.57)$$

$$\Upsilon_x = D^T P D - P + \alpha_x (\|W + P\|) I + Q \quad (2.58)$$

où  $D = A^0 - LC$  et  $\alpha = 3 \max((a_1'^2 + b_1'^2), (a_2'^2 + b_2'^2))$ , avec  $a_1', a_2', b_1', b_2'$  sont des constantes positives, alors  $\underline{x}_k, \bar{x}_k \in \mathcal{L}_\infty^n$ .  $\square$

**Preuve 2.5** [Lamouchi, Raïssi, Amairi, and Aoun 2017b]

Les dynamiques des erreurs d'observations  $\bar{e}_k$  et  $\underline{e}_k$  sont définies par :

$$\begin{cases} \bar{e}_{k+1} = D\bar{e}_k + \bar{\Gamma}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) \\ \underline{e}_{k+1} = D\underline{e}_k + \underline{\Gamma}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) \end{cases} \quad (2.59)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{\Gamma}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) = \bar{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) - \psi(x_k) + \bar{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) - \varphi(x_k) + \bar{w} - w_k + |L| VE_p + Lv_k \\ \underline{\Gamma}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) = \psi(x_k) - \underline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \varphi(x_k) - \underline{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + w_k - \underline{w} + |L| VE_p - Lv_k \end{cases} \quad (2.60)$$

D'après le Lemme 1.2 et l'hypothèse 2.5, on a pour tout  $x_k \in \mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} \underline{\Delta A}_k^+ \underline{x}_k^+ - \overline{\Delta A}_k^+ \underline{x}_k^- - \underline{\Delta A}_k^- \bar{x}_k^+ + \overline{\Delta A}_k^+ \bar{x}_k^- &\leq \varphi(x_k) \\ &\leq \overline{\Delta A}_k^+ \bar{x}_k^+ - \underline{\Delta A}_k^+ \bar{x}_k^- - \overline{\Delta A}_k^+ \underline{x}_k^+ + \underline{\Delta A}_k^- \underline{x}_k^- \end{aligned} \quad (2.61)$$

D'après le Lemme 1.2, l'hypothèse 2.4 et l'hypothèse 2.5, on a :

$$\begin{aligned} \underline{H}_{i,k} &= \underline{\eta}_{i,k}^+ \underline{A}_{i,k}^+ - \bar{\eta}_i^+ \underline{A}_{i,k}^- - \underline{\eta}_{i,k}^- \bar{A}_{i,k}^+ + \bar{\eta}_{i,k}^- \bar{A}_{i,k}^- \leq H_i(\rho_k, \eta_k) \\ &\leq \bar{H}_{i,k} = \bar{\eta}_{i,k}^+ \bar{A}_{i,k}^+ - \underline{\eta}_{i,k}^+ \bar{A}_{i,k}^- - \bar{\eta}_{i,k}^- \underline{A}_{i,k}^+ + \underline{\eta}_{i,k}^- \underline{A}_{i,k}^- \end{aligned} \quad (2.62)$$

Ainsi, pour  $x_k \in \mathbb{R}^n$  on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(\underline{x}_k, \bar{x}_k) &= \sum_{i=1}^r (\underline{H}_{i,k}^+ \underline{x}_k^+ - \bar{H}_{i,k}^+ \underline{x}_k^- - \underline{H}_{i,k}^- \bar{x}_k^+ + \bar{H}_{i,k}^- \bar{x}_k^-) \leq \psi(x_k) \leq \\ \bar{\psi}(\underline{x}_k, \bar{x}_k) &= \sum_{i=1}^r (\bar{H}_{i,k}^+ \bar{x}_k^+ - \underline{H}_{i,k}^+ \bar{x}_k^- - \bar{H}_{i,k}^- \underline{x}_k^+ + \underline{H}_{i,k}^- \underline{x}_k^-) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Comme  $A^0 - LC$  est supposée non négative, et les termes  $\bar{w} - w_k + |L| VE_p + Lv_k$  et  $w_k - \underline{w} + |L| VE_p - Lv_k$  sont aussi non négatifs grâce à l'hypothèse 2.6, on a  $\bar{\Gamma}_k$  et  $\underline{\Gamma}_k$  sont non négatives. Ainsi, le système (2.59) est coopératif et si  $\bar{x}_0$  et  $\underline{x}_0$  sont choisis de telles sorte que  $\bar{e}_0$  et  $\underline{e}_0$  sont positives, alors les dynamiques des erreurs d'estimation  $\bar{e}_k$  et  $\underline{e}_k$  restent positives pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Par conséquent, l'inégalité (2.56) est obtenue.

Montrons maintenant que les variables  $\bar{x}_k, \underline{x}_k$  restent bornées  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

La structure de l'observateur intervalle (2.53) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = D\bar{x}_k + \bar{\Pi}(\underline{x}_k, \bar{x}_k) \\ \underline{x}_{k+1} = D\underline{x}_k + \underline{\Pi}(\underline{x}_k, \bar{x}_k) \end{cases} \quad (2.64)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{\Pi}(\underline{x}_k, \bar{x}_k) = \bar{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \bar{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + Bu_k + \bar{w} + Ly_k + |L| \bar{V}E_p \\ \underline{\Pi}(\underline{x}_k, \bar{x}_k) = \underline{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \underline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + Bu_k + \underline{w} + Ly_k - |L| \bar{V}E_p \end{cases} \quad (2.65)$$

Sachant que les fonctions  $\bar{\Pi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k)$  et  $\underline{\Pi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k)$  sont globalement Lipschitziennes, le Lemme 6 dans [Zheng, Efimov, and Perruquetti 2016] montre que pour  $u_k \in \mathcal{L}_\infty^q$ ,  $\underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k$  et pour une norme sous-multiplicative  $\|\cdot\|$ , il existe des constantes  $a'_1, a'_2, a'_3, b'_1, b'_2$  et  $b'_3$  tel que :

$$\begin{cases} \|\bar{\Pi}_k(\bar{x}_k, \underline{x}_k)\| \leq a'_1 \|\bar{x}_k - x_k\| + a'_2 \|\underline{x}_k - x_k\| + a'_3 \\ \|\underline{\Pi}_k(\bar{x}_k, \underline{x}_k)\| \leq b'_1 \|\bar{x}_k - x_k\| + b'_2 \|\underline{x}_k - x_k\| + b'_3 \end{cases} \quad (2.66)$$

Pour étudier la stabilité, soit la fonction de Lyapunov quadratique définie positive suivante :

$$V(\bar{x}_k, \underline{x}_k) = \bar{x}_k^T P \bar{x}_k + \underline{x}_k^T P \underline{x}_k \quad (2.67)$$

$\Delta V$  est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(\bar{x}_{k+1}, \underline{x}_{k+1}) - V(\bar{x}_k, \underline{x}_k) \\ &= \bar{x}_k^T (D^T P D - P) \bar{x}_k + 2\bar{x}_k^T D^T P \bar{\Pi} + \bar{\Pi}^T P \bar{\Pi} + \underline{x}_k^T (D^T P D - P) \underline{x}_k \\ &\quad + 2\underline{x}_k^T D^T P \underline{\Pi} + \underline{\Pi}^T P \underline{\Pi} \end{aligned} \quad (2.68)$$

L'équation (2.68) donne :

$$\begin{aligned}
 \Delta V &\leq \bar{\underline{x}}_k^T (D^T PD - P + D^T PW^{-1} PD) \bar{\underline{x}}_k + \underline{\underline{x}}_k^T (D^T PD - P + D^T PW^{-1} PD) \underline{\underline{x}}_k \\
 &\quad + \bar{\Pi}^T (W + P) \bar{\Pi} + \underline{\Pi}^T (W + P) \underline{\Pi} \\
 &\leq \bar{\underline{x}}_k^T (D^T PD - P + D^T PW^{-1} PD) \bar{\underline{x}}_k + \underline{\underline{x}}_k^T (D^T PD - P + D^T PW^{-1} PD) \underline{\underline{x}}_k \\
 &\quad + 3 \|W + P\| (a_1'^2 \|\bar{\underline{x}}_k\|^2 + a_2'^2 \|\underline{\underline{x}}_k\|^2 + a_3'^2) + 3 \|W + P\| (b_1'^2 \|\bar{\underline{x}}_k\|^2 + b_2'^2 \|\underline{\underline{x}}_k\|^2 + b_3'^2) \\
 &\leq \bar{\underline{x}}_k^T (D^T PD - P + D^T PW^{-1} PD) \bar{\underline{x}}_k + \underline{\underline{x}}_k^T (D^T PD - P + D^T PW^{-1} PD) \underline{\underline{x}}_k \\
 &\quad + \alpha_x \|W + P\| \bar{\underline{x}}_k^T \bar{\underline{x}}_k + \alpha_x \|W + P\| \underline{\underline{x}}_k^T \underline{\underline{x}}_k + 3 \|W + P\| (a_3'^2 + b_3'^2) \\
 &\leq \bar{\underline{x}}_k^T (D^T PD - P + D^T PW^{-1} PD + \alpha_x \|W + P\| I) \bar{\underline{x}}_k + \underline{\underline{x}}_k^T (D^T PD - P \\
 &\quad + D^T PW^{-1} PD + \alpha_x \|W + P\| I) \underline{\underline{x}}_k + 3 \|W + P\| (a_3'^2 + b_3'^2).
 \end{aligned}$$

Si l'inégalité matricielle (2.57) est vérifiée, on a

$$\Delta V \leq -\bar{\underline{x}}_k^T Q \bar{\underline{x}}_k - \underline{\underline{x}}_k^T Q \underline{\underline{x}}_k + 3 \|W + P\| (a_3'^2 + b_3'^2) \quad (2.69)$$

Comme  $Q$  est définie positive, la fonction quadratique  $V$  satisfait les propriétés (2.3) et (2.4). Alors, en utilisant le Lemma 2.1 il en résulte que le système (2.53) est ISS, ce qui implique la bornitude des variables  $\bar{\underline{x}}_k, \underline{\underline{x}}_k \forall k \in \mathbb{N}$ .

### 2.4.3 Analyse quantitative de l'estimation

L'analyse quantitative de l'estimation par intervalle a été étudiée pour les systèmes à temps continu par des nombreuses méthodes. Dans [Raïssi, Videau, and Zolghadri 2010], une solution pour déterminer la convergence de l'observateur intervalle en utilisant l'erreur totale est proposée. Dans [Chebotarev, Efimov, Raïssi, and Zolghadri 2015a], la robustesse et la précision de l'estimation par rapport à l'incertitudes du modèle sont analysées en appliquant les normes  $\mathcal{L}_1/\mathcal{L}_2$ . Une extension de ce dernier article au cas des systèmes à temps discret est proposée dans cette section.

La convergence de l'observateur intervalle (2.53) est étudiée en considérant

l'erreur d'estimation totale  $e_k = \bar{x}_k - \underline{x}_k$  donnée par :

$$\begin{aligned}
 e_{k+1} &= \underline{e}_k + \bar{e}_k \\
 &= De_k + \bar{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) - \underline{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \bar{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) - \underline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \delta_k \\
 &= De_k + \phi_k + \chi_k + \delta_k
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

où

$$\begin{cases} \phi_k = \bar{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) - \underline{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) \\ \chi_k = \bar{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) - \underline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) \\ \delta_k = \bar{w} - \underline{w} + 2|L|\bar{V}E_p \end{cases}$$

En appliquant la norme euclidienne  $\|\cdot\|$ , on obtient :

$$\begin{cases} \|\phi_k\| = \|\bar{\varphi}_k - \underline{\varphi}_k\| = \|\bar{\varphi}_k - \varphi_k + \varphi_k - \underline{\varphi}_k\| \leq \|\bar{\varphi}_k - \varphi_k\| + \|\underline{\varphi}_k - \varphi_k\| \\ \|\chi_k\| = \|\bar{\psi}_k - \underline{\psi}_k\| = \|\bar{\psi}_k - \psi_k + \psi_k - \underline{\psi}_k\| \leq \|\bar{\psi}_k - \psi_k\| + \|\underline{\psi}_k - \psi_k\| \end{cases} \tag{2.71}$$

Les fonctions  $\bar{\varphi}_k, \underline{\varphi}_k, \bar{\psi}_k$  and  $\underline{\psi}_k$  sont globalement Lipschitziennes. En utilisant le Lemme 6 dans [Zheng, Efimov, and Perruquetti 2016], avec  $\underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k$  et pour une norme sous-multiplicative  $\|\cdot\|$ , il existe des constantes positives  $a_i'', b_i'', c_i''$  et  $d_i''$ ,  $i = 1..3$  tel que :

$$\begin{cases} \|\bar{\varphi}_k - \varphi_k\| \leq a_1''\|\bar{e}_k\| + a_2''\|\underline{e}_k\| + a_3'' \\ \|\underline{\varphi}_k - \varphi_k\| \leq b_1''\|\bar{e}_k\| + b_2''\|\underline{e}_k\| + b_3'' \end{cases} \tag{2.72}$$

et

$$\begin{cases} \|\bar{\psi}_k - \psi_k\| \leq c_1''\|\bar{e}_k\| + c_2''\|\underline{e}_k\| + c_3'' \\ \|\underline{\psi}_k - \psi_k\| \leq d_1''\|\bar{e}_k\| + d_2''\|\underline{e}_k\| + d_3'' \end{cases} \tag{2.73}$$

À partir des équations (2.71), (2.72) et (3.18), on obtient :

$$\begin{cases} \|\phi_k\| \leq (a_1'' + b_1'')\|\bar{e}_k\| + (a_2'' + b_2'')\|\underline{e}_k\| + (a_3'' + b_3'') \\ \|\chi_k\| \leq (c_1'' + d_1'')\|\bar{e}_k\| + (c_2'' + d_2'')\|\underline{e}_k\| + (c_3'' + d_3'') \end{cases} \tag{2.74}$$

Aussi on a,

$$\begin{cases} \|\phi_k\| \leq (a_1'' + b_1'' + a_2'' + b_2'')\|e_k\| + (a_3'' + b_3'') \\ \|\chi_k\| \leq (c_1'' + d_1'' + c_2'' + d_2'')\|e_k\| + (c_3'' + d_3'') \end{cases} \tag{2.75}$$

Il existe deux constantes  $\sigma > 0$  et  $\varrho > 0$  tel que :

$$\begin{cases} (a_1'' + b_1'' + a_2'' + b_2'') \|e_k\| + (a_3'' + b_3'') \leq \sigma(a_1'' + b_1'' + a_2'' + b_2'') \|e_k\| \\ (c_1'' + d_1'' + c_2'' + d_2'') \|e_k\| + (c_3'' + d_3'') \leq \varrho(c_1 + d_1 + c_2 + d_2) \|e_k\| \end{cases} \quad (2.76)$$

Alors, à partir des équations (2.75) et (2.76) on a :

$$\begin{cases} \|\phi_k\| \leq \sigma(a_1'' + b_1'' + a_2'' + b_2'') \|e_k\| = \check{\alpha} \|e_k\| \\ \|\chi_k\| \leq \varrho(c_1'' + d_1'' + c_2'' + d_2'') \|e_k\| = \check{\beta} \|e_k\| \end{cases} \quad (2.77)$$

avec

$$\begin{cases} \check{\alpha} = \sigma(a_1'' + b_1'' + a_2'' + b_2'') \\ \check{\beta} = \varrho(c_1'' + d_1'' + c_2'' + d_2'') \end{cases} \quad (2.78)$$

**Théorème 2.6** *S'il existe une matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P^T \succ 0$  et des constantes  $\gamma > 0$ ,  $\sigma > 0$  et  $\varrho > 0$  telles que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :*

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Upsilon & D^T P & D^T P & D^T P \\ PD & P - \gamma^2 I_n & P & P \\ PD & P & P - \gamma^2 I_n & P \\ PD & P & P & P - \gamma^2 I_n \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.79)$$

$$\Upsilon = D^T P D - P + I_n + \gamma^2(\check{\alpha}^2 + \check{\beta}^2)I_n,$$

Alors le transfert des incertitudes  $\delta_k$  à l'erreur totale  $e_k$  a un gain  $L_2$  inférieur à  $\gamma$ .

□

**Preuve 2.6** *On considère la fonction de Lyapunov suivante*

$$V_k = e_k^T P e_k \quad (2.80)$$

La variation  $\Delta V$  de  $V_k$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \Delta V &= V_{k+1} - V_k \\
 &= e_k^T D^T P D e_k - e_k^T P e_k + e_k^T D^T P \phi_k + \phi_k^T P D e_k + \phi_k^T P \phi_k + e_k^T D^T P \chi_k \\
 &+ \chi_k^T P D e_k + \chi_k^T P \chi_k + 2e_k^T D^T P \delta_k + 2\delta_k^T P \phi_k + 2\delta_k^T P \chi_k + \phi_k^T P \chi_k \\
 &+ \chi_k^T P \phi_k + \delta_k^T P \delta_k \\
 &\leq e_k^T (D^T P D - P) e_k + e_k^T D^T P \phi_k + \phi_k^T P D e_k + \phi_k^T P \phi_k + e_k^T D^T P \chi_k \\
 &+ \chi_k^T P D e_k + \chi_k^T P \chi_k + 2e_k^T D^T P \delta_k + 2\delta_k^T P \phi_k + 2\delta_k^T P \chi_k + 2\phi_k^T P \chi_k \\
 &+ \delta_k^T P \delta_k + \gamma^2 \check{\alpha}^2 e_k^T e_k - \gamma^2 \phi_k^T \phi_k + \gamma^2 \check{\beta}^2 e_k^T e_k - \gamma^2 \chi_k^T \chi_k + e_k^T e_k \\
 &- e_k^T e_k + \gamma^2 \delta_k^T \delta_k - \gamma^2 \delta_k^T \delta_k \\
 &\leq \begin{bmatrix} e_k \\ \phi_k \\ \chi_k \\ \delta_k \end{bmatrix}^T \Phi \begin{bmatrix} e_k \\ \phi_k \\ \chi_k \\ \delta_k \end{bmatrix} - e_k^T e_k + \gamma^2 \delta_k^T \delta_k \leq -e_k^T e_k + \gamma^2 \delta_k^T \delta_k
 \end{aligned}$$

Alors, en utilisant le Lemme 2.1 et selon [Jiang and Wang 2001], le système est ISS et le transfert de  $\delta_k$  à  $e_k$  a un gain  $L_2$  inférieur à  $\gamma$ .

**Remarque 2.3** L'analyse précédente permet de quantifier la précision d'estimation intervalle et de calculer une limite conservative pour la convergence de  $\bar{x} - \underline{x}$ . Pour l'optimisation du gain d'observateur, une solution en minimisant la norme  $L_1$  de l'erreur pour les systèmes à temps continu sans incertitudes a été développée dans [Rami, Cheng, and De Prada 2008]. Une autre approche a été introduite dans [Briat and Khammash 2016] pour concevoir un observateur intervalle atteignant un gain minimum  $L_\infty$  de l'opérateur permettant le transfert des perturbations à la sortie observée. Des conditions de programmation linéaire sont obtenues pour le calcul d'un observateur intervalle optimal  $L_\infty$ -vers- $L_\infty$  pour les systèmes linéaires à temps invariant, les systèmes à temps discret et les systèmes à retards à temps

continu.

#### 2.4.4 Synthèse de la commande tolérante aux fautes

Cette section est dédiée à la synthèse d'une loi de commande stabilisant le système (2.50) en présence de défauts et de perturbations. Étant donné qu'un observateur intervalle fournit l'ensemble des trajectoires d'état, toutes ces trajectoires réalisables peuvent être utilisées dans la synthèse de la commande FTC. Pour des raisons de simplicité, on a choisi dans ce travail d'utiliser la borne supérieure de l'état [Mazenc, Dinh, and Niculescu 2013]. Néanmoins, il est possible d'utiliser la borne inférieure ou une combinaison linéaire  $u = -K_1\underline{x} - K_2\bar{x}$  comme dans [Efimov, Raïssi, Perruquetti, and Zolghadri 2016].

