

Laplaciens non auto-adjoints sur un graphe orienté.

Marwa Balti

▶ **To cite this version:**

Marwa Balti. Laplaciens non auto-adjoints sur un graphe orienté.. Théorie spectrale [math.SP]. Faculté des Sciences de Bizerte (Tunisie); Université de Nantes Faculté des sciences et des techniques, 2017. Français. NNT : . tel-01531848

HAL Id: tel-01531848
https://theses.hal.science/tel-01531848

Submitted on 2 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Marwa BALTI

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
Docteur de Université de Carthage
Label européen
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Mathématiques et leurs interactions., section CNU 27
Unité de recherche : Laboratoire des Mathématiques Jean Leray Nantes (LMJL)

Soutenue le 20 Mai 2017

Laplaciens non auto-adjoints sur un graphe orienté.

JURY

Président :	**M. Abderrazak KAROUI**, Professeur, Faculté des Sciences de Bizerte
Rapporteur :	**M. Jamel BAN AMARA**, Professeur, Université de Tunis El Manar
Examinateur :	**M. Sylvain GOLÉNIA**, Maître de conférence-HDR, Université de Bordeaux 1
Directrices de thèse :	**M^{me} Colette ANNÉ**, HDR-Chargée de Recherche au CNRS, Université de Nantes
	M^{me} Nabila TORKI-HAMZA, Professeur, Université de Kairouan
	* * *
Rapporteur :	**M. Serge RICHARD**, Maître de conférence-HDR, Université de Lyon 1

THÈSE

En vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR en MATHÉMATIQUES

de l'Université de Carthage et de l'Université de Nantes

Présentée par

Marwa BALTI

***

Remerciements

A l'issue de la rédaction de cette recherche, je suis convaincue que la thèse est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité, la bonne humeur et l'intérêt manifestés à l'égard de ma recherche m'ont permis de progresser dans cette phase délicate de « l'apprenti-chercheur». Je tiens à remercier vivement toutes les personnes qui ont rendu possible ce travail.

Ce travail de thèse a été mené au sein de la Faculté des Sciences de Bizerte (Université de Carthage) et le Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (Université de Nantes) dans le cadre d'une convention de cotutelle. Cette thèse a été effectuée avec le soutien financier du Ministère Tunisien de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique et du Ministère des affaires étrangères de la France dans le cadre du programme PHC-Utique projet CMCU numéro 13G1501 "Graphes, Géométrie et Théorie Spectrale". De plus, j'ai bénéficié d'un soutien financier en tant que membre de l'unité de recherche "Mathématiques et Applications" (UR/13ES47) de la Faculté des Sciences de Bizerte et en tant que membre du Laboratoire de Mathématiques Jean Leray de Nantes (LMJL).

Je remercie tout particulièrement mes directrices de thèse **Madame Nabila Torki-Hamza** et **Madame Colette Anné**. Madame Nabila Torki-Hamza m'a encadrée pendant mon mémoire de mastère, elle m'a soutenue et suivie dès mes premiers pas dans la recherche puis a accepté de m'encadrer en thèse et elle m'a fait découvrir la théorie spectrale des graphes. Elle a toujours cru en moi et m'a laissée une certaine liberté tout en restant disponible quand j'en avais besoin. J'ai été marquée par ses grandes qualités scientifiques et humaines. Madame Colette Anné a gentiment accepté de m'encadrer pendant la thèse. Elle m'a suivie avec beaucoup d'attention.

Sa compréhension rapide, et sa rigueur m'ont profondément impressionnée. Je la remercie pour ses conseils toujours pertinents concernant le contenu scientifique et la rédaction de ce travail. À tout seigneur, tout honneur, merci mes chères d'avoir supervisé cette thèse avec expertise, patience et humanité. J'aimerais exprimer mon admiration pour vos passions et vos enthousiasmes mathématiques, qui m'ont influencée depuis mes études en Tunisie et en France. Mesdames, j'exprime ma plus profonde gratitude, pour nos échanges toujours très riches, pour les ouvertures qui sont nées de cette thèse, mais aussi pour vos courages et vos panaches admirables. J'ai beaucoup appris à vos côtés, merci infiniment. A vous deux merci aussi pour la qualité et l'originalité des données sur lesquelles j'ai pu travailler et les remarques précises à différents moments de ma recherche.

Je suis trés honorée à remercier les rapporteurs de cette thèse Monsieur le professeur Jamel Ben Amara et Monsieur le professeur Serge Richard pour l'honneur qu'ils m'ont fait pour la participation à mon jury de thèse en qualité de rapporteur de mon travail, pour le temps consacré à la lecture de cette thèse, et pour les suggestions et les remarques judicieuses qu'ils m'ont indiquées.

Je remercie le Professeur Abderrazak Karoui de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury de thèse, veuillez trouver ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Mes sincères remerciements au Professeur Sylvain Golénia qui a accepté de juger ce travail en tant qu'examinateur et pour avoir accepté de venir à Bizerte pour la soutenance. Je lui adresse mes sentiments les plus respectueux.

Je voudrais adresser ma reconnaissance à Monsieur le professeur Belgacem Draouil, directeur de l'unité de recherche "Mathématiques et Applications" (UR/13 ES47) de la Faculté des Sciences de Bizerte pour ses qualités humaines et son encouragement.

Je souhaite encore remercier les membres de l'administration de la Faculté des Sciences de Bizerte et très particulièrement Messieurs Sami, Hichem Hadded, Nizar, Mourad et Karim,

pour leurs services, gentillesse, aides, conseils et disponibilités.

Je tiens à remercier très chaleureusement les membres du laboratoire LMJL de Nantes pour leur accueil, leur gentillesse et leur sympathie et surtout Mesdames et Messieurs Stéphanie, Brigitte, Annick, Eric, Saïd et Claude.

Je tiens également à remercier ma collègue de travail avec qui j'ai partagé mes années de recherche à la faculté des Sciences de Bizerte et au laboratoire de Mathématique Jean Leray: Hela, ma voisine de bureau, toujours de bonne humeur, pour les bons moments à Nantes, à Bizerte, à Chemnitz et à Barcelone. Merci Louli pour ton amitié inaltérable, même dans ces longues périodes. Je n'oublie pas de remercier Yassin et Zied, vous êtes les prochains sur la liste des futurs Docteurs, bon courage pour la fin du manuscrit et la suite!

