Les inégalités d'énergie locales dans la théorie des équations de Navier-Stokes

Kawther Mayoufi

▶ **To cite this version:**

Kawther Mayoufi. Les inégalités d'énergie locales dans la théorie des équations de Navier-Stokes. Mathématiques [math]. Université d'Evry Val d'Essonne, 2017. Français. NNT : 2017SACLE010 . tel-01588539

HAL Id: tel-01588539
https://hal.science/tel-01588539

Submitted on 15 Sep 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris-Saclay

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

Établissement d'inscription : Université d'Évry-Val d'Essonne

Laboratoire d'accueil : Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Évry, UMR 8071 CNRS-INRA

THÈSE DE DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Mathématiques appliquées

Kawther Mayoufi

Les inégalités d'énergie locales dans la théorie des équations de Navier-Stokes

Date de soutenance : 26 Juin 2017

Après avis des rapporteurs : Marco Cannone (Université Paris-Est Marne-la-Vallée)
Marius Païcu (Université Bordeaux 1)

Jury de soutenance :

Valéria Banica	(Université Évry Val d'Essonne) Examinatrice
Lorenzo Brandolese	(Université Claude-Bernard-Lyon-I) Examinateur
Diego Chamorro	(Université Évry Val d'Essonne) Codirecteur de thèse
Frédéric Charve	(Université Paris-Est Créteil) Examinateur
Marco Cannone	(Université Paris-Est Marne-la-Vallée) Rapporteur
Pierre Gilles Lemarié-Rieusset	(Université Évry Val d'Essonne) Directeur de thèse
Stéphane Menozzi	(Université Évry Val d'Essonne) Président de jury
Marius Païcu	(Université Bordeaux 1) Rapporteur

NNT : 2017SACLE010

À Mes Très Chers Parents
Tous les mots du monde ne sauraient exprimer l'immense amour que je vous porte, ni la profonde gratitude que je vous témoigne pour tous les efforts et les sacrifices que vous n'avez jamais cessés de consentir pour mon instruction et mon bien-être.

À Mon Frère Amine.

À Mon Adorable Nièce Safa.

À Mes Deux Sœurs Bara'a et Myriam.

Remerciements

Un sourire affiché au visage d'autrui est une aumône ! Que dirait-on alors de celui ou de celle qui vous a éclairé(e) le chemin ? Dans ce modeste travail beaucoup se sont reliés, comme ils l'ont souvent fait, pour éclairer le chemin, mon chemin ! Le chemin du savoir ! J'ai longuement tourné ma langue et sollicité ma mémoire pour trouver des mots à la hauteur de cet éclairage et finalement je me suis résignée à un simple MERCI tiré du fond du cœur. Je le rythmerai équitablement à ceux et celles qui, malgré leurs occupations, ont répondu à mon appel. Donc MERCI tout court ou CHOKRAN.

Le Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Évry (LaMME) est une unité mixte du CNRS (UMR 8071). Il a été créé par la fusion des deux laboratoires, le Laboratoire d'Analyse et Probabilités (EA2172) et le Laboratoire Statistique et Génome (UMR 8071). Avant de fusionner, ces deux laboratoires ont constitué la Fédération de mathématiques d'Evry. Mon arrivée fut juste avant la fusion, à cette époque le Laboratoire d'Analyse et Probabilités était dirigé par Monsieur le professeur Pierre Gilles LEMARIE-RIEUSSET. Ce fut un moment de forte intensité pour une étudiante qui vient de terminer un Master 2. J'avoue que j'étais un peu sur les nuages car mon rêve de m'inscrire en doctorat sur un sujet en EDP, en continuité avec le mémoire de Master 2 soutenu à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux sous la direction de Monsieur le Professeur Marius-Gheorghe PAICU, vient de se concrétiser.

Ainsi le travail de thèse convenu a été effectué sous la direction de Monsieur le Professeur Pierre Gilles LEMARIE-RIEUSSET. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici le témoignage de ma profonde reconnaissance pour sa bienveillance, pour m'avoir fait bénéficier de ses compétences scientifiques et de sa rigueur, pour ses conseils avisés et pour la confiance qu'il m'a accordée tout le long de cette présence de 3 années. Je le remercie très sincèrement et je lui dirai tout simplement Merci Professeur Pierre Gilles LEMARIE-RIEUSSET.

Mes vifs remerciements et ma plus grande reconnaissance vont également à Monsieur le Docteur Diego CHAMORRO Maitre de conférences à l'Université d'Évry Val d'Essonne. Il a été un excellent codirecteur de thèse. Ses précieux conseils, sa disponibilité et sa façon de profiler le travail m'ont été d'un large secours qu'il me soit permis aussi de le remercier infiniment. Merci Docteur Diego CHAMORRO.

Monsieur, Marco CANNONE, Professeur à l'Université de Paris-Est Marne-la-Vallée, m'a fait le grand bonheur et l'honneur de rapporter le travail de cette thèse malgré sa charge pédagogique et scientifique. Je le prie de bien vouloir accepter l'expression de ma profonde gratitude. Merci Professeur Marco CANNONE.

La présence de Monsieur le Professeur Marius-Gheorghe PAICU de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux au jury de ma thèse m'honore et me rappelle le cursus du master passé à l'Université de Bordeaux. Le fait d'avoir fait le déplacement et ait accepté de rap-

porter ce travail m'exalte. Je le prie de bien vouloir recevoir l'expression de ma profonde gratitude. Merci Professeur Marius-Gheorghe PAICU.

Monsieur, Stéphane MENOZZI, Professeur à l'Université d'Évry Val d'Essonne a bien voulu faire partie de ce jury en tant que président malgré ses multiples obligations scientifiques et pédagogiques. Qu'il me soit permis de lui témoigner toute mon estime. Merci Professeur Stéphane MENOZZI.

Je tiens à exprimer à Mme Manuela Valéria BANICA Maitre de conférences Habilité à l'Université d'Évry Val d'Essonne mes respectueux remerciements pour l'intérêt qu'elle a manifesté à ce travail de thèse en acceptant de participer au jury. Qu'il me soit permis de la remercier. Merci Professeur Manuela Valéria BANICA.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Monsieur le Docteur Lorenzo BRANDOLESE Maitre de conférences Habilité à l'Université Claude Bernard Lyon 1 en acceptant d'examiner ce travail et de faire le déplacement pour siéger à son jury qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma sincère reconnaissance. Merci Docteur Lorenzo BRANDOLESE.

Monsieur le Docteur Frédéric CHARVE Maitre de conférences Habilité à l'Université Paris-Est Créteil a bien voulu accepter d'examiner le travail de cette thèse je le remercie infiniment et le prie de bien vouloir recevoir mes sincères remerciements. Merci Docteur Frédéric CHARVE.

Mon passage au « LaMME » m'a marquée surtout au sujet des séminaires, colloques et conférences dont nul n'ignore l'impact sur la formation. Cela ne peut être que le fruit des traditions durement instaurées par la bonne gouvernance des Directeurs qui se sont succédés. Je profite de ces remerciements pour acclamer un merci plus accentué aux Directeurs et spécialement à Monsieur le Professeur Arnaud GLOTER pour ce sacré travail et au conseil de Direction qu'il préside. Merci Professeur Arnaud GLOTER.

Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble des permanents du « LaMME » et en particulier au groupe analyse et EDP composé des Mmes et MM : Jamel CHIKHI, Lucilla CORRIAS, Gilles LACOMBE, Julia MATOS, Vincent TORRI, Alexandre VIDAL.

Merci également à Oscar JARRIN pour les discussions autour de nos thèmes de recherche et au sujet des travaux dirigés que nous avons menés dans le cadre des enseignements d'ATER à facultés de sciences de l'ingénieur. Je lui souhaite une bonne continuation dans le travail de thèse et une soutenance dans un proche avenir.

Durant les 3 années passées au « LaMME » Madame Valérie PICOT secrétaire de direction a été toujours gentille, souriante, accueillante et serviable. Merci Madame Valérie PICOT.

Je suis aussi reconnaissante envers El maouloud OLD BABA Ingénieur informaticien du laboratoire d'avoir toujours apporté les solutions aux problèmes informatiques posées. Merci Monsieur El maouloud OLD BABA.

Je remercie également Monsieur Thiery MILLANT responsable de la sécurité du laboratoire.

Table des matières

Remerciements **v**

1 Inégalités d'énergie globale et locale **3**
1.1 Introduction . . . 3
1.2 Théorie de régularité locale de Serrin . . . 5
1.3 Théorie de régularité de Caffarelli, Kohn et Nirenberg . . . 8
1.3.1 Inégalité d'énergie globale . . . 8
1.3.2 Inégalité d'énergie locale de Scheffer . . . 10
1.3.3 Critère de régularité de Caffarelli, Kohn et Nirenberg . . . 11
1.4 Présentation de la thèse . . . 14

2 Vers une nouvelle inégalité d'énergie locale **17**
2.1 Introduction . . . 17
2.2 Une nouvelle inégalité d'énergie . . . 18
2.3 Solutions d'hyperviscosité . . . 19
2.4 Démonstration du Théorème principal . . . 21
2.5 Passage à la limite et fin de la démonstration . . . 47

3 Le rôle de la pression dans la théorie de la régularité partielle **51**
3.1 Introduction . . . 51
3.2 Présentation des résultats . . . 51
3.3 Échelle Parabolique et les outils associés . . . 55
3.4 Preuve du Théorème principal . . . 58
3.4.1 La nouvelle variable . . . 60
3.4.2 L'équation associée. . . . 65
3.4.3 Le cas $\vec{f} \in L_t^{10/7} L_x^{10/7}$ . . . 78
3.4.4 Le cas $\vec{f} \in L_t^2 L_x^2$ . . . 85
3.4.5 Le cas $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1$ . . . 87

4 La stabilité des solutions faibles dissipatives **89**
4.1 Introduction . . . 89
4.2 Preuve . . . 91
4.2.1 La limite de $\vec{u}_n$ . . . 91
4.2.2 La nouvelle variable $\vec{v}_n$ . . . 95
4.2.3 La limite de $\vec{v}_n$ . . . 96
4.2.4 L'équation associée pour $\vec{u}$ . . . 97
4.2.5 La comparaison des mesures . . . 98

Chapitre 1

Inégalités d'énergie globale et locale

1.1 Introduction

Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides. Ces équations ont été étudiées par de nombreux auteurs depuis plus d'une centaine d'années et on citera en particulier Navier [31], Cauchy [5], Poisson [34] et Stokes [38] (et la liste est très incomplète !), et elles font maintenant partie des équations classiques de la mécanique des fluides.

On s'intéresse donc à l'évolution au cours du temps d'un fluide Newtonien incompressible ($\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$), via l'étude de son champ de vitesse en tout point de l'espace $\mathbb{R}^3$. À chaque instant $t \in [0 + \infty[$ on considère alors le problème de Cauchy suivant pour les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \nu \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \quad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0 \quad \nu > 0, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3), \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\vec{u}(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x))$ représente le champ de vitesse au point $x \in \mathbb{R}^3$ et à l'instant t, la viscosité ν est un paramètre positif fixé, la force $\vec{f}(t,x)$ est une force extérieure que l'on suppose suffisamment régulière pour nos calculs et la pression $p(t,x)$ peut être une fonction ou plus généralement une distribution comme nous le verrons plus tard. Les inconnues de ce problème sont la vitesse $\vec{u}(t,x)$ et la pression $p(t,x)$, tandis que les données sont la force $\vec{f}(t,x)$ et la donnée initiale $\vec{u}_0(x)$.

Le but principal de cette thèse est l'étude de la régularité des solutions faibles de Leray en supposant le moins d'hypothèses possibles sur la pression. Pour cela il est nécessaire de comprendre le rôle de la pression, tant au niveau de son influence dans l'existence de solutions que dans la partie liée à la régularité de celles-ci.

Faisons maintenant quelques remarques sur ces équations et nous aurons l'opportunité d'expliquer comment ces particularités des équations de Navier-Stokes s'articulent avec notre travail sur le rôle de la pression.

Une première remarque très générale provient des propriétés de dilatation des équations de Navier-Stokes. En effet, soit $\vec{u}_0$ un champ de vecteur de divergence nulle et supposons qu'il existe un champ de vecteur $\vec{u}$ solution du système de Navier-Stokes de donnée initiale $\vec{u}_0$. Un calcul simple montre que si on l'on définit, pour $\lambda > 0$, le champ $\vec{u}_{0,\lambda} = \lambda \vec{u}_0(\lambda x)$

et on considère une force $\vec{f}_\lambda(t,x) = \lambda^3 \vec{f}(\lambda^2 t, \lambda x)$, alors le champ de vecteur $\vec{u}_\lambda$ définit par

$$\vec{u}_\lambda(t,x) = \lambda \vec{u}(\lambda^2 t, \lambda x) \tag{1.2}$$

et la pression $p_\lambda(t,x) = \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x)$ est une solution associée à $\vec{u}_{0,\lambda}$. Cette invariance d'échelle nous donne alors des idées sur quel espace on souhaite étudier notre problème, en particulier elle fixera un cadre de travail parabolique, comme on peut le voir plus en détail dans le Chapitre 3.

Une deuxième remarque plus importante par rapport au rôle de la pression vient du fait qu'il existe une relation entre les deux inconnues $\vec{u}$ et p du système, en effet, en appliquant (au moins formellement) l'opérateur de divergence aux équations de Navier-Stokes (1.1) on s'aperçoit que la pression est reliée au champ de vitesse $\vec{u}$ par l'équation de Poisson

$$-\Delta p = \operatorname{div}\left[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right] + \operatorname{div}(\vec{f}),$$

qui peut se réécrire de la façon suivante

$$p = (-\Delta)^{-1} \sum_{i,j=1}^{3} \partial_i \partial_j (u_i u_j). \tag{1.3}$$

On remarque que dans cette expression intervient l'opérateur non local en variable d'espace $(-\Delta)^{-1}$ définit par $\dfrac{1}{(-\Delta)} g(x) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(y)}{|x-y|} dy$, et on observera (pour souligner l'aspect non-local de cet opérateur) que pour obtenir l'information en un point on a besoin de l'information sur tout l'espace (voir [16] pour plus de détails concernant ce type d'opérateurs).

Indiquons maintenant que grâce à la relation (1.3), on peut déduire une des inconnues du problème à partir de l'autre et ceci sera exploité de deux manières différentes pour étudier les propriétés des équations de Navier-Stokes sans prendre en compte la pression.

En effet, une première approche pour étudier les équations de Navier-Stokes sans s'occuper de la pression concerne l'existence de solutions et elle consiste à appliquer aux équations (1.1) le projecteur de Leray définit sur l'espace tout entier $\mathbb{R}^3$ par

$$\mathbb{P}(\vec{\phi}) = \vec{\phi} - \frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}(\operatorname{div}(\vec{\phi})),$$

où $\vec{\phi}$ est un vecteur suffisamment régulier. On obtient alors l'équation suivante

$$\partial_t \vec{u} = \nu \Delta \vec{u} - \mathbb{P}\left[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{f}\right]. \tag{1.4}$$

Le projecteur de Leray possède trois caractéristiques principales : c'est un opérateur non local car par définition le projecteur de Leray fait intervenir l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$, on observe ensuite que par construction si $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$, alors $\mathbb{P}(\vec{u}) = \vec{u}$ et donc le projecteur de Leray préserve les champs de vecteurs de divergence nulle. Finalement, cet opérateur annule les gradients car on a bien $\mathbb{P}(\vec{\nabla} p) = 0$. Avec cette façon de procéder on remarque que la pression a disparue dans l'équation (1.4).

Indiquons rapidement qu'à partir de l'expression (1.4), il y a plusieurs méthodes pour obtenir des solutions de ces équations, en effet on peut utiliser le principe de contraction de Picard en suivant les idées de Fujita-Kato [14] (voir aussi les articles [4], [7], [13], [15]), mais cette approche impose une dichotomie entre le temps d'existence et la taille des données initiales. Ou bien, on peut suivre les travaux de Leray [28] pour obtenir des solutions faibles, globales en temps mais par contre sans aucune garantie sur l'unicité de celles-ci.

Une deuxième façon de supprimer la pression dans les équations de Navier-Stokes est d'utiliser la vorticité $\vec{\omega}$ définie par $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$. En effet, comme le rotationnel d'un gradient est toujours nul, si on applique l'opérateur rotationnel aux équations (1.1) on obtient l'équation sur la vorticité $\vec{\omega}$ suivante

$$\partial_t \vec{\omega} = \nu \Delta \vec{\omega} - \vec{\nabla} \wedge [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}] + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}. \tag{1.5}$$

On observera ici que la pression a disparu en raison de l'identité $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} p \equiv 0$ et elle n'intervient donc pas dans l'équation ci-dessus. Cette approche est la base des travaux de Serrin sur la régularité locale des solutions faibles des équations de Navier-Stokes [37] et O'Leary a également suivi cette approche pour généraliser le résultat de Serrin en utilisant les espaces de Morrey paraboliques [32]. Nous y reviendrons un peu plus tard et nous verrons comment cette relation entre la vorticité et la vitesse nous permettra de déduire des informations sur la vitesse $\vec{u}$ à partir de la vorticité $\vec{\omega}$.

Ces deux approches (le projecteur de Leray et la vorticité) nous permettent d'éliminer une inconnue (la pression p) et de travailler avec des équations (1.4) et (1.5) qui sont équivalentes à celles de Navier-Stokes (voir [27]) mais avec une seule inconnue : le champ de vitesse $\vec{u}$.

Il existe cependant une différence fondamentale entre ces deux approches : lorsqu'on travaille dans un cadre local *on ne pourra pas* utiliser le projecteur de Leray, et si on ne veut pas prendre en compte la pression p (toujours dans un cadre local), on sera alors forcé de travailler avec la vorticité.

Voyons maintenant d'un peu plus près le rôle de pression dans l'étude de la régularité des équations de Navier-Stokes. Nous disposons actuellement de deux théories pour traiter ce problème : la théorie de régularité *locale* de Serrin mentionnée rapidement dans les lignes précédentes et la théorie de régularité *partielle* de Caffarelli, Kohn et Nirenberg.

Dans les lignes qui suivent nous allons présenter rapidement ces deux théories en insistant sur le rôle de la pression dans l'étude de la régularité des solutions faibles des équations de Navier-Stokes

1.2 Théorie de régularité locale de Serrin

Avant de rentrer dans le détail de la théorie de régularité locale, il convient de fixer une définition :

Définition 1 (Solution faible de Leray) *Soit $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ une donnée initiale et soit $\vec{f}$ une force extérieure qui appartient à l'espace $L^2([0,T^*], H^{-1}(\mathbb{R}^3))$ avec $0 < T^* < +\infty$. On dit qu'une solution faible $\vec{u}$ des équations équations de Navier-Stokes associées aux données initiales $(\vec{u}_0, \vec{f})$ est une solution faible de Leray si elle vérifie :*

1) *$\vec{u} \in L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ pour tout $0 < T < T^*$.*

2) *pour tout $0 < t < T$ on l'inégalité d'énergie*

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s,\cdot)\|_{L^2}^2 \, ds \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \langle \vec{f}, \vec{u} \rangle_{H^{-1}\times H^1} \, ds.$$

Comme nous pouvons le voir ici, même si p et $\vec{f}$ sont des distributions, nous sommes en mesure d'obtenir des solutions faibles $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q)$ qui vérifient localement les équations de Navier-Stokes.

Venons-en maintenant au critère de régularité locale de Serrin. Il s'agit ici d'étudier *localement* la régularité des solutions faibles des équations de Navier-Stokes. Cette technique a d'abord été développée par Serrin [37] et les principaux arguments utilisés dans cette théorie sont les suivants : on commence par appliquer le rotationnel aux équations de Navier-Stokes et on obtient alors l'équation

$$\partial_t \vec{\omega} = \nu \Delta \vec{\omega} - \vec{\nabla} \wedge [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}] + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}, \tag{1.6}$$

où nous avons noté $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$. Maintenant, en utilisant la propriété de divergence nulle de $\vec{u}$ nous pouvons réécrire cette équation sous la forme suivante

$$\partial_t \vec{\omega} = \nu \Delta \vec{\omega} - \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{\omega} - \vec{\omega} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{f},$$

et alors on obtient que la variable $\vec{\omega}$ vérifie une équation de la chaleur linéaire. En localisant convenablement le problème et avec des hypothèse supplémentaires sur $\vec{u}$ on peut montrer que $\vec{\omega}$ est localement régulière ce qui induit bien sûr que $\vec{u}$ est aussi localement régulière.

Le résultat que l'ont obtient en suivant ces lignes générales est donné ci-dessous et le lecteur peut consulter une preuve dans [37] et [27].

Théorème 1 *Soit $Q =]a,b[\times B_{x_0,r}$ un ensemble borné où $]a,b[$ est un intervalle de la droite réelle et $B_{x_0,r_0} = B(x_0,r_0)$ est une boule de $\mathbb{R}^3$ avec $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $r > 0$.*

Soit de plus $\vec{f} \in L^2_t H^k_x(Q)$ pour $k \geq 0$ une force extérieure, soit $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q)$ et $p \in \mathcal{D}'(Q)$. Si on assume que $\vec{u}$ est une solution faible des équations de Navier-Stokes sur Q et si de plus on suppose que $\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(Q)$ alors on peut conclure que la régularité locale de $\vec{u}$ est en fait entraînée par la régularité de $\vec{f}$: pour tout $a < c < b$ et $0 < \rho < r_0$ on a $\vec{u} \in L^\infty\big(]c,b[, H^{k+1}(B_{x_0,\rho})\big) \cap L^2\big(]c,b[, \dot{H}^{k+2}(B_{x_0,\rho})\big)$.

Maintenant on va faire plusieurs remarques concernant ce critère de régularité de Serrin.

On observe tout d'abord que la pression p peut être très générale vu qu'on a uniquement besoin que $p \in \mathcal{D}'(Q)$ et ceci n'est pas un problème puisqu'elle a disparu dans l'équation (1.6), ainsi elle n'intervient pas dans l'étude de la régularité locale des

solutions $\vec{u}$.

Une deuxième remarque vient du fait qu'à partir de l'équation (1.6) on a que la régularité de $\vec{u}$ est liée à la régularité de la force $\vec{f}$. En effet, si $\vec{f}$ appartient à l'espace $L^2_t H^k_x(Q)$, on obtient que $\vec{u} \in L^\infty_t H^{k+1}_x(Q) \cap L^2_t H^{k+2}_x(Q)$ et donc plus la force est régulière plus la solution l'est aussi.

Observons maintenant, et ce point est très important, que pour pouvoir obtenir de la régularité *locale* nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire qui est donnée par la condition $\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(Q)$. Cette condition est bien sûr très forte et il n'y a aucune raison particulière pour qu'une solution faible des équations de Navier-Stokes satisfasse cette contrainte.

Des efforts importants ont été réalisés pour généraliser et affaiblir cette condition ; ainsi Serrin [37] a prouvé que si $\vec{f} \in L^2_t H^1_x(Q)$ et si $\vec{u} \in L^p_t L^q_x(Q)$ avec $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 1$ alors pour tout $a < c < b$ et $0 < \rho < r_0$ nous avons en fait que $\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(]c, b[\times B_{x_0,\rho})$ et donc la condition d'appartenir à l'espace $L^\infty_t L^\infty_x(Q)$ peut être remplacée par la condition $L^p_t L^q_x(Q)$ avec $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 1$. Il est possible de généraliser encore plus cette hypothèse, voir par exemple [39], [40] ou bien [8]. Un exemple d'une telle généralisation qui sera utilisé dans le Chapitre 3 est donné par l'utilisation des espaces de Morrey-Campanato paraboliques. Ce cadre de travail a été développé par O'Leary [32].

Indiquons pour finir ces remarques, que la théorie de régularité locale de Serrin s'appuie sur l'hypothèse sous-critique $\vec{u} \in L^p_t L^q_x(Q)$ où $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 1$. Le cas critique $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 1$ peut également être étudié à condition que $3 < q \leq +\infty$ et ceci a été fait par Struwe [39] et Takahashi [40].

Néanmoins, et dans tous les cas de figure mentionnés ci-dessus, pour obtenir la régularité locale, nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire *qui ne peut pas se déduire* du cadre de travail général. En effet, et en toute généralité, si $\vec{u}$ est une solution faible de Leray alors la seule information que l'on dispose est $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2_t H^1_x(Q)$ et à partir de ce cadre on obtient, grâce aux injections de Sobolev, que $\vec{u} \in L^p_t L^q_x(Q)$ avec $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{3}{2}$ ce qui est encore très loin de la condition $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 1$. Autrement dit, nous ne savons pas s'il existe des solutions faibles des équations de Navier-Stokes qui vérifient l'hypothèse de Serrin.

Ainsi, nous le voyons bien, on a un comportement super-critique de $\vec{u}$ et on ne peut pas en déduire les contrôles nécessaires pour appliquer le théorème de Serrin. Il s'agit bien d'hypothèses *supplémentaires*.

Le contre exemple de Serrin

Une particularité intéressante du Théorème 1 provient du fait que la régularité obtenue ne concerne que la variable d'espace. Une question qui se pose alors est de savoir s'il est possible d'étudier la régularité en variable de temps dans le cadre de la régularité

locale de Serrin donnée par le Théorème 1.

Nous allons voir qu'en absence de contrôle sur la pression (rappelons qu'ici $p \in \mathcal{D}'(Q)$) il sera impossible d'obtenir une quelconque information sur la régularité en variable de temps.

En effet, Serrin a construit le contre exemple suivant : soit $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et soit soit $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Si on définit $\vec{u}$ sur l'ensemble $]-1,1[\times B(0,1)$ par l'expression $\vec{u}(t,x) = \phi(t)\vec{\nabla}\psi(x)$ alors on a les identités suivantes :

- $div(\vec{u}) = \phi(t)\Delta\psi(x) = 0$,
- $\Delta\vec{u} = 0$,
- $\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = 0$,

ce qui nous permet d'écrire $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \vec{\nabla}\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right)$.

Maintenant si $\vec{u}$ satisfait les équations de Navier-Stokes (1.1) on a

$$\partial_t\vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p = -\vec{\nabla}\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) - \vec{\nabla}p,$$

d'où on obtient la relation suivante

$$p(t,x) = -\frac{|\vec{u}(t,x)|^2}{2} - \partial_t\phi(t)\psi(x).$$

Ainsi grâce à cette relation on peut voir sans aucun problème qu'un contrôle sur la pression induit un contrôle sur la régularité en variable de temps, et donc si on suppose uniquement que p est une distribution (comme c'est le cas dans le Théorème 1), alors il est impossible d'obtenir une quelconque information sur la régularité des solutions en variable de temps. Nous verrons au Chapitre 2 l'importance de cette remarque.

1.3 Théorie de régularité de Caffarelli, Kohn et Nirenberg

Comme annoncé précédemment, il existe une deuxième manière pour étudier la régularité des solutions faibles des equations de Navier-Stokes mais avant de présenter le critère de régularité *partielle* de Caffarelli, Kohn et Nirenberg, nous allons présenter brièvement l'importance des inégalités d'énergie globale et locale car elles constituent la base de cette théorie.

1.3.1 Inégalité d'énergie globale

L'objectif principal de Leray dans son article [28] était de prolonger le temps d'existence et d'obtenir des solutions globales en temps. Pour cela, Leray a eu l'idée de régula-

riser le terme non linéaire $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ et il a étudié le système approché suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - \mathbb{P}\left[([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right] + \mathbb{P}(\vec{f}), \quad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \quad \varepsilon > 0, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3),\ \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

où $\vec{f} \in L^2([0,+\infty[, H^{-1}(\mathbb{R}^3))$ et θ est une fonction régulière qui appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ où pour $\varepsilon > 0$ on pose $\theta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^3}\theta(\frac{x}{\varepsilon})$. Ainsi pour un certain $\varepsilon > 0$ fixé, ce n'est pas compliqué d'obtenir des solutions (locales en temps) de ce système approché. Mais Leray est allé plus loin et il a obtenu une inégalité d'énergie qui permet de prolonger dans le temps ces solutions. Une fois que ces solutions approchées ont été prolongées en temps, on peut récupérer des solutions faibles en passant à la limite en ε, mais dans ce processus de passage à la limite on doit raisonner par sous-suites extraites et on perd donc l'unicité de telles solutions.

Rappelons maintenant comment on obtient ces inégalités d'énergie. Soit $\vec{u}_\varepsilon$ une solution du problème (1.7) et pour simplifier les calculs on considère les équations de Navier-Stokes approchées sans force extérieure :

$$\partial_t \vec{u}_\varepsilon = \nu\Delta\vec{u}_\varepsilon - \mathbb{P}\left[([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right].$$

On multiplie l'équation ci-dessus par $\vec{u}_\varepsilon$ et on intègre en variable d'espace, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{u}_\varepsilon\,dx = \nu\int_{\mathbb{R}^3}\Delta\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{u}_\varepsilon\,dx - \int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{P}\left[([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right]\cdot\vec{u}_\varepsilon\,dx,$$

on remarquera qu'avec la régularisation introduite au terme non linéaire tous les termes de l'équation ci-dessus ont un sens (voir [27] Chapitre 12). En appliquant la formule d'intégration par parties et en utilisant le fait que $\operatorname{div}(\vec{u}_\varepsilon) = 0$, on trouve

$$\frac{1}{2}\|\vec{u}_\varepsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = -\nu\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\varepsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

En intégrant cette identité en variable de temps on obtient :

$$\|\vec{u}_\varepsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_0^t\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,ds = \|\vec{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

On remarque avec cette égalité d'énergie que la taille (en norme $L^\infty L^2 \cap L^2\dot{H}^1$) de la solution approchée $\vec{u}_\varepsilon$ est contrôlée par la taille (en norme L^2) de la donnée initiale $\vec{u}_0$, et ainsi on obtient un contrôle uniforme en ε. On peut alors prolonger dans le temps les solutions $\vec{u}_\varepsilon$ et obtenir de la sorte des solutions globales.

Si l'on fait tendre $\varepsilon \to 0$ dans le système d'équation (1.7) on retrouve (au moins formellement) les équations de Navier-Stokes (1.1) et on peut obtenir des solutions faibles, mais en revanche on ne conserve pas l'égalité d'énergie, on obtient par contre une inégalité d'énergie.

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_0^t\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,ds \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{1.8}$$

On remarquera bien que dans ces calculs la pression n'intervient pas. Voir [26] pour les détails.

Cette inégalité d'énergie globale nous a permis de prolonger le temps d'existence des solutions faibles $\vec{u}$ mais elle ne nous permet pas d'étudier directement la régularité de $\vec{u}$.

1.3.2 Inégalité d'énergie locale de Scheffer

Parmi les nombreuses contributions apportées à l'étude des équations de Navier-Stokes durant la seconde moitié du XXe siècle, l'étude des inégalités d'énergie locales faite par Scheffer [35, 36] et les résultats de régularité partielle de Caffarelli, Kohn, Nirenberg [2] jouent un rôle important.

Fixons quelques notations

Définition 2 (L'ensemble des points réguliers) *Soit $\vec{u}$ une solution faible sur Q des équations de Navier-Stokes. En suivant la théorie de régularité de Serrin, nous dirons qu'un point $(t_0, x_0) \in Q$ est un point* régulier *de la solution $\vec{u}$ s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (t_0, x_0) tel que $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^\infty(\mathcal{V})$.*

Définition 3 (L'ensemble des points singuliers) *Soit $\vec{u}$ une solution faible des équations de Navier-Stokes sur Q. On définit alors Σ comme l'ensemble des points $(t, x) \in Q$ qui ne sont pas des points réguliers au sens de la Définition 2 précédente.*

L'ensemble Σ des points singuliers est l'ensemble dans lequel les solutions de Navier-Stokes peuvent éventuellement exploser et il est alors intéressant d'étudier la "taille" de cet ensemble.

Leray [28], Scheffer [35] puis Caffarelli, Kohn et Nirenberg [2] se sont intéressés à la mesure de Hausdorff (parabolique) de cet ensemble de points singuliers Σ.

Rappelons que l'on a, par la structure de l'équation, l'échelle parabolique $\vec{u}_\lambda(t, x) = \lambda\vec{u}(\lambda^2 t, \lambda x)$ (voir (1.2)) ; et il est donc naturel de considérer la mesure de Hausdorff associée à cette structure homogène. Par conséquent, si on considère la distance parabolique d_2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ définie par

$$d_2\big((t, x), (s, y)\big) = \max\{|t - s|^{\frac{1}{2}}, |x - y|\},$$

on peut construire la boule parabolique $Q_{t,x,r}$

$$Q_{t,x,r} = \big\{(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : d_2\big((t, x), (s, y)\big) < r\big\}, \tag{1.9}$$

ainsi l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, muni de la distance parabolique d_2 et la de mesure de Lebesgue $dt\,dx$ est un espace de type homogène (dans le sens de [10]) avec une dimension homogène égale à 5 :

$$\int_{Q_{t,x,r}} dt\,dx = Cr^5.$$

Associée à cette distance, on dispose la notion de mesure de Hausdorff : si A est un sous ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, on définit pour $\delta > 0$ l'ensemble $\mathcal{I}_\delta(A)$ comme l'ensemble de familles dénombrables $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des boules paraboliques $Q_n = Q_{t_n,x_n,r_n}$ telles que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ et $\sup_{n\in\mathbb{N}} r_n < \delta$. Pour $\alpha > 0$, on définit pour tout $\delta > 0$ la quantité

$$\mathcal{H}^\alpha_{2,\delta}(A) = \inf_{(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_\delta(A)} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} r_n^\alpha \right\}.$$

Maintenant, afin d'obtenir la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^\alpha_2$ de l'ensemble A on fait tendre $\delta \longrightarrow 0$:

$$\mathcal{H}^\alpha_2(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^\alpha_{2,\delta}(A).$$

Pour plus de détails concernant les propriétés de la mesure de Hausdorff voir [12].

Pour étudier la mesure de Hausdorff de l'ensemble des points singuliers Σ, Scheffer a développé une inégalité d'énergie locale qui s'est avéré être un outil fondamental dans l'étude de la théorie de la régularité partielle.

Théorème 2 (Scheffer) *Soit $\vec{u} \in L^\infty(]a,b[, L^2(B_{x_0,r}) \cap L^2(]a,b[, H^1(B_{x_0,r}))$ une solution faible des équations de Navier-Stokes avec une donnée initiale $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle, soit une force extérieure $\vec{f} \in L^2(]a,b[, H^{-1}(B_{x_0,r}))$ et une pression $p \in L^{\frac{3}{2}}(]a,b[, L^{\frac{3}{2}}(B_{x_0,r}))$. Alors il existe une distribution μ telle que*

$$\mu = -\partial_t|\vec{u}|^2 + \nu\Delta|\vec{u}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 - \operatorname{div}\left((|\vec{u}|^2 + 2p)\vec{u}\right) + 2\vec{u}\cdot\vec{f}, \tag{1.10}$$

et

$$\mu \geq 0.$$

On peut trouver la preuve de ce théorème dans le livre [27], Chapitre 13 ou bien dans l'article [35].

Faisons quelques remarques sur cette inégalité locale. Tout d'abord, et contrairement à l'inégalité globale de Leray, on a un terme de pression qui apparaît dans l'inégalité, il faudra alors imposer des conditions sur la pression pour donner un sens au terme div $(p\vec{u})$. En effet on peut demander que $p \in L_t^{\frac{3}{2}} L_x^{\frac{3}{2}}(Q)$ et alors div $(p\vec{u})$ a bien un sens étant donné qu'on peut démontrer que $\vec{u} \in L_t^3 L_x^3(Q)$ (par interpolation). On peut aussi donner un sens au terme div $(p\vec{u})$ avec une pression $p \in L_t^{q_0} L_x^1(Q)$ avec $q_0 > 1$.

Dernière remarque, il est possible de démontrer que si $p \in L_t^1 L_x^1(Q)$ et $\vec{u} \in L_t^4 L_x^4(Q)$ alors on a un critère d'égalité $\mu = 0$ (voir [27] Proposition 13.3). Ce cas ne figure pas dans le cadre de Serrin puisqu'on a $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} > 1$, ainsi on peut dire que le cas $L^4(]a,b[, L^4(B_{x_0,r}))$ se situe entre le cadre de Leray et celui de Serrin (voir le livre [27] Chapitre 13).

Donnons maintenant la définition d'une solution adaptée qui est un point crucial dans la théorie de régularité partielle de Caffarelli, Kohn et Nirenberg.

Définition 4 (Solution adaptée) *On dit que $\vec{u}$ une solution des équations de Navier-Stokes est une solution adaptée si la quantité μ donnée par l'expression (1.10) est une mesure de Borel localement finie positive.*

Passons maintenant aux résultats de Caffarelli, Kohn et Nirenberg.

1.3.3 Critère de régularité de Caffarelli, Kohn et Nirenberg

Caffarelli, Kohn et Nirenberg dans leur article [2] ont étudié deux problèmes. Pour contourner l'hypothèse super-critique sur $\vec{u}$ que nécessite la théorie locale de Serrin, Caffarelli, Kohn et Nirenberg ont introduit une autre approche qui est en fait satisfaite par $\vec{u}$ dans un voisinage de presque tout point de $Q =]a,b[\times B_{x_0,r_0}$, de sorte que le manque de régularité est concentré sur un ensemble très petit. Le second problème qu'ils ont étudié est la mesure de l'ensemble des points singuliers. En effet ils ont prouvé que la mesure de Hausdorff parabolique $\mathcal{H}^1$ de l'ensemble des points singuliers est nulle.

Soyons plus précis sur la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg et introduisons maintenant les principaux ingrédients de cette théorie :

Définition 5 (L'ensemble des grands gradients pour la vitesse) *Soit $\vec{u}$ une solution faible des équations de Navier-Stokes. Nous dirons qu'un point $(t,x) \in Q$ est un point de grand gradient pour la vitesse si on a*

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{r} \iint_{]t-r^2,t+r^2[\times B_{x,r}} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 ds\, dy > 0.$$

On désignera par Σ_0 l'ensemble des points à grands gradients.

Remarquons à nouveau que si $\vec{f}$ est suffisamment régulière (par exemple, si $\vec{f} \in L^2_t L^2_x(Q)$), alors l'analyse de Serrin nous dit que, pour un point régulier $(t_0,x_0) \notin \Sigma$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de ce point tel que $\vec{u} \in L^\infty_t H^1_x$ sur $\mathcal{V}$, ainsi pour r assez petit on a

$$\iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B_{x_0,r}} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 ds\, dy = O(r^2), \quad \text{et alors } (t_0,x_0) \notin \Sigma_0.$$

En effet :

$$\iint_{]t-r^2,t+r^2[\times B_{x,r}} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 ds dy = \int_{]t-r^2,t+r^2[} \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|^2_{L^2(B_{x,r})} ds,$$

et comme $\vec{u} \in L^2(]t-r^2,t+r^2[, H^1(B_{x,r}))$ on a

$$\int_{]t-r^2,t+r^2[} \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|^2_{L^2(B_{x,r})} ds \leq \sup_{t-r^2<t<t+r^2} \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|^2_{L^2(B_{x,r})} \int_{]t-r^2,t+r^2[} ds = Cr^2 = O(r^2).$$

Par conséquent, Σ_0 est en fait un ensemble formé par des points singuliers. En outre, Σ_0 est un ensemble très petit : en effet, Caffarelli, Kohn et Nirenberg [2] ont démontré comment déduire de l'hypothèse $\vec{u} \in L^2_t H^1_x$ le fait que la mesure de Hausdorff (parabolique) $\mathcal{H}^1_2$ de Σ_0 est nulle. Le but de la théorie de régularité partielle est alors de trouver un critère qui assure que $\Sigma = \Sigma_0$.

On remarquera que $\vec{f}$ peut appartenir à plusieurs espaces fonctionnels : on peut par exemple prendre $\vec{f} \in L^2_t H^{-1}_x$, cette hypothèse est suffisante pour donner un sens au produit $\vec{f}\cdot\vec{u}$ qui apparait dans la quantité (1.10). Voici un autre exemple, en suivant Kukavica [24], on peut fixer $\vec{f} \in L^{10/7}_t L^{10/7}_x$, puisque $\vec{u} \in L^{10/3}_t L^{10/3}_x(Q)$. En effet, on a $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2_t H^1(Q)$ et avec les injections de Sobolev on a $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2_t L^6_x(Q)$, en faisant une estimation d'interpolation en variable espace (avec $\theta = \frac{3}{5}$) on trouve :

$$\|\vec{u}(t,.)\|_{L^{\frac{10}{3}}_x} \leq \|\vec{u}(t,.)\|^{\frac{2}{5}}_{L^2_x} \|\vec{u}(t,.)\|^{\frac{3}{5}}_{L^6_x},$$

et donc

$$\begin{aligned}
\int_{]t-r^2,t+r^2[} \|\vec{u}(t,.)\|^{\frac{10}{3}}_{L^{\frac{10}{3}}_x}\, dt &\leq \int_{]t-r^2,t+r^2[} \|\vec{u}(t,.)\|^{\frac{4}{3}}_{L^2_x} \|\vec{u}(t,.)\|^2_{L^6_x}\, dt \\
&\leq \sup_t \|\vec{u}(t,.)\|^{\frac{4}{3}}_{L^2_x} \int_{]t-r^2,t+r^2[} \|\vec{u}(t,.)\|^2_{L^6_x}\, dt \\
&\leq \|\vec{u}(t,.)\|^{\frac{4}{3}}_{L^\infty_t L^2_x} \|\vec{u}(t,.)\|_{L^2_t L^6_x} < +\infty.
\end{aligned}$$

Nous verrons par la suite l'utilité de cette observation.

De la même façon qu'il existe plusieurs choix possibles pour la force $\vec{f}$, diverses hypothèses ont été utilisées pour la pression p. Rappelons tout d'abord que dans l'article original de Caffarelli, Kohn et Nirenberg [2], l'hypothèse sur la pression était $p \in L_t^{\frac{5}{4}} L_x^{\frac{5}{4}}(Q)$ car à cette époque là, cela correspondait au meilleur exposant disponible pour donner un sens aux inégalités d'énergie locales et aux solutions adaptées sur un domaine bornée, en effet avec cette condition sur la pression le terme $\operatorname{div}(p\vec{u})$ est bien défini. Depuis, de nombreux efforts ont été réalisés pour améliorer cette hypothèse sur la pression ; on citera en particulier les travaux de Lin [29] dans lesquels la condition est $L_t^{\frac{3}{2}} L_x^{\frac{3}{2}}(Q)$ et plus récemment Vasseur [42] où la condition est $p \in L_t^r L_x^1(Q)$ avec $r > 1$.

