Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques. Le cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire en France. Approches didactique et ergonomique.

Maryvonne Priolet

Université Lumière Lyon 2

École Doctorale EPIC
ED 485 – Éducation – Psychologie - Information et Communication
Unité Mixte de Recherche : UMR 5191 ICAR

Institut de Sciences et Pratiques de l'Éducation et de la Formation

Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques

Le cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire française

Approches didactique et ergonomique

Par Maryvonne PRIOLET

Thèse présentée pour le Doctorat de l'Université Lyon 2
en Sciences de l'Éducation

Sous la direction de Jean-Claude RÉGNIER

Soutenue publiquement le 6 mai 2008

Devant le jury composé de :

Mme Nadja Acioly-Régnier,	Maître de Conférence, IUFM de Lyon-Université Lyon1
M. Michel Fayol,	Professeur des Universités, UBP Clermont-Ferrand
Mme Jarmila Novotnà,	Professeure d'Université, Charles University, Prague
M. François Pluvinage,	Professeur des Universités, CINVESTAV Mexico
M. Jean-Claude Régnier,	Professeur des Universités, Université de Lyon

Université Lumière Lyon 2

École Doctorale EPIC

ED 485 – Éducation – Psychologie - Information et Communication

Unité Mixte de Recherche : UMR 5191 ICAR

Institut de Sciences et Pratiques de l'Éducation et de la Formation

Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques

Le cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire française

Approches didactique et ergonomique

Par Maryvonne PRIOLET

Thèse présentée pour le Doctorat de l'Université Lyon 2
en Sciences de l'Éducation

Sous la direction de Jean-Claude RÉGNIER

Sommaire

Remerciements

Mes remerciements s'adresseront d'abord à Jean-Claude Régnier qui a accepté en 1998 de diriger mon mémoire de maîtrise et qui est devenu, quelques années plus tard, mon directeur de thèse. Travailler avec cet expert en statistique constitue une aide précieuse, mais appartenir à son groupe de doctorants conduit aussi à un parcours rempli d'humanité. Je tiens à le remercier très chaleureusement d'avoir accepté de diriger cette thèse. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie Jarmila Novotnà et François Pluvinage d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Je suis sûre que leurs remarques et commentaires viendront nourrir et enrichir mes réflexions. À travers leur présence, je retrouve les premières étapes d'un parcours qu'ils ont, chacun à leur manière, contribué à tracer en ma faveur. Grâce à Jarmila Novotnà, ce fut pour moi en 2001 la première participation à un congrès européen et grâce à François Pluvinage, j'ai eu l'occasion de rencontrer en 2002 les membres de l'école de Strasbourg lors du colloque Argentoratum.

Mes remerciements vont également à Nadja Acioly-Régnier et à Michel Fayol, d'une part, pour avoir bien voulu être membres de ce jury, d'autre part, pour m'avoir respectivement fait partager un peu de la culture de la terre brésilienne et ouvert les portes de la littérature anglo-saxonne.

Un grand merci à tous les membres du groupe ADATIC, en particulier à mes amis brésiliens Nubia, Elayne, Clovis, Valdir, dont j'apprécie la gentillesse, l'enthousiasme et le soutien en toutes circonstances. Merci aussi à Patrick Chignol d'avoir ouvert la voie de la soutenance aux membres de notre groupe. Avec des remerciements spécifiques à Jean-Claude Oriol qui, avec son regard critique et ses « 1000 courages » dans le cadre des relectures de ce mémoire de thèse, m'a permis de garder optimisme et sérénité lors des dernières semaines de rédaction.

Je tiens à remercier tous les enseignants et leurs inspecteurs qui ont autorisé le recueil des données. Merci aussi à tous les enfants des écoles concernées. Sans eux, rien n'aurait été possible.

Que tous ceux et celles qui m'ont encouragée et soutenue dans ces tâches d'exploration et de rédaction et qui ont permis la réalisation de ce travail trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Enfin, merci à Michel pour son soutien indéfectible et son aide au quotidien.

Mais le plus important est de cultiver *l'intelligence* qui est l'aptitude à faire face à des situations nouvelles et à saisir des relations. C'est la recherche de *"problèmes"* qui est donc l'activité mathématique la plus importante.

Georges Glaeser (Le livre du problème, fascicule 1, Pédagogie de l'exercice et du problème, 1973, p. 19)

À mes parents
et grands-parents,
à ma petite sœur du Brésil,

à Michel

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

> *Dans les années 1980-1990, institutrice dans la classe de CM2 d'Ainay-le-Château, nous étions loin d'imaginer que les questions que nous nous posions sur les difficultés rencontrées par nos élèves en résolution de problèmes mathématiques nous conduiraient des années plus tard à soutenir, à l'Université de Lyon 2, une thèse portée par ces mêmes interrogations.*

C'est en effet essentiellement dans l'exercice de notre métier d'institutrice, face au constat réitéré de difficultés d'apprentissage rencontrées par nos élèves dans le champ de la résolution de problèmes que sont apparus un besoin et une ferme volonté de nous intéresser aux travaux de recherche liés à l'enseignement des mathématiques. Dans le même temps, c'est grâce à notre parcours d'étudiante en psychologie, pour la préparation d'un Diplôme d'Études Universitaires Générales à l'Université Blaise Pascal à Clermont-Ferrand puis pour celle d'une Licence à l'Université Paris 8, que nous est offerte l'opportunité de découvrir des travaux universitaires sur les questions étroitement liées à l'apprentissage. Des lectures s'ensuivent : *L'enfant et le nombre* (Fayol, 1990), *Les activités mentales* (Richard, 1990), *Les chemins du nombre* (Bideaud, Meljac et Fischer, 1991). Tout cela complété par l'envie de découvrir plus avant les travaux des concepteurs de situations didactiques telles que la *Course à 20* (in Brousseau, 1973) dont la mise en œuvre vient rompre avec celle des autres problèmes extraits des manuels scolaires que nous proposons habituellement à nos élèves. Le pas vers un intérêt grandissant pour les travaux relevant de la didactique des mathématiques est franchi.

C'est dans l'exercice depuis 1991 de notre fonction de conseillère pédagogique de circonscription, formatrice d'enseignants du premier degré, que nous remarquons que notre questionnement, portant sur les difficultés des élèves à résoudre des problèmes et sur les difficultés des professeurs à en assurer l'enseignement, est largement partagé par bon nombre de nos collègues dans leurs classes. C'est donc avec le souhait d'engager une réflexion sur cet enseignement dans ce champ précis des mathématiques que nous sollicitons une inscription en maîtrise de Sciences de l'Education à l'Université Lumière Lyon 2. De ce premier contact en 1998 avec le Professeur Jean-Claude Régnier qui deviendra notre directeur de thèse, nous retenons aujourd'hui un premier échange sur les différentes formes que peuvent revêtir aujourd'hui les énoncés de problèmes mathématiques dans les manuels scolaires, intégrant de plus en plus de représentations iconiques. On peut dès lors considérer que notre réflexion sur la place, le rôle et l'usage des différents registres de représentations sémiotiques débute ce jour-là lorsque Jean-Claude Régnier nous suggère la lecture de l'ouvrage *Sémiosis et Pensée humaine* de Raymond Duval (1995). En nous référant au cadre théorique développé par ce chercheur en psychologie de l'apprentissage et en didactique des mathématiques, nous conduisons une étude centrée sur les effets produits par la forme de présentation des données d'un énoncé de problème scolaire à données numériques sur la résolution de ce problème par des élèves de CE2. Nos premières analyses de données sont effectuées à partir, d'une part, des réponses écrites fournies par un échantillon de 1081 élèves à l'occasion de travaux de résolution de problèmes numériques proposés en classes de CE2 et, d'autre part, d'une enquête par questionnaire auprès d'un échantillon de 81 enseignants du cycle 3 de l'école primaire. L'échantillon d'enseignants et celui des élèves sont issus des écoles de trois circonscriptions scolaires relevant de deux académies différentes. Les traitements des données, sous l'enseignement et le contrôle rigoureux de Jean-Claude Régnier, nous conduisent à formuler plusieurs conclusions. Dans les limites de cette expérimentation, les traitements statistiques suggèrent qu'à partir d'un même type d'énoncé de problème numérique dont les données sont présentées sous différentes formes relevant de différents registres de représentation sémiotique, la forme rédactionnelle de l'énoncé n'influe pas sur la réussite au problème considéré. En comparant ensuite les résultats issus de la résolution des problèmes selon que les données de l'énoncé sont présentées sous la forme de représentations non discursives ou sous une forme exclusivement textuelle, nous observons que les élèves qui résolvent les problèmes dont les données sont présentées soit sous la forme d'un schéma, soit sous la forme d'un tableau, soit sous la forme d'un texte assorti de dessins extérieurs au traitement des données, soit sous trois formes simultanées différentes (texte, tableau, schéma), n'obtiennent pas de performances significativement différentes de celles des élèves qui ne disposent que d'une forme exclusivement textuelle. En revanche, les élèves auxquels nous avons proposé la résolution de problèmes avec une présentation des données sous la forme de graphiques obtiennent des scores de réussite moins élevés que ceux qui se sont vu attribuer un énoncé sous une forme exclusivement textuelle. Ce travail est présenté en 2000 lors de la soutenance de notre mémoire de maîtrise (Master 1) en Sciences et Pratiques d'éducation et de formation à l'Université Lyon2 (Priolet, 2000). Ces premières investigations, complétées par de nombreux échanges dans les séminaires à l'Université ou *en ligne* au sein du groupe ADATIC[1] fondé en 2000 par Jean-Claude Régnier, constituent un premier pas vers la construction de notre parcours de recherche.

Faisant suite à une annonce de ERME[2] pour le 2ème Congrès Européen de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, CERME 2, et sans trop envisager alors les barrières de la langue, nous soumettons un projet de communication par affiche au comité scientifique d'organisation de ce congrès. Ce projet destiné à présenter les résultats en rapport avec nos travaux de maîtrise est accepté, non pas pour une communication par affiche comme nous le

---

[1] Apprentissage, Didactique, Autoformation & Technologies de l'Information et de la Communication : groupe de recherche encadré par Jean-Claude Régnier, réunissant l'ensemble des étudiants dont il encadre ou a encadré les travaux de recherche (Master et Doctorat).

[2] European Society for Research in Mathematics Education

souhaitions, mais pour une communication orale dans un atelier animé par le Professeur Paolo Boero, didacticien des mathématiques, enseignant-chercheur à l'Université de Gênes (Italie). En 2001, premier bain dans un colloque à Marianzcké Lazné en République Tchèque, organisé sous la conduite de la Professeure Jarmila Novotná de l'Université Charles à Prague, première communication, première publication (Priolet, Régnier, 2001) en langue anglaise. Ce congrès est pour nous l'occasion de découvrir une didactique des mathématiques au-delà de nos frontières et de renouveler l'expérience d'échanges et de communications autour de thématiques communes en relation avec l'enseignement des mathématiques.

Le colloque Argentoratum qui se déroule en 2002 à l'ULP[3] de Strasbourg en hommage aux Professeurs François Pluvinage et Raymond Duval constitue aussi une étape importante dans notre cursus. Premières rencontres avec Raymond Duval que nous n'avons jusqu'alors côtoyé qu'à travers ses publications, avec François Pluvinage dont nous connaissons l'implication dans les épreuves d'évaluations nationales et dont nous découvrons l'ampleur de la participation au développement de l'école de didactique des mathématiques de Strasbourg, avec Regina Damm dont les travaux de thèse (Damm, 1992) ont retenu toute notre attention. Première rencontre, et hélas dernière, avec le Professeur Georges Glaeser dont Jean-Claude Régnier, son disciple, nous a fait découvrir les travaux (Glaeser, 1973) (Régnier et Perrier, 2002). Ce colloque est sans doute déterminant pour la suite de nos travaux dans la mesure où, dès notre retour, nous avons envie de davantage questionner la place de l'heuristique dans la résolution de problèmes et de poursuivre nos investigations sur la question de la conversion entre plusieurs registres de représentation sémiotique (Duval, 1995).

Nos échanges avec la communauté européenne des didacticiens des mathématiques se prolongent, d'une part, lors de la première école européenne d'été réservée aux Jeunes Chercheurs qui se tient à Klagenfurt en Autriche, d'autre part, lors de CERME 3 à Bellaria[4] (Italie) où nous présentons une communication (Priolet et Régnier, 2003) prenant appui sur notre mémoire de DEA (Priolet, 2001) orienté vers une première analyse des pratiques des enseignants dans le domaine de la résolution de problèmes mathématiques. Toutefois, notons que c'est plutôt par un détour par la didactique du français que nous découvrons les travaux de Leplat (2000) et ceux de Clot (2000) dans le champ de la psychologie ergonomique. En effet, en tant que formatrice impliquée durant les vacances scolaires dans la mise en place du module professionnel du DESS-Ingénierie du Conseil Pédagogique, créé et organisé durant quatre années successives par le Professeur Michel Fayol à l'Université Blaise Pascal à Clermont-Ferrand, nous avons l'opportunité de côtoyer le Professeur Roland Goigoux et de discuter avec lui de ses méthodes d'analyse des pratiques des enseignants dans le cadre de recherches relatives à l'enseignement de la lecture.

Dans le même temps, notre métier de formatrice d'enseignants nous conduit à nous intéresser aux performances réalisées par les élèves aux évaluations nationales de début de CE2 et de début de 6ème. En vue d'aider à la mise en œuvre de projets d'aide individualisée,

[3] Université Louis Pasteur
[4] CERME 3 : 3ème Congrès Européen de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

nous avons l'occasion d'analyser de nombreuses productions d'élèves, issues des cahiers desdites évaluations. Les difficultés rencontrées par bon nombre d'élèves dans le champ précis de la résolution de problèmes mathématiques continuent à susciter en nous des interrogations. Nous nous demandons notamment quelles sont les procédures utilisées par ces élèves, au cycle 3 de l'école primaire en France, qui, à leur entrée en 6ème échouent dans la résolution de problèmes à structures additive ou multiplicative. Nous décidons alors, dans le cadre de notre parcours universitaire, de procéder à une analyse rigoureuse de l'évolution des performances des élèves lors de la résolution d'un même problème à données numériques proposé chaque année, de la fin du cycle 2 à la fin du cycle 3. Pour ce faire, nous mettons en place au cours des quatre années de la période 2000-2003, le suivi d'un panel de 213 élèves de l'école élémentaire dont nous extrayons une cohorte de 105 individus. Cette étude intègrera notamment l'analyse et l'évolution du contenu des traces écrites intermédiaires, c'est-à-dire des *brouillons* produits lors de la résolution individuelle de ce problème. Les résultats de cette étude sont détaillés en deuxième partie de ce mémoire de thèse. La non homogénéité des classes relativement à la quantité ou au contenu des traces produites par les élèves oriente notre questionnement vers l'analyse des pratiques mêmes des enseignants. Autrement dit, nous nous demandons s'il existe des relations entre le contenu de ces productions des élèves et l'enseignement dispensé dans les classes.

De là naît la problématique de notre thèse que nous organisons autour d'une question centrale :

À quelles conditions un enseignement de mathématiques peut-il favoriser l'apprentissage de la résolution de problèmes, en particulier de problèmes à données numériques ?

Au fil des années, notre réflexion va se nourrir du fruit de l'étude de travaux théoriques en relation avec cette thématique, mais aussi d'une attention particulière portée sur les pratiques pédagogiques ordinaires effectives que nous tentons d'observer le plus systématiquement possible en contexte naturel. Pour nous situer, nous distinguons deux étapes dans notre cheminement : la première est centrée plus exclusivement sur l'étude des travaux de recherches nées en France et principalement issues de la didactique des mathématiques. L'élaboration de notre dossier documentaire de DEA (Priolet, 2001) constitue pour nous un premier temps de synthèse d'une revue de questions orientée vers l'enseignement de la résolution de problèmes ; ce dossier rend compte d'un premier ensemble de références et fournit un résumé des articles ainsi que quelques pistes complémentaires de lecture. La deuxième étape se caractérise par une ouverture vers des travaux de recherche extérieurs au contexte français. Elle est bien sûr liée à nos participations à des colloques internationaux qui nous ouvrent la voie de la littérature étrangère dans le domaine de la didactique des mathématiques. Elle se caractérise aussi par la lecture et l'étude de travaux d'origine anglo-saxonne liés à des recherches dans le domaine de la psychologie cognitive.

À la lumière de ces différents travaux théoriques et en vue d'apporter quelques réponses à notre questionnement sur l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes à données numériques, nous nous engageons dans l'élaboration d'un cadre théorique de référence intégrateur que nous nommons $\boldsymbol{R^2C^2}$.

Nous soutenons alors la thèse que la mise en œuvre d'un enseignement de mathématiques basé sur une approche intégrative favorise l'apprentissage de la résolution de problèmes à données numériques. Nous entendons par *enseignement à approche intégrative* un enseignement dont l'organisation se fonde sur les apports coordonnés de plusieurs cadres théoriques. Dans un système didactique global, nous définissons un **cadre didactique intégrateur** caractérisé par la **régularité** et la **dévolution** à l'élève des principes suivants : **Recherche**, Mise en **Réseau, Conversion**, **Catégorisation**. Nous désignons ce cadre didactique par l'acronyme R^2C^2.

Cette approche intègre un ensemble de cadres théoriques de référence empruntés à Vergnaud (1990), à Duval (1995) et à Brousseau (1986b) : le premier pour la théorie des champs conceptuels, le deuxième pour la théorie de la conversion entre registres de représentation sémiotique et le troisième pour la théorie des situations.

La mise à l'épreuve de ce cadre $\boldsymbol{R^2C^2}$ nécessite la construction d'un ensemble d'artefacts accompagnée de l'élaboration du scénario de leur usage dans les classes.

Pour cela, nous bâtissons un protocole expérimental basé, d'une part, sur le recueil et l'analyse des performances d'un échantillon constitué de 137 élèves issus de huit classes de CE2, répartis en deux groupes, un groupe-témoin et un groupe-expérimental, soumis à un pré-test et à un post-test et d'autre part sur l'analyse des pratiques des enseignants de ces huit classes en situation d'enseigner la résolution de problèmes à données numériques. Il s'agit de décrire des pratiques d'enseignants expérimentés en situation d'enseigner la résolution de problèmes au cycle 3 de l'école primaire en France. Pour ce faire, en plus de la technique habituelle du recueil de données par enquête par questionnaire, nous utilisons notamment la méthode d'entretien d'autoconfrontation (Clot et Faïta, 2000) qui consiste, premièrement, à filmer un enseignant en situation de travail, autrement dit en situation d'enseignement, deuxièmement, à le confronter à l'image sur écran de sa propre activité, et ce, en recourant au visionnement du film, troisièmement, à lui demander de mettre en mots ce qu'il considère comme être les constantes de son travail.

L'ensemble du protocole expérimental est décrit dans la troisième partie de ce mémoire de thèse. Les résultats et leur interprétation y sont également rapportés. Néanmoins, par plusieurs communications publiées dans des actes de colloques, nous rendons déjà compte des méthodes adoptées pour décrire et analyser les pratiques des enseignants en situation d'enseigner la résolution de problèmes dans des classes du cycle 3 de l'école primaire française. En 2004, nous participons à un symposium (Priolet et Régnier, 2004) lors du 5ème Congrès International d'actualité de la recherche en éducation et en formation. D'autres présentations suivent : en 2006, une communication orale sur les effets des vecteurs d'apprentissage sur les pratiques d'enseignement, lors de la 8ème Biennale de l'Éducation et de la Formation, organisée par l'Institut National de Recherche Pédagogique (Priolet et Régnier, 2006) et une communication par affiche lors du colloque EMF 2006, Espace Mathématique Francophone, organisé à l'Université de Sherbrooke au Québec (Priolet, 2006).

En 2007, au travers de trois autres communications orales publiées, nous abordons certains aspects de la relation entre la mise à l'épreuve de notre cadre de référence et les apprentissages des élèves. Le colloque international des Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (IUFM) du Pôle Nord-Est est pour nous l'occasion de traiter de la conceptualisation (Priolet et Régnier, 2007). Le 34ème colloque de la Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire (COPIRELEM) nous permet d'aborder la question de la place et du rôle de la modélisation dans une pratique d'enseignement basée sur une mise en réseau des énoncés et de leurs représentations (Priolet et Régnier, 2007). La communication conjointe publiée avec Jarmila Novotnà (Priolet et Novotnà, 2007) sur la comparaison de pratiques d'enseignants d'écoles élémentaires de République tchèque et de France lors du 7ème Symposium international sur l'enseignement des mathématiques (SEMT'07) traduit la façon par laquelle nous cherchons à élargir notre réflexion en observant de manière systématique les pratiques des enseignants au-delà de l'espace géographique et culturelle de la France.

Pour aborder plus avant la structure de notre mémoire de thèse, nous souhaitons préciser que la **première partie** intitulée *Cadre de la Recherche* consiste en une revue de questions relatives à l'objet d'étude : **la résolution de problèmes verbaux à données numériques**. Préalablement à l'explicitation de notre cadre de référence, il s'agit de repérer, dans différents cadres théoriques, les éléments de réponses aux questions suivantes : *Qu'est-ce qu'un problème ? Qu'est-ce que résoudre un problème ? Comment en enseigner la résolution ? Quelles sont les principales difficultés d'apprentissage liées à la résolution de problèmes numériques ?* Cette première partie s'organise selon cinq chapitres. Le premier présente deux approches, l'une d'ordre étymologique, l'autre d'ordre historique afin de comparer différentes définitions du *problème* et de son *énoncé*, tout en ciblant notre attention sur le domaine des mathématiques. L'étude des textes officiels en lien avec notre système éducatif scolaire, doublée de l'analyse de documents à caractère historique nous amène plus spécifiquement à envisager la place et le rôle accordés au problème à l'école, sur une période allant du milieu du 19ème siècle jusqu'à nos jours. Toutefois, au vu de l'évolution des programmes scolaires de l'enseignement en France notamment autour des années 1970, il nous semble qu'on ne peut faire l'économie d'un rappel de quelques conceptions qui ont marqué l'histoire des mathématiques. Ainsi, le deuxième chapitre est constitué d'un recueil de points de vue de plusieurs mathématiciens sur la notion de *problème*. Certes, les problèmes qui sont proposés à l'école ne sont pas ceux qui sont résolus par les mathématiciens. Pour autant, que l'on se place au niveau du mathématicien ou bien au niveau d'un élève de l'école élémentaire, n'est-ce pas la construction même de la pensée qui est en jeu à travers la résolution de problèmes ?

Certes, l'enjeu ne consiste pas à faire de tous nos élèves des mathématiciens. En revanche, il relève des missions de notre système éducatif scolaire de fournir des aides à l'élève pour se construire une pensée rationnelle. Les chapitres suivants traitent des paradigmes de l'enseignement et de l'apprentissage de la résolution de problèmes, renvoyant à l'abondante littérature issue des nombreuses recherches développées depuis les années 1970 en didactique des mathématiques, en psychologie de l'éducation et en psychologie de l'apprentissage. La *Théorie des situations* de Brousseau nous fournit un cadre théorique plus général pour traiter de la mise en place des situations d'enseignement à l'école tandis que les travaux de Glaeser (1973) nous permettent de recentrer notre attention sur la démarche heuristique, nous amenant ainsi à poser explicitement la distinction entre *problème scolaire* et *exercice*. Nous rapportons également un ensemble de travaux nés et développés dans le contexte des IREM de Bordeaux, de Lyon, de Strasbourg, afin d'étayer les réponses à notre questionnement sur l'enseignement des mathématiques. Les travaux d'Arsac, Germain et Mante (1998) sur la notion de *problème ouvert*, ceux de Pluvinage (1993) sur les taxinomies, ceux de Douady (1986) sur les *jeux de cadres* sont autant de points d'appui que nous citons, décrivons et tentons de mettre en relation dans le troisième chapitre centré sur l'enseignement de la résolution de problèmes. Toutefois, dans la résolution de notre problématique, il nous apparaît difficilement concevable de traiter de la question de l'enseignement sans en aborder celle d'un enjeu fort qu'est l'apprentissage même de résolution de problèmes par les élèves. Il s'agit pour nous d'expliciter, de comprendre et même de tenter d'expliquer les difficultés rencontrées par les élèves. Dans cette perspective d'analyse, le quatrième chapitre fournit un ensemble de références émanant du champ de la psychologie ; il y est fait plus précisément appel aux travaux en lien avec les psychologies de l'apprentissage et de l'éducation. La théorie du schéma (Kintsch et Greeno, 1985) et celle du modèle mental (Johnson-Laird, 1983) sont rappelées. Emanant de recherches anglo-saxonnes, elles sont utilisées comme modèle explicatif de résultats en lien avec la résolution de problèmes numériques (Fayol et Abdi, 1986). Le recours aux travaux de Vergnaud (1990) sur la conceptualisation et la théorie des champs conceptuels nous parait être également une ressource incontournable à ce stade de notre réflexion. Par ailleurs, comme nous travaillons sur la résolution de problèmes à énoncés verbaux et que, de ce fait, les élèves ont à recourir au registre numérique pour traiter les données des problèmes, les travaux de Duval (1995) sur les registres de représentation sémiotique constituent pour nous une autre source de référence nécessaire. Nous nous référons aussi à un ensemble de résultats issus de travaux abordant les effets des caractéristiques des problèmes et de leurs énoncés sur les performances des élèves à résoudre les problèmes. Nous distinguons ceux traitant des caractéristiques conceptuelles et sémantiques des problèmes et ceux traitant des caractéristiques rédactionnelles de l'énoncé.

Cette rencontre avec différents cadres théoriques nous conduit dans le cinquième chapitre à exposer le point de vue intégrateur que nous avons adopté par rapport aux principales questions soulevées à propos de la notion de problème quant à son acception, à sa finalité et ses usages dans le champ scolaire. Cette première partie s'achève sur la définition du cadre théorique intégratif né de l'articulation des différents cadres théoriques mobilisés et selon lequel nous aborderons notre problématique.

La **deuxième partie** intitulée : *Premières investigations. Première étape de la construction de l'objet de recherche,* s'organise selon trois chapitres. Le premier traite d'une part des performances obtenues par la France dans le cadre de PISA, Programme International de Suivi des Acquis des Elèves de 15 ans, d'autre part de l'évolution des performances obtenues aux évaluations nationales de début de CE2 et de 6ème de 1989 à 2007. Le champ retenu ici reste évidemment en lien avec la thématique de notre recherche et s'articule autour des données relatives à la résolution de problèmes numériques. Le deuxième chapitre rend compte à la fois de la genèse, de l'opérationnalisation et des résultats d'une étude longitudinale que nous avons conduite sur quatre années successives auprès d'une cohorte de 105 élèves scolarisés au CE1 puis dans les trois classes du cycle 3 des approfondissements de l'école en France. Il s'est agi d'observer l'évolution des performances des élèves lors de la résolution d'un même problème à données numériques proposé lors des quatre années de passation, strictement dans les mêmes conditions. Ce chapitre décrit notamment de façon détaillée la méthodologie que nous avons adoptée. Ceci nécessite la définition de nombreuses variables. La comparaison des performances d'un même élève ou d'un même groupe d'élèves d'une année sur l'autre impose par exemple le recours à la définition de profils prenant en compte non seulement l'état initial et l'état final de la performance, mais aussi les marges possibles de progrès ou de régression dans la réussite à la résolution d'un problème. Nous mettons également en œuvre un protocole d'analyse des productions des *traces écrites intermédiaires*, en d'autre terme des *brouillons* élaborés par les élèves lors de la passation de cette épreuve. La mise en relation de ces productions avec les performances obtenues nous amène alors à nous interroger sur les pratiques des enseignants. Le troisième et dernier chapitre présente les réponses données par un échantillon d'enseignants lors d'une précédente enquête par questionnaire.

La relecture des conclusions issues des analyses des résultats présentés dans cette deuxième partie dans le cadre de recherche dressé en première partie nous fournit les bases utiles à la poursuite de la construction de notre problématique de recherche originellement née de l'identification d'un paradoxe entre la régularité des séances d'enseignement de la résolution de problèmes à données numériques et l'émergence, voire la persistance, de difficultés d'apprentissage des élèves en la matière.

La **troisième partie** rapporte l'étude que nous avons conduite en vue de résoudre notre problématique de thèse *visant à dégager des conditions d'enseignement favorables à l'apprentissage de la résolution de problèmes, en particulier de problèmes à données numériques.* Elle s'organise selon quatre chapitres.

Le premier chapitre trace la genèse de cette problématique née du constat d'un paradoxe entre l'émergence de difficultés d'apprentissage des élèves en résolution de problèmes mathématiques et le repérage des pratiques régulières d'enseignement de ladite résolution dans les classes. Il précise la maturation de nos questions de départ posées notamment à la suite de notre étude longitudinale et revisitées à la lumière des présupposés théoriques retenus et développés en fin de première partie. Nous posons comme hypothèse que l'apprentissage de la résolution de problèmes peut être favorisé par la mise en œuvre du cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$ défini par la présence régulière et conjointe et la dévolution à l'élève des principes de **Recherche**, de Mise en **Réseau**, de **Conversion** de représentations sémiotiques, de **Catégorisation**.

Le deuxième chapitre est d'ordre méthodologique et présente les méthodes retenues pour mettre à l'épreuve des faits, notre modèle $\boldsymbol{R^2C^2}$. Nous commençons par poser le cadre général de l'expérimentation mise en œuvre sur un échantillon de 137 élèves de CE2 issus de huit classes composées strictement d'élèves de CE2, et sur un échantillon constitué des 8 enseignants des classes concernées. Nous y rapportons avec précision les méthodes utilisées pour construire, traiter et analyser les données tout au long de cette expérimentation qui peut être décomposée en trois temps :

Dans un premier temps, d'octobre à janvier de la même année scolaire (2002-2003), il s'agit d'une part de caractériser les pratiques mises en oeuvre par les enseignants lors de séances de résolution de problèmes, d'autre part de mesurer les performances des élèves dans ce champ des mathématiques et de recenser les traces écrites intermédiaires produites lors de la résolution. Pour construire les données relatives aux pratiques enseignantes, trois techniques sont utilisées : le questionnaire écrit, l'enregistrement vidéoscopé, l'entretien d'autoconfrontation (Clot et Faïta, 2000), faisant ainsi référence au cadre théorique développé par Leplat (2000) en psychologie du travail et en ergonomie. Dans la lignée des travaux de Rabardel et al. (1998), Rogalski (2003), nous considérons l'enseignant en situation de travail. Pour recueillir les performances et les traces écrites des élèves, les huit classes sont soumises à un pré-test composé de 13 problèmes à données numériques.

Dans un deuxième temps, de janvier à mars, quatre classes parmi les huit sont soumises à un dispositif expérimental visant à évaluer les effets d'une pratique d'enseignement de la résolution de problèmes basée sur une approche de mise en réseau des énoncés et de leurs représentations. Elles sont l'objet de nouveaux enregistrements vidéoscopés de séances de résolution de problèmes, afin de repérer les changements éventuels de pratiques intrinsèques ou extrinsèques à l'expérimentation. Les quatre autres classes qui constituent le groupe-témoin continuent le travail prévu par l'enseignant dans le cadre de sa pratique habituelle de classe.

Dans un troisième temps, en juin, un post-test, strictement identique au pré-test, fait l'objet d'une passation dans les huit classes.

Après avoir indiqué le plus minutieusement possible les caractéristiques de la population-élèves et de la population-enseignants, nous décrivons le protocole expérimental. Cette description passe par une analyse a priori des 13 problèmes de la batterie constituant le pré-test et le post-test, l'indication du protocole de passation de ces deux tests et bien évidemment la description détaillée de l'opérationnalisation de notre cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$, des artefacts qui le caractérisent et des modalités de leur mise en place.

Le troisième chapitre ouvre la voie à l'interprétation des résultats liés à l'opérationnalisation de notre cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$. Premièrement, nous rendons compte de l'analyse des pratiques initiales des 8 enseignants, c'est-à-dire en amont de l'opérationnalisation de $\boldsymbol{R^2C^2}$. Pour ce faire, nous utilisons les données issues des enregistrements vidéoscopés et des enregistrements sonores des entretiens d'autoconfrontation. Deuxièmement, nous nous intéressons aux résultats des élèves et nous livrons, d'une part, les performances obtenues au pré-test et au post-test par le groupe-témoin, par le groupe-expérimental et par chaque classe, d'autre part, les scores obtenus pour chaque problème. Troisièmement, nous rendons compte de l'analyse des pratiques observées des 4 enseignants du groupe-expérimental ayant mis en œuvre le cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$. Cette analyse s'effectue au regard des principes caractéristiques de ce Cadre. En d'autres termes, nous repérons la présence de la mise en œuvre des principes de Recherche, de Mise en Réseau, de Conversion de représentations sémiotiques, de Catégorisation en nous demandant pour chacun d'eux s'il s'inscrit bien à la fois dans une régularité et dans un processus de dévolution à l'élève.

Le quatrième chapitre est réservé à la discussion des résultats de l'ensemble de cette étude qui vise à identifier les effets de la mise en place de notre cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$ sur les apprentissages des élèves. En d'autres termes, nous discutons de la validité de notre hypothèse de travail. Pour ce faire, nous revenons aux présupposés théoriques pour expliquer l'amélioration des performances des élèves du groupe-expérimental par rapport à celles obtenues par le groupe-témoin.

Ce corps de la thèse est complété par des annexes conséquentes qui rapportent exhaustivement les outils méthodologiques mis en œuvre pour réaliser cette recherche ainsi que les données construites.

En résumé, ce travail de thèse tente de montrer en quoi la mise en œuvre d'un enseignement de mathématiques basé sur une approche didactique intégrative fondée sur une ingénierie pédagogique élaborée dans le cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$ favorise l'apprentissage de la résolution de problèmes à données numériques.

PARTIE 1

Cadre de la recherche

PARTIE 1 : Cadre de la recherche

Introduction

L'objet de notre recherche, centré sur l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes scolaires à données numériques au cycle 3 de l'école primaire nous conduit à nous poser les questions suivantes : Qu'est-ce qu'un problème ? Qu'est-ce que résoudre un problème ? Quelles sont les difficultés rencontrées par les élèves lors de la résolution de problèmes ? Comment envisager l'enseignement de la résolution de problèmes ?

Nous nous tournons vers trois principaux cadres de référence : celui des mathématiques, celui de la didactique des mathématiques et celui de la psychologie, dans le but d'interroger les travaux existants, de confronter les différents points de vue et ainsi d'élaborer notre cadre théorique.

Pour aborder le premier chapitre, centré sur l'exploration du champ sémantique du substantif *problème,* nous faisons appel aux dimensions étymologique et historique de ce terme. De plus, l'usage de l'expression *problème scolaire* impose un détour par la dimension institutionnelle, se traduisant notamment par une comparaison des contenus des instructions et programmes officiels français depuis les lois fondatrices de l'École jusqu'à nos jours. Les différents points de vue présentés dans le deuxième chapitre permettent de prendre en compte les représentations du concept de *problème* chez les mathématiciens.

Le troisième chapitre est résolument tourné vers la didactique des mathématiques, l'objet même de la présente recherche nous imposant de tenir compte de l'état des travaux scientifiques dans ce domaine. Nous mettons ainsi en perspective les conceptions de Brousseau, de Glaeser, de Chevallard ou de Vergnaud sur l'enseignement de la résolution de problèmes puis nous examinons un ensemble d'autres travaux issus des cadres théoriques développés par ces auteurs.

Mais alors que le troisième chapitre est tourné vers le professeur en train d'enseigner la résolution de problème, le quatrième est orienté vers l'élève en situation d'apprendre à résoudre des problèmes ; plusieurs cadres théoriques issus principalement des travaux en psychologie et basés sur une approche constructiviste de l'apprentissage sont mobilisés en vue notamment d'identifier et de tenter d'expliquer les difficultés rencontrées par les élèves lors de la résolution de problèmes ; d'autres recherches relevant du champ de la psychologie de l'éducation nous permettent de repérer les avancées actuelles sur ces questions relevant des relations entre les situations proposées aux élèves dans le cadre de la résolution de problèmes et les performances des élèves.

À l'instar de la réflexion conduite par Goigoux (2001) dans le domaine de la didactique du français, nous considérons que le sujet-enseignant joue un rôle à part entière qu'il convient d'analyser plus finement. Nous nous tournons alors vers la psychologie du travail qui, par sa dimension fondée sur l'étude de l'activité d'un sujet dans une situation de travail, nous paraît constituer un cadre digne d'intérêt pour procéder à l'analyse de l'activité du sujet-enseignant en situation d'enseignement.

De l'articulation des cadres théoriques mobilisés, nous élaborons un cadre de référence, intégratif, à l'aide duquel nous construirons notre problématique.

Chapitre 1 : D'un point de vue étymologique et historique : Qu'est-ce qu'un problème ? Qu'est-ce résoudre un problème ?

1.1. Qu'est-ce qu'un problème en mathématiques ?

La centration de notre thèse sur l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes à données numériques nous conduit d'emblée à examiner plusieurs définitions du terme *problème* dont le sens étymologique est fourni par le dictionnaire historique de la langue française (Rey, 1995). Ce substantif provient du latin *problema (question à résoudre)* emprunté vers 1380 au grec *problêma* qui désigne ce que l'on a devant soi, spécialement un obstacle, un sujet de controverse, une question à résoudre. Le mot est dérivé de *proballein*, composé de *pro (devant) et de ballein (jeter),* ce qui signifie *jeter devant* et, par abstraction, *mettre en avant comme argument, proposer une question*.

Ce n'est qu'à partir du 17ème siècle que le terme *problème* est employé en mathématiques (1612) et en physique (1632) pour désigner *une question à résoudre par des méthodes rationnelles déductives ou par l'observation* (Rey, 1995).

La comparaison des définitions du terme *problème* pris dans son sens mathématique, extraites des éditions successives du *Dictionnaire de l'Académie Française* (1694, 1762, 1798, 1835, 1932-1935) montre à la fois une permanence et une évolution. De la fin du 17ème siècle jusqu'au début du 19ème, le *problème* est toujours une *proposition* qui se révèle de type injonctif, exigeant une *opération*. Cependant le rôle dévolu à l'opération varie au fil des années : tandis que la première édition de ce Dictionnaire, datée de 1694, semble souligner davantage le volet heuristique du *problème*, les définitions publiées dans les éditions de 1762 et de 1798, mentionnent la nécessité de la présence simultanée d'une opération et d'une démonstration. Les deux exemples qui illustrent la définition appartiennent au domaine de la géométrie.

> *Probléme, en Mathematique, Est une proposition par laquelle on demande comment on peut faire une operation mathematique. C'est un probléme de sçavoir comment on peut décrire un cercle dans un quarré* (Académie française, 1694).
>
> *PROBLÈME en Mathématique, est une proposition par laquelle il est demandé qu'on fasse une certaine opération suivant les règles des Mathématiques, & qu'on démontre qu'elle a été faite. La proposition de mesurer la hauteur d'une tour, en connoissant seulement la distance de l'observateur à la tour, est un problème* (Académie française, 1762, 1798)

À partir de 1835, le *problème* mathématique n'est plus défini comme une *proposition*, mais comme une *question à résoudre*. Les exemples fournis précédemment ont été supprimés, mais *le problème de géométrie* et *le problème d'algèbre* sont mentionnés explicitement. Le terme *problème* est désormais associé à des verbes comme *proposer* ou *résoudre*, à des adjectifs comme *insoluble* ou *difficile*, ou bien encore au substantif *solution*.

> *PROBLÈME. s. m. T. de Mathémat. Question à résoudre, suivant les règles de la science. Problème de géométrie. Problème d'algèbre. Proposer un problème. Résoudre un problème. La solution d'un problème. Un problème insoluble, difficile à résoudre.* (Académie française 1835, p. 2508)

> *PROBLÈME. n. m. Question scientifique à résoudre. Problème de géométrie. Problème d'algèbre. Proposer un problème. Résoudre un problème. La solution d'un problème. Un problème insoluble, difficile à résoudre.* (Académie française 1932-1935, p. 2414)

L'Encyclopédie (Diderot, 1751-1772) détaille et illustre plus particulièrement la définition du *Problème, en terme de Géométrie*. On retrouve le terme de *proposition* et la demande d'une *opération*, à laquelle on a cependant adjoint la demande d'une *construction*. Plusieurs exemples sont donnés : diviser une ligne, faire un angle. Les notions de *démonstration* et de *preuve* sont présentes, comme dans le *Dictionnaire*. Un problème est déclaré être composé de trois parties : *proposition, résolution* ou *solution* et enfin *démonstration*. L'Algèbre est citée comme étant la meilleure méthode pour résoudre un problème.

En résumé, d'une part, l'idée *d'obstacle à surmonter* ressort de l'étymologie du terme *problème*, d'autre part au vu des définitions étudiées extraites de sources différentes, la notion de *problème* est intrinsèquement liée à celles (i) de *proposition*[5] contenant une demande, (ii) de *résolution* ou de *solution*, puis (iii) de *démonstration*.

Quant à l'usage scolaire du problème, ce n'est qu'à la fin du 19ème siècle avec les lois Ferry et la scolarité obligatoire qu'il se développe.

Nous reviendrons sur le concept de *problème*, en nous référant successivement aux cadres théoriques des mathématiques, de la didactique des mathématiques et de la psychologie. Mais auparavant, il convient d'examiner les définitions du terme *énoncé* très souvent associé de nos jours au terme *problème*.

1.2. Qu'est-ce que l'énoncé d'un problème ?

À l'école, dans le domaine des mathématiques, il est assez fréquent de constater l'usage du terme *problème* pour désigner à la fois le texte qui énonce le problème à résoudre et le concept de questionnement sous-jacent. Par exemple, en donnant la consigne suivante à leurs élèves : *Vous allez lire ce problème*, les enseignants font une confusion langagière entre le problème et son *habillage* que l'on devrait nommer *énoncé*.

Du point de vue étymologique, tandis que l'usage du substantif *énoncé* remonte à 1675 pour traduire une *action d'énoncer* ou encore *un ensemble de formules exprimant quelque chose*, il a fallu attendre deux siècles (1870) pour voir apparaître l'expression *énoncé d'un problème* ; on peut voir ici un lien avec l'usage scolaire du *problème* qui, lui, se développe à la fin du 19ème siècle.

La communication du problème à résoudre par un élève s'effectue par l'intermédiaire d'une formulation orale ou écrite qui va dès lors porter le nom d'*énoncé de problème*. C'est par l'intermédiaire de l'*énoncé* que s'opère le premier contact entre le problème et le sujet qui doit le résoudre.

[5] Actuellement, c'est le terme d'énoncé qui revêt cette acception.

Ainsi, au-delà d'un simple récit, un énoncé de problème pose une question d'ordre mathématique qui lui donne le statut d'énoncé de problème.

En nous référant à la définition de Julo (1995), psychologue, un énoncé de problème, *quel qu'il soit, est un texte caractérisé par une certaine forme mais aussi par un ensemble d'éléments qui lui donne son sens et qui nous permet d'accéder aux informations dont nous avons besoin pour construire le contenu de notre représentation.* Les différents champs des mathématiques comportent une variété d'énoncés : énoncés de problèmes de géométrie, d'algèbre…

De par sa définition, un énoncé de problème renvoie à une quête formulée sous une forme interrogative ou impérative. La forme interrogative semble cependant être dominante. Les questions se situent en règle générale en fin d'énoncé. Cette place a d'ailleurs fait l'objet de travaux en psychologie cognitive auxquels nous nous référerons lors de l'étude de l'effet de la place de la question sur les difficultés des élèves à résoudre un problème (Fayol, Abdi, 1986).

Certains énoncés de problèmes (Figure 1) comportaient parfois des indices permettant aux élèves de vérifier la réponse numérique qu'ils s'apprêtaient à donner.

66. — Dans une usine il faut par quinzaine (12 **jours de travail) 588 francs** pour payer les ouvriers. Combien faut-il : 1° **par jour,** 2° **par an** (309 jours de travail)? — R. :... 15?? 1.

Figure 1 : ***Problème n°66 extrait du manuel : Toisoul et Wallon (1902), p. 37***

Dans la préface du manuel cité ci-dessus, les auteurs précisaient en effet :

> *…les élèves sont excités au travail quand ils peuvent contrôler les résultats des problèmes mais l'indication complète des réponses présentant certains inconvénients, nous nous sommes bornés à donner des renseignements suffisants pour la vérification des solutions quelque peu difficiles. Un exemple fera bien comprendre le système. Supposons que la réponse d'un problème doive être 2348, on trouvera dans le livre : (R : ?3?8)* (Toisoul et Wallon (1902).

Les indications fournies, du type : *R : …15??* ou *R : ?3?8*, ne présentent-elles pas le risque de privilégier le mode calculatoire au détriment d'une réflexion sur le sens du problème ?

La scène de la vie quotidienne décrite dans le texte du problème (Figure 1) illustre à quel point, au fil de l'Histoire, les énoncés ont pu véhiculer une *image de la vie* et, au-delà, une certaine idéologie moralisatrice. Harlé (1984) montre combien ceux proposés au début du $20^{\text{ème}}$ siècle transmettaient une image tronquée de la société. En effet, les énoncés relataient souvent des scènes dans lesquelles l'élève issu de classes populaires et bénéficiant de la scolarité gratuite et obligatoire devait se montrer respectueux des règles de bonne conduite et de morale envers la société. Pour exemple, l'énoncé ci-dessous rappelle les devoirs incombant à une jeune fille envers ses parents.

> *Une jeune fille dont la mère était malade ne s'est pas couchée du lundi matin 4 heures au mercredi minuit. Pendant combien d'heures n'a-t-elle pas pris de repos ?* (Leyssenne, 1921) cité par Harlé, 1984, p. 269

Certains problèmes, comme ceux figurant ci-après (Figure 2), dépassent le cadre de la résolution mathématique. Posés comme *problèmes exemples*, ils constituent de véritables *leçons pratiques*. Dans le cas présent, il s'agit d'une initiation à la gestion des finances familiales.

Pierre prête 500 fr. (5 fois 100 fr.) à Jacques. Jacques est le débiteur, Pierre est le créancier.

L'intérêt.

Calcul de l'intérêt.

Au bout d'un an Jacques donne 25 fr. (5 fois 5 fr.) à Pierre, puis il lui rembourse les 500 fr.

La somme prêtée ou placée est le ***capital*** (500 fr.).
Le loyer ***annuel*** du capital est l'***intérêt*** (25 fr.).
L'intérêt de 100 fr. en un an est le ***taux*** (5 fr.). Pierre a prêté (ou placé) 500 fr. au taux de 5 pour 100 (en abrégé : *5 p. cent ou 5 %*).

Intérêt de 1 fr. en un an. EXEMPLE :
Quand le taux est 5 %, 100 fr. rapportent 5 fr. en un an.
1 fr. rapporte 0fr,05 en un an.

Dans la banque, dans le commerce, la durée des placements est souvent inférieure à 1 an. — On convient de compter les mois pour 30 jours et l'année pour 360 jours.

Problème I. — *Quel est l'intérêt annuel d'un capital de 2 760 fr. placé à 4 %?*

SOLUTION

Placé à 4 %, 1 fr. rapporte 0fr,04. L'intérêt de 2 760 fr. est :
$0^{fr},04 \times 2\,760 = 110^{fr},40.$

Problème II. — *Quel intérêt produit un capital de 6 240 fr. placé 3 % pendant 3 mois et 10 jours?*

SOLUTION

Un capital a été placé pendant 3 fois 30 jours plus 10 jours :
$30 \text{ j.} \times 3 + 10 \text{ j.} = 100 \text{ jours}.$
Placé à 3 %, 1 fr. rapporte 0fr,03 en 360 jours.
L'intérêt annuel de 6 240 fr. est : $0^{fr},03 \times 6\,240.$
En 100 jours, l'intérêt est : $\frac{0^{fr},03 \times 6\,240 \times 100}{360} = 52 \text{ fr.}$

/DUM. /

Figure 2 : ***Problème extrait du manuel : Arithmétique (Dumarque et Renaud, 1930), cité par Harlé, 1984, pp. 152, 153***

De nos jours, les énoncés proposés[6] dans les classes peuvent être extraits d'un manuel scolaire ou bien fabriqués par l'enseignant. Ils se distinguent des autres types d'écrits par :

- leur forme : contrairement aux autres récits, les énoncés de problèmes comportent de nombreuses données numériques ; ils se terminent, la plupart du temps, par une ou plusieurs questions. L'énoncé peut être strictement textuel ou bien être accompagné de diverses représentations iconiques : textes, tableaux, schémas, graphiques, ou bien encore revêtir la forme d'une équation. L'usage de différents types de représentations s'est grandement développé dans les manuels scolaires pendant les deux dernières décennies (Priolet, 2000) en raison notamment des progrès réalisés dans le domaine de l'édition. La couleur a remplacé le noir et blanc, l'insertion d'images s'est développée.

[6] Les énoncés de problèmes peuvent être proposés par écrit ou oralement. Dans notre recherche, nous nous limitons aux énoncés présentés sous une forme écrite.

- leur finalité : les énoncés de problèmes posent au lecteur une question qui implique un traitement mathématique.

Dans notre étude, les problèmes considérés sont des problèmes mathématiques scolaires, c'est-à-dire des problèmes que les élèves doivent résoudre en classe, principalement lors des séquences de mathématiques. L'énoncé se présente sous la forme d'un récit qui s'inscrit dans un contexte mathématique et ne présente souvent un intérêt que par rapport au problème mathématique posé.

Nous nous limitons aux énoncés écrits de problèmes scolaires numériques, appelés très souvent *problèmes à énoncés verbaux* ou *Word Problems* et pour lesquels la définition donnée par Verschaffel, Greer et De Corte (2000) peut être retenue.

> *Un problème arithmétique à énoncé verbal peut être défini comme une description verbale d'une situation problème dans laquelle une ou plusieurs questions sont posées. La ou les réponses à ces questions peuvent être fournies grâce à l'application d'opérations mathématiques aux données numériques disponibles dans l'énoncé du problème. Dans leur forme la plus typique, les problèmes à énoncés verbaux correspondent à un texte bref décrivant l'essentiel d'une situation dans laquelle certaines quantités sont explicitement données et d'autres non. La tâche de l'individu confronté au problème est de donner une réponse numérique à la question par usage explicite et exclusif des quantités données par le texte et des relations mathématiques inférées du texte entre ces quantités* (Verschaffel, Greer et De Corte, 2000).

Selon ces auteurs, l'énoncé est une description présentée sous la forme d'un texte bref contenant des données numériques et une ou plusieurs questions. Les problèmes *à données numériques à énoncés verbaux* se présentent sous un format verbal (X avait x billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a z billes.) tandis que ceux dénommés problèmes *à données numériques* revêtent un format strictement numérique du type (x - y = z).

Nous reviendrons à plusieurs reprises au long de cette thèse, sur les travaux relatifs à la formulation des énoncés verbaux, en étudiant plus particulièrement les effets de leurs caractéristiques sémantiques et lexicales sur les difficultés rencontrées par les élèves lors de la résolution de problèmes.

Problèmes et *énoncés* étant définis, il nous paraît intéressant d'étudier maintenant leur évolution au fil des siècles.

1.3. Depuis quand résout-on des problèmes en mathématiques ?

L'activité[7] humaine de résolution de problèmes en mathématiques est ancienne et semble avoir essentiellement répondu à des nécessités de vie sociale ou économique. Les questions d'ordre matériel ont de tout temps et en tout lieu conduit les hommes à résoudre des problèmes. Le papyrus Rhind daté du 16ème siècle avant J.-C. révèle déjà une grande maîtrise des problèmes par les égyptiens (Couchoud, 2001).

[7] Le substantif *activité* est employé ici dans le sens de *faculté d'agir chez l'homme* (Rey, 1995). Nous retrouverons ce terme dans les chapitres suivants et nous affinerons notamment sa définition dans le cadre de la psychologie du travail.

Citons, pour terminer, un problème amusant, relatif au partage de pains entre des travailleurs. On sait, en effet, que les hommes travaillant pour Pharaon étaient nourris selon leur rang et leurs responsabilités.

Problème R66

« Méthode pour calculer la différence des parts. 700 pains sont à partager entre quatre hommes :
2/3 pour l'un, 1/2 pour un autre, 1/3 pour [le troisième] *et 1/4 pour le dernier.*
Fais-moi connaître la part de chacun. »

Figure 3 : ***Extrait du Papyrus Rhind (1530 avant J.-C.)***

Figure 4 : ***Tablette babylonienne contenant 16 problèmes et leur solution (British Museum)***

Assez éloignés des partages de nourriture, deux autres exemples empruntés aux XVII^{ème} et XVIII^{ème} siècles viennent étayer l'idée que l'activité de résolution de problèmes était bien présente dans des domaines extrêmement variés :

Le premier exemple concerne le problème du mouvement des projectiles en artillerie et en balistique. Suite aux travaux de Galilée sur la chute des corps, Bélidor[8] (1731) puis Robins[9] (1742) établissent des tables numériques universelles destinées à fournir aux artilleurs l'angle d'inclinaison de la pièce pour différentes portées.

Le second exemple renvoie aux questions de la navigation maritime et de la cartographie. Le calcul de la latitude avec l'usage de sextants de plus en plus fiables ainsi que celui de la longitude[10] ont constitué des éléments déterminants dans la résolution du problème mathématique du repérage d'une position à l'aide de coordonnées.

Hormis ces quelques exemples, on constate qu'au fil de l'Histoire, les échanges commerciaux, les partages de terrain, le dénombrement de plants à prévoir dans une parcelle

---

[8] Bélidor (Bernard Forest de) : Artilleur français, auteur de l'ouvrage *Le Bombardier français*.

[9] Robins (Benjamin) : Mathématicien et ingénieur anglais du XVIIème siècle, auteur de l'ouvrage *New Principles of Gunnery*.

[10] Cook put ainsi emporter lors de sa seconde expédition de 1772 à 1775 le chronomètre amélioré de Harrison ainsi que les horloges marines de Leroy et Berthoud.

ont constitué pour les populations maintes sources de problèmes à résoudre et maintes occasions de développer, hors de tout système scolaire, un certain nombre de compétences mathématiques.

D'ailleurs, plusieurs travaux de recherche portent sur le volet social de la construction de ces compétences.

Acioly (1985, 1989, 1994, 1996, 1997) a conduit plusieurs études au Brésil auprès de population d'adultes de différents niveaux de scolarité. Il s'agissait d'étudier leur niveau de compréhension de connaissances mathématiques. La première étude (Acioly, 1985) a révélé que les vendeurs du jeu de loterie *jogo de bicho*[11] très utilisé au Brésil étaient capables de développer des compétences mathématiques très complexes telles que la permutation. La seconde étude (Acioly, 1994 ; Acioly-Régnier, 1997) a montré que les travailleurs de la canne à sucre du Nordeste du Brésil semblaient comprendre les relations mathématiques impliquées dans les activités de mesure spécifiques à leur travail *en utilisant un système régional de calcul d'aires induisant des surestimations systématiques*.

Les compétences acquises semblent ainsi relever d'une construction sociale.

Cependant les études citées (Carraher, Carraher, Schliemann, 1985 ; Acioly, 1985, 1994 ; Acioly-Régnier, 1989, 1996) révèlent aussi une diminution des performances dans des situations sorties du contexte social des populations concernées. Ainsi, tandis que les vendeurs de loterie et les planteurs de canne à sucre se montrent très performants dans la résolution de problèmes mathématiques liés à leur travail, leurs performances sont moindres lors de la confrontation à des situations présentées dans un contexte scolaire. Acioly (1994, 1997) donne l'exemple d'enfants brésiliens vendeurs de fruits et de légumes sur des marchés du Brésil. Dès lors que ces enfants se trouvaient en situation de travail, ils réussissaient très bien à résoudre les problèmes mathématiques qui leur étaient posés oralement. Le taux de réussite, en fournissant des réponses calculées mentalement était de 99%. Ainsi, certaines compétences mathématiques liées à des besoins spécifiques se développent hors de l'école, dans un contexte social bien défini. Toutefois, présentés différemment, dès lors que ces mêmes enfants se trouvaient dans des situations plus formelles où il leur était demandé de réaliser les calculs par écrit, le taux de réponse tombait à 34%. Ce qui montre, comme le rappellent Dasen et al. (2005), que faire des calculs ne signifie pas pour autant avoir compris le système décimal de numération.

Les situations rencontrées dans la vie quotidienne ne sauraient remplacer celles mises en place dans un contexte scolaire en vue d'élaborer des connaissances. Toutefois, selon Carraher et Schliemann (2002), les mathématiques informelles *peuvent constituer une base sur laquelle les apprenants peuvent s'appuyer pour bâtir des connaissances mathématiques plus élaborées. Ces auteurs considèrent que les activités en classe devraient permettre à l'apprenant d'expérimenter une pluralité de situations, d'outils et de concepts mathématiques rendant explicites les liens entre les mathématiques de la vie quotidienne et celles élaborées à l'école*. (cité par Dasen, Gajardo, Ngeng in Maulini, Montandon, 2005).

---

[11] Jeu des animaux.

En fait, la question de la relation des problèmes mathématiques avec des situations de la vie quotidienne s'est posée dès la massification de notre École sous la Troisième République ; c'est ainsi que les contenus de l'enseignement de l'école primaire visaient à doter les élèves de savoirs leur permettant d'entrer très tôt dans la vie active. En effet, lorsque dans sa définition du *problème,* Leyssenne (1887a) mentionne que l'élève doit prioritairement *savoir calculer sûrement et rapidement et résoudre toutes les questions pratiques qu'il peut être amené à rencontrer sur sa route pendant sa vie*, il affiche clairement le cadre *utilitaire et pratique* de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Sous cet aspect pragmatique, se trouve posée la question essentielle des enjeux de l'Enseignement primaire sous la III^ème^ République, dépassant ainsi largement celle de la place de la résolution de problèmes mathématiques à l'école. L'enjeu majeur est de former ces élèves *du peuple* à entrer très tôt dans la vie active, car à l'exception de ceux, souvent issus de milieux de notables, qui poursuivaient des études secondaires, la plupart des élèves quittaient l'école primaire vers 12 – 13 ans. Pour ce faire, en vue de permettre l'adaptation future des élèves dans la société et dans le monde professionnel, cette École s'est dotée d'une approche encyclopédique[12] des savoirs (D'Enfert, 2003), loin de se limiter au *lire, écrire, compter* comme on a pu souvent l'entendre dire.

L'introduction de la résolution de problèmes dans les concours de recrutement d'enseignants n'a pas attendu le 20$^{\text{ème}}$ siècle. Régnier (1979) cite[13] le contenu des épreuves du concours organisé par le Magistrat de la ville de Bourbourg[14,15], en vue de recruter le *maître d'école*. L'épreuve de mathématiques comportait deux problèmes en lien avec la proportionnalité : le premier (Figure 5) constitue une application de la règle de trois tandis que le second (Figure 6) plus complexe, prend appui sur un problème de la vie courante.

Règle de Trois.

45 livres coûtent 138 florins, combien coûteront 70 livres ? (1)

Figure 5 : ***Règle de Trois - Problème des épreuves du concours organisé par le Magistrat de la ville de Bourbourg***

Règle de Société.

Quatre particuliers se sont associés et ont mis en communauté, comme suit : le premier 3,490, le deuxième 7,730, le troisième 5,450 et le quatrième 1,080 livres, ils font un bénéfice de 4,589 livres ; combien en revient-il à chacun d'eux, proportionnellement à sa mise ? (2)

Figure 6 : ***Règle de société - Problème des épreuves du concours organisé par le Magistrat de la ville de Bourbourg***

[12] En plus du *lire, écrire, compter*, les programmes du début des années 1880 imposaient dans l'emploi du temps de classe des disciplines telles que les sciences physiques et naturelles, le travail manuel, le dessin, le chant, la gymnastique.

[13] Éléments trouvés dans Fontaine de Resbecq (1878), membre de la Commission historique du Nord.

[14] Bourbourg, ville française, département du Nord, située au centre d'un triangle Dunkerque, Calais, Saint-Omer.

[15] Voir Annexe 1.

De nos jours, en dépit des technologies nouvelles qui facilitent le calcul, la résolution de problèmes demeure très présente dans la vie quotidienne, à travers la gestion du compte bancaire, les calculs de la consommation de carburant d'un véhicule, les comparaisons de taux d'intérêts ou de pourcentages de votants… L'École qui a pour mission d'assurer la formation du futur citoyen et son insertion dans la société se doit donc d'attribuer à la résolution de problèmes la place qui lui revient. Le document d'application des programmes de l'enseignement élémentaire et les programmes eux-mêmes (Ministère Éducation nationale, 1995, 2002, Ministère Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2007) qualifient respectivement de *centrale* et d'*importante* cette place réservée à la résolution de problèmes.

Or, malgré les prescriptions fortes du Ministère de l'Éducation nationale faisant de la résolution de problèmes le moyen d'assurer une appropriation des connaissances dans tous les domaines des mathématiques (Ministère Éducation nationale, 2002), on constate que les élèves rencontrent des difficultés dans ce champ précis. Les données rapportées dans la deuxième partie de cette thèse attestent de ces difficultés.

1.4. Quelle place à l'école pour les problèmes mathématiques ?

En nous référant aux grandes étapes qui ont balisé notre système éducatif, nous nous proposons d'examiner la place et les finalités accordées aux problèmes mathématiques qui seront au cœur de notre étude : les *problèmes verbaux*[16].

Les problèmes mathématiques en général et les problèmes verbaux en particulier, n'ont pas attendu les lois scolaires du 19ème siècle pour affirmer leur présence dans les traités, manuels ou cours de mathématiques bien que, au fil des années, la résolution de problèmes mathématiques se soit vue octroyer une place et des fonctions différentes dans les programmes de l'école primaire.

1.4.1. Jusqu'au milieu du 19ème siècle : lire… puis écrire… puis… compter

Il faut attendre le milieu du 19ème siècle pour assister à un enseignement simultané du *lire – écrire – compter.* Tant dans les *Petites Écoles* au Moyen-Âge que dans celles du 17ème siècle, les enfants doivent d'abord apprendre à lire en latin avant d'apprendre à écrire et enfin d'apprendre à compter ; ce qui implique que seuls les élèves les plus assidus peuvent bénéficier de l'enseignement des mathématiques basé sur le comptage, les quatre opérations, la preuve par neuf, la règle de trois, le calcul des intérêts.

Figure 7 ***: « Une petite école », aquarelle de Joseph Beaume (vers 1830), détail***

[16] Encore appelés *word problems*, voir travaux déjà cités (Partie 1 - 1.2.).

Mais la place de la résolution de problèmes mathématiques a varié au fil des siècles. Afin d'en étudier l'évolution, nous nous référons aux textes officiels émanant de notre Institution scolaire et en premier lieu aux lois fondatrices de l'École Républicaine. Nous nous limitons toutefois à l'école primaire.

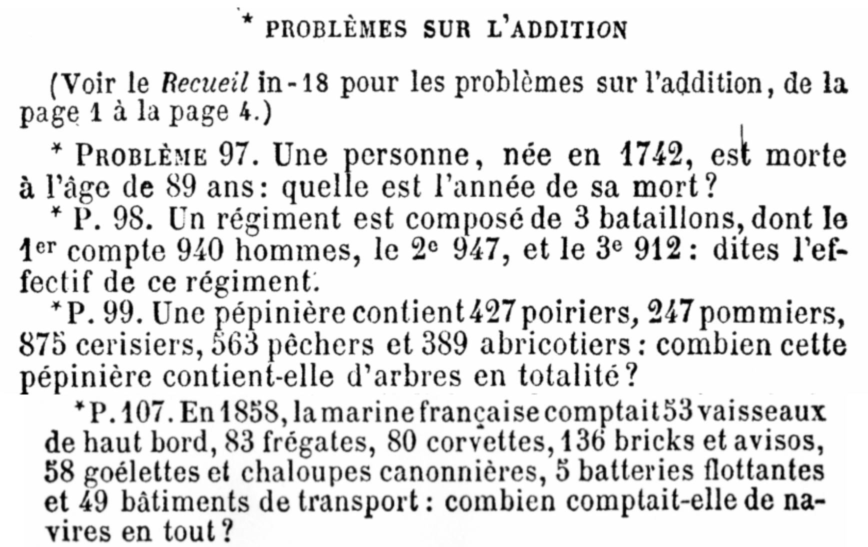
1.4.2. De 1833 à 1945 : des problèmes résolument ancrés sur la vie quotidienne

1.4.2.1. De la loi Guizot aux programmes de 1882

Contrastant avec les précédents modèles d'enseignement, la loi Guizot (1833) prône la nécessité d'un enseignement des mathématiques[17] pour tous, réservant au calcul et à l'écriture une place équivalente à celle dévolue à la lecture ; autrement dit dès l'entrée à l'école, les enfants sont confrontés en même temps à l'apprentissage de la lecture, de l'écriture et du calcul.

> *L'instruction primaire et élémentaire comprend nécessairement l'instruction morale et religieuse, la lecture, l'écriture, les éléments de la langue française et du calcul, le système légal des poids et mesures.* - Loi Guizot (extrait), (in George, 1991)

La page de couverture[18] du *Nouveau traité d'arithmétique décimale* (F.P.B., 1836) approuvé par le Conseil de l'Instruction Publique le 6 décembre 1836, annonce le contenu : *Divers problèmes sur le titre des monnaies, les changes, les principes pour mesurer les surfaces et la solidité des corps*. Ce traité comprend en effet des ensembles de problèmes classés en fonction des opérations étudiées. Les exemples ci-après (Figure 8) sont empruntés au chapitre de l'addition.



* PROBLÈMES SUR L'ADDITION

(Voir le *Recueil* in-18 pour les problèmes sur l'addition, de la page 1 à la page 4.)

* PROBLÈME 97. Une personne, née en 1742, est morte à l'âge de 89 ans : quelle est l'année de sa mort ?

* P. 98. Un régiment est composé de 3 bataillons, dont le 1er compte 940 hommes, le 2e 947, et le 3e 912 : dites l'effectif de ce régiment.

*P. 99. Une pépinière contient 427 poiriers, 247 pommiers, 875 cerisiers, 563 pêchers et 389 abricotiers : combien cette pépinière contient-elle d'arbres en totalité ?

*P. 107. En 1858, la marine française comptait 53 vaisseaux de haut bord, 83 frégates, 80 corvettes, 136 bricks et avisos, 58 goélettes et chaloupes canonnières, 5 batteries flottantes et 49 bâtiments de transport : combien comptait-elle de navires en tout ?

Figure 8 : ***Problèmes sur l'addition : Nouveau traité d'arithmétique décimale (F.P.B., 1836, p. 19)***

---

[17] Le terme *mathématiques* ne sera utilisé dans les textes officiels qu'à partir de 1882.

[18] Voir Annexe 2.

Quant au *Nouveau cours d'arithmétique* (André, 1879) destiné à l'enseignement secondaire, il annonce en page de garde[19] *un grand nombre de problèmes résolus et à résoudre*.

Affirmant la volonté de préparer les enfants à leur avenir social et professionnel, la loi Falloux (1850) introduit lors de la dernière année de l'école primaire *l'arithmétique appliquée aux opérations pratiques*[20], l'arpentage. Cependant, à partir de l'étude de l'ensemble des énoncés de problèmes du *Cours pratique d'Arithmétique, de Système Métrique et de Géométrie, Cours Moyen*[21] (Minet, Patin, 1904), Harlé (1984) montre que *l'utilité* déclarée ne reflète parfois que très partiellement la réalité. Il dégage trois caractéristiques majeures de l'image de la vie décrite dans ces énoncés :

> *Une vie*
> *- qui oublie les enfants, les personnes âgées (les femmes dans une moindre mesure), la vie de famille, les loisirs, les sentiments (à l'exception des sentiments patriotiques et moraux),*
> *- qui développe l'image d'un français travailleur manuel ou commerçant, d'une française mère de famille (couturière éventuellement) dont les occupations sont de travailler, produire, vendre et consommer,*
> *- qui privilégie l'image d'un bon citoyen, homme qui assume ses devoirs et sait se garder des mauvaises habitudes* (Harlé, 1984).

Quelques exemples peuvent illustrer ces trois caractéristiques. L'énoncé n°1 rappelle le devoir d'attention à l'égard de la famille et celui d'aide à apporter aux parents.

> *Énoncé n°1 : Un ouvrier gagne 180 fr par mois ; il en dépense les 2/5 pour son entretien et en envoie 1/4 à ses parents. Quelle somme lui reste-t-il au bout de l'année ?* (Leyssène, 1887b).

L'énoncé n°2 met en exergue les vertus du travail.

> *Énoncé n°2 : Un ménage d'ouvriers laborieux a dépensé 172 francs par mois. Le père n'a que 120 francs d'appointements par mois ; mais la mère, en prenant soin de sa maison a gagné encore 50 francs par mois ; et une jeune fille, qui a travaillé 25 jours dans ce mois, a gagné 1 fr 75 par jour. Quelle économie a réalisé ce ménage pendant ce mois ?* (Leyssène, 1887b).

Les énoncés n°3 et n°4 mettent en garde contre les mauvaises habitudes. Les emplois de l'adverbe *inutilement* et de l'adjectif *déplorables* accentuent encore l'effet moralisateur.

> *Énoncé n°3 : Un ouvrier dépense inutilement 0 fr 10 d'eau de vie et 0 fr 15 de tabac par jour. Quelle perte éprouve-t-il au bout d'un an ?*
> *Énoncé n°4 : Un ouvrier gagne 6 fr par jour ; mais, chaque lundi, il passe son temps à l'auberge, où il dépense 4 fr 25 en moyenne. Il fume en outre pour 0 fr 35 de tabac par jour. Combien ces déplorables habitudes lui feront-elles perdre pendant l'espace de 25 années ?* (Leyssène, 1887b).

[19] Voir Annexe 3.
[20] Ces aspects concrets et utilitaires qui ressortent de ces adjonctions, vont d'ailleurs constituer la charpente de l'ensemble des programmes de 1882 à 1970.
[21] Ce manuel avait été choisi par Harlé en raison de sa longue période d'édition (de 1904 à 1922), du nombre croissant d'exemplaires (472 000 en 1991 ; 1 267 000 en 1922) et de son impact (Manuel traduit en espagnol en 1906, 1907, 1919).

Ainsi, au-delà du contenu mathématique, les énoncés de problèmes constituent par leur *habillage*, c'est-à-dire par le récit dont ils sont porteurs, un moyen pour l'État républicain de véhiculer auprès du peuple l'image d'une certaine société.

Adda (1982) pointe d'ailleurs le paradoxe entre l'objectivité qui devrait émaner de l'universalité des mathématiques et la subjectivité qui se dégage des énoncés existants.

> *Les mathématiques sont une science universelle ; les objets mathématiques sont des êtres abstraits sans nationalité, race, religion, sexe, ni classe sociale. Et pourtant, les habillages des « mathématiques » proposés aux jeunes français à l'école sont les véhicules d'images de la société…* (Adda, 1982).

1.4.2.2. Programmes de 1882

Selon les programmes de 1882, le volet purement pratique ne constitue pas une fin en soi. Cette approche vise à conduire les enfants à développer des habiletés cognitives en relation avec l'abstraction.

> *En tout enseignement, le maître, pour commencer, se sert d'objets sensibles, fait voir et toucher les choses, met les enfants en présence de réalités concrètes, puis peu à peu il les exerce à en dégager l'idée abstraite, à comparer, à généraliser, à raisonner sans le secours d'exemples matériels* (Ministère de l'Instruction publique et des beaux-arts, 1882).

Or, il faut bien admettre que cette dernière finalité de l'enseignement ne fait pas l'unanimité chez tous les auteurs de l'époque : des tensions entre d'une part les partisans d'un enseignement mathématique utilitaire et d'autre part les partisans d'un enseignement visant à la *culture de l'esprit,* transparaissent dans le *Dictionnaire de Pédagogie et d'Instruction primaire* (Buisson, 1887). Tandis que Sonnet (1887) considère l'Arithmétique comme *une discipline incomparable pour l'intelligence*, Leyssène (1887a) manifeste, dans son article sur la définition du terme *Problème,* la plus grande réserve quant à la contribution de l'enseignement mathématique à l'éducation générale de l'esprit (D'Enfert, 2007). Ainsi, c'est toute la question de la finalité de l'enseignement qui est posée.

1.4.2.3. Programmes et instructions de 1923

On n'observe pas de changement notable entre les programmes de 1882 et ceux de 1923, à une exception près : les deux rubriques *Calcul, Arithmétique* et *Géométrie* présentes dans les programmes de 1882 sont, en 1923, regroupées en une seule *Calcul, Arithmétique et Géométrie.* De surcroît, ces programmes et instructions de 1923 rappellent quelques principes des programmes de 1887 qui ont semblent-ils été oubliés au fil des années, comme le mentionne le rapport de l'Inspection Générale (2006) :

> *Mieux vaudrait moins apprendre, mais bien retenir ; mieux vaudrait moins de souvenirs, mais des souvenirs complets et ordonnés et pour obtenir ce résultat, nous avons pensé qu'il fallait faire plus simple encore que nos devanciers (…) les excroissances qui, avec le temps, avaient défiguré le plan de 1887, ont été extirpées. Et l'on a élagué tous les articles qui pouvaient paraître trop ambitieux pour l'école élémentaire* (IGEN, 2006).

L'ancrage sur les *situations concrètes* perdure en mathématiques dans les instructions qui accompagnent les programmes de 1923.

> *Nous n'oublions pas que la plupart de nos élèves devront, dès qu'ils nous auront quittés, gagner leur vie par le travail, et nous voulons les munir de connaissances pratiques qui, dès demain, leur serviront dans leur métier* (Ministère de l'Instruction Publique et des Beaux-Arts, 1923, in D'Enfert, 2007)

1.4.3. De 1945 à 1970 : le début d'une réflexion pédagogique

1.4.3.1. Programmes et instructions de 1945

Dans la continuité des programmes et instructions de 1923, les instructions qui accompagnent les programmes de 1945 insistent sur la nécessité d'ancrer les problèmes proposés sur des situations de la vie quotidienne : les exemples fournis portent sur des calculs de poids de blé et de farine, sur des calculs de prix de parcelles ; *des problèmes vraisemblables dont l'élève a vu ou verra des exemples autour de lui* (Ministère Éducation nationale, 1945). L'activité de résolution de problèmes se situe en fin d'apprentissage d'une notion, en vue de contrôler les acquisitions.

Dans les programmes de 1945[22] on relève un recentrage sur les matières dites fondamentales : la lecture, l'écriture, le français et le calcul ; la rubrique précédemment intitulée *Calcul, Arithmétique et Géométrie* porte désormais le nom de *Calcul*.

Les instructions officielles précisent que les problèmes doivent permettre d'utiliser les connaissances mathématiques déjà acquises. S'agissant du cours élémentaire, *en principe, on peut se borner aux problèmes dont la résolution ne nécessite qu'une seule opération écrite ou mentale*. *Quand la solution nécessite plusieurs opérations, on peut faciliter la recherche en demandant des recherches intermédiaires par des calculs auxiliaires* (Ministère Éducation nationale, 1945).

Les années 50 sont marquées par le début de la démocratisation de l'accès à l'enseignement secondaire. De cette évolution de la société, vont découler des transformations de l'enseignement primaire et plus précisément du domaine qui nous concerne ici : les mathématiques. Ces transformations vont profondément marquer les décennies suivantes. Après la seconde guerre mondiale, il s'agit en effet de passer d'une culture scolaire répondant aux futurs besoins sociaux et professionnels et destinée principalement aux milieux populaires, à une culture ouvrant la voie à des études longues. C'est aussi à cette même période que s'engage de manière plus marquée une réflexion pédagogique.

Ainsi, avec Polya[23] (1945) dont les travaux ont été traduits en français en 1965, la question de l'enseignement de la résolution de problèmes est véritablement posée dès lors qu'il s'agit de dépasser la simple fonction d'évaluation attribuée jusqu'alors à la résolution de problèmes pour s'intéresser désormais à la fois au raisonnement des élèves et aux méthodes d'enseignement utilisées par les professeurs et susceptibles de favoriser le raisonnement des élèves et leur aptitude à résoudre des problèmes.

[22] Les programmes de 1945 resteront en vigueur jusqu'en 1970.
[23] Polya (George) : mathématicien hongrois (1887-1985)

1.4.3.2. À partir de 1945, l'influence d'un pionnier : Polya… *How to solve it?*

Polya, dont l'objectif consiste à attiser la curiosité des élèves en leur donnant des problèmes à résoudre, a souhaité fournir des aides méthodologiques à la fois aux élèves et aux enseignants pour successivement : comprendre le problème, concevoir un plan, mettre le plan à exécution et examiner la solution obtenue. Il formalise ces aides au sein d'une grille (figure 9), en adoptant une démarche linéaire. En effet, selon Polya, il existe des étapes dans le raisonnement ; la résolution de problèmes relève d'une *habileté pratique* qu'il convient de faire acquérir par l'imitation et l'usage. En vue de développer les aptitudes des élèves à résoudre des problèmes, Polya dégage ainsi un certain nombre d'invariants qu'il présente sous la forme de questions ou d'injonctions du type : *Pourriez-vous énoncer le problème différemment ? ; Pourriez-vous l'énoncer sous une autre forme encore ?; Reportez-vous aux définitions.*

Pour résoudre un problème vous devez successivement :

I — Comprendre le problème

COMPRENDRE LE PROBLÈME

- *Quelle est l'inconnue ? Quelles sont les données ? Quelle est la condition ?*
- Est-il possible de satisfaire à la condition ? La condition est-elle suffisante pour déterminer l'inconnue ? Est-elle insuffisante ? Redondante ? Contradictoire ?
- Dessinez une figure. Introduisez la notation appropriée.
- Distinguez les diverses parties de la condition. Pouvez-vous les formuler ?

II — Concevoir un plan

Trouver le rapport entre les données et l'inconnue.

Vous pouvez être obligé de considérer des problèmes auxiliaires si vous ne pouvez trouver un rapport immédiat.

Vous devez obtenir finalement un plan de la solution.

CONCEVOIR UN PLAN

- L'avez-vous déjà rencontré ? Ou bien avez-vous rencontré le même problème sous une forme légèrement différente ?
- *Connaissez-vous un problème qui s'y rattache ?* Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ?
- *Regardez bien l'inconnue* et essayez de penser à un problème qui vous soit familier et qui ait la même inconnue ou une inconnue similaire.
- *Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu. Pourriez-vous vous en servir ?* Pourriez-vous vous servir de son résultat ? Pourriez-vous vous servir de sa méthode ? Vous faudrait-il introduire un élément auxiliaire quelconque pour pouvoir vous en servir ?
- Pourriez-vous énoncer le problème différemment ? Pourriez-vous l'énoncer sous une autre forme encore ? Reportez-vous aux définitions.
- Si vous ne pouvez résoudre le problème qui vous est proposé, essayez de résoudre d'abord un problème qui s'y rattache. Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ? Un problème plus général ? Un problème plus particulier ? Un problème analogue ? Pourriez-vous résoudre une partie du problème ? Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie ; dans quelle mesure l'inconnue est-elle alors déterminée, comment peut-elle varier ? Pourriez-vous tirer des données un élément utile ? Pourriez-vous penser à d'autres données qui pourraient vous permettre de déterminer l'inconnue ? Pourriez-vous changer l'inconnue, ou les données, ou toutes deux s'il est nécessaire, de façon que la nouvelle inconnue et les nouvelles données soient plus rapprochées les unes des autres ?
- Vous êtes-vous servi de toutes les données ? Vous êtes-vous servi de la condition tout entière ? Avez-vous tenu compte de toutes les notions essentielles que comportait le problème ?

III — Mettre le plan à exécution

METTRE LE PLAN A EXÉCUTION

- En mettant votre plan à exécution, vérifiez-en chaque détail l'un après l'autre. Pouvez-vous voir clairement si ce détail est correct ? Pouvez-vous démontrer qu'il est correct ?

IV — Examiner la solution obtenue

REVENIR SUR LA SOLUTION

- Pouvez-vous vérifier le résultat ? Pouvez-vous vérifier le raisonnement ?
- Pouvez-vous obtenir le résultat différemment ? Pouvez-vous le voir d'un coup d'œil ?
- Pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?

Figure 9 : ***Comment poser et résoudre un problème (Polya, 1965)***

Toutefois, la généralisation abusive opérée par Polya incluant notamment le fait que ce dernier ne prenne pas en compte la spécificité de chaque problème est déplorée par Julo[24] (1995). Mais en dépit de la formalisation et de la généralisation inhérentes à cette grille qui

[24] Notons que les travaux de Julo feront l'objet d'un développement dans le chapitre réservé au point de vue des psychologues.

peuvent paraître quelque peu abusives, on se doit de reconnaître que Polya a su engager le débat sur le *Comment enseigner la résolution de problèmes*. Les publications relatives à cette thématique de l'enseignement de la résolution de problèmes se sont en effet multipliées depuis la parution de l'œuvre de Polya : *How to solve it ?*

1.4.3.3. De véritables changements

On assiste dans les années soixante à de véritables changements dans l'enseignement des mathématiques. Le mouvement bourbakiste né en 1938 est en plein essor. La commission Lichnerowicz[25] ouvre, à partir de sa création en 1967, la voie à un enseignement mathématique formel. À cette nouvelle conception des mathématiques s'ajoute la transformation même de l'École déjà évoquée. En effet, de la nécessité de démocratisation de l'enseignement secondaire ainsi que de l'essor des travaux théoriques initiés par les bourbakistes notamment, découle la nécessité d'une transformation des contenus et des méthodes d'enseignement. C'est à cette époque que naît la didactique des mathématiques, principalement sous l'influence des travaux de Brousseau à Bordeaux et de Glaeser à Strasbourg.

Nous reviendrons largement dans cette première partie sur le cadre de la didactique des mathématiques, en articulant notre réflexion autour des questions suivantes posées par Kahane (2000) : *Enseigner la résolution de problèmes… lesquels ? Enseigner la résolution de problèmes… comment ?*

Mais auparavant continuons à examiner l'évolution de la place de la résolution de problèmes dans les programmes d'enseignement et dans les instructions officielles.

1.4.4. À partir de 1970 : l'activité de l'élève devient première

Le courant des mathématiques modernes marque considérablement la période d'après 1970 en introduisant un changement profond dans l'approche des mathématiques.

> *L'enseignement mathématique à l'école primaire veut répondre désormais aux impératifs qui découlent d'une scolarité obligatoire prolongée et de l'évolution contemporaine de la pensée mathématique* (Ministère Éducation nationale, 1970).

Dans les programmes de 1970 accompagnés de commentaires qui viennent se substituer aux programmes et instructions de 1945 restés jusqu'alors en vigueur, la résolution de problèmes à données numériques ou non numériques est considérée comme *activité privilégiée*. Deux nouveautés sont introduites. Premièrement, en plus des problèmes qui permettent d'appliquer des notions déjà étudiées, apparaissent les problèmes qui permettent d'introduire des notions nouvelles. Deuxièmement, et c'est sans doute là que réside l'essence même du changement, le législateur marque une rupture manifeste avec les programmes précédents qui fixaient en priorité la nécessité d'une relation avec la vie quotidienne. Il donne la définition suivante du problème :

[25] Nous développerons l'évolution des courants mathématiques dans le chapitre qui suit à travers différentes conceptions des mathématiciens.

> *Il y a problème si, connaissant un certain nombre d'informations concernant une situation, on se propose de déduire de ces informations des renseignements non explicités initialement. Résoudre un problème, c'est analyser la situation et les informations données, dégager éventuellement des chaînes de situations élémentaires, les schématiser afin de mettre en évidence les relations mathématiques qui les décrivent, utiliser ces relations et leurs propriétés pour en déduire les renseignements cherchés* (Ministère Éducation nationale, 1970).

Cette rupture peut être associée, du moins en partie, aux recherches de l'époque. En lien avec les travaux de psychologie, l'apprentissage est désormais considéré comme résultant de la construction de catégories mentales encore appelées *schèmes mentaux*[26] qui contribuent à l'élaboration de concepts. La compréhension de l'élève devient première. La mise en place d'activités concrètes[27] visant à aboutir à la construction de concepts est mise au premier plan, au détriment de l'enseignement de mécanismes et de règles. Par exemple, dans le champ de la résolution de problèmes, les *opérateurs de proportionnalité* se substituent à la *règle de trois*. Bien qu'y soit mentionnée *une certaine initiation des élèves à la vie courante que l'enseignement élémentaire se doit de donner*, les programmes de 1970 marquent un changement réel avec tous les précédents basés strictement sur la rencontre avec des problèmes relevant des thèmes empruntés à la vie quotidienne.

À travers les travaux de Glaeser[28] et de Brousseau[29] et d'universitaires travaillant dans les IREM[30], la didactique des mathématiques se donne pour programme l'étude de l'apprentissage de connaissances spécifiques, dans un domaine précis, celui des mathématiques. Pour Brousseau, les problèmes sont placés au cœur du dispositif mathématique et ainsi, c'est l'obstacle[31] épistémologique rencontré qui permet de construire des connaissances nouvelles. Pour ce faire, l'enseignant, selon Brousseau, a pour rôle de proposer des situations qui doivent permettre à l'enfant de construire par lui-même son savoir mathématique. Ces recherches vont elles aussi contribuer à donner une nouvelle orientation aux programmes.

Nous reviendrons plus en détail sur la théorie des situations didactiques dans le chapitre 3 que nous réservons au cadre théorique de la didactique des mathématiques.

1.4.5. Une nouveauté dans les programmes et instructions de 1978, de 1980 et de 1985 : les situations-problèmes

Dans les programmes de 1978 (Ministère Éducation) destinés au cycle élémentaire et de 1980 (Ministère Éducation) destinés au cycle moyen, l'expression *situation-problème*[32], jamais utilisée dans les programmes précédents, est mentionnée à plusieurs reprises, plaçant

[26] La notion de schème sera développée dans le chapitre 4 réservé au volet *Psychologie de l'apprentissage et du développement*.
[27] Exemple : Manipulations de jetons.
[28] Glaeser Georges (1918 – 2002) : Professeur émérite de mathématiques à l'Université de Strasbourg.
[29] Brousseau Guy (né en 1933) : professeur émérite à l'IUFM d'Aquitaine.
[30] IREM : Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.
[31] Au sens bachelardien (1938).
[32] Cette expression se trouve déjà dans l'ouvrage *L'unité de la psychologie* (Lagarde, 1949, p. 40)

ainsi la notion de problème au premier plan de l'enseignement des mathématiques. Compte tenu du fait de sa permanence dans les programmes et instructions qui suivront, nous réservons, dans le chapitre consacré aux travaux de didactique des mathématiques, un paragraphe spécifique à ce concept-clé de *situation-problème* qui peut être très brièvement décrit comme une situation de recherche au cours de laquelle les élèves devront franchir un obstacle pour acquérir et s'approprier de nouveaux savoirs.

> *On considérera d'abord que chaque nouvel outil mathématique peut se construire et trouver sa signification au travers de l'exploitation d'une ou plusieurs « situations-problèmes » convenablement choisies.*
>
> *Enfin, il semble souhaitable que le problème puisse être aussi, dès le cycle élémentaire, l'occasion d'une exploitation plus libre de situations diverses, mais surtout plus complexes, moins épurées que celles sur lesquelles les apprentissages se seront effectués.*
>
> *L'enfant devrait pouvoir y mettre en œuvre son pouvoir créatif en même temps que la rigueur et la sûreté de son raisonnement* (Ministère Éducation, 1978).

Les problèmes sont alors envisagés selon trois points de vue qui d'ailleurs ne sauraient être limités au seul domaine des mathématiques :

> *Situations-problèmes utilisées pour l'approche et la construction de nouveaux outils mathématiques ;*
>
> *Situations-problèmes permettant aux enfants de réinvestir des acquis antérieurs, d'en percevoir les limites d'utilisation (situation contre-exemple) et au maître d'en contrôler le degré de maîtrise ;*
>
> *Situations-problèmes plus complexes, plus globales dans lesquelles l'enfant devrait pouvoir mettre en œuvre son pouvoir créatif et affiner la rigueur et la sûreté de son raisonnement.* (Ministère Éducation, 1980)

On distingue ainsi trois types de situations-problèmes : celles qui permettent d'introduire des notions nouvelles et qui vont se situer en début d'apprentissage, celles qui vont permettre d'évaluer les connaissances acquises et enfin celles, plus complexes ou plus globales, qui visent à développer des attitudes de recherche, tout en suscitant la créativité de l'élève. On pointe là une franche opposition avec les problèmes proposés en regard des programmes ou instructions de la première moitié du vingtième siècle qui ne semblaient pas vraiment engager l'élève dans une démarche créative.

Alors que les programmes de 1970 avaient déjà constitué une rupture en plaçant au premier plan l'activité de l'élève, ceux de 1978 et 1980 se réfèrent explicitement à la connaissance et à la conceptualisation. La notion de problème y est considérée comme centrale, notamment à travers la mise en place de situations-problèmes.

> *Ces trois aspects doivent être exploités pour tous les thèmes du programme. Cependant, le cycle moyen se prête particulièrement à des activités de type « réinvestissement » ou « situations-complexes », la quantité d'outils mathématiques disponibles étant plus étendue qu'au cycle précédent. Ces activités peuvent ou non s'appuyer sur des données numériques* (Ministère Éducation, 1980).

Les programmes et instructions de 1985 énoncent clairement[33] *l'objectif de l'enseignement des mathématiques* (qui) *vise à développer le raisonnement et à cultiver chez les élèves les possibilités d'abstraction.* Compte tenu de l'accent mis sur la résolution de problèmes mathématiques, on peut considérer qu'ils s'inscrivent dans la continuité de ceux de 1978 et 1980. En effet, d'une part, on y retrouve la typologie des problèmes présente dans les programmes de cours moyen de 1980, avec toutefois l'introduction de l'expression *problème de recherche* et l'adjonction d'exemples illustrant les trois catégories.

> *On peut répartir ces problèmes en trois groupes :*
> *- ceux qui permettent la construction de nouveaux outils mathématiques (par exemple l'introduction de la soustraction, de la multiplication, des nombres décimaux);*
> *- ceux qui invitent à utiliser des acquis, à en percevoir éventuellement les limites d'utilisation, offrant ainsi au maître les moyens de contrôler le savoir (par exemple la construction d'un objet, l'agrandissement d'une figure, le premier apprentissage de la division euclidienne) ;*
> *- ceux qui sont liés à une véritable recherche (par exemple trouver tous les patrons d'un cube)* (Ministère Éducation nationale, *1985*).

D'autre part, il est rappelé que résoudre des problèmes suppose l'appropriation de méthodes ainsi que la maîtrise d'un certain nombre d'outils, numériques et géométriques. Il est également fait référence à la maîtrise du langage mathématique. Il s'agit *d'habituer les élèves (…) à exprimer, oralement et par écrit, leurs démarches (…). C'est l'occasion pour l'élève de s'approprier le langage mathématique, en restant attentif aux interférences éventuelles avec la langue courante.*

Depuis les années soixante-dix, les contenus des différents programmes suggèrent des relations étroites avec l'évolution des recherches tant en didactique des mathématiques qu'en psychologie de l'apprentissage.

Charnay (1988), en insistant sur la construction du sens par l'élève et sur le choix de la stratégie d'apprentissage par l'enseignant, se place dans une *théorie du fonctionnement cognitif* et se démarque là encore de la *théorie des stades* de Piaget à l'aspect structuraliste dominant, séparant les structures de connaissances et les contenus. Il définit le problème comme un triplet *situation, élève, environnement* et il précise que le problème n'existe que si l'élève perçoit une difficulté et doit surmonter un obstacle, ce qui n'est pas sans rappeler d'une part la définition première du *problèm*e (Diderot, 1751-1772), d'autre part la référence à Bachelard (1938), enfin les fondements de la *situation-problème*.

1.4.6. Programmes de 1995 (cycle des approfondissements)

Intégrant la notion de *cycle pédagogique* introduite par la loi d'orientation sur l'éducation du 10 juillet 1989, les programmes de 1995 se montrent encore plus incisifs quant à la place de la résolution de problèmes au sein des apprentissages mathématiques :

[33] Ces programmes et instructions sont comme les précédents destinés aux enseignants, cependant ils s'adressent pour la première fois directement aux parents d'élèves. Ils sont édités sous la forme d'un livre de poche et sont vendus en librairie.

> *La résolution de problèmes occupe une place centrale dans l'apprentissage par les élèves des connaissances mathématiques* (Ministère Éducation nationale, *1995*).

Ces programmes[34] insistent sur :

- l'introduction de *véritables problèmes de recherche.*

Notons que l'on retrouve dans ces programmes de 1995 les trois grands types de problèmes cités dans les programmes de 1980.

- la nécessité de *développer des compétences d'ordre méthodologique.*

> *Par ailleurs, des activités sont proposées pour mettre en place et développer des compétences spécifiques, d'ordre méthodologique, utiles pour résoudre des problèmes* (Ministère Éducation nationale, *1995*).

Ainsi, une dimension d'ordre méthodologique, qui transparaissait néanmoins dans les programmes de 1985 sous la mention *d'appropriation de méthodes* est désormais clairement mentionnée. Cependant, on ne relève plus la référence à la maîtrise du langage mathématique telle qu'elle apparaissait en 1985.

Il est également intéressant d'identifier quelles applications la publication de ces programmes a pu générer. Balmes et Coppé (1999) ont notamment travaillé sur cette question. Étonnées par le nombre conséquent de chapitres réservés à la *Résolution de problèmes* dans les manuels scolaires et par celui d'activités qualifiées de métacognitives, elles ont analysé les contenus de quatre manuels de cycle 3 parus simultanément à la mise en application des programmes de 1995. Il ressort de leur étude l'existence d'une homogénéité entre les thèmes des leçons proposés par les auteurs de ces manuels et les titres des paragraphes des programmes de 1995.

> *Des compétences générales sont à l'œuvre dans l'ensemble des activités mathématiques et doivent être acquises en fin de cycle :*
> *- utiliser ses connaissances pour traiter des problèmes ;*
> *- chercher et produire une solution originale dans un problème de recherche ;*
> *- mettre en œuvre un raisonnement, articuler les différentes étapes d'une solution ;*
> *- formuler et communiquer sa démarche et ses résultats par écrit et les exposer oralement ;*
> *- contrôler et discuter la pertinence ou la vraisemblance d'une solution ;*
> *- identifier des erreurs dans une solution en distinguant celles qui sont relatives au choix d'une procédure de celles qui interviennent dans sa mise en œuvre ;*
> *- argumenter à propos de la validité d'une solution* (Ministère Éducation nationale, 1995).

Il en ressort aussi la présence d'un découpage des compétences transversales visées en unités plus petites encore appelées micro-compétences qui font l'objet de séances d'enseignement spécifiques. C'est ainsi que, par exemple, les élèves sont conduits à rechercher les données utiles à la résolution d'un problème sans qu'il ne soit jamais demandé de le résoudre, ou encore à trouver une question censée transformer un texte narratif en un énoncé de problème.

En conséquence, Balmes et Coppé (1999) s'interrogent sur la place prédominante accordée à des séances de résolution de problèmes privilégiant la prise d'informations, au

[34] Valentin (1988) avait mis en garde contre la trop fréquente absence de vrais problèmes.

détriment de la mobilisation des connaissances mathématiques. Se référant aux travaux de Rey (1996) elles pointent les dérives pouvant naître d'un découpage des compétences en unités plus petites.

En reliant ces constats à ceux effectués (Houdement, 1999) lors de l'analyse des activités proposées dans deux manuels de CE2, Coppé et Houdement (2002) déplorent le fait que la résolution de problèmes soit considérée comme un objet d'enseignement, au même titre que l'addition par exemple. Ainsi, les élèves doivent s'interroger sur ce que sont des problèmes, sur ce qu'ils ne sont pas, sur la manière de résoudre des problèmes sans toutefois être amenés à les résoudre. À cela, s'ajoute le constat de reprises quasiment identiques de questionnements strictement méthodologiques et ce, chaque année du CP au CM2. De là découle tout naturellement la question de la part prise par les activités de type méthodologique dans l'enseignement de la résolution de problèmes. En résumé, ces *bégaiements* présents dans les progressions des manuels, associés à une certaine confusion entre les connaissances mathématiques à acquérir et les compétences méthodologiques posent, au-delà de la question de l'enseignement de la résolution de problèmes, celle de la formation même des enseignants (Coppé et Houdement, 2002).

1.4.7. Programmes de 2002

Les programmes de mathématiques de 2002 insistent, en continuité avec ceux de 1995, sur la place privilégiée à réserver à la résolution de problèmes et ce, tant au cycle des apprentissages fondamentaux qu'au cycle des approfondissements. Mais l'insistance est d'autant plus marquée qu'elle se traduit par l'introduction d'un nouveau domaine intitulé *exploitation de données numériques* qui vient ainsi s'ajouter aux cinq autres[35] déjà présents en 1995.

> *Ce domaine recouvre l'ensemble des problèmes dans lesquels les nombres et le calcul interviennent comme outils pour traiter une situation, c'est-à-dire pour organiser, prévoir, choisir, décider :*
> *- problèmes résolus en utilisant les connaissances sur les nombres naturels et décimaux et sur les opérations étudiées ;*
> *- problèmes relevant de la proportionnalité, résolus en utilisant des raisonnements personnels appropriés ;*
> *- utilisation de données organisées en listes, en tableaux, ou représentées par des diagrammes, des graphiques.*
> *Le raisonnement y occupe une place importante, en particulier dans la résolution de problèmes relevant de la proportionnalité.*
> *Ce qu'on appelle traditionnellement le "sens des opérations" doit être au centre des préoccupations* (Ministère Éducation nationale, 2002).

Commandés par le Ministre de l'Éducation nationale, cadrés à la fois par la Direction de l'Enseignement scolaire et du Conseil National des Programmes, élaborés par une commission d'experts composée d'enseignants du premier et du second degrés, d'inspecteurs, de formateurs et de chercheurs, ces programmes de 2002 s'appuient sur les résultats de

[35] Les cinq autres domaines étaient ainsi nommés : connaissance des nombres entiers naturels ; connaissance des fractions simples et des nombres décimaux ; calcul ; espace et géométrie ; grandeurs et mesure.

différentes investigations[36] qui ont révélé (i) des lacunes des élèves français lors de la résolution de problèmes mathématiques, (ii) un certain nombre de dérives dans les manuels scolaires. Ces constats auxquels s'ajoute la prise en compte des travaux d'inspiration constructiviste ont conduit les auteurs de ces programmes à reconsidérer la place et les enjeux de la résolution de problèmes :

- la place des problèmes au sein des apprentissages mathématiques,

> *Élaborées comme réponses efficaces à des problèmes, les premières notions mathématiques sont identifiées, puis étudiées dans le but d'être utilisables pour résoudre de nouveaux problèmes* (Ministère Éducation nationale, *2002*).

Cette référence à la mobilisation de connaissances antérieures pour résoudre de nouveaux problèmes semble pouvoir être mise en relation avec les travaux développés en psychologie de l'apprentissage, sur lesquels nous reviendrons dans le chapitre 4, avec notamment la notion d'activation d'un schéma mental. Néanmoins, nous pouvons d'ores et déjà nous référer à Vergnaud (1986) selon lequel *le savoir se forme à partir de problèmes à résoudre, c'est-à-dire de situations à maîtriser… Les conceptions des élèves sont façonnées par les situations qu'ils rencontrent.*

> *La résolution de problèmes est au centre des activités mathématiques et permet de donner leur signification à toutes les connaissances qui y sont travaillées* (Ministère Éducation nationale, 2002).

- les enjeux de la résolution de problèmes

> *Dès le cycle 2, les élèves doivent prendre conscience du fait que résoudre un problème ne revient pas à trouver, tout de suite, les calculs à effectuer pour répondre à la question posée. Une élaboration est, en général, nécessaire, faite d'étapes ou d'essais plus ou moins organisés. Un même problème, suivant le moment où on le propose, suivant les connaissances des élèves à qui on le destine et suivant la gestion qui en est faite, peut être résolu par élaboration de procédures personnelles ou, plus tard, par reconnaissance et utilisation d'une procédure experte appropriée. Dans certains cas, la résolution des problèmes est organisée par l'enseignant pour, à partir des solutions personnelles élaborées par les élèves, déboucher sur une nouvelle connaissance* (Ministère Éducation nationale, 2002).

Les qualificatifs de *personnel* et d'*expert* associés ici à des procédures ont suscité des réactions émanant notamment de Brissiaud (2006). Ce dernier juge *malheureux* l'emploi de ces termes. Centrée sur la situation, l'expression *procédure de simulation de la situation* lui aurait paru mieux adaptée que l'expression *procédure personnelle* qui, elle renvoie à la personnalité du sujet. Brissiaud trouve abusif d'affirmer que *la résolution experte relève du cycle 3* ; s'étonnant même que les programmes de cycle 2 *qualifient de « procédure experte » l'usage de la soustraction pour résoudre un problème comme celui du minibus qui se vide (recherche du résultat d'un retrait)*. Selon lui, *cette définition conduit à parler « d'expertise » chez des élèves concernant la soustraction alors qu'on n'a aucune preuve du fait qu'ils ont commencé à conceptualiser cette opération.*

Charnay (2006) en réaction au texte de Brissiaud (2006) resitue le débat au niveau du processus de conceptualisation dont il souligne la complexité et la longueur. Il précise que ce

[36] Exemple : PISA (Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves)

processus n'est jamais complètement achevé et qu'il serait sûrement judicieux de parler de *niveaux de conceptualisation* plutôt que d'envisager à un moment donné qu'un concept se met en place de façon immuable.

Sans doute est-il nécessaire de rappeler l'abondante documentation à destination des enseignants et des formateurs qui a suivi pour la première fois la parution de ces programmes puisque entre 2002 et 2005, pour le seul domaine des mathématiques, on compte deux documents d'application et un document d'accompagnement regroupant à lui seul neuf thématiques[37]. D'ailleurs, à travers les références citées dans ces documents, on peut constater la continuité des liens étroits existant avec les recherches en didactique des mathématiques comme en attestent, par exemple, les renvois aux productions de la COPIRELEM[38] ou aux travaux des IREM dans le document d'accompagnement spécifiquement réservé aux *Problèmes pour chercher*. Ce dernier traduit l'insistance, déjà signalée précédemment, sur l'enseignement de la résolution de problèmes.

> *Le développement des capacités à chercher, abstraire, raisonner, prouver, amorcé au cycle 2, se poursuit. Pour cela, il est nécessaire de prendre en compte les démarches mises en œuvre par les élèves, les solutions personnelles qu'ils élaborent, leurs erreurs, leurs méthodes de travail, et de les exploiter dans des moments de débat* (Ministère Éducation nationale, 2002).

En résumé, les programmes de 2002 posent clairement les enjeux de l'enseignement des mathématiques : *les connaissances et les savoir-faire (…) doivent contribuer au développement d'une pensée rationnelle.*

1.4.8. Socle commun des connaissances et compétences (2006) et Programmes (2007)

Le principe de l'établissement d'un socle commun des connaissances et des compétences à maîtriser sur l'ensemble de la scolarité obligatoire a été arrêté par la loi du 23 avril 2005[39]. Référence commune pour parents, élèves, enseignants, le socle commun est organisé en sept compétences majeures parmi lesquelles figurent *les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique*. Le rôle majeur joué par la résolution de problèmes dans l'acquisition d'une culture mathématique y est explicitement mentionné.

> *La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par la résolution de problèmes, notamment à partir de situations proches de la réalité.*
>
> *Les compétences acquises en mathématiques conditionnent l'acquisition d'une culture scientifique* (Ministère Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2006).

[37] Thématiques des documents d'accompagnement : Utiliser les calculatrices en classe, Le calcul mental, Grandeurs et mesure à l'école élémentaire, Articulation école collège, Les problèmes pour chercher, Espace et géométrie au cycle 2, Le calcul posé à l'école élémentaire, Résolution de problèmes et apprentissage, Vers les mathématiques – Quel travail en maternelle ?

[38] COPIRELEM : Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.

[39] Loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'école.

L'articulation entre le socle commun et les programmes s'opère par l'intermédiaire du livret de connaissances et de compétences dont les grilles de références renvoient explicitement aux programmes. Ainsi, le paragraphe réservé à la mise en œuvre d'une résolution de problème renvoie au paragraphe *exploitation de données numériques* du programme. Les compétences visées par la résolution de problèmes sont, pour la fin du cycle 2 comme pour la fin du cycle 3 :

> *Rechercher, extraire et organiser l'information utile (écrite, orale, observable).*
> *Réaliser, manipuler, mesurer, calculer, appliquer des consignes.*
> *Raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale ou technologique.*
> *Présenter la démarche suivie, les résultats obtenus à l'aide de langages ou d'outils scientifiques et technologiques. (*Ministère Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, *2006)*

Dans les programmes de 2007, la résolution de problèmes se voit réserver une place centrale au sein des activités mathématiques, comme c'était déjà le cas dans ceux de 2002.

Au cycle 2, on retrouve à une modification près les mêmes objectifs qu'en 2002. Ainsi, les qualificatifs de *personnelles* et d'*expertes* appliqués à des procédures sont restés, seule l'expression *plus tard* en relation avec la *reconnaissance et l'utilisation d'une procédure experte appropriée* a été supprimée.

Au cycle 3, un paragraphe spécifique inséré dans la rubrique *objectifs* dresse une liste d'attitudes qui seront plus particulièrement développées à travers des activités mathématiques.

> *À travers la pratique des mathématiques, au cycle 3, l'élève est amené à développer particulièrement les attitudes suivantes :*
> *- la rigueur et la précision dans les tracés, dans les mesures, dans les calculs ;*
> *- le goût du raisonnement ;*
> *- le réflexe de contrôler la vraisemblance des résultats ;*
> *- la volonté de justesse dans l'expression écrite et orale ;*
> *- l'ouverture à la communication, au dialogue, au débat ;*
> *- l'envie de prendre des initiatives, d'anticiper ;*
> *- la curiosité et la créativité ;*
> *- la motivation et la détermination dans la réalisation d'objectifs (*Ministère Éducation nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, *2007).*

La liste des activités n'est pas de nouveau mentionnée à cet endroit précis, mais il nous semble que la résolution de problèmes, à travers le développement de capacités à *chercher, abstraire, raisonner, prouver* ne peut figurer qu'en bonne place parmi ces activités.

Toutes les connaissances et capacités contenues pour le cycle 3 dans le paragraphe *exploitation de données numériques* sont incluses dans le palier 2 du socle commun de connaissances et de compétences ; en conséquence, leur maîtrise est exigible à la fin du cycle des approfondissements.

Connaissances, capacités et attitudes travaillées et attendues en fin de cycle 3

Le texte en caractère droit indique des connaissances ou des capacités retenues pour le palier 2 du socle commun de connaissances et de compétences : elles constituent le cœur du programme.

Le texte en italique indique des connaissances ou des capacités dont la maîtrise n'est pas retenue pour ce palier : elles constituent toutefois des objectifs du programme pour tous les élèves, et le plus souvent préparent le palier suivant du socle (ici, la fin du collège).

Connaissances	Capacités
1.1 Problèmes relevant des quatre opérations	- résoudre des problèmes en utilisant les connaissances sur les nombres naturels et décimaux et sur les opérations étudiées ;
1.2 Proportionnalité	- résoudre, dans des cas simples, des problèmes relevant de la proportionnalité (pourcentages, échelles, conversions,…), en utilisant les propriétés de linéarité, ou par l'application d'un coefficient donné dans l'énoncé ou calculé ;
1.3 Organisation et représentation de données numériques	- organiser des séries de données (listes, tableaux…) ; - lire, interpréter et construire quelques représentations : diagrammes, graphiques.

Figure 10 : ***Exploitation de données numériques (Ministère Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche 2007)***

1.5. Problème ou exercice ?

Les deux termes *problème* et *exercice* semblent revêtir des acceptions différentes selon les auteurs qui les utilisent.

Les formes scolaires respectives de problème et d'exercice apparues seulement à quelques années d'intervalle, se présentent comme des énoncés, dans les manuels destinés aux élèves. La longueur de l'énoncé ne constitue pas un critère de distinction. La différence majeure relève plutôt du niveau conceptuel. Les *exercices scolaires* (Rey, 1995) sont définis comme des *devoirs aux difficultés graduées qui conduisent les élèves à des travaux plus amples* ; ils ne sont pas considérés comme porteurs d'une *question à résoudre*. Une distinction entre ces deux formes d'écrits est d'ailleurs, dès le début du 20ème siècle, explicitement mentionnée dans la préface du manuel Toisoul et Wallon (1902).

3. Les exercices.

Chaque point de la théorie est suivi de nombreuses questions pratiques soigneusement graduées : un grand nombre de leçons pourront consister dans la préparation orale des exercices d'application ; nous donnons notamment des moyens faciles pour enseigner le système métrique d'une manière réellement pratique ainsi que le demandent les autorités scolaires.

Figure 11 : ***Définition des exercices (Préface extraite du manuel : Toisoul et Wallon (1902), p. 4)***

5. Les problèmes.

Après les exercices de numération et de calcul, les problèmes. Ils constituent un cours suivi, mis en rapport intime avec la théorie ; nous avons cherché à le graduer le mieux possible ; les questions sont variées et présentent toujours une notion utile, morale ou intéressante.

Tout instituteur connait les différents moyens de multiplier les problèmes en transformant les données, en changeant le nom des matières, en faisant vérifier la réponse par la preuve, etc., etc.

Figure 12 : ***Définition des problèmes (Préface extraite du manuel : Toisoul et Wallon (1902) p. 4)***

5. — Dans la multiplication de 14 par 3, le produit est plus grand que le multiplicande. Pourquoi ?

Figure 13 : ***Exercice n°5 (extrait du manuel : Toisoul et Wallon (1902), p. 30)***

51. — Le tiers d'un nombre est 4315. Quel est le double du quadruple de ce nombre ?

Figure 14 : ***Problème n°51 de même longueur que l'exercice précédent (extrait du manuel : Toisoul et Wallon (1902), p. 33)***

Glaeser (1971), considéré comme un des pionniers de la didactique des mathématiques, distingue la notion de problème de celle d'exercice, l'exercice se réduisant à l'exécution de tâches algorithmiques et ne conduisant pas, comme le problème, à un tâtonnement, à l'invention, à la recherche de pistes permettant d'accéder à une solution. Dans l'exercice, on ne retrouve pas cette dimension heuristique que Glaeser place au cœur même de la définition du problème. Nous reviendrons sur cette distinction pointée par Glaeser en étudiant le point de vue du didacticien sur la place à réserver à la dimension heuristique dans l'enseignement des mathématiques.

Vergnaud rappelle lui aussi la distinction classique faite en mathématiques entre *problème* et *question de cours*. Tandis que cette dernière sollicite une application directe du savoir, la résolution de problèmes, quant à elle, impose une combinaison nouvelle des connaissances, en recourant parfois à des algorithmes partiels pour certaines parties du problème. À la dimension dite *heuristique* du problème, Vergnaud ajoute une conception qu'il qualifie de *beaucoup plus épistémologique : le problème comme source du savoir et comme référence des concepts nouveaux*.

1.6. Conclusion du chapitre

L'étymologie du mot *problème*, dans le sens de *problème* mathématique renvoie à l'idée de *question à résoudre*, intrinsèquement liée à celle de *proposition* contenant une demande. Partant de cette définition, nous avons alors considéré la notion d'*énoncé de problème* qui elle, renvoie à la fois au texte qui énonce le problème à résoudre et au concept de questionnement sous-jacent.

Les problèmes mathématiques n'ont toutefois pas attendu 1870, année de l'introduction de l'expression *énoncé de problème* pour trouver leur place dans la vie quotidienne. Des exemples extraits de papyrus égyptiens, de tablettes babyloniennes, ou empruntés à l'histoire de l'artillerie ou de la navigation maritime illustrent à quel point l'activité de résolution de problèmes en mathématiques est ancienne, répondant de tout temps à des questions d'ordre matériel et à des nécessités de vie sociale ou économique. Quant au problème scolaire, son usage se développe pleinement à la fin du 19$^{\text{ème}}$ siècle, pour trouver une place dans l'Institution scolaire. C'est sous une dimension diachronique que nous avons choisi d'aborder le problème mathématique scolaire, en traitant plus spécifiquement de la place et du rôle qui lui ont été assignés dans l'enseignement depuis la loi Guizot (1933) jusqu'à la mise en œuvre de la loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'école, publiée en 2005. En résumé, deux grandes périodes peuvent être considérées pour situer le rôle donné au problème scolaire par l'Institution.

Jusqu'en 1970, les programmes et instructions insistaient sur la nécessité d'ancrer les problèmes proposés à l'école sur des situations de la vie quotidienne. À partir de 1970, les programmes d'enseignement de mathématique sont profondément marqués, d'une part, par les travaux en didactique des mathématiques et en psychologie de l'apprentissage et du développement, d'autre part, par la démocratisation de l'enseignement. Les propos de Brousseau nous paraissent résumer la place qu'il convient alors d'accorder à la résolution de problèmes. En effet, selon Brousseau (1972), l'enseignant a pour rôle de proposer des situations qui doivent permettre à l'enfant de construire par lui-même son savoir mathématique. Ainsi, l'activité de l'élève est considérée comme première, les situations-problèmes mentionnées pour la première fois en 1978 dans les programmes de mathématiques sont dès lors positionnées comme centrales dans l'apprentissage des connaissances mathématiques par les élèves.

Toutefois, les tensions entre les partisans d'un enseignement mathématique utilitaire visant à préparer l'avenir social et professionnel des élèves et celui d'un enseignement visant à la culture de l'esprit semblent avoir déjà été présents sous le Ministère Ferry comme en attestent les débats entre Sonnet (1887) et Leyssène (1887a). À travers cette question de l'enseignement de la résolution de problèmes, se trouve posée toute la question des enjeux de l'enseignement.

En 2006, le socle commun de connaissances et de compétences introduit de nouveau la référence à des situations proches de la réalité. Toutefois, là, les enjeux de cet enseignement ne se posent pas dans les mêmes termes qu'à la fin du 19$^{\text{ème}}$ siècle. Ainsi, parmi les compétences citées pour la fin du cycle 2 et celles du cycle 3, figurent en bonne place : *raisonner, argumenter*. À l'heure où nous terminons ce mémoire de thèse, les programmes de 2008 sont parus à l'état de projet, renvoyant au débat sur les priorités à assigner à notre École et ainsi à accorder à la résolution de problèmes.

Ce chapitre s'achève sur la distinction entre *problème* et *exercice*, le premier se rapportant à l'idée d'obstacle à surmonter et impliquant tâtonnement et invention, le dernier se réduisant, selon Glaeser (1971) à l'exécution de tâches algorithmiques.

Dans le parcours des programmes d'enseignement, nous avons cité les travaux de la commission Lichnerowitz, évoquant par là même les travaux des mathématiciens du groupe Bourbaki et montrant les liens qui peuvent exister entre la recherche fondamentale et l'enseignement. Il n'est bien sûr pas question de confondre les problèmes traités par les experts que sont les mathématiciens et les problèmes scolaires proposés aux élèves à l'école. Toutefois nous avons souhaité recueillir dans ce mémoire de thèse quelques propos de mathématiciens sur le concept de problème, en vue le cas échéant de mieux comprendre les grandes orientations qui ont pu traverser l'enseignement. Le chapitre qui suit présente les points de vue des mathématiciens sur le concept de problème.

Chapitre 2 : Du point de vue des mathématiciens : que revêt le concept de problème dans le champ des mathématiques ?

En vue d'identifier les définitions de la notion de *problème* qui peuvent ressortir des différentes conceptions des mathématiques, nous avons souhaité donner la parole à plusieurs mathématiciens, au sens donné par Glaeser (in Régnier, Perrier 2002, p. 12) de *grands mathématiciens*. Selon Glaeser, il existe en effet deux types de mathématiciens :

(i) ceux qu'ils nomment *les matheux*, à savoir ceux qui savent poser une division ou une multiplication ou qui n'ont pas de complexe face à l'instauration de l'Euro, ou encore ceux qui exercent la fonction d'enseignant de mathématiques, ou encore les élèves identifiés comme *bons en maths* par les notes qui leur sont attribuées.

(ii) puis, il y a ceux qu'il nomme les *grands mathématiciens* parmi lesquels il compte son Maître : Schwartz[40]. Ce sont ceux qui savent *poser des questions mathématiques et après avoir pris un long plaisir à sécher, finissent par obtenir la réponse à leurs questions au prix de longs efforts*.

À cette définition, Glaeser ajoute : *Le grand matheux est celui qui pose des questions qui intéressent la communauté des autres matheux, grands ou non !*

C'est à ces grands mathématiciens que nous nous référons ici en considérant trois conceptions qui ont balisé l'histoire des mathématiques : (i) celles se rattachant à la conception platonicienne, (ii) celles de type formaliste apparues au 19ème siècle et octroyant une place essentielle à la théorisation, faisant fi de la réalité des objets mathématiques, et (iii) celles de type constructiviste, nées au début du 20ème siècle et prônant la primauté de l'expérimentation et du pragmatisme.

2.1. La conception platonicienne des mathématiques

La conception platonicienne des mathématiques distingue le monde réel et le monde des idées ; elle s'intéresse au caractère abstrait des objets mathématiques. Deux exemples peuvent l'illustrer : (i) la droite tracée dans le sable n'est qu'une représentation imparfaite de la droite abstraite. Ce tracé malhabile suggérera la droite idéale, objet de la connaissance mathématique ; (ii) les propriétés du cercle idéal présentent un intérêt certain, contrairement à la nature fugitive des ronds dans l'eau.

[40] Laurent Schwartz, né le 5 mars 1915 à Paris et mort le 4 juillet 2002 à Paris, est l'un des grands mathématiciens français du XXe siècle. Après avoir été élève à l'École normale supérieure, il obtint la Médaille Fields en 1950 pour ses travaux sur la théorie des distributions. Il fut pendant de nombreuses années professeur à l'École polytechnique.

Le mathématicien Thom[41], dont une partie des travaux s'inscrit dans cette tradition platonicienne, précise dans un entretien conduit par Nimier (1989), que *les mathématiques constituent un langage théorique universel et qu'il n'y a de théorisation que mathématique*. Pour lui, les mathématiques ont une réalité objective, une existence propre indépendante de la connaissance que nous en avons. Pour Thom, les mathématiques constituent une voie d'accès à la réalité, dans la mesure où, dans le domaine des sciences, les mots du langage ne sauraient suffire à exprimer des concepts servant à élaborer une théorie universelle ; ce sont les mathématiques et les lois qui les composent qui sont les seules voies rigoureuses d'accès à une pensée ayant une validité universelle. Il affirme que *La Science moderne a eu tort de renoncer à toute ontologie en ramenant tout critère de vérité au succès pragmatique. Certes, le succès pragmatique est une source de prégnance, donc de signification. Mais il s'agit alors d'un sens immédiat, purement local. Le pragmatisme - en ce sens - n'est guère que la forme conceptualisée d'un certain retour à l'animalité* (Thom, 1988).

Selon Régnier (1994) l'approche basée sur la théorisation conçoit les mathématiques *comme se développant selon un processus qui part de l'expérience* (exemples : le tracé malhabile de la droite ou bien les ronds dans l'eau), *s'en abstrait pour y revenir ensuite*.

D'ailleurs, pour les platoniciens, un problème mathématique porte sur des objets idéaux (exemple : la droite idéale) ; lors de la résolution, la démonstration préside à la démarche de validation, éliminant ainsi le recours à l'expérience et valorisant au contraire l'utilisation de règles internes bien établies.

2.2. La conception formaliste des mathématiques

La seconde conception présentée ici, en raison notamment des liens qui s'opéreront quelques décennies plus tard avec l'enseignement des mathématiques, est apparue à la fin du $19^{ème}$ siècle. Elle porte le nom de *formalisme*. Elle se caractérise par l'usage de formules, par l'assemblage de symboles dénués de toute signification propre et se retrouve à partir de 1938 chez bon nombre de Bourbakistes dont les plus engagés dans ce courant mettaient un point d'honneur à utiliser le moins de figures possible en géométrie. Pour Bourbaki, il était hors de question d'associer une image à un concept. Thom[42], dont une partie des travaux s'inscrivait dans ce courant, s'était d'ailleurs élevé contre ce formalisme. Le mathématicien Lichnerowitz, membre du groupe Bourbaki, interrogé par Nimier (1989), décrit ce qui lui semble caractériser d'une manière générale l'activité des mathématiciens ; il résume ainsi cette seconde conception des mathématiques : *vous vous posez une question, vous vous préoccupez d'un problème … Vous commencez par travailler un peu de manière apparente à une table avec un bout de papier, pas très longtemps. Le but en fait, le plus souvent le problème, est un*

[41] Le parcours de René Thom est celui des plus grands mathématiciens du 20ème siècle. Normalien, membre de l'IHES, médaillé Fields, il est le père fondateur d'une branche entière des mathématiques modernes: « La théorie du chaos ». Sa carrière est cependant atypique, après avoir construit une oeuvre mathématique considérable, il s'est consacré avec succès à la philosophie. Il a fait partie de ces rares mathématiciens à avoir cherché à appliquer leur savoir à d'autres sciences.