L'observateur intervalle (2.53) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = (A^0 - LC + \overline{\Delta A}^+) \bar{x}_k + Bu_k + \overline{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \overline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \overline{\delta}_k \\ \underline{x}_{k+1} = (A^0 - LC + \underline{\Delta A}^+) \underline{x}_k + Bu_k + \underline{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \underline{\psi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) + \underline{\delta}_k \end{cases} \quad (2.81)$$

où

$$\begin{cases} \overline{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) = (\overline{\Delta A}^+ - \underline{\Delta A}^+) \bar{x}_k^- - \overline{\Delta A}^- \underline{x}_k^+ + \underline{\Delta A}^- \underline{x}_k^- \\ \underline{\varphi}(\bar{x}_k, \underline{x}_k) = (\underline{\Delta A}^+ - \overline{\Delta A}^+) \underline{x}_k^- - \underline{\Delta A}^- \bar{x}_k^+ + \overline{\Delta A}^- \bar{x}_k^- \\ \overline{\delta}_k = \overline{w} + Ly_k + |L| \overline{V} E_p \\ \underline{\delta}_k = \underline{w} + Ly_k - |L| \overline{V} E_p. \end{cases} \quad (2.82)$$

La stabilisation de (2.81) mène alors à la stabilisation de (2.53).

**Théorème 2.7** *Supposons que les hypothèses 2.4, 2.5, 2.6, et 2.7, sont valides. L'état initial  $x_0$  vérifie  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$ . Soit*

$$u_k = -K\bar{x}_k \quad (2.83)$$

avec  $K$  un gain de retour. S'il existe  $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $P = P^T \succ 0$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $Q = Q^T \succ 0$  et  $W \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $W = W^T \succ 0$  et une constante  $\gamma > 0$  tel que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Upsilon & G^T P & G^T P & G^T P \\ PG & P - \gamma I_{2n} & P & P \\ PG & P & P - \gamma I_{2n} & P \\ PG & P & P & P - W \end{bmatrix} \preceq 0,$$

$$\Upsilon = G^T P G - P + Q + \gamma(\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)I_{2n}, \quad (2.84)$$

$$G = \begin{bmatrix} A_0 - LC + \overline{\Delta A}^+ - BK & 0 \\ -BK & A_0 - LC + \underline{\Delta A}^+ \end{bmatrix},$$

avec

$$\tilde{\alpha} = \sqrt{2}(\|\underline{\Delta A}^+ - \overline{\Delta A}^+\|_2 + \|\underline{\Delta A}^-\|_2 + \|\overline{\Delta A}^-\|_2),$$

$$\tilde{\beta} = \sqrt{2} \sum_{i=0}^r (\|\underline{H}_i^+\|_2 - \|\overline{H}_i^+\|_2 + \|\overline{H}_i^-\|_2 - \|\underline{H}_i^-\|_2)$$

Alors  $\underline{x}_k, \overline{x}_k$  et  $x_k \in \mathcal{L}_\infty^n$ . □

### Preuve 2.7 .

En remplaçant la commande (2.83) dans l'observateur intervalle (2.81), on obtient :

$$\begin{cases} \overline{x}_{k+1} = (A^0 - LC + \overline{\Delta A}^+ - BK)\overline{x}_k + \overline{\varphi}(\overline{x}_k, \underline{x}_k) + \overline{\psi}(\overline{x}_k, \underline{x}_k) + \overline{\delta}_k \\ \underline{x}_{k+1} = (A^0 - LC + \underline{\Delta A}^+)\underline{x}_k - BK\overline{x}_k + \underline{\varphi}(\overline{x}_k, \underline{x}_k) + \underline{\psi}(\overline{x}_k, \underline{x}_k) + \underline{\delta}_k \end{cases} \quad (2.85)$$

Les dynamiques de  $\overline{x}_k$  et  $\underline{x}_k$  dans (2.85) sont couplées. Les fonctions  $\overline{\psi}$ ,  $\underline{\psi}$ ,  $\overline{\varphi}$  et  $\underline{\varphi}$  sont globalement Lipschitziennes. De plus, étant donné que  $|\underline{x}_k^-| \leq |\underline{x}_k|$ ,  $|\underline{x}_k^+| \leq |\underline{x}_k|$ ,  $|\overline{x}_k^-| \leq |\overline{x}_k|$  et  $|\overline{x}_k^+| \leq |\overline{x}_k|$ , alors :

$$\begin{cases} |\underline{\varphi}(\overline{x}, \underline{x})| \leq \|\underline{\Delta A}^+ - \overline{\Delta A}^+\|_2 |\underline{x}| + (\|\underline{\Delta A}^-\|_2 + \|\overline{\Delta A}^-\|_2) |\overline{x}|, \\ |\overline{\varphi}(\overline{x}, \underline{x})| \leq \|\overline{\Delta A}^+ - \underline{\Delta A}^+\|_2 |\overline{x}| + (\|\overline{\Delta A}^-\|_2 + \|\underline{\Delta A}^-\|_2) |\underline{x}|. \end{cases} \quad (2.86)$$

et

$$\begin{cases} |\underline{\psi}(\bar{x}, \underline{x})| \leq \sum_{i=0}^r \left[ (\|\underline{H}_i^+\|_2 - \|\overline{H}_i^+\|_2) |\underline{x}| + (\|\overline{H}_i^-\|_2 - \|\underline{H}_i^-\|_2) |\bar{x}| \right], \\ |\overline{\psi}(\bar{x}, \underline{x})| \leq \sum_{i=0}^r \left[ (\|\overline{H}_i^+\|_2 - \|\underline{H}_i^+\|_2) |\bar{x}| + (\|\underline{H}_i^-\|_2 - \|\overline{H}_i^-\|_2) |\underline{x}| \right]. \end{cases} \quad (2.87)$$

Pour montrer la stabilité du système, on introduit le système auxiliaire suivant :

$$\xi_{k+1} = G\xi_k + \phi(\xi_k) + \chi(\xi_k) + \delta_k \quad (2.88)$$

avec  $\xi_k = \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \bar{x}_k \end{bmatrix}$ ,  $\phi(\xi_k) = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_k \\ \overline{\phi}_k \end{bmatrix}$ ,  $\chi(\xi_k) = \begin{bmatrix} \underline{\psi}_k \\ \overline{\psi}_k \end{bmatrix}$ ,  $\delta_k = \begin{bmatrix} \underline{\delta}_k \\ \overline{\delta}_k \end{bmatrix}$ ,  $|\phi(\xi_k)| \leq \tilde{\alpha}|\xi_k|$ ,  $|\chi(\xi_k)| \leq \tilde{\beta}|\xi_k|$  et  $\delta_k \in \mathcal{L}_\infty^{2n}$ .

Pour établir la stabilité asymptotique du système (2.32), on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_k = \xi_k^T P \xi_k \quad (2.89)$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_{k+1} - V_k \\ &= \xi_k^T G^T P G \xi_k - \xi_k^T P \xi_k + \xi_k^T G^T P \phi(\xi_k) + \phi^T(\xi_k) P G \xi_k + \phi^T(\xi_k) P \phi(\xi_k) + \xi_k^T G^T P \chi(\xi_k) \\ &\quad + \chi^T(\xi_k) P G \xi_k + \chi^T(\xi_k) P \chi(\xi_k) + 2\xi_k^T G^T P \delta_k + 2\delta_k^T P \phi(\xi_k) + 2\delta_k^T P \chi(\xi_k) \\ &\quad + \phi^T(\xi_k) P \chi(\xi_k) + \chi^T(\xi_k) P \phi(\xi_k) + \delta_k^T P \delta_k \\ &\leq \xi_k^T (G^T P G - P) \xi_k + \xi_k^T G^T P \phi(\xi_k) + \phi^T(\xi_k) P G \xi_k + \phi^T(\xi_k) P \phi(\xi_k) + \xi_k^T G^T P \chi(\xi_k) \\ &\quad + \chi^T(\xi_k) P G \xi_k + \chi^T(\xi_k) P \chi(\xi_k) + 2\xi_k^T G^T P \delta_k + 2\delta_k^T P \phi(\xi_k) + 2\delta_k^T P \chi(\xi_k) \\ &\quad + 2\phi^T(\xi_k) P \chi(\xi_k) + \delta_k^T (P - W) \delta_k + \gamma \tilde{\alpha}^2 \xi_k^T \xi_k - \gamma \phi^T(\xi_k) \phi(\xi_k) + \gamma \tilde{\beta}^2 \xi_k^T \xi_k \\ &\quad - \gamma \chi^T(\xi_k) \chi(\xi_k) + \xi_k^T Q \xi_k - \xi_k^T Q \xi_k + \delta_k^T W \delta_k \\ &\leq \begin{bmatrix} \xi_k \\ \phi(\xi_k) \\ \chi(\xi_k) \\ \delta_k \end{bmatrix}^T \Phi \begin{bmatrix} \xi_k \\ \phi(\xi_k) \\ \chi(\xi_k) \\ \delta_k \end{bmatrix} - \xi_k^T Q \xi_k + \delta_k^T W \delta_k \end{aligned}$$

La fonction quadratique définie positive  $V$  satisfait la propriété (2.3) avec  $\alpha_1(|\xi_0|) = \lambda_{\min}(P)|\xi_0|^2$  et  $\alpha_2(|\xi_0|) = \lambda_{\max}(P)|\xi_0|^2$ . Étant donné que  $\Phi$  est définie négative,  $Q$  est définie positive et  $\delta_k$  est borné, alors  $\Delta V$  satisfait la propriété (2.4) avec  $\sigma(|\delta|) = \delta_k^T W \delta_k$ . En utilisant le Lemme 3, le système (3.63) est stable entrée-état.

$\bar{x}_k$  et  $\underline{x}_k$  sont alors bornés pour tout  $u_k \in \mathbb{R}^q, k \in \mathbb{N}$ . Finalement, la bornitude de  $\bar{x}_k$  et  $\underline{x}_k$  implique la même propriété pour  $x_k$ .

### 2.4.5 Exemple numérique

On considère le système LPV suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = [A_0 + \Delta A(\rho_k) + \sum_{i=1}^r \eta_{i,k} A_i(\rho_k)] x_k + B u_k + w_k \\ y_k = C x_k + v_k \end{cases} \quad (2.90)$$

Pour la simulation,  $A(\rho_k, \eta_k)$  est choisie tel que :

$$A(\rho_k, \eta_k) = \begin{bmatrix} 1.1 + 2\rho\eta_1 & -0.1 + 0.5\rho & 0.35 + 0.5\rho\eta_2 \\ 0.9 + 0.2\rho & 0.2 + 0.1\eta_1 & -0.2 + 0.2\rho \\ 0.85 + 0.2\eta_2 & -0.2 & 0.25 + 0.5\rho + 0.8\rho\eta_1 \end{bmatrix},$$

où  $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$  sont les paramètres modélisant deux défauts internes et sont supposés appartenir à l'intervalle  $[-1.5, 1.5]$ .

Les paramètres de défaut  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont donnés par :

$$\eta_1 = \begin{cases} 0 & 0 < t < 200 \\ \sin(50 t) & 200 \leq t < 350 \\ 0.5 \sin(50 t) & t \geq 350 \end{cases} ; \quad \eta_2 = \begin{cases} 0 & 0 < t < 200 \\ 0 & 200 \leq t < 350 \\ 1.5 \cos(50 t) & t \geq 350 \end{cases}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.1 & 0.35 \\ 0.9 & 0.2 & -0.2 \\ 0.85 & -0.2 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad A_1(\rho) = \begin{bmatrix} 2\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8\rho \end{bmatrix},$$

$$A_2(\rho) = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01\rho \\ 0 & 0 & 0.8\rho \end{bmatrix}, \Delta A(\rho) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5\rho & 0 \\ 0.2\rho & 0 & 0.2\rho \\ 0 & 0 & 0.5\rho \end{bmatrix},$$

avec  $\rho \in [0.01 \ 0.03]$ ,  $B = [1 \ -1 \ 0]^T$ ,  $C = [1 \ 0 \ 0]$ ,  $w_k = [0 \ 0.1 \ \sin(100k) \ 0]^T$ ,

$$\bar{w}_k = -\underline{w}_k = [0 \ 0.1 \ 0]^T, v_k = 0.01 \cos(k) \text{ et } V = 0.01.$$

Pour  $L = [1 \ 1 \ 0.5]^T$ , la matrice  $A^0 - LC$  est négative.

$$\text{Une transformation } x_k = Sz_k \text{ avec } S = \begin{bmatrix} -0.058 & 0.997 & -0.052 \\ 0.134 & -0.044 & -0.99 \\ 0.989 & 0.064 & 0.131 \end{bmatrix}, \text{ est utilisée}$$

tel que  $E = R(A^0 - LC)S$ , avec  $R = S^{-1}$ , est non négative.

Toutes les conditions du théorème 5 sont satisfaites. Par conséquent, le système

$$\begin{cases} \bar{z}_{k+1} = E\bar{z}_k + RBu_k + \bar{\psi}(\bar{z}_k, \underline{z}_k) + \bar{\varphi}(\bar{z}_k, \underline{z}_k) + \bar{f}(\bar{w}_k, \underline{w}_k) + RLy_k + |F|VE_p \\ \underline{z}_{k+1} = E\underline{z}_k + RBu_k + \underline{\psi}(\bar{z}_k, \underline{z}_k) + \underline{\varphi}(\bar{z}_k, \underline{z}_k) + \underline{f}(\bar{w}_k, \underline{w}_k) + RLy_k - |F|VE_p \end{cases} \quad (2.91)$$

est un observateur intervalle pour le système (2.90) avec  $u_k = -K \bar{x}_k$  et  $K = [0.7657 \ 0.7697 \ 0.4111]$ .

Le cas défaillant est considéré, tel que, avant 200s, le système fonctionne en régime normal ( $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 0$ ). À  $t = 200s$ , le défaut composant modélisé par  $\eta_1 \neq 0$  et  $\eta_2 \neq 0$  apparaît dans le système.

Les résultats de simulations sont représentés dans les figures 2.5, 2.6 et 2.7.

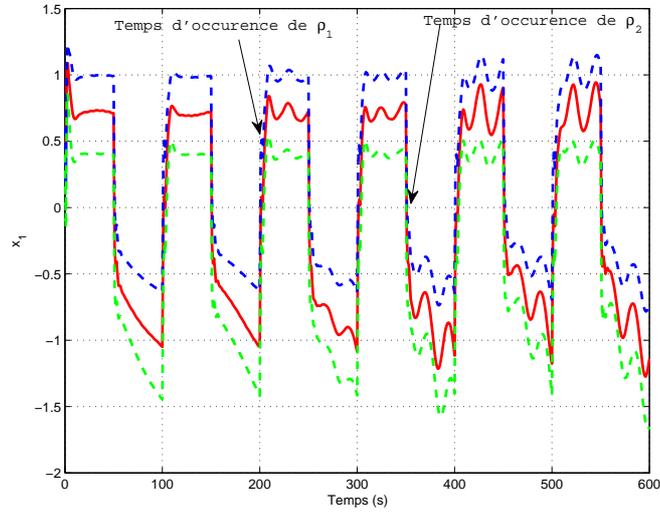


FIGURE 2.5 – Evolution de la première composante  $x_1$ .

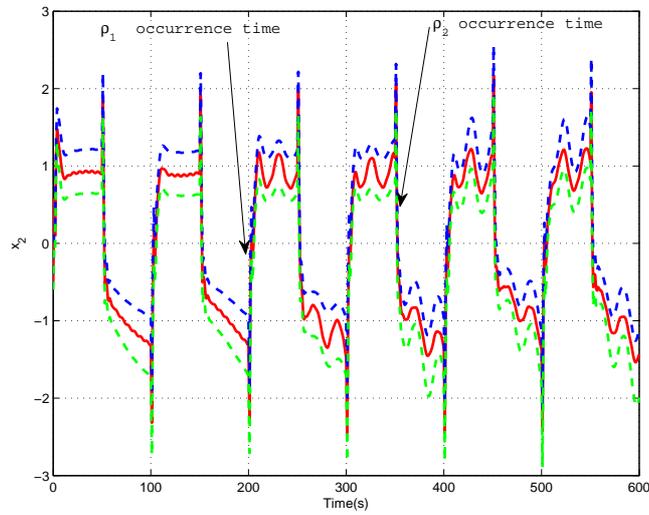


FIGURE 2.6 – Evolution de la deuxième composante  $x_2$ .

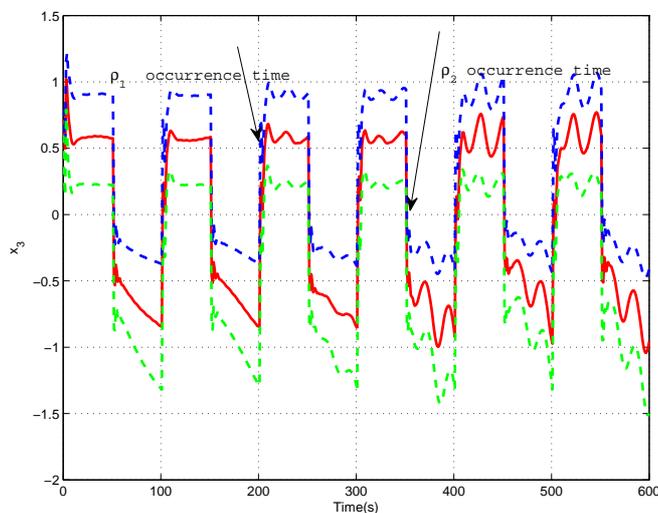


FIGURE 2.7 – Evolution de la troisième composante  $x_3$ .

Comme le montrent les figures ci-dessus, les bornes supérieure et inférieure de l'observateur intervalle convergent vers un domaine contenant les états actuels  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ . La largeur du domaine du vecteur dépend des bornes d'incertitudes et des défauts.

Les résultats de simulation montrent clairement que l'approche proposée assure la stabilité du système de commande tolérante aux fautes en boucle fermée en présence des défauts et des incertitudes paramétriques.

## 2.5 Conclusions

Ce chapitre présente de nouveaux résultats dans le domaine de la commande passive tolérante aux fautes. Il est constitué de deux parties. La première traite le problème de la FTC passive pour des systèmes LPV en présence de défauts actionneurs et la seconde étudie la stabilité de systèmes LPV soumis à des défauts composants.

La première partie commence par la construction d'un observateur intervalle

associé aux systèmes LPV avec défauts actionneurs. La synthèse de l'observateur est basée sur une structure de Luenberger à temps discret où les incertitudes et les défauts sont considérés inconnus et bornés. Cet observateur est utilisé dans la suite pour le calcul d'une loi de commande assurant la stabilité du système en présence de défauts et de perturbations.

La deuxième partie développe un observateur intervalle pour des systèmes LPV discrets en présence de défauts composants. L'idée consiste à construire deux observateurs classiques (la borne inférieure et la borne supérieure de l'observateur) qui englobent toutes les trajectoires possibles du système. Ensuite, une commande passive tolérante aux fautes est proposée. Elle est basée sur un retour d'état linéaire permettant d'accommoder l'effet des défauts en préservant la stabilité du système en boucle fermée pour le cas sain et défaillant.

Du point de vue performance, l'approche passive se concentre sur la robustesse du système de commande pour s'adapter à des multiples défauts sans chercher à obtenir une performance optimale. Étant donné que la stabilité est la première considération dans une approche passive, le régulateur est plus conservatif du point de vue performance. Cependant, l'approche active est destinée à assurer la stabilité et certaines performances, éventuellement dégradées, en reconfigurant en ligne le régulateur à travers un module de diagnostic et détection de défaut (FDD). Dans ce contexte, le chapitre suivant est dédié à l'étude de la commande active tolérante aux fautes.