Une fois qu'on a détaillé le cadre, on peut énoncer le théorème de régularité de Caffarelli, Kohn et Nirenberg :

Théorème 3 (Dimension de l'ensemble des points singuliers) *Pour toutes solutions faibles adaptées des équations de Navier-Stokes sur un domaine Q de la forme $]a,b[\times B(x_0,r)$, la mesure de Hausdorff parabolique de l'ensemble des point singulier est nulle $\mathcal{H}_2^1(\Sigma)=0$.*

Le deuxième critère que Caffarelli Kohn et Nirenberg ont démontré est le suivant :

Théorème 4 *Soit Q un domaine de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. Soit $\vec{u}$ une solution faible des équations de Navier-Stokes sur Q. On suppose que*

1) $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1$,

2) $p(t,x) \in L_t^{q_0} L_x^1(Q)$ *avec* $q_0 > 1$,

3) $\vec{f}(t,x) \in L_t^q L_x^q(Q)$ *avec* $q > 5/2$ *et* $Div(\vec{f}) = 0$,

4) $\vec{u}$ *est adaptée* ($\mu \geq 0$).

Il existe une constante positive $\epsilon \geq 0$ telle que si en un point $(t_0,x_0) \in \Omega$ on a :

$$\limsup_{r\longrightarrow 0} \frac{1}{r} \int\int_{(t_0-r^2,t_0+r^2)\times B(x_0,r)} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 ds\, dx < \epsilon.$$

Alors $\vec{u}$ est Hölderienne dans un voisinage (t_0,x_0).

Faisons quelques remarques sur ce résultat

- On note d'abord qu'il est nécessaire d'imposer certaines conditions sur la pression p et dans ce sens cette approche est moins générale que le critère de Serrin où on demande uniquement $p \in \mathcal{D}'$.

- On n'a pas besoin de l'hypothèse locale $\vec{u} \in (L_t^\infty L_x^\infty)_{loc}$ (ou $(L_t^p L_x^q)_{loc}$ avec $\frac{2}{p}+\frac{3}{q} \leq 1$ et $3 < q \leq +\infty$) ; à la place, nous allons utiliser le critère de solution adaptée. Dans ce sens la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg est plus générale (vu que les solutions construites par Leray satisfont le critère adapté au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg), au moins lorsque nous étudions les contraintes sur $\vec{u}$.

- Puisqu'on a un certain contrôle sur la pression p il est possible d'obtenir certaine régularité en variable de temps ($\vec{u}$ est Hölderienne en variable de temps) comme il a été souligné par le contre exemple de Serrin.

- Finalement, il convient de noter que cette régularité est obtenue seulement en petits voisinages de points.

Les différences entre la régularité locale (Serrin) et la régularité partielle (Caffarelli, Kohn et Nirenberg) sont les suivantes : les hypothèses ainsi que les conclusions de la première approche sont complètement différentes de la deuxième, en effet, Serrin dans sa théorie suppose que la pression $p \in \mathcal{D}'(Q)$ et que la solution $\vec{u}$ est bornée $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^\infty(Q)$, une hypothèse qu'on ne pourra pas déduire du fait que $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(Q) \cap L_t^2 H_x^1(Q)$. Avec toutes ces conditions Serrin prouve que la solution $\vec{u}$ est plus régulière localement en variable d'espace (sur un sous domaine borné). En revanche les hypothèses dans la théorie de Caffarelli Kohn et Nirenberg sont le critère de solution adaptée ainsi que les conditions sur la pression p qui sont nécessaires pour donner un sens à la définition des solutions adaptées et sans oublier la condition qu'on appellera la condition de petitesse

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B_{x_0,r}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s,y)|^2 \, ds \, dy < \epsilon,$$

cette dernière a pour but le contrôle des points singuliers. Avec ces conditions Caffarelli, Kohn et Nirenberg prouvent qu'au voisinage d'un point $(t_0, x_0) \in Q$ la solution $\vec{u}$ des équations de Navier-Stokes est Hölderienne en variable de temps et d'espace(sur des voisinages de points). Ainsi, si on compare les hypothèses et les conclusions de ces théories qui étudient la régularité locale/partielle des solutions faibles des équations de Navier-Stokes nous obtenons deux approches très différentes en termes d'étude et de résultats.

1.4 Présentation de la thèse

Cette thèse est consacrée au rôle des inégalités d'énergie locales dans la théorie de la régularité partielle des solutions faibles des équations de Navier-Stokes dans le sens du Théorème de Caffarelli, Kohn et Nirenberg.

Nous distinguons trois parties. La première partie de la thèse traite essentiellement l'annonce faite par le mathématicien coréen Choe en 2013 de la démonstration d'une nouvelle inégalité d'énergie locale qui s'applique à toute solution faible des équations de Navier-Stokes, sans aucune hypothèse sur la pression, et qui permettrait d'étendre les résultats de régularité partielle de Caffarelli, Kohn et Nirenberg à toutes les solutions faibles et pas seulement aux solutions adaptées.

Une étude de la preuve de l'inégalité de Choe nous permettait de conclure que cette preuve était fausse a priori pour le cas d'une solution générale, et le théorème principal de Choe (qui était sensé nous donner une régularité en temps et en espace en dehors d'un ensemble de singularité extrêmement petit) était contredit par un contre exemple de Serrin qui liait la régularité en temps à des hypothèses sur la pression.

Dans cette première partie on a rédigé une preuve rigoureuse de l'inégalité introduite par Choe en rajoutant des hypothèses supplémentaire qu'il fallait introduire pour la démontrer. Néanmoins, la nouvelle inégalité d'énergie (qui ne faisait pas intervenir la

pression) nous ne servait pas à prolonger les affirmations de Choe, mais on a pu identifier une nouvelle variable inspirée de la preuve de Choe qui nous a permit d'introduire notre résultat principal qui est exposé dans la deuxième partie.

La deuxième partie de la thèse est consacrée à étudier profondément la nouvelle variable suggérée par une partie du travail de Choe. En effet, on a pu assimiler une nouvelle variable $\vec{v}$ liée au rotationel de la solution $\vec{u}$. Ainsi en étudiant $\vec{v}$, et à l'aide d'un mélange de la théorie de Serrin et celle de Caffarelli, Kohn et Nirenberg on a obtenu un résultat de régularité partielle qui ne s'applique pas à toute solution faible (contrairement à l'énoncé de Choe) mais à une classe plus large que les solutions adaptées (au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg) : la notion de solution dissipative a été introduite en suivant les travaux de Duchon et Robert fait en 2000 et cette dernière nous permet d'inclure positivement le contre exemple de Serrin dans notre nouvelle théorie.

La troisième et dernière partie est destinée à l'étude de la stabilité des solutions dissipatives par convergence *-faible. En effet, on considère une suite $\vec{u}_n$ bornée dans $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1$, une force extérieure $\vec{f}_n$ bornée dans $L_t^{\frac{10}{7}} L_x^{\frac{10}{7}}$ à divergence nulle et une pression $p_n \in \mathcal{D}'(Q)$. On suppose aussi que $\vec{u}_n$ est dissipative au sens de la définition donnée dans la deuxième partie et on va prouver que la limite $\vec{u}$ d'une sous suite $\vec{u}_{n_k}$ est une solution des équations de Navier-Stokes et elle est dissipative.

Chapitre 2

Vers une nouvelle inégalité d'énergie locale

2.1 Introduction

Lors du 8^e atelier international Nippo-Allemand sur la dynamique mathématique des fluides qui a eu lieu à Waseda en 2013, H. Choe [9] a annoncé un nouveau résultat sur la théorie de la régularité partielle des solutions faibles des équations de Navier-Stokes. Le problème étudié est le suivant : on considère le problème de Cauchy pour les équations de Navier-Stokes incompressibles en dimension 3

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \nu \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \quad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \quad \nu > 0, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3), \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

et si $\vec{u}$ est une solution faible de Leray alors H. Choe souhaite démontrer un théorème de régularité partielle en variable de temps et d'espace similaire à celui de Caffarelli, Kohn et Nirenberg [2] en ne demandant aucune condition particulière sur la pression p, c'est à dire qu'il suppose uniquement que p est une distribution. Rappelons [1] que dans la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg on avait besoin d'un contrôle sur la pression, dans ce sens le résultat de Choe semble être une généralisation importante de la théorie de régularité partielle.

Hélas, ce programme de recherche pose deux problèmes majeurs. Le premier problème, d'ordre théorique, invalide totalement le résultat annoncé par Choe. En effet, on dispose du contre exemple de Serrin (présenté dans la page 7) où l'on peut voir que la régularité en variable de temps est forcement reliée à un contrôle de la pression. Pour la commodité du lecteur nous reprenons les détails de ce contre exemple ci-dessous.

Si ϕ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$ et si ψ est une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^3$, on définit $\vec{u}$ sur $]0,1[\times B(0,1)$ par $\vec{u}(t,x) = \phi(t)\vec{\nabla}\psi(x)$. On a $\operatorname{div}(\vec{u}) = \phi(t)\Delta\psi(x) = 0$, $\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = 0$, $\Delta \vec{u} = 0$ et on obtient $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \vec{\nabla}\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right)$. Maintenant, si $\vec{u}$ satisfait les équations de Navier-Stokes, on a $\partial_t \vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p = -\vec{\nabla}\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) - \vec{\nabla}p$, d'où on obtient la relation suivante

$$p(t,x) = -\frac{|\vec{u}(t,x)|^2}{2} - \partial_t\phi(t)\psi(x).$$

1. Voir le Théorème 4 page 13.

Ainsi, sans contrôle sur la pression il n'y a aucun espoir d'obtenir de la régularité en variable de temps.

Le deuxième problème du programme de recherche de Choe est, quant à lui, d'ordre technique : pour obtenir le résultat annoncé dans [9], une nouvelle inégalité d'énergie est développée (qui était en fait une généralisation de l'inégalité de Jin [19] pour le problème de Stokes) et cette inégalité d'énergie est censée être l'ingrédient principal de la démonstration. Mais telle qu'elle est présentée, cette inégalité ainsi que sa preuve, posent un certain nombre de problèmes : en effet, si $\vec{u}$ est une solution faible des équations de Navier-Stokes (2.1) telle que $\vec{u} \in L^\infty(]-1,1[, L^2(B(x_0,r))) \cap L^2(]-1,1[, H^1(B(x_0,r)))$ où le centre $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et le rayon $0 < r < 1$ de la boule $B(x_0,r)$ sont fixés, si on considère $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction régulière à support compact en temps et en espace telle que $\phi(t,x) = 0$ si $|x| > r$ et si $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$ est la vorticité du fluide, alors la nouvelle inégalité d'énergie proposée découle de l'étude de la quantité suivante

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\phi\vec{\omega})\right\|_{L^2}^2\right), \tag{2.2}$$

et le problème provient justement du fait que, compte tenu du cadre de travail, l'expression (2.2) ne peut pas être utilisée directement et sans justification préalable : nous devons d'une part établir l'identité

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\phi\vec{\omega})\right\|_{L^2}^2\right) = -\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t(\phi\vec{\omega}(t,x)) \cdot \frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}(t,x))dx, \tag{2.3}$$

et nous avons d'autre part $\vec{u} \in L^\infty(]-1,1[, L^2(B(x_0,r))) \cap L^2(]-1,1[, H^1(B(x_0,r)))$ ce qui implique $\Delta\vec{u} \in L^\infty_t H^{-2}_x \cap L^2_t H^{-1}_x$ et on peut montrer que $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ appartient à l'espace $L^2_t H_x^{-\frac{3}{2}}$ ce qui conduit $\partial_t\vec{u} \in L^2_t H_x^{-\frac{3}{2}}$, ainsi comme $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$, on obtient $\partial_t(\phi\vec{\omega}) \in L^2_t H_x^{-\frac{5}{2}}$.

Mais, on a aussi $\vec{\omega} \in L^2_t L^2_x$ et donc $\dfrac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}) \in L^2_t H^2_x$ et nous devons considérer avec l'expression (2.3) une intégrale qui fait intervenir des termes qui appartiennent aux espaces $L^2_t H_x^{-\frac{5}{2}}$ et $L^2_t H^2_x$: nous voyons bien qu'avec ces informations l'intégrale (2.3) n'est pas correctement définie.

2.2 Une nouvelle inégalité d'énergie

L'objectif de ce chapitre est tout d'abord de donner un sens à cette quantité (via un processus de régularisation et un passage à la limite) pour ensuite obtenir une inégalité d'énergie locale en s'inspirant des calculs présentés dans [9]. Voici donc le théorème principal de ce chapitre

Théorème 5 *Soit $\vec{u}$ une solution des équations de Navier-Stokes (2.1) construite par le procédé de Beirão da Veiga (voir le Théorème 6 ci-dessous), soit $\vec{f} \in L^2(]-1,1[, H^{-1}(\mathbb{R}^3))$ une force extérieure et on suppose p est une distribution : $p \in \mathcal{D}'$. On note $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$.*

Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(]-1,1[\times\mathbb{R}^3)$ telle que $\phi(t,x) = 0$ si $|x| > r$, avec $0 < r < 1$.

Alors, il existe une constante C_ϕ positive telle que pour $t \in]-1,1[$ on a :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\phi\vec{\omega}(t,\cdot))\right\|^2_{L^2(B_r)} &+ \nu\int_{-1}^{1}\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\omega}(s,x)|^2\phi^2(s,x)\,ds\,dx \leq C_\phi\int_{-1}^{1}\|\vec{u}\|^2_{L^2(B_r)}\,ds \\ &+ C_\phi\int_{-1}^{1}\|\vec{u}\|^3_{L^3(B_r)}\,ds + C_\phi\int_{-1}^{1}|\langle\vec{f},\vec{u}\rangle|_{H^{-1}\times H^1}\,ds \\ &+ C_\phi\int_{-1}^{1}\|\vec{f}\|^2_{H^{-1}(B_r)}\,ds. \qquad (2.4)\end{aligned}$$

Remarque 1 *Dans le texte de Choe [9] l'inégalité (2.4) était censée être valide pour toute solution (ce qui est faux comme on a pu le constater dans la page précédente). On note aussi que dans son texte [9], Choe travaille avec les équations de Navier-Stokes sans force extérieure $\vec{f}$, nous avons rajouter une force $\vec{f} \in L^2_t H^{-1}_x$.*

Rappelons que le but de cette inégalité d'énergie locale était d'obtenir une version du théorème de Caffarelli, Kohn et Nirenberg sans contrainte sur la pression p et cet objectif, bien qu'inatteignable par le contre exemple de Serrin, va fixer la stratégie adoptée : en effet, étant donné que l'on travaille dans un cadre local, il n'est pas question d'utiliser le projecteur de Leray $\mathbb{P}$ et ceci explique l'utilisation de la vorticité $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$.

Mais bien que le fait de considérer la vorticité $\vec{\omega}$ permet de supprimer la pression (car $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} p) \equiv 0$), ce procédé *consomme* une dérivée (on cherche une inégalité sur $\vec{u}$ et non sur ses dérivées) et pour obtenir un équilibre il est nécessaire d'introduire l'opérateur $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}$. Autrement dit, on peut s'attendre à ce que l'objet $\dfrac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\vec{\nabla} \wedge \vec{u})$ ait un comportement similaire à celui de $\vec{u}$. On verra comment utiliser cette idée pour obtenir l'inégalité (2.4) et nous reprendrons cet argument au chapitre suivant.

Ceci étant posé, l'inégalité (2.4) s'obtiendra alors en étudiant le comportement dans le temps de la norme L^2 de la quantité $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\phi\vec{\nabla} \wedge \vec{u})$.

Venons maintenant à la preuve de cette inégalité. Comme nous l'avons souligné dans les lignes précédentes, le terme $\left\|\dfrac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\phi\vec{\omega}(t,\cdot))\right\|_{L^2(B_r)}$ ne peut pas être considéré directement et pour contourner ce problème nous allons adopter la stratégie suivante : on commence par régulariser les équations de Navier-Stokes (2.1) en introduisant un terme d'hyperviscosité et les solutions de ce problème possèdent bien évidemment de meilleurs propriétés qui seront mise à profit pour obtenir une inégalité approchée. Finalement, un passage à la limite nous permettra de conclure.

2.3 Solutions d'hyperviscosité

Comme annoncé ci-dessus nous allons considérer une régularisation des équations de Navier-Stokes et pour cela nous allons suivre H. Beirão da Veiga [1] qui a démontré le résultat suivant

Théorème 6 *Soit $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\vec{f} \in L^2_t H^{-1}_x(\mathbb{R}^3)$.*

Alors, pour $\varepsilon > 0$ fixé, le problème :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = -\varepsilon\Delta^2\vec{u} + \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \quad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \quad \nu > 0, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3),\ \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

possède une unique solution $\vec{u} = \vec{u}_\varepsilon$.

De plus la suite des fonctions $(\vec{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$ indépendamment de ε et il existe une suite $\varepsilon_k \longrightarrow 0$ et une fonction $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$ telle que $\vec{u}_{\varepsilon_k}$ converge faiblement vers $\vec{u}$.

Finalement, si $\vec{u}_0 \in H^1$, si $\vec{f} \in L^2_t H^{-1}_x$ et si le problème de Navier-Stokes a une solution $\vec{u} \in C([0,T],H^1) \cap L^2([0,T],H^2)$, alors on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\vec{u}_\varepsilon - \vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x} = 0.$$

Voir une démonstration de ce théorème dans [27] ou bien [1].

L'ajout du terme *d'hyperviscosité* $\varepsilon\Delta^2$ aux équations de Navier-Stokes nous a permis d'obtenir une solution $\vec{u}_\varepsilon$ qui appartient à l'espace $L^\infty([0,T],H^1) \cap L^2([0,T],H^2)$ et donc avec ce cadre de travail on pourra donner un sens à l'identité (2.3).

Énonçons maintenant quelques propriétés des solutions d'hyperviscosité dont on aura besoin pour prouver l'inégalité d'énergie locale donnée dans le Théorème 5.

Proposition 1 *Soit $\vec{u}_\varepsilon$ une solution des équations de Navier-Stokes approchées (2.5). Alors, on a les contrôles suivants*

$$\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2_t L^2_x} \approx O(1) \quad et \quad \|\Delta\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2_t L^2_x} \approx O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Preuve : Sachant que le Théorème 6 nous assure que les solutions $\vec{u}_\varepsilon$ appartiennent à l'espace $L^\infty_t H^1_x \cap L^2_t H^2_x$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \partial_t\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_x} &= 2\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{u}_\varepsilon\,dx = 2\int_{\mathbb{R}^3}\Big[-\varepsilon\Delta^2\vec{u}_\varepsilon + \nu\Delta\vec{u}_\varepsilon - (\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon - \vec{\nabla}p_\varepsilon + \vec{f}\Big]\cdot\vec{u}_\varepsilon\,dx \\ &= -2\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}\Delta^2\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{u}_\varepsilon\,dx + 2\nu\int_{\mathbb{R}^3}\Delta\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{u}_\varepsilon\,dx \\ &+ 2\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{u}_\varepsilon\,dx - 2\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\nabla}p_\varepsilon\cdot\vec{u}_\varepsilon\,dx + 2\left\langle\vec{f},\vec{u}_\varepsilon\right\rangle_{H^{-1}\times H^1}, \end{aligned}$$

par une intégration par parties et en utilisant la propriété $\operatorname{div}(\vec{u}_\varepsilon) = 0$, on obtient

$$\partial_t\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_x} = -2\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta\vec{u}_\varepsilon|^2\,dx - 2\nu\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\varepsilon|^2\,dx + 2\left\langle\vec{f},\vec{u}_\varepsilon\right\rangle_{H^{-1}\times H^1}.$$

On remarque maintenant que nous avons la majoration suivante

$$2\left\langle\vec{f},\vec{u}_\varepsilon\right\rangle_{H^{-1}\times H^1} \le 2\|f\|_{H^{-1}_x}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{H^1_x} \le \frac{1}{\nu}\|\vec{f}\|^2_{H^{-1}_x} + \nu\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{H^1}$$

qui, par la définition des espaces de Sobolev, devient

$$2\left\langle \vec{f}, \vec{u}_\varepsilon \right\rangle_{H^{-1}\times H^1} \leq \frac{1}{\nu}\|\vec{f}\|^2_{H^{-1}} + \nu\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_x} + \nu\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_x},$$

et on trouve alors

$$\begin{aligned}\partial_t\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_x} &\leq -2\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta\vec{u}_\varepsilon|^2\,dx - 2\nu\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\varepsilon|^2\,dx + \frac{1}{\nu}\|\vec{f}\|^2_{H^{-1}_x} + \nu\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_x} + \nu\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_x}\\ &\leq -2\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta\vec{u}_\varepsilon|^2\,dx - \nu\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\varepsilon|^2\,dx + \frac{1}{\nu}\|\vec{f}\|^2_{H^{-1}_x} + \nu\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_x}.\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à la variable de temps on obtient

$$\begin{aligned}\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_tL^2_x} &\leq -2\varepsilon\int_0^t\|\Delta\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_x}\,ds - \nu\int_0^t\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_x}\,ds\\ &+ \frac{1}{\nu}\int_0^t\|\vec{f}\|^2_{H^{-1}_x}\,ds + \nu\int_0^t\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_x}\,ds + \|\vec{u_0}\|^2_{L^2_x},\end{aligned}$$

et on applique alors le lemme de Grönwall

$$\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_tL^2_x} + 2\varepsilon\int_0^t\|\Delta\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_x}\,ds + \nu\int_0^t\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_x}\,ds \leq e^t\left(\|\vec{u_0}\|^2_{L^2_tL^2_x} + \frac{1}{\nu}\|\vec{f}\|^2_{L^2_tH^{-1}_x}\right).$$

Étant donné que le terme à droite de l'expression ci-dessus ne dépend pas de ε, on a les contrôles uniformes suivants :

$$\sup_{\varepsilon>0}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_tL^2_x} < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{\varepsilon>0}2\varepsilon\|\Delta\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2_tL^2_x} < +\infty,$$

ainsi,

$$\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2_tL^2_x} \approx O(1) \quad \text{et} \quad \|\Delta\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2_tL^2_x} \approx O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

■

2.4 Démonstration du Théorème principal

Dans cette section nous allons donner une démonstration de l'inégalité (2.4). On considère tout d'abord le problème approché (2.5) et pour une solution $\vec{u}_\varepsilon$ de ce problème on vérifie dans le Lemme 1 suivant que la quantité (2.2) est bien définie. Ensuite on étudiera l'évolution dans le temps de cette quantité tout en gardant la dépendance par rapport au paramètre $\varepsilon > 0$, puis finalement on fera tendre $\varepsilon \to 0$ pour obtenir l'inégalité recherchée.

Lemme 1 *Soit $\vec{u}_\varepsilon$ une solution des équations de Navier-Stokes approchées (2.5). Alors la quantité,*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right\|^2_{L^2}\right) = -\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t(\phi\vec{\omega}_\varepsilon(t,x))\cdot\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon(t,x))dx, \tag{2.6}$$

est bien définie (où on a noté $\vec{\omega}_\varepsilon = \vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon$).

Preuve : on a vu par le Théorème 6 que les solutions approchées ont un meilleur ordre de régularité, en particulier nous avons :

- $\Delta^2\vec{u}_\varepsilon \in L^\infty_t H^{-3}_x \cap L^2_t H^{-2}_x$,
- $\Delta\vec{u}_\varepsilon \in L^\infty_t H^{-1}_x \cap L^2_t L^2_x$,
- $(\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon \in L^2_t H^{-\frac{3}{2}}_x$,

et de ses trois affirmations on déduit que la dérivée de $\vec{u}_\varepsilon$ en variable de temps vérifie $\partial_t\vec{u}_\varepsilon \in L^2_t H^{-2}_x$, par conséquent celle de la vorticité $\partial_t\vec{\omega}_\varepsilon$ appartient à l'espace $L^2_t H^{-3}_x$, ainsi pour que l'intégrale donnée dans (2.6) ait un sens il faut que le terme $\dfrac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)$ appartienne à l'espace $L^2_t H^3_x$.

Indiquons toute suite que même avec les hypothèses $\vec{u}_\varepsilon \in L^\infty_t H^1_x \cap L^2_t H^2_x$, $\vec{\omega}_\varepsilon \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$, on ne pourra pas prouver directement que $\dfrac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)$ appartient à l'espace souhaité et il est nécessaire d'utiliser une astuce technique supplémentaire : si on multiplie le terme $\dfrac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)$ par une fonction auxiliaire $\psi \in \mathcal{C}^\infty_0(]-1,1[\times\mathbb{R}^3)$ qui vaut 1 sur le support de ϕ, on pourra alors démontrer que $\psi\dfrac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon) \in L^2_t H^3_x$. En effet, en prenant la norme H^3 par rapport à la variable d'espace et en utilisant la définition des espaces de Sobolev, on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|\psi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega})\right\|_{H^3} &= \left\|\psi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right\|_{L^2} + \left\|\psi\frac{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right\|_{L^2} \\ &= \underbrace{\left\|\psi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right\|_{L^2}}_{(1)} + \underbrace{\left\|\psi(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right\|_{L^2}}_{(2)}.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder au terme (1) on obtient :

$$\left\|\psi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right\|_{L^2} \leq C\|\psi\|_{L^3(B(x_0,r))}\left\|\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right\|_{L^6},$$

puis en appliquant les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev, on a

$$\begin{aligned}\left\|\psi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right\|_{L^2} &\leq C\|\psi\|_{L^3}\|\phi\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{5}}} \\ &\leq C\|\psi\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}\|\phi\|_{L^3}\|\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2}.\end{aligned}$$

En prenant la norme L^2 par rapport à la variable de temps on obtient :

$$\left\|\psi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right\|_{L^2_tL^2_x} \leq C_{\psi,\phi}\|\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2_tL^2_x} < +\infty,$$

ce qui termine l'étude du terme (1).

Pour le terme (2), comme $\vec{\omega}_\varepsilon$ appartient à $L^2_t H^1_x$ on a directement

$$\left\|\psi(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right\|_{L^2_tL^2_x} < \|\psi\|_{L^\infty_tL^2_x}\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\|_{L^2_tL^2_x} < +\infty.$$

■

On verra par la suite que l'introduction de la fonction auxiliaire ψ réalisée dans la preuve du Lemme 1 est en réalité purement technique et sans conséquences fondamentales dans les résultats exposés ci-dessous.

Une fois qu'on a donnée un sens à l'identité (2.6) on peut maintenant commencer la preuve de l'inégalité d'énergie locale (2.4).

Démonstration du Théorème 5 :

On part de l'équation approximée (2.5). En appliquant l'opérateur rotationnel à (2.5) et en notant $\vec{\omega}_\varepsilon = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}_\varepsilon$, on obtient

$$\partial_t \vec{\omega}_\varepsilon = -\varepsilon \Delta^2 \vec{\omega}_\varepsilon + \Delta \vec{\omega}_\varepsilon - \vec{\nabla} \wedge \left[(\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon \right] + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}, \quad \operatorname{div}(\vec{\omega}_\varepsilon) = 0, \quad \nu > 0 \tag{2.7}$$

On cherche maintenant à contrôler la norme H^{-1} de $\phi \vec{\omega}_\varepsilon(t,.)$ et on écrit

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} (\phi \vec{\omega}_\varepsilon) \right\|_{L^2}^2 \right) = - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t (\phi \vec{\omega}_\varepsilon(t,x)) \cdot \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{\omega}_\varepsilon(t,x)) \, dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}^3} [(\partial_t \phi) \vec{\omega}_\varepsilon + (\partial_t \vec{\omega}_\varepsilon) \phi] \cdot \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{\omega}_\varepsilon) \, dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t \phi) \vec{\omega}_\varepsilon \cdot \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{\omega}_\varepsilon) \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t \vec{\omega}_\varepsilon) \phi \cdot \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{\omega}_\varepsilon) \, dx.
\end{aligned}$$

Maintenant, on utilise l'équation vérifiée par $\partial_t \vec{\omega}_\varepsilon$ et on peut écrire alors

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} (\phi \vec{\omega}_\varepsilon) \right\|_{L^2}^2 \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t \phi) \vec{\omega}_\varepsilon \cdot \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{\omega}_\varepsilon) \, dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(-\varepsilon \Delta^2 \vec{\omega}_\varepsilon + \nu \Delta \vec{\omega}_\varepsilon - \vec{\nabla} \wedge [(\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon] + \vec{\nabla} \wedge \vec{f} \right) \right] \phi \cdot \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{\omega}_\varepsilon(t,.)) \, dx
\end{aligned}$$

et on obtient alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} (\phi \vec{\omega}_\varepsilon) \right\|_{L^2}^2 \right) &= - \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t \phi) \vec{\omega}_\varepsilon \cdot \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{\omega}_\varepsilon) dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta^2 \vec{\omega}_\varepsilon) \phi \cdot \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{\omega}_\varepsilon) dx \\
&- \nu \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} (\Delta \vec{\omega}_\varepsilon) \phi \cdot \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{\omega}_\varepsilon) dx}_{(*)} + \int_{\mathbb{R}^3} [\vec{\nabla} \wedge (\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon] \phi \cdot \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{\omega}_\varepsilon) dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) \phi \cdot \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{\omega}_\varepsilon) dx.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Remarque 2 *La fonction ψ qu'on a introduit pour prouver que $\frac{1}{\Delta}(\phi \vec{\omega}_\varepsilon) \in L^2_x H^3_x$ n'apparaît pas dans les calculs. À cause du fait qu'elle vaut 1 sur le support de ϕ son impact dans l'expression (2.8) peut être négligé sans difficulté.*

Nous allons étudier chacun des termes précédents séparément et nous allons voir comment obtenir l'inégalité (2.4) pour le problème approché.

On commence par le terme $(*)$ ci-dessus, en utilisant l'identité suivante :

$$-(\Delta f)g = (\Delta g)f - \Delta(fg) + 2\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g, \tag{2.9}$$

on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
(*) &= -\nu \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta \vec{\omega}_\varepsilon)\phi \cdot \frac{1}{\Delta}(\phi \vec{\omega}_\varepsilon)\, dx \\
&= \nu \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} \left[(\Delta\phi)\omega_i \frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i) - \Delta(\omega_i\phi)\frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i) + 2(\vec{\nabla}\omega_i \cdot \vec{\nabla}\phi)\frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i) \right] dx \\
&= \underbrace{\nu \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta\phi)\omega_i \frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i)\, dx}_{(a)} - \underbrace{\nu \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta(\omega_i\phi)\frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i)\, dx}_{(b)} \\
&+ \underbrace{2\nu \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla}\omega_i \cdot \vec{\nabla}\phi)\frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i)\, dx}_{(c)}.
\end{aligned}$$

Une double intégration par parties dans le terme (b) nous donne

$$\begin{aligned}
(*) &= \nu \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta\phi)\omega_i \frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i)\, dx - \nu \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\omega_i\phi)(\phi\omega_i)\, dx \\
&+ 2\nu \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla}\omega_i \cdot \vec{\nabla}\phi)\frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i)\, dx \\
&= \nu \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta\phi)\omega_i \frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i)\, dx - \nu \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\omega}_\varepsilon|^2\phi^2\, dx + 2\nu \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla}\omega_i \cdot \vec{\nabla}\phi)\frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i)\, dx,
\end{aligned}$$

on note ici, que les fonctions ω_i introduites ci-dessus dépendent de ε et par un souci de clarté nous écrivons ω_i au lieu de $\omega_{i,\varepsilon}$. Ainsi en remplaçant l'expression de $(*)$ dans l'équation (2.8) on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon) \right\|_{L^2}^2 \right) &+ \nu \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\omega}_\varepsilon|^2\phi^2\, dx = -\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t\phi)\vec{\omega}_\varepsilon \cdot \frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon) dx \\
&+ \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta^2\vec{\omega}_\varepsilon)\phi \cdot \frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\, dx + \nu \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta\phi)\omega_i \frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i)\, dx \\
&+ 2\nu \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla}\omega_i \cdot \vec{\nabla}\phi)\frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i)\, dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} [\vec{\nabla} \wedge (\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon]\phi \cdot \frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon) dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla} \wedge \vec{f})\phi \cdot \left[\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon) \right] dx
\end{aligned}$$

et cette quantité se réécrit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right\|_{L^2}^2\right) &+ \nu\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\omega}_\varepsilon|^2\phi^2\,dx = -\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\omega}_\varepsilon\cdot\left[(\partial_t\phi)\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]\,dx\\ &+ \varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}(\Delta^2\vec{\omega}_\varepsilon)\cdot\left[\phi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]\,dx\\ &+ \nu\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\omega}_\varepsilon\cdot\left[(\Delta\phi)\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]\,dx\\ &+ 2\nu\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\omega_i\cdot\vec{\nabla}\phi)\frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i)\,dx\\ &+ \int_{\mathbb{R}^3}[\vec{\nabla}\wedge(\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon]\cdot\left[\phi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]\,dx\\ &- \int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{f})\cdot\left[\phi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]\,dx.\end{aligned}$$

Une identité à étudier

À partir de l'inégalité précédente et en utilisant le fait que $\vec{\omega}_\varepsilon = \vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon$, nous allons dégager une inégalité qui nous permettra d'obtenir le contrôle recherché par une étude de chacun de ses termes. Ainsi on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right\|_{L^2}^2\right) &+ \nu\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\omega}_\varepsilon|^2\phi^2\,dx = -\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon)\cdot\left[(\partial_t\phi)\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]\,dx\\ &+ \varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}(\Delta^2\vec{\omega}_\varepsilon)\cdot\left[\phi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]\,dx\\ &+ \nu\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon)\cdot\left[(\Delta\phi)\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]\,dx\\ &+ 2\nu\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\omega_i\cdot\vec{\nabla}\phi)\frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i)\,dx\\ &+ \int_{\mathbb{R}^3}\vec{\nabla}\wedge[(\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon]\cdot\left[\phi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]\,dx\\ &- \int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{f})\cdot\left[\phi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]\,dx,\end{aligned}$$

par une intégration par parties dans le premier, troisième, cinquième et sixième terme à droite de l'expression ci-dessus on écrit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right\|_{L^2}^2\right) &+ \nu\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\omega}_\varepsilon|^2\phi^2\,dx = -\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{\nabla}\wedge\left[(\partial_t\phi)\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]dx}_{(A)}\\ &+ \underbrace{\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}(\Delta^2\vec{\omega}_\varepsilon)\cdot\left[\phi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]dx}_{(B)}\\ &+ \underbrace{\nu\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{\nabla}\wedge\left[(\Delta\phi)\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]dx}_{(C)}\\ &+ \underbrace{2\nu\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\omega_i\cdot\vec{\nabla}\phi)\frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i)\,dx}_{(D)}\\ &+ \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}[(\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla}\wedge\left[\phi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]dx}_{(E)}\\ &- \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\vec{\nabla}\wedge\left[\phi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]dx}_{(F)}. \qquad (2.10)\end{aligned}$$

On remarque maintenant que les termes $(A),(C),(E),(F)$ possèdent tous une structure commune, en effet ils sont tous de la forme $\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{\nabla}\wedge\left[h\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]dx$ ou $\int_{\mathbb{R}^3}[(\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla}\wedge\left[\phi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]dx$, ou encore $\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\vec{\nabla}\wedge\left[\phi\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]dx$, où nous avons noté $h=\partial_t\phi$ ou $\Delta\phi$.

On va utiliser le lemme suivant qui nous permettra de faire une étude systématique de chacun de ces termes

Lemme 2 *Soit $h:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ un champ scalaire et $\vec{A}:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ un champ vecteur à divergence nulle alors on a les identités vectorielles suivantes :*

$$\vec{\nabla}\wedge(h\vec{A})=h\vec{\nabla}\wedge\vec{A}+(\vec{\nabla}h)\wedge\vec{A}.$$

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge(h\vec{A}))=-\Delta(h\vec{A})+\vec{\nabla}(div(h\vec{A}))=-\Delta(h\vec{A})+\vec{\nabla}(\vec{\nabla}h\cdot\vec{A}).$$

Ainsi, si on étudie l'expression générale $\vec{\nabla}\wedge\left[h\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right]$ on peut écrire

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\wedge\left[h\frac{1}{\Delta}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right] &= -h\left(\phi\vec{u}_\varepsilon\right)+h\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{u}_\varepsilon\right)+\vec{\nabla}h\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}\left(\phi\vec{u}_\varepsilon\right)\right)\\ &- h\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)-\vec{\nabla}h\wedge\frac{1}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\right). \qquad (2.11)\end{aligned}$$

Nous allons maintenant appliquer la décomposition (2.11) aux termes $(A), (C), (E), (F)$ et nous allons traiter chacun de ces termes de façon séparée. Les termes (B) et (D) seront traités ultérieurement.

Mais avant tout ceci nous aurons besoin du lemme technique suivant :

Lemme 3 *Soit B_r la boule de centre zéro et de rayon r, soit $\vec{u}_\varepsilon, \vec{v} \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^3(\mathbb{R}^3)$ et soit $h, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ deux fonctions à support compact dans la boule B_r. Alors :*

1) $\|h\frac{1}{\Delta}(g\vec{u}_\varepsilon)\|_{L^2(B_r)} \leq C\|h\|_{L^3(B_r)}\|g\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}.$

2) $\|h\frac{\vec{\nabla}}{\Delta}(\vec{v}\cdot\vec{u}_\varepsilon)\|_{L^2(B_r)} \leq C\|h\|_{L^\infty(B_r)}\|\vec{v}\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}.$

3) $\|h\frac{1}{\Delta}(g\vec{u}_\varepsilon)\|_{L^3(B_r)} \leq C\|h\|_{L^6(B_r)}\|g\|_{L^2(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}.$

4) $\|h\frac{\vec{\nabla}}{\Delta}(\vec{v}\cdot\vec{u}_\varepsilon)\|_{L^3(B_r)} \leq C\|h\|_{L^\infty(B_r)}\|\vec{v}\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}.$

Preuve :

1) En utilisant l'inégalité de Hölder on trouve

$$\left\|h\frac{1}{\Delta}(g\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^2(B_r)} \leq \|h\|_{L^3}\left\|\frac{1}{\Delta}(g\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^6(B_r)},$$

on applique les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev au deuxième terme à droite et on a

$$\left\|h\frac{1}{\Delta}(g\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^2(B_r)} \leq C\|h\|_{L^3(B_r)}\|(g\vec{u}_\varepsilon)\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_r)} \leq C\|h\|_{L^3(B_r)}\|g\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}.$$

2) De la même manière, on applique l'inégalité de Hölder :

$$\left\|h\frac{\vec{\nabla}}{\Delta}(\vec{v}\cdot\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^2(B_r)} \leq \|h\|_{L^\infty(B_r)}\left\|\frac{\vec{\nabla}}{\Delta}(\vec{v}\cdot\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^2(B_r)},$$

et en utilisant les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev au deuxième terme à droite on a :

$$\left\|h\frac{\vec{\nabla}}{\Delta}(\vec{v}\cdot\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^2(B_r)} \leq C\|h\|_{L^\infty(B_r)}\|\vec{v}\cdot\vec{u}_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_r)} \leq C\|h\|_{L^\infty}\|\vec{v}\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}.$$

3) On applique l'inégalité de Hölder :

$$\left\|h\frac{1}{\Delta}(g\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^3(B_r)} \leq \|h\|_{L^6(B_r)}\left\|\frac{1}{\Delta}(g\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^6(B_r)},$$

et par les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev on trouve :

$$\left\|h\frac{1}{\Delta}(g\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^3(B_r)} \leq C\|h\|_{L^6(B_r)}\|g\vec{u}_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_r)} \leq C\|h\|_{L^6(B_r)}\|g\|_{L^2(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}.$$

4) En utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\left\| h\frac{\vec{\nabla}}{\Delta}(\vec{v}\cdot\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^3(B_r)} \leq C\|h\|_{L^\infty}\left\|\frac{\vec{\nabla}}{\Delta}(\vec{v}\cdot\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^3(B_r)},$$

ensuite avec les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev on obtient :

$$\left\| h\frac{\vec{\nabla}}{\Delta}(\vec{v}\cdot\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^3} \leq C\|h\|_{L^\infty}\|\vec{v}\cdot\vec{u}_\varepsilon\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_r)} \leq C\|h\|_{L^\infty}\|\vec{v}\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}.$$

■

Une fois que ce lemme est démontré, nous allons appliquer la décomposition 2.11 et nous allons estimer chacun des termes $(A), (C), (E)$ et (F) donnés dans la formule (2.10) de la page 26.

Estimation du terme (A)

Rappelons que ce terme (A) est donné par

$$(A) = -\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{\nabla}\wedge\left[(\partial_t\phi)\frac{1}{\Delta}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx,$$

en appliquant l'identité (2.11) avec $h=\partial_t\phi$ on a :

$$\begin{aligned}(A) &= \int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\partial_t\phi)(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right]dx\\ &- \int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\partial_t\phi)\frac{\vec{\nabla}}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx - \int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\vec{\nabla}\partial_t\phi)\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right)\right]dx\\ &+ \int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\partial_t\phi)\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx\\ &+ \int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\vec{\nabla}\partial_t\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx. \qquad (2.12)\end{aligned}$$

Si on note par A_1 le premier terme ci-dessus on a

$$A_1 = \int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[\partial_t\phi(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right]dx,$$

et donc, on écrit :

$$|A_1| \leq \int_{\mathbb{R}^3}\left|\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\partial_t\phi)(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right]\right|dx,$$

et on applique l'inégalité de Hölder pour obtenir :

$$|A_1| \leq C\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}\|\partial_t\phi\|_{L^\infty(B_r)}\|\phi\|_{L^\infty(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \leq C_\phi\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Le terme deuxième terme de (A) donné dans (2.12) est défini par la quantité :

$$A_2 = \int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\partial_t\phi)\frac{\vec{\nabla}}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx,$$

et donc on a

$$|A_2| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\partial_t \phi) \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} \left(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{u}_\varepsilon \right) \right] \right| dx,$$

ainsi en appliquant l'inégalité de Hölder, il vient

$$|A_2| \leq C \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \left\| \left[(\partial_t \phi) \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} \left(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{u}_\varepsilon \right) \right] \right\|_{L^2(B_r)},$$

maintenant par le point 2) du Lemme 3 on obtient :

$$|A_2| \leq C \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \left(\|\partial_t \phi\|_{L^\infty(B_r)} \|\vec{\nabla}\phi\|_{L^3(B_r)} \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \right) \leq C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Passons au troisième terme de (2.12) que l'on notera A_3 et qui est donné par l'expression :

$$A_3 = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\vec{\nabla}\partial_t \phi) \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{u}_\varepsilon) \right) \right] dx.$$

On a :

$$|A_3| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\vec{\nabla}\partial_t \phi) \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{u}_\varepsilon) \right) \right] \right| dx,$$

et de la même manière, on applique l'inégalité de Hölder et on obtient :

$$|A_3| \leq \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \left\| (\vec{\nabla}\partial_t \phi) \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{u}_\varepsilon) \right) \right\|_{L^2(B_r)}$$

et par les propriétés du produit vectoriel on peut écrire

$$|A_3| \leq \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\vec{\nabla}(\partial_t \phi)\|_{L^\infty(B_r)} \left\| \vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{u}_\varepsilon) \right\|_{L^2(B_r)},$$

alors les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev et l'inégalité de Hölder nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} |A_3| &\leq \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\vec{\nabla}(\partial_t \phi)\|_{L^\infty(B_r)} \|\phi \vec{u}_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_r)} \\ &\leq C \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\vec{\nabla}(\partial_t \phi)\|_{L^\infty(B_r)} \|\phi\|_{L^3(B_r)} \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \leq C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)} \end{aligned}$$

Le quatrième terme de (2.12) que l'on notera A_4 est défini par

$$A_4 = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\partial_t \phi) \vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta} \left(\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon \right) \right] dx,$$

et on a :

$$|A_4| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\partial_t \phi) \vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta} \left(\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon \right) \right] \right| dx.$$

On applique l'inégalité de Hölder :

$$|A_4| \leq C \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \left\| (\partial_t \phi) \vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta} \left(\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon \right) \right\|_{L^2(B_r)}.$$

et par les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev on a

$$\begin{aligned} |A_4| &\leq C\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}\|\partial_t\phi\|_{L^\infty(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_r)} \\ &\leq C\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}\|\partial_t\phi\|_{L^\infty(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \\ &\leq C_\phi\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}. \end{aligned}$$

Finalement, le dernier terme de (2.12), noté A_5 est donné par

$$A_5 = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\vec{\nabla}\partial_t\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx,$$

et on écrit :

$$|A_5| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left|\vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\vec{\nabla}\partial_t\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]\right| dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on obtient

$$|A_5| \leq \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}\left\|(\vec{\nabla}\partial_t\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right\|_{L^2(B_r)},$$

et par les propriétés du produit vectoriel et les inégalités de Hölder on peut écrire

$$|A_5| \leq \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}\|\vec{\nabla}(\partial_t\phi)\|_{L^3(B_r)}\left\|\frac{1}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right\|_{L^6(B_r)},$$

puis par les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev on a

$$\begin{aligned} |A_5| &\leq C\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}\|\vec{\nabla}(\partial_t\phi)\|_{L^3(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_r)} \\ &\leq C\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}\|\vec{\nabla}(\partial_t\phi)\|_{L^3(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}, \end{aligned}$$

et donc

$$|A_5| \leq C_\phi\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Ainsi on a bien obtenu que :

$$|A| \leq |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| \leq C_\phi\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)},$$

et cette estimation termine l'étude du terme (A).