[42] Indépendamment de son appartenance à la tradition platonicienne.

prétexte. Le but est de faire à ce propos une méthode ou de créer des êtres mathématiques qui, dans le réseau de la connaissance mathématique, irradient.

De même, Joyal (in Nimier, 1989), considéré comme l'un des plus grands mathématiciens du Québec, affiche clairement sa préférence pour les mathématiques théoriques, affirmant qu'il serait moins créateur s'il faisait d'autres types de problèmes.

Pour les formalistes, un problème mathématique porte sur des objets et des propriétés nommés *élémentaires* par Hilbert. Par exemple, l'ensemble des entiers naturels constitue un objet élémentaire et les énoncés de la forme $\forall x_1 \ldots \forall x_n, f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, où f est une fonction récursive, c'est-à-dire calculable, sont un exemple de propriété élémentaire. Selon Hilbert, le problème doit être résolu par une démonstration à l'aide de règles formelles fixées à l'avance et permettant de construire certains assemblages de symboles. Cependant il convient de distinguer :

(i) la conception de Hilbert orientée vers l'étude des structures, au sens de systèmes formels[43] mettant en commun des résultats en vue de résoudre une famille de questions bien déterminées.

(ii) la conception née dans les années quarante prônant l'idée du développement de structures formelles pour elles-mêmes. Cette conception a notamment été marquée par la publication des *Éléments de mathématique* (Bourbaki[44], 1939-1998) qui séparaient les *théorèmes* de leurs applications.

La référence au *formalisme* nous conduit à établir un lien étroit avec les problèmes, puisque Hilbert, l'un de ses fondateurs, est aussi le créateur des vingt-trois problèmes présentés lors du Congrès international de mathématiques, en 1900, à Paris. Plusieurs de ces problèmes ne sont d'ailleurs pas entièrement résolus en ce début du 21$^{\text{ème}}$ siècle.

> *N°2 - Peut-on prouver la consistance de l'arithmétique ? En d'autres termes, peut-on démontrer que les axiomes de l'arithmétique ne sont pas contradictoires et, subséquemment, sont-ils indépendants ?*
> *N°6 - Peut-on axiomatiser la physique ?*
> *N°10 - Existe-t-il un algorithme universel permettant de conclure à l'existence de solutions d'une équation diophantienne ?*
> *N°20 - Étudier la solution générale des problèmes de valeur limite (généralisation du problème de Dirichlet).*
> *N°23 - Développer une méthode générale de résolution dans le calcul des variations.*
> Hilbert (1900)

[43] Exemple : la structure d'anneaux noethériens, dégagée par Noether (1921), qui a fourni un cadre au développement de la géométrie algébrique.

[44] *Nicolas Bourbaki* est le nom porté par un groupe de mathématiciens français qui, dans la première moitié du vingtième siècle, ont cherché à édifier de manière axiomatique (et aussi anonyme) la totalité des sciences mathématiques, cela non plus à partir de la logique, comme l'avaient tenté Frege et Russell, mais à partir de structures *mères*, découvertes à la suite d'un travail d'analyse des multiples théories existantes : les structures algébriques, topologiques et les structures d'ordre.

2.3. La conception constructiviste des mathématiques

Cependant, certains mathématiciens se démarquent totalement du formalisme et de la culture bourbakiste. C'est le cas par exemple de Berge, auteur de *La Théorie Générale des Jeux à n personnes* (Berge, 1957) et de *La Théorie des Graphes* (Berge, 1958). Pour ce célèbre mathématicien, la référence algébrique n'est pas première. Un graphe se traite sous forme de figures et permet ainsi de visualiser l'objet clairement, tandis que selon les bourbakistes un graphe ne peut être qu'une fonction. Qu'ils concernent le jeu d'échecs ou bien la géométrie, les travaux et propos de Berge, traduisent un besoin de visualiser le réel. Dans un entretien avec Nimier (1989), Berge dit manifester son intérêt pour les *configurations, c'est-à-dire les façons d'arranger des objets suivant des contraintes*, son *désir de rendre visuelles des choses très complexes*. Euler (1759) a été l'initiateur de cette théorie des graphes qui lui a d'ailleurs permis d'être le premier à montrer par une résolution mathématique formelle que le célèbre *Problème des sept ponts de Königsberg* était insoluble[45].

> *Étant donné que la ville est construite sur deux îles reliées au continent par six ponts, et entre elles par un pont, trouver un chemin quelconque permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser l'eau qu'en passant par les ponts.*

La troisième conception référée ici, le *constructivisme* s'oppose aux deux précédentes, dans le sens où elle postule que seuls les résultats obtenus par une *construction finie* constituent des objets mathématiques : pour les constructivistes parmi lesquels on peut citer Poincaré, la preuve abstraite de l'objet mathématique étudié ne suffit pas. Des preuves dites *constructives*, autrement dit des démonstrations, sont indispensables pour conclure à l'existence d'un objet ; elles doivent fournir une méthode permettant d'en produire effectivement un exemplaire. Les objets mathématiques résultent de constructions mentales du mathématicien. Selon Régnier (1994), *dans cette conception, le but essentiel est de fournir des algorithmes pour résoudre des problèmes idéalement concrets*.

Pour les constructivistes, un problème mathématique porte sur des objets qui ne sont pas considérés comme existant par *eux-mêmes* mais comme étant le résultat des constructions mentales du mathématicien.

Ce courant exige qu'une démonstration qui conclut à l'existence d'un objet, fournisse une méthode permettant de produire effectivement un exemplaire de cet objet. Par exemple, la démonstration de l'existence d'une infinité de nombres premiers peut être qualifiée de constructive, puisqu'elle fournit une méthode permettant de construire l'ensemble des nombres premiers : un nombre premier p étant donné, il s'en trouvera un autre avant (p ! + 1), l'intervalle de recherche pour le nombre suivant étant ainsi borné.

---

[45] Voir explication de la solution en annexe 4.

2.4. Conclusion du chapitre

Ces trois conceptions ne sauraient recouvrir l'ensemble des courants traitant de l'activité mathématique.

Le type de conception à laquelle se rattache l'activité du mathématicien ne semble pas influer sur la définition que le mathématicien pourrait donner du problème mathématique, même si des divergences entre les conceptions peuvent être relevées quant à la place de la théorisation, de l'expérience, de la relation aux objets réels, lors de la résolution du problème. De par la perception que les mathématiciens interrogés par Nimier (1989) ont révélée de leur activité ou encore de par l'observation des types de problèmes qui ont été traités au fil de l'Histoire, on peut conclure que le concept de *problème* renvoie toujours, pour ces experts, à une question à résoudre, conformément aux définitions extraites de l'Encyclopédie[46] (Diderot, 1751-1772). La solution n'est pas immédiate ; elle est parfois longuement différée dans le temps, comme en attestent par exemple les 23 problèmes de Hilbert (1900) dont cinq ne sont pas encore, à ce jour, entièrement résolus. Elle se présente souvent de façon assez inattendue.

Dès lors qu'il a résolu un problème mathématique, le mathématicien va consigner par écrit le savoir mathématique nouveau. Au fil des siècles, les supports ont évidemment varié, mais depuis les tablettes babyloniennes ou les papyrus égyptiens jusqu'aux publications actuelles dans les revues scientifiques, le principe est resté le même : celui de communiquer des résultats à un moment donné.

Le mathématicien va, pour ce faire, dépersonnaliser le savoir, le décontextualiser, le *détemporaliser* en faisant abstraction de tous les allers-retours qui ont balisé le parcours de recherche de la solution du problème. Il va parfois introduire un vocabulaire nouveau. Et c'est ainsi que ce savoir sera mis à disposition d'autres chercheurs qui, le cas échéant, le transformeront, voire le généraliseront. Le savoir établi par le savant prend le nom de *savoir savant* chez Chevallard (1985).

Parmi les savants que sont les mathématiciens et pour lesquels le fondement même de l'activité réside dans la résolution de problèmes, se trouvent ceux qui, issus de l'École normale supérieure, sont devenus professeurs de mathématiques ; leur parcours en général exceptionnel les a conduits le plus souvent à enseigner aux élèves des Grandes Écoles. On peut dès lors se demander :

(i) si ces professeurs qui ont été parmi les plus brillants élèves en mathématiques se retrouvent dans les propos de Bachelard (1938, p. 18) destinés aux professeurs de sciences :

> *Dans l'éducation, la notion d'obstacle pédagogique est également méconnue. J'ai souvent été frappé du fait que les professeurs de sciences, plus encore que les autres si c'est possible, ne comprennent pas qu'on ne comprenne pas* (Bachelard, 1938).

Avec Bachelard, est effectivement posée ici toute la question de l'apprentissage à laquelle se mêle étroitement celle de l'enseignement par l'intermédiaire de la notion d'obstacle pédagogique. Les mathématiques en général et la résolution de problèmes à données numériques en particulier ne sauraient être épargnées par ce type de questionnement

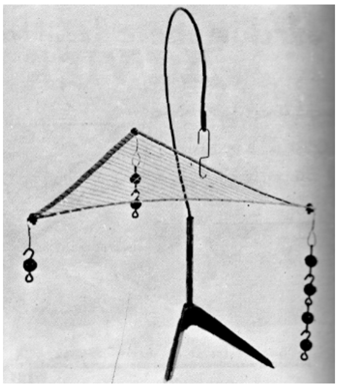
[46] Voir Paragraphe 1.1.

car il va de soi que ces domaines ne sauraient être réservés aux seuls mathématiciens. Ce sont donc ces deux paradigmes d'enseignement et d'apprentissage de la résolution de problèmes qui vont faire l'objet des deux chapitres suivants destinés à convoquer les cadres théoriques correspondants : l'un emprunté à la didactique des mathématiques, l'autre à la psychologie en prenant en compte les domaines de l'apprentissage, du développement et de l'éducation.

(ii) ou encore si Adeline, cette élève de 10 ans dont une réplique extraite d'un entretien avec Sarrazy (2002) est rapportée ici, pourrait compter parmi leurs élèves.

> *- Quand, en classe, tu n'as pas compris ce qu'a expliqué ton maître, que fais-tu ?*
> *- Je le demande à Sandrine parce qu'elle comprend pas elle aussi* (Sarrazy, 2002).

Toutefois, il est possible de faire établir des liens étroits entre certaines notions enseignées et la réalité. Par exemple, des professeurs italiens se sont employés à replacer leurs élèves de l'école moyenne[47] dans *le même esprit que celui qui avait conduit le créateur mathématique à la découverte* (Castelnuovo, Barra, 1980). La figure 15 présente[48] la réalisation d'élèves placés en situation de recherche en vue de la construction d'un mobile destiné à les faire accéder au concept de barycentre.



Du fléau au triangle. Il y a un point — le barycentre des trois poids — tel que le triangle, suspendu par ce point, prend la position horizontale. Möbius, en 1827, a eu une idée géniale : il a imaginé d'accrocher des poids (sur notre figure : 1, 2, 4) aux sommets d'un triangle par un de ses points. Il y a un seul point par lequel le triangle prend la position horizontale : c'est le barycentre.
Nous, nous avons construit notre triangle avec un réseau de fils.

Figure 15 : ***L'idée du triangle de Möbius (Castelnuovo, Barra, 1980, p. 210)***

Mais avant d'être transformé en savoir destiné à être enseigné dans les classes, le *savoir savant* produit par les mathématiciens va subir *un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement* (Chevallard, 1985, p. 39).

Comment passer du *savoir savant* au *savoir enseigné* ? Quel sera le travail du professeur ? Telles sont les questions que nous nous proposons de traiter dans le chapitre suivant à travers les travaux issus des recherches en didactique des mathématiques.

[47] Trois premières années de collège.
[48] La suite de l'exemple figure en annexe 5

Chapitre 3 : Du point de vue des didacticiens des mathématiques : Qu'est-ce qu'un problème ? Comment en enseigner la résolution ?

Le second chapitre a permis de cerner les conceptions de quelques mathématiciens sur le *savoir savant*.

Le premier chapitre, à travers le contenu des programmes d'enseignement, avait mis en avant le *savoir à enseigner*. Les contenus de ce *savoir à enseigner* sont fixés par les programmes d'enseignement qui prennent en compte l'évolution de la science. L'introduction des mathématiques modernes dans les programmes de 1970, inspirée du mouvement structuraliste, en constitue une illustration. Prenant cette conception comme modèle, nombreux ont été les professeurs qui, à tous les niveaux, du primaire au supérieur, ont basé leurs cours sur des théories abstraites, dénuées de signification pour leurs élèves. Plusieurs voix se sont d'ailleurs élevées contre la présence de ce formalisme dans les cours dispensés. Selon Rouche (in Bouvier, 1981), *Le malheur veut que si, dans les écoles, on enseigne avant tout les structures, les élèves eux n'ont pas ce souvenir des problèmes et des théories particulières d'où elles sont issues. On enseigne des mathématiques toutes faites qu'on illustre d'exemples naïfs*. Quant à Chevallard (in Bouvier, 1981), il dénonce *ces structures qui tombent du ciel sur la tête des élèves*.

Ainsi, l'Institution scolaire fait des choix[49] qui sont fixés dans les programmes d'enseignement et qui se traduiront par un *savoir à enseigner*, lequel deviendra objet d'enseignement et sera destiné à devenir le *savoir enseigné* par le professeur. Par conséquent, tous les objets mathématiques qui émanent du travail des mathématiciens n'ont pas pour finalité de devenir des objets d'enseignement.

La chaîne suivante (Figure 16) peut résumer le passage entre le *savoir savant* et le *savoir enseigné*.

Savoir savant	⟶	**Savoir à enseigner**	⟶	**Savoir enseigné**
(savoir du mathématicien)		(fixé par les programmes d'enseignement)		(par le professeur)

Figure 16 : ***Transposition du savoir savant au savoir enseigné***

Chevallard (1985) nomme *transposition didactique* ce passage d'un contenu de savoir précis à une version didactique de cet objet de savoir.

Dès lors se pose la question du contenu du savoir effectivement enseigné. En effet, si on considère qu'acquérir des savoirs en mathématiques, c'est avant tout se poser des questions et résoudre des problèmes, alors on comprend aisément que le rôle du professeur ne doit pas se borner à faire apprendre des théorèmes et à les appliquer à des situations ou, pour rejoindre Dieudonné, cité par Glaeser (1995) *à rédiger un exposé clair et précis et à égrener un discours devant un amphithéâtre qui regarde passer le cours, comme une vache regarde*

[49] Sous le terme *noosphère*, Chevallard (1997) désigne ceux qui pensent les problèmes d'enseignement d'une discipline.

passer un train… Selon la même perspective, Chevallard (2003) considère que *la didactique s'occupe de la diffusion (et de la rétention, de la non-diffusion)* des *praxéologies*[50].

En filigrane de ces propos on peut citer les réflexions de Brousseau (1983, p. 167) relatives à la fois au contenu de l'enseignement et aux rôles des différents acteurs de cet enseignement : *Un élève ne fait pas de mathématiques s'il ne se pose et ne résout pas de problèmes. Tout le monde est d'accord là-dessus. Les difficultés commencent lorsqu'il s'agit de savoir quels problèmes il doit se poser, qui les pose, et comment.*

Ainsi, c'est sur la base d'interrogations sur les pratiques de l'enseignant dans la conduite de sa classe et sur les types de tâches à mettre en place pour faire parvenir ses élèves à une ou plusieurs solutions d'un problème posé en vue de faire émerger de nouveaux savoirs, que Brousseau a fondé la didactique des mathématiques. L'objet de cette science réside donc dans la compréhension des phénomènes d'enseignement des mathématiques. C'est d'ailleurs à partir de ses recherches sur l'échec scolaire[51] spécifique aux mathématiques que Brousseau développera sa théorie des situations didactiques.

Dans *L'échec et le contrat*, à travers une analogie, Brousseau invite à dépasser les seules investigations sociales ou psychologiques centrées exclusivement sur le sujet-élève et à s'intéresser aux rapports de l'élève au savoir : *Mettre en cause l'élève me paraît une attitude analogue (aussi vaine) que celle qui chercherait à expliquer pourquoi l'eau fuit d'un seau percé en analysant les différences de qualité de l'eau qui est sortie et celle qui est restée, comme si les raisons de la fuite résidaient dans les qualités propres à l'eau* (Brousseau, 1980b)

Il considère que les causes de l'échec sont à chercher dans le processus même d'enseignement, *dans le rapport de l'élève au savoir et aux situations didactiques et non dans ses aptitudes ou dans ses caractéristiques permanentes générales* (Brousseau, 1980a, p.128). Sa définition de l'enseignement comme *le projet et l'action sociale de faire approprier par un élève un savoir constitué ou en voie de constitution* le conduit à définir la didactique des mathématiques comme *science des conditions de diffusion et d'appropriation des connaissances mathématiques utiles aux hommes et à leurs institutions* (Brousseau, 1997).

C'est donc avec la double perspective de *praxis* et de *logos* inhérentes à la didactique des mathématiques que nous nous interrogeons sur l'enseignement et l'apprentissage de la résolution des problèmes mathématiques, les deux processus étant intimement liés si l'on s'en réfère à la définition de l'enseignement donné par Conne (1992) :

> *Qu'est-ce que l'enseignement si ce n'est d'abord une interaction des connaissances d'un enseignant avec celles de un (ou plusieurs) élève(s).* (Rouchier, 1991, in Conne, 1992)

[50] Au sens de Chevallard (2003) : Le mot de *praxéologie*, qui désigne dans un même souffle la *praxis*, le savoir-faire, et le *logos*, le savoir, qui l'accompagne est le premier objet de la didactique.

[51] Nous y reviendrons ultérieurement avec le cas de Gaël et le concept de contrat didactique (Brousseau, Warfield, 1999).

Ceci va nous conduire à examiner les principaux travaux qui émanent de la didactique des mathématiques qui reposent sur *l'étude des phénomènes d'enseignement/apprentissage spécifiques aux mathématiques dans le cadre des situations scolaires* (Sarrazy, 1995).

Pour ce faire, nous nous tournerons principalement vers les travaux de Brousseau[52] et de Glaeser[53], principaux fondateurs de ce courant théorique qui s'est développé en France dans les années soixante-dix : la didactique des mathématiques.

3.1. La théorie des situations didactiques selon Brousseau

Il est à noter que la théorie des situations développée par Brousseau dépasse largement le champ de la résolution de problèmes à données numériques. En fait, Brousseau pose les questions du contenu de l'enseignement et des rôles des différents acteurs de cet enseignement.

3.1.1. La notion d'obstacle au sein des processus d'apprentissage

3.1.1.1. Obstacles d'origine épistémologique

Brousseau (1983) reprend la notion d'obstacle d'origine épistémologique développée par Bachelard (1938) pour insister sur la nécessité de considérer, dans l'analyse des processus d'apprentissage en mathématiques, les rôles essentiels joués par les erreurs et pour préciser le rôle déterminant du professeur.

Pour Brousseau (1983), une notion n'est effectivement *apprise* qu'à partir du moment où le sujet la mobilise comme solution d'un problème.

Reflétant les obstacles rencontrés par les élèves lors de l'apprentissage, les erreurs peuvent naître de l'usage de connaissances antérieures qui se révèlent fausses ou inadaptées pour résoudre le problème posé. Par conséquent, l'apprentissage ne s'effectue pas de manière linéaire, mais au contraire par des successions de mises à l'essai de réponses, alternativement adaptées au problème posé puis rejetées totalement ou en partie, avant de s'ériger au rang des *automatismes* et de devenir vulnérable à son tour lors de la résolution d'un nouveau problème.

Les résultats des travaux de Novotná (1997) confirment l'intérêt du recours aux *expériences précédentes* pour transformer les connaissances jusque-là isolées en *connaissances stratégiques* qui permettront de résoudre *un problème nouveau de la même famille.*

Le rôle de l'enseignant est donc essentiel puisque c'est lui qui va placer l'élève en situation de confronter ses connaissances antérieures avec des conceptions nouvelles, qui va choisir les problèmes les mieux adaptés, sachant que les plus intéressants sont ceux qui

[52] Brousseau, et les recherches qui ont découlé de sa théorie des situations didactiques.
[53] Glaeser et les travaux de l'école de Strasbourg.

permettent de franchir de véritables obstacles : *on connaît contre une connaissance antérieure* (Bachelard, 1938, p. 13). Il échoit donc à l'enseignant de mettre en place des situations qui favorisent cette confrontation.

3.1.1.2. Obstacles d'origine didactique

En plus de ces obstacles d'origine épistémologique, Brousseau définit des obstacles d'origine didactique, situés dans le système didactique et dont il distingue notamment ceux d'origine ontogénique qui correspondent aux limites posées par le développement même du sujet, à un âge donné et ceux d'origine didactique qui sont liés aux choix ou aux projets fixés par le système éducatif.

3.1.1.3. Le rôle déterminant de l'enseignant

Il revient à l'enseignant de poser le problème adapté à l'émergence de questionnements chez l'élève, questionnements qui vont générer des *obstacles* en vue de la construction de nouvelles connaissances. Pour ce faire l'enseignant devra trouver une *situation* dans laquelle les informations destinées à être enseignées ne seront pas communiquées, mais au contraire permettront à l'élève de construire une première solution mettant à l'épreuve sa connaissance du moment. Cette situation doit ensuite permettre à l'élève de répéter cette mise à l'épreuve autant de fois qu'il le souhaite, et ce, en utilisant toutes les ressources dont il dispose.

3.1.2. Le concept de situation

Brousseau ne considère pas indépendamment l'enseigné, l'enseignant, le milieu, dans leur relation à un savoir, le milieu étant envisagé comme *tout ce qui agit sur l'élève ou/et ce sur quoi l'élève agit* ; il est *constitué des objets (physiques, culturels, sociaux, humains) avec lesquels le sujet interagit dans une situation* (Brousseau, 2003). Les interactions entre l'élève et le milieu vont faciliter le franchissement des obstacles. De ce fait, Brousseau retient le système entier comme objet d'étude en l'analysant sous la forme des *situations* qui le composent.

Définie communément comme *situation qui sert à enseigner*, une situation désigne, au sens donné par Brousseau (1997), *l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve un individu, les relations qui l'unissent à son milieu, et l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution.* En référence à deux domaines très différents, on peut considérer qu'une avalanche ou qu'un jeu tel que le jeu de la bataille navale constituent des exemples de situations (Briand et Chevalier, 1995, p. 26). Or, deux définitions s'opposent pour définir une situation didactique :

(i) la situation est l'environnement de l'élève mis en œuvre et manipulé par l'enseignant ou l'éducateur qui la considère comme un outil ;

(ii) la situation didactique est l'environnement tout entier de l'élève, l'enseignant et le système éducatif lui-même y compris : il s'agit de la définition donnée par Brousseau qui considère que les modélisations de l'enseignement présentes dans de nombreux ouvrages sont inadaptées et que la représentation sous la forme du *triangle didactique* (Figure 17) ne suffit pas à rendre compte de l'ensemble des relations dans un environnement didactique donné.

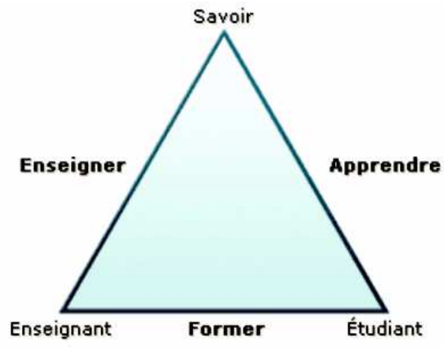


Figure 17 : ***Le triangle didactique selon Houssaye***

Brousseau reproche notamment l'unicité de l'action du professeur, et par voie de conséquence l'absence de prise en compte des relations que le sujet-élève peut nouer avec le *milieu*, le milieu étant envisagé comme *tout ce qui agit sur l'élève ou/et sur quoi l'élève agit* (Brousseau, 2003).

La modélisation représentée en figure 18 intègre le *milieu* créé grâce à l'intervention du professeur, *milieu* dans lequel l'élève va pouvoir agir de manière autonome. Ce milieu peut par exemple être composé des exercices ou des problèmes donnés par le professeur, en vue d'une résolution en autonomie par l'élève.

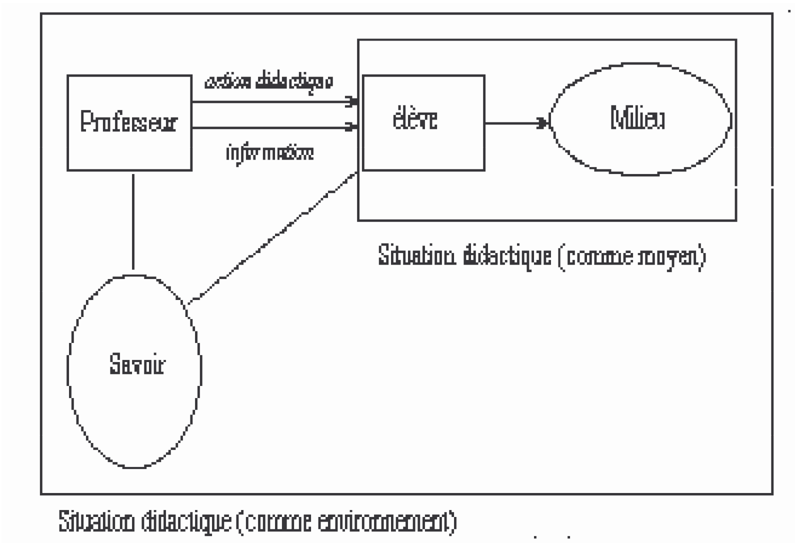


Figure 18 : ***Modélisation des relations dans un environnement didactique selon Brousseau (2003 ; p. 21)***

Dans la modélisation (Figure 18) qu'il propose de la *situation*, Brousseau analyse les relations entre l'élève, le professeur et le milieu étant entendu que *l'enjeu et le sens* de cette situation diffèrent pour le maître et pour l'élève.

Brousseau distingue deux catégories de situations : les *situations didactiques* et les *situations non didactiques*. La combinaison des deux conduit aux *situations a-didactiques*. Ce sont ces trois concepts de situations que nous nous proposons d'examiner maintenant.

3.1.2.1. Le concept de situation didactique

Une situation est considérée comme *didactique* dès lors que le professeur organise un dispositif visant à modifier ou à faire naître des connaissances chez un élève. Cette organisation qui traduit l'intention pour un individu d'enseigner à un autre individu est représentée sur la figure 20 (paragraphe 3.1.2.3.) par les relations (1), (2) et (3). Si l'on reprend l'exemple du jeu de la bataille navale (Briand et Chevalier, 1995), dès lors que ce jeu est proposé avec une intention d'enseignement, on est en présence d'une situation didactique.

3.1.2.2. Le concept de situation non didactique

Pour Brousseau, les *situations non didactiques* se caractérisent par l'absence d'intervention didactique directe. En reprenant l'exemple du jeu de la bataille navale, la situation, indépendamment de l'acquisition de savoirs, est non didactique si ce jeu est utilisé hors milieu scolaire.

3.1.2.3. Le concept de situation a-didactique

Certaines situations didactiques comportent elles-mêmes des situations partiellement libérées d'interventions directes. Elles sont nommées situations a-didactiques par Brousseau. La figure 20 montre les relations (4) qui se jouent entre l'élève et le milieu, laissant de côté le professeur. En fait, l'intention d'enseigner est bien présente chez le professeur. En revanche, elle n'est pas explicitée au regard de l'élève. *Dans la situation didactique, pour le maître comme pour l'élève, elle (la situation a-didactique) est une sorte d'idéal vers lequel il s'agit de converger : l'enseignant doit sans cesse aider l'élève à dépouiller dès que possible la situation de tous ses artifices didactiques pour lui laisser la connaissance personnelle et objective* (Brousseau, 1986b). Au bout du compte, c'est la situation a-didactique finale de référence qui caractérise le savoir. En effet, l'essentiel dans tout apprentissage réside dans le fait que l'élève puisse mobiliser le savoir appris, alors que l'enseignant ne sera plus présent. Par exemple, dans le cas du jeu de la bataille navale (Briand et Chevalier, 1995), la situation construite par le professeur est a-didactique lorsque le professeur propose un support différent (Figure 19), voulant ainsi *optimiser l'apparition de stratégies mettant en œuvre le savoir visé*. Face à ce nouveau support, les élèves qui savent jouer à la bataille navale traditionnelle doivent prendre des décisions, faire des essais, modifier leurs stratégies, sans avoir recours à l'aide du professeur.

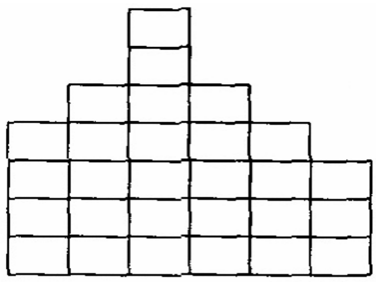


Figure 19 : ***Briand et Chevalier (1995, p. 28)***

La situation a-didactique occupe ainsi un rôle central dans la conception que Brousseau a de l'enseignement. Pour Brousseau (1988), l'objectif essentiel de l'enseignement consiste en effet à ce que la connaissance fonctionne comme *une production libre de l'élève dans ses rapports avec un milieu a-didactique*, ce qui implique *une production personnelle* de l'élève, autrement dit la possibilité de choisir entre plusieurs voies. Il appartient donc au professeur d'organiser le milieu afin de dissimuler suffisamment le savoir et la réponse attendue afin que l'élève puisse effectuer cette démarche personnelle.

Pour préparer l'élève à ce fonctionnement a-didactique, le professeur doit intégrer des situations a-didactiques au sein de situations didactiques. La figure 20 illustre la place de la situation a-didactique dans une situation didactique ainsi que les relations qui se jouent.

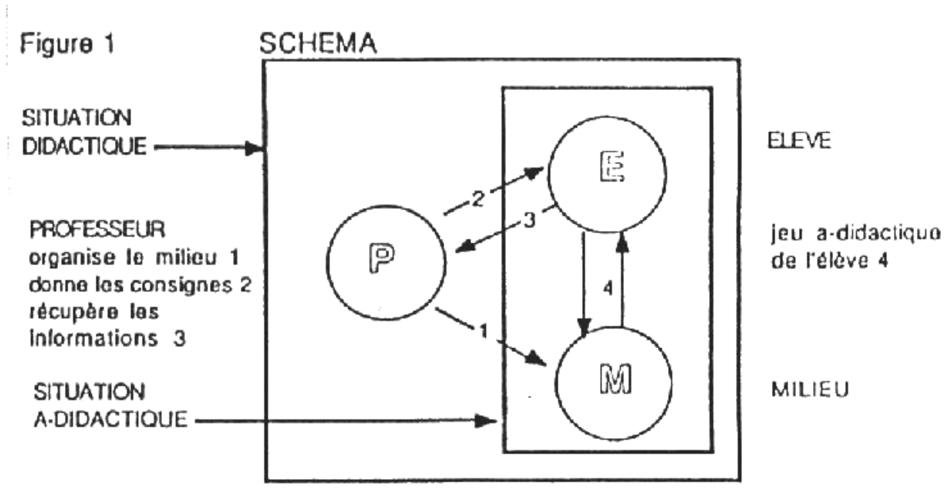


Figure 20 : ***Situation d'enseignement (Groupe recherche IREM Bordeaux, 1988 ; p. 241)***

Après avoir traité du concept de situation, nous allons examiner la définition de la tâche donnée par Brousseau qui s'emploie à distinguer notamment *situation, tâche* et *problème.*

3.1.3. La tâche selon Brousseau

3.1.3.1. Définition de la tâche

Brousseau s'appuie sur la définition suivante centrée sur la fonction de la tâche : *ouvrage qu'on se donne ou qu'on donne à faire*[54]. Employée dans le langage courant, cette définition laisse supposer que l'ouvrage puisse être effectivement exécuté, ce qui exclut le cas où l'exécutant de la tâche ne pourrait pas arriver à résoudre le problème. De là, Brousseau déduit que cette définition qui réduit le sens de la tâche à celui d'algorithme ne peut concerner la résolution de problèmes. Il propose alors sa propre définition : *Une tâche est d'abord une succession définie d'actions connues, réalisables ou du moins envisagées comme telles, soit par celui qui doit les accomplir, soit par celui qui demande de les accomplir*. Par conséquent,

[54] Définition extraite du Littré.

selon Brousseau, d'une part, une tâche est un projet, au sens de ce que quelqu'un *doit faire* (devait faire, a dû faire, aurait dû faire, etc.) ; elle ne peut être confondue de manière systématique avec ce que le sujet accomplit effectivement, étant entendu que certains projets ne se réalisent pas. D'autre part, une tâche est une *action concevable à l'avance, formulable et communicable* (Brousseau, 2004).

3.1.3.2 Distinction tâche / situation

Brousseau déplore les confusions générées par la définition du terme *tâche* en psychologie *: Une situation dans laquelle une personne a un problème à résoudre ou un but à atteindre*[55], et par l'usage d'expressions de type *analyse de la tâche*. Il considère en effet que cette définition de la tâche confond les conditions de l'action du sujet (la situation) avec l'action elle-même. Pour illustrer la distinction entre situation et tâche, il donne l'exemple d'un observateur qui place un rat dans un labyrinthe : selon Brousseau, l'observateur place le rat dans une situation pouvant être décrite et analysée, mais il ne lui délègue aucune tâche (Brousseau in Merri, 2007, p. 57). Les défaillances de consignes, l'inexistence ou l'insuffisance du projet, *toutes les façons de ne pas réaliser la tâche, tous les comportements ou les conduites* qui peuvent se produire par l'effet des conditions dans lesquelles la tâche est censée se réaliser sont des comportements et des conditions qui déterminent des situations, mais ce ne sont pas des tâches.

3.1.3.3. Distinction tâche / problème

Comme nous l'avons déjà mentionné ci-dessus, Brousseau considère que la tâche en tant que *succession définie d'actions*, ne peut être identifiée à un problème, étant entendu que la résolution d'un problème ne saurait, de par sa définition, relever de l'utilisation d'un algorithme ou d'une méthode connue. Ainsi, un problème ne peut être considéré comme une tâche pour le sujet qui doit le résoudre.

Le concepteur du problème, lui, en connaît la solution ; dès lors qu'il produit cette solution, il peut considérer qu'il effectue une tâche. Il peut aussi admettre que la production de cette solution par un individu constitue une tâche, ce qui, comme nous venons de le dire ci-dessus, n'en est pas une du point de vue de l'individu.

3.1.4. Les concepts de contrat didactique et de dévolution

S'étonnant du contraste observé chez certains élèves entre leurs échecs en mathématiques et leurs réussites dans d'autres disciplines, Brousseau introduit en 1978 le concept de *contrat didactique* pour expliquer en partie l'échec électif en mathématiques[56]. Ce

[55] Grand dictionnaire de la psychologie, Larousse, p.775 (1996)
[56] Ce sont des enfants qui ont des déficits d'acquisition, des difficultés d'apprentissage ou un manque de goût prononcés dans le domaine des mathématiques mais qui réussissent convenablement dans les autres disciplines (Brousseau, 1980a).

concept a d'ailleurs évolué chez Brousseau au fil des années, amenant Sarrazy (1995) à distinguer deux grandes périodes dans la définition du *contrat didactique*.

3.1.4.1. Concept de contrat didactique : première définition

Au cours de la première période qui coïncide avec la création de la didactique des mathématiques, Brousseau définit le contrat didactique comme l'ensemble des obligations réciproques et des *sanctions* que chaque partenaire de la situation didactique :

> *- impose ou croit imposer, explicitement ou implicitement, aux autres,*
> *- et celles qu'on lui impose ou qu'il croit qu'on lui impose* (Brousseau, 1978),
> à propos de la connaissance en cause.

Le *contrat didactique* est le résultat d'une *négociation* souvent implicite des modalités d'établissement des rapports entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif. On peut considérer que les obligations du professeur vis-à-vis de la société qui délègue sa légitimité didactique sont aussi une partie déterminante du *contrat didactique*. En effet, dès lors qu'il souhaite placer ses élèves en situation de *faire* des mathématiques, c'est-à-dire en situation de recherche et de résolution de problèmes spécifiques, générant de nouvelles questions de la part des élèves, le professeur se doit d'effectuer la dévolution adéquate du problème. Deux alternatives se présentent : (i) soit l'élève *entre dans le jeu*, réussit et ainsi l'apprentissage s'opère, (ii) soit l'élève n'adhère pas au problème posé, et dans ce cas, le professeur, par son statut même d'enseignant, se doit de lui fournir des aides. C'est alors qu'une relation essentiellement implicite va intervenir entre le professeur et l'élève à propos de la connaissance mathématique visée. C'est cette relation que Brousseau nomme *contrat didactique ;* le professeur va essayer de faire connaître à l'élève ce qu'il veut qu'il fasse et l'élève va essayer d'entrer dans le jeu didactique du professeur.

Selon Brousseau (1980a), le *contrat didactique* se présente donc comme la trace des exigences habituelles du maître dans une situation particulière. En décodant les habitudes spécifiques du maître c'est-à-dire *ce que le maître reproduit, consciemment ou non, de façon répétitive dans sa pratique d'enseignement*, l'élève va pouvoir déceler les attentes de l'enseignant. Dès lors que l'on considère qu'un apprentissage s'effectue en réponse à un problème posé, on peut déceler ici même un paradoxe que Brousseau (1980a) pointe d'ailleurs en se demandant si *certains contrats didactiques n'empêcheraient pas certains enfants d'entrer dans le processus d'apprentissage*.

Sarrazy (2002) fait état de publications qui usent parfois de manière ambiguë de l'emploi de l'expression *contrat didactique*. En effet, dès lors qu'il s'agit d'un contrat tacite entre l'enseignant et l'élève, comment peut-on parler *d'erreurs liées aux règles du contrat didactique* ou bien encore suggérer à des enseignants de *mettre en place le contrat* et *d'amener les élèves à prendre conscience que, dans les activités de résolution de problèmes, les attentes sont spécifiques* ?

3.1.4.2. Concept de contrat didactique : seconde définition

La seconde période, qui débute vers 1984, marque une certaine distanciation avec la définition précédente du contrat didactique, puisqu'il n'est plus question de *bons, ou de mauvais (…) contrats*. Le contrat didactique constitue désormais *un concept au service de la didactique fondamentale pour analyser les phénomènes de négociation, d'émergence, de dysfonctionnement (…) du sens dans les situations didactiques* (Sarrazy, 1995).

Dans sa thèse, Brousseau (1986a) explicite ce concept grâce à l'analyse du *cas de Gaël*, un élève de huit ans et demi, redoublant son CE1, auquel un intervenant demande de résoudre successivement des problèmes dans le cadre de huit interventions didactiques cliniques échelonnées entre 1976 et 1983.

Dès la première séance, l'intervenant constate que l'élève Gaël répond à ses questions en évoquant l'autorité pédagogique de son enseignante. Par exemple lors de la reprise d'un problème (Figure 21) qu'il n'était pas parvenu à résoudre en classe la semaine précédente, Gaël, après avoir réfléchi, répond à l'intervenant : *Je vais faire comme j'ai appris avec la maîtresse*. Il pose alors en colonne l'opération 57 + 24 et trouve 81. Notons qu'il avait adopté strictement la même démarche de résolution en classe la semaine précédente. Autrement dit, cet élève est complètement assujetti aux discours et aux souhaits de son enseignante.

Dans un parking, il y a 57 voitures. 24 de ces voitures sont rouges.
Trouver le nombre de voitures du parking qui ne sont pas rouges.

Figure 21 : ***Problème proposé à Gaël lors de la première séance (Brousseau, Warfield, 1999, p.5)***

Répondant ensuite à la consigne de l'intervenant, Gaël dessine les voitures. Mais après plusieurs sollicitations de recours au dessin pour fournir la réponse au problème, Gaël ne pense qu'à recourir à une opération et pose l'addition 24 + 33 = 57. Cependant, il dit ne pas pouvoir répondre à la question de l'énoncé. Pour Gaël, habitué à effectuer et à poser des calculs lors de la résolution de problèmes, seul le résultat d'une opération peut fournir la réponse au problème posé. L'étude du cas de Gaël fournit à Brousseau maints exemples de ce type d'obstacles dans la résolution de problèmes. Souvent, en plus des consignes, l'intervenant doit avoir recours à l'utilisation de matériel, à la mise en place de jeux. Par exemple, dans le cas du problème où, étant donnés un nombre total de jetons (des ronds et des triangles) et un nombre de triangles, Gaël doit trouver le nombre de ronds, l'intervenant propose un jeu prenant la forme de devinettes, organise des tirages dans un sac, déclare : *Il y a un truc… mais il faut le trouver.* Tout le travail de l'intervenant a alors consisté à amener Gaël à rompre avec sa conception d'une situation didactique et à lui faire accepter de s'engager, lui, élève Gaël, dans le problème qui lui était donné.

3.1.4.3. Dévolution et contrat

Brousseau (1988b, p. 89) nomme *dévolution* ce moyen didactique qui consiste *non seulement à présenter à l'élève le jeu auquel le maître veut qu'il s'adonne (consignes, règles,* *but, état final…) mais aussi à faire en sorte que l'élève se sente responsable, au sens de la connaissance et non pas de la culpabilité, du résultat qu'il doit rechercher.* Il a même proposé une ingénierie de dévolution qu'il exemplifie à travers l'introduction de la soustraction auprès d'élèves de CE1. Il distingue cinq étapes : la dévolution du problème ; l'anticipation de la solution ; la déclaration et sa mise à l'épreuve ; la dévolution et l'institutionnalisation d'une situation a-didactique et enfin l'anticipation de la preuve.

Brousseau pointe d'ailleurs la nécessité pour le professeur de maintenir à tout prix la relation didactique. Le professeur doit en effet satisfaire aux exigences de son contrat d'enseignement tout en gérant le paradoxe inhérent à toute situation d'enseignement, à savoir que *si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir* (Brousseau, 1986a, p.316). *Quant à l'élève, il doit accepter de s'engager dans le problème posé alors même qu'il ne dispose pas de la connaissance nécessaire à sa résolution, celle-ci étant précisément l'enjeu de la situation didactique fixée par l'enseignant* (Sarrazy, 1995).

Notons cependant que l'usage du substantif *contrat* est source d'ambiguïté, si on s'en réfère au sens usuel de *convention par laquelle une ou plusieurs personnes s'obligent, envers une ou plusieurs autres, à donner, à faire ou à ne pas faire quelque chose* (Code Civil, Art. 1101).

Par extension, le terme de *contrat* s'applique à *l'acte qui enregistre cette convention* (Robert, 1984, T. 1/7, p. 933).

Cependant, du point de vue étymologique, le nom *contractus* à l'origine de *contrat* résulte de la construction du participe passé de *contrahere* et de *trahere* qui signifie littéralement *tirer ensemble* d'où *faire venir à soi (une maladie, un mariage, des dettes)* et aussi *réduire, serrer* et *avoir des liens serrés avec quelqu'un* (Rey, 1995, p. 187).

En ce qui concerne le *contrat didactique*, l'emploi du terme *contrat* peut être certes jugé ambigu dans le cas du *contrat didactique*. Cependant, on retrouve bien cette idée d'attirance mutuelle, telle qu'on peut la percevoir dans ces propos : *Le savoir ainsi transposé focalise les relations entre les élèves et l'enseignant au travers d'un autre processus, celui de la recherche d'un contrat* (Brun, in Conne, 1992).

3.1.4.4. Effets du contrat didactique

Plusieurs effets du contrat didactique ont été mis en évidence parmi lesquels (i) et (ii) l'*effet Topaze* et l'*effet Jourdain*, dénommés ainsi par Brousseau (1997) en référence à des scènes de littérature française, (iii) *l'âge du capitaine* mis en évidence par une équipe de recherche grenobloise (repris par Baruk, 1985).

3.1.4.4.1. L'effet Topaze

Dès lors qu'en utilisant des codages didactiques de plus en plus visibles, l'enseignant prend à sa charge les connaissances qu'il visait initialement pour l'élève, on est en présence de *l'effet Topaze*. Cet effet tire son nom d'une des célèbres scènes de *Topaze* de Marcel Pagnol, scène dans laquelle l'instituteur Topaze va suggérer, lors d'une dictée, avec de plus en plus d'insistance, la marque orthographique du pluriel à un élève en difficulté.

TOPAZE ***(il dicte en se promenant).***

« Des... moutons... Des moutons... étaient en sûreté... dans un parc; dans un parc ***(il se penche sur l'épaule de l'élève et reprend).*** **Des moutons... moutonss...** ***(l'élève le regarde, ahuri).*** **Voyons, mon enfant, faites un effort. Je dis moutonsse. Etaient** ***(il reprend avec finesse) étai-eunnt.*** **C'est-à-dire qu'il n'y avait pas qu'un moutonne. Il y avait plusieurs moutonsse. »**

Figure 22 : ***Extrait de Topaze (Marcel Pagnol, 1928)***

En fournissant des indices de plus en plus précis, l'instituteur Topaze modifie le problème posé au départ et ce, jusqu'à lever complètement l'obstacle pour l'élève en lui fournissant la forme orthographique de la terminaison.

À trop vouloir refuser le constat d'échec de l'élève, l'instituteur va complètement priver l'élève de cette relation au questionnement et à la résolution d'un problème qu'il avait pourtant fixée en proposant cette dictée. L'élève ne cherche plus à découvrir le problème qu'on lui a proposé ; il cherche à découvrir pourquoi l'instituteur réagit ainsi.

En résumé, avec la production par l'enseignant de questions de plus en plus faciles qui guident l'élève jusqu'à la réponse souhaitée par l'enseignant, *l'effet Topaze* annihile l'accès aux connaissances visées.

3.1.4.4.2. L'effet Jourdain

C'est une variante de l'effet Topaze. Brousseau (1989) le définit ainsi : *Pour éviter un débat de connaissance avec l'élève, et éventuellement un constat d'échec, le professeur accepte de reconnaître comme l'indice d'un savoir ou d'une démarche authentiques, une production ou un comportement de l'élève qui ne sont en fait que des réponses ayant des causes banales.* Il nomme cet effet en se référant à la scène du Bourgeois Gentilhomme dans laquelle le Maître de Philosophie explique à M. Jourdain ce que sont la prose et les voyelles (pour les extraits complets voir en annexe 6)

> *MONSIEUR JOURDAIN : Je vous en prie. Au reste, il faut que je vous fasse une confidence. Je suis amoureux d'une personne de grande qualité, et je souhaiterais que vous m'aidassiez à lui écrire quelque chose dans un petit billet que je veux laisser tomber à ses pieds.*
>
> *…*
>
> *MAÎTRE DE PHILOSOPHIE : Par la raison, Monsieur, qu'il n'y a pour s'exprimer que la prose, ou les vers.*
>
> *MONSIEUR JOURDAIN : Il n'y a que la prose ou les vers ?*
>
> *MAÎTRE DE PHILOSOPHIE : Non, Monsieur: tout ce qui n'est point prose est vers; et tout ce qui n'est point vers est prose.*
>
> *…*
>
> *MONSIEUR JOURDAIN : Quoi ? quand je dis : « Nicole, apportez-moi mes pantoufles, et me donnez mon bonnet de nuit », c'est de la prose ?*
>
> *MAÎTRE DE PHILOSOPHIE : Oui, Monsieur.*
>
> *MONSIEUR JOURDAIN : Par ma foi ! Il y a plus de quarante ans que je dis de la prose sans que j'en susse rien, et je vous suis le plus obligé du monde de m'avoir appris cela. Je voudrais donc lui mettre dans un billet: Belle Marquise, vos beaux yeux me font mourir d'amour; mais je voudrais que cela fût mis d'une manière galante, que cela fût tourné gentiment* (Le Bourgeois, Gentilhomme – Molière, 1670).

Le professeur limite la connaissance à un exemple fourni par les préoccupations de l'élève Jourdain. *Le professeur, pour éviter le débat de connaissance avec l'élève et éventuellement le constat d'échec, admet de reconnaître l'indice d'une connaissance savante dans les comportements ou dans les réponses de l'élève, bien qu'elles soient en fait motivées par des causes et des significations banales* (Brousseau, 1997).

Briand et Chevalier (1995, p. 75) illustrent cet *effet Jourdain* par un exemple emprunté à l'enseignement des mathématiques et à l'introduction de la division auprès d'élèves de 9-10 ans.

Après avoir proposé l'exercice suivant : *Soit 20 bonbons à répartir équitablement entre 5 enfants. Combien de bonbons chaque enfant va-t-il avoir ?*, l'enseignant annonce aux élèves qui ont réparti des bonbons, peut-être un par un entre des individus, qu'ils viennent de faire la division de 20 par 5 et il leur indique alors le procédé de calcul. Il termine en disant aux élèves qu'ils ont découvert la division. Briand et Chevalier suggèrent que l'enseignant aurait pu proposer une activité préparatoire utilisant d'autres nombres, tels que 1249 bonbons et 7 enfants, ce qui aurait conduit à trouver un procédé plus économique que celui de la distribution des bonbons un par un.

Avec cet effet, tant qu'avec l'effet Topaze, l'enseignant rompt la relation de l'élève avec l'apprentissage. C'est l'enseignant qui prend en charge le problème et alors, comme l'indique Brousseau (2002), l'élève semble avoir appris, mais n'a pas construit de connaissance.

3.1.4.4.3. *L'âge du capitaine*

Cet effet tire son nom d'un pseudo-problème[57] proposé par des chercheurs grenoblois (Baruk, 1985) à des élèves de CE1 : *Sur un navire, on embarque 26 moutons et 18 chèvres. Quel est l'âge du capitaine ?*. Interpellés par les chercheurs qui leur demandent si ce problème ne leur a pas paru bizarre, les élèves répondent que *la question était bête* ; cependant, ils justifient leur réponse (*44 ans*) par le fait que leur enseignante leur avait demandé de répondre.

Le même type d'effet a été constaté chez des professeurs lors d'une expérimentation à Lyon (Chevallard, 1988), traduisant bien le fait que le contrat didactique concerne tous les publics et ne saurait constituer le révélateur de lacunes émanant de l'enseignement dispensé ou des acquisitions des élèves.

3.2. Les travaux en didactique des mathématiques selon Glaeser et l'école de Strasbourg

Tandis que Brousseau conduisait ses travaux dans le Sud-Ouest de la France, Glaeser, mathématicien et universitaire à Strasbourg pouvait être lui aussi considéré comme pionnier

[57] On entendra par pseudo-problème un problème incomplet ou sans solution.

de la didactique des mathématiques, comme en témoignent les textes rassemblés par Bloch et Régnier (Glaeser, 1999).

3.2.1. Glaeser : mathématicien et didacticien des mathématiques

Mathématicien, professeur agrégé de mathématiques, Glaeser choisit de s'engager au début des années soixante-dix dans une réflexion sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. En effet, tandis que le législateur a accompagné la réforme des mathématiques modernes d'un travail substantiel de réécriture des programmes d'enseignement, plusieurs mathématiciens parmi lesquels Polya, Freudenthal et Glaeser reprochent l'absence de réflexion sur les difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves.

L'engagement de Glaeser dans ce mouvement de réflexion se traduit dès 1971 par la publication de l'ouvrage *Mathématiques pour l'élève-professeur,* suivie dès 1973 de celle du *Livre du problème,* composé de six volumes dont Glaeser a rédigé lui-même le premier : *Pédagogie de l'exercice et du problème* (1973).

Des témoignages extraits de l'ouvrage réalisé sous la conduite de Blochs et Régnier (Glaeser, 1999) et rassemblant de nombreux écrits de leur professeur et ami Glaeser ainsi que des contributions de Brousseau, Pluvinage et Vergnaud nous permettent de présenter ici la réflexion conduite par le didacticien Glaeser sur l'enseignement des mathématiques. Nous examinerons également les définitions que donne Glaeser de la didactique et du problème.

3.2.2. La didactique expérimentale des mathématiques selon Glaeser

Nous examinerons successivement selon Glaeser la définition de la didactique expérimentale des mathématiques, la finalité de l'enseignement des mathématiques, la place de l'heuristique et enfin la distinction entre problème et exercice.

3.2.2.1. De la didactique des mathématiques à la didactique expérimentale des mathématiques

Pour Glaeser, la didactique d'une discipline étudie les mécanismes d'appropriation des habitudes intellectuelles et des savoirs par des étudiants[58] de tous niveaux, au sein de l'institution scolaire ou à l'extérieur et cette étude doit s'appuyer obligatoirement sur l'observation sur le terrain. Ce postulat est tellement prégnant chez Glaeser qu'il dénonce à plusieurs reprises la *pédagogie des ministères* qui selon lui se borne à dicter aux enseignants, depuis une administration centrale dans un bureau, une conduite à tenir dans les classes en présence des élèves. Notons cependant que de nos jours ce point de vue mérite d'être largement nuancé : les documents d'application et d'accompagnement des programmes sont émaillés de situations issues de pratiques de terrain. Les rapports de l'Inspection Générale de l'Éducation Nationale s'appuient, comme en atteste l'extrait ci-après (IGEN, 2006), sur des

[58] Glaeser désigne par *étudiant* toute personne qui étudie, quel que soit son âge.

visites de classes au cours desquelles les inspecteurs généraux observent puis analysent des séquences de mathématiques avec les enseignants concernés.

> *L'étude de l'inspection générale a pour objectif de cerner la réalité de l'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire et d'apprécier la mise en place des programmes dans ce domaine. Elle s'est fondée essentiellement sur des observations concrètes dans quelque cent vingt classes du cycle des approfondissements (cycle 3) réparties sur l'ensemble du territoire, des entretiens avec des maîtres exerçant à ce niveau et rencontrés sur leur lieu d'exercice, l'examen de travaux d'élèves des classes visitées. Sans avoir constitué un échantillon représentatif des classes françaises, on peut néanmoins affirmer que l'étude donne une vision de l'enseignement proche de la réalité dans sa diversité : classes rurales, rurbaines, urbaines ; classes à un seul cours ou à plusieurs ; classes tenues par des maîtres jeunes ou chevronnés. L'académie de Reims et le département de l'Essonne ont donné lieu à des observations plus denses puisque respectivement quarante et trente visites y ont été effectuées* (IGEN, 2006).

C'est en militant pour une didactique des mathématiques basée sur une observation de terrain que Glaeser fonde *la didactique expérimentale des mathématiques* en précisant toutefois que cette expression doit être considérée au sens large dans la mesure où les expériences ne sont pas conduites dans un laboratoire, mais au sein d'une classe. Cette réserve atteste entre autres de la rigueur intellectuelle dont a toujours fait preuve Glaeser qui, d'ailleurs, conseillait à ses étudiants pour leur éviter toute dérive, l'examen approfondi de *l'Introduction à la Médecine Expérimentale* (Bernard, 1865). Pluvinage (in Glaeser, 1999, p. 13) témoigne de la rigueur de son maître, rigueur que l'on retrouve d'ailleurs dans le souci de Glaeser de faire de ces recherches en didactique, quand bien même elles ne se dérouleraient pas en laboratoire, de véritables recherches scientifiques. Par exemple, Glaeser affiche (i) l'importance de déterminer des variables didactiques dans toute recherche relevant de la didactique expérimentale et (ii) la nécessité de comparer des situations presque identiques ne variant que sur quelques paramètres. S'appuyant sur les travaux de Fisher (1979) et de Esfahani (in Glaeser, 1999, p. 101), il montre l'intérêt qu'il porte à la nécessité de déterminer les différents seuils qui balisent un apprentissage de longue durée.

Comme pour toute recherche scientifique, Glaeser a développé et mis en application l'idée de communication des travaux réalisés. À travers l'extension prise par la bibliothèque de l'IREM de Strasbourg au cours des années où il y a travaillé, à travers sa ténacité pour obtenir la création d'un troisième cycle universitaire en didactique des mathématiques, on peut mesurer le souci de Glaeser de diffuser le savoir et son incitation à prendre appui sur des réflexions déjà entreprises, restant ainsi fidèle au titre donné à la préface de son ouvrage *Mathématiques pour l'élève-professeur*: *Pour une pédagogie de la communication et de l'action* (Glaeser, 1971).

C'est d'ailleurs en suivant cette logique de transmission de travaux et de développement d'une pédagogie de l'action que Régnier (1980, 1983), élève de Glaeser, a conduit des recherches s'intéressant respectivement à l'élaboration d'un livret autocorrectif et à l'usage d'un test autocorrectif en trigonométrie.

3.2.2.2. Enseignement mathématique et goût mathématique

Pour Glaeser, *l'enseignement mathématique* revêt une finalité culturelle, permettant à chaque élève de se forger un esprit critique, une imagination créative, une rigueur de pensée, d'acquérir puis d'entretenir une autonomie et une curiosité intellectuelles. Il vise ainsi principalement la formation de concepts et l'acquisition de connaissances. Brousseau partage d'ailleurs ce point de vue.

Ainsi, tandis que Brousseau centre sa théorie sur les situations et les stratégies de l'enseignant dans la conduite de la classe, Glaeser préfère ne pas restreindre sa réflexion aux situations scolaires. Il importe pour lui d'accorder une place plus grande aux objectifs éducatifs et de prendre en compte les apprentissages *autour de l'école*. Il illustre son point de vue par son vécu personnel et ses premières découvertes des notions de trigonométrie dès l'âge de 8-9 ans lors de la lecture du roman de Jules Verne *Aventures de 3 russes et de 3 anglais*[59] dans lequel les héros devaient mesurer un arc de méridien terrestre lors d'une expédition scientifique en Afrique australe. La lecture de la bande dessinée *L'idée fixe du savant Cosinus*[60] lui permet peu de temps après de s'imprégner de quelques expressions empruntées à la trigonométrie. Ce n'est que vers 14-16 ans que Glaeser reçoit officiellement une initiation à cette science. Ainsi, d'après lui, il est difficile, voire illusoire de dissocier les savoirs scolaires et les savoirs acquis *en dehors de l'école*. Sur ce point, il dit rejoindre Piaget pour lequel l'apprentissage s'effectue tout au long de la vie et pas nécessairement dans un contexte scolaire.

Ainsi Glaeser préfère-t-il parler *d'éducation mathématique* avec pour objectif premier de donner *le goût mathématique*.

3.2.3. Place de l'heuristique selon Glaeser

Glaeser place au cœur de la didactique des mathématiques l'heuristique[61] qu'il définit comme *étude des phénomènes de compréhension*. Il distingue cependant deux types d'heuristique :

(i) L'une dite *normative*, qui peut être illustrée par les travaux de Polya. L'heuristique normative a pour objet de donner des conseils aux élèves en vue de les aider à résoudre des problèmes.

(ii) L'autre dite *descriptive* que Glaeser place au cœur de la didactique expérimentale et qu'il décrit comme étant *l'étude des démarches spontanées efficaces ou non conduites par une personne confrontée à un problème*. De par la présence de ce tâtonnement inhérent à cette définition, Glaeser oppose l'heuristique descriptive à l'algorithmique, la première laissant la place à l'imprévu, à la création, au doute et caractérisant la recherche de solution à un problème, la seconde correspondant à l'exécution de tâches algorithmiques.

---

[59] *Aventures de 3 russes et de 3 anglais* : Verne, J. (1872) dans la collection *Les voyages extraordinaires*, Hetzel.
[60] *L'idée fixe du savant Cosinus* : Christophe (1899) – bande dessinée parue à la librairie Armand Colin, Paris.
[61] Heuristique : *art de trouver* (Rey, 1995, p. 960)

C'est en puisant dans l'histoire de l'enseignement des mathématiques que Glaeser aborde la question de la place de l'heuristique. En prenant exemple d'enseignement novateur pour l'époque[62], celui donné par Clairault à son élève la Marquise du Châtelet, Glaeser (1999, p. 54) montre à quel point cet enseignement ne peut être qu'en partie qualifié d'heuristique ; en effet, Clairaut qui base son enseignement des mathématiques sur la résolution de problèmes, ne laisse pas son élève trop longtemps démunie de la solution qu'il finit par lui donner sous une forme magistrale réduisant ainsi à néant la part d'heuristique de l'élève. Glaeser pointe là tout le paradoxe entre le projet initial qui consiste à donner des problèmes à résoudre et la mise en situation qui n'offre pas la possibilité aux individus de les résoudre.

Néanmoins, Glaeser relève une dimension heuristique dans cet enseignement qui se voulait reposer sur la résolution de problèmes. En effet, Clairaut n'expose pas LA solution du problème mais envisage plusieurs cheminements de pensée possibles. Il désigne par *enseignement à la Clairaut* un enseignement qui n'a d'heuristique que celle que l'enseignant fait sienne, opposant ainsi son attitude de recherche active à la passivité de ses élèves. Ce procédé préconisé par l'Inspecteur Général Blutel au début du 19ème siècle et nommé de manière inappropriée *méthode de redécouverte* a été longuement en vigueur dans les classes. Ce que revendique Glaeser, ce n'est en aucun cas un enseignement de cette forme. Il souhaite que des problèmes soient proposés aux élèves et que ce soient les élèves qui les résolvent.

Le rôle de l'enseignant est, selon Glaeser, un rôle d'éveilleur, de provocateur qui consiste à placer les élèves dans des situations *d'inconfort intellectuel* les conduisant à des questionnements. Nous rapprochons ce point de vue de celui développé par Legrand (1960, p. 127) à propos de la *pédagogie de l'étonnement* :

> *C'est la culture de l'étonnement chez l'enfant qui pourra seule entretenir et enrichir une ouverture intellectuelle indispensable à tous progrès ultérieurs* (Legrand, 1960, p. 127).

3.2.4. Problème et exercice selon Glaeser

Glaeser, en tant que mathématicien universitaire, place le *problème* en tête des activités des mathématiciens ; et en tant que didacticien, il considère que le professeur doit *développer chez l'élève l'aptitude à poser et résoudre des problèmes*. (Glaeser cité par Noël, 1999). Pour Glaeser (1971), un problème est une question dont on ne connaît pas la réponse, l'inverse n'étant pas vrai : toute question n'ayant pas de réponse n'est pas toujours un problème. La réponse ne doit pas être triviale ; et pour qu'il y ait problème, la démarche de résolution ne doit pas apparaître dès la lecture de l'énoncé. Ainsi, un problème pour un élève n'est pas nécessairement un problème pour un autre élève. De plus, l'élève doit être motivé par la résolution. Un problème peut en effet se révéler difficile à résoudre et nécessiter un engagement sur une période relativement longue.

Glaeser distingue la notion de *problème* de celle d'*exercice* qui, elle, se réduit à l'exécution de tâches algorithmiques et ne conduit pas, comme le problème, à un tâtonnement, à l'invention, à la recherche de pistes permettant d'accéder à une solution. Dans l'*exercice*, on

[62] Première moitié du 18ème siècle.

ne retrouve pas cette dimension heuristique que Glaeser place au cœur même de la définition du problème. Cette distinction revêt une telle importance chez Glaeser qu'elle devient l'objet du premier fascicule du *Livre du problème* (Glaeser, 1973) intitulé *Pédagogie de l'exercice et du problème*. Il s'agit là *d'une typologie des exercices selon les objectifs pédagogiques en vue desquels ils sont donnés aux élèves* (Pluvinage, in Glaeser, 1999). À travers cet ouvrage qu'il considère comme un outil de formation pour les jeunes enseignants, il exprime son souhait et sa volonté (i) de susciter une réflexion sur la finalité des mathématiques, (ii) de lutter contre des habitudes de travail qui ont parfois transformé des innovations en stéréotypes. On peut voir là une allusion au décalage entre l'innovation de Clairaut qui avait consisté au début du 18ème siècle à introduire la résolution de problèmes dans son enseignement et la généralisation de cette soi-disant *méthode de redécouverte* voulue par Blutel un siècle plus tard.

À partir d'un ensemble d'énoncés qu'il présente comme des exemples, Glaeser invite les enseignants à adopter un regard critique quant aux situations qu'ils vont soumettre à leurs élèves et ainsi à réfléchir, voire à modifier leur enseignement des mathématiques. Il propose une classification des énoncés en sept catégories dont chacune dit-il *relève d'une pédagogie différente* (Glaeser, 1973, p. 10).

Nous présentons ici le tableau considéré comme fondamental par son auteur (Tableau 1), et qualifié, vingt-cinq ans plus tard, *d'excellente initiative* par Brousseau (in Glaeser, 1999) qui en loue le mode pragmatique.

Sigle	Catégories d'énoncés	Comportement de l'élève	Comportement du professeur
EE	Exercices d'exposition	Apprendre Acquérir des connaissances	Exposer incomplètement Transmettre des connaissances
P	Problèmes	Chercher Trouver	Susciter la curiosité Encourager la persévérance dans la recherche
ED	Exercices didactiques	S'entraîner Acquérir des mécanismes	Fixer des connaissances, des aptitudes, des habitudes
ETT	Exécutions de tâches techniques	Prendre ses responsabilités Mener un travail à bonne fin en prenant l'engagement de ne pas laisser subsister d'erreurs	Inciter à la minutie, au soin. Exiger un travail bien fait
A	Exemples d'illustration Exercices d'application	Transférer des connaissances théoriques dans un contexte pratique	Rattacher l'abstrait à d'autres centres d'intérêt
M	Manipulations	Observer Expérimenter Bricoler	Motiver les résultats d'une étude abstraite ultérieure
T	Tests. Sujets de compositions, d'examens, de concours	Vérifier la valeur de ses connaissances Faire valoir ses aptitudes	Contrôler les résultats de l'enseignement sur chaque élève

Tableau 1 : ***Classification des énoncés (Glaeser, 1973, p. 10)***

3.3. La théorie des champs conceptuels dans sa dimension didactique selon Vergnaud

La théorie des champs conceptuels introduite et développée par Vergnaud (1981) s'inscrit dans le champ de la didactique des mathématiques dans une perspective cognitiviste. Cette double posture du chercheur, à la fois psychologue cognitiviste et didacticien nous intéresse de par sa relation avec nos deux domaines d'étude que constituent l'apprentissage et l'enseignement. Vergnaud place le couple situation-schème au cœur de sa théorie. Convaincu de la primauté d'une approche pragmatique, il considère que l'activité et la rencontre avec des situations sont premières (Vergnaud, 1990).

3.3.1. Les situations selon Vergnaud

Le terme de *situation* employé par Vergnaud (1983b, 1985, 1990) renvoie chez ce didacticien et psychologue à un sens différent de celui employé par Brousseau (1986b) dans la théorie des situations didactiques. L'un et l'autre abordent le concept de situation dans un sens qui leur est propre. Tandis que Brousseau le réserve aux situations didactiques, Vergnaud l'emploie dans le sens habituellement donné par le psychologue cognitiviste qui considère que *les processus cognitifs et les réponses du sujet sont fonction des situations auxquelles ils sont confrontés* (Vergnaud, 1990, p. 150).

Vergnaud indique clairement le décalage entre la définition qu'il donne de la *situation* et celle que Brousseau donne du concept de *situation didactique*. Chez Vergnaud, l'acception de la situation revêt délibérément une dimension psychologique et s'apparente davantage au concept de *tâche* : *Le concept de situation n'a pas ici le sens de situation didactique mais plutôt celui de tâche, l'idée étant que toute situation complexe peut être analysée comme une combinaison de tâches*.

Vergnaud emploie indifféremment les termes *situations* (1990, p. 156) et *problèmes* (1990, p. 153), limitant encore le sens du terme *situation*, ce que Brousseau (2007, in Merri) ne manque pas de remarquer.

Vergnaud enrichit sa définition du concept de situation en y introduisant deux caractéristiques :

> *1) celle de variété : il existe une grande variété de situations dans un champ conceptuel donné, et les variables de situation sont un moyen de générer de manière systématique l'ensemble des classes possibles.*
> *2) celle d'histoire : les connaissances des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées et maîtrisées progressivement, notamment par les premières situations susceptibles de donner du sens aux concepts et aux procédures qu'on veut leur enseigner* (Vergnaud, 1990, p. 150).

Il juge nécessaire que l'élève soit confronté à une diversité de situations sur une durée suffisamment longue.

Selon lui (Vergnaud, 1981), il est essentiel de s'interroger sur les choix à effectuer pour découper à bon escient les contenus de connaissances mathématiques ; l'étude du développement cognitif de l'enfant exige ainsi que l'on considère un large ensemble de situations, de concepts et de représentations symboliques. C'est ce vaste ensemble qu'il nomme champ conceptuel.

3.3.2. La notion de champ conceptuel

Vergnaud (1981) considère qu'*il n'est pas raisonnable d'étudier séparément l'acquisition de concepts (et de procédures) qui, dans les situations rencontrées et traitées par les élèves, sont difficilement dissociables.* Il prend pour exemple l'aberration que pourrait présenter la juxtaposition d'études sur l'acquisition des concepts de multiplication et de division, de fraction, de rapport de nombre rationnel, de fonction linéaire, alors que l'enfant est confronté à des relations qui relèvent de l'ensemble de ces concepts, lorsqu'il doit résoudre des problèmes de type multiplicatif, en relation soit avec des proportions, des surfaces, des volumes.

Partant de là, il nomme *champs conceptuels* les regroupements de situations, de concepts et de représentations symboliques qu'il définit plus précisément comme *des espaces de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion* (Vergnaud, 1981).

Vergnaud (1990) illustre la notion de *champ conceptuel* par deux exemples[63] : celui des structures additives et celui des structures multiplicatives[64]. La classification qu'il effectue en termes de types de problèmes à l'intérieur de chaque champ résulte en partie du constat que la même opération numérique peut permettre de résoudre des problèmes de difficultés très différentes.

Vergnaud prolonge la réflexion sur l'enseignement en instrumentalisant sa théorie. Ainsi, afin de favoriser la compréhension des relations en jeu et de faire progresser les élèves dans le processus de conceptualisation, il propose que les élèves en difficulté dans la résolution de problèmes utilisent des *diagrammes*[65], ces derniers pouvant être considérés comme des représentations isomorphes aux différentes structures de problèmes. Dès 1981, il introduit les types de diagrammes suivants, auxquels il attribue un statut transitoire : *En tant que support pour les problèmes, ils sont faits pour être oubliés au fur et à mesure de la maîtrise de ces problèmes* (Vergnaud et al., 1997, p. 34).

[63] Voir annexe 7.
[64] Nous décrirons les champs des structures additives et multiplicatives dans le chapitre 4.
[65] On trouve aussi la dénomination *schéma*, mais pour éviter toute confusion avec l'usage de ce dernier terme dans la *théorie du schéma*, nous emploierons *diagramme* pour désigner les représentations graphiques préconisées par Vergnaud.

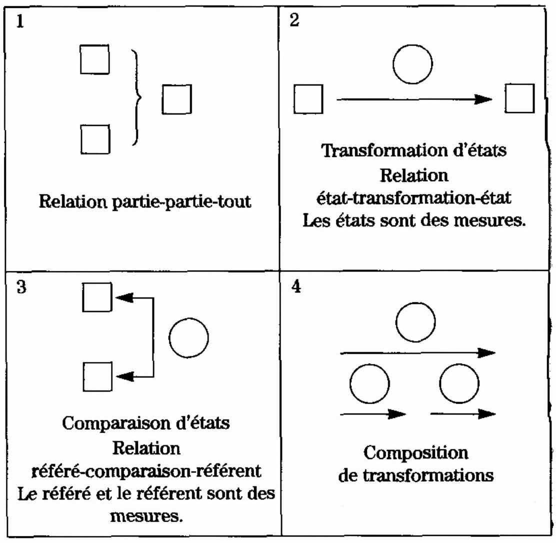


Figure 23 : ***Champ conceptuel des structures additives : Type de diagrammes à l'usage de l'école élémentaire proposés par Vergnaud et al. (1997)***

3.3.3. En prolongement de la théorie des champs conceptuels

Plusieurs recherches se sont intéressées aux effets provoqués par l'apprentissage de tels diagrammes sur les performances des élèves dans la résolution de problèmes. Levain (2000) a notamment expérimenté un protocole d'aide à la résolution de problèmes additifs et multiplicatifs auprès de 4 classes de CM1 et de CM2 basé sur un travail d'apprentissage et d'analyse de ces diagrammes correspondant aux structures de problèmes et intégrant (i) la présentation de diagrammes additifs et multiplicatifs, (ii) une mise en correspondance entre diagrammes et énoncés de problèmes, (iii) la construction d'énoncés de problèmes en fonction de diagrammes donnés. Levain a relevé après deux années d'expérimentation des effets positifs en CM2 sur la résolution des problèmes additifs entrant dans la catégorie *composition de transformations*. Il explique cette amélioration des performances par la condensation de l'information pertinente et la possibilité de contrôler les résultats en effectuant des essais ; il relève notamment l'effet facilitateur de la fixation d'un état initial hypothétique, par exemple la stratégie qui consiste à fixer 20 comme état initial (Figure 24). Toutefois, il précise bien que ces diagrammes ne traduisent *qu'une modélisation de la situation parmi d'autres*.

Alain a joué aux pogs à la récréation du matin et à celle de l'après-midi. À la récréation du matin, il a gagné 9 pogs, à celle de l'après midi, il en a perdu 17. Que s'est-il passé en tout ?

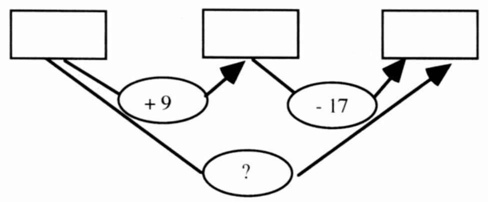


Figure n°7 : schéma du problème n°25.

Figure 24 : ***Problème n°25 et diagramme associé (Levain, 2000)***

Il pointe aussi une amélioration des performances lors de la résolution de problèmes n'ayant pas fait l'objet d'un apprentissage spécifique. Les effets positifs d'ensemble avaient été moindres au cours de la première année d'expérimentation, avec cependant une amélioration des performances pour les problèmes considérés comme complexes[66] : recherche d'une quatrième proportionnelle pour les problèmes multiplicatifs, et problèmes de composition de transformations pour les problèmes additifs.

Dans une autre étude conduite auprès d'élèves de SEGPA[67], Levain et al. (2006) confirment l'effet facilitateur provoqué par l'apprentissage et l'analyse de ces diagrammes. Il semble qu'une part de l'amélioration des performances puisse être attribuée au travail de discussion conduit par un adulte auprès de chaque petit groupe d'élèves en vue d'effectuer des analyses et des comparaisons des procédures utilisées, que ces dernières soient valides ou non.

Dans une étude conduite auprès d'élèves de CE2, Fischer (1993) avait montré d'une part qu'aucun élève ne sachant faire le diagramme correspondant à un des problèmes de l'expérimentation n'avait su résoudre le problème et que d'autre part tous les élèves qui avaient su le résoudre savaient aussi faire le diagramme, sans pour autant l'avoir effectivement dessiné. Cependant, l'étude ne permettait pas d'inférer que savoir réaliser un diagramme était une condition nécessaire pour résoudre le problème.

Julo (2002) manifeste un point de vue plus contrasté quant à ces diagrammes. Reconnaissant l'aide qu'ils apportent à la catégorisation, Julo voit toutefois un risque dans leur usage dans des situations d'apprentissage. Selon lui, les représentations symboliques conventionnelles[68] choisies peuvent conduire à associer un schéma mental de problème à une forme symbolique spécifique. Julo regrette aussi le fait de privilégier l'explicitation de la structure des problèmes, alors que *la diversité des formes d'organisation en mémoire est sans doute un atout majeur pour améliorer notre maîtrise d'un ensemble donné de problèmes*. Il préconise plutôt l'usage d'une large base structurée de problèmes dans laquelle l'élève ferait des rapprochements et des différenciations, souvent implicites mais qui le conduiraient à une catégorisation sans exiger un passage par une explicitation de la structure des problèmes.

Notons que la théorie des champs conceptuels qui vise à expliciter les processus de conceptualisation s'étend à d'autres domaines que celui des mathématiques. Vergnaud cite l'électricité[69], la mécanique, les grandeurs spatiales, qui avec leurs spécificités respectives, impliquent une pluralité de situations et de concepts.

Compte tenu des travaux qu'il a effectués, Vergnaud nous paraît faire partie des précurseurs dans le domaine de la didactique des mathématiques, au même titre que

---

[66] Dans l'expérimentation, il s'agissait de deux problèmes additifs de type comparaison d'état avec soit recherche de l'état référé, soit de l'état référent ; et de deux problèmes de type multiplicatif portant pour l'un sur une composition de deux proportions simples et pour l'autre sur une proportion double.

[67] SEGPA : Sections d'enseignement général et professionnel adapté.

[68] Exemple : La flèche horizontale pour représenter une transformation d'état ou de changement dans les problèmes additifs.

[69] Le domaine de l'électricité recouvre un large éventail de situations : l'éclairage d'une pièce, le branchement d'une lampe sur une pile, l'analyse et la dissociation des concepts d'intensité, de tension, de résistance et d'énergie, etc.

Brousseau, Glaeser et Chevallard. Cependant, l'entrée psychologique qu'il a adoptée nous conduira à développer et à illustrer la théorie des champs conceptuels ainsi que les principes qui ont présidé à sa genèse dans le chapitre *Psychologie* de la présente partie.

Dans l'immédiat, nous nous tournerons vers des travaux en relation directe avec les théories citées dans ce volet de la didactique des mathématiques.

3.4. Une voie ouverte à d'autres recherches en didactique des mathématiques

Née en tant que discipline universitaire il y a moins de quarante ans, la didactique des mathématiques a déjà suscité de nombreux travaux, comme en témoigne le grand nombre d'articles publiés, en particulier, dans la revue *Recherche en Didactique des Mathématiques* (La Pensée Sauvage, Ed.). Depuis sa création en 1980, cette revue compte à ce jour plus de quatre-vingts numéros traitant de la didactique des mathématiques.

Nos références se limitent ici aux travaux qui nous permettent d'étayer notre réflexion sur l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes à données numériques à l'école primaire. Nous retenons ceux qui invitent à des choix de méthodes d'analyse de données et ceux qui traitent des problèmes scolaires et de leur enseignement en vue d'une part, de fonder sur des choix raisonnés les formes de traitement des données recueillies lors des phases expérimentales de nos travaux et d'autre part de définir précisément les types de problèmes que nous proposerons aux élèves.

3.4.1. Grilles et taxinomies[70] selon Pluvinage

Nous ne reviendrons pas ici sur la taxonomie élaborée par Glaeser (1973, p. 10) déjà citée qui propose un classement des exercices et des problèmes selon les objectifs pédagogiques visés par l'enseignant. Suivant la voie tracée par la didactique expérimentale des mathématiques, des travaux ont vu le jour, notamment à l'IREM de Strasbourg. Ceux qui proposent une réflexion sur l'usage des méthodes d'analyse traduisent l'intérêt manifesté pour la mise en œuvre d'une approche scientifique.

En étudiant les possibilités respectivement offertes par les taxinomies et par les analyses factorielles, Pluvinage (1993) insiste sur la nécessité, déjà pointée par Glaeser, de recourir à des analyses de données, dans le cadre d'une approche scientifique des phénomènes d'enseignement. De surcroît, il invite à faire des choix raisonnés quant aux formes d'analyse utilisées (Pluvinage, 1993).

L'analyse factorielle permet de traiter plusieurs variables selon des perspectives soit synchroniques, soit diachroniques, comme l'illustrent les travaux sur les temps de réponse en calcul mental d'élèves de plusieurs classes primaires et de sixième (Fischer, Pluvinage, 1989) ou encore les études au cours desquelles sont mesurés des effets d'enseignement en suivant

[70] L'usage des deux formes *taxinomie* et *taxonomie* est accepté. Dans l'ensemble de nos travaux, nous recourons au terme *taxonomie*. En revanche, lorsque nous nous référons à Pluvinage, nous respectons le terme *taxinomie* employé dans ses travaux.

par exemple une population sur plusieurs années ou en procédant à des comparaisons entre plusieurs groupes.

Mais Pluvinage (1993, p.6) s'emploie aussi à montrer tout l'intérêt des taxinomies, au sens de *classifications hiérarchiques et d'études menées pour obtenir de telles classifications*. Hormis leur emploi dans le domaine des mathématiques, il cite entre autres (i) la succession des stades piagétiens qui renvoie à une organisation linéaire ; (ii) les cinq niveaux de pensée distingués en géométrie par Van Hiele (1959) devant correspondre à des phases successives d'enseignement pour éviter des difficultés de compréhension entre les élèves et le professeur[71], (iii) la classification d'items établies par Gras et Larher (1992) à partir de résultats d'élèves en géométrie, en vue de bâtir une expérimentation en géométrie au collège.

Dès 1993, Pluvinage prône l'intérêt de l'usage des deux formes d'analyse que sont l'analyse factorielle et les taxinomies d'objectifs pour étayer les recherches en didactique expérimentale. Rauscher (1993) utilise cette dialectique entre les deux formes d'analyse puisque la construction du questionnaire destiné à repérer l'évolution des performances d'élèves s'appuie sur l'observation. Pluvinage cite déjà en 1993 le recours possible à l'analyse implicative (Gras, Larher, 1992) pour discuter des analyses a priori. Depuis, ce volet prometteur qu'il annonçait s'est concrétisé : il suffit de regarder le nombre de recherches s'appuyant sur ces types d'analyse. On pourra notamment se référer aux travaux d'Oriol et de Régnier (2007) lors des quatrièmes rencontres internationales d'analyse statistique implicative à Castellon (Espagne).

Ce qui nous intéresse dans ce paragraphe au-delà des exemples, ce sont les réflexions sur les méthodes d'analyse qui ont découlé du développement de la didactique des mathématiques et plus particulièrement de la didactique expérimentale des mathématiques. Confrontée à des choix de méthodes d'analyse lors des phases expérimentales de nos travaux[72], nous reviendrons sur ce volet de la dialectique entre les deux formes d'analyses développées par Pluvinage.

Cette réflexion de Pluvinage sur les rôles, usages et avantages des différentes méthodes d'analyse, constitue un exemple parmi les retombées des travaux de Glaeser. Nous mentionnons ci-après d'autres types de classifications, ancrées cette fois sur l'enseignement de la résolution de problèmes et présentant les différents types de problèmes mathématiques scolaires auxquels doivent être confrontés les élèves. Glaeser semble bien avoir été là encore un précurseur. Nous nous limitons ici au cycle 3 de l'école primaire.

[71] Classification adoptée par Van Hiele : niveau 0 : appréhension des formes ; niveau 1 : perception des propriétés figurales ; niveau 2 : organisation des propriétés selon une succession ; niveau 3 : déduction ; niveau 4 : structuration globale.
[72] Parties 2 et 3.

3.4.2. Types de problèmes scolaires

Les programmes du Cours Moyen publiés en 1980 (Ministère Éducation) ont été précurseurs dans le sens où ils ont été les premiers programmes à faire référence aux typologies de problèmes. À la variante près du nombre de catégories citées, trois ou quatre selon que les problèmes dits pour chercher sont intégrés ou non à une des autres catégories, on retrouve dans les programmes de 2002 et 2007 les classifications élaborées dans le cadre de travaux de didactique des mathématiques, s'inscrivant ainsi dans la lignée de pensée de Glaeser d'établir une taxonomie.

Nous nous référons ici aux types de problèmes scolaires cités par Arsac et al. (1988, p. 8) : (i) les problèmes ou exercices d'application, (ii) les problèmes de découverte, (iii) les tests ou devoirs, (iiii) les problèmes de modélisation.

3.4.2.1. Les problèmes ou exercices d'application

De par la fonction *d'application* constitutive de son nom, ce type de problème semble plutôt correspondre à ce que Glaeser nomme *exercice*. Encore appelés *problèmes de mise en situation* ou *problèmes verbaux* bien que revêtant traditionnellement une forme écrite, ces problèmes ou exercices d'application ont pour but d'entraîner les élèves à faire fonctionner une notion mathématique (Arsac et al. 1988, p. 7).

En général, ils ont pour objet de rendre opératoire une notion introduite par l'enseignant. On les retrouve dans le document d'application des programmes 2002 sous le titre *les problèmes destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer.*

Les problèmes d'application peuvent être rapprochés des problèmes de mathématisation définis par Duval (1993, p. 62 ; 1997) comme étant des problèmes visant à *faire découvrir l'application de traitements arithmétiques, déjà acquis, à des questions plongées dans des situations non mathématiques quotidiennes ou professionnelles, comme c'est le cas pour les problèmes additifs, les problèmes de mélange, ceux de mise en équation…* Burkhardt (1994) rejoint cette définition lorsqu'il dit assigner aux problèmes d'application l'objectif de développer chez les élèves l'aptitude à appliquer efficacement dans des situations problématiques de la vie quotidienne les notions mathématiques étudiées.

Trois exemples extraits d'un manuel de mathématiques de CE2 peuvent illustrer ce type de problèmes.

Combien Alice a-t-elle mis de billes dans la boîte ? ....

Écris le calcul que tu fais. Dans ce calcul, entoure la réponse à la question.

Combien de billes y a-t-il maintenant dans la boîte ? ....

Écris le calcul que tu fais. Dans ce calcul, entoure la réponse à la question.

Combien de billes y avait-il dans la boîte au début ? ....

Écris le calcul que tu fais. Dans ce calcul, entoure la réponse à la question.

Figure 25 : ***Euromaths (Peltier et al., 2003, p. 56)***

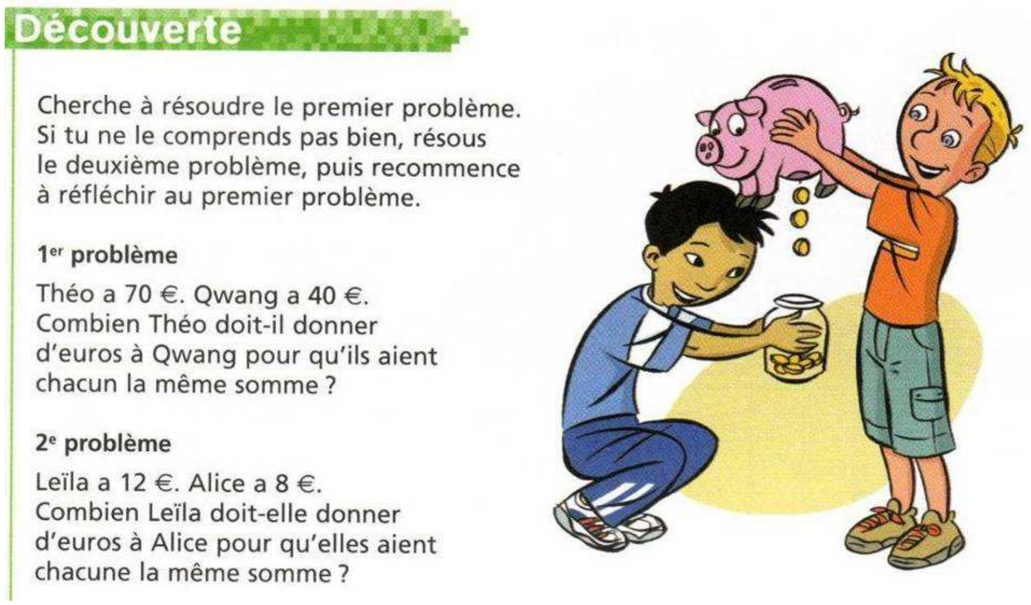
Ces énoncés figurent dans la partie *Application* d'un manuel de CE2, dans la séquence de travail intitulée *Addition et soustraction (3).* Ils se situent après une activité préparatoire qui a consisté à *calculer le nombre d'éléments de collections d'objets dans diverses situations d'ajouts ou de retraits.* Pour résoudre chacun des trois problèmes, les élèves doivent appliquer les règles dégagées en début de séance pour déterminer la quantité initiale ou finale, ou pour trouver la valeur de l'augmentation ou de la diminution, dans des situations où une quantité subit une augmentation ou une diminution.

3.4.2.2. Les problèmes de découverte

Si l'on se réfère là encore à la définition du *problème* de Glaeser, l'intitulé *problème de découverte* peut être considéré comme un pléonasme.

Cités par Arsac et al. (1988, p. 7), ces *problèmes de découverte* visent à *faire découvrir aux élèves des notions mathématiques nouvelles* et se retrouvent dans le document d'application des programmes (Ministère Éducation nationale, 2002) sous l'appellation *problèmes dont la résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance.*

En d'autres termes, ce type de problèmes a pour but de développer des savoirs mathématiques chez les élèves.



Découverte

Cherche à résoudre le premier problème.
Si tu ne le comprends pas bien, résous le deuxième problème, puis recommence à réfléchir au premier problème.

1er problème

Théo a 70 €. Qwang a 40 €.
Combien Théo doit-il donner d'euros à Qwang pour qu'ils aient chacun la même somme ?

2e problème

Leïla a 12 €. Alice a 8 €.
Combien Leïla doit-elle donner d'euros à Alice pour qu'elles aient chacune la même somme ?

Figure 26 : ***Euromaths (Peltier et al., 2003, p. 184)***

Le problème présenté (Figure 26) appartient à ce deuxième type. Il est extrait d'un manuel de mathématiques de CE2, et classé par les auteurs dans la partie *Découverte de la séquence* : *Problèmes arithmétiques (9) ;* l'objectif de la séance consiste à *apprendre à résoudre des problèmes dans un champ numérique important* et *les résolvant d'abord dans un champ numérique plus petit*. Pour ce faire, les auteurs proposent de découvrir le type d'opération à effectuer dans le premier problème, à savoir une soustraction ou une addition à trous, en se référant au deuxième problème pour lequel les élèves peuvent par exemple manipuler des jetons, dessiner, vérifier.

3.4.2.3. Les tests ou devoirs

Parmi les quatre types de problèmes, Arsac et al (1988, p. 7) citent également les *tests ou devoirs* dont le but est *d'évaluer les élèves* ; ils précisent que ces problèmes sont presque toujours pris dans la première catégorie[73]. Ainsi, ces problèmes tels qu'ils semblent être définis ne relèvent pas d'un traitement autre que celui consistant en l'application de telle ou

[73] Celle des problèmes ou exercices d'application.

telle procédure. Bouvier (1981, p. 16) les nomme *problèmes-contrôles* dans la mesure où leur fonction est de contrôler si l'élève est capable de restituer les connaissances sous-jacentes à la résolution de problèmes. Dans ce cas, nous dit Bouvier, *résoudre le problème le tue définitivement*. Mais à l'origine s'agit-il vraiment d'un problème ? De notre point de vue, rien ne semble pouvoir s'opposer à considérer à un moment donné comme test ou devoirs les *problèmes pour chercher* ; l'enseignant évaluerait alors les compétences de ses élèves à élaborer un ensemble plus ou moins complexe de procédures.

3.4.2.4. Les problèmes de modélisation

Sortie du contexte des types de problèmes, l'expression *problèmes de modélisation* pourrait paraître ambiguë : on pourrait notamment se demander si ce n'est pas la modélisation qui constitue l'objet même du problème. Les programmes de l'école primaire ne mentionnent pas cette catégorie, contrairement à la classification proposée par Arsac et al. (1998, p. 7) qui, elle, inclut ce type de problèmes dits *de modélisation pour apprendre à mathématiser une situation concrète*. À l'instar de Verschaffel et De Corte (2005) qui réfutent l'idée que les problèmes d'application soient exclus de la démarche de modélisation, on peut s'interroger sur l'existence de cette catégorie dès lors que l'on considère que la mathématisation d'une situation peut être mise en œuvre à partir de plusieurs types de problèmes. Cette catégorie nous paraît être transversale aux autres.

3.4.2.5. Les problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher

La catégorie de problèmes *centrés sur le développement des capacités à chercher* renvoie au concept même de problème développé par Glaeser ; elle évoque aussi pour nous la réflexion didactique conduite par Bouvier (1981) sur l'apprentissage en mathématiques et sur le type d'enseignement à dispenser. Bouvier (1981, p. 15) interroge *Peut-on parler de problème lorsqu'il n'y a pas de défi, défi par rapport à soi ou (et) défi par rapport à la connaissance ?* Pour lui, enseigner les mathématiques ne consiste pas à faire acquérir des *automathismes* aux élèves, mais renvoie au contraire à la mise en place d'activités mathématiques basées sur la résolution de problèmes, au sens de résolution de défis intellectuels. À l'IREM de Lyon, les réflexions de Bouvier ont sans doute contribué à la genèse des *problèmes ouverts* dont nous donnerons quelques exemples ci-après.

3.4.2.5.1. Les problèmes ouverts selon Arsac, Germain et Mante

La catégorie des *problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher*, ainsi libellée dans le *document d'application des programmes de l'école primaire* (Ministère Éducation nationale, 2002) n'apparaissait pas explicitement dans la classification de Arsac et al (1988). Cela étant, les problèmes dits *pour chercher* étaient déjà cités par Fabre (1999) qui faisait référence aux *problèmes ouverts* définis par Arsac, Germain et Mante (1988) de l'IREM de Lyon. Pour ces trois auteurs, le *problème ouvert,* que Fabre situait entre le *problème d'application* et le *problème de découverte,* est un problème qui possède les caractéristiques suivantes :

> *L'énoncé est court.*
> *L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type « montrer que ». En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.*
> *Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples* (Arsac et al., 1988, p.7 ; 2007, p. 20).

Partant de cette définition, on peut dire que les travaux de Arsac et al. ont en quelque sorte ouvert les portes de l'École à ce type de problèmes qui jusqu'alors étaient peu présents dans le monde scolaire à l'exception des classes Freinet où les élèves étaient confrontés à de telles situations lors de travaux en autonomie.

Avec les problèmes ouverts, l'objectif est double. Il s'agit d'une part, d'un point de vue de l'enseignement des mathématiques, d'envisager l'activité scolaire de résolution de problèmes en développant chez l'élève une attitude de chercheur, en mettant en œuvre une démarche scientifique. En d'autres termes, l'élève sera amené à :

> *Faire des essais pour produire une conjecture.*
> *Tester sa conjecture en faisant d'autres essais.*
> *Prouver la validité de sa conjecture* (Arsac et al., 1988, p. 9 ; 2007, p. 22)

En résumé : essayer, conjecturer, tester, prouver, ce qui n'est pas sans rappeler la conception de l'enseignement de la résolution de problèmes donnée par Glaeser.

Mais il s'agit d'autre part de repenser le rôle du professeur et de rompre ainsi dans certains cas avec le contrat didactique *: l'enseignant doit parfois aller au rebours de son comportement habituel et aussi de ce qu'attendent les élèves (Arsac et al., 1988, p. 15).*

Initialement envisagés pour les collèges et les lycées, les problèmes ouverts ont désormais, au moins dans les programmes, toute leur place à l'école primaire. La pratique du problème ouvert se développe depuis quelques années au cycle des approfondissements, notamment à travers la mise en place de rallyes mathématiques[74].

LES BOUQUETS DE CAMILLE

Camille a 2 vases bleus, 3 vases rouges et 91 fleurs. Elle veut mettre toutes les fleurs dans ces vases en appliquant la règle suivante: il doit y avoir le même nombre de fleurs dans les vases qui ont la même couleur.
Trouve le plus possible de solution au problème de Camille et écrit le nombre de fleurs dans chaque vase bleu et le nombre de fleurs dans chaque vase rouge.

Figure 27 : ***Rallye mathématique (Département de l'Allier) – 3ème manche (2004)***

[74] Les rallyes mathématiques sont des épreuves de résolution de problèmes de type ouvert. Les élèves d'une même classe doivent s'organiser pour résoudre efficacement, en temps limité, les problèmes donnés. Outre le développement des capacités des élèves à résoudre des problèmes de recherche, les rallyes mathématiques permettent de développer les interactions sociales au sein d'une classe. Glaeser a été à l'origine du premier rallye mathématique d'Alsace.

Mais ce type de problèmes est également présent dans les manuels scolaires comme en atteste l'exemple ci-après (Figure 28).

Kamel dit que s'il ajoute les deux numéros de page du livre ouvert devant lui il trouve 40. Lisa lui répond que ce n'est pas possible. Et toi qu'en penses-tu ?

Figure 28 : ***CAP Maths CM1, (Charnay et al., 2006)***

3.4.2.5.2. Situation Recherche pour la Classe (SRC) selon Grenier et Payan

Dans la catégorie des *problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher*, on peut, pour deux raisons, ajouter à cette notion de *problème ouvert* celle *de Situation recherche pour la classe* (SRC) décrite par Grenier et Payan (2003) : d'une part, de la même façon que le problème ouvert, la SRC présente une facilité d'accès à la question initiale, d'autre part, elle offre la possibilité de plusieurs stratégies pour résoudre le problème posé. Cependant elle s'en démarque par deux aspects : le problème proposé est un problème non résolu ou seulement partiellement résolu, il place ainsi l'élève et le professeur dans des positions de chercheurs ; la situation n'a pas de *fin* étant donné qu'une question résolue peut renvoyer à une nouvelle question.

Exemple de *Situation recherche pour la classe* expérimentée en 2002 par Godot auprès d'élèves de l'école élémentaire et d'étudiants de l'Université : le jeu de la roue aux couleurs.

Un forain propose un jeu constitué de deux disques de tailles différentes, disposés de façon concentrique. Sur le plus grand disque, il pose un certain nombre de pions, tous de couleurs différentes.
Principe du jeu :
Le joueur doit placer sur le petit disque le même nombre de pions que sur le grand disque. Ces pions peuvent être de une, deux, trois, quatre couleurs ou plus choisies parmi les couleurs disposées sur le grand disque par le forain.
On fait ensuite tourner le petit disque, cran par cran. Le joueur gagne si, dans chaque position du petit disque, un et un seul de ses pions est de la même couleur que celui qui lui correspond sur le grand disque.
Quelles sont toutes les façons que le joueur a de choisir et disposer ses pions pour gagner ?

Figure 29 : ***La roue aux couleurs - Enoncé extrait de Godot (2002)***

On remarque l'ouverture de ce problème qui n'indique ni le nombre de pions que peut placer le forain ni le nombre de couleurs que peut choisir le joueur.

3.4.3. Les situations-problèmes

Nous restons dans le champ de la didactique des mathématiques en nous référant à Arsac et al. (1988) et à Douady (1984b) pour donner une définition de l'expression *situation-problème*[75]. Mais l'expression *situation-problème* semble recouvrir des acceptions différentes selon les interlocuteurs auxquels il en est demandé une définition. Les uns ne semblent voir aucune distinction entre *situation-problème* et *problème*, tandis que d'autres ne voient pas

[75] Souvent utilisée, notamment en sciences de l'éducation et en didactique des disciplines.

l'intérêt d'adjoindre le terme *problème* à celui de *situation* puisque toute situation serait inductrice de problèmes. Arsac et al. précisent que cette expression revêt chez certains le sens d'un problème concret, chez d'autres d'un problème permettant d'introduire une notion, chez d'autres encore elle est assimilée à un *problème ouvert* ou bien correspond au simple *habillage* d'une notion.

Pour Arsac et al. la notion de situation-problème repose sur une conception constructiviste de l'apprentissage. Elle constitue en quelque sorte un moyen de placer l'élève dans une position d'instabilité l'amenant à la remise en cause d'un savoir ancien de manière à construire un savoir nouveau[76].

Les situations-problèmes sont des situations qui :

> *Dans un premier temps, permettent à l'élève d'investir son ancien savoir.*
> *Dans un deuxième temps, permettent à l'élève de prendre conscience de l'insuffisance de ce savoir. Mais attention ! lui seul peut prendre conscience de l'insuffisance de ce savoir (inutile de le lui dire… !). Il faut donc que la situation donne la possibilité à l'élève de vérifier l'insuffisance de ses connaissances.*
> *Dans un troisième temps permettent à l'élève de construire de nouvelles procédures* (Arsac et al., 1988, p.96).

La définition fournie par Mante (1986) complétée par les caractéristiques données par Douady (1984b) (Tableau 2) nous paraissent résumer ce qu'est une situation-problème pour la majorité des didacticiens des mathématiques : une situation-problème est *une situation créant un problème et dont la solution fera intervenir des outils, c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles*.

1. L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution du problème. L'élève peut envisager ce qu'est une réponse possible du problème.
2. Les connaissances de l'élève sont en principe insuffisantes pour qu'il résolve immédiatement le problème.
3. La situation-problème doit permettre à l'élève de décider si une solution trouvée est convenable ou pas.
4. La connaissance que l'on désire voir acquérir par l'élève doit être l'outil le plus adapté pour la résolution du problème au niveau de l'élève.
5. Le problème peut se formuler dans plusieurs cadres entre lesquels on peut établir des correspondances (par exemple cadre physique, cadre géométrique, cadre graphique).

Tableau 2 : ***Caractéristiques d'une situation-problème selon Douady***

3.4.4. Transformations et jeux des formulations selon Douady

L'idée de la nécessité de transformations et de jeux des formulations dans l'activité de résolution de problèmes apparaît dans des travaux de recherche en didactique des mathématiques parmi lesquels ceux de Douady (1986) qui traitent des changements de cadres et de la dialectique outil-objet.

[76] Bachelard (1938) : *On connaît contre une connaissance antérieure*.

3.4.4.1. Jeux de cadres et dialectique outil-objet selon Douady

En s'intéressant aux processus d'acquisition des connaissances mathématiques en situation scolaire, Douady (1984a) suggère une organisation de l'enseignement *intégrant des moments où la classe simule une société de chercheurs en activité*, rompant ainsi avec la méthode du *J'apprends, j'applique* et ouvrant vers une attitude active telle que celle préconisée par Glaeser (1999) ou encore par Bouvier (1981) ou Arsac (1988). Pour ce faire, elle s'appuie sur les notions de *dialectique outil-objet* et de *jeux de cadres* qu'elle illustre par des situations.

3.4.4.1.1. Dialectique outil-objet

Selon Douady, un concept mathématique acquiert le statut d'objet au sens d'objet culturel ayant sa place dans le savoir savant reconnu socialement, dès lors qu'il s'intègre dans un corpus de connaissances déjà constituées, en vue de les étendre, voire de se substituer à certaines d'entre elles. Un concept est outil lorsque l'intérêt se porte sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Douady distingue (i) les *outils explicites* pour les notions que l'élève met en œuvre, qu'il peut formuler et dont il peut justifier l'emploi. Douady prend comme exemple le problème suivant : *Existe-t-il un carré d'aire 12 cm² ?*, et la réponse suivante d'un élève : *Pour un carré de 3 cm l'aire est de 9 cm², pour un carré de côté 4 cm l'aire est de 16 cm², quand le côté passe de 3 cm à 4 cm il y a bien un moment où l'aire sera 12 cm².* La relation entre dimension et aire est un outil explicite pour l'élève. (ii) les *outils implicites* qui s'appliquent aux notions que l'élève ne parvient pas à formuler ou qu'il exprime seulement en termes d'action dans un contexte particulier ; du point de vue du sujet, ils correspondent aux théorèmes-en-acte de Vergnaud (1986). Dans l'exemple précédent la fonction $x \rightarrow x^2$, sa continuité, le théorème des valeurs intermédiaires qui sont encore inconnus des élèves sont considérés comme des outils implicites.

Douady nomme *dialectique outil-objet* le processus suivant composé de six phases, dans lesquelles on ne manquera pas d'ailleurs de repérer des liens avec les situations de Brousseau (1986b).

Phase a	Ancien
Phase au cours de laquelle les élèves vont s'engager dans une voie de recherche, en utilisant des outils explicites pour résoudre au moins en partie le problème proposé.	
Phase b	**Recherche nouveau implicite**
Suite aux difficultés rencontrées pour résoudre le problème dans sa totalité, les élèves vont chercher des moyens mieux adaptés en recourant par exemple à des changements de cadres.	
Phase c	**Explicitation et institutionnalisation locale**
Les travaux des élèves ainsi que la validation sont discutés de manière collective.	
Phase d	**Institutionnalisation – statut d'objet**
À travers un exposé collectif, l'enseignant va donner un statut d'objet mathématique aux connaissances nouvelles qui, jusqu'à cette phase, n'ont été que des outils.	
Phase e	**Familiarisation – réinvestissement**
À travers la résolution d'exercices variés, l'élève est conduit à réinvestir les notions institutionnalisées lors de la phase d. Il s'agit pour lui d'une mise à l'épreuve des connaissances qu'il pense avoir acquises et d'une mise au point sur ses connaissances effectives.	
Phase f	**Complexification de la tâche ou nouveau problème**
L'enseignant donne aux élèves un problème plus complexe à résoudre.	

Tableau 3 : ***Phases du processus dialectique outil-objet selon Douady***

Lors de la dernière phase, Douady considère que l'objet étudié est susceptible d'acquérir le statut d'*ancien objet* pour un nouveau cycle de la dialectique outil-objet. Toutefois, elle attire l'attention sur le fait qu'un cycle (a, b, c, d) ne suffit parfois pas pour enclencher le déroulement d'un cycle complet dialectique outil-objet. Elle pointe aussi le fait qu'il faut parfois attendre plusieurs années avant que des habitudes et des pratiques familières ne donnent lieu à des objets de savoirs, rejoignant ainsi les caractéristiques de variété et d'histoire développés par Vergnaud[77].

Enfin, elle n'exclut pas l'introduction de notions soit directement par l'enseignant soit par la lecture de manuels, à condition toutefois que la dialectique outil-objet fasse, elle, l'objet d'apports suffisants.

3.4.4.1.2. Jeux de cadres

Se référant au mathématicien qui essaie de formuler autrement l'énoncé du problème qu'il a à résoudre ou qui essaie de changer de point de vue, Douady définit les *jeux de cadres* comme *moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation.* Douady cite les cadres algébrique, arithmétique, géométrique, mais parle aussi de cadre qualitatif ou algorithmique. Ces changements de cadres peuvent être *spontanés*, c'est-à-dire à l'initiative de l'élève ou bien *provoqués* par un autre élève ou par l'enseignant. Lors de l'expérience qu'elle a conduite dans des classes, Douady a relevé les effets positifs des jeux de cadres et de la dialectique outil-objet qui permettent aux élèves

[77] Voir Partie 1 – 3.3.

d'avancer dans la résolution d'un problème, en débloquant une situation ou en faisant évoluer les conceptions individuelles.

3.5. Conclusion du chapitre

Les programmes d'enseignement fixent le *savoir à enseigner* qui deviendra ensuite le *savoir enseigné* par le professeur. Le passage du contenu de savoir mentionné dans les programmes, à une version didactique de cet objet de savoir, est nommé transposition didactique (Chevallard, 1985).

La centration de notre thèse sur les questions de l'enseignement et de l'apprentissage de la résolution de problèmes impose de s'intéresser à la fois aux contenus des programmes et aux travaux des didacticiens des mathématiques.

Les recherches engagées dans les Universités de Bordeaux et de Strasbourg, respectivement par Brousseau (1972) et Glaeser (1973) ont ouvert la voie à ce nouveau champ de recherche qui, bien que récent, rassemble d'ores et déjà de nombreux travaux.

La théorie des situations didactiques (Brousseau, 1986b) en constitue la pièce maîtresse. Il s'agit d'observer et d'analyser les pratiques de l'enseignant dans la conduite de sa classe et dans les tâches mises en œuvre, autrement dit de s'intéresser au processus même d'enseignement. Pour Brousseau, les causes de l'échec sont à chercher dans ce processus même et dans *le rapport de l'élève au savoir et aux situations didactiques.* Brousseau (1980a) a notamment défini le concept de *contrat didactique* pour caractériser les habitudes spécifiques d'un enseignant. Il a d'ailleurs mis en évidence deux effets de ce contrat : l'effet Topaze et l'effet Jourdain. Le recours à la notion de contrat didactique nous paraît incontournable pour analyser des séances de classe. Brousseau a nommé *dévolution* le moyen didactique qui consiste à faire en sorte que l'élève se sente responsable, au sens de la connaissance, du résultat qu'il doit rechercher (Brousseau, 1988b).

Tandis que Brousseau développe à Bordeaux la Théorie des Situations Didactiques en centrant sa réflexion sur les stratégies de l'enseignant dans la conduite de la classe, Glaeser fonde à Strasbourg la didactique expérimentale des mathématiques en considérant à la fois les savoirs scolaires et les savoirs acquis en dehors de l'école. Glaeser préfère d'ailleurs parler d'*éducation mathématique* ; le but est de donner le *goût mathématique*. Nombre de ses travaux portent sur la place de la résolution de problèmes dans cette éducation mathématique. Le premier fascicule du *Livre du problème* (Glaeser, 1973) intitulé *Pédagogie de l'exercice et du problème* pose clairement la distinction entre la notion d'exercice qui selon Glaeser se réduit à l'exécution de tâches algorithmiques et la notion de problème qui invite au tâtonnement, à l'invention, à la recherche de différentes pistes permettant d'accéder à une solution. Au travers de ce *Livre du problème* en six fascicules, Glaeser souhaite susciter chez les enseignants une réflexion sur la finalité de l'enseignement des mathématiques et sur les habitudes de travail. Mais la réflexion de Glaeser porte aussi sur la méthodologie à mettre en œuvre dès lors que l'on procède à des observations dans les classes. Ainsi, *la didactique* *expérimentale des mathématiques* qu'il a fondée s'appuie sur une expérience de terrain qu'il a voulue placer, en ce qui concerne la rigueur scientifique, au plus près des conditions expérimentales en laboratoire. Dans toutes les observations qu'il effectue dans les classes, il prend soin d'adopter une démarche rigoureuse en déterminant avec minutie les variables didactiques et en insistant sur la nécessité de comparer des situations presque identiques ne variant que sur quelques paramètres.

Ces recherches ont ouvert la voie à d'autres travaux dans le domaine de la didactique des mathématiques. Quelques-uns d'entre eux, en relation avec la thématique de l'enseignement de la résolution de problèmes sont cités dans ce chapitre : les travaux qui se réfèrent à l'usage de classifications (Pluvinage, 1993 ; Rauscher, 1993) ; les travaux qui analysent l'usage d'un type spécifique de problème (Bouvier, 1981 ; Arsac et al., 1988 ; Godot, 2002 ; Grenier et Payan, 2003 ; Charnay et al, 2006) ; les travaux qui se réfèrent à la notion de situation-problème (Douady, 1984b).

Dans ce chapitre, nous faisons également référence à la *théorie des champs conceptuels* développée par Vergnaud (1981), sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre suivant destiné à recueillir le point de vue des psychologues sur la notion de *problème*.

Chapitre 4 : Du point de vue des psychologues : Qu'est-ce qu'un problème ? Quelles sont les principales difficultés d'apprentissage liées à la résolution de problèmes?

Le présent chapitre se réfère à plusieurs champs de la psychologie : apprentissage, éducation.

Dans la même perspective que celle adoptée pour les chapitres précédents, il s'agit d'abord de cerner les définitions du problème mathématique données par les psychologues de l'apprentissage et par ceux spécialisés dans l'éducation.

La parole sera ensuite donnée plus spécifiquement aux psychologues de l'éducation afin de repérer les relations entre les modalités d'enseignement de la résolution de problèmes et les processus engagés par les élèves.

4.1. Qu'est-ce qu'un problème ?

Les définitions du concept de *problème* rapportées ci-après traduisent les liens étroits que l'on peut dégager entre le point de vue de leurs auteurs (Richelle, Droz) et celui, de nature épistémologique, développé par Bachelard (1938) à propos de la connaissance :

> *Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir de connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit (Bachelard, 1938).*

En effet, en prolongement de Richelle et Droz (1976) pour lesquels *il y a problème lorsque le sujet ne dispose pas immédiatement d'une réponse de routine applicable à la situation*, Vergnaud considère comme problème *tout ce qui, d'une façon ou d'une autre, implique de la part du sujet la construction d'une réponse ou d'une action qui produit un certain effet*. Pour lui, *par problème il faut entendre, dans le sens large que lui donne le psychologue, toute situation dans laquelle il faut découvrir des relations, développer des activités d'exploration, d'hypothèse et de vérification, pour produire une solution* (Vergnaud, in Bouvier, 1981, p 15)

Brun (2003), quant à lui, propose la définition suivante : *Dans une perspective psychologique, un problème est généralement défini comme une situation initiale avec un but à atteindre, demandant à un sujet d'élaborer une suite d'actions ou opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet / situation, où la solution n'est pas disponible d'entrée mais possible à construire.*

Ces deux définitions du problème émanant de psychologues et rapportées ci-dessus, peuvent s'appliquer à tout domaine scientifique dès lors que les situations proposées permettent à l'individu d'entrer dans la quête de construction de la connaissance. Pour les psychologues cognitivistes, le problème est source de construction du sujet.

Il revient ainsi au mathématicien, au chercheur, à tout individu de dépasser son expérience première, ses connaissances antérieures, ses affects pour construire un nouvel objet d'étude et résoudre le problème. Une fois le problème résolu, la réponse exacte fournie qui porte en général le nom de *solution*, prend le statut de connaissance.

Il s'agit d'essayer de comprendre les processus engagés dès lors que l'élève se trouve confronté à la résolution d'un problème présenté sous la forme d'un texte contenant des données numériques et que, en conformité avec les définitions données dans le chapitre 1, nous nommons *énoncé de problème*.

En règle générale, l'élève[78] est sollicité pour répondre à une ou plusieurs questions, la plupart du temps placées en fin d'énoncé. Pour ce faire, il doit utiliser tout ou partie des données présentes dans l'énoncé. Il s'agit alors pour lui de mobiliser des connaissances, de traiter des données numériques, voire d'inférer des informations à partir d'éléments implicites. Par exemple, à partir de l'énoncé suivant ; *Paul est parti le 3 janvier 2005 et arrivera le dernier jour de février. Combien de jours a-t-il été absent de la maison y compris les jours de voyage ?* la résolution du problème nécessite d'inférer que : le mois de janvier compte 31 jours, l'année 2005 est non-bissextile et son mois de février compte 28 jours.

Ceci illustre le fait qu'un énoncé de problème ne se résume pas à la juxtaposition de propositions comportant des données numériques qu'il suffirait de traiter avec des calculs numériques. S'intéresser à la résolution de problèmes nécessite de s'interroger sur la compréhension des processus d'apprentissage mis en œuvre. D'ailleurs, la plupart des chercheurs en psychologie de l'apprentissage ayant conduit des travaux sur la résolution de problèmes s'accordent sur l'attention à apporter à la compréhension.

4.2. Théories de l'apprentissage : qu'est-ce qu'apprendre ? et comment ?

Pour mieux comprendre les processus cognitifs mis en œuvre dans la résolution de problèmes, nous avons fait choix des trois théories psychologiques suivantes explicatives des processus liés à la compréhension : (i) la théorie du schéma (Kintsch, Greeno, 1985), (ii) la théorie des modèles de situations encore appelée théorie des modèles mentaux (Johnson-Laird, 1983) et (iii) la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990). Nous avons complété par les apports fournis par l'approche développée par Duval prenant appui sur les concepts de registres de représentation.

4.2.1. La théorie du schéma

Selon Kintsch et Greeno (1985), *un schéma est un ensemble de connaissances abstraites pouvant être définies comme les traces laissées en mémoire par les situations rencontrées précédemment et organisées en objet structuré ayant un certain nombre de propriétés caractéristiques*.

Ainsi, un sujet dégagerait les invariants propres à chaque catégorie de problèmes ; il constituerait alors des *blocs* de connaissances correspondant à chaque structure puis ces *blocs*

[78] Mais cela s'applique aussi à tout individu.

ou *schémas* seraient ensuite stockés en mémoire à long terme ; ils comporteraient un certain nombre de *places* vides. Quand le sujet se trouve face à un problème à résoudre, il lui associerait le *schéma* correspondant qu'il rappellerait en mémoire de travail puis il instancierait les *places* vides avec les informations fournies par l'énoncé du problème.

Le schéma s'enrichirait au fur et à mesure que le sujet rencontrerait différentes situations et qu'il dégagerait des invariants spécifiques à chaque catégorie de problème.

En résumé, *les schémas de problèmes seraient conçus comme des guides à l'encodage des données et au déclenchement des procédures de traitement permettant d'expliquer le déroulement plus ou moins efficace d'un ensemble de procédures dirigées vers un but* (Fayol, 1992).

Fayol, Thévenot, Devidal (2005) s'appuient sur cette définition pour décrire les processus inhérents à la résolution de problèmes.

> *Les problèmes sont ainsi résolus grâce à la construction d'un ensemble de micro-schémas, chacun représentant un état du problème, puis à la coordination de ces différents schémas en fonction de schémas d'ordre supérieur correspondant aux schémas de problèmes décrits par Riley et al. (1983). Les places à instancier dans les micro-schémas correspondraient aux objets, quantités, spécifications et rôles propres à l'énoncé du problème. La nature du schéma d'ordre supérieur à mobiliser serait déterminée par la présence d'indices particuliers dans le texte du problème tels que des expressions linguistiques* (Fayol, Thévenot, Devidal, 2005).

Ces trois auteurs illustrent cette mobilisation de schémas en donnant l'exemple du problème suivant : *Jean a 3 billes, Tom a 5 billes. Combien Jean et Tom ont-ils de billes ensemble ?* Le premier micro-schéma serait ainsi constitué par la nature des objets *billes*, la quantité *3*, la spécification *Jean* et le second micro-schéma par la nature des objets *billes*, la quantité *5*, la spécification *Tom*. La lecture de la question et plus précisément du terme *ensemble* guiderait alors le sujet vers le schéma *Combinaison* à instancier. C'est l'instanciation de ce schéma de relation de type *réunion de deux parties formant un tout* qui conduirait à l'addition des deux termes et à la résolution du problème.

Ainsi, un *schéma* intègre les connaissances lexicales et notionnelles dont le sujet disposera ou non en mémoire à long terme pour se construire une représentation de la situation décrite dans l'énoncé (Caillot, 1984, Escarabajal, 1984). Pour Escarabajal le schéma est comme *un ensemble de variables ou « places », reliées entre elles par des opérations ou des relations. C'est un réseau relationnel qui décrit, à un moment donné, une connaissance logico-mathématique de l'enfant.*

Le schéma n'est donc pas seulement un *paquet d'informations en mémoire*. Dès lors qu'il contient les plans pour traiter les informations qui relèvent de son domaine d'intervention, il est aussi une structure opératoire. Les schémas de problèmes seraient conçus comme des *guides à l'encodage des données et au déclenchement des procédures de traitement permettant d'expliquer le déroulement plus ou moins efficace d'un ensemble de procédures dirigées vers un but* (Fayol et al. 1987 in Fayol, Thévenot, Devidal, 2005).

Le sujet comprendra d'autant mieux le problème qu'il parviendra à se représenter le plus vite possible la situation décrite. D'autres études ont été réalisées en relation avec la théorie des schémas. Les travaux de Fayol et Abdi (1986), Devidal (1996) ; Devidal, Fayol et

Barrouillet, (1997) ont traité de l'effet du placement de la question au sein d'un énoncé de problème (placement de la question en début d'énoncé vs placement de la question en fin d'énoncé); les résultats attestent que le placement de la question en début d'énoncé facilite la résolution : tous les enfants de 10 ans, y compris ceux étant considérés comme faibles en mathématiques ou en lecture, réussissent mieux dans cette condition. Le placement de la question en tête d'énoncé permettrait au sujet d'activer précocement le schéma de résolution associé à la structure du problème. Les sujets pourraient ainsi intégrer les données de l'énoncé au cadre du schéma et effectuer les calculs au cours de la lecture, allégeant ainsi la charge cognitive en mémoire de travail, d'où l'amélioration des performances, y compris pour les élèves les plus faibles. Les psychologues de ce courant utilisent l'expression *up-down* pour exprimer ce traitement dirigé par le concept en direction des données.