Et encore mille mercis à mes parents ma chère Mamitta et mon cher Papa, à ma famille, à qui je dédicace ce travail. À mes sœurs Hajer, Rahma, Afef et la petite Imen et bien évidemment à mon frère Chahir, sans leur présence et leur encouragement dans ma vie de tous les jours, je n'aurais jamais atteint mes objectifs. Et je n'ai pas arrêté de penser pendant ces quelques années à mes voisins. J'aurais tant aimé pouvoir les remercier d'avoir réussi à me soutenir et à m'encourager malgré toutes les épreuves que je traversais.

Les Mathématiques

Martyrisant nos esprits

Avec beaucoup d'ardeur

Torturant nos cerveaux

Harassés par le labeur

Équations et calculs

Mental et pas fatal

Acharnement des savants

Thalès et Pythagore

Ici-bas grands absents

Qui nous embêtent encore

Utiles cependant

Et aussi sympathiques

Sans eux, il n y a pas de logique.

À lire

Contents

1 Introduction **11**

Introduction **11**

2 Graphes et Opérateurs **15**

2.1 Notions de graphe 15

2.1.1 Définitions et propriétés 15

2.1.2 Exemples de graphes orientés 17

2.1.3 Connexité sur G 18

2.1.4 Graphe partiel et sous-graphe 21

2.1.5 Graphe pondéré 21

2.2 Opérateurs sur un graphe 22

2.2.1 Espaces fonctionnels 22

2.2.2 Laplaciens discrets non symétriques 23

2.2.3 Adjoint d'un opérateur A à domaine D(A) 24

2.2.4 Hypothèse (β) et généralités sur les Laplaciens 27

2.2.5 Image numérique et applications 30

2.2.6 Fermabilité du Laplacien 32

2.2.7 Spectre d'un opérateur 33

2.2.8 Sur les valeurs propres du Laplacien $\tilde{\Delta}_\Omega^D$ 34

3 Inégalités isopérimétriques et spectre essentiel **39**

3.1 Inégalités de Cheeger 39

3.2 Absence de spectre essentiel du Laplacien 51

3.2.1 Préliminaires . . . 51
3.2.2 Historiques et observation . . . 53
3.2.3 Absence deu spectre essentiel de $\overline{\Delta}$ par la constante de Cheeger . . . 54
3.3 Opérateur spécial auto-adjoint sur G . . . 56
3.3.1 Caractère essentiellement auto-adjoint . . . 57
3.3.2 Hypothèse (γ) . . . 57
3.3.3 Absence de spectre essentiel et théorème de comparaison . . . 62
3.3.4 Exemple . . . 66

4 Monotonicité et comparaison des valeurs propres 69
4.1 Principes variationnels et Propriétés . . . 70
4.2 Monotonicité des valeurs propres . . . 79
4.2.1 Monotonicité relative aux sommets . . . 79
4.2.2 Monotonicité relative aux arêtes . . . 84
4.3 Valeurs propres du Laplacien et du Laplacien de Dirichlet . . . 86

5 Annexe 93
5.1 Image numérique et spectre . . . 93
5.2 Laplaciens sur le graphe $\mathbb{Z}$ . . . 96
5.2.1 Laplaciens normaux . . . 96
5.2.2 Spectre du Laplacien . . . 97
5.3 Spectre essentiel . . . 99
5.3.1 Définitions et propriétés . . . 99
5.3.2 Théorème de comparaison . . . 100
5.4 Variation des valeurs propres . . . 101
5.4.1 Théorème d'entrelacement . . . 101
5.4.2 Comparaison des valeurs propres . . . 103

Bibliographie 106

1

Introduction

Dans cette thèse, on étudie les propriétés spectrales des opérateurs non auto-adjoints sur un graphe orienté avec un poids non symétrique d'arêtes. Il est bien connu que les opérateurs non auto-adjoints sont plus difficiles à étudier que ceux auto-adjoints: pas de théorème spectral en général, pas de principe variationnel... Ceci peut être expliqué par la structure compliquée de la résolvante d'un tel opérateur considéré comme une fonction analytique. Cette théorie est étudiée par différents auteurs comme L. N. Trefethen sur les matrices non symétriques [56], W. D. Evans, R. T. Lewis, A. Zettl [26] et R. T. Lewis [45] pour les opérateurs non auto-adjoints dans un espace de Hilbert. Récemment, l'intérêt des propriétés spectrales des opérateurs non auto-adjoints a déjà conduit à une variété de nouveaux résultats, à la fois dans les domaines continus et discrets, par exemple, des bornes aux valeurs propres complexes [28] et des inégalités de type Lieb-Thirring [35], [22], puis des études spectrales des opérateurs non auto-adjoints [49] et l'instablité spectrale de certains oscillateurs anharmoniques non auto-adjoints [5].

Dans ce travail, on se concentre sur les graphes orientés et on étudie les propriétés spectrales du Laplacien non symétrique associé. On développe une théorie générale d'approximation des valeurs propres sur les graphes orientés avec un poids d'arêtes non symétrique en supposant

uniquement une condition de "conductivité totale des sommets de graphe", présentée dans la définition 2.1.11: **Hypothèse** (β). On étudie le spectre de notre Laplacien non symétrique et on recueille certaines propriétés sur le bas de la partie réelle de son spectre puis on cherche à caractériser l'absence du spectre essentiel. Les estimations les plus connues concernant le bas du spectre d'un opérateur symétrique sur un graphe sont appelées ainsi des estimations isopérimétriques et en particulier on cite les inégalités de Cheeger. En fait, Jeff Cheeger a prouvé une inégalité en fonction d'une constante géométrique notée par h [17], elle concerne la première valeur propre non nulle de l'opérateur de Laplace-Beltrami auto-adjoint sur une variété Riemannienne compacte. Ceci a inspiré une théorie analogue sur les graphes pour des Laplaciens symétriques (voir [29], [32]). Le but est d'introduire une sorte de constante de Cheeger sur une filtration du graphe orienté G pour contrôler le spectre du Laplacien associé Δ. Comme notre opérateur est non symétrique, on va donner une estimation de son image numérique. On utilise cette estimation et on propose une condition sur les poids pour prouver l'absence de spectre essentiel de Laplacien sur un graphe *lourd à l'infini*. H. Donnelly et P. Li [25], pour le cas continu, ont prouvé un résultat analogue en montrant que leur Laplacien est à résolvante compacte si la variété est à courbure négative rapidement décroissante.