# Chapitre 3

## Approche active à base d'observateurs intervalles

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, une méthodologie de synthèse d'une commande passive tolérante aux fautes pour les systèmes LPV a été développée en utilisant la théorie des observateurs intervalles. Dans la FTC passive, le régulateur est synthétisé pour être robuste vis-à-vis d'un ensemble des défauts prédéfinis, il n'est pas donc nécessaire de diagnostiquer les défauts. Par conséquent, le défaut est traité de la même manière que des perturbations. Un inconvénient majeur d'une telle approche est que seulement un nombre limité de défauts peut être toléré. Dans ce chapitre, on va étendre cette méthodologie à la synthèse d'une commande active tolérantes aux fautes qui, contrairement à la FTC passive, réagit activement aux défauts en reconfigurant les lois de commande afin de maintenir la stabilité et les performances acceptables de l'ensemble du système. Dans ce cas, l'utilisation du module de diagnostic de défaut et d'un régulateur reconfigurable dans la structure du système est indispensable.

Dans la littérature, il existe deux approches pour la synthèse d'une FTC active. La première consiste à déterminer un ensemble de régulateurs hors ligne et à les stocker dans une base de données. Puis, en fonction des décisions

du module du diagnostic, le régulateur le plus approprié est sélectionné pour reconfigurer le système [Zhang and Jiang 2008]. La seconde approche consiste à synthétiser un nouveau régulateur en ligne [Cieslak, Henry, Zolghadri, and Goupil 2008; Yuan and Yang 2008; Shin, Calise, and Johnson 2008]. La FTC active a été étudiée en utilisant différentes méthodes, y compris la commande par retour linéaire [Mhaskar, Gani, El-Farra, McFall, Christofides, and Davis 2006], les multimodèles [Zhang and Jiang 2001], la commande adaptative [Tao and Joshi 2001], la commande prédictive [Boskovic and Mehra 2002], le placement de structures propres [Jiang 1994], la logique floue [Zhang, Wang, Hesketh, Clements, and Eaton 2005], les réseaux de neurones [Zhang, Wang, and Yu 2004]. Malgré cette étude extensive de la FTC active par la communauté scientifique, il existe des sujets de recherche qui sont encore des problèmes ouverts comme la robustesse dans les systèmes incertains et l'évaluation des performances pour les cas extrêmes [Stoustrup and Zhou 2008].

La première section de ce chapitre est consacrée à l'estimation des défauts basée sur le principe de découplage. Ce principe a été considéré dans plusieurs travaux de recherche [Ichalal, Marx, Ragot, and Maquin 2015]. Dans [Sun, Patton, and Goupil 2012], un estimateur de défaut adaptatif et robuste basé sur un modèle linéaire à temps invariant avec découplage d'entrée inconnue est proposé pour l'estimation de défauts. Un observateur à entrée inconnue est généralisé pour un système LPV descripteur dans [Hamdi, Rodrigues, Mechmeche, Theilliol, and Braiek 2012]. La technique proposée se base sur un observateur intervalle à entrée inconnue pour estimer de manière garantie le défaut.

La deuxième section présente une méthode de synthèse pour la commande tolérante aux fautes basée sur la technique de reconfiguration. Cette commande FTC active est appliquée sur les système LPV soumis à des défauts actionneurs. L'idée générale est de synthétiser un régulateur basé sur des observateurs intervalles permettant de garantir la stabilité en boucle fermée et compenser l'effet des défauts.

## 3.2 Observateur intervalle pour l'estimation des défauts

Au cours des dernières décennies, l'estimation des défauts, permettant de déterminer la taille, l'emplacement et la dynamique du défaut, a reçu une grande attention. Pour les systèmes LPV, plusieurs travaux ont été présentés dans la littérature. Dans [Abdullah and Zribi 2013], un schéma d'estimation de défauts actionneurs et capteurs est présenté et des conditions assurant sa stabilité sont données. Une estimation robuste des défauts pour les systèmes LPV soumis à des défauts actionneurs et capteurs est proposée dans [Seron and De Doná 2015]. Dans [Luspay, Kulcsár, and Grigoriadis 2015], une estimation de défauts pour les systèmes LPV à temps discret en présence des perturbations est étudiée.

Une des méthodes les plus utilisées dans la littérature est basée sur l'estimation des entrées inconnues. Dans le contexte ensembliste, peu de travaux ont été consacrés à l'estimation des entrées inconnues. En effet, dans [Gucik-Derigny, Raïssi, and Zolghadri 2014] et [Gucik-Derigny, Raïssi, and Zolghadri 2016], un observateur intervalle a été développé pour l'estimation d'état et d'entrée inconnue pour les systèmes linéaires à temps invariant. Un autre travail présenté dans [Xu, Tan, Wang, Puig, Liang, Yuan, and Liu 2017] propose un observateur à entrée inconnue pour les systèmes LPV basé sur une approche d'estimation ensembliste. Récemment, une nouvelle méthode développée dans [Robinson, Marzat, and Raïssi 2017] est adressée au problème d'estimation d'état et d'entrée inconnue pour les systèmes linéaires invariants dans le temps en utilisant les observateurs intervalles.

Dans la suite, une approche pour l'estimation de défauts en utilisant les observateurs intervalles à entrée inconnue est proposée. Cette méthode est basée sur le principe de découplage de défauts et appliquée sur un système LPV discret soumis à des défauts actionneurs additifs.

Le système LPV considéré a la forme suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A + \Delta A(\rho))x_k + Bu_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $x_k \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $u_k \in \mathbb{R}^q$  est l'entrée,  $y_k \in \mathbb{R}^p$  est la sortie ;  $w_k, v_k$  sont respectivement la perturbation et le bruit. Le vecteur des paramètres d'ordonnement  $\rho \in \Pi$  est considéré inconnu et seulement l'ensemble des valeurs admissibles  $\Pi$  est donné.  $\Delta A : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  est une fonction matricielle supposée continue par morceaux et connue.

Un défaut actionneur est représenté par un terme additif dans le système (3.1). Par conséquent, le système avec défaut actionneur est décrit par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A + \Delta A(\rho))x_k + Bu_k + Ff_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (3.2)$$

avec  $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$  une matrice connue et  $f_k \in \mathbb{R}^q$  le vecteur des défauts actionneurs.

Les hypothèses suivantes seront utilisées dans la suite.

**Hypothèse 3.1**  $\underline{\Delta A} \leq \Delta A(\rho) \leq \overline{\Delta A}$  pour tout  $\rho \in \Pi$  et  $\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .  $\square$

**Hypothèse 3.2** Il existe  $\bar{w}, \underline{w}, \bar{v}$  et  $\underline{v}$  tel que :  $\underline{w} \leq w_k \leq \bar{w}$  et  $\underline{v} \leq v_k \leq \bar{v}$  sont vérifiés  $\forall k \in \mathbb{N}$ .  $\square$ .

La méthodologie présentée dans cette section se décompose en deux étapes. La première étape consiste à estimer les bornes de l'état  $\underline{x}_k, \bar{x}_k \in \mathbb{R}^n$ . Ensuite, l'estimation des bornes  $\underline{f}_k, \bar{f}_k \in \mathbb{R}^q$  est considérée dans la deuxième étape.

### 3.2.1 Découplage

On considère l'hypothèse 3.3 qui présente une condition classique de l'existence d'observateurs à entrée inconnue [Hou and Muller 1992].

**Hypothèse 3.3**  $C$  est une matrice de rang ligne plein et  $F$  est une matrice de rang colonne plein.  $\square$

Cette hypothèse permet de trouver une transformation de coordonnées  $z_k = H^T x_k$  avec  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tel que :

$$F = H \begin{bmatrix} R_0 & 0 \end{bmatrix}^T K_0^T$$

où  $R_0 \in \mathbb{R}^{q \times q}$  et  $K_0 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ .

Le système (3.2) peut être réécrit dans les coordonnées  $z$  comme suit :

$$\begin{cases} z_{k+1} = (\tilde{A} + \Delta\tilde{A}(\rho))z_k + \tilde{B}u_k + \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{f}_k + \tilde{w}_k \\ y_k = \tilde{C}z_k + v_k \end{cases} \quad (3.3)$$

avec

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = H^T A H = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\Delta\tilde{A}(\rho) = H^T \Delta A(\rho) H = \begin{bmatrix} \Delta\tilde{A}_{11}(\rho) & \Delta\tilde{A}_{12}(\rho) \\ \Delta\tilde{A}_{21}(\rho) & \Delta\tilde{A}_{22}(\rho) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = H^T B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 \end{bmatrix}^T, \quad \tilde{C} = C H = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}_k = K_0^T f_k,$$

$$\tilde{w} = H^T w = \begin{bmatrix} \tilde{w}_{1,k} & \tilde{w}_{2,k} \end{bmatrix}^T$$

La matrice  $H^T$  est supposée bornée, alors, on obtient  $|\tilde{w}| \leq \bar{w}$  où  $\bar{w}$  est un vecteur positif et constant. Par conséquent, le système (3.3) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} z_{1,k+1} = (\tilde{A}_{11} + \Delta\tilde{A}_{11}(\rho))z_{1,k} + (\tilde{A}_{12} + \Delta\tilde{A}_{12}(\rho))z_{2,k} + \tilde{B}_1 u_k + R_0 \tilde{f}_k + \tilde{w}_{1,k} \\ z_{2,k+1} = (\tilde{A}_{21} + \Delta\tilde{A}_{21}(\rho))z_{1,k} + (\tilde{A}_{22} + \Delta\tilde{A}_{22}(\rho))z_{2,k} + \tilde{B}_2 u_k + \tilde{w}_{2,k} \\ y_k = \tilde{C}_1 z_{1,k} + \tilde{C}_2 z_{2,k} + v_k \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $\tilde{C}_1$  est une matrice de rang colonne plein [Hou and Muller 1992] qui peut être décomposée sous la forme suivante :

$$\tilde{C}_1 = N \begin{bmatrix} R_1 & 0 \end{bmatrix}^T K_1^T$$

où  $N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \end{bmatrix}$  et  $\tilde{y}_k = N^T y_k$ .

L'équation des mesures peut maintenant être décomposée comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{y}_{1,k} = R_1 K_1^T z_{1,k} + N_{11}^T \tilde{C}_2 z_{2,k} + N_{11}^T v_k \\ \tilde{y}_{2,k} = N_{12}^T \tilde{C}_2 z_{2,k} + N_{12}^T v_k = C_2 z_{2,k} + N_{12}^T v_k \end{cases} \quad (3.5)$$

Comme on a  $\tilde{y}_{1,k} = G_s^T \tilde{y}_k$  où  $G_s^T = \begin{bmatrix} I_q & O_{q \times (p-q)} \end{bmatrix}$ , l'expression de  $z_1$  est issue de (3.5) comme suit :

$$z_{1,k} = E(y_k - \tilde{C}_2 z_{2,k} - v_k) \quad (3.6)$$

où  $E = K_1 R_1^{-1} G_s^T N^T$ .

En remplaçant l'expression de  $z_{1,k}$  dans la deuxième équation de (3.4), on obtient :

$$\begin{cases} z_{2,k+1} = A_2 z_{2,k} + \Delta \tilde{A}_2(\rho) z_{2,k} + B_2 u_k + D_2(\rho) y_k - D_2(\rho) v_k + \tilde{w}_{2,k} \\ \tilde{y}_{2,k} = C_2 z_{2,k} + N_{12}^T v_k \end{cases} \quad (3.7)$$

où

$$\begin{cases} A_2 = \tilde{A}_{22} - \tilde{A}_{21} E \tilde{C}_2 \\ \Delta \tilde{A}_2(\rho) = \Delta \tilde{A}_{22}(\rho) - \Delta \tilde{A}_{21}(\rho) E \tilde{C}_2 \\ B_2 = \tilde{B}_2, D_2(\rho) = \tilde{A}_{21} E + \Delta \tilde{A}_{21}(\rho) E, C_2 = N_{12}^T \tilde{C}_2. \end{cases} \quad (3.8)$$

Pour construire un observateur du système (3.7), l'hypothèse suivante est considérée.

**Hypothèse 3.4** *La paire  $(A_2, C_2)$  est détectable.* □

Il suffit maintenant de trouver un gain de l'observateur pour que  $(A_2 - LC_2)$  soit non négative. Toutefois, si cela n'est pas possible, une autre transformation du système est nécessaire comme l'énonce le lemme 3.1.

**Lemme 3.1** *Il existe un gain  $L \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (p-q)}$  et une matrice de transformation  $P$  tel que  $R = P(A_2 - LC_2)S$ , où  $S = P^{-1}$ , est non négative.* □

**Remarque 3.1** *Dans le cas où  $A_2 - LC_2$  est non négative, on n'a pas besoin d'une transformation de coordonnées et un observateur intervalle peut être construit pour*

le système (3.7) dans la base initiale  $z_2$  sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \bar{z}_{2,k+1} = A_2 \bar{r}_{2,k} + B_2 u_k + \bar{\varphi}(\bar{z}_{2,k}, \underline{z}_{2,k}) + \bar{\Gamma}(y_k^+, y_k^-) - \underline{\vartheta}(\bar{v}, \underline{v}) + \bar{w}_2 \\ \underline{z}_{2,k+1} = A_2 \underline{z}_{2,k} + B_2 u_k + \underline{\varphi}(\bar{z}_{2,k}, \underline{z}_{2,k}) + \underline{\Gamma}(y_k^+, y_k^-) - \bar{\vartheta}(\bar{v}, \underline{v}) + \underline{w}_2 \end{cases} \quad (3.9)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{\varphi}(\bar{z}_{2,k}, \underline{z}_{2,k}) = \overline{\Delta \tilde{A}_2^+} \bar{z}_{2,k}^+ - \underline{\Delta \tilde{A}_2^+} \bar{z}_{2,k}^- - \overline{\Delta \tilde{A}_2^-} \underline{z}_{2,k}^+ + \underline{\Delta \tilde{A}_2^-} \underline{z}_{2,k}^- \\ \underline{\varphi}(\bar{z}_{2,k}, \underline{z}_{2,k}) = \underline{\Delta \tilde{A}_2^+} \bar{z}_{2,k}^+ - \overline{\Delta \tilde{A}_2^+} \underline{z}_{2,k}^- - \underline{\Delta \tilde{A}_2^-} \bar{z}_{2,k}^+ + \overline{\Delta \tilde{A}_2^-} \underline{z}_{2,k}^- \\ \overline{\Delta \tilde{A}_2} = \overline{\Delta \tilde{A}_{22}} - (\underline{\Delta \tilde{A}_{21}}(E\tilde{C}_2)^+ - \overline{\Delta \tilde{A}_{21}}(E\tilde{C}_2)^-) \\ \underline{\Delta \tilde{A}_2} = \underline{\Delta \tilde{A}_{22}} - (\overline{\Delta \tilde{A}_{21}}(E\tilde{C}_2)^+ - \underline{\Delta \tilde{A}_{21}}(E\tilde{C}_2)^-) \\ \bar{\Gamma}(y_k^+, y_k^-) = \overline{D_2} y_k^+ - \underline{D_2} y_k^-, \underline{\Gamma}(y_k^+, y_k^-) = \underline{D_2} y_k^+ - \overline{D_2} y_k^- \\ \bar{\vartheta}(\bar{v}, \underline{v}) = \overline{D_2^+} \bar{v}^+ - \underline{D_2^+} \bar{v}^- - \overline{D_2^-} \underline{v}^+ + \underline{D_2^-} \underline{v}^- \\ \underline{\vartheta}(\bar{v}, \underline{v}) = \underline{D_2^+} \underline{v}^+ - \overline{D_2^+} \underline{v}^- - \underline{D_2^-} \bar{v}^+ + \overline{D_2^-} \bar{v}^- \\ \overline{D_2} = \tilde{A}_{21} E + (\overline{\Delta \tilde{A}_{21}} E^+ - \underline{\Delta \tilde{A}_{21}} E^-) + LN_{12}^T \\ \underline{D_2} = \tilde{A}_{21} E + (\underline{\Delta \tilde{A}_{21}} E^+ - \overline{\Delta \tilde{A}_{21}} E^-) + LN_{12}^T \end{cases} \quad (3.10)$$

□

Selon le Lemme 3.1, une fois la matrice de transformation  $P$  trouvée, le système peut être décrit dans la nouvelle base  $r_2 = Pz_2$  comme suit :

$$\begin{cases} r_{2,k+1} = Rr_{2,k} + P\Delta\tilde{A}_2(\rho)Sr_{2,k} + PB_2u_k + M(\rho)y_k - M(\rho)v_k + P\tilde{w}_{2,k} \\ \tilde{y}_{2,k} = C_2P^{-1}r_{2,k} + N_{12}^T v_k \end{cases} \quad (3.11)$$

où  $M(\rho) = P(D_2(\rho) + LN_{12}^T)$ .

Dans la suite, une synthèse d'observateur intervalle est proposée pour estimer l'état du système et le défaut actionneur.