En revanche, si l'on considère les problèmes complexes[79], Devidal (1996) montre que des sujets de dix ans obtiennent de faibles performances à leur résolution, et ce, en dépit du placement de la question en début d'énoncé. Il interprète ces résultats par *l'absence de schémas correspondant à la structure des problèmes. Ainsi, les sujets ne disposent pas d'un cadre pour guider le traitement et la compréhension des énoncés. Ils sont alors sous la dépendance de critères de surface et leurs réponses semblent découler de l'activation de schémas correspondant à des problèmes plus simples* (Devidal, 1996).

En résumé, la résolution d'un problème serait facilitée dès lors que le sujet pourrait activer en mémoire à long terme la représentation pertinente et les connaissances associées. Cette représentation mentale nommée *schéma* guiderait l'encodage des données et activerait ensuite les procédures de résolution du problème.

Tout ceci ne vaut bien sûr que si le schéma existe. Si aucun schéma correspondant à la situation donnée n'est disponible en mémoire à long terme, le sujet doit alors utiliser la mémoire de travail pour élaborer la représentation de la situation.

Il est nécessaire d'envisager ce qui se passe lorsque aucun schéma n'est disponible pour traiter un problème particulier.

4.2.2. La théorie des modèles mentaux

Dans le cas où le sujet ne dispose pas d'un schéma en mémoire à long terme faute de n'avoir jamais été confronté à un type de problème particulier ou du moins pas un nombre suffisant de fois pour avoir construit un schéma en mémoire à long terme, il ne lui est pas possible de mobiliser un cadre préconstruit permettant de recevoir les données spécifiques au problème à traiter. Il doit alors s'engager dans une procédure *pas à pas* et construire dans sa mémoire de travail une représentation de la situation.

Ainsi, dans la théorie des modèles mentaux[80] développée par Johnson-Laird (1983), le sujet construit, à partir des données, une représentation analogique d'une situation qui serait

[79] On peut considérer comme problèmes *complexes* des problèmes dont la résolution nécessite l'activation successive de plusieurs schémas.
[80] Il s'agit d'une théorie des représentations mentales mises en œuvre dans le langage et le raisonnement.

stockée temporairement dans la mémoire de travail, contrairement aux schémas qui seraient stockés dans la mémoire à long terme. La construction de la représentation à partir des données relève d'un traitement des informations nommé *bottom-up* (de bas en haut). En effet, selon Johnson-Laird (1993), les modèles mentaux peuvent être construits par la perception, mais aussi par l'imagination, leur fonction étant de rendre explicites les objets, leurs propositions et leurs relations de manière à ce qu'ils soient disponibles pour faire des inférences, pour prendre des décisions ou pour résoudre un problème. Les modèles mentaux sont utilisés pour simuler une situation et c'est cette simulation qui sert de base au raisonnement (Cavazza, 1993). *Enfin, c'est la manipulation du modèle, ou la construction de plusieurs modèles alternatifs qui permet d'arriver à une conclusion au cours d'un certain nombre de tâches de raisonnement* (Johnson-Laird, Byrne, 1991).

Cavazza (1993) précise les caractéristiques des modèles mentaux. Selon ce psychologue cognitiviste, la constitution d'un modèle mental est représentative de la situation puisqu'elle est basée sur des objets du monde physique. Le modèle mental est une représentation dont les relations et le contenu sont fidèles à la réalité. Cavazza dit que le modèle mental est *homomorphe au monde*. Il s'agit d'une représentation *dynamique*, c'est-à-dire évolutive pendant le traitement. L'existence du modèle mental n'est que transitoire et le stockage s'effectue en mémoire de travail, contrairement au schéma qui se situe en mémoire à long terme. Mais le modèle mental est également qualifié de *constructif* par Cavazza dans le sens où cette représentation utilise aussi des connaissances récupérées en mémoire à long terme.

Cette idée de mobilisation des connaissances antérieures est soulignée à plusieurs reprises (Fayol, 1996 ; ONL, 2000). En effet, la construction de la représentation analogique de la situation décrite dans un texte s'appuie naturellement sur le texte mais nécessite aussi que le lecteur complète les informations fournies seulement en partie par le texte. Pour ce faire, il doit mobiliser des connaissances préalablement acquises. On constate que des sujets *experts* soumis à la lecture préalable d'un texte informatif, obtiennent des meilleures performances que des sujets *novices*.

D'autres psychologues, Reusser (1989), Staub et Reusser (1995), Nathan et al. (1992) qualifient de *non-mathématique* le modèle mental qu'ils nomment aussi *modèle de situation* ou *modèle épisodique de situation*, compte tenu qu'il spécifie les acteurs, les actions et leurs relations dans la vie de tous les jours.

Cette théorie des modèles mentaux peut parfois se révéler mieux adaptée que la théorie des schémas pour expliquer certains résultats. Par exemple, Thévenot (2000) a montré que cette théorie permettait d'expliquer l'effet facilitateur du placement de la question en début d'énoncé pour les sujets faibles calculateurs. En effet, le placement de la question en début d'énoncé ne permet pas uniquement l'activation d'un schéma de résolution ; il permet aussi une meilleure récupération des informations nécessaires à la construction d'un modèle mental.

Cependant, Novotná (2002) considère que la construction d'un modèle mental, dans le cadre de la résolution de problèmes, peut parfois se révéler insuffisante pour conduire l'élève à la production directe d'une solution. L'élève doit alors recourir à des représentations écrites sous une forme textuelle ou iconique. Selon Novotná, ce recours permet de (i) soulager la mémoire de travail, (ii) faciliter la démarche heuristique grâce à la manipulation par écrit de relations, (iii) communiquer plus aisément ses représentations, (iiii) soumettre le modèle mental au contrôle.

En résumé, la théorie des modèles mentaux permet de mieux comprendre certains processus cognitifs mis en œuvre dans la résolution de problèmes. Cependant, elle ne saurait être exclusive et on peut dire que certains résultats s'interprètent par la théorie des schémas, d'autres par la théorie des modèles mentaux ; à ce jour, aucune de ces deux théories ne semble prévaloir sur l'autre.

4.2.3. La théorie des champs conceptuels dans sa dimension psychologique selon Vergnaud

Vergnaud dont jusqu'à présent nous n'avons fait qu'évoquer les travaux dans le chapitre réservé à la didactique des mathématiques développe sa propre théorie de l'apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques. Il s'inscrit selon une approche opératoire et psychogénétique de la connaissance. En effet, pour lui, (Vergnaud, 1990), comme pour Piaget, la connaissance est adaptation : l'individu s'adapte à des situations et ce, par une évolution de l'organisation de son activité (Vergnaud, in Merri, 2007). Vergnaud applique également le concept de *schème* à l'analyse de l'activité professionnelle des adultes.

4.2.3.1. Le couple *situation-schème*

Selon Vergnaud, il n'est pas suffisant de s'intéresser strictement à la performance, c'est-à-dire au résultat de l'activité. Il est nécessaire de procéder à des investigations liées à l'organisation de l'activité, c'est-à-dire à la manière dont un sujet va réagir face à une situation nouvelle.

Vergnaud (1990) accorde une place centrale au couple *situation-schème* dans la construction des connaissances, au point de le considérer comme *le couple fondamental de la psychologie développementale et de la didactique* (Vergnaud in Merri, 2007, p. 341).

4.2.3.1.2. Les schèmes selon Vergnaud

Vergnaud reprend le concept de *schème*, créé par Kant, et développé ensuite par Piaget. Les schèmes, éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire, sont *au centre du processus d'adaptation des structures cognitives : assimilation et accommodation*.

Vergnaud (2001) donne trois définitions du concept de schème, afin de mieux en cerner le caractère fonctionnel, adaptatif et fondamentalement cognitif :

*1. **Un schème** est une totalité dynamique fonctionnelle* (2001, p. 4). Le geste, largement étudié par Piaget dans l'analyse de l'activité gestuelle du bébé, constitue un excellent prototype du concept de schème. Pour Vergnaud, la pensée mathématique est un geste, dans la mesure où les gestes sont effectifs dans certains schèmes mathématiques, par exemple lorsque l'enfant pointe du doigt des objets afin d'en effectuer le dénombrement, mais aussi dans la mesure où le choix des données pertinentes et des opérations arithmétiques à effectuer dans la résolution d'un problème sont gouvernés par des schèmes.

2. **Un schème** *est une organisation invariante de l'activité pour une classe définie de situations* (2001, p. 4). Pour Vergnaud, le schème est universel, puisqu'il s'adresse à une classe de situations[81] dont les caractéristiques sont bien définies.

Ainsi, Vergnaud distingue deux grandes classes de situations (Vergnaud, 1990, p. 136)

> *1) des classes de situations pour lesquelles le sujet dispose dans son répertoire, à un moment donné de son développement et sous certaines circonstances, des compétences nécessaires au traitement relativement immédiat de la situation.*
> *2) des classes de situations pour lesquelles le sujet ne dispose pas de toutes les compétences nécessaires, ce qui l'oblige à un temps de réflexion et d'exploration, à des hésitations, à des tentatives avortées, et le conduit éventuellement à la réussite, éventuellement à l'échec.*

Tandis que les situations de la première catégorie sont caractérisées par des conduites très automatisées, organisées par un schème unique, celles de la seconde catégorie sont marquées par l'activation de plusieurs schèmes qui, selon Vergnaud, doivent être accommodés, décombinés et recombinés afin de parvenir à la solution recherchée.

C'est par des analogies et des parentés entre la classe de situations dans laquelle le schème était déjà opératoire et les situations nouvelles que le schème va pouvoir être étendu à une classe plus large. Le schème est adaptatif, contrairement au stéréotype qui ne l'est pas.

Vergnaud illustre cette seconde caractéristique du schème, à savoir *organisation invariante de l'activité pour une classe définie de situations*, par l'exemple d'un bébé de 7-8 mois qui, assis dans son parc, veut se lever. Les observations montrent que, à plusieurs reprises, le bébé effectue les mêmes gestes qui le conduisent à se relever, autrement dit, l'organisation de l'activité est invariante : le bébé déplace par exemple le pied droit dans telle direction, puis le pied gauche, puis s'agrippe de la même main aux barreaux de son parc. Tandis que l'organisation de l'activité ne varie pas, la conduite, elle, varie un peu à chaque fois. Par exemple, le pied est plus ou moins déplacé et la main s'agrippe plus ou moins haut sur les barreaux. La généralisation d'un schème dépend de la reconnaissance d'invariants.

3. **Un schème** *est nécessairement composé de quatre catégories de composantes :*

- *un but (ou plusieurs), des sous-buts et des anticipations.*
- *des règles d'action, de prise d'information et de contrôle*. Le schème génère une suite d'actions en vue d'atteindre un certain but.
- *des invariants opératoires* auxquels Vergnaud (1994, p.8) accorde une place primordiale : *L'histoire de chaque individu, c'est aussi l'histoire des situations qu'il a rencontrées, c'est son expérience. Mais dans ce flou d'épisodes, l'individu construit des invariants qui lui permettent d'opérer sur le réel. C'est dans ces invariants opératoires que se trouve la source de la pensée*. Vergnaud distingue deux grandes catégories d'invariants opératoires :
    - les *théorèmes-en-actes* qui sont les *propositions tenues pour vraies par le sujet et qui lui permettent de traiter cette information* (Vergnaud, 1994). Pour conquérir une nouvelle classe de situations, il faut des théorèmes-en-actes. Exemple : La proposition [Card $(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$ pourvu que $A \cap B = \varnothing$] est un

[81] Au sens de situation donné par Vergnaud voir Partie 1 – 3.3.1.

théorème-en-acte pour des sujets de 5 à 7 ans qui découvrent qu'il est inutile de recompter un ensemble composé de deux parties A et B dès lors que l'on a déjà compté A et B.

- les *concepts-en-actes* qui sont des fonctions propositionnelles. Vergnaud (1990) distingue les fonctions à un argument du type P(x) : *x est bleu*, les relations à deux arguments du type R(x,y) : *x est à la droite de y* et les relations à trois arguments du type R(x, y, z) : *x est entre y et z.*

- *des possibilités d'inférences*, indispensables à la mise en œuvre du schème dans chaque situation particulière.

En résumé, pour Vergnaud (1990), *le schème, totalité dynamique organisatrice de l'action du sujet pour une classe de situations spécifiée, est un concept fondamental de la psychologie cognitive et de la didactique.*

4.2.3.2. Qu'est-ce qu'apprendre ? selon Vergnaud

Pour une tâche donnée, l'élève va mobiliser les schèmes disponibles qui ont été formés antérieurement et, dès lors que de nouveaux aspects seront découverts, de nouveaux schèmes pourront être élaborés. Le fonctionnement cognitif d'un sujet s'appuie ainsi sur le répertoire des schèmes disponibles.

Selon Vergnaud (1990) qui en considère deux types[82] d'utilisation, le schème est à la fois instrument de la répétition et de l'adaptation à des situations nouvelles. À travers l'exemple du schème du dénombrement d'une petite collection d'objets chez un enfant de 5 ans, Vergnaud montre que les compétences mathématiques sont sous-tendues par des schèmes qu'il qualifie d'organisateurs de la conduite. En effet, quelle que soit la forme des objets, on relève une organisation invariante qui se traduit par :

- la coordination des mouvements des yeux et des gestes du doigt et de la main par rapport à la position des objets, qu'il s'agisse de manipulation de jetons ou de crayons posés sur une table, ou du pointage du doigt d'élèves dispersés dans la classe,
- la coordination de l'énoncé de la suite numérique,
- la cardinalisation de l'ensemble dénombré avec accentuation tonique ou répétition du dernier mot-nombre prononcé correspondant au cardinal de l'ensemble dénombré. Exemple : *un, deux, trois, quatre, cinq* ! ou *un, deux, trois, quatre, cinq … cinq* !

S'appuyant sur la notion de schème et sur sa conception de l'apprentissage, Vergnaud développe la théorie des champs conceptuels qui selon une perspective cognitiviste traite des rapports entre le sujet et le savoir et s'intéresse à la conceptualisation du réel chez le sujet.

À la différence de Piaget, mais aussi de Vygotski auquel il se réfère, Vergnaud consacre une grande partie de ses travaux aux apprentissages scolaires et est ainsi amené à prendre en considération les contenus de connaissances dans différents domaines tels que l'arithmétique, la compréhension de textes ou encore la physique.

[82] Voir Partie 1 – 4.1.2.3.1.2. Les schèmes, selon Vergnaud.

4.2.3.3. La conceptualisation du réel

Vergnaud place la conceptualisation du réel au cœur de l'activité de résolution de problème. Selon lui, conceptualiser revient à identifier les objets du monde, leurs propriétés et leurs relations, voire leurs transformations, que ces objets et leurs propriétés soient directement accessibles à la perception, ou qu'ils résultent d'une construction. Il nomme *théorie des champs conceptuels* sa propre théorie psychologique de la conceptualisation du réel, qu'il définit comme une théorie cognitiviste ayant pour but de fournir un cadre en vue d'étudier le développement et l'apprentissage des compétences complexes, notamment dans les domaines scientifiques et techniques (Vergnaud, 1990). Ses travaux portent principalement sur l'*apprentissage* et l'*enseignement*[83] des concepts.

Du point de vue de l'*apprentissage*, Vergnaud définit un *concept* comme un triplet de trois ensembles :

- un ensemble ouvert de situations qui donnent du sens au concept et qu'il désigne par *référence situationnelle*.
- un ensemble d'invariants opératoires qui structurent les schèmes associés à ces situations. C'est cet ensemble qu'il nomme *signifié*.
- un ensemble de formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement, et qu'il nomme *signifiant.* Parmi les représentations symboliques *explicites, langagières et non langagières* on peut citer le langage naturel, les graphiques, les tableaux, les schémas, l'algèbre…

Mais, s'agissant du dernier ensemble, Vergnaud précise bien que la conceptualisation n'est pas le symbolisme, même si le symbolisme apporte beaucoup à la conceptualisation, du fait qu'il permet de mettre des mots et des signes, c'est-à-dire de communiquer sur les objets, leurs propriétés et leurs relations.

La répétition du terme *ensemble* traduit bien l'importance de la diversité et du nombre de situations ou de formes langagières que le sujet doit rencontrer afin que se forme un concept.

Étant donné que ce sont les formes d'organisation de l'activité qui s'adaptent tout au long de la vie à des situations, il reviendra donc (i) aux enseignants de choisir des situations, (ii) aux élèves d'élaborer un ou plusieurs schèmes adaptés à la situation donnée.

4.2.3.3.1. Un exemple emprunté au domaine de la statistique

Oriol (2007) illustre le fonctionnement de la théorie des champs conceptuels par un exemple qu'il emprunte à la statistique :

> *Pour G. Vergnaud c'est le couple schème-situation qui est porteur des apprentissages.*
>
> *Essayons de comprendre sur un exemple comment fonctionnent ces diverses notions. En statistique une notion simple comme la moyenne arithmétique d'une série de données est un concept puisqu'elle comporte à la fois un signifiant, un ensemble de*

[83] Le volet *enseignement* chez Vergnaud est traité en partie 1 – 4.1.2.3.4. Le rôle de l'enseignant.

> *situations (la référence) et un ensemble d'invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié). Mais un concept n'existe pas tout seul et G. Vergnaud a développé la notion de champ conceptuel. Ainsi la moyenne précédente est en relation avec la distance quadratique et la variance ; la moyenne d'une série de valeurs x_i est la valeur de x pour laquelle la fonction :*
>
> $$f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=N}(x - x_i)^2}$$
>
> *atteint son minimum.*
>
> *On retrouve le même rapport entre la médiane et la norme valeur absolue.*
>
> *On perçoit à cet exemple simplifié à l'extrême de quelle façon les concepts sont en tension les uns avec les autres à la fois s'expliquant et s'impliquant, afin de former un champ conceptuel.* (Oriol, 2007)

4.2.3.3.2. Le champ conceptuel des problèmes à structures additives

Vergnaud définit le champ conceptuel des problèmes à structures additives comme étant l'ensemble des problèmes pouvant être résolus par une addition ou par une soustraction. Toutefois, il précise qu'il n'est pas possible de réduire un problème additif à l'opération mise en jeu pour sa résolution.

Vergnaud (1982), en ne considérant ni l'action ni l'opération à effectuer, propose une classification purement conceptuelle basée sur trois types de concepts : la mesure (qui indique une quantité que l'on a ou que l'on avait), les transformations temporelles (qui indiquent des pertes ou des gains de X ou de Y) et les relations statiques (qui indiquent des relations entre les possessions de X et de Y, par exemple, ce que X a de plus ou de moins que Y, ou bien ce que X doit ou devait à Y). De là, il a isolé six catégories de relations *de base, à partir desquelles il est possible d'engendrer tous les problèmes d'addition et de soustraction de l'arithmétique ordinaire* (Vergnaud, 1981). Il présente ainsi ces six relations de base :

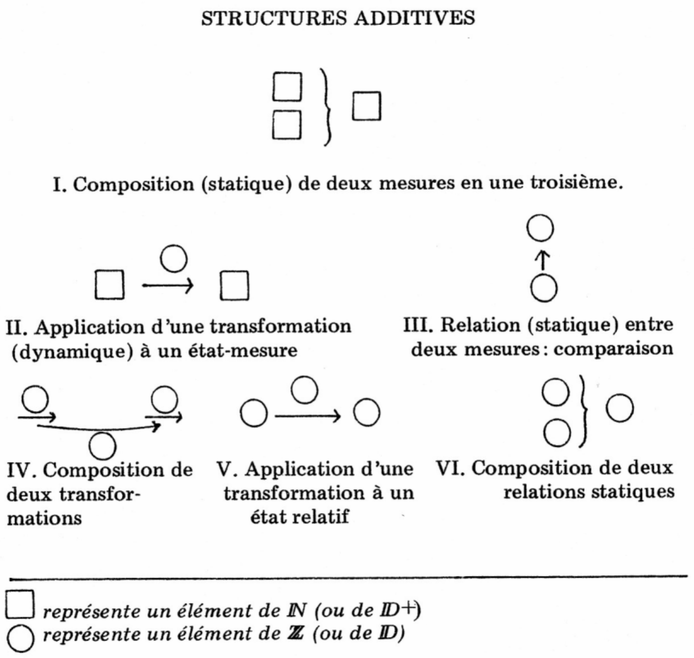


Figure 30 : ***Tableau des structures additives (Vergnaud, 1981)***

Le tableau 4 présente un exemple pour chaque type de problème à structures additives.

TYPES DE PROBLÈMES	EXEMPLES
I	X a 6 billes. Y a 4 billes. Ils ont ensemble 10 billes.
II	X avait 17 billes. Il en a perdu 4. Il en a maintenant 13.
III	X a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Y. Y a 3 billes.
IV	X a gagné 6 billes. Puis il a perdu 9 billes. En tout, il a perdu 3 billes.
V	X devait 6 billes à Y. Il lui en donne 4. X doit encore 2 billes.
VI	X a 7 billes de plus que Y. Y a 3 billes de moins que Z. X a 4 billes de plus que Z.

Tableau 4 : ***Catégorisation des problèmes à structures additives selon Vergnaud***

4.2.3.3.3. Le champ conceptuel des problèmes à structures multiplicatives

Vergnaud (1990) définit le champ conceptuel des *problèmes à structures multiplicatives* comme étant l'ensemble des problèmes pouvant être résolus par une multiplication ou par une division. Les travaux relatifs à ce type de problèmes se révèlent moins nombreux que ceux qui traitent des problèmes à structures additives.

La présence de problèmes à structures multiplicatives dans notre expérimentation rend nécessaire la référence à ces travaux théoriques conduits essentiellement en psychologie de l'apprentissage et en didactique des mathématiques. La classification des problèmes à structures multiplicatives établie par Vergnaud (1983a, 1988, 1991) constitue notre principale source de référence, elle distingue trois formes de relations :

- *isomorphes de structure* : proportion simple et directe entre deux mesures ou quantités. On distingue deux sous-groupes : les problèmes dont le rapport scalaire est exprimé par une relation multiplicative (exemple : *Jean a 9 billes. Pierre en a 4 fois plus. Combien Pierre a-t-il de billes ?*) et ceux dont le rapport scalaire est exprimé par une relation de division (exemple : *Cet après-midi, il y a 26 voitures dans le parking. Ce matin, il y en avait deux fois moins. Combien y avait-il de voitures ce matin dans le parking ?*)
- *produit de mesures* : composition de deux mesures dans une troisième (exemple : *Quelle est l'aire d'une chambre de 4 m de longueur sur 3,20 m de largeur ?*)
- *proportion multiple* : (exemple : *Le directeur d'école commande 24 boîtes de stylos. Chaque boîte de stylos contient 15 stylos. Chaque stylo coûte 0,50 euro. Quel est le montant de la commande ?*)

On peut citer d'autres classifications, comme celle de Greer (1992) qui distingue les situations commutatives, définies comme des situations dans lesquelles le multiplicateur et le multiplicande ne peuvent être distingués, a contrario des situations non-commutatives. Les premières peuvent être illustrées par l'exemple suivant : *Quelle est l'aire d'un rectangle de 3 mètres de long et de 4 mètres de large ?* et les secondes par *Trois enfants (multiplicateur) ont chacun 4 oranges (multiplicande). Combien y a-t-il d'oranges en tout ?*

4.2.3.4. La notion de compétence selon Vergnaud

Selon Vergnaud (1990), les difficultés conceptuelles rencontrées par les élèves lors de la résolution de problèmes arithmétiques doivent être analysées en termes de schèmes, étant donné que les différentes informations prélevées dans un énoncé de problème ou prises physiquement comme dans le cas de mesures, ou encore combinées par des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division sont des schèmes.

Vergnaud développe le concept de *compétence* dont il donne quatre définitions articulées entre elles (Vergnaud, 2001) :

> *Définition 1 : A est plus compétent que B s'il sait faire quelque chose que B ne sait pas faire. Ou encore A est plus compétent au temps t' qu'au temps t parce qu'il sait faire quelque chose qu'il ne savait pas faire.*
>
> *Définition 2 : A est plus compétent que B, s'il s'y prend d'une meilleure manière. Le comparatif « meilleure » suppose des critères supplémentaires : rapidité, fiabilité, économie, élégance, compatibilité avec la manière de procéder des autres, etc.*
>
> *Définition 3 : A est plus compétent s'il dispose d'un répertoire de ressources alternatives qui lui permet d'utiliser tantôt une procédure, tantôt une autre, et de s'adapter ainsi plus aisément aux différents cas de figure qui peuvent se présenter.*
>
> *Définition 4 : A est plus compétent s'il sait « se débrouiller » devant une situation nouvelle d'une catégorie jamais rencontrée auparavant.*

La définition 1 qui envisage les deux perspectives : l'une différentielle, illustrée par la première proposition ; l'autre développementale qui, illustrée par la seconde proposition, prend seulement en compte le critère de résultat de l'activité ; elle ne permet pas l'accès à des informations relatives à l'organisation de l'activité, et ce, contrairement aux définitions 2, 3 et 4 qui se positionnent, elles, dans un cadre d'analyse de l'activité.

Les *compétences* dans la résolution de problèmes peuvent se décliner de plusieurs manières (Vergnaud, 2001) :

- conduire une suite d'opérations de pensée, permettant de traiter le problème sans passer par l'algèbre ;
- lui associer le schème le plus général ou le plus efficace du point de vue de l'arithmétique ordinaire ;
- écrire le système d'équations correspondant et le résoudre ;
- en tirer un diagramme non nécessairement algébrique mais susceptible de favoriser la résolution ;
- inventer un autre énoncé de problème ayant la même structure, c'est-à-dire pouvant être représenté par le même diagramme ou la même équation.

Selon Vergnaud, il n'est pas suffisant de s'intéresser strictement à la performance, c'est-à-dire au résultat de l'activité. Il est nécessaire de procéder à des investigations liées à l'organisation de l'activité, c'est-à-dire à la manière dont un sujet va réagir face à une situation nouvelle.

4.2.3.5. Le rôle de l'enseignant selon Vergnaud

La déclinaison multiple des compétences implique la confrontation à une diversité de situations. Selon Vergnaud (1990), le rôle de l'enseignant consiste dès lors à proposer aux élèves une grande variété de situations afin qu'ils puissent avoir l'occasion d'exercer les schèmes existants. En leur absence, les situations de résolution de problèmes permettent à l'élève de développer des schèmes nouveaux.

Vergnaud montre ainsi l'importance à accorder aux situations de résolution de problèmes qui ne comportent pas de schème de traitement *prêt à l'emploi* et c'est en tant que médiation dans les processus de conceptualisation des connaissances par l'élève que Vergnaud considère l'activité enseignante. Vergnaud insiste sur le rôle essentiel de l'enseignant, qu'il nomme d'ailleurs expert irremplaçable. (Vergnaud, 1994). L'enseignant va, à l'aide d'un jeu de questions et d'interactions verbales, apporter une aide permettant d'identifier plus facilement le but à atteindre, la catégorisation ou encore la sélection de l'information. Il pourra ainsi recourir à diverses formes symboliques telles que schémas, tableaux, énoncés en langage naturel, algèbre pour *favoriser les opérations de pensée des élèves*. La figure 31 modélise l'action de l'enseignant.

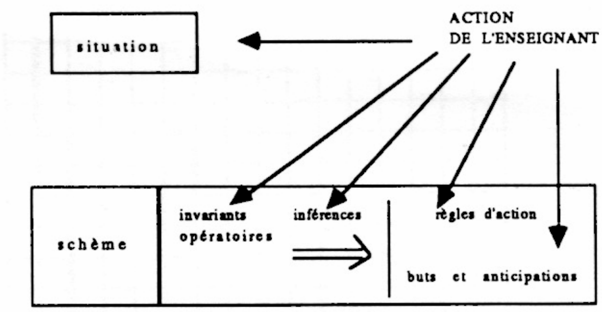


Figure 31 : ***Action de l'enseignant (Vergnaud, 1994, p. 182)***

De ce résumé des travaux de Vergnaud, il ressort un ancrage fort autour de la didactique des disciplines et autour des apprentissages.

4.2.3.6. Le couple schème-situation pour analyser l'activité de l'enseignant

Vergnaud considère que le couple *schème-situation* peut être utilisé dans le domaine de la didactique professionnelle des adultes. Il emprunte plusieurs exemples (2001) à des domaines professionnels extérieurs au monde enseignant pour montrer l'expertise professionnelle et l'usage de concepts très pragmatiques. Il cite par exemple le réparateur de pompes à eau qui travaille au sein d'une entreprise et qui est subitement hospitalisé. Pendant son absence, une catégorie de pompes à eau tombe en panne. Or, malgré de nombreuses explications fournies par ses soins à ses collègues, la réparation échoue, lui seul parvient à effectuer la réparation à son retour. Vergnaud cite aussi l'exemple du tailleur de vigne et celui du porcher qui, chacun dans leur domaine, tout comme le réparateur de pompes à eau, ne parviennent pas à mettre en mots les connaissances qu'ils utilisent pourtant dans l'action.

Vergnaud, à travers d'autres exemples empruntés aux pilotes d'avions ou aux ingénieurs concepteurs de lanceurs spatiaux Ariane, montre que ce décalage entre forme opératoire et forme prédicative de la connaissance n'est pas réservé à des catégories socioprofessionnelles que l'on pourrait considérer comme peu qualifiées. En effet, près de 180 ingénieurs experts ayant dix voire quinze années d'expérience sur la conception des lanceurs spatiaux et auxquels on demande d'écrire des guides méthodologiques ne donnent souvent qu'une vision très réductrice et très linéaire de leur activité pourtant basée sur une arborescence qu'ils maîtrisent parfaitement : telle condition X implique telle action A, telle condition Y implique telle action B, etc.

Ainsi, selon Vergnaud (2001), la forme opératoire de la connaissance, celle qui permet d'agir en situation, est à privilégier par rapport à la forme prédicative de la connaissance, celle qui prend la forme de textes, d'énoncés, de traités ou de manuels.

S'agissant de la construction des concepts, nous nous référons aussi à une autre approche, celle des représentations sémiotiques évoquées par Brun (1994) :

> *Si l'on suit le fonctionnement des schèmes au fur et à mesure du développement de l'enfant, l'apparition de la fonction sémiotique à un moment donné de ce développement fournit des éléments nouveaux à ce fonctionnement ; ce sont les représentations du type sémiotique. Les sujets peuvent s'appuyer sur des signifiants qu'ils peuvent distinguer des signifiés. Les représentations sémiotiques jouent donc un rôle éminemment fonctionnel, même si elles restent subordonnées aux opérations* (Brun, 1994, p. 75).

4.2.4. Le rôle fondamental des représentations sémiotiques selon Duval

4.2.4.1. Représentations sémiotiques

Duval considère que l'apprentissage des mathématiques soulève des difficultés de compréhension que l'on ne retrouve pas pour les autres disciplines (Duval, 2005). Les mathématiques constituent une science à part dans laquelle les objets, par exemple les nombres, ne sont pas des objets directement accessibles par la perception ou observables à l'aide d'instruments (Duval, 2001). Ils sont représentés par une écriture, une notation, un symbole, un tracé, une figure, autrement dit par *des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement* et que Duval (1993) nomme *représentations sémiotiques*.

Mais Duval insiste sur le fait que les objets mathématiques ne doivent pas être confondus avec les représentations qui en sont faites. Étant donné que l'accès aux objets mathématiques s'effectue par les représentations sémiotiques, ces dernières jouent un rôle fondamental dans le processus de compréhension qui permet d'accéder aux objets mathématiques. Il fonde son approche théorique sur le rôle essentiel joué par les relations étroites entre la *sémiosis* et la *noésis* dans la construction des concepts mathématiques.

> *Si on appelle sémiosis l'appréhension ou la production d'une représentation sémiotique, et noésis les actes cognitifs comme l'appréhension conceptuelle d'un objet… l'analyse des problèmes de l'apprentissage des mathématiques et des obstacles auxquels les élèves se heurtent régulièrement conduit à reconnaître derrière la seconde hypothèse une loi fondamentale du fonctionnement cognitif de la pensée : il n'y a pas de noésis sans sémiosis, c'est-à-dire sans le recours à une pluralité au moins potentielle de systèmes sémiotiques, recours qui implique leur coordination pour le sujet lui-même* (Duval, 1995, pp. 2-5).

Pour Duval (1996), les représentations sémiotiques sont des représentations dont la production ne peut se faire sans la mobilisation d'un système sémiotique : ainsi les représentations sémiotiques peuvent-elles être des productions discursives (en langue maternelle[84], en langue formelle) ou non discursives (figures, graphiques, schémas, …).

Duval (2000) utilise un montage photographié intitulé *Une et trois chaises* (Kosuth, 1965) pour exemplifier la complexité des représentations sémiotiques en mathématiques.

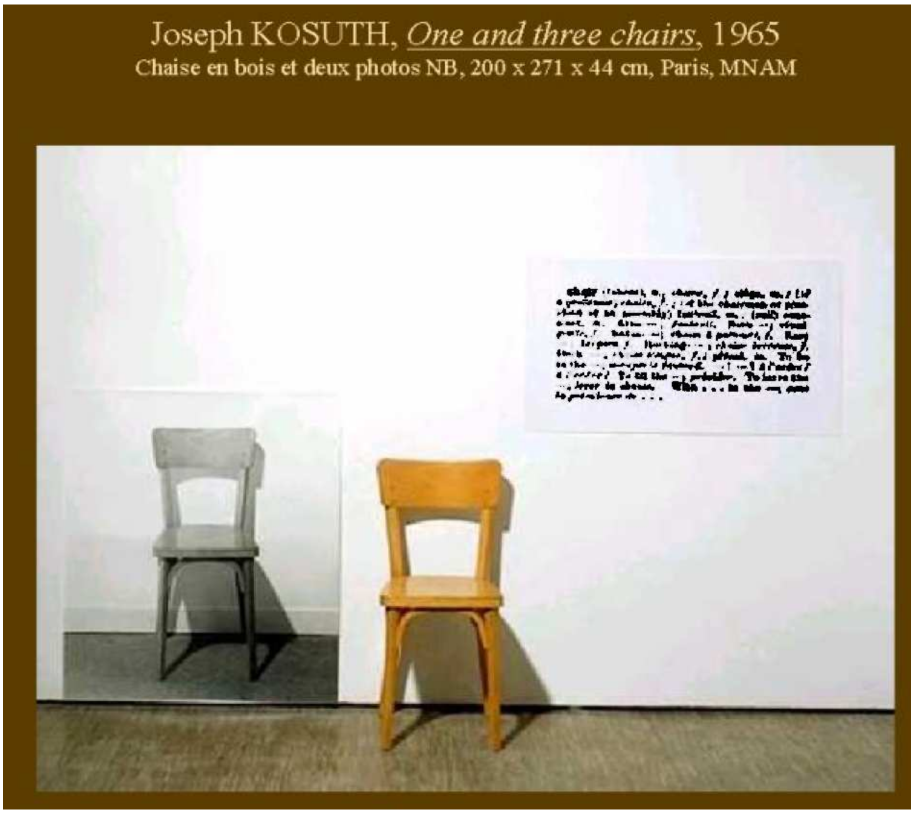


Figure 32 : ***Une et trois chaises (Kosuth, 1965)***

Sur ce montage (Figure 32), on peut distinguer de gauche à droite, la photographie d'une chaise, puis la chaise contre un mur blanc, et enfin une page reproduisant la définition du mot *chaise*. La chaise qui constitue l'objet est représentée par une photographie qui constitue l'image de la chaise, et par une définition extraite d'un dictionnaire qui en est la description verbale. L'image et la description verbale sont deux représentations sémiotiques de la chaise. Différentes représentations correspondent ainsi à un même objet.

S'agissant des mathématiques, la particularité réside à la fois dans la diversité des représentations sémiotiques et dans l'inaccessibilité des objets. Par exemple, si on considère le nombre 4, on peut distinguer différents types de représentations sémiotiques : une configuration de points (), une succession de chiffres (4 dans le système décimal ; 100 dans le système binaire ; 36/9 pour l'écriture fractionnaire, …).

Duval classe les différentes représentations dans des registres, ce que nous allons aborder dans le paragraphe suivant.

4.2.4.2. Registres de représentation sémiotique

[84] La langue maternelle est le premier système de représentation sémiotique, d'un point de vue génétique et social (Benveniste, 1974).

4.2.4.2.1. Définition

Duval (1995, pp. 36-44) entend par *registres de représentation tous les systèmes sémiotiques qui permettent d'effectuer des « traitements », c'est-à-dire de transformer, intrinsèquement une représentation en une autre, sans aucun apport de données externes aux représentations de départ.* Il distingue d'une part les registres multifonctionnels dont les traitements ne sont pas *algorithmisables* (exemples : les registres en langue naturelle ou les figures géométriques planes ou en perspective) et les registres monofonctionnels dont les traitements sont principalement des algorithmes (exemples : les systèmes d'écriture numériques ou algébriques, les graphes cartésiens).

Pour Duval, l'essentiel dans l'activité mathématique consiste à recourir à des *registres de représentation différents et l'originalité de l'activité mathématique est dans la mobilisation simultanée d'au moins deux registres de représentation à la fois, ou dans la possibilité de changer à tout moment de registre de représentation.* Les représentations sémiotiques jouent un rôle fondamental dans le processus de compréhension qui permet d'accéder aux objets mathématiques. Examinons à présent la résolution de problèmes à la lumière des registres de représentation.

4.2.4.2.2. Registres de représentation et énoncés mathématiques

Duval pose comme préalable que, sans l'énoncé du problème, il ne peut y avoir de problème mathématique.

4.2.4.2.2.1. Qu'est-ce qu'un énoncé de problème ? selon Duval

En se limitant à l'enseignement primaire et au collège, Duval considère comme *énoncé de problème* la *description partielle* d'une situation de sorte que les élèves puissent, à partir des informations fournies dans l'énoncé, aboutir à la solution du problème en passant éventuellement par des recherches d'informations intermédiaires non mentionnées explicitement dans l'énoncé. Il fournit la définition suivante (Duval, 2003, p. 22) :

> *On obtient un énoncé de problème EN AMPUTANT LA DESCRIPTION COMPLÈTE d'une situation et, cognitivement, il y a autant de types d'énoncés différents qu'il y a de manières différentes de supprimer des données dans une description complète pour obtenir UNE DESCRIPTION MINIMALE, (c'est-à-dire une description permettant de reconstituer la description complète). Autrement dit, l'énoncé change d'abord en fonction des données supprimées* (Duval, 2003, p. 22).

À l'évidence, un texte se présentant sous la forme d'une description qui comporterait toutes les informations, autrement dit qui inclurait une ou des questions et leurs réponses explicites ne pourrait être considéré comme un énoncé de problème.

Duval précise qu'une seconde description peut se superposer à cette première description minimale, permettant ainsi d'évoquer par exemple une situation *concrète* du monde environnant, en bref de *planter le décor*.

Il considère que les *problèmes d'application*, les problèmes à énoncés verbaux encore appelés *word problems* dans la littérature anglo-saxonne correspondent à ces descriptions minimales (Figure 33).

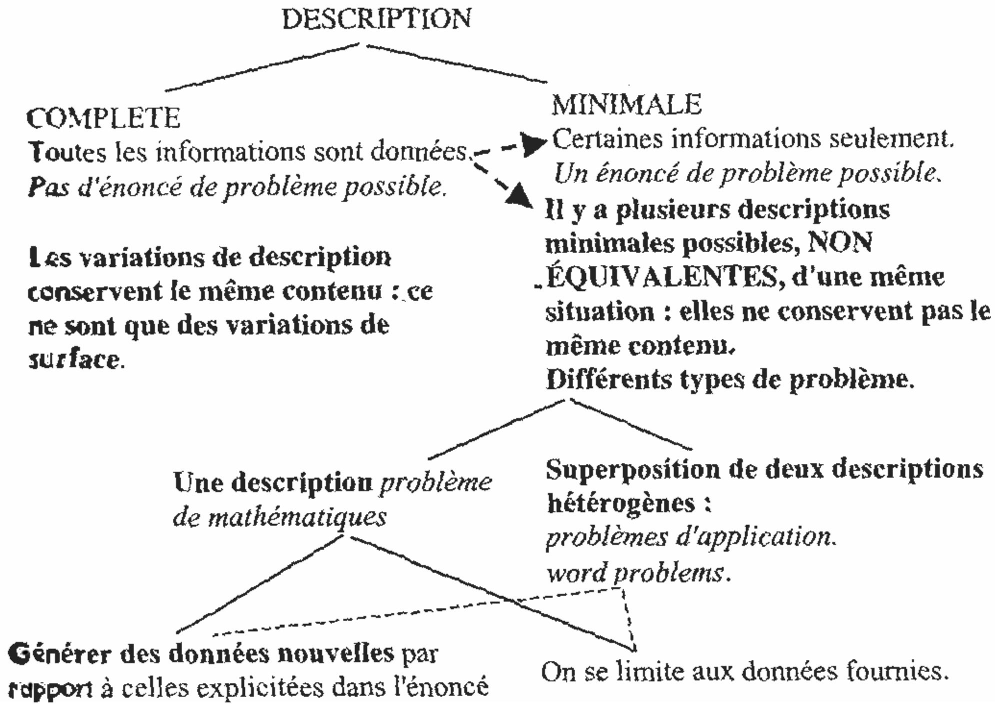


Figure 33 : ***Analyse en amont des énoncés de problèmes « didactiques » (Duval, 2003, p. 23)***

S'appuyant sur les résultats des travaux de Vergnaud (1976 ; 1990, pp. 149-158), Duval (1995 ; 2003, p. 24) montre l'intérêt à accorder à cette seconde description superposée qui associe par exemple aux nombres d'une opération à trou (4 + 3 = …) ou (… + 3 = 7) une valeur sémantique d'état ou de transformation ainsi qu'une valeur opératoire (*gagner* ou *perdre* ; *monter* ou *descendre* ; *vendre* ou *acheter*). Cette seconde description, autrement dit celle employée pour décrire *concrètement* la situation conduit à différentes possibilités d'énoncés correspondant soit à une question sur l'état (ou sur la transformation) initial, l'état intermédiaire ou l'état final. Nous reviendrons[85] sur les effets de ces variables.

De cette définition de l'énoncé de problème, découle toute l'importance à attacher d'emblée à la compréhension de l'énoncé et au recueil de données.

4.2.4.2.2.2. Congruence et non-congruence

Duval (1995) introduit la notion de *congruence* entre deux représentations relevant de registres de représentation sémiotique différents et étant supposés avoir un contenu commun. Trois critères permettent d'en déterminer l'existence :

• La correspondance sémantique entre les unités signifiantes, c'est-à-dire entre les unités relevant du *lexique* d'un registre.

Si l'on considère les deux expressions suivantes :

[85] Voir Partie 1 – 4.1.3.1.1.1. Le champ conceptuel des problèmes à structures additives.

> L'ensemble des points dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse *(expression 1)*.
> y > x *(expression 2)*

Ce premier critère est respecté étant donné qu'il y a bien correspondance sémantique entre les différentes unités du registre textuel et celles du registre algébrique.

- L'univocité sémantique terminale : à chaque unité signifiante élémentaire de la représentation de départ, ne correspond qu'une unité signifiante élémentaire dans le registre de la représentation d'arrivée.

Duval illustre la non-congruence par l'exemple suivant, du fait du non-respect de ce second critère :

> L'ensemble des points qui ont une abscisse positive *(expression 1)*
> x > 0 *(expression 2)*

Du fait que le registre algébrique ne comporte pas d'unité signifiante qui corresponde à l'unité textuelle *positive*, il est nécessaire de recourir à la combinaison de deux unités signifiantes : > et 0. Le principe d'univocité sémantique n'est donc pas respecté.

- Le même ordre possible d'appréhension de ces unités entre les deux représentations.

L'exemple suivant traduit une non-congruence du fait qu'il serait nécessaire de procéder à une réorganisation de l'expression de départ pour obtenir l'expression correspondante dans le registre d'arrivée qui elle, fait état d'un produit :

> L'ensemble des points dont l'abscisse et l'ordonnée sont de même signe *(expression 1)*
> xy > 0 *(expression 2).*

4.2.4.2.3. Changements de registres de représentation : conversions et traitements

La résolution de problèmes nécessite de passer du texte de l'énoncé à l'écriture du traitement mathématique, c'est-à-dire de retrouver dans l'énoncé et d'organiser toutes les informations nécessaires à la résolution du problème, de manière à poser et à écrire correctement le calcul à effectuer. Duval (1999) considère que la difficulté de la résolution réside dans ce passage du texte à l'écriture du calcul à effectuer. Il nomme *conversion* ce type de transformation qui consiste à changer de registre tout en conservant les mêmes objets dénotés. Le passage du texte de l'énoncé à l'écriture du calcul à effectuer est une conversion qui fait passer du registre de langue naturelle à un registre algébrique. Cette conversion est suivie d'une autre transformation qui consiste à effectuer le calcul dans un même registre et que Duval nomme *traitement*.

En résumé, Duval distingue deux types de transformation (Figure 34) : (i) celle qui s'effectue au sein d'un même registre de représentation et qu'il nomme *traitement*, (ii) celle qui nécessite un changement de registre de représentation, tout en conservant la référence aux mêmes objets et qu'il désigne sous le nom de *conversion*.

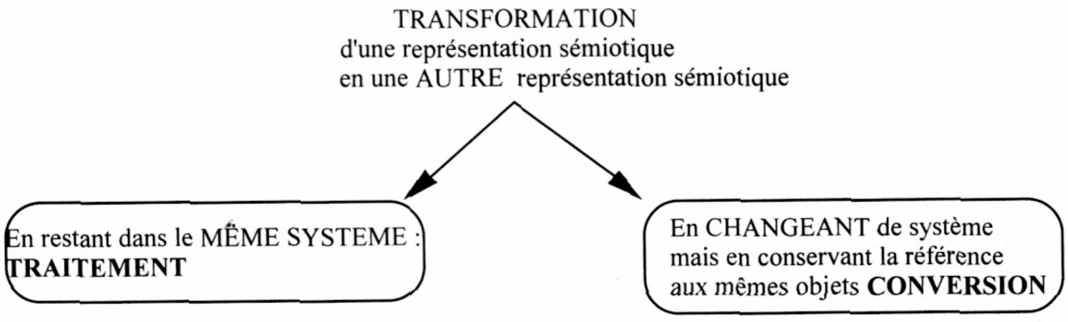


Figure 34 : ***Conversion et traitement (Duval, 2000, p. 3)***

Duval considère comme fondamentales pour la construction d'un concept les tâches de conversion entre plusieurs registres de représentation sémiotique d'un même objet mathématique.

Pluvinage (1998) propose, en se référant aux travaux de Duval (1995), le modèle opératoire suivant (Figure 35) dans lequel il est possible d'identifier les *représentants* des registres A et B, situés dans un même plan, tandis que le *représenté* se situe lui dans un autre plan. Les arcs fléchés correspondent aux transformations internes à un registre, c'est-à-dire aux traitements. Les flèches horizontales correspondent aux transformations externes, c'est-à-dire à des conversions par changement de registre. Quant à la flèche verticale, elle correspond à ce que Duval (1995) nomme la *compréhension intégrative d'une représentation*, elle suppose une coordination de deux registres.

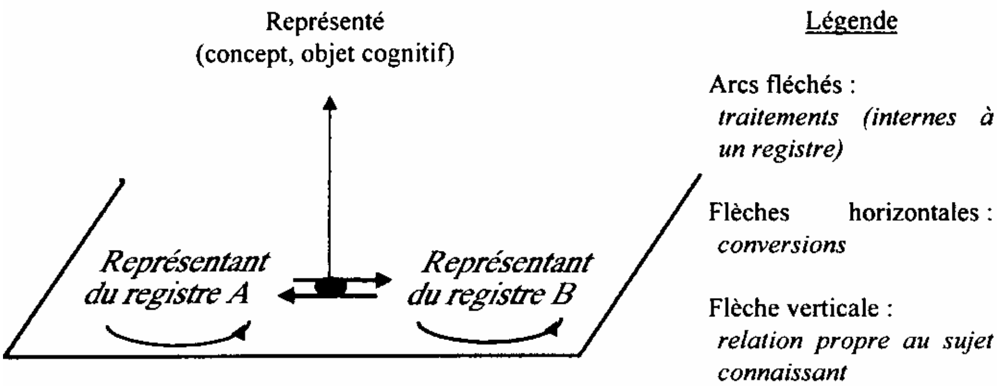


Figure 35 : ***Modèle opératoire des conversions et traitements selon Duval et Pluvinage (Pluvinage, 1998, p. 129)***

Chaque fois qu'un changement de registre s'avère nécessaire ou que deux registres doivent être mobilisés simultanément, on assiste à une augmentation du nombre d'échecs ou de blocages des élèves, à tous niveaux d'enseignement, les réussites étant très souvent des réussites monoregistres. Duval conseille de distinguer, lors de toute analyse de tâche, ce qui relève du traitement dans un registre et ce qui relève d'une conversion. Il déplore que dans le cadre de travaux relatifs à l'explication des processus cognitifs, la spécificité et l'importance des représentations sémiotiques soient fréquemment abordées de manière réductrice.

Dans cette même perspective, Dupuis et Rousset-Bert (1996) développent la thèse qu'un objet mathématique n'existe qu'au travers de ses différentes représentations sémiotiques et que c'est la coordination de ces différentes représentations qui permettra l'appréhension de cet objet mathématique.

Ce point de vue est également partagé par Hitt (2003) qui regrette le décalage souvent constaté entre les représentations sémiotiques spontanées, fonctionnelles, produites par les élèves et celles attendues par les professeurs, les premières jouant selon Hitt un rôle fondamental dans la construction des connaissances. Il donne entre autres comme exemple le cas d'un élève qui, sans doute conscient d'erreurs, recommence plusieurs fois la résolution d'un problème mais qui, enfermé dans un registre algébrique (Figure 36) ne parvient pas à développer un processus cohérent lui permettant d'aboutir à la solution du problème.

> *Dans une course, Manuel a compté 25 véhicules pendant que Carlos comptait 70 roues. Les véhicules étaient soit des taxis soit des motos. Combien de taxis et combien de motos y avait-il dans la course ?* (Hitt, 2003, p. 259)

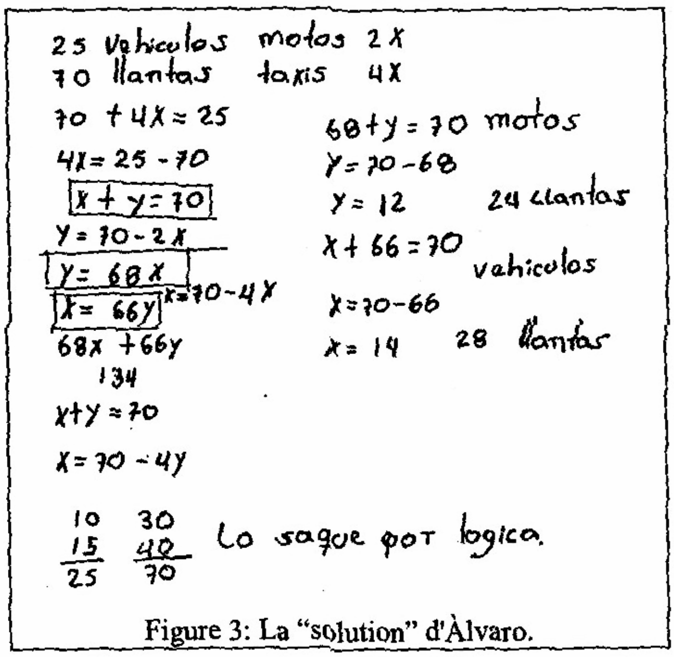
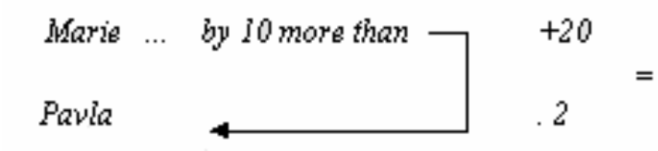


Figure 3: La “solution” d'Àlvaro.

Figure 36 : ***La solution d'Alvaro (Hitt, 2003, p. 261)***

Selon cette même perspective, Novotná (2003, p. 29) observe qu'en l'absence d'une présentation préalable par le professeur, le langage graphique est rarement utilisé par les élèves. Elle montre (Novotnà, 2001) l'aide que peut apporter une représentation du type :



dans la résolution du problème suivant :

> *Marie and Pavla each had some money but Marie had 10 CZK more than Pavla. Pavla managed to double the amount of money she had and Marie added 20 CZK more to her original amount. They now found that both of them had the same amount. How many crowns did each of them have at the beginning?*

Cependant, elle avertit aussi du risque encouru d'imposer un tel recours, étant donné qu'il existe des différences individuelles dans la manière de traiter des représentations sémiotiques, liées par exemple à l'habileté à dessiner, ou à l'influence de l'école ou du milieu familial.

Armando, Vallejo et Pluvinage (2003) reconnaissent les difficultés à *pouvoir piloter dans une classe traditionnelle les divers registres sémiotiques associés à un concept mathématique déterminé* ; afin de tenter d'y remédier, ils suggèrent de s'intéresser à l'environnement professionnel du professeur. En effet, selon ces auteurs, les outils usuels tels que le manuel scolaire, la salle de classe, le tableau, les supports papier ne sauraient suffire pour pallier ces difficultés[86] et ils suggèrent l'usage de l'outil informatique.

En conclusion, nous reprendrons les commentaires formulés par Pluvinage (1998) :

> *La théorie des registres d'expression permet de remplacer l'accumulation de savoirs étrangers les uns aux autres par une aide réciproque des uns par les autres. Une condition est une pratique suffisante, en temps certes, mais surtout en nombre et variété des tâches de traitements et de conversions de registres suscités par les exercices* (Pluvinage, 1998, p. 136).

4.3. Impact des caractéristiques des problèmes et de leurs énoncés sur les performances des élèves à résoudre les problèmes

La centration de notre travail sur l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes à données numériques verbaux nous conduit à examiner les résultats des recherches traitant de l'impact des caractéristiques des énoncés de problèmes sur les performances des élèves à résoudre les problèmes.

Notons que la plupart de ces travaux débutent dans les années 80, période où l'on commence à s'interroger sur le rôle joué par d'autres facteurs que le calcul dans la résolution de problèmes à énoncés verbaux (Fayol et Abdi, 1986). Deux principaux paramètres étaient pris en compte : le calcul dit numérique[87] et le calcul relationnel[88]. En rupture avec les travaux de Zweng (1979) pour qui la difficulté essentielle rencontrée par les élèves pour résoudre un problème, était de choisir l'opération correcte permettant d'accéder à la solution, Carpenter et al. (1980) montrent les écarts entre les performances d'élèves confrontés à la résolution d'un même problème présenté sous deux formats : un format strictement numérique et un format verbal ; les performances pour le premier étant de 10 à 30 % supérieures à celles du second. Les obstacles pour résoudre des problèmes présentés sous un format verbal sont à rechercher ailleurs que dans les compétences de calcul des élèves. Tandis que Riley, Greeno et Heller (1983), Kilpatrick (1987) travaillent sur les formulations des énoncés, De Corte et Verschaffel (1985) considèrent que les erreurs rencontrées chez les enfants seraient principalement liées à une représentation erronée de la situation évoquée par le problème.

---

[86] Cette étude située à des niveaux d'enseignement post-élémentaire propose une ingénierie didactique axée sur l'usage de l'ordinateur.

[87] *Calcul numérique : renvoie au comptage des opérations (au sens trivial de ce terme)* (Fayol et Abdi, 1986).

[88] *Calcul relationnel : correspond à la représentation mentale des relations entre les éléments de la situation décrite par l'énoncé du problème* (Fayol et Abdi, 1986).

L'étude de travaux théoriques, principalement issus des psychologies de l'apprentissage et de l'éducation devrait ainsi guider l'analyse des résultats obtenus dans le cadre de notre expérimentation. Pour ce faire, nous nous attarderons ci-après sur les travaux qui traitent, premièrement, des caractéristiques conceptuelles et sémantiques des problèmes, deuxièmement, des caractéristiques relationnelles de l'énoncé, troisièmement, de l'effet des opérations.

4.3.1. Caractéristiques conceptuelles et sémantiques des problèmes

Dès les années 80, plusieurs études issues principalement de la psychologie de l'apprentissage traitent du rôle essentiel joué par les caractéristiques sémantiques ou conceptuelles des problèmes dans le processus d'arithmétisation. C'est sur cette base que des classifications de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux ont été élaborées et ont donné lieu à plusieurs taxonomies, les unes centrées sur les problèmes additifs, les autres sur les problèmes multiplicatifs.

Dans notre travail de recherche, nous nous appuierons principalement sur celles élaborées par Vergnaud (1982, 1988, 1991) et par Riley, Greeno et Heller (1983), en élargissant notre réflexion aux problèmes complexes (Crahay, 2005).

4.3.1.1. Problèmes à structures additives ou multiplicatives, problèmes complexes

En considérant successivement les problèmes à structures additives, multiplicatives et les problèmes complexes, il s'agit ici de repérer s'il existe des liens entre les caractéristiques sémantiques des différents types et les difficultés rencontrées par les élèves.

4.3.1.1.1. Les problèmes à structures additives

Les problèmes à structures additives ont donné lieu à un nombre important de recherches au cours des deux dernières décennies. De nombreuses recherches montrent que les opérations en jeu (addition ou soustraction) ne suffisent pas à expliquer les difficultés rencontrées par les élèves mais qu'il convient de s'intéresser également aux relations et aux concepts sous-jacents.

D'autres classifications ont été élaborées : Carpenter et Moser (1983), Riley, Greeno et Heller (1983). Prenant en compte les concepts d'accroissement, de diminution, de combinaison et de comparaison, elles sont basées, comme celle de Vergnaud (1982) sur les relations sémantiques ; elles intègrent cependant d'autres critères tels que l'opération impliquée et l'identité de l'inconnue.

C'est le cas de la classification proposée par Riley, Greeno et Heller (1983) qui distingue trois grands ensembles de problèmes :

- les problèmes de changement qui relatent des situations indiquant un état initial sur lequel s'opère un changement, aboutissant à un état final ;
- les problèmes de combinaison, qui relatent des situations statiques ;

• les problèmes de comparaison qui relatent des comparaisons entre deux situations statiques en utilisant les expressions *plus que, moins que*.

Ces catégories sont elles-mêmes subdivisées en trois sous-ensembles suivant que l'inconnue concerne

(i) l'état final (exemple : *X avait 3 billes. Puis Y lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X ?*)

(ii) l'état initial (exemple : *X avait des billes. Y lui en a donné 5 de plus. Maintenant X a 8 billes; Combien X avait-il de billes ?*)

(iii) la transformation opérée (exemple : X avait 3 billes. *Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il donné à X ?*).

Le tableau 5 présente ces trois catégories : problèmes de changement, problèmes de combinaison, problèmes de comparaison.

TYPES DE PROBLÈME		TAUX DE RÉUSSITE			
PROBLÈMES DE CHANGEMENT		5 ans	6 ans	7 ans	8 ans
Changement 1	X avait 3 billes. Puis Y lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X ?	.87	1.00	1.00	1.00
Changement 2	X avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Y. Combien de billes a maintenant X ?	1.00	1.00	1.00	1.00
Changement 3	X avait 3 billes. Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il donné à X ?	.61	.56	1.00	1.00
Changement 4	X avait 8 billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien a-t-il donné de billes à Y ?	.91	.78	1.00	1.00
Changement 5	X avait des billes. Y lui en a donné 5 de plus. Maintenant X a 8 billes. Combien X avait-il de billes ?	.09	.28	.80	.95
Changement 6	X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes ?	.22	.39	.70	.80
PROBLÈMES DE COMBINAISON					
Combinaison 1	X a 3 billes. Y a 5 billes. Combien X et Y ont-ils de billes ensemble ?	1.00	1.00	1.00	1.00
Combinaison 2	X et Y ont ensemble 8 billes. X a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes ?	.22	.39	.70	1.00
PROBLÈMES DE COMPARAISON					
Comparaison 1	X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien X a-t-il de billes de plus que Y ?	.17	.28	.85	1.00
Comparaison 2	X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien Y a-t-il de billes de moins que X ?	.04	.22	.75	1.00
Comparaison 3	X a 3 billes. Y a 5 billes de plus que X. Combien Y a-t-il de billes ?	.13	.17	.80	1.00
Comparaison 4	X a 8 billes. Y a 5 billes de moins. Combien Y a-t-il de billes ?	.17	.28	.90	.95
Comparaison 5	X a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Y. Combien Y a-t-il de billes ?	.17	.11	.65	.75
Comparaison 6	X a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Y. Combien Y a-t-il de billes ?	.00	.06	.35	.75

Tableau 5 : ***Catégorisation des problèmes et taux de réussite selon Riley, Greeno et Heller (1983)***

Le tableau 5 indique les taux de réussite à plusieurs âges de la scolarité, 5 ans, 6 ans, 7 ans, 8 ans, en regard des types de problèmes.

Il ressort de l'étude réalisée par Riley et al., répliquée par De Corte et Verschaffel (1991) que les niveaux de difficulté des problèmes impliquant la même opération arithmétique varient :

(i) d'une part en fonction de l'appartenance à telle ou telle catégorie sémantique, les problèmes de type changement étant les mieux réussis et ceux de type comparaison posant le plus de difficultés.

(ii) d'autre part en fonction de la nature de l'inconnue. Si on considère les problèmes de type *changement*, la recherche de l'état final après une transformation (Changements 1 et 2) obtient un taux de réussite plus élevé que la recherche de la transformation (Changements 3 et 4) et surtout que la recherche de l'état initial (Changements 5 et 6).

Plusieurs autres recherches attestent de l'impact de la nature de l'inconnue sur les performances à la résolution : à tous les âges, les problèmes à état final inconnu sont facilement résolus à l'aide de procédures pertinentes et homogènes tandis que les performances sont plus faibles dès lors que c'est l'état initial qui est inconnu. (Riley et al, 1983 ; Fayol et Abdi, 1986 ; Fayol, Abdi et Gombert, 1987).

L'interprétation peut résider dans le fait que les problèmes à état final inconnu ont été souvent rencontrés par les enfants et qu'ainsi un schéma de résolution, associant des procédures de reconnaissance et de résolution leur est associé, selon un processus du type *de haut en bas* (*top down*) d'où l'homogénéité des procédures et des performances des élèves. Au contraire, les problèmes de changement à état initial inconnu sont moins fréquemment proposés, conduisant souvent à l'absence d'un schéma associé. On est alors dans un processus du type *de bas en haut* (*bottom-up*) susceptible de provoquer une surcharge de la mémoire de travail. Carpenter et Moser (1983) attribuent aussi ces écarts de performances aux procédures de résolution qui varient en fonction des types de problèmes.

4 + 3 = 7	4 - 3 = 1
4 + 3 = ... Cela correspond aux énoncés A.1, A. 2 ci-dessus (fig.1). 4 + ... = 7 A.3. Pierre joue deux parties de billes. A la *première* il **gagne 4** billes. *En tout* il a **gagné 7** billes. Que s'est-il passé *à la deuxième partie* ? .... + 3 = 7 A.4. Pierre joue deux parties de billes. Il joue une *première* partie. A la seconde il **gagne 3** billes. *En tout* il a **gagné 7** billes. Que s'est-il passé *à la première partie* ?	4 - 3 = 1 Cela correspond aux énoncés B.1, B. 2 ci-dessus (fig.1). 4 - .... = 1 B.3. Pierre joue deux parties de billes. A la *première* il **gagne 4** billes. *En tout* il a **gagné 1** bille. Que s'est-il passé *à la deuxième partie* ? ..... - 3 = 1 B.4. Pierre joue deux parties de billes. Il joue une *première* partie. A la seconde il **perd 3** billes. *En tout* il a **gagné 1** bille. Que s'est-il passé *à la première partie* ?

Figure 37 : ***Variations rédactionnelles de l'énoncé d'un problème additif en fonction de la place de la donnée manquante (Duval, 1997, P. 5)***

Duval (1997) effectue le même type de constat sur l'effet du positionnement de l'inconnue. Tandis que tous les énoncés proposés (Figure 37) présentent les mêmes marques linguistiques, autrement dit emploient le même vocabulaire, sont composés de phrases de même longueur et de même complexité syntaxique, et de plus décrivent une même situation extra-mathématique, on relève des différences de performances dans la résolution, révélant parfois jusqu'à deux ans de décalage entre la réussite aux différents problèmes, les problèmes A4 et B4 étant les moins bien réussis, avec pour B4 des échecs encore très élevés en 6$^{\text{ème}}$.

Duval insiste sur le rôle joué par la présence de *variables rédactionnelles intrinsèques*, qu'on ne peut identifier par aucune marque linguistique spécifique et qui pourtant, en faisant varier la place de la donnée manquante, influent sur le traitement mathématique.

Dans la lignée des travaux conduits à l'IREM de Strasbourg, Damm (1992) s'intéresse aux difficultés de compréhension des problèmes. S'appuyant sur la notion de congruence[89] définie par Duval (1995), elle propose à des élèves de CM1 et de CM2 l'utilisation d'une représentation qu'elle qualifie de bidimensionnelle. Il s'agit d'apprendre aux élèves à sélectionner et à organiser les données des énoncés qui seront reportées sur deux axes distincts. Pour ce faire, les élèves doivent donc séparer et articuler les deux types de données pertinentes qui se situent dans l'énoncé, à savoir les données relatives aux valeurs opératoires des nombres et celles qui concernent les relations entre ces données.

Ainsi pour le problème suivant :

> *Pierre a (ou « a gagné » ou « a perdu ») 5 billes. Il joue une partie (ou il « joue une deuxième partie »). En tout il a 9 billes (ou « a gagné », ou « a perdu »).*

On attend la représentation suivante :

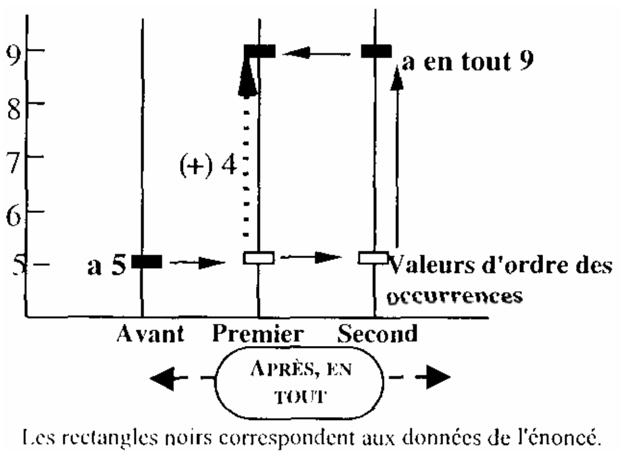


Figure 38 : ***Représentation attendue selon Damm (in Duval, 2002, p. 25)***

Après avoir montré les difficultés générées par les élèves par les phénomènes de congruence ou de non-congruence des énoncés de problèmes, Duval (1995) dégage le rôle que peuvent respectivement jouer la représentation bidimensionnelle proposée par Damm et celle unidimensionnelle proposée par Vergnaud et Durand (1976, pp. 41-42) et Vergnaud (1990, pp. 150-157) dans la prise en compte des phénomènes de congruence.

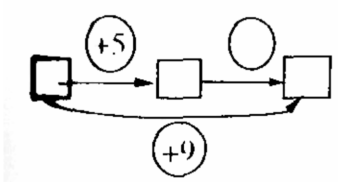


Figure 39 : ***Représentation attendue selon Vergnaud (in Duval, 2002, p. 25)***

[89] Voir Partie 1 – 4.1.2.4.2.2.2. Congruence et non-congruence.

Tandis que la représentation unidimensionnelle (Figure 39) est congruente à l'une des trois opérations à trous possibles (5 + 4 = 9), le schéma bidimensionnel présente l'avantage de la congruence à la double description de l'énoncé. De plus, il permet de bien distinguer les deux descriptions.

Mais selon d'autres études, l'impact de ces diverses données sémantiques serait parfois faible au regard de celui de la formulation. En effet, les performances des élèves s'améliorent dès lors (i) que la situation décrite dans l'énoncé est rendue plus explicite, (ii) que l'ordre de survenue des événements est respecté et (iii) que le lexique employé est adapté à l'élève (De Corte et Verschaffel, 1987 ; De Corte, Verschaffel et De Winn, 1985).

Dans cet ordre d'idée, Jitendra et al. (2007) montrent l'intérêt de la méthode *Schema-Based Instruction* (SBI) qui prévoit deux phases successives :

(i) la première au cours de laquelle on enseigne aux élèves à repérer les caractéristiques principales d'énoncés ne contenant pas d'informations inconnues.

> *Change: Jane had 4 video games. Then her mother gave her 3 more video games for her birthday. Jane now has 7 video games.*
>
> *Group: 68 students at Hillcrest Elementary took part in the school play. There were 22 third graders, 19 fourth graders, and 27 fifth graders in the school play.*
>
> *Compare: Joe is 8 years older than Jill. Jill is 7 years old and Joe is 15 years old* (Jitendra et al., 2007, p. 119).

Les élèves doivent ensuite reporter sur un diagramme les données identifiées dans l'énoncé (Figure 40).

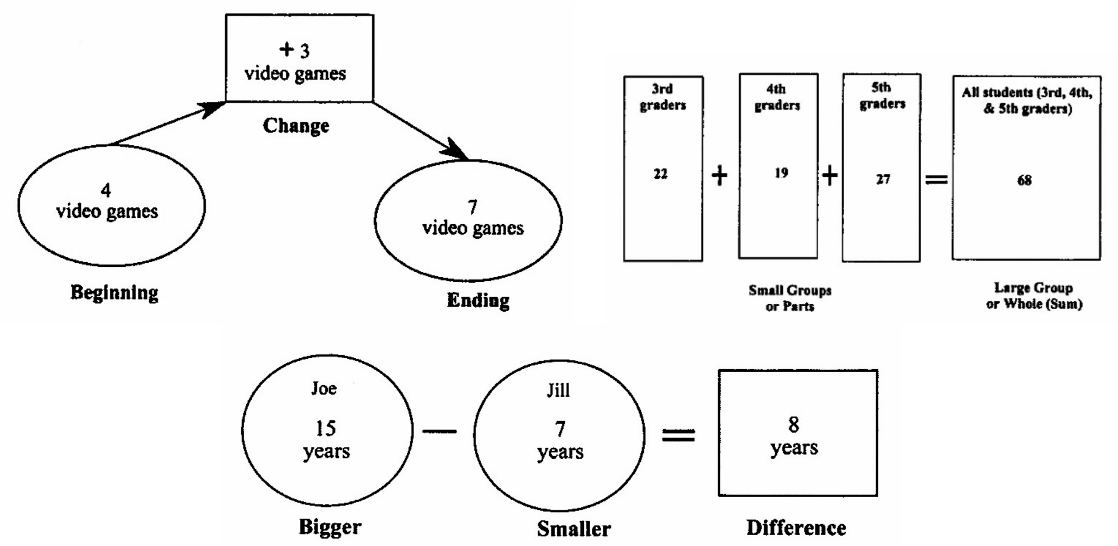


Figure 40 : ***Diagrammes proposés dans la méthode SBI pour les problèmes de changement, de groupement et de comparaison (Jitendra et al., 2007, p. 119)***

(ii) la seconde au cours de laquelle les élèves sont confrontés à des énoncés comportant des inconnues. Il s'agit successivement de trouver le diagramme-type, de l'instancier avec les données pertinentes de la nouvelle situation, de planifier la résolution du problème et enfin de le résoudre.

4.3.1.1.2. Les problèmes à structures multiplicatives

Cependant, tandis que des degrés de difficultés ont été établis entre les différentes catégories des problèmes additifs, aucune recherche de ce type n'a, à notre connaissance, été mise en œuvre à ce jour pour déterminer de manière systématique les relations entre les difficultés éventuellement liées aux catégories de problèmes multiplicatifs. Il apparaît néanmoins que, à l'instar des problèmes à structures additives, la structure du problème et l'aspect sémantique ont un impact sur les performances des élèves dans la résolution des problèmes à structures multiplicatives.

Une étude conduite par Levain (1992) auprès de 46 élèves de CM2 révèle une variation de réussite dans la résolution de 50 problèmes multiplicatifs puisque le taux de réussite passe de 65% pour l'ensemble des problèmes à 50% pour les problèmes de quatrième proportionnelle. S'agissant de l'aspect sémiotique, la même étude montre une diminution de 10 points du pourcentage dès lors que le domaine de référence de l'énoncé devient moins familier : par exemple, les performances sont moins élevées dans des situations traitant de vitesse, de taux de change que dans des situations relatives à des achats ou à des ventes de marchandises.

La synthèse établie par Barrouillet et Camos (2002) précise que les problèmes mettant en jeu des quantités et des groupes égaux sont plutôt faciles à résoudre et ce, au contraire des problèmes impliquant des produits cartésiens (ex : *Au bal, il y a 5 garçons et 4 filles. Si tous les garçons dansent avec toutes les filles, combien de couples vont pouvoir être formés ?*) et des problèmes de conversion de mesures (ex : *Un pouce mesure 2,4 cm. A combien de centimètres correspondent 3 pouces ?*). Ainsi, comme pour les problèmes additifs, la difficulté du problème ne se limite pas à la nature de l'opération mise en jeu puisque, à opérations identiques, deux problèmes sont de difficultés inégales. Ici encore, la sémantique et la structure du problème ont pour une large part un effet sur les performances et les stratégies des sujets.

Outre les problèmes additifs et les problèmes multiplicatifs, notre expérimentation portera sur des problèmes dont la résolution relève de plusieurs structures. Plusieurs travaux de recherche utilisent l'expression *problèmes complexes* pour caractériser ces types de problèmes.

4.3.1.1.3. Les problèmes complexes

Levain et Vergnaud (1995) font référence à des *problèmes plus ou moins complexes* en associant la complexité d'un problème à la complexité des procédures et des concepts qui permettront de le résoudre. Selon ces auteurs, la complexité d'un problème peut être due à sa structure mathématique, aux valeurs numériques impliquées ou encore au degré de familiarité de l'élève avec le domaine de référence de l'énoncé ou avec l'ordre de présentation des informations.

On trouve chez de nombreux auteurs la référence aux problèmes complexes, problèmes pour lesquels il n'existe pas de schéma canonique de résolution et dont la solution exige la combinaison de plusieurs procédures (Rey, Carette, Defrance et Kahn, 2003). C'est le sens que nous donnerons dans nos travaux à l'expression *problèmes complexes*.

Les procédures qui doivent être mobilisées pour la résolution ne sont pas clairement déterminées. Nous emprunterons à Crahay (2005) un exemple de problème complexe : l'aquarium.

PC2 L'AQUARIUM

Des élèves voudraient installer un aquarium sur l'appui de fenêtre de leur classe. Ils disposent de 95 €. L'appui de fenêtre peut supporter un aquarium de 30 cm de large maximum. Après discussion, les élèves ont fixé la liste de leurs emplettes :

- 1 aquarium de 30 cm de large ou moins,
- du gravier pour obtenir une couche de 2 cm d'épaisseur,
- deux plantes,
- cinq poissons de 3 espèces différentes.

Sers-toi du tarif ci-joint pour faire les comptes.

Aquarium :

120 cm × 30 cm × 45 cm = 135 €
100 cm × 30 cm × 45 cm = 113 €
80 cm × 30 cm × 40 cm = 95 €
65 cm × 30 cm × 35 cm = 80 €
50 cm × 25 cm × 40 cm = 72 €

À l'achat d'un aquarium, le marchand offre un bon de 5 € à valoir sur l'achat de poissons.

Gravier :

3 € le sac de 1 litre.

Plantes :

3 sortes sont possibles : à 2 €, 2,25 € et 3,5 €.

Poissons :

4 sortes sont possibles : à 1 €, 2,5 €, 3 € et 8,5 €.

Figure 41 : ***Un problème complexe : l'aquarium (Crahay, 2005)***

Aucune sous-question ne guide l'élève dans le choix de procédures pour résoudre ce problème qui peut être décomposé en plusieurs sous-problèmes, lesquels correspondent au choix de l'aquarium, à la détermination du nombre de sacs de gravier, au choix des plantes et des poissons. On est ici en présence d'un problème centré sur le développement des capacités à chercher. La détermination des sous-problèmes reste à la charge de l'élève.

Les problèmes complexes peuvent être soit de type additif, soit de type multiplicatif, soit relever des deux types à la fois. En retenant cette acception, deux problèmes complexes appartiennent à l'ensemble des douze problèmes retenus pour notre expérimentation. Il nous importe donc d'inventorier les travaux spécifiques aux difficultés rencontrées par les sujets lors de la résolution de ce type de problèmes. A l'issue d'une expérimentation conduite par Crahay (2005) dans 61 écoles belges, auprès de 1436 élèves de 6$^{\text{ème}}$ année primaire pour résoudre deux problèmes complexes, il ressort que la maîtrise des procédures ou algorithmes de calcul impliqués dans la résolution de problèmes complexes est nécessaire, mais pas suffisante. Autrement dit, si l'on considère l'exemple du problème complexe *L'aquarium,* on constate que la majorité des élèves (71,8%) ne se préoccupent pas de l'achat du volume de gravier, et ce, alors que 44,5% d'entre eux sont capables de choisir et d'appliquer correctement la formule de calcul du volume dans la situation suivante :

SD 2.1

Des élèves veulent acheter du terreau pour remplir un bac de fleur. (Le bac de fleur est dessiné, respectant à l'échelle, les dimensions suivantes … 50 cm × 25 cm × 40 cm)

Calcule le volume de terreau nécessaire !

Figure 42 : ***Problème sollicitant un calcul volumique (Crahay, 2005)***

La majorité des élèves focalisent l'attention sur le budget total de 95 € à ne pas dépasser.

Cette étude atteste l'existence de deux principales difficultés inhérentes à la résolution de problèmes complexes : les sujets ne parviennent pas à construire une représentation adéquate du problème, et à élaborer un plan de résolution ; ils n'organisent pas les procédures à mobiliser, alors même qu'ils les maîtrisent dans des situations non complexes. Ce type de difficulté peut évoquer un problème de planification de la démarche (Schoenfeld, 1994). Il s'agit pour le sujet, non seulement de décider de l'ordre des procédures, mais aussi de les mobiliser en fonction de leur ordre, de les exécuter correctement tout en vérifiant l'adéquation entre la planification des procédures et la conduite vers une solution au problème posé. Le nombre d'informations pouvant être traitées simultanément en mémoire de travail étant limité (Baddeley, 1996), il s'ensuit que plus un problème est complexe, plus le risque de surcharge cognitive est grand. Pour Crahay (2005), la résolution de problèmes complexes est, par essence, une démarche plurielle.

Duval (1997) souligne aussi l'effet du choix de la question sur la réussite dans l'écriture du traitement mathématique instancié. En effet, le taux de réussite au problème pourra varier selon que la question portera sur une information directement accessible à partir des valeurs numériques présentes dans le texte, ou bien sur une information qui requiert des calculs intermédiaires.

Outre les structures des problèmes, la relation avec la vie quotidienne semble avoir un effet sur les difficultés des élèves à résoudre les problèmes.

4.3.1.2. Relation des problèmes avec la vie quotidienne

La relation des problèmes avec la vie quotidienne constitue un paramètre souvent étudié en psychologie. Les exemples fournis par Nunes, Schliemann et Carraher (1993) attestent que les problèmes qui se situent directement en relation avec des situations vécues de la vie quotidienne sont mieux réussis que les autres problèmes : de jeunes vendeurs de rue Brésiliens âgés de 12 ans environ et n'ayant jamais été scolarisés manifestent des compétences remarquables pour la résolution de problèmes qui traitent des prix et des bonbons. Chez ces jeunes, le taux de réussite au problème : *Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros l'un ?* est de 75%. Pour trouver *le prix de 10 noix de coco à 35 cruzeiros l'une*, l'un des jeunes vendeurs brésiliens procède ainsi : *trois valent cent cinq, avec trois de plus, deux cent dix, pause. Il y en a encore quatre. C'est (pause) trois cent quinze (pause), ça semble être trois cent cinquante.* (Carraher, Carraher & Schliemann, 1985 in Fayol, 2005).

Cependant, dès lors que ces situations sont présentées à l'école, sous la forme de problèmes à énoncés verbaux, tout se passe comme si les élèves excluaient les connaissances du monde extérieur, comme en attestent plusieurs études (Acioly, 1985 ; Carraher, Carraher, Schliemann, 1985 ; Acioly-Régnier, 1996).

La relation entre la référence à des situations de la vie quotidienne et les performances des élèves a fait l'objet de nombreux travaux. Examinons cependant l'exemple suivant fourni par Nesher (1980) : *Quelle sera la température de l'eau d'un récipient si on verse un verre d'eau à 80 ° et un verre d'eau à 40 ° ?* Une réponse fréquente est 120° alors que si on formule pour ces mêmes élèves la même question mais cette fois-ci en faisant référence à une quantité d'eau chaude et à une quantité d'eau froide, la réponse fournie est *de l'eau tiède*.

Ainsi, la compréhension du sens de la situation ne garantit pas la réussite au problème mathématique. C'est une condition nécessaire, mais non suffisante. Dès lors que l'on introduit des données quantitatives dans l'énoncé, c'est la règle apprise à l'école qui est appliquée : quand on réunit deux choses, on additionne les nombres. L'application de cette règle prévaut ainsi sur la compréhension du sens de la situation qui avait été initialement perçu.

Prenons maintenant l'exemple suivant emprunté à Fayol, Camos, Roussel (2000) : Dans une situation de travail, un ouvrier qui doit creuser une tranchée, qui sait par expérience qu'il lui faudra 20 heures pour creuser cette tranchée et qui se voit bénéficier de l'aide d'un compagnon de travail pour partager la tâche, saura d'emblée que 10 heures lui suffiront pour creuser ladite tranchée. Cependant, dans une situation de formation, par exemple, il existe une forte probabilité pour que ce même ouvrier fournisse une réponse erronée au problème suivant présenté sous la forme d'un énoncé verbal de type : *Un ouvrier met 20 heures pour creuser une tranchée. Combien mettront 2 ouvriers ?* La réponse *40 heures* est très fréquente.

Ces deux exemples illustrent la difficulté générée par le passage entre des situations de problèmes réellement vécues et des situations évoquées sous la forme d'énoncés verbaux. Ceci pose le problème de la relation entre une représentation intuitive d'une situation et une représentation calculatoire. Les élèves rencontrent des difficultés lors du passage à la mathématisation de la situation. On retrouve ce même type de résultats dans une étude conduite simultanément en Irlande et en Flandres, par Greer (1993) et par Verschaffel, De Corte et Lasure (1994) et répliquée dans plusieurs autres pays. Confrontés à des paires d'items composées d'un item standard (S) de type :

> *Un homme coupe une corde à linge de 12 mètres en morceaux de 1,5 mètre chacun. Combien de morceaux obtiendra-t-il ?* (Verschaffel, De Corte, 2005, p. 157).

et d'un item problématique (P) tel que :

> *Un homme veut une corde assez longue pour l'étendre entre deux mâts séparés de 12 mètres, mais il ne dispose que de morceaux de corde de 1,5 mètre de long. Combien de ces morceaux doit-il attacher les uns aux autres pour disposer d'une corde qu'il puisse étendre entre les deux mâts ?* (Verschaffel, De Corte, 2005, p. 157).

les élèves révèlent lors d'interviews l'existence *d'un fossé entre le monde artificiel des problèmes arithmétiques verbaux présentés à l'école et le monde réel en dehors de l'école*.

Une élève de 13 ans a réagi comme suit lors de l'interview (Caldwell, 1995, p. 39 in Verschaffel, De Corte, 2005, p. 159) :

> *Je connais toutes ces choses, mais je ne pensais pas les inclure dans le problème de math. Les mathématiques ne concernent pas ces choses-là. Les maths c'est faire des additions correctement et vous n'avez pas besoin de connaître les choses extérieures pour faire des additions correctement* (Verschaffel, De Corte, 2005, p. 159).

Les différentes études montrent que cette *mise entre parenthèses* du sens n'est pas due à un déficit cognitif. Verschaffel et De Corte fournissent l'explicitation suivante à ce type de réaction : alors que l'application des mathématiques à la résolution de problèmes complexes pourrait relever du processus de modélisation suivant (Figure 43), les élèves, dans le cas de la résolution de problèmes scolaires verbaux, se concentreraient sur le modèle mathématique évoqué par le type de situation mathématique et occulteraient ainsi toute référence à l'énoncé initial pour vérifier la vraisemblance par rapport à la question posée.

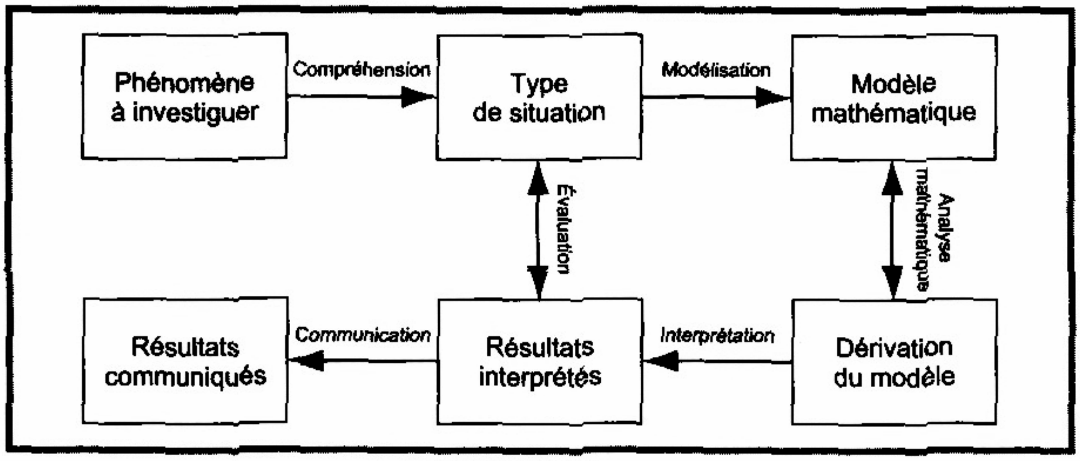


Figure 43 : ***Schéma du processus de modélisation (Verschaffel, De Corte, 2005, p. 155)***

Les conseils invitant les élèves à être attentifs en se référant au contexte n'ont pas produit d'effet significatif sur les performances des élèves aux items de type P. En revanche, dès lors que ces problèmes verbaux ont été présentés dans un contexte plus proche du monde réel, on a observé une amélioration des performances aux items de type P (DeFranco et Curcio, 1997). Dans cette perspective, Verschaffel et De Corte proposent de reconceptualiser le rôle des problèmes verbaux dans l'enseignement des mathématiques. Ils adaptent le modèle précédent (Figure 43) en insistant notamment (Figure 44) sur :

> *a) La connaissance des phénomènes réels n'est pas supprimée mais considérée comme une composante précieuse lors de l'étape initiale du processus de solution.*
> *b) La nature de l'acte de modélisation est influencée par les buts implicites de la situation, imposés par l'enseignant ou négociés.*
> *c) Le sujet qui résout le problème utilise une large gamme de ressources (y compris des outils informatiques de modélisation) aux différentes étapes de la modélisation mathématique et dans ses analyses.*
> *d) L'interprétation implique de comparer des modèles alternatifs.*
> *e) La phase de communication peut aller au-delà de la simple présentation des résultats des calculs* (Verschaffel, De Corte, 2005, pp. 170-171).

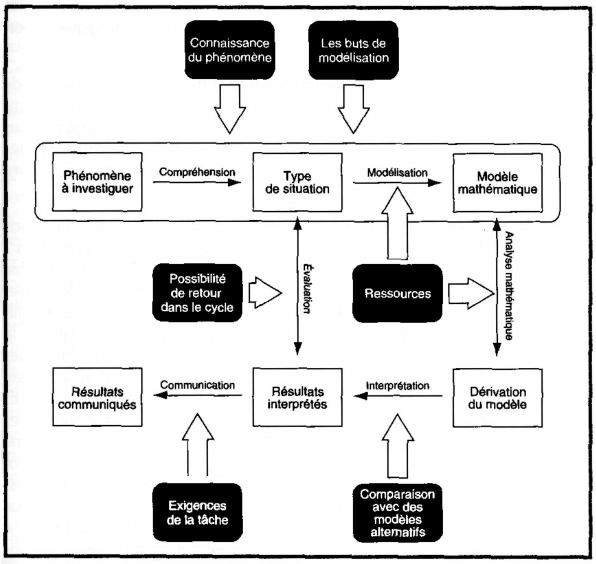


Figure 44 : ***Une vision élaborée du processus de modélisation (Verschaffel, De Corte, 2005, p. 171)***

4.3.2. Caractéristiques rédactionnelles de l'énoncé

Les énoncés écrits des problèmes sont essentiellement présents dans les manuels scolaires ou dans des recueils spécifiques de problèmes ; ils peuvent revêtir une forme strictement textuelle ou bien être constitués à la fois d'un texte et de représentations iconiques de type tableau, schéma, dessin, photographie. Une étude de 41 énoncés de problèmes extraits de six manuels de CE2 parus postérieurement à 1995 révèle que 31,7% des énoncés sont présentés sous une forme *strictement textuelle en situation de production autosuffisante*, c'est-à-dire qu'ils n'appellent pas de représentations auxiliaires (Priolet, 2000).

Dans ce travail de thèse, nous avons fait le choix de travailler uniquement sur les énoncés de forme textuelle encore appelés *word problems* dans la littérature anglo-saxonne, ce qui nous conduit à considérer précisément l'aspect rédactionnel de ces types de textes que sont les énoncés.

Un certain nombre de travaux, principalement issus de la psychologie de l'apprentissage, considèrent les énoncés de problèmes comme étant des types de textes spécifiques. Au cours des vingt dernières années, plusieurs recherches ont mis en évidence l'impact de la formulation verbale du texte sur les performances à résoudre les problèmes (Kilpatrick, 1987). En vue d'analyser les difficultés des élèves lors de la résolution des douze problèmes à données numériques de notre expérimentation, il importe de rapporter ici les travaux conduits relativement aux effets de ce type spécifique de texte qu'est l'énoncé de problème sur les difficultés rencontrées par les élèves.

4.3.2.1. Forme stéréotypée et épurée des énoncés.

Selon Nesher (1980), les énoncés de problèmes proposés à l'école élémentaire présentent souvent une forme épurée et un caractère stéréotypé qui les placent en retrait des situations de la vie quotidienne. Nesher illustre ses propos par l'exemple suivant : *Combien coûtera la mise en place d'une clôture autour de la piscine de M. Smith ?*, qui a été transformé en un problème numérique tel qu'on en trouve dans les manuels scolaires : *La piscine de M. Smith mesure 12 m de long sur 8 m de large. M. Smith veut installer une clôture en bois autour de la piscine en laissant une allée de 2m de large tout autour de la piscine. A combien reviendra la clôture si un mètre de clôture revient à …. (le prix incluant tous les matériaux et la main d'œuvre).*

Elle constate que l'auteur de l'énoncé scolaire a déjà opéré tous les choix incombant initialement à M. Smith : dimensions de la piscine, largeur de l'allée, … De ce fait, les élèves confrontés à cet énoncé se retrouvent face à une situation strictement balisée de repères.

Ainsi, au lieu d'être incités à conduire des investigations en relation avec plusieurs types de décisions *qualitatives* complexes, les élèves sont placés directement dans une phase plus avancée de traitement de la situation, où toutes les décisions *qualitatives* ont déjà été prises. Nesher précise que les énoncés de problèmes correspondent véritablement à un type de texte particulier et que les problèmes scolaires qu'elle nomme SCH-PROB (*school-problems*) sont faits pour enseigner l'arithmétique appliquée et non pour résoudre des questions de la vie quotidienne, qu'elle désigne par REAL-PROB (*real-problems).*

Plusieurs chercheurs ont mis en évidence cette distinction entre les problèmes scolaires et les problèmes de la vie quotidienne, distinction liée en grande partie à l'aspect stylistique des premiers : en demandant à des élèves de 8 ans d'écrire des énoncés ou des questions, il a été établi que leurs productions étaient de type SCH-PROB et non REAL-PROB et que les élèves connaissaient les caractéristiques de ce type spécifique de texte qu'est l'énoncé de problème scolaire (Sensevy, 1996 ; Coquin-Viennot, 1996, 2000). La réponse de Johnny (un élève britannique de 2nd grade) à qui on demande d'écrire une histoire correspondant à l'énoncé mathématique suivant 1+6=7 et qui répond par *Maman a acheté un fer à repasser puis elle a acheté six fers à repasser en plus. Maintenant elle a sept fers à repasser*. (Nesher, 1980) ou celle d'un autre élève *Dans une bouteille de limonade, il y a 500 bulles. Des bulles sont plus petites que les autres….* (Sensevy, 1996) suggèrent que les élèves considèrent un énoncé de problème comme un texte déconnecté de la vie quotidienne. Le phénomène bien connu du problème de *l'âge du capitaine*[90] (Baruk, 1985) pour lequel les élèves additionnent les données numériques sans se préoccuper ni de leur relation avec la question, ni de la pertinence de la réponse, exemplifie encore cette déconnexion avec le monde réel, lors de l'activité de résolution de problèmes à énoncés verbaux. D'autres travaux montrent que, pour des questions ne conduisant pas à l'utilisation de toutes les données numériques fournies dans l'énoncé, de nombreux élèves répondent à une autre question non présente dans l'énoncé, et qui elle, fait intervenir toutes les données numériques (Coquin-Viennot, 2001). Ces productions viennent conforter l'idée de Nesher (1980) que les réponses fournies par les élèves ne peuvent avoir été apprises à travers l'expérience de la vie et constituent un pur produit de l'enseignement et qu'ainsi les problèmes proposés à l'école ne ressemblent pas aux situations de la vie quotidienne.

[90] Problème auquel nous avons déjà fait référence dans le chapitre réservé à la didactique des mathématiques et aux effets du contrat didactique.

4.3.2.2. Organisation textuelle des énoncés

Gerofsky (1996) s'est intéressée à l'organisation textuelle des énoncés de problèmes scolaires verbaux. Elle a dégagé une structure commune à un ensemble de ces textes qu'elle considère comme étant constitués essentiellement de trois parties : l'introduction suivie d'informations numériques et relationnelles et enfin la question ; toutefois l'introduction ou la question peuvent aussi parfois contenir certaines informations numériques et relationnelles. Cette présentation stéréotypée des énoncés, souvent elliptique, est selon Gerofsky, essentiellement destinée à l'enseignement d'algorithmes. Pour elle, résoudre des problèmes scolaires verbaux nécessite d'avoir préalablement acquis les représentations mentales suivantes :

> *Le problème a une solution ; l'énoncé contient les informations nécessaires à la recherche de la solution ; aucune information extérieure à l'énoncé ne doit être utilisée ; la tâche peut être menée à bien avec les mathématiques connues de l'élève ; le problème a été donné pour que l'élève utilise un algorithme récemment appris en classe ; il y a une seule interprétation mathématique correcte du problème, et une seule réponse correcte ; c'est l'enseignant qui peut juger si la réponse est correcte ou non ; et surtout, le problème est un « cœur » mathématique habillé en mots, et le travail de l'élève est de le déshabiller pour transformer les mots en formule arithmétique ou algébrique qui permettent de calculer la solution* (Gerofsky, 1996).

D'autres travaux ont été conduits sur l'organisation textuelle des énoncés de problèmes verbaux et plus spécifiquement sur la distinction entre les aspects statique et dynamique des textes. Les *dynamic texts* comportent un état initial, un changement dans cet état, et un état final, tandis que les *static texts* ne comportent pas d'évolution temporelle. Les travaux conduits par Nesher, Greeno et Riley (1982) , par Bilsky et Judd (1986) rapportent que les problèmes qui font référence à des situations statiques sont plus difficiles à résoudre que ceux qui font référence à des situations dynamiques, même lorsqu'ils font appel aux mêmes opérations.

4.3.2.3. Simplification et expansion des énoncés

Nesher (1980) s'est aussi intéressée aux effets de la simplification de l'énoncé sur l'activité de résolution. Elle considère que les problèmes arithmétiques proposés à l'école primaire induisent chez l'élève un manque de plasticité cognitive, si bien qu'avant même de saisir la possibilité d'une solution en relation avec les problèmes de la vie quotidienne, ses réponses sont déjà structurées. Ainsi, quand il lit un énoncé de problème, l'élève tend à se détacher de la situation décrite et à s'engager dans une exploration des combinaisons possibles des nombres présents dans le texte. Nesher cite l'exemple de Rachel (âge : 8;6) qui dit à son professeur qu'elle comprend bien les mots et les nombres mais qu'elle voudrait seulement qu'il lui indique s'il faut additionner ou soustraire.

Empruntons à Nesher un autre exemple, celui de l'élève Jacob (âge : 7;2) qui, à la question *Il y a 4 boutons sur le devant de la chemise et un bouton sur la poche de la chemise. Combien y a-t-il de boutons en tout ?* répond immédiatement *cinq*. Quand on lui demande d'écrire l'opération qui correspond à cette même question, il répond par 7+2 = 9. L'élève

Jacob est capable d'une part de donner la réponse exacte au problème posé, d'autre part de fournir une opération de type additif correspondant au type du problème. Cependant il n'effectue pas la connexion entre les données du problème et l'opération. Selon Nesher, lorsque la simplification d'un problème est trop importante, un enfant ne voit aucun intérêt à le traduire en opération et ne peut comprendre l'intérêt du langage arithmétique.

Certains énoncés font l'objet d'une expansion par l'introduction d'informations inutiles, obligeant ainsi l'élève à sélectionner les informations utiles pour effectuer le traitement mathématique. Duval (1997) classe cette présence d'informations inutiles dans le groupe des facteurs extrinsèques de variation rédactionnelle, qu'il considère comme commandant des variations neutres ou non pertinentes pour écrire le traitement arithmétique instancié.

4.3.2.4. Part d'implicite dans les énoncés

À cause de leur longueur restreinte, les énoncés de problèmes scolaires comportent une grande part d'implicite. Reprenons deux exemples d'énoncés scolaires fournis respectivement par Nesher (1980) et par De Corte et Verschaffel (1985). Le premier énoncé : *Le matin, Ruth avait huit bonbons. À midi, elle a donné deux d'entre eux à sa sœur Susan. Combien de bonbons Ruth a-t-elle maintenant ?* sous-entend qu'aucun bonbon n'a été mangé après le comptage des huit bonbons de Ruth le matin. Le second énoncé *Pierre a 3 pommes. Anne lui donne 5 pommes de plus* provoque chez un élève le refus de s'investir dans la résolution car, selon lui, Anne ne peut pas donner de pommes puisqu'elle n'en a pas. Ainsi, les objets décrits dans les problèmes scolaires comportent très souvent une large part d'implicite et répondent à des règles que l'élève doit découvrir à l'école.

Duval (1997) distingue ce qu'il appelle deux *degrés d'explicitation* : le *rédactionnellement mentionné* pour désigner ce qui est explicité seulement par un terme ou une expression (Exemple : A5, figure 45) et le *rédactionnellement déclaré* dès lors que l'explicitation se fait par une proposition (au sens grammatical) (Exemple : A6, figure 45). L'énoncé A5 ne mentionne pas explicitement que Pierre avait de l'argent avant de recevoir 4F. Cette part d'implicite est source de difficultés puisque de *bons élèves* de $6^{\text{ème}}$ ne prennent pas en compte cet implicite et ne comprennent pas leur erreur, même quand elle leur est montrée. Dès lors que l'écriture du traitement mathématique instancié varie en fonction du degré d'explicitation, Duval considère que le degré d'explicitation est un facteur intrinsèque de variation rédactionnelle.

A. 5 Lundi après-midi Pierre reçoit 4F. de Jacques. Puis il fait des achats. Le soir il compte son argent et trouve qu'il a *3F. de moins que le matin*. combien a-t-il dépensé?
A. 6 *Lundi matin Pierre part avec de l'argent*. Lundi après-midi il reçoit 4F. de ....

Figure 45 : ***Variations rédactionnelles (Duval, 1997, p. 5)***

L'élève qui reçoit le problème bien défini n'est pas engagé dans la prise de décisions qualitatives ou quantitatives. Dans la plupart des cas, il n'est pas capable, à cause du style condensé, de reconstruire le contexte duquel proviennent les données et il essaie d'inférer directement une opération mathématique à partir de la formulation verbale de l'énoncé. Pour l'élève, les problèmes sont des tâches scolaires qui consistent à fournir une réponse

numérique en relation avec les règles d'opération apprises à l'école.
Toujours en relation avec l'aspect stylistique de l'énoncé, un ensemble de travaux a montré l'effet de l'ordre d'énonciation sur l'activité de résolution.

4.3.2.5. Effet de l'ordre d'énonciation sur l'activité de résolution.

Dès les années 70, l'effet de l'ordre d'énonciation sur l'activité de résolution de problèmes fait l'objet de recherches en psychologie des apprentissages. Selon Rosenthal et Resnick (1974), les performances de résolution sont meilleures dès lors que l'ordre d'énonciation correspond à l'ordre chronologique de survenue des événements. Coquin-Viennot (2000) a montré que la présence en début d'énoncé de problème d'une phrase présentant le thème, focalise l'attention du lecteur sur ledit thème. Ces résultats en conformité avec les travaux de Kieras (1980) révèlent que pour certains énoncés très stéréotypés, il semble y avoir activation d'un schéma de lecture qui oriente spécifiquement sur l'ensemble des données quantitatives.

Kieras (1980), Schwartz et Flammer (1981) ont montré les effets positifs du placement en tête d'énoncé, du titre ou de l'énoncé thématique, sur la compréhension du problème.

Le placement en tête de la question provoque une amélioration des performances par rapport à une présentation canonique de l'énoncé (Fayol, Abdi, Gombert, 1987). Lorsque la question est placée en tête d'énoncé, on observe une amélioration des scores pour tous les sujets, quel que soit leur niveau de performance en lecture et en calcul. Il existe une corrélation entre les stratégies de lecture mobilisées et les performances en résolution de problèmes (Devidal, Fayol et Barrouillet, 1997). En ayant effectué en temps réel des mesures chronométriques (T.E.L.[91] des différents segments des énoncés) ces mêmes auteurs montrent que la vitesse de prise d'information varie en fonction de la place de la question : une question placée en début d'énoncé est lue plus lentement que lorsqu'elle est placée en fin d'énoncé ; les parties textuelles sont alors lues plus vite tandis que le traitement des informations numériques ne subit pas de modifications. Lorsque la question est placée en fin d'énoncé, le temps de lecture de la question est très court. Certains sujets répondent au problème sans même avoir lu la question.

Coquin-Viennot (2001) a également testé les effets de la place et de *l'attente* de la question. Pour les questions attendues, le taux de réussite est meilleur lorsque la question se trouve au début du texte. Cependant, pour les questions inattendues, on observe les mêmes taux de réussite, que la question soit placée au début ou à la fin du texte.

D'autres travaux ont trait à l'effet du lexique sur les performances à résoudre les problèmes.

[91] T.E.L. = Temps d'exposition à la lecture.

4.3.2.6. Le lexique

Plusieurs recherches ont souligné l'effet du lexique présent dans les énoncés, sur la réussite aux problèmes. On relève un lien entre la présence dans l'énoncé de termes relationnels comme *plus que, moins que* et d'importantes difficultés rencontrées chez les sujets de tous âges. En effet, quel que soit l'âge des élèves, le taux d'erreurs est plus grand avec des énoncés du type [*Jean a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Tom*] qu'avec [*Jean a 3 billes. Il a 5 billes de plus que Tom*] comme l'ont constaté Lewis et Mayer (1987) auprès d'étudiants. Les résultats obtenus par Hudson (1983), Davis-Dorsey, Rosse & Morrison (1991) se traduisent par des écarts significatifs entre les taux de réussite obtenus par des enfants d'école maternelle pour la résolution du problème suivant, selon les formulations : [*Il y a 5 oiseaux et 3 vers. Combien y a-t-il d'oiseaux de plus que de vers ? (17%)*] versus [*Il y a 5 oiseaux et 3 vers. Combien d'oiseaux ne mangeront pas de vers ?* (83%)].

D'autres travaux montrent que certains mots et phrases utilisés fréquemment dans des énoncés de problèmes, sont l'objet de confusions. Le terme *ensemble* est parfois confondu avec chacun et ainsi certains élèves traitent *Jean et Marie ont ensemble X billes* de la même façon que *Jean et Marie ont chacun X billes* (Cummins, Kintsch, Reusser & Weiner, 1988)

Certains usages de *en tout* conduisent également à des interprétations erronées des énoncés. La compréhension du problème semble dépendre du vocabulaire utilisé dans l'énoncé. Cependant, les marques linguistiques ne sauraient être les seuls facteurs impliqués dans la résolution de problèmes. Dans cette perspective, Pluvinage (2000) minimise la place à accorder au vocabulaire dans les mathématiques :

> *Si les questions de vocabulaire demandent certes de ne pas être méconnues, elles ne sont ni la source de difficultés très considérables, ni la matière d'un enrichissement linguistique bien important* (Pluvinage, 2000, p. 116).

4.3.3. Effet des opérations

De nombreux travaux (cités in Brousseau, 2004) montrent l'effet de la taille des nombres présents dans l'énoncé sur les performances à résoudre le problème.

Les élèves sont capables de résoudre des problèmes comportant des nombres de petites tailles avant d'avoir reçu un enseignement sur la technique opératoire en jeu. Pour ce faire, ils recourent par exemple à l'utilisation de leurs doigts ou d'autre matériel ou tracent une représentation donnée.

Ainsi, la taille des nombres présents dans l'énoncé constitue une variable didactique pour la résolution de problèmes.

Fagnant (2005) montre elle aussi que la maîtrise des techniques opératoires ne constitue nullement un préalable à la capacité à résoudre des problèmes et que c'est au contraire par une confrontation précoce à la résolution de problème que les élèves donneront du sens au symbolisme mathématique. Elle déplore un enseignement rigide qui contraint les élèves à privilégier d'emblée l'utilisation de calculs standards[92] qui concourt au développement de stratégies qu'elle qualifie de *superficielles*, tandis que les élèves manifestent une forte propension à utiliser des calculs qui prennent plutôt en compte les relations[93] décrites dans les situations. L'enseignement dispensé devrait au contraire articuler les stratégies informelles des élèves et l'utilisation de calculs relationnels.

4.4. Conclusion du chapitre

Dans les définitions que les psychologues donnent du concept de problème, on retrouve le point de vue, de nature épistémologique, développé par Bachelard (1938) à propos de la connaissance. Un problème renvoie à la fois à l'idée d'absence initiale de solution et à la construction de cette solution par le sujet.

Trois principales théories de l'apprentissage, présentées dans ce chapitre, permettent de mieux comprendre les processus cognitifs mis en œuvre dans la résolution de problèmes. Elles sont complétées par l'approche développée par Duval (1995) sur les concepts de registres de représentation.

Dès lors qu'un sujet doit résoudre un problème, plusieurs cas peuvent se présenter :

- Si le sujet a déjà rencontré cette catégorie de problème, il peut alors rappeler en mémoire de travail le schéma du problème, c'est-à-dire un ensemble de connaissances abstraites stockées en mémoire à long terme sous la forme de bloc structuré et correspondant aux traces laissées en mémoire par les situations rencontrées précédemment. Ce bloc structuré, appelé schéma, comporterait des places vides que le sujet instancierait avec les données fournies dans l'énoncé du problème qu'il a à résoudre. Le problème serait alors résolu. Ainsi, le schéma s'enrichirait au fur et à mesure que le sujet rencontrerait différentes situations et dégagerait des invariants spécifiques à chaque catégorie de problème. Cette théorie du schéma a notamment été développée par Kintsch et Greeno (1985). Elle permettrait d'expliquer l'effet facilitateur du placement de la question au début de l'énoncé (Fayol et Abdi, 1986 ; Devidal, 1996 ; Devidal, Fayol et Barrouillet, 1997).
- Si le sujet n'a pas rencontré ce type de problème, ou du moins pas un nombre suffisant de fois pour avoir un schéma en mémoire à long terme, alors il doit s'engager dans une procédure *pas à pas* et construire dans sa mémoire de travail une représentation mentale de la situation. Cette représentation analogique de la situation serait stockée temporairement en mémoire de travail. La théorie basée sur la construction d'un modèle mental a été développée par Johnson-Laird (1993) et porte le nom de théorie des modèles mentaux. Des travaux de recherches liées à la résolution de problèmes se réfèrent à cette théorie des modèles mentaux (Thévenot, 2000 ; Novotnà, 2002)

[92] Par exemple : du type a-b = c.
[93] Par exemple : l'utilisation d'une addition à trous quand la recherche de l'inconnue ne porte pas sur l'état final.

Vergnaud (1990) base sa théorie de l'apprentissage sur la conceptualisation du réel qu'il considère comme centrale dans la résolution de problème. Conceptualiser, c'est, selon Vergnaud, identifier les objets du monde, leurs propriétés et leurs relations. La formation d'un concept nécessite que le sujet soit confronté à une diversité de situations ou de formes langagières. Vergnaud nomme champs conceptuels les regroupements de situations, de concepts et de représentations symboliques. Il considère deux grands ensembles : le champ conceptuel des structures additives et le champ conceptuel des structures multiplicatives. En effet, selon Vergnaud un problème ne peut pas se réduire à l'opération mise en jeu lors de sa résolution. Vergnaud souligne l'importance de l'activité de l'enseignant qu'il considère d'ailleurs comme un expert irremplaçable. Il établit une classification purement conceptuelle.

Duval (1995) base son approche théorique sur le rôle essentiel qu'il attribue aux changements de registres de représentation, dans la construction des concepts mathématiques. Il considère en effet que la particularité des mathématiques réside à la fois dans l'inaccessibilité des objets et dans la diversité des représentations sémiotiques. L'essentiel de l'activité mathématique consiste, selon Duval, non seulement à recourir à des registres de représentation différents, mais aussi à mobiliser simultanément au moins deux registres de représentation. Il distingue deux types de transformations : le traitement qui s'effectue au sein d'un même registre et la conversion qui consiste à changer de registre tout en conservant les mêmes objets. Les réussites sont très souvent des réussites monoregistres. Dès qu'un changement de registre est nécessaire ou que la mobilisation de deux registres en même temps doit s'opérer, le nombre d'échecs ou de blocages des élèves augmente et ce, à tous les niveaux d'enseignement.

De nombreuses études relevant des psychologies de l'apprentissage ou de l'éducation traitent de l'impact des caractéristiques des problèmes sur les performances des élèves à résoudre ces problèmes. En effet, avant les années 1980, le calcul constituait quasiment l'unique facteur mis en avant pour expliquer les difficultés inhérentes à la résolution du problème. Depuis, de nombreux travaux ont porté sur l'impact des caractéristiques des problèmes sur les performances des élèves placés en situation de résoudre ces problèmes. En d'autres termes, les obstacles sont recherchés ailleurs que dans les calculs.

En bref, les recherches portent sur deux grands types de caractéristiques :

- les caractéristiques conceptuelles et sémantiques :

On s'intéresse alors aux relations en jeu. De nombreuses recherches portent sur les problèmes à structure additive et ont donné lieu à des classifications. Celle de Riley, Greeno et Heller (1983) montre que les niveaux de difficulté des problèmes impliquant la même opération arithmétique varient : (i) en fonction de l'appartenance du problème à telle ou telle catégorie sémantique ; (ii) en fonction de la nature de l'inconnue (Fayol, 1986).

Les recherches portant sur les problèmes à structure multiplicative sont moins nombreuses que les précédentes. Levain (1992) a montré que le taux de réussite à des problèmes du type 4$^{\text{ème}}$ proportionnelle était inférieur au taux de réussite global de l'ensemble des problèmes multiplicatifs qu'il proposait. Barrouillet et Camos (2002) ont montré que des problèmes mettant en jeu des quantités et des groupes égaux étaient plus faciles à résoudre que ceux impliquant des produits cartésiens.

- les caractéristiques rédactionnelles :

Des recherches ont montré l'effet des facteurs suivants sur les performances à résoudre des problèmes :

- la forme stéréotypée et épurée des énoncés (Nesher, 1980)
- l'organisation textuelle des énoncés (Nesher, Greeno et Riley, 1982 ; Gerovski, 1996)
- la simplification et l'expansion des énoncés (Nesher, 1980)
- la part d'implicite dans les énoncés (Nesher, 1980 ; De Corte et Verschaffel, 1985)
- l'effet de l'ordre d'énonciation (Coquin-Viennot, 2000)
- le lexique : notamment les termes relationnels présents dans l'énoncé (Hudson, 1983 ; Davis-Dorsey, Rosse & Morrison, 1991.

Arrivée au terme de ces investigations, nous allons maintenant présenter le cadre théorique que nous retenons pour notre recherche.

Chapitre 5 : Cadre théorique retenu pour la recherche

D'une part, la centration de notre recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes à données numériques à l'école primaire nous a amenée à croiser différents cadres référant principalement aux théories didactiques des mathématiques ainsi qu'aux théories psychologiques de l'apprentissage et de l'éducation.

D'autre part, elle nous a imposé un détour préalable par l'étymologie, par le cadre institutionnel et par l'épistémologie afin de définir ce qui constitue l'objet même de cet enseignement et de cet apprentissage : le problème.

Il nous appartient maintenant de croiser ces différents éléments recueillis dans le but de définir et de délimiter notre propre cadre. Dans un premier temps, il nous paraît essentiel de préciser notre point de vue sur les finalités de l'enseignement des mathématiques. Dans un second temps, il s'agira de poser notre définition du problème d'un point de vue général certes, mais aussi au sein même de la présente recherche. En d'autres termes, préciser ce que revêt le terme *problème* dans nos présents travaux. Nous dégagerons ensuite les éléments théoriques que nous considérons comme pertinents pour traiter les questions de l'enseignement et de l'apprentissage de la résolution de problèmes.

5.1. Quelles finalités pour l'enseignement des mathématiques ?

En dépit d'une apparence première qui pourrait conduire en raison de leurs terrains d'application à opposer l'éducation mathématique prônée par Glaeser et l'enseignement mathématique étudié par Brousseau, il nous semble que les deux courants se rejoignent par leurs finalités. L'éducation et l'enseignement mathématiques doivent contribuer à forger un esprit critique et une rigueur de pensée aboutissant à la formation de concepts, à l'acquisition de connaissances provoquant ce plaisir intellectuel inhérent au questionnement, à la recherche de solutions à un problème, en bref, acquérir une culture mathématique indispensable de notre point de vue à la formation de l'individu.

Ces finalités, mises en avant par les communautés des mathématiciens et des didacticiens, qui aboutissent à donner le goût des mathématiques, nous les partageons dans leur intégralité.

Nous adoptons l'idée que faire des mathématiques consiste à *mathématiser des situations* en vue de résoudre des problèmes et que *enseigner les mathématiques*, c'est confronter les élèves à la résolution de problèmes.

5.2. Qu'entendons-nous par *problème* ?

Nous distinguerons la définition que nous attribuons au terme *problème* dans son sens général et celle que nous lui donnons dans le présent travail de recherche.

5.2.1. Le problème au sens général des mathématiques

En nous référant à l'étymologie et aux différents cadres théoriques convoqués, nous associons la notion de *problème* mathématique d'une part au verbe *résoudre,* d'autre part à la notion d'*obstacle*. Nous rejoignons ainsi Glaeser dans la différenciation qu'il opère entre problème et exercice, le premier impliquant tâtonnement et invention en vue de surmonter un obstacle, le second se réduisant à la l'exécution de tâches algorithmiques. Le concept de problème pourrait de notre point de vue être illustré dans l'absolu par les conjectures de Hilbert. En effet, dès lors qu'un problème est résolu, il n'a plus à porter le nom de problème mais il reste néanmoins un problème pour ceux qui ne l'ont pas encore résolu. En cela, nous considérons comme porteuse d'un pléonasme l'expression *problème de recherche*. L'activité qui consiste à chercher une solution à un problème ne doit pas pour autant être l'exclusivité des mathématiciens, même si l'on doit bien admettre que les *découvreurs* de la solution seront sans doute à rechercher parmi ces derniers.

Rechercher la solution à un problème, c'est tâtonner, c'est manipuler des objets et des concepts mathématiques, c'est acquérir une démarche de pensée.

En cela, on peut dire que l'activité consistant à chercher des solutions à des problèmes participe à la construction d'une culture mathématique, qu'elle revêt pour finalité le développement du sujet.

5.2.2. Le concept de problème dans notre travail de recherche

Nous nommerons *problèmes scolaires à données numériques et à énoncés verbaux* les situations-problèmes que nous soumettons aux élèves lors des expérimentations. Ce sont des ***problèmes*** dans le sens où nous leur attribuons la caractéristique essentielle d'obstacle, inhérente à la définition du problème mentionnée au paragraphe précédent. Nous supposons que les élèves auxquels nous proposons ces problèmes ne disposent pas d'une solution *prête à l'emploi* pour les résoudre. Si tel était le cas, et nous admettons qu'il puisse se présenter pour certains élèves, ces problèmes revêtiraient alors pour ces élèves, et pour ces élèves seulement, le statut d'exercice, au sens employé par Glaeser.

Ce sont des problèmes ***scolaires***, c'est-à-dire des problèmes que les élèves doivent résoudre en classe, principalement lors des séances de mathématiques. Ils sont très souvent, mais pas exclusivement extraits de manuels scolaires. Nous empruntons ce terme au cadre de la psychologie de l'apprentissage et à celui de la psychologie de l'éducation.

De par leur finalité, ce sont des problèmes ***à données numériques*** : ils posent aux élèves une ou plusieurs questions qui impliquent un traitement numérique. Et enfin, nous les nommerons problèmes ***à énoncés verbaux*** en nous référant à la définition donnée par Verschaffel et al. L'approche à dominante historique que nous avons conduite nous permet d'affirmer que ces problèmes, déjà utilisés dans l'Antiquité, ont traversé l'ensemble des programmes de notre Institution scolaire. De plus, ils constituent une large part des problèmes proposés dans les manuels de mathématiques du cycle 3 de l'école primaire, même si on observe depuis quelques années une diversité des types d'énoncés (Priolet, 2000).

5.3. L'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes

Notre objet de recherche, tridimensionnel de par ses relations avec l'enseignement, avec l'apprentissage et avec la résolution de problèmes, nous a conduite à nous centrer sur : (i) les travaux concernant *l'activité du professeur* en situation d'enseigner la résolution de problèmes, (ii) les travaux traitant plus spécifiquement de *l'activité de l'élève* en situation de résoudre des problèmes et (iii) les travaux articulant ces deux types d'activités.

5.3.1. L'enseignement de la résolution de problèmes dans notre cadre théorique

Nous posons comme finalité de l'enseignement de la résolution de problèmes l'acquisition d'une culture mathématique au sens donné par Glaeser dont toutefois nous nous démarquons quelque peu dès lors que nous considérons comme premier l'enseignement reçu à l'École.

L'environnement[94] que nous retenons est constitué de trois pôles en interaction : l'environnement extrascolaire, l'environnement scolaire et la noosphère. Nous considérons en effet que :

(i) L'environnement extrascolaire permet aux élèves de construire et d'enrichir des représentations intuitives de certains concepts mathématiques (Acioly-Régnier) qui viendront compléter les apprentissages visés à l'école par l'enseignement.

(ii) L'environnement scolaire, à travers un ensemble de situations, au sens de Brousseau (1997) va être pour l'élève le lieu de construction privilégié des apprentissages. Dans notre recherche, nous le réduisons à la classe.

(iii) La *noosphère*[95] de notre environnement comprend les concepteurs des programmes, les auteurs des manuels et toutes les personnes qui participent à la réflexion sur les savoirs à enseigner.

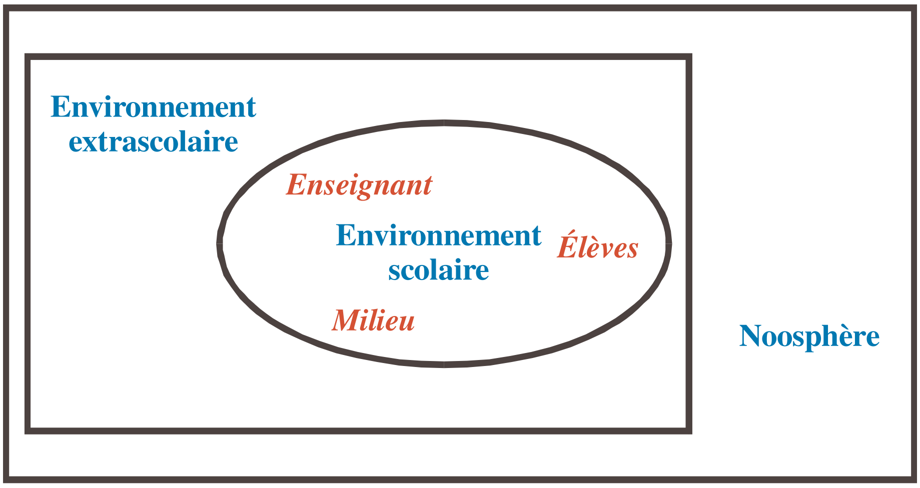


Figure 46 : ***Modélisation de l'environnement didactique***

[94] Au sens de Brousseau.
[95] Au sens de Chevallard.