Ensuite, on définit un opérateur spécial symétrique $\overline{\Delta} + \Delta^*$ puis on étend les résultats de [54], [20] pour montrer qu'il peut être auto-adjoint. Ceci facilite l'étude spectrale de l'opérateur spécial ainsi que la relation entre son spectre et le spectre de $\overline{\Delta}$. On donne une estimation de Cheeger au bas du spectre de $\overline{\Delta} + \Delta^*$. On utilise cette inégalité pour déduire un critère en vertu duquel le spectre essentiel du Laplacien non auto-adjoint $\overline{\Delta}$ est vide en utilisant le théorème de comparaison de R. T. Lewis [45]. Une dernière partie de cette thèse a fait suite aux idées lancées dans [53], [16] et [46] sur la monotonicité des valeurs propres relative aux domaines continus. Méticuleusement, on essaye d'explorer dans le cas des graphes orientés finis, des faits familiers nombreux de monotonicité prouvés sur $\mathbb{R}^n$ et sur les variétés Riemanniennes compactes. Notre question principale est: "peut-on étudier le comportement des valeurs propres de l'opérateur spécial auto-adjoint par rapport à une perturbation du graphe?" D'abord, on démontre que la famille des k^{me} valeurs propres du Laplacien Δ sur un graphe ne décroit que dans une classe de graphes appelé ici *graphe type-fleur* et croissante par rapport à l'ensemble d'arêtes. Cette

partie est inspirée par les résultats classiques de M. Fiedler [27] et P. Kurasov, G. Malenova, S. Naboko [44] sur la première valeur propre non nulle d'un graphe simple. On étend ces résultats pour des valeurs propres suivantes de notre opérateur spécial. Puis, on essaye d'établir un résultat analogue à celui de la proposition 2.1 de [11], énoncée dans le cas des variétés Riemanniennes M qui donne des bornes supérieures aux k^{me} valeurs propres en termes de valeurs propres de Dirichlet.

La thèse contient trois chapitres en plus de l'introduction et l'annexe. Le deuxième chapitre est consacré aux définitions, aux notions de graphe orienté avec un poids d'arêtes non symétrique. On définit brièvement les notions de base liées aux opérateurs bornés et non bornés sur un espace de Hilbert. On expose notamment les résultats élémentaires sur les opérateurs linéaires et quelques propriétés et interprétations concernant nos Laplaciens considérés ainsi que la formule de Green, la fermabilité et quelques généralités sur l'image numérique et sur le spectre des Laplaciens.

Dans le troisième chapitre, on introduit certaines constantes et on établit l'inégalité de Cheeger associée au Laplacien de Dirichlet non auto-adjoint sur un sous-ensemble de V. Cette inégalité isopérimétrique sert à donner une borne inférieure de la partie réelle de l'image numérique. On contrôle la partie réelle de son image numérique en rapport avec le spectre de $\overline{\Delta}$. Puis, on caractérise l'absence du spectre essentiel de $\overline{\Delta}$ par deux méthodes différentes.
La première est basée sur la stabilité spectrale et l'inégalité isopérimétrique. Dans le cas d'un opérateur symétrique sur un graphe non orienté simple, K. Fujiwara [29] et M. Keller [41] ont introduit un critère qui assure l'absence de spectre essentiel du Laplacien sur un graphe non orienté rapidement branché. En fait, notre condition est la positivité de la constante de Cheeger à l'infini pour un graphe *lourd à l'infini*.
Pour la deuxième méthode, on introduit une hypothèse (γ) qui permet de fournir une propriété sur $\overline{\Delta} - \Delta^*$. Puis, on étudie le caractère auto-adjoint de l'opérateur $\overline{\Delta} + \Delta^*$ en utilisant une notion de complétude sur le graphe G, introduite par N. Torki-Hamza [54] et Y. Colin de Verdière, N. Torki-Hamza et F. Truc [20]. On applique alors le théorème de comparaison de R. T. Lewis et on compare les spectres essentiels de $\overline{\Delta}$ et $\overline{\Delta} + \Delta^*$. On conclut par l'absence de spectre

essentiel des deux sur des cas plus généraux où la constante de Cheeger à l'infini est nulle.

Le quatrième chapitre porte sur certains résultats de monotonicité des valeurs propres. Ainsi, on étudie l'exemple de graphe *type-fleur* en insistant sur l'intérêt du concept de sous-graphe. Cependant, on peut noter que l'estimation de spectre sur cette classe de graphes sert à évaluer le spectre d'un arbre simple. Ce chapitre comprend également un théorème similaire du théorème de Weyl et un analogue du théorème de Cauchy pour les matrices [37]. Enfin, on s'intéresse à l'opérateur de Dirichlet et on effectue une comparaison sur les valeurs propres du graphe pour donner une généralisation au théorème (3.3) dans [27]. Également, on essaye d'améliorer une version discrète de la proposition 2.1 de [11] établie pour les variétés Riemanniennes. On utilise la décomposition de G en deux composantes A et B pour donner une limite supérieure sur les valeurs propres de G en termes des valeurs propres de Dirichlet à l'intérieur de A et B.

Et on finit avec un chapitre annexe qui contient les preuves des principaux résultats classiques utilisés au cours de cette thèse.

2

Graphes et Opérateurs

Ce chapitre contient les principales définitions relatives aux graphes orientés. On s'intéresse aux propriétés géométriques et aux structures linéaires des graphes ainsi qu'aux opérateurs Laplaciens discrets. Plus précisément, on introduit le Laplacien non auto-adjoint sur un graphe orienté. On présente les outils de base pour l'étude du spectre d'un opérateur fermé, pas nécessairement auto-adjoint. On pourra consulter à ce sujet par exemple les références suivantes [24], [13], [3], [23], [40], [45].

2.1 Notions de graphe

2.1.1 Définitions et propriétés

Soit un graphe orienté $G = (V, \vec{E})$, où V est l'ensemble (dénombrable) de ses sommets et par $\vec{E} \subset V \times V$ celui de ses arêtes orientés. Une arête (x, y) de l'ensemble $\vec{E}$ est définie par une paire ordonnée de sommets x et y. Lorsque $e = (x, y)$ est une arête orienté, on dit que e va de x à y.

On dit aussi que x est l'extrémité initiale et y l'extrémité finale de e.

On note $x \sim y$ si x et y sont voisins.

- L'arête $(x, x) \in \vec{E}$ est appelée une boucle.