### 3.2.2 Estimation d'état

Pour le système (3.11), une structure de l'observateur intervalle est donnée par :

$$\begin{cases} \bar{r}_{2,k+1} = R\bar{r}_{2,k} + PB_2u_k + \bar{\varphi}(\bar{r}_{2,k}, \underline{r}_{2,k}) + \bar{\Gamma}(y_k^+, y_k^-) - \underline{\vartheta}(\bar{v}, \underline{v}) + \overline{\Delta}(\bar{w}_2, \underline{w}_2) \\ \underline{r}_{2,k+1} = R\underline{r}_{2,k} + PB_2u_k + \underline{\varphi}(\bar{r}_{2,k}, \underline{r}_{2,k}) + \underline{\Gamma}(y_k^+, y_k^-) - \bar{\vartheta}(\bar{v}, \underline{v}) + \underline{\Delta}(\bar{w}_2, \underline{w}_2) \end{cases} \quad (3.12)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \overline{\varphi}(\overline{r}_{2,k}, \underline{r}_{2,k}) = \overline{\sigma}^+ \overline{r}_{2,k}^+ - \underline{\sigma}^+ \overline{r}_{2,k}^- - \overline{\sigma}^- \underline{r}_{2,k}^+ + \underline{\sigma}^- \underline{r}_{2,k}^- \\
 \underline{\varphi}(\overline{r}_{2,k}, \underline{r}_{2,k}) = \underline{\sigma}^+ \underline{r}_{2,k}^+ - \overline{\sigma}^+ \underline{r}_{2,k}^- - \underline{\sigma}^- \overline{r}_{2,k}^+ + \overline{\sigma}^- \overline{r}_{2,k}^- \\
 \overline{\sigma} = (P^+ \overline{\Delta \tilde{A}}_2 - P^- \underline{\Delta \tilde{A}}_2) S^+ - (P^+ \underline{\Delta \tilde{A}}_2 - P^- \overline{\Delta \tilde{A}}_2) S^- \\
 \underline{\sigma} = (P^+ \underline{\Delta \tilde{A}}_2 - P^- \overline{\Delta \tilde{A}}_2) S^+ - (P^+ \overline{\Delta \tilde{A}}_2 - P^- \underline{\Delta \tilde{A}}_2) S^- \\
 \overline{\Delta \tilde{A}}_2 = \overline{\Delta \tilde{A}}_{22} - (\overline{\Delta \tilde{A}}_{21} (E \tilde{C}_2)^+ - \underline{\Delta \tilde{A}}_{21} (E \tilde{C}_2)^-) \\
 \underline{\Delta \tilde{A}}_2 = \underline{\Delta \tilde{A}}_{22} - (\underline{\Delta \tilde{A}}_{21} (E \tilde{C}_2)^+ - \overline{\Delta \tilde{A}}_{21} (E \tilde{C}_2)^-) \\
 \overline{\Gamma}(y_k^+, y_k^-) = \overline{M} y_k^+ - \underline{M} y_k^-, \underline{\Gamma}(y_k^+, y_k^-) = \underline{M} y_k^+ - \overline{M} y_k^-
 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \overline{M} = (P^+ \overline{D}_2 - P^- \underline{D}_2) + PLN_{12}^T \\
 \underline{M} = (P^+ \underline{D}_2 - P^- \overline{D}_2) + PLN_{12}^T \\
 \overline{D}_2 = \tilde{A}_{21} E + (\overline{\Delta \tilde{A}}_{21} E^+ - \underline{\Delta \tilde{A}}_{21} E^-) \\
 \underline{D}_2 = \tilde{A}_{21} E + (\underline{\Delta \tilde{A}}_{21} E^+ - \overline{\Delta \tilde{A}}_{21} E^-) \\
 \overline{\vartheta}(\overline{v}, \underline{v}) = \overline{M}^+ \overline{v}^+ - \underline{M}^+ \overline{v}^- - \overline{M}^- \underline{v}^+ + \underline{M}^- \underline{v}^- \\
 \underline{\vartheta}(\overline{v}, \underline{v}) = \underline{M}^+ \underline{v}^+ - \overline{M}^+ \underline{v}^- - \underline{M}^- \overline{v}^+ + \overline{M}^- \overline{v}^- \\
 \overline{\Delta}(\overline{w}_2, \underline{w}_2) = P^+ \overline{w}_2 - P^- \underline{w}_2 \\
 \underline{\Delta}(\overline{w}_2, \underline{w}_2) = P^+ \underline{w}_2 - P^- \overline{w}_2
 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Étant donnée que  $\Delta A(\rho)$  est borné et  $\underline{\Delta A} \leq \Delta A(\rho) \leq \overline{\Delta A}$ , alors :

$$\underline{\Delta \tilde{A}} \leq \Delta \tilde{A}(\rho) = H^T \Delta A(\rho) H \leq \overline{\Delta \tilde{A}},$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \overline{\Delta \tilde{A}} = ((H^T)^+ \overline{\Delta A} - (H^T)^- \underline{\Delta A}) H^+ - ((H^T)^+ \underline{\Delta A} - (H^T)^- \overline{\Delta A}) H^- \\
 \underline{\Delta \tilde{A}} = ((H^T)^+ \underline{\Delta A} - (H^T)^- \overline{\Delta A}) H^+ - ((H^T)^+ \overline{\Delta A} - (H^T)^- \underline{\Delta A}) H^-
 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Par conséquent,

$$\overline{\Delta \tilde{A}} = \begin{bmatrix} \overline{\Delta \tilde{A}}_{11} & \overline{\Delta \tilde{A}}_{12} \\ \overline{\Delta \tilde{A}}_{21} & \overline{\Delta \tilde{A}}_{22} \end{bmatrix}, \underline{\Delta \tilde{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\Delta \tilde{A}}_{11} & \underline{\Delta \tilde{A}}_{12} \\ \underline{\Delta \tilde{A}}_{21} & \underline{\Delta \tilde{A}}_{22} \end{bmatrix}$$

On note respectivement par  $\bar{e}_{r_{2,k}} = \bar{r}_{2,k} - r_{2,k}$  et  $\underline{e}_{r_{2,k}} = r_{2,k} - \underline{r}_{2,k}$  les erreurs d'observation supérieure et inférieure. Alors, les dynamiques de ces erreurs sont données par :

$$\begin{cases} \bar{e}_{r_{2,k+1}} = R\bar{e}_{r_{2,k}} + \bar{\phi}_k + \bar{\delta}_k \\ \underline{e}_{r_{2,k+1}} = R\underline{e}_{r_{2,k}} + \underline{\phi}_k + \underline{\delta}_k \end{cases} \quad (3.16)$$

où

$$\begin{cases} \bar{\phi}_k = \bar{\varphi}(\bar{r}_{2,k}, \underline{r}_{2,k}) - P\Delta\tilde{A}_2(\rho)Sr_{2,k} \\ \underline{\phi}_k = P\Delta\tilde{A}_2(\rho)Sr_{2,k} - \underline{\varphi}(\bar{r}_{2,k}, \underline{r}_{2,k}) \\ \bar{\delta}_k = \bar{\Gamma}(y_k^+, y_k^-) - M(\rho)y_k - \underline{\vartheta}(\bar{v}, \underline{v}) + M(\rho)v_k + \bar{\Delta}(\bar{w}_2, \underline{w}_2) - P\tilde{w}_{2,k} \\ \underline{\delta}_k = M(\rho)y_k - \underline{\Gamma}(y_k^+, y_k^-) - M(\rho)v_k + \bar{\vartheta}(\bar{v}, \underline{v}) + P\tilde{w}_{2,k} - \underline{\Delta}(\bar{w}_2, \underline{w}_2) \end{cases} \quad (3.17)$$

Les fonctions  $\bar{\phi}$  and  $\underline{\phi}$  sont globalement lipschitziennes. En utilisant le Lemme 6 dans [Zheng, Efimov, and Perruquetti 2016], il en résulte que  $\underline{e}_{r_{2,k}} \leq e_{r_{2,k}} \leq \bar{e}_{r_{2,k}}$  et pour une norme sous-multiplicative choisie  $|\cdot|$ , il existe des constantes positives  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  et  $b_3$  tels que :

$$\begin{cases} |\bar{\phi}_k| \leq a_1|\bar{e}_{r_{2,k}}| + a_2|\underline{e}_{r_{2,k}}| + a_3 \\ |\underline{\phi}_k| \leq b_1|\bar{e}_{r_{2,k}}| + b_2|\underline{e}_{r_{2,k}}| + b_3 \end{cases} \quad (3.18)$$

Le Théorème 3.1 présente les conditions nécessaires de la construction d'observateur intervalle pour le système (3.11) dans les coordonnées  $r_2$ .

**Théorème 3.1** *Supposons que les hypothèses 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4 sont vérifiées,  $R$  est non négative et l'état initial  $r_{2,0}$  vérifie  $\underline{r}_{2,0} \leq r_{2,0} \leq \bar{r}_{2,0}$ . Alors, pour tout  $k \in \mathbb{R}_+$  l'état  $r_{2,k}$  solution du système (3.11) satisfait :*

$$\underline{r}_{2,k} \leq r_{2,k} \leq \bar{r}_{2,k} \quad (3.19)$$

De plus, s'il existe des matrices  $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, P_1 = P_1^T \succ 0, W \in \mathbb{R}^{n \times n}, W = W^T \succ 0, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, Q = Q^T \succ 0$  et une constante  $\gamma > 0$ , tel que l'inégalité

matricielle suivante est vérifiée :

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Upsilon & G^T P_1 & G^T P_1 \\ P_1 G & P_1 - \gamma I_n & P_1 \\ P_1 G & P_1 & P_1 - W \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\Upsilon = G^T P_1 G - P_1 + \gamma \alpha^2 I_n + Q,$$

$$G = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix},$$

avec  $\alpha = 2 \max\{(a_1 + b_1), (a_2 + b_2)\}$ . Alors,  $\bar{e}_{r_2,k}, \underline{e}_{r_2,k} \in \mathcal{L}_\infty^n$ .  $\square$

**Preuve 3.1** *Étant donné que la matrice  $R$  est supposée non négative, et par construction  $\bar{\phi}_k, \underline{\phi}_k, \bar{\delta}_k$  et  $\underline{\delta}_k$  sont aussi non négatives, alors, si  $\bar{r}_{2,0}$  et  $\underline{r}_{2,0}$  sont choisis tel que  $\bar{e}_0$  et  $\underline{e}_0$  sont non négatives, les dynamiques des erreurs d'observation  $\bar{e}_{r_2,k}$  et  $\underline{e}_{r_2,k}$  restent non négatives pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Montrons maintenant la stabilité de solutions  $\underline{x}_k$  et  $\bar{x}_k$  de l'observateur intervalle.*

*Pour cette raison, on introduit le système auxiliaire suivant :*

$$\xi_{r_2,k+1} = G \xi_{r_2,k} + \phi(\xi_{r_2,k}) + \delta_k \quad (3.20)$$

où  $\xi_{r_2,k} = \begin{bmatrix} \underline{e}_{r_2,k} \\ \bar{e}_{r_2,k} \end{bmatrix}$ ,  $\phi_k = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_k \\ \bar{\phi}_k \end{bmatrix}$ ,  $\delta_k = \begin{bmatrix} \underline{\delta}_k \\ \bar{\delta}_k \end{bmatrix}$ ,  $|\phi(\xi_{r_2,k})| \leq \alpha |\xi_{r_2,k}|$  et  $\delta_k \in \mathcal{L}_\infty^{2n}$ .

*Pour assurer la stabilité asymptotique du système (3.12), on considère la fonction de Lyapunov suivante :*

$$V_k = \xi_{r_2,k}^T P_1 \xi_{r_2,k} \quad (3.21)$$

La variation  $\Delta V$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \Delta V &= V_{k+1} - V_k \\
 &= \xi_{r_2,k}^T G^T P_1 G \xi_{r_2,k} - \xi_{r_2,k}^T P_1 \xi_{r_2,k} + \xi_{r_2,k}^T G^T P_1 \phi(\xi_{r_2,k}) + \phi^T(\xi_{r_2,k}) P_1 G \xi_{r_2,k} \\
 &+ \phi^T(\xi_{r_2,k}) P_1 \phi(\xi_{r_2,k}) + 2\xi_{r_2,k}^T G^T P_1 \delta_k + 2\delta_k^T P_1 \phi(\xi_{r_2,k}) + \delta_k^T P_1 \delta_k \\
 &\leq \xi_{r_2,k}^T (G^T P_1 G - P_1) \xi_{r_2,k} + \xi_{r_2,k}^T G^T P_1 \phi(\xi_{r_2,k}) + \phi^T(\xi_{r_2,k}) P_1 G \xi_{r_2,k} + \phi^T(\xi_{r_2,k}) P_1 \phi(\xi_{r_2,k}) \\
 &+ 2\xi_{r_2,k}^T G^T P_1 \delta_k + 2\delta_k^T P_1 \phi(\xi_{r_2,k}) + \delta_k^T (P_1 - W) \delta_k + \gamma \alpha^2 \xi_{r_2,k}^T \xi_{r_2,k} - \gamma \phi^T(\xi_{r_2,k}) \phi(\xi_{r_2,k}) \\
 &+ \xi_{r_2,k}^T Q \xi_{r_2,k} - \xi_{r_2,k}^T Q \xi_{r_2,k} + \delta_k^T W \delta_k \\
 &\leq \begin{bmatrix} \xi_{r_2,k} \\ \phi(\xi_{r_2,k}) \\ \delta_k \end{bmatrix}^T \Psi \begin{bmatrix} \xi_{r_2,k} \\ \phi(\xi_{r_2,k}) \\ \delta_k \end{bmatrix} - \xi_{r_2,k}^T Q \xi_{r_2,k} + \delta_k^T W \delta_k
 \end{aligned}$$

Alors, le système (3.12) est stable et  $\xi_{r_2,k}$  est borné.  $\square$

Calculons maintenant les bornes  $\underline{x}_k, \bar{x}_k$  de l'état dans la base initiale  $x_k$ .

Dans ce cas, on a  $r_2 = Pz_2$ , alors  $\underline{z}_{2,k} \leq z_{2,k} \leq \bar{z}_{2,k}$  avec :

$$\begin{cases} \bar{z}_{2,k} = S^+ \bar{r}_{2,k} - S^- \underline{r}_{2,k} \\ \underline{z}_{2,k} = S^+ \underline{r}_{2,k} - S^- \bar{r}_{2,k} \end{cases} \quad (3.22)$$

Soit  $x_k = Hz_k$  et en se basant sur le Théorème 3.1 et l'équation (3.22), les bornes de l'état  $x_k$  sont données par :

$$\begin{cases} \bar{x}_{1,k} = H_{11} E y_k + H_{12}^+ \bar{z}_{2,k} - H_{12}^- \underline{z}_{2,k} + (-E_1)^+ \bar{z}_{2,k} - (-E_1)^- \underline{z}_{2,k} + (-E_2)^+ \bar{v} - (-E_2)^- \underline{v} \\ \underline{x}_{1,k} = H_{11} E y_k + H_{12}^+ \underline{z}_{2,k} - H_{12}^- \bar{z}_{2,k} + (-E_1)^+ \underline{z}_{2,k} - (-E_1)^- \bar{z}_{2,k} + (-E_2)^+ \underline{v} - (-E_2)^- \bar{v} \\ \bar{x}_{2,k} = H_{21} E y_k + H_{22}^+ \bar{z}_{2,k} - H_{22}^- \underline{z}_{2,k} + (-E_3)^+ \bar{z}_{2,k} - (-E_3)^- \underline{z}_{2,k} + (-E_4)^+ \bar{v} - (-E_4)^- \underline{v} \\ \underline{x}_{2,k} = H_{21} E y_k + H_{22}^+ \underline{z}_{2,k} - H_{22}^- \bar{z}_{2,k} + (-E_3)^+ \underline{z}_{2,k} - (-E_3)^- \bar{z}_{2,k} + (-E_4)^+ \underline{v} - (-E_4)^- \bar{v} \end{cases} \quad (3.23)$$

avec  $E_1 = H_{11} E \tilde{C}_2$ ,  $E_2 = H_{11} E$ ,  $E_3 = H_{21} E \tilde{C}_2$  et  $E_4 = H_{21} E$ .

**Théorème 3.2** *Supposons que les conditions du Théorème 3.1 sont vérifiées et  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$ . Alors, pour tout  $k \in \mathbb{Z}_+$  les variables*

$$\underline{x}_k = \begin{bmatrix} \underline{x}_{1,k} \\ \underline{x}_{2,k} \end{bmatrix} \text{ et } \bar{x}_k = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,k} \\ \bar{x}_{2,k} \end{bmatrix}$$

satisfont :

$$\underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k. \quad (3.24)$$

□

**Preuve 3.2** On a  $x_k = Hz_k$ , alors :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(y_k - \tilde{C}_2 z_{2,k} - v_k) \\ z_{2,k} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} x_{1,k} = H_{11}Ey_k + E_1z_{2,k} + H_{12}z_{2,k} - E_2v_k \\ x_{2,k} = H_{21}Ey_k + E_3z_{2,k} + H_{22}z_{2,k} - E_4v_k \end{cases} \quad (3.26)$$

On introduit les erreurs d'observation pour l'état  $x_k$  :

$$\begin{cases} \bar{e}_{x_1,k} = \bar{x}_{1,k} - x_{1,k} \\ \underline{e}_{x_1,k} = x_{1,k} - \underline{x}_{1,k} \\ \bar{e}_{x_2,k} = \bar{x}_{2,k} - x_{2,k} \\ \underline{e}_{x_2,k} = x_{2,k} - \underline{x}_{2,k} \end{cases} \quad (3.27)$$

Alors, on obtient :

$$\begin{cases} \bar{e}_{x_1,k} = (H_{12}^+ + (-E_1)^+)\bar{e}_{z_2} - (H_{12}^- + (-E_1)^-)\underline{e}_{z_2} + (-E_2)^+(\bar{v} - v_k) - (-E_2)^-(\bar{v} + v_k) \\ \underline{e}_{x_1,k} = (H_{12}^+ + (-E_1)^+)\underline{e}_{z_2} - (H_{12}^- + (-E_1)^-)\bar{e}_{z_2} + (-E_2)^+(\bar{v} + v_k) - (-E_2)^-(\bar{v} - v_k) \\ \bar{e}_{x_2,k} = (H_{22}^+ + (-E_1)^+)\bar{e}_{z_2} - (H_{22}^- + (-E_1)^-)\underline{e}_{z_2} + (-E_2)^+(\bar{v} - v_k) - (-E_2)^-(\bar{v} + v_k) \\ \underline{e}_{x_2,k} = (H_{22}^+ + (-E_3)^+)\underline{e}_{z_2} - (H_{22}^- + (-E_3)^-)\bar{e}_{z_2} + (-E_4)^+(\bar{v} + v_k) - (-E_4)^-(\bar{v} - v_k) \end{cases} \quad (3.28)$$

D'une façon similaire à la preuve du théorème 3.1, les erreurs d'observation (3.28) sont positives. Alors,  $\underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k, \forall k \geq k_0$ .

On définit la variable suivante  $\xi_x = [ \bar{e}_{x_1}^T \quad \underline{e}_{x_1}^T \quad \bar{e}_{x_1}^T \quad \underline{e}_{x_1}^T ]^T$  et les matrices

$$\mathfrak{F} = \begin{bmatrix} H_{12}^+ + (-E_1)^+ & H_{12}^- + (-E_1)^- \\ H_{12}^- + (-E_1)^- & H_{12}^+ + (-E_1)^+ \\ H_{22}^+ + (-E_3)^+ & H_{22}^- + (-E_3)^- \\ H_{22}^- + (-E_3)^- & H_{22}^+ + (-E_3)^+ \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} (-E_2)^+ - (-E_2)^- \\ -(-E_2)^- + (-E_2)^+ \\ (-E_4)^+ - (-E_4)^- \\ -(-E_4)^- + (-E_4)^+ \end{bmatrix}$$

Alors,  $\xi_x \leq \mathfrak{F}\xi_{z_2} + 2\mathfrak{J}\bar{v}$ .

On a  $\xi_{z_2} = \mathfrak{R}\xi_{r_2,k}$  avec  $\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} R^+ & -R^- \\ -R^- & R^+ \end{bmatrix}$ . Ceci implique que  $\xi_x \leq \mathfrak{F}\mathfrak{R}\xi_{r_2,k} + 2\mathfrak{J}\bar{v}$ . Étant donné  $\xi_{r_2,k}$  est borné, on peut conclure que  $\xi_x$  est aussi borné.  $\square$

À ce stade, on peut calculer les bornes du vecteur de défaut en utilisant les bornes de l'état  $x_k$ . Ceci est détaillé dans le paragraphe suivant.