Dans notre modèle de l'enseignement de la résolution de problèmes, il convient de définir maintenant la notion de *milieu* au sein de l'environnement scolaire, étant entendu que nous réduisons ici l'environnement à la classe.

Nous reprenons le concept de *milieu* défini par Brousseau (2003) pour désigner tous les objets physiques, culturels, sociaux, humains qui agissent sur l'élève ou sur lesquels l'élève agit. Dans ce milieu, nous considérons l'analyse d'un objet spécifique : le problème qui peut, en interaction avec la *noosphère* appartenir à différentes catégories. Notre recherche porte sur l'une d'entre elles : les *problèmes scolaires à données numériques et à énoncés verbaux.*

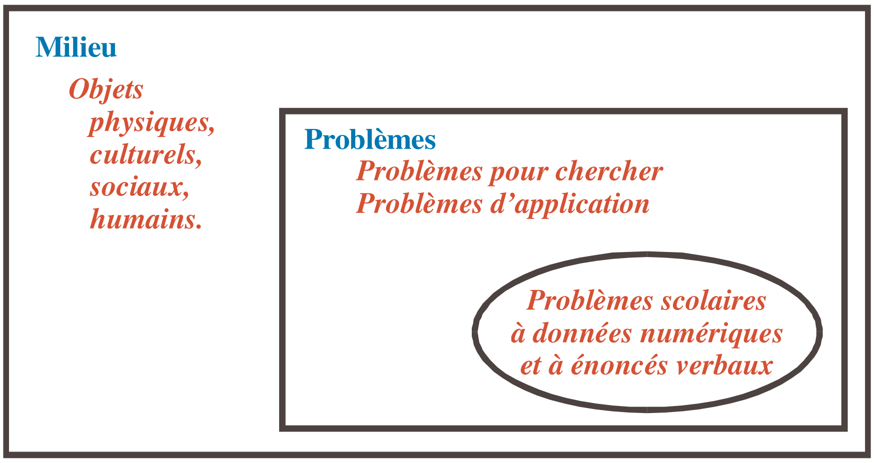


Figure 47 : ***Modélisation du « milieu » selon notre point de vue***

5.3.2. L'apprentissage de la résolution de problèmes dans notre cadre théorique

Les travaux conduits en psychologie de l'apprentissage nous paraissent, du moins en partie, fournir un cadre explicatif aux difficultés rencontrées par les élèves en situation de résoudre des problèmes.

Nous prendrons appui notamment sur la théorie des schémas et sur celle des modèles mentaux, usant ainsi de leur complémentarité que nous avons déjà évoquée.

L'activité de l'élève, caractérisée à la fois par son action et par la pensée qui accompagne cette action, n'est pas observable dans sa dimension intellectuelle. Dans notre recherche, nous étudierons l'activité de l'élève à travers l'observation et l'analyse de la production des traces écrites.

5.4. Cadre d'observation et d'analyse de l'activité de l'enseignant

Nous posons comme préalable l'expertise de l'enseignant, au sens de Vergnaud. Mais à ce stade de notre travail, il est nécessaire de définir un cadre d'analyse de l'activité du professeur en situation d'enseigner la résolution de problèmes. Pour ce faire, nous nous référons au cadre de la psychologie ergonomique et de la didactique professionnelle. Ce cadre est d'ailleurs utilisé dans d'autres domaines que celui des mathématiques. C'est d'ailleurs d'une manière quelque peu anachronique, par un détour par la didactique du français[96] que nous avons été guidée vers les recherches théoriques relevant de la psychologie ergonomique. Interpellée par les méthodes utilisées par Goigoux (2001) pour analyser des séances de lecture en classe de CP, nous avons décidé de nous tourner vers les travaux initiés notamment par Faverge, Leplat et Clot[97], en vue d'emprunter le cas échéant quelques éléments pour analyser les séances de mathématiques observées à l'école élémentaire.

La psychologie du travail ayant des termes en commun avec d'autres champs de recherche tels que la didactique des mathématiques ou la psychologie de l'apprentissage, nous commençons pas donner des définitions issues de ce champ.

Le mot *travail* ne revêt pas le même sens pour les psychologues, les sociologues, les économistes. Selon Leplat (1997), spécialiste en psychologie ergonomique[98], il est plutôt synonyme d'*activité* pour les psychologues, de *qualification* pour les sociologues et d'*emploi* pour les économistes. Cependant, comme le soulignent Dardoy et al. (1990), il conviendrait sans doute d'articuler ces différents aspects.

La psychologie du travail analyse la dimension cognitive du travail, en étudiant notamment les relations entre trois notions : l'agent[99], la tâche et l'activité.

5.4.1. Activité et tâche

5.4.1.1. Définitions

L'activité est considérée selon Leplat (2000) comme la *réponse d'un sujet (ou agent) aux exigences d'une tâche*. De cette définition, il ressort que l'activité dépend de l'agent et de la tâche. Pour Leplat et Hoc (1983), l'activité c'est *ce qui se fait*.

Cependant, cette définition de l'activité ne fait pas l'unanimité et a suscité des débats (Leplat et Hoc, 1983 ; Clot, 1999). En effet, selon Clot et al. (2002) :

> *L'activité n'est plus limitée à ce qui se fait. Ce qui n'est pas fait, ce que l'on voudrait faire, ce qu'il faudrait faire, ce que l'on aurait pu faire, ce qui est à refaire et même ce que l'on fait sans vouloir le faire est accueilli dans l'analyse de l'activité en éclairant ses conflits. (…) Les activités empêchées, suspendues, différées, anticipées ou encore inhibées forment avec les activités réalisées, une unité dysharmonique* (Clot et al., 2002, p. 25).

La tâche[100], dans une situation[101] de travail, est définie, selon Leplat (2000) comme *un but à atteindre dans des conditions déterminées*. Cette définition de la tâche, caractérisée par un but et des conditions d'exécution, varie selon que l'on se place au niveau du prescripteur ou au niveau de l'acteur. Dans le premier cas, celui où les conditions et le but sont fixés par le

[96] Didactique du Français : Goigoux
[97] Travaux concernant l'analyse psychologique du travail.
[98] La psychologie ergonomique est une branche de la psychologie du travail.
[99] *Agent* : encore appelé *sujet, opérateur, acteur*.
[100] Notion proposée par Leontiev (1975), élève de Vygotski.
[101] Leplat (2000) définit la situation par le couple tâche-agent dans le cas des tâches prescrites et redéfinies et par le triplet tâche-agent-activité quand il s'agit d'une tâche effective.

prescripteur, on parle de *tâche prescrite*. Dans le second cas, on parle (i) de *tâche redéfinie* lorsque, à partir de la tâche prescrite, l'acteur s'est recréé sa propre définition de la tâche, (ii) de *tâche effective* pour désigner la tâche effectivement mise en œuvre.

En puisant dans les situations d'enseignement, Rogalski (2003) cite comme exemples de tâches : *faire acquérir les notions de mesure des longueurs, surfaces, volumes au CM*, ou encore *apprendre à lire aux enfants du CP*. Rejoignant le point de vue développé par Clot, elle ne réduit pas l'activité à des actes extériorisés mais considère que l'activité comprend *les inférences, les hypothèses émises par le sujet, les décisions qu'il prend, la manière* dont il gère son temps, son état personnel. Elle souligne d'ailleurs (Rogalski, 2003) la variation entre cette définition de l'activité et celle communément adoptée dans des ouvrages ou textes pédagogiques (*activités que l'on propose à l'élève*).

5.4.1.2. Élaboration de l'activité en terme de tâches

On peut distinguer l'activité du concepteur et l'activité de l'agent.

L'activité du concepteur part de l'idée d'une tâche à réaliser et aboutit à la prescription de cette tâche. Mais, selon la traduction que le concepteur fait de la tâche à réaliser, il peut exister des différences entre la tâche conçue initialement et la tâche prescrite.

L'activité de l'agent correspond, quant à elle, à la chaîne partant de la réception de la tâche donnée par le prescripteur (tâche prescrite) et aboutissant à la réalisation de la tâche par l'agent (tâche effective). Entre ces deux extrémités de la chaîne, la tâche prescrite aura évolué et aura été redéfinie par l'agent.

On peut schématiser ainsi les relations activités/tâches.

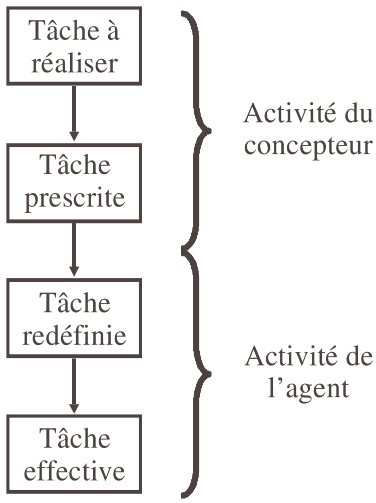


Figure 48 : ***Tâches et activités***

Les travaux de Leplat ont mis l'accent sur les écarts entre les prescriptions et les réalisations, autrement dit entre ce qu'il y a à faire et ce qui est fait. Dans la mesure où l'agent se crée son propre environnement, au sens de *contexte*, Leplat parle de codétermination entre l'activité et l'environnement et attribue ainsi une part de *responsabilité* à l'environnement dans les écarts constatés.

5.4.2. Métier – Pratique – Activité

Il nous paraît intéressant d'aborder ici la définition de la *pratique*, et ce, par comparaison avec les définitions du *métier* et de l'*activité*.

Clot (2005) préfère le concept d'activité à la notion de *pratique* qui selon lui renvoie à l'idée de *bonne pratique* et ainsi à une sorte de confusion entre l'activité personnelle de l'agent et la prescription. Par ailleurs, il souhaite éviter toute confusion liée à l'usage du couple théorie-pratique.

Quant au métier, il le définit :

- Comme composé d'une activité personnelle, dans la mesure où cette activité s'adresse à quelqu'un en particulier.
- Comme étant impersonnel, puisque la tâche, la mission, la prescription, la définition même de métier ne concernent pas qu'un agent en particulier.
- Avec une manière spécifique à chaque agent de s'emparer de la prescription pour en faire quelque chose de personnel.
- Comme étant transpersonnel dans la mesure où le métier a un passé, un présent et aura un futur.

5.4.3. Analyse de l'activité

5.4.3.1. Difficultés à analyser l'activité

Il semble que l'analyse de l'activité ne puisse être effectuée, par exemple par le chercheur, en questionnant directement l'agent. En effet, cette notion d'activité a fait l'objet de débats (Leplat et Hoc, 1983 ; Clot, 1999) du fait qu'elle comporte d'une part ce que l'agent fait, mais d'autre part aussi ce qu'il ne fait pas, ne peut pas faire, ou choisit de ne pas faire et qui va demeurer en lui.

Alors comment analyser l'activité ?

Nombre de travaux s'accordent sur le fait que le questionnement de l'agent lui-même ne constitue pas le moyen le mieux adapté pour accéder à l'activité de l'agent, et ce, parce que :

- l'agent n'est pas nécessairement conscient de l'organisation de l'activité et ne sera donc pas en mesure de rapporter ces éléments lors du questionnement opéré par le chercheur.
- la situation même de dialogue avec autrui visant à rendre publique une activité peut réduire la description de ladite activité.

Selon Vermersch (1994), un sujet ne peut rendre compte de l'organisation d'actions singulières, s'il n'est pas conduit dans cette exploration ; dans le cas contraire, la connaissance ne sera qu'illusoire.

D'ailleurs, on peut s'interroger sur le fait qu'un sujet puisse d'une manière ou d'une autre rendre compte d'une organisation dont il n'a pas conscience. On rejoint ici le point de vue développé par Vergnaud (2001) dans le paragraphe 4.1.2.3.5. à travers les exemples du réparateur de pompes à eau ou bien celui du tailleur de vigne.

5.4.3.2. Méthodes pour analyser l'activité

Pour analyser l'activité d'un sujet, Clot et Faïta (2000) proposent la méthode d'autoconfrontation. Cette dernière consiste :

- (i) à confronter le sujet à l'image sur écran[102] de sa propre activité.
- (ii) à lui demander de mettre en mots, à l'attention du *spectateur*[103], ce qu'il considère être les constantes dans son travail.

Selon Clot et Faïta, le sujet va s'engager dans une découverte de lui-même. L'autoconfrontation simple place le sujet en position de dialoguer avec le *spectateur*. L'autoconfrontation croisée permet au sujet de recevoir la perception d'un de ses pairs qui visionne lui aussi le film et le commente en présence du *spectateur* ; le sujet est ainsi engagé dans des échanges verbaux au cours desquels les regards pourront être croisés. Comme le montrent Amigues, Faïta et Saujat (2004) à travers l'usage de la méthode d'autoconfrontation croisée pour analyser l'activité enseignante, on considère qu'un rapport dialogique peut permettre à l'activité de se révéler.

Des chercheurs tels que Goigoux (2001, 2002) en didactique du français, Roditi (2001, 2003, 2005) en didactique des mathématiques utilisent ce cadre théorique de la psychologie du travail pour situer leurs analyses d'activité des enseignants en situation de travail. Nous reviendrons sur ce cadre théorique d'une part pour lui emprunter des méthodes en vue d'analyser les données recueillies lors des observations dans les classes, d'autre part pour étudier les écarts éventuellement constatés entre les tâches à réaliser et les tâches effectuées, dans l'activité des enseignants.

En résumé, nous considérons que l'activité de l'enseignant en situation de travail regroupe à la fois son activité en classe et celle qui se déroule en dehors de la classe, par exemple lors de la préparation des séquences d'enseignement. Nous mobilisons le cadre théorique de la psychologie du travail (Leplat) pour rendre compte de l'activité de l'enseignant. Les définitions des notions d'activité et de tâche seront empruntées à Leplat. *L'activité de l'enseignant* correspond dès lors à la réponse qu'il met en œuvre pour réaliser une tâche.

Nous avons choisi de focaliser notre observation et l'analyse qui s'ensuit sur l'activité de l'enseignant en situation de travail dans la salle de classe. Nous nous intéressons au pilotage même de l'activité et au processus de régulation de cette activité lors des séances d'enseignement.

Cependant, à la lueur des exemples empruntés à Vergnaud et en nous référant à Vermersch, nous considérons que l'enseignant n'est pas nécessairement conscient de l'organisation de son activité. Ainsi le questionnement du professeur ne semble pas constituer le moyen le mieux adapté pour accéder à son activité. En conséquence, nous nous référons à la méthode d'autoconfrontation simple ou croisée (Clot et Faïta, 2000) pour reconstruire les

[102] Le sujet aura été préalablement filmé en situation de travail.
[103] Le spectateur est souvent un formateur ou un chercheur.

logiques d'action sous-jacentes aux processus d'action des enseignants (Goigoux, 2001, 2002).

Nous considérons que l'environnement social dans lequel une tâche se réalise joue un rôle dans les apprentissages. Ainsi, nous aurions pu, mais cela pourra faire l'objet d'une autre recherche, analyser la place des travaux de groupes dans les séances de résolution de problèmes et tenter d'en mesurer les effets, en nous référant alors aux travaux de Schubauer-Léoni et Perret-Clermont (1980) sur le rôle des interactions sociales lors de la résolution de problèmes de type additif ou encore à ceux de Crahay et al. (2002) sur l'effet d'un tutorat basé sur une stratégie proactive[104] dans des situations de résolution de problèmes multiplicatifs ou encore à ceux de Toczek (2004) qui traitent de l'application du travail en groupes.

5.4.4. Notion d'artefact

Pour analyser la place et le rôle des outils introduits dans des séances d'enseignement, nous nous référons à Rabardel (1995, 1999) dont les travaux s'inscrivent dans le champ de la psychologie ergonomique et cognitive et dans celui de la didactique professionnelle.

S'appuyant sur l'approche instrumentale fondée sur le rôle essentiel joué par les outils dans les activités et les apprentissages, Rabardel distingue *artefact* et *instrument* : l'*artefact* étant l'outil **proposé** à l'utilisateur, et l'*instrument* étant **construit** par l'usager lors de son activité. Du fait qu'il ne constitue qu'une proposition, l'artefact pourra ne jamais être développé par un sujet. Un artefact devient instrument lors d'un processus que Rabardel nomme genèse instrumentale ; l'instrument est le résultat d'un processus d'appropriation lors de la confrontation d'un sujet à des situations données, dans un contexte donné, lors d'une activité. On retrouve là le concept schème-situation (Vergnaud, 1990).

En résumé, un sujet construit un instrument x, à partir d'un artefact y, dans un environnement z, pour réaliser une tâche t.

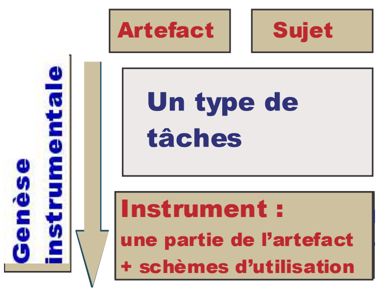


Figure 49 : ***La construction d'un instrument, par un sujet donné, à partir d'un artefact donné (Trouche, 2005, p. 272)***

Rabardel (1999) utilise le terme *instrumentation* pour désigner *l'invention des usages d'un artefact* et celui d'*instrumentalisation* pour désigner le processus d'adaptation de l'outil aux usages (Rabardel, 1994).

[104] Crahay oppose les stratégies proactives aux stratégies rétroactives, les premières se caractérisant par un guidage pas à pas des apprenants.

PARTIE 2

Premières investigations

Première étape de la construction de l'objet de recherche

PARTIE 2 : Premières investigations - Première étape de la construction de l'objet de recherche

Introduction

Tout en ne prétendant pas à l'exhaustivité, la précédente partie a révélé l'ampleur des travaux théoriques en relation avec la résolution de problèmes à données numériques. Elle a notamment permis d'inventorier la présence de nombreuses recherches, ciblées sur l'apprentissage ou, dans une moindre mesure, sur l'enseignement de la résolution de problèmes. Celles traitant de la question de l'apprentissage présentent souvent un lien étroit avec le domaine de la psychologie de l'apprentissage (Fayol et Abdi, 1986 ; Vergnaud, 1990) ; celles traitant de l'enseignement se sont considérablement développées et accrues au cours des deux dernières décennies, de par les recherches en sciences de l'éducation (De Corte et Verschaffel, 1985, Crahay, 2005) et en didactique des mathématiques (Artigue et al., 1994 ; Brousseau, 1994 ; Glaeser, 1999). Pour ce dernier domaine, nous renvoyons aussi à l'ensemble des articles publiés dans la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques*[105], aux travaux présentés lors du Séminaire National ou lors des écoles d'été organisées par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques. Cet ensemble de travaux a également ouvert la voie aux questions traitant des relations entre l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes (Roditi, 2005), voie que nous avons choisie en ciblant notre objet de recherche sur les effets des pratiques enseignantes sur les performances des élèves à résoudre des problèmes à données numériques.

À la manière de Kahane (2002, p. 10), on peut véritablement parler de *bouillonnement* au sein de l'enseignement des mathématiques, ce bouillonnement se traduisant à la fois par le nombre important de travaux de recherche sur les questions d'enseignement et d'apprentissage de la résolution de problèmes et par l'inscription, qui prend valeur d'injonction, dans les programmes officiels, d'une pratique régulière de ce domaine des mathématiques. Toutefois, il nous semble important de questionner l'impact des résultats de ces travaux sur la pratique pédagogique au sein de la salle de classe (IGEN, 2006). Mais force est de constater la diminution constante du nombre d'étudiants s'orientant vers des études de mathématiques alors même que nos sociétés actuelles nécessitent des personnels de plus en plus qualifiés dans les domaines scientifiques. Par ailleurs, nombre d'enseignants expriment un malaise quant aux difficultés rencontrées par leurs élèves dans le domaine de la résolution de problèmes. C'est sur ce second point que se focalisent nos investigations, orientées dans cette seconde partie vers les performances des élèves en France. Nous ferons état successivement des résultats des études internationales PISA 2003 et PISA 2006, des performances obtenues aux évaluations nationales CE2 et 6ème de 1989 jusqu'à 2006, d'une étude longitudinale que nous avons conduite sur quatre années (2000 à 2003) auprès d'un

105 Revue créée en 1980.

échantillon de 213 individus duquel nous avons extrait une cohorte de 105 élèves de l'école élémentaire.

À cette étape de la construction de notre objet de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes à données numériques, il s'agit de répondre aux deux questions suivantes :

(i) Que révèlent les performances des élèves en France au travers des différentes évaluations nationales, dans le domaine de la résolution de problèmes ? Qu'apportent alors les évaluations internationales à ces analyses ?

(ii) Qu'observe-t-on relativement à la variation des performances d'une cohorte d'élèves confrontés tout au long du cycle 3 de l'école primaire (CE2-CM1-CM2) à la résolution d'un même problème à données numériques ?

Chapitre 1 : Évaluations internationales et nationales

La résolution de problèmes fait régulièrement l'objet d'évaluations internationales et d'évaluations nationales. Tout en portant un regard critique sur les données recueillies et transmises par les structures responsables des protocoles mis en œuvre, nous rapportons dans ce chapitre les principaux résultats relatifs aux performances des élèves dans le domaine des mathématiques.

1.1. Regard critique sur les performances des élèves de 15 ans à l'échelle internationale

Tous les trois ans, depuis l'année 2000, le Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves (PISA[106]) placé sous l'égide de l'Organisation de Coopération et de Développement Économique (OCDE) évalue les compétences des élèves de 15 ans en lecture, en mathématiques et en sciences. La classe d'âge visée est celle qui correspond à la fin de la scolarité obligatoire dans la plupart des pays de l'OCDE.

Compte tenu de la thématique de nos travaux, nous analyserons ici plus en détail les résultats obtenus à PISA 2003, davantage centré sur les mathématiques, tandis qu'en 2000 ce programme était plus focalisé sur la lecture et, en 2006, sur les sciences.

PISA 2003 a concerné 5000 collégiens et lycéens âgés de 15 ans et provenant de 41 pays parmi lesquels 30 de l'OCDE. En France, la population évaluée est en majeure partie issue des classes de seconde générale ou technologique et de troisième, de 183 établissements scolaires accueillant des élèves de 15 ans.

PISA 2003 a attribué un score sur chacune des quatre échelles d'évaluation : *Culture mathématique, Compréhension de l'écrit, Culture scientifique, Résolution de problèmes*.

L'objectif de ce programme international PISA n'est pas de mesurer le degré d'assimilation d'une matière spécifique du programme d'enseignement, mais d'évaluer dans quelle mesure les jeunes de 15 ans sont préparés à relever les défis de la société de la connaissance, c'est-à-dire à exploiter leurs savoirs et savoir-faire pour affronter les défis de la vie quotidienne (OCDE, 2004).

La *Culture mathématique*, définie dans PISA 2003 comme étant l'aptitude d'un individu à identifier et comprendre le rôle des mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques en fonction des exigences de sa vie, en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi, revendique une place centrale dans cette évaluation. Découpée en contenus, elle est évaluée dans quatre champs *Espace et form*es, *Variations et relations*, *Quantité* et *Incertitude* laissant ainsi de côté l'algèbre, le calcul littéral, le raisonnement déductif, la trigonométrie (angles) et les objets géométriques, pourtant considérés comme essentiels dans l'apprentissage des mathématiques dans notre pays. En compartimentant ainsi l'évaluation, ne risque-t-on pas d'assimiler la

[106] PISA : *Program for International Students Assessments*.

Culture mathématique à l'utilitarisme dénoncé par Kahane (2002, p. 13) et qui consiste à *donner des recettes au lieu de contribuer à la formation de l'esprit, à renoncer à l'universalité des mathématiques, à les diviser selon la nature actuelle de leurs applications sans souci de leurs applications possibles* ?

La résolution de problèmes a été introduite dans PISA pour la première fois en 2003 en vue d'évaluer, à partir de situations concrètes, la capacité des élèves à prendre en compte des contraintes spécifiques, à trier et à organiser logiquement des données. Il s'agit de résoudre des problèmes qui ne relèvent pas de branches spécifiques du programme d'enseignement en cours. Ainsi, les situations proposées dans ces évaluations de *Résolution de problèmes* impliquent moins de connaissances scolaires que les autres domaines de PISA 2003 et accordent une place plus importante aux processus : comprendre les problèmes, les représenter, les résoudre, communiquer leur solution, et ce, tout en incitant à porter un regard sur la résolution engagée.

En raison de leur large champ d'application et de la possibilité de les situer dans différents contextes, trois types de problèmes ont été retenus : (i) *prise de décision*, (ii) *conception et analyse de systèmes*, (iii) *traitement de dysfonctionnements*. Les caractéristiques propres à chacun de ces trois types (Annexe 8) ont permis d'établir une échelle à 4 niveaux de compétences en résolution de problèmes (Tableau 6).

	405	499	592
Sous le niveau 1 : **Compétences insuffisantes (ou en voie de développement) en résolution de problèmes**	**Niveau 1 :** **Compétences élémentaires en résolution de problèmes**	**Niveau 2 :** **Bonnes compétences poussées en résolution de problèmes, capacité de raisonnement et de prise de décision**	**Niveau 3 :** **Compétences poussées en résolution de problèmes et grande faculté de réflexion et de communication**
		500	

Tableau **6** : ***L'échelle PISA 2003 en résolution de problèmes***

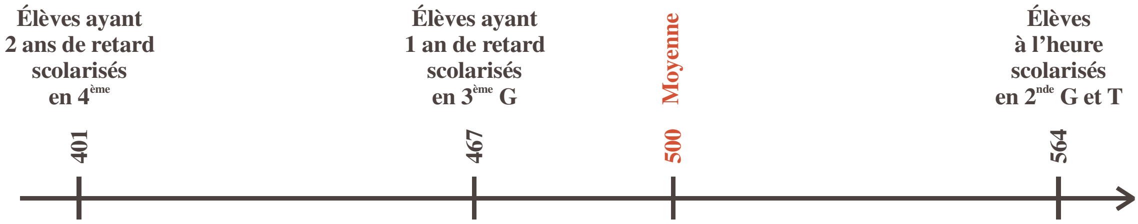
Si l'on compare la moyenne des performances de la France à la moyenne internationale de celles des 30 pays de l'OCDE, arbitrairement fixée à 500 points, on relève que dans le domaine de la *résolution de problèmes*, les résultats de la France (519 points) se situent au-dessus de la moyenne internationale mais cependant en deçà des résultats de la Finlande (548 points) (Graphique 1). En termes de classement, la France arrive en 10ème position pour la résolution de problèmes. Qui plus est, c'est cependant dans ce domaine qu'elle obtient ses meilleures performances.

Graphique 1 : ***Résolution de problèmes - Performances PISA 2003***

S'agissant du domaine de la *Culture mathématique* évaluée, on retrouve pour la France le même ordre de performances (511 points pour la France vs 544 points pour la Finlande) (Graphique 2), que pour le domaine de la résolution de problèmes (519 points pour la France vs 548 points pour la Finlande) (Graphique 1).

Graphique 2 : ***Culture mathématique - Performances PISA 2003***

Une étude complémentaire mise en place par la Direction de l'Évaluation et de la Prospective (DEP, 2004) a nuancé ces premiers résultats. Elle a révélé les écarts importants entre les élèves *à l'heure*, autrement dit n'ayant jamais redoublé, et les élèves ayant un ou deux ans de retard dans leur scolarité (Graphique 3).



Graphique 3 : ***PISA 2003 - Performances des élèves en France suivant le nombre d'années de retard dans le parcours scolaire***

En effet, les élèves français *à l'heure* à 15 ans, scolarisés en classe de Seconde générale et technologique obtiennent un score de 564 alors que celui des élèves français ayant un an de retard et scolarisés à 15 ans en classe de Troisième générale est de 467 et celui des élèves scolarisés en Quatrième n'est que de 401, ce qui représente respectivement des écarts négatifs de 100 et de 150 points par rapport aux élèves *à l'heure*. On relève ainsi des écarts importants entre les élèves en fonction de leur parcours scolaire.

Les résultats de l'étude PISA 2003 qui ont révélé des écarts entre la France et la Finlande au bénéfice de cette dernière ont donné lieu à des échanges notamment sous la forme d'un colloque[107] franco-finlandais réunissant des représentants de la Société Mathématique de France (SMF) et de la Société Mathématique Finlandaise. Il s'agissait d'analyser les résultats et les types d'enseignements dispensés dans ces deux pays. Selon Bodin (2005) et les interprétations qui ont émergé de ces échanges de spécialistes, la supériorité des élèves finlandais par rapport aux élèves français pour ces épreuves PISA 2003 de mathématiques ne fait aucun doute. Cependant il convient de s'interroger sur l'amplitude des différences et sur les types de scolarisation de ces élèves tous âgés de 15 ans dans chacun des pays concernés.

[107] Ce colloque s'est tenu à Paris du 6 au 8 octobre 2005.

Toutefois cette enquête PISA se limite à l'évaluation des compétences jugées essentielles par l'OCDE pour la vie ordinaire de tout élève de 15 ans et la formation générale du citoyen. Elle ne prétend pas évaluer les compétences générales des élèves en mathématiques et il nous paraîtrait réducteur de porter un jugement sur l'enseignement des mathématiques en France au regard de cette seule enquête.

D'après l'analyse effectuée par Bodin (2005), les élèves français éprouveraient quelques difficultés à mobiliser leurs connaissances mathématiques dès lors que les situations d'utilisation différeraient des situations d'apprentissage. Ils manqueraient d'autonomie pour adapter à des situations nouvelles les connaissances préalablement acquises, tandis qu'ils afficheraient des performances supérieures à leurs homologues finlandais pour des items plus abstraits et plus formels. Les difficultés rencontrées en France par les élèves présentant un ou deux ans de retard scolaire ont également été pointées lors de ce colloque franco-finlandais. En effet, si on considère une échelle graduée de 1 à 6, 17% des jeunes français de 15 ans vs 7% des jeunes finlandais du même âge se situent dans la catégorie 1 (la plus faible), tandis que, au niveau 6, soit à l'autre extrémité de l'échelle, la différence entre les deux pays est nettement moindre. En effet, 3% des jeunes français atteignent ce niveau vs 7% des jeunes finlandais. Tandis que nombre de médias se sont emparés de cette différence de performances entre la France et la Finlande, il convient de s'interroger sur les risques que présenterait une adaptation de nos programmes d'enseignement à des épreuves du type PISA. En effet, rappelons que cette enquête se limite à évaluer les savoirs et savoir-faire nécessaires pour aborder les défis de la vie quotidienne et qu'elle ne prend pas en compte l'aspect formel des connaissances mathématiques. Il nous semble falloir dépasser désormais la simple dialectique d'un enseignement de connaissances formelles et de celui de connaissances pratiques, telle que nous l'avons pointée en première partie de cette thèse à propos de l'historique des programmes d'enseignement des mathématiques.

Ne s'agit-il pas, plutôt, de définir un enseignement visant à la fois (i) à développer chez tous les élèves des compétences mathématiques utiles chez le citoyen d'aujourd'hui et de demain et (ii) à ouvrir pour le plus grand nombre d'entre eux, la voie à l'abstraction, à la symbolisation, à l'imagination, à la rigueur, contribuant ainsi à la formation générale de l'esprit ?

L'évaluation PISA 2006, étendue[108] à 15 pays de plus qu'en 2003, a été basée sur les trois domaines évalués lors des éditions précédentes : compréhension de l'écrit, culture mathématique[109] et culture scientifique ; il revenait cette fois-ci à la culture scientifique d'être placée au centre de l'évaluation.

Le principe de l'évaluation de la culture mathématique est resté le même qu'en 2000 et 2003 : *mesurer la capacité des élèves à mettre en œuvre leurs acquis mathématiques pour résoudre des exercices liés à la vie quotidienne* ou, en référence au socle commun de

---

[108] 57 pays participants dont 30 de l'OCDE, soit 15 pays de plus qu'en 2003.

[109] La traduction culture mathématique de *Mathematical Literacy* est peu satisfaisante du fait qu'elle pourrait laisser penser à l'évaluation d'une culture en termes de savoirs notamment.

connaissances et de compétences *être capable de mobiliser ses acquis dans des tâches ou des situations complexes* (Ministère Éducation nationale, 2008).

La culture mathématique a été évaluée à partir de la passation de 48 items extraits des 84 passés en 2003, quand ce domaine était majeur. Alors que la moyenne de la France (511) se situait en 2003 de façon significative au-dessus de la moyenne des pays de l'OCDE (500), elle marque en 2006 une baisse de 15 points (496 points pour la France vs 498 points pour l'OCDE) la faisant passer en dessous de la moyenne des pays de l'OCDE.

Cette baisse est qualifiée de *préoccupante* (Ministère Éducation nationale, 2008). En 2006, les baisses les plus importantes ont été repérées parmi les items dont l'énoncé est un texte long et dense ou demandant une production écrite ; ce type d'énoncé de problème semble contraster avec ceux proposés habituellement aux élèves français.

Cette association de difficultés entre la compréhension de l'écrit et la résolution de situations de mathématiques rappelle plusieurs travaux. On peut voir, par exemple, une similitude avec les travaux effectués par Pluvinage et Mallier (1998) à partir des performances aux évaluations nationales de début de 6$^{\text{ème}}$ de septembre 1996 et de septembre 1997. Selon ces auteurs, les élèves repérés comme étant les plus en difficultés en français et en mathématiques sont ceux pour lesquels les activités d'encodage et de décodage entre écrit et oral demandent un véritable effort, autrement dit, il convient d'attribuer une part des difficultés rencontrées en mathématiques aux lacunes pointées en lecture. Pluvinage et Mallier relevaient aussi que ce n'est pas le niveau moyen de l'ensemble des élèves qui baisse, mais que c'est plutôt le nombre d'enfants en grande difficulté de lecture qui augmente. Ceci nous ramène aux études citées en partie 1 et relatives aux effets de l'impact des caractéristiques des problèmes et de leurs énoncés sur les performances des élèves à résoudre les problèmes. Il convient donc d'accorder une importance toute particulière aux processus liés à la compréhension de l'écrit pour comprendre l'énoncé des problèmes mathématiques.

1.2. Regard critique sur les performances des élèves aux évaluations nationales CE2 et 6$^{\text{ème}}$, sur la période 1992-2006

À chaque rentrée scolaire[110] depuis septembre 1989, le Ministère de l'éducation nationale fournit à chaque école et à chaque collège un ensemble d'épreuves de français et de mathématiques destinées à l'ensemble des élèves de CE2 et de 6$^{\text{ème}}$. Ces protocoles standardisés permettent aux enseignants concernés de repérer, en tout début d'année scolaire, les acquis et les points faibles de chaque élève et du groupe-classe. Les performances compilées au niveau d'une circonscription permettent d'établir des références plus larges que celles obtenues au niveau de l'unité-école.

Les résultats nationaux sont estimés sur la base d'échantillons représentatifs d'élèves et rendus disponibles quelques mois après les passations. Ils permettent un repérage des réussites, des erreurs et des difficultés éventuelles de chaque élève dans son parcours d'apprentissage. Ce sont des éléments sur lesquels chaque enseignant peut s'appuyer au début

[110] De 1989 à 2006 pour le CE2 et de 1990 à 2007 pour la 6$^{\text{ème}}$.

d'un nouveau cycle[111] scolaire et adapter ses pratiques pédagogiques aux besoins identifiés comme étant ceux de chaque élève. Chaque équipe du cycle précédent est également destinataire de ces données en vue d'analyser, voire d'ajuster leurs pratiques pédagogiques.

1.2.1. Analyse des performances en début de CE2

Dans le domaine des mathématiques, les compétences sont mesurées et inférées par l'intermédiaire de performances relatives à plusieurs champs. Depuis 1989, quatre champs des mathématiques qui revêtent des dénominations différentes suivant les années de passation sont évalués en début de CE2 : *Ch1 = Géométrie ; Ch2 = Mesures ; Ch3 = Numération et Calcul ; Ch4 = Résolution de problèmes*. Le tableau 7 présente les différentes dénominations utilisées depuis 1989 par l'Institution scolaire. Notons qu'à compter de 2002, le champ Ch3 a été scindé en deux parties que nous noterons *Ch3a = Travaux numériques* et *Ch3b = Numération écrite et orale* que nous ne développerons pas, ce champ n'étant pas constitutif de notre objet de recherche.

		1989 à 2001	2002 à 2004	2005 et 2006
Ch1 : Géométrie		**Travaux géométriques**	**Travaux géométriques**	**Espace et Géométrie**
Ch2 : Mesures		**Mesures**	**Repérage - Mesure**	**Grandeurs et Mesures**
Ch3 : Numération et Calcul	**Ch3a**	**Travaux numériques**	**Travaux numériques**	**Calcul**
	Ch3b		**Numération Écrite - Orale**	**Connaissance des nombres entiers naturels**
Ch4 : Résolution de problèmes		**Résolution de problèmes**	**Résolution de problèmes**	**Exploitation de données numériques**

Tableau 7 : ***Évaluations nationales CE2 – Dénominations des champs par année de passation***

Les tableaux 8, 9, 10 présentent les scores moyens obtenus par année et par champ ainsi que le score moyen global en mathématiques. Ces scores moyens, dénommés ainsi par l'Institution scolaire, sont des estimations des taux moyens d'items réussis par champ. L'annexe 9 indique le procédé de calcul du score moyen obtenu à partir des mesures des performances de chaque élève d'un échantillon ainsi que les modalités de constitution de cet échantillon. Ceci rend comparables les résultats annuels. En effet, dans chaque champ le nombre d'items proposés varie d'une année à l'autre (Exemple : pour Ch4 : 7 items en 2005 ; 16 items en 2004 ; 13 items en 2002). Ces scores moyens sont *rapportés à la base 100*.

	1989	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**
Ch1 (Géométrie)	56,9	63,0	71,5	75,0	74,6	70,6	78,8
Ch2 (Mesures)	69,0	55,7	66,3	63,6	64,3	58,9	65,4
Ch3 (Numération et Calcul)	66,4	67,9	62,4	61,7	63,8	57,8	63,5
Ch4 (Résolution de problèmes)	58,6		64,0	65,0	70,9	59,4	62,5
Score Moyen Global en Mathématiques	*63,5*	*64,9*	*65,1*	*64,8*	*67,4*	*60,7*	*66,4*

Tableau 8 : ***Évaluations nationales CE2 de 1989 à 1995 : Scores moyens (sur 100)***

[111] L'école primaire comprend 3 cycles : (i) le cycle des apprentissages premiers, de la petite section à la grande section de l'école maternelle ; (ii) le cycle des apprentissages fondamentaux, de la grande section à la fin du CE1 ; (iii) le cycle des approfondissements, du CE2 à la fin du CM2.
Le collège comprend 3 cycles : (i) Le cycle d'adaptation (classe de sixième) ; (ii) le cycle central (classes de cinquième et quatrième) ; (iii) le cycle d'orientation (classe de troisième).

Il est à noter que le champ de la résolution de problèmes n'a pas fait l'objet d'une évaluation nationale spécifique en 1990.

	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Ch1 (Géométrie)	77,5	78,3	74,2	71,8	71,4	74,8
Ch2 (Mesures)	59,1	68,1	68,7	67,4	69,6	65,5
Ch3 (Numération et Calcul)	68,3	70,0	68,2	64,1	65,7	69,9
Ch4 (Résolution de problèmes)	63,4	68,4	65,9	58,6	56,1	64,9
Score Moyen Global en Mathématiques	67,0	71,0	69,1	66,0	67,1	69,1

Tableau 9 : ***Évaluations nationales CE2 de 1996 à 2001 : Scores moyens (sur 100)***

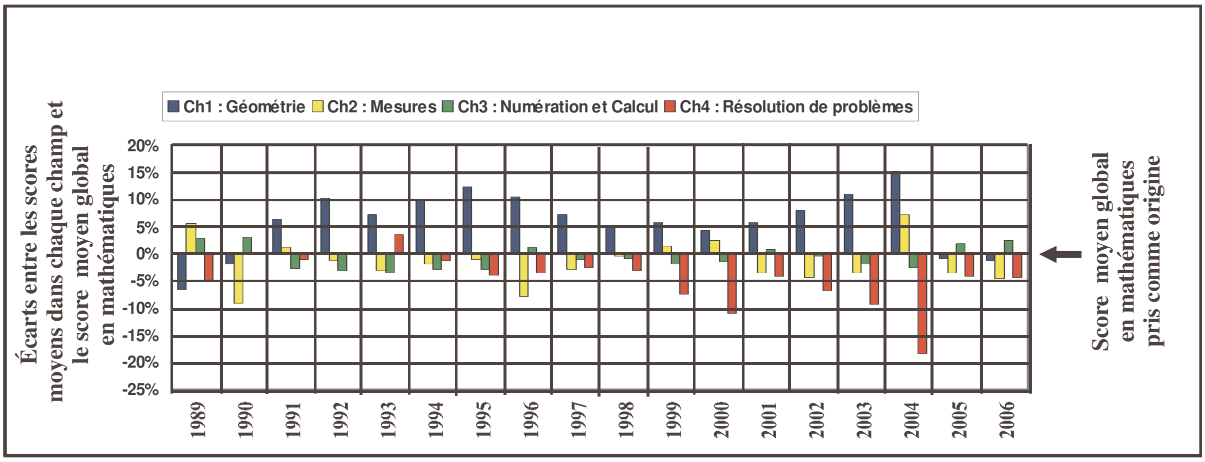
	2002	2003	2004	2005	2006
Ch1 (Géométrie)	74,8	76,6	84,8	70,1	68,6
Ch2 (Mesures)	62,3	62,1	76,6	67,4	65,3
Ch3a (Calcul)	64,4	61,5	61,3	71,4	71,1
Ch3b (Numération)	70,3	69,3	76,5	74,6	74,2
Ch4 (Résolution de problèmes)	59,9	56,4	51,1	66,7	65,5
Score Moyen Global en Mathématiques	66,7	65,7	69,5	70,9	69,9

Tableau 10 : ***Évaluations nationales CE2 de 2002 à 2006 : Scores moyens (sur 100°***

À partir de ces données, comment se situent les performances dans les différents champs par rapport au score moyen global en mathématiques ?

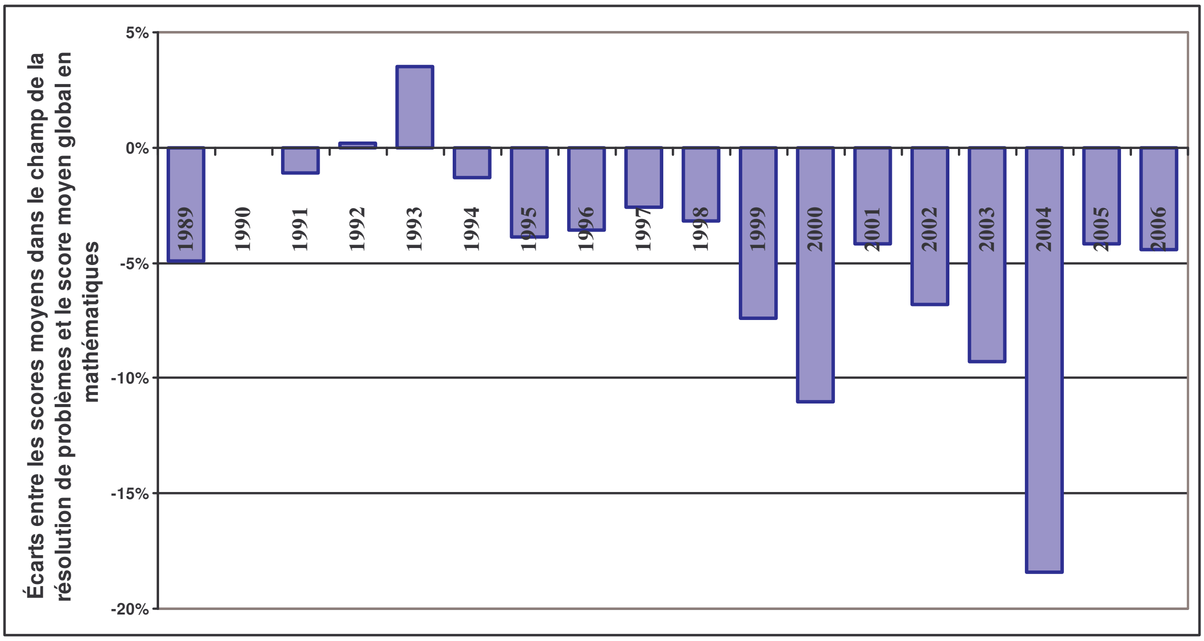
Pour chaque année de passation de 1989 à 2006, les graphiques 4 et 5 situent les scores moyens obtenus dans les différents champs par rapport au score moyen global en mathématiques. Afin de visualiser plus aisément les écarts entre le score moyen global et les scores moyens obtenus dans les différents champs, nous avons pris comme origine des graphiques 4 et 5 le score moyen global en mathématiques ramené à 0 pour chaque année. Chaque barre du graphique représente la différence entre le score moyen dans chaque champ et le score moyen global en mathématiques. Quand le score moyen dans le champ considéré est supérieur au score moyen global, la différence est positive et la barre du graphique se situe au-dessus de l'axe des abscisses, quand elle est inférieure, elle se situe au-dessous de l'axe des abscisses. Le graphique 4 se rapporte aux 4 champs[112] évalués dans le domaine des mathématiques. S'agissant des années 2002 à 2006, le champ 3 (Numération et Calcul) a été reconstruit à partir des valeurs des champs Ch3a (Calcul) et Ch3b (Numération) en tenant compte du nombre d'items de chacun de ces champs.

[112] Ch1 = Géométrie ; Ch2 = Mesures ; Ch3 = Numération et Calcul ; Ch4 = Résolution de problèmes.



Graphique 4 : ***Évaluations nationales CE2 – Écarts entre les scores moyens dans chaque champ et le score moyen global en mathématiques (1989 à 2006)***

Le graphique 5 est limité à la représentation graphique des données en résolution de problèmes.



Graphique 5 : ***Évaluations nationales CE2 – Écarts entre les scores moyens dans le champ de la résolution de problèmes (Ch4) et le score moyen global en mathématiques (1989 à 2006)***

S'agissant spécifiquement de la résolution de problèmes, le graphique 5 révèle systématiquement de 1994 à 2004 des scores moyens inférieurs à ceux du score moyen global, à l'inverse des travaux géométriques où les scores moyens sont depuis 1991 systématiquement supérieurs à ceux du score moyen global.

Si on considère par exemple la tranche 2001-2004, notre attention est attirée par les écarts qui ont tendance à s'amplifier d'année en année (Résolution de problèmes : -4,2% en 2001 vs -18,4% en 2004).

En revanche, pour la période 1996-2002, des informations complémentaires concernant la résolution de problèmes à données numériques peuvent être extraites des analyses effectuées et publiées par le Ministère de l'Éducation nationale. Dans ce champ spécifique, on relève des performances très contrastées selon les objectifs évalués[113]. Dans l'extrait de la note d'information de juillet 2001 rapporté ci-après et relatif aux évaluations de septembre 2000, on retrouve les constats effectués depuis 1996 :

> *Lorsqu'on propose aux élèves des tâches portant sur des compétences simples liées à la recherche ou à l'interprétation de l'information (remplir un tableau à double entrée, exploiter un document brut), les résultats sont élevés (de 85 à 91 % des élèves).*
>
> *Comme on pouvait s'y attendre, en ce qui concerne la résolution de problèmes à une opération, les performances dépendent de la complexité de la situation proposée et de la technique opératoire à mettre en œuvre (addition : 67% de réussite ; multiplication : 34 % ; soustraction : 22 %). Par contre, les performances sont moindres lorsque les objectifs évalués portent sur des compétences et des situations complexes du type :*
>
> *- résoudre une situation de partage et de groupement (19% de réussite) ;*
>
> *- effectuer des choix en prenant en compte conjointement plusieurs contraintes (53%).*
>
> *Il est vrai qu'à ces contraintes s'ajoutent d'autres nécessités : l'élève doit, en effet, analyser la situation ; organiser une démarche ; mettre en œuvre une technique opératoire ; formuler une réponse* (Note 01-35 de juillet 2001).

Peu d'élèves parmi ceux ayant fourni une réponse exacte parviennent à justifier leur réponse en utilisant une argumentation cohérente. Par exemple, en septembre 1998, pour la résolution d'un problème (Exercice n°15 – Mathématiques CE2 – Évaluation[114] septembre 1998) faisant intervenir une grandeur et nécessitant un choix et une justification de ce choix, plus d'un élève sur deux a fourni la réponse exacte, mais moins d'un sur trois est parvenu à justifier sa réponse en utilisant une argumentation cohérente, un élève sur cinq s'étant satisfait d'un simple constat.

La même conclusion a été tirée des évaluations de septembre 2002 dont le champ *Résolution de problèmes* jusqu'alors exclusivement centré sur les données numériques a été élargi aux autres champs des mathématiques telles que la géométrie et les mesures. Les résultats de 2002 confirment que les 10% des élèves qui obtiennent les résultats les plus faibles réalisent leurs scores les plus élevés lorsqu'il s'agit d'utiliser directement une connaissance.

Dans le même ordre d'idées, il ressort des analyses effectuées par le Ministère (DEP, 2003) que, lorsque la tâche relève de l'utilisation de relations préconstruites et consiste essentiellement à relier entre elles des informations, les élèves ne rencontrent pas majoritairement de grosses difficultés. Dès lors que les situations sont complexes et que l'élève doit gérer seul le problème, les performances sont beaucoup plus faibles que lors de l'utilisation de relations préconstruites.

D'un autre point de vue, une autre étude (DEP, 2002) a été conduite en juillet 2002 par le Ministère de l'Éducation nationale afin de comparer les résultats des mêmes élèves scolarisés en juin en CE1 avant les vacances d'été et en septembre en CE2 à la rentrée scolaire. Elle révèle que *Résoudre une situation de partage*, *Prendre en compte plusieurs*

[113] Note 97-23 de mai 1997 ; note 98-23 de juillet 1998 ; note 01-35 de juillet 2001.
[114] Voir le texte du problème en annexe 10.

contraintes afin d'effectuer un choix et en formuler la justification semblent être des compétences difficiles à atteindre pour les élèves des deux niveaux concernés. Le taux de réussite est strictement inférieur à 50%, avec un écart significatif en faveur du CE1. La Direction de l'Évaluation et de la Prospective rappelle que ces items mesurent des compétences en cours d'acquisition et explique cet écart positif en faveur du CE1 par des pratiques de classe régulières et récentes.

Selon une autre étude du Ministère de l'Éducation nationale conduite, cette fois en vue d'analyser les résultats aux évaluations 2005, les performances obtenues en résolution de problèmes additifs sont supérieures à celles obtenues pour les problèmes soustractifs, avec néanmoins la reconnaissance de la situation soustractive par un tiers des élèves. On constate aussi, pour un tiers des élèves, l'absence de traces de résolution dans les espaces réservés à cet usage, ce qui laisse supposer que cette proportion non négligeable d'élèves a eu recours au calcul mental pour accéder à la solution. Enfin, plus de six élèves sur dix développent des procédures personnelles efficaces pour résoudre les problèmes de partage et de groupement proposés dans ces épreuves, tandis que l'on relève une présence plus marquée d'usage d'une procédure experte pour la multiplication que pour la division.

1.2.2. Analyse des performances en début de 6ème

Dans le domaine des mathématiques, les compétences sont mesurées par des performances relatives à plusieurs champs. Depuis 1990, cinq champs des mathématiques qui revêtent des dénominations différentes (Tableau 11) suivant les années de passation sont évalués en début de 6ème : *Ch1 : Numération ; Ch2 : Traitements opératoires ; Ch3 : Travaux géométriques ; Ch4 : Traitement de l'information ; Ch5 : Problèmes à données numériques*. Les tableaux 12 et 13 présentent les différentes dénominations utilisées depuis 1990 par l'Institution scolaire.

Ch1	**Numération**
Ch2	**Traitements opératoires**
Ch3	**Travaux géométriques**
Ch4	**Traitement de l'information**
Ch5	**Problèmes numériques**

Tableau 11 : ***Évaluations nationales 6ème – Dénominations retenues pour les différents champs***

	1990 à 1994	1995-1996	1997 à 2000
Ch1	Numération et décimaux	Numération et décimaux	Numération et écriture des nombres
Ch2	Traitements opératoires	Traitements opératoires	Traitements opératoires
Ch3	Formes géométriques	Formes géométriques	Formes géométriques et mesures
Ch4	Réception, traitement et production	Traitement de l'information	Traitement de l'information
Ch5	Sens des opérations	Problèmes numériques	Problèmes numériques

Tableau 12 : ***Évaluations nationales 6ème – Dénominations des champs de 1990 à 2000***

	2001	2002 à 2004	2005-2007
Ch1	Numération	Numération et écriture des nombres	Connaissance des nombres
Ch2	Traitements opératoires	Traitements opératoires	Calcul
Ch3	Travaux géométriques	Travaux géométriques	Espace et Géométrie
Ch4	Traitement de l'information	Traitement de l'information	Grandeurs et mesures
Ch5	Problèmes numériques	Problèmes numériques	Exploitation des donnés numériques

Tableau 13 : ***Évaluations nationales 6ème – Dénominations des champs de 2001 à 2007***

Les tableaux 14, 15, 16 présentent successivement les scores moyens obtenus par année, par champ et dans le domaine des mathématiques. Ces scores moyens sont, comme pour le CE2, des estimations des taux moyens d'items réussis par champ. Ceci rend comparables les résultats annuels, étant donné que dans chaque champ, le nombre d'items proposés varie d'une année à l'autre. Ces scores moyens sont *rapportés à la base 100*.

	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Ch1 : Numération	72,30	74,70	74,00	60,70	77,60	68,70
Ch2 : Traitements opératoires	73,30	68,90	73,00	66,30	71,80	71,50
Ch3 : Travaux géométriques	80,00	68,30	68,90	67,10	68,90	55,20
Ch4 : Traitement de l'information	71,80	70,40	73,20	55,50	57,60	69,50
Ch5 : Problèmes numériques	70,00	60,80	63,10	52,50	45,00	55,90
Score Moyen Global en Mathématiques	72,90	70,10	71,90	58,30	62,40	63,40

Tableau 14 : ***Évaluations nationales 6ème de 1990 à 1995 : Scores moyens (sur 100)***

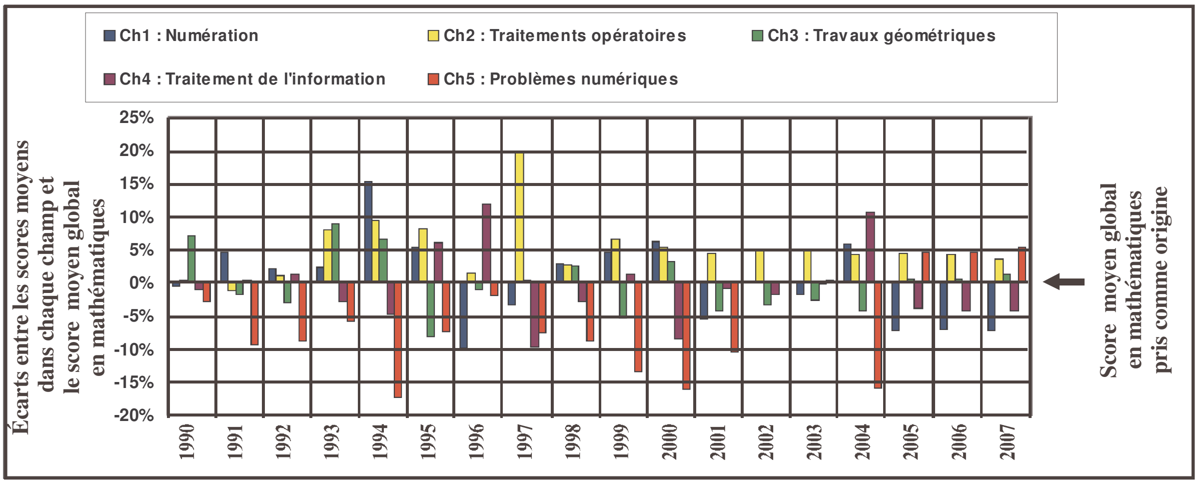
	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Ch1 : Numération	53,00	51,40	62,90	67,70	70,80	61,40
Ch2 : Traitements opératoires	64,30	74,50	62,80	69,60	70,00	71,30
Ch3 : Travaux géométriques	61,90	55,00	62,60	57,80	67,80	62,70
Ch4 : Traitement de l'information	74,80	45,00	57,20	64,30	56,20	66,00
Ch5 : Problèmes numériques	61,00	47,10	51,20	49,70	48,50	56,40
Score Moyen Global en Mathématiques	62,90	54,70	60,10	63,10	64,60	66,90

Tableau 15 : ***Évaluations nationales 6ème de 1996 à 2001 : Scores moyens (sur 100)***

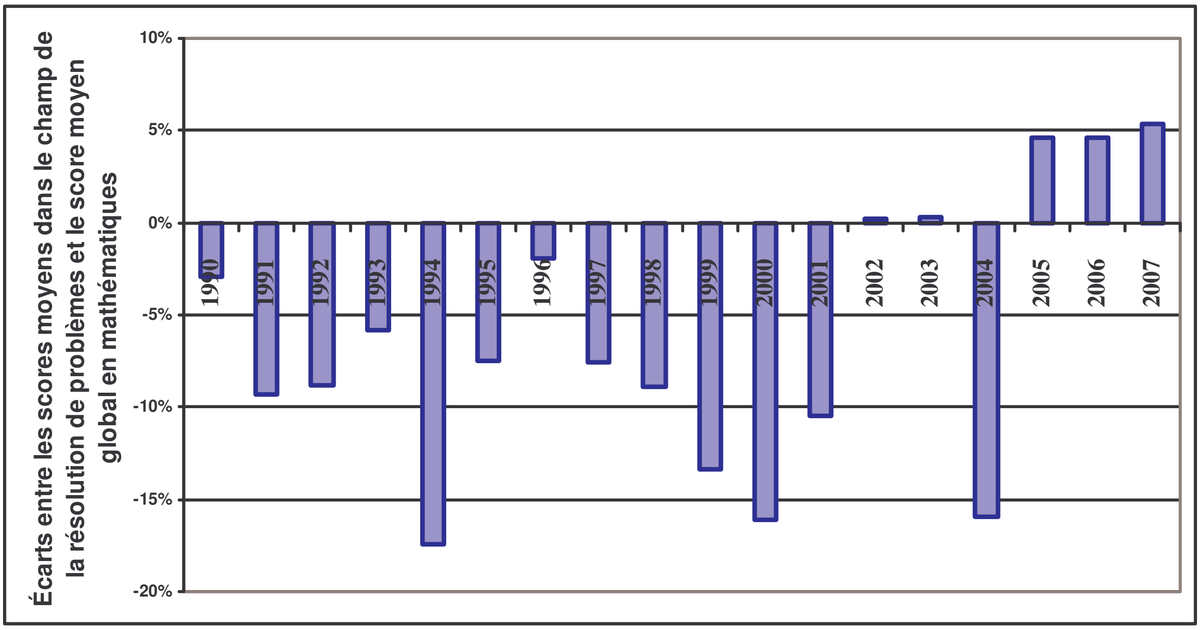
	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Ch1 : Numération	65,20	60,60	70,10	56,70	57,00	57,10
Ch2 : Traitements opératoires	69,90	67,20	68,60	68,30	68,30	67,90
Ch3 : Travaux géométriques	61,60	59,60	60,10	64,50	64,60	65,60
Ch4 : Traitement de l'information	63,30	62,10	75,00	60,10	59,80	60,00
Ch5 : Problèmes numériques	65,20	62,60	48,40	68,50	68,60	69,70
Score Moyen Global en Mathématiques	65,00	62,30	64,30	63,90	64,00	64,30

Tableau 16 : ***Évaluations nationales 6ème de 2002 à 2007 : Scores moyens (sur 100)***

S'agissant des résultats aux évaluations de 6ème, les graphiques 6 et 7 révèlent, de 1994 à 2004, le même constat que pour les évaluations CE2 : les performances en résolution de problèmes pour les épreuves d'évaluation de 6ème sont systématiquement inférieures au score moyen global en mathématiques.



Graphique 6 : ***Évaluations nationales 6ème – Écarts entre les scores moyens dans chaque champ et le score moyen global en mathématiques (1990 à 2007)***



Graphique 7 : ***Évaluations nationales 6ème – Écarts entre les scores moyens dans le champ de la résolution de problèmes (Ch5) et le score moyen global en mathématiques (1990 à 2007)***

Pour le champ des problèmes à données numériques, plusieurs notes d'information publiées par le Ministère mentionnent des difficultés pour résoudre des exercices mettant en jeu des raisonnements complexes ou demandant la production d'une justification, l'interprétation de données présentes dans l'énoncé, l'organisation d'une démarche[115].

Des difficultés relatives à la proportionnalité, à l'interprétation d'une division euclidienne sont également pointées certaines années. Rappelons que les contenus des

[115] Notes 97-23 de mai 1997, 98-23 de juillet 1998, 00-01 de janvier 2000, 01-33 de juillet 2001 et 03-19 d'avril 2003.

épreuves ne sont pas constants d'une année sur l'autre et que, chaque année, un choix est opéré par les concepteurs des épreuves, quant aux compétences à évaluer.

L'étude conduite en 2001 par le Ministère de l'Éducation nationale (DEP, 2002) visant à comparer les performances avant et après les vacances scolaires d'été, montre que les écarts les plus importants entre la fin du CM2 et le début de la $6^{ème}$ concernent tous les items qui évaluent les compétences en cours d'acquisition et qui mettent en jeu le sens de la division dans le cadre d'une situation-problème (46,4% de réussite en CM2 vs 39,7% en $6^{ème}$), la comparaison d'un produit donné avec un autre produit par calcul approché (40,4% de réussite en CM2 vs 33% en $6^{ème}$), l'analyse d'une situation numérique exigeant de prendre en compte plusieurs contraintes (54% de réussite en CM2 vs 44% en $6^{ème}$).

Cette même étude pointe l'absence d'écart significatif entre le CM2 et la $6^{ème}$ à l'item évaluant la capacité à reconnaître une situation additive, cet item étant par ailleurs le mieux réussi de l'ensemble du champ. Nous nous interrogeons cependant sur les performances réalisées : 72,8% de réussite en CM2 vs 70,7% en $6^{ème}$ puisque, selon cette étude, près de 3 élèves sur 10 ne seraient pas capables en début de collège de reconnaître une situation additive.

S'agissant des évaluations de septembre 2005, la synthèse établie par le Ministère de l'Éducation nationale[116] fait état, pour plus de sept élèves sur dix, d'une bonne maîtrise de la lecture et de l'interprétation des diagrammes. Les résultats révèlent aussi *que deux élèves sur trois sont capables de résoudre un exercice*[117] *simple sur la proportionnalité directe, c'est-à-dire de reconnaître le type de situation et de mettre en jeu une technique faisant appel aux proportions linéaires.*

1.3. Conclusion du chapitre 1

Nos premières investigations réalisées sur les résultats issus des évaluations nationales et internationales ont contribué à orienter notre réflexion sur la résolution de problèmes en mathématiques ainsi que la construction de notre objet de recherche.

En ce qui concerne l'évaluation PISA 2003, la communauté mathématique a témoigné d'un certain étonnement en observant que les niveaux de performances en résolution de problèmes pour la France étaient moindres que ceux de la Finlande. Bodin (2005) avance l'explication du manque d'autonomie des jeunes français pour adapter à des situations nouvelles les connaissances préalablement acquises. Les élèves français semblent éprouver des difficultés lorsque les situations d'utilisation des connaissances diffèrent des situations d'enseignement par lesquelles ils ont réalisé l'apprentissage.

Cette question du recours aux apprentissages antérieurs constitue l'une de nos principales préoccupations dans ce travail de recherche. Nous nous demandons si à l'école

---

[116] À partir de 2005, les notes de synthèse des résultats des évaluations sont publiées en ligne sur le site du Ministère de l'Éducation nationale. Pour les évaluations 2005 : http://cisad.adc.education.fr/eval/pages-05/Evace26/index.htm .

[117] Le terme *exercice* employé correspond à un problème scolaire à données numériques à énoncé verbal tel que nous l'avons défini en Partie 1 – Paragraphe 6.2.2. : *Le concept de problème dans notre travail de recherche*

élémentaire, les enseignants incitent leurs élèves à se référer à des problèmes préalablement rencontrés, autrement dit, à se poser des questions du type : *Ce problème de mathématiques que je dois résoudre, ressemble-t-il à un autre que j'ai déjà traité ? Ces problèmes appartiennent-ils à la même catégorie ? Si oui, quels sont les points communs ? Si non, quelles sont les différences ?*

Les analyses des données issues des évaluations nationales ont conduit le Ministère de l'Éducation nationale à souligner les difficultés rencontrées par les élèves :

(i) en début de CE2, dès lors qu'il s'agit de résoudre des situations complexes et de dépasser la simple utilisation de relations,

(ii) en début de $6^{\text{ème}}$, dès lors qu'il s'agit de mettre en jeu des raisonnements complexes, de justifier une réponse, d'interpréter des données présentes dans l'énoncé ou encore d'organiser une démarche de résolution.

Faut-il pour autant conclure à un échec des situations d'enseignement mises en place dans notre système scolaire ?

Une telle question mérite des investigations supplémentaires en vue d'analyser les parcours d'apprentissage des élèves de la sortie du cycle 2 jusqu'à la fin du cycle 3. Afin d'éviter de tirer des conclusions trop hâtives, fondées davantage sur un aspect militant que sur un aspect scientifique, il convient de repérer si les difficultés rencontrées par les élèves en début de CE2 perdurent tout au long du cycle 3.

Pour ce faire, nous avons mis en œuvre un dispositif d'observation longitudinale d'une cohorte d'élèves soumis à la passation annuelle d'un même problème mathématique à données numériques relevant du champ conceptuel multiplicatif et exprimé par un énoncé exclusivement verbal. Nous dirons pour raccourcir : problème verbal à données numériques de type multiplicatif. Ce dispositif a été mis en place pendant quatre années scolaires consécutives, de la fin du CE1 (juin 2000) à la fin du CM2 (juin 2003). Au total, 213 élèves ont été concernés au moins une fois par la passation ; 105 élèves seulement ont effectué les quatre passations consécutives.

Les performances et les traces écrites produites par les élèves feront l'objet d'une analyse en vue d'en repérer les fluctuations et les caractéristiques. Le chapitre 2 traitera de la description et des résultats de cette étude longitudinale.

Chapitre 2 : Étude longitudinale d'une résolution de problème sur quatre années

Ce chapitre présente dans un premier temps l'étude longitudinale que nous avons mise en place sur quatre années successives en vue d'étudier l'évolution des performances d'un échantillon d'élèves dans la résolution d'un même problème de type multiplicatif. Les résultats de cette étude sont présentés dans un second temps, avant de dresser quelques conclusions.

2.1. Description de l'étude longitudinale

La présentation générale de l'étude longitudinale sera suivie des présentations des sujets impliqués, du problème donné à résoudre lors des quatre années successives, de l'indication du mode de passation strictement identique dans chaque classe et chaque année ainsi que de la présentation du protocole de recueil des données.

2.1.1. Présentation générale de l'étude

Depuis 1992, les résultats aux évaluations nationales de début de CE2 et de 6ème traduisent les difficultés rencontrées par les élèves pour résoudre les situations proposées en résolution de problèmes[118]. Comment évoluent les résultats entre l'année du CE2 et l'entrée en 6ème ? Plus explicitement, *Observe-t-on une amélioration des performances des élèves tout au long du cycle des approfondissements de l'école primaire (CE2-CM1-CM2) dans la résolution d'un même problème verbal à données numériques ?* À notre connaissance, il n'existe pas de suivi longitudinal d'une cohorte d'élèves à ces niveaux d'enseignement dans ce champ précis des mathématiques.

Nous avons procédé à une étude portant sur quatre années successives, de la fin du CE1 à la fin du CM2. Le recueil de données a concerné l'ensemble des écoles d'un même secteur géographique : le secteur Jules Ferry de Montluçon (Allier), rattaché à la circonscription d'Inspection de l'Éducation nationale de Montluçon 2. Ce choix a été justifié par la composition géographique homogène de ce secteur scolaire qui ne compte que des écoles urbaines, s'opposant ainsi aux autres secteurs qui regroupent à la fois des écoles rurales et des écoles semi-urbaines.

La méthode consiste en la passation individuelle d'un même problème numérique, de la fin du CE1 (mai 2000) à la fin du CM2 (juin 2003). Tous les élèves de CE1 du secteur Jules Ferry ont été concernés par cette passation en mai 2000, tous les élèves de CE2 de ce même secteur en mai 2001, puis tous ceux de CM1 en mai 2002 et enfin tous ceux de CM2 en mai 2003.

[118] Voir Partie 2 Chapitre 1.

Dans les paragraphes qui suivent, nous indiquerons les choix opérés : constitution de la cohorte d'élèves, caractéristiques du problème retenu, mode de passation de l'épreuve. Nous préciserons également les caractéristiques des données recueillies et les codages utilisés pour le traitement de chacune d'entre elles : élèves, lieu de scolarité, traces écrites intermédiaires, réponses et degrés de performances des élèves.

2.1.2. Les sujets impliqués dans l'étude

Nous décrivons ci-après la cohorte d'élèves impliqués dans les quatre passations successives puis nous en étudions la représentativité.

2.1.2.1. Constitution de la cohorte

Au total, 213 élèves ont été concernés par au moins une passation sur l'ensemble des quatre années. Parmi ces 213 élèves, 105 ont passé l'épreuve lors des quatre années consécutives : en fin de CE1, en fin de CE2, en fin de CM1 et en fin de CM2. Le graphique 8 présente l'évolution des flux d'élèves concernés de mai 2000 à mai 2003. En annexe 11, figure la répartition des présences de chacun des 213 élèves à cette épreuve de passation au cours des quatre années.

Ainsi, l'effectif de la cohorte retenue est de 105 élèves. Les 108 autres n'ont pas passé l'ensemble des quatre épreuves pour des motifs divers, liés soit à des absences ponctuelles, soit à des déménagements, soit encore à des procédures de maintien dans la classe précédente.

L'état de présence des élèves aux quatre passations successives a abouti à la constitution de deux grands groupes : (i) la cohorte des 105 élèves ayant aux quatre passations et (ii) le groupe des 108 élèves absents à au moins l'une des passations. Ce groupe a été scindé en 13 sous-groupes caractérisés chacun par les éléments d'un quadruplet (a ; b ; c ; d) où a, b, c et d représentent respectivement l'état des présences aux différentes passations successives.

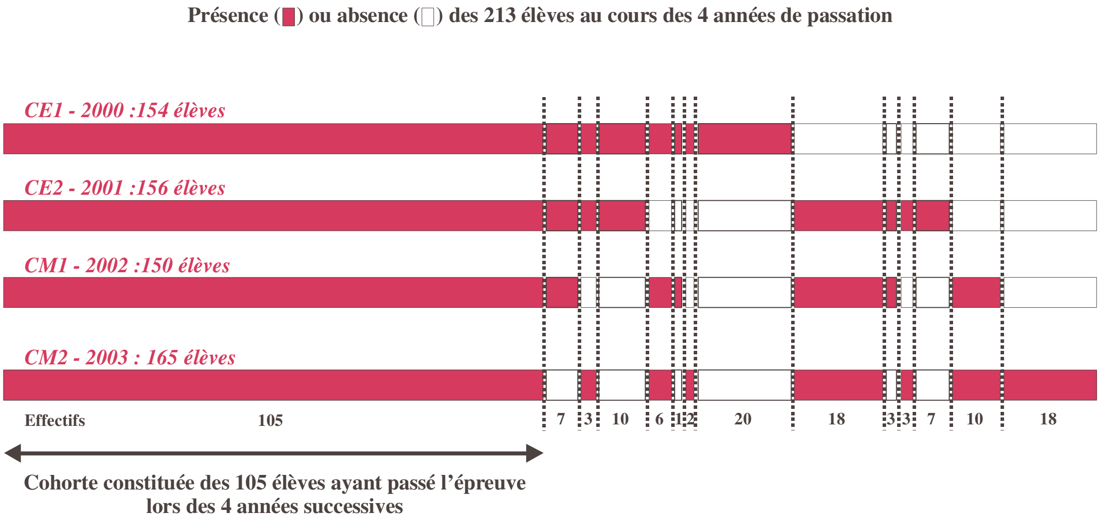
Quadruplet	***Effectif***	**Quadruplet**	***Effectif***	**Quadruplet**	***Effectif***
(1 ; 1 ; 1 ; 1)	***105***	**(1 ; 0 ; 1 ; 0)**	***1***	**(0 ; 1 ; 0 ; 1)**	***3***
(1 ; 1 ; 1 ; 0)	***7***	**(1 ; 0 ; 0 ; 1)**	***2***	**(0 ; 1 ; 0 ; 0)**	***7***
(1 ; 1 ; 0 ; 1)	***3***	**(1 ; 0 ; 0 ; 0)**	***20***	**(0 ; 0 ; 1 ; 1)**	***10***
(1 ; 1 ; 0 ; 0)	***10***	**(0 ; 1 ; 1 ; 1)**	***18***	**(0 ; 0 ; 1 ; 0)**	***0***
(1 ; 0 ; 1 ; 1)	***6***	**(0 ; 1 ; 1 ; 0)**	***3***	**(0 ; 0 ; 0 ; 1)**	***18***

Légende	***1 = Présence***
	0 = Absence
Effectif total : 213 élèves	

Tableau 17 : ***Étude longitudinale : répartition des 213 élèves en sous-groupes***

Le fait de partir d'un échantillon de 154 élèves, d'aboutir à un effectif total de 213 élèves concernés par les passations pour finalement ne disposer que d'une cohorte de 105 élèves, a suscité notre étonnement quant à l'ampleur des flux migratoires avec des entrées et des sorties qui déterminent les états chronologiques de la cohorte. L'absence peut être expliquée soit par une sortie, soit par le fait que l'élève n'est pas encore arrivé, soit par une absence occasionnelle.

Le graphique 8 permet de visualiser les flux d'élèves au cours des quatre années.



Graphique 8 : ***Étude longitudinale - Flux d'élèves de mai 2000 à mai 2003***

2.1.2.2. Représentativité de la cohorte

2.1.2.2.1. Représentativité de la cohorte par rapport à la variable *Sexe*

Notre échantillon se compose de 54 garçons et 51 filles, ce qui représente respectivement en pourcentages : garçons (51,4%), filles (48,6%).

Au niveau national, les pourcentages de garçons et de filles sont respectivement de 51,2% et 48,8%[119].

Si nous constituons un échantillon E de même taille que le nôtre, mais avec des proportions identiques à la répartition nationale *Garçons / Filles*, nous obtenons pour la composition de E : 54 garçons et 51 filles.

		Garçons	Filles
Pourcentages	**Cohorte**	51,4	48,6
	National	51,2	48,8

Tableau 18 : ***Répartition par sexe (pourcentages)***

[119] National : *Chiffres Elémentaire public France métropolitaine 2006* (estimation) 51,2% G et 48,8% F (MEN, Repères et références statistiques Août 2007)

		Garçons	Filles
Effectifs	**Observé**	54	51
	Théorique espéré	54	51

Tableau 19 : ***Répartition par sexe (effectifs)***

L'effectif théorique espéré étant égal à l'effectif observé, nous pouvons considérer que la cohorte de notre étude longitudinale est représentative au niveau de la répartition garçons-filles.

2.1.2.2.2. Représentativité de la cohorte par rapport à la variable *Âge*

Notre échantillon se compose de 8 élèves *en retard*, 95 élèves *à l'heure* et de 2 élèves *en avance*.

On considère comme étant :

- *à l'heure*, les élèves n'ayant jamais redoublé et ayant suivi toutes les classes jusqu'à l'entrée en CE1 (nés en 1992).
- *en retard,* les élèves ayant redoublé au moins une fois. Ce sont des élèves nés en 1991 ou avant.
- *en avance,* les élèves n'ayant pas suivi toutes les classes. Ce sont des élèves nés en 1993 ou après.

Au niveau national[120], 16,5% d'élèves sont considérés comme étant *en retard*, 81,7% comme étant *à l'heure* et 1,8% comme étant *en avance*.

Si nous constituons un échantillon E de même taille que le nôtre, mais avec des proportions identiques à la répartition nationale des élèves en fonction de leur âge, nous obtenons pour la composition de E : 15 élèves *en retard* ; 89 élèves *à l'heure* et 1 élève *en avance*.

		En retard	À l'heure	En avance
Pourcentages	**Cohorte**	7,6	90,5	1,9%
	National	14,2	84,5	1,4%

Tableau 20 : ***Répartition par âge (pourcentages)***

		En retard	À l'heure	En avance
Effectifs	**Observé**	8	95	2
	Théorique espéré	15	89	1

Tableau 21 : ***Répartition par âge (effectifs)***

Pour comparer notre distribution empirique à la distribution théorique de l'échantillon E, nous utilisons le test d'adéquation du χ^2. On nomme H_0 l'hypothèse nulle et H_1 l'hypothèse alternative :

H_0 : Les deux distributions sont identiques.

H_1 : Les deux distributions sont distinctes.

[120] National : Chiffres Élémentaire public - France métropolitaine - Dernière statistique connue 1999-2000 (MEN, Repères et références statistiques Août 2007) – Voir tableau de référence en annexe 12.

En application du test d'adéquation fondé sur la statistique du **χ^2**, nous obtenons la conclusion suivante : la valeur observée de 20,37 est supérieure à la valeur théorique $\chi^2_{H0}(0{,}01 ; 2) = 9{,}21$ donc on rejette H_0 au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$ et on accepte H_1.

Autrement dit, la distribution de fréquence des *Âges* sur l'échantillon est distincte de celle de la *population*. On peut aussi considérer que notre échantillon n'est pas représentatif au sens de modèle réduit. Cette non-représentativité introduit deux biais : une sous-représentation des élèves *en retard* et une sur-représentation des élèves *en avance*.

2.1.3. Choix du problème

La présentation de l'énoncé du problème retenu sera suivie d'une analyse a priori de ce problème et de son énoncé.

2.1.3.1. L'énoncé du problème retenu

L'objectif de l'étude consiste à mesurer et à comparer les degrés de performances des élèves, dans la résolution d'un même problème verbal à données numériques, de type multiplicatif, au long des quatre dernières années de la scolarité élémentaire.

Pour ce problème, nous avons choisi une situation de groupement pouvant être résolue :

- dès le cycle 2 par l'élaboration de procédures personnelles ;
- tout au long du cycle 3 par la reconnaissance et l'utilisation d'une procédure *experte* appropriée.

Le problème a été extrait des épreuves d'évaluations nationales[121] de CE2 de septembre 1999.

> *Le directeur de l'école doit envoyer 87 lettres. Il doit mettre un timbre sur chaque enveloppe. Les timbres sont vendus par carnet de 10 timbres.*
> *Combien de carnets doit-il acheter ?*

Dans sa présentation, sur la fiche de travail remise à chaque élève, l'énoncé est suivi d'un cadre laissant un espace pour un usage de brouillon (Figure 49).

2.1.3.2. Analyse a priori du problème et de son énoncé

2.1.3.2.1. Nature du problème

Il s'agit d'une situation de partage.

2.1.3.2.2. Caractéristiques extra mathématiques de l'énoncé

Le problème posé est un problème verbal à données numériques, de type multiplicatif.

[121] Ministère de l'Éducation nationale, de la Recherche et de la Technologie, Direction de la Programmation et du développement, (1999), *Évaluation à l'entrée au CE2, Français-Mathématiques, Livret de l'élève, Mathématiques*, Exercice n°26, p. 54.

L'énoncé est de forme strictement verbale ; il ne comporte aucune représentation iconique. Il comprend deux parties : (i) un texte descriptif de forme narrative composé de trois phrases affirmatives ; (ii) une question. Le placement de la question en fin d'énoncé évite l'introduction de paramètres supplémentaires : d'une part, il est en conformité avec les pratiques habituelles des classes concernées et, d'autre part, en conservant ce placement final, on limite un effet pointé par Fayol (1986) à savoir qu'on observe une augmentation du taux de réussite aux problèmes quand la question est posée en début d'énoncé.

2.1.3.2.3. Contenu des connaissances mathématiques

Numération :

- Décomposer un nombre entier strictement inférieur à 100 en dizaines et unités.
- Encadrer un nombre entier par deux dizaines successives ($10n < 87 < 10(n+1)$) et retenir la borne supérieure de l'encadrement.

2.1.3.2.4. Caractéristiques de surface, apports informationnels de l'énoncé du problème et contraintes pour sa résolution

2.1.3.2.4.1. Contraintes données par l'énoncé du problème

Des contraintes sont posées par les données à respecter :

- Données numériques : 87 ; 10.
- Réponse attendue en termes de nombre de carnets.

Les caractéristiques de surface et les informations fournies peuvent apporter une aide :

- **Au niveau syntaxique**
  - Le découpage de la narration en trois phrases évite l'emploi de procédés liés à la subordination ou à la coordination de propositions.
  - Le vocabulaire employé semble accessible dès la fin de CE1.
  - Les données numériques sont écrites en chiffres.
- **Au niveau sémantique**
  - La situation est proche de la vie quotidienne.
  - La composition même de chaque carnet (10 timbres) permet un comptage de 10 en 10 ; la difficulté aurait été tout autre si les timbres avaient été vendus par carnet de douze.
  - Le début de la phrase-réponse est donné dans la fiche.
- Au niveau rédactionnel
  - Le droit au brouillon est matérialisé par la présence d'un grand cadre vide.

En revanche on peut aussi identifier quelques sources de difficultés :

- **Au niveau lexical**
  - Le terme *carnet* peut se révéler inconnu chez certains élèves.

- **Au niveau sémantique**, l'élève ne fait pas les inférences suivantes :
  - relations d'égalité entre le nombre de lettres, le nombre d'enveloppes et le nombre de timbres à coller
  - *par carnet de 10 timbres* et insécabilité d'un carnet de timbres.
  - Le pronom *il* et le renvoi au groupe nominal *le directeur de l'école* utilisé tout au début de l'énoncé.
  - La *taille* du nombre 87 ne facilite pas le recours au dessin ou au schéma.
  - Le nombre 87 complexifie la tâche qui aurait été plus simple avec des nombres entiers de dizaines (80 ou 90).
  - Le type de situation n'est pas évocateur d'une situation de la vie quotidienne pour certains enfants qui n'ont jamais acheté de carnets de timbres.
  - La recherche du nombre de dizaines contenues dans 87 ne suffit pas.

2.1.3.2.4.2. Procédures attendues a priori pour la résolution

Si maintenant nous examinons les différentes procédures attendues a priori respectant les contraintes données par l'énoncé du problème, nous pouvons en retenir deux grandes catégories :

- Procédures numériques
- Procédures qui recourent à l'usage de dessins ou de schémas

Il s'agit de parvenir à la réponse *9 carnets*.

Dans la première catégorie, **une procédure numérique** possible est de réaliser l'algorithme de la division euclidienne qui nécessite la détermination des étapes suivantes :

- Comprendre qu'il faut au moins 87 timbres.
- Inférer qu'un carnet ne peut être scindé lors de l'achat et qu'il faut répondre par un nombre entier de carnets.
- Décomposer 87 en [8x10 + 7] ou encadrer 87 : [8x10 < 87 < 9x10]. L'élève peut avoir recours au calcul posé ou au calcul mental.
- Déduire qu'il faut acheter 9 carnets en retournant à la situation initiale.

Dans la deuxième catégorie, une procédure possible consiste à **recourir à l'usage de représentations iconiques** et à représenter par écrit sous la forme d'un schéma ou d'un dessin les 87 timbres regroupés par dizaines, la $9^{ème}$ dizaine étant incomplète. L'usage de la conversion de représentations nécessite le passage :

- (i) du registre textuel des deux premières phrases de l'énoncé à un registre iconique représentant les 87 enveloppes.
- (ii) du registre textuel de la $3^{ème}$ phrase de l'énoncé à un registre iconique traduisant les regroupements par dizaines.

Une seconde procédure, de nature analytique, consiste à dessiner les données au fur et à mesure de la lecture de l'énoncé :

- Dessin du directeur
- Dessin des 87 lettres

- Dessin des timbres

Cette dernière procédure, moins économique peut se révéler très coûteuse en temps mais elle est bien sûr recevable.

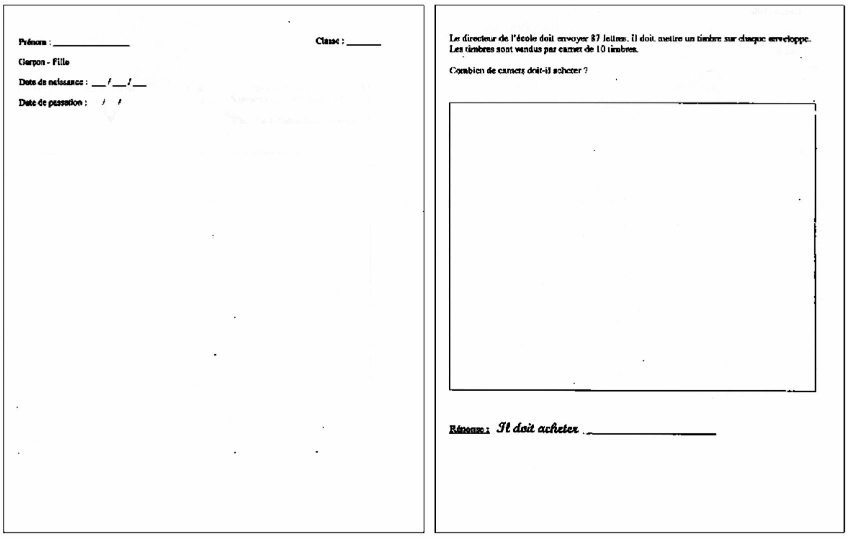
2.1.4. Mode de passation

Tous les enseignants du secteur scolaire retenu pour cette étude longitudinale, sollicités sur la base du volontariat, ont répondu favorablement à la demande de passation de l'épreuve de mathématiques dans leur classe. Ils n'avaient été informés ni du contenu, ni du déroulement précis de l'épreuve.

Dans chaque classe, la passation est effectuée sous notre contrôle et nos directives, en présence de l'enseignant de la classe qui ne doit ni procéder à une préparation spécifique, ni intervenir. Le mode de passation est le même pour toutes les classes (Tableau 22).

Étape		**Descriptif**	**Consigne**
	1	Distribution de la fiche (Figure 50). Renseignement du côté recto (Voir Figure 50) par guidage collectif.	*Écrivez votre prénom.* *Écrivez votre date de naissance en chiffres.* *Ne retournez pas votre fiche pour l'instant.* *Attendez que je vous le demande. Posez vos stylos.*
	2	Lecture orale de l'énoncé réalisée par nous-même.	*Je vais vous lire un énoncé de problème que vous devrez ensuite résoudre sur la feuille.*
	3	Résolution du problème. Durée du travail écrit : 3 minutes (nous avons opté pour la durée imposée par le Ministère de l'Éducation nationale lors de la passation de cette épreuve extraite des évaluations nationales de CE2, en septembre 1999).	*Au signal, vous retournerez votre feuille pour résoudre le problème. Si vous le souhaitez, vous pourrez faire des recherches dans le cadre, c'est-à-dire que vous pourrez utiliser ce cadre comme un cahier de brouillon. Vous aurez le droit de raturer, mais pas de gommer. Vous n'oublierez pas d'écrire votre réponse sur la ligne Réponse. Vous disposez de 3 minutes. Quand vous aurez terminé, vous retournerez la feuille. Trente secondes exactement avant la fin, je vous annoncerai : Il vous reste 30 secondes.* *Allez-y, vous pouvez retourner votre feuille.*
	4	Fin de la passation. Récupération des fiches. Présentation des fiches (côté recto) à l'enseignant pour demander le niveau individuel estimé de chaque élève en résolution de problèmes verbaux à données numériques (5 niveaux : très faible, faible, moyen, bon, très bon). Ce n'est qu'après avoir fourni ces données que nous autorisons l'enseignant de la classe à consulter les réponses de ses élèves.	
	5	Correction des fiches par nos soins. Pas de correction individuelle ni collective. Pas de reprise de cet énoncé par l'enseignant.	

Tableau 22 : ***Protocole de passation***



Prénom : ________ Classe : ______

Garçon - Fille

Date de naissance : ___/___/___

Date de passation : / /

Le directeur de l'école doit envoyer 87 lettres. Il doit mettre un timbre sur chaque enveloppe.
Les timbres sont vendus par carnet de 10 timbres.

Combien de carnets doit-il acheter ?

Réponse : *Il doit acheter* ________

Recto Verso

Figure 50 : ***Fiche de travail remise à chaque élève***

La réussite attendue était 9 carnets, mais nous examinerons ci-après les différentes réponses fournies par les élèves.

2.1.5. Recueil des données

Pour chacune des quatre années de scolarité, les données ont été recueillies selon un protocole identique, et ont été regroupées selon les caractéristiques exposées ci-après :

2.1.5.1 Codage des caractéristiques des élèves

Colonne	Libellé	Observations
1	Individus	Chacun des 105 individus est identifié par un code du type Ind xxx. Le numéro xxx est celui qui a été attribué lors du recueil initial des données, pour l'ensemble des 213 individus.
2 à 5	Âge	Il s'agit de l'âge (année, mois) à la date de la passation.
6	Sexe	Le sexe masculin est codé par 1. Le sexe féminin est codé par 2.
7 à 10	Niveau estimé	Le niveau estimé de chaque élève en résolution de problèmes a été donné par l'enseignant de la classe avant la prise de connaissance des performances. Les codages de 1 à 5 correspondent respectivement aux appréciations : Très Faible ; Faible ; Moyen ; Bien ; Très Bien

L'ensemble des données figure en annexe 13.

2.1.5.2 Codage des caractéristiques du lieu de scolarité

Colonne	Libellé	Observations
11 à 14	École	L'école d'appartenance de chaque individu est codée de 1 à 8.
15 à 18	Type de classe	Chaque type de classe dans lequel l'élève est scolarisé, est codé par un nombre de 1 à 8 correspondant respectivement aux niveaux : CP-CE1, CE1, CE1-CE2, CE2, CE2-CM1, CM1, CM1-CM2, CM2.
19 à 22	Enseignant	Chaque enseignant est identifié par un nombre de 1 à 34.

L'ensemble des données figure en annexe 14.

2.1.5.3 Codage des traces écrites intermédiaires

Colonne	Libellé	Observations
23 à 26	Types de traces écrites intermédiaires	Les types de productions écrites intermédiaires sont codés de 1 à 147 (le codage 147 renvoie à l'absence de brouillon). En annexe 15 figurent une représentation de chaque type de traces écrites intermédiaires relevées au cours du dépouillement et sa décomposition en traces élémentaires. Un indice de a) à j) permet de différencier chacune des traces élémentaires au sein de chaque type de trace écrite. En annexe 16 figure le relevé par élève du code des types de traces écrites intermédiaires réalisés au cours des quatre années de l'expérimentation.
27 et 28	Traces élémentaires	En annexe 17 figure l'inventaire des traces élémentaires au sein de chaque type de trace écrite intermédiaire.
29 à 38	Analyse des traces écrites intermédiaires	Une grille d'analyse des types de traces élémentaires a été établie : État de la production (barrée ou non-barrée) (2 modalités) Catégorie (Relation numérique, icône, texte…) (5 modalités) Type de relation numérique (Addition, soustraction…) (7 modalités) Résultat de l'opération (4 modalités) Contenu de la trace (87x10, 87+10…, texte, icône…) (42 modalités) Type d'icône (2 modalités) Type de texte (5 modalités) L'ensemble des modalités de cette grille d'analyse figure dans la légende de l'annexe 18 ainsi que le codage des modalités de chaque trace élémentaire. Afin d'améliorer la lisibilité du tableau, une traduction des codes en clair a été ajoutée en colonne 38.

2.1.5.4 Codage des réponses et des degrés de performances des élèves

Colonne	Libellé	Observations
39 à 42	Réponse	Les réponses sont codées de 1 à 79 (le codage 20 renvoie à l'absence de réponse) pour chacune des années de passation. Le codage des réponses fournies par chacun des élèves au cours des quatre années de passation figure en annexe 19.
43 à 53	Réponses des élèves	À chaque réponse, est associé un degré de performance codé de 1 à 6 (R+, R-a, R-b, R-c, NR, E). Ces codages renvoient respectivement à : 1 : R+ (Réussite forte) ; 2, 3 et 4 : R- (Réussite faible) avec 3 modalités R-a, R-b, R-c 5 : NR (Échec par Non réponse) 6 : E (Échec par réponse erronée) L'inventaire des réponses, de leur degré de performance et de leur nombre d'occurrences au cours des quatre années de passation figure en annexe 20 (colonnes 43 à 49). Les degrés de performance obtenus par chaque élève au cours des quatre années de passation figurent en annexe 21 (colonnes 50 à 53). Les traitements ont parfois nécessité des regroupements de modalités : R-a, R-b et R-c ont parfois été regroupées en une seule modalité R-. R+ et R- en une seule modalité Réu. NR et E en une seule modalité Non-Réu.

Le codage retenu pour le degré de performance des réponses s'appuie sur la classification utilisée par Régnier (1983) et Régnier (1991, MEN–DLC, Vol. 2, p. 23).

Au cours des quatre années de passation, 79 types de réponses différents ont été inventoriés. Nous les présenterons ultérieurement. Une variable *Degré de performance* a été créée en vue de distinguer réussites, échecs par non-réponse, et échecs par réponse erronée.

<table>
<tr><th>Modalité</th><th>Codage</th><th>Statut de la réponse</th><th>Exemples</th></tr>
<tr><td>Réussite forte</td><td>R+</td><td>Le degré R+ correspond à la réponse exacte attendue, incluant l'expression 9 carnets (suivie de précisions exactes).</td><td>9 carnets et il restera 3 timbres
Nous avons inclus la réponse 9 dans ce degré de réussite.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Réussite faible</td><td colspan="3">Le degré R- traduit un raisonnement exact bien que la réponse donnée ne comporte pas obligatoirement l'écriture 9. Exemple : 8 carnets et 7 timbres.
Un élève qui répond 8 carnets et 7 timbres a compris d'une part qu'il était nécessaire d'acheter 87 timbres, d'autre part que 87, c'est (8 x 10) + 7 et qu'ainsi 8 carnets ne suffiront pas. Cependant, cet élève n'a pas pris en considération l'achat d'un nombre entier de carnets.
Les réponses telles que 8 carnets de 10 timbres et 7 timbres ne sont pas assimilées à un échec. En effet, l'élève qui a fourni cette réponse a réussi à résoudre le problème sans toutefois fournir la réponse attendue.
La modalité R- se décline en trois modalités R- a ; R- b ; R- c</td></tr>
<tr><td>R-a</td><td>Réponse exacte imprécise.</td><td>Exemples : 9 paquets
ou 9 paquets de 10 timbres
ou 9 paquets de timbres
ou 8 carnets + 1 carnet, mais il restera 3 timbres</td></tr>
<tr><td>R-b</td><td>Réponse exacte mais non attendue.</td><td>Exemples : 8 carnets et 7 timbres
ou 8 carnets + 7 timbres
ou 8,7 carnets ou 90 timbres et il restera 3 timbres</td></tr>
<tr><td>R-c</td><td>Réponse partiellement exacte.</td><td>Exemple : 9 carnets et il lui restera 6 timbres</td></tr>
<tr><td>Échec par non-réponse</td><td>NR</td><td>Le degré NR (Échec par Non-Réponse) se traduit par une absence de réponse à la question posée, et ce même si une trace écrite intermédiaire a été produite. Nous associons cette absence de réponse à un échec.</td><td></td></tr>
<tr><td>Échec par réponse erronée</td><td>E</td><td>Le degré E (Échec par réponse erronée) correspond à une réponse erronée.</td><td>97 carnets</td></tr>
</table>

2.1.6. Synthèse

S'il a été relativement aisé d'identifier et de classer les caractéristiques des élèves[122], cet inventaire s'est révélé plus conséquent pour celles relatives aux productions réalisées sur les quatre années.

Deux remarques importantes s'imposent à cette étape de nos travaux :

[122] Telles que l'âge à la date de passation de l'épreuve ou le genre et celles du lieu de scolarité telles que l'école, l'enseignant, le type de classe.

(i) La première concerne les traces écrites intermédiaires produites par les élèves. À propos de ces traces, le Rapport de l'Inspection Générale (2006) sur l'enseignement des mathématiques au cycle 3 signale leur faible présence dans les classes. Il nous a paru nécessaire de dépasser le simple constat de présence ou d'absence de ces traces écrites intermédiaires. Pour ce faire, nous avons examiné le contenu des traces existantes en tant que matériaux visibles pour tenter de mieux comprendre les activités des élèves.

(ii) La seconde concerne les réponses des élèves. On relève 79 types différents de réponses (annexe 20) à ce problème alors qu'on aurait pu s'attendre à un nombre relativement restreint de réponses du fait de l'absence a priori de difficultés majeures[123] .

En résumé, sur les 4 années, les 105 individus ont réalisé 420 productions[124]. Chacune de ces 420 productions comporte (i) un cadre réservé au *brouillon*. Nous nommons le contenu de ce cadre : *trace écrite intermédiaire* ; (ii) un cadre réservé à la réponse.

Les 420 productions ont fait l'objet de deux classements :

- **Premier classement**

Ce premier classement a été effectué selon le contenu du cadre réservé à la *réponse*.

Les 420 productions ont été regroupées en 79 classes nommées *type de réponse* dont la 20ème est une classe particulière. C'est une classe où il n'y a pas de réponse.

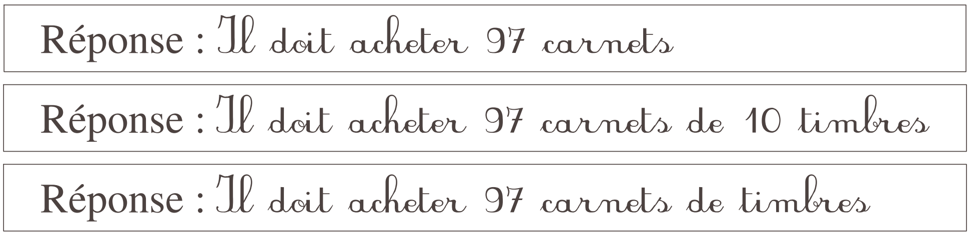


Figure 51 : ***Trois éléments de la classe « Type de réponse » n°21***

Le nombre et la diversité des réponses obtenues ont conduit à l'attribution de plusieurs modalités aux variables considérées. C'est ainsi que la performance de la réponse qui, en général, se résume à trois modalités : réussite, échec par erreur, échec par non-réponse (Régnier, in MEN – DLC, 1991) a dû intégrer pour cette étude des modalités supplémentaires liées au type même de réussite. La modalité R+ a été attribuée aux réponses correspondant à une réussite forte, répondant ainsi explicitement à la question posée *Combien de carnets doit-il acheter ?,* autrement dit aux réponses comportant l'expression *9 carnets*. Les modalités R-a, R-b et R-c correspondent à des réussites dites faibles, c'est-à-dire liées à un raisonnement exact mais ne comportant pas explicitement la réponse attendue *9 carnets*. Les modalités NR et E ont été respectivement affectées à un échec par non-réponse et à un échec par réponse erronée. L'inventaire des réponses liées à chacune des six modalités R+, R-a, R-b, R-c, NR et E figure en annexe 20.

[123] Rappel : Ce problème est extrait de *Évaluation à l'entrée au CE2, Français-Mathématiques, Livret de l'élève, Mathématiques*, Exercice n°26, p. 54 (Ministère de l'Éducation nationale, 1999).
[124] 105 individus, 4 années, 1 production par année. Total des productions : 105x4 = 420

- **Deuxième classement**

Ce deuxième classement a été effectué selon le contenu du cadre réservé au *brouillon* :

Les 420 productions ont été regroupées en 147 classes dénommées *Type de trace écrite intermédiaire* dont la 147ème est une classe particulière. C'est une classe où il n'y a pas de trace écrite intermédiaire.

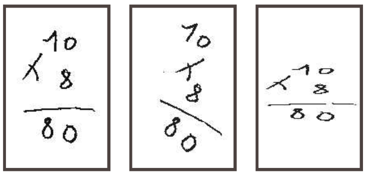


Figure 52 : ***Trois éléments de la classe « Type de trace écrite intermédiaire » n°62***

Chaque type de trace écrite intermédiaire a été décomposé en traces élémentaires comme le montre la figure 53.

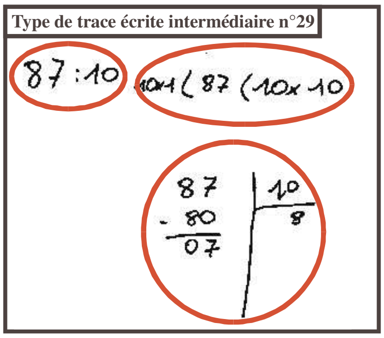


Figure 53 : ***Décomposition du « Type de trace écrite intermédiaire » n°29 en trois traces élémentaires***

L'analyse des 420 productions a conduit à produire une base de 368 traces élémentaires (Annexe 17).

La figure 54 illustre les caractéristiques des données recueillies et le tableau 23 quantifie ces données.

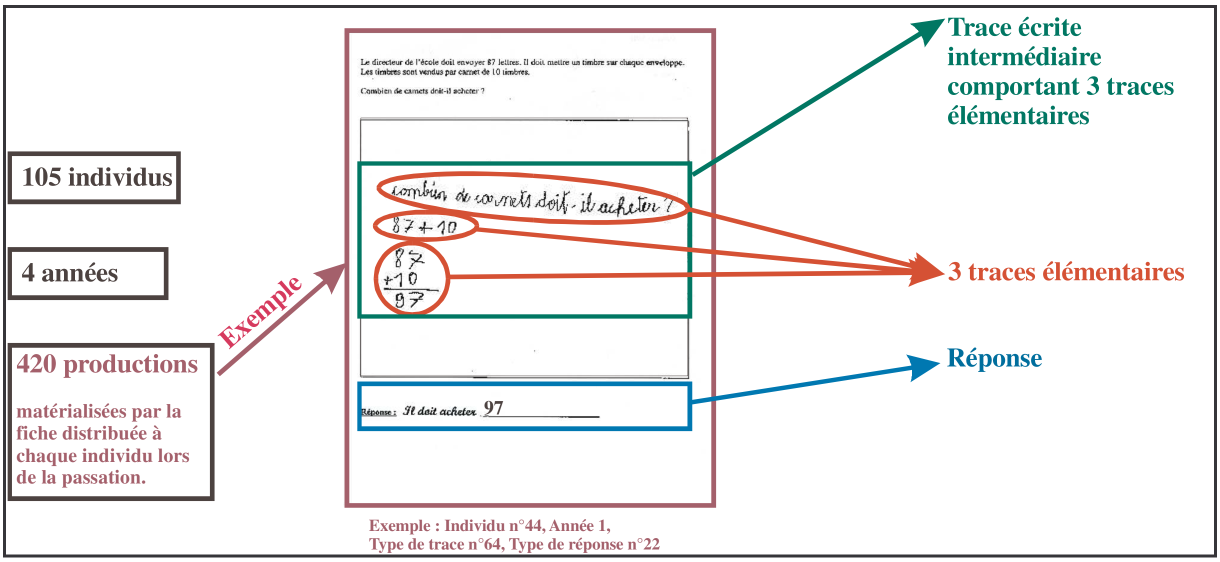


Figure 54 : ***Présentation de l'organisation des données recueillies et de leurs caractéristiques***

	CE1-2000	**CE2-2001**	**CM1-2002**	**CM2-2003**	**Sur les 4 années**
Nombre de productions	105	105	105	105	420
Types de réponses	37	31	37	28	79
Types de traces écrites intermédiaires	45	37	45	43	147
Nombre de traces élémentaires	83	87	99	99	368

Tableau 23 : ***Répartition sur les 4 années des types de réponses, de traces et de traces écrites élémentaires***

Ces étapes liées à la fois aux performances des élèves et aux traces écrites intermédiaires produites ont contribué à l'élaboration de notre objet de recherche articulé autour des relations entre les pratiques d'enseignement et les apprentissages des élèves.

2.2. Résultats de l'étude longitudinale

Il s'agit ici de rapporter les résultats des traitements effectués à partir des données recueillies.

Dans un premier temps, seront étudiées les relations entre le degré de performance et l'année de scolarité.

Dans un second temps, l'introduction de la variable *Fluctuation des performances* permettra d'analyser les écarts de performances d'une année scolaire à l'autre et ainsi d'observer s'il existe des périodes plus favorables aux progrès au cours des quatre années de l'expérimentation.

Dans un troisième temps, la définition de la variable *Profil* nous permettra de construire un classement relatif au parcours de chaque élève de la fin du CE1 à la fin du CM2.

Une étude détaillée des traces écrites intermédiaires clôturera ce chapitre.

2.2.1. Degrés de performance

2.2.1.1. Degré de performance et année de scolarité

Existe-t-il une relation entre le degré de performance et l'année de scolarité ?

Pour chaque année, nous avons recensé les réussites (Réu) des élèves (Code 1 pour Réu (R+ et R-), Code 0 pour Non-Réu (E et NR)). Le début de cet inventaire figure dans le tableau 24.

N° ordre	Individus	CE1-2000	CE2-2001	CM1-2002	CM2-2003
1	Ind 002	0	0	1	1
2	Ind 004	0	0	0	0
3	Ind 005	1	0	1	1
4	Ind 006	0	1	0	1
5	Ind 008	0	1	0	1
6	Ind 009	0	0	0	0
7	Ind 010	0	0	0	1
8	Ind 011	0	1	0	1
9	Ind 014	0	1	1	1
…	Ind…	…	…	…	…
105	Ind 213	1	1	1	1

Tableau 24 : ***Degré de performance (Réu et Non-Réu) par année de scolarité et par individu***

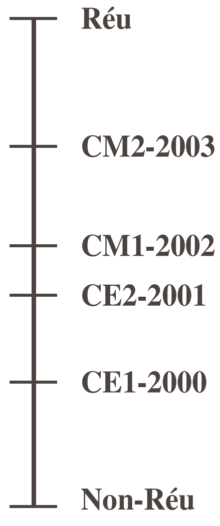
Pour tester l'indépendance des variables *Degré de performance* et *Année de scolarité*, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'indépendance et H_1, l'hypothèse alternative de lien entre le degré de performance et l'année de scolarité.

En application du test de Cochran qui permet de comparer l'homogénéité des résultats d'une année sur l'autre, à partir de données binaires, nous obtenons la conclusion suivante : la valeur empirique de la statistique de Cochran de 70,60 est supérieure à la valeur théorique $Q_{H0}(0{,}01\ ;\ 3) = 11{,}34$

On en déduit que l'on peut rejeter H_0, au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$. On peut considérer qu'il y a un lien entre le degré de performance et l'année de scolarité comme l'illustrent le tableau 25 et le graphique 9.

		CE1-2000	CE2-2001	CM1-2002	CM2-2003
Réussite	**Effectifs sur 105**	27	45	56	78
	Pourcentages	25,71%	42,86%	53,33%	74,29%

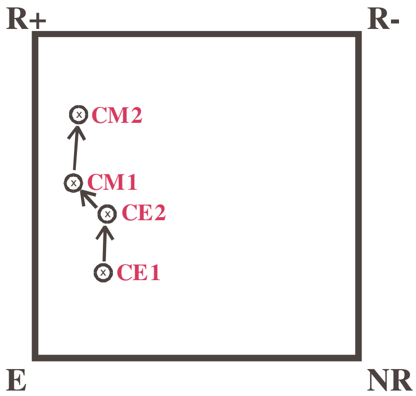
Tableau 25 : ***Degré de performance par année de scolarité***



Graphique 9 : ***Degré de performance (Réu) par année de scolarité (Non-Réu : 0% ; Réu : 100%)***

Pour chaque année de scolarité, quelle est l'importance de chacune des 4 modalités (R+, R-, E, NR) de la variable* Degré de performance *? Comment évolue cette importance au cours des quatre années de scolarité ?

Le graphique 10 présenté sous la forme d'une représentation barycentrique[125] permet de visualiser l'évolution de l'influence des poids respectifs des degrés R+, R-, NR et E.



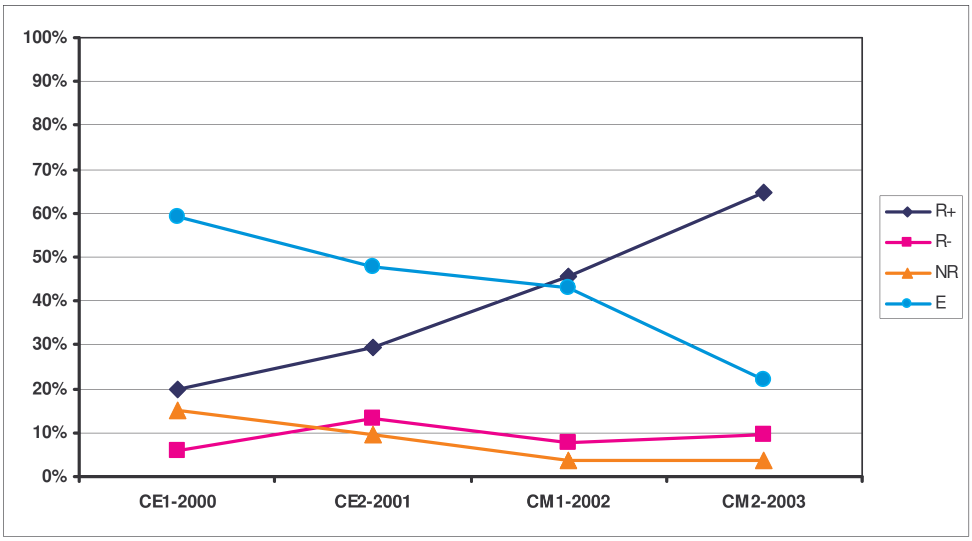
Graphique 10 : ***Degré de performance et année de scolarité***

Pour chacune des années de scolarité, on relève un effet négligeable de R- et de NR. Ce qui signifie que :

(i) au niveau de l'échec, la modalité NR (échec par non-réponse) a peu d'influence au regard du poids de la modalité E (échec par réponse erronée).

(ii) au niveau de la réussite, la modalité R- (réponse exacte imprécise ou non attendue ou réponse partiellement exacte) a peu d'influence au regard du poids de la modalité R+ (réponse exacte attendue).

Le graphique 11 présente l'évolution des degrés de performance du CE1 à la fin du CM2.



Graphique 11 : ***Taux de R+, R-, E et NR par année de scolarité***

[125] Pour les détails de la construction de la représentation barycentrique, voir annexe 22.

Le taux de réussite forte (R+) augmente de la fin du CE1 à la fin du CM2 (il passe de 20,00 % en fin de CE1 à 64,76 % en fin de CM2), tandis que les non-réponses et les réponses erronées décroissent pendant cette même période.

Le point d'inversion entre le taux de réussite R+ et le taux d'échec ne se situe qu'au CM1. Cependant, 35,24% des élèves de CM2 n'ont pas atteint R+, autrement dit plus d'un tiers des élèves de fin de CM2 ne fournit pas la réponse exacte attendue à ce problème. 25,71% des élèves de CM2 sont toujours en échec (E et NR), autrement dit plus d'un élève sur 4 est en situation d'échec face à ce problème.

2.2.1.2. Discussion

En conformité avec nos attentes et avec celles de l'institution, ce premier ensemble de données met en évidence une relation significative entre le degré de performance et le niveau de scolarité : du CE1 au CM2, la réussite croît d'année en année.

Le problème proposé requiert des compétences exigibles à la fin du cycle des approfondissements. On peut alors se réjouir que près d'un quart des élèves de CE1 résolvent ce problème. Ces résultats corroborent ceux obtenus par Brissiaud (2004), Flagnant (2005) montrant qu'il n'est pas utile d'avoir appris une technique opératoire, en l'occurrence ici la technique de la multiplication ou de la division, pour réussir dans la résolution d'un problème de type multiplicatif. Cependant, au terme de la scolarité primaire, plus d'un tiers des élèves ne fournit pas la réponse exacte attendue à ce problème et plus d'un quart produit une réponse erronée.

Ces données viennent conforter l'analyse effectuée en Partie 2 – Chapitre 1 et l'idée de la nécessité d'explorer les causes de cet échec persistant au fil des années. Cependant, elles ne nous renseignent que sur l'état de la performance à la fin d'une année de scolarité : la variable *Degré de performance* fixe un état. Il importe maintenant de connaître les progrès d'année en année. La variable *Fluctuation des performances* va permettre d'évaluer ces avancées de l'année [n] à l'année [n + 1] et ainsi de répondre à la question *Y a-t-il une période*[126] *plus propice à l'amélioration des scores de réussite ?*

2.2.2. Fluctuation des performances des élèves

2.2.2.1. Définition

La *Fluctuation des Performances* correspond au passage du degré de performance de l'année [n] au degré de performance de l'année [n+1].

[126] On entendra par période le temps écoulé entre deux passations successives. Les 3 périodes seront CE1→CE2 ; CE2→CM1 ; CM1→CM2.

Sept modalités sont dès lors créées pour caractériser la *Fluctuation des Performances* :

PROGRÈS (2 modalités)		STABILITÉ (3 modalités)			RÉGRESSION (2 modalités)	
PROG +	**PROG -**	**STAB R+**	**STAB R-**	**STAB Non-Réu**	**REG -**	**REG +**
qui traduit les progrès suivants : **E → R-** **NR → R-** **NR → R+**	**qui traduit les progrès suivants :** **R- → R+**	**qui traduit la stabilité en situation de réussite + :** **R+ → R+**	**qui traduit la stabilité en situation de réussite - :** **R- → R-**	**qui traduit la stabilité en situation de non réussite :** **NR → NR** **E → E** **E → NR** **NR → E**	**qui traduit une régression faible lors du passage :** **R+ → R-**	**qui traduit une régression forte lors des passages :** **R+ → NR** **R+ → E** **R- → NR** **R- → E**

-**Prog+** fait passer d'un état de non-compréhension du problème à un état de raisonnement exact ou partiellement exact, même si la formulation de la réponse ne correspond pas strictement à la réponse attendue.

-Avec **Prog-**, le raisonnement était déjà exact ou partiellement exact dans l'état initial.

Prog+ correspond à un progrès plus fort que **Prog-** entre l'état initial et l'état final.

Il nous a paru important de distinguer 3 modalités à la variable Stabilité. Un élève qui est stable en situation d'échec est différent d'un élève qui est stable en situation de réussite. De même, la stabilité dans la réussite + est différente de la stabilité dans la réussite -. Aussi avons-nous différencié :

- la modalité **Stab R+** . Cette catégorie qui concerne la réussite comprend le passage de R+ à R+.

- la modalité **Stab R-** . Cette catégorie qui concerne la réussite comprend le passage de R- à R-.

- la modalité **Stab Non-Réu** qui concerne les niveaux NR ou E. Cette catégorie qui se situe au niveau des situations de non-réussite comprend les passages de NR à NR ou de E à E ou de E à NR ou de NR à E.

Le passage de l'état de réussite R+ à l'état de réussite R-, passage qui correspond effectivement à une régression, nous a paru devoir être différencié du passage d'un état de réussite (R+ ou R-) à un état d'échec ou de non-réponse. Au premier changement d'état nous avons associé la modalité **Rég-** (régression faible) et au second la modalité **Rég+** (régression forte). Ainsi avons-nous distingué :

- la modalité **Rég-** (Régression faible) faisant passer de R+ à R-.

- la modalité **Rég+** (Régression forte) faisant passer de R+ ou de R- à NR ou bien encore de R+ ou R- à E.

Tableau 26 : ***Modalités de la variable « Degré de fluctuation des performances »***

Le tableau 27 récapitule les différentes possibilités de *Fluctuation des Performances* de l'année [n] à l'année [n+1], en envisageant toutes les combinaisons possibles pour le couple [état initial ; état final]. Exemple : la case colorée en jaune indique que le passage de E (année [n]) à R- (année [n+1]) correspond au progrès noté Prog+.

		Année [n+1]			
		R+	**R-**	**NR**	**E**
Année [n]	**R+**	**Stab R+**	**Rég-**	**Rég+**	**Rég+**
	R-	**Prog-**	**Stab R-**	**Rég+**	**Rég+**
	NR	**Prog+**	**Prog+**	**Stab Non-Réu**	**Stab Non-Réu**
	E	**Prog+**	**Prog+**	**Stab Non-Réu**	**Stab Non-Réu**

Tableau 27 : ***Modalités de la variable « Fluctuation des Performances»***

2.2.2.2. Évolution des fluctuations des performances

Existe-t-il une relation entre les fluctuations des performances des élèves et les périodes annuelles situées entre deux tests successifs ?

Nous avons recensé les effectifs de chaque modalité de la variable *Fluctuation des Performances*, après avoir déterminé les trois périodes suivantes de fluctuation des performances :

- Période CE1→CE2 correspond au temps écoulé entre le test de mai 2000 et le test de mai 2001,
- Période CE2→CM1 se situe de mai 2001 à mai 2002,
- Période CM1→CM2 de mai 2002 à mai 2003.

2.2.2.2.1. En considérant séparément les 7 modalités de la variable *Fluctuation des Performances*

Le tableau 28 indique, pour chacune des périodes, le nombre d'élèves dans chacune des modalités de la variable *Fluctuation des Performances*[127].

	Rég+	**Rég-**	**Stab R+**	**Stab R-**	**Stab Non-Réu**	**Prog-**	**Prog+**	**Total**
Période CE1-->CE2	7	2	14	2	53	2	25	105
Période CE2-->CM1	14	1	21	3	35	6	25	105
Période CM1-->CM2	5	4	41	2	22	4	27	105

Tableau 28 : ***Effectifs relatifs aux modalités de la variable « Fluctuation des Performances »***

Pour tester l'indépendance des variables *Fluctuation des Performances* et *Période*, nous regrouperons les modalités de la variable *Fluctuation des Performances* comme indiqué ci-après.

2.2.2.2.2. En regroupant des modalités de la variable *Fluctuation des Performances*.

Afin de pouvoir effectuer le test de Cochran, nous avons effectué les regroupements suivants :

Modalités de la Variable après regroupement		**Modalités avant regroupement**		
Dénomination	***Abréviation***			
Régression	**Rég**	Rég+	Rég-	
Stabilité	**Stab**	Stab R+	Stab R-	Stab Non-Réu
Progrès	**Prog**	Prog+	Prog-	

Tableau 29 : ***Regroupement des modalités de la variable « Fluctuation des performances »***

Nous étudierons successivement le lien entre chacune des modalités (Régression, Stabilité, Progrès) des performances et la période.

Pour tester l'indépendance des variables *Régression des performances (ou Stabilité des performances ou Progrès des performances)* et *Période*, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'indépendance et H_1,

[127] Pour le détail des *Fluctuations* par individu, voir l'annexe 24.

l'hypothèse alternative de lien entre la *Régression* (ou la *Stabilité* ou le *Progrès*) des performances et la *Période*.