Estimation du terme (F)

En appliquant l'identité (2.11) au terme (F) donné dans la page 26 on obtient

$$\begin{aligned} (F) &= \int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\left[\phi(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right]dx - \int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\left[\phi\frac{\vec{\nabla}}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\left[(\vec{\nabla}\phi)\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right)\right]dx + \int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\left[\phi\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\left[(\vec{\nabla}\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx. \end{aligned} \tag{2.13}$$

On considère le premier terme de l'expression ci-dessus F_1 définit par

$$F_1 = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \left[\phi(\phi \vec{u}_\varepsilon) \right] dx,$$

et par dualité on a

$$|F_1| \leq C_\phi |\langle \vec{f}, \vec{u}_\varepsilon \rangle|_{H^{-1} \times H^1}.$$

Étudions maintenant le deuxième terme de (2.13) que l'on notera F_2

$$F_2 = - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \left[\phi \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} \left(\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{u}_\varepsilon \right) \right] dx,$$

par dualité on obtient

$$|F_2| \leq \|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)} \left\| \phi \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} \left(\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{u}_\varepsilon \right) \right\|_{H^1(B_r)},$$

et par définition des espaces de Sobolev nous avons

$$|F_2| \leq \|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)} \left[\underbrace{\left\| \phi \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} \left(\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{u}_\varepsilon \right) \right\|_{L^2(B_r)}}_{(1)} + \underbrace{\left\| \vec{\nabla} \otimes \left(\phi \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} \left(\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{u}_\varepsilon \right) \right) \right\|_{L^2(B_r)}}_{(2)} \right],$$

le terme (1) peut se contrôler en appliquant les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev par la quantité $\|\phi\|_{L^\infty(B_r)} \|\vec{\nabla}\phi\|_{L^3(B_r)} \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}$ tandis que le terme (2) peut se contrôler par

$$\begin{aligned} \left\| \vec{\nabla} \otimes \left(\phi \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} \left(\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{u}_\varepsilon \right) \right) \right\|_{L^2(B_r)} &\leq \|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\infty(B_r)} \left\| \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{u}_\varepsilon) \right\|_{L^2(B_r)} \\ &+ \|\phi\|_{L^\infty(B_r)} \left\| \vec{\nabla} \otimes \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{u}_\varepsilon) \right\|_{L^2(B_r)}, \end{aligned}$$

et on peut alors écrire

$$\begin{aligned} |F_2| &\leq \|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)} \left[\|\phi\|_{L^\infty(B_r)} \|\vec{\nabla}\phi\|_{L^3(B_r)} \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} + \|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\infty(B_r)} \left\| \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{u}_\varepsilon) \right\|_{L^2(B_r)} \right. \\ &+ \left. \|\phi\|_{L^\infty(B_r)} \left\| \vec{\nabla} \otimes \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{u}_\varepsilon) \right\|_{L^2(B_r)} \right], \end{aligned}$$

et on a alors , en utilisant l'inégalité de Hölder et les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev

$$|F_2| \leq C_\phi \|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)} \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} + C_\phi \|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)} \|\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{u}_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_r)} + C_\phi \|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)} \|\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)},$$

ainsi,

$$|F_2| \leq C_\phi \|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)} \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}.$$

Pour le troisième terme de (2.13) que l'on désigne par F_3, on écrit

$$F_3 = -\int_{\mathbb{R}^3} \vec{f}\cdot\left[(\vec{\nabla}\phi)\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right)\right]dx,$$

$$\begin{aligned}
|F_3| &\leq C\|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)}\left\|(\vec{\nabla}\phi)\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right)\right\|_{H^1(B_r)}\\
&= C\|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)}\Bigg[\underbrace{\left\|(\vec{\nabla}\phi)\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right)\right\|_{L^2(B_r)}}_{(3)}\\
&+ \underbrace{\left\|\vec{\nabla}\otimes\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right)\right)\right\|_{L^2(B_r)}}_{(4)}\Bigg].
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés du produit vectoriel ainsi que les inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev pour les termes (3) et (4) ci-dessus on a :

$$\begin{aligned}
|F_3| \leq \|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)} \quad \Bigg[\quad & \|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\infty(B_r)}\|\phi\vec{u}_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_r)} + \|\Delta\phi\|_{L^\infty(B_r)}\|\phi\vec{u}_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_r)}\\
+ \quad & \|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\infty(B_r)}\|\phi\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}\Bigg],
\end{aligned}$$

donc,

$$|F_3| \leq C_\phi\|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}.$$

Pour le quatrième terme de (2.13) que l'on note F_4 on écrit

$$F_4 = \int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\left[\phi\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx,$$

$$|F_4| \leq C\|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)}\left\|\phi\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right\|_{H^1(B_r)},$$

et avec la définition de l'espace de Sobolev H^1, il vient :

$$\begin{aligned}
|F_4| \leq \|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)} \quad \Bigg[\quad & \left\|\phi\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right\|_{L^2(B_r)}\\
+ \quad & \left\|\vec{\nabla}\otimes\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right)\right\|_{L^2(B_r)}\Bigg]
\end{aligned}$$

en raisonnant de la même façon que dans l'étude du terme F_3 réalisé ci-dessus on obtient :

$$|F_4| \leq C_\phi\|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}.$$

Étudions le dernier terme de (2.13) que l'on note F_5

$$F_5 = \int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\left[(\vec{\nabla}\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx,$$

on écrit alors

$$\begin{aligned}|F_5| &= C\|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)}\Big[\underbrace{\left\|(\vec{\nabla}\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right\|_{L^2(B_r)}}_{(5)}\\ &+ \underbrace{\left\|\vec{\nabla}\otimes\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right)\right\|_{L^2(B_r)}}_{(6)}\Big],\end{aligned}$$

pour le terme (5) ci-dessus on peut écrire

$$\left\|\vec{\nabla}\phi\wedge\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^2(B_r)}\leq\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\infty(B_r)}\left\|\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^2(B_r)},$$

et par les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev on obtient

$$\left\|\vec{\nabla}\phi\wedge\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^2(B_r)} \leq C\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\infty(B_r)}\left\|\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\right\|_{L^6(B_r)}\leq C_\phi\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}$$

Pour le terme (6) on a

$$\begin{aligned}\left\|\vec{\nabla}\otimes\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right)\right\|_{L^2(B_r)} &\leq C\|\Delta\phi\|_{L^\infty(B_r)}\left\|\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^2(B_r)}\\ &+ \|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\infty(B_r)}\left\|\vec{\nabla}\otimes\left(\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon)\right)\right\|_{L^2(B_r)},\end{aligned}$$

et par les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev et l'inégalité de Hölder on a bien

$$\left\|\vec{\nabla}\otimes\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right)\right\|_{L^2(B_r)}\leq C_\phi\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)},$$

et donc il vient

$$|F_5|\leq C_\phi\|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}.$$

Ainsi on a démontré

$$|F|\leq|F_1|+|F_2|+|F_3|+|F_4|+|F_5|\leq C_\phi|\langle\vec{f},\vec{u}\rangle|_{H^{-1}\times H^1}+C_\phi\|\vec{f}\|_{H^{-1}(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)},$$

et finalement par l'inégalité de Young on trouve :

$$|F|\leq C_\phi|\langle\vec{f},\vec{u}\rangle|_{H^{-1}\times H^1}+C_\phi(\|\vec{f}\|^2_{H^{-1}(B_r)}+\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}).$$

Estimation du terme (C)

De la même manière, en appliquant l'identité (2.11) au terme (C) donné dans la page 26 on obtient

$$\begin{aligned}(C) &= -\nu\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\Delta\phi)(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right]dx+\nu\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\Delta\phi)\frac{\vec{\nabla}}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx\\ &+ \nu\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\vec{\nabla}\Delta\phi)\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right)\right]dx-\nu\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\Delta\phi)\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx\\ &- \nu\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\vec{\nabla}\Delta\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx.\end{aligned}\tag{2.14}$$

On écrit pour commencer, ce qui correspond au premier terme de (2.14)

$$C_1 = -\nu \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\Delta\phi)(\phi \vec{u}_\varepsilon) \right] dx,$$

et on a :

$$|C_1| \leq \nu \int_{\mathbb{R}^3} \left| \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\Delta\phi)(\phi \vec{u}_\varepsilon) \right] \right| dx,$$

ainsi de la même manière que précédemment, on applique l'inégalité de Hölder et on obtient

$$|C_1| \leq \nu \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\Delta\phi\|_{L^\infty(B_r)} \|\phi\|_{L^\infty(B_r)} \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \leq \nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Le deuxième terme de (2.14) que l'on note C_2 est donné par

$$C_2 = \nu \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\Delta\phi) \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} \left(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{u}_\varepsilon \right) \right] dx,$$

et on écrit

$$|C_2| \leq \nu \int_{\mathbb{R}^3} \left| \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\Delta\phi) \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} \left(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{u}_\varepsilon \right) \right] \right| dx \leq \nu C \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \left\| \left[(\Delta\phi) \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} \left(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{u}_\varepsilon \right) \right] \right\|_{L^2(B_r)},$$

en utilisant le point 2) du Lemme 3 page 27 on trouve :

$$|C_2| \leq \nu C \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \left(\|\Delta\phi\|_{L^\infty(B_r)} \|\vec{\nabla}\phi\|_{L^3(B_r)} \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \right) \leq \nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Le troisième terme de l'expression (2.14) est donné par

$$C_3 = \nu \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\vec{\nabla}\Delta\phi) \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{u}_\varepsilon) \right) \right] dx$$

et on écrit

$$\begin{aligned} |C_3| &\leq \nu \int_{\mathbb{R}^3} \left| \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\vec{\nabla}\Delta\phi) \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{u}_\varepsilon) \right) \right] \right| dx \\ &\leq \nu \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \left\| (\vec{\nabla}\Delta\phi) \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{u}_\varepsilon) \right) \right\|_{L^2(B_r)}, \end{aligned}$$

ainsi, par les propriétés du produit vectoriel et en appliquant les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev et l'inégalité de Hölder on a

$$|C_3| \leq \nu C \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \left(\|\vec{\nabla}\Delta\phi\|_{L^\infty(B_r)} \|\phi\|_{L^3(B_r)} \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \right) \leq \nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Pour le quatrième terme de (2.14) on a

$$C_4 = -\nu \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\Delta\phi) \vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta} \left((\vec{\nabla}\phi) \wedge \vec{u}_\varepsilon \right) \right] dx,$$

et donc

$$|C_4| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\Delta\phi) \vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta} \left((\vec{\nabla}\phi) \wedge \vec{u}_\varepsilon \right) \right] \right| dx,$$

en appliquant l'inégalité de Hölder il vient

$$|C_4| \leq \nu \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \left\| (\Delta\phi)\vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi) \wedge \vec{u}_\varepsilon\right)\right\|_{L^2(B_r)},$$

et en utilisant l'inégalité de Hölder ainsi que les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev on obtient :

$$|C_4| \leq \nu C \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \left(\|\Delta\phi\|_{L^\infty(B_r)} \|\vec{\nabla}\phi\|_{L^3(B_r)} \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}\right) \leq \nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Finalement, le dernier terme de (2.14) est

$$C_5 = -\nu \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\vec{\nabla}\Delta\phi) \wedge \frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi) \wedge \vec{u}_\varepsilon\right)\right] dx,$$

on a :

$$\begin{aligned} |C_5| &\leq \nu \int_{\mathbb{R}^3} \left| \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\vec{\nabla}\Delta\phi) \wedge \frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi) \wedge \vec{u}_\varepsilon\right)\right]\right| dx \\ &\leq \nu \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \left\| (\vec{\nabla}\Delta\phi) \wedge \frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi) \wedge \vec{u}_\varepsilon\right)\right\|_{L^2(B_r)}, \end{aligned}$$

Par les propriétés du produit vectoriel et en appliquant les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev on obtient

$$|C_5| \leq \nu C \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \left(\|\vec{\nabla}\Delta\phi\|_{L^3(B_r)} \|\vec{\nabla}\phi\|_{L^3(B_r)} \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}\right) \leq \nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Donc, en sommant tous les termes de (C) on trouve :

$$|C| \leq |C_1| + |C_2| + |C_3| + |C_4| + |C_5| \leq \nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

et cette estimation termine l'étude du terme (C).

Estimation du terme (D)

L'expression de (D) est donnée par

$$(D) = 2\nu \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla}\omega_i \cdot \vec{\nabla}\phi) \frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i)\, dx,$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme suivante

$$(D) = 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_j\vec{\omega}_\varepsilon)(\partial_j\phi) \frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\, dx, \tag{2.15}$$

on utilisera la deuxième expression pour que les calculs soient compréhensibles. Rappelons que $\vec{\omega}_\varepsilon = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}_\varepsilon$, il vient

$$\begin{aligned} (D) &= 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_j(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_\varepsilon)(\partial_j\phi) \frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_\varepsilon)\, dx \\ &= -2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \partial_j\vec{\nabla} \wedge \left[(\partial_j\phi) \frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_\varepsilon)\right] dx \\ &= -2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \vec{\nabla} \wedge \left[(\partial_j^2\phi) \frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_\varepsilon) + (\partial_j\phi) \frac{\partial_j}{\Delta}(\phi\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_\varepsilon)\right] dx, \end{aligned}$$

en appliquant l'identité vectoriel $\vec{\nabla}\wedge(A\vec{B})=\vec{\nabla}A\wedge\vec{B}+A\vec{\nabla}\wedge\vec{B}$ on trouve

$$\begin{aligned}(D) &= -2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[\vec{\nabla}(\partial_j^2\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon)+(\partial_j^2\phi)\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon)\\ &+ \vec{\nabla}(\partial_j\phi)\wedge\frac{\partial_j}{\Delta}(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon)+(\partial_j\phi)\vec{\nabla}\wedge\frac{\partial_j}{\Delta}(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon)\Big]\,dx.\end{aligned}$$

Ainsi le terme (D) s'écrit comme

$$\begin{aligned}(D) &= \underbrace{-2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[\vec{\nabla}(\partial_j^2\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon)\Big]\,dx}_{(D_1)}\\ &- \underbrace{2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[(\partial_j^2\phi)\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon)\Big]\,dx}_{(D_2)}\\ &- \underbrace{2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[\vec{\nabla}(\partial_j\phi)\wedge\frac{\partial_j}{\Delta}(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon)\Big]\,dx}_{(D_3)}\\ &- \underbrace{2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[(\partial_j\phi)\vec{\nabla}\wedge\frac{\partial_j}{\Delta}(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon)\Big]\,dx}_{(D_4)}\end{aligned}$$

Estimation du terme (D_1)

on a

$$(D_1)=-2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[\vec{\nabla}(\partial_j^2\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon)\Big]\,dx,$$

sachant que $\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon=\vec{\nabla}\wedge(\phi\vec{u}_\varepsilon)-\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon$, le terme (D_1) se réécrit comme

$$\begin{aligned}(D_1) &= -2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[\vec{\nabla}(\partial_j^2\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\wedge(\phi\vec{u}_\varepsilon)-\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon)\Big]\,dx\\ &= \underbrace{-2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[\vec{\nabla}(\partial_j^2\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\wedge(\phi\vec{u}_\varepsilon))\Big]\,dx}_{(D_{1,1})}\\ &+ \underbrace{2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[\vec{\nabla}(\partial_j^2\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon)\Big]\,dx}_{(D_{1,2})}.\end{aligned}$$

On écrit

$$|D_{1,1}|\le 2\nu\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\Big|\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[\vec{\nabla}(\partial_j^2\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\wedge(\phi\vec{u}_\varepsilon))\Big]\Big|\,dx,$$

par les propriétés du produit vectoriel ainsi que par l'inégalité de Hölder on a

$$|D_{1,1}| \leq 2\nu \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\vec{\nabla}(\Delta\phi)\|_{L^\infty(B_r)} \left\| \frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla} \wedge (\phi\vec{u}_\varepsilon)) \right\|_{L^2(B_r)}$$

en appliquant les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev on obtient

$$|D_{1,1}| \leq 2\nu \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\vec{\nabla}(\Delta\phi)\|_{L^\infty(B_r)} \|\phi\vec{u}_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_r)} \leq 2\nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Pour le terme $(D_{1,2})$ on écrit

$$|D_{1,2}| \leq 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \vec{u}_\varepsilon \left[\vec{\nabla}(\partial_j^2\phi) \wedge \frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon) \right] \right| dx,$$

de la même manière, par les propriétés du produit vectoriel ainsi que par l'inégalité de Hölder on trouve

$$|D_{1,2}| \leq \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\vec{\nabla}(\Delta\phi)\|_{L^3(B_r)} \left\| \frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon) \right\|_{L^6(B_r)},$$

en appliquant les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev on obtient

$$|D_{1,2}| \leq 2\nu \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\vec{\nabla}(\Delta\phi)\|_{L^3(B_r)} \|\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_r)} \leq 2\nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Ainsi, $|D_1| \leq |D_{1,1}| + |D_{1,2}| \leq 2\nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}$.

Estimation du terme (D_2)

Rappelons d'abord son expression donnée par

$$\begin{aligned}
(D_2) &= -2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\partial_j^2\phi)\vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_\varepsilon) \right] dx \\
&= \underbrace{-2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\partial_j^2\phi)\vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla} \wedge (\phi\vec{u}_\varepsilon)) \right] dx}_{(D_{2,1})} \\
&+ \underbrace{2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\partial_j^2\phi)\vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon) \right] dx}_{(D_{2,2})},
\end{aligned}$$

et on écrit

$$|D_{2,1}| \leq 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\partial_j^2\phi)\vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla} \wedge (\phi\vec{u}_\varepsilon)) \right] \right| dx,$$

par l'inégalité de Hölder on trouve

$$|D_{2,1}| \leq 2\nu \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\Delta\phi\|_{L^\infty(B_r)} \|\phi\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \leq 2\nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Pour le terme $(D_{2,2})$ on a

$$(D_{2,2}) = 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\partial_j^2\phi)\vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon) \right] dx,$$

et on écrit

$$|D_{2,2}| \leq 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\partial_j^2 \phi) \vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta} (\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon) \right] \right| dx,$$

par l'inégalité de Hölder on obtient

$$|D_{2,2}| \leq 2\nu \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\Delta\phi\|_{L^\infty(B_r)} \left\| \vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\Delta} (\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon) \right\|_{L^2(B_r)},$$

en appliquant les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev il vient

$$|D_{2,2}| \leq 2\nu \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\Delta\phi\|_{L^\infty(B_r)} \|\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_r)} \leq 2\nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Ainsi $|D_2| \leq |D_{2,1}| + |D_{2,2}| \leq 2\nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}$.

Estimation du terme (D_3)

Son expression est donnée par

$$\begin{aligned}
(D_3) &= -2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[\vec{\nabla}(\partial_j \phi) \wedge \frac{\partial_j}{\Delta} (\phi \vec{\nabla} \wedge \vec{u}_\varepsilon) \right] dx \\
&= \underbrace{-2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[\vec{\nabla}(\partial_j \phi) \wedge \frac{\partial_j}{\Delta} (\vec{\nabla} \wedge (\phi \vec{u}_\varepsilon)) \right] dx}_{(D_{3,1})} \\
&+ \underbrace{2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[\vec{\nabla}(\partial_j \phi) \wedge \frac{\partial_j}{\Delta} (\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon) \right] dx}_{(D_{3,2})}.
\end{aligned}$$

On a

$$(D_{3,1}) = -2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[\vec{\nabla}(\partial_j \phi) \wedge \frac{\partial_j}{\Delta} (\vec{\nabla} \wedge (\phi \vec{u}_\varepsilon)) \right] dx,$$

et on écrit

$$|D_{3,1}| \leq 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[\vec{\nabla}(\partial_j \phi) \wedge \frac{\partial_j}{\Delta} (\vec{\nabla} \wedge (\phi \vec{u}_\varepsilon)) \right] \right| dx$$

par l'inégalité de Hölder on trouve

$$|D_{3,1}| \leq 2\nu \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\Delta\phi\|_{L^\infty(B_r)} \|\phi \vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \leq 2\nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Pour le terme $(D_{3,2})$ on a

$$(D_{3,2}) = 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \left[\vec{\nabla}(\partial_j \phi) \wedge \frac{\partial_j}{\Delta} (\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon) \right] dx,$$

et on écrit

$$|D_{3,2}| \leq 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \vec{u}_\varepsilon \left[\vec{\nabla}(\partial_j \phi) \wedge \frac{\partial_j}{\Delta} (\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon) \right] \right| dx,$$

par les propriétés du produit vectoriel ainsi que l'inégalité de Hölder on trouve

$$|D_{3,2}| \leq 2\nu \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\Delta\phi\|_{L^\infty(B_r)} \sum_{j=1}^{3} \left\| \frac{\partial_j}{\Delta}(\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon) \right\|_{L^2(B_r)},$$

en appliquant les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev il vient

$$|D_{3,2}| \leq 2\nu \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\Delta\phi\|_{L^\infty(B_r)} \|\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_r)} \leq 2\nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Donc on a $|D_3| \leq |D_{3,1}| + |D_{3,2}| \leq 2\nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}$.

Estimation du terme D_4

Rappelons d'abord son expression,

$$\begin{aligned}
(D_4) &= -2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\partial_j\phi)\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial_j}{\Delta}(\phi\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_\varepsilon) \right] dx \\
&= \underbrace{-2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\partial_j\phi)\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial_j}{\Delta}(\vec{\nabla} \wedge (\phi\vec{u}_\varepsilon)) \right] dx}_{(D_{4,1})} \\
&+ \underbrace{2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\partial_j\phi)\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial_j}{\Delta}(\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon)) \right] dx}_{(D_{4,2})}.
\end{aligned}$$

On écrit

$$\begin{aligned}
(D_{4,1}) &= -2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\partial_j\phi)\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial_j}{\Delta}(\vec{\nabla} \wedge (\phi\vec{u}_\varepsilon)) \right] dx \\
&= -2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} [\vec{u}_\varepsilon(\partial_j\phi)]\partial_j[\phi\vec{u}_\varepsilon]\, dx = 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_j[\vec{u}_\varepsilon(\partial_j\phi)]\phi\vec{u}_\varepsilon\, dx \\
&= 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_j\vec{u}_\varepsilon(\partial_j\phi)\phi\vec{u}_\varepsilon\, dx + 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_j^2\phi)\vec{u}_\varepsilon^2\phi\, dx
\end{aligned}$$

comme $\partial_j\vec{u}_\varepsilon\vec{u}_\varepsilon = \frac{1}{2}\partial_j(\vec{u}_\varepsilon)^2$, on trouve

$$(D_{4,1}) = -\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon^2 \partial_j(\partial_j\phi\phi)\, dx + 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_j^2\phi)\vec{u}_\varepsilon^2\phi\, dx.$$

On écrit

$$|D_{4,1}| \leq 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \vec{u}_\varepsilon^2 \partial_j(\partial_j\phi\phi) \right| dx + 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| (\partial_j^2\phi)\vec{u}_\varepsilon^2\phi \right| dx,$$

par l'inégalité de Hölder on obtient

$$|D_{4,1}| \leq 2\nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Pour le terme $(D_{4,2})$ on a

$$(D_{4,2}) = 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\partial_j \phi) \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial_j}{\Delta} (\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon) \right] dx,$$

et on écrit

$$|D_{4,2}| \leq 2\nu \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\partial_j \phi) \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial_j}{\Delta} (\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon) \right] \right| dx$$

par l'inégalité de Hölder on trouve

$$|D_{4,2}| \leq \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\vec{\nabla}(\Delta\phi)\|_{L^3(B_r)} \left\| \vec{\nabla}\phi \wedge \vec{u}_\varepsilon \right\|_{L^6(B_r)} \leq 2\nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Ainsi $|D_4| \leq |D_{4,1}| + |D_{4,2}| \leq 2\nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}$.

Et avec cette dernière estimation on a bien démontré que

$$|D| = |D_1| + |D_2| + |D_3| + |D_4| \leq 2\nu C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)}.$$

Estimation du terme (E)

On rappelle l'expression de la quantité (E) qui a été donnée dans la page 26 :

$$E = \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla} \wedge \left[\phi \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{\nabla} \wedge \vec{u}_\varepsilon) \right] dx,$$

on écrit en faisant une intégration par parties et en utilisant le fait que $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$:

$$\begin{aligned}
(E) &= \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} u_i \partial_i \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla} \wedge \left[\phi \frac{1}{\Delta} \left(\phi \vec{\nabla} \wedge \vec{u}_\varepsilon \right) \right] dx \\
&= -\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} u_i \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla} \wedge \left[\partial_i \left(\phi \frac{1}{\Delta} \left(\phi \vec{\nabla} \wedge \vec{u}_\varepsilon \right) \right) \right] dx \\
&= \underbrace{-\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} u_i \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla} \wedge \left[\partial_i \phi \frac{1}{\Delta} \left(\phi \vec{\nabla} \wedge \vec{u}_\varepsilon \right) \right] dx}_{(E_1)} \\
&- \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} u_i \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla} \wedge \left[\phi \frac{\partial_i}{\Delta} \left(\phi \vec{\nabla} \wedge \vec{u}_\varepsilon \right) \right] dx}_{(E_2)}.
\end{aligned}$$

Nous allons d'abord étudier (E_1) pour ensuite traiter le terme (E_2).

Pour le terme (E_1), en utilisant l'identité (2.11) on obtient :

$$\begin{aligned}(E_1) &= \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[(\partial_i\phi)(\phi\vec{u}_\varepsilon)\Big]dx-\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[(\partial_i\phi)\frac{\vec{\nabla}}{\Delta}\Big(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{u}_\varepsilon\Big)\Big]dx\\ &- \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[(\vec{\nabla}\partial_i\phi)\wedge\Big(\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}\phi\vec{u}_\varepsilon\Big)\Big]dx\\ &+ \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[(\partial_i\phi)\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}\Big((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\Big)\Big]dx\\ &+ \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[(\vec{\nabla}\partial_i\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}\Big((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\Big)\Big]dx. \qquad (2.16)\end{aligned}$$

On pose

$$E_{1,1}=\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[(\partial_i\phi)(\phi\vec{u}_\varepsilon)\Big]dx,$$

on a :

$$|E_{1,1}|\leq\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\Big|u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[(\partial_i\phi)(\phi\vec{u}_\varepsilon)\Big]\Big|dx,$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder on obtient directement

$$|E_{1,1}|\leq C\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\infty(B_r)}\|\phi\|_{L^\infty(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\leq C_\phi\|\vec{u}_\varepsilon\|^3_{L^3(B_r)}.$$

Le deuxième terme de (2.16) que l'on note $E_{1,2}$ est donné par

$$E_{1,2}=\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[(\partial_i\phi)\frac{\vec{\nabla}}{\Delta}\Big(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{u}_\varepsilon\Big)\Big]dx,$$

et on écrit :

$$|E_{1,2}|\leq\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\Big|u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[(\partial_i\phi)\frac{\vec{\nabla}}{\Delta}\Big(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{u}_\varepsilon\Big)\Big]\Big|dx,$$

donc en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$|E_{1,2}|\leq C\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\left\|\vec{\nabla}\phi\cdot\frac{\vec{\nabla}}{\Delta}\Big(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{u}_\varepsilon\Big)\right\|_{L^3(B_r)},$$

alors en appliquant les inégalités de de Hardy-Littlewood-Sobolev ainsi que l'inégalité de Hölder on obtient :

$$|E_{1,2}|\leq C\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\Big(\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\infty(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\Big)\leq C_\phi\|\vec{u}_\varepsilon\|^3_{L^3(B_r)}.$$

Passons maintenant au troisième terme de (2.16) qu'on notera $E_{1,3}$

$$E_{1,3}=-\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[(\vec{\nabla}\partial_i\phi)\wedge\Big(\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}\phi\vec{u}_\varepsilon\Big)\Big]dx,$$

on a alors

$$|E_{1,3}|\leq\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\Big|u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[(\vec{\nabla}\partial_i\phi)\wedge\Big(\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}\phi\vec{u}_\varepsilon\Big)\Big]\Big|dx,$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder et les inégalité des Hardy-Littlewood-Sobolev on obtient :

$$\begin{aligned}
|E_{1,3}| &\leq \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\sum_{i=1}^{3}\left\|\vec{\nabla}(\partial_i\phi)\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right)\right\|_{L^3(B_r)}\\
&\leq \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\Delta\phi\|_{L^\infty(B_r)}\left\|\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L^3(B_r)}\\
&\leq \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\Delta\phi\|_{L^\infty(B_r)}\|\phi\vec{u}_\varepsilon\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_r)}\\
&\leq C_\phi\|\vec{u}_\varepsilon\|^3_{L^3(B_r)}.
\end{aligned}$$

Le quatrième terme de (2.16), est donné par

$$E_{1,4}=\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\partial_i\phi)\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx,$$

et on écrit

$$|E_{1,4}| \leq \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left|u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\partial_i\phi)\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]\right|dx,$$

en appliquant l'inégalité de Hölder on :

$$|E_{1,4}|\leq C\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^6(B_r)}\left\|\vec{\nabla}\wedge\frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right\|_{L^6(B_r)},$$

et par les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev on a

$$\begin{aligned}
|E_{1,4}| &\leq C\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^6(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}\\
&\leq C\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^3(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^6(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^6(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\leq C_\phi\|\vec{u}_\varepsilon\|^3_{L^3(B_r)}
\end{aligned}$$

Finalement, le dernier terme de (E_1) :

$$E_{1,5}=\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\vec{\nabla}\partial_i\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx,$$

et on a :

$$|E_{1,5}|\leq\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left|u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\vec{\nabla}\partial_i\phi)\wedge\frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]\right|dx,$$

de la même manière, par les propriétés du produit vectoriel et en appliquant l'inégalité de Hölder :

$$|E_{1,5}|\leq C\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\left\|(\Delta\phi)\frac{1}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right\|_{L^3(B_r)},$$

en appliquant les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev et l'inégalité de Hölder

$$|E_{1,5}|\leq C\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\left(\|\Delta\phi\|_{L^6(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^2(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\right)\leq C_\phi\|\vec{u}_\varepsilon\|^3_{L^3(B_r)}.$$

Ainsi après avoir regroupé tous les termes de (E_1) on obtient

$$|E_1|\leq C_\phi\|\vec{u}_\varepsilon\|^3_{L^3(B_r)}.$$

On passe maintenant à l'estimation du terme (E_2) donnée dans la page 40. En appliquant l'identité (2.11) à ce dernier on obtient

$$\begin{aligned}
(E_2) &= -\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[\vec{\nabla}\wedge\left[\phi\frac{\partial_i}{\Delta}(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\varepsilon)\right]\right]dx = \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[\phi\partial_i(\phi\vec{u}_\varepsilon)\Big]dx\\
&- \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\left[\phi\vec{\nabla}\left(\frac{\partial_i}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{u}_\varepsilon\right)\right)\right]dx\\
&- \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\vec{\nabla}\phi)\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\frac{\partial_i}{\Delta}(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right)\right]dx\\
&+ \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[\phi\vec{\nabla}\wedge\frac{\partial_i}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx \qquad (2.17)\\
&+ \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[(\vec{\nabla}\phi)\wedge\frac{\partial_i}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx.
\end{aligned}$$

Commençons par le premier terme de l'expression ci-dessus, qu'on notera $E_{2,1}$

$$E_{2,1} = \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\Big[\phi\partial_i(\phi\vec{u}_\varepsilon)\Big]dx,$$

et on fait une intégration par parties pour obtenir :

$$E_{2,1} = \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_i(u_i\vec{u}_\varepsilon\phi)\cdot(\phi\vec{u}_\varepsilon)dx = \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_i u_i(\vec{u}_\varepsilon\phi\cdot\vec{u}_\varepsilon\phi)dx + \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\partial_i(\phi\vec{u}_\varepsilon)\cdot(\phi\vec{u}_\varepsilon)dx,$$

et on a

$$E_{2,1} = \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\phi\partial_i(\phi\vec{u}_\varepsilon)dx = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_i u_i(\vec{u}_\varepsilon\phi\cdot\vec{u}_\varepsilon\phi)dx,$$

mais puisque $\operatorname{div}(\vec{u}_\varepsilon) = 0$ nous avons

$$E_{2,1} = 0.$$

Le deuxième terme de (2.17) est donné par :

$$E_{2,2} = -\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[\phi\vec{\nabla}\left(\frac{\partial_i}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{u}_\varepsilon\right)\right)\right]dx,$$

et on écrit :

$$|E_{2,2}| \le \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left|u_i\vec{u}_\varepsilon\cdot\left[\phi\vec{\nabla}\left(\frac{\partial_i}{\Delta}\left(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{u}_\varepsilon\right)\right)\right]\right|dx,$$

en appliquant l'inégalité de Hölder il vient

$$\begin{aligned}
|E_{2,2}| &\le \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\phi\|_{L^\infty(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\\
&\le C\|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^3(B_r)}\|\phi\|_{L^\infty(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\infty(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\\
&\le C_\phi\|\vec{u}_\varepsilon\|^3_{L^3(B_r)}.
\end{aligned}$$

Le troisième terme de l'expression (2.17) qu'on notera $E_{2,3}$ est le suivant

$$E_{2,3} = -\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\vec{\nabla}\phi)\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\frac{\partial_i}{\Delta}(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right)\right]dx,$$

on écrit

$$|E_{2,3}| \leq \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left|u_i\vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\vec{\nabla}\phi)\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\frac{\partial_i}{\Delta}(\phi\vec{u}_\varepsilon)\right)\right]\right|dx,$$

en utilisant les propriétés du produit vectoriel et l'inégalité de Hölder :

$$|E_{2,3}| \leq \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\infty(B_r)}\,\|\phi\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)},$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder une deuxième fois on obtient

$$|E_{2,3}| \leq C_\phi\|\vec{u}_\varepsilon\|^3_{L^3(B_r)}.$$

Le quatrième terme de (2.17), $E_{2,4}$ est donné par

$$E_{2,4} = \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon \cdot \left[\phi\vec{\nabla}\wedge\frac{\partial_i}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx,$$

et on a :

$$|E_{2,4}| \leq \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left|u_i\vec{u}_\varepsilon \cdot \left[\phi\vec{\nabla}\wedge\frac{\partial_i}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]\right|dx,$$

en appliquant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}|E_{2,4}| &\leq \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\phi\|_{L^\infty(B_r)}\left\|\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\right\|_{L^3(B_r)}\\ &\leq C_\phi\|\vec{u}_\varepsilon\|^3_{L^3(B_r)}.\end{aligned}$$

Finalement, le dernier terme de l'expression (2.17), $E_{2,5}$ définit par

$$E_{2,5} = \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_i\vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\vec{\nabla}\phi)\wedge\frac{\partial_i}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]dx,$$

et on écrit

$$|E_{2,5}| \leq \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left|u_i\vec{u}_\varepsilon \cdot \left[(\vec{\nabla}\phi)\wedge\frac{\partial_i}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right]\right|dx,$$

par les propriétés du produit vectoriel et par l'inégalité de Hölder on obtient :

$$|E_{2,5}| \leq \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\infty(B_r)}\sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial_i}{\Delta}\left((\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{u}_\varepsilon\right)\right\|_{L^3(B_r)},$$

en appliquant les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev on trouve

$$\begin{aligned}|E_{2,5}| &\leq C\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\infty(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{u}_\varepsilon\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_r)}\\ &\leq \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\infty(B_r)}\left(\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^3(B_r)}\|\vec{u}_\varepsilon\|_{L^3(B_r)}\right) \leq C_\phi\|\vec{u}_\varepsilon\|^3_{L^3(B_r)}.\end{aligned}$$

Ainsi en sommant tous les termes de (E_2) on obtient

$$|E_2| \leq C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^3_{L^3(B_r)},$$

et comme $|E| \leq |E_1| + |E_2|$ on a bien

$$|E| \leq C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^3_{L^3(B_r)}.$$

À ce stade on a estimé les termes $(A), (C), (D), (E), (F)$ donnés dans par les formules (2.12), (2.14), (2.15), (2.16), (2.13) respectivement mais il nous reste à étudier le terme (B) issu du terme d'hyperviscosité $\varepsilon\Delta^2$.