- $G = (V, \vec{E})$ est un digraphe s'il vérifie pour tous $x, y \in V$

$$(x, y) \in \vec{E} \Leftrightarrow (y, x) \in \vec{E}.$$

Dans la suite on désigne par:

- $E = \Big\{\{x, y\};\ (x, y) \in \vec{E} \text{ ou } (y, x) \in \vec{E}\Big\}$, un élément de E est appelé une arête non orientée.
- $V_x^+ = \{y \in V;\ (x, y) \in \vec{E}\}$
- $V_x^- = \{y \in V;\ (y, x) \in \vec{E}\}$
- $V_x = V_x^+ \cup V_x^-$

Degré d'un sommet d'un graphe orienté:

Soit x un sommet du graphe orienté G. On note $d^+(x)$ le degré extérieur du sommet x, c'est-à-dire le nombre d'arêtes ayant x comme extrémité initiale.
On note $d^-(x)$ le degré intérieur du sommet x, c'est-à-dire le nombre d'arêtes ayant x comme extrémité finale.

On a pour tout x dans V: $d^+(x) = \#V_x^+$ et $d^-(x) = \#V_x^-$.

On définit *le degré* d'un sommet x ou *la valence* de x d'un graphe G par:

$$d(x) = \#V_x = \text{ le nombre des voisins de } x.$$

Définition 2.1.1 • *G est infini si l'ensemble V est infini.*

- *$G = (V, \vec{E})$ est dit localement fini si pour tout $x \in V$, $d(x) < \infty$.*
- *Un graphe G est dit à valence bornée, s'il existe un entier N tel que pour tout $x \in V$ on ait:*

$$d(x) < N.$$

Définition 2.1.2 *Un digraphe est dit complet si pour tous sommets $x, y \in V$, $(x, y) \in \vec{E}$ et $(y, x) \in \vec{E}$.*

Définition 2.1.3 *Pour un sous-ensemble U de V, on définit:*

- *L'intérieur de U :*
$$\overset{\circ}{U} = \{x \in U;\ y \sim x \Rightarrow y \in U\}.$$

- *Le bord de sommet de U :*
$$\partial_V U = \{x \in U^c;\ \exists\, y \in U,\ x \sim y\}.$$

- *Le bord d'arêtes de U :*
$$\partial_E U = \Big\{(x, y) \in \vec{E};\ (x \in U,\ y \in U^c)\ \textit{ou}\ (x \in U^c,\ y \in U)\Big\}.$$

2.1.2 Exemples de graphes orientés

1. Les systèmes routiers possédant des sens uniques, les systèmes de transport dissymétriques.., dont les sommets sont les points de passage et les arêtes sont les trajets entre ces points.

2. Le système sanguin ou appareil cardiovasculaire qui assure le transport du sang du cœur vers les extrémités et les divers organes, et en retour de ceux-ci vers le cœur, dont les sommets sont les organes de corps et les arêtes sont les vaisseaux sanguins.

3. **Le graphe** G associé à un réseau social internet (par exemple le graphe du réseau facebook), tel que les comptes du réseau forment l'ensemble de sommets V et pour tous $p_1, p_2 \in V$, on a
$$(p_1, p_2) \in \vec{E} \iff p_1 \text{ publie sur le mur de } p_2.$$

4. **Le digraphe** $(\mathbb{Z}_s, \vec{E}_s)$, qu'on note encore par $\mathbb{Z}$, l'ensemble des arêtes orientées est donné pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$ par:
$$(i, j) \in \vec{E}_s \iff |i - j| = 1\ ,$$
et $d^+(i) = d^-(i) = 2$ pour tous $i \in \mathbb{Z}$.



Figure 2.1: Digraphe $\mathbb{Z}$.

5. **Le graphe** $(\mathbb{Z}, \vec{E}_+)$, vérifiant pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, on a

$$(i,j) \in \vec{E}_+ \Longleftrightarrow j - i = 1.$$

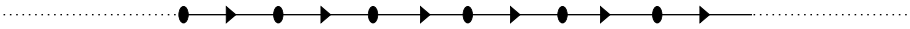


Figure 2.2: Graphe $\mathbb{Z}$.

6. **Le digraphe** $(\mathbb{Z}^n, \vec{E})$, pour tout $n \geq 1$ vérifiant

$$\big((i_1,...,i_n),(j_1,...,j_n)\big) \in \vec{E} \iff \sum_{k=1}^{n} |i_k - j_k| = 1,$$

$$d^+(i) = d^-(i) = 2n, \ \forall i = (i_1,...,i_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

7. **Le graphe** $(\mathbb{N}, \vec{E})$ tel que pour tous $i, j \in \mathbb{N}$,

$$(i,j) \in \vec{E} \iff j - i = 1$$

avec $d^+(i) = 1$, $d^-(1) = 0$ pour $i \neq 0$ et $d^+(0) = 1$, $d^-(0) = 0$.

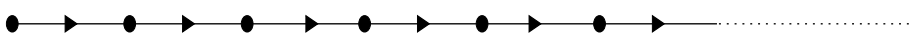


Figure 2.3: Graphe $\mathbb{N}$.

8. Le graphe en étoile $S_n = (V, \vec{E})$, voir la Figure 2.4: c'est un graphe à $n+1$ sommets, de centre x qui a n voisins $x_1,\ x_2, .., x_n$ tels que pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $(x, x_i) \in \vec{E}$.

2.1.3 Connexité sur G

Définition 2.1.4 • *Un chemin d'arêtes de x à y est une suite finie d'arêtes $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), ..,$ (x_n, y_n), $n \geq 1$ telle que:*

$$x_1 = x,\ y_n = y \textit{ et } x_i = y_{i-1},\ \ \forall\, 2 \leq i \leq n.$$

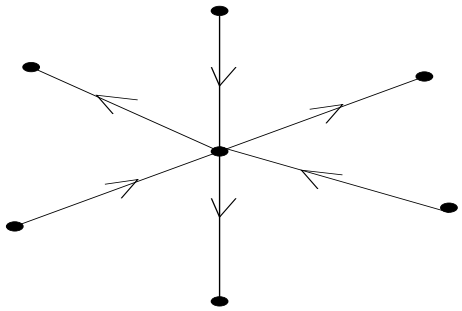


Figure 2.4: Le graphe en étoile S_6

- *Une chaîne de x à y est une suite finie d'arêtes non orientés $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$, ..,$\{x_n, x_{n+1}\}$, $n \geq 1$ telle que:*

$$x = x_1 \text{ et } y = x_{n+1}.$$

Définition 2.1.5

- *Un graphe orienté est fortement connexe si pour tous sommets différents x, y il existe un chemin d'arêtes qui va du sommet x au sommet y et il existe un chemin d'arêtes qui va de y à x.*
- *Un graphe orienté est connexe si pour tous sommets différents x, y il existe un chemin d'arêtes qui relie x et y.*
- *Un graphe non orienté est connexe si pour tous sommets différents x, y il existe une chaîne qui relie x et y.*
- *Un graphe orienté est faiblement connexe s'il y a une chaîne entre n'importe quelle paire de sommets dans le graphe si l'on ne considère plus l'orientation d'arêtes. Autrement dit, le graphe non orienté associé est connexe.*