En application du test de Cochran qui permet de comparer l'homogénéité des résultats d'une période sur l'autre, à partir de données binaires, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 30) :

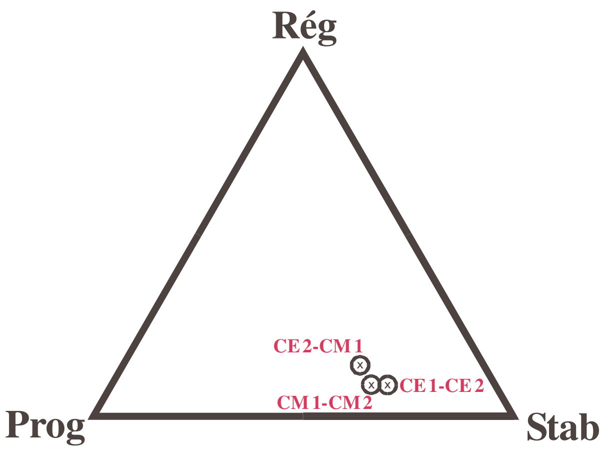
	Régression des performances	**Stabilité des performances**	**Progrès des performances**
Valeur empirique de la statistique de Cochran	2,25	2,45	0,44
Significativité Valeur théorique : Q_{H0} (0,01 ; 2) = 9,21	NS	NS	NS

Tableau 30 : ***Résultats au test statistique***

On en déduit que, pour les trois modalités de la variable *Fluctuation des performances*, on ne rejette pas H_0, au niveau de risque $\alpha = 0,01$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu.

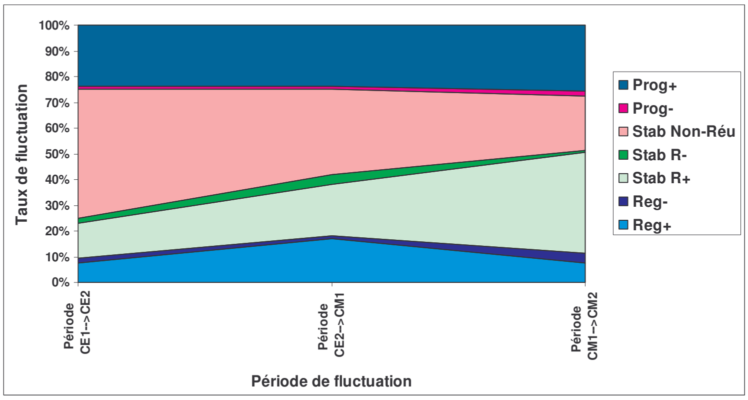
On peut considérer qu'il n'y a pas de lien entre la régression des performances et la période ; entre la stabilité des performances et la période et entre le progrès des performances et la période.

L'ensemble de ces résultats est confirmé par la représentation barycentrique (graphique 12) [128]:



Graphique 12 : ***Fluctuations des performances et période de fluctuations des performances (en regroupant les modalités de la variable « Fluctuation des performances»)***

[128] Pour la construction de la représentation barycentrique, voir annexe 23.



Graphique 13 : ***Fluctuations des performances et période de fluctuations des performances (en conservant les 6 modalités de la variable « Fluctuation des performances»)***

Le graphique 13 montre l'évolution par période des différentes composantes des degrés de fluctuation des performances[129].

On relève la forte proportion d'élèves qui ont une stabilité dans l'échec par erreur ou dans l'absence de réponse (Stab Non-Réu) d'une année sur l'autre : d'un peu plus de 50% dans la période CE1→ CE2, ce taux demeure tout de même à près de 21% lors de la période CM1→ CM2.

S'agissant des courbes Prog+, Prog-, Rég+, Rég-, notons toutefois qu'il existe dans chacune des catégories, d'une part des élèves qui ne sont pas susceptibles de progrès : ce sont ceux qui, dans l'année [n], ont donné une réponse exacte de type R+, et d'autre part, des élèves qui ne peuvent pas régresser : ce sont ceux qui ont fourni dans l'année [n], des réponses de type NR ou E.

2.2.2.3 Discussion

Il n'existe pas de relation significative entre les fluctuations des performances des élèves et les périodes situées entre deux tests successifs. Par exemple, on ne peut pas dire que les élèves progressent significativement davantage lors de la période CM1→CM2 que lors de la période CE1→CE2 ou CE2→CM1.

Malgré le niveau de significativité, nous pouvons observer que le rapport entre la stabilité négative et la stabilité positive s'inverse :

- Lors de la période CE1→CE2, nous avons une proportion de 3 élèves en stabilité négative pour 1 élève en stabilité positive.
- Lors de la période CM1→CM2, nous avons une proportion de 3 élèves en stabilité négative pour 6 élèves en stabilité positive.

D'autre part, dans la période CM1→CM2, tandis que 41% des élèves ont une stabilité dans la réussite forte, 21% des élèves ont encore une stabilité dans l'échec (E ou NR).

Les résultats ci-dessus concernent l'ensemble des élèves. Une analyse des profils va nous permettre d'étudier l'évolution de chaque élève.

---

[129] L'ensemble des données pour chaque individu figure en annexe 24.

2.2.3. Profils chronologiques des performances des élèves

2.2.3.1. Définition

À chaque élève correspond un profil constitué des quatre degrés de performance (R+, R-, NR, E) obtenus au cours des quatre années (CE1, CE2, CM1, CM2).

Exemple : Le profil (E ; R- ; R+ ; R+) est attribué à un élève qui a obtenu les performances suivantes : E en fin de CE1 ; R- en fin de CE2 ; R+ en fin de CM1 et en fin de CM2.

Sur 256 profils possibles[130] , 49 ont été répertoriés[131] et regroupés selon les trois modalités suivantes :

- Modalité *Au moins une régression*
- Modalité *Stabilité*
- Modalité *Progrès sans régression*

2.2.3.2. Répartition des élèves en fonction des profils chronologiques des performances

Nous étudierons successivement les profils chronologiques suivants :

- Profils contenant un passage par *Au moins une Régression*,
- Profils *Stabilité*,
- Profils *Progrès sans régression.*

2.2.3.2.1. Profils contenant un passage par *Au moins une régression*

Un profil est en *régression* dès lors qu'il comporte au moins une régression au cours des quatre années, c'est-à-dire au moins un passage d'un état de réussite (R+ ou R-) à un état de non-réussite par échec ou par non-réponse, ou bien encore un passage de R+ à R-

Exemples :

- L'élève au profil (R+, E, R+, R+) a *régressé* une fois. Il est passé d'une réussite forte (R+) en CE1 à un échec (E) en CE2.
- L'élève au profil (R-, E, R+, E) a *régressé* deux fois :
  - Une première fois en passant d'une réussite faible (R-) en CE1 à un échec (E) en CE2 ; une seconde fois en passant d'une réussite forte (R+) en CM1 à un échec (E) en CM2.

La tableau 31 indique les profils des élèves ayant régressé au moins une fois en CE2, en CM1 ou en CM2.

---

[130] Il s'agit du nombre de quadruplets que l'on peut constituer avec un ensemble de 4 éléments.
On a Card $\{R+ ; R- ; E ; NR\}^4 = 4^4 = 256$

[131] Pour la liste des profils par élève, voir l'annexe 25.

Profil				Fréquence	État final
R+	E	R+	R+	4	État final R+, R-
E	R-	E	R+	2	
E	R+	E	R+	2	
NR	R+	E	R+	2	
R+	R+	E	R+	2	
E	R+	R-	R+	1	
NR	R-	E	R+	1	
R-	E	R+	R+	1	
R-	R+	E	R+	1	
R+	NR	NR	R+	1	
R+	R-	R+	R+	1	
E	E	R+	R-	2	
E	R-	R+	R-	1	
E	R+	E	R-	1	
NR	R+	R+	R-	1	
R+	R-	R-	R-	1	

Profil				Fréquence	État final
E	E	R-	E	2	État final E, NR
E	NR	R+	E	1	
E	R-	E	E	1	
E	R-	NR	E	1	
NR	E	R+	E	1	
NR	R+	E	E	1	
R-	E	R+	E	1	

Tableau 31 : ***Profils «Au moins une Régression » (ayant régressé au moins une fois en CE2, CM1 ou CM2)***

De la fin du CE1 à la fin du CM2, 32 élèves sur 105 soit 30,48% des élèves de la cohorte ont *régressé* au moins une fois. Un seul a *régressé* deux fois. Sur les 32 élèves, 24 terminent leur scolarité primaire par une réussite (R+ ou R-).

8 élèves terminent par un échec, soit un quart des élèves ayant *régressé* au moins une fois.

2.2.3.2.2. Profils *Stabilité*

Un profil est *stable* dès lors qu'il comporte quatre fois les modalités R+, R-, NR ou E. Les passages E→NR et NR→E ont été intégrés à ces profils *stabilité*.

Le tableau 32 indique les profils des élèves *stables* de la fin du CE1 à la fin du CM2.

Profil				Fréquence	État final
R+	R+	R+	R+	12	État final R+, R-
E	E	E	E	7	État final E, NR
E	NR	E	E	3	
NR	E	E	E	3	
E	E	E	NR	1	
E	E	NR	NR	1	
E	NR	E	NR	1	
NR	E	E	NR	1	
E	E	NR	E	1	
NR	NR	E	E	1	

Tableau 32 : ***Profils « Stabilité » (ayant gardé le même taux de réussite du CE1 au CM2)***

Lors des quatre années de scolarité, sur le total des 105 élèves, 12 élèves ont des performances stables de type R+; 19 élèves (soit 18,10% de l'effectif total) ont une stabilité dans l'échec (soit échec par réponse erronée, soit échec par non-réponse) et n'ont aucune réussite R+ ou R-.

2.2.3.2.3. Profils *Progrès sans régression*

Un profil est en *Progrès sans régression* dès lors qu'il ne comporte aucun passage de R+ à R-, de R+ à E ou NR ni de R- à E ou NR. Le tableau 33 indique les profils des élèves ayant progressé sans jamais régresser de la fin du CE1 à la fin du CM2.

Profil				Fréquence	État final	Profil				Fréquence	État final
E	E	E	R+	10	État final R+, R-	E	R-	R-	R+	1	État final R+, R-
E	E	R+	R+	8		NR	E	E	R+	1	
E	R+	R+	R+	6		NR	NR	R+	R+	1	
E	E	R-	R+	2		NR	R+	R+	R+	1	
E	R-	R+	R+	2		R-	R+	R+	R+	1	
NR	E	R+	R+	2		E	E	E	R-	2	
R-	R-	R+	R+	2		E	NR	E	R-	1	
E	NR	E	R+	1		E	R-	R-	R-	1	

Tableau 33 : ***Profils « Progrès sans régression »***

Sur les 105 élèves, 42 (soit 40% de la cohorte) progressent, sans jamais régresser.

Sur les 39 élèves qui ont débuté leur parcours par un échec ou une non-réponse, le *temps passé* dans l'échec ou la non-réponse peut durer :

- 1 an pour 11 élèves
- 2 ans pour 13 élèves
- 3 ans pour 15 élèves

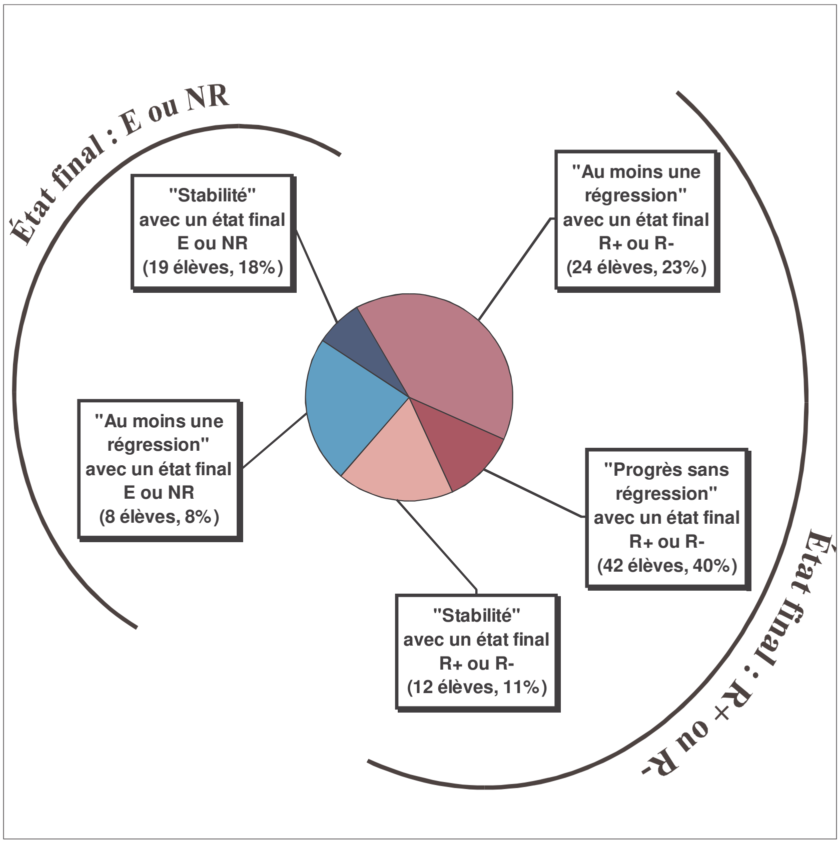
2.2.3.3. Discussion

En considérant les profils associés à un état final en CM2, on obtient :

	Effectif sur 105	%
"Progrès sans régression" avec un état final R+ ou R-	42	40,00
"Stabilité" avec un état final R+ ou R-	12	11,43
"Stabilité" avec un état final E ou NR	19	18,10
"Au moins une régression" avec un état final R+ ou R-	24	22,86
"Au moins une régression" avec un état final E ou NR	8	7,62

Tableau 34 : ***Récapitulatif des effectifs des élèves classés suivant les modalités de leur profil et l'état final de performance en CM2***

Le graphique 14 permet de visualiser les principaux résultats de cette étude liée aux profils des élèves.



Graphique 14 : ***État récapitulatif des profils***

Au total, 78 sur 105 élèves (74,3 %) ont abouti à une réussite de type R+ ou R- à la fin des quatre années de scolarité. Parmi ces 78 élèves, 12 ont eu un parcours composé uniquement de réussite (Réu)[132].

En revanche, 27 élèves sur 105 (25,7%) restent en situation de non-réussite à la fin du CM2. Parmi eux, 19 élèves sur 105 ont eu un parcours composé uniquement d'échecs par erreur ou non-réponse. Ce qui, en considérant une moyenne de 24 élèves par classe, représente 4 élèves par classe qui n'ont connu que l'échec à ce problème de la fin du CE1 à la fin du CM2.

Pour tenter d'identifier les procédures mises en œuvre par les 105 élèves de la cohorte observée de la fin du CE1 à la fin du CM2, nous avons recensé les *traces écrites intermédiaires* produites lors de la résolution du problème donné, en nous demandant si la production de traces écrites intermédiaires pouvait aider l'élève dans la résolution du problème donné et par voie de conséquence contribuer à l'amélioration des performances en résolution de problèmes. Toutefois, nous mesurons d'emblée les limites à considérer à ce travail, du fait que certains élèves résolvent le problème mentalement et n'éprouvent vraisemblablement pas le besoin de recourir à l'usage d'une trace écrite intermédiaire. Par ailleurs, l'aspect statique de la trace sur papier ne nous permet pas de la situer temporellement par rapport à la résolution.

---

[132] Réu : réunion des modalités R+ et R-.

2.2.4. Traces écrites intermédiaires

Après avoir défini l'expression *Trace écrite intermédiaire*, nous analyserons les productions des élèves au long des quatre années d'observation et nous étudierons les relations entre l'existence de ces traces et les degrés de performance des élèves.

Autrement dit, les productions de traces écrites intermédiaires dépendent-elles des années de scolarité ? À quelles performances les traces réalisées sont-elles associées ? Quels types de traces écrites intermédiaires et quels types de calculs les élèves produisent-ils ? Ces productions sont-elles adaptées au problème posé ?

2.2.4.1. Qu'entendons-nous par trace ?

Aux acceptions suivantes du substantif *trace* : *marque laissée par une action quelconque*[133], *indice, marque, reste*[134], nous adjoindrons la restriction émise par Pierre Vermersch (1994) *La trace n'est que l'information partielle de l'activité qui l'a produite*. Vermersch cite *le brouillon, les résultats intermédiaires encore visibles* comme traces de la réalisation de l'action. En effet, ces traces ne permettent pas par exemple de discerner (i) les activités du type automatisme (Richard, 1990) pour lesquelles l'élève active un schéma mental ou un algorithme de calcul et ne voit pas l'intérêt d'expliciter par écrit ce qu'il fait, et (ii) les activités pour lesquelles l'élève ne pose pas de traces en raison du statut privé (Coppé, 1998) qu'il accorde à son activité.

Nous considérons ici comme *trace écrite intermédiaire* toute production écrite réalisée par l'élève dans l'espace laissé à sa disposition sur la feuille de passation, dans l'encadré immédiatement au-dessous de l'énoncé, en rappelant que toute possibilité d'effacement ou de corrections masquées avait été supprimée, dans le but de rendre ces traces écrites intermédiaires visibles. La possibilité de barrer ou de raturer avait été rappelée aux élèves avant le début de chaque passation.

2.2.4.2. Traces écrites intermédiaires et années de scolarité

Le nombre d'élèves produisant des traces écrites intermédiaires dépend-il de l'année de scolarité ?

Tout au long des quatre années de recueil des données, 218 traces écrites intermédiaires ont été identifiées, pouvant être regroupées en 147 types[135] (voir en annexe 15). Comme dans le cas précédent, nous mettons en œuvre le test de Cochran.

Pour tester l'indépendance des variables *Présence de Traces écrites intermédiaires* et *Année de scolarité*, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'indépendance et H_1, l'hypothèse alternative de lien entre la *Présence d'une trace écrite intermédiaire* et *l'Année de scolarité*.

---
[133] Voir Annexe 26.
[134] Voir Annexe 26.
[135] Si on inclut le type absence de réponse.

En application du test de Cochran qui permet de comparer l'homogénéité des résultats d'une année sur l'autre, à partir de données binaires, nous obtenons la conclusion suivante : la valeur empirique de la statistique de Cochran de 4,08 est inférieure à la valeur théorique $Q_{H0}(0{,}01 ; 3) = 11{,}34$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu.

On en déduit que l'on ne rejette pas H_0 au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$. On peut considérer qu'il n'y a pas de lien significatif entre l'année de scolarité et la présence d'une trace écrite intermédiaire.

2.2.4.3. Présence de traces écrites intermédiaires et degré de performance

Le degré de performance dépend-il de la présence d'une trace écrite intermédiaire ?

		Effectifs sur 105		**%**	
		Présence de T.é.i.	**Absence de T.é.i.**	**Présence de T.é.i.**	**Absence de T.é.i.**
CE1-2000	**Réussite**	14	13	13,33	12,38
	Non-Réussite	48	30	45,71	28,57
CE2-2001	**Réussite**	13	32	12,38	30,48
	Non-Réussite	41	19	39,05	18,10
CM1-2002	**Réussite**	17	39	16,19	37,14
	Non-Réussite	35	14	33,33	13,33
CM2-2003	**Réussite**	31	47	29,52	44,76
	Non-Réussite	19	8	18,10	7,62

Tableau 35 : ***Traces écrites intermédiaires et degré de performance par année***

Pour chaque degré de performance (Réussite, Non-réussite) et pour chaque année, le tableau 35 indique le nombre d'élèves ayant ou non produit des traces écrites intermédiaires.

Pour tester l'indépendance des variables *Degré de performance* et *Présence de Traces écrites intermédiaires*, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'indépendance et H_1, l'hypothèse alternative de lien entre le degré de performance et la présence d'une trace écrite intermédiaire.

En application du test du χ^2 qui permet de tester l'indépendance des variables, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 36) :

	CE1-2000	**CE2-2001**	**CM1-2002**	**CM2-2003**
χ^2 (valeur calculée)	0,78	16,02	17,63	7,54
Significativité **Valeur théorique $\chi^2_{HO}(0{,}01 ; 1 = 6{,}63)$**	NS	S	S	S

Tableau 36 : ***Tests du χ^2 entre le Degré de performances et la Présence de traces écrites intermédiaires***

Pour le CE1, on en déduit que l'on ne rejette pas H_0, au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de $2^{ème}$ espèce β de niveau inconnu.

Au CE1, on peut considérer qu'il n'y a pas de lien entre le *Degré de performance* et la *Présence d'une trace écrite intermédiaire*.

Pour le CE2, CM1 et CM2, on en déduit que l'on peut rejeter H_0, au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$.

Au CE2, CM1 et CM2, on peut considérer qu'il y a un lien entre le *Degré de performance* et la *Présence d'une trace écrite intermédiaire*.

Les réussites (R+, R-) ou les échecs (E, NR) sont-ils davantage associés à la présence ou à l'absence de traces écrites intermédiaires ?

CE1	**Présence de T.é.i.**	**Absence de T.é.i.**
Réussite	-	+
Non-Réussite	+	-

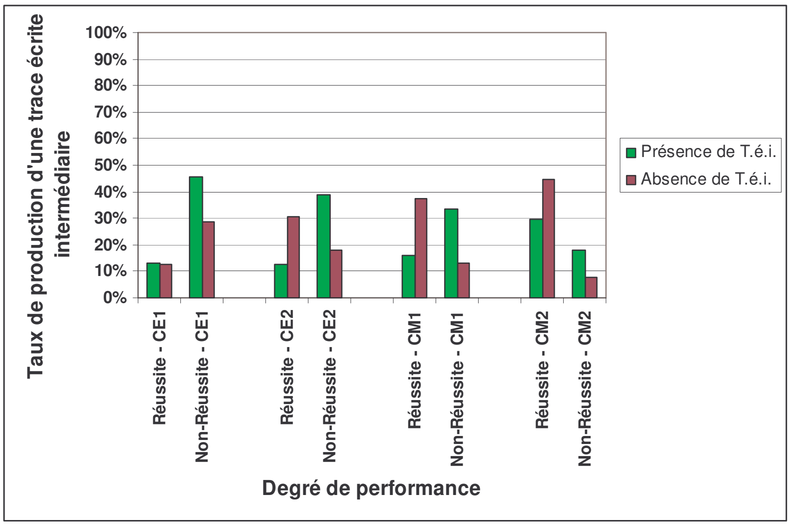
CE2	**Présence de T.é.i.**	**Absence de T.é.i.**
Réussite	-	+
Non-Réussite	+	-

CM1	**Présence de T.é.i.**	**Absence de T.é.i.**
Réussite	-	+
Non-Réussite	+	-

CM2	**Présence de T.é.i.**	**Absence de T.é.i.**
Réussite	-	+
Non-Réussite	+	-

Tableau 37 : ***Comparaison des effectifs théoriques et des effectifs constatés***

La comparaison des effectifs théoriques et des effectifs constatés nous donne la tendance pour chacune des années de scolarité. Ces calculs sont illustrés par le graphique 15.



Graphique 15 : ***Réussite et non-réussite en fonction de la présence de traces écrites intermédiaires sur chacune des quatre années de l'expérimentation***

Le tableau 37 et le graphique 15 montrent qu'au CE2, CM1, CM2 la présence de traces écrites est davantage associée à la non-réussite et que leur absence est au contraire associée à la réussite.

Au CE1, dans les conditions de l'expérience, le degré de performance ne semble pas dépendre de la présence d'une trace écrite intermédiaire.

Il s'agit maintenant d'analyser plus finement le contenu des ces traces écrites intermédiaires définies au paragraphe 2.2.4.1., en examinant les *traces élémentaires* pour désigner les unités sémiotiques constitutives de ces types de traces écrites intermédiaires.

2.2.4.4. Traces élémentaires

2.2.4.4.1. Inventaire et typologie des traces élémentaires

Au cours des quatre années, 218 productions d'élèves sur les 420 comportaient des traces écrites intermédiaires. Ainsi, 202 productions ne comportaient aucune trace écrite intermédiaire. Ces traces écrites intermédiaires ont été regroupées en 146 catégories différentes que nous avons nommées Type de traces écrites intermédiaires numérotés de 1 à 146. À cela s'est ajouté le 147ème type correspondant à une absence de trace. Ce type n°147 regroupe les 202 productions ne comportant pas de traces écrites intermédiaires.

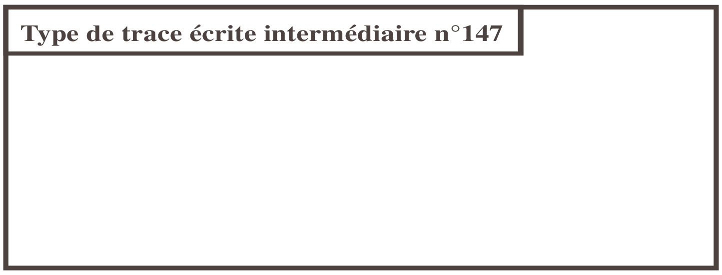


Figure 55 : ***Type de trace écrite intermédiaire n°147 (absence de trace)***

Chaque type peut lui-même être décomposé en plusieurs unités sémiotiques que nous nommons *traces élémentaires* (Figure 55). Sur l'ensemble des quatre années, 368 traces élémentaires ont été inventoriées (voir annexes 16, 17 et 18).

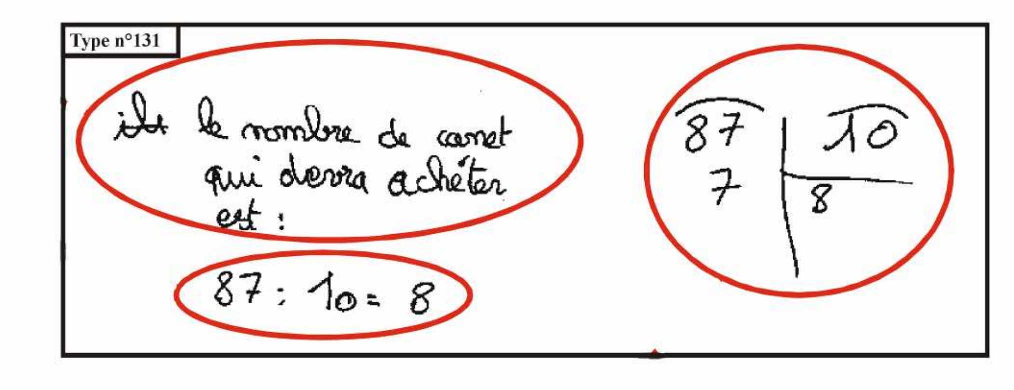


Figure 56 : ***Exemple de type de trace écrite intermédiaire (Type n°131) décomposée en 3 traces élémentaires***

La figure 56 illustre certaines formes que peuvent prendre ces traces élémentaires :

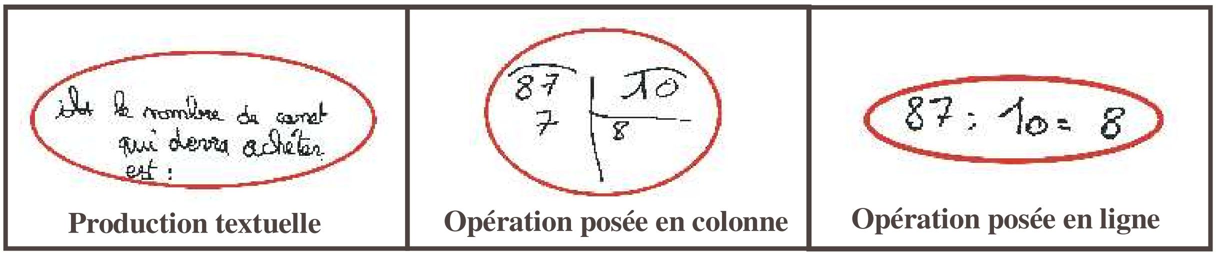


Figure 57 : ***Trois formes que peuvent prendre les traces élémentaires***

Nous identifierons dans le paragraphe suivant les différentes catégories de traces élémentaires.

Pour chaque individu, ont été inventoriés (voir annexe 27) :

- les traces élémentaires qu'il a produites chaque année en précisant pour chacune d'entre elles, l'année de passation et l'identification de l'enseignant.
- les caractéristiques de chaque trace (barré, registre, relation numérique, résultat, contenu de la trace, icône, texte).
- le numéro de référence de la réponse, le degré de performance et le texte de cette réponse tels qu'ils avaient été identifiés dans les annexes 19, 20 et 21. Le degré de performance attribué à chaque trace élémentaire est celui qui avait été attribué à la réponse au problème.

2.2.4.4.2. Typologie des traces élémentaires

Sur l'ensemble des quatre années, nous avons identifié 5 catégories de traces élémentaires :

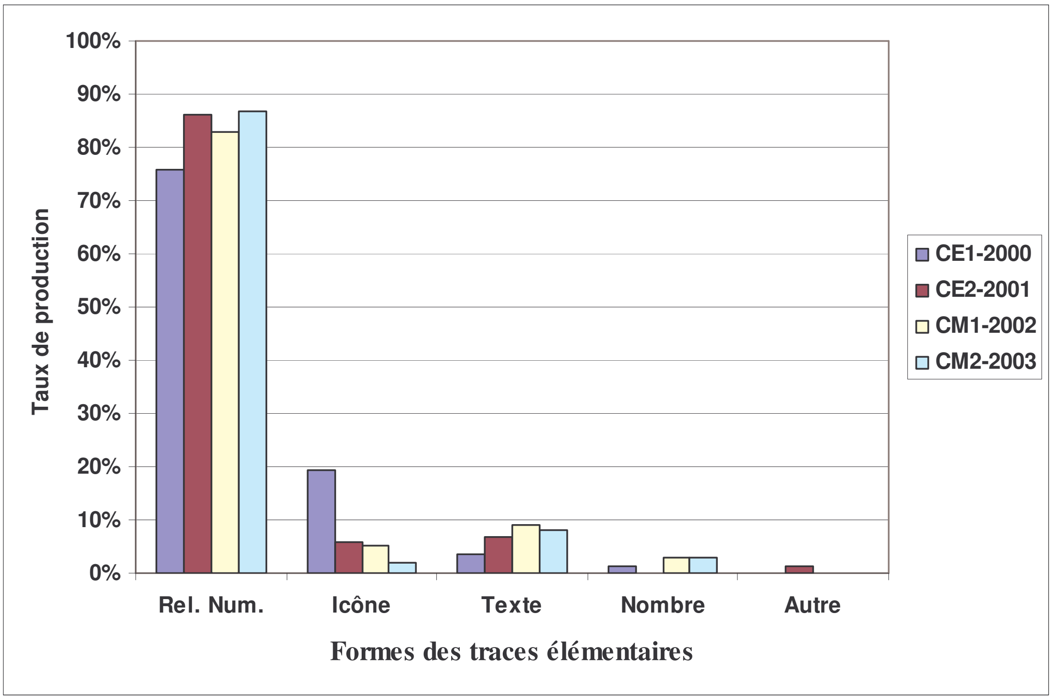
- Relation numérique : *opération* posée en ligne ou en colonne ; ou *inégalité*, ou *expression numérique* de la forme ax+b
- Icône : production imagée
- Texte : mot, ou plusieurs mots, ou phrase
- Nombre : nombre isolé
- Autre : forme non identifiable par rapport aux catégories précédentes ; avec peu de valeur informative

Pour chaque année, le tableau 38 indique la fréquence[136] de production pour chacune des catégories de traces élémentaires.

[136] Pour chacune des années, la fréquence est calculée en divisant le nombre de productions dans une catégorie par le nombre total de productions inventoriées (le type absence de production est exclu).

		Rel. Num.	Icône	Texte	Nombre	Autre
CE1-2000	**Effectifs sur 83**	63	16	3	1	0
	%	75,90	19,28	3,61	1,20	0,00
CE2-2001	**Effectifs sur 87**	75	5	6	0	1
	%	86,21	5,75	6,90	0,00	1,15
CM1-2002	**Effectifs sur 99**	82	5	9	3	0
	%	82,83	5,05	9,09	3,03	0,00
CM2-2003	**Effectifs sur 99**	86	2	8	3	0
	%	86,87	2,02	8,08	3,03	0,00

Tableau 38 : ***Fréquence des traces élémentaires selon les 5 catégories au cours des 4 années***



Graphique 16 : ***Évolution des fréquences de traces élémentaires selon les 5 catégories au cours des 4 années***

Le tableau 38 et le graphique 16 montrent le niveau élevé du taux de recours au type *Relation numérique* (de 76% à 87%) pour chacune des quatre années de passation. Les autres catégories de traces élémentaires (icône, texte, nombre) ne dépassent jamais 10% à l'exception des icônes au CE1 (19%). Nous interpréterons ces données dans le paragraphe 2.2.4.4.6. (Type Icône).

Nous pouvons maintenant regarder si l'apparition des catégories de traces élémentaires dépend de l'année de scolarité. L'étude porte ici sur les trois catégories : *Relation numérique, Icône, Texte*. Comme dans le paragraphe 2.2.4.2., nous mettons en œuvre le test de Cochran.

Pour tester l'indépendance des modalités *Présence d'une relation numérique (ou d'une icône ou d'un texte)* et *Année de scolarité*, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'indépendance et H_1, l'hypothèse alternative de lien entre la présence d'une *Relation numérique (ou d'une icône, ou d'un texte)* et *l'Année de scolarité*.

En application du test de Cochran qui permet de comparer l'homogénéité des résultats d'une année de scolarité sur l'autre, à partir de données binaires, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 39) :

	Présence d'une relation numérique	**Présence d'une icône**	**Présence d'un texte**
Valeur empirique calculée de Q	0,05	22,45	2,16
Significativité Valeur théorique : $Q_{H0}(0,01\ ;\ 3) = 11,34$	NS	S	NS

Tableau 39 : ***Résultats au test statistique***

On en déduit que, pour les deux modalités *Présence d'une relation numérique* et *Présence d'un texte*, on ne rejette pas l'hypothèse H_0 au niveau de risque $\alpha = 0,01$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de $2^{ème}$ espèce β de niveau inconnu.

On peut considérer que la présence d'une relation numérique ou celle d'un texte ne dépend pas de l'année de scolarité.

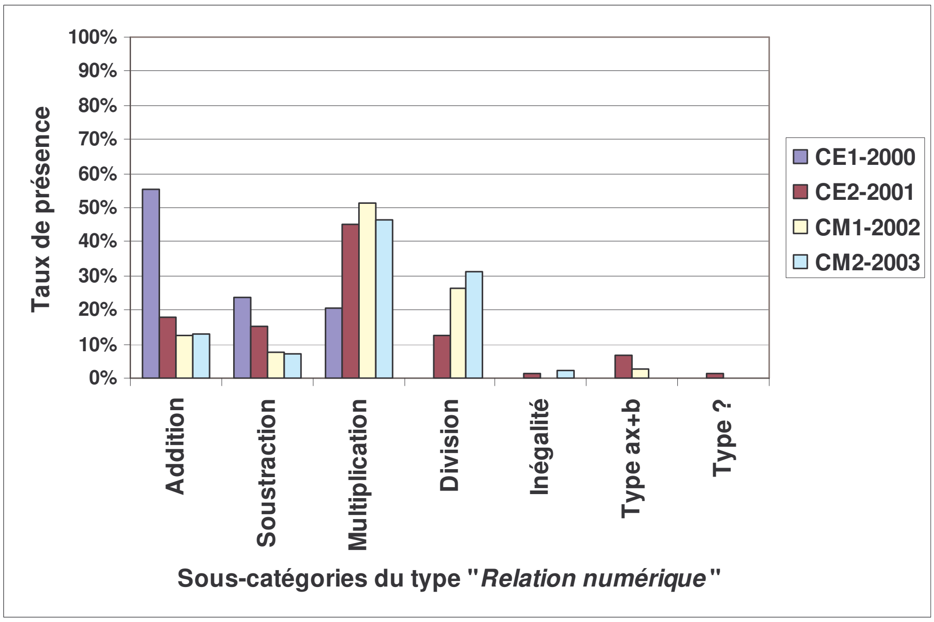
En revanche, pour la modalité *Présence d'une icône*, on peut rejeter H_0 au niveau de risque $\alpha = 0,01$. On peut alors considérer que la présence d'une icône dépend de l'année de scolarité. Sa fréquence d'apparition décroît significativement sur la période CE1-CM2.

2.2.4.4.3. Analyse du type *Relation numérique*

Le type relation numérique peut être décomposé en 7 sous-catégories : Addition, Soustraction, Multiplication, Division, Inégalité, Type ax+b, Autre. Le tableau 40 et le graphique 17 en indiquent la fréquence et les effectifs par année.

		Addition	**Soustraction**	**Multiplication**	**Division**	**Inégalité**	**Type ax+b**	**Autre**
CE1-2000	**Effectif sur 63**	35	15	13	0	0	0	0
	%	55,56	23,81	20,63	0,00	0,00	0,00	0,00
CE2-2001	**Effectif sur 73**	13	11	33	9	1	5	1
	%	17,81	15,07	45,21	12,33	1,37	6,85	1,37
CM1-2002	**Effectif sur 80**	10	6	41	21	0	2	0
	%	12,50	7,50	51,25	26,25	0,00	2,50	0,00
CM2-2003	**Effectif sur 86**	11	6	40	27	2	0	0
	%	12,79	6,98	46,51	31,40	2,33	0,00	0,00

Tableau 40 : ***Sous-catégories de relations numériques***



Graphique 17 : ***Évolution des fréquences des sous-catégories de relations numériques au cours des quatre années.***

Parmi les sous-catégories de relations numériques, nous avons identifié plus particulièrement celles caractérisées par les opérations : addition, soustraction, multiplication, division (Tableau 40).

Au CE1, les additions sont majoritairement présentes dans les traces écrites intermédiaires produites par les élèves, tandis qu'au CE2, CM1, CM2, ce sont les traces de type multiplication qui dominent.

On peut établir par année un lien entre la présence majoritaire de ces traces liées à un certain type d'opérations et l'étude de la technique opératoire correspondante. Par exemple, la technique opératoire de la multiplication est introduite en CE2 et les traces liées à la sous-catégorie *Multiplication* ne sont majoritaires qu'à partir du CE2.

Les données numériques du problème (87 ; 10) ne correspondent pas à de grands nombres. Cependant les élèves éprouvent le besoin de poser les opérations.

Le type d'opération dépend-il de l'année de scolarité ?

Comme dans le cas précédent, nous mettons en œuvre le test de Cochran.

Pour tester l'indépendance des modalités *Présence d'une addition (ou d'une soustraction ou d'une multiplication ou d'une division)* et *Année de scolarité*, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0 l'hypothèse d'indépendance et H_1, l'hypothèse alternative de lien entre la *Présence d'une addition (ou d'une soustraction, d'une multiplication ou d'une division)* et *l'Année de scolarité*.

En application du test de Cochran qui permet de comparer l'homogénéité des résultats d'une année de scolarité sur l'autre, à partir de données binaires, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 41) :

	Présence d'une addition	**Présence d'une soustraction**	**Présence d'une multiplication**	**Présence d'une division**
Valeur empirique calculée de Q	26,26	1,54	13,23	23,63
Significativité Valeur théorique : $Q_{H0}(0,01 ; 3) = 11,34$	S	NS	S	S

Tableau 41 : ***Résultats au test statistique***

On en déduit que, pour la modalité *Présence d'une soustraction*, on ne rejette pas l'hypothèse H_0 au seuil $\alpha = 0,01$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu.

On peut considérer qu'il n'y pas de lien entre la présence d'une soustraction et l'année de scolarité.

Par contre, pour les trois modalités *Présence d'une addition, d'une multiplication ou d'une division*, on peut rejeter H_0 au niveau de risque $\alpha = 0,01$. On peut considérer qu'il y a un lien entre la présence d'une addition, d'une multiplication ou d'une division et l'année de scolarité.

Ceci confirme ainsi le lien entre la présence majoritaire de traces liées à un type d'opération donnée et l'étude, la même année, de la technique opératoire correspondante.

2.2.4.4.4. Contenu de la trace élémentaire pour le type *Relation numérique*

Sur les 4 années, nous avons dénombré 302 traces élémentaires qui relèvent du type *Relation numérique*. Nous rapportons les 6 formes les plus fréquentes (c'est-à-dire qui sont apparues plus de 20 fois) dans le tableau 42.

		87:10	**87x10**	**87+10**	**8x10**	**9x10**	**87-10**
CE1-2000	**Effectif sur 63**	0	14	20	3	3	6
	%	0,00	22,22	31,75	4,76	4,76	9,52
CE2-2001	**Effectif sur 73**	9	16	5	9	5	10
	%	12,33	21,92	6,85	12,33	6,85	13,70
CM1-2002	**Effectif sur 80**	21	16	6	9	10	6
	%	26,25	20,00	7,50	11,25	12,50	7,50
CM2-2003	**Effectif sur 86**	28	8	3	13	15	1
	%	32,56	9,30	3,49	15,12	17,44	1,16

Tableau 42 : ***Présence des 6 formes les plus fréquentes du type « Relation numérique »***

Ces six formes représentent à elles seules 236 traces élémentaires sur 302, soit 78,2% de l'effectif total du type *Relation numérique*.

Le contenu du type « Relation numérique » dépend-il de l'année de scolarité ?

Comme dans le cas précédent, nous mettons en œuvre le test de Cochran.

Pour tester l'indépendance des modalités *Présence de l'opération 87 : 10 (ou 87* x *10, 87 + 10, 8* x *10, 9* x*10 ou 87-10)* et *Année de scolarité*, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'indépendance et H_1, l'hypothèse alternative de lien entre la présence de l'opération *87 : 10 (ou 87* x *10 ; 87 + 10 ; 8* x *10 ; 9* x*10 ou 87-10)* et *l'Année de scolarité*.

En application du test de Cochran qui permet de comparer l'homogénéité des résultats d'une année de scolarité sur l'autre, à partir de données binaires, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 43) :

	Présence de l'opération					
	87 : 10	**87 x 10**	**87 + 10**	**8 x 10**	**9 x 10**	**87 - 10**
Valeur empirique calculée de Q	23,63	4,20	24,00	6,33	12,85	5,78
Significativité Valeur théorique : Q_{H0}(0,01, 3) = 11,34	S	NS	S	NS	S	NS

Au niveau de risque α = 0,01, la valeur critique pour ddl = 3 est de 11,34.

Tableau 43 : ***Résultats au test statistique***

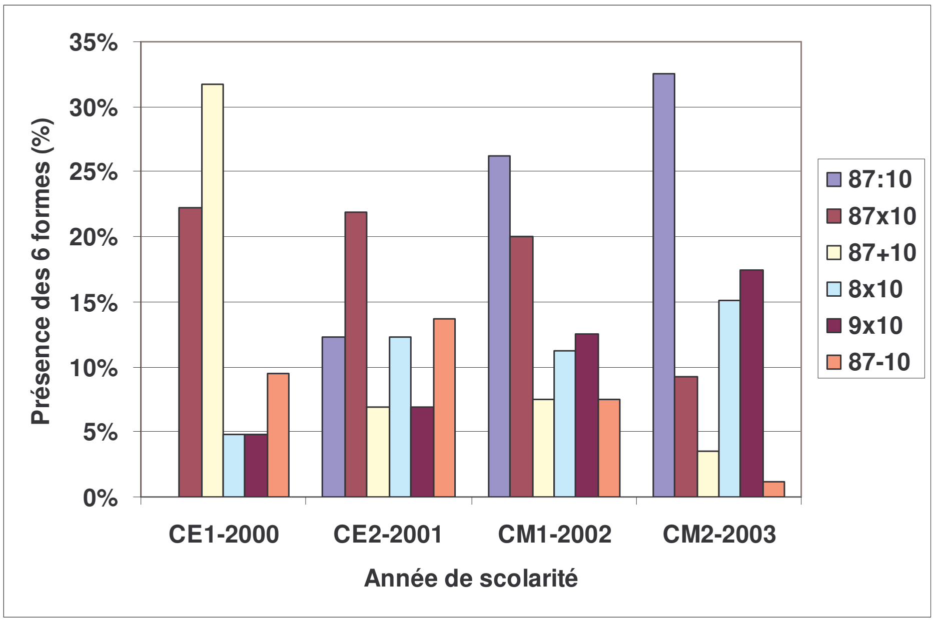
On en déduit que, pour les trois modalités *Présence de l'opération 87* x *10 ; 8* x *10 ou 87 - 10*, on ne rejette pas H_0 au niveau de risque α = 0,01. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu.

On peut considérer qu'il n'y pas de lien entre la présence de l'opération 87 x 10 ; 8 x 10 ou 87 - 10 et l'année de scolarité.

Par contre, pour les trois modalités *Présence de l'opération 87 : 10 ; 87 + 10 et 9* x *10*, on peut rejeter H_0 au niveau de risque α = 0,01.

On peut alors considérer qu'il y a un lien entre la présence de l'opération 87 : 10 ; 87 + 10 ou 9 x 10 et l'année de scolarité.

Le graphique 18 permet de visualiser la répartition par année de ces différents contenus.



Graphique 18 : ***Évolution de la présence des 6 formes les plus fréquentes du type « Relation numérique »***

Le recours à la division *87:10*, inexistant au CE1, augmente du CE2 au CM2 pour atteindre environ un tiers des types de relations numériques inventoriés. Le recours à la multiplication *87*x*10* est majoritaire au CE2 et au CM1. L'addition *87+10* est la plus fréquente au CE1 et la soustraction *87-10* au CE2.

Ces taux de présence de formes de relations numériques liées à l'année d'étude de la technique opératoire peuvent être interprétés dans le cadre du contrat didactique (Brousseau, 1988b). Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe 2.2.4.5.

Les deux taux respectifs des formes 87+10 et 87-10 décroissent d'année en année, ce qui est en cohérence avec l'évolution du taux de réussite au problème qui lui, croît d'année en année. En effet *87+10* et *87-10* ne conduisent pas à une réussite.

Les taux d'apparition des formes *8*x*10* et *9*x*10* croissent du CE1 au CM2, ce qui laisse pressentir un recours à l'encadrement du nombre 87 avec l'appui de calculs opérés mentalement.

2.2.4.4.5. Formes de relations numériques retenues et degré de performance des élèves

Nous ne considérons ici que les six formes de relations numériques retenues précédemment (87 :10 ; 87x10 ; 87+10 ; 8x10 ; 9x10 ; 87-10) et le degré de performance sous la forme d'une variable à *2 modalités* Réu (Réussite) et Non-Réu (Absence de réussite)[137]. Le tableau 44 présente les distributions des fréquences de ces formes par année de scolarité.

[137] Voir annexe 29.

		CE1-2000	
		Non-Réu	Réu
87:10	Effectif sur 63	0	0
	%	0,00	0,00
87+10	Effectif sur 63	20	0
	%	31,75	0,00
87-10	Effectif sur 63	6	0
	%	9,52	0,00
87x10	Effectif sur 63	13	1
	%	20,63	1,59
8x10	Effectif sur 63	2	1
	%	3,17	1,59
9x10	Effectif sur 63	1	2
	%	1,59	3,17

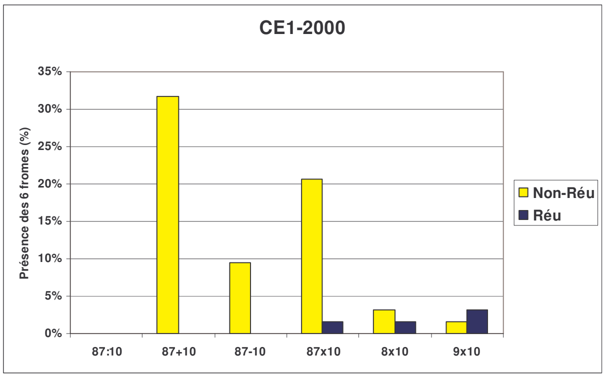
		CE2-2001	
		Non-Réu	Réu
87:10	Effectif sur 73	8	1
	%	10,96	1,37
87+10	Effectif sur 73	5	0
	%	6,85	0,00
87-10	Effectif sur 73	10	0
	%	13,70	0,00
87x10	Effectif sur 73	14	2
	%	19,18	2,74
8x10	Effectif sur 73	5	4
	%	6,85	5,48
9x10	Effectif sur 73	3	2
	%	4,11	2,74

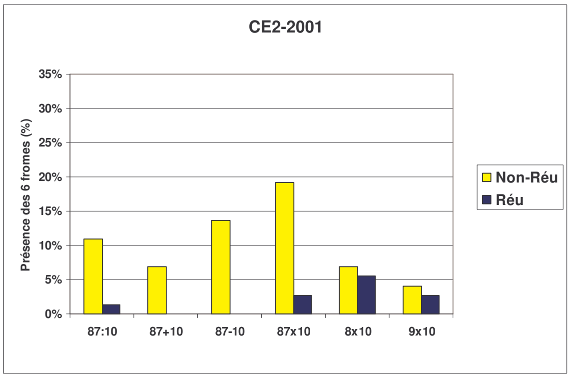
		CM1-2002	
		Non-Réu	Réu
87:10	Effectif sur 80	19	2
	%	23,75	2,50
87+10	Effectif sur 80	6	0
	%	7,50	0,00
87-10	Effectif sur 80	6	0
	%	7,50	0,00
87x10	Effectif sur 80	16	0
	%	20,00	0,00
8x10	Effectif sur 80	3	6
	%	3,75	7,50
9x10	Effectif sur 80	0	10
	%	0,00	12,50

		CM2-2003	
		Non-Réu	Réu
87:10	Effectif sur 86	12	16
	%	13,95	18,60
87+10	Effectif sur 86	2	1
	%	2,33	1,16
87-10	Effectif sur 86	1	0
	%	1,16	0,00
87x10	Effectif sur 86	8	0
	%	9,30	0,00
8x10	Effectif sur 86	2	11
	%	2,33	12,79
9x10	Effectif sur 86	0	15
	%	0,00	17,44

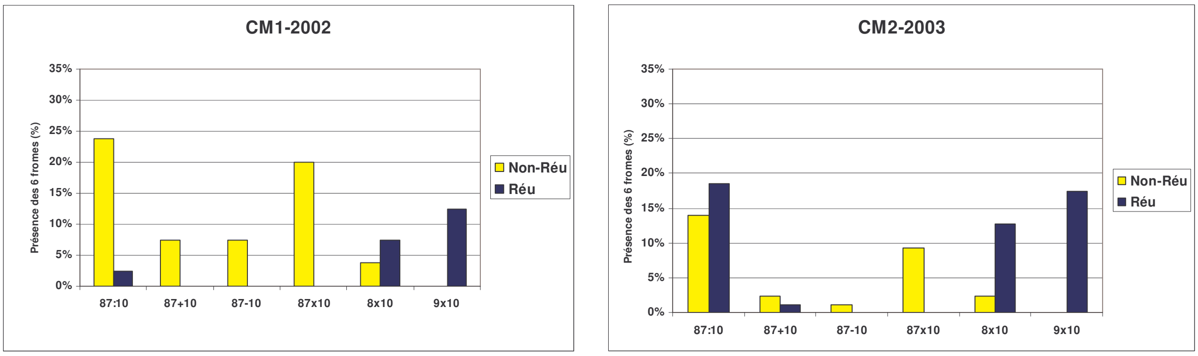
Tableau 44 : ***Formes des relations numériques et performances selon les années de scolarité***

Précisons les résultats par année de scolarité (Graphique 19)[138].





[138] Voir annexe 29 pour le tableau des répartitions par année.



Graphique 19 : ***Évolution par année de la présence des 6 formes les plus fréquentes du type « Relation numérique »***

Bien que déjà présente dès le CE2, ce n'est qu'au CM2 que la trace *87 :10* est accompagnée de réussite. Cela peut être interprété comme l'indice d'un niveau de compétence plus élevé en CM2 fondé sur une meilleure maîtrise de la technique opératoire de la division.

Si nous considérons le groupe des élèves ayant eu recours aux formes : 87+10, 87x10, 87-10, il ressort que, parmi celui-ci, c'est la non-réussite qui prédomine.

En revanche, nous constatons que la réussite qui accompagne les traces (8x10) et (9x10) augmente du CE1 au CM2. Les élèves semblent avoir procédé par une approche du résultat par encadrement, approximation sans entrer explicitement dans la technique opératoire de la division. Cependant, le recours à ces encadrements par 8x10 et 9x10 reste peu fréquent.

Les opérations les plus fréquemment retenues sont celles qui correspondent aux opérations étudiées au cours de l'année de passation. L'échec massif en CE1 et en CE2 peut s'expliquer par la prégnance des algorithmes d'addition et de soustraction qui sont les opérations étudiées lors de ces deux années de scolarité. Les élèves modélisent d'abord ce qu'ils viennent d'étudier en étendant de façon abusive le champ d'application.

2.2.4.4.6. Type *Icône*

2.2.4.4.6.1. Inventaire des traces élémentaires de type *Icône*

Le tableau 45 fournit la répartition des productions de la catégorie *Icône* en tant que trace élémentaire.

Année	Enseignant n°	Effectif ayant recours à la production d'icônes	Effectif des élèves de la cohorte	Taux d'élèves ayant recours à la production d'icônes
CE1-2000	4	11	17	64,71
	5	1	12	8,33
	7	1	12	8,33
	8	2	15	13,33
	9	1	4	25,00

Année	Enseignant n°	Effectif ayant recours à la production d'icônes	Effectif des élèves de la cohorte	Taux d'élèves ayant recours à la production d'icônes
CE2-2001	7	1	3	33,33
	10	1	9	11,11
	13	2	5	40,00
	19	1	14	7,14
CM1-2002	18	2	13	15,38
	22	2	21	9,52
	25	1	15	6,67
CM2-2003	31	2	18	11,11

Tableau 45 : ***Répartition des effectifs des productions comportant des traces élémentaires de type « Icône » par classe et par année***

Seuls les élèves de la cohorte ont été comptabilisés ici.

La production importante de la classe de l'enseignant n°4 contraste avec celle des autres classes. Sur un effectif de 17 élèves, 11 élèves de cette classe de l'enseignant n°4 ont produit une trace élémentaire de type *icône* ce qui représente plus de la moitié de l'effectif de la classe.

2.2.4.4.6.2. Production d'icônes et réussite dans la classe de l'enseignant n°4

Le tableau 46 montre la relation entre la production d'icônes et la réussite au sein de la classe de l'enseignant n°4.

Individu n°	Type de trace n°	Type de réponse n°	Performance	Libellé de la réponse
005	7a	1	R+	9 carnets ou 9 carnets de 10 timbres ou 9 carnets de timbres
019	23a	1	R+	
045	7a	1	R+	
071	86a	1	R+	
122	111a	1	R+	
150	7a	1	R+	
027	38a	7	R-a	9 paquets ou 9 paquets de 10 timbres ou 9 paquets de timbres ou 9 paquets de 10
029	7a	7	R-a	
025	33b	21	E	97 carnets ou 97 carnets de 10 timbres ou 97 carnets de timbres
041	7a	23	E	90 carnets de timbres ou 90 carnets ou 90 carnets de 10
148	129c	25	E	77 carnets ou 77 carnets de timbres ou 77 carnets de 10 timbres

Tableau 46 : ***Icônes et degré de performance***

On notera que 8 élèves sur 11 ont réussi à résoudre le problème et pourtant ils ne sont qu'en CE1.

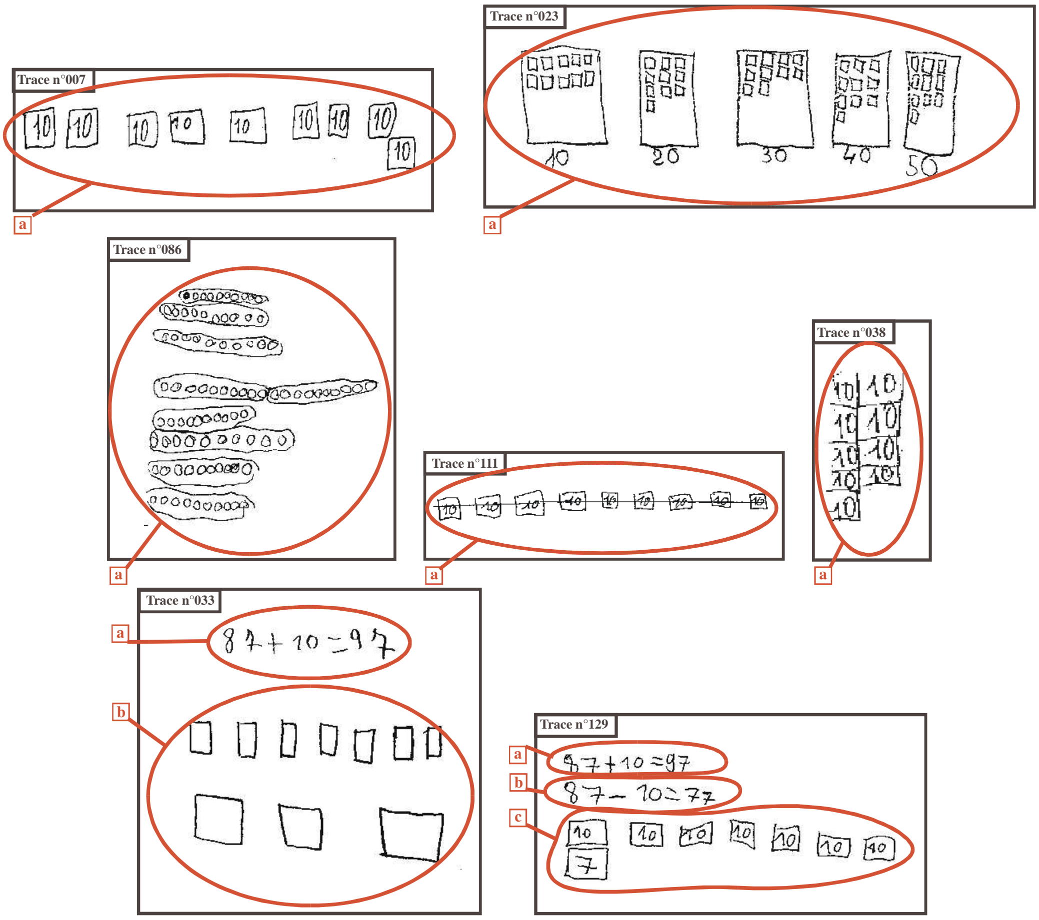


Figure 58 : ***Production des icônes dans la classe de l'enseignant n°4 (CE1)***

On peut constater un lien dans cette classe de CE1 entre la production d'icônes et le degré de réussite. Cependant, on ne peut pas pour autant associer la réussite à la production d'icônes. Les élèves ont-ils réussi le problème parce qu'ils ont produit des icônes ou bien parce qu'ils avaient déjà activé mentalement une procédure avant la production de ces icônes ?

2.2.4.5 Discussion

Les données construites à propos de la résolution d'un problème numérique à partir d'une cohorte de 105 élèves observés sur 4 années du CE1 au CM2 ont été analysées finement en prenant en compte les différents degrés de performance (allant de la réussite forte à l'échec par erreur et l'échec par non-réponse), les traces écrites (*brouillons*) et la formulation de la réponse à la question du problème (*solution*).

L'analyse minutieuse de ces données révèle que la présence des traces écrites intermédiaires ne dépend pas significativement du niveau de scolarité.

Quand ces traces écrites intermédiaires apparaissent, on pourrait penser qu'elles étayent la résolution du problème et favorisent la réussite. Ce n'est pas ce qui est ressorti de notre analyse où les tableaux de contingence croisant la variable binaire *Traces écrites intermédiaires (présence, absence)* et la variable binaire *Performance (Réussite, Non-réussite)*, font ressortir un lien significatif en CE2, CM1 et CM2 avec une attirance entre les modalités *Présence et Non-réussite* et une répulsion entre les modalités *Présence et Réussite* et vice-versa.

Faut-il en déduire que ces traces écrites intermédiaires ne sont pas adaptées à la résolution du problème demandé ?

L'analyse du contenu de ces traces écrites intermédiaires révèle une présence majoritaire de traces du type *Opérations* (75,90% en CE1, 85,88% en CE2, 82,47% en CM1 et 86,87% en CM2) qui sont en grande partie celles dont la technique opératoire a été étudiée lors de l'année de passation. Ainsi, la production d'additions est majoritaire au CE1 (55,56% vs 17,81% pour le CE2 à la deuxième place), la production de soustractions est également majoritaire au CE1 avec 23,81% suivi de près par le taux du CE2 avec 15,07% en second rang, la production de multiplications est majoritaire au CM1 avec 51,25% devant le CM2 (46,51%) et enfin la production de divisions est majoritaire au CM2 avec 31,40% devant le CM1 en second rang avec 26,25%.

Nous pouvons interpréter ce phénomène dans le cadre du contrat didactique (Brousseau, 1988a). Les élèves mobilisent avant tout ce qui est enseigné dans le moment au niveau de la classe. Face à cette tâche de résolution de problèmes, pour laquelle le contexte scolaire induit l'idée qu'il va falloir utiliser des opérations, les élèves mobilisent en priorité celles qu'ils connaissent sans prendre la distance critique nécessaire pour juger de l'adéquation du modèle mathématique mis en œuvre pour résoudre le problème. Quand un élève recourt à $87 + 10 = 97$, il se met dans la situation décrite par l'âge du capitaine. Le résultat de l'opération est exact mais le modèle additif est inadapté. Il y a comme un obstacle posé par une extension abusive de l'espace de validité du modèle additif au sens de Bachelard. La connaissance de l'addition empêche de penser une autre façon d'aborder le problème et de le modéliser pour le résoudre.

L'étude des productions des élèves ayant recouru à des représentations iconiques a mis en évidence un phénomène intéressant. C'est en CE1 que la présence de traces élémentaires de type *Icône* est la plus fréquente. Mais une analyse plus fine a révélé que ce recours était tout particulièrement observable dans une classe (classe de l'enseignante n°4). Nous observons que, dans cette classe, sur les 11 élèves qui ont eu recours à une représentation iconique, 8 ont réussi à résoudre le problème. À ce niveau de scolarité, nous serions tentée d'y voir l'efficacité d'un mode de représentation pour le traitement de l'information utile à la résolution du problème.

Mais il y a peut-être une interprétation excessive car la réussite de résolution de problème ne peut être réduite au seul recours à la représentation iconique. Ainsi, nous observons que, dans chacune des traces écrites intermédiaires de ces élèves, apparaît le *tracé* des dizaines représentées par des blocs, certains renfermant l'écriture *10*, d'autres renfermant un ensemble de 10 jetons dessinés.

La fréquence et l'homogénéité des représentations iconiques dans cette classe suggèrent un effet d'enseignement. Il faudrait compléter par un entretien avec l'enseignant. Le recours à des représentations iconiques en CE1 peut aussi se comprendre par le fait que les élèves disposent de moins de représentations symboliques en usage dans le champ des mathématiques.

2.3. Conclusion de l'étude longitudinale

L'étude longitudinale décrite dans ce chapitre visait à observer l'évolution des performances d'une cohorte d'élèves durant les quatre dernières années de l'école primaire, à partir de la résolution d'un même problème de type multiplicatif.

On relève tout d'abord, comme attendu par l'Institution scolaire, que la réussite de la résolution d'un problème qui requiert des compétences exigibles à la fin du cycle des approfondissements croît d'année en année, de la fin du CE1 à la fin du CM2. Cependant, au terme du CM2, c'est-à-dire de la scolarité primaire, plus d'un tiers des élèves ne fournit pas encore la réponse complète, exacte et attendue à cette question problématique et plus d'un quart se trouve en situation de non-réussite (par réponse erronée ou par non-réponse).

En considérant les profils des performances des élèves constitués par le quadruplet des performances annuelles, il ressort que 19 élèves sur les 105 de la cohorte (soit 18%) ont eu un parcours comportant uniquement des échecs (soit échec par réponse erronée, soit échec par non-réponse), tandis que 12 élèves sur 105 (11%) ont eu un parcours constitué uniquement de réussites.

L'analyse fine de l'ensemble des *brouillons* que nous avons nommés *traces écrites intermédiaires* a révélé que, d'une part, leur présence ne semblait pas dépendre de l'année de scolarité et que, d'autre part, leur contenu était majoritairement composé d'opérations, principalement celles dont la technique opératoire avait été introduite au cours de l'année de passation. La présence de ces traces intermédiaires au CE2-CM1-CM2 est paradoxalement plutôt liée à la non-réussite. Toutefois, on relève la production d'icônes associées à la réussite pour 8 élèves sur 11 d'une des classes de CE1. Ceci nous conduit maintenant à nous interroger sur les pratiques d'enseignement qui se réalisent dans les classes et en particulier celles qui touchent au domaine de la résolution de problèmes.

Il nous semble important même de chercher à expliciter les divers effets de ces pratiques d'enseignement sur la réalisation des apprentissages des élèves.

Chapitre 3 : Pratiques d'enseignement de la résolution de problèmes : ce que disent les enseignants

Tandis que débutait l'étude longitudinale exposée au chapitre 2, nous engagions dans le cadre de travaux de recherche conduits au niveau de la maîtrise en sciences de l'éducation (Priolet, 2000) nos premières investigations relatives à l'enseignement de la résolution de problèmes verbaux à données numériques dans les classes de cycle 3. Il s'agissait de repérer et d'analyser dans quelle mesure les élèves de CE2 étaient effectivement confrontés à l'utilisation de supports rassemblant des problèmes verbaux à données numériques présentés sous la forme d'une pluralité de représentations sémiotiques. Des études relatives aux pratiques pédagogiques de l'enseignement des mathématiques en classes de 6ème avaient été réalisées par le Ministère de l'Éducation nationale et avaient fait l'objet de parutions (Ministère Éducation nationale, 1996, 1997, 2000). Cependant, il n'existait pas alors, à notre connaissance, d'études conduites par le Ministère de l'Éducation nationale à propos des pratiques d'enseignement de la résolution de problèmes dans les classes de cycle 3 de l'école primaire.

Pour ces premières investigations relatives à l'enseignement de la résolution de problèmes, nous avons constitué un échantillon d'enseignants de CE2 issus des écoles de trois circonscriptions primaires relevant de deux académies[139]. La constitution de cet échantillon d'enseignants était basée sur une combinaison de méthodes aléatoires et de méthodes des quotas.

Nous avons procédé à une enquête par questionnaire auprès des 81 individus de l'échantillon. Cette enquête visait à construire des données relatives à ce que disent les enseignants[140] sur :

- Les outils de l'élève
- La préparation de la classe
- La conduite de la classe
- Les affichages présents dans la classe
- Les nouvelles technologies

Les 81 questionnaires envoyés nous ont été retournés. Nous rapportons ici les données relatives à :

- La fréquence des séances de résolution de problèmes
- Les outils mis à disposition des élèves par l'enseignant (manuels et affichages)
- Le rôle de l'enseignant dans la préparation des séquences et la phase de correction

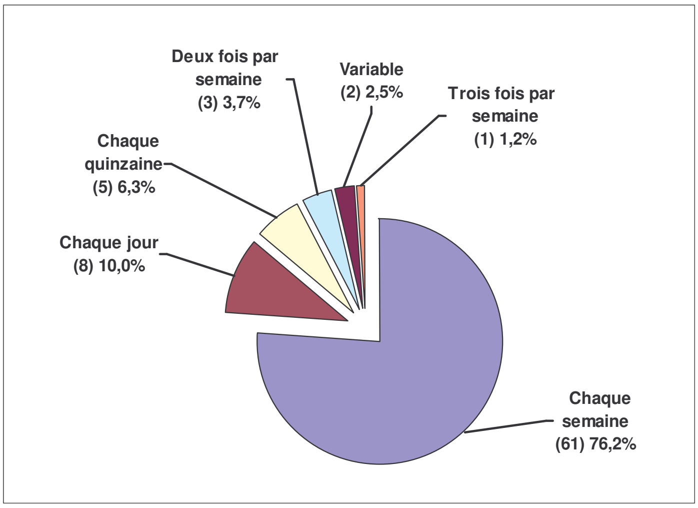
[139] Académie de Clermont-Ferrand et académie d'Orléans-Tour.
[140] Entendu dans le sens de ce qu'ils expriment à travers cette enquête par questionnaire.

3.1. Fréquence des séances de résolution de problèmes dans des classes de CE2

Un premier item de notre questionnaire était centré sur la fréquence des séances de résolution de problèmes et le nombre de problèmes traités. 80 enseignants avaient répondu à cette question.

Nombre de problèmes :	
En moyenne, selon quelle fréquence proposez-vous à vos élèves de CE2 de résoudre des problèmes à données numériques ?	
Fréquence journalière : O/N	*Nombre moyen de problèmes traités _____*
Fréquence hebdomadaire : O/N	*Nombre moyen de problèmes traités _____*
Fréquence : quinzaine : O/N	*Nombre moyen de problèmes traités _____*
Autre réponse : ____	

Figure 59 : ***Nombre de problèmes - Extrait du questionnaire de l'enquête – Maîtrise (Priolet, 2000)***



Graphique 20 : ***Fréquence de résolution de problèmes verbaux à données numériques au CE2 (Priolet, 2000)***

Dans plus de 3 classes sur 4, les élèves sont hebdomadairement confrontés à une activité de résolution de problèmes, mais seulement dans une sur dix quotidiennement. Cependant, les limites du questionnaire ne permettent de préciser ni le nombre de problèmes verbaux à données numériques traités par séance, ni la durée moyenne de chaque séance.

3.2. Outils mis à disposition des élèves par l'enseignant

Nous étudions la présence par élève des manuels et fichiers de mathématiques puis celle des affichages muraux dans la classe.

3.2.1. Manuels et fichiers de mathématiques

Un second item du questionnaire traitait des types d'outils mis à disposition des élèves et du mode d'utilisation prévu. Il s'agissait de repérer si les élèves disposaient chacun d'un ouvrage ou d'un fichier ou bien s'ils avaient à le partager avec un autre élève.

Chaque élève de CE2 dispose-t-il d'un manuel de mathématiques ? O/N
Chaque élève de CE2 dispose-t-il d'un fichier de mathématiques ? O/N
Si oui, lequel ? (titre, éditeur, collection) ________________________________

Sinon, les élèves disposent-ils d'un livre pour deux ? O/N
Si oui, lequel ? (titre, éditeur, collection) ________________________________

Figure 60 : ***Type d'outil et mode d'utilisation prévu - Extrait du questionnaire de l'enquête – Maîtrise (Priolet, 2000)***

Au moins un outil par élève (manuel ou fichier)	79% (64 classes sur 81)
Aucun outil par élève (manuel ou fichier)	18,5% (15 classes sur 81)
Un outil pour deux élèves (manuel ou fichier)	2,5% (2 classes sur 81)

Tableau 47 : ***Nombre de manuels de mathématiques par élève de CE2***

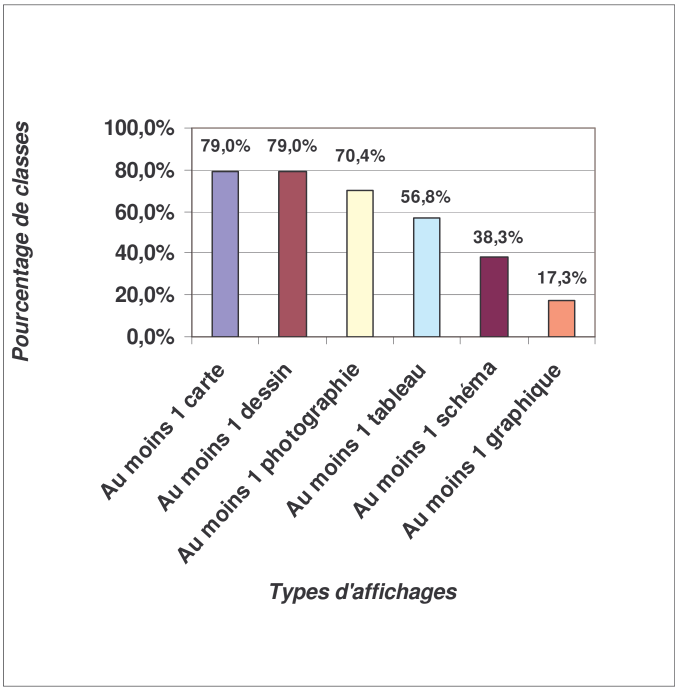
Dans les 4/5 des classes, chaque élève dispose individuellement d'au moins un manuel ou d'un fichier auquel il peut recourir soit de manière autonome, soit à la demande de l'enseignant. Cependant la présence d'un ouvrage de mathématiques par élève ne saurait impliquer la mise en place de fréquentes confrontations des élèves aux résolutions de problèmes. Il sera intéressant, dans une étude ultérieure, d'étudier les relations entre la présence de manuels ou de fichiers et la mise en œuvre de la résolution de problèmes.

3.2.2. Affichages présents dans la salle de classe

Un item du questionnaire avait trait à la description de l'environnement de la classe.

Merci d'indiquer dans chaque case le nombre de représentations effectivement affichées (le jour où vous renseignez ce questionnaire) dans votre classe et visibles par les élèves.
Tableaux à double entrée _____
Schémas _____
Cartes _____
Graphiques _____
Dessins d'enfants, reproductions d'œuvres _____
Photographies _____
Autres (précisez) ________________________________

Figure 61 : ***Affichages présents dans la salle de classe et visibles par les élèves - Extrait du questionnaire de l'enquête – Maîtrise (Priolet, 2000)***



Graphique 21 : ***Classes et différents types d'affichage (Priolet, 2000)***

Les résultats présentés dans le graphique 21 attestent que, dans les classes interrogées, les enseignants procèdent à des affichages de représentations de types tableau, schéma et graphique qui relèvent de registres de représentation sémiotique utilisés dans la résolution de problèmes mathématiques. Cependant nous n'avons pas ici d'informations suffisantes et significatives sur la relation entre ces deux éléments : affichage et résolution. Il sera intéressant d'étudier ultérieurement la place accordée à ces outils lors de séances de résolution de problèmes. L'enseignant incite-t-il ses élèves à recourir à ces affichages et ainsi à utiliser différents registres de représentation sémiotique ?

3.3. Rôle et travail de l'enseignant

Nous traitons du rôle et du travail de l'enseignant lors des phases de préparation des séquences de résolution de problèmes puis lors des phases de correction des problèmes.

3.3.1. Investigations relatives à la phase de préparation des séquences de résolution de problèmes

À partir des questions suivantes, nous avions procédé à quelques investigations en relation avec les pratiques de préparation des séquences de résolution de problèmes par des enseignants de CE2.

Outils de l'enseignant
Utilisez-vous un ouvrage spécifique pour préparer vos séquences de mathématiques ? O/N
Lequel ? (titre, éditeur, collection, livre du maître ou livre de l'élève) ____________________
Sinon, comment procédez-vous ? ____

Résolution des problèmes
D'une manière générale, dans le cadre de la préparation de vos séquences relatives à la résolution de problèmes présentés aux élèves de CE2 :
a) vous résolvez systématiquement le problème par écrit préalablement O/N
b) vous résolvez le plus souvent le problème mentalement O/N
c) vous recherchez systématiquement par écrit plusieurs façons de résoudre le problème O/N
Si oui à la question c) , merci de préciser l'utilité que vous percevez dans cette démarche et l'utilisation que vous en faites avec vos élèves : ___________________________________

Figure 62 : ***Préparation des séquences - Extrait du questionnaire de l'enquête (Priolet, 2000)***

Le tableau 48 met en évidence la prédominance de la modalité *résolution mentale* par l'enseignant devant la *pratique écrite de la résolution*.

	oui	non	Non réponse
L'enseignant résout systématiquement le problème par écrit, préalablement	21,2% (17)	75% (60)	3,8% (3)
L'enseignant résout le plus souvent le problème mentalement	53,7% (43)	42,5% (34)	3,8% (3)
L'enseignant recherche systématiquement par écrit plusieurs façons de résoudre le problème	28,7% (23)	67,5% (54)	3,8% (3)

Tableau 48 : ***Préparation des séances***

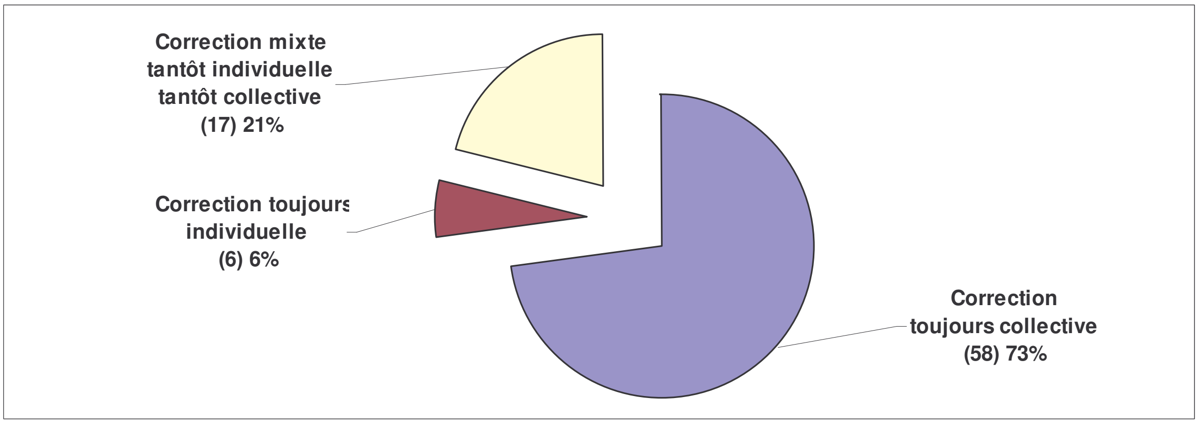
3.3.2. Investigations relatives à la phase de correction des problèmes

Un autre item du questionnaire visait à interroger les pratiques des enseignants lors des phases de correction des problèmes.

Correction des problèmes
D'une manière générale, pour la résolution de problèmes à données numériques, vous procédez le plus souvent :
À une correction individuelle O/N
À une correction collective O/N
Si vous procédez le plus souvent à une correction collective :
Vous partez prioritairement :
De la réponse exacte d'un élève O/N
De la confrontation de plusieurs réponses exactes d'élèves, mais de réponses présentées différemment O/N
De la confrontation d'au moins une réponse exacte d'un élève et d'au moins une réponse erronée d'un élève. O/N
Vous préférez proposer vous-même directement une solution O/N
Vous introduisez systématiquement au cours de la correction collective une autre forme de résolution que celle(s) proposée(s) par vos élèves O/N

Figure 63 : ***Correction des problèmes - Extrait du questionnaire de l'enquête (Priolet, 2000)***

Le graphique 22 et le tableau 49 indiquent les résultats obtenus.



Graphique 22 : ***Correction des problèmes (Priolet, 2000)***

Point de départ : réponse exacte d'un élève	*6,7% (5)*
Point de départ : confrontation de plusieurs réponses exactes d'élèves, mais de réponses présentées différemment	*38,7% (29)*
Point de départ : confrontation d'au moins une réponse exacte d'un élève et d'au moins une réponse erronée d'un élève	*50,7% (38)*
L'enseignant préfère proposer lui-même directement une solution.	*0%*
L'enseignant introduit systématiquement au cours de la correction collective une autre forme de résolution que celle(s) proposée(s) par les élèves.	*2,7% (2)*
Non réponse	*1,3% (1)*

Tableau 49 : ***Correction des problèmes***

Dans près de 3 classes sur 4, la phase de correction est réalisée sur un mode exclusivement collectif. Dans cette activité de correction collective, près de 90% des enseignants partent d'une confrontation des réponses produites par les élèves. Les uns (50%) s'appuient sur une confrontation entre une réponse exacte et une réponse erronée et les autres (38%) sur une confrontation entre plusieurs réponses exactes.

L'un des professeurs (nommé F) introduit de façon systématique une forme différente de résolution, qu'il considère comme une phase très importante dans son enseignement. Pour lui, l'introduction, lors de ce temps de correction, de différentes représentations offre à ses élèves une occasion de passer d'une forme de représentation à une autre, par exemple d'un tableau à un texte, pour résoudre et pour expliquer le mode de résolution adopté.

Voici, extrait de la fiche de préparation de cet enseignant, un exemple de correction pour laquelle différentes représentations ont été introduites. Dans cette fiche figurent différentes représentations introduites lors de la phase de correction. Les élèves sont ainsi confrontés à la conversion de registres, au sens employé par Duval (2000). L'enseignant F les conduisait à passer d'un registre algébrique à un registre iconique, voire géométrique.

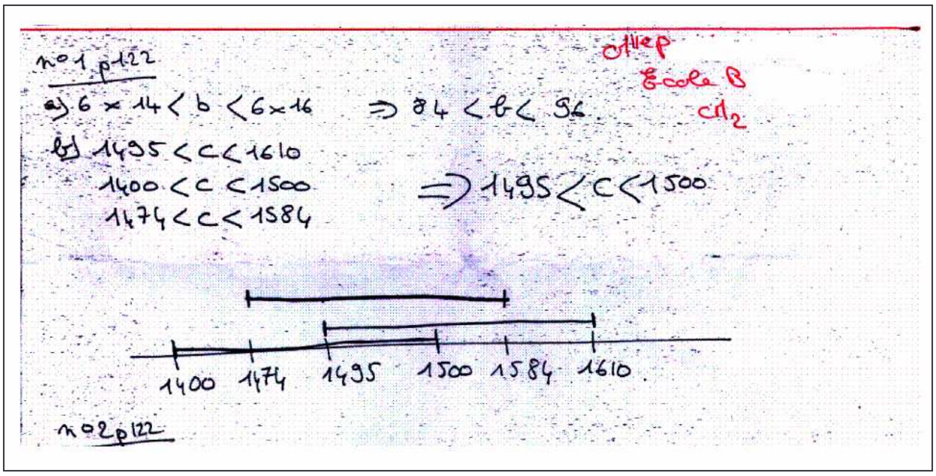


Figure 64 : ***Extrait de la fiche de préparation de l'enseignant (Priolet, 2000)***

3.4. Conclusion du chapitre 3

L'objet de cette étude relative aux pratiques enseignantes était de repérer la place accordée à la résolution de problèmes verbaux à données numériques dans les classes de CE2 de l'école primaire. Les résultats obtenus sont issus des 81 réponses à un questionnaire adressé à un échantillon d'enseignants encadrant un total de 1081 élèves âgés de 8/9 ans en classes de CE2. Ils révèlent que les enseignants engagent effectivement leurs élèves dans la résolution de problèmes verbaux à données numériques : dans plus de 90% des classes, les élèves sont confrontés au moins une fois par semaine à l'activité de résolution de problèmes. Cependant, cette étude ne permet pas de conclure à une homogénéité des pratiques : la fréquence des séances de résolution de problèmes, les types d'outils mis à disposition des élèves, la gestion des phases de préparation et de correction par l'enseignant constituent autant de facteurs qui varient d'une classe à l'autre. Tandis que 10% des enseignants proposent une séance quotidienne de résolution de problèmes, 6,3% proposent seulement une séance par quinzaine. La mise à disposition des élèves de manuels ou de fichiers de mathématiques varie aussi d'une classe à l'autre : dans près de 80% des classes, chaque élève dispose au moins d'un manuel ou fichier tandis que dans 20% des classes, il n'existe aucun outil individuel de ce type. Cependant, l'enquête ne nous permet pas de connaître précisément la place et la nature des supports utilisés qu'il s'agisse du manuel, du fichier ou d'un substitut.

Tableaux, schémas et graphiques sont présents à des degrés variables dans les classes, parmi les types d'affichage visibles par les élèves. Cependant aucun élément du questionnaire ne permet de préciser la place de ces supports dans l'enseignement de la résolution de problèmes, tant au niveau du contenu que des usages.

Lors de la préparation des séquences de résolution de problème, plus de la moitié des enseignants résolvent le plus souvent les problèmes mentalement avant de les proposer à leurs élèves. La correction des problèmes revêt une dimension collective dans 72% des classes.

Il conviendra donc d'inventorier les pratiques d'enseignement de la résolution de problèmes mises en œuvre par des professeurs du premier degré dans des classes du cycle des approfondissements.

Ces travaux ont fait l'objet de communications dans des colloques :

- CERME2, Marianzcké Lazné, République Tchèque, février 2001
- Argentoratum, Strasbourg, juillet 2002

suivies de publications (Priolet, Régnier, 2001 ; 2003).

Conclusion de la partie 2

Cette seconde partie visait, d'une part, à rendre compte de l'observation de l'état des résultats obtenus par les élèves scolarisés en France dans le domaine de la résolution de problèmes lors d'évaluations internationales ou nationales et, d'autre part, à étudier l'évolution des performances d'élèves du cycle des approfondissements de l'école française au cours de quatre années successives à partir d'une cohorte de 105 élèves.

L'enquête PISA, jugée parfois inappropriée pour comparer des cultures trop différentes, a suscité de nombreuses réactions telles que celle de Kahane (dir.) (2002). S'agissant de la résolution de problèmes, les données quantitatives de PISA 2003 révèlent des disparités entre les différents pays. Pour la France, elles indiquent une moyenne au-dessus de la moyenne internationale, mais pointent des résultats en deçà de ceux de la Finlande qui compte pourtant un nombre d'heures hebdomadaires de mathématiques inférieur au nôtre. Ces résultats ont suscité de nombreuses réactions dans la communauté des didacticiens des mathématiques et l'on peut notamment se demander si une Culture mathématique, au sens défini par Kahane (dir.) (2002), peut être évaluée à partir d'épreuves auxquelles il suffirait que les jeunes fussent entraînés. Cette infériorité des performances françaises comparées aux performances finlandaises peut être en grande partie attribuée aux élèves présentant à l'âge de quinze ans un retard dans leur parcours scolaire, traduisant à la fois la réussite de notre enseignement pour les élèves *à l'heure* et ses défaillances pour les élèves ayant redoublé. Le danger que constituerait une adaptation de nos programmes d'enseignement à la réussite d'enquêtes telles que PISA a été pointé par la communauté des didacticiens des mathématiques.

Les performances aux évaluations nationales de début de CE2 révèlent, quant à la résolution de problèmes verbaux, les difficultés des élèves à gérer des situations complexes et à justifier une réponse en utilisant une argumentation cohérente. Nous ne saurions nous étonner de ce résultat, étant entendu que les compétences requises pour ces évaluations sont des compétences en cours d'acquisition dont la maîtrise ne saurait constituer un objectif de fin de cycle 2. A contrario, les performances sont satisfaisantes quand la tâche demandée renvoie à des relations préconstruites ou à l'utilisation directe d'une connaissance.

Les performances à l'entrée en 6ème et les analyses effectuées chaque année par le Ministère de l'Éducation nationale révèlent le même type de difficultés que celles rencontrées en début de CE2 : à l'entrée au collège, les difficultés perdurent pour résoudre des exercices mettant en jeu des raisonnements complexes ou demandant la production d'une justification, l'interprétation de données présentes dans l'énoncé, l'organisation d'une démarche.

Ces conclusions qui pointent les difficultés des élèves à résoudre des problèmes ont suscité le besoin d'investigations complémentaires : l'étude décrite dans les deux précédents chapitres a ainsi consisté à analyser l'évolution des performances des élèves lors de la résolution d'un même problème tout au long du cycle 3. De cette étude longitudinale, il ressort que, comme attendu par l'Institution scolaire, le taux de réussite dans la résolution du problème multiplicatif donné augmente d'année en année, depuis la fin du CE1 jusqu'à la fin du CM2. On relève également que près d'un quart des élèves de CE1 résolvent ce problème lié à une situation de partage. À ce constat positif, on peut cependant opposer le fait que plus d'un tiers des élèves de CM2 ne donne pas la réponse attendue à ce problème et que 19 élèves sur 105 ont un parcours strictement composé d'échecs ou de non-réponses pour les quatre passations.

L'enseignement dispensé au cycle 3 n'a-t-il pu réussir à faire acquérir les compétences nécessaires à la résolution de ce type de problème, de type multiplicatif, dont la complexité peut se résumer au passage par un calcul intermédiaire ?

Il nous appartient également de souligner les limites de cette étude longitudinale : un seul problème a été proposé aux élèves et nous ne saurions généraliser les résultats obtenus ici à ce qu'auraient pu être les performances à un problème additif ou à un ensemble de problèmes multiplicatifs. En revanche, nous avons retenu cet énoncé de problème verbal à données numériques en raison de son appartenance aux évaluations nationales CE2. Les consignes étaient strictement identiques à celles indiquées dans le protocole national. La durée de passation est restée de 3 minutes quelle que soit l'année, ce qui a priori peut avoir plutôt favorisé les classes de CM1 et de CM2 qui paradoxalement comptent un nombre élevé d'élèves en situations de non-réussite.

Il est certes rassurant de constater que deux tiers des élèves fournissent en fin de CM2 la réponse attendue à ce problème qui mobilise des compétences devant être acquises en fin de scolarité primaire. Cependant, peut-on se satisfaire d'un tel point de vue et n'est-il pas possible de réduire le nombre d'élèves qui échouent en résolution de problèmes ? Telle est la question essentielle qui fonde l'expérimentation mise en place et décrite dans la troisième partie.

En possession des quatre productions de chaque élève de la cohorte, nous avons tenté d'identifier quelques-unes des procédures mises en œuvre par les élèves au cours des quatre années. Les élèves résolvent-ils mentalement ou par écrit par l'intermédiaire de traces du type *dessin* ou *opération* ? Si oui, existe-t-il une relation entre ces traces intermédiaires et les performances réalisées ?

En premier lieu, nous observons une disparité dans le nombre de traces : certaines comportent une ou plusieurs *traces élémentaires*, d'autres n'en contiennent aucune. L'étude montre que la présence de ces traces est indépendante de l'année de scolarité, autrement dit on ne produit pas davantage de traces au CE1 qu'au CE2 ou qu'au CM1 ou qu'au CM2 ; mais contrairement à nos attentes, l'étude a révélé qu'en CE2-CM1-CM2 la présence de ces traces écrites intermédiaires était davantage associée à la non-réussite tandis que leur absence était au contraire associée à la réussite. On peut penser que les élèves qui réussissent sans recourir aux traces écrites résolvent le problème mentalement, dès lors qu'ils possédaient en mémoire un schéma mental leur permettant de résoudre le problème posé. Par ailleurs, la taille des nombres n'imposait pas nécessairement une pose d'opération par écrit.

En second lieu, nous nous sommes intéressée au contenu de ces traces. Le pourcentage d'opérations est élevé ; il varie entre 76% et 86% de l'ensemble de ces productions intermédiaires. On relève la présence dominante de telle ou telle opération, l'année même où sa technique opératoire est étudiée, ce qui vient conforter l'idée de l'influence du contrat didactique (Brousseau, 1988) et l'effet des conceptions erronées des élèves sur les attentes du maître en terme de résolution systématique par une opération et de combinaison des nombres entre eux (Houdement, 2003).

Cependant, la technique de la division étant abordée en fin de CE2, on pourrait s'attendre à un net accroissement du taux de réussite entre le CE2 et le CM1 et surtout entre le CM1 et le CM2. Or, les fluctuations des performances des élèves ne semblent pas dépendre des périodes de passation, autrement dit le taux de réussite n'augmente pas significativement davantage entre le CM1 et le CM2 qu'entre le CE2 et le CM1 ni qu'entre le CE1 et le CE2.

Parmi les autres traces élémentaires, seules les productions d'icônes atteignent au CE1 le taux de 20%, la plupart étant d'ailleurs concentrées dans une seule classe et présentant des similitudes : le tracé de chaque dizaine est présent dans 11 copies de la classe. Ce passage par des représentations iconiques a-t-il fait l'objet d'un enseignement dans le cadre de la résolution de problèmes ? Si oui, est-il susceptible de faciliter l'activité de l'élève et d'améliorer les performances en résolution de problèmes verbaux à données numériques ?

Tels sont les questionnements qui ont généré les premières investigations relatives aux pratiques d'enseignement décrites dans le chapitre 3. L'analyse des données issues des 81 réponses à l'enquête par questionnaire adressée à 81 enseignants de 3 circonscriptions issues de 2 académies différentes a révélé d'une part la présence d'un enseignement effectif de la résolution de problèmes dans les classes puisque 90% des enseignants proposent au moins une séance hebdomadaire de résolution de problèmes et d'autre part la diversité des pratiques relatives notamment au contenu même des séances et à leur préparation.

De l'ensemble de ces premières investigations relatives à la fois aux performances des élèves et aux pratiques effectives d'enseignement de la résolution de problèmes au sein même de la classe, est née la problématique de notre recherche qui sera développée dans la partie 3.

PARTIE 3

De la construction de la problématique à la discussion des résultats obtenus

PARTIE 3 : De la construction de la problématique à la discussion des résultats obtenus

Introduction

Comme nous en avons fait état dans l'introduction générale, la genèse de cette thèse s'est étalée sur plusieurs années, s'inspirant à la fois (i) de la réflexion conduite sur notre pratique professionnelle d'enseignante du premier degré, conseillère pédagogique de circonscription formatrice d'enseignants, (ii) des résultats de nos travaux précédents en maîtrise en Sciences de l'Éducation (Priolet, 2000) et en DEA en Sciences de l'Éducation (Priolet, 2001), (iii) des apports des travaux en didactique des mathématiques, en psychologie de l'apprentissage, auxquels nous avons accédé par les écrits ou par la participation à de nombreuses rencontres scientifiques.

Le premier chapitre retrace la genèse de notre problématique de recherche. Le second chapitre est d'ordre méthodologique. Le troisième détaille les résultats, livre des conclusions et ouvre la voie à discussion et prolongements. Dans le quatrième et dernier chapitre, nous discutons des résultats obtenus au regard de notre hypothèse de travail.

Chapitre 1 : Construction de la problématique

Dans un premier temps, nous précisons la genèse de nos travaux. La description des éléments constitutifs de cette origine nous conduira dans un second temps à formuler notre problématique de recherche et à poser notre hypothèse de travail.

1.1. À l'origine de nos travaux : des constats, des questions, des présupposés théoriques

1.1.1. Un premier constat : émergence de difficultés d'apprentissage en résolution de problèmes mathématiques

Le premier constat, dressé en seconde partie, est lié aux difficultés identifiées chez les élèves scolarisés en France au regard de leurs performances aux évaluations nationales ou internationales en résolution de problèmes à données numériques. De là est née l'idée d'une étude longitudinale[141] destinée à observer l'évolution des performances d'une cohorte d'élèves durant les quatre dernières années de l'école primaire, dans la résolution d'un même problème de type multiplicatif. Cette étude a permis d'analyser à la fois les performances et les contenus des traces écrites produites par la cohorte observée des 105 élèves scolarisés du

[141] Pour toutes précisions supplémentaires, voir Partie 2.

CE1 (2000) au CM2 (2003). Au fil de ces quatre années successives, il ressort que, en réponse aux attentes explicitées par les objectifs assignés à l'Institution scolaire primaire, le taux de réussite dans la résolution du problème multiplicatif donné augmente d'année en année, depuis la fin du CE1 jusqu'à la fin du CM2. Toutefois, au terme du CM2, c'est-à-dire de la scolarité primaire, plus d'un tiers des élèves ne fournit pas encore la réponse exacte attendue à ce problème et plus d'un quart reste toujours en situation de non-réussite (échec par réponse erronée ou trop partielle ou échec par non-réponse).

En considérant les profils des élèves regroupant les quatre performances annuelles, l'étude révèle que 19 élèves sur les 105 de la cohorte ont eu un parcours composé uniquement de non-réussites, contre 12 élèves sur 105 avec parcours uniquement de réussites.

De l'analyse plus fine de l'ensemble des traces écrites intermédiaires[142] (T.é.i.) produites par les élèves, ressortent trois types de résultats :

- Premièrement, la production de T.é.i. ne semble pas dépendre de l'année de scolarité. Autrement dit, les élèves ne produisent pas davantage de *brouillons* en CM2 qu'en CE1, en CE2 ou en CM1.
- Deuxièmement, l'analyse du contenu de ces traces (T.é.i.) révèle une présence majoritaire d'opérations qui, de surcroît, sont en grande partie celles dont la technique opératoire a été étudiée lors de l'année de passation. On retrouve là un effet de contrat didactique (Brousseau, 1988). Les productions d'additions et de soustractions sont ainsi majoritaires au CE1 et au CE2, celles de multiplications au CM1 et au CM2 et enfin celles de divisions au CM2.
- Troisièmement, on relève que la production d'icônes émane essentiellement du niveau CE1 et plus précisément de l'une des classes de ce niveau. Dans cette classe de CE1, le fait que 8 élèves parmi les 11 ayant produit des icônes aient réussi à résoudre le problème nous a conduite à nous interroger sur l'effet de la production d'icônes. Dans chacune des traces écrites intermédiaires de ces élèves, on observe la représentation de dizaines, généralement par des blocs, certains contenant l'écriture *10*, d'autres renfermant un ensemble de 10 jetons dessinés.

Pourquoi dans cette classe observe-t-on un taux de recours à la production d'icônes nettement supérieur à celui de toutes les autres classes de l'échantillon. À quoi peut-on attribuer ce fait ? Quelles sont les caractéristiques observables ou celles que l'on peut inférer, des pratiques pédagogiques dans cette classe ?

Tandis qu'au CE1 la présence de traces écrites intermédiaires est associée à la réussite dans la résolution du problème, on remarque au contraire qu'en CE2-CM1-CM2 elle est plutôt associée à la non-réussite. Ce qui peut signifier que les élèves qui ont bien réussi n'ont pas recouru aux brouillons, dès lors qu'ils disposaient en mémoire d'un schéma mental leur

[142] Ces traces écrites intermédiaires peuvent aussi être nommées brouillons.

permettant de résoudre le problème posé. On peut aussi admettre que l'ordre de grandeur des nombres présents dans cet énoncé ne justifiait pas la pose d'opérations par écrit.

1.1.2. Un deuxième constat : repérage des pratiques régulières d'enseignement de la résolution de problèmes

Ce second constat a trait à l'enseignement même de la résolution de problèmes à données numériques.

L'analyse des données obtenues par questionnaire auprès de 81 enseignants de CE2 issus de deux académies différentes (Priolet, 2000) avait mis en évidence[143] l'existence d'un enseignement effectif de la résolution de problèmes à données numériques dans les classes : 100% des enseignants de CE2 concernés avaient déclaré proposer à leurs élèves de résoudre des problèmes à données numériques. Le Rapport de l'Inspection Générale sur l'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire (2006) précise que la majorité des enseignants (90%) déclarent réserver dans leur emploi du temps des plages horaires spécifiques à la résolution de problèmes, la fréquence de ces plages étant hebdomadaire pour 40% d'entre eux, bihebdomadaire pour 36% et quotidienne pour 24% qui déclarent que *tout est problème*.

1.1.3. Un troisième constat : l'identification d'un paradoxe

Ainsi, malgré la mise en œuvre régulière de séances de résolution de problèmes dans les classes, les performances réalisées par les élèves, tant aux évaluations nationales de début de CE2 et de 6ème que lors de notre étude longitudinale, révèlent que les élèves restent confrontés à des difficultés dans la résolution de problèmes, comme si l'apprentissage n'avait pas provoqué un saut suffisant pour parvenir à un niveau de conceptualisation satisfaisant pour ce type de tâche. Ce paradoxe entre l'enseignement effectif de la résolution de problèmes et l'écart constaté entre le niveau des performances obtenu et celui attendu nous a orientée vers une analyse des pratiques des enseignants, tout en nous inspirant des travaux de Roditi (2003, 2005) et de Clot et al. (2000) développés respectivement dans les cadres de la didactique des mathématiques et de la psychologie ergonomique.

1.1.4. Des questions de départ

Les différents constats mentionnés ont abouti à un ensemble de questions initiales étroitement mêlées mais que nous présentons ici successivement selon les deux dimensions : apprentissage et enseignement. C'est en effet le contraste entre la production massive de traces écrites intermédiaires dans une des classes de CE1 et la quasi-absence dans les autres classes qui nous a conduite à nous intéresser aux pratiques des enseignants.

---

[143] Voir Partie 2 – Chapitre 3.

Questions en relation avec l'apprentissage de la résolution de problèmes

- Lors de la résolution de problèmes numériques à énoncés verbaux, les élèves recourent-ils à l'usage de traces écrites intermédiaires ?
  - ***Si oui*** : À quels types de traces ? Existe-t-il un lien entre ce recours et les performances associées à la résolution des problèmes ? Ce recours constitue-t-il un indicateur prédictif de réussite ?
  - ***Si non***, Pourquoi et comment les élèves formulent-ils directement une réponse au problème posé ? Dans l'hypothèse de difficultés rencontrées par les élèves dans la résolution de problèmes, un recours à des traces écrites intermédiaires pourrait-il se révéler efficace ?

Questions en relation avec les pratiques des enseignants lors des séances de résolution de problèmes à données numériques

- Peut-on dégager des invariants dans ces pratiques ?
- Les enseignants instrumentalisent-ils leur enseignement ? Par exemple, utilisent-ils des manuels scolaires, des calculatrices dans leurs séances d'enseignement de la résolution de problèmes à données numériques ?
- Quelles tâches donnent-ils à leurs élèves ?
- Quelle organisation pédagogique mettent-ils en œuvre ?
- Incitent-ils leurs élèves à recourir à des traces écrites intermédiaires ? Comment ? Pourquoi ?

L'articulation entre ces deux volets de questions, liées à l'apprentissage de l'élève et aux pratiques d'enseignement des enseignants, nous amène à nous interroger sur les conditions d'enseignement susceptibles de favoriser l'apprentissage de la résolution de problèmes à données numériques.

1.1.5. Des présupposés théoriques

Les questions de départ, brutes, que nous nous sommes posées ont été complétées, amendées, affinées en analysant le sens qu'elles prennent selon les cadres théoriques de référence que nous avons mobilisés. Nous rappelons brièvement ici les présupposés théoriques retenus et développés dans le chapitre 6 de notre première partie.

En référence aux travaux de Glaeser, nous associons étroitement ***résolution de problèmes*** et *heuristique descriptive* et nous distinguons *problème* et *exercice* en focalisant notre attention sur ***le problème*** en tant que *question à résoudre*, impliquant un *obstacle à franchir*. Ainsi, un problème perd son statut de problème dès lors que celui à qui il est proposé dispose d'emblée d'une procédure adaptée pour le résoudre. Tous les mathématiciens et didacticiens des mathématiques convoqués en première partie s'accordent sur le rôle essentiel que joue la résolution de problèmes dans l'acquisition d'une culture mathématique et du goût des mathématiques, et ce, que l'on se place aux niveaux de l'activité du mathématicien ou de celle de l'élève en école élémentaire.

Les communautés des psychologues de l'apprentissage et de l'éducation ainsi que celle des didacticiens des mathématiques partagent l'idée développée par les théories cognitivistes de la connaissance qui placent ***la conceptualisation*** au cœur de la résolution de problèmes. Vergnaud (1990) centre sa théorie des champs conceptuels sur le couple *schème-situation* et sur une classification purement conceptuelle des problèmes qu'il illustre par les champs des structures additives et multiplicatives. Pour parvenir à cette catégorisation, il prône comme essentiels les principes de variété et de régularité : l'élève doit ainsi être souvent confronté à une grande variété de situations afin de pouvoir exercer les schèmes existants ou bien être amené à en construire de nouveaux ; il revient alors à l'enseignant de fournir des aides aux élèves afin de favoriser la catégorisation des situations. Pour faciliter la conceptualisation, Vergnaud propose un ensemble de diagrammes correspondant aux différents types de situations-problèmes, diagrammes dont les avis sur les effets des usages dans les classes sont partagés.

Ainsi, tandis que Vergnaud revendique le rôle essentiel joué par ***la catégorisation*** sur la résolution de problèmes et propose un recours à des diagrammes pour représenter les relations en jeu entre les différents états, Julo (2000) déclare ne pas adhérer entièrement au fait d'expliciter aux apprenants la structure même des problèmes. Outre le fait que la catégorisation ne joue peut-être qu'un rôle partiel dans la formation de certains schémas de problèmes, il pense qu'au contraire en définissant précisément la base de problèmes à laquelle l'élève sera confronté, l'enseignant induira déjà une activité de catégorisation permettant de conduire à la formation de schémas de problèmes. En procédant à des rapprochements et à des différenciations de problèmes qui resteront souvent implicites, on induira une activité de catégorisation et la formation de schémas de problèmes. Pour ce faire, Julo suggère le recours à des tâches de classement de problèmes ou à des tâches de fabrication d'énoncés.

Duval (1995, 2005), de son côté, met en garde contre les dangers d'utilisation d'un modèle commun à d'autres sciences pour étudier l'activité mathématique qui revêt selon lui une spécificité propre. En cela il affiche clairement son opposition à Vergnaud. Au premier rang de l'activité mathématique, Duval place la mobilisation d'au moins deux *registres de représentation* à la fois et la possibilité d'utiliser à tout moment la ***conversion de représentations***, c'est-à-dire le passage d'un registre de représentation sémiotique à un autre registre de représentation sémiotique.

Les sujets qui résolvent des problèmes évoluent dans un espace et dans un lieu. C'est dans ce contexte que Brousseau, quand il traite de l'opérationnalisation d'une notion, insiste sur le fait de la relier à d'autres connaissances antérieures. En nous désolidarisant quelque peu de Glaeser qui attache une importance capitale à l'activité extrascolaire, c'est-à-dire à l'activité qui se déroule en dehors du temps scolaire d'enseignement, nous rejoignons le cadre théorique développé par Brousseau (1986b) pour lui emprunter la définition du concept de ***situation*** et pour définir l'environnement scolaire que, dans notre étude, nous réduisons à la salle de classe. Cet environnement scolarisé est composé d'un enseignant, d'élèves et d'un *milieu* au sens utilisé par Brousseau.

De nombreux travaux s'appuient sur ces différentes théories, or il nous semble qu'il existe parfois une sorte d'étanchéité[144] entre les cadres théoriques convoqués. Pourquoi un cadre théorique chasserait-il l'autre, tandis qu'ils visent l'un et l'autre le même objectif : favoriser la conceptualisation.

Afin de pouvoir analyser l'activité de l'enseignant et l'activité des élèves, il nous faut choisir des outils d'analyse en référence à un cadre théorique. La psychologie ergonomique (Leplat, Clot, Faïta) nous permet de considérer ***la tâche*** comme le *but à atteindre* et ***l'activité*** comme étant à la fois *ce qui se fait* mais aussi *ce qui n'est pas fait, ce que l'on voudrait faire, ce qu'il faudrait faire, ce que l'on aurait pu faire, ce qui est à refaire et même ce que l'on fait sans vouloir le faire.*

1.2. Problématisation

À la lumière de ce cadre multiréférentiel, nos questions initiales sont alors soumises à une reformulation. Nous nous interrogeons de manière plus précise :

- D'une part, sur les tâches assignées aux élèves lors de séances de résolution de problèmes, autrement dit les élèves résolvent-ils des problèmes ? Si oui, quels types de problèmes ?
- D'autre part, nous cherchons à analyser l'activité des enseignants en situation d'enseigner la résolution de problèmes et ce, en vue de répondre aux questions suivantes : Les objectifs que les enseignants assignent à la résolution de problèmes sont-ils perceptibles dans les situations d'enseignement mises en œuvre ? Quelle est la place accordée au processus de conceptualisation des connaissances, à la conversion de représentations sémiotiques, à la référence à des notions auxquelles les élèves ont déjà eu l'occasion d'être confrontés durant la scolarité ? Quelle est la part du guidage de l'activité de l'élève par l'enseignant dans les situations d'enseignement et d'apprentissage qu'il propose ?

Ainsi, notre problématique semble pouvoir s'organiser autour d'une question centrale formulée sur les conditions mêmes de l'enseignement de la résolution de problèmes, autrement dit :

À quelles conditions un enseignement de mathématiques peut-il contribuer à favoriser l'apprentissage de la résolution de problèmes, en particulier de problèmes à données numériques ?

[144] Comme en témoignent des bibliographies qui ne se réfèrent souvent qu'aux auteurs d'un unique cadre théorique.

Nous posons comme hypothèse que l'apprentissage peut être favorisé si l'enseignement s'inscrit dans un cadre didactique satisfaisant aux quatre conditions suivantes :

(i) Mise en application des principes :

- P1 : Recherche
- P2 : Mise en réseau des connaissances
- P3 : Conversion des représentations sémiotiques
- P4 : Catégorisation

(ii) Coexistence de P1, P2, P3, P4

(iii) Régularité de P1, P2, P3, P4

(iiii) Dévolution[145] à l'élève de P1, P2, P3, P4

Les principes P1, P2, P3, P4 s'appliquent à l'activité de l'élève et leur mise en œuvre relève des tâches et de l'activité de l'enseignant. Ces principes prennent appui sur les présupposés théoriques retenus[146].

Le tableau 50 détaille le contenu de chacun de ces principes et en indique la référence théorique associée.

Principe	Titre	Énoncé	Référence théorique
P1	Recherche	L'élève est confronté à une activité de recherche de solution à des problèmes mathématiques.	Brousseau, Glaeser
P2	Mise en Réseau	L'élève est amené à mobiliser ses connaissances antérieures.	Bachelard, Brousseau
P3	Conversion	L'élève est confronté à des conversions de représentations sémiotiques mobilisant différents registres de représentation.	Duval
P4	Catégorisation	L'élève est amené à catégoriser les situations mathématiques rencontrées, en fonction des relations mathématiques en jeu.	Vergnaud

Tableau 50 : ***Explicitation des principes P1, P2, P3, P4***

Ces principes doivent coexister, autrement dit être mis en place de manière conjointe. Ils doivent être mis en place de façon régulière et être dévolus à l'élève.

Notre Système Didactique (SDg) prend appui sur l'environnement scolaire tel que le définit Brousseau et comme nous l'avons modélisé dans le chapitre 6 de la première partie.

Il comprend les éléments suivants (Figure 65) :

- Le milieu (au sens de Brousseau, 2003), c'est-à-dire tout ce qui agit sur l'élève ou/et sur quoi l'élève agit.
- L'enseignant
- Les élèves
- Notre cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$ (que nous détaillerons ci-après)
- Un ensemble de relations entre les éléments composant le SDg.

[145] Au sens de Brousseau (1988b).
[146] Voir Partie 1 - Chapitre 5

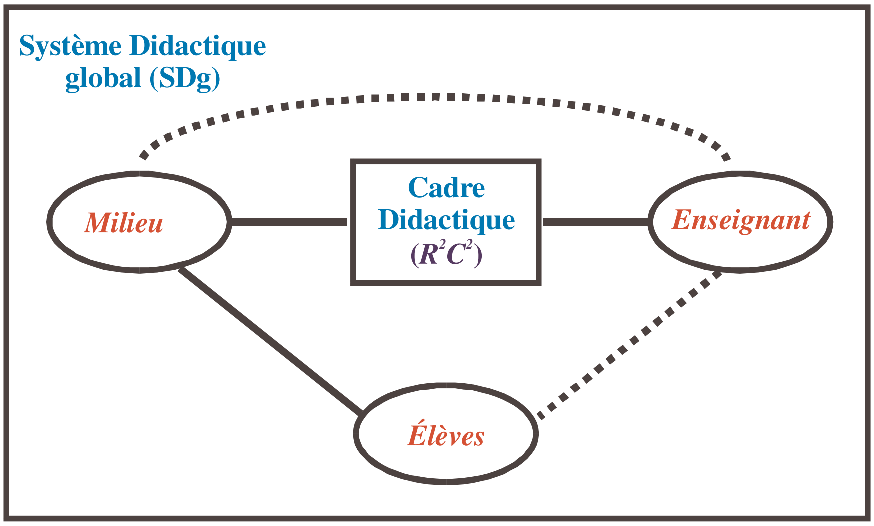


Figure 65 : ***Notre Système Didactique global (SDg)***

L'enseignant met en place le cadre didactique (***R^2C^2***) (Figure 66). Le milieu se trouve ainsi organisé en fonction de ce cadre didactique. Les élèves, en interaction avec le milieu, peuvent s'approprier les connaissances avec un guidage plus ou moins marqué de l'enseignant.

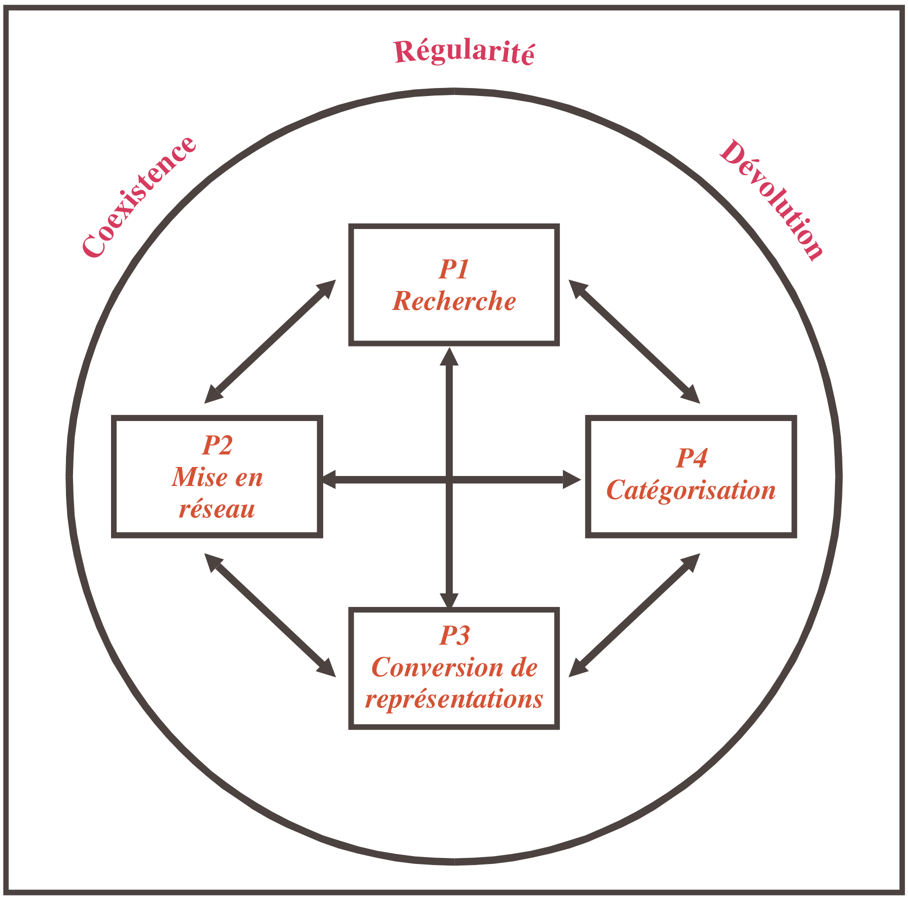


Figure 66 : ***Notre cadre didactique : R^2C^2***

Notre cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$, qui constitue un des éléments du Système Didactique global (SDg), intègre des situations dans lesquelles les tâches et l'activité de l'enseignant sont régies par les principes P1, P2, P3, P4 et leurs interactions. La mise en œuvre globale est symbolisée par la notion de cadre. À cet ensemble composé des principes P1 à P4 et des relations qui les unissent dans un cadre global, nous attribuons l'acronyme $\boldsymbol{R^2C^2}$ (C pour Catégorisation et Conversion ; R pour Réseau, Registre et Régularité), les exposants montrant la démultiplication des effets induits par l'approche globale.

Nous sommes amenée à définir un ensemble de variables :

- Variables extrinsèques :
  - Elèves : (classe, sexe, date de naissance, résultats au *champ M2 : résolution de problèmes* de l'évaluation nationale CE2) (Ces variables sont définies précisément en Partie 3 – paragraphe 2.3.1.1.)
  - Enseignants : classe, sexe, Ancienneté Générale de Service (Ces variables sont définies précisément en Partie 3 – paragraphe 2.4.)
  - Problèmes du pré-test et du post-test : degré de performance (Ces variables sont définies précisément en Partie 3 – paragraphe 2.3.3.1.), traces écrites intermédiaires (Ces variables sont définies précisément en Partie 3 – paragraphe 2.3.3.2.)

- Variables intrinsèques :
  - Variables didactiques : P1, P2, P3, P4, conditions de coexistence, régularité et dévolution (Ces variables sont définies précisément en Partie 3 – paragraphe 1.2.)
  - Variables de dispositif : organisation temporelle, regroupements des élèves, outils (Ces variables sont définies précisément en Partie 3 – paragraphe 3.1.)

Chapitre 2 : Méthodologie : présentation, mise en œuvre et discussion sur les méthodes pour construire, traiter et analyser les données

Pour la mise à l'épreuve de notre hypothèse nous avons eu recours à une expérimentation. Ce second chapitre présente d'abord le cadre général de cette expérimentation. Il détaille les méthodes et les techniques retenues pour la construction, le traitement et l'analyse des données. Après quoi il précise les caractéristiques de la population-cible des élèves et de la population-cible des enseignants que nous désignons respectivement par *population-élèves* et par *population-enseignants*. Il s'achève par une description détaillée de l'expérimentation.

2.1. Cadre général de l'expérimentation

L'expérimentation a été mise en œuvre sur un échantillon[147] de 137 élèves de CE2 issus de 8 classes composées strictement d'élèves de CE2, et sur un échantillon constitué des 8 enseignants des classes concernées.

Les deux échantillons sont dépendants dans la mesure où il s'agit des élèves de CE2 et de leurs enseignants.

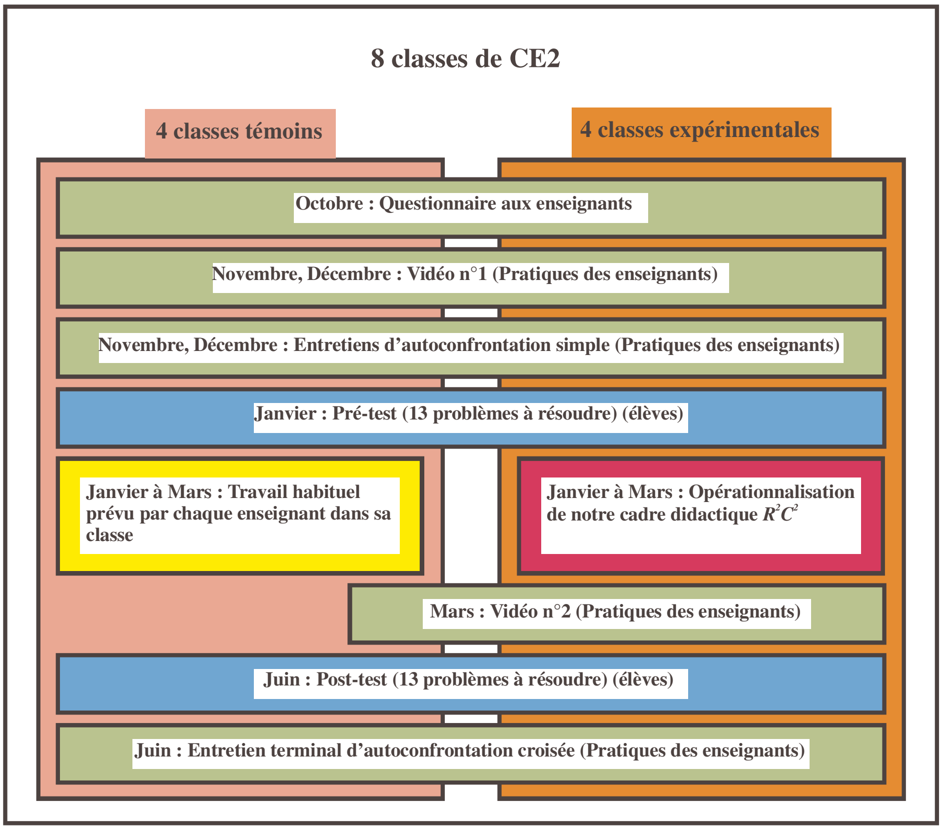


Figure 67 : ***Schéma de l'expérimentation***

[147] La représentativité de cet échantillon sera étudiée et discutée dans le paragraphe traitant de la population-cible.

Cette expérimentation se déroule en trois phases principales :

Dans un premier temps, d'octobre à janvier de la même année scolaire, il s’est agi d'une part de caractériser les pratiques mises en oeuvre par les enseignants lors de séances de résolution de problèmes, d'autre part de mesurer les performances des élèves dans ce champ des mathématiques et de recenser les traces écrites intermédiaires produites lors de la résolution des problèmes prévus dans le cadre de cette expérimentation.

Dans un deuxième temps, de janvier à mars, quatre classes parmi les huit ont été soumises à l’opérationnalisation de notre cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$ visant à évaluer les effets d’une pratique d’enseignement de la résolution de problèmes basée sur la mise en œuvre, dans un système didactique global, des quatre principes énoncés dans le paragraphe 1.2. Afin de repérer les changements éventuels de pratiques intrinsèques ou extrinsèques à ce nouveau cadre didactique, ces quatre classes ont été l’objet de nouveaux enregistrements vidéoscopés de séances de résolution de problèmes. Les quatre autres qui constituaient le groupe-témoin ont continué le travail prévu par l’enseignant dans le cadre de sa pratique habituelle de classe.

Dans un troisième temps, en juin, un post-test, strictement identique au pré-test, a fait l’objet d’une passation dans les huit classes.