Estimation du terme (B)

On revient au terme (B), on rappelle que son expression donnée dans (2.10) est la suivante

$$(B) = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta^2 \vec{\omega}_\varepsilon) \cdot \left[\phi \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{\omega}_\varepsilon) \right] dx.$$

En faisant deux intégrations par parties on trouve :

$$(B) = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta \vec{\omega}_\varepsilon) \cdot \Delta \left[\phi \frac{1}{\Delta} (\phi \vec{\omega}_\varepsilon) \right] dx,$$

et on écrit alors en utilisant la formule (2.9)

$$\begin{aligned}
(B) &= \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\Delta\omega_i) \Delta \left[\phi \frac{1}{\Delta} (\phi\omega_i) \right] dx = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\Delta\omega_i) \left[(\Delta\phi) \frac{1}{\Delta} (\phi\omega_i) \right] dx \\
&+ \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\Delta\omega_i) \phi (\phi\omega_i)\, dx + 2\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\Delta\omega_i) \left((\vec{\nabla}\phi) \cdot \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} (\phi\omega_i) \right) dx,
\end{aligned}$$

en appliquant une troisième intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned}
(B) &= -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\vec{\nabla}\omega_i) \cdot \vec{\nabla} \left[\Delta\phi \frac{1}{\Delta} (\phi\omega_i) \right] dx - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\vec{\nabla}\omega_i) \cdot \vec{\nabla} [\phi(\phi\omega_i)]\, dx \\
&- 2\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\vec{\nabla}\omega_i) \cdot \vec{\nabla} \left((\vec{\nabla}\phi) \cdot \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} (\phi\omega_i) \right) dx,
\end{aligned}$$

ainsi en développant le gradient dans les trois termes de l'expression ci-dessus on trouve

$$\begin{aligned}
(B) &= -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\vec{\nabla}\omega_i) \cdot \left(\vec{\nabla}(\Delta\phi) \left[\frac{1}{\Delta} (\phi\omega_i) \right] \right) dx - 3\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\vec{\nabla}\omega_i) \cdot \left(\Delta\phi \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} (\phi\omega_i) \right) dx \\
&- \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\vec{\nabla}\omega_i) \cdot \left((\vec{\nabla}\omega_i)\phi\phi \right) dx - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} \vec{\nabla}\omega_i \cdot [(\vec{\nabla}\phi)\omega_i\phi]\, dx \\
&- 3\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\vec{\nabla}\omega_i) \cdot \left(\vec{\nabla}\phi(\phi\omega_i) \right) dx. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Estimons chaque terme en commençant par le premier

$$B_1 = -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\vec{\nabla}\omega_i) \cdot \left(\vec{\nabla}(\Delta\phi) \left[\frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i) \right] \right) dx,$$

on a :

$$|B_1| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| (\vec{\nabla}\omega_i) \cdot \left(\vec{\nabla}(\Delta\phi) \left[\frac{1}{\Delta}(\phi\omega_i) \right] \right) \right| dx,$$

en appliquant l'inégalité de Hölder on obtient

$$|B_1| \leq \varepsilon C \|\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\vec{\nabla}(\Delta\phi)\|_{L^3(B_r)} \left\| \frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon) \right\|_{L^6(B_r)},$$

en utilisant les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev au terme $\left\| \frac{1}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon) \right\|_{L^6(B_r)}$ et en appliquant l'inégalité de Hölder on obtient :

$$|B_1| \leq \varepsilon C \|\vec{\nabla}\otimes\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\vec{\nabla}(\Delta\phi)\|_{L^3(B_r)} \|\phi\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_r)} \|\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \leq \varepsilon C_\phi \|\vec{\nabla}\otimes\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}.$$

Pour le terme B_2 qui est donné par

$$B_2 = -3\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\vec{\nabla}\omega_i) \cdot \left(\Delta\phi \frac{\vec{\nabla}}{\Delta}(\phi\omega_i) \right) dx,$$

et on écrit

$$|B_2| = \left| 3\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\vec{\nabla}\omega_i) \cdot \left(\Delta\phi \frac{\vec{\nabla}}{\Delta}(\phi\omega_i) \right) dx \right|$$

on applique l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$|B_2| \leq \varepsilon C \|\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\Delta\phi\|_{L^\infty(B_r)} \left\| \frac{\vec{\nabla}}{\Delta}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon) \right\|_{L^2(B_r)},$$

et par les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev et par l'inégalité de Hölder on a :

$$|B_2| \leq \varepsilon C \|\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\Delta\phi\|_{L^\infty(B_r)} \|\phi\|_{L^3(B_r)} \|\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \leq \varepsilon C_\phi \|\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}.$$

Pour le troisième terme de (2.18) que l'on note B_3

$$B_3 = -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\vec{\nabla}\omega_i) \cdot \left(\vec{\nabla}\omega_i\phi\phi \right) dx$$

et on écrit

$$B_3 \leq -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}_\varepsilon|^2 \phi^2 \, dx$$

Pour le quatrième terme de (2.18) que l'on désigne par B_4 on a

$$B_4 = -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} \vec{\nabla}\omega_i \cdot (\vec{\nabla}\phi\omega_i\phi) \, dx,$$

et on écrit

$$|B_4| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} |\vec{\nabla}\omega_i \cdot (\vec{\nabla}\phi\omega_i\phi)|\, dx$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder on a

$$|B_4| \leq \varepsilon C_\phi \|\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}.$$

Finalement, le dernier terme de (2.18) est

$$B_5 = -3\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\vec{\nabla}\omega_i) \cdot \left(\vec{\nabla}\phi(\phi\omega_i)\right)\, dx,$$

et on écrit

$$|B_5| \leq 3\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} (\vec{\nabla}\omega_i) \cdot \left(\vec{\nabla}\phi(\phi\omega_i)\right)\, dx \right| dx,$$

et par l'inégalité de Hölder on trouve

$$|B_5| \leq \varepsilon C_\phi \|\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)} \|\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2(B_r)}.$$

Ainsi, avec tous les calculs précédents nous avons donc obtenu la majoration suivante pour (2.18)

$$|B| \leq \varepsilon C_\phi (\|\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2_x} \|\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2_x}) - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}_\varepsilon|^2 \phi^2\, dx.$$

2.5 Passage à la limite et fin de la démonstration

Nous avons obtenu l'inégalité suivante qui se déduit de (2.10) et des estimations précédentes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)\right\|^2_{L^2}\right) &+ \nu \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\omega}_\varepsilon|^2\phi^2\, dx \leq C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(B_r)} + C_\phi \|\vec{u}_\varepsilon\|^3_{L^3(B_r)} \\ &+ C_\phi |\langle \vec{f}, \vec{u}_\varepsilon\rangle|_{H^{-1}\times H^1} + C_\phi \|\vec{f}\|^2_{H^{-1}(B_r)} + \varepsilon C_\phi (\|\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2_x} \|\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2_x}) \\ &- \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}_\varepsilon|^2 \phi^2\, dx \end{aligned}$$

et à partir de cette majoration on intègre par rapport au temps et on obtient alors

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)(t,\cdot)\right\|^2_{L^2}\right) + \nu \int_{-1}^{1}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\omega}_\varepsilon(s,x)|^2\phi^2(s,x)\, dx\, ds \leq C_\phi \int_{-1}^{1} \|\vec{u}_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2(B_r)}\, ds \\ &+ C_\phi \int_{-1}^{1} \|\vec{u}_\varepsilon(s,\cdot)\|^3_{L^3(B_r)}\, ds + C_\phi \int_{-1}^{1} |\langle \vec{f}(s,\cdot), \vec{u}_\varepsilon(s,\cdot)\rangle|_{H^{-1}\times H^1}\, ds \\ &+ C_\phi \int_{-1}^{1} \|\vec{f}(s,\cdot)\|^2_{H^{-1}(B_r)}\, ds + \varepsilon C_\phi \int_{-1}^{1} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2_x} \|\vec{\omega}_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2_x}\, ds \\ &- \varepsilon \int_{-1}^{1}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}_\varepsilon(s,x)|^2 \phi^2(s,x)\, dx\, ds. \end{aligned}$$

La dernière intégrale ci-dessus est positive et nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}\left\| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2 \right) + \nu\int_{-1}^{1}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\omega}_\varepsilon(s,x)|^2\phi^2(s,x)\,dx\,ds \leq C_\phi \int_{-1}^{1} \|\vec{u}_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2(B_r)}^2\,ds \\
&+ \quad C_\phi\int_{-1}^{1}\|\vec{u}_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^3(B_r)}^3\,ds + C_\phi\int_{-1}^{1}|\langle\vec{f}(s,\cdot),\vec{u}_\varepsilon(s,\cdot)\rangle|_{H^{-1}\times H^1}\,ds \\
&+ \quad C_\phi\int_{-1}^{1}\|\vec{f}(s,\cdot)\|_{H^{-1}(B_r)}^2\,ds + \varepsilon C_\phi\int_{-1}^{1}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{\omega}_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2_x}\|\vec{\omega}_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2_x}\,ds.
\end{aligned}$$

On remarque maintenant que par la Proposition 1, on a $\|\vec{\nabla}\otimes\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2_tL^2_x} \simeq O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$, et $\|\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2_tL^2_x} \simeq O(1)$ et donc le terme $\varepsilon\|\vec{\nabla}\otimes\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2_tL^2_x}\|\vec{\omega}_\varepsilon\|_{L^2_tL^2_x}$ se comporte comme $\varepsilon\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon}$. On a alors,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\left\| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\phi\vec{\omega}_\varepsilon)(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2\right) \quad &+ \quad \nu\int_{-1}^{1}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\omega}_\varepsilon(s,x)|^2\phi^2(s,x)\,dx\,ds \leq C_\phi \int_{-1}^{1} \|\vec{u}_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2(B_r)}^2\,ds \\
&+ \quad C_\phi\int_{-1}^{1}\|\vec{u}_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^3(B_r)}^3\,ds + C_\phi\int_{-1}^{1}|\langle\vec{f}(s,\cdot),\vec{u}_\varepsilon(s,\cdot)\rangle|_{H^{-1}\times H^1}\,ds \\
&+ \quad C_\phi\int_{-1}^{1}\|\vec{f}(s,\cdot)\|_{H^{-1}(B_r)}^2\,ds + C_\phi\sqrt{\varepsilon}, \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

pour finir nous allons faire tendre $\varepsilon \to 0$. Par le lemme de Rellich on a que la sous-suite $(\vec{u}_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\vec{u}$ dans $(L^2_tL^2_x)_{loc}$ et $(L^3_tL^3_x)_{loc}$, on a aussi que $(\vec{u}_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\vec{u}$ dans $L^2_tH^1_x(Q)$ et converge *-faiblement dans $L^\infty_tL^2_x(Q)$ et de même on a la convergence faible $\vec{\omega}_\varepsilon\phi \rightharpoonup \vec{\omega}\phi$ dans $L^2_tL^2_x$ et donc on a

$$\|\vec{\omega}\phi\|_{L^2_tL^2_x} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0}\|\vec{\omega}_\varepsilon\phi\|_{L^2_tL^2_x}$$

Ainsi on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\left\| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(\phi\vec{\omega})(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2\right) \quad &+ \quad \nu\int_{-1}^{1}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\omega}(s,x)|^2\phi^2(s,x)\,dx\,ds \leq C_\phi \int_{-1}^{1} \|\vec{u}(s,\cdot)\|_{L^2(B_r)}^2\,ds \\
&+ \quad C_\phi\int_{-1}^{1}\|\vec{u}(s,\cdot)\|_{L^3(B_r)}^3\,ds + C_\phi\int_{-1}^{1}|\langle\vec{f}(s,\cdot),\vec{u}(s,\cdot)\rangle|_{H^{-1}\times H^1}\,ds \\
&+ \quad C_\phi\int_{-1}^{1}\|\vec{f}(s,\cdot)\|_{H^{-1}(B_r)}^2\,ds.
\end{aligned}$$

La démonstration du Théorème 5 est maintenant terminée. ■

Comme il a été mentionné dans la présentation de la Thèse, l'objectif recherché par Choe était de généraliser la théorie de régularité partielle de Caffarelli, Kohn et Nirenberg en utilisant une nouvelle inégalité d'énergie locale qui ne fait pas intervenir la pression.

Nous avons vu, par le contre exemple de Serrin, que cette généralisation n'était pas possible directement : la théorie de régularité partielle de Caffarelli, Kohn et Nirenberg,

bien qu'elle utilise une inégalité d'énergie locale, nécessite une condition sur la pression pour obtenir non seulement de la régularité en variable d'espace mais également de la régularité en variable de temps.

Dans cette thèse nous avons essayé de suivre l'idée de Choe pour mieux comprendre la théorie de régularité partielle en utilisant l'inégalité d'énergie locale (2.4) ; mais nos efforts ce sont révélés infructueux.

Néanmoins, l'idée d'appliquer le rotationnel aux équations de Navier-Stokes pour se défaire de la pression pour ensuite appliquer l'opérateur $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}$ afin de récupérer des estimations sur la vitesse $\vec{u}$ nous a semblé intéressante. En effet, au moins localement, les variables $\vec{u}$ et $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\vec{\nabla} \wedge \vec{u}$ ont un comportement similaire, à ceci près que l'équation vérifiée par la variable $\vec{w}$ ne fera plus intervenir la pression.

En poussant ce raisonnement un peu plus loin, nous avons considéré (au moins localement) la variable $\vec{v} = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\phi\vec{\nabla} \wedge \vec{u})$. Du point de vue des dérivées, les variables $\vec{u}, \vec{w}$ et $\vec{v}$ ont un comportement similaire, mais la variable $\vec{v}$ a un avantage par rapport à la variable $\vec{w}$: grâce à certaines identités vectorielles il sera plus simple de neutraliser les deux gradients avec l'opérateur $\frac{1}{\Delta}$.

Dans le chapitre qui suit nous allons reprendre la théorie de régularité partielle des équations de Navier-Stokes en utilisant cette variable $\vec{v}$.

Chapitre 3

Le rôle de la pression dans la théorie de la régularité partielle

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons introduit une nouvelle inégalité d'énergie locale mais, telle quelle, cette dernière ne nous permettait pas d'obtenir des résultats intéressants qui puissent être exploités dans l'étude de la régularité partielle des équations de Navier-Stokes. Cependant, l'idée d'utiliser la vorticité $\vec{\omega}$ pour se défaire de la pression puis de considérer l'opérateur $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}$ pour "revenir" à la variable $\vec{u}$ était très intéressante.
Dans ce chapitre on va exploiter cette idée de manière légèrement différente pour étudier la régularité partielle des solutions faibles des équations de Navier Stokes.

Comme on l'a mentionné dans le Chapitre 1 lorsqu'on étudie certains problèmes liés au rôle de la pression dans la théorie de la régularité *partielle* des solutions faibles des équations de Navier-Stokes, la pression ne joue pas un rôle particulièrement important.

On rappelle que si on travaille sur l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier il est possible de se débarrasser de la pression d'une manière relativement directe (en utilisant le projecteur de Laray $\mathbb{P}$). Néanmoins, dans un cadre *local* il est impossible d'utiliser cette technique puisque le projecteur de Leray est un opérateur non local. Pour surmonter ce problème nous avons l'approche de Serrin et celle de Caffarelli Kohn et Nirenberg introduites dans le Chapitre 1.
En exploitant et en développant quelques idées du chapitre précédent nous verrons comment étudier la régularité partielle en utilisant une approche différente.

3.2 Présentation des résultats

Le but général de ce chapitre est d'affaiblir autant que possible les hypothèses de régularité sur la pression, tout en gardant les lignes principales de la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg et, en faisant cela, on va obtenir un point de vue différent de la théorie de régularité partielle.

Nous utilisons comme point de départ la remarque suivante : la théorie de Caffarelli,

Kohn et Nirenberg est basée sur le caractère adapté de la solution $\vec{u}$, *i.e.* sur l'inégalité d'énergie locale $\mu \geq 0$, où μ est donnée par l'identité

$$\mu = -\partial_t|\vec{u}|^2 + \nu\Delta|\vec{u}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 - \operatorname{div}\left((|\vec{u}|^2+2p)\vec{u}\right) + 2\vec{u}\cdot\vec{f},$$

et on peut voir qu'en effet on a deux conditions dans cette définition du *caractère adapté* :

1) la pression p doit être suffisamment régulière pour permettre à la quantité μ d'être définie comme une distribution,

2) μ est positive.

Mais si on suppose uniquement que $p \in \mathcal{D}'(Q)$, on a que le terme $\operatorname{div}(p\vec{u})$ dans μ n'est pas bien posé et ainsi la définition du le caractère adapté doit être changée. Donc, notre première tâche est de donner un sens à la quantité $\operatorname{div}(p\vec{u})$ même quand $p \in \mathcal{D}'(Q)$:

Proposition 2 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $\rho > 0$, on considère $Q =]a,b[\times B_{x_0,\rho}$ un domaine borné de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. On suppose que $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q)$ avec $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$ et $p \in \mathcal{D}'(Q)$ sont solutions des équations de Navier–Stokes sur Q :*

$$\partial_t\vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f},$$

où $\vec{f} \in L^{10/7}_t L^{10/7}_x(Q)$ et $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$.

Soient $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ deux fonctions régulières telles que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\gamma(t)dt = \int_{\mathbb{R}^3}\theta(x)dx = 1$, $supp(\gamma) \subset]-1,1[$ et $supp(\theta) \subset B(0,1)$. On pose pour $\alpha,\varepsilon > 0$ les fonctions $\gamma_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha}\gamma(\frac{t}{\alpha})$ et $\theta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^3}\theta(\frac{x}{\varepsilon})$ et on définit

$$\varphi_{\alpha,\varepsilon}(t,x) = \gamma_\alpha(t)\theta_\varepsilon(x).$$

Alors, si l'ensemble $Q_{t_0,x_0,r_0} =]t_0 - r_0^2, t_0 + r_0^2[\times B_{x_0,r_0}$ est contenu dans Q, les distributions $\vec{u} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}$ et $p * \varphi_{\alpha,\varepsilon}$ sont bien définies sur l'ensemble $Q_{t_0,x_0,r_0/4} \subset Q$ pour $0 < \alpha < r_0^2/2$ et $0 < \varepsilon < r_0/2$. De plus, la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0} \operatorname{div}\left[\left(p * \varphi_{\alpha,\varepsilon}\right) \times \left(\vec{u} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)\right],$$

existe dans $\mathcal{D}'$ et ne dépend pas du choix de γ et θ.

Nous écrirons désormais,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0} \operatorname{div}\left[\left(p * \varphi_{\alpha,\varepsilon}\right) \times \left(\vec{u} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)\right] = \langle \operatorname{div}(p\vec{u})\rangle.$$

L'existence de cette limite n'est pas absolument triviale mais elle nous permettra de travailler avec la quantité $\langle \operatorname{div}(p\vec{u})\rangle$ où la pression p appartient à $\mathcal{D}'(Q)$: on peut maintenant introduire le concept suivant qui remplacera le le caractère adapté de la solution $\vec{u}$.

Définition 6 (Solutions dissipatives) *Sous le cadre de la Proposition 2, i.e. :*

1) *on suppose $\vec{f} \in L^{10/7}_t L^{10/7}_x(Q)$ avec $Q =]a,b[\times B_{x_0,\rho}$ où $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $\rho > 0$ et $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$,*

2) *si* $(\vec{u}, p)$ *est une solution des équations de Navier–Stokes*

$$\partial_t \vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \quad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0,$$

sur Q *avec* $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q)$ *et* $p \in \mathcal{D}'(Q)$,

nous dirons qu'une solution $\vec{u}$ *est* dissipative *si la distribution* M *donnée par l'expression*

$$M = -\partial_t|\vec{u}|^2 + \nu\Delta|\vec{u}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 - \operatorname{div}(|\vec{u}|^2\vec{u}) - 2\langle\operatorname{div}(p\vec{u})\rangle + 2\vec{f}\cdot\vec{u}, \tag{3.1}$$

est une mesure localement finie positive sur Q.

Ici on a deux remarques.

(i) Il est clair que, puisque $p \in \mathcal{D}'$, la notion de solution dissipative est plus générale que la notion de solutions adaptées, et nous allons démontrer que le caractère adapté implique celle de dissipativité.

De plus, il est possible de vérifier que l'ensemble des solutions dissipatives est strictement plus large que celui des solutions adaptées, voir la Remarque 5 ci-dessous pour les détails.

(ii) Il est important de noter que si on suppose $\vec{u} \in L^4_t L^4_x$ avec $\vec{f}$ assez régulière, par exemple $\vec{f} \in L^{10/7}_t L^{10/7}_x$, mais sans aucune condition sur p alors on peut prouver qu'on a en fait $M = 0$. Voir Remarque 9 dans la page 85.

Une fois qu'on a introduit la notion de solutions dissipatives, on peut énoncer notre théorème principal :

Théorème 7 *Soit* $\nu > 0$ *un paramètre fixé. Soit* $Q =]a, b[\times B_{x,\rho}$ *un domaine borné de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ *et soit* $(\vec{u}, p)$ *solution faible des équations de Navier-Stokes sur* Q

$$\begin{cases} \partial_t\vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3),\ div(\vec{u}_0) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

On suppose :

1) $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q)$ *et* $p \in \mathcal{D}'(Q)$,

2) $\vec{f} \in L^2_t H^1_x(Q)$,

3) $\vec{u}$ *est dissipative dans le sens de la Définition 6 donnée ci-dessus.*

Il existe une constante positive $\varepsilon^* > 0$, *qui dépend que de* ν, *telle que, si pour certains points* $(t_0, x_0) \in Q$ *on a l'inégalité*

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \iint\limits_{]t_0-r^2, t_0+r^2[\times B_{x_0,r}} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(t,x)|^2 dt\,dx < \varepsilon^*, \tag{3.3}$$

alors la solution $\vec{u}$ *est bornée au voisinage de* (t_0, x_0). *En particulier le point* (t_0, x_0) *est régulier.*

Il est intéressant de comparer notre approche à la théorie de Serrin et celle de Caffarelli, Kohn et Nirenberg : du point de vue des hypothèses sur $\vec{u}$, on a uniquement supposé la condition de petitesse (3.3) ainsi que la propriété de dissipativité. Ainsi, puisqu'on suppose moins de conditions sur la pression et puisque la notion de dissipativité est plus générale que le caractère adapté, on peut dire que notre méthode est une généralisation de la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg. Mais, comme on demande uniquement que $p \in \mathcal{D}'$, dû au contre exemple de Serrin donné dans le Chapitre 1, il n'est possible d'obtenir aucune régularité en variable de temps et la conclusion de notre théorème principal nous fournit que de la régularité en variable d'espace : dans ce sens, notre résultat devrait également être considéré comme une généralisation de la théorie de Serrin puisque nous exigeons moins de conditions sur $\vec{u}$.

Comme on peut le voir, notre méthode est une généralisation de ces deux théories en suivant des directions très spécifiques : un contrôle faible sur la pression génère la perte de la régularité en variable de temps mais il est toujours possible d'obtenir la régularité en variable d'espace.

Expliquons maintenant la stratégie globale de la preuve qui sera développée pour le Théorème 7. D'abord, comme on ne fait aucune hypothèse sur la pression p (rappelons que nous avons seulement $p \in \mathcal{D}'$) en appliquant le rotationnel $(\vec{\nabla}\wedge)$ aux équations de Navier-Stokes (3.2) nous allons immédiatement nous débarrasser de la pression p. Néanmoins on ne va pas travailler avec la variable $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$ et l'équation correspondante $\partial_t \vec{\omega} = \nu\Delta\vec{\omega} - \vec{\nabla} \wedge [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}] + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}$, car nous voulons travailler avec une distribution plus régulière.

Ainsi, comme on est intéressé à étudier le problème de régularité dans un voisinage d'un point (t_0, x_0), on va d'abord introduire une fonction test $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ qui est nulle en dehors d'une petite boule centré dans le point (t_0, x_0) et ensuite on définit une nouvelle variable de la manière suivante :

$$\vec{v} = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{u}).$$

Le point crucial ici est que, les deux dérivées successives données par les gradients $\vec{\nabla}$ dans la formule précédente sont *localement compensées*, en a un sens qui sera précisé plus tard, par l'opérateur $-\frac{1}{\Delta}$ et ainsi, certaines propriétés de $\vec{u}$ vont être très similaires à celles de la nouvelle variable $\vec{v}$ et vice versa : nous allons voir que (localement) $\vec{v}$ est égale à $\vec{u}$ à une correction harmonique près (en variable d'espace).

L'idée principale est alors d'utiliser $\vec{v}$ comme une fonction support pour étudier les propriétés de régularité de $\vec{u}$ et ainsi notre première tâche sera de décrire certaines propriétés de $\vec{v}$.

Dans la Proposition 3 ci-dessous nous donnons quelques propriétés de base de $\vec{v}$ qui seront facilement déduites à partir des hypothèses sur $\vec{u}$; toutefois, la puissance de cette nouvelle variable apparait clairement lorsque nous étudions les équations satisfaites par $\vec{v}$: en effet, nous verrons que la fonction $\vec{v}$ satisfait les équations de Navier–Stokes suivantes (nommées *équations associées*)

$$\partial_t \vec{v} = \Delta\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla}q + \vec{F},$$

où la pression q et la force $\vec{F}$ satisfont certaines propriétés intéressantes. Il est très important de noter ici que q et $\vec{F}$ ne vont pas dépendre de la pression p. Voir la Proposition 4 ci-dessous pour les détails techniques.

Maintenant, à l'aide de cette variable $\vec{v}$ et de l'équation associée on va prouver la Proposition 2 qui donne un sens à la quantité $\operatorname{div}(p\vec{u})$ même si p est une distribution et on va voir que si $\vec{u}$ est une solution dissipative alors notre nouvelle variable $\vec{v}$ est en fait *adaptée* dans le sens de la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg. De plus, on va prouver que si $\vec{u}$ satisfait la condition de petitesse (3.3) alors ça sera le même cas pour la nouvelle variable $\vec{v}$. Ainsi, puisque la fonction $\vec{v}$ satisfait les équations de Navier–Stokes dans un meilleur cadre que celui de la fonction $\vec{u}$, il serait possible d'étudier d'autres propriétés locales de la variable $\vec{v}$. Ensuite on va voir comment les propriétés de la fonction $\vec{v}$ se transmettent à la variable originale $\vec{u}$. Finalement, la dernière étape est donnée par la Proposition 8 qui nous explique comment on peut déduire que $\vec{u}$ est une fonction localement bornée et le Théorème 7 sera complètement démontré.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la section 3.3 on va rappeler quelques outils qui seront utilisés dans la démonstration du Théorème 7, en particulier on va insister sur le cadre parabolique du problème et sur les théorèmes de O'Leary et Kukavica qui sont cruciaux dans notre étude. La Section 3.4 est consacrée à la démonstration du théorème principal. Les lemmes techniques sont reportées à l'annexe.

3.3 Échelle Parabolique et les outils associés

Le résultat de Caffarelli, Kohn et Nirenberg [2] indique précisément que l'ensemble Σ_0 (introduit dans le Chapitre 1) des points de gradient large pour la vitesse satisfait

$$\mathcal{H}_2^1(\Sigma_0) = 0.$$

Tandis que la mesure de Hausdorff implique seulement la distance parabolique, nous allons également travailler avec des espaces de Morrey paraboliques qui impliquent à la fois la distance et la mesure. Soit $\mathcal{Q}$ une collection de boules paraboliques $Q_{t,x,r}$ de type (1.9) où $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$ et $r > 0$. Pour $1 < p, q < +\infty$, l'espace de Morrey parabolique $\mathcal{M}_2^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ sera défini comme l'espace des fonctions localement intégrables f sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ telles que

$$\|f\|_{\mathcal{M}_2^{p,q}} = \sup_{Q_{t,x,r}\in\mathcal{Q}} \left(\frac{1}{r^{5(1-\frac{p}{q})}} \iint_{Q_{t,x,r}} |f(s,y)|^p ds dy \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

On remarque on particulier que l'on a l'identification d'espace $L^q(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) = \mathcal{M}_2^{q,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

Voir le livre [27] pour de nombreux exemples intéressants d'applications de ces espaces fonctionnels à l'étude des équations de Navier-Stokes.

Les espaces de Morrey sont utiles dans la théorie de la régularité pour les solutions de l'équation de la chaleur, ainsi que pour les équations de Navier-Stokes (voir par exemple les livres [26, 27]). On dira qu'une fonction f appartient à ces espaces dans un voisinage d'un point (t_0, x_0) s'il y a une fonction régulière à support compact φ égale à 1 sur un voisinage de (t_0, x_0) telle que φf appartient à l'espace de Morrey. Une solution h de l'équation de la chaleur

$$\partial_t h - \nu\Delta h = g + \operatorname{div}(\vec{H}),$$

sera localement Hölderienne d'exposant η sur un voisinage de (t_0, x_0) si les données g et $\vec{H}$ sont suffisamment régulières : sur un voisinage de (t_0, x_0), on demande que g est localement $\mathcal{M}_2^{p_0,q_0}$ avec $1 < p_0$ et $5 > q_0 > 5/2$ (avec $\eta = 2 - \frac{5}{q_0}$) et $\vec{H}$ est localement $\mathcal{M}_2^{p_1,q_1}$ avec $1 < p_1$, $q_1 > 5$ (et $\eta = 1 - \frac{5}{q_1}$).

Remarque 3 *Si g a un support borné et appartient à $\mathcal{M}_2^{p,q}$ avec $1 < p \leq q < +\infty$, alors g appartient à $\mathcal{M}_2^{p_1,q_1}$ pour tout $1 < p_1 \leq p$ et $p_1 \leq q_1 \leq q$.*

Motivé par ce cadre, plusieurs auteurs ont remplacé le critère traditionnel $L_t^p L_x^q$ pour le résultat de régularité locale de Serrin ou bien la régularité partielle de Caffarelli, Kohn et Nirenberg par des hypothèses sur les normes locales de Morrey de $\vec{u}$ et $\vec{f}$. En particulier, O'Leary [32] a énoncé la variante suivante du résultat de régularité de Serrin qui sera utile pour arriver à nos fins.

Théorème 8 (O'Leary) *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ de la forme $\Omega = Q_{t_0,x_0,r_0}$ (donnée dans 1.9) pour certain $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $r_0 > 0$. Soit $\vec{u}$ une solution faible des équations de Navier-Stokes (3.2) telle que $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(\Omega) \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(\Omega)$, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1(\Omega)$. Si de plus on a $1_{\mathcal{V}}\vec{u} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, pour certain $\tau > 5$, où $\mathcal{V}$ est un voisinage du point (t_0, x_0), alors $\vec{u}$ est une fonction localement bornée : pour toute boule parabolique Q qui est à support compact dans $\mathcal{V}$, on a $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^\infty(Q)$.*

O'Leary énonce son théorème avec une force $\vec{f}$ nulle ; cependant, il n'est pas difficile de l'étendre au cas d'une force régulière $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1$ (voir [27] Chapitre 13 pour une preuve).

Rappelons maintenant que Caffarelli, Kohn et Nirenberg [2] ont énoncé leur théorème avec une force régulière ($\vec{f} \in L_t^\rho L_x^\rho$ avec $\rho > 5/2$) et une pression ($p \in L_t^{3/2} L_x^{3/2}$, voir par exemple [29]). Ladyzhenskaya et Seregin [25] ont ensuite démontré le théorème de Caffarelli, Kohn et Nirenberg dans le cadre des espaces de Morrey paraboliques : Ils ont supposé que, sur un voisinage $\mathcal{V}$ de (t_0, x_0), la force $\vec{f}$ satisfait $1_{\mathcal{V}}\vec{f} \in \mathcal{M}_2^{2,q}$ avec $q > 5/2$.

Plus récemment Kukavica [24] a considéré une force moins régulière et il a divisé la preuve en trois parties.

Théorème 9 (Kukavica) *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ de la forme $\Omega = Q_{t_0,x_0,r_0}$ (donnée dans 1.9) pour certain $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $r_0 > 0$. Soit $\vec{u}$ solution faible des équations de Navier-Stokes (3.2) telle que $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(\Omega) \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(\Omega)$, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et $\vec{f} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ avec $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$. Alors :*

1) **Inégalité d'énergie.** *Si p est assez régulière (i.e., $p \in L_t^{q_0} L_x^{q_0}(\Omega)$ pour certain $q_0 > 1$) et $\vec{f}$ est suffisamment régulière (i.e., $\vec{f} \in L_t^{10/7} L_x^{10/7}(\Omega)$), alors la quantité*

$$\mu = -\partial_t |\vec{u}|^2 + \nu \Delta |\vec{u}|^2 - 2\nu |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 - \operatorname{div}((|\vec{u}|^2 + 2p)\vec{u}) + \vec{f} \cdot \vec{u}, \tag{3.4}$$

est bien définie comme une distribution. La solution $\vec{u}$ est dite adaptée *si μ est une mesure localement finie positive sur Ω : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $\varphi \geq 0$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 (\partial_t \varphi + \nu \Delta \varphi) + (\vec{u} \cdot \vec{f} - 2\nu |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2)\varphi + (|\vec{u}|^2 + 2p)\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\varphi \, dt \, dx \geq 0.$$

2) **Le critère des gradients petits.** *Si on suppose :*

- $p \in L_t^{q_0} L_x^{q_0}(\Omega)$ *pour certain* $q_0 > 1$,
- $1_\Omega \vec{f} \in \mathcal{M}_2^{\frac{10}{7},\tau_0}$ *pour certain* $\tau_0 > 5/3$,
- $\vec{u}$ *est adaptée.*

Il existe une constante positive $\epsilon^* > 0$ *et* $\tau_1 > 5$ *qui dépend que de* ν, q_0, *et* τ_0 *tels que, si* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *et*

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B(x_0,r)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s,y)|^2 \, ds\, dy < \epsilon^*,$$

alors il existe un petit voisinage parabolique $\mathcal{Q} = Q_{t_0,x_0,\bar{r}}$ *de* (t_0, x_0) *tel que on a* $1_{\mathcal{Q}}\, \vec{u} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau_1}$ *et* $1_{\mathcal{Q}}\, p \in \mathcal{M}_2^{q_0,\tau_1/2}$.

3) Points réguliers. *On suppose qu'il existe un voisinage* $\mathcal{Q} = Q_{t_0,x_0,\bar{r}}$ *de* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *tel que*

- $1_{\mathcal{Q}}\, \vec{u} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau_1}$ *pour certain* $\tau_1 > 5$,
- $1_{\mathcal{Q}}\, p \in \mathcal{M}_2^{q_0,\tau_2}$ *pour certain* $1 < q_0 \leq \tau_2$ *et* $\tau_2 > 5/2$,
- $1_{\mathcal{Q}}\, \vec{f} \in \mathcal{M}_2^{\frac{10}{7},\tau_3}$ *pour certain* $\tau_3 > 5/2$.

Alors il existe $0 < \rho < \bar{r}$ *et* $\eta \in]0, 1[$ *tel que* $\vec{u}$ *est Hölderienne (avec un exposant de régularité Hölderienne parabolique* $\eta > 0$*) sur* $Q_{t_0,x_0,\rho}$. *En particulier, le point* (t_0, x_0) *est régulier.*

On finit cette section par quelques remarques concernant les hypothèses énoncées pour la force $\vec{f}$:

(*i*) Dans le premier point du théorème, on est uniquement intéressé à donner un sens au produit $\vec{f} \cdot \vec{u}$, ainsi puisque on a par interpolation $\vec{u} \in L_t^{10/3} L_x^{10/3}$ il est suffisant de supposer que $\vec{f} \in L_t^{10/7} L_x^{10/7}$.

(*ii*) Cependant, pour le deuxième point on aura besoin de plus de régularité et si on veut travailler avec des espaces plus classiques on peut demander que $\vec{f} \in L_t^2 L_x^2$. En effet, puisque $L_t^2 L_x^2 = \mathcal{M}_2^{2,2}$, et puisque $\mathcal{Q}$ est un sous ensemble borné, on trouve que $1_{\mathcal{Q}} \vec{f} \in L_t^2 L_x^2$ implique $1_{\mathcal{Q}} \vec{f} \in \mathcal{M}_2^{10/7,2}$ (voir Remarque 3) et comme le deuxième paramètre qui définit les espaces de Morrey vérifie $5/3 < 2 < 5/2$, nous satisfaisons la condition sur $\vec{f}$ énoncée pour le critère de gradient petit.

(*iii*) Pour la dernière partie du théorème, nous aurons besoin encore plus de régularité pour la force, en effet, des lignes précédentes on voit que $\vec{f} \in L_t^2 L_x^2$ ne sera pas suffisante puisque $2 < 5/2$. Ainsi, si on veut travailler avec des espaces classiques on peut demander $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1$. En effet, puisque $L_t^2 H_x^1 \subset \mathcal{M}_2^{2,10/3}$ et puisque $\mathcal{Q}$ est un sous ensemble borné, on trouve que $1_{\mathcal{Q}} \vec{f} \in L_t^2 H_x^1$ implique $1_{\mathcal{Q}} \vec{f} \in \mathcal{M}_2^{10/7,10/3}$. Notons en particulier que nous avons ici $5/2 < 10/3$ pour le second paramètre de l'espace de Morrey précédent et ainsi en supposant $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1$ on satisfait les hypothèses demandées.

3.4 Preuve du Théorème principal

Dans cette section on va démontrer le Théorème 7 en utilisant le Théorème suivant. On va décomposer chaque étape en fonction des hypothèses qu'on aura besoin pour la force $\vec{f}$.

Théorème 10 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ de la forme $\Omega = Q_{t,x,r}$ donnée dans (1.9) pour certain $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$ et $r > 0$. Soit $\vec{u}$ une solution faible des équations de Navier-Stokes (3.2) telle que $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et $\vec{f} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors on a les points suivants :*

1) Inégalité d'énergie. *Si $\vec{f} \in L^{10/7}_t L^{10/7}_x(\Omega)$, alors la quantité*

$$M = -\partial_t|\vec{u}|^2 + \nu\Delta|\vec{u}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 - \operatorname{div}(|\vec{u}|^2\vec{u}) - 2\langle \operatorname{div}(p\vec{u})\rangle + 2\vec{u}\cdot\vec{f},$$

est bien définie comme une distribution.
La solution $\vec{u}$ est dite dissipative *si M est une mesure de Borel localement finie positive sur Ω.*

2) Le critère des gradients petits. *Supposons que :*

- *$\vec{f} \in L^2_t L^2_x(\Omega)$,*
- *$\vec{u}$ est dissipative.*

Il existe une constante positive $\epsilon^* > 0$ et $\tau_1 > 5$ qui dépendent que de ν tels que, si $(t_0, x_0) \in \Omega$ et

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B_{x_0,r}} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,y)|^2\, ds\, dy < \epsilon^*,$$

alors il existe un voisinage $\mathcal{Q} = Q_{t_0,x_0,\bar{r}}$ de (t_0, x_0) tel que $1_{\mathcal{Q}}\,\vec{u} \in \mathcal{M}^{3,\tau_1}_2$.

3) Points réguliers. *On suppose qu'il existe un voisinage $\mathcal{Q} = Q_{t_0,x_0,\bar{r}}$ de $(t_0, x_0) \in \Omega$ tel que*

- *$1_{\mathcal{Q}}\,\vec{u} \in \mathcal{M}^{3,\tau_1}_2$ pour certain $\tau_1 > 5$,*
- *$1_{\mathcal{Q}}\,\vec{f} \in L^2_t H^1_x(Q)$.*

Alors il existe $r' < \bar{r}$ tel que $\vec{u}$ est bornée sur $Q_{t_0,x_0,r'}$. En particulier, le point (t_0, x_0) est régulier.

Il est important de noter que, à chacune de ces étapes, on a changé les hypothèses de $\vec{f}$ (de moins régulière à plus régulière) afin d'assurer la conclusion souhaitée et nous suivrons ce cadre dans la démonstration du théorème.

Il est sans doute possible d'exiger des conditions plus générales pour la force $\vec{f}$, mais cela n'est pas notre objectif immédiat : nous avons préféré de travailler avec des espaces classiques.

Remarque 4 *Dans les hypothèses du Théorème 10, nous pouvons ajouter l'hypothèse* $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$.

En effet, si $\vec{f}$ appartient à $L_t^{10/7}L_x^{10/7}(\Omega)$, $L_t^2L_x^2(\Omega)$ ou $L_t^2H_x^1(\Omega)$, avec $\Omega = Q_{t,x,\rho}$, alors on peut prolonger Ω à $]t-\rho^2, t+\rho^2[\times\mathbb{R}^3$ et $\vec{f}$ reste dans $L_t^{10/7}L_x^{10/7}$, $L_t^2L_x^2$ ou $L_t^2H_x^1$. Ensuite, en utilisant le fait que le projecteur de Leray est un projecteur borné sur $L_x^{10/7}$, L_x^2 et H_x^1, on peut écrire $\vec{f}$ comme $\vec{f} = \vec{f_0} - \vec{\nabla}q$ où $\operatorname{div}(\vec{f_0}) = 0$ et $\vec{f_0}$ appartient à $L_t^{10/7}L_x^{10/7}(\Omega)$, $L_t^2L_x^2(\Omega)$ ou $L_t^2H_x^1(\Omega)$. Ainsi on change le couple pression-force $(p, \vec{f})$ dans les équations de Naver–Stokes en $(p+q, \vec{f_0})$. Comme q est régulier (q et $\vec{\nabla}q$ appartiennent à $L_t^{10/7}L_x^{10/7}(\Omega)$), on peut voir que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0}\operatorname{div}\left[\left(q*\varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)\times\left(\vec{u}*\varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)\right] = \operatorname{div}(q\vec{u}) = \vec{u}\cdot\vec{\nabla}q.$$

En particulier, on obtient la même distribution M lorsqu'on la calcule comme une distribution associée à la solution $(\vec{u}, p)$ et à la force $\vec{f}$ ou bien comme une distribution associée à la solution $(\vec{u}, p+q)$ et à la force de divergence nulle $\vec{f_0}$.

Remarque 5 *Le caractère adapté implique la dissipativité.*

Si on suppose en plus une condition de régularité sur la pression p (comme $p \in L_t^{q_0}L_x^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 > 1$), alors nous aurons $\langle\operatorname{div}(p\vec{u})\rangle = \operatorname{div}(p\vec{u})$ et $M = \mu$. Dans ce cas, le Théorème 10 est réduit au Théorème 9. Néanmoins, dans notre théorème, on n'assume aucune régularité sur p, et alors, $\vec{u}$ ne peut pas être régulière en variable de temps, comme le montre le contre exemple de Serrin.

Vérifions maintenant que, la classe des solutions dissipatives est *strictement* plus large que la classe des solutions adaptées (le contre exemple de Serrin n'est pas adapté mais il est dissipatif). Il est en effet facile de vérifier que le contre exemple de Serrin (qui est énoncé sans une force) est en fait une solution dissipative. On rappelle que $\vec{u}(t,x) = \phi(t)\vec{\nabla}\psi(x)$ sur $]0,1[\times B(0,1)$ où ϕ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$ et ψ est une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^3$ et la pression est donnée par $p(t,x) = -\frac{|\vec{u}(t,x)|^2}{2} - \partial_t\phi(t)\psi(x)$. Maintenant on a besoin de vérifier que la distribution M donnée dans (3.1) est positive :

$$M = -\partial_t|\vec{u}|^2 + \nu\Delta|\vec{u}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 - \operatorname{div}(|\vec{u}|^2\vec{u}) - 2\langle\operatorname{div}(p\vec{u})\rangle,$$

comme $\Delta\vec{u} = 0$ on a $\nu\Delta|\vec{u}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 = 2\nu\vec{u}\cdot\Delta\vec{u} = 0$ on obtient

$$\begin{aligned}
M &= -|\vec{\nabla}\psi|^2\partial_t(\phi(t)^2) - \operatorname{div}(|\vec{u}|^2\vec{u}) - 2\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0}\operatorname{div}\left((p*\varphi_{\alpha,\varepsilon})(\vec{u}*\varphi_{\alpha,\varepsilon})\right)\\
&= -|\vec{\nabla}\psi|^2\partial_t(\phi(t)^2) - \operatorname{div}(|\vec{u}|^2\vec{u})\\
&- 2\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0}\operatorname{div}\left(\left(\left[-\frac{|\vec{u}|^2}{2} - \partial_t\phi\psi\right]*\varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)(\vec{u}*\varphi_{\alpha,\varepsilon})\right)\\
&= -|\vec{\nabla}\psi|^2\partial_t(\phi(t)^2) - \operatorname{div}(|\vec{u}|^2\vec{u})\\
&+ 2\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0}\operatorname{div}\left(\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}*\varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)(\vec{u}*\varphi_{\alpha,\varepsilon})\right)\\
&\quad +2\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0}\operatorname{div}\left(([\partial_t\phi\psi]*\varphi_{\alpha,\varepsilon})(\phi(t)\vec{\nabla}\psi(x)*\varphi_{\alpha,\varepsilon})\right).
\end{aligned}$$

Rappelons que $\Delta\psi = 0$ et en passant à la limite $\alpha, \varepsilon \longrightarrow 0$ on obtient $M = 0$; ainsi l'exemple de Serrin est dissipatif dans le sens de la Définition 6 et il rentre donc dans le cadre du Théorème 7.

3.4.1 La nouvelle variable

Nous commençons la preuve du Théorème 10 en considérant une fonction $\vec{u}$ et une distribution p qui satisfont les équations de Navier–Stokes (3.2) sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, pour une force à divergence nulle $\vec{f}$. Afin de simplifier la notation, et sans perte de généralité, on va supposer une fois pour toute que l'ensemble Ω est de la forme

$$\Omega = I \times B_{x_0,\rho}, \tag{3.5}$$

où $I =]a, b[$ est un intervalle et $B_{x_0,\rho} = B(x_0, \rho)$ est une boule ouverte dans $\mathbb{R}^3$ de rayon $\rho > 0$ et centre $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Dans cette section, on suppose seulement que $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$ et que $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$.

Notre première étape est de considérer la vorticité de $\vec{u}$, qui sera notée par $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$.

On obtient l'équation suivante :

$$\partial_t \vec{\omega} = \nu \Delta \vec{\omega} - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}, \tag{3.6}$$

où la pression p a disparu (puisque nous avons $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} p \equiv 0$).