Définition 2.1.6

- *Un cycle est une suite d'arêtes (x_1, x_2), (x_2, x_3), .., (x_{n-1}, x_n), $n \geq 4$ telle que $x_1, x_2, .., x_{n-1}$ sont tous distincts et $x_1 = x_n$.*



Figure 2.5: Cycle

- *Un arbre est un graphe connexe sans cycle.*
- *Un graphe $G = (V, \vec{E})$ est dit régulier d'ordre q ou q-régulier si pour tout $x \in V$, $d(x) = q$.*

Remarque 2.1.1 *Soit G est un graphe fortement connexe alors G est connexe ce qui implique que G est faiblement connexe.*

Exemple 2.1.1 *Le graphe $\mathbb{N}$ (voir la Figure 2.3) est connexe mais il n'est pas fortement connexe:*

Définition 2.1.7 *On définit la distance combinatoire sur un graphe connexe $G = (V, \vec{E})$, qu'on note d, par:*

$$d(x, y) = \min_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} L(\gamma)$$

où $\Gamma_{x,y}$ est l'ensemble de tous les chemins d'arêtes qui relient x à y et $L(\gamma)$ est le nombre d'arêtes de γ.

Remarque 2.1.2 *La distance combinatoire d est non symétrique, en effet si on considère le graphe $\mathbb{N}$ du Figure Figure 2.3, on a : $d(0, 1) = 1$ et $d(1, 0) = \infty$. Cependant, on peut construire un graphe fortement connexe avec une distance non symétrique mais finie comme le graphe cycle.*

Lemme 2.1.1 *Soit $G = (V, \vec{E})$ tel que $\#V \geq 2$,*

1. *Si le graphe G est fortement connexe alors*

$$\forall\, x \in V,\ \ d^+(x) \neq 0 \text{ et } d^-(x) \neq 0. \tag{2.1}$$

2. *Si le graphe G est faiblement connexe alors*

$$\forall\, x \in V,\ \ d^+(x) \neq 0 \text{ ou } d^-(x) \neq 0. \tag{2.2}$$

Preuve:

Soit x et y deux sommets distincts dans V.

1. Par la connexité forte il existe deux chemins d'arêtes, l'un allant de x à y et l'autre de y à x, donc $d^+(x)$ et $d^-(x)$ sont non nuls.
2. Si G est faiblement connexe alors il existe une chaîne d'arêtes entre x et y, $(x_1, x_2),\ (x_2, x_3), .., (x_n, x_{n+1})$, $n \geq 1$ tels que pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$x_1 = x,\ x_{n+1} = y \text{ et } (x_i, x_{i+1}) \in \vec{E} \text{ ou } (x_{i+1}, x_i) \in \vec{E}.$$

En particulier $(x_1, x_2) \in \vec{E}$ ou $(x_2, x_1) \in \vec{E}$ et donc $d^+(x) \neq 0$ ou $d^-(x) \neq 0$.

□

Remarque 2.1.3 *La connexité forte implique la propriété (2.2), mais la réciproque est fausse, voir la Figure 2.3.*

Exemple 2.1.2
- *Le digraphe $\mathbb{Z}$ est fortement connexe.*
- *Le graphe en étoile S_n (Figure 2.4) est faiblement connexe.*

2.1.4 Graphe partiel et sous-graphe

Une des questions importantes de la théorie des graphes concerne l'existence ou l'optimalité de certains sous-objets contenus dans un graphe comme les graphes partiels et les sous-graphes. On veut distinguer les notions de sous-partie et de sous-graphe. Cela permettra de préciser ce que veulent dire A. Torgasev et M. Petrovic dans [53] et donc bien illustrer certaines propriétés, d'autant plus qu'ils considèrent le graphe $\mathbb{Z}$ et le graphe en étoile comme des sous-graphes de n'importe quel graphe infini donné.

Définition 2.1.8 ***Graphe partiel**: Soit $G = (V, \vec{E})$ un graphe orienté. Un graphe $G_1 = (V, \vec{E}_1)$ est un graphe partiel de G, si $\vec{E}_1$ est inclus dans $\vec{E}$. Autrement dit, on obtient G_1 en enlevant une ou plusieurs arêtes du graphe G.*

Définition 2.1.9 ***Sous-graphe**: Soit $G = (V, \vec{E})$ un graphe orienté. Un graphe $H = (V_H, \vec{E}_H)$ est appelé un sous-graphe de G si $V_H \subset V$ et $\vec{E}_H = \{(x, y);\ x, y \in V_H\ \} \cap \vec{E}$.*

Définition 2.1.10 ***Partie de graphe**: Soit $G = (V, \vec{E})$ un graphe orienté. Un graphe $U = (V_U, \vec{E}_U)$ est appelé une partie du graphe $G = (V_G, \vec{E}_G)$ si $V_U \subset V$ et $E_U \subset E$.*

Remarque 2.1.4 *Un sous-graphe de G est une partie de G, mais la réciproque n'est pas vraie:*

La Figure 2.6 donne un exemple de graphe dont H est une partie, H est aussi un graphe partiel de G mais ce n'est pas un sous-graphe de G.

2.1.5 Graphe pondéré

On définit un graphe pondéré comme un graphe où chaque arête et chaque sommet est affecté d'un nombre réel positif, appelé poids:

Définition 2.1.11 ***Graphe pondéré**: Un graphe pondéré (G, m, b) est la donnée d'un graphe orienté $(V, \vec{E})$, d'un poids sur les sommets $m : V \to \mathbb{R}_+^*$ et d'un poids sur les arêtes $b : V \times V \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant :*

$$b(x, y) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ (x, y) \in \vec{E}.$$



Figure 2.6: H sous-graphe de G

Un graphe pondéré (G, m, b) est dit *symétrique* si pour tout $x, y \in V$,

$$b(x, y) = b(y, x).$$

Le poids b sur les arêtes définit deux poids sur les sommets β^+ et β^- qu'on utilisera dans la suite

$$\beta^+(x) = \sum_{y \in V_x^+} b(x, y)$$

et

$$\beta^-(x) = \sum_{y \in V_x^-} b(y, x).$$

On définit un poids β sur V pour tout $x \in V$, par:

$$\beta(x) = \beta^+(x) + \beta^-(x).$$

2.2 Opérateurs sur un graphe

On introduit la notion d'opérateur Laplacien non symétrique sur un graphe orienté avec un poids d'arêtes pas nécessairement symétrique.