### 3.2.3 Estimation de défaut

À partir de l'équation (3.5), le vecteur de défaut peut être exprimé par :

$$\begin{aligned} f_k &= K_0 R_0^{-1} [z_{1,k+1} - \tilde{A}_{11} z_{1,k} - \Delta \tilde{A}_{11}(\rho) z_{1,k} - \tilde{A}_{12} z_{2,k} - \Delta \tilde{A}_{12}(\rho) z_{2,k} - \tilde{B}_1 u_k \\ &\quad - \tilde{w}_{1,k}] \end{aligned} \quad (3.29)$$

En remplaçant  $z_1$  par son expression dans (3.6), l'équation (3.29) devient :

$$\begin{aligned} f_k &= K_0 R_0^{-1} [E y_{k+1} + G_1 z_{2,k+1} + (-E) v_{k+1} - G_2(\rho) y_k + G_3 z_{2,k} + G_4(\rho) z_{2,k} + G_2(\rho) v_k \\ &\quad - \tilde{B}_1 u_k - \tilde{w}_{1,k}] \end{aligned} \quad (3.30)$$

avec

$$\begin{cases} G_1 = -E\tilde{C}_2 \\ G_2(\rho) = (\tilde{A}_{11} + \Delta\tilde{A}_{11}(\rho))E \\ G_3 = \tilde{A}_{11}E\tilde{C}_2 - \tilde{A}_{12} \\ G_4(\rho) = \Delta\tilde{A}_{11}(\rho)E\tilde{C}_2 - \Delta\tilde{A}_{12}(\rho) \end{cases} \quad (3.31)$$

Les bornes du défaut actionneur sont données par :

$$\begin{cases} \bar{f}_k = K_0 R_0^{-1} (E y_{k+1} - \underline{\Gamma}_f(y_{k+1}^+, y_{k+1}^-) + \bar{\varphi}_1(\bar{z}_{2,k+1}, \underline{z}_{2,k+1}) \\ + \bar{\vartheta}_1(\bar{v}, \underline{v}) + \bar{\varphi}_2(\bar{z}_{2,k}, \underline{z}_{2,k}) + \bar{\vartheta}_2(\bar{v}, \underline{v}) + \bar{\varphi}_3(\bar{z}_{2,k}, \underline{z}_{2,k}) - \tilde{B}_1 u_k - \underline{\tilde{w}}_1) \\ \underline{f}_k = K_0 R_0^{-1} (E y_{k+1} - \bar{\Gamma}_f(y_{k+1}^+, y_{k+1}^-) + \underline{\varphi}_1(\bar{z}_{2,k+1}, \underline{z}_{2,k+1}) \\ + \bar{\vartheta}_1(\bar{v}, \underline{v}) + \underline{\varphi}_2(\bar{z}_{2,k}, \underline{z}_{2,k}) + \underline{\vartheta}_2(\bar{v}, \underline{v}) + \underline{\varphi}_3(\bar{z}_{2,k}, \underline{z}_{2,k}) - \tilde{B}_1 u_k - \bar{w}_1) \end{cases} \quad (3.32)$$

avec

$$\begin{cases} \underline{\Gamma}_f(y_{k+1}^+, y_{k+1}^-) = \bar{G}_2 y_{k+1}^+ - \underline{G}_2 y_{k+1}^- \\ \bar{\Gamma}_f(y_{k+1}^+, y_{k+1}^-) = \underline{G}_2 y_{k+1}^+ - \bar{G}_2 y_{k+1}^- \\ \bar{\varphi}_1(\bar{z}_{2,k+1}, \underline{z}_{2,k+1}) = G_1^+ \bar{z}_{2,k+1} - G_1^- \underline{z}_{2,k+1} \\ \underline{\varphi}_1(\bar{z}_{2,k+1}, \underline{z}_{2,k+1}) = G_1^+ \underline{z}_{2,k+1} - G_1^- \bar{z}_{2,k+1} \\ \bar{\varphi}_2(\bar{z}_{2,k}, \underline{z}_{2,k}) = G_3^+ \bar{z}_{2,k} - G_3^- \underline{z}_{2,k} \\ \underline{\varphi}_2(\bar{z}_{2,k}, \underline{z}_{2,k}) = G_3^+ \underline{z}_{2,k} - G_3^- \bar{z}_{2,k} \\ \bar{\varphi}_3(\bar{z}_{2,k}, \underline{z}_{2,k}) = \bar{G}_4^+ \bar{z}_{2,k}^+ - \underline{G}_4^+ \bar{z}_{2,k}^- - \bar{G}_4^- \underline{z}_{2,k}^+ + \underline{G}_4^- \underline{z}_{2,k}^- \\ \underline{\varphi}_3(\bar{z}_{2,k}, \underline{z}_{2,k}) = \underline{G}_4^+ \underline{z}_{2,k}^+ - \bar{G}_4^+ \underline{z}_{2,k}^- - \underline{G}_4^- \bar{z}_{2,k}^+ + \bar{G}_4^- \bar{z}_{2,k}^- \end{cases} \quad (3.33)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \bar{\vartheta}_1(\bar{v}, \underline{v}) = (-E)^+ \bar{v} - (-E)^- \underline{v} \\
 \underline{\vartheta}_1(\bar{v}, \underline{v}) = (-E)^+ \underline{v} - (-E)^- \bar{v} \\
 \bar{\vartheta}_2(\bar{v}, \underline{v}) = \overline{G_2^+} \bar{v}^+ - \underline{G_2^+} \bar{v}^- - \overline{G_2^-} \underline{v}^+ + \underline{G_2^-} \underline{v}^- \\
 \underline{\vartheta}_2(\bar{v}, \underline{v}) = \underline{G_2^+} \underline{v}^+ - \overline{G_2^+} \underline{v}^- - \underline{G_2^-} \bar{v}^+ + \overline{G_2^-} \bar{v}^- \\
 \overline{G_4} = (\overline{\Delta \tilde{A}_{11}}(E\tilde{C}_2)^+ - \underline{\Delta \tilde{A}_{11}}(E\tilde{C}_2)^-) - \underline{\Delta \tilde{A}_{12}} \\
 \underline{G_4} = (\underline{\Delta \tilde{A}_{11}}(E\tilde{C}_2)^+ - \overline{\Delta \tilde{A}_{11}}(E\tilde{C}_2)^-) - \overline{\Delta \tilde{A}_{12}} \\
 \overline{G_2} = \tilde{A}_{11}E + (\overline{\Delta \tilde{A}_{11}}E^+ - \underline{\Delta \tilde{A}_{11}}E^-) \\
 \underline{G_2} = \tilde{A}_{11}E + (\underline{\Delta \tilde{A}_{11}}E^+ - \overline{\Delta \tilde{A}_{11}}E^-)
 \end{array} \right. \quad (3.34)$$

**Théorème 3.3** *Supposons que les conditions du théorème 3.1 sont vérifiées. Alors, pour tout  $k \in \mathbb{Z}_+$  les estimés de défaut  $\bar{f}_k$  et  $\underline{f}_k$  satisfont :*

$$\underline{f}_k \leq f_k \leq \bar{f}_k. \quad (3.35)$$

□

**Preuve 3.3** *Les bornes supérieure et inférieure de l'erreur d'observation du vecteur de défaut sont données par :*

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \bar{e}_{f,k} = \bar{f}_k - f_k \\
 \underline{e}_{f,k} = f_k - \underline{f}_k
 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Alors, les dynamiques de ces erreurs sont calculées par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \bar{e}_{f,k} = K_0 R_0^{-1} [G_1^+ \bar{e}_{z_2, k+1} - G_1^- \underline{e}_{z_2, k+1} + G_3^+ \bar{e}_{z_2, k} - G_3^- \underline{e}_{z_2, k} + \bar{\varphi}_3 - \varphi_3 + \bar{\delta}_{f,k}] \\
 \underline{e}_{f,k} = K_0 R_0^{-1} [G_1^+ \underline{e}_{z_2, k+1} - G_1^- \bar{e}_{z_2, k+1} + G_3^+ \underline{e}_{z_2, k} - G_3^- \bar{e}_{z_2, k} - \underline{\varphi}_3 + \varphi_3 + \underline{\delta}_{f,k}]
 \end{array} \right. \quad (3.37)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varphi_3 = G_4(\rho)z_{2,k} \\
 \bar{\delta}_{f,k} = (-E)^+(\bar{v} - v_{k+1}) - (-E)^-(\bar{v} + v_{k+1}) + (\bar{w}_1 + \tilde{w}_1) + \bar{\vartheta}_2 - G_2 v_k - \underline{\Gamma} + G_2 y_k \\
 \underline{\delta}_{f,k} = (-E)^+(\bar{v} + v_{k+1}) - (-E)^-(\bar{v} - v_{k+1}) + (\bar{w}_1 - \tilde{w}_1) + G_2 v_k - \underline{\vartheta}_2 + \overline{\Gamma} - G_2 y_k
 \end{array} \right. \quad (3.38)$$

Avec le même raisonnement de la preuve du théorème 3.1, on peut conclure à partir de l'équation (3.37) que l'erreur d'observation du défaut sont positives. Étant donné que  $\bar{e}_{z_2}$ ,  $\underline{e}_{z_2}$ ,  $v$  et  $\tilde{w}_1$  sont bornés, alors  $\bar{f}$  et  $\underline{f}$  sont aussi bornés.

Si on définit les variables suivantes :

$$\xi_f = \begin{bmatrix} \bar{e}_f \\ \underline{e}_f \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{F}_1 = \begin{bmatrix} |G_1^+| & |-G_1^-| \\ |-G_1^-| & |G_1^+| \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{F}_2 = \begin{bmatrix} |G_3^+| & |-G_3^-| \\ |-G_3^-| & |G_3^+| \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{F}_3 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\delta} = |\bar{\delta}_{f,k}| + c_3 \text{ et } \underline{\delta} = |\underline{\delta}_{f,k}| + d_3. \text{ Alors}$$

$$|\xi_f| \leq |K_0 R_0^{-1}| (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3) |\xi_z| + \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{f,k} \\ \underline{\delta}_{f,k} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Étant donné  $|\xi_{z_2}| = |\mathfrak{R}| |\xi_{r_2,k}|$ , on obtient :

$$|\xi_f| \leq |K_0 R_0^{-1}| (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3) |\mathfrak{R}| |\xi_{r_2,k}| + \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{f,k} \\ \underline{\delta}_{f,k} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

On a  $\xi_{r_2,k}$  est borné. Par conséquent,  $\xi_f$  est borné aussi.  $\square$

### 3.2.4 Exemple numérique

Soit le système LPV suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A + \Delta A(\rho))x_k + Bu_k + Ff_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (3.41)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A(\rho) = \begin{bmatrix} 0.1\rho_{1,k} & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.05\rho_{2,k} \end{bmatrix}.$$

avec  $\rho_{1,k} = \sin(0.2k)$  et  $\rho_{2,k} = \cos(0.1k)$ . La perturbation  $v_k$  et le bruit  $w_k$  sont des distributions uniformes qui appartiennent respectivement à l'intervalle  $[-0.01 \ 0.01]$ . Le défaut actionneur est noté  $f$ .

Trois types de signaux de défaut sont traités par la suite :

- Défaut  $f_1$  de type sinusoïdal :  $f_k = \sin(0.5k)$ .
- Défaut  $f_2$  de type aléatoire de bornes  $\pm 0.75$ .
- Défaut  $f_3$  composé d'une partie aléatoire de bornes  $\pm 0.5$  et une autre sinusoïdale  $0.5 \sin(0.2k)$ .

Étant donné  $F$  est une matrice de rang colonne plein et  $C$  est une matrice de rang ligne plein, alors l'hypothèse 3.1 est vérifiée. Par la suite, on obtient les matrices suivantes :

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, K_0 = 1, R_0 = 1$$

Pour  $L = [-0.3 \quad -2.1]^T$ , la matrice  $A - LC$  n'est pas non négative. Une transformation de coordonnées  $P = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$  est utilisée tel que  $R = P(A - LC)S$  est non négative.

Les conditions initiales sont choisies comme suit  $x_0 = [2 \ 2 \ 2]^T$ ,  $\bar{x}_0 = [3 \ 3 \ 3]^T$ ,  $\underline{x}_0 = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$ . Les bornes du défaut sont calculées en utilisant l'équation (3.32). Les résultats de simulation des états pour le premier type de défaut sont donnés par les figures 3.1 et 3.2. L'estimation du défaut est montrée pour chaque défaut par les figures 3.3, 3.4 et 3.5.

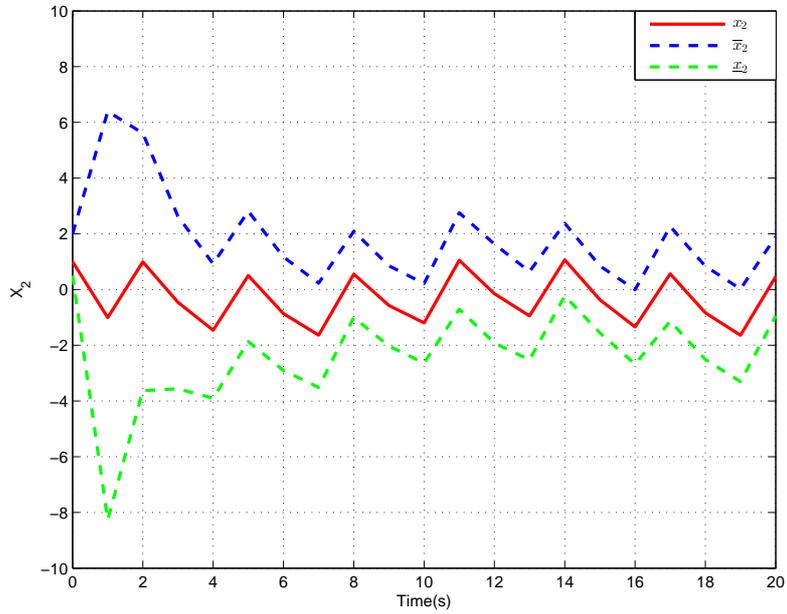


FIGURE 3.1 – Evolution de la deuxième composante  $x_2$ .

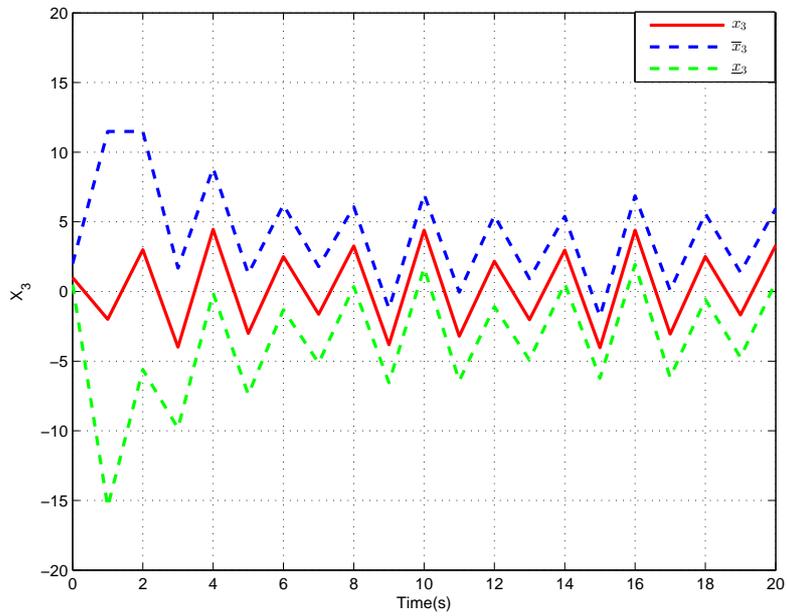


FIGURE 3.2 – Evolution de la troisième composante  $x_3$ .

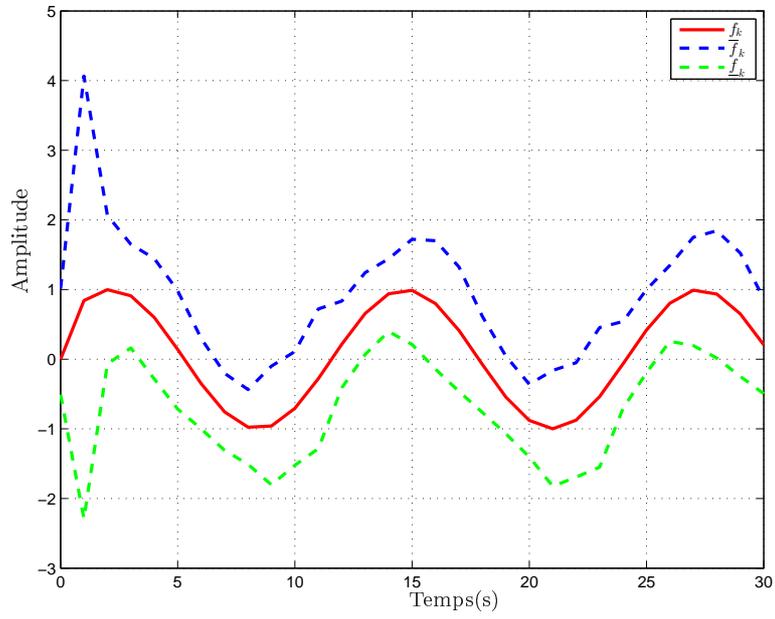


FIGURE 3.3 – Evolution du défaut  $f_1$ .

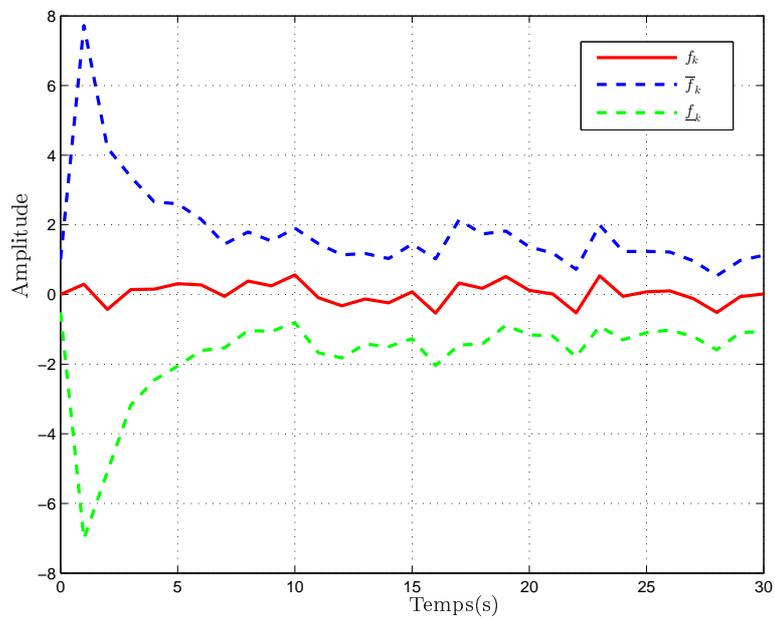
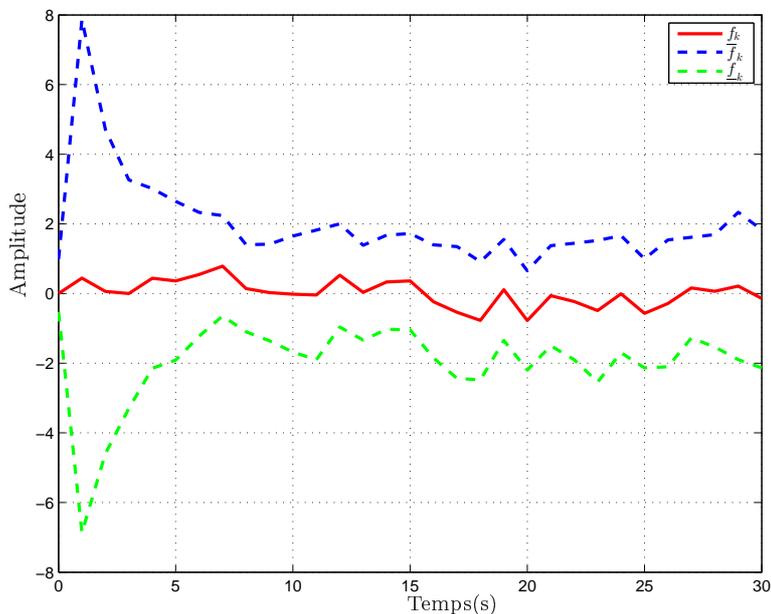


FIGURE 3.4 – Evolution du défaut  $f_2$ .


 FIGURE 3.5 – Evolution du défaut  $f_3$ .

Les figures précédentes montrent que les bornes supérieure et inférieure de l'estimation de défaut encadrent la valeur réelle du défaut malgré la présence de perturbations et de bruit des mesures.

Les résultats de l'algorithme d'estimation proposé peuvent être utilisé pour une éventuelle compensation de défaut comme le montre la section suivante.

### 3.3 Observateur intervalle pour la compensation active des défauts

Dans cette section, on propose une loi de commande, basée sur le mécanisme de reconfiguration, qui consiste à modifier l'action du régulateur afin de compenser l'effet du défaut agissant sur le système. L'objectif est de calculer une loi de commande en utilisant les observateurs intervalles permettant de compenser l'effet de défaut et d'assurer la stabilité du système en présence des perturbations.

La figure 3.6 présente un diagramme schématique général de la méthode proposée. Le module de diagnostic est composé de trois sous-modules : la détection de défaut indique si un défaut se produit ou non, l'isolation de défaut est utilisée pour déterminer la localisation du défaut dans le système et l'estimation de défaut qui consiste à estimer l'amplitude et la nature du défaut. L'observateur intervalle permet d'estimer des bornes inférieure et supérieure de l'état du système utilisées pour le calcul de la loi de commande afin de compenser l'effet des défauts.