2.2. Méthodes et techniques pour construire, traiter et analyser les données

Nous avons construit, traité et analysé les données de notre expérimentation selon des méthodes qualitatives et quantitatives qui s’appuient sur différentes techniques que nous précisons ci-après.

Pour recueillir les données relatives aux pratiques enseignantes, trois techniques ont été utilisées : le questionnaire écrit, l'enregistrement vidéoscopé, l'entretien d'autoconfrontation (Clot et Faïta, 2000). Nous nous sommes appuyée d’une part sur le cadre théorique développé par Leplat (2000) en psychologie du travail et en ergonomie, d’autre part sur les travaux de Rogalski J. (2003) qui considèrent l’enseignant en situation de travail.

Pour recueillir les performances et les traces écrites des élèves, les huit classes ont été soumises à un pré-test puis à un post-test composés chacun des mêmes 13 problèmes à données numériques.

Les contenus des enregistrements vidéoscopés des séances d’enseignement de résolution de problèmes ont donné lieu à des traitements finalisés par des transcriptions. Les paroles audibles des enseignants et des élèves y sont intégralement rapportées. Pour les enregistrements vidéoscopés, les principales actions non mentionnées à travers les paroles des enseignants mais parfaitement identifiables lors de l’enregistrement vidéoscopé ont été décrites. Ces actions concernent par exemple la place de l’enseignant dans la classe, ou bien l’usage du tableau, ou bien le déplacement d’élèves dans la salle de classe.

Pour analyser les données relatives aux performances des élèves, nous avons eu recours aux tests statistiques : test du χ^2 pour l’indépendance des variables, test du χ^2 pour l’adéquation des distributions des variables, test de Student pour l’égalité des moyennes, test de Fisher-Snedecor pour l’égalité des variances.

Notons que dans un avenir proche, suite à cette thèse, nous envisageons d'élargir la gamme des outils statistiques mis au service de notre propos et d'étudier nos données à l'aide des méthodes d'analyse statistique implicative (Gras, 1992) afin de compléter nos résultats.

Pour analyser les données relatives aux pratiques des enseignants, nous avons d'une part utilisé une approche de type quantitatif pour traiter les données issues du questionnaire, d'autre part essayé de donner une vision de type qualitatif pour traiter celles issues des transcriptions des différents enregistrements.

L'inventaire détaillé des supports utilisés pour construire les données figure ci-après :

- **Questionnaire-enseignants**

8 questionnaires ont été remplis. Chaque questionnaire comprend 10 thèmes et 89 items.

- **Enregistrements vidéoscopés**
  - *Séances de type n°1*

	Classes						
	N°2	**N°3**	**N°4**	**N°5**	**N°6**	**N°7**	**N°8**
Durée Enregistrement	64min. 54sec.	81min. 20sec.	89min. 13sec.	51min. 40sec.	76min. 34sec.	58min. 35sec.	46min. 18sec.
Nb Items	407	519	1007	421	763	425	396

Tableau 51 : ***Inventaire des enregistrements vidéoscopés des séances de type n°1***

Un total de 7h 48 min. 34 sec. d'enregistrement et de transcription représentant 3938 items a été réalisé.

  - *Séances de type n°2*

	Classes				
	N°4	**N°5**	**N°6**	**N°7**	**N°8**
Durée Enregistrement	53min. 27sec.	35min. 06sec.	51min. 49sec.	48min. 20sec.	43min. 29sec.
Nb Items	442	215	314	354	288

Tableau 52 : ***Inventaire des enregistrements vidéoscopés des séances de type n°2***

Un total de 3h 52 min. 11sec. d'enregistrement et de transcription représentant 1613 items a été réalisé.

- **Enregistrements sonores des entretiens d'autoconfrontation simple**

	Enseignants des classes						
	N°2	**N°3**	**N°4**	**N°5**	**N°6**	**N°7**	**N°8**
Nb Items	78	144	127	91	86	141	173

Tableau 53 : ***Inventaire des enregistrements sonores des entretiens d'autoconfrontation simple***

Un total de 840 items auxquels il faut ajouter les 309 items de l'entretien d'autoconfrontation croisée qui a clôturé l'expérimentation a été réalisé.

- **Fascicules de tests (pré-test et post-test)**

274 livrets de 13 problèmes ont été recueillis.

2.3. Population-élèves et sa représentation

L'expérimentation décrite ici a pris appui sur un ensemble d'investigations effectuées au cours de l'année scolaire 2000-2001, dans le cadre de notre DEA (Priolet, 2001). Un tirage aléatoire de 5 classes de cycle 3 de la circonscription de Montluçon 2 avait permis de tester la méthode de travail envisagée pour la présente recherche.

2.3.1. Description et représentativité de l'échantillon-élèves

2.3.1.1. Description de l'échantillon

Le tableau 54 présente les variables retenues pour caractériser notre échantillon.

Colonne	Libellé	Observations
1	Individus	Les 137 individus sont identifiés par les codes suivants Ind 001, Ind 002, …, Ind 137
2	Groupe	Il s'agit du groupe d'appartenance pour l'expérimentation. Le groupe-témoin est codé 1. Il regroupe les classes codées de 1 à 4. Le groupe-expérimental est codé 2. Il regroupe les classes codées de 5 à 8.
3	Classe	La classe d'appartenance de chaque individu est codée de 1 à 8.
4	Sexe	Le sexe masculin est codé par 1. Le sexe féminin est codé par 2.
5	Date de naissance	La date de naissance est codée par le triplet 00/00/00 correspondant à jour/mois/année (de naissance).
6	Résultat aux évaluations nationales CE2 (Champ M2)	Il s'agit du pourcentage de réussite au champ M2 des évaluations nationales CE2 de septembre 2002. Le champ M2 correspond aux 13 items de « Traitement de l'information - Résolution de problèmes » (Voir annexe 31).

Tableau 54 : ***Codage des caractéristiques des élèves***

Pour l'expérimentation, huit classes de CE2 ont été tirées au sort parmi les dix classes possibles de la circonscription de Montluçon 2. Au total, 158 élèves étaient inscrits dans ces 8 classes. Cependant, les données quantitatives recueillies ne concernent que les 137 élèves ayant effectué à la fois le pré-test et le post-test de notre expérimentation.

2.3.1.2. Représentativité de l'échantillon-élèves

Nous étudierons la représentativité de cet échantillon par rapport aux variables suivantes : sexe, âge, résultats au champ M2 des évaluations nationales CE2. Le tableau 55 présente la répartition des élèves par classe.

Groupes	Classes	Nb. Él. inscrits	Nb. Él. retenus
GT	**1**	18	17
	2	20	19
	3	21	17
	4	18	12
GE	**5**	19	18
	6	23	19
	7	15	15
	8	24	20
	Total	158	137

Tableau 55 : ***Effectif de notre échantillon : répartition par classe***

2.3.1.2.1. Représentativité de notre échantillon-élèves par rapport à la variable *Sexe*

Notre échantillon se compose de 76 garçons et 61 filles.

Au niveau national, les pourcentages de garçons et de filles sont respectivement de 51,2% et 48,8%[148].

Nous constituons un échantillon E de 137 élèves suivant exactement la proportion nationale *Garçons / Filles* relevée dans la population. Nous obtenons la composition suivante de E : 70 garçons et 67 filles

	Garçons	Filles
Effectifs observés	76	61
Effectifs théoriques espérés	70	67

Tableau 56 : ***Répartition par sexe***

Pour comparer notre distribution empirique à la distribution théorique de l'échantillon E, nous utilisons le test d'adéquation du χ^2. Comme à l'habitude, on nomme H_0 l'hypothèse nulle et H_1 l'hypothèse alternative :

En application du test d'adéquation du χ^2**,** nous obtenons la conclusion suivante : la valeur empirique de la statistique du χ^2 de 1,05 est inférieure à la valeur théorique $\chi^2_{H0}(0{,}01 ; 1) = 6{,}63$.

On en déduit que l'on ne rejette pas H_0 au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu.

On peut considérer que la distribution de fréquence des *Sexes* sur notre échantillon n'est pas significativement différente de celle relevée dans la population. Ainsi, notre échantillon est représentatif au sens de modèle réduit de la population.

[148] National : *Chiffres Elémentaire public France métropolitaine 2006* (estimation) 51,2% G et 48,8% F (MEN, Repères et références statistiques Août 2007)

2.3.1.2.2. Représentativité de notre échantillon-élèves par rapport à la variable *Âge*

Notre échantillon se compose de 13 élèves nés en 1993 ; 118 élèves nés en 1994 et de 6 élèves nés en 95.

On considère comme étant *à l'heure* les élèves nés en 1994, c'est-à-dire n'ayant jamais redoublé et ayant suivi toutes les classes jusqu'à l'entrée en CE2.

Ceux ayant redoublé au moins une fois sont considérés comme étant *en retard* : ce sont les élèves nés en 1993 et avant.

Ceux n'ayant pas suivi toutes les classes sont considérés comme *en avance* : ce sont les élèves nés en 1995 ou après.

Au niveau national, 16,5% d'élèves sont considérés comme étant *en retard*, 81,7% comme étant *à l'heure* et 1,8% comme étant *en avance*.

Nous constituons un échantillon E de 137 élèves, suivant exactement la répartition nationale des élèves en fonction de leur âge. Nous obtenons la composition suivante de E : 23 élèves *en retard* ; 112 élèves *à l'heure* et 2 élèves *en avance*.

	En retard	**À l'heure**	**En avance**
Effectifs observés	13	118	6
Effectifs théoriques espérés	23	112	2

Tableau 57 : ***Répartition par âge***

Pour comparer notre distribution empirique à la distribution théorique de l'échantillon E, nous utilisons le test d'adéquation du χ^2. Comme à l'habitude, on nomme H_0 l'hypothèse nulle et H_1 l'hypothèse alternative :

En application du test d'adéquation du χ^2, nous obtenons la conclusion suivante : la valeur empirique de la statistique du χ^2 de 12,67 est supérieure à la valeur théorique χ^2_{H0} (0,01 ; 2) = 9,21.

On en déduit que l'on peut rejeter H_0 au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$. On peut considérer que la distribution de fréquence des *Âges* sur notre échantillon est significativement différente de celle relevée dans la population. Ainsi, notre échantillon n'est pas représentatif au sens de modèle réduit de la population. Cette non-représentativité introduit deux biais : une sous-représentation des élèves *en retard* et une sur-représentation des élèves *en avance*.

2.3.1.2.3. Représentativité de notre échantillon-élèves par rapport à la variable *Champ M2*

Les données relatives à la variable *Champ M2* figurent dans le tableau 58.

	Moyenne	**Écart-type**
Notre échantillon	60,2	20,3
Données nationales	59,9	20,4

Tableau 58 : ***Caractéristiques du Champ M2***

La comparaison de la moyenne et de l'écart-type caractérisant les données nationales et notre échantillon permettent de conclure à la représentativité de notre échantillon quant aux performances obtenues au Champ M2. La proximité des résultats est telle qu'il n'est pas nécessaire de mettre en œuvre un test statistique.

2.3.2. Constitution des groupes GT et GE. Homogénéité de GT, GE et des classes

2.3.2.1. Constitution des deux groupes GT et GE

Notre échantillon-élèves issu de huit classes composées strictement d'élèves de CE2, a été scindé en deux groupes par tirage au sort des classes :

- 4 classes pour le groupe-témoin (GT) (Classes n^{os} 1 à 4).
- 4 classes pour le groupe-expérimental (GE) (Classes n^{os} 5 à 8).

Pour chacun des deux groupes, nous présentons successivement la répartition observée suivant le genre (garçon ou fille), la date de naissance, le niveau donné par les performances aux évaluations nationales CE2.

2.3.2.2. Homogénéité du GT et du GE par rapport à la variable *Sexe*

Le tableau 59 indique la répartition au sein de chaque groupe.

	Groupe-témoin		**Groupe-expérimental**		**Total**	
	Effectifs (sur 65)	%	**Effectifs (sur 72)**	%	**Effectifs (sur 137)**	%
Garçons	43	66,15	33	45,83	76	55,47
Filles	22	33,85	39	54,17	61	44,53

Tableau 59 : ***Répartition par sexe et par groupe***

L'effectif total de 137 élèves comprend 44,5% de filles et 55,5% de garçons.

Les pourcentages de filles et de garçons sont respectivement de 33,8% et 66,2% pour le groupe-témoin, et de 54,2% et 45,8% pour le groupe-expérimental.

Pour tester l'homogénéité de GT et de GE par rapport à la variable *Sexe des élèves*, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0 l'hypothèse d'homogénéité selon la variable *Sexe des élèves* et H_1 l'hypothèse alternative d'hétérogénéité.

En application du test d'homogénéité du χ^2, nous obtenons la conclusion suivante : la valeur empirique de la statistique du χ^2 de 5,71 est inférieure à la valeur théorique χ^2_{H0} (0,01 ; 1) = 6,63.

On en déduit que l'on ne rejette pas H_0, l'hypothèse d'homogénéité selon la variable *Sexe des élèves*, au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu.

On peut considérer que le groupe-témoin et le groupe-expérimental sont homogènes par rapport à la variable *Sexe des élèves*.

2.3.2.3. Homogénéité des classes par rapport à la variable *Sexe*

Le tableau 60 indique la répartition au sein de chaque classe.

	Classe	Masculin		Féminin	
		Effectifs	%	Effectifs	%
GT	1	11/17	64,71	6/17	35,29
	2	13/19	68,42	6/19	31,58
	3	11/17	64,71	6/17	35,29
	4	8/12	66,67	4/12	33,33
GE	5	9/18	50,00	9/18	50,00
	6	10/19	52,63	9/19	47,37
	7	7/15	46,67	8/15	53,33
	8	7/20	35,00	6/17	35,29
	Effectif total	76/137	55,47	61/137	44,53

Tableau 60 : ***Répartition par sexe et par classe***

Le calcul des pourcentages de garçons variant de 35,0% (classe 8) à 68,4% (classe 2) et des pourcentages de filles variant de 31,6% (classe 2) à 65,0% (classe 8) révèle une forte hétérogénéité entre les huit classes de l'échantillon par rapport à la variable *Sexe*.

2.3.2.4. Homogénéité du GT et du GE par rapport à la variable *Âge*

Le tableau 61 présente pour le GT et pour le GE la répartition par année et période de naissance des 137 élèves. Afin de différencier les élèves nés en début et en fin d'année, nous avons scindé l'année 1994 en deux semestres. Les élèves nés en 1993 ou avant et les élèves nés en 1995 ont fait l'objet de deux catégories différentes.

Né(e)	Situation	Groupe-témoin		Groupe-expérimental		Total	
		Effectifs (sur 65)	%	Effectifs (sur 72)	%	Effectifs (sur 137)	%
En 1993 ou avant	En retard	6	9,23	7	9,72	13	9,49
Dans la période du 01/01/94 au 30/06/94	À l'heure	25	38,46	35	48,61	60	43,79
Dans la période du 01/07/94 au 31/12/94	À l'heure	31	47,69	27	37,50	58	42,34
En 1995	En avance	3	4,62	3	4,17	6	4,38

Tableau 61 : ***Répartition par âge et par groupe***

Le tableau 61 révèle que le groupe-expérimental est globalement plus âgé que le groupe-témoin (58,3% d'élèves nés en 1993 ou au premier semestre 1994 pour le groupe-expérimental vs 48,7% pour le groupe-témoin).

Pour tester l'homogénéité de GT et de GE par rapport à la variable *Âge des élèves*, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0 l'hypothèse d'homogénéité selon la variable *Âge des élèves* et H_1 l'hypothèse alternative d'hétérogénéité.

En application du test d'homogénéité du χ^2, nous obtenons la conclusion suivante : la valeur empirique de la statistique du χ^2 de 1,67 est inférieure à la valeur théorique χ^2_{H0} (0,01 ; 3) = 11,34.

On en déduit que l'on ne rejette pas H_0, l'hypothèse d'homogénéité selon la variable *Âge des élèves*, au niveau de risque α = 0,01. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu.

On peut considérer que le groupe-témoin et le groupe-expérimental sont homogènes par rapport à la variable *Âge des élèves*.

2.3.2.5. Homogénéité des classes par rapport à la variable *Âge*

Le tableau 62 présente les effectifs par âge et par classe.

	Classe	Né(e) en 1993 ou avant		Né(e) dans la période du 01/01/94 au 30/06/94		Né(e) dans la période du 01/07/94 au 31/12/94		Né(e) en 1995	
		Effectifs	%	Effectifs	%	Effectifs	%	Effectifs	%
GT	1	1/17	5,88	9/17	52,94	7/17	41,18	0/17	0,00
	2	1/19	5,26	9/19	47,37	8/19	42,11	1/19	5,26
	3	2/17	11,76	3/17	17,65	10/17	58,82	2/17	11,76
	4	2/12	16,67	4/12	33,33	6/12	50,00	0/12	0,00
GE	5	3/18	16,67	7/18	38,89	8/18	44,44	0/18	0,00
	6	2/19	10,53	13/19	68,42	4/19	21,05	0/19	0,00
	7	2/15	13,33	6/15	40,00	4/15	26,67	3/15	20,00
	8	0/20	0,00	9/20	45,00	11/20	55,00	0/20	0,00

Tableau 62 : ***Répartition par âge et par classe***

Dans deux classes, la répartition par âge est fortement contrastée. La classe n°3 compte 7 élèves sur 10 (70,58%) nés après le 30 juin 1994, tandis que la classe n°6 compte près de 8 élèves sur 10 (78,95%) nés avant le 1er juillet 1994.

2.3.2.6. Homogénéité du GT et du GE par rapport aux performances au *champ M2* des évaluations nationales CE2 de septembre 2002

Le tableau 63 présente la répartition par groupe des moyennes des performances aux évaluations nationales (Champ M2).

Rappelons que le champ M2 correspond à *Traitement des données – Résolution de problèmes*. Les 13 items qui composent ce champ figurent en annexe 31.

Champ M2	Groupe-témoin	Groupe-expérimental	Ensemble des élèves
Moyenne	58,10	62,06	60,18
Écart-type	18,83	21,57	20,34

Tableau 63 : ***Moyenne et écart-type par groupe aux évaluations nationales CE2 (Champ M2)***

Le tableau 63 indique que la moyenne du groupe-témoin est de 58,10. Elle est ainsi inférieure de 3,96 à celle du groupe-expérimental, et de 2,08 à celle de l'ensemble des 8 classes.

Les deux échantillons GT et GE sont indépendants : nous testons l'égalité des variances entre le groupe-expérimental et le groupe-témoin en utilisant le test de Fisher-Snedecor.

Pour tester l'égalité des variances entre le GT et le GE, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0 l'hypothèse d'égalité des variances et H_1 l'hypothèse alternative.

En application du test de Fisher-Snedecor, nous obtenons la conclusion suivante : la valeur empirique de la statistique F de 1,16 est inférieure à la valeur théorique $F_{H0}(0{,}01 ; 64 ;71) = 1{,}77$.

On en déduit que l'on ne rejette pas H_0, l'hypothèse d'égalité des variances au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de $2^{ème}$ espèce β de niveau inconnu.

Nous testons l'égalité des moyennes entre le groupe-expérimental et le groupe-témoin en utilisant le test statistique t de Student pour échantillons indépendants.

Pour tester l'égalité des moyennes entre le GT et le GE, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0 l'hypothèse d'égalité des moyennes et H_1 l'hypothèse alternative.

En application du test de Student, nous obtenons la conclusion suivante : la valeur empirique de la statistique t de 1,14 est inférieure à la valeur théorique $t(0{,}01 ; 135) = 2{,}61$.

On en déduit que l'on ne rejette pas H_0, l'hypothèse d'égalité des moyennes au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de $2^{ème}$ espèce β de niveau inconnu.

Nous pouvons conclure à l'homogénéité du GT et du GE par rapport aux performances au *champ M2* des évaluations nationales CE2 de septembre 2002.

2.3.2.7. Homogénéité des classes par rapport aux performances au *champ M2* des évaluations nationales CE2 de septembre 2002.

Les données relatives à la variable *Champ M2* au sein de chaque classe figurent dans le tableau 64.

Classe	Moyenne	Écart-type
1	66,1	16,8
2	53,9	16,2
3	54,3	23,6
4	59,0	16,2
5	55,1	18,9
6	61,9	27,2
7	59,0	18,5
8	70,8	18,3

Tableau 64 : ***Caractéristiques du « Champ M2 » au sein de chaque classe***

Pour chaque classe de notre échantillon, la comparaison de la moyenne et de l'écart-type caractérisant les données relatives à la variable *Champ M2* ne permettent pas de conclure à l'homogénéité des classes par rapport à cette variable *Champ M2*. En effet, la répartition moyenne des performances au *Champ M2* des évaluations nationales CE2 de septembre 2002 s'étend de 53,9 pour la classe n°2 à 70,8 pour la classe n°8.

En conclusion, par rapport aux performances au *Champ M2* des évaluations nationales 2002, nous pouvons conclure à l'homogénéité du GT et du GE mais pas à celle des classes.

2.3.3. Constitution et recueil de données sur les apprentissages des élèves

2.3.3.1. Codage des modalités de validité des réponses des élèves aux 12 problèmes

Chaque élève de l'échantillon a participé à deux tests : un pré-test qui s'est déroulé en janvier et un post-test qui s'est déroulé en juin de la même année scolaire.

Le pré-test et le post-test étaient composés strictement des mêmes problèmes. Toutes les passations ont eu lieu avec 13 problèmes. Cependant, l'ambiguïté inhérente à l'énoncé du problème n°4 (annexe 39) nous a conduite à ne traiter que les énoncés des 12 autres problèmes.

Le tableau 65 présente donc le codage des modalités de validité des réponses aux 12 problèmes, le problème n°4 étant exclu du corpus. L'ensemble des données figure en annexes 31 et 32.

Colonne	Libellé	Observations
7 à 18	Degré de performance en janvier aux problèmes n°1 à n°3 et n°5 à n°13	Il s'agit des performances au pré-test (janvier). On distingue 3 modalités[149] pour ces performances : 1 pour Réussite, 2 pour Échec par réponse erronée, 3 pour Échec par Non Réponse.
19 à 30	Degré de performance en juin aux problèmes n°1 à n°3 et n°5 à n°13	Il s'agit des performances au post-test (juin). On distingue 3 modalités pour ces performances : 1 pour Réussite, 2 pour Échec par réponse erronée, 3 pour Échec par Non Réponse.

Tableau 65 : ***Codage des modalités de réponses aux 12 problèmes***

2.3.3.2. Codage des traces écrites intermédiaires

Le tableau 66 présente le codage des traces écrites intermédiaires. L'ensemble des données figure en annexes 33 et 34.

[149] Les réponses sont analysées selon le modèle d'évaluation trimodal développé par Régnier (1983).

Colonne	Libellé	Observations	
31 à 132	Modalités des traces écrites intermédiaires réalisées en janvier aux problèmes n°1 à n°3 et n°5 à n°13	Il s'agit des traces écrites intermédiaires au pré-test (janvier).	Huit modalités ont été retenues pour l'analyse des traces écrites produites par les élèves : Présence d'une ou plusieurs opérations, Adaptation de l'opération au problème posé, Exactitude du résultat de l'opération, Présence d'un dessin, Adaptation du dessin au problème posé, Présence et type de texte, Présence des termes « Solution – Opération », Remarques.
133 à 234	Modalités des traces écrites intermédiaires réalisées en juin aux problèmes n°1 à n°3 et n°5 à n°13	Il s'agit des traces écrites intermédiaires au post-test (juin).	

Tableau 66 : ***Codage des traces écrites intermédiaires***

2.4. Population-enseignants

Notre échantillon-enseignants est composé des 8 enseignants des 8 classes de CE2. Le tableau 67 et 68 présente les variables retenues pour caractériser notre échantillon. Il en ressort que :

- Cet échantillon est constitué uniquement de personnes de sexe féminin.
- Les dates de naissance s'échelonnent entre 1949 et 1975, ce qui signifie que plus d'un quart de siècle sépare l'enseignant le plus jeune de l'enseignant le plus âgé. On retrouve cette différence au niveau de l'ancienneté générale de service qui varie entre 4 et 34 années.
- Quant au nombre d'années d'enseignement en classe de CE2, il est inférieur à 5 pour la moitié des enseignants et varie entre 6 et 13 pour l'autre moitié.
- L'échantillon est constitué à parts égales de titulaires d'un baccalauréat littéraire et de titulaires d'un baccalauréat scientifique.
- Cinq enseignants ont suivi un cursus universitaire post-baccalauréat.

	Enseignant dans la classe			
	1	**2**	**3**	**4**
Sexe	F	F	F	F
Année naissance	1949	1969	1959	1951
Série Bac	A	A	D	D
Dominante	Littéraire	Littéraire	Scientifique	Scientifique
Diplômes universitaires		Licence Psychologie	Licence	Maîtrise Physiologie
Ancienneté Générale de Service	34	8	16	20
Années d'enseignement en CE2	1	1	8	6

Tableau 67 : ***Caractéristiques de l'échantillon-enseignants (Classes n^{os} 1 à 4)***

	Enseignant dans la classe			
	5	**6**	**7**	**8**
Sexe	F	F	F	F
Année naissance	1967	1969	1975	1960
Série Bac	B	B	C	D
Dominante	Scientifique	Littéraire	Littéraire	Scientifique
Diplômes universitaires		DUT techniques de communication DUT gestion des entreprises et administrations	Licence Physique	
Ancienneté Générale de Service	13	11	4	16
Années d'enseignement en CE2	4	7	2	13

Tableau 68 : ***Caractéristiques de l'échantillon-enseignants (Classes n^{os} 5 à 8)***

2.4.1. Construction des données sur les pratiques des enseignants

Les données construites relatives aux pratiques des enseignants sont issues de l'analyse d'un questionnaire et de celle des transcriptions des enregistrements vidéoscopés et d'autoconfrontation.

2.4.1.1. Construction du questionnaire

Préalablement à l'investigation au sein de la classe, un questionnaire écrit a été soumis à chaque enseignant dans le but de recueillir des données relatives aux items suivants :

- Identification de l'enseignant
- Parcours professionnel
- L'enseignant et les mathématiques
- Outils de l'élève
- Préparation de la classe
- Conduite de la classe
- Affichages de la classe
- Technologies de l'Information et de la Communication
- Une séquence de résolution de problèmes numériques
- Le travail à long terme

L'ensemble des données recueillies figure en annexe 35.

2.4.1.2. Réalisation des transcriptions des enregistrements vidéoscopés des séances de résolution de problèmes

Chaque enregistrement vidéoscopé a donné lieu à une transcription dactylographiée présentée sous forme de tableau introduit par le numéro de la séance, le numéro de la classe et le jour de l'enregistrement. Un exemple de transcription figure dans le tableau 69. L'intégralité des éléments relatifs aux différentes séances observées figure en annexe 36.

Chaque transcription de séance revêt la forme d'un découpage en items numérotés (colonne n°1), chaque début d'item étant repéré par le relevé d'un compteur en minutes et secondes (colonne n°2) et chaque changement d'item correspondant à une rupture occasionnée par un silence ou par un changement d'interlocuteur.

Transcription de séance
Séance : n°1
Classe : n°6
Date : 19/11/2002

Item	**Temps**	**Locuteur**	
1	00.00	Ens.→Cl.	*(L'enseignant distribue une feuille comportant 5 problèmes à chaque élève de la classe.)*
2	00.39	Ens.→Cl.	Vous marquez le nom, le prénom et la date.
3	00.42	Ens.→Él.	(Un élève pose une question inaudible.)
4	00.44	Ens.→Él.	Mais oui en lettres, …ordinaires.
5	01.59	Ens.→Cl.	On va le lire d'abord.
6	02.02	Ens.→Cl.	Ça y est ?
7	02.18	Ens.→Él.	Alexandre, tu nous lis le premier exercice ? Premier problème.
8	02.20	Alexandre	*(Alexandre reste silencieux.)*
9	02.28	Ens.→Él.	Alexandre, est-ce que tu peux lire le premier problème ?
10	02.31	Alexandre	L'infirmière mesure 5 enfants : Jean 122 cm, Luc 1m 12 cm, Yann 1m 05 cm, Léa 109 cm, Lise 1m 15 cm. Classe-les du plus petit au plus grand.

Tableau 69 : ***Extrait d'une transcription de séance de résolution de problèmes***

L'intégralité des paroles audibles prononcées par l'enseignant ou par un groupe d'apprenants ou par un seul apprenant figure en colonne n°4. Les noms des émetteurs et des récepteurs des paroles sont indiqués en colonne n°3, par exemple [Ens. → Cl.] signifie que l'enseignant s'adresse au groupe-classe. L'indication d'un seul prénom signifie qu'il s'agit de la prise de parole d'un apprenant, en réponse soit à une question lui étant directement posée, soit à une question collective à laquelle il a souhaité répondre.

L'indication de « Élèves » signifie qu'un groupe d'élèves s'exprime oralement.

Les principales actions de l'enseignant ou des élèves, identifiables lors du visionnement du film, sont précisées en italique en colonne n°4, par exemple [*Mathilde montre un dictionnaire*] ou [*L'enseignant se rend au tableau noir pour la phase de correction*].

2.4.1.3. Réalisation des transcriptions des enregistrements sonorisés des entretiens d'autoconfrontation

De la même façon que pour les enregistrements vidéoscopés des séances de résolution de problèmes, les enregistrements sonorisés des entretiens d'autoconfrontation[150] ont donné lieu à des transcriptions dactylographiées des paroles audibles. Ces transcriptions sont présentées sous la forme de tableaux, dont un extrait figure ci-après et dont l'intégralité figure en annexe 37.

[150] Voir Partie 3 – Paragraphe 2.2. – *Méthodes et techniques.*

Item	Locuteur	
4	Ens. n°3	Je pense qu'une des premières compétences est de pouvoir lire l'énoncé et le comprendre, savoir faire un tri des informations, savoir les utiliser et les gérer dans la résolution puisque le but est d'arriver à une solution, et ensuite tout ce qui va concerner les compétences liées aux techniques opératoires, parce que s'ils ne les connaissent pas il va de soi qu'on n'a pas grand chose.
5	Anim.	Ens. n°4 ? Avez-vous des choses à ajouter ?
6	Ens. n°4	Ecrire des phrases - réponses, communiquer ses résultats. Ce peut être aussi bien oral que écrit puisque dans certaines interventions, les enfants sont amenés à présenter leur propre démarche, donc savoir présenter leur recherche face aux autres, mais ce n'est peut-être pas trop un problème.
7	Anim.	Peut-être pouvez-vous préciser, Ens. n°3, ce que vous entendez par technique opératoire.
8	Ens. n°3	C'est-à-dire que si les problèmes relèvent d'une addition, il faut quand même qu'ils sachent faire une addition, s'ils relèvent d'une soustraction, il faut qu'ils connaissent les opérations.

Tableau 70 : ***Extrait de l'entretien d'autoconfrontation final***

Sept transcriptions ont été réalisées correspondant aux sept entretiens d'autoconfrontation conduits, auxquels s'ajoute l'entretien d'autoconfrontation croisée réalisé à la fin de l'expérimentation (Annexe 38).

2.5. Expérimentation

Nous détaillerons successivement les contenus du pré-test et du post-test ainsi que le protocole de passation retenu pour présenter ensuite les modalités d'opérationnalisation du cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$.

2.5.1. Les problèmes à résoudre lors du pré-test et du post-test

2.5.1.1. Le contenu du livret d'énoncés de problèmes

En liaison avec notre étude longitudinale et dans un souci de cohésion avec les programmes de l'école élémentaire, nous avons centré principalement nos travaux sur les problèmes de type multiplicatif. Cependant, afin d'observer les résultats lors de la résolution de problèmes plus complexes nécessitant la détermination d'étapes intermédiaires, nous avons introduit des problèmes relevant à la fois du type additif et du type multiplicatif.

Une batterie d'énoncés de problèmes a ainsi été élaborée en vue d'évaluer, avant et après l'expérimentation, les compétences des élèves dans la résolution :

- de problèmes de type multiplicatif relevant de la proportionnalité simple ou d'une comparaison multiplicative de grandeurs.
- de problèmes de types additif et multiplicatif nécessitant la détermination d'étapes intermédiaires.

En nous référant aux travaux de Vergnaud (1990), nous avons situé les treize[151] problèmes dans des domaines proches de l'expérience quotidienne des enfants : achats divers pour les problèmes pouvant être traités directement par une multiplication, dimensions d'un jouet pour le problème de comparaison multiplicative et situations scolaires ou d'achats pour les problèmes nécessitant le passage par des étapes intermédiaires.

La place de la question ayant une influence sur la performance à résoudre le problème (Fayol, 1986), il nous a paru judicieux d'éliminer la variable *place de la question*. Les treize énoncés choisis comportent donc leur question en position finale.

En prenant pour cadre de référence la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990)[152], deux ensembles de problèmes sont constitués : l'ensemble des problèmes à structure strictement multiplicative et l'ensemble des problèmes nécessitant la détermination d'étapes intermédiaires.

2.5.1.1.1. Les problèmes à structure strictement multiplicative

Un premier ensemble comprend sept problèmes relevant strictement des structures multiplicatives. Compte tenu du fait que notre étude se déroule auprès d'élèves de première année du cycle des approfondissements (CE2), cet ensemble n'inclut toutefois que deux des structures catégorisées par Vergnaud : la proportionnalité simple (six problèmes) et la comparaison multiplicative de longueurs (un problème).

2.5.1.1.1.1. Six problèmes de proportionnalité simple

En nous référant au cadre théorique développé par Vergnaud (1997), nous rappelons brièvement qu'il distingue quatre grandes classes de problèmes de proportionnalité simple qu'il caractérise par l'existence de deux domaines de grandeurs unis par une relation multiplicative :

grandeur 1	grandeur 2
a	c
b	d

- Les problèmes qui relèvent directement d'une multiplication.
- Les problèmes de division-partition dans lesquels on recherche la valeur d'une part ou d'un objet.
- Les problèmes de division-quotition dans lesquels on recherche un nombre de parts ou d'objets.
- Les problèmes dans lesquels on recherche la quatrième proportionnelle.

[151] Rappel : l'ambiguïté inhérente à l'énoncé du problème n°4 (annexe 39) nous a conduite, lors de l'exploitation des résultats à ne traiter que les énoncés des 12 autres problèmes.
[152] Voir tableau récapitulatif des problèmes multiplicatifs en annexe n°2

En prenant pour exemples les problèmes cités dans le Moniteur de mathématiques (Vergnaud, 1997), nous avons élaboré six énoncés de problèmes de proportionnalité simple (annexe 42).

Les énoncés n° 1 et n° 8 renvoient à des problèmes relevant directement de la ***multiplication***.

		Exemples donnés par Vergnaud (1997)	**Problèmes rédigés pour pré-test et le post-test**
Proportionnalité simple	**La multiplication**	Josie achète 4 gâteaux. Le prix d'un gâteau est 7 francs. Combien doit-elle payer ? gâteaux | dépenses 1 | 7 4 | $\boxed{?}$ multiplication	**Énoncé n°1** Julien achète 4 livres. Le prix d'un livre est 7 euros. Combien doit-il payer ? **Énoncé n°8** Pauline range ses cassettes. Elle compose 4 lots de 7 cassettes. Combien a-t-elle de cassettes ?

Tableau 71 : ***Problèmes relevant de la multiplication (énoncés n^{os} 1 et 8)***

Dans l'énoncé n°1, le passage par l'unité est explicite (le prix d'un livre est 7 euros) tandis que, à partir de l'énoncé n°8, l'apprenant doit inférer que l'expression *4 lots de 7 cassettes* peut être identifiée à *Il existe 4 lots de cassettes. Chaque lot compte 7 cassettes.* Nous avons opté pour deux énoncés, comportant les mêmes données numériques, pour repérer s'il existait des invariants et des points divergents entre les procédures identifiables mises en œuvre par les élèves pour résoudre ces deux problèmes.

Les énoncés n°3, n°6 et n°13 renvoient à des problèmes de ***division***.

		Exemples donnés par Vergnaud (1997)	**Problèmes rédigés pour pré-test et le post-test**
Proportionnalité simple	**La division-partition (recherche de la valeur d'une part ou d'un objet)**	Arthur a payé 30 francs pour 6 agates bleues. Quel est le prix d'une agate ? agates | dépenses 1 | $\boxed{?}$ 6 | 30 division-partition recherche de la valeur d'une part ou d'un objet	**Énoncé n°6** Yann a payé 30 euros pour 6 voitures miniatures. Quel est le prix d'une voiture miniature ?
	La division-quotition (recherche du nombre de parts, ou d'objets)	Bernard veut acheter des agates. Il dispose de 40 francs. Une agate coûte 5 francs. Combien peut-il en acheter ? agates | dépenses 1 | 5 $\boxed{?}$ | 40 division-quotition recherche du nombre de parts, ou d'objets	**Énoncé n°3** Un savon coûte 5 euros. Quel est le nombre de savons que Sophie peut acheter avec 40 euros ? **Énoncé n°13** Les pommes sont vendues par sacs de 5 kg. Quel est le nombre de sacs nécessaires pour acheter 40 kg de pommes?

Tableau 72 : ***Problèmes relevant de la division (énoncés n^{os} 6, 3 et 13)***

Les énoncés n°3 et n°13 demandent de rechercher une quantité (une quantité de savons pour le n°3, une quantité de sacs de pommes pour le n°13) à partir du montant total et de la valeur de l'unité. L'énoncé n°6 demande, lui, de rechercher le prix d'un objet. Le prix total et le nombre d'objets sont connus. Notre but est de repérer si les élèves utiliseront les mêmes procédures pour résoudre ces trois problèmes, par exemple des procédures de division ou de multiplication à trous ou bien s'ils passeront par des registres iconiques qui pourraient leur permettre de comprendre que dans le problème n°6 on ne peut soustraire 6 à 30, c'est-à-dire des voitures à des prix.

L'énoncé n°10 renvoie à un problème de recherche de la quatrième proportionnelle.

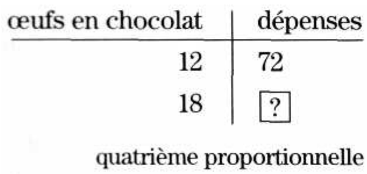
<table>
<tr><th></th><th></th><th>Exemples donnés par Vergnaud (1997)</th><th>Problèmes rédigés pour pré-test et le post-test</th></tr>
<tr><td>Proportionnalité simple</td><td>La quatrième proportionnelle</td><td>Marie-Hélène a payé 72 francs pour 12 œufs en chocolat. Sa cousine Sophie veut en acheter 18. Combien va-t-elle payer ?

œufs en chocolat | dépenses
12 | 72
18 | ?
quatrième proportionnelle</td><td>Énoncé n°10
Julie a payé 20 euros pour 4 œufs en chocolat. Sa cousine Estelle veut en acheter 6. Combien Estelle va-t-elle payer ?</td></tr>
</table>

Tableau 73 : ***Problème relevant de la quatrième proportionnelle (énoncé n°10)***

Le prix de l'unité n'est pas mentionné. Soit l'apprenant passe par le calcul du prix de l'unité, soit il utilise d'autres procédures pour trouver la valeur de 6 œufs.

2.5.1.1.1.2. Un problème relevant de la comparaison multiplicative de grandeurs

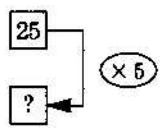
<table>
<tr><th></th><th></th><th>Exemples donnés par Vergnaud (1997)</th><th>Problèmes rédigés pour pré-test et le post-test</th></tr>
<tr><td>Comparaison multiplicative</td><td>Comparaison multiplicative de grandeurs</td><td>Il y a 5 fois plus de chaises à la cantine que dans la classe. Il y en a 25 dans la classe. Combien y a-t-il de chaises à la cantine ?

</td><td>Énoncé n°11
La voiture miniature de Lucas mesure 8 cm de long. La vraie voiture représentée par cette petite voiture est 50 fois plus grande. Quelle est la longueur de la voiture réelle ?</td></tr>
</table>

Tableau 74 : ***Problème relevant de la comparaison multiplicative de grandeurs (énoncé n°11)***

Dans l'énoncé n°11, on a une comparaison sous forme multiplicative (50 fois plus grande). La résolution de ce problème doit permettre d'étudier la place accordée aux traitements (certains élèves resteront-ils dans le registre numérique en utilisant une unique addition ?) et celle accordée aux conversions (certains élèves s'affranchiront-ils du registre numérique en s'aidant d'une représentation iconique ?) dans les procédures mises en œuvre par les élèves.

2.5.1.1.1.3. Les problèmes nécessitant la détermination d'étapes intermédiaires

Le second ensemble est composé de six problèmes dont la résolution nécessite un passage par des étapes intermédiaires. L'énoncé de l'un d'entre eux (le n°4), ambigu dans sa rédaction, ne sera pas utilisé directement dans le cadre de la présente étude.

	Problèmes rédigés pour le pré-test et le post-test
Calculs intermédiaires	**Énoncé n°7** Elsa a une pochette de 20 photos et 2 albums remplis chacun de 60 photos. Combien de photos possède Elsa ?
	Énoncé n°12 Une classe compte 27 élèves. Le maître distribue trois cahiers par élève. Il lui reste 19 cahiers. Combien le maître avait-il de cahiers avant cette distribution ?
	Énoncé n°2 Julien achète 4 livres. Le prix d'un livre est 7 euros. Au rayon des surgelés, les escargots coûtent 4 euros la douzaine, les petits pois 12 euros le kg et les framboises 6 euros le kg. Manon achète 12 escargots et 4 kg de petits pois. Combien a-t-elle dépensé ?
	Énoncé n°9 Le maître a 3 sacs de 8 billes. Il veut répartir les billes entre Paul et Léa , de façon à ce que Léa ait autant de billes que Paul. Combien le maître donnera-t-il de billes à chacun des deux élèves ?
	Énoncé n°4 Laurie a acheté deux livres à 14 euros. Elle a payé avec un billet de 50 euros. Quelle somme lui a-t-on rendue ?
	Énoncé n°5 Le directeur de l'école doit envoyer 87 lettres. Il doit mettre un timbre sur chaque enveloppe. Les timbres sont vendus par carnet de 10 timbres. Combien de carnets doit-il acheter ?

Tableau 75 : ***Problèmes relevant de calculs intermédiaires (énoncés n^{os} 2, 4, 5, 7, 9 et 12)***

Dans les énoncés n° 7, n° 12 et n° 2, il s'agit de réunir deux parties en un tout :

- Les photos de la pochette et les photos des albums (énoncé n°7).
- Les cahiers distribués aux élèves et les cahiers restants (énoncé n°12).
- Le prix des escargots et le prix des petits pois (énoncé n°2).

Ces trois problèmes relèvent du champ conceptuel des structures additives (Vergnaud, 1990). Cependant, les énoncés n° 7 et n° 2 conduisent à rechercher un état final, tandis que l'énoncé n°12 conduit à rechercher l'état initial.

La résolution de ces trois problèmes impose le passage par une étape intermédiaire puisque l'un des termes de la somme du problème additif relève d'une structure multiplicative :

- Le nombre de photos contenues dans les deux albums (énoncé n°7).
- Le nombre de cahiers distribués aux 27 élèves, à raison de 3 cahiers par élève (énoncé n°12).
- Le prix de 4 kg de petits pois (énoncé n°2).

Les énoncés n° 9 et n° 5 renvoient à des problèmes de type multiplicatif dont la résolution nécessite, comme pour les trois problèmes précédents, un passage par une étape intermédiaire :

- Calcul du nombre total de billes, avant d'effectuer le partage équitable entre les deux enfants, c'est-à-dire avant de rechercher la valeur d'une part.
- Calcul du nombre de timbres contenus dans 8 carnets, dans 9 carnets …, avant d'effectuer la comparaison avec le nombre d'enveloppes à timbrer, soit 87.

2.5.1.2. Analyse a priori des 13 problèmes

Les tableaux 76 à 78 précisent l'analyse a priori effectuée pour chacun des 13 problèmes.

Énoncé du problème n°1 :

> *Julien achète 4 livres. Le prix d'un livre est 7 euros.*
> *Combien doit-il payer ?*

Énoncé du problème n°2 :

> *Julien achète 4 livres. Le prix d'un livre est 7 euros. Au rayon des surgelés, les escargots coûtent 4 euros la douzaine, les petits pois 12 euros le kg et les framboises 6 euros le kg.*
> *Manon achète 12 escargots et 4 kg de petits pois. Combien a-t-elle dépensé ?*

Énoncé du problème n°3 :

> *Un savon coûte 5 euros. Quel est le nombre de savons que Sophie peut acheter avec 40 euros ?*

Énoncé du problème n°4

> *Laurie a acheté deux livres à 14 euros. Elle a payé avec un billet de 50 euros. Quelle somme lui a-t-on rendue ?*

Énoncé du problème n°5 :

> *Le directeur de l'école doit envoyer 87 lettres. Il doit mettre un timbre sur chaque enveloppe. Les timbres sont vendus par carnet de 10 timbres.*
> *Combien de carnets doit-il acheter ?*

		Problème n°1	Problème n°2	Problème n°3	Problème n°4	Problème n°5
Énoncé	**Nombre total de phrases**	3	5	2	3	5
	Questions : nombre	1	1	1	1	1
	Questions : place	Fin d'énoncé	Fin d'énoncé	Fin d'énoncé	Fin d'énoncé	Fin d'énoncé
	Nombre total d' « unités - mots »[153]	15	50	19	25	31
	Nombre de données écrites dans le registre numérique	2	7	2	2	2
	Lexique : analyse a priori des difficultés		La douzaine			Chaque, par carnet

		Problème n°1	Problème n°2	Problème n°3	Problème n°4	Problème n°5
Problème	**Structure**	Strictement multiplicative	Complexe (multiplicative et additive)	Strictement multiplicative	Complexe (multiplicative et additive)	Complexe (multiplicative et additive)
	Type	Proportionnalité simple		Proportionnalité simple		
	Opération en jeu	Multiplication		Division-quotition (recherche du nombre d'objets)		
	Recherche de l'état final ou de l'état initial	Etat final	Etat final (avec passage par un calcul intermédiaire)	Etat initial	Etat final (avec passage par un calcul intermédiaire)	Etat final (avec passage par un calcul intermédiaire)
	Données inutiles	Non	Non	Non	Non	Non
	Réponse attendue	28 euros	52 euros	8 savons	22 euros ou 36 euros[154]	9 carnets

Tableau 76 : ***Analyse a priori des problèmes n^{os} 1, 2, 3, 4, 5***

Énoncé du problème n°6 :

> *Yann a payé 30 euros pour 6 voitures miniatures. Quel est le prix d'une voiture miniature ?*

Énoncé du problème n°7 :

> *Elsa a une pochette de 20 photos et 2 albums remplis chacun de 60 photos. Combien de photos possède Elsa ?*

Énoncé du problème n°8 :

> *Pauline range ses cassettes. Elle compose 4 lots de 7 cassettes. Combien a-t-elle de cassettes ?*

[153] Données numériques comprises.
[154] 22 euros si l'on considère : deux livres à 14 euros l'un.
36 euros si l'on considère : deux livres à 14 euros au total.

Énoncé du problème n°9 :

> *Le maître a 3 sacs de 8 billes. Il veut répartir les billes entre Paul et Léa, de façon à ce que Léa ait autant de billes que Paul.*
> *Combien le maître donnera-t-il de billes à chacun des deux élèves ?*

		Problème n°6	**Problème n°7**	**Problème n°8**	**Problème n°9**
Énoncé	**Nombre total de phrases**	2	2	3	3
	Questions : nombre	1	1	1	1
	Questions : place	Fin d'énoncé	Fin d'énoncé	Fin d'énoncé	Fin d'énoncé
	Nombre total d' « unités - mots »[155]	17	21	16	41
	Nombre de données écrites dans le registre numérique	2	3	2	2
	Lexique : analyse a priori des difficultés	Miniatures	Chacun	Compose, lots	répartir, de façon à ce que ait, autant que, chacun

		Problème n°6	**Problème n°7**	**Problème n°8**	**Problème n°9**
Problème	**Structure**	Strictement multiplicative	Complexe (multiplicative et additive)	Strictement multiplicative	Complexe (multiplicative)
	Type	Proportionnalité simple		Proportionnalité simple	
	Opération en jeu	Division-partition (recherche de la valeur d'un objet)	Multiplication et addition	Multiplication	Multiplication, Division-quotition (recherche du nombre d'objets)
	Recherche de l'état final ou de l'état initial	Etat final	Etat final	Etat final	Etat final
	Données inutiles	Non	Non	Non	Non
	Réponse attendue	5 euros	140 photos	28 cassettes	12 billes

Tableau 77 : ***Analyse a priori des problèmes n^{os} 6, 7, 8, 9***

Énoncé du problème n°10 :

> *Julie a payé 20 euros pour 4 œufs en chocolat. Sa cousine Estelle veut en acheter 6. Combien Estelle va-t-elle payer ?*

Énoncé du problème n°11 :

> *La voiture miniature de Lucas mesure 8 cm de long. La vraie voiture représentée par cette petite voiture est 50 fois plus grande. Quelle est la longueur de la voiture réelle ?*

[155] Données numériques comprises.

Énoncé du problème n°12 :

> *Une classe compte 27 élèves. Le maître distribue trois cahiers par élève. Il lui reste 19 cahiers. Combien le maître avait-il de cahiers avant cette distribution ?*

Énoncé du problème n°13 :

> *Les pommes sont vendues par sacs de 5 kg. Quel est le nombre de sacs nécessaires pour acheter 40 kg de pommes ?*

		Problème n°10	**Problème n°11**	**Problème n°12**	**Problème n°13**
Énoncé	**Nombre total de phrases**	3	3	4	2
	Questions : nombre	1	1	1	1
	Questions : place	Fin d'énoncé	Fin d'énoncé	Fin d'énoncé	Fin d'énoncé
	Nombre total d' « unités - mots »[156]	22	32	27	22
	Nombre de données écrites dans le registre numérique	3	2	2	2
	Lexique : analyse a priori des difficultés		Miniature, réelle	Trois cahiers par élève	Par sacs de, nécessaires pour

		Problème n°10	**Problème n°11**	**Problème n°12**	**Problème n°13**
Problème	**Structure**	Strictement multiplicative	Strictement multiplicative	Complexe (multiplicative et additive)	Strictement multiplicative
	Type	Proportionnalité simple	Comparaison multiplicative		Proportionnalité simple
	Opération en jeu	Quatrième proportionnelle	Comparaison multiplicative de grandeurs	Multiplication et addition	Division-quotition (recherche du nombre d'objets)
	Recherche de l'état final ou de l'état initial	Etat final	Etat final	Etat initial (avec passage par un calcul intermédiaire)	Etat initial
	Données inutiles	Non	Non	Non	non
	Réponse attendue	30 euros		100 cahiers	8 sacs

Tableau 78 : ***Analyse a priori des problèmes n^{os} 10, 11, 12, 13***

2.5.2. Le protocole de passation du pré-test et du post-test

Les treize[157] énoncés de problèmes, rassemblés sous la forme d'un livret (annexe 39), ont été proposés de manière strictement identique à la fois pour le pré-test en janvier et pour le post-test en juin.

[156] Données numériques comprises.

La passation a été effectuée par nos soins et sous notre contrôle[158,] en présence de l'enseignant de la classe qui n'était pas autorisé à intervenir.

Le protocole comprend les phases suivantes :

- Distribution du livret (annexe 39).
- Consignes aux élèves : *Vous laissez le livret fermé. Vous ne l'ouvrirez que lorsque je vous le demanderai. Ce matin, vous devez résoudre 13 problèmes. Pour chaque problème, au signal et seulement au signal :*
    - *Vous ouvrirez le livret à la page du problème.*
    - *Je vous indiquerai le temps dont vous disposerez.*
    - *Vous lirez silencieusement l'énoncé et vous résoudrez le problème.*
    - *Vous indiquerez votre réponse dans le cadre. Si vous le souhaitez, vous pouvez faire des recherches dans le cadre, c'est-à-dire que vous pouvez utiliser ce cadre comme un cahier de brouillon. Vous ne devez pas utiliser le crayon de papier, la gomme, effacer, mais vous aurez le droit de raturer.*
    - *Quand vous aurez terminé, vous fermerez le livret et vous attendrez en silence que je donne le signal pour passer au problème suivant.*
    - *Trente secondes avant la fin, je vous annoncerai : Il vous reste 30 secondes.*
    - *Vous n'aurez pas le droit de revenir à un problème précédent, c'est-à-dire de modifier ou de terminer un problème déjà résolu ou commencé.*
- Passation pour les problèmes n°1 à n°6 inclus.
- Pause au cours de laquelle :
    - La page de couverture du livret est renseignée.
    - Des poésies sont récitées par des élèves volontaires.
    - Remarque : pendant ce temps de pause, les élèves ne sont pas autorisés à ouvrir leur livret.
- Passation pour les problèmes n°7 à n°13 inclus.
- Durée du travail. Elle a été étalonnée l'année précédente à partir de la passation auprès d'un échantillon-test d'élèves issus d'un autre secteur géographique. Elle varie en fonction de la longueur de l'énoncé et de la complexité du problème. Les durées figurent dans le tableau 79.

Problème n°	Durée de passation	Problème n°	Durée de passation	Problème n°	Durée de passation
N°1	3 min.	**N°2**	5 min.	**N°3**	3 min.
N°4	3 min.	**N°5**	3 min.	**N°6**	3 min.
N°7	3 min.	**N°8**	2 min.30 sec.	**N°9**	3min.30sec.
N°10	4 min.	**N°11**	3 min.	**N°12**	3 min.30sec.
N°13	3 min.				

Tableau 79 : ***Durées de passation pour les 13 problèmes***

[157] Rappel : l'ambiguïté inhérente à l'énoncé du problème n°4 (annexe 39) nous a conduite, lors de l'exploitation des résultats, à ne traiter que les énoncés des 12 autres problèmes.
[158] Ce contrôle opéré par le chercheur illustre les précautions prises par nos soins, tout au long de la recherche de terrain afin d'assurer une rigueur maximale dans la construction des données en régulant l'homogénéité des conditions de passation.

Les durées de passation sont identiques pour le pré-test et pour le post-test.

- Récupération des livrets par nos soins.
- Consigne donnée aux enseignants : *Ne procédez à aucune correction de ces problèmes, ni maintenant, ni ultérieurement.*

2.5.3. Opérationnalisation de notre cadre didactique : R^2C^2

L'objectif de l'opérationnalisation de notre cadre didactique est de faire accéder les élèves à différents degrés de conceptualisation.

De par la mise à l'épreuve conjointe des quatre principes P1, P2, P3, P4 de notre cadre didactique R^2C^2, il s'agit :

(i) de placer régulièrement l'élève en situation de résoudre des problèmes variés afin qu'il puisse ensuite, devant une classe de situations nouvelles, puiser dans ses ressources et mobiliser des schèmes existants. Nous nous référons ici à la théorie du modèle mental (Johnson-Laird, 1983) et aux travaux de Vergnaud (1990).

Avec la mise en réseau temporelle, nous provoquons des rencontres avec des situations nouvelles à mettre en relation avec des situations rencontrées antérieurement de manière à arriver à identifier des objets, à identifier des propriétés, des relations.

(ii) de dépasser le simple recours à différentes représentations et de provoquer régulièrement une mise en relation de ces représentations qui relève davantage de la conversion que du traitement, au sens employé par Duval (1995, 2005).

C'est par la mise en œuvre de pratiques régulières de changements de registres, dans des situations variées, que l'enseignant pourra faire prendre conscience à l'élève que le passage par la pose d'une opération ne constitue pas l'unique et premier recours pour résoudre un problème. Il nous semble en effet que cette modification des stratégies des élèves pour résoudre ne peut être spontanée et qu'elle doit passer par une modification des pratiques d'enseignement trop ancrées parfois encore sur la valorisation d'un seul mode opératoire.

(iii) de conduire l'élève à procéder régulièrement à des catégorisations. Nous invitons à l'usage du symbolisme pour *marquer* les différentes catégories et les différentes relations qui unissent les éléments d'une même catégorie. Mais de notre point de vue, ce symbolisme n'est pas premier, il ne constitue pas non plus une fin en soi et nous le considérons comme un outil d'aide à l'apprentissage.

Nous insistons sur la mise en œuvre concomitante de ces différents éléments.

Préalablement à l'opérationnalisation de notre cadre didactique R^2C^2, une réunion avec les quatre enseignants du groupe-expérimental a été organisée par nos soins en vue d'une part de fournir les artefacts nécessaires et leur instrumentalisation pour cette opérationnalisation et d'autre part d'en préciser les conditions d'utilisation dans les classes.

2.5.3.1. Les artefacts nécessaires et leur instrumentalisation pour l'opérationnalisation du cadre didactique R^2C^2

L'opérationnalisation de notre cadre s'appuie sur l'introduction et l'usage d'un ensemble d'artefacts, élaborés par nos soins, à l'attention des classes du groupe-expérimental.

On distingue :

- Les boîtes-référentes.
- Les schémas-référents.
- Le répertoire de références.

2.5.3.1.1 Les boîtes-référentes

Des boîtes-référentes sont mises à la disposition de chaque élève (Figure 68). Ce sont à la fois des boîtes contenant des références variées : énoncés verbaux, dessins, schémas, opérations, etc., et des boîtes destinées à acquérir le statut de référence pour un type de problème donné. Matérialisées par des fiches, elles recevront et mettront en relation trois types de données : des représentations sous forme de schémas que nous nommerons schémas-référents, des énoncés verbaux, des représentations variées de type opération, dessin, schéma, texte. Les travaux de Duval (1995) sur la conversion de registres constituent le cadre théorique retenu pour l'introduction de la dimension inter-représentationnelle de ces boîtes-référentes qui ont pour objectif d'obliger l'élève à changer de registre de représentations.

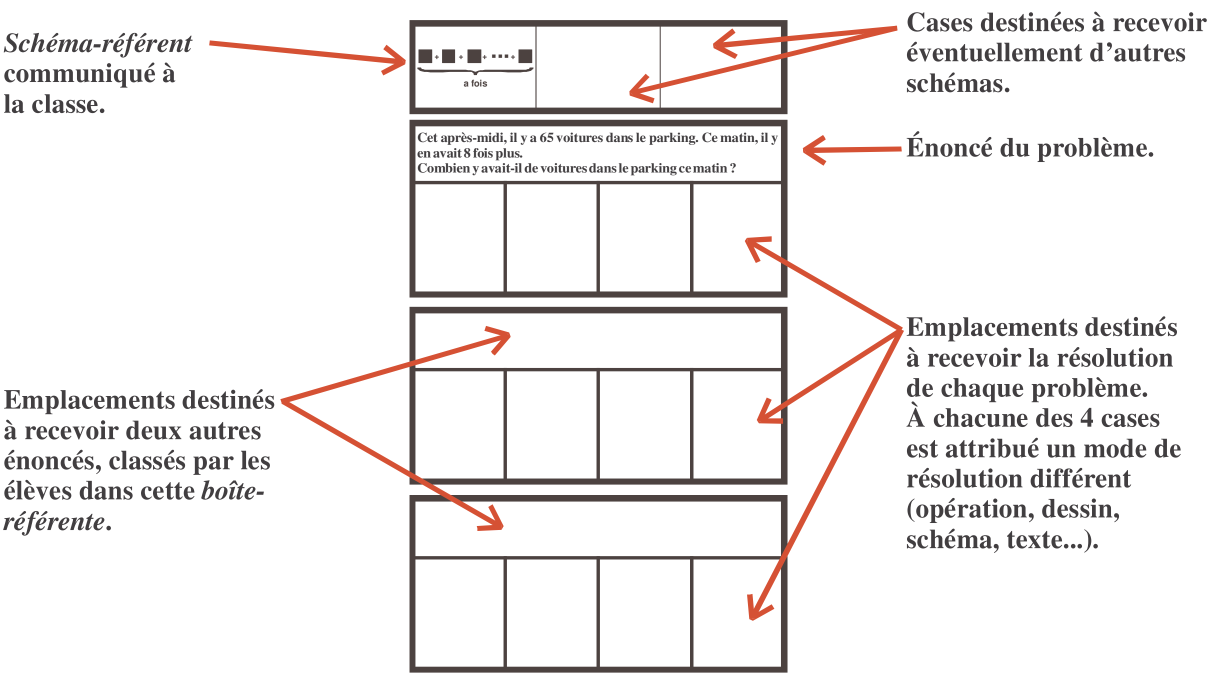


Figure 68 : ***Exemple de boîte-référente***

Les énoncés de problèmes verbaux pouvant appartenir à ces boîtes-référentes sont recopiés dans la boîte-référente.

Des emplacements sont prévus pour recevoir les traces en relation avec la résolution de chaque problème verbal. Quatre cases juxtaposées sont matérialisées au-dessous de l'énoncé ; un type de trace différent (opération, dessin, schéma, texte) est affecté à chacune des quatre cases, incitant l'élève à procéder à la conversion de représentations (Duval, 1995).

2.5.3.1.2. Les schémas-référents

Chaque boîte-référente correspond à une catégorie de problèmes définie par Vergnaud (1990). Elle est destinée à recevoir plusieurs problèmes appartenant à la même catégorie. Elle est identifiable par une étiquette comportant un ou plusieurs schémas que nous nommons schémas-référents (Figure 69)

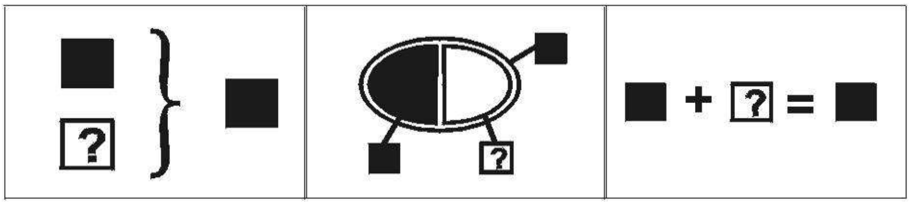


Figure 69 : ***Exemples de schémas–référents***

2.5.3.1.3. Le répertoire de références

Un répertoire de références sera élaboré par chaque classe, en vue de fournir une aide supplémentaire aux élèves :

- Pour le vocabulaire usuel.
- Pour le vocabulaire mathématique.

Ce répertoire sera élaboré collectivement au fur et à mesure que des expressions poseront des difficultés aux élèves.

Des exemples sont donnés aux enseignants lors de la réunion :

- Une pile de livres (expression et dessin).
- Une botte de poireaux.
- Autant que : autant de billes jaunes que de billes vertes (dessins).
- Du 5 août compris au 20 août compris (on représente sur un calendrier ou sur une bande numérique).
- Une encyclopédie en 20 volumes.
- 10 fois moins.

2.5.3.2. Les conditions d'utilisation des outils

La présentation des outils a été complétée par celle de leur utilisation nous amenant à des précisions quant aux modifications à apporter au Système Didactique global. Nous distinguons d'une part les invariants opératoires, c'est-à-dire les éléments que les enseignants ne doivent pas modifier dans leur pratique d'enseignement de la résolution de problèmes et d'autre part les modifications à apporter aux pratiques d'enseignement de par l'introduction des outils précédemment cités.

Cette liste d'invariants a été communiquée aux quatre enseignants du groupe-expérimental lors de la réunion de présentation de l'opérationnalisation de notre cadre $\boldsymbol{R^2C^2}$.

2.5.3.2.1. Les invariants opératoires

La difficulté pour mener à bien cette expérimentation, comme d'ailleurs dans de nombreuses recherches en sciences de l'éducation, réside principalement dans le contrôle des variables extrinsèques. Pour tenter d'annuler les effets de plusieurs d'entre elles, il a été demandé à chaque enseignant du groupe-expérimental d'utiliser les outils proposés :

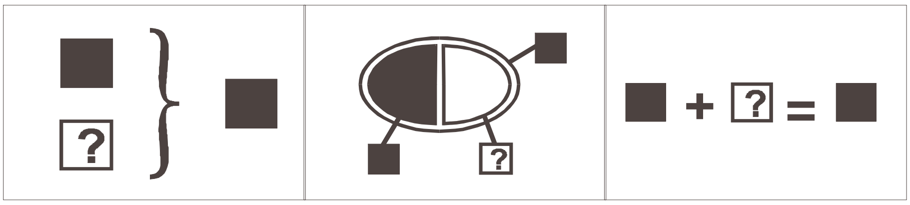
- En maintenant la programmation établie en début d'année scolaire.
- En conservant la fréquence de résolution de problèmes hebdomadaire prévue.
- En laissant la place aux pratiques habituelles d'organisation de classe en modes collectif, individuel ou par groupes.
- En conservant le degré d'exigence dans la présentation des résultats.
- En conservant la forme usuelle mise en place par chaque enseignant pour faire entrer ses élèves dans l'activité.
- En conservant les outils de référence habituellement utilisés pour la préparation des séquences.

2.5.3.2.2. Les éléments à introduire et à utiliser

Dans la description de ces éléments, nous distinguons deux grandes phases : la phase de construction d'une boîte-référente puis la phase d'utilisation.

- Présentation des éléments

Les figures 70 à 73 contiennent les en-têtes et énoncés de références communiqués aux enseignants lors de la réunion de présentation de l'expérimentation. Les enseignants utiliseront ces documents dans leur classe lors de l'expérimentation. Ils disposent de toute liberté pour introduire ces « boîtes-référentes » au fil des séquences en fonction de la programmation qu'ils ont prévue en début d'année scolaire.

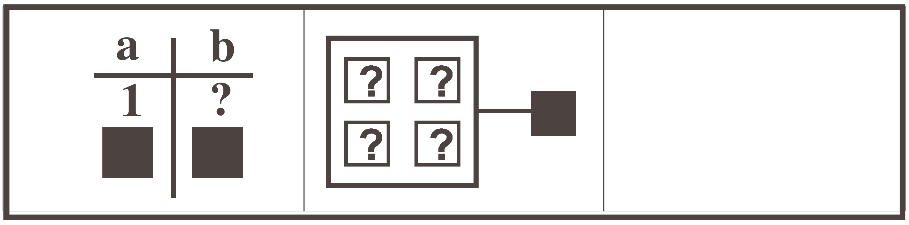


Je viens de lire un roman de 785 pages. Il comprend 2 tomes. Le premier tome a 403 pages. Quel est le nombre de pages du second tome ?

Figure 70 : ***En-tête et problème de la « Boîte-référente » n°1***

Cet après-midi, il y a 65 voitures dans le parking. Ce matin, il y en avait 8 fois plus. Combien y avait-il de voitures dans le parking ce matin ?

Figure 71 : ***En-tête et problème de la « Boîte-référente » n°2***



Lucie a cueilli 24 fleurs qu'elle met dans 4 vases. Tous les vases ont le même nombre de fleurs. Combien y a-t-il de fleurs dans chaque vase ?

Figure 72 : ***En-tête et problème de la « Boîte-référente » n°3***

La location d'un camion coûte 50 euros pour l'assurance, et 25 euros par heure d'utilisation. Le papa d'Antoine loue un camion pour une durée de 6 heures. Combien va-t-il payer ?

Figure 73 : ***En-tête et problème de la « Boîte-référente » n°4***

- Construction d'une boîte-référente

L'objectif est de fournir aux élèves différentes voies pour résoudre un problème, et ainsi de leur faire prendre conscience que le passage par la pose d'une opération ne constitue pas nécessairement l'unique recours pour résoudre un problème. Il est demandé à chaque enseignant concerné par l'expérimentation :

- de débuter par le problème qu'il souhaite faire traiter en priorité à ses élèves. Chaque enseignant peut ainsi choisir parmi les quatre problèmes proposés en exemples, de manière à garder la cohérence interne à la programmation d'activités de résolution de problèmes qu'il a établie en début d'année scolaire.
- d'introduire le problème conformément aux pratiques habituelles instaurées dans la classe. Par exemple, s'il est d'usage de présenter oralement le problème en début de séance, ce type d'activité perdurera.
- de conserver les pratiques habituelles de la classe : travail individuel ou travail en groupes, usage ou non du cahier de brouillon, présentation normée ou non de la réponse fournie.

- de provoquer une mise en commun des différentes stratégies utilisées par les élèves pour résoudre (pose d'un calcul, réalisation d'un dessin ou d'un schéma, …).
- de faire adopter par la classe une étiquette (en-tête de la *boîte-référente*) pour caractériser la structure du problème. Un à trois en-têtes correspondant aux fiches proposées sont fournis aux enseignants.
- de faire recopier à chaque élève sur sa fiche les quatre modes de résolution possibles pour le problème donné.

Trois emplacements sont prévus par *boîte-référente* pour recevoir d'autres énoncés de problèmes. Il est précisé à chaque enseignant que les *boîtes-référentes* peuvent contenir plus de 3 problèmes. Des fiches peuvent ainsi être ajoutées.

Au fil de l'année, les fiches pourront être complétées comme indiqué ci-après.

- Utilisation des boîtes-référentes

Les éléments suivants sont à introduire par l'enseignant dans sa ***pratique pédagogique quotidienne*** dans la salle de classe en respectant le principe P1 de régularité. Autrement dit, à chaque fois qu'un problème est posé, les élèves doivent utiliser conjointement les boîtes-référentes, les schémas-référents et le répertoire de références.

- utilisation systématique des boîtes-référentes lors de chaque séance de résolution de problèmes à données numériques, avec passage obligé par l'usage de différents registres de représentation (une case pour un dessin, une case pour un schéma, une case pour les opérations, une case pour le texte de la réponse au problème).
- réalisation puis adoption par la classe d'une étiquette en-tête de la boîte-référente, sous la forme d'un schéma.
- lors de la phase de correction, instauration systématique d'une mise en commun des différentes stratégies utilisées par les élèves de la classe pour résoudre (pose d'un calcul, réalisation d'un schéma ou d'un dessin)
- constitution d'autant de boîtes-référentes que nécessaire, en fonction de la progression de la classe.
- introduction de nouveaux énoncés dans chaque *boîte-référente*. Il peut s'agir soit d'énoncés fournis par l'enseignant, soit d'énoncés rédigés par les élèves à la demande de l'enseignant.
- utilisation par l'enseignant et par les élèves d'expressions du type *Ce problème ressemble à …, Il peut être résolu comme …, Il va dans la même boîte que …* lors de chaque utilisation des boîtes-référentes.

Chapitre 3 : Interprétation des résultats et discussion

Ce chapitre présente les résultats liés à notre expérimentation, suivis des discussions qui s'imposent. Il comprend quatre sous-chapitres.

- Dans un premier temps, nous décrivons et caractérisons les pratiques des enseignants avant la mise en œuvre de notre cadre didactique ***R²C²***. Il s'agit de répondre à la question suivante : Quels sont les principaux éléments de convergence et de divergence qui se dégagent de l'observation des pratiques de la résolution de problèmes dans les classes ? La caractérisation de ces pratiques est en grande partie basée sur l'analyse des transcriptions des séances de type n°1[159] vidéoscopées dans les classes et des enregistrements des entretiens d'autoconfrontation ; elle s'appuie aussi sur l'analyse des réponses au questionnaire-enseignants et sur des productions extraites de cahiers d'élèves.
- Dans un second temps, nous comparons les résultats du groupe-témoin et du groupe-expérimental obtenus au pré-test et au post-test, sachant qu'entre ces deux tests le groupe-expérimental a été soumis à la mise en œuvre de notre cadre didactique ***R²C²***.
- Dans un troisième temps, en nous référant aux transcriptions des enregistrements vidéoscopés de type n°2[160] de résolution de problèmes faisant suite à l'opérationnalisation du cadre didactique ***R²C²***, nous repérons les modifications des pratiques opérées dans les classes du groupe-expérimental.
- Dans un dernier temps, nous discutons les résultats au regard des principes constitutifs de notre cadre didactique ***R²C²*** et nous envisageons les prolongements à donner à ces travaux.

3.1. Analyse des pratiques initiales des enseignants en situation d'enseigner la résolution de problèmes mathématiques

Quelles sont les principales caractéristiques des pratiques des enseignants dans le champ de la résolution de problèmes mathématiques ?

Quelques premiers éléments de réponses ont déjà été tirés de l'exploitation du questionnaire que nous avions soumis à 81 enseignants de CE2 issus de deux académies (Priolet, 2000) ainsi que du rapport de l'Inspection Générale sur l'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire (2006). Nous ne reviendrons donc pas sur l'existence d'un enseignement effectif de la résolution de problèmes à données numériques dans les classes. En revanche, à la lueur de notre problématique sous-tendue par le cadre théorique que nous avons retenu, nous déclinerons cette question à travers les sous-questions suivantes :

[159] Nous nommons *séances de type n°1* les séances antérieures à l'opérationnalisation de notre cadre didactique ***R²C²***.
[160] Nous nommons *séances de type n°2* les séances postérieures à l'opérationnalisation de notre cadre didactique ***R²C²***.

- Quelle est la place de la démarche heuristique dans l'enseignement de la résolution de problèmes à données numériques ? Quels contenus observe-t-on dans les phases de recherche ?
- Quelle est la fréquence des séances de résolution de problèmes ?
- Quels sont les outils utilisés par les enseignants lors de la résolution de problèmes ?
- Quelle est la place accordée à l'usage de différents registres de représentation ?
- Quelle est la place accordée à la référence à des notions antérieures ?
- Quelle est la place accordée à la phase de correction des problèmes ?

3.1.1. La démarche heuristique dans les séances de type n°1 de résolution de problèmes

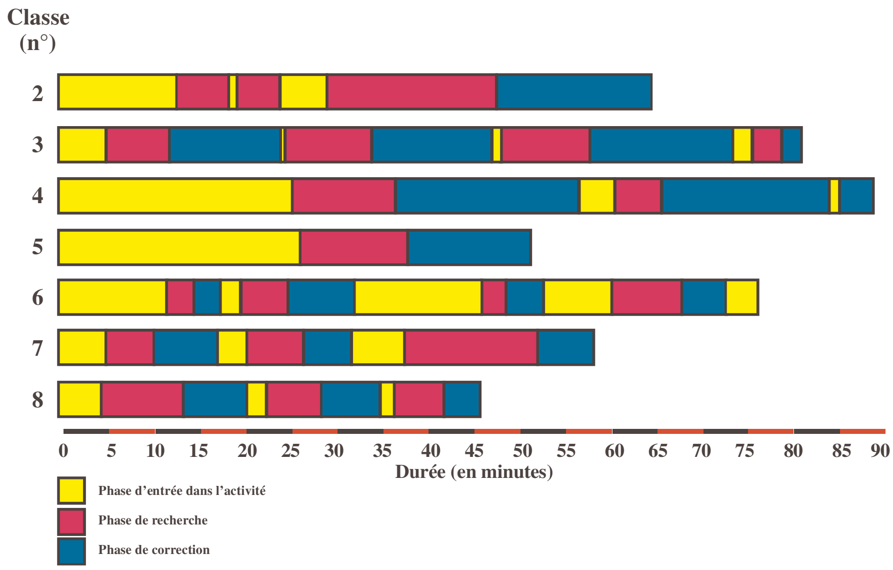
Dans les séances de type n°1 réservées à la résolution de problèmes à données numériques, quelle est la place de la démarche heuristique ? Quels sont les contenus et comment s'opère la mise en œuvre des phases de recherche ?, telles sont les questions que nous nous proposons de traiter dans les paragraphes qui suivent.

La présence des phases de recherche a été identifiée à partir des données issues des enregistrements vidéoscopés des séances de type n°1 et des entretiens d'autoconfrontation simple.

3.1.1.1. Résultats

3.1.1.1.1. Place de la démarche heuristique

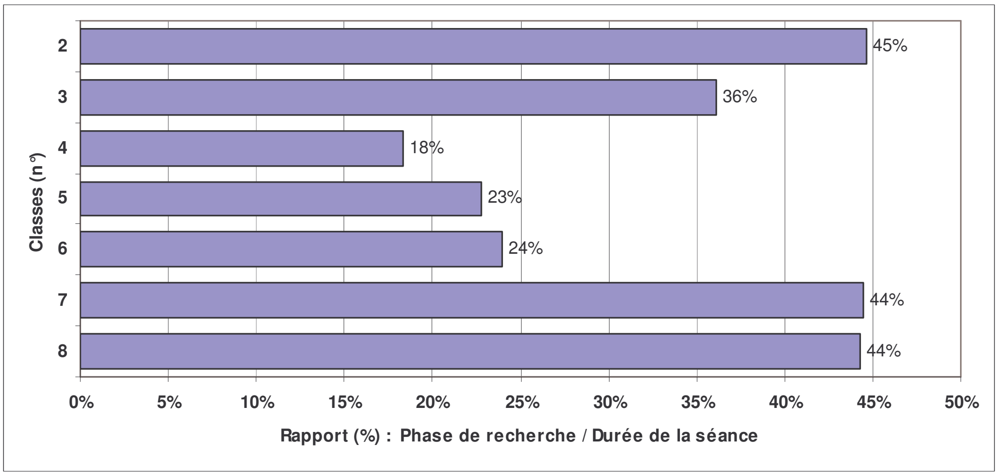
Les tableaux de synthèse présentant la durée précise de chaque phase en minutes et secondes figurent en annexe 40.



Graphique 23 : ***Récapitulatif des scénarios des séances - Phase initiale de l'expérimentation***

Les différents graphiques révèlent la présence de phases de recherche dans chacune des classes, avec toutefois un découpage et une répartition variables selon les classes ; par exemple tandis que cette phase de recherche constitue un seul bloc dans la classe n°5, elle est scindée en deux dans la classe n°4, en trois dans les classes n^{os} 2, 7 et 8 et en quatre dans les classes n^{os} 3 et 6.

Les séances étant elles-mêmes de durées inégales, nous avons comparé d'une classe à l'autre la part occupée par cette phase de recherche. Le graphique 24 révèle une forte disparité entre les classes : la durée de la phase de recherche représente entre 18% et 45% de la durée totale de la séance.



Graphique 24 : ***Comparaison des durées de la phase de recherche suivant les classes***

Il reste cependant à s'interroger (i) sur le contenu de ces phases : que doivent rechercher les élèves ? (ii) sur les conditions dans lesquelles les élèves sont placés, autrement dit, s'agit-il de recherches individuelles ou de recherches en groupes ?

3.1.1.1.2. Contenus des phases de recherche

La présence de ces phases dites *de recherche*, caractérisées par les activités des élèves en situation de *chercher* nous conduit à en examiner le contenu.

Dans quatre classes sur sept (classes n^{os} 3, 6, 7 et 8), les élèves sont effectivement placés en situation de résoudre trois ou quatre problèmes (Voir annexe 41).

Dans deux autres classes, il leur est demandé (i) soit de rechercher et de rédiger des questions à partir d'extraits de catalogues et de bons de commande puis de trouver des indices pour y répondre (classe n° 4 – voir annexe 41), (ii) soit de déterminer si un ensemble de documents permet de répondre à une liste de questions. Ces questions doivent ensuite faire l'objet d'un classement (Classe n° 5 –voir annexe 41).

Dans la dernière classe (classe n° 2), cette phase de recherche se décline en deux composantes : après avoir reconstitué l'énoncé d'une situation-problème, les élèves doivent résoudre le problème.

Les enseignants interrogés ne partagent pas le même avis sur la place à accorder, dans des séances de résolution de problèmes, à des activités telles que celles proposées dans les classes n^{os} 4 et 5, c'est-à-dire à des activités se limitant à la prise d'informations dans des énoncés et ne conduisant pas à la recherche de procédures mathématiques permettant de résoudre un problème. Tandis que l'enseignant de la classe n° 4 affiche clairement sa volonté de proposer aux élèves des situations portant essentiellement sur la lecture et la compréhension d'énoncés, l'enseignant de la classe n°6 qui a demandé à ses élèves de résoudre quatre situations-problèmes au cours de la séance observée, adopte un point de vue plus réservé quant à la place que peuvent revêtir des activités tournées essentiellement vers la lecture d'énoncés, dans des séances dites de résolution de problèmes.

64	Ens.	*(…) Alors que là, ce problème, oui, mais surtout apprendre à bien lire, à bien sélectionner, à bien trier. C'est la compréhension fine des documents, avant de passer à d'autres exercices plus mathématiques.*
65	Ch.	*Et ce genre d'activité de compréhension de documents, vous la faites plusieurs fois dans l'année ?*
66	Ens.	*Oh oui. On a fait quelques temps après, lecture de documents d'horaires de trains et justement j'ai été assez surprise. Avant, ils ne connaissaient pas comment lire un tableau. (…)* **(Enseignant classe n°4)**

29	Ch.	*(…) Il y a des situations d'apprentissages et qu'est-ce qu'il y a d'autre ?*
30	Ens.	*Des situations où ils sont seuls en fait. (…). Sinon, quand on travaille sur des fiches toutes faites, c'est un petit peu différent. Maintenant, on a beaucoup de fichiers où quelquefois il faut trouver la question du problème ou retrouver le bon énoncé. Mais pour moi cela, ce n'est pas vraiment de la résolution de problèmes. (…)* **(Enseignant classe n°6)**

3.1.1.1.3. Mise en œuvre des phases de recherche

3.1.1.1.3.1. Organisation pédagogique

Les phases de recherche revêtent des formes différentes en fonction des classes : les élèves sont invités à effectuer leurs *recherches* par groupes de deux (classes n^{os} 4, 5 et 7), ou bien individuellement (classes n^{os} 3, 6 et 8), ou bien ils disposent d'une organisation mixte composée d'un temps de travail par groupes suivi d'un temps de travail individuel (classe n° 2).

3.1.1.1.3.2. Prise de parole de l'enseignant

Lorsque nous avons observé les séances, nous avons eu l'impression que ces phases de recherche se déroulaient dans un environnement sonore fortement imprégné de prises de paroles de l'enseignant. Pour vérifier de qui émanaient toutes ces paroles, nous avons effectué un repérage : (i) du nombre d'interventions[161] des professeurs, (ii) du nombre de mots prononcés. Le tableau 80 récapitule ces données :

[161] Nous avons comptabilisé une intervention par item.

Classes (Nombre de phases de recherche)	**Nombre d'interven-tions de l'enseignant** (Total – Détail par phases)	**Nombre de mots prononcés par l'enseignant** (Total _ Détail par phases)	**Durée des phases de recherche (en secondes)** (Total – Détail par phases)	**Nombre de mots prononcés par l'enseignant par tranche de 100 secondes** (Total – Détail par phases)
2 (3)	29 (6, 3, 20)	344 (49, 58, 237)	1737 (343, 282, 1112)	19,8 (14, 21, 21)
3 (4)	64 (18, 18, 17, 11)	894 (130, 443, 228, 93)	1764 (419, 567, 589, 189)	50,7 (31, 78, 39, 49)
4 (2)	26 (12, 14)	272 (125, 147)	982 (676, 306)	27,7 (18, 48)
5 (1)	19 (19)	229 (229)	705 (705)	32,5 (32)
6 (4)	83 (17, 19, 18, 29)	1276 (275, 343, 242, 416)	1101 (177, 307, 160, 457)	115,9 (155, 112, 151, 91)
7 (3)	56 (0, 1, 55)	751 (0, 22, 729)	1563 (318, 371, 874)	48,0 (0, 6, 83)
8 (3)	75 (21, 35, 19)	781 (303, 341, 137)	1231 (541, 359, 331)	63,4 (56, 95, 41)

Tableau 80 : ***Analyse des interventions des professeurs durant les phases de recherche***

Notre méthode de calcul, certes discutable puisqu'elle ne prend en compte que les mots audibles lors de l'écoute de l'enregistrement sonore, permet néanmoins de confirmer l'impression que nous avons eue en observant ces séances de résolution de problèmes.

D'ailleurs, l'entretien d'autoconfrontation réalisé avec l'enseignant de la classe n°6 traduit que l'enseignant lui-même découvre cette facette de sa pratique, à tel point qu'il revient à deux reprises sur ses prises de parole :

> 28 Ens. *(…) C'est vrai que l'on est vraiment en situation d'apprentissage. (…) C'est vrai, en classe je parle beaucoup et je m'en rends compte encore à la caméra. Peut-être que je parle trop effectivement. Et parmi tout ce que je dis, il y a des fois ils ne doivent peut-être pas s'y retrouver. Je ne sais pas. Mais enfin là, on est vraiment en situation d'apprentissage de résolution de problèmes donc on ne fait pas tout le temps… On parle peut-être moins tout de même.*
>
> 73 Ens. *(…) Je ne sais pas pourquoi je suis partie là-dessus.* **(Enseignant classe n°6)**

Le tableau 80 révèle également que cet enseignant de la classe n°6, pendant un temps de classe de 100 secondes, prononce deux fois plus de mots que l'enseignant de la classe n°3, alors que dans ces deux classes les phases de recherche des élèves se déroulent de manière individuelle. Ces fonds sonores en grande partie nourris par les paroles de l'enseignant nous semblent pouvoir perturber l'activité de recherche, du moins de certains élèves, dans cette phase conçue pour un travail individuel.

La répartition du temps de parole de l'enseignant de la classe n°7 contraste avec celle des autres enseignants. Au début de la phase de recherche individuelle, l'enseignant ne s'exprime jamais à voix haute. Par la suite, il n'intervient à voix haute qu'une seule fois pour conclure la phase de recherche. Ses prises de parole, en grande partie individuelles, se situent dans le dernier temps de cette phase de recherche. Elles visent principalement à interroger les élèves sur les procédures qu'ils ont engagées.

Globalement, c'est l'enseignant de la classe n°2 qui s'exprime le moins à voix haute. Cependant, l'enregistrement vidéoscopé révèle que cet enseignant circule et s'exprime aussi lors de son passage dans les différents groupes placés en situation de recherche. Le fait qu'il parle à voix basse dans ces moments nous paraît mériter d'être souligné. Les élèves non concernés par ces propos ne sont pas sans cesse interrompus dans leur activité de recherche.

Les enseignants des classes n^{os} 4 et 5 s'expriment peu, mais dans ces deux classes, les élèves n'ont aucun problème mathématique à résoudre au cours de ces séances.

Que dit l'enseignant ?

On distingue plusieurs types d'interventions, selon leur contenu et selon qu'elles s'adressent à la classe entière ou à un groupe plus réduit.

- Interventions liées à la gestion générale de la classe, pour la discipline notamment
  - S'adressant directement à la classe entière

114 *Quand on a terminé, est-ce qu'on a le droit de bavarder pour autant ? Non* **(Classe n°2***)*
643 *Faites attention aux livres qui ont été prêtés* **(Classe n°6)**

  - S'adressant à un élève ou à un petit groupe mais audible par toute la classe

109 *On n'a pas dit qu'on chuchotait ?* **(Classe n°2***)*
172 *Bon, eh bien, Jim, c'est au travail, là-bas. Tiens-toi comme il faut.* **(Classe n°3***)*
661 *Chut, Élodie tu te calmes.* **(Classe n°4***)*
159 *Mehdi, si tu continues, ça ira mal, hein. Tu te tiens correctement.* **(Classe n°6***)*
283 *Quand on est à côté, on n'a pas besoin de parler fort pour s'entendre.* **(Classe n°7***)*

- Interventions liées directement à l'activité mathématique
  - S'adressant directement à la classe entière

195 *Alors une question. Je vois des réponses comme par exemple « Il manque 155 images ». Est-ce que c'est possible ?* **(Classe n°2)**
481 *Ça veut dire quoi diminuer ?* **(Classe n°3)**
329 *Avez-vous trouvé au moins deux questions ?* **(Classe n°4)**
345 *Mais on te dit donc qu'il est dans la numéro 1 et que ce n'est pas la jaune.* **(Classe n°7)**
203 *Bon stop, on arrête. Je vois où ça bloque. Tout le monde a trouvé comment il fallait faire mais il y en a très peu qui ont réussi à faire la soustraction.* **(Classe n°8)**

  - S'adressant à un élève ou à un petit groupe mais audible par toute la classe

320 *Est-ce que ça, ce que tu as calculé là, est-ce que ça correspond à la question que tu as posée ? C'est le même problème que tout à l'heure, Léa. Réfléchis.* **(Classe n°3***)*
658 *Tu cherches les informations.* **(Classe n°4***)*
146 *Toi, c'est pareil, tu n'as pas posé l'opération. Alors tu la poses et tu réfléchis bien.* **(Classe n°6***)*
169 *Compte à l'envers !* **(Classe n°8***)*

- Interventions liées à l'organisation retenue pour la phase de recherche
  - S'adressant directement à la classe entière

207 *Bien ! Alors, comparer son résultat, ça ne veut pas dire « Tu as raison, je barre le mien », mais plutôt « Pourquoi tu as fait ce calcul ?». Et on chuchote.* **(Classe n°2***)*
488 *Il y a quelqu'un qui l'a écrit l'énoncé ?* **(Classe n°3)**

674	*Vous n'avez pas d'opération à faire pour le moment. J'ai dit uniquement d'écrire la liste des informations.* **(Classe n°4)**
359	*Qui n'a pas terminé ? Levez la main les groupes qui n'ont pas terminé Un ou deux. D'accord, vous avez donc un petit moment supplémentaire.* **(Classe n°7)**

- S'adressant à un élève ou à un petit groupe mais audible par toute la classe

186	*À quoi ça sert d'écrire le problème, Manon ?* **(Classe n°7)**
176	*Pour le moment, tu ne dis rien. C'est toi qui cherches. Tu as fait un petit dessin pour t'aider ?* **(Classe n°7)**
492	*Tu ne t'es pas un peu trompé, mélangé dans les S O toi, solution opérations ?* **(Classe n°7)**
52	*Tu peux comparer avec les autres.* **(Classe n°7)**

Les paroles de l'enseignant n°6 révèlent la présence de l'effet Topaze (Brousseau, 1986b) :

174	15.18	Ens.→Él.	*12 + 7 ? C'est ça que tu as écrit ? Alors qu'est-ce que tu as additionné là ? Regarde ce que tu as additionné : tu as additionné 12 c'étaient les…*
175	15.29	Élèves	*Romans.*
176	15.32	Ens.→Cl.	*Non, c'est Mathilde qui répond, des ro…*
177	15.34	Mathilde	*Mans.* **(Classe n°6)**

3.1.1.2. Synthèse

Les phases dites de *recherche*, au cours desquelles les élèves sont placés en situation de *chercher* une solution à un problème posé, sont effectivement présentes dans chacune des classes observées. Ce sont des phases qui, de notre point de vue devraient caractériser la démarche heuristique dans des séances de résolution de problèmes mathématiques. Toutefois, on relève des disparités :

(i) d'ordre temporel : selon les classes, ces phases de recherche occupent une durée qui varie de 18% à 45% de la durée de la séance totale. Elles se présentent parfois sous la forme d'un bloc insécable, ou bien font l'objet d'un découpage en deux ou trois blocs répartis au fil de la séance de mathématiques.

(ii) liées à l'objet de la recherche de contenus : dans plusieurs classes, les élèves sont effectivement placés en situation de chercher. Mais que cherchent les élèves ? Les observations effectuées révèlent que l'objet de la recherche varie d'une classe à l'autre. Dans certaines classes, les élèves sont effectivement placés en situation de chercher des solutions à des problèmes mathématiques, tandis que dans d'autres classes, l'objet de la recherche concerne parfois plus le repérage d'indices dans un énoncé de problème que la recherche de la solution au problème posé. Ainsi, dans certains cas, il est fait abstraction de la résolution des problèmes posés et des procédures mathématiques en jeu.

(iii) d'ordre organisationnel : La mise en œuvre de ces phases de recherche s'opère selon les classes soit de manière strictement individuelle, soit par groupes de deux élèves, soit dans des organisations faisant se succéder recherche individuelle et recherche par groupes.

Quelle que soit l'organisation retenue, on relève une prise de parole abondante de l'enseignant. Les interventions sont nombreuses et le temps de parole que s'octroie l'enseignant se révèle conséquent lors de ces phases où en principe les élèves devraient être placés en situation de chercher. Bien que nous ne disposions pas de référents théoriques qui nous permettent de nous forger un avis argumenté sur cette question, nous nous interrogeons sur les perturbations qui peuvent résulter d'une fréquente prise de parole[162] de l'enseignant lors des phases de recherche des élèves.

3.1.2. La fréquence des séances de résolution de problèmes et quantité de problèmes à résoudre

Après avoir examiné la place de la démarche heuristique dans les séances de type n°1 de résolution de problèmes mathématiques, et après avoir relevé des divergences entre les classes quant à la mise en situation de recherche, il nous paraît essentiel d'identifier dans quelle mesure les enseignants placent leurs élèves en situation de résoudre des problèmes mathématiques. Selon quelle fréquence les enseignants mettent-ils en œuvre des situations de résolution de problèmes numériques ? Combien de problèmes proposent-ils à leurs élèves pour la résolution ?

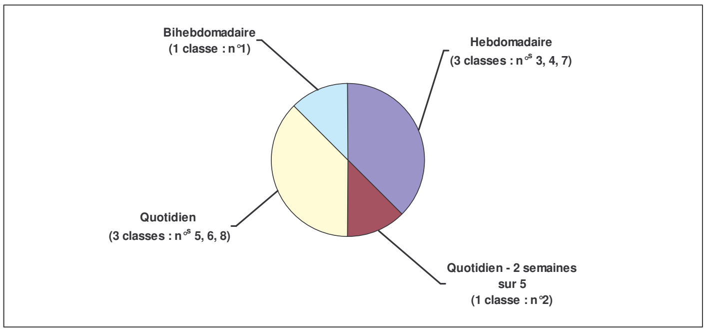
3.1.2.1. Fréquence

L'analyse des réponses au questionnaire (graphique 25) révèle que les 8 enseignants interrogés confrontent effectivement leurs élèves à la résolution de problèmes mathématiques, et ce à raison d'au moins une séance hebdomadaire dans 7 classes sur 8.

Dans la 8ème classe (classe n°2), l'organisation est différente avec des séances de résolution de problèmes groupées pendant 2 semaines sur 5, ce qui revient en moyenne à 2 séances par semaine.

Ces données corroborent celles issues de notre précédente enquête par questionnaire (Priolet, 2000), ainsi que celles données dans le rapport de l'Inspection Générale de l'Éducation nationale (2005).

On considère que dans toutes les classes de notre échantillon, les enseignants mettent en place en moyenne au moins une fois par semaine des séances de résolution de problèmes.



Graphique 25 : ***Fréquence des séances de résolution de problèmes***

[162] Audible par la classe entière.

3.1.2.2. Quantité de problèmes à résoudre

Sur l'ensemble des 8 classes, les élèves résolvent en moyenne 5 problèmes par semaine. En revanche, on relève des différences entre les classes puisque le nombre de problèmes à résoudre varie entre 3 (classe n°7) et 8 (classe n°6). Dans la classe n°3, seuls les problèmes proposés lors de la séance hebdomadaire ont été comptabilisés. Il conviendrait aussi d'y ajouter ceux que l'enseignante propose lors d'une séance hebdomadaire supplémentaire qu'elle met en place si nécessaire au vu des difficultés rencontrées par les élèves. Les données recueillies ne nous permettent pas de prendre en compte le nombre de problèmes proposés lors de cette séance.

Classe	**n°1**	**n°2**	**n°3**	**n°4**	**n°5**	**n°6**	**n°7**	**n°8**
Groupe	Groupe-Témoin				Groupe-Expérimental			
Nombre de problèmes par semaine	6	4	5	6	5	8	3	5
Nombre de problèmes par semaine et par groupe	21				21			

Tableau 81 : ***Nombre de problèmes résolus par semaine***

Compte tenu de la variabilité qui peut être due à la longueur de l'énoncé et à la difficulté des situations-problèmes proposées, on peut considérer que les deux groupes (GT et GE) sont confrontés à la résolution du même nombre de problèmes par semaine, soit 5 problèmes en moyenne.

On admet que les élèves de l'ensemble de notre échantillon sont régulièrement confrontés à la résolution de problèmes mathématiques.

3.1.2.3. Synthèse

L'analyse des données recueillies révèle que les enseignants des 8 classes composant notre échantillon mettent en place au moins une fois par semaine des séances de résolution de problèmes mathématiques. On peut considérer qu'il s'agit là d'une pratique régulière, ce qui vient corroborer les résultats issus de l'enquête précédente.

Dans ce même échantillon, le nombre de problèmes que les enseignants déclarent soumettre chaque semaine à leurs élèves varie entre 3 et 8. La moyenne est de 5 problèmes par semaine sur l'ensemble des 4 classes du groupe-témoin et sur l'ensemble des 4 classes du groupe-expérimental.

3.1.3. Les outils utilisés par les enseignants lors de la résolution de problèmes

Quels outils les enseignants utilisent-ils lors de la résolution de problèmes mathématiques ? telle est la question que nous nous proposons de traiter dans ce paragraphe en examinant d'abord les outils mis à disposition des élèves, puis ceux utilisés par l'enseignant lui-même lors de la préparation des travaux en résolution de problèmes mathématiques.

Les données sont issues de l'analyse des questionnaires et des entretiens d'autoconfrontation.

3.1.3.1. Résultats

3.1.3.1.1. Outils mis à la disposition des élèves

Nous examinerons successivement la présence des ouvrages de mathématiques puis celle des calculatrices.

3.1.3.1.1.1. Nombre et type d'ouvrages de mathématiques mis à disposition des élèves

Dans les huit classes, les élèves disposent individuellement d'au moins un manuel scolaire de mathématiques. Ils n'ont pas de fichier individuel du commerce au sens d'outil sur lequel ils seraient amenés à reporter directement les réponses demandées.

Dans une des classes concernées (classe n°3), chaque élève possède deux manuels scolaires.

Au total, cinq manuels scolaires de cinq maisons d'édition différentes sont utilisés dans l'ensemble de ces classes, avec une présence marquée pour l'un d'entre eux que l'on retrouve dans 50% des classes.

Toutefois, les problèmes proposés aux élèves ne sont pas issus exclusivement des manuels scolaires mis à disposition, comme le révèle l'extrait ci-dessous de l'entretien d'autoconfrontation avec l'enseignant de la classe n°7 :

30	Ch.	*Et les élèves eux-mêmes possèdent-ils un livre de mathématiques ?*
31	Ens.	*Oui. On a "Titre de l'ouvrage", là. On devrait le changer l'année prochaine, mais cette année, on travaille essentiellement avec "Titre de l'ouvrage", même si on travaille aussi parfois avec des photocopies, notamment en résolution de problèmes.*
32	Ch.	*Et en résolution de problèmes, les problèmes ne sont pas extraits de leur livre ?*
33	Ens.	*De temps en temps, mais pas toujours.*
34	Ch.	*Mais à ce moment-là, quand vous dites " De temps en temps", à ce moment-là, ils utilisent le support livre ?*
35	Ens.	*Le livre. Ah oui, à ce moment-là, voilà, on prend le livre à telle page et puis on regarde le problème que l'on va travailler*. **(Enseignant classe n°7)**

3.1.3.1.1.2. Présence et usage des calculatrices

Interrogés par questionnaire sur l'usage de calculatrices lors des séances de résolution de problèmes numériques, cinq enseignants sur les huit (classes n^{os} 1, 2, 4, 5, 6) indiquent ne pas mettre cet instrument à la disposition de leurs élèves. Les trois autres enseignants précisent les conditions d'utilisation :

> 94 Ch. *Est-ce qu'ils ont droit à la calculette ?*
> 95 Ens. *Oui. Pour vérifier. (…)* **(Enseignant classe n°8).**

> 45 Ch. *Les laissez-vous avoir un recours quelquefois à la calculatrice ?*
> 46 Ens. *Oui, oui. Oui, oui, parfois et bien, dans ces cas-là. Non ce jour-là, on ne les avait pas puisqu'on n'en a pas dans les classes vraiment, donc on se les échange avec les collègues. Mais ils ont le droit parce que... puisque c'est vrai, leur méthode est bonne donc après ils bloquent par rapport à la méthode de calcul. Donc à ce moment-là, oui, ils ont droit à la calculette. Ça arrive qu'on ait des calculettes, oui.* **(Enseignant classe n°7)**

> *Parfois pour vérifier le résultat.* **(Enseignant classe n°3 – Réponse au questionnaire)**

L'enseignant de la classe n°7 précise, quant à lui, que l'intérêt de l'utilisation de la calculatrice en résolution de problèmes ne réside pas nécessairement dans l'obtention d'une réponse exacte, mais plutôt dans le cadre d'une aide à un raisonnement correct *quand la technique opératoire n'est pas encore maîtrisée*.

Ces données recueillies révèlent que la calculatrice n'est pas un instrument mis systématiquement à disposition des élèves, bien que son usage soit inscrit dans les programmes officiels d'enseignement des mathématiques. Sa présence n'est relevée que dans 3 classes sur 8 et son usage est assorti de réserves chez deux enseignants (classes n^{os} 3 et 7) (usage du terme *parfois)*. Dans les classes où la calculatrice est présente, les enseignants soulignent leur volonté de privilégier le raisonnement mathématique par rapport aux procédures opératoires.

3.1.3.1.2. Ouvrages utilisés par les professeurs pour la préparation de la classe

Les données ont révélé la mise à disposition de manuels scolaires pour chaque élève. Nous nous interrogeons maintenant sur les outils que les enseignants utilisent pour préparer leurs séquences de mathématiques. Les enseignants se réfèrent-ils aux *livres du maître* associés aux manuels scolaires ? Utilisent-ils d'autres supports ?

Les huit enseignants interrogés déclarent utiliser des outils pour préparer leurs séquences d'enseignement des mathématiques. Cependant, on peut distinguer les enseignants :

- **Qui déclarent explicitement utiliser, ou du moins s'inspirer, de *livres du maître*** (enseignants des classes n^{os} 4, 5 et 7). Deux extraits des enregistrements d'autoconfrontation viennent illustrer ce type d'utilisation (enseignants des classes n^{os} 4 et 7) :

> 54 Ch. *Là, vous avez suivi le déroulement, qui était le cadrage de l'ouvrage avec les questions dans l'ordre.*
> 55 Ens. *Est-ce que vous utilisez le livre du maître ?*

> 56 Ens. *Oh oui, je m'en inspire beaucoup. Oui.*
> 57 Ch. *Et là, vous avez pris le déroulement qui était décrit ? Je ne le connais pas.*
> 58 Ens. *Bien disons que je m'en suis inspirée. Je ne l'ai certainement pas suivi à la lettre, mais je m'en suis inspirée.* **(Enseignant classe n°4)**

Un enseignant (classe n°7) complète parfois l'usage du *livre du maître* par des productions personnelles :

> 25 Ens. *(…) Soit j'écris des petits énoncés très simples, soit j'en prends dans des livres, soit "Titre de l'ouvrage", soit dans les deux ou trois livres que j'ai et puis aussi quelques problèmes que l'on avait écrits avec M. XXX aussi en PE2. On avait travaillé un petit peu la résolution de problèmes donc il arrive que j'en prenne ici aussi.* **(Enseignant classe n°7)**

Le même enseignant (classe n°7) a également recours à des outils de formation :

> 26 Ch. *Donc vous avez recours à des outils de formation ?*
> 27 Ens. *Oui.*
> 28 Ch. *Formation initiale ou formation continue ?*
> 29 Ens. *Oui. Formation initiale là. En résolution de problèmes, je n'en ai pas fait depuis, depuis l'I.U.F.M.* **(Enseignant classe n°7)**

Les enseignants des classes n^{os} 6 et 8 s'inspirent de situations de la vie quotidienne pour créer des situations-problèmes :

> 140 Ens. *Oui et puis adaptés. Moi, je les adapte. L'infirmière était venue visiter les maternelles, donc c'était quelque chose qui… (silence). Les deux problèmes là, c'était quelque chose qu'ils avaient su, l'infirmière arrive avec la toise. Les 24 dictionnaires de la classe, bon, ils sont 24, là ça… Je réadapte par rapport à leurs références, pour que ce soit plus accessible ! Les cannes à pêche parce qu'ici, c'est quelque chose de courant.* **(Enseignant classe n°8)**

> 40 Ens. *(…) Souvent, je recoupe plusieurs fichiers avec lesquels je travaille : deux ou trois problèmes qui me plaisent. Aujourd'hui, par exemple, ils ont un problème que j'ai fait moi, que j'ai fabriqué puisque c'est sur le thème de Noël. Voilà. Ça peut arriver pour de petites choses de la vie quotidienne de la classe en fait puisqu'ils se retrouvent un petit peu en situation.* **(Enseignant classe n°6)**

- **Qui utilisent les manuels de mathématiques des élèves** (enseignants des classes n^{os} 1, 2, 3, 6 et 8) **pour préparer leurs séquences. Plusieurs d'entre eux affichent leur volonté délibérée de ne pas recourir aux *livres du maître*** (enseignants des classes n^{os} 3, 6).

> 6 Ch. *Et vous, vous utilisez le livre du maître ?*
> 7 Ens. *Ah non ! Je travaille avec le leur, moi, pareil*
> 8 Ch. *Oui, mais vous avez un guide du maître qui va avec ?*
> 9 Ens. *Non, non je ne l'ai pas. Rarement, je travaille avec les guides du maître. Je me les fais toute seule. (rires)* **(Enseignant classe n°3)**

L'un des enseignants (classe n°6) qui ne recourt pas à l'usage du *livre du maître* justifie sa réponse par le fait qu'il semble plutôt réserver cet outil aux enseignants débutants :

41 Ch. *(…) Est-ce que vous utilisez ou est-ce que vous avez recours systématiquement au guide du maître ?*

42 Ens. *Non. Je le faisais beaucoup au début et je trouvais que c'était très, très long comme démarche. Et par exemple, la séance qu'ils proposaient, ça pouvait me prendre beaucoup plus de séances que j'avais préparées. C'est sûr que si j'avais voulu vraiment suivre ce qui était dans le livre, notamment « Titre de l'ouvrage », il m'aurait fallu au moins deux années de CE2 pour le faire. Je le dis tout à fait franchement, et puis c'est vrai que quand on a… déjà, ça fait six ans de CE2, après on a envie un peu de se détacher de tout cela et puis on voit un petit peu en fonction aussi de la classe. Parce que tout ce qu'il y a dans les livres ne fonctionne pas forcément. Je ne fais pas les mêmes choses avec cette classe que ce que j'ai fait l'année dernière. Je prends les mêmes procédés, mais je ne vais pas choisir les mêmes problèmes.* **(Enseignant classe n°6)**

3.1.3.2. Synthèse

En conformité avec les résultats des enquêtes déjà citées (Priolet, 2000) ; IGEN, 2005), chaque élève de notre échantillon dispose d'au moins un manuel scolaire de mathématiques. En revanche, si le manuel scolaire est bien présent dans les salles de classe, à l'usage direct par les élèves, il n'en va pas de même pour les calculatrices. En effet, même lorsque ces dernières sont présentes dans les classes (3 classes sur 8), leur usage n'est pas systématique. Leur absence lors de l'ensemble des séances de résolution de problèmes observées dans le cadre de notre expérimentation n'est pas anodine. Les élèves doivent gérer à la fois le mode calculatoire et le raisonnement. Ceci nous amène d'ailleurs à nous interroger, à la manière de Levain (2000), sur la place que nous donnerons à cet instrument dans notre expérimentation.

Les enseignants ne se réfèrent pas de manière systématique aux guides pédagogiques associés aux manuels des élèves. Ils assimilent parfois ces guides à des outils réservés aux enseignants débutants. En l'absence de ces *livres du maître*, la préparation des séances s'effectue à partir du contenu du manuel scolaire de l'élève ou de plusieurs manuels réunis. Tout semble se passer comme si le manuel scolaire était le seul détenteur du *savoir à enseigner*. L'absence de recours au *livre du maître* nous semble priver les enseignants de la réflexion didactique engagée par les auteurs des manuels. Des enseignants se tournent alors vers des références anciennes, remontant parfois à leur formation initiale d'enseignant. Les données extraites de l'analyse du questionnaire[163] viennent renforcer cette idée. En effet, tandis que tous les enseignants interrogés sont tout à fait capables de citer au moins un mathématicien[164], aucun d'entre eux ne fournit de nom de didacticien[165] des mathématiques. Cette question relative à la transposition didactique nous paraît devoir être prise au sérieux au niveau de la formation des enseignants. Le présent mémoire n'a pas pour objet de traiter des questions de formation, cependant il nous semble important d'une part, d'accorder à la didactique des mathématiques la place qui lui revient en formation initiale et continue, d'autre

[163] Le questionnaire a été renseigné sans avoir recours à des sources documentaires.
[164] Parmi les mathématiciens cités, on relève Pythagore (4), Pascal (3), Thalès (2°, Fourrier, Gauss, Galois, Euclide, Chasles.
[165] Un seul nom cité : un professeur formateur en IUFM.

part, d'inciter chaque enseignant à s'engager dans des actions de formation continue en relation avec cette discipline.

3.1.4. La place accordée à la conversion de représentations dans les séances de type n°1

Les enseignants confrontent-ils leurs élèves à l'usage de différents registres de représentation sémiotique ? Si oui, quelle est la place accordée à la conversation de représentations ?

Nous analyserons d'abord les séances de type n°1 de résolution de problèmes observées puis les affichages présents dans la salle de classe. Nous centrerons notre attention sur les trois registres de représentation sémiotique suivants : textuel, numérique et iconique, en vue d'étudier la place de la conversion de représentations dans les séances de résolution de problèmes mathématiques.

3.1.4.1. Résultats

En nous référant aux enregistrements vidéoscopés et aux entretiens d'autoconfrontation simple, nous étudierons premièrement la place occupée par les registres textuel et numérique dans les séances de résolution de problèmes, deuxièmement celle occupée par le registre iconique.

3.1.4.1.1. Recours aux registres textuel et numérique dans les séances de résolution de problèmes

Les différentes séances observées révèlent que les élèves sont confrontés à l'usage des deux registres textuel et numérique. Les enregistrements vidéoscopés ainsi que les entretiens d'autoconfrontation simple témoignent cependant de la variabilité de la mobilisation de ces registres selon les classes.

Dans trois classes (n^{os} 2, 3 et 6) le passage systématique par ces deux registres semble lié à l'exigence des enseignants pour obtenir une présentation normée des traces écrites des élèves, sous la forme *Solution* et *Opération* :

> 19 Ens. *(…) « on va simplement mettre S pour solution et O pour opérations » pour qu'ils fassent bien la distinction entre quand on écrit la phrase et la démarche que l'on fait pour les opérations. Mais c'est vrai qu'après, arrivés au CM1, mes collègues présentent de la même façon sauf qu'ils font écrire souvent "Solution" en entier et "Opérations" en entier. (…) C'est un travail d'expression écrite qu'ils n'ont pas appris en fait.* **(Enseignant classe n°6)**

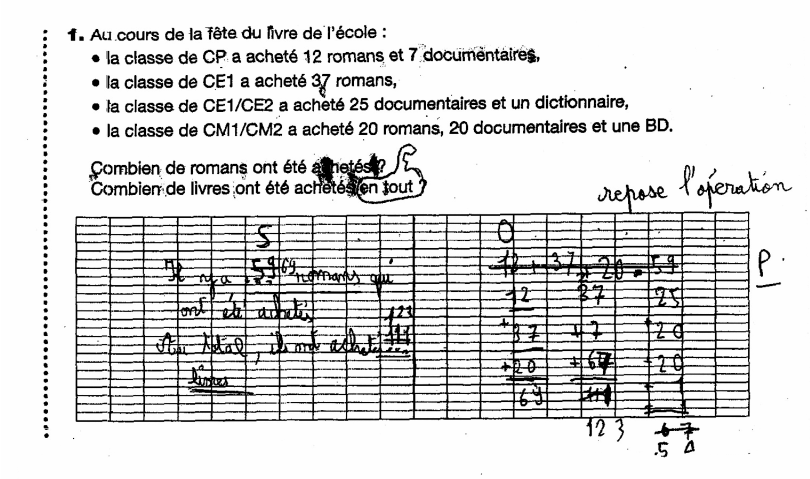


Figure 74 : ***Extrait de cahier d'élève (Séance n°1 – Classe n°6)***

Les objectifs déclarés pour justifier cette exigence de mise en forme du type *Solution – Opération* varient selon les enseignants, on dégage les cas suivants :

- Objectif : *instituer un rituel*

30 Ens. *(…) Je leur redis bien de représenter Solution – Opérations. Je suis assez attachée à la façon dont on présente le problème, pour qu'ils aient un petit peu un rituel disons. (…)* **(Enseignant classe n°6)**

40 Ch. *Vous écrivez au tableau « phrase-réponse, opérations », d'habitude cela se passe t-il ainsi ?*

41 Ens. *Toujours. En résolution de problèmes, on a adopté ce code pour avoir l'impression que ce soit à peu près clair et puis finalement, cela oblige à justifier chaque opération. (…)* **(Enseignant classe n°2)**

- Objectif : aider les élèves à s'approprier le problème

31 Ens. *Cela aussi, par contre je le fais systématiquement. La façon de rédiger un problème, c'est solution - opérations. Qu'est-ce qu'on recherche ? Il faut absolument qu'ils mettent une question pour "Qu'est-ce qu'on cherche ?". Donc ils transforment en question, parce que quelquefois dans les énoncés ce n'est pas forcément en question. Donc je veux qu'ils me le mettent sous forme d'une question ce qu'ils cherchent, ensuite c'est l'opération en ligne, opération posée. Posée, si c'est une opération qu'ils peuvent faire dans leur tête, je leur dis que ce n'est pas obligé de la poser, par contre. Et une phrase-réponse. La résolution de problème, quand c'est un problème numérique, un problème où il y a de la réflexion avec l'appel d'une question, (rires) je suis vieille France, mais je demande à ce qu'ils rédigent comme cela.* **(Enseignant classe n°3)**

- Objectif : Exiger la rédaction d'une conclusion en passant par la rédaction de toutes les étapes intermédiaires

47 Ens. *J'ai des cahiers qui sont propres et puis, ils savent que leur problème n'est pas fini tant qu'ils n'ont pas rédigé leurs phrases, tant qu'ils n'ont pas expliqué comment ils sont arrivés à ce résultat, tant qu'ils n'ont pas expliqué ce qu'ils ont trouvé.* **(Enseignant classe n°2)**

43 Ens. *Eh bien, elles sont toutes là. Elles apparaissent toutes. Ce n'est pas que la réponse définitive. C'est toute la démarche qui permet d'arriver à la réponse.*
44 Ch. *Et c'est le mode de fonctionnement que les enfants pratiquaient déjà l'an passé ? ou…***(Enseignant classe n°2)**

L'exigence d'un recours à ces deux registres textuel et numérique n'exclut pas pour autant, chez certains enseignants, l'usage du recours au registre iconique, comme le souligne l'enseignant de la classe n°4 :

70 Ens. *Oui, On passe en général par un schéma et puis donc après, partie calcul et puis, évidemment, présentation calcul en ligne, phrase - réponse. Avant, j'exigeais qu'ils commencent par "ce que je cherche" et puis en fait, bon, on ne l'écrit plus.* **(Enseignant classe n°4)**

3.1.4.1.2. Recours au registre iconique

Les enseignants mentionnent le recours au registre iconique, tout en ne partageant pas tous un même point de vue sur son usage. Les entretiens d'autoconfrontation simple révèlent ces divergences.

Par exemple, l'enseignant de la classe n°3 montre une certaine réserve quant à l'usage de ce registre iconique, tout en reconnaissant cependant le bénéfice que peuvent en retirer certains élèves :

111 Ens. *Résoudre un problème : résoudre, c'est le comprendre, et le rédiger pour montrer qu'on l'a compris. Parce que le comprendre en faisant un dessin, ça ne montre pas. Il n'y a pas la rédaction qui montre à celui qui le lit qu'il a compris. Le dessin aide, enfin, je trouve que ça manque de rigueur dans cette façon de faire.*
112 Ch. *C'est un moyen pour arriver à la solution ?*
113 Ens. *C'est un moyen oui. Un moyen, mais ce n'est pas rédigé.*
114 Ch. *Mais à partir du moment où alors l'élève après est arrivé finalement au bout, il a résolu ?*
115 Ens. *Il est arrivé au bout, mais il est arrivé au bout, mais il n'a pas résolu. Il n'a pas… Lui par exemple il posait un problème. L'enfant faisait un dessin et il mettait : "Il reste tant de…" C'était bon. Mais moi il me manque quelque chose dans cette rédaction.*
116 Ch. *Qu'est-ce qu'il vous manque ?*
117 Ens. *Eh bien, ce qu'il cherchait. Déjà. La phrase. Pour moi, je veux dire, on me met la résolution d'un problème d'un enfant où il y a un dessin, une phrase - réponse, je vais lui dire : "Moi, je suis incapable de trouver l'énoncé". Un enfant qui résout en mettant une question, une opération, et une phrase - réponse, je peux lui construire un énoncé.* **(Enseignant classe n°3)**

Les enseignants des classes n^{os} 2, 4 et 6 exigent eux aussi une forme rédigée et normée *Solution / Opération* comme indiquée précédemment. Ils encouragent cependant le recours à un autre registre : le registre iconique :

70 Ens. *J'ai voulu passer par une représentation schématique du problème. Donc essayer de visualiser les 85 images et puis voir que si on rajoutait des images on sortait. Pour essayer de visualiser ce que disait l'élève.*
71 Ens. *Pour essayer de montrer que ce n'est pas la bonne démarche.*
72 Ch. *Et c'est une pratique fréquente chez vous ?*

73 Ens. *Oui. Un schéma très rapide comme cela au tableau. ? Ça marche quand c'est expliqué individuellement. Collectivement, pas toujours. Pas toujours parce que tous les élèves n'ont pas la même représentation dans la tête donc forcément. Aujourd'hui, on a expliqué un problème. Il y avait un enfant qui avait un problème avec 230 livres dans une bibliothèque. Il y avait 120 BD. Il fallait trouver le nombre de romans. Et il ne comprenait pas. Il ne comprenait pas du tout simplement les termes de livres et romans. Il ne comprenait vraiment pas le terme de "roman". Donc il ne voyait pas. Et il disait : "Mais il y en a 230. Il n'y a pas de calcul à faire." Donc on est passé par le schéma, individuellement sur le cahier. On a pris un autre exemple concret avec "trousse" et "crayons" et puis il est allé faire la correction au tableau. Parce que souvent aussi ce sont les élèves qui corrigent au tableau et donc il est passé au tableau et pour expliquer à ses camarades, puisqu'il y en a beaucoup qui n'ont pas réussi à le faire, il est passé par le même schéma et il a su expliquer. Donc lui, ça lui avait parlé, quelque part, ce schéma.* **(Enseignant classe n°2)**

24 Ens. *(…) Donc pour les apprendre un petit peu à fixer leur attention, et puis traduire chaque élément de l'énoncé par un petit schéma.* **(Enseignant classe n°4)**

78 Ens. *Disons qu'on a présenté différents types de présentations et là-dedans le schéma linéaire, le segment.* **(Enseignant classe n°4)**

Les enseignants des classes n^{os} 7 et 8 confrontent les élèves à l'usage des trois registres : textuel, numérique, iconique. Cependant, il nous semble que tout se passe comme si chaque élève utilisait un registre et le recours à d'autres registres s'opérait a posteriori, lors de la phase de mise en commun et ce, sous la conduite de l'enseignant.

4 Ens. *(…) J'ai essayé de bien leur faire comprendre qu'un problème ce n'était pas une seule façon d'y arriver, qu'ils pouvaient par différents chemins arriver à résoudre le même problème, que ce soit par un dessin, par une opération. Il paraît qu'il y a des enfants qui ont besoin de concret, de manipuler, et puis d'autres qui, tout de suite, sont dans l'abstraction. (…)* **(Enseignant classe n°7)**

54 Ens. *(…) Je me suis arrangée simplement pour appeler des groupes qui avaient utilisé des méthodes différentes. (…) après j'ai appelé un groupe qui avait fait autre chose qu'un dessin. (…)*

55 Ch. *Alors cette méthode fonctionne avec le nombre d'élèves considéré dans la classe. Mais imaginons que ce soit 150 personnes dans la salle.*

56 Ens. *Oui. C'est ce que je leur ai dit aussi. Le problème, c'est que lorsqu'on fait un dessin, on l'avait déjà vu, (…) Donc oui, effectivement, pour des nombres plus grands, après ça ne marche pas. Donc c'est là qu'on voit après l'utilité de l'opération. (…) Là, ils ne se sont pas trompés, mais il est arrivé qu'ils ne fassent pas le bon nombre de points ou de barres et là ça fausse tous les résultats après. Donc on voit que c'est effectivement une bonne méthode quand on a des petits nombres, et qu'on est sûr de ne pas s'être trompé en dessinant. Oui, on a vu qu'avec les plus grands nombres, on était obligé de passer par l'opération. Oui, ça on l'a vu, oui.*

57 Ch. *Et est-ce que cette représentation constitue une aide pour passer à l'opération ?*

58 Ens. *Je pense parce que quand elles barrent, quand elles font l'action de barrer, c'est vraiment l'action d'enlever. Donc je pense que ça les aide bien ça oui. Elles suppriment vraiment quand elles barrent et ça permet vraiment de voir dans sa tête qu'il faut enlever dans sa tête. Oui.* **(Enseignant classe n°7)**

L'enseignant (classe n°7) souligne que si la représentation iconique n'avait pas été donnée par un élève, il n'en aurait pas mentionné le recours. Autrement dit, l'usage de la conversion de représentations est soumis ici à la proposition d'un élève.