Cependant, comme nous l'avons dit dans l'introduction, nous souhaitons travailler avec la distribution $\vec{u}$ qui est plus régulière que la distribution $\vec{\omega}$ et pour cela nous procédons comme suit : comme on veut étudier la régularité de $\vec{u}$ à l'intérieur de Ω ; nous allons nous limiter à un domaine plus petit

$$\Omega_0 = I_0 \times B_{x_0,\rho_0}, \tag{3.7}$$

avec $I_0 =]a_0, b_0[$, où $a < a_0 < b_0 < b$ et $0 < \rho_0 < \rho$. Ensuite, pour retourner à $\vec{u}$ à partir de la vorticité $\vec{\omega}$, on introduit une fonction de localisation $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ qui est égale à 1 sur un voisinage de Ω_0 et à support compact dans Ω. Plus précisément, on demande que ψ soit de la forme

$$\psi(t, x) = \phi(t)\Phi(x),$$

où ϕ est égale à 1 sur un voisinage de I_0 et a support compact dans I, tandis que Φ est égale à 1 sur un voisinage de B_{x_0,ρ_0} et à support compact dans $B_{x_0,\rho}$. La distribution $\psi\vec{\omega}$ appartient clairement à $L^\infty_t H^{-1}_x \cap L^2_t L^2_x$. Ainsi, en utilisant cette fonction de localisation ψ, on peut définir une nouvelle variable $\vec{v}$ de la manière suivante

$$\vec{v} = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{\omega}) = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{u}). \tag{3.8}$$

Notons en particulier que, sur Ω_0, les dérivées de ψ sont égales à 0, de sorte que

$$\Delta\vec{v} = -\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{\omega}) = -\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) = \Delta\vec{u},$$

(car $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$). On peut voir alors de cette identité que, sur Ω_0, $\vec{v}$ est égale à $\vec{u}$ à une correction harmonique près $\vec{w}$ (en variable d'espace).

Tout au long de ce chapitre, notre stratégie sera de remplacer l'étude de régularité de $\vec{u}$ par l'étude de régularité de $\vec{v}$, et de lier ces deux régularité par une étude précise de la correction harmonique $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$.

On commence par des remarques élémentaires sur $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

Proposition 3 *Sous les hypothèses $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$ sur la solution $\vec{u}$ des équations de Navier–Stokes (3.2), la fonction $\vec{v}$ définie par la formule (3.8) ci-dessus satisfait les points suivants*

1) $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$,

2) $\vec{v} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega_0) \cap L^2_t H^1_x(\Omega_0)$,

3) la fonction $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$ *satisfait* $\vec{w} \in L^\infty_t \mathrm{Lip}_x(\Omega_0)$.

Preuve. Le premier point est évident, puisque la divergence du rotationnel est toujours nulle. Pour le second point, on va utiliser l'identité

$$\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{u}) - (\vec{\nabla}\psi) \wedge \vec{u},$$

et en utilisant la définition de $\vec{v}$ donnée ci-dessus dans (3.8) on obtient l'expression

$$\vec{v} = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{u}) - (\vec{\nabla}\psi) \wedge \vec{u}\right). \tag{3.9}$$

Nous allons prouver dans les points suivants que $\vec{v} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega_0)$ et $\vec{v} \in L^2_t H^1_x(\Omega_0)$.

- On commence par $\vec{v} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega_0)$. En prenant la norme $L^2(B_{x_0,\rho_0})$ en variable d'espace de l'expression (3.9) on a

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} &\leq \left\|\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{u})\right)\right\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} + \left\|\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left((\vec{\nabla}\psi) \wedge \vec{u}\right)\right\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} \\ &\leq \left\|\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{u})\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left((\vec{\nabla}\psi) \wedge \vec{u}\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

  En appliquant les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev au second terme ci-dessus on obtient

$$\|\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} \leq C\,\|\psi\vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C\left\|\vec{\nabla}\psi \wedge \vec{u}\right\|_{L^{6/5}(\mathbb{R}^3)}.$$

  Maintenant, en utilisant les propriétés du support de la fonction ψ et en utilisant l'inégalité de Hölder on peut écrire

$$\|\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} \leq C\|\psi\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho})}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})} + C\|\vec{\nabla}\psi\|_{L^3(B_{x_0,\rho})}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}. \tag{3.11}$$

  Il nous reste à prendre la norme L^∞ en variable de temps afin d'obtenir

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|_{L^\infty(I_0,L^2(B_{x_0,\rho_0}))} &\leq C\left(\|\psi\|_{L^\infty_t L^\infty_x} + \|\vec{\nabla}\psi\|_{L^\infty_t L^3_x}\right)\|\vec{u}\|_{L^\infty(I_0,L^2(B_{x_0,\rho}))} \\ &\leq C_\psi\|\vec{u}\|_{L^\infty(I_0,L^2(B_{x_0,\rho}))} \leq C_\psi\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x(\Omega)}, \end{aligned}$$

  puisque $I_0 \times B_{x_0,\rho} \subset \Omega$. La dernière quantité ci-dessus est bornée par les hypothèses sur $\vec{u}$.

- On étudie maintenant le fait que $\vec{v} \in L^2\big(I_0, H^1(B_{x_0,\rho_0})\big)$: en prenant la norme $H^1(B_{x_0,\rho_0})$ dans l'expression (3.9) on obtient

$$\|\vec{v}\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})} \leq \left\|\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\big(\vec{\nabla}\wedge(\psi\vec{u})\big)\right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\big((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\big)\right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Le premier terme à droite ci-dessus peut être contrôlé par $\|\psi\vec{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}$, ainsi par les propriétés du support de la fonction ψ on le contrôle par $C_\psi\|\vec{u}\|_{H^1(B_{x_0,\rho})}$. Pour le second terme de l'expression précédente, on a par définition de la norme H^1

$$\left\|\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\big((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\big)\right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} = \left\|\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\big((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\big)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \left\|\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\big((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\big)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

En suivant les mêmes calculs effectués dans (3.16)-(3.17) on voit que la première quantité dans la partie de droite de la formule précédente est contrôlée par la quantité$\|\vec{\nabla}\psi\|_{L^3(B_{x_0,\rho})}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}$, tandis que la deuxième quantité du côté droit peut être estimée par $\|\vec{\nabla}\psi\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho})}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}$.

Rassemblons toutes ces estimations nous obtenons

$$\|\vec{v}\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})} \leq C_\psi\|\vec{u}\|_{H^1(B_{x_0,\rho})},$$

et ainsi on a

$$\|\vec{v}\|_{L^2(I_0,H^1(B_{x_0,\rho_0}))} \leq C_\psi\|\vec{u}\|_{L^2(I_0,H^1(B_{x_0,\rho}))} \leq C_\psi\|\vec{u}\|_{L^2_tH^1_x(\Omega)} < +\infty.$$

Nous montrons maintenant le troisième point de la proposition. Pour cela, nous commençons par utiliser les identités générales suivantes (où on utilise $\mathrm{div}\,(\psi\vec{u}) = (\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\psi)$, car $\mathrm{div}\,(\vec{u}) = 0$) :

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\Big(\vec{\nabla}\wedge(\psi\vec{u}) - (\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\Big)\\
&= -\frac{1}{\Delta}\Big[\vec{\nabla}\wedge\Big(\vec{\nabla}\wedge(\psi\vec{u})\Big)\Big] + \frac{1}{\Delta}\Big[\vec{\nabla}\wedge\Big((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\Big)\Big]\\
&= -\frac{1}{\Delta}\Big[\vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\psi) - \Delta(\psi\vec{u})\Big] + \frac{1}{\Delta}\Big[\vec{\nabla}\wedge\Big((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\Big)\Big]\\
&= -\frac{1}{\Delta}\Big[\vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\psi)\Big] + \psi\vec{u} + \frac{1}{\Delta}\Big[\vec{\nabla}\wedge\Big((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\Big)\Big].
\end{aligned}$$

De cette dernière identité, il est possible de déduire une réformulation pour $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \psi\vec{u} + \frac{1}{\Delta}\Big[\vec{\nabla}\wedge\Big((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\Big)\Big] - \frac{1}{\Delta}\Big[\vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\psi)\Big]. \tag{3.12}$$

Maintenant, comme par définition on a que $\psi \equiv 1$ sur Ω_0, on obtient la décomposition suivante sur Ω_0

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w},$$

où

$$\vec{w} = \frac{1}{\Delta}\Big[\vec{\nabla}\wedge\Big((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\Big)\Big] - \frac{1}{\Delta}\Big[\vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\psi)\Big]. \tag{3.13}$$

On rappelle maintenant que l'opérateur $\frac{1}{\Delta}$ est donné par une convolution avec un noyau K : en effet, pour une fonction admissible f on a

$$\frac{1}{\Delta}f(x) = K * f(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(y)}{|x-y|}dy. \tag{3.14}$$

Pour $(t,x) \in \Omega_0$, on a $x \in B_{x_0,\rho_0}$ tandis que $\psi(t,y) = 1$ sur $I_0 \times B_{x_0,\rho_1}$ pour certain ρ_1 avec $\rho_0 < \rho_1 < \rho$. En particulier, $\vec{\nabla}\psi(t,y)$ est identiquement nulle pour $t \in I_0$, $x \in B_{x_0,\rho_0}$ et $|y-x| < \rho_1 - \rho_0$. Ainsi, avec la définition de $\vec{w}$ donnée dans (3.13) ci-dessus on peut écrire, pour tout multi-indice α in $\mathbb{N}^3$

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha \vec{w}(t,x)| &\leq \left|(\partial_x^\alpha K) * \left[\vec{\nabla}\wedge\left((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\right)\right](t,x)\right| + \left|(\partial_x^\alpha K) * \left[\vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\psi)\right](t,x)\right| \\
&\leq \sum_{i,j,k}^{3}\left|(\partial_x^\alpha K) * \left[\partial_{x_i}\left((\partial_{x_j}\psi)u_k\right)\right](t,x)\right| + \sum_{i,j,k}^{3}\left|(\partial_x^\alpha K) * \left[\partial_{x_i}(u_j\partial_{x_k}\psi)\right](t,x)\right| \\
&\leq \sum_{i,j,k}^{3}\left|(\partial_x^\alpha \partial_{x_i} K) * \left[(\partial_{x_j}\psi)u_k\right](t,x)\right| + \sum_{i,j,k}^{3}\left|(\partial_x^\alpha \partial_{x_i} K) * \left[u_j(\partial_{x_k}\psi)\right](t,x)\right|,
\end{aligned}$$

et on obtient

$$|\partial_x^\alpha \vec{w}(t,x)| \leq C_\alpha \int_{\{\rho_1-\rho_0<|y-x|,\ y\in B_{x_0,\rho}\}} \frac{|\vec{\nabla}\psi(t,y)||\vec{u}(t,y)|}{|x-y|^{2+|\alpha|}}dy, \tag{3.15}$$

Ainsi, on a le contrôle suivant pour $(t,x) \in \Omega_0$:

$$|\partial_x^\alpha \vec{w}(t,x)| \leq \frac{C}{(\rho_1-\rho_0)^{2+|\alpha|}}\|\vec{\nabla}\psi(t,\cdot)\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2(B_{x_0,\rho})},$$

à partir de lequel on obtient que $\partial_x^\alpha \vec{w} \in L_t^\infty L_x^\infty(\Omega_0)$. La Proposition 3 est maintenant complètement démontrée. ■

Remarque 6 *Dans la Proposition 3 on a énoncé les résultats sur l'ensemble $\Omega_0 \subset \Omega$ et il est possible de prolonger certaines propriétés de la nouvelle variable $\vec{v}$ sur l'ensemble Ω. En effet, suivant les mêmes calculs effectués dans le deuxième point de la proposition précédente, il est facile de voir que nous avons*

$$\vec{v} \in L_t^\infty L_x^2(\Omega) \cap L_t^2 H_x^1(\Omega).$$

En effet,

- on commence par démontrer $\vec{v} \in L_t^\infty L_x^2(\Omega)$ où Ω est de la forme (3.5). En prenant la norme $L^2(B_{x_0,\rho})$ en variable d'espace de l'expression (3.9) on a

$$\begin{aligned}
\|\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})} &\leq \left\|\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge(\psi\vec{u})\right)\right\|_{L^2(B_{x_0,\rho})} + \left\|\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\left((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\right)\right\|_{L^2(B_{x_0,\rho})} \\
&\leq \left\|\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge(\psi\vec{u})\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\left((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

  En appliquant les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev au second terme ci-dessus on obtient

$$\|\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})} \leq C\,\|\psi\vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C\left\|\vec{\nabla}\psi\wedge\vec{u}\right\|_{L^{6/5}(\mathbb{R}^3)}.$$

Maintenant, en utilisant les propriétés du support de la fonction ψ et en utilisant l'inégalité de Hölder on peut écrire

$$\|\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})} \leq C\|\psi\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho_0})}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} + C\|\vec{\nabla}\psi\|_{L^3(B_{x_0,\rho_0})}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}. \quad (3.17)$$

Il nous reste à prendre la norme L^∞ en variable de temps afin d'obtenir

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\|_{L^\infty(I,L^2(B_{x_0,\rho}))} &\leq C\left(\|\psi\|_{L^\infty_t L^\infty_x} + \|\vec{\nabla}\psi\|_{L^\infty_t L^3_x}\right)\|\vec{u}\|_{L^\infty(I,L^2(B_{x_0,\rho_0}))} \\ &\leq C_\psi\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x(\Omega)}.\end{aligned}$$

La dernière quantité ci-dessus est bornée par les hypothèses sur $\vec{u}$.

- On étudie maintenant le fait que $\vec{v} \in L^2\big(I, H^1(B_{x_0,\rho})\big)$: en prenant la norme $H^1(B_{x_0,\rho})$ dans l'expression (3.9) on obtient

$$\|\vec{v}\|_{H^1(B_{x_0,\rho})} \leq \left\|\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\big(\vec{\nabla}\wedge(\psi\vec{u})\big)\right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\big((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\big)\right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Le premier terme à droite ci-dessus peut être contrôle par $\|\psi\vec{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}$, ainsi (dû aux propriétés du support de la fonction ψ et du fait que $B_{x_0,\rho_0} \subset B_{x_0,\rho}$) par $C_\psi\|\vec{u}\|_{H^1(B_{x_0,\rho})}$.

Pour le second terme de l'expression précédente, on a par définition de la norme H^1

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\big((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\big)\right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} &= \left\|\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\big((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\big)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad + \left\|\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\big((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\big)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

En suivant les mêmes calculs effectués dans (3.16)-(3.17) on voit que la première quantité est contrôlée par $\|\vec{\nabla}\psi\|_{L^3(B_{x_0,\rho})}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}$, tandis que la deuxième quantité peut être estimée par $\|\vec{\nabla}\psi\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho})}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}$.

En rassemblant toutes ces estimations, nous obtenons

$$\|\vec{v}\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})} \leq C_\psi\|\vec{u}\|_{H^1(B_{x_0,\rho})},$$

et ainsi on a

$$\|\vec{v}\|_{L^2(I,H^1(B_{x_0,\rho}))} \leq C_\psi\|\vec{u}\|_{L^2_t H^1_x(\Omega)} < +\infty.$$

Il est important de remarquer ici que, le fait que $\vec{w} \in L^\infty_t \mathrm{Lip}_x$ ne peut pas être prolongé sur l'ensemble Ω et afin d'obtenir ces propriétés on a besoin de travailler sur un sous ensemble plus petit $\Omega_0 \subset \Omega$.

Remarquons néanmoins que sur Ω on a le résultat suivant

Corolaire 1 *Si on travaille sur tout l'ensemble Ω, comme $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t H^1_x(\Omega)$ et $\vec{v} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t H^1_x(\Omega)$, on obtient aussi $\vec{w} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t H^1_x(\Omega)$. En effet on a*

$$\|\vec{w}\|_{L^\infty_t L^2_x(\Omega)} \leq C_{\rho,\psi}\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x(\Omega)} \quad \textit{and} \quad \|\vec{w}\|_{L^2_t H^1_x(\Omega)} \leq C_{\rho,\psi}\|\vec{u}\|_{L^2_t H^1_x(\Omega)}.$$

Preuve. On avait vu que $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$, en prenant la L^2 en variable d'espace on trouve

$$\|\vec{w}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})} \leq \|\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})} + \|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})},$$

ensuite en prenant la norme L^∞ en variable de temps on obtient

$$\|\vec{w}\|_{L^\infty(I,L^2(\Omega))} \leq \|\vec{v}\|_{L^\infty(I,L^2(\Omega))} + \|\vec{u}\|_{L^\infty(I,L^2(\Omega))} < +\infty.$$

Par les hypothèses sur $\vec{u}$ et les calculs suivant la Remarque 6.

On passe maintenant à la norme H^1 en variable d'espace de $\vec{w}$

$$\|\vec{w}\|_{H^1(B_{x_0,\rho})} \leq \|\vec{v}\|_{H^1(B_{x_0,\rho})} + \|\vec{u}\|_{H^1(B_{x_0,\rho})},$$

en prenant la norme L^2 en variable de temps on trouve

$$\|\vec{w}\|_{L^2(I,H^1(\Omega))} \leq \|\vec{v}\|_{L^2(I,H^1(\Omega))} + \|\vec{u}\|_{L^2(I,H^1(\Omega))} < +\infty.$$

■

3.4.2 L'équation associée.

Maintenant, nous portons notre attention sur l'équation satisfaite par la nouvelle variable $\vec{v}$ et nous verrons ici qu'on va obtenir une nouvelle équation de Navier-Stokes sur Ω_0 du type

$$\partial_t \vec{v} = \nu \Delta \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla} q + \vec{F},$$

où $\vec{\nabla} q$ est un terme gradient et $\vec{F}$ est une force de divergence nulle. Comme dit dans l'introduction, cette équation sera nommée *équation associée* des équations originales de Navier–Stokes (3.2). Bien sûr, Notre objectif maintenant est de prouver que q et $\vec{F}$ peuvent être facilement estimées à partir des hypothèses sur $\vec{f}$ et $\vec{u}$ sans impliquer la pression p.

Rappelons que la variable $\vec{v}$ a été définie par $\vec{v} = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi \vec{\nabla} \wedge \vec{u})$, nous allons donc définir maintenant d'une manière analogue

$$\vec{F_0} = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi \vec{\nabla} \wedge \vec{f}),$$

et nous avons le lemme suivant qui est une conséquence des calculs effectués précédemment dans la Proposition 3.

Lemme 4 *Soit Ω un sous ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ de la forme (3.5) et soit Ω_0 l'ensemble donné dans (3.7). Soit $\vec{f}$ une force donnée telle que* $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$, *alors*

1) si $\vec{f} \in L_t^{10/7} L_x^{10/7}(\Omega)$ alors $\vec{F_0} \in L_t^{10/7} L_x^{10/7}(\Omega_0)$,

2) si $\vec{f} \in L_t^2 L_x^2(\Omega)$ alors $\vec{F_0} \in L_t^2 L_x^2(\Omega_0)$,

3) si $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1(\Omega)$ alors $\vec{F_0} \in L_t^2 H_x^1(\Omega_0)$.

Preuve. On remarquer que, dans le même esprit des formules (3.12)-(3.13), la force $\vec{F}_0$ peut être décomposée sur Ω_0 par $\vec{F}_0 = \vec{f} + \vec{w}_f$ où

$$\vec{w}_f = \frac{1}{\Delta}\left[\vec{\nabla} \wedge \left((\vec{\nabla}\psi) \wedge \vec{f}\right)\right] - \frac{1}{\Delta}\left[\vec{\nabla}(\vec{f}\cdot\vec{\nabla}\psi)\right].$$

On commence par le premier point, en prenant la norme $L^{10/7}$ en variable d'espace on a

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_0\|_{L^{10/7}(B_{x_0,\rho_0})} &\leq \|\vec{f}\|_{L^{10/7}(B_{x_0,\rho_0})} + \|\vec{w}_{\vec{f}}\|_{L^{10/7}(B_{x_0,\rho_0})} \\ &\leq \|\vec{f}\|_{L^{10/7}(B_{x_0,\rho})} + \|\vec{w}_{\vec{f}}\|_{L^{\infty}(B_{x_0,\rho_0})}\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité (3.15) pour le second terme de l'expression précédente on trouve

$$\begin{aligned}|\vec{w}_{\vec{f}}(t,x)| &\leq C\int_{\{\rho_1-\rho_0<|y-x|,\ y\in B_{x_0,\rho}\}} \frac{|\vec{\nabla}\psi(t,y)||\vec{f}(t,y)|}{|x-y|^2}dy \\ &\leq \frac{C}{(\rho_1-\rho_0)^2}\|\vec{\nabla}\psi(t,\cdot)\|_{L^{10/3}(B_{x_0,\rho})}\|\vec{f}(t,\cdot)\|_{L^{10/7}(B_{x_0,\rho})},\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Hölder. On obtient

$$\|\vec{F}_0\|_{L^{10/7}(B_{x_0,\rho_0})} \leq C\|\vec{f}\|_{L^{10/7}(B_{x_0,\rho})} + C_\psi\|\vec{f}(t,\cdot)\|_{L^{10/7}(B_{x_0,\rho})},$$

et en prenant la norme $L^{10/7}$ en variable de temps on trouve

$$\|\vec{F}_0\|_{L^{10/7}(I,L^{10/7}(B_{x_0,\rho_0}))} \leq C\|\vec{f}\|_{L^{10/7}(I,L^{10/7}(B_{x_0,\rho}))} + C_\psi\|\vec{f}(t,\cdot)\|_{L^{10/7}(I,L^{10/7}(B_{x_0,\rho}))} < +\infty,$$

par hypothèse sur $\vec{f}$.

Maintenant on passe au deuxième point du lemme. En prenant la norme L^2 en variable d'espace on a

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_0\|_{L^{2}(B_{x_0,\rho_0})} &\leq \|\vec{f}\|_{L^{2}(B_{x_0,\rho_0})} + \|\vec{w}_{\vec{f}}\|_{L^{2}(B_{x_0,\rho_0})} \\ &\leq \|\vec{f}\|_{L^{2}(B_{x_0,\rho})} + C\|\vec{w}_{\vec{f}}\|_{L^{\infty}(B_{x_0,\rho_0})},\end{aligned}$$

et en utilisant les mêmes arguments utilisés dans (3.15) on trouve

$$\|\vec{F}_0\|_{L^{2}(B_{x_0,\rho_0})} \leq \|\vec{f}\|_{L^{2}(B_{x_0,\rho})} + C_\psi\|\vec{f}(t,\cdot)\|_{L^{2}(B_{x_0,\rho})},$$

en prenant la norme L^2 en variable de temps on obtient

$$\|\vec{F}_0\|_{L^{2}(I,L^{2}(B_{x_0,\rho_0}))} \leq \|\vec{f}\|_{L^{2}(I,L^{2}(B_{x_0,\rho_0}))} + C_\psi\|\vec{f}(t,\cdot)\|_{L^{2}(I,L^{2}(B_{x_0,\rho_0}))} < +\infty.$$

On arrive au dernier point du lemme. En prenant la norme H^1 en variable d'espace on a

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_0\|_{H^{1}(B_{x_0,\rho_0})} &\leq \|\vec{f}\|_{H^{1}(B_{x_0,\rho_0})}\|\vec{w}_{\vec{f}}\|_{H^{1}(B_{x_0,\rho_0})} \\ &\leq \|\vec{f}\|_{H^{1}(B_{x_0,\rho})}\|\vec{w}_{\vec{f}}\|_{H^{1}(B_{x_0,\rho_0})} \\ &\leq \|\vec{f}\|_{H^{1}(B_{x_0,\rho})}\| + C_\psi\|\vec{f}\|_{L^{2}(B_{x_0,\rho})},\end{aligned}$$

où on a utilisé la définition de l'espace H^1 et l'inégalité (3.15). En intégrant en variable de temps on trouve

$$\|\vec{F}_0\|_{L^{2}(I,H^{1}(B_{x_0,\rho_0}))} \leq \|\vec{f}\|_{(I,H^{1}(B_{x_0,}))}\| + C_\psi\|\vec{f}\|_{(I,L^{2}(B_{x_0,\rho}))} < +\infty.$$

■

Remarquons aussi que, comme la distribution $\vec{\nabla} \wedge (\psi \vec{\nabla} \wedge \vec{f})$ est à support compact et comme $-\frac{1}{\Delta}$ est un opérateur de convolution avec la distribution $\delta_t \otimes \frac{1}{4\pi|x|}$, la quantité $\vec{F}_0$ est bien définie pour tout distribution $\vec{f} \in \mathcal{D}'(\Omega)$: nous pouvons envisager un cadre plus large de la force et ce point de vue sera adoptée dans la proposition suivante.

En effet, nous expliquerons avec le résultat suivant comment déduire l'équation associée satisfaite par la variable $\vec{v}$ et nous allons étudier la relation entre $\vec{F}_0$ et la force $\vec{F}$. Nous allons aussi donner quelques propriétés importantes de la nouvelle pression q.

Proposition 4 *Sous les hypothèses $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\vec{f} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la fonction $\vec{v}$ définie par la formule (3.8) ci-dessus satisfait les équations de Navier–Stokes suivantes sur Ω_0*

$$\partial_t \vec{v} = \nu \Delta \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla} q + \vec{F}, \tag{3.18}$$

avec les propriétés suivantes

1) la pression q est une fonction telle que $q \in L^{3/2}_t L^{3/2}_x(\Omega_0)$,

2) la force $\vec{F}$ est telle que $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$ *et $\vec{F} - \vec{F}_0 \in L^2_t L^2_x(\Omega_0)$, où $\vec{F}_0 = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi \vec{\nabla} \wedge \vec{f})$.*

Observons à ce stade de la preuve qu'on suppose seulement que $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\vec{f} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, mais ceci est suffisant pour obtenir que la nouvelle pression q appartient à l'espace $L^{3/2}_t L^{3/2}_x(\Omega_0)$. Cependant nous aurons besoin plus tard de certaines hypothèses supplémentaires sur $\vec{f}$ afin d'obtenir un comportement plus régulier pour la force globale $\vec{F}$.

Preuve. Nous commençons par décrire l'équation satisfaite par $\partial_t \vec{v}$. Comme on travaille sur l'ensemble Ω_0, on a $\partial_t \psi = 0$ pour $t \in I_0$ par les propriétés du support de ψ et on peut écrire :

$$\partial_t \vec{v} = \partial_t \left[-\frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \wedge (\psi \vec{\omega}) \right] = -\frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \wedge \big(\psi (\partial_t \vec{\omega}) \big),$$

ainsi, en utilisant l'équation (3.6) on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{v} &= -\frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \wedge \left(\psi \left(\nu \Delta \vec{\omega} - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{f} \right) \right) \\ &= \nu \left(\underbrace{-\frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \wedge (\psi \Delta \vec{\omega})}_{(A)} \right) + \underbrace{\frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \wedge \Big(\psi (\vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u})) \Big)}_{(B)} + \vec{F}_0, \end{aligned} \tag{3.19}$$

où

$$\vec{F}_0 = -\frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \wedge \left(\psi \vec{\nabla} \wedge \vec{f} \right). \tag{3.20}$$

On étudie maintenant chacun des termes (A) et (B) afin de simplifier l'expression (3.19).

(A) Pour le premier terme $-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge(\psi\Delta\vec{\omega})$ on écrit les identités suivantes pour $\psi\Delta\vec{\omega}$:

$$\begin{aligned}\psi\Delta\vec{\omega} &= \psi\Delta(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) = \Delta(\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) - (\Delta\psi)\vec{\nabla}\wedge\vec{u} - 2\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}\psi)(\partial_{x_j}\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) \\ &= \Delta(\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) - (\Delta\psi)\vec{\nabla}\wedge\vec{u} - 2\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}\left((\partial_{x_j}\psi)(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\right) + 2(\Delta\psi)\vec{\nabla}\wedge\vec{u} \\ &= \Delta(\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) + (\Delta\psi)\vec{\nabla}\wedge\vec{u} - 2\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}\left((\partial_{x_j}\psi)(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\right).\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant l'identité classique du calcul vectoriel

$$\vec{\nabla}\wedge(a\vec{b}) = a\vec{\nabla}\wedge\vec{b} + (\vec{\nabla}a)\wedge\vec{b},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\psi\Delta\vec{\omega} &= \Delta(\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) + \left(\vec{\nabla}\wedge(\Delta\psi\vec{u}) - \vec{\nabla}(\Delta\psi)\wedge\vec{u}\right) - 2\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}\left(\vec{\nabla}\wedge\left((\partial_{x_j}\psi)\vec{u}\right)\right) \\ &\quad +2\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}\left(\vec{\nabla}(\partial_{x_j}\psi)\wedge\vec{u}\right),\end{aligned}$$

de sorte que nous avons

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge[\psi\Delta\vec{\omega}] &= \underbrace{-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\left[\Delta(\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\right]}_{(1)} \underbrace{-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\left[\vec{\nabla}\wedge(\Delta\psi\vec{u}) - \vec{\nabla}(\Delta\psi)\wedge\vec{u}\right]}_{(2)} \\ &\quad \underbrace{+2\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\left[\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}\left(\vec{\nabla}\wedge\left((\partial_{x_j}\psi)\vec{u}\right)\right)\right]}_{(3)} \\ &\quad \underbrace{-2\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\left[\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}\left(\vec{\nabla}(\partial_{x_j}\psi)\wedge\vec{u}\right)\right]}_{(4)}.\end{aligned}$$

À ce point on remarque que le terme (1) ci-dessus est en fait $\Delta\vec{v}$, en effet :

$$-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\left[\Delta(\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\right] = \Delta\left(-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge(\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\right) = \Delta\vec{v},$$

et donc on peut écrire

$$-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge(\psi\Delta\vec{\omega}) = \Delta\vec{v} + \vec{F}_1,$$

où $\vec{F}_1 = (2)+(3)+(4)$, *i.e.* :

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\left[\vec{\nabla}\wedge(\Delta\psi\vec{u}) - \vec{\nabla}(\Delta\psi)\wedge\vec{u}\right] + 2\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\left[\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}\left(\vec{\nabla}\wedge\left((\partial_{x_j}\psi)\vec{u}\right)\right)\right] \\ &\quad -2\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\left[\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}\left(\vec{\nabla}(\partial_{x_j}\psi)\wedge\vec{u}\right)\right]. \qquad (3.21)\end{aligned}$$

Observons que, comme la divergence du rotationnel est toujours nul, on obtient bien $\mathrm{div}\,(\vec{F}_1) = 0$.

(B) On étudie maintenant le deuxième terme de (3.19). Pour $\psi(\vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}))$, en utilisant les identités du calcul vectoriel on écrit

$$\psi(\vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u})) = \vec{\nabla} \wedge \psi(\vec{\omega} \wedge \vec{u}) - (\vec{\nabla}\psi) \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \psi\vec{u}) - (\vec{\nabla}\psi) \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}),$$

donc on obtient

$$\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \Big[\psi(\vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}))\Big] = \frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \Big[\vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \psi\vec{u})\Big] - \frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \Big[(\vec{\nabla}\psi) \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u})\Big].$$

On remarque ici que

$$\vec{\nabla} \wedge \Big[\vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \psi\vec{u})\Big] = \Big(\vec{\nabla}(\mathrm{div}\,(\vec{\omega} \wedge \psi\vec{u})) - \Delta(\vec{\omega} \wedge \psi\vec{u})\Big),$$

et on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \Big[\psi(\vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}))\Big] &= \frac{1}{\Delta}\Big(\vec{\nabla}(\mathrm{div}\,(\vec{\omega} \wedge \psi\vec{u})) - \Delta(\vec{\omega} \wedge \psi\vec{u})\Big) \\
&\quad -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \Big[(\vec{\nabla}\psi) \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u})\Big] \\
&= -\vec{\nabla}\left(-\frac{1}{\Delta}(\mathrm{div}\,(\vec{\omega} \wedge \psi\vec{u})\right) - \vec{\omega} \wedge \psi\vec{u} \\
&\quad -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \Big[(\vec{\nabla}\psi) \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u})\Big].
\end{aligned}$$

Finalement, le deuxième terme de (3.19) peut être réécrit sous la forme suivante

$$\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \Big[\psi(\vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}))\Big] = -\vec{\nabla}q_1 - \vec{\omega} \wedge \psi\vec{u} + \vec{F}_2,$$

où on a

$$q_1 = -\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\omega} \wedge \psi\vec{u})), \tag{3.22}$$

et

$$\vec{F}_2 = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \Big[(\vec{\nabla}\psi) \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u})\Big]. \tag{3.23}$$

Remarquons qu'on a en particulier $\mathrm{div}\,(\vec{F}_2) = 0$ pour la même raison qu'a permit d'obtenir $\mathrm{div}\,(\vec{F}_1) = 0$ (la divergence du rotationnel est toujours nulle).

Maintenant, en revenant à l'équation (3.19) et avec la définition des quantités $q_1, \vec{F}_0, \vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ données dans (3.22), (3.20), (3.21) et (3.23) respectivement, on obtient l'équation suivante

$$\partial_t\vec{v} = \nu\Delta\vec{v} - \big[\vec{\omega} \wedge \psi\vec{u}\big] - \vec{\nabla}q_1 + \vec{F}_0 + \nu\vec{F}_1 + \vec{F}_2, \tag{3.24}$$

qui est presque l'équation désirée (3.18) énoncée dans la Proposition 4, mais nous avons encore besoin d'étudier le terme $\vec{\omega} \wedge \psi\vec{u}$.

Pour cela, on rappelle que sur Ω_0, la fonction ψ est constante et égale à 1, on a l'identité $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \psi\vec{u}$ et on peut écrire

$$\vec{\omega} \wedge \psi\vec{u} = \big(\vec{\nabla} \wedge \psi\vec{u}\big) \wedge \psi\vec{u}.$$

Maintenant, on réécrit $\psi\vec{u}$ en utilisant la formule (3.12) donnée dans la page 62 :

$$\psi\vec{u} = \vec{v} + \frac{1}{\Delta}\left[\vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\psi)\right] - \frac{1}{\Delta}\left[\vec{\nabla}\wedge\left((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\right)\right] = \vec{v} + \vec{\beta},$$

où $\vec{\beta}$ est défini par l'expression suivante

$$\vec{\beta} = \frac{1}{\Delta}\left[\vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\psi)\right] - \frac{1}{\Delta}\left[\vec{\nabla}\wedge\left((\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{u}\right)\right]. \tag{3.25}$$

Remarque 7 *Observons qu'on a $\vec{\beta} = -\vec{w}$, où $\vec{w}$ a été donnée dans (3.13).*

On obtient ainsi la formule

$$\begin{aligned}\vec{\omega}\wedge\psi\vec{u} &= \vec{\nabla}\wedge(\vec{v}+\vec{\beta})\wedge(\vec{v}+\vec{\beta}) \\ &= (\vec{\nabla}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v} + (\vec{\nabla}\wedge\vec{v})\wedge\vec{\beta} + (\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta})\wedge\vec{v} + (\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta})\wedge\vec{\beta}. \end{aligned}\tag{3.26}$$

Comme la nouvelle variable $\vec{v}$ est à divergence nulle (par la Proposition 3) on a l'identité $(\vec{\nabla}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{v}|^2$. Définissons maintenant q_3 par

$$q_3 = -\frac{1}{2}|\vec{v}|^2, \tag{3.27}$$

et on a alors pour le premier terme de (3.26) :

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{\nabla}q_3.$$

Afin d'estimer les termes restants de (3.26) on définit

$$\vec{A} = (\vec{\nabla}\wedge\vec{v})\wedge\vec{\beta} + (\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta})\wedge\vec{v} + (\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta})\wedge\vec{\beta}, \tag{3.28}$$

on remarque maintenant que sur Ω_0, on a $\vec{A} = \psi\vec{A}$ et on décompose $\psi\vec{A}$ de la manière suivante :

$$\psi\vec{A} = -\vec{F}_3 + \vec{\nabla}q_2, \tag{3.29}$$

où

$$q_2 = \frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\psi\vec{A}). \tag{3.30}$$

Encore une fois, on remarque que nous avons $\mathrm{div}\,(\vec{F}_3) = 0$.

Ainsi, on a obtenu que $\vec{\omega}\wedge\psi\vec{u} = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{F}_3 + \vec{\nabla}q_2 + \vec{\nabla}q_3$ et en revenant à (3.24) on peut écrire

$$\begin{aligned}\partial_t\vec{v} &= \nu\Delta\vec{v} - \left[\vec{\omega}\wedge\psi\vec{u}\right] - \vec{\nabla}q_1 + \vec{F}_0 + \nu\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ &= \nu\Delta\vec{v} - \left[(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{F}_3 + \vec{\nabla}q_2 + \vec{\nabla}q_3\right] - \vec{\nabla}q_1 + \vec{F}_0 + \nu\vec{F}_1 + \vec{F}_2,\end{aligned}$$

et finalement on obtient l'équation associée pour $\vec{v}$

$$\partial_t\vec{v} = \nu\Delta\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla}q + \vec{F},$$

avec $q = q_1 + q_2 + q_3$ et $\vec{F} = \vec{F}_0 + \nu\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.

Maintenant qu'on a obtenu les expressions qui définissent q et $\vec{F}$, nous devons démontrer les estimations recherchées sur la pression et la force. Cela se fera dans les deux lemmes suivants.

Lemme 5 *La pression q est une fonction telle que $q \in L_t^{3/2} L_x^{3/2}(\Omega_0)$.*

Preuve. On rappelle que $q = q_1 + q_2 + q_3$, où les expressions q_1, q_2 et q_3 sont données dans (3.22), (3.30) et (3.27) respectivement, *i.e.* :

$$q_1 = -\frac{1}{\Delta}(\mathrm{div}\,(\vec{\omega} \wedge \psi\vec{u})), \qquad q_2 = \frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\psi\vec{A}) \quad \text{et} \quad q_3 = -\frac{1}{2}|\vec{v}|^2.$$

On va étudier chacun de ces termes séparément. Le premier et le dernier terme (*i.e.* q_1 et q_3) sont faciles à traiter :

- Pour q_1, nous écrivons les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
\|q_1\|_{L^{3/2}(B_{x_0,\rho_0})} &= \left\| \frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\omega} \wedge \psi\vec{u})) \right\|_{L^{3/2}(B_{x_0,\rho_0})} \leq C_{\rho_0} \left\| \frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\omega} \wedge \psi\vec{u}) \right\|_{L^{9/5}(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C_{\rho_0}\|\vec{\omega} \wedge \psi\vec{u}\|_{L^{9/8}(\mathbb{R}^3)} \leq C_{\rho_0}\|\vec{\omega}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\|\psi\vec{u}\|_{L^{18/7}(B_{x_0,\rho})} \\
&\leq C_{\rho_0}\|\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\|\psi\|_{L^\infty}\|\vec{u}\|_{L^{18/7}(B_{x_0,\rho})} \\
&\leq C_{\rho_0}\|\psi\|_{L^\infty}\|\vec{u}\|^{4/3}_{H^1(B_{x_0,\rho})}\|\vec{u}\|^{2/3}_{L^2(B_{x_0,\rho})},
\end{aligned}$$

  où nous avons utilisé l'inégalité de Hölder, les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev, les propriétés du support de ψ et une estimation d'interpolation. Maintenant, intégrant par rapport à la variable de temps on trouve

$$\|q_1\|_{L_t^{3/2}L_x^{3/2}(\Omega_0)} \leq C_{\rho_0,\psi}\|\vec{u}\|^{4/3}_{L^2(I_0,H^1(B_{x_0,\rho}))}\|\vec{u}\|^{2/3}_{L^\infty(I_0,L^2(B_{x_0,\rho}))} < +\infty.$$

- Pour $q_3 = -\frac{1}{2}|\vec{v}|^2$, on écrit

$$\|q_3\|_{L^{3/2}(B_{x_0,\rho_0})} = C\|\vec{v}\|^2_{L^3(B_{x_0,\rho_0})} \leq C\|\vec{v}\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})}\|\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})},$$

  et en prenant la norme $L^{3/2}$en variable de temps on a

$$\|q_3\|_{L_t^{3/2}L_x^{3/2}(\Omega_0)} \leq C_{\rho_0}\|\vec{v}\|_{L^2(I_0,H^1(B_{x_0,\rho_0}))}\|\vec{v}\|_{L^\infty(I_0,L^2(B_{x_0,\rho_0}))} < +\infty.$$

Ainsi, le principal terme que nous devons étudier est le terme q_2. Rappelons que

$$q_2 = \frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\psi\vec{A})$$

avec

$$\vec{A} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{\beta} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{\beta}) \wedge \vec{v} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{\beta}) \wedge \vec{\beta}$$

où $\vec{\beta}$ a été défini dans (3.25). Ainsi, en appliquant l'inégalité de Hölder et les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev on écrit

$$\|q_2\|_{L^{3/2}(B_{x_0,\rho_0})} \leq C_{\rho_0}\|q_2\|_{L^{9/5}(B_{x_0,\rho_0})} \leq C_{\rho_0}\|\psi\vec{A}\|_{L^{9/8}(B_{x_0,\rho_0})}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\|\psi\vec{A}\|_{L^{9/8}(B_{x_0,\rho_0})} &\leq \|\vec{\nabla} \wedge \vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}\|\psi\vec{\beta}\|_{L^{18/7}(B_{x_0,\rho_0})} \\
&+ \|\vec{\nabla} \wedge \vec{\beta}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}\|\psi\vec{v}\|_{L^{18/7}(B_{x_0,\rho_0})} \\
&+ \|\vec{\nabla} \wedge \vec{\beta}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}\|\psi\vec{\beta}\|_{L^{18/7}(B_{x_0,\rho_0})}.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant une inégalité d'interpolation on a

$$\begin{aligned}\|\psi\vec{A}\|_{L^{9/8}(B_{x_0,\rho_0})} &\leq \|\vec{\nabla}\wedge\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}\|\psi\vec{\beta}\|^{2/3}_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}\|\psi\vec{\beta}\|^{1/3}_{H^1(B_{x_0,\rho_0})}\\ &+ \|\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}\|\psi\vec{v}\|^{2/3}_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}\|\psi\vec{v}\|^{1/3}_{H^1(B_{x_0,\rho_0})} \qquad (3.31)\\ &+ \|\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}\|\psi\vec{\beta}\|^{2/3}_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}\|\psi\vec{\beta}\|^{1/3}_{H^1(B_{x_0,\rho_0})}.\end{aligned}$$

Rappelons que $\vec{\beta}=-\vec{w}$ et en appliquant le Corollaire 1 on obtient

$$\|\psi\vec{\beta}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} \leq C_{\rho,\psi}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})},$$

et de manière similaire on a

$$\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}\leq C_{\rho,\psi}\|\vec{u}\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})}.$$

Ainsi, avec ces inégalités précédentes, on obtient pour l'expression (3.31) l'estimation suivante

$$\begin{aligned}\|q_2\|_{L^{3/2}(B_{x_0,\rho_0})} &\leq C_{\rho_0}\|\psi\vec{A}\|_{L^{9/8}(B_{x_0,\rho_0})}\\ &\leq C_{\rho_0,\psi}\|\vec{v}\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})}\|\vec{u}\|^{2/3}_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}\|\vec{u}\|^{1/3}_{H^1(B_{x_0,\rho_0})}\\ &\quad +C_{\rho_0,\psi}\|\vec{u}\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})}\|\vec{v}\|^{2/3}_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}\|\vec{v}\|^{1/3}_{H^1(B_{x_0,\rho_0})}\\ &\quad +C_{\rho_0,\psi}\|\vec{u}\|^{4/3}_{H^1(B_{x_0,\rho_0})}\|\vec{u}\|^{2/3}_{L^2(B_{x_0,\rho_0})},\end{aligned}$$

et finalement, comme on a $\vec{v}\in L^\infty_t L^2_x(\Omega_0)\cap L^2_t H^1_x(\Omega_0)$ et $\vec{u}\in L^\infty_t L^2_x(\Omega_0)\cap L^2_t H^1_x(\Omega)$, on obtient $q_2\in L^{3/2}_t L^{3/2}_x(\Omega_0)$.