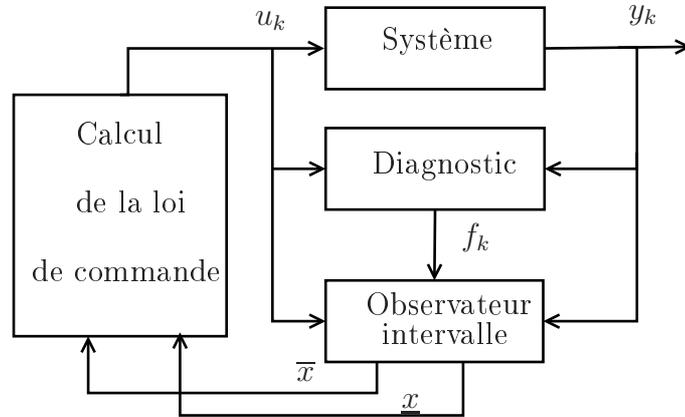


FIGURE 3.6 – Compensation active de défaut basée sur un observateur intervalle.

Dans la suite, le système considéré est celui représenté par l'équation 3.2 et les hypothèses 3.1, 3.2 et 3.5 sont supposées vérifiées.

**Hypothèse 3.5**  $\underline{f}_k \leq f_k \leq \overline{f}_k, \forall f_k \in \mathbb{R}^q$ . □

Il convient de souligner que le module de diagnostic n'est pas pris en compte dans cette partie et seulement le calcul de la loi de commande est considéré en supposant que les informations sur les défauts sont disponibles.

### 3.3.1 Observateur intervalle

Une structure de l'observateur intervalle pour le système (3.2) est donnée par :

$$\begin{cases} \overline{x}_{k+1} = (A - LC)\overline{x}_k + \overline{\chi}_k + Bu_k + \overline{\varphi}_k + \overline{w}_k + Ly_k + |L|\overline{V}E_p \\ \underline{x}_{k+1} = (A - LC)\underline{x}_k + \underline{\chi}_k + Bu_k + \underline{\varphi}_k + \underline{w}_k + Ly_k - |L|\overline{V}E_p \end{cases} \quad (3.42)$$

avec  $\bar{\chi}_k = \overline{\Delta A}^+ \bar{x}_k^+ - \underline{\Delta A}^+ \bar{x}_k^- - \overline{\Delta A}^- x_k^+ + \underline{\Delta A}^- x_k^-$ ,  $\chi_k = \underline{\Delta A}^+ x_k^+ - \overline{\Delta A}^+ x_k^- - \underline{\Delta A}^- x_k^+ + \overline{\Delta A}^- x_k^-$ ,  $\bar{\varphi}_k = F^+ \bar{f}_k - F^- \underline{f}_k$  et  $\underline{\varphi}_k = F^+ \underline{f}_k - F^- \bar{f}_k$ .

Soient les erreurs d'observation supérieure et inférieure suivantes :

$$\begin{cases} \bar{e}_k = \bar{x}_k - x_k \\ \underline{e}_k = x_k - \underline{x}_k \end{cases} \quad (3.43)$$

Les dynamiques des erreurs d'observation sont données par :

$$\begin{cases} \bar{e}_{k+1} = (A - LC)\bar{e}_k + \bar{\psi}_k \\ \underline{e}_{k+1} = (A - LC)\underline{e}_k + \underline{\psi}_k \end{cases} \quad (3.44)$$

où  $\bar{\psi}_k = \bar{\chi}_k - \Delta A(\rho)x_k + \bar{\varphi}_k - Ff_k + \bar{w}_k - w_k + |L|\bar{V}E_p + Lv_k$  et  $\underline{\psi}_k = \Delta A(\rho)x_k - \chi_k + Ff_k - \underline{\varphi}_k + w_k - \underline{w}_k + |L|\bar{V}E_p - Lv_k$ .

**Théorème 3.4** *Supposons que les hypothèses 3.1, 3.2 et 3.5 sont vérifiées, la matrice  $A - LC$  est non négative et l'état initial  $x_0$  vérifie  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$ . S'il existe des matrices définies positives et symétriques  $Q, P$  et  $W$  tel que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :*

$$D^T P D - P + D^T P W^{-1} P D + \alpha(\|W + P\|)I + Q \leq 0 \quad (3.45)$$

où  $D = A - LC$  et  $\alpha = 3 \max((a_1^2 + b_1^2), (a_2^2 + b_2^2))$ , alors  $\underline{x}_k, \bar{x}_k \in \mathcal{L}_\infty^n$ .

**Preuve 3.4** *D'après le Lemme 1.2 et l'hypothèse 3.1, on a pour  $x_k \in \mathbb{R}^n$  :*

$$\begin{aligned} \underline{\Delta A}^+ x_k^+ - \overline{\Delta A}^+ x_k^- - \underline{\Delta A}^- x_k^+ + \overline{\Delta A}^- x_k^- &\leq \Delta A(\rho)x_k \leq \\ \overline{\Delta A}^+ x_k^+ - \underline{\Delta A}^+ x_k^- - \overline{\Delta A}^- x_k^+ + \underline{\Delta A}^- x_k^- & \end{aligned} \quad (3.46)$$

*D'après le Lemme 1.2 et l'hypothèse 3.5, on a pour  $f_k \in \mathbb{R}^q$  :*

$$F^+ \underline{f}_k - F^- \bar{f}_k \leq Ff_k \leq F^+ \bar{f}_k - F^- \underline{f}_k \quad (3.47)$$

Étant donné que la matrice  $A-LC$  est non négative,  $\bar{\psi}_k$  et  $\underline{\psi}_k$  sont non négatives, alors si  $\bar{x}_0$  et  $\underline{x}_0$  sont choisis tel que  $\bar{e}_0$  et  $\underline{e}_0$  sont non négatives, les dynamiques des erreurs d'observation  $\bar{e}_k$  et  $\underline{e}_k$  sont positives pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Montrons maintenant que les variables  $\bar{x}_k, \underline{x}_k$  restent bornées  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Dans ce cas, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\bar{e}_k, \underline{e}_k) = \bar{e}_k^T P \bar{e}_k + \underline{e}_k^T P \underline{e}_k \quad (3.48)$$

La variation  $\Delta V$  de cette fonction est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_{k+1} - V_k \\ &= \bar{e}_k^T (D^T P D - P) \bar{e}_k + 2\bar{e}_k^T D^T P \bar{\psi}_k + \bar{\psi}_k^T P \bar{\psi}_k + \underline{e}_k^T (D^T P D - P) \underline{e}_k \\ &\quad + 2\underline{e}_k^T D^T P \underline{\psi}_k + \underline{\psi}_k^T P \underline{\psi}_k \end{aligned}$$

De plus, d'après [Zheng, Efimov, and Perruquetti 2016], on peut obtenir les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} 2\bar{e}_k^T D^T P \bar{\psi}_k &= 2\bar{e}_k^T D^T P W^{-0.5} W^{0.5} \bar{\psi}_k \leq \bar{e}_k^T D^T P W^{-1} P D \bar{e}_k + \bar{\psi}_k^T W \bar{\psi}_k \\ 2\underline{e}_k^T D^T P \underline{\psi}_k &= 2\underline{e}_k^T D^T P W^{-0.5} W^{0.5} \underline{\psi}_k \leq \underline{e}_k^T D^T P W^{-1} P D \underline{e}_k + \underline{\psi}_k^T W \underline{\psi}_k \end{aligned}$$

Ceci implique :

$$\begin{aligned} \Delta V &\leq \bar{e}_k^T (D^T P D - P + D^T P W^{-1} P D) \bar{e}_k + \underline{e}_k^T (D^T P D - P + D^T P W^{-1} P D) \underline{e}_k \\ &\quad + \bar{\psi}_k^T (W + P) \bar{\psi}_k + \underline{\psi}_k^T (W + P) \underline{\psi}_k \\ &\leq \bar{e}_k^T (D^T P D - P + D^T P W^{-1} P D) \bar{e}_k + \underline{e}_k^T (D^T P D - P + D^T P W^{-1} P D) \underline{e}_k \\ &\quad + 3 \|W + P\| (a_1^2 \|\bar{e}_k\|^2 + a_2^2 \|\underline{e}_k\|^2 + a_3^2) + 3 \|W + P\| (b_1^2 \|\bar{e}_k\|^2 + b_2^2 \|\underline{e}_k\|^2 + b_3^2) \\ &\leq \bar{e}_k^T (D^T P D - P + D^T P W^{-1} P D) \bar{e}_k + \underline{e}_k^T (D^T P D - P + D^T P W^{-1} P D) \underline{e}_k \\ &\quad + \alpha \|W + P\| \bar{e}_k^T \bar{e}_k + \alpha \|W + P\| \underline{e}_k^T \underline{e}_k + 3 \|W + P\| (a_3^2 + b_3^2) \\ &\leq \bar{e}_k^T (D^T P D - P + D^T P W^{-1} P D + \alpha \|W + P\| I) \bar{e}_k \\ &\quad + \underline{e}_k^T (D^T P D - P + D^T P W^{-1} P D + \alpha \|W + P\| I) \underline{e}_k + 3 \|W + P\| (a_3^2 + b_3^2) \\ &\leq -\bar{e}_k^T Q \bar{e}_k - \underline{e}_k^T Q \underline{e}_k + 3 \|W + P\| (a_3^2 + b_3^2). \end{aligned}$$

En utilisant (3.45), on a  $\Delta V \leq -\bar{e}_k^T Q \bar{e}_k^T - \underline{e}_k^T Q \underline{e}_k^T + \beta$  avec  $\beta = 3 \|W + P\| (a_3^2 + b_3^2)$  ce qui implique la bornitude des dynamiques des erreurs d'observation  $\bar{e}_k, \underline{e}_k$ , alors les variables  $\bar{x}_k, \underline{x}_k$  restent bornées  $\forall k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

La principale restriction du théorème 3.4 est de trouver un gain  $L$  tel que la matrice  $A - LC$  est non négative. Néanmoins, il est possible de relaxer cette restriction en déterminant une matrice non singulière  $R$  tel que  $E = R(A - LC)S$  est non négative où  $S = R^{-1}$ . En effet, en effectuant le changement de coordonnées  $z_k = Rx_k$ , un observateur intervalle pour le système (3.2) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \bar{z}_{k+1} = E\bar{z}_k + \bar{\chi}_k^z + RBu_k + \bar{\varphi}_k^z + \bar{\rho}_k^z + RLy_k + |F|VE_p \\ \underline{z}_{k+1} = E\underline{z}_k + \underline{\chi}_k^z + RBu_k + \underline{\varphi}_k^z + \underline{\rho}_k^z + RLy_k - |F|VE_p \end{cases} \quad (3.49)$$

où

$$\begin{cases} \bar{\chi}_k^z = (\bar{\sigma}^+ \bar{z}_k^+ - \underline{\sigma}^+ \bar{z}_k^- - \bar{\sigma}^- \underline{z}_k^+ + \underline{\sigma}^- \underline{z}_k^-) \\ \underline{\chi}_k^z = (\underline{\sigma}^+ \underline{z}_k^+ - \bar{\sigma}^+ \underline{z}_k^- - \underline{\sigma}^- \underline{z}_k^+ + \bar{\sigma}^- \bar{z}_k^-) \\ \bar{\sigma} = S^+(R^+ \overline{\Delta A} - R^- \underline{\Delta A}) - S^-(R^+ \underline{\Delta A} - R^- \overline{\Delta A}) \\ \underline{\sigma} = S^+(R^+ \underline{\Delta A} - R^- \overline{\Delta A}) - S^-(R^+ \overline{\Delta A} - R^- \underline{\Delta A}) \end{cases} \quad (3.50)$$

et

$$\begin{cases} \underline{\varphi}_k^z = R^+(F^+ \underline{f}_k - F^- \overline{f}_k) - R^-(F^+ \overline{f}_k - F^- \underline{f}_k) \\ \bar{\varphi}_k^z = R^+(F^+ \overline{f}_k - F^- \underline{f}_k) - R^-(F^+ \underline{f}_k - F^- \overline{f}_k) \\ \underline{\rho}_k^z = R^+ \underline{w}_k - R^- \overline{w}_k \\ \bar{\rho}_k^z = R^+ \overline{w}_k - R^- \underline{w}_k \\ F = RL \end{cases} \quad (3.51)$$

**Théorème 3.5** Soit une matrice non singulière  $R$  tel que  $E = R(A - LC)S$  est non négative. L'état initial  $z_0$  vérifie  $\underline{z}_0 \leq z_0 \leq \bar{z}_0$ . S'il existe des matrices symétriques définies positives  $Q, P$  et  $W$  telle que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :

$$E^T P E - P + E^T P W^{-1} P E + \alpha_z (\|W + P\|) I + Q \leq 0 \quad (3.52)$$

où  $E = R(A - LC)S$  et  $\alpha_z = 3 \max((c_1^2 + d_1^2), (c_2^2 + d_2^2))$ , alors  $\underline{z}_k, \bar{z}_k \in \mathcal{L}_\infty^n$ .  $\square$

**Preuve 3.5** *La preuve est similaire à celle du Théorème 3.4 .* □

Une fois on a trouvé les bornes  $\underline{x}_k$  et  $\bar{x}_k$  de l'état  $x_k$ , alors on peut maintenant calculer la loi de commande en utilisant ces bornes. Ceci sera détaillé dans le paragraphe suivant.

### 3.3.2 Compensation de défaut et analyse de stabilité

#### 3.3.2.1 Compensation de défaut

La loi de commande nominale est choisie sous la forme d'un retour d'état linéaire donné par l'équation suivante :

$$u_{n,k} = -K \frac{(\bar{x}_k + \underline{x}_k)}{2} \quad (3.53)$$

où  $K$  est le gain de retour.

En remplaçant la loi de commande nominale (3.53) dans le système d'équations (3.2), la représentation d'état en boucle fermée est obtenue sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A + \Delta A(\rho))x_k + Bu_{n,k} + Ff_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (3.54)$$

On propose dans cette partie de calculer une loi de commande  $u_{k,ad}$  à ajouter à la loi de commande nominale pour compenser l'effet de défaut dans le système. Alors, la loi de commande totale appliquée au système (3.2) est donnée par :

$$u_k = u_{n,k} + u_{ad,k} \quad (3.55)$$

Par conséquent, la représentation d'état en boucle fermée devient :

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A + \Delta A(\rho))x_k + Bu_{n,k} + Bu_{ad,k} + Ff_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (3.56)$$

La loi de commande additive  $u_{ad,k}$  doit être calculée pour rendre le comportement du système défectueux aussi proche que possible de celui en mode nominal. En

d'autres termes,  $u_{ad,k}$  doit satisfaire l'équation suivante :

$$Ff_k + Bu_{ad,k} \approx 0 \quad (3.57)$$

En utilisant les bornes supérieure et inférieure du défaut décrites dans la section précédente, la solution de (3.57) peut être obtenue par la relation suivante si la matrice  $B$  est du rang complet :

$$u_{ad,k} = -B^*F \frac{\underline{f}_k + \overline{f}_k}{2} \quad (3.58)$$

où  $B^*$  est la matrice pseudo-inverse de  $B$ .

Dans le paragraphe suivant, une analyse de stabilité de système en boucle fermée sera étudiée.

### 3.3.2.2 Analyse de stabilité

En présence de défaut actionneur additif, le système en boucle fermée est défini par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A + \Delta A(\rho))x_k - \frac{BK}{2}(\overline{x}_k + \underline{x}_k) + Ff_k + Bu_{ad,k} + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (3.59)$$

Un observateur intervalle pour le système (3.59) est décrit par :

$$\begin{cases} \overline{x}_{k+1} = (A - LC - \frac{BK}{2})\overline{x}_k - \frac{BK}{2}\underline{x}_k + \overline{\chi}_k + \overline{\delta}_k \\ \underline{x}_{k+1} = (A - LC - \frac{BK}{2})\underline{x}_k - \frac{BK}{2}\overline{x}_k + \underline{\chi}_k + \underline{\delta}_k \end{cases} \quad (3.60)$$

où  $\overline{\delta}_k = \overline{\varphi}_k - \frac{1}{2}F(\overline{f}_k + \underline{f}_k) + \overline{w}_k + Ly_k + |L|\overline{V}E_p$  et  $\underline{\delta}_k = \underline{\varphi}_k - \frac{1}{2}F(\overline{f}_k + \underline{f}_k) + \underline{w}_k + Ly_k - |L|\overline{V}E_p$ .

**Théorème 3.6** *Supposons que les hypothèses 3.1, 3.2 et 3.5 sont vérifiées. L'état initial  $x_0$  vérifie les inégalités  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \overline{x}_0$ . De plus, soit la loi de commande suivante [Lamouchi, Amairi, Raïssi, and Aoun 2017a] :*

$$u_k = u_{n,k} + u_{ad,k} \quad (3.61)$$

S'il existe des matrices  $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, P = P^T \succ 0, Q \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, Q = Q^T \succ 0$  et  $W \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, W = W^T \succ 0$  telles que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :

$$\Phi = \begin{bmatrix} G^T P G - P + Q & G^T P & G^T P \\ PG & P & P \\ PG & P & P - W \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (3.62)$$

avec

$$G = \begin{bmatrix} A - LC - \frac{BK}{2} & -\frac{BK}{2} \\ -\frac{BK}{2} & A - LC - \frac{BK}{2} \end{bmatrix},$$

Alors,  $\underline{x}_k, \bar{x}_k$  et  $x_k \in \mathcal{L}_\infty^n$ . □

**Preuve 3.6** Pour prouver la bornitude des solutions de l'observateur  $\underline{x}_k$  et  $\bar{x}_k$ , on introduit le système auxiliaire suivant :

$$\xi_{k+1} = G\xi_k + \chi_k + \delta_k \quad (3.63)$$

$$\text{où } \xi_k = \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \bar{x}_k \end{bmatrix}, \quad \chi_k = \begin{bmatrix} \underline{\chi}_k \\ \bar{\chi}_k \end{bmatrix}, \quad \delta_k = \begin{bmatrix} \underline{\delta}_k \\ \bar{\delta}_k \end{bmatrix}$$

Par la suite, considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_k = \xi_k^T P \xi_k \quad (3.64)$$

La variation  $\Delta V$  de cette fonction est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_{k+1} - V_k \\ &= \xi_k^T G^T P G \xi_k - \xi_k^T P \xi_k + \xi_k^T G^T P \chi_k + \chi_k^T P G \xi_k + \chi_k^T P \chi_k + 2\xi_k^T G^T P \delta_k \\ &\quad + 2\delta_k^T P \chi_k + \delta_k^T P \delta_k \\ &= \xi_k^T (G^T P G - P) \xi_k + \xi_k^T G^T P \chi_k + \chi_k^T P G \xi_k + \chi_k^T P \chi_k + 2\xi_k^T G^T P \delta_k \\ &\quad + 2\delta_k^T P \chi_k + \delta_k^T (P - W) \delta_k + \xi_k^T Q \xi_k - \xi_k^T Q \xi_k + \delta_k^T W \delta_k \\ &= \begin{bmatrix} \xi_k \\ \chi_k \\ \delta_k \end{bmatrix}^T \Phi \begin{bmatrix} \xi_k \\ \chi_k \\ \delta_k \end{bmatrix} - \xi_k^T Q \xi_k + \delta_k^T W \delta_k \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3.62), on a :  $\Delta V \leq -\xi_k^T Q \xi_k + \delta_k^T W \delta_k$ , on peut donc conclure à partir du théorème 3.6 que les variables  $\underline{x}_k$  et  $\bar{x}_k$  restent bornées pour tout  $u_k \in \mathbb{R}^q, k \in \mathbb{N}$ .