2.2.1 Espaces fonctionnels

On introduit à présent les espaces suivants associés au graphe pondéré (G, m, b):

$$\mathcal{C}(V) = \{f : V \to \mathbb{C}\}$$

$$\mathcal{C}_c(V) = \{f \in \mathcal{C}(V);\ f \text{ à support fini dans } V\}.$$

On considère l'espace de Hilbert

$$\ell^2(V,m) = \{f \in \mathcal{C}(V);\ \sum_{x\in V} m(x)|f(x)|^2 < \infty\}$$

muni du produit scalaire donné par:

$$(f,g)_m = \sum_{x\in V} m(x)f(x)\overline{g(x)}.$$

La norme correspondante est définie par:

$$\|f\|_m = \sqrt{(f,f)_m}.$$

Pour $U \subset V$, les espaces $\mathcal{C}_c(U)$ et $\ell^2(U,m)$ sont les sous-ensembles de fonctions de $\mathcal{C}_c(V)$ et $\ell^2(V,m)$ respectivement à support dans U.

2.2.2 Laplaciens discrets non symétriques

Dans cette thèse, on suppose que G est sans boucle, localement fini, connexe et vérifiant:

$$\forall x \in V,\ \ d^+(x) \neq 0 \text{ et } d^-(x) \neq 0.$$

Laplacien et Laplacien normalisé:

Pour un graphe pondéré, on introduit

- Le Laplacien discret Δ agissant sur $\mathcal{C}_c(V)$ par la formule:

$$\begin{aligned}\forall f \in \mathcal{C}_c(V),\ \ \Delta f(x) &= \frac{1}{m(x)}\sum_{y\in V} b(x,y)\big(f(x)-f(y)\big).\\ &= \frac{1}{m(x)}\sum_{y\in V_x^+} b(x,y)\big(f(x)-f(y)\big).\end{aligned}$$

- Le Laplacien **normalisé** qui correspond à un choix particulier de poids sur les sommets. Le Laplacien est dit normalisé si $m = \beta^+$, on le note par $\tilde{\Delta}$ et il est défini par:

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(V),\ \ \tilde{\Delta} f(x) = f(x) - \frac{1}{\beta^+(x)}\sum_{y\in V_x^+} b(x,y)f(y)$$

avec $\beta^+(x) = \sum_{y \in V_x^+} b(x,y)$.

Cet opérateur est particulièrement étudié dans le cadre stochastique, de plus il est toujours borné, comme on le verra plus tard, ce qui n'est pas vrai en général pour Δ.

Remarque 2.2.1 *Si G est un digraphe pondéré, un cas particulier important est celui où le poids b sur les arêtes est symétrique. Dans ce cas, l'opérateur Δ est symétrique. Cet opérateur a fait l'objet de nombreuses études [24], [9], [34]...*
Dans ce travail on ne fait pas cette hypothèse de symétrie.

Laplaciens de Dirichlet:

Pour $U \subset V$, le Laplacien de Dirichlet Δ_U^D est défini sur

$\mathcal{C}_c(U) = \{f \in \mathcal{C}_c(V);\ f$ à support fini dans $U\}$ par:

$$\Delta_U^D f(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{\substack{y \in V_x^+ \\ y \in U \cup \partial_V U}} b(x,y)\big(f(x) - f(y)\big)$$

c'est la restriction de Δ sur U.

$\tilde{\Delta}_U^D$ est le Laplacien de Dirichlet sur U associé à $\tilde{\Delta}$.

Un graphe G est dit simple si m et b sont constants et égalent à 1 sur V et $\vec{E}$ respectivement.

Exemple 2.2.1 *On considère le graphe simple $(\mathbb{Z}, \vec{E})$,*
Δ est défini sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{Z})$ par:

$$\Delta f(i) = f(i) - f(i+1), \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}.$$

On prend pour un entier n fixé, le sous ensemble $U = \{0, 1, 2, ..., n\}$,

$$\Delta_U^D f(i) = f(i) - f(i+1), \quad \forall\, i \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$
$$\Delta_U^D f(n) = f(n).$$

2.2.3 Adjoint d'un opérateur A à domaine D(A)

On commence avec la notion d'adjoint; plusieurs classes particulières d'opérateurs bornés ou non seront définies à l'aide de cette notion.

Pour un opérateur linéaire à domaine dense, on peut associer un autre opérateur linéaire appelé opérateur adjoint. On va étudier par la suite les opérateurs adjoints des Laplaciens Δ et $\tilde{\Delta}$.

Pour un opérateur non borné, on rappelle la définition de l'adjoint qui passe par celle de son domaine [47].

Définition 2.2.1

- *L'adjoint d'un opérateur sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $A : D(A) \to \mathcal{H}$ à domaine dense dans $\mathcal{H}$ est l'opérateur A^* ayant pour domaine:*

$$D(A^*) = \{\phi \in \mathcal{H} |\ \exists \eta \in \mathcal{H};\ \ \forall \psi \in D(A),\ (A\psi, \phi) = (\psi, \eta)\}$$

où on pose

$$\eta = A^*\phi.$$

- *L'adjoint d'un opérateur borné A sur $\mathcal{H}$ est l'opérateur linéaire borné, noté A^*, vérifiant*

$$(f, Ag) = (A^*f, g), \quad \forall\ f, g \in \mathcal{H}$$

Regroupons dans la proposition suivante quelques propriétés des adjoints, voir [58] et [47].

Proposition 2.2.1 *Pour un opérateur A à domaine dense $D(A)$ dans un espace de Hilbert,*

- *A^* est fermé*
- *si A admet une fermeture $\overline{A}$, alors $(\overline{A})^* = A^*$*
- *A^* est densément défini si et seulement si A est fermable*
- *si A est fermable, alors $A^{**} = \overline{A}$.*

Définition 2.2.2 *Un opérateur A à domaine dense $D(A)$ sur un espace de Hilbert H est dit*

1. *symétrique si et seulement si A est inclus dans A^**
2. *auto-adjoint si et seulement si $A = A^*$*
3. *essentiellement auto-adjoint si et seulement si A^* est auto-adjoint.*

Rappelons la définition d'un adjoint formel.

Définition 2.2.3 *[40] Soient $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $A' : D(A') \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ deux opérateurs sur un espaces de Hilbert A' est un adjoint formel de A si*

$$(Af, g) = (f, A'g),\ \forall f \in D(A) \text{ et } g \in D(A').$$

Donc l'opérateur A' est une restriction de A^*.