> 59 Ch. *Et comment cette représentation alors a t-elle été introduite dans la classe ? A l'initiative de qui ?*
> 60 Ens. *La représentation des dessins ?*
> 61 Ch. *Oui*
> 62 Ens. *Eh bien, par les enfants. Par les enfants. Oui, oui. Par les enfants puisque, à chaque fois, je leur ai dit, "vous êtes... " au départ puisque après, on contraint, mais au départ ils étaient complètement libres, donc c'est eux qui ont apporté les dessins.*
> 63 Ch. *Et alors, si cette représentation n'était pas ressortie ?*
> 64 Ens. *Eh bien, je ne les aurais pas forcés... S'ils ne l'avaient pas fait, c'est qu'ils n'en avaient pas besoin, donc je n'aurais pas imposé un dessin, à ce moment-là. Surtout après, ce que l'on vise, c'est quand même l'opération et pas le dessin. Par contre, si par des opérations, il y avait des opérations qui n'étaient pas du tout adaptées, on aurait pu passer par le dessin et à ce moment-là : "Bon on va essayer de représenter les choses, on va dessiner. Qui est-ce qui vient me proposer un dessin ?" Et puis par le dessin on comprend.*
> 65 Ens. *là, c'est venu d'eux. Le dessin au départ est venu d'eux.* **(Enseignant classe n°7)**

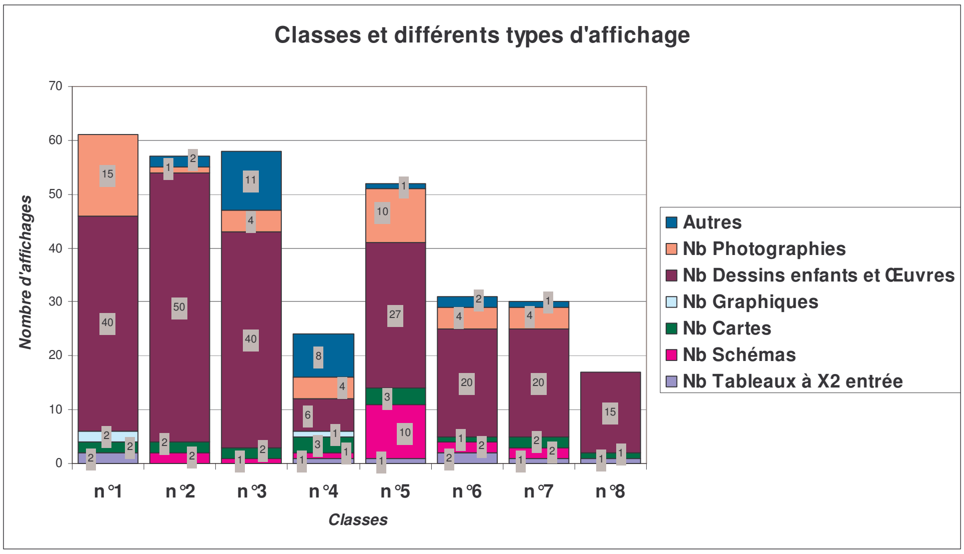
> 158 Ens. *Alors au tableau, il va y avoir « Marc mesure 1 mètre 54 », donc il va y avoir « Marc », « une flèche », « 1 mètre 54 cm » et « Pierre », par exemple on va le deviner. On va dessiner. Qui est-ce qui est le plus petit ? Qui est-ce qui est le plus grand ? et puis on va mettre la taille de Pierre et ils vont trouver ensuite celle de Marc. Ils ont le cahier vert et puis ils font leur opération, et après ils me disent « Eh bien Marc mesure tant ».* **(Enseignant classe n°8)**

Dans les classes n^{os} 4 et 5, les élèves nous paraissent être confrontés à l'usage de différents registres, y compris les registres iconiques, de par les documents constitutifs de l'énoncé (voir annexe 41) qui leur est proposé.

Cependant, l'observation des cahiers des élèves de chacune de ces classes révèle une quasi-absence de ce registre iconique. Tout se passe, à l'exception de la classe n°2, comme si les élèves étaient contraints à l'usage exclusif des registres textuel et numérique, réservant un recours a posteriori au registre iconique lors des phases de correction, dans le but de fournir une aide aux élèves en difficultés.

3.1.4.1.3. Les différents registres de représentation présents dans les affichages de la classe

L'analyse du questionnaire a révélé la répartition suivante des affichages par classe.



Graphique 26 : ***Répartition des affichages dans les classes***

Les affichages présents dans la salle de classe sont majoritairement constitués de productions artistiques relevant soit de la production d'élèves, soit de reproductions d'œuvres d'artistes (218 sur un total de 330). La présence de photographies arrive en seconde position (42 sur un total de 330). En revanche, les schémas sont peu nombreux (18 sur 330) ; sauf dans la classe n°5 où ils sont à égalité en nombre avec les photographies. Ils sont totalement absents des affichages dans les classes n^{os} 1 et 8. Les graphiques se révèlent encore moins nombreux que les schémas (3 vs 18) puisqu'ils sont absents dans six classes sur les huit composant notre échantillon.

3.1.4.2. Synthèse

L'analyse des pratiques des enseignants, à travers l'observation de différentes séances, de productions d'élèves ou à travers les entretiens révèle que les enseignants confrontent leurs élèves à l'usage de plusieurs registres de représentation. Les deux registres les plus fréquemment mobilisés sont les registres textuel et numérique. Cette présence majoritaire semble devoir être attribuée en grande partie à l'exigence d'une forme normée de réponse des élèves incluant un passage obligé par la rédaction d'une *Solution* au problème et la pose d'une *Opération*, les deux parties faisant souvent l'objet d'une séparation matérielle par un trait. Cet usage qui perdure depuis des décennies comme en attestent des extraits de cahiers[166] datant de 1911 et de 1929 semble de nos jours associé d'une part à un rituel, d'autre part à la matérialisation d'étapes dans la résolution du problème, en demandant dans certains cas à l'élève de reformuler dès le début de son activité ce qu'il cherche et, à la fin, lors de la phase de conclusion, de rédiger la réponse qu'il donne. Les calculs correspondants sont exigés dans

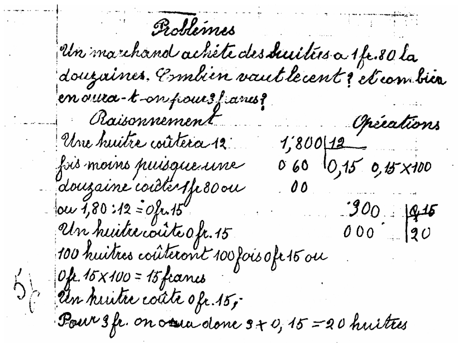
[166] Voir figures 69 et 70.

la colonne réservée aux opérations. Dès lors qu'il s'agit d'un problème complexe au sens où sa résolution nécessite la détermination d'étapes intermédiaires, certains enseignants imposent l'écriture des phrases correspondant à chacune de ces étapes.

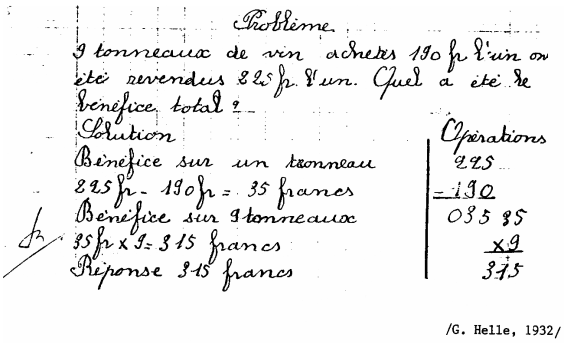
La forme normée exigée pour la rédaction de la solution d'un problème à données numériques impose à l'élève l'usage des deux registres textuel et numérique. Le recours fréquent à ces deux registres n'exclut pas pour autant un recours au registre iconique dont la place ne fait pas l'objet d'un consensus chez les enseignants. Certains rejettent l'usage du registre iconique, en évoquant la priorité à donner à la forme calculatoire ; ils soulignent néanmoins l'aide que la production d'un dessin ou d'un schéma peut apporter à des élèves en difficulté dans la résolution de problèmes. Autrement dit, le recours au registre iconique semble parfois admis comme recours a posteriori pour aider l'élève en difficulté dès lors que le recours à la forme calculatoire a échoué. En aucun cas, lors des séances observées, il n'est proposé comme *instrument* initial a priori utile lors de la résolution. Ainsi, on reste souvent dans des opérations de traitement au sein du registre numérique. Les opérations de conversion entre les registres iconique, textuel ou numérique sont parfois présentes lors des phases de correction ; ces opérations semblent alors plutôt à la charge de l'enseignant qui invite à effectuer les conversions a posteriori, à partir des représentations issues de différents registres et présentées en mode collectif par différents élèves. Le registre iconique est peu présent dans les cahiers[167] des élèves, au niveau de la résolution des problèmes, ces observations confirmant ainsi celles effectuées lors de l'étude longitudinale (Partie 2). Les schémas et graphiques sont pratiquement toujours absents à l'exception de la classe n°2 où l'enseignant réalise au tableau ce que nous nommerons un *dessin schématisé* du fait que cette production revêt davantage un aspect figuratif que schématique.

Le registre iconique est majoritaire au niveau des affichages dans les classes, toutes catégories d'affichages confondues. Il est essentiellement mobilisé au niveau des arts visuels, à travers l'affichage de productions artistiques des élèves ou bien de reproductions d'œuvres d'artistes.

En résumé, nous pouvons à ce stade de notre réflexion, et au regard des séances observées, conclure à l'utilisation majoritaire des deux registres de représentation textuel et numérique dans les classes.


Problèmes
Un marchand achète des huîtres à 1 fr. 80 la douzaines. Combien vaut le cent ? et combien en aura-t-on pour 3 francs ?
Raisonnement — Opérations
Une huître coûtera 12 fois moins puisque une douzaine coûte 1 fr 80 ou ou 1,80 : 12 = 0 fr. 15 — 1,800 | 12 ; 0 60 | 0,15 ; 00 — 0,15 × 100
Un huître coûte 0 fr. 15
100 huîtres coûteront 100 fois 0 fr 15 ou 0 fr. 15 × 100 = 15 francs — 300 | 0,15 ; 000 | 20
Un huître coûte 0 fr. 15,
Pour 3 fr. on aura donc 3 ÷ 0,15 = 20 huîtres

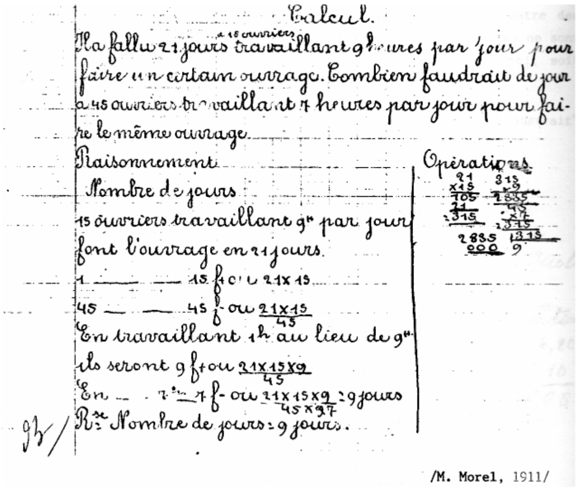
/A. Nazé, 1929/


Problème
9 tonneaux de vin achetés 190 fr l'un ont été revendus 225 fr. l'un. Quel a été le bénéfice total ?
Solution — Opérations
Bénéfice sur un tonneau
225 fr - 190 fr = 35 francs — 225 − 190 = 035
Bénéfice sur 9 tonneaux
35 fr × 9 = 315 francs — 35 × 9 = 315
Réponse 315 francs

/G. Helle, 1932/

Figure 75 : ***Problèmes (Harlé, 1984, p.214, p. 213)***

[167] Tous cahiers confondus : cahiers de brouillon et cahiers de classe.


Calcul.

Il a fallu 21 jours à 15 ouvriers travaillant 9 heures par jour pour faire un certain ouvrage. Combien faudrait de jour à 45 ouvriers travaillant 7 heures par jour pour faire le même ouvrage.

Raisonnement — Opérations

Nombre de jours

15 ouvriers travaillant 9h par jour font l'ouvrage en 21 jours.

1 — — 15 f. ou 21x15

45 — — 45 f. ou $\frac{21x15}{45}$

En travaillant 1h au lieu de 9h ils seront 9 f. ou $\frac{21x15x9}{45}$

En — 7h — 7 f. ou $\frac{21x15x9}{45x7}$ = 9 jours

Rse Nombre de jours = 9 jours.

/M. Morel, 1911/

Figure 76 : ***Problème (Harlé, 1984, p. 218)***

3.1.5. La place de la mise en réseau des connaissances

L'expression *mise en réseau* est employée ici dans le sens de *mise en relation*, de *connexion entre deux savoirs*.

Nous identifions la place que les enseignants accordent dans leur enseignement à la mise en réseau (i) de notions préalablement étudiées ou de procédures déjà utilisées, (ii) de connaissances issues de la vie quotidienne.

Pour ce faire, nous repérons à quels moments et dans quelles conditions ils incitent les élèves à cette mise en réseau.

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux pratiques des enseignants en situation d'enseigner la résolution de problèmes et, comme pour les précédentes études, nous situons nos investigations dans la salle de classe.

Dans un second temps, nous examinons s'il existe des concertations entre les enseignants d'une même école pour la mise en place des séances de résolution de problèmes.

Nous utilisons les données issues de l'analyse des séances observées et des entretiens d'autoconfrontation simple.

3.1.5.1. Résultats

3.1.5.1.1. Place de l'incitation à la mise en réseau des connaissances

Les enseignants incitent-ils leurs élèves à procéder à une *mise en réseau* des connaissances ? Si oui, (i) pour quelles notions, ou pour quelles procédures ?, (ii) comment opèrent-ils ?

3.1.5.1.1.1. Notions et procédures mises en réseau

Nous distinguons la *mise en réseau* de notions ou de procédures préalablement abordées et celles se référant à des connaissances relevant de la vie quotidienne.

Nous identifions dans les propos des enseignants des classes n^{os} 2, 5 et 6 une incitation à établir des liens entre d'une part, les situations proposées et d'autre part, des notions mathématiques préalablement étudiées :

357	32.41	Ens.→Cl.	*(…) Alors, vous vous rappelez quand on avait fait des quadrillages on avait dessiné par exemple (L'enseignant trace un quadrillage de 3 carreaux sur 2 au tableau. Là cela représente quel produit ? Je voudrais bien que tout le monde s'en rappelle. Tout le monde, tout le monde.* **(Classe n°6 – Séance n°1)**
704	71.58	Camille	*Je ne me rappelais plus qu'il y avait…*
705	72.01	Ens.→Él.	*Tu ne te rappelais plus, je n'ai pas compris.*
706	72.04	Camille	*Qu'il y avait des multiplications.* **(Classe n°6 – Séance n°1)**

54	Ens.	*C'est quelque chose que l'on fait souvent. Quand un enfant n'a pas fait la même opération, même s'il n'a pas le même résultat, et bien je demande souvent quelles autres opérations ils ont fait parce que quelquefois ils peuvent avoir trouvé une autre façon de faire, assez souvent d'ailleurs, que ça va très bien donc on met plusieurs solutions au tableau, mais ce que j'aime bien, c'est leur demander pourquoi ils ont fait telle ou telle opération. On ne le fait pas systématiquement, selon le temps que l'on a, mais là comme on est vraiment en situation d'apprentissage (…)* **(Enseignant classe n°6)**

5	01.27	Ens.→Cl.	*Alors jusqu'à présent, on avait des énoncés de problèmes et il fallait trouver des questions et il fallait savoir si les questions qu'on avait trouvées pouvaient être lues soit directement dans l'énoncé, soit…*
6	01.46	Élève	*Dans des calculs.*
7	01.47	Ens.→Cl.	*Elles étaient possibles en faisant des calculs. Aujourd'hui, ce n'est pas du tout la même chose. (…)* **(Classe n°2 – Séance n°1)**

22	Ens.	*On y a fait allusion samedi dernier. Je sais qu'on en a reparlé. Oui justement, parce qu'on cherchait la question qui correspondait à, et certains ont mis une question à laquelle on ne pouvait pas répondre. Il n'y avait pas assez de renseignements, de données dans l'énoncé. Et ils se sont souvenus de ce qu'on avait fait ce jour-là.* **(Enseignant classe n°5)**

Les enseignants font fréquemment établir des liens avec la vie quotidienne, pour expliquer soit des mots ou expressions, soit des situations ; par exemple :

66	10.44	Ens.→Cl.	*Alors qu'est-ce que c'est une collection ? Qui nous explique ça ? (Plusieurs élèves lèvent le doigt.)*
67	10.48	Ens.→Él.	*Sonia.*
68	10.49	Sonia	*Pour les timbres. Quand on a plein de timbres, c'est une collection.*
69	10.56	Ens.→Cl.	*Voilà, quand on a plusieurs choses, c'est…*
70	10.59	Sonia	*Et après on achète des timbres, pour qu'ils soient tous complets.*
71	11.04	Ens.→Él.	*Oui, voilà.*
72	11.07	Élève	*(Un autre élève.) Moi je fais la collection des coquillages.* **(Classe n°2 – Séance n°1)**

3.1.5.1.1.2. Dévolution de la mise en réseau

Nous cherchons à savoir si l'initiative de la *mise en réseau* appartient à l'enseignant ou si ce dernier procède à sa dévolution.

Les données analysées révèlent que la *mise en réseau* semble être souvent effectuée par l'enseignant lui-même qui l'expose ensuite ou la propose aux élèves. Cette mise en réseau vise à :

- conduire les élèves pas à pas dans un cheminement (classe n°6)

> 66 Ens. *En fait, là, comme ça introduisait une autre notion, la notion de multiplication, j'ai préféré rappeler ce qu'on avait vu assez récemment, donc ce que représentait la multiplication. Parce que ça leur avait plu cette façon de faire pour pas qu'ils amalgament avec les additions qu'on avait faites avant. Ce qui rejoint un petit peu le sens des opérations.* **(Enseignant classe n°6)**

- aider les élèves lors de la passation d'une épreuve d'évaluation (classe n°6)

> 61 Ch. *Et après, l'élève a-t-il par exemple trois semaines plus tard le même type de problème, voir le même problème à faire ? Est-ce que cela s'est déjà produit ?*
> 62 Ens. *Des problèmes similaires, oui. Parce que je peux leur redonner lors des contrôles. C'est similaire un peu ce que je donne dans un contrôle pour pas qu'ils soient complètement perdus. (…)* **(Enseignant classe n°6)**

Toutefois, la *mise en réseau* peut s'effectuer lors de phases de recherche en groupe :

> 12 Ens. *(…) Ils écoutent bien les réponses des uns et des autres.* **(Enseignant classe n°4)**

En résumé, au vu des séances observées, cette mise en réseau des apprentissages est effective dans les classes. Toutefois, elle nous semble en grande partie relever davantage de l'initiative de l'enseignant que de celles des élèves.

Afin de caractériser plus en détails ces phases de mise en réseau, nous nous proposons d'examiner en 3.1.6. les phases de correction.

3.1.5.1.2. Enseignements concertés entre les enseignants d'une même école

3.1.5.1.2.1. À l'intérieur du cycle 3

Malgré une absence de programmation de cycle en résolution de problèmes révélée par les réponses au questionnaire, quatre enseignants sur les huit (classes n^{os} 3, 4, 6 et 7) déclarent avoir connaissance des pratiques de leur collègue de CM1 dans ce domaine. Il en ressort, aux dires des enseignants eux-mêmes analysant leurs pratiques entre CE2 et CM1 :

- Des points de convergence : (i) dans l'utilisation occasionnelle du même manuel scolaire (enseignant de la classe n°4) ; (ii) dans l'importance accordée aux différentes procédures possibles pour la résolution d'un problème (enseignant de la classe n°7).
- Des points de divergence : (i) au niveau des outils : dans la classe de CM1 de la même école que la classe CE2 n°3, les élèves disposent d'un cahier *spécial résolution de problèmes* et se voient distribuer une série de problèmes à résoudre dans la semaine. (ii) au niveau de la progression.

L'enseignant de CE2 (classe n°3) explique cette divergence par l'absence de progression de cycle, et aussi implicitement, par l'absence de concertation sur les parcours d'apprentissage des élèves :

> 107 Ch. *Et alors, est-ce que c'est quelque chose qui est poursuivi ensuite en CM1, en CM2 ?*
>
> 108 Ens. *Je ne sais pas (rires) parce qu'on n'a pas de progression de cycle en mathématiques. Mais je pense que Monsieur XX en problèmes il doit pas mal travailler comme moi parce qu'il disait que déjà avec ce que j'avais fait, les élèves progressaient pas mal. Ils ont déjà compris pas mal de choses. Maintenant, je ne sais pas s'il utilise les parenthèses comme cela, je ne peux pas dire. C'est vrai que ça serait intéressant parce que finalement pour les amener au collège, s'ils savent déjà faire des choses comme cela, c'est quand même…, c'est une bonne partie du calcul tout cela.* **(Enseignant classe n°3)**

3.1.5.1.2.2. Entre le cycle 2 et le cycle 3

Deux enseignants (classes n^{os} 4 et 7) sur les huit disent connaître les pratiques d'enseignement de la résolution de problèmes de leur collègue de CE1. Les points de convergence portent sur les similitudes dans l'utilisation d'une même méthode (classe n°4) et dans la présentation des réponses données par les élèves (classe n°7). Pour cette classe n°7, l'enseignant ajoute :

> 84 Ch. *Est-ce que l'an passé, quand ils étaient en CE1, ils avaient l'habitude de fonctionner ainsi ?*
>
> 85 Ens. *Je sais qu'ils faisaient beaucoup de travail de groupe aussi l'année dernière donc c'est peut-être pour cela aussi que ça se passe très bien quand on travaille en groupes, maintenant dans les résolutions de problèmes, je ne pourrai pas dire. On n'en a pas vraiment discuté avec la collègue. Donc là, je ne sais pas. Je ne sais pas. Mais en même temps, je ne les ai jamais sentis vraiment apeurés par les problèmes donc je suppose qu'ils ont quand même eu l'habitude d'en faire régulièrement.* **(Enseignant classe n°7)**

Pour les autres classes, les enseignants avouent méconnaître les pratiques de leurs collègues de CE1 :

> 8 Ch. *Et c'est une habitude que vous leur donnez ou qu'ils avaient déjà en CE1 ?*
>
> 9 Ens. *Ah non. Je ne pense pas : Parce qu'ils ne m'en ont jamais parlé et puis, je n'ai pas demandé aux collègues, mais je ne pense pas.* **(Enseignant classe n°6)**

Pour expliquer ce manque de concertation inter-cycles, les enseignants évoquent plusieurs raisons : soit l'appartenance à deux cycles différents, le cycle 2 pour le CE1 et le cycle 3 pour le CE2 (classe n°3), soit la priorité donnée à d'autres thèmes de réflexion (classe n°8), soit un renouvellement du personnel de l'équipe pédagogique (classe n°1), soit un manque de temps (classes n^{os} 2 et 6).

3.1.5.2. Synthèse

Nous avons essayé de caractériser la place que les enseignants accordent dans leur pratique d'enseignement à la mise en réseau de notions. Pour ce faire, nous nous sommes intéressée à la mise en réseau des connaissances au sein de la classe et à la mise en réseau des notions étudiées d'une classe à l'autre.

Dans la limite des observations effectuées, nous remarquons que les enseignants connaissent certaines caractéristiques liées aux pratiques de leurs collègues de CM1. Autrement dit, ils ont le souci de connaître comment le *savoir à enseigner* sera enseigné l'année suivante, ce qui laisse entendre l'existence d'une mise en réseau des apprentissages et des pratiques au sein même du cycle 3. En revanche, nous constatons, tant dans les séances observées qu'à travers les entretiens d'autoconfrontation, l'absence de lien entre le cycle 2 et le cycle 3 en ce qui concerne ce champ précis des mathématiques. Les enseignants de CE2 interrogés déclarent en effet peu connaître les pratiques d'enseignement de leurs collègues de CE1. Il n'est aucunement question de remettre ici en cause le professionnalisme reconnu de ces enseignants qui d'ailleurs fournissent des motifs tout à fait recevables à ce manque de liaison inter-cycles. De notre point de vue, cette absence de mise en réseau à ce niveau peut toutefois avoir un effet sur les apprentissages des élèves, dans la mesure où la mémoire à long terme de ces derniers se trouve sans doute moins sollicitée pour un rappel des connaissances antérieures que si les enseignants connaissaient les apprentissages effectués l'année précédente.

En revanche, en nous référant aux séances observées et vidéoscopées, les enseignants font souvent établir des liens entre les situations étudiées et des situations de la vie quotidienne. La mise en réseau avec les notions étudiées à plus court terme, c'est-à-dire au cours de la même année scolaire, nous semble elle aussi présente. Toutefois, à ce stade de notre réflexion, elle nous apparaît comme étant plus orchestrée par l'enseignant que relevant de la propre initiative de l'élève. Nous nous interrogeons sur le degré d'implication de l'élève dans cette mise en réseau de nouvelles connaissances avec des connaissances antérieures.

Le pilotage étroit de l'enseignant nous paraît très présent pour la mise en réseau avec des connaissances préalables, au détriment de la mise en œuvre du processus de dévolution à l'élève.

3.1.6. La phase de correction

3.1.6.1. Résultats

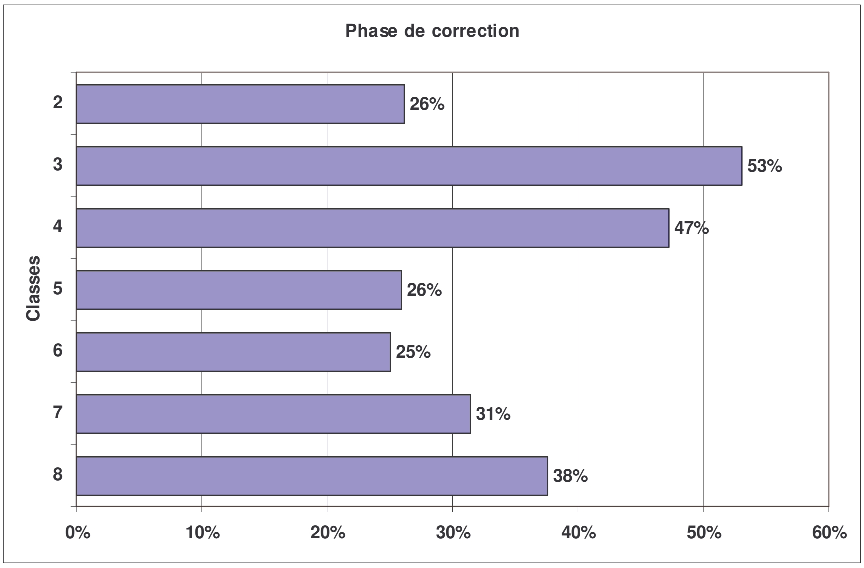
Nous distinguons ici deux modes de correction : le mode individuel et le mode collectif.

En réponse aux items du questionnaire sur le phase de correction des problèmes, 5 enseignants sur 8 déclarent uniquement procéder à une correction collective (classes n^{os} 1, 3, 4, 6, 7). Ce mode collectif est également présent dans deux autres classes (n^{os} 2 et 8) sans toutefois être exclusif puisque les deux enseignants concernés mentionnent également la présence d'une phase de correction individuelle. Dans une classe (classe n°5), l'enseignant ne mentionne que le mode individuel de correction.

Ces données corroborent celles recueillies lors de notre précédente enquête par questionnaire (Voir partie 2 – Paragraphe 3.3.2.) où 73% des enseignants déclaraient que les phases de correction se déroulaient dans leur classe selon un mode collectif, 6% déclaraient opter pour un mode individuel et 21% disaient faire alterner les modes individuel et collectif durant ces phases.

Les analyses des enregistrements vidéoscopés (graphique 23) des séances de type n°1 révèlent que dans 6 classes sur 7 la séance s'achève sur une phase de correction.

Ces phases de correction sont uniques dans 2 classes sur 7 (classes n[os] 2 et 5) tandis qu'elles sont constituées de plusieurs *blocs temporels* dans les autres, le nombre de ces blocs de correction étant de 3 ou 4 selon les classes et correspondant à la correction de chacun des problèmes.



Graphique 27 : ***Comparaison de la durée des phases de correction par classe***

L'enseignant de la classe n°4 orchestre cette phase de correction sous une forme collective (*je sélectionne*), il donne néanmoins la parole aux élèves qui sont ainsi conduits à confronter leurs résultats.

> 53 Ens. *Ah oui. Mais alors dans ce cas-là c'est plutôt sur l'ardoise. On n'utilise pas le cahier. On écrit sur l'ardoise et puis ils me montrent certains résultats. Alors donc je sélectionne justement les résultats un petit peu différents et puis après donc ils viennent expliquer leurs calculs ou leurs démarches et puis on confronte les résultats à ce moment-là. Mais là, ça s'y prêtait moins.* **(Enseignant classe n°4)**

Les données recueillies ne nous permettent pas de dire si l'enseignant apporte habituellement une autre façon de résoudre le problème.

> 43 Ch. *Les phases de correction se déroulent-elles toujours de la même manière ?*
>
> 44 Ens. *Non. Pas toujours. Pas toujours. On fait souvent une mise en commun. Mais ce n'est pas toujours comme cela. Souvent, quand, ... parfois, chaque groupe vient présenter sa solution, vraiment au tableau. Parfois, si tout le monde est d'accord, on garde celle qui est au tableau, mais la plupart du temps, on discute quand même des différentes façons d'arriver au problème. (…)* **(Enseignant classe n°7)**

L'enseignant est souvent confronté à la variabilité des rythmes de travail des élèves, ce qui conduit au paradoxe suivant : des élèves suivent la correction collective de la résolution d'un problème alors qu'ils n'ont pas été confrontés à la lecture de l'énoncé.

> 30 Ens. *Et alors, dans ce cas-là, on corrige. Quand tout le monde en a fait au moins un, on va le corriger et puis ensuite, souvent, il y en a qui en sont au troisième, donc le groupe amorce le deuxième problème. Mais il est vrai que certains vont corriger un problème qu'ils n'auront pas fait, mais ils vont quand même le corriger et essayer de critiquer et de comprendre pourquoi on fait cela. Mais bon, c'est vrai que certains prendront en correction quelque chose où ils n'ont pas eu le temps de réfléchir. Mais je pense que même oralement, écouter la façon de faire peut aussi les aider, même s'ils n'ont pas eu le temps d'y réfléchir. (…)***(Enseignant classe n°3)**

Par ailleurs, on relève que l'enseignant pilote la phase de correction et guide les élèves vers la solution qu'il attend, au détriment de la construction d'une réponse prise en charge par l'élève :

> 59 Ch. *(…) Est-ce que vous laissez par exemple aller l'élève jusqu'au bout d'un raisonnement erroné, au tableau ?*
>
> 60 Ens. *Ah non. Pas jusqu'au bout d'un raisonnement erroné. Je vais l'arrêter, enfin je vais l'arrêter ? Les autres risquent de l'arrêter avant. Oui. Parce qu'avec une telle discussion en principe ils ne doivent pas arriver à un raisonnement erroné. Parce que là on a tout dit oralement. Il n'a plus qu'à écrire, je veux dire. (…)* **(Enseignant classe n°3)**

Dans chacune des classes observées, c'est une phase de correction qui termine la séance. Les phases de correction s'achèvent par la formalisation de la solution au problème posé. On ne relève pas de synthèse relative aux connaissances acquises au cours de la séance ni de lien entre les problèmes résolus au cours de la séance ou au cours de séances antérieures.

3.1.6.2. Synthèse

Dans chacune des classes de notre échantillon, on relève la présence d'au moins une phase de correction. Le nombre de ces phases varie de 1 à 4 selon les séances observées. Leur durée cumulée varie de 25% à 50% de la durée totale de la séance.

Le mode de correction est essentiellement collectif, venant confirmer les résultats obtenus lors d'une précédente étude (Priolet, 2000) révélant dans ¾ des classes une organisation des phases de correction selon un mode exclusivement collectif.

Les observations des séances révèlent que les enseignants organisent ces phases à partir de différentes procédures utilisées par les élèves afin d'en établir une comparaison. L'enseignant pilote cette phase et nous paraît guider les élèves vers le mode calculatoire, ces observations confirment celles effectuées lors de l'analyse de la mise en réseau de notions, qui nous était également apparue comme majoritairement orchestrée par l'enseignant.

Ces phases de correction clôturent les séances observées. Mais notons toutefois que ces séances ne comportent pas de *phase d'institutionnalisation*.

3.1.7. Synthèse sur l'analyse des pratiques initiales des enseignants

En nous appuyant sur les données recueillies lors de l'enquête par questionnaire, lors des séances de type n°1 et lors des entretiens d'autoconfrontation, nous avons caractérisé les pratiques initiales des 8 enseignants de notre échantillon. Une synthèse a été effectuée pour chacune des caractéristiques analysées.

La synthèse globale relative à ces pratiques initiales sera effectuée dans le cadre de notre discussion générale, en vue d'établir des relations avec d'une part les résultats issus de l'analyse des séances de type n°2 et d'autre part les performances obtenues par les élèves au pré-test et au post-test.

3.2. Analyse des performances des élèves (pré-test et post-test)

Les 137 élèves de notre échantillon ont été soumis à un pré-test et à un post-test. Les données recueillies ont été analysées afin de repérer les écarts de performances entre le groupe-témoin et le groupe-expérimental et entre les différentes classes.

L'ensemble des données figure en annexe 31 pour le pré-test et en annexe 32 pour le post-test.

En vue du traitement statistique, un barème chiffré a été affecté à chaque modalité de performance.

Modalités de performance	Nombre de points attribués
Réussite	1
Échec par réponse erronée	0
Échec par non-réponse	0

Tableau 82 : ***Barème des modalités de performance***

Pour chacun des 12 problèmes retenus pour le traitement, la réussite correspond à la réponse strictement attendue (voir annexe 43).

Pour chaque individu, nous appelons *score global* le total des performances obtenues à chacun des 12 problèmes. Nous distinguons le score global obtenu au pré-test et celui obtenu au post-test (voir annexe 44).

Pour chaque problème, nous appelons *fréquence de réussite* le taux de performance de l'ensemble des individus d'un groupe ou d'une classe donnée.

3.2.1. Scores globaux obtenus au pré-test ou au post-test

Dans un premier temps, nous étudions la corrélation entre les résultats globaux obtenus au pré-test et au post-test sur l'ensemble de l'échantillon.

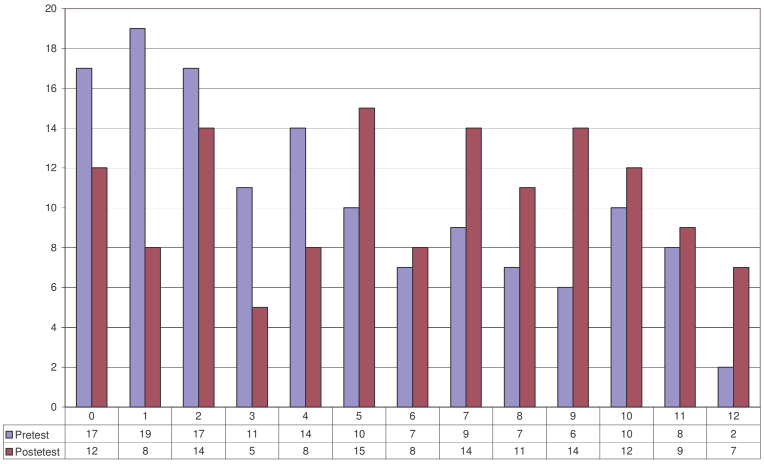
Dans un second temps, nous étudions successivement les scores globaux par groupe (GT et GE) et par classe.

3.2.1.1 Comparaison des résultats au pré-test et au post-test

3.2.1.1.1 Caractéristiques des échantillons des résultats au pré-test et au post-test

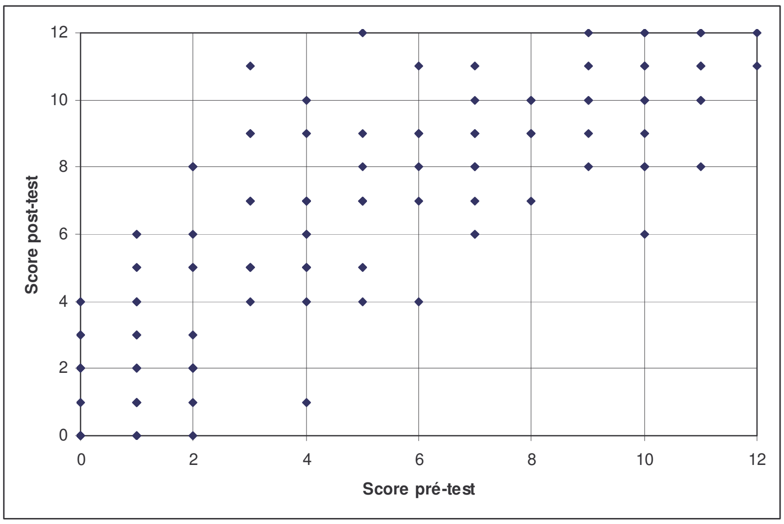
	Pré-test	**Post-test**
Moyenne	4,52	6,00
Écart-type	3,57	3,63
Minimum	0	0
Maximum	12	12
Quartile1	1	3
Quartile2	4	6
Quartile3	7	9

Tableau 83 : ***Descripteurs des échantillons des résultats au pré-test et au post-test***



Graphique 28 : ***Distribution des variables « Score de réussite au Pré-test » et « Score de réussite au post-test » sur l'échantillon total (GT + GE)***

Le calcul du coefficient de Bravais-Pearson (r = 0,82) indique l'existence d'une corrélation positive significative ainsi que le représente le graphique 29.



Graphique 29 : ***Croisement des résultats entre le pré-test et le post-test***

3.2.1.2. Scores globaux par groupe (GT et GE)

3.2.1.2.1. Résultats

Nous nommons *score global par groupe* le total des scores globaux obtenus par chaque individu du groupe.

Pour chaque groupe, nous calculons :

- Les scores globaux au pré-test et au post-test (tableau 84).
- Les descripteurs : minima, quartiles, maxima, moyenne[168], écart-type sur l'ensemble des scores globaux de chaque individu pour le pré-test et le post-test (tableau 85).
- Les écarts entre les moyennes au pré-test et au post-test (tableau 86).

		Effectif	Score global par groupe	
			Pré-test	Post-test
Groupes	Témoin	65	304	364
	Expérimental	72	315	457

Tableau 84 : ***Scores globaux par groupe (pré-test et post-test)***

		Minima	Quartile 1	Quartile 2	Quartile 3	Maxima	Moyenne	Écart-type
G. T.	Pré-test	0	1	4	8	11	4,68	3,69
	Post-test	0	2	6	9	12	5,60	3,88
G. E.	Pré-test	0	2	4	7	12	4,38	3,50
	Post-test	0	4	6	9	12	6,35	3,39

Tableau 85 : ***Descripteurs de chaque groupe (pré-test et post-test)***

La comparaison des moyennes au pré-test et au post-test pour chacun des groupes révèle des progrès plus importants pour le groupe-expérimental que pour le groupe-témoin. Le groupe-expérimental qui, lors du pré-test, avait une moyenne inférieure à celle du groupe-témoin obtient, lors du post-test, une moyenne supérieure.

Maintenant, nous comparons les moyennes des scores globaux entre les groupes (GT et GE).

Nous considérons les progrès de chaque groupe en calculant les écarts entre la moyenne des scores globaux au post-test et la moyenne des scores globaux au pré-test (Tableau 86).

		Moyenne Pré-test	Moyenne Post-test	Écart moyen (Post-test moins Pré-test)
Groupes	Témoin	4,68	5,60	0,92
	Expérimental	4,38	6,35	1,97

Tableau 86 : ***Moyenne par groupe (pré-test et post-test) et écart (pré-test / post-test) par groupe***

[168] La moyenne des performances se situe dans l'intervalle [0 ; 12].

Pour le groupe-témoin, l'écart entre la moyenne au post-test et la moyenne au pré-test est de +0,92, ce qui signifie qu'en moyenne, le groupe-témoin réussit un problème de plus au post-test qu'au pré-test.

Pour le groupe-expérimental, l'écart entre la moyenne au post-test et la moyenne au pré-test est de +1,97, ce qui signifie qu'en moyenne, le groupe-expérimental réussit deux problèmes de plus au post-test qu'au pré-test.

Les résultats du groupe-témoin suggèrent que l'école remplit sa mission d'amélioration des compétences : le groupe a en moyenne progressé entre les deux passations. Les résultats révèlent que le groupe-expérimental a progressé deux fois plus que le groupe-témoin. Cependant, avant de conclure, il nous faut tester la significativité de ces résultats.

Pour tester l'égalité des moyennes des scores au pré-test et au post-test au sein respectivement du groupe-témoin et du groupe-expérimental, nous utilisons le test de Student pour échantillons appariés.

Pour tester l'égalité des moyennes, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'égalité et H_1, l'hypothèse alternative.

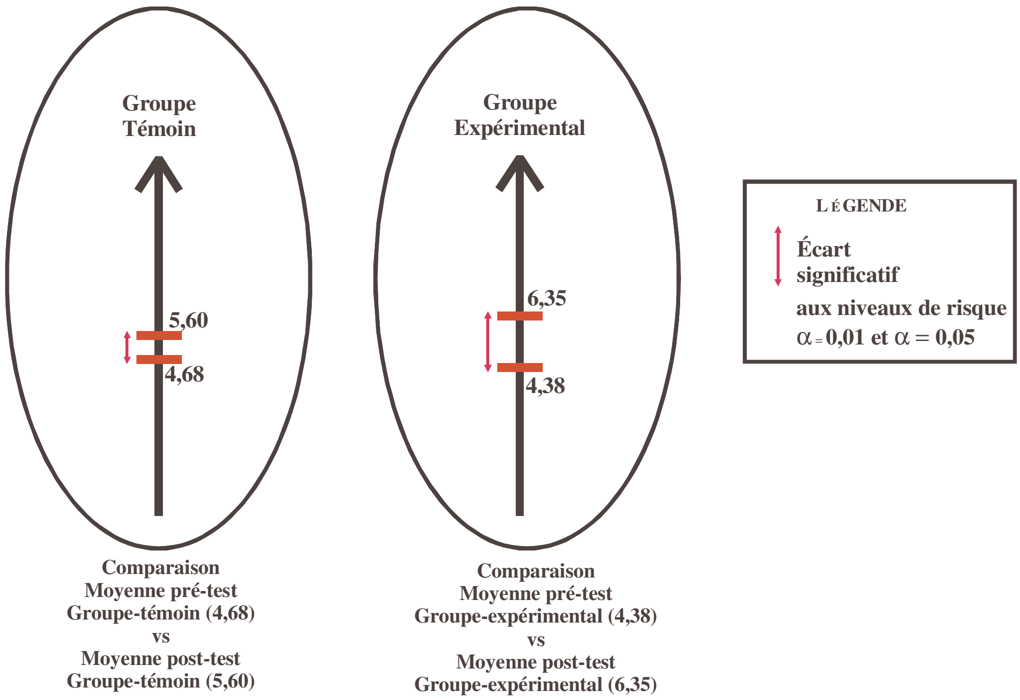
En application du test de Student, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 87) :

	Comparaison de moyennes		**t de Student**	**ddl**	**Valeur critique $\alpha = 0,01$**	**Résultats**	**Valeur critique $\alpha = 0,05$**	**Résultats**
Moyennes	**Pré-test du groupe-témoin**	**Post-test du groupe-témoin**	3,78	64	2,65	Rejet de H_0	2,00	Rejet de H_0
	Pré-test du groupe-expérimental	**Post-test du groupe-expérimental**	7,65	71	2,65	Rejet de H_0	1,99	Rejet de H_0

Tableau 87 : ***Comparaison intra-groupe des moyennes***

On en déduit que, pour les deux comparaisons effectuées, on peut rejeter H_0, tant au niveau de risque $\alpha = 0,01$ qu'au niveau de risque $\alpha = 0,05$. Les deux groupes progressent de façon significative entre le pré-test et le post-test.

Le graphique 30 permet de visualiser cette progression.



Graphique 30 : ***Comparaison intra-groupe***

Pour tester l'égalité des moyennes dans les comparaisons suivantes :

- Écart Pré-test / Post-test du groupe-témoin vs Écart Pré-test / Post-test du groupe-expérimental
- Pré-test du groupe-témoin vs Pré-test du groupe-expérimental
- Post-test du groupe-témoin vs Post-test du groupe-expérimental

Nous utilisons le test de Student pour échantillons indépendants.

Nous testons d'abord l'égalité des variances.

Pour cela, nous utilisons le test statistique de Fisher-Snedecor.

Pour tester l'égalité des variances, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'égalité et H_1, l'hypothèse alternative.

En application du test de Fisher-Snedecor, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 88) :

Comparaison de variances			**F de Snedecor ddl (64 ; 71)**	**Résultats α = 0,01 Valeur critique = 1,77**	**Résultats α = 0,05 Valeur critique = 1,49**
Variances	**Écart Pré-test / Post-test du groupe-témoin**	**Écart Pré-test / Post-test du groupe-expérimental**	1,23	Non-rejet de H_0	Non-rejet de H_0
	Pré-test du groupe-témoin	**Pré-test du groupe-expérimental**	1,11	Non-rejet de H_0	Non-rejet de H_0
	Post-test du groupe-témoin	**Post-test du groupe-expérimental**	1,31	Non-rejet de H_0	Non-rejet de H_0

Tableau 88 : ***Test préalable de l'égalité des variances***

On en déduit que, pour les trois comparaisons effectuées, on ne rejette pas H_0, tant au niveau de risque α = 0,01 qu'au niveau de risque α = 0,05. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu.

Pour chacune des trois comparaisons énoncées dans le tableau 88, nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse d'égalité des variances.

Pour tester l'égalité des moyennes, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'égalité et H_1, l'hypothèse alternative.

En application du test de Student, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 89) :

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Comparaison de moyennes</th><th>t de Student</th><th>Résultats
α = 0,01
ddl = 135
Valeur critique = 2,61</th><th>Résultats
α = 0,05
ddl = 135
Valeur critique = 1,98</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Moyennes</td><td>Écart Pré-test / Post-test du groupe-témoin</td><td>Écart Pré-test / Post-test du groupe-expérimental</td><td>2,94</td><td>Rejet de H_0</td><td>Rejet de H_0</td></tr>
<tr><td>Pré-test du groupe-témoin</td><td>Pré-test du groupe-expérimental</td><td>0,49</td><td>Non-Rejet de H_0</td><td>Non-Rejet de H_0</td></tr>
<tr><td>Post-test du groupe-témoin</td><td>Post-test du groupe-expérimental</td><td>1,20</td><td>Non-Rejet de H_0</td><td>Non-Rejet de H_0</td></tr>
</table>

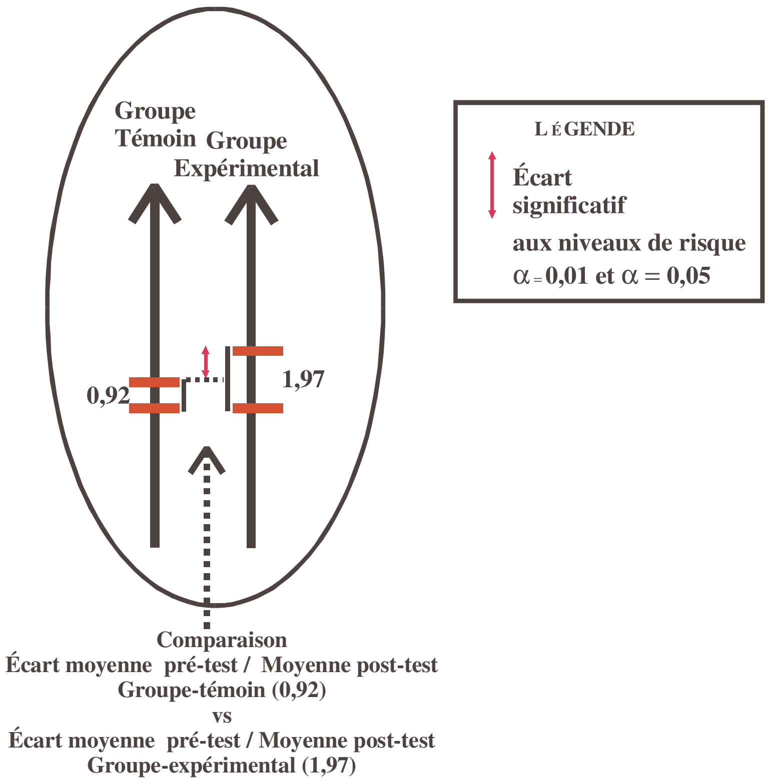
Tableau 89 : ***Comparaison intergroupes, des moyennes et des écarts entre les moyennes***

On en déduit que :

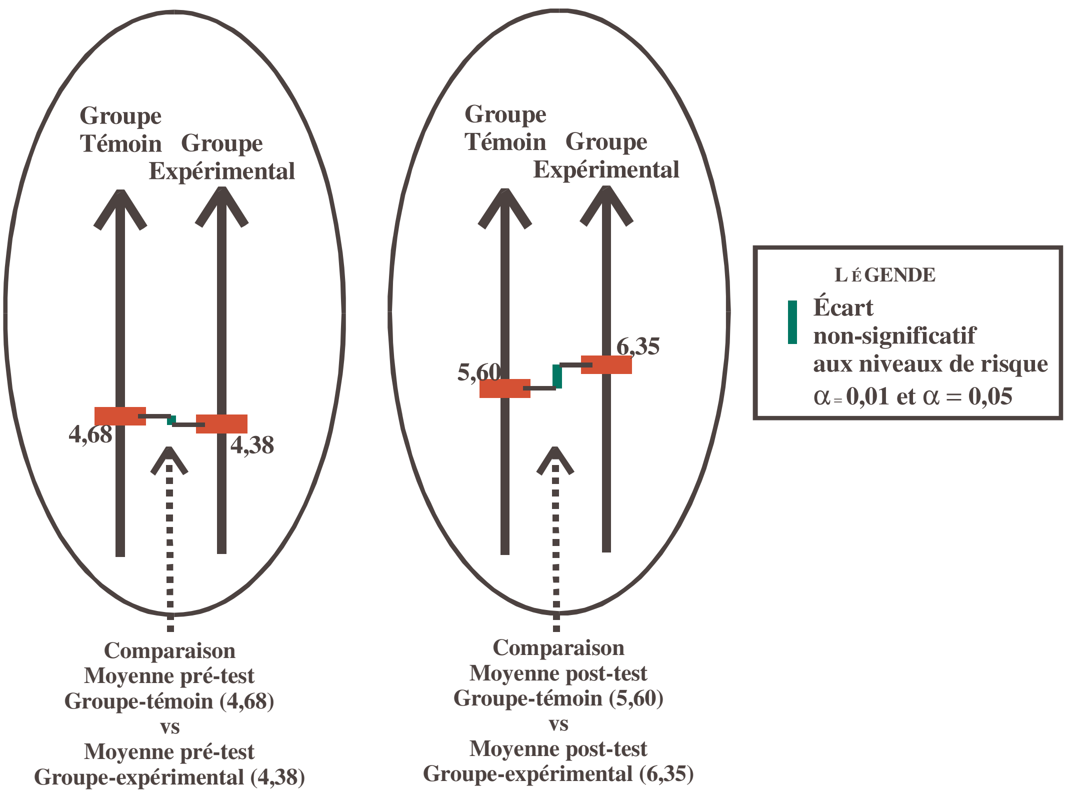
- Pour les deux comparaisons des moyennes du groupe-témoin vs groupe-expérimental, et ce, tant au pré-test qu'au post-test, on ne rejette pas H_0, tant au niveau de risque α = 0,01 qu'au niveau de risque α = 0,05. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu. On peut considérer que les scores des deux groupes sont homogènes tant au niveau du pré-test qu'au niveau du post-test.

- Pour la comparaison des écarts pré-test / post-test entre le groupe-témoin et le groupe-expérimental, on peut rejeter H_0, tant au niveau de risque α = 0,01 qu'au niveau de risque α = 0,05.

Les graphiques 31 et 32 permettent de visualiser ces résultats.



Graphique 31 : ***Comparaison des écarts inter-groupes***



Graphique 32 : ***Comparaison inter-groupes au pré-test et au post-test***

3.2.1.2.2. Conclusion sur les scores globaux par groupe

- Pour le groupe-témoin, l'écart de réussite (0,92) entre les moyennes obtenues lors du pré-test (4,68) et lors du post-test (5,60) est significatif. Le groupe-témoin n'a pas été soumis à l'opérationnalisation de notre cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$ et a néanmoins progressé significativement, ce qui suggère que l'école remplit sa mission d'amélioration des compétences.
- Pour le groupe-expérimental, l'écart de réussite (1,97) entre les moyennes obtenues au pré-test (4,38) et au post-test (6,35) est lui aussi significatif. Ces résultats suggèrent que l'opérationnalisation de notre cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$ a pu avoir un effet sur l'amélioration des performances des élèves.
- L'écart (1,05) entre les moyennes obtenues au pré-test et celles obtenues au post-test (1,97 pour le groupe-expérimental et 0,92 pour le groupe-témoin) est significatif. Les élèves qui ont participé à l'opérationnalisation de notre cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$ réussissent en moyenne un problème de plus que les élèves du groupe-témoin.

3.2.1.3. Scores globaux par classe

3.2.1.3.1. Résultats

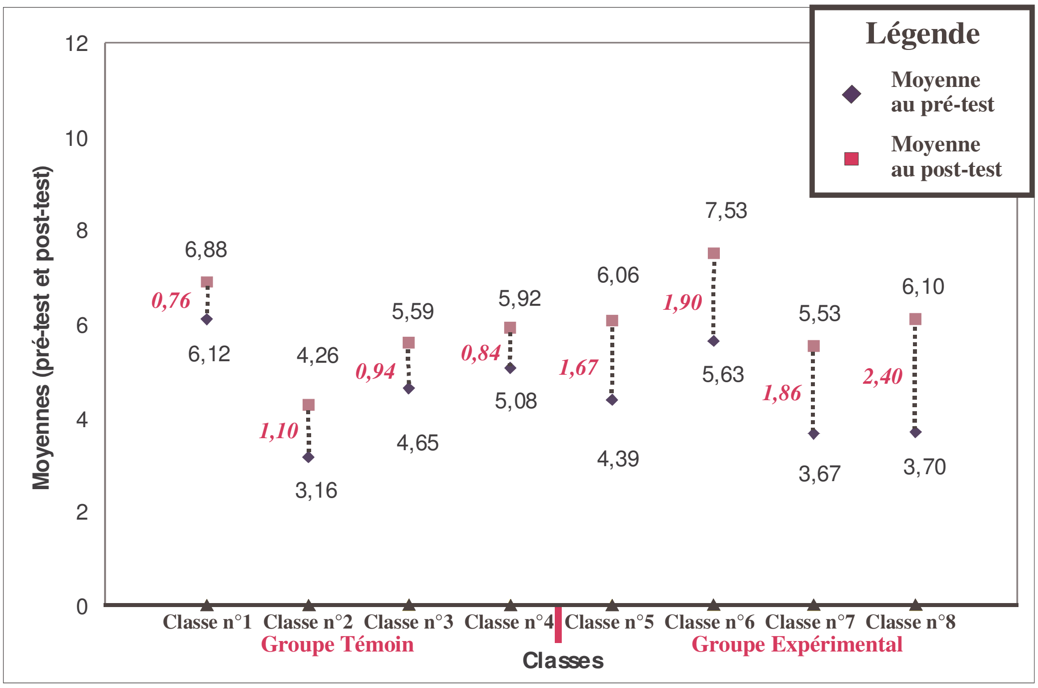
Pour chaque classe, nous calculons :

- Les scores globaux au pré-test et au post-test. Nous nommons *score global par classe* le total des scores globaux obtenus par chaque individu de la classe (tableau 90).
- Les moyennes sur l'ensemble des scores globaux de chaque individu pour le pré-test et le post-test (tableau 90).

		Score global par classe		**Moyenne par classe**	
Classe	**Effectif**	**Pré-test**	**Post-test**	**Pré-test**	**Post-test**
1	17	104	117	6,12	6,88
2	19	60	81	3,16	4,26
3	17	79	95	4,65	5,59
4	12	61	71	5,08	5,92
5	18	79	109	4,39	6,06
6	19	107	143	5,63	7,53
7	15	55	83	3,67	5,53
8	20	74	122	3,70	6,10

Tableau 90 : ***Scores globaux et moyennes par classe (pré-test et post-test)***

La comparaison des moyennes par classe au pré-test et au post-test révèle une forte disparité entre les classes, les moyennes au pré-test varient de 3,16 à 6,12. Les moyennes au post-test varient de 4,26 à 7,53. Maintenant, nous comparons les moyennes obtenues au pré-test et au post-test entre les classes.



Graphique 33 : ***Évolution des moyennes des scores globaux des huit classes entre le pré-test et le post-test***

Le graphique 29 suggère des progrès plus importants pour chacune des quatre classes du groupe-expérimental (Classes n°5 à n°8) que pour chacune des quatre classes du groupe-témoin (Classes n°1 à n°4). La différence entre la moyenne au post-test et la moyenne au pré-test est positive pour chacune des classes (Tableau 91), ce qui signifie que chaque classe a progressé entre le pré-test et le post-test. Cependant, les écarts varient d'une classe à l'autre : par exemple, la classe n°1 réussit en moyenne trois-quarts de problème de plus au post-test qu'au pré-test tandis que la classe n°8 réussit entre deux et trois problèmes de plus entre les deux passations.

Classe	**Moyenne**		**Écart**
	Pré-test	**Post-test**	
1	6,12	6,88	0,76
2	3,16	4,26	1,11
3	4,65	5,59	0,94
4	5,08	5,92	0,83
5	4,39	6,06	1,67
6	5,63	7,53	1,89
7	3,67	5,53	1,87
8	3,70	6,10	2,40

Tableau 91 : ***Moyennes au pré-test, au post-test et écarts entre les moyennes***

Le tableau 91 suggère des progrès pour chaque classe entre les deux passations.

Nous testons l'égalité des variances entre les classes pour les résultats au pré-test.

Pour tester l'égalité des variances, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'égalité et H_1, l'hypothèse alternative.

En application du test de Fisher-Snedecor, nous obtenons la conclusion suivante : la valeur empirique de la statistique de Fisher-Snedecor de 1,15 est inférieure à la valeur théorique $F_{H0}(0,05 ; 7 ; 129) = 2,08$.

On en déduit que l'on ne rejette pas H_0 au niveau de risque $\alpha = 0,05$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu. Il n'y a pas de différences significatives entre les classes au pré-test du point de vue de la moyenne des scores.

Nous testons l'égalité des variances entre les classes pour les résultats au post-test.

Pour tester l'égalité des variances, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'égalité et H_1, l'hypothèse alternative.

En application du test de Fisher-Snedecor, nous obtenons la conclusion suivante : la valeur empirique de la statistique de Fisher-Snedecor de 1,33 est inférieure à la valeur théorique $F_{H0}(0,05 ; 7 ; 129) = 2,08$.

On en déduit que l'on ne rejette pas H_0 au niveau de risque $\alpha = 0,05$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu. Il n'y a pas de différences significatives entre les classes au post-test du point de vue de la moyenne des scores.

Nous comparons les moyennes des classes au pré-test et au post-test. Pour ce faire, nous utilisons le test de Student pour échantillons appariés.

Pour tester l'égalité des moyennes, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'égalité et H_1, l'hypothèse alternative.

En application du test de Student, nous obtenons les conclusions suivantes :

	Comparaison de moyennes **Pré-test vs Post-test**	**t de Student**	**Degrés de liberté**	**Valeur critique $\alpha = 0,05$**	**Résultats $\alpha = 0,05$**	**Valeur critique $\alpha = 0,01$**	**Résultats $\alpha = 0,01$**
Moyennes Classes	**N°1**	1,32	16	2,12	Non-rejet de H_0	2,92	Non-rejet de H_0
	N°2	2,45	18	2,10	Rejet de H_0	2,88	Non-Rejet de H_0
	N°3	1,96	16	2,12	Non-rejet de H_0	2,92	Non-rejet de H_0
	N°4	1,97	11	2,20	Non-rejet de H_0	3,11	Non-rejet de H_0
	N°5	3,14	17	2,11	Rejet de H_0	2,90	Rejet de H_0
	N°6	3,62	18	2,10	Rejet de H_0	2,88	Rejet de H_0
	N°7	4,53	14	2,14	Rejet de H_0	2,98	Rejet de H_0
	N°8	4,29	19	2,09	Rejet de H_0	2,86	Rejet de H_0

Tableau 92 : ***Comparaison de la moyenne au pré-test et de la moyenne au post-test***

On en déduit :

- Pour les classes n^{os} 5, 6, 7, 8, on peut rejeter H_0, tant au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$ qu'au niveau de risque $\alpha = 0{,}05$.
- Pour les classes n^{os} 1, 3, 4, on ne rejette pas H_0, tant au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$ qu'au niveau de risque $\alpha = 0{,}05$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu.
- Pour la classe n°2, on peut rejeter H_0 au niveau de risque $\alpha = 0{,}05$ alors qu'on ne la rejette pas au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$.

3.2.1.3.2. Conclusion sur les scores globaux par classe

S'agissant des moyennes par classe au pré-test et au post-test, les résultats ont révélé une forte disparité entre les classes, puisque les moyennes varient, au pré-test de 3,16 à 6,12 et au post-test de 4,26 à 7,53.

La comparaison des moyennes obtenues au pré-test et au post-test entre les classes révèle que chaque classe a progressé entre le pré-test et le post-test. On relève des progrès plus importants pour chacune des 4 classes du groupe-expérimental (classes n^{os} 5 à 8) que pour chacune des 4 classes du groupe-témoin (classes n^{os} 1 à 4).

Les progrès sont significatifs pour chaque classe du groupe-expérimental au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$. En revanche, pour trois des classes du groupe-témoin (classes n^{os} 1,3,4), la différence de performances n'est pas significative au niveau de risque $\alpha = 0{,}05$. Pour la classe n°2, les progrès sont significatifs au niveau de risque $\alpha = 0{,}05$, et non-significatifs au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$.

3.2.1.4. Comparaison des moyennes des scores globaux en fonction du sexe

Existe-t-il des différences significatives entre les moyennes des scores globaux obtenues par les garçons et par les filles au sein du groupe-témoin et au sein du groupe-expérimental ?

Nous étudions l'effet du sexe sur les moyennes au pré-test et au post-test, pour le groupe-témoin et pour le groupe-expérimental.

Nous comparons successivement les moyennes au sein du groupe-témoin puis au sein du groupe-expérimental.

3.2.1.4.1. Résultats au sein du groupe-témoin

Pour tester l'égalité des moyennes dans les comparaisons suivantes :

- Pré-test du groupe-témoin Masculin *vs* Pré-test du groupe-témoin Féminin

- Post-test du groupe-témoin Masculin *vs* Post-test du groupe-témoin Féminin

Nous utilisons le test de Student pour échantillons indépendants.

Nous testons d'abord l'égalité des variances.

Pour cela, nous utilisons le test statistique de Fisher-Snedecor.

Pour tester l'égalité des variances, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'égalité et H_1, l'hypothèse alternative.

En application du test de Fisher-Snedecor, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 93) :

	Comparaison des variances du groupe-témoin Masculin / Féminin	**Valeur empirique de F de Snedecor ddl (42 ; 21)**	**Résultat (α= 0,01) Valeur critique = 2,62**
Variances	**Pré-test**	0,81	Non-rejet de H_0
	Post-test	1,06	Non-rejet de H_0

Tableau 93 : ***Test préalable de l'égalité des variances***

On en déduit que, pour les deux comparaisons effectuées, on ne rejette pas H_0 au niveau de risque α = 0,01. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu.

Pour chacune des deux comparaisons énoncées dans le tableau 93, nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse d'égalité des variances.

Pour tester l'égalité des moyennes, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'égalité et H_1, l'hypothèse alternative.

En application du test de Student, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 94) :

	Comparaison des moyennes du groupe-témoin Masculin / Féminin	**t de Student**	**Résultats (α = 0,01 ; ddl = 64) Valeur critique = 2,65**
Moyennes	**Pré-test**	0,27	Non-rejet de H_0
	Post-test	0,14	Non-rejet de H_0

Tableau 94 : ***Test de comparaison des moyennes selon le sexe (GT ; Pré-test ; Post-test)***

On en déduit que, pour les deux comparaisons effectuées, on ne rejette pas H_0 au niveau de risque α = 0,01. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu.

On peut considérer que, pour le groupe-témoin, les échantillons masculin et féminin sont homogènes du point de vue du sexe.

3.2.1.4.2. Résultats au sein du groupe-expérimental

Pour tester l'égalité des moyennes dans les comparaisons suivantes :

- Pré-test du groupe-expérimental Masculin vs Pré-test du groupe-expérimental Féminin
- Post-test du groupe-expérimental Masculin vs Post-test du groupe-expérimental Féminin

Nous utilisons le test de Student pour échantillons indépendants.

Nous testons d'abord l'égalité des variances.

Pour cela, nous utilisons le test statistique de Fisher-Snedecor.

Pour tester l'égalité des variances, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'égalité et H_1, l'hypothèse alternative.

En application du test de Fisher-Snedecor, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 95) :

	Comparaison des variances du groupe-expérimental		**Valeur empirique de F de Snedecor ddl (32 ; 38)**	**Résultat (α= 0,01) Valeur critique = 2,21**
	Masculin	**Féminin**		
Variances	**Pré-test**		0,03	Non-rejet de H_0
	Post-test		0,05	Non-rejet de H_0

Tableau 95 : ***Test préalable de l'égalité des variances***

On en déduit que, pour les deux comparaisons effectuées, on ne rejette pas H_0 au niveau de risque α = 0,01. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2$^{\text{ème}}$ espèce β de niveau inconnu.

Pour chacune des deux comparaisons énoncées dans le tableau 95, nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse d'égalité des variances

Pour tester l'égalité des moyennes, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'égalité et H_1, l'hypothèse alternative.

En application du test de Student, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 96) :

	Comparaison des moyennes du groupe-expérimental		**t de Student**	**Résultats (α = 0,01 ; ddl = 71) Valeur critique = 2,65**
	Masculin	**Féminin**		
Moyennes	**Pré-test**		1,19	Non-rejet de H_0
	Post-test		0,10	Non-rejet de H_0

Tableau 96 : ***Test de l'égalité des moyennes selon le sexe (GE ; Pré-test ; Post-test)***

On en déduit que, pour les deux comparaisons effectuées, on ne rejette pas H_0 au niveau de risque $\alpha = 0,01$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de $2^{ème}$ espèce β de niveau inconnu.

On peut considérer que, pour le groupe-expérimental, les échantillons masculin et féminin sont homogènes du point de vue du sexe.

3.2.1.4.3. Conclusion sur l'influence du sexe

Dans les conditions de l'expérimentation, on ne relève pas d'influence du sexe sur les moyennes des performances obtenues dans chacun des deux groupes (GT et GE).

3.2.1.5. Comparaison des moyennes des scores globaux en fonction de l'âge

Existe-t-il des différences significatives entre les moyennes des scores globaux obtenues en fonction de l'âge au sein du groupe-témoin et au sein du groupe-expérimental ?

Successivement, pour le groupe-témoin et pour le groupe-expérimental, nous avons étudié l'effet de l'âge sur les moyennes au pré-test, au post-test, et sur les moyennes des écarts pré-test / post-test.

Deux catégories d'élèves ont été retenues pour ces calculs :
(01-06) : Élèves nés du 01-01-94 au 30-06-94.
(07-12) : Élèves nés du 01-07-94 au 31-12-94.
Nous comparons successivement les moyennes au sein du GT et au sein du GE.

3.2.1.5.1. Résultats au sein du groupe-témoin

Pour tester l'égalité des moyennes dans les comparaisons suivantes :
- Pré-test du groupe-témoin (01-06) *vs* Pré-test du groupe-témoin (07-12)
- Post-test du groupe-témoin (01-06) *vs* Post-test du groupe-témoin (07-12)

Nous utilisons le test de Student pour échantillons indépendants.
Nous testons d'abord l'égalité des variances.
Pour cela, nous utilisons le test statistique de Fisher-Snedecor.

Pour tester l'égalité des variances, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'égalité et H_1, l'hypothèse alternative.

En application du test de Fisher-Snedecor, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 97) :

	Comparaison des variances du groupe-témoin		**Valeur empirique de F de Snedecor ddl (24 ; 30)**	**Résultat (α= 0,01) Valeur critique = 2,47**
	(01-06)	**(07-12)**		
Variances	**Pré-test**		0,93	Non-rejet de H_0
	Post-test		0,53	Non-rejet de H_0

Tableau 97 : ***Test préalable de l'égalité des variances***

On en déduit que, pour les deux comparaisons effectuées, on ne rejette pas H_0 au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu.

Pour chacune des deux comparaisons énoncées dans le tableau 97, nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse d'égalité des variances

Pour tester l'égalité des moyennes, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'égalité et H_1, l'hypothèse alternative.

En application du test de Student, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 98) :

	Comparaison des moyennes du groupe-témoin		**t de Student**	**Résultats (α = 0,01 ; ddl = 54) Valeur critique = 2,67**
	(01-06)	**(07-12)**		
Moyennes	**Pré-test**		0,64	Non-rejet de H_0
	Post-test		1,28	Non-rejet de H_0

Tableau 98 : ***Test de l'égalité des moyennes selon l'âge (GT ; 01-06 ; 07-12)***

On en déduit que, pour les deux comparaisons effectuées, on ne rejette pas H_0 au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu.

On peut considérer que, pour le groupe-témoin, les échantillons (01-06) et (07-12) sont homogènes du point de vue de l'âge.

3.2.1.5.2. Résultats au sein du groupe-expérimental

Pour tester l'égalité des moyennes dans les comparaisons suivantes :

- Pré-test du groupe-expérimental (01-06) vs Pré-test du groupe-expérimental (07-12)
- Post-test du groupe-expérimental (01-06) vs Post-test du groupe-expérimental (07-12)

Nous utilisons le test de Student pour échantillons indépendants.

Nous testons d'abord l'égalité des variances.

Pour cela, nous utilisons le test statistique de Fisher-Snedecor.

Pour tester l'égalité des variances, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'égalité et H_1, l'hypothèse alternative.

En application du test de Fisher-Snedecor, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 99) :

	Comparaison des variances du groupe-expérimental		**Valeur empirique de F de Snedecor ddl (34 ; 26)**	**Résultat (α= 0,01) Valeur critique = 2,47**
	(01-06)	**(07-12)**		
Variances	**Pré-test**		0,18	Non-rejet de H_0
	Post-test		0,49	Non-rejet de H_0

Tableau 99 : ***Test préalable de l'égalité des variances***

On en déduit que, pour les deux comparaisons effectuées, on ne rejette pas H_0 au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu.

Pour chacune des deux comparaisons énoncées dans le tableau 99, nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse d'égalité des variances

Pour tester l'égalité des moyennes, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'égalité et H_1, l'hypothèse alternative.

En application du test de Student, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 100) :

	Comparaison des moyennes du groupe-expérimental		**t de Student**	**Résultats ($\alpha = 0{,}01$; ddl = 60) Valeur critique = 2,66**
	(01-06)	**(07-12)**		
Moyennes	**Pré-test**		1,03	Non-rejet de H_0
	Post-test		0,34	Non-rejet de H_0

Tableau 100 : ***Test de l'égalité des moyennes selon l'âge (GE ; 01-06 ; 07-12)***

On en déduit que, pour les deux comparaisons effectuées, on ne rejette pas H_0 au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$. Nous rappelons que nous nous exposons à un risque de 2ème espèce β de niveau inconnu.

On peut considérer que, pour le groupe-expérimental, les échantillons (01-06) et (07-12) sont homogènes du point de vue de l'âge.

3.2.1.5.3. Conclusion sur l'influence de l'âge

Dans les conditions de l'expérimentation, on ne relève pas d'influence de l'âge sur les moyennes obtenues dans chacun des groupes (GT et GE).

3.2.2. Fréquence de réussite à chaque problème, au pré-test et au post-test

Nous étudions successivement les fréquences de réussite par groupe et par classe.

3.2.2.1. Fréquence de réussite par groupe (GT et GE)

Pour chaque groupe, nous avons calculé pour chaque problème les fréquences de réussite au pré-test et au post-test.

	Groupe-témoin (65)		Groupe-expérimental (72)	
	Fréquence de Réussite			
Problème	**Pré-test**	**Post-test**	**Pré-test**	**Post-test**
1	0,74	0,75	0,72	0,89
2	0,14	0,28	0,18	0,22
3	0,38	0,51	0,36	0,60
5	0,31	0,42	0,28	0,36
6	0,37	0,37	0,26	0,47
7	0,49	0,54	0,38	0,68
8	0,68	0,69	0,71	0,85
9	0,35	0,46	0,39	0,50
10	0,29	0,40	0,29	0,35
11	0,37	0,51	0,35	0,65
12	0,17	0,15	0,17	0,24
13	0,38	0,52	0,29	0,54

Tableau 101 : ***Fréquences de réussite par problème et par groupe (pré-test et post-test)***

La comparaison des fréquences de réussite au pré-test et au post-test révèle des disparités importantes entre les différents problèmes. La fréquence de réussite au pré-test varie de 0,14 pour le problème n°2 (groupe-témoin) à 0,74 pour le problème n°1 (groupe-témoin). La fréquence de réussite au post-test varie de 0,15 pour le problème n°12 (groupe-témoin) à 0,89 pour le problème n°1 (groupe-expérimental).

3.2.2.2. Fréquence de réussite par classe

Pour chaque classe, nous avons calculé pour chaque problème les fréquences de réussite au pré-test et au post-test.

	Classes du groupe-témoin							
	n°1		n°2		n°3		n°4	
Effectif classe→	**17**		**19**		**17**		**12**	
	Fréquence de Réussite							
Problème	**Pré-test**	**Post-test**	**Pré-test**	**Post-test**	**Pré-test**	**Post-test**	**Pré-test**	**Post-test**
1	0,76	0,88	0,74	0,74	0,65	0,65	0,83	0,75
2	0,24	0,24	0,11	0,26	0,12	0,35	0,08	0,25
3	0,59	0,65	0,16	0,37	0,35	0,47	0,50	0,58
4	0,41	0,65	0,16	0,21	0,41	0,41	0,25	0,42
6	0,59	0,47	0,16	0,26	0,35	0,24	0,42	0,58
7	0,65	0,59	0,26	0,37	0,47	0,65	0,67	0,58
8	0,76	0,76	0,53	0,68	0,71	0,65	0,75	0,67
9	0,53	0,71	0,26	0,26	0,35	0,41	0,25	0,50
10	0,41	0,53	0,11	0,26	0,29	0,41	0,42	0,42
11	0,47	0,65	0,26	0,37	0,35	0,53	0,42	0,50
12	0,24	0,18	0,16	0,11	0,24	0,24	0,00	0,08
13	0,47	0,59	0,26	0,37	0,35	0,59	0,50	0,58

Tableau 102 : ***Fréquences de réussite par problème et par classe (n°1 à n°4) (pré-test et post-test)***

	Classes du groupe-expérimental							
	n°5		**n°6**		**n°7**		**n°8**	
Effectif classe→	**18**		**19**		**15**		**20**	
	Fréquence de Réussite							
Problème	**Pré-test**	**Pré-test**	**Pré-test**	**Pré-test**	**Pré-test**	**Pré-test**	**Pré-test**	**Pré-test**
1	0,78	0,89	0,79	0,95	0,53	0,80	0,75	0,90
2	0,11	0,33	0,37	0,26	0,13	0,20	0,10	0,10
3	0,33	0,44	0,42	0,79	0,33	0,47	0,35	0,65
4	0,39	0,50	0,37	0,47	0,33	0,13	0,05	0,30
6	0,22	0,44	0,47	0,58	0,13	0,33	0,20	0,50
7	0,33	0,67	0,47	0,63	0,27	0,67	0,40	0,75
8	0,67	0,83	0,74	0,89	0,73	0,87	0,70	0,80
9	0,39	0,44	0,47	0,58	0,40	0,47	0,30	0,50
10	0,33	0,39	0,37	0,47	0,27	0,20	0,20	0,30
11	0,50	0,56	0,47	0,84	0,13	0,60	0,25	0,60
12	0,17	0,11	0,32	0,42	0,07	0,33	0,10	0,10
13	0,17	0,44	0,37	0,63	0,33	0,47	0,30	0,60

Tableau 103 : ***Fréquences de réussite par problème et par classe (n°5 à n°8) (pré-test et post-test)***

La comparaison des fréquences de réussite au pré-test et au post-test révèle de fortes disparités entre les fréquences de réussite aux différents problèmes à la fois entre les classes et au sein de chaque classe.

(i) Entre les différents problèmes au sein de chaque classe. Par exemple, pour la classe n°4, la fréquence de réussite au pré-test varie de 0,00 pour le problème n°12 à 0,83 pour le problème n°1.

(ii) Entre les classes pour un même problème. Par exemple, pour le problème n°13, la fréquence de réussite varie de 0,37 pour la classe n°2 à 0,63 pour la classe n°6.

3.2.2.3. Résultats à chaque problème. Comparaison des fréquences de réussite au pré-test et au post-test

Pour chacun des problèmes, il s'agit de repérer si les fréquences de réussite obtenues au pré-test et au post-test sont significativement différentes.

Les comparaisons seront d'abord effectuées pour le groupe-témoin, puis pour le groupe-expérimental.

Nous avons utilisé les tests de Student et de Mac Nemar pour effectuer ces comparaisons. Les résultats aux deux tests aboutissent à des conclusions identiques. Nous ne rapporterons ci-après que les résultats au test de Student.

3.2.2.3.1. Au sein du groupe-témoin

Au sein du groupe-témoin, pour tester l'égalité des moyennes au pré-test vs au post-test et pour chaque problème, nous utilisons le test de Student pour échantillons appariés.

Pour tester l'égalité des moyennes, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'égalité et H_1, l'hypothèse alternative.

En application du test de Student, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 104) :

GROUPE-TÉMOIN				
	Comparaison de la moyenne au pré-test vs la moyenne au post-test	**t de Student**	**Résultats** α **= 0,01** **ddl = 64** **Valeur critique = 2,65**	**Résultats** α **= 0,01** **ddl = 64** **Valeur critique = 2,00**
	Problème			
Moyennes	**N°1**	0,26	Non-rejet de H_0	Non-rejet de H_0
	N°2	2,86	**Rejet de H0**	**Rejet de H0**
	N°3	2,39	Non-rejet de H_0	**Rejet de H0**
	N°5	1,98	Non-rejet de H_0	Non-rejet de H_0
	N°6	0,00	Non-rejet de H_0	Non-rejet de H_0
	N°7	0,83	Non-rejet de H_0	Non-rejet de H_0
	N°8	0,23	Non-rejet de H_0	Non-rejet de H_0
	N°9	2,17	Non-rejet de H_0	**Rejet de H0**
	N°10	2,17	Non-rejet de H_0	**Rejet de H0**
	N°11	2,12	Non-rejet de H_0	**Rejet de H0**
	N°12	0,30	Non-rejet de H_0	Non-rejet de H_0
	N°13	2,60	Non-rejet de H_0	**Rejet de H0**

Tableau 104 : ***Groupe-témoin : pour chaque problème, comparaison des fréquences de réussite au pré-test et au post-test***

On en déduit que, pour les comparaisons effectuées,

- Au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$, on ne rejette pas H_0 pour l'ensemble des problèmes à l'exception du problème n°2.
- Au niveau de risque $\alpha = 0{,}05$, on ne rejette pas H_0 pour les problèmes n^{os} 1, 5, 6, 7, 12. Par contre on peut rejeter H_0 pour les problèmes n^{os} 2, 3, 9, 10, 11, 13.

En conclusion, on peut considérer que, dans le groupe-témoin, entre le pré-test et le post-test, au niveau de risque $\alpha = 0{,}05$, les problèmes n^{os} 2, 3, 9, 10, 11, 13.ont des scores significativement différents.

3.2.2.3.2. Au sein du groupe-expérimental

Au sein du groupe-expérimental, pour tester l'égalité des moyennes au pré-test vs au post-test et pour chaque problème, nous utilisons le test de Student pour échantillons appariés.

Pour tester l'égalité des moyennes, deux hypothèses sont en concurrence. Comme à l'habitude, on nomme H_0, l'hypothèse d'égalité et H_1, l'hypothèse alternative.

En application du test de Student, nous obtenons les conclusions suivantes (Tableau 105) :

GROUPE-EXPÉRIMENTAL				
	Comparaison de la moyenne au pré-test vs la moyenne au post-test	**t de Student**	**Résultats $\alpha = 0{,}01$ ddl = 71 Valeur critique = 2,65**	**Résultats $\alpha = 0{,}01$ ddl = 71 Valeur critique = 2,00**
	Problème			
Moyennes	**N°1**	3,18	**Rejet de H0**	**Rejet de H0**
	N°2	0,69	Non-rejet de H_0	Non-rejet de H_0
	N°3	4,10	**Rejet de H0**	**Rejet de H0**
	N°5	1,35	Non-rejet de H_0	Non-rejet de H_0
	N°6	3,74	**Rejet de H0**	**Rejet de H0**
	N°7	5,26	**Rejet de H0**	**Rejet de H0**
	N°8	3,39	**Rejet de H0**	**Rejet de H0**
	N°9	1,92	Non-rejet de H0	Non-rejet de H0
	N°10	1,00	Non-rejet de H_0	Non-rejet de H_0
	N°11	4,74	**Rejet de H0**	**Rejet de H0**
	N°12	3,19	Non-rejet de H_0	Non-rejet de H_0
	N°13	0,69	**Rejet de H0**	**Rejet de H0**

Tableau 105 : ***Groupe-expérimental : pour chaque problème, comparaison des fréquences de réussite au pré-test et au post-test***

On en déduit que, pour les comparaisons effectuées,

- Tant au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$ qu'au niveau de risque $\alpha = 0{,}05$, on ne rejette pas H_0 pour les problèmes n^{os} 2, 5, 9, 10, 12.
- Tant au niveau de risque $\alpha = 0{,}01$ qu'au niveau de risque $\alpha = 0{,}05$, on peut rejeter H_0 pour les problèmes n^{os} 1, 3, 6, 7, 8, 11, 13.

En conclusion, on peut considérer que, dans le groupe-expérimental, entre le pré-test et le post-test, au niveau de risque $\alpha = 0{,}05$, les problèmes n^{os} 1, 3, 6, 7, 8, 11, 13 obtiennent des scores significativement différents.

3.2.2.3.3. Conclusion

Le tableau 106 rapporte les conclusions pour chaque problème et pour chaque groupe :

Problème	Groupe-témoin	Groupe-expérimental
N°1		**Progrès significatif**
N°2	**Progrès significatif**	
N°3	**Progrès significatif**	**Progrès significatif**
N°5		
N°6		**Progrès significatif**
N°7		**Progrès significatif**
N°8		**Progrès significatif**
N°9	**Progrès significatif**	
N°10	**Progrès significatif**	
N°11	**Progrès significatif**	**Progrès significatif**
N°12		
N°13	**Progrès significatif**	**Progrès significatif**

Tableau 106 : ***Significativité des résultats pour chacun des problèmes***

Nous notons que les progrès varient selon les problèmes, et ce, de façon différente pour chacun des groupes. Nous étudierons dans des travaux ultérieurs les causes possibles de cette variabilité. Nous nous centrerons notamment sur les caractéristiques lexicales, syntaxiques, sémantiques, et conceptuelles des énoncés.

3.3. Analyse des pratiques des 4 enseignants du groupe-expérimental : mise en œuvre du cadre didactique R^2C^2

Au vu de la supériorité des progrès obtenus par le groupe-expérimental entre le pré-test et le post-test par rapport à ceux obtenus par le groupe-témoin, il est nécessaire d'examiner comment notre cadre didactique R^2C^2 a été mis en place dans les 4 classes[169] soumises à l'opérationnalisation de ce cadre et constitutives du groupe-expérimental. Nous rappelons qu'au cours de la réunion de présentation[170], les 4 enseignants du groupe-expérimental avaient été informés d'une part des modifications à apporter à leurs pratiques d'enseignement, d'autre part des invariants opératoires à considérer. Ainsi, avant d'établir des liens entre les résultats obtenus par les élèves et l'opérationnalisation de notre cadre didactique R^2C^2, il importe de vérifier de quelles manières ces consignes ont été appliquées par les 4 enseignants de ce groupe-expérimental.

En d'autres termes, comment les principes P1, P2, P3, P4 ont-ils été mis en œuvre dans les 4 classes du groupe-expérimental ? Ont-ils été activés de façon concomitante ? Au travers de quelles activités ont-ils été déclinés ?

Pour ce faire, nous nous référons à la fois aux données issues (i) de l'observation de ces 4 classes lors d'une séance[171] de type n°2 de résolution de problèmes à données numériques et (ii) de l'entretien d'autoconfrontation croisée[172].

3.3.1. Mise en œuvre du principe P2 : Mise en réseau des connaissances

3.3.1.1. Les choix effectués par chaque enseignant pour la mise en œuvre du principe P2

La mise en œuvre du principe P2 dit « principe de mise en réseau » a pour but d'amener l'élève à mobiliser des connaissances antérieures lors de la résolution d'un problème donné.

3.3.1.1.1. Classe n°5

Lors de la séance vidéoscopée, on remarque dès le début que l'enseignant engage ses élèves dans le rappel des travaux effectués la veille :

1	00.00	Ens.→Cl.	*Hier, on avait un problème, on inventait uniquement les questions. (…)* ***(Classe n°5 – Séance n°2)***

[169] Le groupe-expérimental est composé des classes n^{os} 5, 6, 7 et 8.
[170] Voir Partie 3 – Paragraphe 2.7.3.2. : *Les conditions d'utilisation des outils.*
[171] Voir Partie 3 – Chapitre 3 : *Introduction.*
[172] Voir Partie 3 – Paragraphe 2.6.3. : *Construction des transcriptions des enregistrements sonorisés des entretiens d'autoconfrontation*

Pour inciter les élèves à effectuer des *mises en réseau*, l'enseignant mobilise plusieurs moyens :

- L'artefact *boîte-référente* fourni dans le cadre de notre expérimentation et matérialisé dans cette classe par le cahier-référent. Il est utilisé pour permettre aux élèves de revenir sur des travaux antérieurs :

3	00.59	Ens.→Cl.	*Il faudra bien entendu qu'ils puissent se référer à leur petit cahier c'est-à-dire se dire, tiens, c'est un problème qui est à peu près le même que celui-là(…) .*
10	01.38	Ens.→Cl.	*Pas uniquement ceux qu'on a faits hier. Mais regarder un peu tous ceux qui sont dans le cahier et essayer d'en fabriquer un que l'on va pouvoir recopier dans le cahier…**(Classe n°5 – Séance n°2)***

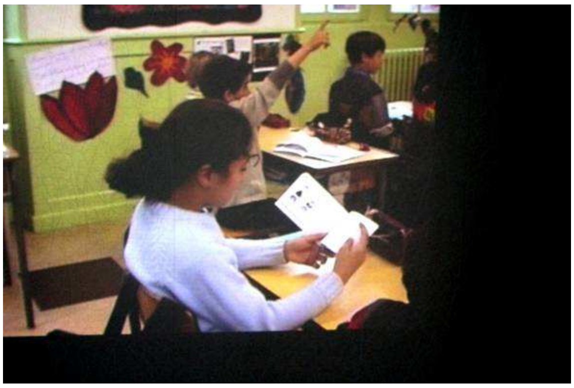


Figure 77 : ***Élève consultant son cahier-référent***

- À plusieurs reprises, au fil de la séance, l'enseignant rappelle la nécessité de recourir au contenu présent dans le cahier :

105	26.10	Ens.→Cl.	*Quel type de problème vous avez en tête, là ? Pour répondre, regardez dans votre cahier. **(Classe n°5 – Séance n°2)***

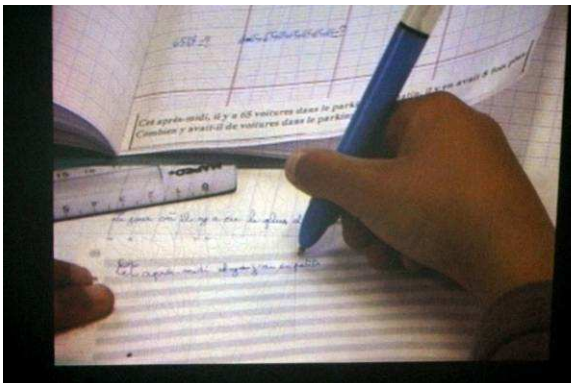


Figure 78 : ***Élève créant un problème en s'aidant du cahier-référent***

- Les travaux par groupes qui vont permettre des échanges : (i) intra-groupe : afin d'inventer et de rédiger une situation-problème ; (ii) inter-groupes : afin de résoudre les situations-problèmes inventées et rédigées par un autre groupe :

16	01.55	Ens.→Cl.	*(…) Il y aura un petit échange entre vous pour savoir s'ils ont réussi à y répondre, comment ils ont fait. (…)**(Classe n°5 – Séance n°2)***

Figure 79 : ***Travail par groupe lors de la création de situations-problèmes***

3.3.1.1.2. Classe n°6

Dès le début de la séance, l'enseignant de la classe n°6 rappelle à ses élèves la possibilité de recourir à la fiche individuelle réalisée et contenant les schémas-référents dégagés. Ce recours n'est pas présenté comme une obligation :

6	01.04	Ens.→Cl.	*Alors dans votre pochette « problèmes », vous avez la petite feuille que l'on a déjà vue avec tous les schémas. (…)* ***(Classe n°6 – Séance n°2)***

Figure 80 : ***Élève réalisant des conversions de représentations avec en référence la fiche des schémas-référents***

L'usage du dictionnaire-référent est également rappelé, invitant là encore à revenir à des connaissances antérieures :

172	32.31	Élève	*(L'élève termine la lecture de l'énoncé) Pour partager équitablement entre tous les enfants présents ce jour-là, combien fallait-il distribuer de bonbons à chacun ?*
173	32.47	Ens.→Cl.	*Alors est-ce qu'il y a un mot que vous ne savez pas expliquer ? (Mathilde lève le doigt)*
174	32.51	Ens.→Él.	*Mathilde.*
175	32.53	Élève	*Oui. Équitablement.*
176	32.54	Ens.→Cl.	*On l'entoure en rouge et je crois bien qu'il est marqué dans le dictionnaire. (…)* . ***(Classe n°6 – Séance n°2)***

On relève aussi la présence de mise en relation des données de l'un des énoncés de problèmes avec une situation de la vie quotidienne des élèves : l'organisation de la répartition des élèves au sein de l'école :

66	11.36	Ens.→Cl.	*(…) Vous le savez qu'il y a des CM1 et des CM2 à côté et on te dit « Il y a 9 élèves en CM1 ».*
67	11.47	Élève	*C'est vrai les nombres ? (**Classe n°6 – Séance n°2)***

3.3.1.1.3. Classe n°7

On retrouve dès le début de la séance, comme dans la classe n°5, une mise en relation avec les travaux effectués lors d'une séance précédente :

6	00.24	Ens.→Cl.	*Voilà, sur la feuille que je vous ai donnée, il y a le problème que l'on a fait samedi dernier. Qui est-ce qui nous relit rapidement ce petit problème ? (Plusieurs élèves lèvent le doigt.)*
7	00.30	Ens.→Cl.	*C'était il y a une semaine. On l'a peut-être un peu oublié. Qui est-ce qui nous le relit rapidement ? (**Classe n°7 – Séance n°2)***

Le rappel s'effectue à l'écrit, par l'intermédiaire de la fiche individuelle distribuée dont chaque élève a été destinataire, et à l'oral par une lecture à voix haute par un élève.

Une mise en réseau est également effectuée avec les procédures mises en œuvre : les élèves avaient décidé d'un schéma-référent pour représenter la classe (au sens de « classe d'équivalence ») et l'enseignant organise un rappel de cette activité :

47	03.21	Audrey	*Là, on ne connaît pas le deuxième tome. (Audrey trace en même temps un carré vide dans lequel elle place un point d'interrogation.)*
48	03.35	Ens.→Él.	*Le deuxième tome, on ne le connaît pas. Oui. Comment vous aviez dit ? Oui, vous aviez trouvé qu'il fallait mettre un point d'interrogation pour montrer que c'est ce qu'on ne connaissait pas.*
49	03.39	Audrey	*On a relié. (Audrey trace une flèche entre les deux cases.) (**Classe n°7 – Séance n°2)***

On relève aussi un rappel de la méthode de travail :

126	11.23	Ens.→Cl.	*(…) Et vous faites vos calculs ou vos recherches ou vos dessins dans les petites cases qui sont en dessous, comme on avait fait la semaine dernière. D'accord ? Maintenant, s'il y a un des deux problèmes qui n'est pas du même type que celui qu'on a vu, qui ne se résout pas de la même façon, qui ne se résout pas par une addition à trous, eh bien, je vais vous donner une autre fiche dans laquelle donc pour l'instant il n'y a rien. (…) .*
265	40.03	Ens.→Cl.	*(…) On vient de résoudre ce problème. Est-ce que ce problème allait sur la même fiche que le problème de la semaine dernière ?*
277	40.45	Ens.→Cl.	*(…) Donc c'était comme la semaine dernière. Oui. C'était la même chose. **(Classe n°7 – Séance n°2)***

3.3.1.1.4. Classe n°8

Comme dans les classes n° 5 et n°7, on retrouve dès le début de la séance, comme dans la classe n°5, une mise en relation avec des travaux effectués lors de séances précédentes. L'enseignant demande à ses élèves de rappeler la fonction des quatre cases des boîtes-référentes :

5	00.10	Ens.→Cl.	*(…) Quatre cases. Est-ce que vous vous rappelez à quoi servent ces cases ? **(Classe n°8 – Séance n°2)***

Il fait explicitement référence au rappel à des connaissances antérieures, soit pour la référence à des structures de problèmes :

154	23.05	Ens.→Él.	*(…) Est-ce que ça te fait penser au problème d'avant ? Non ? C'est pas du tout pareil ou c'est pareil ? **(Classe n°8 – Séance n°2)***

Soit pour des références lexicales :

183	25.24	Ens.→Él.	*C'est un mot qu'on avait vu dans une lecture, louer.*
185	25.30	Ens.→Él.	*Oui, quand on loue quelque chose. Oui, on l'avait vu dans une lecture. (Un élève lève le doigt.) **(Classe n°8 – Séance n°2)***

L'enseignant invite également à se référer aux outils élaborés par la classe (affiches représentant chaque boîte-référente) :

122	19.01	Ens.→Cl.	*(L'enseignante va vers le tableau et s'adresse à la classe.) Elle a dit le numéro 1, c'est comme le 3ème, c'est comme le 3ème dessin… Comme le 3ème schéma. Regardez bien le 3ème schéma. (Trois schémas –en tout, partie manquante, plusieurs fois- sont affichés au mur de la classe à côté du tableau.) **(Classe n°8 – Séance n°2)***

Il fait référence également aux situations de la vie quotidienne, à propos de la déclaration de l'impôt sur le revenu :

57	04.46	Ens.→Cl.	*(…) Dites, vos papas et vos mamans ils n'ont pas… (…)…une feuille, ces temps-ci ? Sur quelle feuille ?*
58	05.00	Élève	*(Les paroles de l'élève sont inaudibles.)*
59	05.04	Ens.→Cl.	*Sur une petite feuille verte et blanche, oui.*
60	05.05	Élève	*(Un autre élève répond.) EDF, heu !*
61	05.06	Ens.→Él.	*Ah, pas EDF, non.*
62	05.07	Élève	*(Un autre élève intervient.) Les impôts. **(Classe n°8 – Séance n°2)***

Figure 81 : ***Visualisation des 12 feuilles de paie portant les 12 salaires mensuels***

3.3.1.2. Synthèse

En résumé, on relève que dans les classes, les enseignants incitent leurs élèves à effectuer des mises en réseau : mise en réseau avec des connaissances ou des procédures apprises ou utilisées antérieurement, mise en réseau avec des faits ou des usages caractérisant la vie quotidienne.

Il nous semble que cette incitation est liée en grande partie à l'usage des artefacts introduits par l'expérimentation. Les boîtes-référentes, de par leur fonction et leur constitution, obligent en effet à établir des liens avec des situations-problèmes déjà rencontrées puisqu'il s'agit de comparer des situations entre elles en vue d'insérer les nouvelles dans telle ou telle catégorie déjà existante ou, si cela se révèle impossible, de créer une nouvelle catégorie.

3.3.2. Mise en œuvre du principe P3 : conversion des représentations sémiotiques

3.3.2.1. Les choix effectués par chaque enseignant pour la mise en œuvre du principe P3

La mise en œuvre du principe P3 dit *principe de conversion de représentations sémiotiques* a pour but de confronter l'élève à des conversions de représentations mobilisant différents registres de représentation sémiotique. L'élève devra par exemple convertir des données entre le registre textuel et le registre numérique, entre le registre numérique et le registre iconique, entre le registre textuel et le registre iconique.

3.3.2.1.1. Classe n°5

Lors de la séance vidéoscopée, les élèves doivent inventer des situations-problèmes dont l'énoncé sera ensuite inséré dans le cahier de références élaboré par la classe et dont chaque page constitue une boîte-référente.

8	01.27	Ens.→Cl.	*Donc, le but du jeu aujourd'hui, qui est capable de me le redire ?*
9	01.32	Élève	*De faire un problème qui correspond aux problèmes qu'on a faits hier… (La suite de la phrase est inaudible.)*
10	01.38	Ens.→Cl.	*Pas uniquement ceux qu'on a faits hier. Mais regarder un peu tous ceux qui sont dans le cahier et essayer d'en fabriquer un que l'on va pouvoir recopier dans le cahier* ***(Classe n°5 – Séance n°2).***

Les élèves doivent se référer aux énoncés textuels et aux schémas référents présents dans leur cahier pour rédiger un nouvel énoncé pouvant s'insérer dans la boîte-référente.

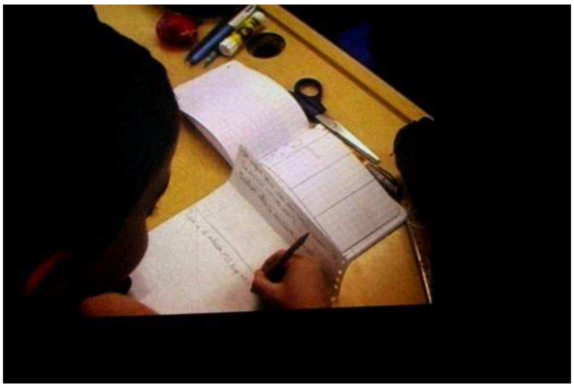


Figure 82 : ***Elève résolvant un problème et consultant son cahier-référent***

La création de cette situation-problème et les résolutions des situations-problèmes inventées par les autres groupes d'élèves conduisent les élèves à faire usage de la conversion de différentes représentations. Ils sont ainsi conduits à construire à partir des textes, des dessins et des schémas figurant dans leur cahier-référent un énoncé textuel à données numériques. Puis pour résoudre les situations-problèmes inventées par les autres groupes, ils devront effectuer la démarche inverse en liant texte et données de l'énoncé inventé aux textes, dessins et schémas du cahier-référent pour revenir ensuite à la production de la solution dans un registre numérique.

Les observations effectuées dans cette classe n°5 nous conduisent à dire que les élèves de cette classe, de par l'activité proposée par l'enseignante au cours de cette séance, sont confrontés à la conversion de représentations.

3.3.2.1.2. Classe n°6

Au cours de la séance observée, les élèves doivent résoudre successivement 3 situations-problèmes dont les énoncés sont présentés sous une forme textuelle. Pour résoudre ces situations, l'enseignante demande de recourir à un dessin, à un schéma, à une opération et d'écrire la phrase-solution.

19	02.43	Ens.→Cl.	*Et la question C. D'accord ? Alors on fait comme d'habitude. Vous avez quatre cases. Première case ?*
20	02.56	Élèves	*Le dessin.*
21	02.57	Ens.→Cl.	*Le dessin, au crayon. Deuxième case ?*
22	02.59	Élèves	*Le schéma.*
23	03.01	Ens.→Cl.	*Le schéma. Troisième case ?*
24	03.03	Élèves	*L'opération.*
25	03.05	Ens.→Cl.	*Et quatrième case ?*
26	03.08	Élèves	*La phrase solution.* ***(Classe n°6 – Séance n°2)***

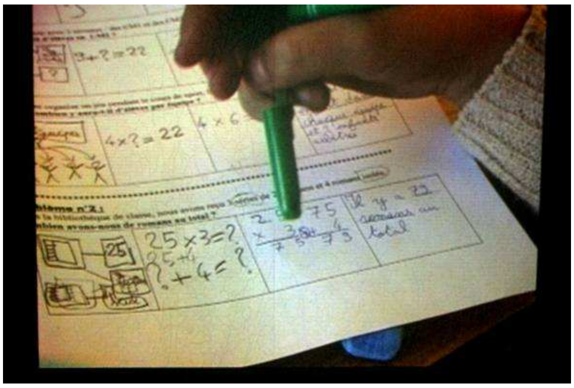


Figure 83 : ***4 représentations dans des registres différents***

Cependant l'enseignante précise qu'en cas de difficultés pour représenter la situation dans un registre donné, il est possible de passer outre ce registre :

98	18.11	Ens.→Cl.	*Alors j'en vois qui traînent. Vous faites les schémas. Si les schémas vous gênent, vous ne faites pas de schéma. Vous passez directement à l'opération à laquelle vous pensez.*
99	18.22	Ens.→Él.	*Florian, si c'est cela qui t'ennuie, il ne faut pas… C'est fait pour vous aider. Ce n'est pas… On est d'accord ?*
100	18.34	Élève	*Et si on n'arrive pas à faire le dessin ?*
101	18.38	Ens.→Él.	*Le dessin ? C'est pareil. Cela, je vous l'ai dit.* ***(Classe n°6 – Séance n°2)***

Les représentations extraites des productions des élèves illustrent que dans cette classe n°6, les élèves sont effectivement confrontés à l'usage de la conversion de représentations et ce, entre les trois registres : textuel, numérique et iconique.

227	41.26	Amandine	*Moi. J'ai fait à peu près comme Charlène parce que j'ai fait 3 fois 3 gros carrés. J'ai marqué S dedans pour la série.*
228	41.40	Ens.→Él.	*Ah oui, d'accord.*
229	41.43	Amandine	*J'ai mis une étiquette 25.*

235	42.27	Morgane	*(Morgane présente et expose sa solution. L'enseignante dessine en même temps.) J'ai dessiné un livre. Après, en dessous j'ai redessiné un livre et je les ai reliés. À côté du premier j'ai marqué 25 X 3. À côté du deuxième j'ai marqué +4 et là où j'ai fait le trait j'ai marqué « point d'interrogation »*
236	42.51	Ens.→Cl.	*Alors ce qui est important dans son schéma qui est un peu différent de celui des autres, c'est quelle a dit : « Je les ai reliés », c'est-à-dire qu'elle a fait comme cela pour montrer qu'ils étaient tous ensemble.*

$$\left.\begin{array}{l}\square\ \ \mathbf{25 \times 3}\\ \square\ \ \mathbf{4}\end{array}\right\}\ \mathbf{?}$$

244	43.44	Noémie	*Moi j'ai fait 4 étagères. J'ai fait des traits dedans pour montrer qu'il y avait des livres. Sur les 3 premières étagères j'ai mis 25 romans et sur l'autre j'ai mis 4 seuls.* ***(Classe n°6 – Séance n°2)***

Figure 84 : ***L'enseignant montre un schéma au tableau.***

L'enseignante fait également recourir à la conversion entre registres, au cours de la phase de correction. Par exemple, lors de la résolution de la situation-problème suivante, un élève propose le schéma suivant :

298	49.47	Florian	*(Florian lit l'énoncé à haute voix.) Dans la bibliothèque de la classe, nous avons reçu 3 séries de 25 romans et 4 romans isolés.*
300	50.13	Florian	*C'est que je n'ai pas mis qu'il y a 4 fois 25.*
301	50.20	Ens.→Él.	*Il fallait mettre 4 fois 25, alors ?*
302	50.22	Florian	*2 et 3 fois.*
303	50.27	Ens.→Él.	*C'est-à-dire que là, qu'est-ce que je vais faire ? Je mets un autre carré. Qu'est-ce que je mets dedans ? (Silence de Florian).*
304	50.36	Ens.→Él.	*Qu'est-ce que je mets là dans les carrés ?*
305	50.40	Ens.→Cl.	*(L'enseignante s'adresse aux autres élèves) : Il ne faut pas lui souffler, hein.*
306	50.43	Ens.→Él.	*Et là, dans celui-là ?*
			$\boxed{25}$ $\boxed{3}$ $\boxed{25}$ $\boxed{4}$
307	50.51	Florian	*3.*
308	50.53	Ens.→Él.	*Donc, ça veut dire qu'il y a une série de 25 livres, une autre série de 25 livres, 4 livres et 3 livres ?*
309	51.04	Ens.→Él.	*C'est cela ? Oui ? Tu es sûr de toi, là ? (Silence de Florian). Florian est-ce que tu es sûr ?*
310	51.23	Florian	*(Florian hoche la tête négativement en signe de réponse.)*
311	51.35	Florian	*Ah ! Oui ! 3 fois 25.* ***(Classe n°6 – Séance n°2)***

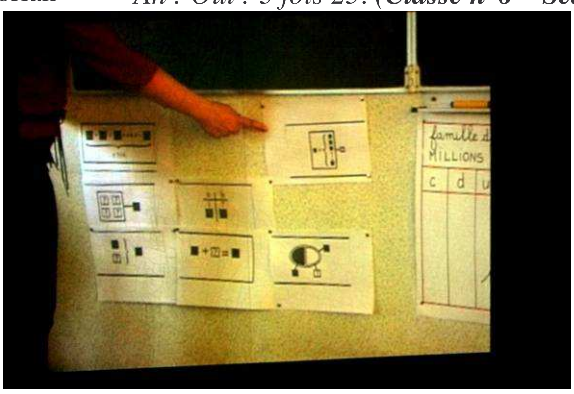


Figure 85 : ***Affichage collectif des schémas-référents dans la classe***

Les observations réalisées dans la classe n°6 nous conduisent à dire que les élèves sont effectivement confrontés à l'usage de différents registres de représentation sémiotique ; les outils mis en place (artefacts) obligent l'élève à procéder à des conversions entre les différents registres. Toutefois, l'enseignante précise bien qu'en cas de difficultés avec l'usage d'un registre donné, il est possible de poursuivre la résolution du problème en ayant recours à d'autres registres. L'enseignante semble considérer ce recours comme une aide à résoudre le problème et ne la confond pas avec la solution au problème.

3.3.2.1.3. Classe n°7

Nous nous intéressons ici à la place des différents registres de représentation et à la conversion entre ces registres.

L'analyse des données issues de la séance observée révèlent que chaque élève doit proposer une représentation iconique de la situation-problème, répondant ainsi à la consigne suivante formulée par l'enseignant : *Mais si on avait d'autres nombres, comment pourrait-on représenter ce problème ?*[173]. Une phase de synthèse collective permet alors de confronter les représentations iconiques obtenues et d'effectuer un choix concerté afin d'en sélectionner une pour la classe. Cette représentation de type iconique prendra alors le statut de *schéma-référent* pour une *boîte-référente*.

La séance de type n°2 observée et vidéoscopée dans la classe n°7 débute par le rappel de cette mise en œuvre :

57	04.02	Ens.→Él.	*(…) Oui, vous aviez représenté donc ce problème par ce petit dessin. (…)*
62	04.45	Ens.→Cl.	*(…) et puis après, je vous avais demandé comment on pouvait représenter cette histoire, mais pour des problèmes avec d'autres nombres, hein, qui se résolveraient de la même façon que celui-ci, par une addition à trous, mais qui évidemment, comme ce ne serait pas les mêmes problèmes, il n'y aurait pas les mêmes nombres dans ces problèmes. (…)*
65	05.17	Ens.→Él.	*Alors, qu'est-ce qu'on avait mis par exemple à la place de 403 ? Puisque 403, c'est pour ce problème-là. Mais pour d'autres problèmes, ce sera un autre nombre.*
66	05.26	Aurélien	*On avait mis nombre connu.*
67	05.27	Ens.→Cl.	*(..) vous m'aviez proposé le nombre connu (L'enseignante efface 403 puis écrit dans la case : nombre connu.) Puisque c'est dans l'énoncé du problème le nombre que l'on connaît, que l'on a, donc : nombre connu. Vous aviez proposé d'écrire : nombre connu. Donc pour l'autre que l'on ne connaît pas, vous aviez gardé le point d'interrogation. Et ici, à la place de 785 ? (…)*
68	05.53	Élèves	*(…) Total.* **(Classe n°7 – Séance n°2)**

[173] Extrait de l'entretien d'autoconfrontation croisée – Item 232.

Cette phase de constitution du schéma-référent nous semble caractériser l'opération de conversion mise en œuvre entre les deux registres : d'une part le registre textuel constitutif de l'énoncé, d'autre part le registre iconique inhérent au schéma réalisé. On relève la congruence (Duval, 1995) entre ces deux représentations.

3.3.2.1.4. Classe n°8

Au début de cette séance de type n°2, l'enseignante de la classe n°8 rappelle la présence des quatre cases matérialisées pour recevoir les différentes représentations utilisées par les élèves pour résoudre le problème donné.

5	00.10	Ens.→Cl.	*(…) Quatre cases. Est-ce que vous rappelez à quoi servent ces cases ?*
8	00.36	Laura	*La première pour faire un dessin, la deuxième pour faire un schéma, un schéma sans nombres, la troisième pour faire un schéma avec des nombres et la quatrième pour les opérations.* **(Classe n°8 – Séance n°2)**

Néanmoins, face à un groupe d'élèves en difficultés, elle est amenée à préciser que la représentation de la situation sous une forme dessinée peut laisser la place à un schéma, dès lors que des difficultés se posent pour la réalisation d'un dessin. Ou bien encore qu'il est possible de laisser des *cases vides*.

71	08.58	Ens.→Él.	*(L'enseignante s'adresse à un groupe d'élèves qui n'ont pas fait le dessin du premier problème.) Bon si vous ne trouvez pas comment faire le dessin, vous faites le schéma. C'est pas grave hein ! Si vous laissez une case vide, c'est pas bien grave. Par contre la dernière case, c'est la case de quoi ?* **(Classe n°8 – Séance n°2)**

En revanche, elle manifeste une exigence pour le passage par le mode calculatoire et exige une représentation de type algébrique.

73	09.12	Ens.→Él.	*Alors celle-là, elle ne doit pas être vide, ça, c'est obligatoire. (…)* **(Classe n°8 – Séance n°2)**

Elle revient par contre sur la notion de schéma pour demander aux élèves de faire correspondre l'un d'entre eux, affiché dans la classe, à la situation donnée, « habillée » sous la forme d'un énoncé textuel.

122	19.01	Ens.→Cl.	*(L'enseignante va vers le tableau et s'adresse à la classe.) Elle a dit le numéro 1, c'est comme le 3ème, c'est comme le 3ème dessin… Comme le 3ème schéma. Regardez bien le 3ème schéma. (Trois schémas –en tout, partie manquante, plusieurs fois- sont affichés au mur de la classe à côté du tableau.)*
123	19.16	Ens.→Cl.	*Sophie a dit que c'était pareil. (L'enseignante apporte le schéma n°3 et le pose au milieu du tableau pour le mettre en évidence.)* **(Classe n°8 – Séance n°2)**

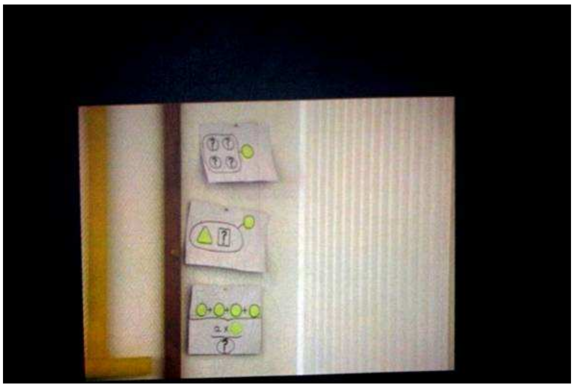


Figure 86 : ***Affichage collectif des schémas-référents***

L'élève doit conclure en rédigeant une phrase-réponse

260	41.52	Ens.→Él.	*(L'enseignante contrôle la feuille d'un élève qui n'avait pas terminé.) Alors. C'est juste. Fais la phrase-réponse.* **(Classe n°8 – Séance n°2)**

Les observations effectuées dans la classe ainsi que les traces écrites produites par les élèves attestent que l'enseignante encourage ses élèves à recourir à différents registres. Il reste à se demander si l'on est davantage ici en présence de traitement ou en présence de conversion, nous référant ici aux travaux de Duval (1995, 2005)

3.3.2.2. Synthèse

En résumé, on constate que le principe P3 de conversion de représentations sémiotiques a été effectivement mis en place dans les 4 classes du groupe-expérimental. Dès lors que chaque enseignant a introduit dans sa classe les *boîtes-référentes*, les élèves ont dû passer du registre textuel de l'énoncé au registre iconique pour dessiner ou pour schématiser, au registre numérique pour mobiliser les données numériques présentes dans l'énoncé et enfin revenir au registre textuel pour rédiger la solution du problème. Les enregistrements vidéoscopés révèlent aussi que les enseignants ont rappelé cette nécessité de recourir à différents registres en utilisant les différentes cases prévues à cet effet. Toutefois, dès lors que certains élèves présentaient des difficultés dans la mobilisation d'un registre précis, les enseignants concernés ont rappelé la possibilité de passer directement à un autre registre.

Cette attitude atteste que l'outil est considéré par l'enseignant comme une aide pour l'élève et ne doit en aucun cas faire obstacle à la résolution du problème.

Lorsque les élèves inventent puis rédigent des énoncés de problèmes à insérer dans les boîtes, ils doivent cette fois-ci passer du registre iconique utilisé pour représenter la catégorie du problème, au registre textuel.

3.3.3. Mise en œuvre du principe P4 : principe de catégorisation

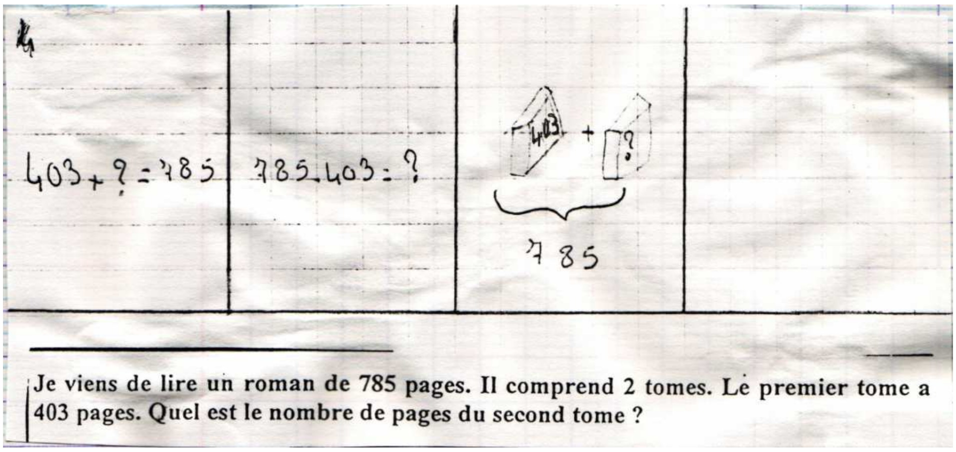
La mise en œuvre du principe P4 dit *Principe de catégorisation* a pour but d'amener l'élève à catégoriser les situations mathématiques rencontrées en fonction des relations mathématiques en jeu. Autrement dit, il s'agit de créer une partition de l'ensemble des situations-problèmes à données numériques rencontrées en classe en définissant des catégories[174] basées sur les relations mathématiques définies par Riley et al. (1983) et Vergnaud (1982, 1983a).

L'ensemble des situations-problèmes mises à la disposition des élèves n'est pas un ensemble *fermé*, dans le sens où son cardinal augmente au fur et à mesure que les élèves se voient proposer de nouvelles situations. L'introduction de ces nouvelles situations a d'ailleurs fait l'objet de variantes entre les classes, répondant ainsi à la consigne de conservation des pratiques internes à chacune d'elles.

3.3.3.1. Les choix effectués par chaque enseignant pour la mise en œuvre du principe P4

3.3.3.1.1. Classe n°5

L'enseignant de la classe n°5 a opté dès le début de l'opérationnalisation de notre cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$ pour une résolution des quatre problèmes donnés en exemple[175] par nos soins. De là, quatre catégories de situations-problèmes ont été constituées, chacune d'entre elles étant matérialisée par une page d'un *petit cahier de références*, chaque page représentant ainsi une boîte-référente.



À chaque fois qu'une nouvelle situation-problème est rencontrée, les élèves doivent décider de sa place dans l'une de ces catégories.

220	Ens. n°5	*(…) On a constitué un petit cahier de références, d'aides et en fonction de ces quatre problèmes, on a essayé de voir quand on en rencontrait d'autres s'il n'y en avait pas un qui rentrait dans une catégorie et ils avaient l'instinct de dire « Ah mais celui-là on l'a déjà vu. C'est comme, c'est comme l'histoire de la location de …. C'est vrai qu'ils en ont trouvé d'autres comme celui de la location de camion,*

[174] Au sens mathématique de *classes d'équivalence*, terme que nous n'utiliserons pas ici pour éviter des confusions avec l'usage de *classes* au sens de *regroupement d'élèves*.
[175] Voir Partie 3 – Paragraphe 2.7.3.2.2.2. - *Les éléments à introduire et à utiliser*

> *dont la structure ressemblait à celui-là, donc ils cherchaient dans leur cahier. Quand ils ne trouvaient pas, ils disaient : « Pff, je ne sais pas comment on peut faire. Je ne trouve pas, hein maîtresse, ça ne va pas, ce n'est pas écrit. (…)* **(Enseignant classe n°5)**

En entête de chaque page figure un schéma du type de ceux préconisés par Vergnaud, choisi par les élèves mais *personnalisé* par l'adjonction des nombres correspondant au problème cité en exemple.

La séance observée et vidéoscopée dans cette classe n°5 concerne l'élaboration de nouvelles situations-problèmes pouvant s'insérer dans l'une des catégories constituées.

> 1 00.00 Ens.→Cl. *(…) Vous inventez le problème en entier. (…) ce n'est pas n'importe quel problème, c'est un problème qui fait partie, enfin qui fait partie, qui va avoir sa place dans le petit cahier. (…)* **(Classe n°5 – Séance n°2)**

Les élèves ont la possibilité d'utiliser les boîtes-référentes matérialisées ici par les pages du cahier :

> 35 03.59 Ens.→Cl. *(…) vous allez donc fabriquer un problème. Vous avez le droit évidemment d'utiliser le cahier. (…)* **(Classe n°5 – Séance n°2)**

L'enseignant ajoute lors de l'autoconfrontation croisée :

> 220 Ens. n°5 *(…) on a constitué un petit cahier de références, d'aides et en fonction de ces quatre problèmes, on a essayé de voir quand on en rencontrait d'autres s'il n'y en avait pas un qui rentrait dans une catégorie et ils avaient l'instinct de dire « Ah mais celui-là on l'a déjà vu. (…)*

3.3.3.1.2. Classe n°6

L'enseignant de la classe n°6 a aussi fait résoudre au départ les quatre situations-problèmes que nous avions fournies. Elle a ensuite proposé aux élèves les schémas-référents comme outils, sans leur en demander la construction. Ces schémas-référents ont fait l'objet

(i) d'un affichage mural accessible visuellement par tous les élèves de la classe,

(ii) d'une distribution sur fiche individuelle classée dans la pochette *problèmes* attribuée à chacun.