On a ainsi prouvé que $q=q_1+q_2+q_3\in L^{3/2}_t L^{3/2}_x(\Omega_0)$ et la preuve du lemme 5 est finie. ■

Lemme 6 *La force $\vec{F}$ est telle que* $\operatorname{div}(\vec{F})=0$ *et* $\vec{F}-\vec{F}_0\in L^2_t L^2_x(\Omega_0)$.

Preuve. On a déjà vu que $\operatorname{div}(\vec{F})=0$. Ainsi, le seul point qui nous reste à vérifier est que $\vec{F}-\vec{F}_0\in L^2_t L^2_x(\Omega_0)$.

Encore une fois, nous allons étudier chaque terme de $\vec{F}-\vec{F}_0=\nu\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$ séparément.

- Pour $\vec{F}_1$, nous commençons par rappeler la définition donnée dans (3.21) :

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\Big[\vec{\nabla}\wedge(\Delta\psi\vec{u})-\vec{\nabla}(\Delta\psi)\wedge\vec{u}\Big]+2\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\left[\sum_{j=1}^3\partial_{x_j}\Big(\vec{\nabla}\wedge\big((\partial_{x_j}\psi)\vec{u}\big)\Big)\right]\\ &\quad -2\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\left[\sum_{j=1}^3\partial_{x_j}\Big(\vec{\nabla}(\partial_{x_j}\psi)\wedge\vec{u}\Big)\right].\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_1\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} &\leq C\Big(\|\Delta\psi\,\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}+\|\vec{\nabla}(\Delta\psi)\wedge\vec{u}\|_{L^{6/5}(B_{x_0,\rho})}\\ &\quad +\sum_{j=1}^3\|\vec{\nabla}\wedge((\partial_j\psi)\vec{u})\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}+\sum_{j=1}^3\|(\vec{\nabla}\partial_j\psi)\wedge\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\Big)\end{aligned}$$

Ainsi, avec les propriétés de ψ on obtient

$$\|\vec{F}_1\|_{L^2_tL^2_x(\Omega_0)} \leq C_\psi \|\vec{u}\|_{L^2(I_0,H^1(B_{x_0,\rho})} \leq C_\psi \|\vec{u}\|_{L^2_tH^1_x(\Omega)} < +\infty.$$

- Pour $\vec{F}_2$ on a par la formule (3.23) :

$$\|\vec{F}_2\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} = \left\| -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \Big((\vec{\nabla}\psi) \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) \Big) \right\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}.$$

Ici, nous allons appliquer les mêmes arguments utilisés dans l'étude de la quantité $\vec{w}$ traitée dans (3.15). En effet, on peut écrire

$$\left\| -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \Big((\vec{\nabla}\psi) \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) \Big) \right\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} \leq C_{\rho_0} \left\| \frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \Big((\vec{\nabla}\psi) \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) \Big) \right\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho_0})},$$

mais puisque, pour $x \in B(x_0,\rho_0)$, on a

$$\left| \frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \Big((\vec{\nabla}\psi) \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) \Big)(t,x) \right| \leq C \int_{\{\rho_1-\rho_0<|x-y|,\, y\in B_{x_0,\rho}\}} \frac{|\vec{\nabla}\psi(t,y)|}{|x-y|^2} |\vec{\omega}(t,y)||\vec{u}(t,y)| dy,$$

on obtient la majoration suivante

$$\left| \frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \Big((\vec{\nabla}\psi) \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) \Big)(t,x) \right| \leq C_{\rho_0} \|\vec{\nabla}\psi\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho})} \int_{B_{x_0,\rho}} |\vec{\omega}(t,y)||\vec{u}(t,y)| dy.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$\left| \frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \Big((\vec{\nabla}\psi) \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) \Big)(t,x) \right| \leq C_{\rho_0,\psi} \|\vec{\omega}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})} \|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}.$$

Maintenant, prenant la norme L^2 en variable de temps on a,

$$\begin{aligned} \|\vec{F}_2\|_{L^2_tL^2_x(\Omega_0)} &\leq C_{\rho_0,\psi} \|\vec{\omega}\|_{L^2(I_0,L^2(B_{x_0,\rho}))} \|\vec{u}\|_{L^\infty(I_0,L^2(B_{x_0,\rho}))} \\ &\leq C_{\rho_0,\psi} \|\vec{u}\|_{L^2_tH^1_x(\Omega)} \|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\Omega)} < +\infty. \end{aligned}$$

- Pour $\vec{F}_3$ on a $\vec{F}_3 = -\psi\vec{A} + \vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\psi\vec{A})$. Rappelons que $\psi(t,x) = \phi(t)\Phi(x)$, on introduit alors une fonction localisante $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ qui est égale à 1 sur B_{x_0,ρ_3} et son support est inclus dans B_{x_0,ρ_2} avec $\rho_0 < \rho_3 < \rho_2 < \rho_1 < \rho$, de sorte que sur Ω_0 on a

$$\vec{F}_3 = -\phi\eta\vec{A} + \vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\phi\eta\vec{A}) + \vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,\big(\psi(1-\eta)\vec{A}\big),$$

ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\vec{F}_3\|_{L^2_tL^2_x(\Omega_0)} &\leq \|\phi\eta\vec{A}\|_{L^2_tL^2_x(\Omega_0)} + \left\| \vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\phi\eta\vec{A}) \right\|_{L^2_tL^2_x(\Omega_0)} \\ &+ \left\| \vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,\big(\psi(1-\eta)\vec{A}\big) \right\|_{L^2_tL^2_x(\Omega_0)}. \end{aligned}$$

On étudie le premier terme $\|\phi\eta\vec{A}\|_{L^2_tL^2_x(\Omega_0)}$ et avec la définition de $\vec{A}$ donnée dans (3.28) on a les estimations suivantes en variable d'espace

$$\begin{aligned}\|\phi\eta\vec{A}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} &\leq \big\|\phi\eta\big((\vec{\nabla}\wedge\vec{v})\wedge\vec{\beta}\big)\big\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} + \big\|\phi\eta\big((\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta})\wedge\vec{v}\big)\big\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} \\ &\quad + \big\|\phi\eta\big((\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta})\wedge\vec{\beta}\big)\big\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} \\ &\leq \|\vec{\nabla}\wedge\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}\|\phi\eta\vec{\beta}\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho_0})} + \|\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}\|\phi\eta(\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta})\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho_0})} \\ &\quad + \|\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}\|\phi\eta\vec{\beta}\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho_0})}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Ainsi, comme $\vec{\beta} = -\vec{w}$ et comme par la Proposition 3 nous avons $\vec{w} \in L^\infty_t \mathrm{Lip}_x(\Omega_0)$, alors on a les inégalités

$$\begin{aligned}\|\phi\eta\vec{\beta}\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho_0})} &\leq \|\vec{\beta}\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho_0})} \leq C_{\rho_0}\|\vec{\nabla}\psi\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}, \\ \|\phi\eta(\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta})\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho_0})} &\leq \|\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta}\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho_0})} \leq C_{\rho_0}\|\vec{\nabla}\psi\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}, \\ \|\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} &\leq C_{\rho_0}\|\vec{\nabla}\psi\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}, \end{aligned}$$

après une intégration en variable de temps on obtient

$$\begin{aligned}\|\phi\eta\vec{A}\|_{L^2_tL^2_x(\Omega_0)} &\leq C_{\rho,\psi}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{v}\|_{L^2_tL^2_x(\Omega_0)}\|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\Omega)} \\ &\quad + C_{\rho,\psi}\|\vec{v}\|_{L^2_tL^2_x(\Omega_0)}\|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\Omega)} + C_{\rho,\psi}\|\vec{u}\|_{L^2_tL^2_x(\Omega)}\|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\Omega)} \\ &\leq C_\rho\|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\Omega)}\left(\|\vec{u}\|_{L^2_tH^1_x(\Omega)} + \|\vec{v}\|_{L^2_tH^1_x(\Omega)}\right) < +\infty. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Maintenant on étudie le second terme de (3.32) et par les propriétés du support de η on peut écrire

$$\begin{aligned}\left\|\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\phi\eta\vec{A})\right\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} &\leq \left\|\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\phi\eta\vec{A})\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\phi\eta\vec{A}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C\|\phi\eta\vec{A}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_2})}. \end{aligned}$$

Comme $\rho_2 < \rho_1 < \rho$ et ainsi $B_{x_0,\rho_2} \subset B_{x_0,\rho}$, on peut appliquer les mêmes arguments utilisés dans (3.32)-(3.33) pour obtenir l'estimation suivante (voir aussi la Remarque 6) :

$$\left\|\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\phi\eta\vec{A})\right\|_{L^2_tL^2_x(\Omega_0)} \leq C_\rho\|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\Omega)}\left(\|\vec{u}\|_{L^2_tH^1_x(\Omega)} + \|\vec{v}\|_{L^2_tH^1_x(\Omega)}\right) < +\infty. \tag{3.34}$$

À cause des propriétés du support de $\psi(1-\eta)$, le dernier terme de (3.32) ne peut pas être traité d'une façon similaire et on a pour $(t,x) \in \Omega_0$

$$\begin{aligned}\left|\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\psi(1-\eta)\vec{A})(t,x)\right| &\leq C\int_{\{\rho_3-\rho_0<|x-y|,\, y\in B_{x_0,\rho}\}} \frac{1}{|x-y|^3}|\psi(t,y)|\,|\vec{A}(t,y)|\,dy \\ \leq C\|\psi\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho})}\frac{1}{(\rho_3-\rho_0)^3}&\Big(\|\vec{\nabla}\wedge\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\|\psi\vec{\beta}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})} + \|\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\|\psi\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})} \\ &\quad + \|\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\|\psi\vec{\beta}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\Big).\end{aligned}$$

Maintenant, comme $\vec{\beta} = -\vec{w}$, on applique le Corollaire 1 pour obtenir :

$$\begin{aligned}\left|\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\psi(1-\eta)\vec{A})(t,x)\right| \leq C_{\rho,\psi}&\left(\|\vec{v}\|_{H^1(B_{x_0,\rho})}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})} + \|\vec{u}\|_{H^1(B_{x_0,\rho})}\|\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\right. \\ &\left.+\|\vec{u}\|_{H^1(B_{x_0,\rho})}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\right),\end{aligned}$$

de sorte que

$$\left\|\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\psi(1-\eta)\vec{A})\right\|_{L^2_tL^2_x(\Omega_0)} \leq C_{\rho,\psi}\Big(\|\vec{v}\|_{L^2_tH^1_x(\Omega)}\|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\Omega)} + \|\vec{u}\|_{L^2_tH^1_x(\Omega)}\|\vec{v}\|_{L^\infty_tL^2_x(\Omega)} + \|\vec{u}\|_{L^2_tH^1_x(\Omega)}\|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\Omega)}\Big) < +\infty. \quad (3.35)$$

Avec les inégalités (3.33), (3.34) et (3.35) on obtient $\vec{F}_3 \in L^2_tL^2_x(\Omega_0)$.
Ainsi avec les estimations sur $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ on a finalement

$$\|\vec{F}-\vec{F}_0\|_{L^2_tL^2_x(\Omega_0)} < +\infty,$$

et la preuve du lemme 6 est terminée. ■

Reprenons la preuve de la Proposition 4. À ce point, avec les Lemmes 5 et 6 on a prouvé que la nouvelle variable

$$\vec{v} = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge(\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}),$$

satisfait *localement* le système de Navier-Stokes suivant

$$\partial_t\vec{v} = \Delta\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla}q + \vec{F},$$

où q est une pression telle que $q \in L^{3/2}_tL^{3/2}_x(\Omega_0)$ et $\vec{F}$ est une force telle que $\mathrm{div}\,(\vec{F}) = 0$ et $\vec{F}-\vec{F}_0 \in L^2_tL^2_x(\Omega_0)$, qui est la conclusion de la Proposition 4. ■

Il pourrait être intéressant de noter que, si $\vec{u}$ est plus régulière, on a une estimation meilleure sur $\vec{F}-\vec{F}_0$:

Lemme 7 *Si de plus $\vec{u} \in L^\infty_tH^1_x(\Omega)\cap L^2_tH^2_x(\Omega)$, alors $\vec{F}-\vec{F}_0 \in L^2_tH^1_x(\Omega_0)$.*

Preuve. On rappelle que $\vec{F}-\vec{F}_0 = \nu\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$ où les expressions de $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ sont données dans (3.21), (3.23),(3.29) respectivement.

- Pour $\vec{F}_1$, en prenant la norme H^1 en variable d'espace on a

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_1\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})} &\leq C_\psi\|\vec{u}\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})} + C_\psi\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} + C_\psi\|\vec{\nabla}\vec{u}\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})}\\ &\leq C_\psi\|\vec{u}\|_{H^1(B_{x_0,\rho})} + C_\psi\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})} + C_\psi\|\vec{\nabla}\vec{u}\|_{H^1(B_{x_0,\rho})},\end{aligned}$$

en intégrant en variable de temps on trouve :

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_1\|_{L^2(I,H^1(B_{x_0,\rho_0}))} &\leq C_\psi\|\vec{u}\|_{L^2(I,H^1(B_{x_0,\rho}))} + C_\psi\|\vec{u}\|_{L^2(I,L^2(B_{x_0,\rho}))}\\ &+ C_\psi\|\vec{\nabla}\vec{u}\|_{L^2(I,H^1(B_{x_0,\rho}))} < +\infty.\end{aligned}$$

La quantité du coté droit de l'expression précédente est bornée par les hypothèses sur $\vec{u}$ énoncées dans le lemme.

- Pour la force $\vec{F}_2$ on a par la définition de l'espace H^1 :

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_2\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})} &= \Big\|-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\Big((\vec{\nabla}\psi)\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{u})\Big)\Big\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}\\ &+ \Big\|\vec{\nabla}\Big(-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\Big((\vec{\nabla}\psi)\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{u})\Big)\Big)\Big\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})}.\end{aligned}$$

Le premier terme à droite dans l'expression précédente a été déjà traité dans le deuxième point de la preuve du Lemme 6. Pour le terme qui reste on va appliquer les mêmes arguments utilisés pour étudier la quantité $\vec{w}$. On peut écrire

$$\Big\|\vec{\nabla}\Big(-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\Big((\vec{\nabla}\psi)\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{u})\Big)\Big)\Big\|_{L^2(B_{x_0,\rho_0})} \leq C_{\rho_0}\Big\|\vec{\nabla}\Big(-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\Big((\vec{\nabla}\psi)\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{u})\Big)\Big)\Big\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho_0})},$$

on a

$$\begin{aligned}\Big|\vec{\nabla}\Big(\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\Big((\vec{\nabla}\psi)\cdot(\vec{\omega}\wedge\vec{u})\Big)\Big)(t,x)\Big| &\leq C\int_{\{\rho_1-\rho_0<|x-y|,\, y\in B_{x_0,\rho}\}}\frac{|\vec{\nabla}\psi(t,y)|}{|x-y|^3}|\vec{\omega}(t,y)||\vec{u}(t,y)|dy\\ &\leq C_{\rho_0}\|\vec{\omega}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\end{aligned}$$

En prenant la norme L^2 en variable de temps on obtient

$$\begin{aligned}\Big\|\vec{\nabla}\Big(-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge\Big((\vec{\nabla}\psi)\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{u})\Big)\Big)\Big\|_{L^2(I,L^2(B_{x_0,\rho_0}))} &\leq C\|\vec{\omega}\|_{L^\infty(I,L^2(B_{x_0,\rho}))}\|\vec{u}\|_{L^2(I,L^2(B_{x_0,\rho}))}\\ &< +\infty.\end{aligned}$$

- Pour le terme $\vec{F}_3$ on utilisera la même localisation faite dans la preuve du Lemme 6

$$\|\vec{F}_3\|_{L^2_tH^1_x(\Omega_0)} \leq \|\phi\eta\vec{A}\|_{L^2_tH^1_x(\Omega_0)}+\Big\|\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\phi\eta\vec{A})\Big\|_{L^2_tH^1_x(\Omega_0)}+\Big\|\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,\big(\psi(1-\eta)\vec{A}\big)\Big\|_{L^2_tH^1_x(\Omega_0)}.$$

On commence par le terme $\|\phi\eta\vec{A}\|_{L^2_tH^1_x(\Omega_0)}$, en prenant d'abord la norme H^1 en variable d'espace on a

$$\begin{aligned}\|\phi\eta\vec{A}\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})} &\leq \big\|\phi\eta\big((\vec{\nabla}\wedge\vec{v})\wedge\vec{\beta}\big)\big\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})}+\big\|\phi\eta\big((\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta})\wedge\vec{v}\big)\big\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})}\\ &\quad+\big\|\phi\eta\big((\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta})\wedge\vec{\beta}\big)\big\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})}\\ &\leq \|\vec{\nabla}\wedge\vec{v}\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})}\|\phi\eta\vec{\beta}\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho_0})}\\ &+ \|\vec{v}\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})}\|\phi\eta(\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta})\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho_0})}\\ &\quad+\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta}\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})}\|\phi\eta\vec{\beta}\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho_0})}.\end{aligned}\tag{3.36}$$

En intégrant en variable de temps on trouve

$$\begin{aligned}\|\phi\eta\vec{A}\|_{L^2_tH^1(\Omega_0)} &\leq C_{\rho,\psi}\|\vec{\nabla}\vec{v}\|_{L^2_tH^1(\Omega)}\|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\Omega)}\\ &+ C_{\rho,\psi}\|\vec{u}\|_{L^2_tL^2_x(\Omega)}\Big(\|\vec{v}\|_{L^\infty_tH^1(\Omega)}+\|\vec{\nabla}\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\Omega)}\Big)\\ &< +\infty,\end{aligned}\tag{3.37}$$

par hypothèses sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Maintenant on passe au deuxième terme de $\vec{F}_3$, on va l'étudier d'une manière similaire à celle utilisée dans le lemme précédent (Lemme 6). En prenant la norme H^1 en variable d'espace

$$\begin{aligned}\left\|\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\phi\eta\vec{A})\right\|_{H^1(B_{x_0,\rho_0})} &\leq \left\|\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\phi\eta\vec{A})\right\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\phi\eta\vec{A}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\\ &\leq C\|\phi\eta\vec{A}\|_{H^1(B_{x_0,\rho_2})}.\end{aligned}$$

Comme $\rho_2 < \rho_1 < \rho$ et ainsi $B_{x_0,\rho_2} \subset B_{x_0,\rho}$, on peut appliquer les arguments utilisés dans (3.36)-(3.37) pour obtenir

$$\begin{aligned}\left\|\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\phi\eta\vec{A})\right\|_{L^2_tH^1_x(\Omega_0)} &\leq C_{\rho,\psi}\|\vec{\nabla}\vec{v}\|_{L^2_tH^1(\Omega)}\|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\Omega)}\\ &+ C_{\rho,\psi}\|\vec{u}\|_{L^2_tL^2_x(\Omega)}\left(\|\vec{v}\|_{L^\infty_tH^1(\Omega)} + \|\vec{\nabla}\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\Omega)}\right) < +\infty.\end{aligned}$$

Comme cela été mentionné dans la preuve du Lemme 6, dû au support de $\psi(1-\eta)$, la manière de traiter le dernier terme de $\vec{F}_3$ ne sera pas la même utilisée pour $\vec{F}_2$ et on a

$$\begin{aligned}\left\|\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\left(\psi(1-\eta)\vec{A}\right)\right\|_{L^2_tH^1_x(\Omega_0)} &= \left\|\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\left(\psi(1-\eta)\vec{A}\right)\right\|_{L^2_tL^2_x(\Omega_0)}\\ &+ \left\|\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\left(\psi(1-\eta)\vec{A}\right)\right)\right\|_{L^2_tL^2_x(\Omega_0)}.\end{aligned}$$

Le premier terme à droite de l'expression précédente a été déjà estimé dans (3.35), le deuxième terme se traite de la même manière. En effet,

$$\begin{aligned}\left|\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\psi(1-\eta)\vec{A})\right)(t,x)\right| &\leq C\int_{\{\rho_3-\rho_0<|x-y|,\, y\in B_{x_0,\rho}\}}\frac{1}{|x-y|^4}|\psi(t,y)|\,|\vec{A}(t,y)|\,dy\\ \leq C\|\psi\|_{L^\infty(B_{x_0,\rho})}\frac{1}{(\rho_3-\rho_0)^4} &\Big(\|\vec{\nabla}\wedge\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\|\psi\vec{\beta}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\\ &+ \|\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\|\psi\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\\ &+ \|\vec{\nabla}\wedge\vec{\beta}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\|\psi\vec{\beta}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\Big).\end{aligned}$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\psi(1-\eta)\vec{A})(t,x)\right| \leq C_{\rho,\psi}\big(&\|\vec{v}\|_{H^1(B_{x_0,\rho})}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})} + \|\vec{u}\|_{H^1(B_{x_0,\rho})}\|\vec{v}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\\ &+\|\vec{u}\|_{H^1(B_{x_0,\rho})}\|\vec{u}\|_{L^2(B_{x_0,\rho})}\big),\end{aligned}$$

en intégrant en variable de temps on trouve :

$$\begin{aligned}\Big\| \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\mathrm{div}\,(\psi(1-\eta)\vec{A})\right)\Big\|_{L^2_tL^2_x(\Omega_0)} &\leq C_{\rho,\psi}\Big(\|\vec{v}\|_{L^2_tH^1_x(\Omega)}\|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\Omega)}\\ + \|\vec{u}\|_{L^2_tH^1_x(\Omega)}\|\vec{v}\|_{L^\infty_tL^2_x(\Omega)} &+ \|\vec{u}\|_{L^2_tH^1_x(\Omega)}\|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\Omega)}\Big) < +\infty.\end{aligned}$$

En sommant toutes les majorations faites sur $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ on trouve que $\vec{F} - \vec{F}_0 \in L^2_tH^1_x(\Omega_0)$. ■

3.4.3 Le cas $\vec{f} \in L_t^{10/7} L_x^{10/7}$

Dans cette section, on va prouver la Proposition 2 et le point 1) du Théorème 10, que nous rappelons ici :

Proposition 5 *Soit Ω un sous ensemble borné de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ de la forme (3.5) et on suppose que $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(\Omega) \cap L_t^2 H_x^1(\Omega)$ avec $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$ et $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sont des solutions faibles des équations de Navier-Stokes (3.2) sur Ω où $\vec{f} \in L_t^{10/7} L_x^{10/7}(\Omega)$ et $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$.*

1) Soient $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ deux fonctions régulières telles que $\int_{\mathbb{R}} \gamma(t)dt = \int_{\mathbb{R}^3} \theta(x)dx = 1$, $supp(\gamma) \subset]-1,1[$ et $supp(\theta) \subset B(0,1)$. On pose pour $\alpha, \varepsilon > 0$ les fonctions $\gamma_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha}\gamma(\frac{t}{\alpha})$ et $\theta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^3}\theta(\frac{x}{\varepsilon})$ et on définit $\varphi_{\alpha,\varepsilon}(t,x) = \gamma_\alpha(t)\theta_\varepsilon(x)$.

Alors, si le cylindre $Q_{t_0,x_0,r}$ est contenu dans Ω, les distributions $\vec{u} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}$ et $p * \varphi_{\alpha,\varepsilon}$ sont bien définies dans l'ensemble $Q_{t_0,x_0,r/4} \subset \Omega$ pour $0 < \alpha < r_0^2/2$ et $0 < \varepsilon < r_0/2$. De plus, la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0} \operatorname{div}\left[\left(p * \varphi_{\alpha,\varepsilon}\right) \times \left(\vec{u} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)\right],$$

existe dans $\mathcal{D}'$ et elle ne dépend pas du choix des fonctions γ et θ.

2) Soit

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0} \operatorname{div}\left[\left(p * \varphi_{\alpha,\varepsilon}\right) \times \left(\vec{u} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)\right] = \langle \operatorname{div}(p\vec{u})\rangle.$$

Alors la quantité

$$\begin{aligned} M = -\partial_t|\vec{u}|^2 + \nu\Delta|\vec{u}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 - &\operatorname{div}(|\vec{u}|^2\vec{u}) \\ &- 2\langle \operatorname{div}(p\vec{u})\rangle + 2\vec{u}\cdot\vec{f}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

est bien définie comme une distribution.

Faisons ici deux remarques. La première porte sur l'hypothèse $\vec{f} \in L_t^{10/7} L_x^{10/7}$: cela suffit pour donner un sens au produit $\vec{u}\cdot\vec{f}$ dans (3.38) puisqu'on a $\vec{u} \in L_t^{10/3} L_x^{10/3}$. Notre seconde remarque concerne la preuve de cette proposition : on aura besoin des propriétés de de l'équation associée étudiée dans la section précédente afin d'obtenir l'existence de ces limites et le lien crucial entre les propriétés de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné dans le Lemme 10 ci-dessous.

Preuve.

1) On commence avec le premier point de la proposition et pour cela on dénote par $\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}$ la fonction définie par $\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} = \vec{u} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}$. Comme c'est une fonction régulière en variables de temps et d'espace on peut écrire

$$\partial_t|\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}|^2 = 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}\cdot\partial_t\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \partial_t|\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}|^2 &= 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}\cdot\left(\partial_t\vec{u} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}\right) = 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}\cdot\left(\nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}\right) * \varphi_{\alpha,\varepsilon} \\ &= 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}\cdot\nu\Delta\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} - 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}\cdot\left([(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}] * \varphi_{\alpha,\varepsilon}\right) - 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}\cdot(\vec{\nabla}p * \varphi_{\alpha,\varepsilon}) \\ &+ 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}\cdot(\vec{f} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\mathrm{div}\,(\vec{u}) = 0$, on a :

$$\begin{aligned}\partial_t|\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}|^2 =&\nu\Delta|\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}|^2 - 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}\cdot([\mathrm{div}\,(\vec{u}\otimes\vec{u})]*\varphi_{\alpha,\varepsilon})\\ &- 2\,\mathrm{div}\,[(p*\varphi_{\alpha,\varepsilon})\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}] + 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}\cdot(\vec{f}*\varphi_{\alpha,\varepsilon}).\end{aligned} \tag{3.39}$$

On va prendre maintenant Ω_0 défini dans la section précédente suffisamment large pour contenir $Q_{t_0,x_0,r/2}$ et on considère l'équation associée (3.18) sur $\vec{v}$ avec la pression q et la force $\vec{F}$. Remarquons que comme $\vec{f}$ appartient à $L_t^{10/7}L_x^{10/7}(\Omega)$, par le Lemme 4 on a $\vec{F}_0 \in L_t^{10/7}L_x^{10/7}(\Omega_0)$, de plus comme par la Proposition 4 on a $\vec{F} - \vec{F}_0 \in L_t^2L_x^2(\Omega_0)$ on obtient $\vec{F} \in L_t^{10/7}L_x^{10/7}(\Omega_0)$.

Maintenant, si on note par $\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}$ la fonction donnée par $\vec{v}_{\alpha,\varepsilon} = \vec{v}*\varphi_{\alpha,\varepsilon}$, par les mêmes arguments utilisés ci-dessus, on obtient l'équation suivante

$$\begin{aligned}\partial_t|\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}|^2 =&\nu\Delta|\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}|^2 - 2\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}\cdot([\mathrm{div}\,(\vec{v}\otimes\vec{v})]*\varphi_{\alpha,\varepsilon})\\ &- 2\,\mathrm{div}\,[(q*\varphi_{\alpha,\varepsilon})\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}] + 2\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}\cdot(\vec{F}*\varphi_{\alpha,\varepsilon}).\end{aligned} \tag{3.40}$$

Notre objectif est d'étudier la convergence des expressions (3.39) et (3.40) quand les paramètres α et ε tendent vers zéro et on va utiliser les propriétés de $\vec{v}$ pour déduire les limites sur $\vec{u}$. Cependant, ces limites doivent être traitées avec beaucoup d'attention et nous allons d'abord faire $\alpha \longrightarrow 0$ et seulement après, nous allons prendre la limite $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Pour commencer notre étude, on remarque que ce n'est difficile de traiter la convergence de certains termes contenus dans ces formules. Pour des raisons de simplicité, nous adopterons la notation suivante : $\vec{u}_\varepsilon = \vec{u}*\theta_\varepsilon$ et on note par $\bar{Q}$ le cylindre $Q_{t_0,x_0,r/4} \subset \Omega_0$.

Lemme 8 *On a les convergences fortes suivantes*

1) $\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} \underset{\alpha\to0}{\longrightarrow} \vec{u}_\varepsilon$ *dans* $L_t^2L_x^2(\bar{Q})$ *et dans* $L_t^2\dot{H}_x^1(\bar{Q})$,

2) $\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} \underset{\alpha\to0}{\longrightarrow} \vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\varepsilon$ *dans* $L_t^2L_x^2(\bar{Q})$,

3) $(\vec{u}\otimes\vec{u})*\varphi_{\alpha,\varepsilon} \underset{\alpha\to0}{\longrightarrow} (\vec{u}\otimes\vec{u})*\theta_\varepsilon$ *dans* $L_t^2L_x^2(\bar{Q})$,

4) $\vec{f}*\varphi_{\alpha,\varepsilon} \underset{\alpha\to0}{\longrightarrow} \vec{f}*\theta_\varepsilon$ *dans* $L_t^{10/7}L_x^{10/7}(\bar{Q})$.

Grâce aux propriétés des fonctions $\vec{u}$, $\vec{f}$ et avec la définition de la fonction $\varphi_{\alpha,\varepsilon} = \gamma_\alpha\theta_\varepsilon$, la preuve de ce lemme est directe.

Remarque 8 *La conclusion du Lemme 8 peut être obtenue de la même manière pour la nouvelle variable* $\vec{v}$ *: en effet, comme on a démontré dans les Propositions 3 et 4,* $\vec{v}$ *et* $\vec{F}$ *ont un comportement similaire à celui de* $\vec{u}$ *et* $\vec{f}$*, voir aussi le Lemme 4. Néanmoins, on a une autre convergence pour* $\vec{v}$ *qui sera très utile par la suite :* $q*\varphi_{\alpha,\epsilon}$ *converge fortement quand* $\alpha \longrightarrow 0$ *vers* $q*\theta_\epsilon$ *dans* $L_t^{3/2}L_x^{3/2}(\bar{Q})$.

Maintenant on peut passer à la limite $\alpha \longrightarrow 0$ pour tous les termes de l'identité (3.39) sauf pour le terme impliquant p. Mais la limite pour ce terme doit exister (dû

à l'égalité) puisqu'elle est égale à la somme des autres termes qui ont une limite.

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t|\vec{u}_\varepsilon|^2 = \nu\Delta|\vec{u}_\varepsilon|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\varepsilon|^2 - 2\vec{u}_\varepsilon\cdot([\mathrm{div}\,(\vec{u}\otimes\vec{u})]*\theta_\varepsilon)\\ -2\lim_{\alpha\to 0}\mathrm{div}\,[(p*\varphi_{\alpha,\varepsilon})\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}] + 2\vec{u}_\varepsilon\cdot(\vec{f}*\theta_\varepsilon),\end{aligned} \tag{3.41}$$

et, de la même manière on a pour la fonction $\vec{v}$:

$$\begin{aligned}\partial_t|\vec{v}_\varepsilon|^2 = \nu\Delta|\vec{v}_\varepsilon|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}_\varepsilon|^2 - 2\vec{v}_\varepsilon\cdot([\mathrm{div}\,(\vec{v}\otimes\vec{v})]*\theta_\varepsilon)\\ -2\,\mathrm{div}\,[(q*\theta_\varepsilon)\vec{v}_\varepsilon] + 2\vec{v}_\varepsilon\cdot(\vec{F}*\theta_\varepsilon).\end{aligned} \tag{3.42}$$

Notons en particulier que, puisque nous avons la convergence forte $\lim_{\alpha\to 0} q*\varphi_{\alpha,\epsilon} = q*\theta_\epsilon$ dans $L_t^{3/2}L_x^{3/2}$ on peut écrire div $[(q*\theta_\varepsilon)\vec{v}_\varepsilon]$ pour le couple $(\vec{v},q)$ dans (3.42) au lieu de $\lim_{\alpha\to 0}$ div $[(p*\varphi_{\alpha,\varepsilon})\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}]$ pour $(\vec{u},p)$ dans (3.41).

À ce stade, nous définissons deux quantités qui vont nous aider à passer à la limite $\varepsilon\to 0$:

$$\mu_\varepsilon = 2\vec{u}_\varepsilon\cdot([\mathrm{div}\,(\vec{u}\otimes\vec{u})]*\theta_\varepsilon) - \mathrm{div}\,(|\vec{u}|^2\vec{u}) \tag{3.43}$$

$$\eta_\varepsilon = 2\vec{v}_\varepsilon\cdot([\mathrm{div}\,(\vec{v}\otimes\vec{v})]*\theta_\varepsilon) - \mathrm{div}\,(|\vec{v}|^2\vec{v}), \tag{3.44}$$

on va voir avec ces quantités comment lier le comportement de $\vec{v}$ au comportement de $\vec{u}$. Mais avant ça, on a besoin du lemme suivant qui énonce certains résultats de convergence forte en variable d'espace.

Lemme 9 *on a les convergences fortes suivantes*

1) $\vec{u}_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \vec{u}$ *dans* $L_t^2L_x^2(\bar{Q})$ *et dans* $L_t^2\dot{H}_x^1(\bar{Q})$,

2) $\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \vec{\nabla}\otimes\vec{u}$ *dans* $L_t^2L_x^2(\bar{Q})$,

3) $\vec{f}*\theta_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \vec{f}$ *dans* $L_t^{10/7}L_x^{10/7}(\bar{Q})$.

Encore une fois, la preuve de ce lemme est directe. Bien entendu, les conclusions du Lemme 9 peuvent être obtenues de la même manière pour la nouvelle variable $\vec{v}$.

Mais, comme on l'a souligné dans la Remarque 8, on a une information supplémentaire pour $\vec{v}$, cette fois en variable d'espace : $q*\theta_\epsilon$ converge fortement vers q dans $L_t^{3/2}L_x^{3/2}(\bar{Q})$.

Avec l'aide de ce lemme, en passant à la limite $\varepsilon\longrightarrow 0$ dans (3.41) et (3.42) on a alors :

$$\begin{aligned}\partial_t|\vec{u}|^2 =&\nu\Delta|\vec{u}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 - \mathrm{div}\,(|\vec{u}|^2\vec{u}) + 2\vec{u}\cdot\vec{f}\\ &-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mu_\varepsilon + 2\lim_{\alpha\to 0}\mathrm{div}\,[(p*\varphi_{\alpha,\varepsilon})\times\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}]\right),\end{aligned} \tag{3.45}$$

et

$$\begin{aligned}\partial_t|\vec{v}|^2 =&\nu\Delta|\vec{v}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2 - \mathrm{div}\,(|\vec{v}|^2\vec{v}) + 2\vec{v}\cdot\vec{F}\\ &-\lim_{\varepsilon\to 0}\eta_\varepsilon - 2\,\mathrm{div}\,(q\vec{v}).\end{aligned} \tag{3.46}$$

Bien que nous avons obtenu à ce stade des équations similaires pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ la situation est très différente : on a aucune information sur la pression $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mais on a un comportement bien meilleur pour la pression q, puisque $q \in L_t^{3/2}L_x^{3/2}(\bar{Q})$ (comme il a été prouvé dans la Proposition 4).

La fin de la preuve repose maintenant sur le lemme suivant qui relie le comportement de μ_ϵ au comportement de η_ϵ :

Lemme 10 *Pour μ_ε et η_ε définies dans (3.43) et (3.44) respectivement, on a la convergence suivante dans $\mathcal{D}'(\bar{Q})$:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \eta_\varepsilon - \mu_\epsilon = 0.$$

Avant d'entrer dans les détails de la preuve, expliquons les conséquences de ce lemme. Si on a $\lim_{\varepsilon\to 0} \eta_\varepsilon - \mu_\epsilon = 0$, alors l'existence de $\lim_{\varepsilon\to 0} \eta_\varepsilon$ impliquera l'existence de $\lim_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon$ et on peut alors donner un sens à la quantité

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0} \operatorname{div}\left[\left(p * \varphi_{\alpha,\varepsilon}\right) \times \left(\vec{u} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)\right],$$

car tous les termes restants de (3.45) existent puisque $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(\bar{Q}) \cap L_t^2 H_x^1(\bar{Q})$ et $\vec{f} \in L_t^{10/7}L_x^{10/7}(\bar{Q})$ et ainsi le premier point de la Proposition 5 sera prouvé.

Mais l'existence de $\lim_{\varepsilon\to 0} \eta_\varepsilon$ est donnée par les propriétés de l'équation associée : en effet, tous les termes de l'identité (3.46) existent puisque $\vec{v} \in L_t^\infty L_x^2(\bar{Q}) \cap L_t^2 H_x^1(\bar{Q})$, $\vec{F} \in L_t^{10/7}L_x^{10/7}(\bar{Q})$ avec $q \in L_t^{3/2}L_x^{3/2}(\bar{Q})$ et par conséquent la limite $\lim_{\varepsilon\to 0} \eta_\varepsilon$ existe. Voir les références [42, 27].

Comme on peut voir, le Lemme 10 explique comment lier les propriétés de l'équation associée à celles des équations originales de Navier–Stokes. Une fois que le cadre de ce lemme est clair, nous portons notre attention sur sa preuve qui repose sur une idée de Duchon & Robert [11] :

Proposition 6 *Soit Ω un sous ensemble borné de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ de la forme (3.5) et soit $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(\Omega) \cap L_t^2 H_x^1(\Omega)$, avec $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ une fonction régulière telle que $\int_{\mathbb{R}^3} \theta(x)dx = 1$ et $supp(\theta) \subset B(0,1)$. On pose pour $\varepsilon > 0$ la fonction $\theta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^3}\theta(\frac{x}{\varepsilon})$. Alors, si le cylindre $Q_{t_0,x_0,r}$ est contenu dans Ω, on définit les distributions suivantes sur $Q_{t_0,x_0,r/4} \subset \Omega$ pour $0 < \varepsilon < r_0/2$:*

$$\begin{aligned}
\mu_\epsilon &= 2(\vec{u} * \theta_\varepsilon)\cdot([\operatorname{div}(\vec{u}\otimes\vec{u})] * \theta_\varepsilon) - \operatorname{div}(|\vec{u}|^2\vec{u}) \\
R_\varepsilon &= \sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} \partial_k\theta_\varepsilon(y)\big(u_k(x-y)-u_k(x)\big)|\vec{u}(x-y)-\vec{u}(x)|^2\,dy \\
S_\varepsilon &= \sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} \partial_k\theta_\varepsilon(y)\big(u_k(x-y)-u_k(x)\big)\big(\vec{u}(x-y)-\vec{u}(x)\big)\cdot\big(\vec{u}_\epsilon(x)-\vec{u}(x)\big)\,dy.
\end{aligned}$$

Alors, on a la limite suivante

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon + R_\varepsilon - 2S_\varepsilon = 0.$$

La preuve de cette proposition est donnée dans l'annexe page 101.

Une fois que nous avons ce résultat à portée de main, nous allons l'utiliser de la manière suivante : on introduit la notation

$$\tau_z[\vec{H}](t,x) = \vec{H}(t,x-z) - \vec{H}(t,x),$$

où $\vec{H} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction et $z \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur. Ensuite on définit

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) &= -\sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_k}\theta_\varepsilon(y)\tau_y[U_k](t,x)\big(\tau_y[\vec{V}](t,x)\cdot\tau_y[\vec{W}](t,x)\big)dy \\ &\quad +2\sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_k}\theta_\varepsilon(y)\tau_y[U_k](t,x)\Big(\tau_y[\vec{V}](t,x)\cdot\big(\theta_\varepsilon * \vec{W}(t,x) - \vec{W}(t,x)\big)\Big)dy, \end{aligned}$$

et on remarque que l'on a $R_\varepsilon - 2S_\varepsilon = -T_\varepsilon(\vec{U},\vec{U},\vec{U})$, observons en outre que l'opérateur T_ε est un opérateur trilinéaire.

Ainsi, à partir de la Proposition 6, on voit que les solutions $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des équations de Navier–Stokes sur Ω_0 qui ont été discutées précédemment satisfont

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon - \eta_\varepsilon + T_\varepsilon(\vec{v},\vec{v},\vec{v}) - T_\varepsilon(\vec{u},\vec{u},\vec{u}) = 0,$$

avec μ_ε et η_ε définies par (3.43) et (3.44). Alors prouver le Lemme 10 revient à prouver que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(\vec{v},\vec{v},\vec{v}) - T_\varepsilon(\vec{u},\vec{u},\vec{u}) = 0.$$

Pour ça on écrit

$$T_\varepsilon(\vec{v},\vec{v},\vec{v}) - T_\varepsilon(\vec{u},\vec{u},\vec{u}) = T_\varepsilon(\vec{v}-\vec{u},\vec{v},\vec{v}) + T_\varepsilon(\vec{u},\vec{v}-\vec{u},\vec{v}) + T_\varepsilon(\vec{u},\vec{u},\vec{v}-\vec{u}), \quad (3.47)$$

en effet, on a vu au début du chapitre que $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ donc

$$\begin{aligned} T(\vec{v},\vec{v},\vec{v}) - T(\vec{u},\vec{u},\vec{u}) &= T(\vec{u}+\vec{w},\vec{v},\vec{v}) - T(\vec{u},\vec{u},\vec{u}) \\ &= T(\vec{w},\vec{v},\vec{v}) + T(\vec{u},\vec{w},\vec{v}) + T(\vec{u},\vec{u},\vec{w}), \end{aligned}$$

et ensuite on conclu avec le lemme suivant :

Lemme 11 *Si $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ appartiennent à $L^3_t L^3_x(\Omega_0)$ et si au moins un d'eux appartient à $L^\infty_t \mathrm{Lip}_x(\Omega_0)$, alors on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = 0,$$

dans $L^1_t L^1_x(Q_{t_0,x_0,r/4})$.