### 3.3.3 Exemple numérique

On considère le système LPV discret suivant soumis à des défauts actionneurs additifs :

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A + \Delta A(\rho))x_k + Bu_k + Ff_k + w_k, \\ y_k = Cx_k + v_k, \end{cases} \quad (3.65)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.1 & 0.35 \\ 0.9 & 0.2 & -0.2 \\ 0.85 & -0.2 & 0.25 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

Pour la simulation, on choisit :

$$\Delta A(\rho) = \begin{bmatrix} 0.01 \sin(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 \sin(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \cos(k) \end{bmatrix},$$

$$\overline{\Delta A} = -\underline{\Delta A} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}, w_k = [0 \quad 0.01 \sin(k) \quad 0]^T,$$

$$\overline{w}_k = -\underline{w}_k = [0 \quad 0.01 \quad 0]^T, v_k = 0.01 \cos(k) \text{ et } \overline{V} = 0.01.$$

Un défaut actionneur se produit dans le système comme suit :

$$f_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 400 \\ \sin(0.01 k) & \text{si } k \geq 400 \end{cases}$$

avec  $F = [0 \quad 0.05 \quad 0]^T$ , et on suppose que le module de diagnostic fournit une estimation incertaine de  $f_k$  tel que  $\underline{f}_k \leq f_k \leq \overline{f}_k$  avec  $\underline{f}_k = 0.95 \sin(0.01 k)$  et  $\overline{f}_k = 1.05 \sin(0.01 k)$ .

Pour  $L = [0.9 \quad 1.1 \quad 0.5]^T$ , la matrice  $A - LC$  n'est pas non négative. Alors, une transformation des coordonnées,

$$S = \begin{bmatrix} -0.058 & 0.997 & -0.052 \\ 0.134 & -0.044 & -0.99 \\ 0.989 & 0.064 & 0.131 \end{bmatrix}$$
 est utilisée tel que  $E = R(A - LC)S$ , est non négative.

Par conséquent, le système d'équations (3.49) est un observateur intervalle pour le système (3.65) avec  $u_k = u_{n,k} + u_{ad,k}$ ,  $K = [0.9365 \quad -0.3135 \quad 1.0157]$  et  $u_{ad,k} = -B^*F \frac{\bar{f}_k + \underline{f}_k}{2}$ .

Le cas défectueux est considéré dans les simulations, tel que, avant  $t = 400s$ , le système fonctionne en régime nominal. À  $t = 400s$ , un défaut additif se produit dans l'actionneur. Supposons que les informations sur le défaut sont disponibles, la compensation du défaut est appliquée à  $t = 600$ .

Les résultats de simulations sont données par les figures 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 et 3.11.

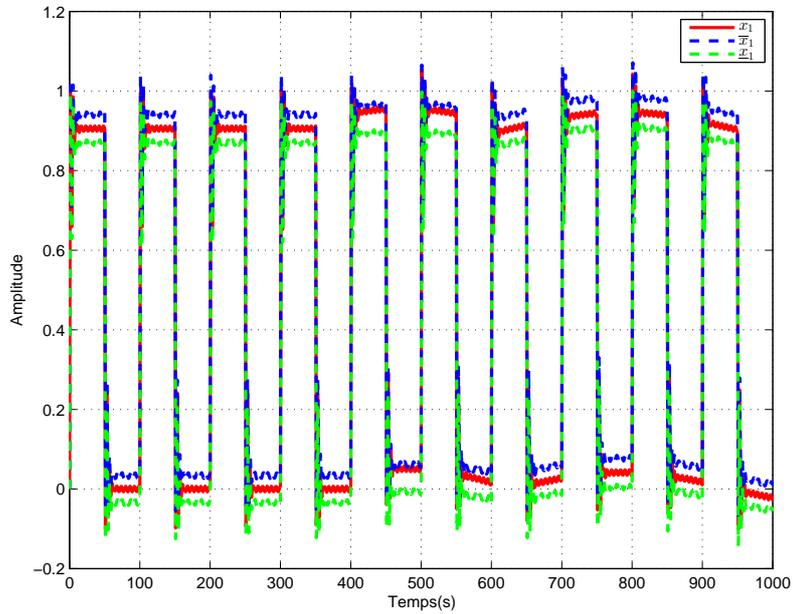


FIGURE 3.7 – Evolution de la première composante  $x_1$ .

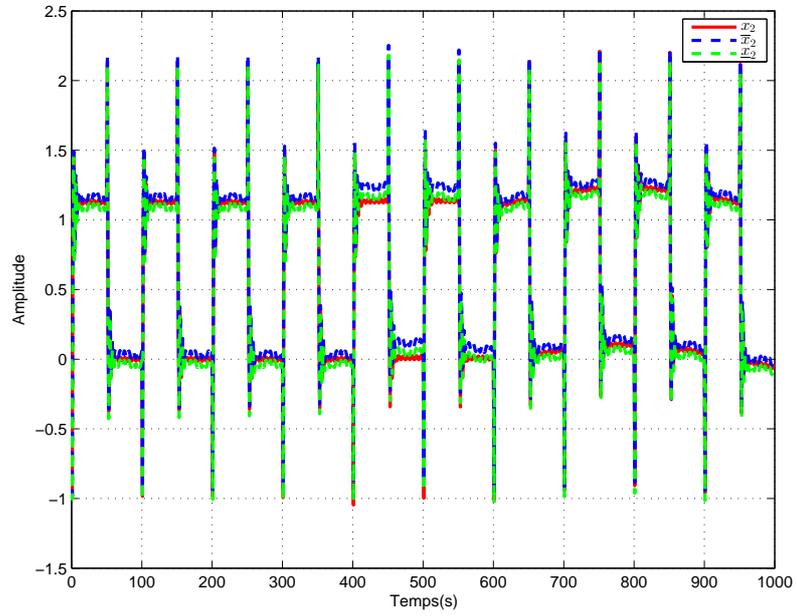


FIGURE 3.8 – Evolution de la deuxième composante  $x_2$ .

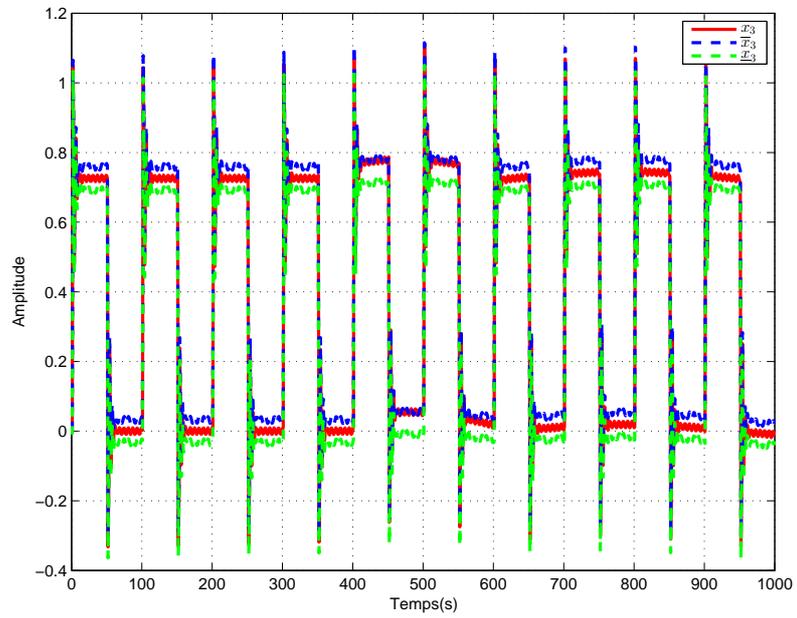


FIGURE 3.9 – Evolution de la troisième composante  $x_3$ .

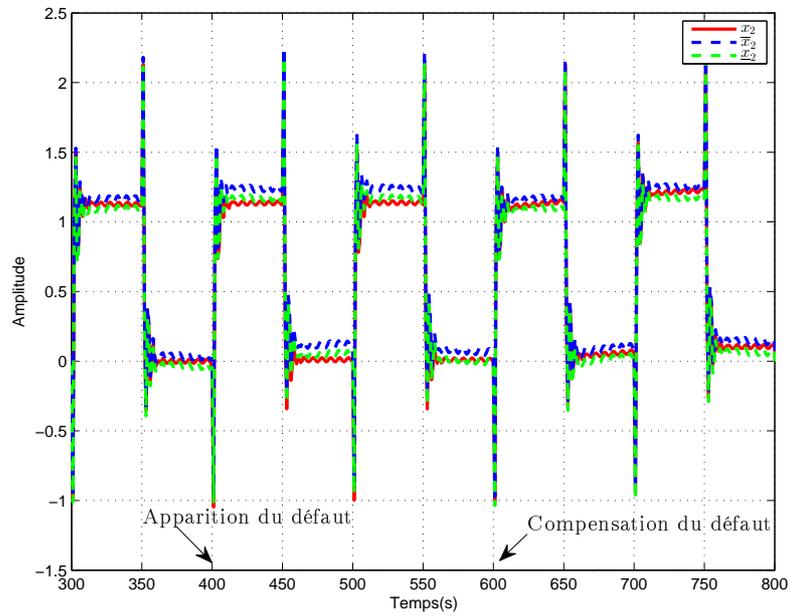


FIGURE 3.10 – Zoom de la deuxième composante  $x_2$ .

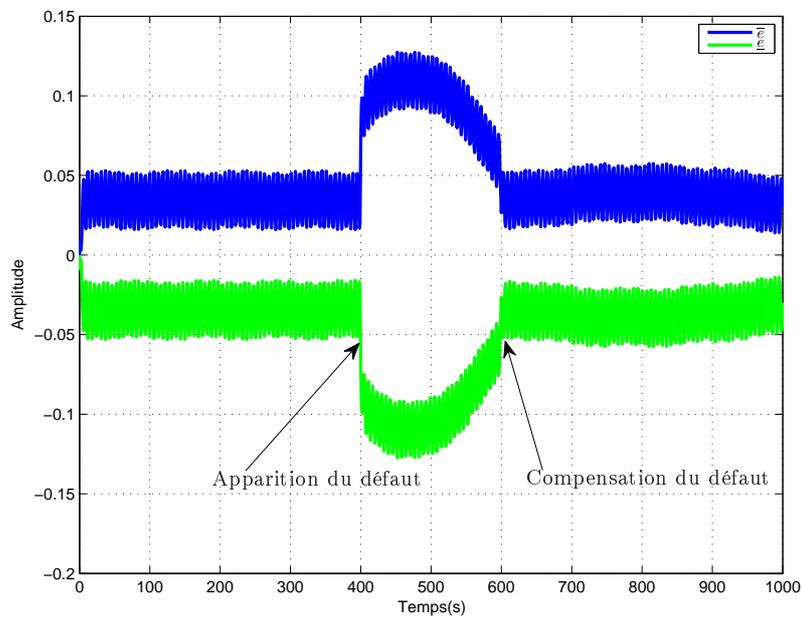


FIGURE 3.11 – Evolution des bornes supérieure et inférieure de l'erreur avec compensation.

La Figure 3.10 présente un zoom de la deuxième composante  $x_2$ . La Figure 3.11

présente l'évolution des bornes de l'erreur dans le cas défectueux et sain. Ces figures permettent de comparer les réponses de système vis-à-vis des défauts avec et sans compensation.

Les résultats de l'utilisation de la loi de commande proposée montrent que l'effet du défaut est traité et que la robustesse en termes de stabilité du système FTC en boucle fermée est assurée en présence de défauts actionneurs additifs et avec des perturbations externes.

### 3.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthodologie pour la synthèse de la commande active tolérante aux fautes.

En premier lieu, une approche d'estimation en utilisant les observateur intervalles à entrée inconnue pour les systèmes LPV est proposée. Cette approche est basée sur le principe de découplage des défauts. En effet, deux étapes se présentent : la première consiste à estimer l'état du système et la deuxième consiste à estimer le défaut. Une analyse de stabilité, exprimée en termes d'inégalité matricielle, est étudiée pour les deux étapes.

En second lieu, une technique de compensation de défauts actionneurs a été développée pour les système LPV. Un observateur intervalle est construit pour ce système permettant une estimation des bornes de l'état. Par la suite, les bornes de l'observateur sont utilisées pour le calcul d'une loi de commande additive permettant la compensation de défauts.

# Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons présenté nos travaux de recherche menés dans le cadre d'une thèse dédié à l'étude de la commande tolérante aux fautes. Le contexte à erreurs inconnues mais bornées dans lequel sont situés nos travaux, a permis de construire des méthodologies robustes, vis-à-vis des défauts, des perturbations externes et des incertitudes du modèle. L'objectif principal de cette thèse est de synthétiser un régulateur tolérant aux défauts en utilisant des observateurs intervalles.

Dans le chapitre 1, nous avons présenté en premier lieu un état de l'art sur les principales techniques de commandes tolérantes aux fautes. Deux principales méthodes sont détaillées à savoir la commande active et la commande passive. De plus, nous avons rappelé les résultats de quelques travaux sur la synthèse d'observateurs intervalles basée sur la théorie des systèmes coopératifs pour différentes classes des systèmes linéaires et non-linéaires. Des solutions ont été développées pour la relaxation des conditions liées à la construction d'un observateur intervalle. Elles consistent à utiliser un changement de coordonnées invariant ou variant dans le temps en fonction de l'approche proposée.

Dans le chapitre 2, nous avons développé de nouveaux résultats pour la commande passive tolérante aux fautes pour les systèmes LPV à temps discret. Deux méthodologies ensemblistes ont été proposées dans ce chapitre. La première consiste

à développer un observateur intervalle associé à des systèmes LPV avec défauts actionneurs. La synthèse d'observateur est basée sur une structure de Luenberger à temps discret où les incertitudes et les défauts sont considérés inconnus mais bornés. Ensuite, cet observateur est utilisé pour le calcul d'une loi de commande.

Dans la deuxième méthode, nous nous sommes intéressés aux problèmes de la FTC passive pour des systèmes LPV discrets en présence de défauts composants. Une commande passive robuste vis-à-vis aux défauts a été proposée. Elle est basée sur un retour d'état linéaire, permettant d'assurer la stabilité du système même en présence de perturbations externes. Ces deux méthodes sont illustrées à travers des résultats de simulation.

Dans le chapitre 3, nous avons étendu les résultats obtenus pour la commande active tolérante aux fautes. Un observateur intervalle à entrée inconnue basée sur le principe de découplage des défauts est développé. Deux étapes se présentent : la première consiste à estimer les bornes de l'état du système. La deuxième fournit une estimation des bornes du défaut. Nous avons développé une méthode de compensation de défauts actionneurs pour les systèmes LPV. L'idée est de synthétiser un observateur intervalle fournissant des bornes minorantes et majorantes de l'état. Ces bornes sont utilisées par la suite pour le calcul d'une loi de commande additive permettant la compensation des défauts. Les méthodologies développées sont illustrées à travers des exemples numériques.

Les travaux présentés dans ce mémoire font apparaître un certain nombre de perspectives pour des développements ultérieurs. Une direction à développer et à formaliser concerne l'évaluation des performances de l'observateur intervalle à savoir la précision et la rapidité. Il serait aussi intéressant de réutiliser les observateurs intervalles proposés pour la commande tolérante aux fautes des systèmes à retard et systèmes hybrides en présence de défauts et d'incertitudes bornés.

# Bibliographie

- Ali Abdullah and Mohamed Zribi. Sensor-fault-tolerant control for a class of linear parameter varying systems with practical examples. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 60(11) :5239–5251, 2013. 80
- Jürgen Ackermann. *Sampled-data control systems : analysis and synthesis, robust system design*. Springer Science & Business Media, 2012. 15
- Halim Alwi, Christopher Edwards, and Chee Pin Tan. Sliding mode estimation schemes for incipient sensor faults. *Automatica*, 45(7) :1679–1685, 2009. 6
- Karl J Åström and Björn Wittenmark. *Adaptive control*. Courier Corporation, 2013. 20
- Samir Bennani, R Van der Sluis, G Schram, and JA Mulder. Control law reconfiguration using robust linear parameter varying control. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Portland, OR*, pages 977–987, 1999. 2
- M Benosman and K-Y Lum. Application of absolute stability theory to robust control against loss of actuator effectiveness. *IET Control Theory & Applications*, 3(6) :772–788, 2009. 42
- Olivier Bernard and Jean-Luc Gouzé. Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models. *Journal of process control*, 14(7) :765–774, 2004. 6, 28

- Mogens Blanke and Jochen Schröder. *Diagnosis and fault-tolerant control*, volume 691. Springer, 2006. 7, 8, 12
- Joaquim Blesa, Damiano Rotondo, Vicenç Puig, and Fatiha Nejjari. Fdi and ftc of wind turbines using the interval observer approach and virtual actuators/sensors. *Control Engineering Practice*, 24 :138–155, 2014. 24
- Marc Bodson and Joseph E Groszkiewicz. Multivariable adaptive algorithms for reconfigurable flight control. *IEEE transactions on control systems technology*, 5 (2) :217–229, 1997. 21
- Jovan D Boskovic and Raman K Mehra. Fault accommodation using model predictive methods. In *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*, volume 6, pages 5104–5109. IEEE, 2002. 79
- Corentin Briat and Mustafa Khammash. Interval peak-to-peak observers for continuous-and discrete-time systems with persistent inputs and delays. *Automatica*, 74 :206–213, 2016. 3, 69
- Efim M Bronstein. Approximation of convex sets by polytopes. *Journal of Mathematical Sciences*, 153(6) :727–762, 2008. 22
- AK Caglayan, SM Allen, and K Wehmuller. Evaluation of a second generation reconfiguration strategy for aircraft flight control systems subjected to actuator failure/surface damage. In *Aerospace and Electronics Conference, 1988. NAECON 1988., Proceedings of the IEEE 1988 National*, pages 520–529. IEEE, 1988. 18
- S Ben Chabane, C Stoica Maniu, EF Camacho, T Alamo, and D Dumur. Fault tolerant control approach based on multiple models and set-membership state estimation. In *Control Conference (ECC), 2016 European*, pages 1105–1110. IEEE, 2016. 24

- Stanislav Chebotarev, Denis Efimov, Tarek Raïssi, and Ali Zolghadri. On interval observer design for a class of continuous-time LPV systems. In *IFAC Nolcos 2013*, 2013. 3, 26
- Stanislav Chebotarev, Denis Efimov, Tarek Raïssi, and Ali Zolghadri. Interval observers for continuous-time lpv systems with  $l_1/l_2$  performance. *Automatica*, 58 :82–89, 2015a. 66
- Stanislav Chebotarev, Denis Efimov, Tarek Raïssi, and Ali Zolghadri. Interval observers for continuous-time LPV systems with L1/L2 performance. *Automatica*, 58 :82 – 89, 2015b. 3, 37
- Felix L Chernousko. *State estimation for dynamic systems*. CRC Press, 1993. 23
- Jérôme Cieslak, David Henry, Ali Zolghadri, and Philippe Goupil. Development of an active fault-tolerant flight control strategy. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 31(1) :135–147, 2008. 79
- Saul de Oca, Vicenc Puig, Marcin Witczak, and Lukasz Dziekan. Fault tolerant control strategy for actuator faults using lpv techniques : Application to a two degree of freedom helicopter. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 22(1) :161–171, 2012. 2
- Ngoc Thach Dinh. *Observateur par intervalles et observateur positif*. PhD thesis, Paris 11, 2014. 28, 29, 30, 31, 33, 35
- ZHOU Donghua and X Ding. Theory and applications of fault tolerant control. *Acta Automatica Sinica*, 26(6) :788–797, 2000. 11
- Guy A Dumont and Mihai Huzmezan. Concepts, methods and techniques in adaptive control. In *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*, volume 2, pages 1137–1150. IEEE, 2002. 20