Lors de chaque séance de résolution de problèmes, les élèves qui disposent d'une fiche d'énoncés de problèmes doivent retrouver à quelle *boîte-référente* appartient la situation-problème en utilisant, si besoin est, les affichages ou bien la fiche individuelle contenant les schémas-référents. Les situations-problèmes résolues viennent ensuite s'ajouter aux autres situations déjà présentes dans les boîtes-référentes.

Lors de la séance de type n°2 observée et vidéoscopée, de par le fait que l'enseignant met en exergue qu'il n'y a pas de correspondance terme à terme entre le nombre de situations-problèmes à résoudre et le nombre de *boîtes-référentes* mises à disposition traduit d'une certaine façon la mise en œuvre par cette classe du principe P4 de catégorisation. Les élèves sont amenés à effectuer des choix de regroupement des situations-problèmes, en se référant notamment aux schémas-référents élaborés :

6	01.04	Ens.→Cl.	*(…) dans votre pochette « problèmes », vous avez la petite feuille que l'on a déjà vue avec tous les schémas. (…)*
94	17.14	Ens.→Cl.	*Vous n'êtes pas obligés d'utiliser tous les schémas, les enfants. (…). Vous utilisez le schéma dont vous avez besoin. Certains se croient obligés d'utiliser tous les schémas. Ce n'est pas possible. D'abord, vous n'avez que trois questions.* **(Classe n°6 – Séance n°2)**

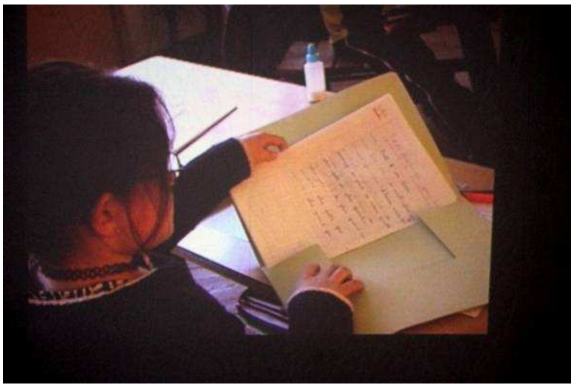


Figure 87 : ***Élève consultant sa « pochette de problèmes »***

3.3.3.1.3. Classe n°7

Après avoir demandé à chaque élève de construire une représentation de type iconique pour représenter chaque situation-problème donnée puis après avoir arrêté avec l'ensemble des élèves un schéma-référent pour caractériser chacune des situations-problèmes données en exemples, l'enseignant de la classe n°5 propose de regrouper dans une même boîte-référente les situations-problèmes de même type :

239	Ens. n°7	*(…) Dans une séquence, on fait le problème d'en-tête. Après, c'est la schématisation dans une autre séquence. Enfin, on présente chaque entête. Quand on a eu fait les quatre fiches, il y a avait des présentations de problèmes au tableau qu'ils devaient mettre dans la bonne fiche. Cela a pris d'autres séquences. Et enfin, il a fallu deux ou trois séquences aussi pour inventer des problèmes sur chaque fiche.*
241	Ens. n°7	*Non. C'était étape par étape et on travaillait sur les quatre fiches en même temps.* **(Enseignant classe n°7)**

De notre point de vue, ces activités de classement en référence aux schémas-référents traduisent la mise en œuvre dans cette classe n°7 du principe P4 de catégorisation.

Un extrait de la transcription vidéoscopée de type n°2 vient encore renforcer ce point de vue, puisque les élèves sont effectivement sollicités pour comparer la situation-problème à traiter avec celles contenues dans les *boîtes-référentes*.

334	45.44	Ens.→Cl.	*Alors est-ce que ce problème allait avec les deux problèmes qu'on a vus avant : celui de la semaine dernière et puis celui de tout à l'heure qu'on avait mis sur la même fiche ?* **(Classe n°7 – Séance n°2)**

En sachant qu'à chaque fois la voie est ouverte pour la création de nouvelles catégories, comme l'a précisé l'enseignant :

126	11.23	Ens.→Cl.	*(…) Maintenant, s'il y a un des deux problèmes qui n'est pas du même type que celui qu'on a vu, qui ne se résout pas de la même façon, qui ne se résout pas par une addition à trous, eh bien, je vais vous donner une autre fiche dans laquelle donc pour l'instant il n'y a rien. (…)* **(Classe n°7 – Séance n°2)**

3.3.3.1.4. Classe n°8

Ayant fait procéder elle aussi à la constitution des *boîtes-référentes*, l'enseignant de la classe n°8 rappelle à plusieurs reprises la nécessité de comparer les situations-problèmes nouvelles à celles déjà rencontrées. Les extraits de l'enregistrement vidéoscopé d'une séance de type n°2 dans cette classe :

224	39.55	Ens.→Cl.	*(L'enseignante revient au tableau pour la phase de synthèse collective.) Alors est-ce que vous avez des remarques à faire sur les 3 problèmes. Est-ce qu'ils se ressemblent ou pas ?*
228	40.14	Ens.→Él.	*« Prénom de l'élève » Est-ce que tu es d'accord pour dire que les trois problèmes se ressemblent ? Est-ce qu'ils sont tous les trois de la même famille ?*
230	40.25	Ens.→Cl.	*Alors est-ce qu'ils sont tous les trois de cette famille-là ? (L'enseignante montre le schéma multiplication au tableau. Un élève lève le doigt.)*
233	40.31	Ens.→Cl.	*Donc on les mettra dans ce tiroir-là ?* **(Classe n°8 – Séance n°2)**

L'insistance sur l'usage de *tiroirs*, en d'autres termes sur l'usage de *boîtes-référentes* marque l'application du principe P4 basé sur la catégorisation.

3.3.3.2. Synthèse

En résumé, l'analyse des données recueillies au cours des enregistrements vidéoscopés de séances de type n°2 et au cours de l'entretien d'autoconfrontation croisée révèle que les enseignants des quatre classes du groupe-expérimental ont mis en œuvre le principe P4 de catégorisation.

Comme il leur avait été demandé au cours de la présentation du cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$, les 4 enseignants ont, avec des approches différentes liées à leurs pratiques usuelles d'enseignement, procédé à l'introduction des *boîtes-référentes* et à leur usage par les élèves lors des séances de résolution de problèmes à données numériques. Ces *boîtes*, matérialisant l'idée de catégorisation, ont pris ainsi des formes variées : affichage collectif assorti de fiches individuelles (classes n^{os} 6, 7, et 8), pages d'un *petit carnet* (classe n°5).

Quelques expressions illustrent la manière dont les enseignants ont opéré pour conduire leurs élèves à la catégorisation. Ces expressions sont extraites d'items parfois déjà cités ci-avant dans l'analyse des données issues de chacune des classes.

Incitation à la catégorisation	Emploi de	Item	Locuteur	Expression	Classe
Des points communs	Même	3	Ens.	*C'est un problème qui est à peu près le même que celui-là.*	n°5
		277	Ens.	*C'était la même chose.*	n°7
		278	Ens.	*Donc celui-ci, il fallait le mettre sur la même fiche.*	n°7
	Pareil	123	Ens.	*Sophie a dit que c'était pareil. (L'enseignante apporte le schéma n°3 et le pose au milieu du tableau pour le mettre en évidence.)*	n°8
	Comme	122	Ens.	*Elle a dit le numéro 1, c'est comme le 3ème, c'est comme le 3ème dessin… Comme le 3ème schéma.*	n°8
	Famille	228	Ens.	*Est-ce que tu es d'accord pour dire que les trois problèmes se ressemblent ? Est-ce qu'ils sont tous les trois de la même famille ?*	n°8
	Type	105	Ens.	*Quel type de problème vous avez en tête, là ?*	n°5
	Se ressemblent	224	Ens.	*Alors est-ce que vous avez des remarques à faire sur les 3 problèmes. Est-ce qu'ils se ressemblent ou pas ?*	n°8
Des différences	Autre(s)	17	Élève	*On a le droit d'inventer un problème qui ne va pas avec les autres ?*	n°5
		126	Ens.	*Maintenant, s'il y a un des deux problèmes qui n'est pas du même type que celui qu'on a vu, qui ne se résout pas de la même façon, qui ne se résout pas par une addition à trous, eh bien, je vais vous donner une autre fiche dans laquelle donc pour l'instant il n'y a rien.*	n°7

3.3.4. Mise en œuvre du principe P1 : Recherche

L'observation des séances de type n°2 a révélé que les élèves étaient effectivement confrontés à la recherche de solutions à des problèmes posés : dans les classes n^{os} 6, 7, 8, il s'agit de situations-problèmes posées par l'enseignant de la classe, tandis que dans la classe n°5, ce sont des problèmes inventés et rédigés par d'autres élèves de la classe.

3.3.5 Conditions : coexistence, régularité, dévolution

Les consignes de début d'expérimentation, communiquées aux 8 enseignants, exigeaient le respect de la régularité des séances et des progressions fixées en début d'année scolaire. Nous considérons que chaque enseignant de notre échantillon a continué[176] à confronter ses élèves à la résolution de problèmes et qu'ainsi la condition de régularité a été mise en œuvre.

[176] Voir Partie 3 – Paragraphe 3.1.2. : Fréquence des séances de résolution de problèmes et nombre de problèmes à résoudre

Nous considérons que la condition de coexistence est respectée dans la mesure où il avait été demandé aux 4 enseignants de mettre en œuvre conjointement les quatre principes (P1, P2, P3, P4).

Les conditions mêmes de l'expérimentation liées à l'introduction de boîtes-référentes amènent de fait l'enseignante à faire en sorte que l'élève se sente responsable de la solution qu'il doit rechercher. En ce sens, la condition de dévolution nous paraît avoir été mise en œuvre.

3.3.6. Synthèse

En résumé, nous pouvons conclure que les principes P1, P2, P3 et P4 ont été mis en œuvre dans les quatre classes du groupe expérimental, tout en respectant les deux conditions de régularité de sa mise en œuvre et de sa dévolution à l'élève.

Chapitre 4 : Discussion générale

Cette étude a consisté à soumettre un échantillon de 8 classes de CE2 à une expérimentation dans le but d'étudier les effets introduits par la modification des pratiques des 4 enseignants du groupe-expérimental et de comparer les performances à un pré-test et à un post-test des élèves de ces 4 classes à celles du groupe-témoin en vue de défendre la thèse que la mise en œuvre d'un enseignement de mathématiques basé sur une approche intégrative favorise l'apprentissage de la résolution de problèmes à données numériques.

Ce travail s'est déroulé en plusieurs phases :

- dans un premier temps, nous avons exploré les pratiques habituelles des enseignants dans le champ de la résolution de problèmes à données numériques,
- dans un deuxième temps, nous avons soumis deux groupes d'élèves (un groupe expérimental nommé GE et un groupe-témoin nommé GT) à la passation d'un même pré-test visant la résolution de 13 problèmes à données numériques,
- dans un troisième temps, exclusivement les élèves du groupe-expérimental GE ont été soumis à l'opérationnalisation du cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$. Il s'agissait de modifier le Système Didactique global en intégrant un ensemble de quatre principes liés à la régularité de confrontation à la résolution de problèmes, à la mise en réseau des connaissances, à la conversion entre registres de représentation sémiotique, à la catégorisation de situations mathématiques. Ces principes devaient être dévolus à l'élève par l'enseignant et mis en œuvre de manière conjointe. Dans le même temps, nous avons observé les pratiques des enseignants de ce groupe afin de vérifier si la mise en œuvre du cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$ était en conformité avec notre demande. Les pratiques des enseignants du groupe-témoin ne devaient pas faire l'objet de modifications par rapport aux pratiques habituellement mises en œuvre et observées préalablement.
- Enfin, nous avons soumis à nouveau les deux groupes d'élèves (GE et GT) à la passation d'un même post-test strictement identique au pré-test.

4.1. Résultats des élèves

Les progrès observés relativement au groupe-témoin (GT) pratiquant une approche ordinaire sont significativement moindres que ceux observés dans le groupe-expérimental (GE) ayant procédé à l'opérationnalisation du cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$. On peut dire à un niveau de risque $\alpha = 0,05$ que si les résultats observés dans le groupe-témoin (GT) progressent d'environ UN problème réussi en plus, ceux observés dans le groupe-expérimental (GT) progressent d'environ DEUX problèmes réussis en plus entre le pré-test et le post-test.

4.2. Pratiques des enseignants lors des séances de type n°1

Notre recherche a débuté par l'observation de séances de résolution de problèmes conduites par l'enseignant respectivement dans les 8 classes de CE2 composant notre échantillon-enseignant. Nous rappelons que ces enseignants sont expérimentés, dans le sens de non-débutants dans l'exercice du métier d'enseignant, et experts pédagogiques reconnus par leurs supérieurs hiérarchiques pour leur qualité professionnelle.

Nous avons demandé à ces 8 enseignants de mettre en œuvre une séance de résolution de problèmes qui caractérise leur pratique habituelle dans ce champ des mathématiques. Le contrat que nous avons passé avec eux stipulait que la séance devait être *ordinaire,* c'est-à-dire de même type que celles que ces enseignants dispensent à leurs élèves au quotidien, en minimisant les effets de l'intrusion de personnes extérieures à la classe. Ainsi, les supports utilisés par les enseignants, le mode d'organisation pédagogique mis en place devaient rester inchangés par rapport aux séances habituellement conduites. La seule contrainte posée était liée aux contenus des problèmes puisque la séance de travail qui allait être mise en œuvre le jour de l'observation devrait porter sur la résolution de problèmes à données numériques.

Nous avons nommé *séances de type n°1* les premières séances vidéoscopées, c'est-à-dire les séances qui précédaient l'expérimentation. Sachant qu'une séance d'enseignement ne reflète pas l'ensemble des caractéristiques des pratiques d'un enseignant, nous avons adjoint à ces données celles construites par une enquête par questionnaire complétée elle-même par des entretiens d'autoconfrontation simple. Lors de ces entretiens, chacun des enseignants, au fur et à mesure du visionnement du film de la séance, a indiqué et précisé les points communs et les points de divergence entre cette séance observée et les autres séances mises en place habituellement dans le domaine de la résolution de problèmes à données numériques. Nous avons dégagé un ensemble d'éléments caractéristiques des pratiques de chaque enseignant, en nous appuyant sur l'analyse des réponses au questionnaire et sur celle des transcriptions intégrales des deux enregistrements, l'un vidéoscopé pour la séance en classe, l'autre sonore pour l'entretien d'autoconfrontation. Nous souhaitions répondre aux questions suivantes :

Selon quelle fréquence les enseignants confrontent-ils leurs élèves à la résolution de problèmes ? Quels outils mettent-ils à la disposition de leurs élèves ? Comment s'organisent les séances de résolution de problèmes ? Ces séances comportent-elles des phases de recherche, c'est-à-dire des phases de travail au cours desquelles les élèves sont amenés à construire des solutions aux problèmes posés ?

Nous rappelons ci-après les principaux éléments issus de l'analyse des données afin de caractériser les pratiques initiales des enseignants de notre échantillon.

4.2.1. Régularité de la mise en place de séances de résolution de problèmes

S'agissant de la question de la fréquence des séances de résolution de problèmes, l'analyse des données recueillies révèle que les huit enseignants mettent en place au moins une fois par semaine de telles séances avec, en moyenne, 5 problèmes à résoudre par semaine. Cette moyenne de 5 problèmes, tant au sein du groupe–témoin que du groupe-expérimental, nous conduit à considérer que nos deux groupes sont homogènes quant à la fréquence hebdomadaire en ce qui concerne la résolution de problèmes. En revanche, on relève une hétérogénéité entre les classes puisque cette fréquence varie entre 3 et 8. Compte tenu de la variabilité qui peut être due à la longueur des énoncés ou encore au degré de difficultés des situations-problèmes, nous considérons que les enseignants de notre échantillon confrontent régulièrement leurs élèves à la résolution de situations-problèmes.

4.2.2. Outils utilisés dans la séance de résolution de problèmes

S'agissant des outils mis à la disposition des élèves, l'enquête par questionnaire révèle que chaque élève de l'échantillon dispose d'un *manuel scolaire* et parfois de deux. La mise à disposition de *calculatrices* dans 3 classes sur les 8 ne conduit pas pour autant à conclure à un usage systématique de cet outil lors des séances de résolution de problèmes. De plus, les enseignants qui déclarent mettre cet outil à la disposition de leurs élèves précisent que l'usage en est plutôt épisodique. Ces données corroborent celles d'observation des séances où aucun élève n'a été invité à utiliser la calculatrice.

S'agissant de l'usage des *livres du maître*, appelés également *guides pédagogiques* ou *guides du maître*, on ne peut conclure à une homogénéité des pratiques. Il ressort néanmoins que lors de la préparation des séquences de mathématiques, les enseignants ne recourent pas de manière systématique à l'usage d'un tel guide pédagogique, pourtant associé aux manuels scolaires mis à la disposition de leurs élèves dans les classes. Pour l'aide à la préparation des séquences, nous référons trois modalités d'usage : soit (i) l'usage de plusieurs guides pédagogiques, soit (ii) le seul recours au manuel de l'élève, soit (iii) l'usage de cours de didactique suivis lors de la formation initiale.

4.2.3. Phases de recherche dans la séance de résolution de problèmes

Des phases que nous nommons « phases de recherche » dans le sens où les élèves sont placés en situation de chercher, sont présentes dans chacune des classes. Cependant, nous avons relevé des divergences concernant d'une part, la temporalité et l'organisation de ces phases, d'autre part l'objet même de la recherche. D'un point de vue temporel, ces phases ont une durée qui varie entre 18% et 45 % de la durée totale de la séance et sont parfois réparties en deux ou trois étapes. L'objet de la recherche est variable : il peut s'agir de rechercher effectivement la solution à une situation-problème mathématique posée, ou de prélever des indices dans des énoncés. Du point de vue de l'organisation, ces phases conduisent les élèves à chercher individuellement, ou par groupes de deux, elles peuvent aussi faire alterner ces deux modes d'organisation. Cependant, quel que soit le mode d'organisation retenue, on relève, lors de ces phases de recherche, la présence de nombreuses interventions orales, audibles par la classe entière. Ceci est d'autant plus surprenant que les élèves sont censés être placés en situation de chercher. On remarque la présence de l'effet Topaze (Brousseau, 1986b). Seule une des classes a échappé à ce constat de fond sonore quasi-permanent constitué par les interventions successives des enseignants.

4.2.4. La place de la conversion des représentations sémiotiques dans la séance de résolution de problèmes

Lors de la recherche de solutions aux problèmes mathématiques posés par les enseignants, on retrouve l'exigence d'une forme normée *solution-opération* qui conduit l'élève à recourir systématiquement aux registres textuel et numérique. On n'observe pas de consensus chez les enseignants en ce qui concerne la question du recours au registre iconique. Au cours des séances observées, ce registre de représentation sémiotique n'a jamais été proposé comme outil à utiliser a priori comme aide à la résolution. Les traces écrites produites par les élèves dans les cahiers de brouillon contiennent rarement des dessins ou des schémas. Le recours au registre iconique a été mobilisé lors des phases de correction. Il nous a semblé comme étant lié à une décision de l'enseignant, l'autorisant en dernier lieu, soit après l'échec du recours au registre numérique, soit pour une vérification des procédures utilisées. Les schémas et graphiques sont très souvent absents des cahiers des élèves. En conclusion, deux registres de représentation sémiotique sont essentiellement mobilisés lors de la résolution de problèmes : les registres textuel et numérique.

Le registre iconique apparaît en revanche majoritaire au niveau des affichages de la classe, il concerne toutefois essentiellement les affichages en arts plastiques.

4.2.5. La place et le rôle de la mise en réseau des connaissances dans la séance de résolution de problèmes

Une incitation à une mise en réseau entre les situations-problèmes à résoudre et des situations liées à la vie quotidienne a été observée à plusieurs reprises dans les classes. Il en est de même pour une mise en réseau avec des notions ou des procédures apprises ou utilisées au cours de l'année scolaire. On a bien là une incitation à se référer à des connaissances antérieures. Toutefois, nous remarquons que c'est l'enseignant qui pilote directement cette mise en réseau, voire qui l'effectue lui-même. Les élèves sont parfois conduits pas à pas vers le cheminement qui conduira à la solution du problème. S'agissant de la compréhension du lexique présent dans l'énoncé, on retrouve cette même attitude de l'enseignant qui fait procéder à des explications orales, voire qui donne directement l'explication. Ainsi, l'enseignant pilote cette phase d'explicitation de l'énoncé. En d'autres termes, les explications ont lieu sous son contrôle direct et ce, oralement. Nous avons effectué un constat identique de guidage très fort de la part de l'enseignant, au niveau des phases de correction des problèmes. Même si, dans les classes observées, l'usage du tableau noir constitue le support privilégié pour la correction, nous n'avons pas identifié de phases de conclusion au cours de l'analyse de ces phases de correction. Autrement dit, les séances se terminent par la solution du dernier problème, sans qu'il n'y ait eu de synthèse sur les notions apprises au cours de la séance ou sur les méthodes utilisées pour résoudre.

Dans les conditions de notre expérimentation, nous avons effectué le constat que l'initiative de mise en réseau avec des apprentissages antérieurs relevait plutôt de l'enseignant, en d'autres termes nous considérons que l'initiative de recours à des apprentissages antérieurs est peu dévolu à l'élève. Nous rapprochons ce constat des difficultés rencontrées par les élèves français âgés de 15 ans lorsque les situations d'utilisation des connaissances diffèrent des situations d'enseignement par lesquelles ils ont réalisé l'apprentissage (PISA, 2003). Les programmes d'enseignement de l'école primaire (Ministère Éducation nationale, 2002) indiquent précisément que *les premières notions mathématiques sont identifiées, puis étudiées dans le but d'être utilisables pour résoudre de nombreux problèmes*.

S'agissant de la mémoire didactique, les enseignants interrogés semblent avoir une connaissance assez approfondie des pratiques de leurs collègues à l'intérieur même du cycle 3, marquant là la réflexion engagée par cycle au sein des écoles. Toutefois, il semblerait que les échanges entre les enseignants de CE1 et de CE2 soient moins fréquents, sans doute en raison de l'appartenance de ces deux classes à des cycles pédagogiques différents. En nous référant aux travaux de Brousseau et Centeno (1991) sur la question de la mémoire didactique de l'enseignant, nous considérons que ce manque de liaison entre CE1 en cycle 2 et CE2 en cycle 3 peut avoir un effet sur les apprentissages des élèves.

4.3. Effets du cadre didactique R^2C^2 au travers des pratiques d'enseignement de la résolution de problèmes lors des séances de type n°2

L'analyse des séances vidéoscopées de type n°2 dans les classes du groupe-expérimental, complétée par celle de l'entretien final d'autoconfrontation croisée a révélé la mise en œuvre effective du cadre didactique R^2C^2 notamment celle de la dévolution à l'élève des principes inhérents à ce cadre : P1, P2, P3, P4. L'analyse fine de l'opérationnalisation de chacun de ces principes dans les classes du groupe-expérimental nous conduit, à cette étape de notre recherche, à discuter des relations possibles entre, d'une part, les modifications de pratiques apportées par l'opérationnalisation du cadre didactique R^2C^2 dans les classes du groupe-expérimental et d'autre part, les performances obtenues par les élèves dans la résolution des 12 problèmes pris en compte dans l'expérience.

Il convient maintenant d'examiner l'effet qu'a pu avoir chacun de ces principes sur l'apprentissage des élèves. En d'autres termes, nous examinons en quoi la mise en œuvre de chacun de ces principes a pu constituer une aide pour les élèves placés en situation de résoudre des problèmes numériques. Nous rappelons ces principes :

- P1 : Recherche
- P2 : Mise en réseau des connaissances
- P3 : Conversion des représentations sémiotiques
- P4 : Catégorisation

4.3.1. Interprétation des effets du principe de Recherche (principe P1)

Dans les séances de type n°1, le terme de « Recherche » semble associé à diverses acceptions. Dans six classes sur huit, les élèves sont effectivement placés en situation de *chercher la solution* à une situation-problème posée. Cependant, dans deux classes sur huit, des séances dites de résolution de problèmes à données numériques sont centrées exclusivement sur des activités étroitement liées à la lecture de l'énoncé et excluent toute activité liée à la mobilisation d'un traitement mathématique. Il n'est pas question de revenir ici sur le rôle déterminant joué par la lecture et la compréhension de l'énoncé dans la construction d'une représentation mentale de la situation décrite dans cet énoncé. La performance en lecture constitue le meilleur prédicteur de la réussite en résolution de problèmes (Dubois, D., in ONL, 1996) et montre l'attention qu'il convient d'accorder à la compréhension. Il paraît donc incontournable de prendre en compte dans l'enseignement l'activité de lecture de l'énoncé. Cependant il s'agit de savoir où situer ce travail spécifique. D'un côté, les experts dans le domaine de la lecture disent que le traitement de ce type de texte, compte tenu de sa pauvreté langagière, ne saurait être effectué durant des séances de lecture, (ONL, 2000). D'un autre côté, on constate que certaines séances de mathématiques sont composées uniquement d'activités de prise d'informations dans des énoncés et ne réservent aucune place aux traitements mathématiques, ainsi que le déplorent Balmes et Coppé (1999). Les enseignants s'appuient sur des manuels scolaires qui, sous la rubrique *Résoudre des problèmes* consacrent des séances entières à *Comprendre des problèmes* ou à *Trier des questions*. Ainsi, le *savoir prescrit* dans les programmes d'enseignement (Ministère Éducation nationale, 1995) présenté sous la forme de micro-compétences a pris, d'une part, le statut de *savoir à enseigner* par l'intermédiaire des manuels scolaires, et d'autre part, celui de *savoir enseigné* lors de la mise en œuvre de séances basées sur le recours au manuel scolaire.

4.3.2. Interprétation des effets du principe de Conversion de représentations sémiotiques (principe P3)

Dans les séances de type n°1, les élèves sont principalement confrontés à l'usage de deux registres de représentation : le registre textuel et le registre numérique entre lesquels s'opèrent des conversions lors de la résolution de problèmes. Dans les séances de type n°2 on retrouve l'utilisation de ces deux registres. L'introduction des boîtes-référentes conduit en effet les élèves à recourir à plusieurs reprises à l'usage du registre iconique, d'une part, pour élaborer une représentation dessinée de la situation décrite dans l'énoncé, d'autre part, pour modéliser la situation.

Nous rappelons qu'il s'agit ici d'expliquer les écarts constatés entre les performances des élèves du groupe-témoin et celles des élèves du groupe-expérimental lors de la résolution de problèmes. Il nous semble que l'incitation à mobiliser le registre iconique et à procéder à des conversions en plus des registres textuel et numérique peut avoir favorisé la résolution de problèmes, du moins chez certains élèves. Nous traiterons ici successivement et donc distinctement du recours à la trace dessinée et du recours à la trace schématisée.

- Cas du type *dessin* :

Les élèves sont en présence d'un énoncé textuel qui présente une situation à résoudre. En nous référant aux travaux issus de la psychologie de l'apprentissage, nous considérons que la situation, même dans le cas où il s'agit d'une situation de la vie quotidienne, doit être reconstruite par le lecteur à partir de l'énoncé de manière à en élaborer une représentation mentale. Le recours à la trace dessinée nous semble imposer à l'élève un passage obligé par une lecture pas à pas de l'énoncé, voire par plusieurs lectures de l'énoncé qui pourrait laisser suggérer une meilleure identification des données. Nous rejoignons Novotnà (2002) qui développe le point de vue selon lequel la construction de la représentation mentale de la situation pourrait ainsi être facilitée par ce recours à cette trace dessinée qui permettrait de soulager la mémoire de travail.

- Cas du type *schéma* (*diagramme*) :

Si l'on s'intéresse à la représentation de type *diagramme*, on peut, en nous référant toujours à Novotnà (2003), considérer que ce recours va faciliter la démarche heuristique grâce à la manipulation par écrit de relations. Cette insistance sur la manipulation par l'écrit nous semble déterminante. En effet, dans les séances de type n°1, le registre de type iconique était essentiellement mobilisé lors des phases de correction et ce, en grande partie, sous le contrôle de l'enseignant. Les représentations iconiques ont, dans la plupart des classes, été introduites lors de la phase collective de correction, soit par l'enseignant lui-même reprenant les travaux d'un élève, soit par un élève invité à exposer au tableau les représentations iconiques qu'il avait tracées dans son cahier lors de la résolution du problème.

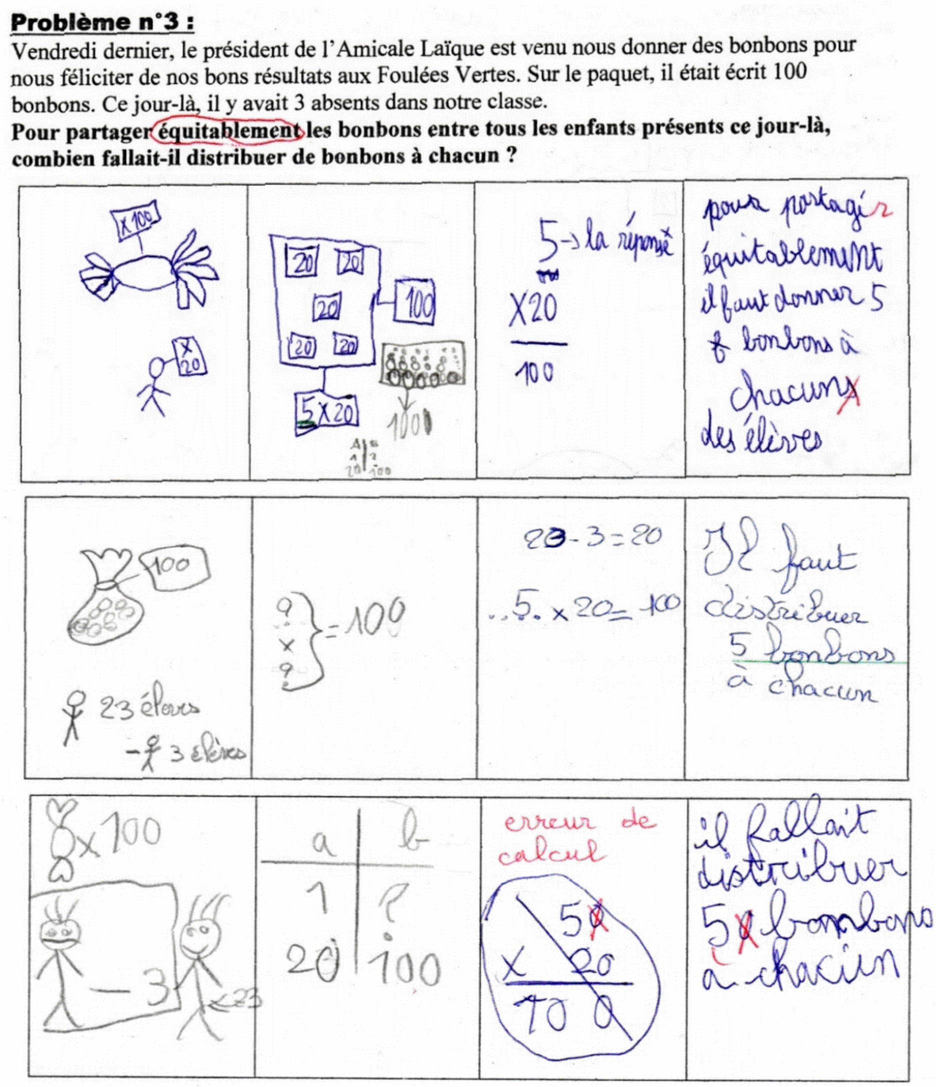


Figure 88 : ***Production d'élèves montrant le recours à la boîte-référente***

Le cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$ prévoit que l'élève réalise lui-même les *diagrammes* lors de la phase de recherche. Cette introduction ne constitue nullement une innovation. Dans une séance de type n°1, un enseignant demandait déjà à ses élèves de recourir à ce type de représentation, sans toutefois rendre ce recours obligatoire. Dans notre cadre didactique, la forme matérielle de la *boîte-référente* avec une case vierge prévue pour recevoir un *diagramme* invite l'élève à cette production. On sait en effet qu'en l'absence d'une présentation préalable par le professeur, le langage graphique est rarement utilisé par les élèves (Novotnà, 2003). Ici, dans le cadre $\boldsymbol{R^2C^2}$, l'utilisation de l'artefact *boîte-référente*, rend explicite la demande de recours à ce type de conversion.

Par ailleurs, cette régularité dans l'utilisation des *boîtes-référentes* vise aussi à induire une régularité dans la mise en relation de plusieurs registres entre eux. Cette condition de mise en œuvre régulière, alliant nombre et variété de tâches de traitements et de conversions de registres est posée par Pluvinage (1998) dès lors que l'on s'intéresse à la place de ces opérations dans l'apprentissage de la résolution de problèmes. Duval (1995) pointe en effet le rôle fondamental joué par les tâches de conversion entre plusieurs registres de représentation sémiotique d'un même objet mathématique, pour la construction d'un concept.

Il nous semble aussi que la mise en œuvre de ce principe P3 peut avoir eu un effet sur le contrat didactique (Brousseau, 1980a) dans la mesure où l'élève est désormais confronté à différentes possibilités de représentations reconnues par l'enseignant. L'analyse des séances de type n°1 avait révélé une homogénéité dans les pratiques initiales des enseignants qui exigeaient un passage par la forme de présentation normée « Solution / Opération ». Cette forme centrée sur une approche unique de résolution basée sur le recours au mode calculatoire nous semble favoriser l'usage de la technique opératoire en cours d'apprentissage, comme l'a révélé l'étude longitudinale de productions d'élèves réalisée sur quatre années successives (voir partie 2). On peut alors considérer que le fait d'instituer le recours à différents registres de représentation vient modifier le contrat didactique et ce, d'autant plus qu'il existe souvent, comme le regrette Hitt (2003) un décalage entre les représentations sémiotiques spontanées, fonctionnelles, produites par les élèves et celles attendues par les professeurs.

Toutefois, l'analyse des documents vidéoscopés révèle que certains élèves recourent à la trace écrite imagée après avoir donné la solution au problème en utilisant le mode opératoire. On peut voir là encore l'effet du contrat didactique. L'élève veut répondre à la demande d'utilisation de différents registres. Il semble essentiel de considérer en nous référant à Vergnaud (1997) que ces traces dessinées ou schématisées ont un statut transitoire et qu'elles sont faites pour être oubliées au fur et à mesure de la maîtrise des problèmes.

4.3.3. Interprétation des effets du principe de Catégorisation (principe P4)

De nombreuses recherches ont montré que dans le cadre de la résolution de problèmes, il convenait de s'intéresser aux relations mathématiques en jeu dans les situations posées (Riley, Greeno et Heller, 1983). Des classifications ont été élaborées. Nous nous appuyons sur celle établie par Vergnaud pour les structures additives (Vergnaud, 1981) et pour les structures multiplicatives (Vergnaud, 1990) afin d'opérationnaliser la mise en œuvre du principe de catégorisation (P4) du cadre $\boldsymbol{R^2C^2}$.

L'analyse des pratiques initiales des enseignants de notre échantillon n'a pas révélé la présence d'activités de catégorisation des situations-problèmes en fonction des relations mathématiques en jeu.

En revanche, l'activité de catégorisation est présente dans les séances de type n°2 par l'introduction et l'utilisation effectives de l'artefact *boîte-référente* inhérentes à la mise en place du principe P4. Il s'agit, à partir de situations-problèmes résolues en recourant à différents registres de représentation :

- de construire un ou plusieurs schémas-référents permettant de représenter les relations mises en jeu dans les situations,
- d'établir des catégories de situations-problèmes en fonction de ces relations. Chaque catégorie constituera alors une boîte-référente destinée à recevoir d'autres situations, y compris celles inventées par les élèves. Il s'agit d'intégrer chaque nouvelle situation dans une catégorie existante ou bien dans une nouvelle catégorie. L'usage des boîtes-référentes conduit ainsi chaque élève à établir des comparaisons entre les situations-problèmes.

Il nous semble que la mise en œuvre de ce principe P4 peut avoir eu un effet sur la capacité des élèves à résoudre des situations-problèmes, dans la mesure où les élèves ont été amenés à établir des classes de problèmes conduisant à la construction et à l'enrichissement d'un modèle mental.

En effet, face à une situation-problème, deux cas peuvent se présenter :

(i) L'élève a déjà rencontré ce type de situation et a déjà élaboré un schéma (Kintsch et Greeno, 1985), c'est-à-dire un objet mental structuré ayant un certain nombre de propriétés caractéristiques propres à la classe de problèmes rencontrés. Dès lors, il peut classer la nouvelle situation dans la boîte-référente adéquate.

(ii) L'élève n'a jamais rencontré ce type de situation ; il va devoir élaborer un modèle analogique de cette situation et construire un modèle mental (Johnson-Laird, 1983). On peut envisager que le fait de tracer par écrit un diagramme permettant de visualiser les relations en jeu facilitera la construction de ce modèle mental.

4.3.4. Interprétation des effets du principe de mise en Réseau avec des connaissances antérieures (principe P2)

Dans les séances de type n°1, les enseignants incitent oralement leurs élèves à se référer à des connaissances antérieures, à établir des liens avec des situations de la vie quotidienne.

Dans les séances de type n°2, on retrouve au niveau du groupe-expérimental cette incitation orale à la mise en réseau : les enseignants suggèrent à leurs élèves de se référer à des situations connues de la vie quotidienne. Rien ne nous permet d'affirmer, en l'état actuel de nos connaissances, que cette évocation de situations issues de la vie quotidienne puisse favoriser la résolution de problèmes chez les élèves. Les recherches conduites (Nesher, 1980 ; Acioly, 1994, 1997) montrent que la compréhension d'une situation, fût-elle issue de la vie quotidienne, ne suffit pas nécessairement à assurer la réussite au problème mathématique. Mais au-delà de ces points de convergence, on relève des divergences entre l'incitation à cette mise en réseau telle qu'elle se présentait dans les pratiques initiales et telle que nous l'observons lors de la mise en œuvre de ce principe au sein de notre cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$. C'est l'élève qui va mettre en œuvre cette mise en réseau en utilisant les boîtes-référentes introduites lors de notre expérimentation.

Ainsi, quand un élève a une nouvelle situation-problème à résoudre, il doit chercher si ce problème lui rappelle un type de problème déjà rencontré. C'est lui qui va essayer d'effectuer cette mise en réseau entre des connaissances nouvelles. Autrement dit, l'artefact *boîte-référente* inhérent à la mise en œuvre de notre cadre didactique a permis à l'enseignant de procéder à la dévolution à l'élève de cette mise en réseau.

Il nous semble que les modifications liées à la mise en œuvre du principe P2 dans les quatre classes du groupe-expérimental relèvent essentiellement de sa dévolution à l'élève. Les évaluations internationales ont révélé les difficultés rencontrées par les élèves français de 15 ans dès lors que les situations d'utilisation des connaissances sont différentes des situations par lesquelles s'est réalisé l'apprentissage.

De plus, nous considérons que le nombre et la diversité des situations proposées favorisent la formation des concepts (Vergnaud, 1990). Selon le statut de la connaissance initiale, deux cas de figure peuvent se présenter :

(i) la catégorie dans laquelle s'inscrit la situation-problème est nouvelle : l'élève devra construire une nouvelle connaissance contre ses connaissances antérieures (Bachelard, 1938)

(ii) la catégorie dans laquelle s'inscrit la situation-problème a été récemment rencontrée : pour renforcer l'apprentissage, il est nécessaire que la connaissance récemment apprise soit mise en réseau avec les connaissances antérieures.

En effet, la possibilité donnée à l'élève de compléter des boîtes-référentes tout au long de l'année nous semble pouvoir favoriser l'apprentissage : le classement de nouvelles situations nécessite la mise en relation avec les connaissances acquises antérieurement.

4.3.5. Interprétation des conditions de mise en œuvre des quatre principes du cadre $\boldsymbol{R^2C^2}$

Toutes les séances de résolution de problèmes mises en place par les enseignants du groupe expérimental durant l'opérationnalisation du cadre $\boldsymbol{R^2C^2}$ ont été exclusivement réalisées en utilisant les outils et le protocole fournis pour $\boldsymbol{R^2C^2}$.

Les boîtes-référentes ont été conçues comme artefacts permettant à la fois :

- de procéder à des activités de conversion (principe P3) et de catégorisation (principe P4),
- de mettre en réseau des connaissances (principe P2) et ce, en vue :
  - de résoudre des situations-problèmes nombreuses et variées (principe P1). Leur utilisation, telle qu'elle était conçue et telle qu'elle a été effectivement mise en œuvre, induit de fait la coexistence des principes P1, P2, P3, P4.

La régularité des séances de résolution de problèmes déjà présente dans les séances de type n°1, posée comme devant rester constante tout au long de l'expérimentation, conduit à admettre la régularité de la mise en oeuvre des principes P1, P2, P3 et P4 dans les classes du groupe expérimental.

La condition de dévolution à l'élève a été constatée lors de la mise en œuvre des principes. Par contraste avec les pratiques initiales observées qui réservaient plutôt la mise en réseau et la conversion à l'enseignant, on observe dans les séances de type n°2 une dévolution à l'élève des deux principes P2 et P3, liée à l'utilisation des boîtes-référentes.

La mise en œuvre d'activités liées à la catégorisation des situations-problèmes, absente lors des séances de type n°1, a été, elle aussi, dévolue à l'élève lors de la mise en œuvre du cadre $\boldsymbol{R^2C^2}$.

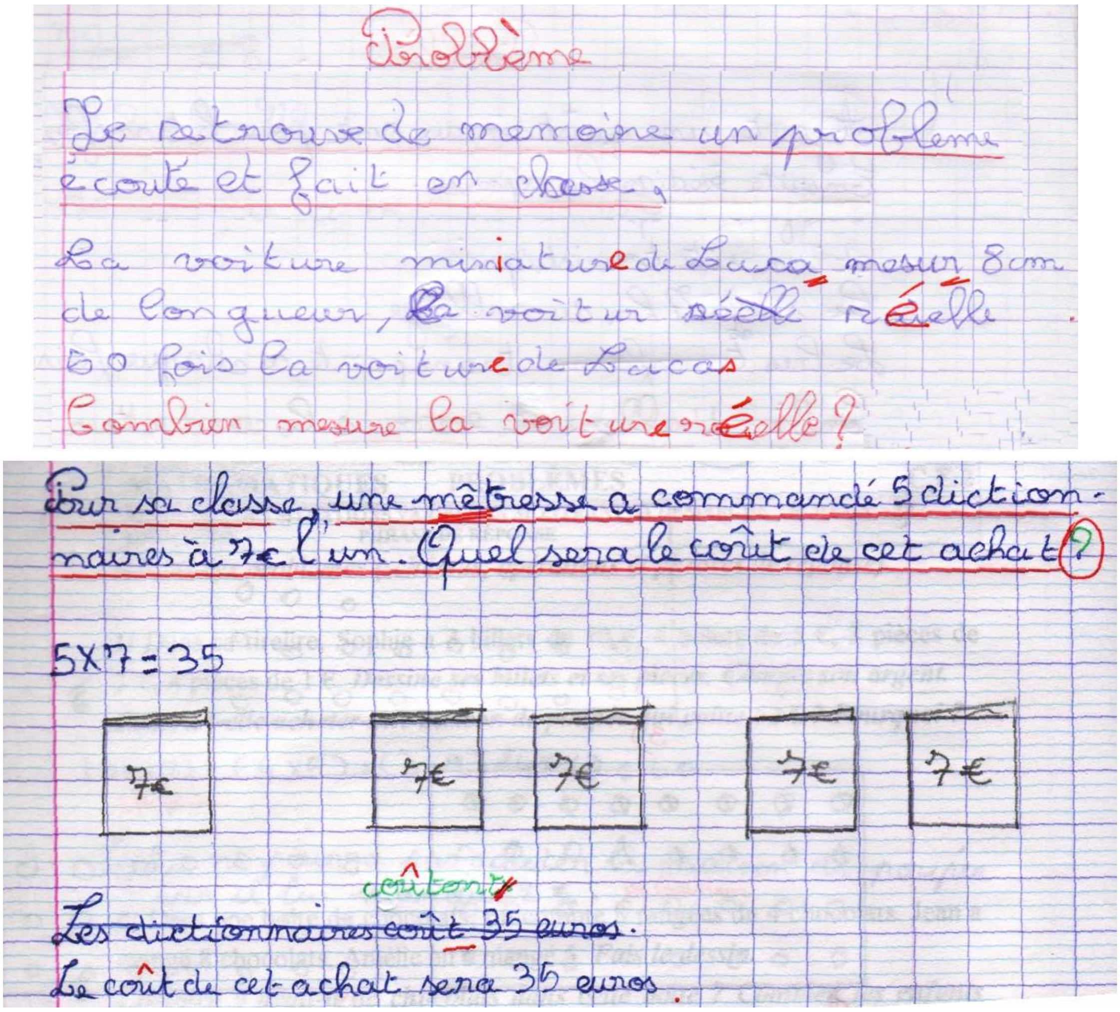
Les élèves ont été placés en situation de rechercher des solutions aux situations-problèmes posées.

En conclusion, on peut admettre que la condition de dévolution des principes a été respectée.

Réplication de l'expérimentation

L'expérimentation a été reconduite l'année suivante avec 6 classes, 3 constituant le groupe-expérimental, 3 constituant le groupe-témoin. Les 6 classes ont été soumises à un pré-test et à post-test. On observe une amélioration des performances dans les 3 classes du groupe expérimental. De plus, et contrairement à l'année précédente, on observe une amélioration des performances dans une classe du groupe-témoin. L'observation de cette classe du groupe-témoin a révélé une pratique proche de celle que nous préconisons dans la mise en place du cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$. Des extraits du cahier d'un élève (Figure 89) révèlent que :

- Les élèves recourent à la conversion de représentations sémiotiques.
- La mise en réseau avec des connaissances antérieures est sollicitée.
- Le principe de recherche est mis en œuvre : les élèves sont confrontés chaque semaine à la résolution de problèmes.
- La condition de régularité est respectée : des séances de résolution de problèmes sont programmées chaque semaine.
- La condition de dévolution est respectée : d'une part, par l'ensemble des consignes données oralement par l'enseignant et d'autre part, par celles figurant dans le cahier.
- Seul le principe de catégorisation n'apparaît pas, du moins dans les données que nous avons construites.



Problème

Je retrouve de memoire un problème écouté et fait en classe.

La voiture miniature de Luca mesur 8 cm de longueur, ~~La~~ voitur ~~réel~~ réelle 50 fois la voiture de Lucas

Combien mesure la voiture réelle ?

Pour sa classe, une mètresse a commandé 5 dictionnaires à 7€ l'un. Quel sera le coût de cet achat ?

5X7 = 35

7€ 7€ 7€ 7€ 7€

coûtent

~~Les dictionnaires coût 35 euros.~~

Le coût de cet achat sera 35 euros.

Figure 89 : ***Extraits du cahier d'un élève***

4.4. Portée et limites des analyses de notre expérimentation

Face aux difficultés rencontrées par les élèves dans la résolution de problèmes et à la lumière de différents cadres théoriques, nous avons défini un cadre de référence basé sur une approche intégrative. Nous avons défini un cadre pédagogique et didactique que nous avons nommé ***R^2C^2***.

Nous avons posé l'hypothèse suivante :

> *L'apprentissage peut être favorisé si l'enseignement s'inscrit dans un cadre didactique satisfaisant aux quatre conditions suivantes :*
> *(i) Mise en application des principes :*
> *P1 : Recherche*
> *P2 : Mise en réseau des connaissances*
> *P3 : Conversion des représentations sémiotiques*
> *P4 : Catégorisation*
> *(ii) Coexistence de P1, P2, P3, P4*
> *(iii) Régularité de P1, P2, P3, P4*
> *(iiii) Dévolution[177] à l'élève de P1, P2, P3, P4*

[177] Au sens de Brousseau (1988b).

> *Les principes P1, P2, P3, P4 s'appliquent à l'activité de l'élève et leur mise en œuvre relève des tâches et de l'activité de l'enseignant. Ces principes prennent appui sur les présupposés théoriques retenus[178].*

Nous avons soumis à l'épreuve des faits cette hypothèse. Arrivée à la conclusion de ce chapitre, nous pouvons dire que :

- À un niveau de risque α = 0,05, on constate que si les résultats observés dans le groupe-témoin (GT) progressent d'environ UN problème réussi en plus, ceux observés dans le groupe-expérimental (GT) progressent d'environ DEUX problèmes réussis en plus entre le pré-test et le post-test.
- La mise en œuvre des principes a été effectuée selon les conditions demandées.
- Un maximum de variables a été contrôlé en vue de nous placer au plus près de conditions expérimentales en laboratoire. Pour exemples, dans le cadre de cette étude longitudinale sur l'année scolaire :
  - **Pour le recueil des données,** nous avons considéré que les données issues des analyses de séances vidéoscopées ne suffiraient pas à caractériser les pratiques des enseignants dans le cadre de l'enseignement de la résolution de problèmes. Nous avions donc prévu d'utiliser la méthode de l'enquête par questionnaire ainsi que la méthode des entretiens d'autoconfrontation et de leurs transcriptions. Certes, les contenus des séances variaient mais on ne peut faire abstraction de la *vie de la classe* en dehors de l'expérimentation. Ainsi, à l'instar de Robert (2007), nous avons admis la stabilité des pratiques de chaque enseignant, pour des enseignements *standard*, que nous nommons habituels, autrement dit pour les enseignants observés dans les séances de type n°1. Les séances de type n°2 ont été, elles, analysées dans le but d'étudier l'effectivité de la mise en œuvre des principes. L'usage des boîtes-référentes a par ailleurs conduit à des traces écrites qui ont légitimé les données recueillies lors des observations. Lors des séances vidéoscopées, les consignes étaient strictement identiques pour chaque enseignant. Le caméscope était toujours placé au fond de la classe.
  - **Pour le traitement des données,** nous avons vérifié à ne considérer que les élèves présents à la fois au pré-test et au post-test pour calculer les moyennes des performances à l'intérieur de chaque groupe.

En bref, nous nous sommes inspirée de la rigueur scientifique que Glaeser (1973) nous a enseignée à travers ses écrits.

En conséquence, nous admettons que les quatre principes inhérents au cadre R^2C^2 ont été effectivement mis en œuvre selon les trois conditions posées. Nous considérons que le cadre didactique R^2C^2 de par les principes qu'il véhicule et de par les conditions de sa mise en œuvre a permis de modifier le rapport de l'élève au savoir.

[178] Voir Partie 1 - Chapitre 5

En référence à la longueur et à la complexité du processus de conceptualisation (Charnay, 2006), il serait bien sûr intéressant d'effectuer un suivi de ce type d'expérimentation sur 2 ou 3 ans.

On peut aussi considérer que les limites de cette expérimentation sont liées au faible nombre de participants. Toutefois, la réplication de cette expérimentation lors de l'année scolaire suivante atteste de la validité des résultats obtenus.

CONCLUSION GÉNÉRALE

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les divers travaux rapportés dans ce mémoire de thèse ont été conduits afin de mettre à l'épreuve des faits, l'idée qu'un enseignement de mathématiques basé sur une approche pédagogique et didactique *intégrative* favorise l'apprentissage de la résolution de problèmes à données numériques à l'école élémentaire.

Arrivée à cette étape de notre chemin de recherche scientifique, nous souhaitons résumer les éléments de réponses qui se sont dégagés de nos travaux. Nous abordons cette phase de conclusion en reprenant les trois principales étapes qui ont guidé notre réflexion et notre recherche.

1. De la polysémie du mot *problème* à la construction de l'objet de notre recherche

Centrée dès le début sur la question des difficultés et des obstacles rencontrés par nos élèves dans l'apprentissage des mathématiques, notre recherche s'est très vite orientée vers un questionnement ajusté au mot *problème*, dans sa signification dans le champ des mathématiques. L'approche étymologique du début de notre questionnement a suffisamment aiguisé notre curiosité pour nous conduire à croiser une pluralité d'éclairages concernant diverses acceptions de ce terme *problème* : regards des mathématiciens, des didacticiens, des psychologues et de l'institution scolaire. Cette mise en synergie de différentes approches nous a amenée à considérer les axes diachronique et synchronique des usages de l'expression *problème scolaire* que nous avons distingués des usages du terme *exercice* (Glaeser, 1973)

Ce questionnement autour de la notion de *problème scolaire* nous a ainsi guidée progressivement vers différents champs théoriques orientés vers la problématique de la résolution de problèmes considérée, d'une part, par rapport à son enseignement et, d'autre part, dans une vision plus large de l'apprentissage. De là, nous avons défini un cadre de référence fondé sur une approche que nous avons qualifiée d'*intégrative* et sur l'élaboration d'un *cadre didactique*, que nous nommons $\boldsymbol{R^2C^2}$, et qui se caractérise par les degrés de dévolution à l'élève et de régularité de la mise en œuvre des principes suivants : **R**echerche, mise en **R**éseau, **C**onversion, **C**atégorisation. Nous rappelons que nous nommons approche intégrative une organisation qui se fonde sur les apports coordonnés de plusieurs cadres théoriques.

2. Du questionnement sur les performances des élèves à l'observation des pratiques des enseignants

Une deuxième étape de nos travaux a été sous-tendue à la fois par un questionnement relatif à l'évolution des performances des élèves dans des situations de résolution de problèmes mathématiques et par l'analyse critique des constats que nous avions opérés.

2.1. Les comparaisons internationales

Les comparaisons internationales, notamment celles basées sur les résultats en 2003 et en 2006 aux enquêtes PISA révèlent, concernant la résolution de problèmes, des performances pour la France inférieures en moyenne à celles de la Finlande. De plus, alors que la France se situait de façon *significative* en 2003 au-dessus de la moyenne des pays de l'OCDE, elle passe en 2006 en dessous de cette moyenne. Sur ce point, deux remarques s'imposent :

Premièrement, ces études sont basées sur l'évaluation des compétences des élèves âgés de quinze ans, quel que soit leur niveau de scolarisation ; elles révèlent des écarts importants entre les élèves en fonction de leur parcours scolaire. Il convient dès lors de distinguer les performances des élèves *à l'heure* qui traduisent la réussite de notre enseignement, de celles des élèves ayant redoublé au cours de leur parcours scolaire et qui, elles a contrario, en pointent les limites, voire les défaillances.

Deuxièmement, ces études internationales visent à évaluer dans quelle mesure les jeunes de quinze ans sont préparés à exploiter leurs savoirs et savoir-faire pour affronter la vie quotidienne. L'objectif n'est pas de mesurer le degré d'assimilation d'une matière spécifique du programme d'enseignement. Partant de ces constats, la communauté des didacticiens des mathématiques a pointé le danger qui émanerait d'une adaptation de nos programmes d'enseignement à la réussite de telles enquêtes.

Cependant, il nous semble important de nous attarder sur le repérage de difficultés importantes chez nos élèves de quinze ans à répondre à des items dont l'énoncé est un texte long et dense ou nécessitant une production écrite. Ce type d'énoncé de problème semble en effet contraster avec ceux proposés habituellement aux élèves en France. Ces données s'inscrivent ainsi en étroite relation avec les travaux cités en première partie et mentionnant l'importance à accorder à la compréhension des énoncés (Fayol, 1996). Elles viennent corroborer les liens établis par Pluvinage et Mallier (1998) entre les difficultés rencontrées en mathématiques et les lacunes pointées en lecture, par les élèves à l'entrée en 6ème.

2.2. Les évaluations nationales

Les analyses effectuées à partir des données issues des évaluations nationales d'entrée au CE2 et d'entrée en 6ème révèlent que l'activité de résolution de problèmes est l'activité mathématique dans laquelle les élèves rencontrent le plus de difficultés.

2.3. L'étude longitudinale d'un échantillon de 213 élèves pendant quatre ans

Le dispositif expérimental

Partant de ces divers constats relatifs aux évaluations nationales et internationales, nous avons souhaité procéder à des investigations complémentaires en vue d'analyser les parcours d'apprentissage des élèves de la sortie du cycle 2 jusqu'à la fin du cycle 3. Nous avons alors conduit une étude longitudinale auprès d'un échantillon de 213 individus en vue d'étudier l'évolution de leurs performances dans la résolution d'un même problème de type multiplicatif sur quatre années successives, selon un protocole de passation strictement identique.

Quelques résultats

L'analyse des performances de la cohorte réduite à 105 élèves ayant passé l'épreuve lors des quatre années consécutives, compte tenu du mouvement migratoire des élèves, a révélé des résultats encourageants : près d'un quart des élèves de CE1 résout ce problème lié à une situation de partage, ce qui corrobore l'idée que l'enseignement de la résolution de problèmes n'impose pas d'avoir enseigné préalablement la technique de l'opération en jeu (Fagnant, 2005). De même, il ressort de cette étude que, répondant aux objectifs assignés à l'Ecole primaire, le taux de réussite au problème multiplicatif posé augmente, depuis la fin du CE1 jusqu'à la fin du CM2 où, en fin de compte, deux tiers des élèves fournissent la réponse attendue. On relève même que 12 élèves sur 105 (11%) ont eu un parcours constitué uniquement de réussites. Toutefois, on peut aussi opposer à ces constats positifs le fait que plus d'un tiers des élèves ne donne pas la réponse attendue à ce problème et même que 19 élèves sur 105 (18%) ont un parcours strictement composé d'échecs, soit par réponse erronée, soit par non-réponse, pour les quatre passations.

Analyse des productions écrites des élèves

L'analyse minutieuse des 420 productions[179] d'élèves a conduit aux conclusions suivantes : la présence ou non de *traces écrites intermédiaires* ne dépend pas de l'année de scolarité et quand elles apparaissent, leur contenu est majoritairement composé d'opérations, essentiellement celles dont la technique opératoire a été introduite au cours de l'année de passation. Nous interprétons ce phénomène dans le cadre du contrat didactique (Brousseau, 1988). Il ressort aussi que la présence de traces écrites intermédiaires au CE2-CM1-CM2 s'associe plutôt à la modalité non-réussite de la performance. Ce fait d'observation laisse penser que les élèves qui ont réussi, ont alors résolu le problème mentalement sans éprouver la nécessité de recourir à ces traces écrites. On remarque d'ailleurs que le taux de réussite au problème n'augmente pas significativement plus entre le CM1 et le CM2 qu'entre le CE2 et le CM1 ni qu'entre le CE1 et le CE2.

La production de représentations iconiques est essentiellement concentrée dans une seule classe de CE1 dans laquelle 8 élèves sur 11 réussissent à résoudre le problème posé. Notons encore que ces représentations présentent des similitudes comme la présence du tracé

[179] 105 productions par année

de chaque dizaine dans 11 copies. Ceci nous a alors conduite à prendre pour objet de recherche les pratiques mêmes d'enseignement de la résolution de problèmes dans les classes afin d'en étudier leurs divers effets sur la réalisation des apprentissages des élèves.

2.4. Observation des pratiques des enseignants

L'analyse des données issues d'une enquête par questionnaire auprès d'un échantillon de 81 enseignants encadrant un total de 1081 élèves âgés de 8/9 ans en classe de CE2 a notamment révélé la régularité des séances de résolution de problèmes dans les classes : dans plus de 90% des classes, les enseignants déclarent que les élèves sont confrontés au moins une fois par semaine à l'activité de résolution de problèmes. Les données construites ne nous ont pas toutefois permis de conclure à une homogénéité des pratiques des enseignants en ce qui concerne :

- La fréquence des séances de résolution de problèmes : 10% des enseignants interrogés proposent une séance quotidienne de résolution de problèmes tandis que 6,3% proposent seulement une séance par quinzaine.
- Les outils mis à la disposition des élèves : dans près de 80% des classes, chaque élève dispose au moins d'un manuel ou fichier tandis que dans 20% des classes, il n'existe aucun outil individuel de ce type.
- La correction des problèmes : elle revêt une dimension collective dans 72% des classes.
- La préparation des séquences de classes par les enseignants : plus de la moitié d'entre eux résout le plus souvent les problèmes mentalement avant de les proposer aux élèves.

À ce stade de nos investigations, nous avons considéré qu'il devenait nécessaire de procéder à des observations plus fines des pratiques des enseignants afin de caractériser l'enseignement dispensé dans le champ de la résolution de problèmes.

3. De la mise à l'épreuve du cadre didactique R^2C^2 à nos conclusions

3.1. Le dispositif

Afin de mettre à l'épreuve le cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$ nous avons engagé une nouvelle étude longitudinale se bornant cette fois-ci à une année scolaire. Dans un premier temps, nous avons tenté de caractériser les pratiques habituelles d'enseignement de la résolution de problèmes à données numériques, pour un échantillon de huit enseignants de huit classes de CE2, à travers quatre variables définies à la lumière de notre cadre théorique de référence. Plus précisément, nous souhaitions déterminer si l'enseignement de la résolution de problèmes faisait l'objet de pratiques régulières, déceler les outils utilisés dans les classes, identifier la place des phases de recherche, de la conversion de registres de représentation et de la mise en réseau des connaissances. Notre méthode de construction des données s'est fondée simultanément sur les transcriptions intégrales de séances vidéoscopées que nous avons nommées séances de type n°1, sur des entretiens d'autoconfrontation simple et sur une enquête par questionnaire.

3.2. Quelques résultats

- La régularité des séances de résolution de problèmes : l'analyse des données a révélé la mise en place d'au moins une séance hebdomadaire avec en moyenne 5 problèmes à résoudre par séance. En conséquence, nous admettons que les enseignants des huit classes concernées mettent leurs élèves en situation régulière de résoudre des problèmes.
- Outils mis à disposition des élèves : chaque élève de l'échantillon a un manuel scolaire, voire parfois deux. Pour les préparations de séances, les enseignants ne recourent pas de manière systématique à l'usage des livres du maître associés au manuel scolaire de l'élève, ce qui nous conduit à poser la question de la transposition du savoir à enseigner. Trois enseignants sur huit mettent des calculatrices à disposition de leurs élèves ; cependant ils déclarent son usage comme étant épisodique.
- Place des phases de **R**echerche : nous considérons une variabilité à deux niveaux :
  - quant à l'objet même de la recherche : il peut s'agir de la recherche de la solution à un problème posé, mais ce peut être aussi (2 classes sur 7) le prélèvement d'indices dans des énoncés ;
  - quant à la durée de ces phases : cette durée varie entre 18% et 45% de la durée totale de la séance. Ces phases sont parfois réparties en deux ou trois étapes, chacune de ces phases correspondant en règle générale à la résolution d'une situation-problème.
- **C**onversion de représentations sémiotiques : nous considérons qu'elle s'opère entre les registres textuel et numérique, à travers notamment la forme normée de présentation des résultats Solution – Opération. Le registre iconique qui apparaît comme étant le plus fréquemment utilisé au niveau des affichages en arts plastiques, est toutefois très souvent absent des cahiers des élèves.
- Mise en **R**éseau des connaissances, nous remarquons sa réalisation sous le contrôle presque systématique de l'enseignant. C'est lui qui pilote cette mise en réseau, quelles qu'en soient les raisons : phase d'explicitation de l'énoncé, compréhension du lexique. Tandis que ces enseignants de CE2 déclarent échanger des informations avec leurs collègues du cycle 3 sur les pratiques pédagogiques, leurs relations avec les enseignants du cycle 2 semblent moins fréquentes, ce qui, pour les élèves, nous paraît constituer un obstacle à la mise en réseau entre les notions acquises au CE1 et celles à acquérir au CE2.

3.3. L'opérationnalisation du cadre didactique *R²C²*

Les huit classes ont fait l'objet d'une répartition aléatoire entre un groupe-témoin (GT) et un groupe-expérimental (GE) composés chacun de quatre classes. L'analyse des effets du cadre didactique ***R²C²*** mis en œuvre uniquement dans les quatre classes du groupe expérimental a été effectuée en regard de la comparaison des performances des élèves du groupe-témoin et de celles du groupe-expérimental au pré-test et au post-test d'un ensemble de 13 problèmes à données numériques. Basée sur la mise en place des quatre principes décrits ci-dessus, l'opérationnalisation de ce cadre didactique est soumise à la mise en œuvre d'artefacts que nous nommons boîtes-référentes. Cette étude de type longitudinal a révélé des résultats probants puisque, en prenant un niveau de risque de 1ère espèce α=0,05, les performances observées dans le groupe-témoin (GT) progressent d'environ UN problème réussi en plus, tandis que ceux observés dans le groupe-expérimental (GE) progressent d'environ DEUX problèmes réussis en plus.

Nous avons vérifié que les conditions de mise en œuvre des quatre principes du cadre didactique ***R²C²*** avaient été effectivement respectées au niveau des quatre classes du groupe-expérimental. Par ailleurs, les conclusions établies à partir de l'analyse fine des enregistrements vidéoscopés des quatre classes du groupe expérimental (GE) complétées par les données issues d'un entretien final d'autoconfrontation croisée nous conduisent à dire que, dans les conditions de notre expérimentation, la mise en œuvre du cadre didactique ***R²C²*** a favorisé, de façon significative, le faire apprendre, c'est-à-dire qu'il a facilité plus l'apprentissage de la résolution de problèmes à données numériques pour les élèves du groupe expérimental que ne l'a fait le cadre pédagogique ordinaire pour les élèves du groupe-témoin.

Nous avons conscience qu'un effet-maître est toujours possible. Néanmoins, la reproduction l'année suivante de ce dispositif a conduit aux mêmes effets au niveau du groupe-expérimental, constitué de 3 classes. En revanche, dans l'une des trois classes du groupe-témoin, on a assisté à des progrès des élèves semblables à ceux du groupe-expérimental. En analysant finement les pratiques de l'enseignant de ce groupe, nous avons constaté que sa pratique habituelle comportait les mêmes principes que ceux installés dans le cadre didactique ***R²C²***. Cette observation nous semble confirmer les effets de l'approche *intégrative* que nous avons mise à l'épreuve au cours de cette recherche, ouvrant la voie à d'autres travaux.

In fine, et pour simplifier, c'est à partir d'une pluralité de constats liés aux difficultés rencontrées par les élèves lors de la résolution de problèmes de mathématiques que notre objet de recherche s'est peu à peu dessiné et affiné au fil des années. Il s'agissait pour nous de mieux comprendre les causes possibles des échecs de nos élèves dans ce champ précis des mathématiques et d'essayer d'apporter une remédiation pour pallier ces difficultés. Il s'agissait aussi de mieux comprendre l'activité des enseignants en situation d'enseigner la résolution de problèmes.

De ce double questionnement est née notre problématique de thèse organisée autour de la question centrale de recherche de conditions, dans un enseignement de mathématiques, pouvant contribuer à favoriser l'apprentissage de la résolution de problèmes, en particulier de problèmes à données numériques.

C'est à partir de l'analyse d'une pluralité de données que nous avons mis à l'épreuve des faits notre hypothèse de travail. Nous soutenons que, dans les conditions de notre expérimentation, la mise en œuvre du cadre didactique R^2C^2 fondé sur une approche intégrative, favorise, de façon significative, l'apprentissage de la résolution de problèmes à données numériques pour les élèves du groupe expérimental par rapport aux élèves du groupe-témoin. En d'autres termes, nous concluons que :

L'apprentissage de la résolution de problèmes à données numériques peut être significativement favorisé par l'organisation d'un enseignement qui s'inscrit dans un cadre didactique du type R^2C^2 basé sur une approche intégrative et satisfaisant à la mise en œuvre conjointe et régulière des quatre principes suivants : **R**echerche, mise en **R**éseau des connaissances, **C**onversion des représentations sémiotiques, **C**atégorisation, et à leur dévolution à l'élève par l'enseignant.

C'est sur une pluralité de pistes de recherche pour le futur que nous clôturons aujourd'hui ce mémoire de thèse.

4. De nos conclusions à nos perspectives de recherche

Les investigations dont nous avons rendu compte dans le présent mémoire constituent pour nous une étape dans la réflexion sur l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes.

Nos perspectives de recherche peuvent se décliner selon trois dominantes :

4.1. Une dominante didactique

Le traitement des données rapporté au chapitre 3 de la troisième partie a révélé une variabilité des fréquences de réussite par problème. Partant de ces résultats, nous envisageons d'analyser l'effet de la mise en œuvre du cadre didactique R^2C^2 sur la réussite à **chacun** des problèmes. Nous devrons là encore user de méthodes adaptées au traitement de données issues d'une étude longitudinale, et définir des variables liées aux marges possibles de progrès de réussite ou d'échec à chacun des problèmes.

4.2. Une dominante méthodologique

En vue de continuer nos investigations d'ordre méthodologique, dans le sens de regard sur les méthodes d'analyse que nous mettons en œuvre, nous souhaitons étudier la complémentarité des apports fournis par l'utilisation d'un logiciel d'analyse statistique implicative (A.S.I.). Les conseils de notre directeur de thèse, Jean-Claude Régnier, spécialiste en A.S.I, nous seront précieux, une nouvelle fois. Le logiciel Chic devrait nous permettre de dégager des régularités, des invariants, des similarités, des implications entre plusieurs variables. Il devrait également nous ouvrir la voie vers la construction d'autres types de représentations sémiotiques tels que les arbres de similarité ou les graphes implicatifs.

4.3. Une dominante d'ouverture

Nous envisageons d'utiliser le cadre didactique $\boldsymbol{R^2C^2}$ comme cadre d'observation et d'analyse de séances de résolution de problèmes dans plusieurs autres pays. Des contacts ont d'ores et déjà été pris en ce sens.

BIBLIOGRAPHIE

ACADEMIE FRANÇAISE (1694), *Dictionnaire de l'Académie Française,* 1ère édition, Paris, Cognard

ACADEMIE FRANÇAISE (1762), *Dictionnaire de l'Académie Française,* 4ème édition, Paris, Brunet

ACADEMIE FRANÇAISE (1798), *Dictionnaire de l'Académie Française*, 5ème édition, Paris, Smits

ACADEMIE FRANÇAISE (1835), *Dictionnaire de l'Académie Française,* 6ème édition, Paris, Firmin-Didot

ACADEMIE FRANÇAISE (1932-1935), *Dictionnaire de l'Académie Française,* 8ème édition, Paris, Hachette

ACIOLY, N. M. (1985), *A Logica Matemática no jogo do bicho: compreensão ou utilização de regras?,* Dissertation de Master en Psychologie cognitive, Université Fédérale de Pernambuco, Recife, Brésil

ACIOLY, N. M. (1994), *LA JUSTE MESURE : une étude des compétences mathématiques des travailleurs de la canne à sucre du Nordeste du Brésil dans le domaine de la mesure,* Thèse de Doctorat en Psychologie, Université René Descartes, PARIS V

ACIOLY, N. M., SCHLIEMANN, A. D. (1986), Escolarizaçao e conhecimento matematico desenvolvido no contexto do jogo do bicho, *Cadernos de Pesquisa*, n°61, pp. 42-57

ACIOLY-REGNIER, N. M. (1996), *Desenvolvimento e transferência de competências em mecânica: concepçoes subjacentes e obstaculos especificos à natureza da aprendizagem*, Recife, CNPq, Université Fédérale de Pernambuco

ACIOLY-REGNIER, N. M. (1997), Analyse des compétences mathématiques de publics adultes peu scolarisés et/ou peu qualifiés in Andrieux, F., Besse, J.-M. et Falaise, B. *Illettrismes : quels chemins vers l'écrit ?* Les actes de l'université d'été du 8 au 12 juillet 1996- Lyon - France : Ed. Magnard

ADDA, J. (1982), L'enseignement des mathématiques n'est pas neutre, *Actes du Colloque Psychology of Mathematics Education*, Anvers

ADJIAGE, R., PLUVINAGE, F. (2007), An Experiment in Teaching Ratio And Proportion. *Educational Studies in Mathematics*, n°65, pp. 149-175.

AMIGUES, R., FAÏTA, D., SAUJAT, F. (2004), L'autoconfrontation croisée : une méthode pour analyser l'activité enseignante et susciter le développement de l'expérience professionnelle, *Bulletin de Psychologie,* n° 469, pp. 41-44.

ANDRE, P. (1879), *Nouveau cours d'arithmétique*, André-Guédon, Paris

ARMANDO, C., VALLEJO, C., PLUVINAGE, F. (2003), Les projets d'action pratique, éléments d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques, *Annales de didactique et sciences cognitives*, Strasbourg, IREM, Vol. 8, pp. 273-292

ARSAC, G., GERMAIN, G., MANTE, M. (1988), *Problème ouvert et situation-problème*, IREM de Lyon

ARTIGUE, M., GRAS, R., LABORDE, C., TAVIGNOT, P. (1994), *Actes du Colloque Vingt ans de didactique des mathématiques en France* – Paris – Juin 1993, La Pensée Sauvage, Grenoble

ASTOLFI, J.-P. (1990), L'important, c'est l'obstacle, *Cahiers pédagogiques*, n°281

ASTOLFI, J.-P., DAROT, E., GINSBURGER-VOGEL, Y., TOUSSAINT, J. (1997), *Mots-clés de la didactique des sciences. Repères, définitions, bibliographies,* De Boeck, Bruxelles

BACHELARD, G. (1938), *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, Vrin

BADDELEY, A.D. (1996). The psychology of memory. In A.D. Baddeley, B. A. Wilson & F. N. Watts (eds), *Handbook of memory disorders*. John Wiley & Sons: Chichester., pp. 3-25.

BALMES, R. M., COPPE, S. (1999), Les activités d'aide à la résolution de problèmes dans les manuels de cycle 3, *Grand N*, n°63, pp. 37-59

BARROUILLET, P., CAMOS, V. (2002), *Savoirs, savoir-faire arithmétiques, et leurs déficiences*, Programme Cognitique, École et sciences cognitives (version longue), Ministère de la Recherche

BARUK, S. (1985) *L'âge du capitaine (De l'erreur en mathématiques)* - Col. Points-Sciences - N° S83 - Le Seuil - Paris

BELIDOR, B. F. DE (1731), *Le Bombardier Français : Nouvelle méthode de jeter les bombes avec précision (avec tables),* Paris

BENVENISTE, E. (1974), *Problèmes de linguistique générale Tome 2*, Paris, Gallimard

BERGE, C. (1957), *Théorie Générale des Jeux à n personnes*, Gauthier-Villars, Paris

BERGE, C. (1958), *Théorie des Graphes et ses Applications*, Dunod, Paris

BERNARD, C. (1865), *Introduction à la médecine expérimentale*, Paris

BIDEAUD, J., MELJAC, C., FISCHER, J.-P., (1991), *Les chemins du nombre*, P.U. Lille, 491 p.

BILSKY, L.H., JUDD, T.P. (1986). *Source of difficulty in the solution of the verbal arithmetic problems by mildly retarded and nonretarded individuals*. American Journal of Mental Deficiency, n°90, pp. 395-402.

BODIN, A. (2005), *Ce qui est vraiment évalué par PISA en mathématiques. Ce qui ne l'est pas. Un point de vue français*, Communication faite à la conférence Franco-Finlandaise sur PISA

BOURBAKI, N. (1939-1998), *Éléments de mathématique*, 10 volumes.

BOUVIER, A. (1981), *La mystification mathématique, Herman*, Paris, 158 p.

BRIAND, J., CHEVALIER, M.-C., (1995), *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*, Hatier, Paris, 239 p.

BRISSIAUD R. (2004), La résolution de problèmes arithmétiques : une étude longitudinale au CE1, In *ARDM (Ed) Séminaire national de didactique des mathématiques 2004 Les actes*, pp. 223-228

BRISSIAUD, R. (2006), *Calcul et résolution de problèmes arithmétiques : il n'y a pas de paradis pédagogique perdu*, page mise en ligne sur le site du Café Pédagogique le 06-06-2006, http://www.cafepedagogique.net

BROUSSEAU, G. (1972), Processus de mathématisation, *Bulletin de l'APMEP*, pp. 57-84

BROUSSEAU, G. (1980a), Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*, Revue de laryngologie otologie rhinologie*, Vol. 101, n°3-4, pp. 107-131

BROUSSEAU, G. (1980b), L'échec et le contrat, *Recherches : la politique de l'ignorance*, n° 41, pp. 177-182

BROUSSEAU, G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 4, n°2, pp. 165-198

BROUSSEAU, G. (1986a), *La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse d'état. Bordeaux, Université de Bordeaux 1.

BROUSSEAU, G. (1986b), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n°2, pp. 35-115

BROUSSEAU, G. (1988a), Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. n°9, n°3, pp. 309-336

BROUSSEAU, G. (1988b), Didactique fondamentale : cadre et objets de la didactique, *Actes de l'université d'été d'Olivet : Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire*, Bordeaux, IREM, pp. 10-25

BROUSSEAU, G. (1989), Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège, *Petit x*, IREM, Grenoble, n°21, pp. 47-68

BROUSSEAU, G. (1994), Perspectives pour la didactique des mathématiques, in Artigue et al. (1994), *Actes du Colloque Vingt ans de didactique des mathématiques en France – Paris – Juin 1993*, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 51-66

BROUSSEAU, G. (1997), *La théorie des situations didactiques* - Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal, 57 p.

BROUSSEAU, G. (2002), Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques, *Didactique des Mathématiques*, Revue du Centre de Recherche en Éducation, Université de Saint-Étienne, n°22-23, pp. 83-155

BROUSSEAU, G. (2003), *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*, http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf, 9p.

BROUSSEAU, G. (2004), *Tâche, situation, activité*, un texte en exclusivité pour la Société Suisse pour la Recherche en Didactique des Mathématiques, 6 p.

BROUSSEAU, G., MAYSONNAVE, J. (1973), Données pour la construction d'un modèle d'apprentissage et pour une analyse de la dialectique de l'action dans la course à vingt, in *Études sur l'enseignement élémentaire*, IREM, Bordeaux, n°11

BROUSSEAU, G., WARFIELD, V. (1999), The case of GAEL, *Journal of Mathematical Behavior*, n°18 (1), pp. 1-46

BRUN, J. (1994), Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques, in *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*, Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 67-83

BRUN, J. (2003), *À propos de la didactique des mathématiques*, Math-Ecole, Neuchâtel, n°205, pp. 42-47.

BRUN, J., CONNE, F. (1990), Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations, *Éducation et Recherche*, Vol. 3, Ed. Université Fribourg, pp. 261-286

BUISSON, F. (1887), *Dictionnaire de pédagogie d'instruction primaire*, Paris, Hachette

BURKHARDT, H. (1994), Mathematical applications in school curriculum, in Husén, T., Postlethwaite, T.N., *The international encyclopedia of education* (2nde éd.), Oxford, New-York, Pergamon Press, pp. 3621-3624

CAILLOT, M. (1984), La résolution de problèmes de physique : représentations et stratégies, *Psychologie française*, Vol. 29, N°3-4, pp. 257-262

CALDWELL, L. (1995), *Contextual considerations in the solution of children's multiplication and division word problems*, Unpublished undergraduate thesis, University, Belfast

CARMONA-MAGNALDI, N., DE VECCHI, G. (2002), *Faire vivre de véritables situations-problèmes*, Hachette Éducation, Paris, 251 p.

CARPENTER, T.P., CORBITT, M.K., KEPNER, H.S., LINDQUIST, M.M., & REYS, R.E. (1980), *Solving verbal problems : Results and implications for National Assessment*, Arithmetic teacher, n° 28, pp. 8-12

CARPENTER, T.P., MOSER, J.M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesch & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes*, New York: Academic Press

CARRAHER, T.N., CARRAHER, D.W., SCHLIEMANN, A.D. (1985), Mathematics in the streets and in the schools, *British Journal of Developmental Psychology*, Vol. 3, pp. 21-29.

CASTELNUOVO, E., BARRA, M. (1980), *Mathématiques dans la réalité*, CEDIC, Paris

CAVAZZA, M. (1993) Modèles mentaux et sciences cognitives, in *Les modèles mentaux : approche cognitive des représentations*, Coordonné par Ehrlich M.-F., Tardieu, H., Cavazza, M., Masson, Paris, 183 p.

CHARNAY, R. (1988), Apprendre (par) la résolution de problèmes, *Grand N*, n°42, pp. 21-29

CHARNAY, R. (2006), *Calcul, résolution de problèmes, programmes : réaction au texte de Rémi Brissiaud*, page mise en ligne sur le site du Café Pédagogique le 20-06-2006, http://www.cafepedagogique.net

CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.-P. (2006), *CAP Maths CM1*, Hatier, Paris

CHEVALLARD, Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée sauvage éditions - Recherches en didactique des mathématiques, Grenoble, 126 p.

CHEVALLARD, Y. (1988), *Sur l'Analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation*, IREM, Marseille

CHEVALLARD, Y. (2003), Didactique et formation des enseignants, *Journées d'études INRP-GÉDIAPS – Vingt ans de recherche en didactique de l'Éducation Physique et Sportive à l'INRP (1983-2003)*, Paris, 14 p.

CHI, M. T. H., BASSOK, M., LEWIS, M. W., REIMANN, P., GLASER, R. (1989), Self-explanations : How students study and use examples in learning to solve problems, *Cognitive Science*, n°13, pp. 145-182

CLOT, Y, FAÏTA, D. (2000), Genres et styles en analyse du travail. Concepts et méthodes, *Travailler* n°4, pp. 7-42

CLOT, Y. (1999), *La fonction psychologique du travail*, Paris, PUF, 243 p.

CLOT, Y. (2005), *« Le travail fait l'homme »*, Conférence donnée à l'INRP Lyon, le 7 décembre 2005

CLOT, Y., FAÏTA, D., FERNANDEZ, G., SCHELLER, L. (2002), Entretiens en autoconfrontation croisée : une méthode clinique de l'activité, *Éducation permanente*, n°146, pp. 17-25

CONNE, F. (1992), Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. n°12, n°2-3, pp. 221-270.

COPPE, S. (1998), Composantes privées et publiques du travail de l'élève en situation de devoir surveillé de mathématiques, *Educational Studies in Mathematics*, n°35, pp. 129-151

COPPE, S., HOUDEMENT, C. (2002), Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire, *Grand N*, n°69, pp. 53-62

COQUIN-VIENNOT, D. (1996). Lire une image pour produire un énoncé de problème arithmétique. In Rouet, J.-F., Levonen, J.J, (Eds.), *UCIS'96 (Using Complex Information Systems) : Cognitive, ergonomic, educational aspects*. Poitiers: LACO, CNRS, Université de Poitiers. pp. 215-219

COQUIN-VIENNOT, D. (2000). *Lecture d'énoncés de problèmes arithmétiques : effet d'une introduction thématique sur la construction de la représentation.* Archives de Psychologie, n°68, pp. 41-58.

COQUIN-VIENNOT, D. (2001). *Problèmes arithmétiques verbaux à l'école : pourquoi les élèves ne répondent-ils pas à la question posée*, Enfance, n°2, pp. 181-196

COUCHOUD S. (2001), Mathématiques sur papyrus, *Les Cahiers de Science et Vie*, n°64

CRAHAY, M. (2005), La difficulté d'articuler diverses procédures arithmétiques dans les problèmes complexes, In Crahay, M., De Corte, E., Grégoire, J., Verschaffel, L. (Ed.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?,* Bruxelles : De Boeck, pp. 177-221

CRAHAY, M., HINDRYCKX, G., LEBE, M. (2002), Analyse des interactions entre enfants en situation de tutorat (portant sur des problèmes mathématiques de type multiplicatif), *Revue Française de Pédagogie*, n°136, pp. 133-145.

CUMMINS, D., KINTSCH, W., REUSSER, K., & WEIMER, R. (1988). *The role of understanding in solving word problems,* Cognitive Psychology, n°20, pp. 405-438.

D'ENFERT, R. (2003), Manuel (Travail) : préparer au métier ou éduquer ? , in Denis, D., Kahn, P. (dir.), *L'École républicaine et la question des savoirs. Enquête au coeur du Dictionnaire de pédagogie de Ferdinand Buisson*, Paris, Éditions du CNRS, 2003, pp. 199-222.

D'ENFERT, R. (2007), Commentaire posté en ligne le 9 février 2007 sur l'avis de l'Académie des Sciences (Le calcul à l'école), http://educmath.inrp.fr/Educmath/en-debat/place-du-calcul-enseignement-primaire/renaud_denfert

DAMM, R. (1992), *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension des énoncés*, Thèse, ULP, Strasbourg, 170 p.

DASEN, P., GAJARDO, A. NGENG, L. (2005), Éducation informelle, ethnomathématiques et processus d'apprentissage, in Maulini, O., Montandon, C., *Formel ? Informelle ? Les formes de l'éducation*, Bruxelles, De Boeck

DAVIS DORSEY, J., ROSS, S. M., MORRISON, G. R. (1991), *The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word problems.* Journal of Educational Psychology, n° 83(1), pp. 61-68.

DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L. (1985), *Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems,* Journal of Mathematical Behavior, n°4, pp. 3-21

DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L. (1987), The influence of some non-semantic factors on solving addition and subtraction word problems, *Annual meeting of the American Educational Research Association*, Washington, D.C.

DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L. (1991). Some factors influencing the solution of addition and subtraction word problems. In K. Durkin & B. Shire (Eds.), *Language and mathematical education* Milton Keynes: Open University Press, pp. 117-130

DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L., DE WINN (1985), Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions, *Journal of Educational Psychology*, n° 77, pp. 460-470

DEFRANCO, T.C., CURCIO, F.R. (1997), A division problem with a remainder embedded across two contexts : Children's solutions in restrictive versus real world settings, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 19(2), pp. 58-72

DEP (2002), *Avant et après les vacances. Évolution des acquis des élèves*, Note d'information 02-34, Paris

DEP (2003), *L'évaluation des compétences des élèves de CE2 en septembre 2002*, Note d'information 03-19, Paris

DEP (2004*), Les élèves de 15 ans. Premiers résultats de l'évaluation internationale PISA 2003*, Note d'évaluation 04-12, Paris

DEVIDAL, M. (1996), *La lecture de problèmes arithmétiques : Une activité guidée par des schémas*, Thèse de doctorat, Dijon, non publiée

DEVIDAL, M. FAYOL, M., BARROUILLET, P. (1997), Stratégies de lecture et résolution de problèmes arithmétiques, *L'Année psychologique*, 97, pp. 9-31

DIDEROT, D. (1751-1772), *L'Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, Paris

DOUADY, R. (1984a), *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Thèse d'État, Université Paris-VII

DOUADY, R. (1984b), De la didactique des Mathématiques à l'heure actuelle, *Cahier de didactique*, n°6, IREM Paris VII

DOUADY, R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 7, n°2, pp. 5-31

DUMARQUE, J., RENAUD, L. (1930), *Arithmétique concret, simple, progressif*, Delagrave, Paris

DUPUIS, C., ROUSSET-BERT, S. (1996) *Registres de représentations sémiotiques*, In Actes de l'université d'été 1996, Ed. IREM de Clermont-Ferrand, pp. 137-161

DUVAL, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol. 5, ULP, IREM, Strasbourg, pp. 37-65

DUVAL, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, P. Lang, Berne, 395 p.

DUVAL, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? , *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, Vol.16, n°3, pp. 349-382.

DUVAL, R. (1997), La compréhension des énoncés de problème de mathématisation : de la lecture à la résolution : Approche cognitive des processus d'apprentissage, *Didactics of Mathematics – Technology in Education*, Eds D'Amore et Gagatsis, pp. 25-46

DUVAL, R. (1999), *Conversion et articulation des représentations analogiques*, Séminaires de recherche n°1, IUFM Nord-Pas de Calais, 115 p.

DUVAL, R. (2000). *L'analyse cognitive des problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques*, Conférence faite au Tercero en didactica de la Matematica, Universidad Catolica de Valparaiso, 14 p.

DUVAL, R. (2001). Pourquoi les représentations sémiotiques doivent-elles être placées au centre des apprentissages en mathématiques ? In A. Gagatsis (Ed.), *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*, pp.67-90.

DUVAL, R. (2002), Décrire, visualiser ou raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ?, *Annales de didactique et sciences cognitives*, IREM Strasbourg, Vol. 8, pp. 13-62

DUVAL, R. (2003), Décrire, visualiser ou raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique, *Annales de didactique et de Sciences cognitives*, Vol. 8, ULP, IREM, Strasbourg, pp. 13-62

DUVAL, R. (2005), Langage, symboles, images, schémas…De quelle manière interviennent-ils dans la compréhension, en mathématiques et en dehors des mathématiques, *Bollettino dei Docenti di Matematica*, n°50, 20 p.

ESCARABAJAL, M.-C. (1984), Compréhension et résolution de problèmes additifs, *Psychologie française*, n°3, pp. 247-252

EULER, L. (1759), Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, in *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin*

F.P.B. (1836), *Nouveau traité d'arithmétique décimale*, Alfred Mame, Tours et Charles Poussiègue, Paris

FABRE, M. (1999), *Situations-problèmes et savoir scolaire*, PUF, 239 p.

FAGNANT, A. (2005), Résoudre et symboliser des problèmes additifs et soustractifs en début d'enseignement primaire, in *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?*, Dir. : Crahay, M., Verschaffel, L., De Corte, E., Grégoire, J., De Boeck, Bruxelles

FALLOUX, A. DE (1850), *Loi relative à l'enseignement*.

FAYOL, M. (1990), *L'enfant et le nombre*, Delachaux & Niestlé

FAYOL, M. (1992), Comprendre ce que l'on lit : de l'automatisme au contrôle, in Fayol M., Gombert J.-E., Lecocq P., Sprenger-Charolles L., Zagar D., *Psychologie cognitive de la lecture*, Paris, PUF

FAYOL, M. (1996), À propos de la compréhension, In Observatoire National de la Lecture. *Regards sur la lecture et ses apprentissages,* Paris, MENSR

FAYOL, M., ABDI, H. (1986), Impact des formulations sur la résolution de problèmes additifs chez l'enfant de 6 à 10 ans, *European Journal of Psychology of Education*, n°1, pp. 41-58

FAYOL, M., ABDI, H. GOMBERT, J.E. (1987), *Arithmetic problem formulation and working memory load,*. Cognition and Instruction, n°4, pp. 183-202.

FAYOL, M., CAMOS, V., ROUSSEL, J.L. (2000), Acquisition et mise en oeuvre de la numération par les enfants de 2 à 9 ans, In M. Pesenti & X. Seron. (Eds.), *Neuropsychologie des troubles du calcul et du traitement des nombres*, Marseille, Solal, pp. 33-58.

FAYOL, M., THEVENOT, C., DEVIDAL, M. (2005) Résolution de problème, In M.-P. Noël (Ed), *La dyscalculie, trouble du développement numérique de l'enfant*, Marseille, Solal

FISCHER, J.-P. (1979), *La perception des problèmes soustractifs aux débuts de l'apprentissage de la soustraction*, Thèse de 3ème cycle, Nancy

FISCHER, J.-P. (1981) L'enfant et le comptage, *Actes du 5ème colloque du groupe international « Psychology of Mathematics Education »*, Grenoble, pp. 38-43

FISCHER, J.-P. (1993), La résolution de problèmes arithmétiques verbaux : proposition pour un enseignement pro-actif, *Annales de didactique en sciences cognitives*, Vol. 5, pp. 177-210.

FISCHER, J.-P., PLUVINAGE, F. (1989), Complexités de compréhension et d'exécution des opérations arithmétiques élémentaires, *Recherche en didactique des mathématiques*, Vol. 9/2, pp. 133-154

FONTAINE DE RESBECQ, L DE (1878), Histoire de l'enseignement primaire avant 1789 dans les communes qui ont formé le département du Nord, *Bulletin de la Commission*, Tome XIV Lille, L. Quarré et Paris, H. Champion, 473 pages

GEORGE, J. (1991), Quoi de nouveau depuis Summer ?, in *Les contenus d'enseignement,* Cahier pédagogique n°298

GEROFSKY, S. (1996). *A Linguistic and Narrative View of Word Problems in Mathematics Education*. For the Learning of Mathematics, n° 16(2), pp. 36-45.

GLAESER, G. (1971), *Mathématiques pour l'élève-professeur*, Hermann, Paris.

GLAESER, G. (1973), Pédagogie de l'exercice et du problème, in *Le livre du Problème (Tome I)*, CEDIC, Lyon, Paris, 103 p.

GLAESER, G. (1995), *Fondements de l'évaluation en Mathématiques*, APMEP, Paris

GLAESER, G. (1999), *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*, Textes rassemblés et préparés par Blochs, B., Régnier, J.-C., La Pensée Sauvage éditions, Grenoble, 231 p.

GODOT, K. (2002), *Les situations recherche comme situations d'apprentissage. Étude didactique et analyse d'une situation expérimentale (la roue aux couleurs)*, Mémoire de DEA, Université Joseph Fourier, Grenoble

GOIGOUX, R. (2001), *Enseigner la lecture à l'école primaire*, Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris 8

GOIGOUX, R. (2002), Analyser l'activité d'enseignement de la lecture : une monographie, *Revue française de pédagogie*, n°138, pp. 125-134.

GRAS, R., LARHER, A. (1992), L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analyse des données, *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, n°120, pp. 5-31

GREER, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D.A. Grouws (Ed.) *Handbook of research in mathematics teaching and learning*, New York: Macmillan. pp. 276-295

GREER, B. (1993), The modeling perspective on wor(l)d problems, *Journal of Mathematical Behavior*, n°12, pp. 239-250

GRENIER, D., PAYAN, C. (2003), Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, n°92, 17 p.

GROUPE RECHERCHE IREM BORDEAUX (1988), Quelques mots clefs sur le processus d'apprentissage, *Actes de l'Université d'été*, Olivet, pp. 237-241

GUIZOT, F. (1833), *Loi sur l'instruction primaire*.

HAJRI, H. (1986), *Perception de relations dans le plan repère*, Thèse ULP, Strasbourg, IREM

HARDY, G. H. (1941), *A Mathematician's Apology*, London, 52 p.

HARLE A. (1984), *L'arithmétique des manuels de l'enseignement élémentaire français au début du XXème siècle*, Thèse de 3ème cycle, Paris, Université de Paris VII, 296 p.

HILBERT, D. (1900), *Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris*

HITT, F. (2003), Le caractère fonctionnel des représentations, *Annales de didactique et sciences cognitives*, Vol. 8, pp. 255-271

HOUDEMENT, C. (1999), Le choix des problèmes pour « la résolution de problèmes », *Grand N*, n°63, pp. 59-76

HOUDEMENT, C. (2003), La résolution de problèmes en question, *Grand N*, n°71, pp. 7-23

HUDSON, T. (1983), *Correspondence and numerical differences between disjoint sets*, Child development (Chicago, Illinois), n° 54, pp. 84 90.

IGEN (2006), *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 à l'école élémentaire*, rapport n°2006-034, 70 p.

JITENDRA, A.K., GRIFFIN, C.C., HARIA, P., LEH, J., ADAMS, A., KADUVETTOOR, A. (2007), A Comparison of Single and Multiple Strategy Instruction on Third-Grade Students' Mathematical Problem Solving, *Journal of Educational Psychology*, Vol. 99, n°1, pp. 115-127

JOHNSON-LAIRD, P. N. (1983) *Mental models : Towards a cognitive science of language, inference and consciousness,* Cambridge, Cambridge University Press

JOHNSON-LAIRD, P. N. (1993) La théorie des modèles mentaux, in *Les modèles mentaux : approche cognitive des représentations*, Coordonné par Ehrlich M.-F., Tardieu, H., Cavazza, M., Masson, Paris, 183 p.

JOHNSON-LAIRD, P. N., BYRNE, R. M. J. (1991) *Deduction,* Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates

JORDAN, N. C., MONTANI, T. O. (1997), Cognitive Arithmetic and Problem Solving: A Comparison of Children with Specific and General Mathematics Difficulties, *Journal of Learning Disabilities*, Vol. 30, n°6, pp.624-634

JOSHUA, S. (1988), Le « contrat didactique » et l'analyse des phénomènes didactiques in Le contrat didactique : différentes approches, *Interactions didactiques*, n°8, Universités de Genève et de Neuchâtel

JULO, J. (1995), *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques – Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*, Rennes, PUF Rennes (Collection Psychologie)

JULO, J. (2002), Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ?, *Grand N*, n°69, pp. 31-52

KAHANE, J.P. (2000), Mathématiques dans l'enseignement obligatoire. Quoi enseigner et pourquoi ? », *Repères - IREM*, n°38, pp.25-26

KAHANE, J.-P. (dir.) (2002), *L'enseignement des sciences mathématiques : Rapport au ministre. Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, sous la direction de Jean-Pierre Kahane, Odile Jacob, Londres

KIERAS, J. L. (1980), *Initial mention as a signal to thematic content in technical passages*. Memory and Cognition, Vol. n°8, n° 4, pp. 345-353.

KILPATRICK, J. (1987) Problem formulating : where do good problems come from? In A. H. Schoerfeld (Ed). *Cognitive Science and mathematics education,* Hillsdale, NJ; Erlaum.

KINTSCH, W., GREENO, J. G. (1985) Understanding and solving word arithmetic problems, *Psychological Review*, Vol. n°92, n°1, pp. 109-129

KOSUTH, J. (1965), *One and three chairs* (document iconographique)

LEGRAND, L. (1960), *Pour une pédagogie de l'étonnement*, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, 133 p.

LEPLAT, J. (1997), *Regards sur l'activité en situation de travail. Contribution à la psychologie ergonomique,* Paris, PUF, 263 p.

LEPLAT, J. (2000), L'environnement de l'action en situation de travail, in *Actes du séminaire du Centre de Recherche sur la Formation du CNA : L'analyse de la singularité de l'action*, Paris: PUF, pp. 107-132

LEPLAT, J., HOC, J.-M. (1983), Tâche et activité dans l'analyse psychologique des situations in Leplat J. (coord.) *L'analyse du travail en psychologie ergonomique*. Tome I. Octarès, Toulouse, pp. 47-60.

LEVAIN, J.-P. (1992), La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire, *Educational Studies in Mathematics*, n°23, pp. 139-161

LEVAIN, J.-P. (2000), Apprentissage de schémas et résolution de problèmes, *L'orientation scolaire et professionnelle*, Vol. 29, n°3, pp. 411-430.

LEVAIN, J.-P., VERGNAUD, G. (1995), La proportionnalité simple et multiple, *Grand N*, n°56, pp. 55-67

LEWIS, A. B., MAYER, R. E.; (1987), *Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems Journal of educational*, Vol. n°79, n°4, pp. 363-371.

LEYSSENNE, P. (1887a), Problème, in F. Buisson, *Dictionnaire de pédagogie d'instruction* *primaire*, 1ère partie, tome 1, Paris, Hachette p. 114

LEYSSENNE, P. (1887b), La deuxième année d'arithmétique – 3000 exercices et problèmes, A. Colin, Paris, 39ème édition.

LEYSSENNE, P. (1921), Livre du maître, Cours Moyen.

MANTE, M. (1986), *Suivi scientifique 6ème*, Bulletin inter-IREM, Commission premier cycle

MARSENACH, J. (1991), *Éducation Physique et Sportive, quel enseignement ?;* INRP, Paris

MEIRIEU, P. (1995), *Apprendre… oui, mais comment ?,* ESF, Paris

MERRI, M. (2007), *Activité humaine et conceptualisation. Questions à Gérard Vergnaud*, PU Mirail, Toulouse, 375 p.

MINET, A., PATIN, L. (1904), *Cours pratique d'arithmétique, de système métrique et de géométrie, peu de théorie et beaucoup d'exercices,* F. Nathan, Paris.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION (1978*), Horaires, objectifs et programmes du Cycle élémentaire*

MINISTERE DE L'ÉDUCATION (1980*), Horaires, objectifs et programmes du Cycle moyen*

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE – DIRECTION DES ÉCOLES (1995*), Programmes de l'école primaire*, Paris, CNDP

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1945*), Programmes, Instructions officielles*

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1970*), Programme et enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1985*), Programmes et Instructions pour l'école élémentaire*

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1995*), Programme de l'école primaire*

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2002*), Programmes d'enseignement de l'école primaire*

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2008*), Note d'information 08.08 Janvier*

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE (2006*), Socle commun de connaissances et de compétences*

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE (2007*), Qu'apprend-on à l'école élémentaire ?*, Paris, CNDP/XO Éditions

MINISTERE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS (1882), *Arrêté du 27 juillet 1882 réglant l'organisation pédagogique et le plan d'étude des écoles primaires publiques*

MINISTERE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS (1923), *Instructions officielles du 20 juin 1923 : Matières d'enseignement, organisation et horaires des écoles primaires élémentaires*

MINISTERE DE LA JEUNESSE, DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA RECHERCHE – DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SCOLAIRE (2002), *Documents d'application des programmes – Mathématiques Cycle des approfondissements (cycle 3)*, CNDP, 48 p

NATHAN, M. J., KINTSCH, W., YOUNG, E. (1992) A theory of algebra word problem comprehension an dits implication for the design of learning environments, *Cognition and Instruction,* n°4, pp. 329-390

NESHER, P. (1980). *The Stereotyped Nature of School word problems*. For the Learning of

Mathematics 1(1) pp. 41-48.

NESHER, P., GREENO, J. G., RILEY, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction, *Educational Studies in Mathematics*, n° 13, pp. 373-394.

NESHER, P., HERSHKOVITZ, S., NOVOTNA, J. (1998), Three - Term Comparisons, *Proceedings CERME 1*, Osnabrück

NIMIER, J. (1989), *Entretiens avec des mathématiciens. (A.Lichnérowicz; C.Berge; A.Joyal; N.Kuiper; B.Malgrange; C.Pisot; J.Riguet; R.Thom) (L'heuristique mathématique)*, IREM, Lyon

NOËL, G. (1999), Des problèmes et des situations mathématiques, in *Une introduction à la didactique des mathématiques*, Glaeser, G., La pensée sauvage éditions, Grenoble, pp. 215-222

NOETHER, E. (1921), Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Annalen*, t. 83, pp. 24-66.

NOVOTNA, J. (1997), Using Geometrical Models and Interviews as Diagnostic Tools to Determine Students' Misunderstandings in Mathematics, *SEMT 97*, Eds. Hejný, M., Novtná, J., Praha, Prometheus, pp. 61-67

NOVOTNA, J. (2001). Pictorial Representations in the Process of Grasping Word Problem Structures, In Vale, C., Horwood, J. and Roumeliotis, J. (2001), *A Mathematical Odyssey*, Melbourne, Mathematical Association of Victoria, pp. 145-157

NOVOTNA, J. (2002), Instruments pour l'analyse des traces écrites, Extrait de la présentation : *De l'étude du comportement à celle de situations*, Université de Bordeaux, DAEST

NOVOTNA, J. (2003), *Étude de la résolution des « problèmes verbaux » dans l'enseignement des mathématiques. De l'analyse atomique à l'analyse des situations*, Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches, DAEST, Bordeaux , 139 p.

NOVOTNA, J. (2008), Activities Enhancing Gifted Children's Creativity and Reasoning, *Proceedings of The 5th International Conference « Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students »,* Haifa, Israel, pp. 187-192

NOVOTNA, J., SARRAZY, B. (2005), Model of a professor's didactical action in mathematics education. Professor's variability and students' algorithmic flexibility in solving arithmetical problems, *Proceedings CERME 4*, Sant Feliu de Guíxols, Espagne, pp. 696-705

NUNES, T., SCHLIEMANN, A. D., CARRAHER, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

OCDE (2004), *Résoudre des problèmes, un atout pour réussir. Premières évaluations transdisciplinaires issues de PISA 2003*, Paris, OCDE, 505 p.

ONL. ((2000), *Maîtriser la lecture – Poursuivre l'apprentissage de la lecture de 8 à 11 ans*, Ouvrage collectif dirigé par Fayol, M. David, J., Dubois, D., Rémond, M., CNDP, Paris, 355 p.

ORIOL, J.-C., REGNIER, J.-C. (2007), *Enseignement-apprentissage de l'ASI en 1^er^ cycle universitaire. Construction de situations didactiques fondée sur le couple schème-situation pour des étudiants de DUT-STID en France*, 4ème Rencontre d'Analyse Statistique Implicative, Castellón, Espagne

PELTIER, M.-L., VERGNES, D., CLAVIE, C. (2003), *Euro Maths – Cycle des approfondissements – CE2*, Hatier, 192 p.

ORIOL, J.-C. (2007), *Formation à la statistique par la pratique d'enquêtes par questionnaires et la simulation : étude didactique d'une expérience d'enseignement dans un département d'IUT*, Thèse de doctorat en Sciences de l'éducation, Université Lumière - Lyon II

PERRENOUD, P. (1997a), *Construire des compétences dès l'école ?*, ESF, Paris

PERRENOUD, P. (1997b), *Pédagogie différenciée : des intentions à l'action*, ESF, Paris

PLUVINAGE, F. (1993), Grilles et taxinomies, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, IREM, Strasbourg, Vol. 5, pp. 5-17

PLUVINAGE, F. (1998), La nature des objets mathématiques dans le raisonnement, *Annales de didactique et de Sciences cognitives*, Vol. 6, pp. 125-138

PLUVINAGE, F. (2000), Mathématiques et maîtrise de la langue, *Repères*, IREM, n°39, pp. 115-126

PLUVINAGE, F., MALLIER, A. (1998), Le repérage des difficultés de lecture à l'aide du français et des mathématiques, *Annales de didactique et de Sciences cognitives*, Vol. 6, pp. 117-124

POLYA, G. (1945), *How to solve it*, Princeton Univ., Press, Princeton, 204 p.

POLYA, G. (1965), *Comment poser et résoudre un problème*, Dunod, Paris, 260 p.

PRIOLET, MY. (2000), *Résolution de problèmes arithmétiques et registres sémiotiques*, Mémoire de Maîtrise en Sciences de l'Éducation, sous la direction de J. C. Régnier, Université Lumière Lyon 2, 363 p.

PRIOLET, MY. (2001a), *Vecteurs d'apprentissage et résolution de problèmes numériques*, Mémoire de D.E.A. en Sciences de l'Éducation, sous la direction de F. Clerc, Université Lumière Lyon 2, 358 p.

PRIOLET, MY. (2001b), *Vecteurs d'apprentissage et résolution de problèmes numériques – Dossier documentaire*, Mémoire de D.E.A. en Sciences de l'Éducation, sous la direction de F. Clerc, Université Lumière Lyon 2, 3 tomes, 1289 p..

PRIOLET, MY. (2007), Enseignement de la résolution de problèmes numériques et conversion de registres de représentation. In Bednarz, N., Mary, C. (dir.) (2007) *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*. Actes du colloque EMF 2006 (cédérom). Sherbrooke: Éditions du CRP

PRIOLET, MY., NOVOTNA, J. (2007), Solving numerical problems in the 3rd year of Primary School : teaching and learning with connections. In *Proceedings of the International Symposium Elementary Maths Teaching,* Prague : Charles University, Education Faculty, pp. 217-225.

PRIOLET, MY., REGNIER, J.-C. (2001), Teachers'use of semiotic registers, in *CERME2 European Research in Mathematics Education II, Part 2*, Charles University, Faculty of Education, Prague, pp. 554-563

PRIOLET, MY., REGNIER, J.-C. (2003a), Conversion of registers at primary school : the learner's or the teacher's responsability ? in *CERME3 European Research in Mathematics Education III*, Part 2

PRIOLET, MY., REGNIER, J.-C. (2003b), Problèmes arithmétiques et registres sémiotiques, in *Annales de didactique et sciences cognitives*, volume 8, IREM de Strasbourg, pp. 113-126

PRIOLET, MY., REGNIER, J.-C. (2006), Analyse de l'activité de trois professeurs des écoles dans le domaine de la résolution de problèmes numériques en classe de CE2, in Actes *Simposio Internacional de Educação Matemática,* Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

PRIOLET, MY., REGNIER, J.-C. (2007a), Modélisation et enseignement de la résolution de problèmes basé sur une mise en réseau. In *Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ?* Actes du XXXIVème colloque COPIRELEM, Troyes

PRIOLET, MY., REGNIER, J.-C. (2007b), Résolution de problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire : étude des relations entre pratiques d'enseignants et performances des apprenants. In *Les effets des pratiques enseignantes sur les apprentissages des élèves*. Actes du colloque international des IUFM du Pôle Nord-Est , IUFM de Franche-Comté

RABARDEL, P. (1995), *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*, Paris, Armand Colin

RABARDEL, P. (1999), Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques, In M. Bailleul (Ed.), *École d'été de didactique des mathématiques*, Houlgate, IUFM de Caen, pp. 202-213

RAUSCHER, J.-C. (1993), *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes, Strasbourg*, IREM, 344 p.

REGNIER, J.-C. (1979), *Contribution à la recherche sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques,* mémoire DEA de didactique des mathématiques, Université Louis Pasteur, Strasbourg et Université Nancy 1

REGNIER, J.-C. (1980), *Élaboration d'un livret autocorrectif : étude préliminaire par un questionnaire sur l'équation du second degré en classe de seconde T1 et projet de livret autocorrectif*, Mémoire de DEA en didactique des mathématiques, Nancy

REGNIER, J.-C. (1983), *Étude didactique d'un test autocorrectif en trigonométrie*, Thèse de doctorat de 3ème cycle, Université Louis Pasteur, Strasbourg, T1 : 307 p., T2, 171 p.

REGNIER, J.-C. (1991), *Autonomie et travail personnel des élèves dans l'enseignement des disciplines scientifiques en Lycée*, MEN – Direction des Lycées et Collèges, CRDP, Dijon, Vol. 1, 460 p., Vol. 2, 167 p

REGNIER, J.-C. (1994) Tâtonnement expérimental et Apprentissage en mathématiques, in P. Clanché, E., Debarbieux (Eds), *La pédagogie Freinet, mises à jour et perspectives*, P.U.Bordeaux, 1994, pp 135-153

REGNIER, J.-C., PERRIER, F. (2002), *La Didactique des Mathématiques au travers d'une vie – Entretiens avec Georges Glaeser*, IREM Strasbourg, 129 p.

REGNIER, J.-C., PRIOLET, MY. (2001), Meios escolares e questões de gênero : gênero e competências matematicas de alunos de 1080 alunos de escola primaria na França, In: *Seminario Projecto Coeducação : Do principio ao Desenvolvimento de Uma Pratica, 2001,* Ponta Delgada Açores. Anais do seminario, 2001

REGNIER, J.-C., PRIOLET, MY. (2006), Effets des vecteurs d'apprentissage sur les pratiques d'enseignement , in *Actes de la 8ème Biennale Éducation et Formation*, Lyon

REUSSER, K. (1989) *Textual and situational factors in solving mathematical word problems*, Bern, University of Bern

REY, A. (1995), *Dictionnaire historique de la langue française (Nouvelle édition),* Le Robert, Paris, 2 tomes, 2283 p.

REY, B. (1996), *Les compétences transversales en questions*, ESF, Paris

REY, B., CARETTE, V., DEFRANCE, A., KAHN, S. (2003). *Les compétences à l'école - Apprentissage et évaluation*, Bruxelles : De Boeck.

RICHARD, J.-F. (1990), *Les activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions*, Armand Colin, Paris, 381 p.

RICHELLE, M., DROZ, R. (1976), *Manuel de psychologie : introduction à la psychologie scientifique*, Mardaga, Bruxelles, 522 p.

RILEY, M.S., GREENO, J.G., & HELLER, J.I. (1983), Development of children's problem solving ability in arithmetic, In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.

ROBERT, A. (2006), Une méthodologie pour décrire des déroulements de séances de classe à partir de vidéo dans des recherches sur les pratiques d'enseignants de mathématiques au collège et au lycée, in Perrin-Glorian, M.-J., Reuter, Y. (eds), *Les méthodes de recherche en didactiques*, PUS, pp. 191-202

ROBERT, P. (1984), *Dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française*, 7 tomes

ROBINS, B. (1742), *New Principles of Gunnery*, London

RODITI, E. (2001), *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Etude de pratiques ordinaires*, Thèse de doctorat, Paris VII

RODITI, E. (2003), Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol 23, n°2, pp. 183-216.

RODITI, E. (2005), *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*, Paris, L'Harmattan, 196 p.

ROGALSKI, J. (2003), Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* n°23(3), pp. 343-388.

ROGALSKI, J. (2006),. Analyse de l'activité de l'enseignant à partir de sa communication avec la classe / les élèves, In Perrin-Glorian, M.-J., Reuter, Y. (Éd.), *Les méthodes de recherche en didactiques*, Villeneuve d'Asq, Presses Universitaires du Septentrion., pp. 85-98

ROSENTHAL, D. J. A., RESNICK, L.-B. (1974), Children's solution processes in arithmetic word problems, *Journal of Educational Psychology*. n° 66, pp. 817-825

ROUCHIER, A. (1991), *Étude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itérativo-récursives, institutionnalisation*, Thèse de doctorat d'État, Université d'Orléans.

SANDER, E. (2000), *L'analogie, du Naïf au Créatif : analogie et catégorisation*, Paris, L'Harmattan

SARRAZY, B. (1995), Le contrat didactique, *Revue Française de Pédagogie*, n°112, pp. 85-118.

SARRAZY, B. (2002), Didactique, Pédagogie et Enseignement : pour une clarification du débat dans la communauté des sciences de l'éducation, in Marcel, J.F., *Les sciences de l'Éducation : des recherches, une discipline ?*, l'Harmattan, Ch. VI, pp. 131-154

SAUJAT, F. (2004), Transformer l'expérience pour la comprendre : l'analyse du travail enseignant, In Marcel, J.F., Rayou, P., (Eds.), *Recherches contextualisées en éducation*, Paris, INRP, pp. 79-89

SAYAC, N. (2006), Étude à grande échelle sur les pratiques des professeurs de mathématiques de lycée : résultats liés à des variables spécifiques et essai de typologie, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 26, n°2, pp. 231-278

SCHLIEMANN, A. D., ACIOLY, N. M. (1989), Mathematical Knowledge Developed at work : the contribution of practice versus the contribution of schooling, *Cognition and Instruction*, n°6 (3), pp. 185-221

SCHOENFELD, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In Schoenfeld, A., (Ed.). *Mathematical Thinking and Problem Solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. pp. 53-69

SCHUBAUER-LEONI, M.-L., PERRET-CLERMONT, A.-N. (1980), Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre des problèmes additifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 1, n°3, pp. 297-350

SCHWARTZ, M. N. K., FLAMMER, A. (1981), Text structure and title—effects on comprehension and recall, *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior* n° 20, pp. 61–66.

SENSEVY, G. (1996). Fabrication de problèmes de fraction par des élèves à la fin de l'enseignement élémentaire, *Educational Studies in Mathematics*, 30, 261-288

SONNET, H. (1887), Arithmétique, in F. Buisson, *Dictionnaire de pédagogie d'instruction primaire*, 1ère partie, tome 2, Paris, Hachette p. 2441

STAUB, F. C., REUSSER, K. (1995) The role of presentational structures in understanding and solving mathematical word problems, in Weaver C. A., Mannes, S., Fletcher, C. R (Eds.), *Discourse comprehension. Essays in honor of Walter Kintsch*. Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum

THEVENOT, C. (2000), *La résolution de problèmes arithmétiques : L'apport de la théorie des modèles mentaux,* Thèse de doctorat, Dijon, non publiée

THOM, R. (1988), *Esquisse d'une Sémiophysique, Physique aristotélitienne et théorie des catastrophes*, Paris, InterEditions

TIBERGHIEN, A. MALKOUN, L. (2007), Différenciation des pratiques d'enseignement et acquisition des élèves du point de vue du savoir, in *Education et Didactique*, Vol. N°1, Presses Universitaires de Rennes, , pp. 29-54

TOCZEK, M.-C. (2004), Optimiser le travail en groupe : le groupe classe, le groupe d'apprentissage in *Le Défi éducatif. Des situations pour réussir*, par Toczek, M.-C., Martinot D., Armand Colin, Paris, 351 p.

TOISOUL, J., WALLON, E. (1902), *Le deuxième livre d'arithmétique des Écoles primaires et des sections préparatoires des Écoles moyennes*, Namur, Lambert de Roisin et Liège

TROUCHE, L. (2005), Le calcul sous toutes ses formes. Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques, *Actes de l'Université d'été de Saint-Flour*

UESAKA, Y.; MANALO, E.; ICHIKAWA, S. (2007), What Kinds of Perceptions and Daily Learning Behaviors Promote Students' Use of Diagrams in Mathematics Problem Solving ?, *Learning and Instruction*, vol. 17, n°3, pp. 322-335

VALENTIN, D. (1988), Est-il possible d'apprendre à résoudre des problèmes ?, *Grand N*, n°42, pp. 31-34

VAN HIELE, P. M. (1959), La pensée de l'enfant et la géométrie, *Bulletin de l'APMEP*, n°198, pp. 199-205

VERGNAUD, G. (1981) Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.2, n°2, pp. 215-232

VERGNAUD, G. (1982), A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtration problems. In Carpenter, T.P., Moser, J.M., Romberg, T.A (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, Hillsdale: Erlbaum.

VERGNAUD, G. (1983a), Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds), *Acquisition of mathematic concepts and processes.* New-York: Academic Press.

VERGNAUD, G. (1983b), Introduction, *Recherche en didactique des mathématiques*, Vol. 4.1.

VERGNAUD, G. (1985), Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation, *Psychologie française*, n°30 (3/4), pp. 245-252

VERGNAUD, G. (1986), Psychologie du développement cognitif et Didactique des Mathématiques, *Grand N*, n°38, pp. 21-40

VERGNAUD, G. (1988). Multiplicative Structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* NJ: Lawrence Erlbaum Association. pp. 141-161

VERGNAUD, G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.10, n°2-3, p. 133-170

VERGNAUD, G. (1991). *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire* (4ème édition). Berne: Peter Lang.

VERGNAUD, G. (1994), Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel, in *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*, Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 177-191

VERGNAUD, G. (2001), Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance, *Actes du colloque GDM*, Montréal, 22 p.

VERGNAUD, G. (2007), Qu'est-ce qu'apprendre ?, *Version courte des actes du colloque « Les effets des pratiques enseignantes sur les apprentissages des élèves* , IUFM du pôle Nord-Est, Besançon, 12 p.

VERGNAUD, G., BREGEON, J.-L., HUGEUR, F., PEAULT, H., DOSSAT, L., MYX, A. (1997), *Le moniteur de mathématiques – Cycle 3 – Fichier pédagogique*, Nathan, Paris, 189 p.

VERGNAUD, G., DURAND, C. (1976), Structure des problèmes additifs et complexité psychogénétique, *Revue Française de Pédagogie*, n°36, pp. 28-43

VERMERSCH, P. (1994), *L'entretien d'explicitation*, Paris, ESF.

VERSCHAFFEL, L. DE CORTE, E. (2005), La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace, in *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* , De Boeck, Bruxelles, pp. 153-176

VERSCHAFFEL, L., DE CORTE, E., LASURE, S. (1994), Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems, *Learning and Instruction*, n°4, pp. 273-294

VERSCHAFFEL, L., GREER, B., DE CORTE, E., (2000), *Making sense of word problems*, Swets & Zeitlinger Publishers, Netherlands.

VYGOTSKI, L. (1997), *Pensée et langage* (traduction de Françoise Sève) suivi de *Commentaire sur les remarques critiques de Vygotski par J. Piaget*, La Dispute, Paris

WILLIS, G. B., FUSON, K. C.(1988), Teaching Children to Use Schematic Drawings to Solve Addition and Subtraction Word Problems, *Journal of Educational Psychology*, Vol. 80, n° 2, pp. 192-201

WYNDHAMN, J., SALJO, R. (1997), Word problems and mathematical reasoning - A study of children's mastery of reference and meaning in textual realities, *Learning and Instruction*, Vol. 7, n°4, pp. 361-382

ZWENG, M. J. (1979), *The Problem of Solving story Problems, Arithmetic Teacher*, n°27, pp. 2-3

INDEX

Index des auteurs

Index des figures

Index des graphiques

Index des tableaux

Table des matières