Preuve. Rappelons que $\theta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^3}\theta(\frac{x}{\varepsilon})$ et $supp(\theta_\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon)$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
\Big| \quad & T_\varepsilon(\vec{U},\vec{V},\vec{W})(t,x)\Big| \leq C\sum_k \int_{\mathbb{R}^3} \Big|\partial_k\theta_\varepsilon(y)\Big[\vec{U}_k(t,x)-\vec{U}_k(t,x-y)\Big]\times \\
& \Big[\vec{V}_k(t,x)-\vec{V}_k(t,x-y)\Big]\Big[\vec{W}(t,x)-\vec{W}(t,x-y)\Big]\Big|\,dy \\
+ \quad & C\sum_k \int_{\mathbb{R}^3} \Big|\partial_k\theta_\varepsilon(y)\Big[\vec{U}_k(t,x)-\vec{U}_k(t,x-y)\Big]\Big[\vec{V}_k(t,x)-\vec{V}_k(t,x-y)\Big]\Big|\,dy \\
& \times \int_{\mathbb{R}^3} \Big|\theta_\varepsilon(z)(\vec{W}(t,x)-\vec{W}(t,x-z))\Big|\,dz, \\
\leq \quad & C\frac{1}{\varepsilon^4}\int_{\{|y|<\varepsilon\}} |\vec{U}(t,x)-\vec{U}(t,x-y)|\,|\vec{V}(t,x)-\vec{V}(t,x-y)| \\
& \times|\vec{W}(t,x)-\vec{W}(t,x-y)|\,dy \\
+ \quad & \frac{C}{\varepsilon^7}\int_{\{|y|<\varepsilon\}} |\vec{U}(t,x)-\vec{U}(t,x-y)|\,|\vec{V}(t,x)-\vec{V}(t,x-y)|\,dy \\
& \times \int_{\{|z|<\varepsilon\}} |\vec{W}(t,x)-\vec{W}(t,x-z)|\,dz,
\end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}
& \Big|T_\varepsilon(\vec{U},\vec{V},\vec{W})(t,x)\Big| \leq \frac{C}{\varepsilon^4}\left(\int_{\{|y|<\varepsilon\}} |\vec{U}(t,x)-\vec{U}(t,x-y)|^3\,dy\right)^{\frac{1}{3}} \\
\times \quad & \left(\int_{\{|y|<\varepsilon\}} |\vec{V}(t,x)-\vec{V}(t,x-y)|^3\,dy\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\int_{\{|y|<\varepsilon\}} |\vec{W}(t,x)-\vec{W}(t,x-y)|^3\,dy\right)^{\frac{1}{3}} \\
+ \quad & \frac{C}{\varepsilon^7}\left(\int_{\{|y|<\varepsilon\}} |\vec{U}(t,x)-\vec{U}(t,x-y)|^3\,dy\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\int_{\{|y|<\varepsilon\}} |1_{B_{x_0,\rho_0}}\,dy|\right)^{\frac{1}{3}} \\
& \times\left(\int_{\{|y|<\varepsilon\}} |\vec{V}(t,x)-\vec{V}(t,x-y)|\,dy\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\int_{\{|z|<\varepsilon\}} |\vec{W}(t,x)-\vec{W}(t,x-z)|^3\,dz\right)^{\frac{1}{3}} \\
& \times\left(\int_{\{|y|<\varepsilon\}} |1_{B_{x_0,\rho_0}}\,dy|\right)^{\frac{2}{3}},
\end{aligned}$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}
\Big|T_\varepsilon(\vec{U},\vec{V},\vec{W})(t,x)\Big| \quad \leq \quad & \frac{C}{\varepsilon^4}\left(\int_{\{|y|<\varepsilon\}} |\vec{U}(t,x)-\vec{U}(t,x-y)|^3\,dy\right)^{\frac{1}{3}} \\
& \times\left(\int_{\{|y|<\varepsilon\}} |\vec{V}(t,x)-\vec{V}(t,x-y)|^3\,dy\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (3.48) \\
& \times\left(\int_{\{|y|<\varepsilon\}} |\vec{W}(t,x)-\vec{W}(t,x-y)|^3\,dy\right)^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Maintenant, si $\vec{U} \in L^3_t L^3_x(\Omega_0)$, alors par un changement de variable on peut écrire

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{Q_{t_0,x_0,r/4}}\int_{\{|y|<\varepsilon\}}|\vec{U}(t,x)-\vec{U}(t,x-y)|^3\,dy\,dt\,dx\\ =\;&\int_{\{|z|<1\}}\iint_{Q_{t_0,x_0,r/4}}|\vec{U}(t,x)-\vec{U}(t,x-\varepsilon z)|^3\,dt\,dx\,dz.\end{aligned}$$

et on peut vérifier facilement que le terme à droite converge vers 0 quand $\varepsilon \to 0$. De plus si on a $\vec{U} \in L^\infty_t \mathrm{Lip}_x(\Omega_0)$, alors on obtient

$$\frac{1}{\varepsilon^6}\iint_{Q_{t_0,x_0,r/4}}\int_{\{|y|<\varepsilon\}}|\vec{U}(t,x)-\vec{U}(t,x-y)|^3\,dy\,dt\,dx \le C\|\vec{\nabla}\otimes\vec{U}\|^3_{L^\infty_t L^\infty_x}|Q_{t_0,x_0,r/4}|.$$

Avec ces inégalités, si $\vec{U} \in L^\infty_t \mathrm{Lip}_x(\Omega_0)$ et si $\vec{V} \in L^3_t L^3_x(\Omega_0)$, $\vec{W} \in L^3_t L^3_x(\Omega_0)$, en intégrant (3.48) sur $Q_{t_0,x_0,r/4}$ on obtient

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_{t_0,x_0,r/4}}\left|T_\varepsilon(\vec{U},\vec{V},\vec{W})(t,x)\right|dtdx \le C\|\vec{\nabla}\otimes\vec{U}\|_{L^\infty_t L^\infty_x}|Q_{t_0,x_0,r/4}|^{\frac{1}{3}}\\ &\times\left(\int_{\{|z|<1\}}\iint_{Q_{t_0,x_0,r/4}}|\vec{V}(t,x)-\vec{V}(t,x-\varepsilon z)|^3\,dt\,dx\,dz\right)^{\frac{1}{3}}\\ &\times\left(\int_{\{|z|<1\}}\iint_{Q_{t_0,x_0,r/4}}|\vec{W}(t,x)-\vec{W}(t,x-\varepsilon z)|^3\,dt\,dx\,dz\right)^{\frac{1}{3}},\end{aligned}$$

et on a alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{Q_{t_0,x_0,r/4}}\left|T_\varepsilon(\vec{U},\vec{V},\vec{W})(t,x)\right|dtdx = 0,$$

et le Lemme 11 est prouvé. ■

Finissons la preuve du Lemme 10. Comme sur Ω_0, on a $\vec{u},\vec{v} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega_0)\cap L^2_t H^1_x(\Omega_0)$ on obtient facilement que $\vec{u},\vec{v} \in L^3_t L^3_x(\Omega_0)$, de plus on a par la Proposition 3 que $\vec{v}-\vec{u} \in L^\infty_t \mathrm{Lip}_x(\Omega_0)$ et on peut appliquer le Lemme 11 à chacun des termes de (3.47), ainsi en utilisant la Proposition 6 on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\eta_\varepsilon - \mu_\epsilon = 0,$$

et le Lemme 10 est prouvé. ■

Comme nous avons évoqué précédemment, nous savons déjà que $\lim_{\varepsilon\to 0}\eta_\varepsilon$, ainsi $\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon$ existent. Puisqu'on sait que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mu_\varepsilon + 2\lim_{\alpha\to 0}\mathrm{div}\,[(p*\varphi_{\alpha,\varepsilon})\times\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}]\right),$$

existe, on trouve que $\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0}\mathrm{div}\,[(p*\varphi_{\alpha,\varepsilon})\times\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}]$ existe. De plus comme $\lim_{\varepsilon\to 0}\eta_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\epsilon$ et en utilisant les identités (3.45) et (3.46) on a

$$\begin{aligned}2\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0}\mathrm{div}\,[(p*\varphi_{\alpha,\varepsilon})\times\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}] &= -\partial_t|\vec{u}|^2+\nu\Delta|\vec{u}|^2-2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2\\ &\quad -\mathrm{div}\,(|\vec{u}|^2\vec{u})+2\vec{u}\cdot\vec{f}-\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon\\ &= 2\,\mathrm{div}\,(q\vec{v})+\partial_t(|\vec{v}|^2-|\vec{u}|^2)+\nu\Delta(|\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2)\\ &\quad +2\nu(|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2-|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2)+2(\vec{u}\cdot\vec{f}-\vec{v}\cdot\vec{F})\\ &\quad +\mathrm{div}\,(|\vec{v}|^2\vec{v}-|\vec{u}|^2\vec{u}).\end{aligned}$$

Il est clair que cette limite ne dépend pas du choix des fonctions γ et θ. Ainsi on a obtenu que la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0}\operatorname{div}\left[\left(p*\varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)\times\left(\vec{u}*\varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)\right],$$

existe dans $\mathcal{D}'$ qui est la conclusion du premier point de la Proposition 5.

2) Le second point de la Proposition 5 est facile à prouver. En effet, comme on a

$$\begin{aligned}2\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0}\operatorname{div}\left[(p*\varphi_{\alpha,\varepsilon})\times\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}\right] &= -\partial_t|\vec{u}|^2+\nu\Delta|\vec{u}|^2-2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2\\ &\quad -\operatorname{div}\left(|\vec{u}|^2\vec{u}\right)+2\vec{u}\cdot\vec{f}-\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon,\end{aligned}$$

on obtient que la distribution M introduite dans (3.38) est en fait donnée par l'identité suivante

$$M=\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon.$$

La Proposition 5 est prouvée. ■

Remarque 9 *Comme $\vec{f}\in L_t^{10/7}L_x^{10/7}$, si on suppose en plus $\vec{u}\in L_t^4L_x^4(\Omega)$, alors il n'est pas difficile de voir que $\vec{v}\in L_t^4L_x^4(\Omega_0)$, et si on considère l'équation associée (3.18) sur $\vec{v}$ on obtient des équations de Navier–Stokes avec une pression $q\in L_t^{3/2}L_x^{3/2}(\Omega_0)$ et une force $\vec{F}\in L_t^{10/7}L_x^{10/7}(\Omega_0)$, ainsi en suivant [27] on obtient $\lim_{\varepsilon\to 0}\eta_\varepsilon=0$, mais par le Lemme 10 on a $\lim_{\varepsilon\to 0}\eta_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon$ et ainsi on obtient $M=0$.*

3.4.4 Le cas $\vec{f}\in L_t^2L_x^2$

Dans cette section, on va prouver le point 2) du le Théorème 10, qu'on rappelle maintenant :

Proposition 7 *Soit Ω un sous ensemble borné de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ de la forme (3.5) et on assume que $\vec{u}\in L_t^\infty L_x^2(\Omega)\cap L_t^2H_x^1(\Omega)$ avec $\operatorname{div}(\vec{u})=0$ et $p\in\mathcal{D}'(\Omega)$ sont des solutions des équations de Navier–Stokes sur Ω :*

$$\partial_t\vec{u}=\nu\Delta\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}-\vec{\nabla}p+\vec{f},$$

où $\operatorname{div}(\vec{f})=0$. On suppose :

- *$\vec{f}\in L_t^2L_x^2(\Omega)$,*
- *$\vec{u}$ est dissipative : la distribution M définie par*

$$\begin{aligned}M=-\partial_t|\vec{u}|^2+\nu\Delta|\vec{u}|^2-2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2-\operatorname{div}\left(|\vec{u}|^2\vec{u}\right)\\ -2\langle\operatorname{div}(p\vec{u})\rangle+2\vec{u}\cdot\vec{f}\end{aligned}$$

est une mesure de Borel localement finie positive sur Ω.

Il existe des constantes positives $\epsilon^* > 0$ et $\tau_1 > 5$ qui dépendent seulement de ν telles que, si $(t_0, x_0) \in \Omega$ et

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B_{x_0,r}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s,y)|^2 \, ds\, dy < \epsilon^*,$$

alors il existe un voisinage $\mathcal{Q} = Q_{t_0,x_0,\bar{r}}$ de (t_0, x_0) tel que $1_{\mathcal{Q}}\, \vec{u} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau_1}$.

Preuve. On va encore prendre Ω_0 comme dans la section précédente, suffisamment large pour contenir (t_0, x_0) et on considère l'équation associée (3.18) sur $\vec{v}$ avec la pression q et la force $\vec{F}$.

Notons d'abord que, puisque nous avons maintenant l'hypothèse $\vec{f} \in L_t^2 L_x^2$, on obtient par le Lemme 4 que $\vec{F}_0$ donnée (3.20) appartient à l'espace $L_t^2 L_x^2(\Omega_0)$ et, puisqu'on a par la Proposition 4, $\vec{F} - \vec{F}_0 \in L_t^2 L_x^2(\Omega_0)$, on obtient que la force globale $\vec{F}$ appartient à $L_t^2 L_x^2(\Omega_0)$.

Ensuite comme dans la section précédente, on va exploiter les propriétés de $\vec{v}$ pour déduire les résultats souhaités sur $\vec{u}$. En effet on a :

- $q \in L_t^{3/2} L_x^{3/2}(\Omega_0)$,
- $\mathbf{1}_{\Omega_0} \vec{F} \in L_t^2 L_x^2 \subset \mathcal{M}_2^{10/7,2}$,
- $\vec{v}$ est adaptée,
- il existe une constante positive $\epsilon^* > 0$ qui dépend seulement de ν telle que, si $(t_0, x_0) \in \Omega_0$ on a

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B_{x_0,r}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{v}(s,y)|^2 \, ds\, dy < \epsilon^*. \tag{3.49}$$

Les deux premiers points sont simples, pour le caractère adapté de $\vec{v}$, rappelons que la distribution M associée à $\vec{u}$ a été calculée dans les sections précédentes comme $M = \lim_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon$ et par l'hypothèse de dissipativité on a $M \geq 0$. Comme on a vu que $\lim_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \eta_\varepsilon$, on trouve que $\lim_{\varepsilon\to 0} \eta_\varepsilon$ est une mesure Borel localement finie positive sur Ω_0 et ainsi $\vec{v}$ est adaptée.

Le dernier point, *i.e.* la condition (3.49), peut être déduit des hypothèses sur $\vec{u}$ énoncées ci-dessus : on utilise le fait que $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$ appartient à $L_t^\infty \mathrm{Lip}_x(\Omega_0)$ puis de l'inégalité

$$\begin{aligned}\left| \|1_{Q_{t_0,x_0,r}} \vec{\nabla} \otimes \vec{v}\|_{L_t^2 L_x^2} - \|1_{Q_{t_0,x_0,r}} \vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{L_t^2 L_x^2} \right| \leq & \|1_{Q_{t_0,x_0,r}} \vec{\nabla} \otimes \vec{w}\|_{L_t^2 L_x^2} \\ \leq & C r^{5/2} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{w}\|_{L_t^\infty L_x^\infty (Q_{t_0,x_0,r})},\end{aligned}$$

on trouve alors

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B_{x_0,r}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s,y)|^2 \, ds\, dy = & \\ \limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B_{x_0,r}} & |\vec{\nabla} \otimes \vec{v}(s,y)|^2 \, ds\, dy,\end{aligned}$$

ainsi, si la première limite (sur $\vec{u}$) est inférieur à ϵ^*, la deuxième limite (sur $\vec{v}$) est aussi inférieur à ϵ^*.

Comme nous pouvons le voir, nous avons rassemblé suffisamment d'informations sur la solution $\vec{v}$ de l'équation associée afin d'appliquer le point 2) du Théorème 9 : Il existe $\tau_1 > 5$ et un voisinage de $\mathcal{Q} = Q_{t_0,x_0,\bar{r}} \subset \Omega_0$ de (t_0, x_0) tels que $1_{\mathcal{Q}}\,\vec{v} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau_1}$ et $1_{\mathcal{Q}}\,q \in \mathcal{M}_2^{3/2,\tau_1/2}$.

On a obtenu des propriétés intéressantes pour la solution $\vec{v}$ de l'équation associée, mais maintenant on doit revenir à $\vec{u}$: on a que $1_{\mathcal{Q}}\,\vec{u} = 1_{\mathcal{Q}}\,\vec{v} - 1_{\mathcal{Q}}\,\vec{w}$ et par le Théorème 9 on a que $1_{\mathcal{Q}}\,\vec{v} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau_1}$ dans un petit voisinage $\mathcal{Q} = Q_{t_0,x_0,\bar{r}}$ de (t_0, x_0). Il nous reste le terme $1_{\mathcal{Q}}\,\vec{w}$. Comme $\vec{w} \in L_t^\infty L_x^\infty(\Omega_0) \subset L_t^{\tau_1} L_x^{\tau_1}(\Omega_0) = \mathcal{M}_2^{\tau_1,\tau_1}$ on a $1_{\mathcal{Q}}\,\vec{w} \in \mathcal{M}_2^{\tau_1,\tau_1}$ et puisque $\tau_1 > 3$, par la Remarque 3 on obtient $1_{\mathcal{Q}}\,\vec{w} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau_1}$. Ainsi $1_{\mathcal{Q}}\,\vec{u} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau_1}$ et la Proposition 7 est démontrée. ■

3.4.5 Le cas $\vec{f} \in L_t^2 H_x^1$

Dans cette section, on va prouver le point 3) dans le Théorème 10 à l'aide de la proposition suivante.

Proposition 8 *Soit Ω un sous ensemble borné de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ de la forme (3.5) et on suppose que $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(\Omega) \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(\Omega)$ avec $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$ et $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une solution des équations de Navier–Stokes sur Ω :*

$$\partial_t \vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f},$$

où $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$. On suppose qu'il existe un voisinage $\mathcal{Q} = Q_{t_0,x_0,\bar{r}}$ de $(t_0, x_0) \in \Omega$ tel que

- *$1_{\mathcal{Q}}\,\vec{u} \in \mathcal{M}_2^{3,\tau_1}$ pour certain $\tau_1 > 5$,*
- *$1_{\mathcal{Q}}\,\vec{f} \in L_t^2 H_x^1$.*

Alors il existe $r' < \bar{r}$ tel que $\vec{u}$ est bornée sur $Q_{t_0,x_0,r'}$. En particulier, le point (t_0, x_0) est régulier.

Preuve. Les hypothèses de cette proposition sont les même que dans le Théorème de O'Leary, ainsi il suffit d'appliquer le Théorème de O'Leary (Théorème 8) pour finir la preuve du Théorème 10. ■

Avec cette dernière proposition, on a fini la preuve du Théorème 10 à partir duquel on déduit le Théorème 7.

Remarque 10 *Comme on n'a aucune information sur la pression p, on ne peut pas appliquer le dernier point du Théorème 9 et on a besoin d'invoquer le résultat de O'Leary.*

Cette dernière remarque nous dit qu'on a en fait un meilleur résultat pour l'équation associée :

Proposition 9 *Soit Ω un sous ensemble borné de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ de la forme (3.5) et on suppose que $\vec{u}\in L^\infty_t L^2_x(\Omega)\cap L^2_t\dot{H}^1_x(\Omega)$ avec $\operatorname{div}(\vec{u})=0$ et $p\in\mathcal{D}'(\Omega)$ est une solution faible des équations de Navier-Stokes sur Ω :*

$$\partial_t\vec{u}=\nu\Delta\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}-\vec{\nabla}p+\vec{f},$$

où $\operatorname{div}(\vec{f})=0$. On suppose qu'il existe un voisinage $\mathcal{Q}=Q_{t_0,x_0,\bar{r}}$ de $(t_0,x_0)\in\Omega$ tel que $1_{\mathcal{Q}}\,\vec{u}\in\mathcal{M}^{3,\tau_1}_2$ pour certain $\tau_1>5$ et $1_{\mathcal{Q}}\,\vec{f}\in L^2_tH^1_x$.

On suppose aussi que pour l'équation associée sur $\vec{v}$, q et $\vec{F}$ on a $1_{\mathcal{Q}}\,q\in\mathcal{M}^{3/2,\tau_1/2}_2$. Alors il existe $r'<\bar{r}$ tel que $\vec{v}$ est Hölderienne (avec l'exposant parabolique de régularité Hölderienne $\eta>0$) sur $Q_{t_0,x_0,r'}$.

Preuve. D'abord, on applique la Proposition 8 et trouvons un cylindre Q_{t_0,x_0,r_1} sur lequel $\vec{u}$ est bornée et ainsi par le théorème de régularité de Serrin, sur un cylindre plus petit Q_{t_0,x_0,r_2} on a que $\vec{u}\in L^\infty_tH^1_x\cap L^2_tH^2_x$.

Ensuite, comme $1_{\mathcal{Q}}\,\vec{f}\in L^2_tH^1_x$ par le Lemme 4 on obtient que $\vec{F}_0\in L^2_tH^1_x(Q_{t_0,x_0,r_2})$, ainsi avec ces informations pour $\vec{u}$ et $\vec{f}$, on considère l'équation associée et en appliquant les mêmes calculs que pour la Proposition 4 (voir aussi le Lemme 7), on voit alors que, sur un petit cylindre encore Q_{t_0,x_0,r_3} on a $\vec{F}-\vec{F}_0\in L^2_tH^1_x$. Cela donne pour la force globale $\vec{F}\in L^2_tH^1_x(Q_{t_0,x_0,r_3})$ à partir de laquelle on déduit que $1_{Q_{t_0,x_0,r_3}}\vec{F}\in\mathcal{M}^{10/7,10/3}_2$. Comme $10/3>5/2$, on peut maintenant appliquer le point 3) du Théorème de Kukavica (Théorème 9) et conclure. ■

En conclusion, nous pouvons voir que l'obstruction à la régularité de temps se situe à l'intérieur de la correction harmonique $\vec{w}$, ce qui rappelle évidemment le contre-exemple de Serrin.

Chapitre 4

La stabilité des solutions faibles dissipatives

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent on a introduit le concept de *solutions dissipatives* qui est plus général que celui de *solutions adaptées* utilisé par Caffarelli, Kohn et Nirenberg dans [2]. Dans ce chapitre on va étudier la *stabilité* de telles solutions dissipatives dans le sens suivant : on part d'une famille de solutions faibles dissipatives $(\vec{u}_n, p_n)$ avec une famille de force $\vec{f}_n$ telle que $\vec{u}_n$ est bornée dans $L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$, $\vec{f}_n$ est bornée dans $L_t^{\frac{10}{7}} L_x^{\frac{10}{7}}$ et $p_n \in \mathcal{D}'$ une pression générale, et nous enquêtons le comportement de dissipativité de la solution $\vec{u}$ lorsque $n \to +\infty$, on va prouver que (grâce à une sous-suite) la limite $\vec{u}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \vec{u}$ est une solution des équations de Navier-Stokes et elle reste une solution dissipative.

On considère les équations de Navier-Stokes dans $[0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$

$$\partial_t \vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \quad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \ \operatorname{div}(\vec{f}) = 0. \tag{4.1}$$

On commence par rappeler que, dans le cadre de la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg, la notion de solutions adaptées nécessite un certain contrôle sur la pression. En effet on a

Définition 7 (Solutions adaptées) *Soit $\vec{u}$ une solution faible des équations de Navier-Stokes (4.1) sur $Q \subset [0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$ avec $p \in L^{3/2}_t L^{3/2}_x(Q)$ et $\vec{f} \in L^{10/7}_t L^{10/7}_x(Q)$ alors $\vec{u}$ est adaptée si la quantité*

$$\mu = -\partial_t|\vec{u}|^2 + \nu\Delta|\vec{u}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 - \operatorname{div}(|\vec{u}|^2\vec{u}) - 2\operatorname{div}(p\vec{u}) + 2\vec{f}\cdot\vec{u},$$

est une mesure de Borel localement finie positive sur Q.

Ainsi si on prend une famille de telles solutions adaptées $(\vec{u}_n, p_n)$ associée à la force $(\vec{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec des informations sur les pressions et avec l'aide du lemme de Rellich-Lions (voir Théorème 12.1 dans [27]) quand on fait tendre n vers l'infini, on obtient la stabilité du critère adapté de la solution $\vec{u}$ dans le sens suivant : à la limite $(\vec{u}, p)$ est une solutions des équations de Navier-Stokes associée à la force $\vec{f}$ et elle reste une solution adaptée.

Toutefois, si on travaille avec un cadre plus général, celui des solutions faibles dissipatives (voir Definition 8 ci-dessous) sur un petit sous ensemble $Q \subset [0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$ où on a un contrôle sur les vitesses $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais on suppose

seulement que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}'(Q)$, on ne pourra pas appliquer le lemme de Rellich-Lions pour étudier la stabilité de l'hypothèse de dissipativité comme on a aucun contrôle sur la pression et par conséquent aucun contrôle sur $\partial_t \vec{u}_n$. Ainsi, dans le but d'étudier le comportement de la propriété de dissipativité on doit considérer un point de vue différent.

Rappelons maintenant la notion de solutions dissipatives introduite dans le Chapitre 3 qui est la base du résultat qu'on va énoncer par la suite. Si $Q \subset [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$, $\vec{f} \in L_t^{10/7}L_x^{10/7}(Q)$, $p \in \mathcal{D}'(Q)$ et si $(\vec{u},p)$ est une solution faible des équations de Navier Stokes (4.1), alors on dénotera par $\langle \operatorname{div}(p\vec{u})\rangle$ la limite suivante

$$\langle \operatorname{div}(p\vec{u})\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0} \operatorname{div}\left[\left(p*\varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)\times\left(\vec{u}*\varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)\right],$$

où $\varphi_{\alpha,\varepsilon}$ est une famille de mollificateurs (voir Proposition 5 Chapitre 3 pour plus de détails). Une fois qu'on a donné un sens à cette quantité $\langle \operatorname{div}(p\vec{u})\rangle$, on peut énoncer la définition suivante

Définition 8 (Solutions Dissipatives) *On considère $Q =]a,b[\times B_{x_0,r}$ un sous domaine de $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ où $0<a<b<+\infty$, $x_0\in\mathbb{R}^3$ et $r>0$. On suppose que $\vec{f}\in L_t^{10/7}L_x^{10/7}(Q)$ avec $\operatorname{div}(\vec{f})=0$ et on assume que $p\in\mathcal{D}'(Q)$. Si $(\vec{u},p)$ est une solution des équations de Navier-Stokes (4.1), on dira qu'une solution $\vec{u}$ est* dissipative *si la distribution M donnée par l'expression*

$$M = -\partial_t|\vec{u}|^2 + \nu\Delta|\vec{u}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 - \operatorname{div}(|\vec{u}|^2\vec{u}) - 2\langle\operatorname{div}(p\vec{u})\rangle + 2\vec{f}\cdot\vec{u}, \tag{4.2}$$

est une mesure de Borel localement finie positive sur Q.

Remarquons que dans la définition précédente on n'a pas besoin d'une condition particulière sur la pression puisqu'on a $p\in\mathcal{D}'(Q)$. On remarque aussi que l'ensemble des solutions dissipatives est strictement plus large que celui des solutions adaptées.

L'objectif de ce chapitre est alors étudier le comportement de l'hypothèse de dissipativité de la vitesse $\vec{u}$ quand $n\to+\infty$, plus précisément on a :

Théorème 11 (Stabilité des Solutions Dissipatives) *Soit Q un domaine borné de la forme $Q=]a,b[\times B_{x_0,r}$ où $0<a<b<+\infty$, $x_0\in\mathbb{R}^3$ et $r>0$. Soit $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des solutions faibles des équations de Navier-Stokes (4.1). Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on suppose que :*

1) $\sup_{n>0}\|\vec{u}_n\|_{L_t^\infty L_x^2(Q)} < +\infty \quad , \quad \sup_{n>0}\|\vec{u}_n\|_{L_t^2 H_x^1(Q)} < +\infty$ *et* $\operatorname{div}(\vec{u}_n)=0$,
2) $\sup_{n>0}\|\vec{f}_n\|_{L_t^{\frac{10}{7}}L_x^{\frac{10}{7}}(Q)} < +\infty$ *et* $\operatorname{div}(\vec{f}_n)=0$,
3) $p_n\in\mathcal{D}'(Q)$,
4) $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de solution dissipative (dans le sens de la Définition 8).*

Alors, il existe $p\in\mathcal{D}'(Q)$ tel que $\partial_t\vec{u} = \nu\Delta\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p + \vec{f}$, de plus la limite $\vec{u}$ est dissipative.

Expliquons la stratégie globale de la preuve. Comme on l'a mentionné précédemment, on ne peut pas appliquer le lemme de Rellich-Lions pour passer à la limite puisqu'on n'a

aucun contrôle sur la pression p_n, ainsi notre première tâche est de donner un sens à la limite $(\vec{u}_n, \vec{f_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (\vec{u}, \vec{f})$ et à l'équation correspondante ((voir Section 4.2.1)). On verra alors dans un premier temps que, dû au terme non linéaire, l'équation de Navier-Stokes satisfaite par $\vec{u}, \vec{f}$ nous ne permet pas de démontrer que la quantité M présentée dans (4.2) est une mesure de Borel localement finie positive. Mais en utilisant le fait qu'on a la convergence du terme $\vec{\omega}_n \wedge \vec{u}_n$ (où on rappelle que $\vec{\omega}_n = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}_n$) on arrive à donner un sens à la quantité M en revanche on n'obtient pas la positivité de cette dernière.

Pour la positivité de la quantité M on va introduire la nouvelle variable $\vec{v}_n$

$$\vec{v}_n = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_n),$$

qui est une solution des équations de Navier-Stokes (dite *l'équation associée*)

$$\partial_t \vec{v}_n = \nu\Delta\vec{v}_n - (\vec{v}_n \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_n - \vec{\nabla}q_n + \vec{F}_n,$$

qui fournit un cadre meilleur tel qu'il a été prouvé dans le chapitre précédent. En particulier, dans ce cadre on peut déduire certain contrôle sur la nouvelle pression q_n (qui n'est pas reliée à la pression original p_n) ainsi que sur la force $\vec{F}_n$ et on peut prouver que la variable $\vec{v}_n$ est en fait une solutions adaptée (voir Section 4.2.2). Avec cette information supplémentaire , on peut passer à la limite $n \longrightarrow +\infty$ et alors obtenir une solution $\vec{v}$ qui reste une solution adaptée (voir Section 4.2.3). Ensuite dans la section 4.2.4, on va considérer l'équation associée à la variable originale $\vec{u}$ avec sa variable associée $\vec{v}$. On verra alors que cette variable $\vec{v}$ peut être obtenue par deux manières différentes : directement de $\vec{u}$ (avec aucune information) ou bien par un processus de limite à partir de $\vec{v}_n$ (avec plus de propriétés) et on connectera toutes ces propriétés sur $\vec{v}$ pour obtenir un meilleur cadre pour la variable $\vec{u}$. En effet, nous allons d'abord prouver que la mesure M est bien posée et seulement alors nous étudierons sa positivité afin d'obtenir finalement que la solution $\vec{u}$ est dissipative.

4.2 Preuve

4.2.1 La limite de $\vec{u}_n$

Par hypothèse la suite $(\vec{u}_n, p_n, \vec{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les équations de Navier-Stokes

$$\partial_t \vec{u}_n = \nu\Delta\vec{u}_n - (\vec{u}_n \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_n - \vec{\nabla}p_n + \vec{f_n}. \tag{4.3}$$

On veut étudier la limite quand $n \to +\infty$ et pour cela on va commencer par certains faits généraux. En effet, comme on a $\vec{u}_n$ bornée dans $L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2_t H^1_x(Q)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est possible d'extraire une sous-suite $(\vec{u}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement-* vers une fonction $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2_t H^1_x(Q)$ et par une manière similaire, pour la force $(\vec{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$, comme $\vec{f_n}$ est bornée dans $L_t^{\frac{10}{7}} L_x^{\frac{10}{7}}(Q)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut extraire une sous-suite $(\vec{f}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement-* vers une fonction $\vec{f} \in L_t^{\frac{10}{7}} L_x^{\frac{10}{7}}(Q)$. Pour la pression $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}'(Q)$, on verra qu'elle converge lorsque $n \to +\infty$ vers une quantité qui sera définie par la suite.

Mais on a bien sûr besoin d'étudier plus attentivement le terme non linéaire $(\vec{u}_n \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_n$ et pour cela on décompose $\vec{u}_n$ comme la somme de $\vec{w}_n$ et $\vec{u}$:

$$\vec{u}_n = \vec{w}_n + \vec{u}, \tag{4.4}$$

et de cette décomposition, en extrayant des sous-suites, on a que $\vec{u}_{n_k}$ converge faiblement vers $\vec{u}$ et $\vec{w}_{n_k}$ converge faiblement vers zéro.

Ainsi on a les équations de Navier-Stokes suivante

$$\partial_t \vec{u}_{n_k} = \nu \Delta \vec{u}_{n_k} - (\vec{u}_{n_k} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_{n_k} - \vec{\nabla} p_{n_k} + \vec{f}_{n_k},$$

et si on remplace $\vec{u}_{n_k}$ par $\vec{w}_{n_k} + \vec{u}$ dans le terme non linéaire on obtient

$$(\vec{u}_{n_k} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_{n_k} = ([\vec{w}_{n_k} + \vec{u}] \cdot \vec{\nabla})[\vec{w}_{n_k} + \vec{u}] = (\vec{w}_{n_k} \cdot \vec{\nabla})\vec{w}_{n_k} + (\vec{w}_{n_k} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{w}_{n_k} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u},$$

et on peut écrire

$$\partial_t \vec{u}_{n_k} = \nu \Delta \vec{u}_{n_k} - \Big((\vec{w}_{n_k} \cdot \vec{\nabla})\vec{w}_{n_k} + (\vec{w}_{n_k} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{w}_{n_k} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\Big) - \vec{\nabla} p_{n_k} + \vec{f}_{n_k}.$$

Par conséquent, si nous faisons tendre $n \to +\infty$, en utilisant les faits généraux précédents, on trouve

$$\partial_t \vec{u} = \nu \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \lim_{n \to +\infty} \Big((\vec{w}_{n_k} \cdot \vec{\nabla})\vec{w}_{n_k} + (\vec{w}_{n_k} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{w}_{n_k} + \vec{\nabla} p_{n_k}\Big) + \vec{f}.$$

Maintenant, on remarque que les termes $(\vec{w}_{n_k} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ et $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}$ convergent vers zéro puisque $\vec{w}_{n_k}$ converge faiblement vers zéro et $\vec{u}$ est bornée dans $L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2 H^1(Q)$ ainsi il nous reste donc à étudier l'expression suivante :

$$\partial_t \vec{u} = \nu \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \lim_{n \to +\infty} \Big((\vec{w}_{n_k} \cdot \vec{\nabla})\vec{w}_{n_k} + \vec{\nabla} p_{n_k}\Big) + \vec{f}. \tag{4.5}$$

À ce stade, on a besoin de donner un traitement plus détaillé pour le terme $(\vec{w}_{n_k} \cdot \vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}$ et pour cela on introduit les lemmes suivants :

Lemme 12 *Le terme $(\vec{w}_{n_k} \cdot \vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}$ appartient à l'espace $L^1(]a,b[, L^{\frac{3}{2}}(B_{x_0,r})) \cap L^2(]a,b[, L^1(B_{x_0,r}))$.*

Preuve. Par construction on $\vec{u}_{n_k} = \vec{w}_{n_k} + \vec{u}$ avec $\vec{u}_{n_k}, \vec{u} \in L^\infty(]a,b[, L^2(B_{x_0,r})) \cap L^2(]a,b[, H^1(B_{x_0,r}))$, donc $\vec{w}_{n_k}$ appartient aussi au même espace. On entame la preuve par écrire le terme $(\vec{w}_{n_k} \cdot \vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}$ comme suit :

$$(\vec{w}_{n_k} \cdot \vec{\nabla})\vec{w}_{n_k} = \sum_{i,j=1}^{3} \vec{w}_{n_{k_i}} \partial_i \vec{w}_{n_{k_j}},$$

et on commence par montrer que $(\vec{w}_{n_k} \cdot \vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}$ appartient à $L^1(]a,b[, L^{\frac{3}{2}}(B_{x_0,r}))$: en effet on a

$$\left\| \sum_{i,j=1}^{3} w_{n_{k_i}} \partial_i w_{n_{k_j}} \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{x_0,r})} \leq C \|\vec{w}_{n_k}(t,.) \vec{\nabla} \otimes \vec{w}_{n_k}(t,.)\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{x_0,r})},$$

en appliquant l'inégalité de Hölder on trouve

$$\left\| \sum_{i,j=1}^{3} w_{n_{k_i}} \partial_i w_{n_{k_j}} \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{x_0,r})} \leq C \|\vec{w}_{n_k}(t,.)\|_{L^6(B_{x_0,r})} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{w}_{n_k}(t,.)\|_{L^2(B_{x_0,r})}.$$

Ensuite en prenant la norme L^1 en variable de temps et en appliquant l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\|(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}\|_{L^1(]a,b[,L^{\frac{3}{2}}(B_{x_0,r}))}\leq C\|\vec{w}_{n_k}\|_{L^2(]a,b[,L^6(B_{x_0,r}))}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{w}_{n_k}\|_{L^2(]a,b[,L^2(B_{x_0,r}))}<+\infty,$$

et on a $(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}\in L^1(]a,b[,L^{\frac{3}{2}}(B_{x_0,r}))$.

On va prouver maintenant que $(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}\in L^2(]a,b[,L^1(B_{x_0,r}))$ et on commence par prendre la norme L^1 en variable d'espace :

$$\left\|\sum_{i,j}^{3}w_{n_{k_i}}\partial_i w_{n_{k_j}}\right\|_{L^1(B_{x_0,r})}\leq C\|\vec{w}_{n_k}(t,.)\vec{\nabla}\otimes\vec{w}_{n_k}(t,.)\|_{L^1(B_{x_0,r})},$$

appliquant l'inégalité de Hölder on obtient

$$\left\|\sum_{i,j}^{3}w_{n_{k_i}}\partial_i w_{n_{k_j}}\right\|_{L^1(B_{x_0,r})}\leq C\|\vec{w}_{n_k}\|_{L^2(B_{x_0,r})}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{w}_{k_n}\|_{L^2(B_{x_0,r})}.$$

Ensuite en prenant la norme L^2 en variable de temps et en appliquant l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\|(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}\|_{L^2(]a,b[,L^1(B_{x_0,r}))}\leq C\|\vec{w}_{n_k}\|_{L^\infty(]a,b[,L^2(B_{x_0,r}))}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{w}_{n_k}\|_{L^2(]a,b[,L^2(B_{x_0,r}))}<+\infty,$$

on a finalement $(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}\in L^2(]a,b[,L^1(B_{x_0,r}))$ et le lemme est prouvé. ■

Une fois qu'on a ce résultat on peut obtenir le lemme suivant.

Lemme 13 *La sous suite $(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}$ converge faiblement dans l'espace $L^{\frac{10}{7}}(]a,b[,L^{\frac{15}{13}}(B_{x_0,r}))$. On notera cette limite par $\vec{G}\in L^{\frac{10}{7}}(]a,b[,L^{\frac{15}{13}}(B_{x_0,r}))$.*

Preuve. Il suffit de démontrer que le terme $(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_{k_\varepsilon}}$ appartient à $L^{\frac{10}{7}}(]a,b[,L^{\frac{15}{13}}(B_{x_0,r}))$. Par le Lemme 12 on a que $(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}$ appartient à $L^1(]a,b[,L^{\frac{3}{2}}(B_{x_0,r}))\cap L^2(]a,b[,L^1(B_{x_0,r}))$, en appliquant une estimation d'interpolation en variable d'espace on trouve

$$\|(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}\|_{L^{\frac{15}{13}}(B_{x_0,r})}\leq C\|(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}\|^{\frac{2}{5}}_{L^{\frac{3}{2}}(B_{x_0,r})}\|(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}\|^{\frac{3}{5}}_{L^1(B_{x_0,r})},$$

maintenant, en intégrant en variable de temps on obtient

$$\int_a^b\|(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}\|^{\frac{10}{7}}_{L^{\frac{15}{13}}(B_{x_0,r})}ds\leq C\int_a^b\|(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}\|^{\frac{4}{7}}_{L^{\frac{3}{2}}(B_{x_0,r})}\|(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}\|^{\frac{6}{7}}_{L^1(B_{x_0,r})}ds,$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder on trouve

$$\begin{aligned}\|(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}\|_{L^{\frac{10}{7}}(]a,b[,L^{\frac{15}{13}}(B_{x_0,r}))}&\leq C\|(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}\|^{\frac{2}{5}}_{L^1(]a,b[,L^{\frac{3}{2}}(B_{x_0,r}))}\|(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}\|^{\frac{3}{5}}_{L^2(]a,b[,L^1(B_{x_0,r}))}\\&<+\infty.\end{aligned}$$

Ainsi le lemme est prouvé. ■

Une fois que nous avons établi avec ces deux lemmes que le terme $(\vec{w}_{n_k}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}_{n_k}$ converge vers la limite $\vec{G}$ dans $L^{\frac{10}{7}}(]a,b[,L^{\frac{15}{13}}(B_{x_0,r}))$, revenant à l'identité (4.5) on a

$$\partial_t\vec{u}=\nu\Delta\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}-\vec{G}+\lim_{n\to\infty}\vec{\nabla}p_{n_k}+\vec{f}.$$

La limite de $\vec{\nabla}p_{n_k}$ existe grâce à l'égalité. Maintenant, si on prolonge par zéro la quantité $\vec{G}$ afin d'obtenir une fonction définie sur tout le l'espace $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$, on a alors $\vec{G}\in L^{\frac{10}{7}}([\not<,+\infty[,L^{\frac{15}{13}}(\mathbb{R}^3))$ et on peut appliquer la décomposition de Helmholtz sur $\vec{G}$ pour obtenir

$$\vec{G}=-\vec{g}+\vec{\nabla}h,$$

où $\vec{g}\in L^{\frac{10}{7}}([0,+\infty[,L^{\frac{15}{13}}(\mathbb{R}^3))$, $\operatorname{div}(\vec{g})=0$ et $\vec{\nabla}h\in L^{\frac{10}{7}}([0,+\infty[,L^{\frac{15}{13}}(\mathbb{R}^3))$.

Ainsi

$$(\vec{u}_n\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_n\longrightarrow(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}+\vec{g}-\vec{\nabla}h.$$

En utilisant cette décomposition on obtient

$$\partial_t\vec{u}=\nu\Delta\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}-\lim_{n\to\infty}\vec{\nabla}p_{n_k}+\vec{\nabla}h+(\vec{f}+\vec{g}). \tag{4.6}$$

On remarque que, tant que nous travaillons avec les hypothèses générales énoncée dans le Théorème 11, nous serons toujours obligés à traiter les termes supplémentaires h et $\vec{g}$ qui apparaissent de la non linéarité et ces termes modifient la pression et la force dans les équations de Navier-Stokes : en effet, comparons (4.1) à (4.6) on observe que dans la limite la nouvelle pression est donnée par $\lim_{n\to+\infty}\vec{\nabla}(p_{n_k}+h)$ et la nouvelle force est donnée par $\vec{f}+\vec{g}$.