Définition 2.2.4 *Δ' est l'adjoint formel de Δ avec $D(\Delta') = \mathcal{C}_c(V)$.*

Proposition 2.2.2 *L'adjoint formel de Δ défini sur $\mathcal{C}_c(V)$, est donné par:*

$$\Delta' f(x) = \frac{1}{m(x)} \left(\sum_{y \in V} b(x,y) f(x) - \sum_{y \in V} b(y,x) f(y) \right).$$

Preuve:

Le calcul suivant montrera que pour tous $f, g \in \mathcal{C}_c(V)$:

$$(\Delta f, g)_m = (f, \Delta' g)_m$$

en effet:

$$\begin{aligned}
(\Delta f, g)_m &= \sum_{(x,y) \in \vec{E}} b(x,y)\big(f(x) - f(y)\big)\overline{g(x)} \\
&= \sum_{x \in V} f(x) \sum_{y \in V} b(x,y)\overline{g(x)} - \sum_{(y,x) \in \vec{E}} b(y,x)\overline{g(y)} f(x) \\
&= \sum_{x \in V} f(x) \left(\sum_{y \in V} b(x,y)\overline{g(x)} - \sum_{y \in V} b(y,x)\overline{g(y)} \right) \\
&= (f, \Delta' g)_m.
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.2 *Pour tous $x \in V$ et $g \in \mathcal{C}(V)$, les sommes $\sum_{y \in V} b(x,y)g(y)$ et $\sum_{y \in V} b(y,x)g(y)$ sont en fait finies car le graphe est localement fini. Donc $\Delta' g$ a un sens pour $g \in \mathcal{C}(V)$.*

Remarque 2.2.3 *L'opérateur Δ' peut s'exprimer comme un opérateur de Schrödinger: la somme d'un Laplacien et d'un potentiel q:*

$$\Delta' f(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y \in V} b(y,x)\big(f(x) - f(y)\big) + q(x) f(x)$$

avec

$$q(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y \in V} \big(b(x,y) - b(y,x)\big),\ x \in V.$$

2.2.4 Hypothèse (β) et généralités sur les Laplaciens

On introduit dans la suite l'Hypothèse (β) qui exprime la conservation des poids d'arêtes sortantes et rentrantes d'un sommet.

L'hypothèse (β) consiste en :

pour tout $x \in V,\ \ \beta^+(x) = \beta^-(x).$

L'hypothèse (β) est naturelle, elle rappelle la loi de Kirchhoff pour les courants électriques.

La loi de Kirchhoff est utilisée dans le domaine électrique pour établir une relation mathématique concernant les courants électriques parcourant un nœud électrique, c'est-à-dire une intersection dans le branchement électrique. La loi énoncée par le physicien Allemand Gustav Kirchhoff est la suivante:
La somme algébrique des intensités des courants qui entrent par un nœud est égale à la somme algébrique des intensités des courants qui en sortent.

Proposition 2.2.3 *Si l'Hypothèse* (β) *est satisfaite, alors*

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(V),\ \ \Delta' f(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y \in V} b(y,x)\big(f(x) - f(y)\big). \tag{2.3}$$

Remarque 2.2.4 *Comme le graphe est localement fini, la formule* (2.3) *a un sens pour tout* $f \in \mathcal{C}(V)$.

Commentaire 2.2.1 *Le domaine de l'adjoint* Δ^* *de* Δ *est donné par:*

$$D(\Delta^*) = \big\{ f \in \ell^2(V,m),\ x \to \frac{1}{m(x)} \sum_{y \in V} b(x,y)\big(f(x) - f(y)\big) \in \ell^2(V,m) \big\}.$$

La proposition suivante est l'un des outils principaux lorsqu'on travaille avec le Laplacien normalisé.

Proposition 2.2.4 $\tilde{\Delta}$ *est borné par 2.*

Preuve:

Pour tout $f, g \in \mathcal{C}_c(V)$, on a besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer le résultat.

$$
\begin{aligned}
\mid (\tilde{\Delta} f, g)_{\beta^+} \mid &= \mid \sum_{x\in V} \overline{g(x)} \sum_{y\in V_x^+} b(x,y)\big(f(x)-f(y)\big) \mid \\
&\leq \sum_{x\in V} \beta^+(x) \mid f(x)\overline{g(x)} \mid + \sum_{x\in V} \mid \overline{g(x)} \mid \sum_{y\in V_x^+} b(x,y) \mid f(y) \mid \\
&\leq \big(f,f\big)^{\frac{1}{2}}_{\beta^+} \big(g,g\big)^{\frac{1}{2}}_{\beta^+} \qquad (2.4)\\
&+ \sum_{x\in V} \mid \overline{g(x)} \mid \Big(\sum_{y\in V_x^+} b(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{y\in V_x^+} b(x,y) \mid f(y) \mid^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \big(f,f\big)^{\frac{1}{2}}_{\beta^+} (g,g)^{\frac{1}{2}}_{\beta^+} \qquad (2.5)\\
&+ \Big(\sum_{x\in V} \beta^+(x) \mid g(x) \mid^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{x\in V} \sum_{y\in V_x^+} b(x,y) \mid f(y) \mid^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (f,f)^{\frac{1}{2}} (g,g)^{\frac{1}{2}}_{\beta^+} + (g,g)^{\frac{1}{2}}_{\beta^+} \Big(\sum_{y\in V} \mid f(y) \mid^2 \sum_{x\in V_y^-} b(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \big(f,f\big)^{\frac{1}{2}}_{\beta^+} \big(g,g\big)^{\frac{1}{2}}_{\beta^+} + \big(g,g\big)^{\frac{1}{2}}_{\beta^+} \Big(\sum_{y\in V} \mid f(y) \mid^2 \beta^-(y)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\big(f,f\big)^{\frac{1}{2}}_{\beta^+} \big(g,g\big)^{\frac{1}{2}}_{\beta^+}.
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que $\|\tilde{\Delta}\|_{\beta^+} = \sup_{\substack{\|f\|_{\beta^+}\leq 1 \\ \|g\|_{\beta^+}\leq 1}} \mid (\tilde{\Delta} f, g)_{\beta^+} \mid \leq 2$.