- C Durieu, E Walter, and B Polyak. Multi-input multi-output ellipsoidal state bounding. *Journal of optimization theory and applications*, 111(2) :273–303, 2001. 23
- Denis Efimov, Leonid Fridman, Tarek Raïssi, Ali Zolghadri, and Ramatou Seydou. Interval estimation for LPV systems applying high order sliding mode techniques. *Automatica*, 48(9) :2365–2371, 2012. 28, 37
- Denis Efimov, Wilfrid Perruquetti, Tarek Raïssi, and Ali Zolghadri. Interval observers for time-varying discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(12) :3218–3224, 2013a. 31, 32, 33, 37, 48
- Denis Efimov, Tarek Raïssi, and Ali Zolghadri. Control of nonlinear and lpv systems : interval observer-based framework. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(3) :773–778, 2013b. 37
- Denis Efimov, Tarek Raïssi, Wilfrid Perruquetti, and Ali Zolghadri. Design of interval observers for estimation and stabilization of discrete-time lpv systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 33(4) :1051–1066, 2016. 37, 38, 39, 40, 70
- Lorenzo Farina and Sergio Rinaldi. *Positive linear systems : theory and applications*, volume 50. John Wiley & Sons, 2011. 27
- Zhiqiang Gao and Panos J Antsaklis. Stability of the pseudo-inverse method for reconfigurable control systems. *International Journal of Control*, 53(3) :717–729, 1991. 18
- Jean-Luc Gouzé, A Rapaport, and Mohamed Zakaria Hadj-Sadok. Interval observers for uncertain biological systems. *Ecological modelling*, 133(1) :45–56, 2000. 3, 6, 27

- David Gucik-Derigny, Tarek Raïssi, and Ali Zolghadri. Interval state and unknown inputs estimation for linear time-invariant systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3) :7375–7381, 2014. 80
- David Gucik-Derigny, Tarek Raïssi, and Ali Zolghadri. A note on interval observer design for unknown input estimation. *International Journal of Control*, 89(1) : 25–37, 2016. 80
- Habib Hamdi, Mickael Rodrigues, Chokri Mechmeche, Didier Theilliol, and N BenHadj Braiek. Fault detection and isolation in linear parameter-varying descriptor systems via proportional integral observer. *International journal of adaptive control and signal processing*, 26(3) :224–240, 2012. 79
- Eldon Hansen. Interval arithmetic in matrix computations, part i. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series B : Numerical Analysis*, 2 (2) :308–320, 1965. 23
- M.W Hirsch and Hal Smith. Monotone maps : a review. *Journal of Difference Equations and Applications*, 11(4-5) :379–398, 2005. 27
- Müller Hou and PC Muller. Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on automatic control*, 37(6) :871–875, 1992. 81, 82
- Dalil Ichalal, Benoît Marx, José Ragot, and Didier Maquin. Unknown input observer for LPV systems with parameter varying output equation. *IFAC-PapersOnLine*, 48(21) :1030–1035, 2015. 79
- Rolf Isermann and Peter Ballé. Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes. *Control engineering practice*, 5(5) : 709–719, 1997. 7
- Rolf Isermann, Ralf Schwarz, and Stefan Stolz. Fault-tolerant drive-by-wire systems. *IEEE Control Systems*, 22(5) :64–81, 2002. 8

- L. Jaulin. Nonlinear bounded-error state estimation of continuous-time systems. *Automatica*, 38(6) :1079–1082, 2002. 27
- Luc Jaulin, Michel Kieffer, Olivier Didrit, and Éric Walter. Interval analysis. In *Applied Interval Analysis*, pages 11–43. Springer, 2001. 23
- Jin Jiang. Design of reconfigurable control systems using eigenstructure assignments. *International Journal of Control*, 59(2) :395–410, 1994. 79
- Jin Jiang and Youmin Zhang. Accepting performance degradation in fault-tolerant control system design. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(2) : 284–292, 2006. 6
- Jin Jiang and Qing Zhao. Design of reliable control systems possessing actuator redundancies. *Journal of Guidance, control, and dynamics*, 23(4) :709–718, 2000. 15
- Zhong-Ping Jiang and Yuan Wang. Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems. *Automatica*, 37(6) :857–869, 2001. 42, 43, 69
- Stoyan Kamenov Kanev. *Robust fault-tolerant control*. University of Twente, 2004. 17
- MS Keating, M Pachter, and CH Houppis. Fault tolerant control system : Qft design. *International journal of robust and nonlinear control*, 7(6) :551–559, 1997. 16, 41
- Ahmed Khelassi. *Nouvelle méthodologie de synthèse de lois de commande tolérante aux fautes garantissant la fiabilité des systèmes*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I, 2011. 17
- Michel Kieffer, Luc Jaulin, and Eric Walter. Guaranteed recursive non-linear state bounding using interval analysis. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 16(3) :193–218, 2002. 27, 42

- Ioannis K Konstantopoulos and Panos J Antsaklis. Eigenstructure assignment in reconfigurable control systems. *ISIS*, 96 :001, 1996. 18
- Wolfgang Kühn. Towards an optimal control of the wrapping effect. In *Developments in Reliable Computing*, pages 43–51. Springer, 1999. 23
- Alex A Kurzhanskiy and Pravin Varaiya. Ellipsoidal toolbox manual. 2006. 23
- R. Lamouchi, M. Amairi, T. Raïssi, and M. Aoun. Interval observer design for linear parameter-varying systems subject to component faults. In *24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), 2016*, pages 707–712. IEEE, 2016a. 42
- R. Lamouchi, T. Raïssi, M. Amairi, and M. Aoun. Fault tolerant control in a set-membership framework. In *European Control Conference (ECC), 2016*, pages 1099–1104. IEEE, 2016b. 42
- R. Lamouchi, M. Amairi, T. Raïssi, and M. Aoun. Actuator fault compensation in a set-membership framework for linear parameter-varying systems. In *The 20th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC WC 2017)*, pages 1–6. IFAC, 2017a. 103
- R. Lamouchi, T. Raïssi, M. Amairi, and M. Aoun. Interval observer framework for fault tolerant control of linear parameter-varying systems. *International Journal of Control*, pages 1–14, 2017b. 45, 46, 50, 63
- Steven R Lay. *Convex sets and their applications*. Courier Corporation, 2007. 22
- Fang Liao, Jian Liang Wang, and Guang-Hong Yang. Reliable robust flight tracking control : an lmi approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10 (1) :76–89, 2002. 6, 41

- Tamas Luspay, Balázs Kulcsár, and Karolos Grigoriadis. Fault estimation for discrete time LPV systems under noisy scheduling measurements. *IFAC-PapersOnLine*, 48(21) :1018–1023, 2015. 80
- Jan Maciejowski and Colin Jones. Mpc fault-tolerant flight control case study : Flight 1862. In *Proceedings of the International Federation of Automatic Control on Safeprocess Symposium*, number EPFL-CONF-169763, pages 119–124, 2003. 20
- Jan Marian Maciejowski. *Predictive control : with constraints*. Pearson education, 2002. 20
- Mufeed Mahmoud, Jin Jiang, and Youmin Zhang. Stochastic stability analysis of fault-tolerant control systems in the presence of noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(11) :1810–1815, 2001. 19
- Frédéric Mazenc and Olivier Bernard. Asymptotically stable interval observers for planar systems with complex poles. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(2) :523–527, 2010. 3, 6, 33
- Frédéric Mazenc and Olivier Bernard. Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances. *Automatica*, 47(1) :140–147, 2011. 33
- Frédéric Mazenc, Thach Ngoc Dinh, and Silviu-Iulian Niculescu. Robust interval observers and stabilization design for discrete-time systems with input and output. *Automatica*, 49(11) :3490–3497, 2013. 51, 70
- Frederic Mazenc, Thach Ngoc Dinh, and Silviu Iulian Niculescu. Interval observers for discrete-time systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(17) :2867–2890, 2014. 49
- Nacim Meslem and Nacim Ramdani. Interval observer design based on nonlinear hybridization and practical stability analysis. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 25(3) :228–248, 2011. 29

- Prashant Mhaskar, Adiwinata Gani, Nael H El-Farra, Charles McFall, Panagiotis D Christofides, and James F Davis. Integrated fault-detection and fault-tolerant control of process systems. *AIChE Journal*, 52(6) :2129–2148, 2006. 79
- Marcelo Moisan, Olivier Bernard, and Jean-Luc Gouzé. Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors. *Automatica*, 45(1) :291–295, 2009. 6, 27
- Ramon E Moore. Interval analysis, vol. 4, 1966. 23
- M. Müller. Über das fundamentaltheorem in der theorie der gewöhnlichen differentialgleichungen. *Mathematische Zeitschrift*, 26(1) :619–645, 1927. 28
- Kumpati S Narendra, Osvaldo A Driollet, Matthias Feiler, and Koshy George. Adaptive control using multiple models, switching and tuning. *International journal of adaptive control and signal processing*, 17(2) :87–102, 2003. 19
- Fatiha Nejjari, Vicenç Puig, Saúl Montes de Oca, and Atefeh Sadeghzadeh. Robust fault detection for LPV systems using interval observers and zonotopes. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009.*, pages 1002–1007. IEEE, 2009. 6
- Henrik Niemann and Jakob Stoustrup. Reliable control using the primary and dual youla parameterizations. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 4353–4358. IEEE, 2002. 42
- Henrik Niemann and Jakob Stoustrup. *Passive fault tolerant control of a double inverted pendulum : a case study example*. Aalborg University, Department of Control Engineering, 2003. 16
- Hassan Noura, Dominique Sauter, Frédéric Hamelin, and Didier Theilliol. Fault-tolerant control in dynamic systems : Application to a winding machine. *Control Systems, IEEE*, 20(1) :33–49, 2000. 6

- Hassan Noura, Didier Theilliol, Jean-Christophe Ponsart, and Abbas Chamseddine. *Fault-tolerant control systems : Design and practical applications*. Advances in Industrial Control. Springer-Verlag London, 2009. 54
- Ron J Patton and S Klinkhieo. Lpv fault estimation and ftc of a two-link manipulator. In *American Control Conference (ACC), 2010*, pages 4647–4652. IEEE, 2010. 2
- FN Pirmoradi, F Sassani, and CW De Silva. Fault detection and diagnosis in a spacecraft attitude determination system. *Acta Astronautica*, 65(5) :710–729, 2009. 6
- Boris T Polyak, Sergey A Nazin, Cécile Durieu, and Eric Walter. Ellipsoidal parameter or state estimation under model uncertainty. *Automatica*, 40(7) :1171–1179, 2004. 23
- Vicenç Puig. Fault diagnosis and fault tolerant control using set-membership approaches : Application to real case studies. *Applied Mathematics and Computer Science*, 20(4) :619–635, 2010. 23
- T. Raïssi, N. Ramdani, and Y. Candau. Set membership state and parameter estimation for systems described by nonlinear differential equations. *Automatica*, 40(10) :1771–1777, 2004. 27
- Tarek Raïssi, Gaétan Videau, and Ali Zolghadri. Interval observer design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems. *Automatica*, 46(3) : 518–527, 2010. 37, 66
- Tarek Raïssi, Denis Efimov, and Ali Zolghadri. Interval state estimation for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(1) :260–265, 2012. 29

- M Ait Rami, Chun Hung Cheng, and C De Prada. Tight robust interval observers : an lp approach. In *47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2967–2972. IEEE, 2008. 69
- E.I Robinson, J Marzat, and T Raïssi. Interval observer design for unknown input estimation of linear time-invariant discrete-time systems. In *The 20th World Congress of the International Federation of Automatic Control*, pages –, Accepted, 2017. 80
- Mickael Rodrigues. *Diagnostic et commande active tolérante aux défauts appliqués aux systèmes décrits par des multi-modèles linéaires*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I, 2005. 20, 21
- Damiano Rotondo, Fatiha Nejjari, and Vicenç Puig. A virtual actuator and sensor approach for fault tolerant control of LPV systems. *Journal of Process Control*, 24(3) :203–222, 2014. 54
- Fred Schweppe. Recursive state estimation : Unknown but bounded errors and system inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13(1) :22–28, 1968. 23
- Francesco Scibilia, Sorin Olaru, and Morten Hovd. On feasible sets for mpc and their approximations. *Automatica*, 47(1) :133–139, 2011. 22
- Noboru Sebe and Koichi Suyama. Passive fault tolerant servo control against one device failure out of sensors and actuators. In *Control Conference (ECC), 2014 European*, pages 644–651. IEEE, 2014. 15
- María M Seron and José A De Doná. Robust fault estimation and compensation for LPV systems under actuator and sensor faults. *Automatica*, 52 :294–301, 2015. 80
- Yoonghyun Shin, Anthony J Calise, and Matthew Johnson. Adaptive control of advanced fighter aircraft in nonlinear flight regimes. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 31(5) :1464–1477, 2008. 79

- Christoffer Sloth, Thomas Esbensen, and Jakob Stoustrup. Active and passive fault-tolerant LPV control of wind turbines. In *American Control Conference (ACC), 2010*, pages 4640–4646. IEEE, 2010. 2
- H.L. Smith. *Monotone dynamical systems : an introduction to the theory of competitive and cooperative systems*. Number 41. Mathematical surveys and monographs, 1995. 28
- Eduardo D Sontag. Input to state stability : Basic concepts and results. In *Nonlinear and optimal control theory*, pages 163–220. Springer, 2008. 42, 43
- Marcel Staroswiecki and Anne-Lise Gehin. From control to supervision. *Annual Reviews in Control*, 25 :1–11, 2001. 5, 7, 8, 12
- Florin Stoican. *Fault tolerant control based on set-theoretic methods*. PhD thesis, GIPSA-Lab, France, 2013. 24
- Jakob Stoustrup and Kemin Zhou. Robustness issues in fault diagnosis and fault tolerant control. *Journal of Control Science and Engineering*, 2008, 2008. 79
- Xiaoyu Sun, Ron J Patton, and Philippe Goupil. Robust adaptive fault estimation for a commercial aircraft oscillatory fault scenario. In *International Conference on Control (CONTROL), 2012 UKACC*, pages 595–600. IEEE, 2012. 79
- F Szigeti. Kalman’s rank condition for infinite-dimensional time-dependent systems. In *Proc. Differential Eq. Conference : equadiff*, volume 91, pages 927–931, 1991. 8
- Tomohiro Takagi and Michio Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, (1) :116–132, 1985. 21
- Gang Tao and Suresh M Joshi. Adaptive control of systems with actuator failures. In *Adaptive control of nonsmooth dynamic systems*, pages 111–156. Springer, 2001. 79

- Rihab El Houda Thabet, Tarek Raïssi, Christophe Combastel, and Ali Zolghadri. Design of interval observers for lpv systems subject to exogenous disturbances. In *Control Conference (ECC), 2013 European*, pages 1126–1131. IEEE, 2013. 37
- D Theilliol, D Sauter, and JC Ponsart. A multiple model based approach for fault tolerant control in non linear systems. In *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, Washington, DC, USA*, volume 1, pages 149–154, 2004. 19
- S Varma and KD Kumar. Fault tolerant satellite attitude control using solar radiation pressure based on nonlinear adaptive sliding mode. *Acta Astronautica*, 66(3) :486–500, 2010. 6
- Eric Walter and Michel Kieffer. Interval analysis for guaranteed nonlinear parameter estimation. *IFAC Proceedings Volumes*, 36(16) :249–260, 2003. 27, 42
- Yan Wang, David M Bevly, and Rajesh Rajamani. Interval observer design for lpv systems with parametric uncertainty. *Automatica*, 60 :79–85, 2015. 3, 6, 37
- Feng Xu, Junbo Tan, Xueqian Wang, Vicenç Puig, Bin Liang, Bo Yuan, and Houde Liu. Generalized set-theoretic unknown input observer for LPV systems with application to state estimation and robust fault detection. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017. 80
- J Yamé, Michel Kinnaert, Marcel Staroswiecki, and Neng Eva Wu. Performance based switching for fault tolerant control. In *Fault detection, supervision and safety for technical processes : SAFEPROCESS 2003*. Elsevier, 2003. 19
- G-H Yang, Jian Liang Wang, and Yeng Chai Soh. Reliable lqg control with sensor failures. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 147(4) :433–439, 2000.

- Luqing Ye, Shengtie Wang, Fengshan Bing, OP Malik, and Yuming Zeng. Control/maintenance strategy fault tolerant mode and reliability analysis for hydro power stations. *IEEE Transactions on Power Systems*, 16(3) :340–345, 2001. 6
- Bo Yuan and Jun Yang. Parameter space approach for active fault tolerant control design. In *International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation (ICICTA)*, volume 1, pages 409–412. IEEE, 2008. 79
- Y Zhang, Fuli Wang, Tim Hesketh, DJ Clements, and Ray Eaton. Fault accommodation for nonlinear systems using fuzzy adaptive sliding control. *International Journal of Systems Science*, 36(4) :215–220, 2005. 79
- Y-W Zhang, F-L Wang, and G Yu. Fault accommodation of a class of nonlinear systems using a learning approach. *ACTA Automatica Sinica*, 30(5) :757–762, 2004. 79
- Youmin Zhang and Jin Jiang. Integrated active fault-tolerant control using imm approach. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems*, 37(4) :1221–1235, 2001. 18, 19, 79
- Youmin Zhang and Jin Jiang. Design of restructurable active fault-tolerant control systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1) :101–106, 2002. 21
- Youmin Zhang and Jin Jiang. Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems. *Annual reviews in control*, 32(2) :229–252, 2008. 5, 17, 79
- Q Zhao and J Jiang. Reliable state feedback control system design against actuator failures. *Automatica*, 34(10) :1267–1272, 1998. 15
- Gang Zheng, Denis Efimov, and Wilfrid Perruquetti. Design of interval observer for a class of uncertain unobservable nonlinear systems. *Automatica*, 63 :167–174, 2016. 6, 46, 65, 67, 86, 100

Kemin Zhou and Zhang Ren. A new controller architecture for high performance, robust, and fault-tolerant control. *IEEE Transactions on automatic control*, 46 (10) :1613–1618, 2001. 16





Rihab LAMOUCHI

Contributions à l'observation et à  
la commande tolérante aux fautes  
des systèmes incertains



**Abstract :**

The research work presented in this thesis focuses on the design of interval observers for fault-tolerant control of uncertain systems. The presence of faults, uncertainties and disturbances in automated systems often causes undesirable reactions. In this context, two approaches of fault tolerant control have been developed based on interval observers in the case where the faults and the uncertainties are unknown but bounded. The first approach is passive and consists in ensuring the closed-loop system stability even in the presence of actuator and/or component faults. The second approach, an active one, compensates the fault effect and ensures the system stability and desired performances. These contributions are validated through numerical simulations.

**Keywords :**

Fault tolerant control, linear parameter varying systems, interval observers, active FTC, passive FTC, uncertainties.

**Résumé :**

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire portent sur la synthèse d'observateurs intervalles pour la commande tolérante aux fautes de systèmes incertains. La présence de défauts, d'incertitudes et de perturbations peut provoquer des réactions indésirables du système commandé. Dans ce contexte, nous avons développé deux approches de commande tolérante aux fautes basées sur des observateurs intervalles dans le cas où les défauts et les incertitudes sont inconnus mais bornés. La première approche, dite passive, permet de garantir la stabilité du système en boucle fermée y compris en présence de défauts actionneurs et/ou composants. La seconde approche, dite active, permet de compenser l'effet des défauts et d'assurer la stabilité et les performances désirées du système. Ces contributions sont validées par des simulations numériques.

**Mots clés :**

Commande tolérante aux fautes, systèmes linéaires à paramètres variables, observateurs intervalles, FTC active, FTC passive, incertitudes.