Maintenant, comme on veut prouver que $\vec{u}$ reste dissipative après le passage à la limite, la première étape est de vérifier que la quantité M (définie dans (4.2)) associée à la solution $\vec{u}$ de l'équation (4.6) est bien posée :

$$M=-\partial_t|\vec{u}|^2+\nu\Delta|\vec{u}|^2-2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2-\operatorname{div}(|\vec{u}|^2\vec{u})-2\langle\operatorname{div}((\lim_{n\to+\infty}p_{n_k}+h)\vec{u})\rangle+2(\vec{f}+\vec{g})\cdot\vec{u}. \tag{4.7}$$

On note maintenant que le principal problème est concentré dans la quantité $(\vec{f}+\vec{g})\cdot\vec{u}$, en effet, comme $\vec{u}\in L^\infty_tL^2_x\cap L^2_tH^1_x$ nous avons seulement par interpolation que $\vec{u}\in L^{10/3}_tL^{10/3}_x$ et puisque on a obtenu $\vec{g}\in L^{\frac{10}{7}}([0,+\infty[,L^{\frac{15}{13}}(\mathbb{R}^3))$ cette information sur $\vec{g}$ n'est pas suffisante pour donner un sens au produit $\vec{g}\cdot\vec{u}$ et par conséquent la quantité $\langle\operatorname{div}((\lim_{n\to+\infty}p_{n_k}+h)\vec{u})\rangle$ non plus n'a pas de sens et ceci nous empêche de démontrer dans un premier lieu que la quantité M est bien posée. Ainsi pour contourner ce problème on va utiliser le fait que $\vec{\omega}_n\wedge\vec{u}_n$ converge vers $\vec{\omega}\wedge\vec{u}$ (Voir annexe page 102) pour pouvoir mettre le terme $\vec{g}$ sous la forme d'un gradient et le sommer avec $\vec{\nabla}(p_{n_k}+h)$. En effet, on a

- $(\vec{u}_n\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_n\longrightarrow(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}+\vec{g}-\vec{\nabla}h$
- $\vec{\omega}_n\wedge\vec{u}_n=(\vec{u}_n\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_n-\dfrac{1}{2}\vec{\nabla}(|\vec{u}_n|^2)$

Par le premier point on écrit

$$g=\lim_{n\to+\infty}\Big[(\vec{u}_n\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_n-(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}+\vec{\nabla}h\Big]$$

comme $(\vec{u}_n \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_n = \vec{\omega}_n \wedge \vec{u}_n + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(|\vec{u}_n|^2)$ on obtient

$$\vec{g} = \lim_{n\to+\infty} \left[\vec{\omega}_n \wedge \vec{u}_n + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(|\vec{u}_n|^2) - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}h\right]$$

et on sait que $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \vec{\omega}\wedge\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(|\vec{u}|^2)$ ainsi on a

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \lim_{n\to+\infty}\left[\vec{\omega}_n\wedge\vec{u}_n + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(|\vec{u}_n|^2) - \vec{\omega}\wedge\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{\nabla}(|\vec{u}|^2) + \vec{\nabla}h\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\vec{\nabla}(|\vec{u}_n|^2) - \frac{1}{2}\vec{\nabla}(|\vec{u}|^2) + \vec{\nabla}h\right].\end{aligned}$$

Vu que $\vec{\omega}_n \wedge \vec{u}_n \longrightarrow \vec{\omega}\wedge\vec{u}$.

Donc on obtient

$$\vec{g} = \lim_{n\to+\infty}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}|\vec{u}_n|^2 - \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + h\right).$$

Ainsi on obtient l'équation de Navier-Stokes suivante

$$\partial_t\vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f},$$

où $\vec{\nabla}p = \lim_{n\to+\infty}\vec{\nabla}\left(p_n + \frac{1}{2}|\vec{u}_n|^2 - \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + h\right)$ et la quantité associée M

$$M = -\partial_t|\vec{u}|^2 + \nu\Delta|\vec{u}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 - \operatorname{div}(|\vec{u}|^2\vec{u}) - 2\langle\operatorname{div}(p\vec{u})\rangle + 2\vec{f}\cdot\vec{u},$$

est bien posée.

Étudions maintenant, la positivité de la quantité M. Pour cela on va utiliser la nouvelle variable associée $\vec{v}$ introduite dans le Chapitre 3 (pour éliminer la pression).

4.2.2 La nouvelle variable $\vec{v}_n$

En suivant la stratégie générale exposée à la fin du Théorème 11, pour chaque $\vec{u}_n$ on va considérer une variable associée $\vec{v}_n$ définie par l'expression

$$\vec{v}_n = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge(\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_n), \tag{4.8}$$

$\psi(t,x) = \phi(t)\Phi(x)$ avec ϕ est égale à 1 sur un voisinage de I_0 et à support compacte sur I, tandis que Φ est égale à 1 sur un voisinage de $B_{x_0,\rho}$ et à support compacte sur $B_{x_0,r}$, avec $\rho < r$. Pour des raisons de simplicité, nous allons dénoter par $Q_0 \subset Q$ le domaine donné par

$$Q_0 = I_0 \times B_{x_0,\rho}, \tag{4.9}$$

on remarquera alors que $\psi \equiv 1$ sur Q_0.
En particulier, dans le cadre du Théorème 11, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on remarquera que la variable $\vec{v}_n$ satisfait les points suivants :

Lemme 14 *Sous les hypothèses du Théorème 11, la nouvelle variable $\vec{v}_n$ donnée par l'expression (4.8) satisfait $\vec{v}_n \in L^\infty_t L^2_x(Q_0) \cap L^2_t H^1_x(Q_0)$ et* $\operatorname{div}(\vec{v}_n) = 0$.

Pour la preuve voir Proposition 3. De plus, en suivant les mêmes ligne du Chapitre 3, la nouvelle variable $\vec{v}_n$ satisfait sur le sous domaine $Q_0 \subset Q$ les équations

$$\partial_t \vec{v}_n = \nu \Delta \vec{v}_n - (\vec{v}_n \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_n - \vec{\nabla} q_n + \vec{F}_n. \tag{4.10}$$

La construction de ces équations peut être déduite en appliquant d'abord l'opérateur rotationnel aux équations (4.3), notons en particulier que comme $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} p_n \equiv 0$, toutes les quantités dans (4.10) ne dépendent pas de la pression p_n.

Il est important de noter ici que la nouvelle force $\vec{F}_n$ peut être décomposée comme

$$\vec{F}_n = \vec{F}_{0,n} + \vec{F}_{1,n}, \tag{4.11}$$

où $\vec{F}_{0,n}$ concentre l'information de la force originale $\vec{f}_n$ et elle est donnée par l'expression $\vec{F}_{0,n} = -\dfrac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi \vec{\nabla} \wedge \vec{f}_n)$ et on peut démontrer en fait $\vec{F}_{0,n} \in L_t^{\frac{10}{7}} L_x^{\frac{10}{7}}(Q_0)$ (voir Lemme 4). Le terme qui reste $\vec{F}_{1,n} = \vec{F}_{1,n}(\vec{u}_n)$ dépend seulement de $\vec{u}_n$ et on a $\vec{F}_n = \vec{F}_{0,n} + \vec{F}_{1,n} \in L_t^{\frac{10}{7}} L_x^{\frac{10}{7}}(Q_0)$.

Concernant les propriétés de la pression q_n il est prouvé dans la Proposition 4 que $q_n = q_n(\vec{u}_n)$ satisfait $q_n \in L_t^{\frac{3}{2}} L_x^{\frac{3}{2}}(Q_0)$.

Maintenant, puisque on avait supposé que chaque $\vec{u}_n$ est une solution dissipative, en utilisant le Lemme 10, on peut prouver en fait que $\vec{v}_n$ est une solution adaptée pour les équations (4.10), dans le sens de la définition 7.

4.2.3 La limite de $\vec{v}_n$

Comme on peut le voir, on obtient plusieurs propriétés pour la variable $\vec{v}_n$ que nous trouvons convenables de les rassembler ici :

- $\vec{v}_n \in L_t^\infty L_x^2(Q_0) \cap L_t^2 H_x^1(Q_0)$ et $\operatorname{div}(\vec{v}_n) = 0$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$ la variable $\vec{v}_n$ satisfait l'équation associée (4.10), où la nouvelle pression q_n et la nouvelle force $\vec{F}_n$ satisfont $q_n \in L_t^{\frac{3}{2}} L_x^{\frac{3}{2}}(Q_0)$ et $\vec{F}_n \in L_t^{\frac{10}{7}} L_x^{\frac{10}{7}}(Q_0)$,
- la solution $\vec{v}_n$ est une solution adaptée.

Il est important de noter que, contrairement au cadre de de la solution $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donné dans le Théorème 11 et étudié dans la section 4.2.1, on a un contrôle sur la pression q_n et on peut appliquer le lemme de Rellich-Lions (voir Théorème 12.1 in [27]) pour obtenir une information plus forte afin de passer à la limite. En effet, puisque $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\vec{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites bornées dans $L_t^{\frac{3}{2}} L_x^{\frac{3}{2}}(Q_0)$ et $L_t^{\frac{10}{7}} L_x^{\frac{10}{7}}(Q_0)$ respectivement, on peut extraire des sous suites qui convergent vers $q \in L_t^{\frac{3}{2}} L_x^{\frac{3}{2}}(Q_0)$ et $\vec{F} \in L_t^{\frac{10}{7}} L_x^{\frac{10}{7}}(Q_0)$ et on pourra écrire

$$\partial_t \vec{v} = \nu \Delta \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla} q + \vec{F}, \tag{4.12}$$

où, comme dans (4.11) ci-dessus on a

$$\begin{aligned} &\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1, \\ &\text{où } \vec{F}_0 = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi \vec{\nabla} \wedge \vec{f}) \in L_t^{\frac{10}{7}} L_x^{\frac{10}{7}}(Q_0) \quad \text{et} \quad \vec{F}_1 \in L_t^2 L_x^2(Q_0). \end{aligned} \tag{4.13}$$

De plus, si on étudie la quantité

$$\eta = -\partial_t|\vec{v}|^2 + \nu\Delta|\vec{v}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2 - \mathrm{div}\,(|\vec{v}|^2\vec{v}) - 2\mathrm{div}\,(q\vec{v}) + 2\vec{F}\cdot\vec{v}, \tag{4.14}$$

on remarque que le terme $\vec{F}\cdot\vec{v}$ est bien posé puisque on a maintenant $\vec{F}\in L_t^{\frac{10}{7}}L_x^{\frac{10}{7}}(Q_0)$ et $\vec{v}\in L_t^{10/3}L_x^{10/3}(Q_0)$ (par interpolation en utilisant le fait que $\vec{v}\in L_t^\infty L_x^2\cap L_t^2H_x^1$). En outre, en utilisant toutes les informations recueillies jusqu'à présent et puisque la variable $\vec{v}_n$ est une solution adaptée des équations (4.10) on peut obtenir à la limite que $\vec{v}$ reste une solution adaptée et la quantité η est une mesure de Borel localement finie positive sur Q.

En effet, par le lemme de Rellich on a que la sous-suite $(\vec{u}_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\vec{u}$ dans $(L_t^2L_x^2)_{loc}$, on a aussi que $(\vec{u}_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\vec{u}$ dans $L_t^2H_x^1(Q)$ et converge *-faiblement dans $L_t^\infty L_x^2(Q)$ ainsi, on a les convergence suivantes dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$: $\partial_t|\vec{v}_n|^2 \rightharpoonup \partial_t|\vec{v}|^2$, $\nu\Delta|\vec{v}_n|^2 \rightharpoonup \nu\Delta|\vec{v}|^2$, $\mathrm{div}\,(|\vec{v}_n|^2\vec{v}_n) \rightharpoonup \mathrm{div}\,(|\vec{v}|^2\vec{v})$, $\mathrm{div}\,(q\vec{v}_n) \rightharpoonup \mathrm{div}\,(q\vec{v})$, $\vec{F}_n\cdot\vec{v}_n \rightharpoonup \vec{F}\cdot\vec{v}$. Posons

$$T = -\partial_t|\vec{v}|^2 + \nu\Delta|\vec{v}|^2 - \mathrm{div}\,(|\vec{v}|^2\vec{v}) - 2\mathrm{div}\,(q\vec{v}) + 2\vec{F}\cdot\vec{v},$$

la question qui se pose : est ce que la distribution T est égale à $\eta + 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2$ avec $\eta\geq 0$. Ceci revient à démontrer que la distribution T est positive. Soit $\phi\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ une fonction positive, on a

$$\langle T,\phi\rangle = \langle \eta + 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2,\phi\rangle = \langle\eta,\phi\rangle + 2\nu\langle|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2,\phi\rangle,$$

où $\langle\eta,\phi\rangle\geq 0$. Montrons que $\langle T,\phi\rangle\geq 2\nu\langle|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2,\phi\rangle$. On a $\langle T_n,\phi\rangle$ converge faiblement vers $\langle T,\phi\rangle$, on a aussi $\langle\eta_n+2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}_n|^2,\phi\rangle\geq 2\nu\langle|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}_n|^2,\phi\rangle$. Comme $\sqrt{\phi}\vec{\nabla}\otimes\vec{v}_n$ converge faiblement vers$\sqrt{\phi}\vec{\nabla}\otimes\vec{v}$ dans $L_t^2L_x^2$ on obtient

$$\langle T,\phi\rangle \geq \liminf_{\varepsilon\to 0} 2\nu\int\int|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}_n|^2\phi\,dt\,dx \geq 2\nu\int\int|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2\phi\,dt\,dx.$$

Ainsi on a bien que $T = 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2+\eta$.

Maintenant, nous allons relier ces deux variables et cela sera réalisé dans la section suivante.

4.2.4 L'équation associée pour $\vec{u}$

Rappelons que dans la section 4.2.1 (voir (4.3) à (4.6)) à partir une suite de solutions faibles de Leray $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a obtenu quand $n\to+\infty$ (en utilisant les sous suites) l'équation suivante sur $Q\subset[0,+\infty[\times B(x_0,r)$

$$\partial_t\vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \tag{4.15}$$

où la pression p a été obtenue par le traitement du terme non linéaire $(\vec{u}_n\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_n$. Observons qu'à ce stade de la preuve on ne peut pas assurer que $\vec{u}$ est une solution dissipative puisque la quantité M donnée dans (4.7) n'a pas été démontré être positive.

On introduit maintenant la variable suivante qui nous permettra de lier le développement fait dans la Section précédente 4.2.3 à la solution $\vec{u}$ de l'équation ci-dessus. En effet, sur l'ensemble Q_0 définit dans (4.9) on peut considérer

$$\vec{v} = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge(\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}), \tag{4.16}$$

et en suivant les mêmes étapes faites dans le Chapitre 3 on va obtenir l'équation associée à (4.15) suivante

$$\partial_t \vec{v} = \nu\Delta\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla}\mathcal{Q} + \vec{\mathscr{F}}, \tag{4.17}$$

et il est très important de remarquer que dans l'équation précédente, la nouvelle pression $\mathcal{Q}$ n'est pas liée à la pression p qui apparait dans (4.15) : en effet, afin d'obtenir l'équation (4.17) de l'équation (4.15) on a besoin d'appliquer l'opérateur rotationnel qui anéantit le terme $\vec{\nabla}p$. En fait, la nouvelle pression $\mathcal{Q}$ dépend seulement de $\vec{v}$ et on peut prouver en fait que $\mathcal{Q} \in L_t^{3/2}L_x^{3/2}(Q_0)$ (voir Proposition 4).

Maintenant, pour la nouvelle force $\vec{\mathscr{F}}$ on remarque que, comme $\vec{f} \in L_t^{10/7}L_x^{10/7}(Q)$ par le Lemme 4 on trouve que $\vec{\mathscr{F}} \in L_t^{10/7}L_x^{10/7}(Q_0)$. Remarquons aussi, comme dans le cas précédent on a

$$\vec{\mathscr{F}} = \vec{F}_0 + \vec{\mathscr{F}}_1, \tag{4.18}$$

où $\vec{F}_0 = -\dfrac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\wedge(\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{f}) \in L_t^{\frac{10}{7}}L_x^{\frac{10}{7}}(Q_0)$ est le même terme que celui qui apparait dans la décomposition (4.13) et le terme qui reste $\vec{\mathscr{F}}_1$ dépends seulement de $\vec{u}$ et appartient à l'espace $L_t^2L_x^2(Q_0)$.

Ainsi, de l'équation (4.17) et avec l'information sur la pression $\mathcal{Q}$ et la force $\vec{\mathscr{F}}$ on peut considérer la quantité

$$\mu = -\partial_t|\vec{v}|^2 + \nu\Delta|\vec{v}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2 - \operatorname{div}(|\vec{v}|^2\vec{v}) - 2\operatorname{div}(\mathcal{Q}\vec{v}) + 2\vec{\mathscr{F}}\cdot\vec{v}, \tag{4.19}$$

Remarquons que contrairement à la quantité η donnée dans (4.14), à ce stade de la preuve on ne peut pas assurer que la quantité μ est positive et donc une mesure de Borel localement fini.

4.2.5 La comparaison des mesures

Avec les informations obtenues dans les sections précédentes, on revient à l'étude des quantités M, η et μ données (4.7), (4.14) et (4.19) respectivement. On va démontrer que chacune des mesures M et μ est positives. Faisons un récapitulatif de ce qu'on a comme informations sur ces trois mesures.

On commence par la première mesure M :

$$M = -\partial_t|\vec{u}|^2 + \nu\Delta|\vec{u}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 - \operatorname{div}(|\vec{u}|^2\vec{u}) - 2\langle\operatorname{div}(p\vec{u})\rangle + 2\vec{f}\cdot\vec{u},$$

On a démontre dans la Section 4.2.1 que la quantité M est bien posée.

Pour la deuxième mesure η, comme il a été souligné à la fin de la Section 4.2.3, la quantité

$$\eta = -\partial_t|\vec{v}|^2 + \nu\Delta|\vec{v}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2 - \operatorname{div}(|\vec{v}|^2\vec{v}) - 2\operatorname{div}(q\vec{v}) + 2\vec{F}\cdot\vec{v},$$

est bien posé puisque chaque terme dans cette expression a un sens. Mais on a ici une information supplémentaire puisqu'on sait que la quantité est une mesure de Borel localement finie positive sur Q_0 et on verra par la suite comment exploiter ce fait.

Finalement, pour la dernière mesure μ on a

$$\mu = -\partial_t|\vec{v}|^2 + \nu\Delta|\vec{v}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2 - \mathrm{div}\,(|\vec{v}|^2\vec{v}) - 2\mathrm{div}\,(\mathcal{Q}\vec{v}) + 2\vec{\mathscr{F}}\cdot\vec{v},$$

et on a démontré dans la Section 4.2.4 qu'elle était bien posée.

Étudions maintenant leur positivité. En effet, comme la mesure η est une mesure de Borel localement finie positive sur Q_0 on va utiliser ce fait pour obtenir quelque informations sur la mesure μ et ensuite, comme cette dernière est liée à M, on va finalement obtenir le résultat qu'on a voulu pour la mesure M.

On va comparer maintenant les mesures η et μ qui sont toutes les deux obtenues à partir de la variable $\vec{v}$. Calculons $\mu - \eta$:

$$\begin{aligned}\mu - \eta &= -\partial_t|\vec{v}|^2 + \nu\Delta|\vec{v}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2 - \mathrm{div}\,(|\vec{v}|^2\vec{v}) - 2\mathrm{div}\,(\mathcal{Q}\vec{v}) + 2\vec{\mathscr{F}}\cdot\vec{v}\\ &\quad - \Big(-\partial_t|\vec{v}|^2 + \nu\Delta|\vec{v}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2 - \mathrm{div}\,(|\vec{v}|^2\vec{v}) - 2\mathrm{div}\,(q\vec{v}) + 2\vec{F}\cdot\vec{v}\Big)\\ &= -2\mathrm{div}\,\big((\mathcal{Q}-q)\vec{v}\big) + 2(\vec{\mathscr{F}} - \vec{F})\cdot\vec{v}.\end{aligned}$$

On va maintenant utiliser l'identité $\vec{\nabla}(\mathcal{Q}-q) = \vec{\mathscr{F}} - \vec{F}$ obtenue en faisant la soustraction des deux équations (4.12) et (4.17) pour prouver que la quantité précédente est nulle et on verra en fait qu'on a l'identité

$$\mathrm{div}\,\big((\mathcal{Q}-q)\vec{v}\big) - (\vec{\mathscr{F}} - \vec{F})\cdot\vec{v} = 0, \tag{4.20}$$

de laquelle on va déduire que $\mu = \eta$.

En effet, par l'identité vectoriel $\mathrm{div}\,(a\vec{b}) = a\,\mathrm{div}\,b + \vec{\nabla}a\cdot b$, on peut écrire (au moins formellement)

$$\mathrm{div}\,\big((\mathcal{Q}-q)\vec{v}\big) = (\mathcal{Q}-q)\mathrm{div}\,(\vec{v}) + \vec{\nabla}(\mathcal{Q}-q)\cdot\vec{v},$$

et comme $\mathrm{div}\,(\vec{v}) = 0$ on a $\mathrm{div}\,\big((\mathcal{Q}-q)\vec{v}\big) = \vec{\nabla}(\mathcal{Q}-q)\cdot\vec{v}$ et ainsi, prouver (4.20) revient à étudier l'identité

$$\vec{\nabla}(\mathcal{Q}-q)\cdot\vec{v} - (\vec{\mathscr{F}} - \vec{F})\cdot\vec{v} = 0. \tag{4.21}$$

Toutefois, remarquons que comme $(\mathcal{Q}-q) \in L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}$ on ne pourra pas donner un sens à la quantité $\vec{\nabla}(\mathcal{Q}-q)\cdot\vec{v}$ (et par conséquent on ne pourra utiliser l'identité$\vec{\nabla}(\mathcal{Q}-q) = \vec{\mathscr{F}} - \vec{F}$), ainsi afin de passer de (4.20) à (4.21) on a besoin d'un étape supplémentaire. Pour cela on commence par considérer une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\theta\,dx = 1$, avec $supp(\theta) \subset B(0,1)$ et pour $\varepsilon > 0$ on pose $\theta_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon^3}\theta(\dfrac{x}{\varepsilon})$ et on note $\vec{v}_\varepsilon = \theta_\varepsilon * \vec{v}$. Si on remplace $\vec{v}$ par la mollification $\vec{v}_\varepsilon$ et en suivant les mêmes calculs fait précédemment dans le Chapitre 3, on peut obtenir au lieu de l'identité (4.21), l'identité bien posée suivante

$$\vec{\nabla}\big((\mathcal{Q}-q)*\theta_\varepsilon\big)\cdot\vec{v}_\varepsilon - \big((\vec{\mathscr{F}} - \vec{F})*\theta_\varepsilon\big)\cdot\vec{v}_\varepsilon = 0, \tag{4.22}$$

qui peut être réécrite comme suit

$$\Big(\Big(\vec{\nabla}(\mathcal{Q}-q) - (\vec{\mathscr{F}} - \vec{F})\Big) * \theta_\varepsilon\Big)\cdot\vec{v}_\varepsilon = 0,$$

et finalement, en utilisant l'identité $\vec{\nabla}(\mathcal{Q} - q) = \vec{\mathscr{F}} - \vec{F}$, on peut conclure que l'expression (4.22) est nulle et alors, en revenant à (4.20) on trouve que les mesures μ et η coïncident.

Maintenant, comme on sait que η est une mesure de Borel localement finie positive sur Q_0, et on vient de prouver que $\mu = \eta$ on obtient que μ est aussi une mesure de Borel localement finie positive sur Q_0.

La dernière étape de la preuve du Théorème 11 repose sur le fait que $\mu = M$ (voir Proposition 3.3 du Chapitre 3), de laquelle on déduit finalement que M est une mesure de Borel localement finie positive sur Q_0 : la solution $\vec{u}$ obtenue de la famille des solutions dissipatives $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi elle même une solution dissipative. ■

Annexe

Preuve de la Proposition 6.

$$\sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k\theta_\epsilon(y)(u_k(x-y)-u_k(x))\,dy=0,$$

telle que on peut réécrire R_ϵ de la manière suivante

$$\begin{aligned}
R_\epsilon &= \sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k\theta_\epsilon(y)\left(u_k(x-y)-u_k(x)\right)\left(|\vec{u}(x-y)|^2-2\vec{u}(x-y)\cdot\vec{u}(x)\right)\,dy\\
&= \sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k\theta_\epsilon(y)\left(u_k(x-y)-u_k(x)\right)|\vec{u}(x-y)|^2\,dy\\
&\quad -2\sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k\theta_\epsilon(y)\left(u_k(x-y)-u_k(x)\right)\vec{u}(x-y)\cdot\vec{u}(x)\,dy\\
R_\epsilon &= \mathrm{div}\,\left(\theta_\epsilon*(|\vec{u}|^2\vec{u})-(\theta_\epsilon*|\vec{u}|^2)\vec{u}\right)-2\sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k\theta_\epsilon(y)\left(u_k(x-y)-u_k(x)\right)\vec{u}(x-y)\cdot\vec{u}(x)\,dy.
\end{aligned}$$

De même, on peut réécrire la distribution

$$S_\epsilon=\sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k\theta_\epsilon(y)\big(u_k(x-y)-u_k(x)\big)\big((\vec{u}(x-y)-\vec{u}(x))\cdot(\vec{u}_\epsilon(x)-\vec{u}(x))\big)\,dy,$$

comme

$$\begin{aligned}
S_\epsilon &= \sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k\theta_\epsilon(y)u_k(x-y)\vec{u}(x-y)\cdot\vec{u}_\epsilon(x)\,dy\\
&\quad -\sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k\theta_\epsilon(y)\left(u_k(x-y)-u_k(x)\right)\vec{u}(x-y)\cdot\vec{u}(x)\,dy\\
&\quad -\sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k\theta_\epsilon(y)u_k(x)\vec{u}(x-y)\cdot\vec{u}_\epsilon(x)\,dy\\
S_\epsilon &= (\vec{u}*\theta_\epsilon)\cdot[\mathrm{div}\,(\vec{u}\otimes\vec{u})]*\theta_\epsilon-\sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k\theta_\epsilon(y)\left(u_k(x-y)-u_k(x)\right)\vec{u}(x-y)\cdot\vec{u}(x)\,dy\\
&\quad -\vec{u}_\epsilon\cdot[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_\epsilon].
\end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
2S_\epsilon-R_\epsilon-\mu_\varepsilon &= -2\vec{u}_\epsilon\cdot[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_\epsilon]-\mathrm{div}\,\left(\theta_\epsilon*(|\vec{u}|^2\vec{u})-(\theta_\epsilon*|\vec{u}|^2)\vec{u}\right)+\mathrm{div}\,(|\vec{u}|^2\vec{u})\\
&= -\mathrm{div}\,(|\vec{u}_\epsilon|^2\vec{u})-\mathrm{div}\,\left(\theta_\epsilon*(|\vec{u}|^2\vec{u})-(\theta_\epsilon*|\vec{u}|^2)\vec{u}\right)+\mathrm{div}\,(|\vec{u}|^2\vec{u}).
\end{aligned}$$

Mais, comme $\vec{u} \in L^3_t L^3_x(\Omega)$ on a

$$\lim_{\epsilon \to 0} \theta_\epsilon * (|\vec{u}|^2 \vec{u}) - (\theta_\epsilon * |\vec{u}|^2)\vec{u} = 0 \text{ dans } L^1_t L^1_x(Q_{t_0,x_0,r/4}),$$

et $\operatorname{div}(|\vec{u}_\epsilon|^2 \vec{u}) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \operatorname{div}(|\vec{u}|^2 \vec{u})$ où la limite est prise dans $\mathcal{D}'(Q_{t_0,x_0,r/4})$. Ainsi, on trouve que

$$\lim_{\epsilon \to 0} 2S_\epsilon - R_\epsilon - \mu_\epsilon = 0,$$

qui est la formule donnée par Duchon et Robert. ■

Preuve de la convergence du terme $\vec{\omega}_{n_k} \wedge \vec{u}_{n_k}$.

Lemme 15 *Soit Ω un domaine convexe de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ de la forme $I \times B$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur Ω a support dans un compact fixé K telle que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a*

- *Pour certain $\gamma \in \mathbb{R}$ on a*
$$\sup_n \|\phi u_n\|_{L^2(I, H^\gamma(\mathbb{R}^3))} < +\infty.$$
- *Pour certain $\delta \in \mathbb{R}$ avec $\delta < \gamma$ on a*
$$\sup_n \|\phi \partial_t u_n\|_{L^2(I, H^\delta(\mathbb{R}^3))} < +\infty.$$

Alors il existe une sous suite (u_{n_k}) qui converge fortement vers une limite u dans $(L^2_t H^\varepsilon_x)_{loc}$ pour tout $\varepsilon < \gamma$.

Idée de la preuve du Lemme 15 : on pose

$$w_n = \psi (Id - \Delta)^{-N} u_n,$$

où $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ et elle vaut 1 au voisinage du compact K fixé.
On a que w_n appartient à l'espace $L^2_t H^{\gamma+2N}_x(\Omega)$ et $\partial_t w_n$ appartient à $L^2_t H^{\gamma+2N}_x(\Omega)$. Comme le support de w_n est inclus dans le support ψ il existe une sous suite w_{n_k} qui converge dans $L^2_t H^{\varepsilon+2N}_x(\Omega)$ pour tout $\varepsilon < \gamma$.

On écrit en utilisant les commutateurs

$$\phi (Id - \Delta)^N w_n = \phi\psi (Id - \Delta)^N (Id - \Delta)^{-N} u_n + \phi [(Id - \Delta)^N, \psi] (Id - \Delta)^{-N} u_n,$$

où $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ et elle vaut 1 sur le support de u_n, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ et vaut 1 sur le support de ϕ. Ainsi par les propriétés des fonctions ϕ, ψ le premier terme dans la partie à droite de l'expression ci-dessus est égale à u_n et le deuxième terme est nul (vu que $\vec{\nabla}\psi \equiv 0$ sur le support de ϕ).

Donc si w_n converge, u_n converge aussi. ■

Maintenant on va démontrer que $\vec{\omega}_{n_k} \wedge \vec{u}_{n_k}$ converge vers $\vec{\omega} \wedge \vec{u}$. Par le Lemme 15 il existe une sous suite $\vec{\omega}_{n_k}$ qui converge fortement dans $L^2_t H^\varepsilon_x(\Omega)$ pour tout $\varepsilon < 1$.
Comme on a $\vec{\omega}_{n_k} \rightharpoonup \vec{\omega}$ dans $L^2_t L^2_x(\Omega)$ on en conclut que $\vec{\omega}_n \longrightarrow \vec{\omega}$ dans $L^2_t H^{-1}_x(\Omega)$. On a aussi $\vec{u}_{n_k} \rightharpoonup \vec{u}$ dans $L^2_t H^1_x(\Omega)$, avec ces deux informations on en conclut que $\vec{\omega}_{n_k} \wedge \vec{u}_{n_k}$ converge vers $\vec{\omega} \wedge \vec{u}$. ■

Bibliographie

[1] H. Beirão da Veiga. *A new regularity class for the Navier-Stokes equations in the whole space*. J. Math. Pures et Appl., 64 :77-86 (1985).

[2] L. Caffarelli, R. Kohn & L. Nirenberg. *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations*. Comm. Pure Appl. Math., 35 :771-831 (1982).

[3] S. Campanato, *Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzione*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa., 17 :175–188 (1963).

[4] M. Cannone, F. Planchon. *On the non stationary Navier-Stokes equation with an external force*. Adv. Differential Equations., 4 :697-730 (1999).

[5] A. Cauchy. *Sur la pression ou la tension des corps solide*. Exercices de mathématiques., 2 :42-57 (1827).

[6] D. Chamorro & P.G. Lemarié-Rieusset& K. Mayoufi. *The role of the pressure in the partial regularity theory for weak solutions of the Navier-Stokes equations*.Submitted (2016).

[7] J-Y. Chemin. *Remarques sur l'existence globale pour le système de Navier-Stokes incompressible*. SIAM J. Math. Anal., 23 :20-28 (1992).

[8] Z.M. Chen & W.R. Price. *Morrey space techniques applied to the interior regularity problem of the Navier–Stokes equations*. Non-linearity ; 14 : 1453–1472 (2001).

[9] H.J Choe. *Regularity question of the incompressible Navier-Stokes equation I*. http ://www.japan-germany.sci.waseda.ac.jp (2013)

[10] R. Coifman & G. Weiss. *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*. Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag (1971).

[11] J. Duchon & R. Robert. *Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier–Stokes equations*. Nonlinearity, 13 :249-255 (2000).

[12] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag (1969).

[13] P. Federbush. *Navier and Stokes meet the wavelet*. Comm. Math. Phys., 155 :219-248 (1993).

[14] H. Fujita, T. Kato. *On the Navier-Stokes initial value problem*. I. Arch. Ration. Mech. Anal., 16 :269-315 (1964).

[15] Y. Giga, T. Miyakawa. *Navier-Stokes flow in $\mathbb{R}^3$ with measures as initial vorticity and Morrey spaces*. Comm. Partial Differential Equations., 14 :577-618 (1989).

[16] L. Grafakos. *Modern Fourier Analysis*. Graduate Texts in Mathematics, (2009).

[17] E. Hopf. *Ueber die Anfangswertaufgabe fur die hydrodynamischen Grundgleichungun*. Math. Nachr., 4 :213-231 (1951).

[18] H. Jia, V. Šverák. *Minimal L^3-initial data for potential Navier-Stokes singularities*. SIAM J. Math. Anal., 45 :1448-1459 (2013).

[19] B. Jin. *Caccioppoli inequality for Stokes equations, personal communication.*

[20] T. Kato. *Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$ with application to weak solutions.* Math. Z., 187 :471-480 (1984).

[21] T. Kato. *Strong solutions of the Navier-Stokes equations in Morrey spaces.* Bol. Soc. Brasil. Math., 22 :127-155 (1992).

[22] A. Kiselev, O. Ladyzhenskaya. *On the existence and uniqueness of the solutions of non-stationary problem for a viscous incompressible fluid.* Amer .Math. Soc. Transl., 24 :79-106 (1963).

[23] H. Kozono, M. Yamazaki. *Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equations with distributions in new function spaces as initial data.* Comm. Partial Differential Equations., 19 :959-1014 (1994).

[24] I. Kukavica. *On partial regularity for the Navier–Stokes equations.* Discrete and continuous dynamical systems, 21 :717-728 (2008).

[25] O. Ladyzhenskaya & G. Seregin. *On partial regularity of suitable weak solutions to the three-dimensaion Navier–Stokes equations.* J. Math. Fluid Mech. 1 :356–387 (1999).

[26] P.G. Lemarié–Rieusset. *Recent developments in the Navier–Stokes problem*, Chapman & Hall/CRC, (2002).

[27] P.G. Lemarié–Rieusset. *The Navier–Stokes problem in the XXIst century*, Chapman & Hall/CRC, (2016).

[28] J. Leray. *Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace.* Acta Math., 63 :193-248 (1934).

[29] F. Lin. *A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem*, Comm. Pure Applied Math., 51 :240–257 (1998).

[30] H. Lorentz. *Ene allgemeene stelling omtrent de beweging eener vloeistof met wrijving en eenige daaruit afgeleide gevolgen.* Zittingsverslag vand de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam., 5 :168-175 (1896).

[31] C-L. Navier. *Memoire sur les lois du mouvement des fluides [read in march and December 1822].* Mémoires de l'Acad. des Sciences de l'Institut de France., 6 :389-440 (1827).

[32] M. O'Leary. *Conditions for the local boundedness of solutions of the Navier–Stokes system in three dimensions.* Comm. Partial Differential Equations, 28 :617-636 (2003).

[33] C-W. Oseen. *Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques unes de leurs applications.* Acta Math., 34 :205-248 (1911).

[34] S-D. Poisson. *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques.* Mémoires de l'Académie des Sciences., 8 :357-570 (1829).

[35] V. Scheffer. *Partial regularity of solutions to the Navier–Stokes equations.* Pacific J. Math., 66 :535–552 (1976).

[36] V. Scheffer. *Hausdorff measure and the Navier–Stokes equations.* Comm. Math. Phys., 55 :97–112 (1977).

[37] J. Serrin. *On the interior regularity of weak solutions of the Navier–Stokes equations.* Arch. Rat. Mech. Anal., 9 :187-195 (1962).

[38] G-G. Stokes. *On the theory of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids.* Trans. Cambridge Phl. Soc., 8 :287-319 (1849).

[39] M. Struwe. *On partial regularity results for the Navier–Stokes equations*. Comm. Pure Appl. Math., 41 :437-458 (1988).

[40] S. Takahashi. *On interior regularity criteria for weak solutions of the Navier–Stokes equations*. Manuscripta Math., 69 :237-254 (1990).

[41] M. Taylor. *Analysis on Morrey spaces and application to Navier-Stokes equations and other evolution equations*. Comm. Partial Differential Equations., 17 :1407-1456 (1992).

[42] A. Vasseur. *A new proof of partial regularity of solutions to Navier–Stokes equations*. Nonlinear Diff. Equ. Appl. 14 :753-785 (2007).

université PARIS-SACLAY | École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)

université évry val-d'essonne

LaMME

Inégalités d'énergie loclaes dans la théorie des équations de Navier-Stokes

Mots clés : Équations de Navier-Stokes ; Théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg ; Critère de Serrin.

Cette thèse est consacrée au rôle des inégalités d'énergie locales dans la théorie de la régularité partielle des solutions faibles des équations de Navier-Stokes dans le sens du Théorème de Caffarelli, Kohn et Nirenberg.
Nous distinguons trois parties. La première partie de la thèse traite essentiellement l'annonce faite par le mathématicien coréen Choe à Waseda en 2013 d'une nouvelle inégalité d'énergie locale qui s'applique à toute solution faible des équations de Navier-Stokes, sans aucune hypothèse sur la pression, et qui permettait d'étendre les résultats de régularité partielle de Caffarelli, Kohn et Nirenberg à toutes les solutions faibles et pas seulement aux solutions adaptées.
Une étude de la preuve de l'inégalité de Choe nous permettait de conclure que cette preuve était fausse a priori pour le cas d'une solution générale, et le théorème principal de Choe (qui était sensé nous donner une régularité en temps et en espace en dehors d'un ensemble de singularité extrêmement petit) était contredit par un contre exemple de Serrin qui liait la régularité en temps à des hypothèses sur la pression.
Dans cette première partie on a rédigé une preuve rigoureuse de l'inégalité introduite par Choe en rajoutant des hypothèses supplémentaires qu'il fallait introduire pour la démontrer. Néanmoins, cette nouvelle inégalité d'énergie (qui ne fait pas intervenir la pression) nous ne sert pas à prolonger les affirmations de Choe, mais on a pu identifier une nouvelle variable, inspirée de la preuve de Choe, qui nous a permit d'introduire notre résultat principal.
En effet, la deuxième partie de la thèse est consacrée à étudier profondément la nouvelle variable suggérée par une partie du travail de Choe. On a pu assimiler une nouvelle variable $\vec{v}$ liée au rotationel de la solution $\vec{u}$ et en étudiant $\vec{v}$, à l'aide d'un mélange de la théorie de Serrin et celle de Caffarelli, Kohn et Nirenberg on a obtenu un résultat de régularité partielle qui ne s'applique pas à toute solution faible (contrairement à l'énoncé de Choe) mais à une classe plus large que les solutions adaptées (au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg) : la notion de solution dissipative a été introduite en suivant les travaux de Duchon et Robert fait en 2000 et cette notion nous permet d'inclure positivement le contre exemple de Serrin dans notre nouvelle théorie.
La troisième et dernière partie de cette thèse est destinée à l'étude de la stabilité des solutions dissipatives par convergence *-faible. En effet, on considère une suite $\vec{u}_n$ qui converge faiblement dans $L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$, une force extérieure $\vec{f}_n$ qui converge faiblement dans $L^{\frac{10}{7}}_t L^{\frac{10}{7}}_x$ à divergence nulle et une pression $p_n \in \mathcal{D}'(Q)$. On suppose aussi que $\vec{u}_n$ est dissipative au sens de la définition donnée dans la deuxième partie et on va prouver que la limite $\vec{u}$ d'une sous suite $\vec{u}_{n_k}$ est une solution des équations de Navier-Stokes et elle est dissipative.

Local energy inequality in the theory of Navier-Stokes equation

Key words : Navier–Stokes equations ; Caffarelli, Kohn and Nirenberg theory ; Serrin criterion.

In this dissertation, we are concerned with the role of the local energy inequalities in the theory of the partial regularity of the weak solutions of the Navier-Stokes equations in the direction of the Theorem of Caffarelli, Kohn and Nirenberg.
We distinguish three parts. The first part of the thesis deals essentially with the announcement by the Korean mathematician Choe at Waseda in 2013 of the demonstration of a new local energy inequality which applies to any weak solution of the Navier-Stokes equations without any hypothesis on the pressure, and which allowed to extend the results of partial regularity of Caffarelli, Kohn and Nirenberg to all weak solutions and not only to the suitable one.
A rigorous study of the proof of Choe's inequality allowed us to conclude that this proof was false a priori for the case of a general solution, and Choe's main theorem (which was supposed to give us a regularity in time and space variables outside of an extremely small set of singularity) was contradicted by a counter-example of Serrin that linked the regularity in time to the assumptions on the pressure.
In this first part, we have drafted a conscientious proof of the inequality introduced by Choe by adding an extra hypotheses that had to be introduced in order to demonstrate it. However, the new energy inequality (which did not involve the pressure) did not serve to extend Choe's assertions, but we were able to identify a new variable inspired by Choe's proof that allowed us to introduce our main result.
The second part of the thesis is devoted to deeply studying the new variable suggested by a part of Choe's work. Indeed, we could assimilate a new variable $\vec{v}$ linked to the curl of the solution $\vec{u}$, and by studying $\vec{v}$, using a mixture of the Serrin theory and that of Caffarelli, Kohn and Nirenberg we obtained a partial regularity result which does not apply to any weak solution (contrary to Choe's statement) but to a wider class than the suitable solutions (in the sense of Caffarelli, Kohn and Nirenberg) : the notion of dissipative solutions was introduced following the work of Duchon and Robert done in 2000 and this allows us to positively include the counter example of Serrin in our new theory.
The third and last part is intended for the study of the stability of dissipative solutions by weak-*convergence. Indeed, we consider a bounded sequence $\vec{u}_n$ in $L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$, a bounded force $\vec{f}_n$ in $L^{\frac{10}{7}}_t L^{\frac{10}{7}}_x$ and a pressure $p_n \in \mathcal{D}'(Q)$. We also suppose that $\vec{u}_n$ is dissipative in the sense of the definition given in the second part and we will prove that the limit $\vec{u}$ of a subsequence $\vec{u}_{n_k}$ is a solution of the Navier-Stokes equations and is dissipative.