□

Remarque 2.2.5 *Le Laplacien $\tilde{\Delta}$ est donc défini sur $\ell^2(V,\beta^+)$ et pas seulement sur $\mathcal{C}_c(V)$.*

Corollaire 2.2.1

$$\sigma(\tilde{\Delta}) \subset \overline{D(0,2)}.$$

Remarque 2.2.6 *L'adjoint est une extension de l'adjoint formel et est borné, $(\tilde{\Delta})'$ est défini sur $\ell^2(V,\beta^+)$ et*

$$(\tilde{\Delta})^* = (\tilde{\Delta})'.$$

Laplacien symétrique:

Pour des raisons de simplicité, on introduit le Laplacien symétrique H, agissant sur $\mathcal{C}_c(V)$,

associé au graphe avec le poids symétrique d'arêtes défini sur $V \times V$;

$$a(x,y) = b(x,y) + b(y,x)$$

$$Hf(x) = (\Delta + \Delta')f(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y \in V} a(x,y)\big(f(x) - f(y)\big).$$

La forme quadratique Q_Δ associée est définie sur $\mathcal{C}_c(V)$ par

$$\begin{aligned} Q_\Delta(f) =& (\Delta f, f)_m + (\Delta' f, f)_m \\ =& (\Delta f, f)_m + \overline{(\Delta f, f)_m}. \end{aligned}$$

Lemme 2.2.1 *Soit $f \in \mathcal{C}_c(V)$, on a $Q_\Delta(f) = 2\mathcal{R}e(\Delta f, f)_m$. Alors*

$$\inf_{\|f\|_m = 1} Q_\Delta(f) = \inf_{\|f\|_m = 1} 2\mathcal{R}e(\Delta f, f)_m. \tag{2.6}$$

Dans la suite, on établit une formule de Green explicite associée au Laplacien non symétrique sur un graphe orienté.

Lemme 2.2.2 *(Formule de Green) On suppose que f et g sont deux fonctions de $\mathcal{C}_c(V)$. Alors*

$$(\Delta f, g)_m + \overline{(\Delta g, f)}_m = \sum_{(x,y) \in \vec{E}} b(x,y)\big(f(x) - f(y)\big)\big(\overline{g(x) - g(y)}\big).$$

Preuve:

La preuve est un simple calcul

$$\begin{aligned} (\Delta f, g)_m + \overline{(\Delta g, f)}_m =& (Hf, g)_m \\ =& \sum_{\{x,y\} \in E} a(x,y)\big(f(x) - f(y)\big)\overline{g(x)} \\ =& \sum_{\{y,x\} \in E} a(y,x)\big(f(y) - f(x)\big)\overline{g(y)} \\ =& \frac{1}{2} \sum_{\{x,y\} \in E} a(x,y)\big(f(x) - f(y)\big)\big(\overline{g(x) - g(y)}\big) \\ =& \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \vec{E}} b(x,y)\big(f(x) - f(y)\big)\big(\overline{g(x) - g(y)}\big) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{(y,x) \in \vec{E}} b(y,x)\big(f(x) - f(y)\big)\big(\overline{g(x) - g(y)}\big) \end{aligned}$$

car $a(x,y) = b(x,y) + b(y,x)$ et $\{x,y\} \in E \Leftrightarrow (x,y) \in \vec{E}$ ou $(y,x) \in \vec{E}$. Alors

$$\begin{aligned}(\Delta f, g)_m + \overline{(\Delta g, f)}_m =& \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\big(f(x)-f(y)\big)\big(\overline{g(x)-g(y)}\big) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\big(f(y)-f(x)\big)\big(\overline{g(y)-g(x)}\big)\end{aligned}$$

□

On étudie quelques propriétés générales du Laplacian Δ.

Définition 2.2.5 *[40] On dit qu'un opérateur $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est accrétif si pour tous $f \in D(A)$,*

$$\mathcal{R}e(Af, f) \geq 0.$$

Proposition 2.2.5 *1. Δ est accrétif.*

2. $\Delta f = 0 \Leftrightarrow f$ est constante.

Preuve:

1. Grâce à la formule de Green (lemme 2.2.2) on a pour $f \in \mathcal{C}_c(V)$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}e\big((\Delta f, f)_m\big) &= \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\big|f(x)-f(y)\big|^2 \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

2. Il est clair que Δ s'annule par les fonctions constantes. Maintenant, on suppose que pour $f \in \mathcal{C}_c(V)$ tel que $\Delta f = 0$, on a $\mathcal{R}e(\Delta f, f)_m = 0$. Ceci entraine par la connexité de G que f est constante.

□

2.2.5 Image numérique et applications

Le but de cette section est de définir et de développer les différentes notions de l'image numérique des opérateurs Laplaciens. On montre comment l'image numérique du Laplaciens donne des informations sur le spectre [12], [38].

Définition 2.2.6 *On appelle image numérique d'un opérateur linéaire A dans un espace de Hilbert le sous-ensemble du plan complexe défini par*

$$W(A) = \{(Af, f;, \ \ f \in D(A), \ \|f\| = 1\}.$$

On donne des propriétés sur l'image numérique de l'opérateur borné $\tilde{\Delta}$.

Proposition 2.2.6 *1.* $W(\tilde{\Delta}^*) = \{\overline{\lambda}; \ \ \lambda \in W(\tilde{\Delta})\}$.

2. $W(\tilde{\Delta}) \subset D(1,1) = \{z \in \mathbb{C}; \ |z-1| \leq 1\}$.

Preuve:

1. Cette propriété est claire puisque $\tilde{\Delta}$ est borné

$$\begin{aligned} W(\tilde{\Delta}^*) &= \{\lambda; \ \ \lambda = (\tilde{\Delta}^* f, f)_{\beta^+} \text{ et } \|f\|_{\beta^+} = 1\} \\ &= \{\lambda; \ \ \lambda = (f, \tilde{\Delta} f)_{\beta^+} \text{ et } \|f\|_{\beta^+} = 1\} \\ &= \{\overline{\lambda}; \ \ \lambda = (\tilde{\Delta} f, f)_{\beta^+} \text{ et } \|f\|_{\beta^+} = 1\}. \end{aligned}$$

2. Soit $\lambda = (\tilde{\Delta} f, f)_{\beta^+} \in W(\tilde{\Delta})$ avec $\|f\|_{\beta^+} = 1$

$$\begin{aligned} |\lambda - 1| &= |\sum_{(x,y)\in \vec{E}} b(x,y) f(x) \overline{f(y)}| \\ &\leq \sum_{x\in V} \sum_{y \in V_x^+} b(x,y) \mid f(x) \overline{f(y)} \mid \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse (β), on obtient

$$\begin{aligned} |\lambda - 1| &\leq \sum_{x\in V} \Big(\sum_{y\in V_x^+} b(x,y) \mid f(x) \mid^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{y\in V_x^+} b(x,y) \mid f(y) \mid^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \Big(\sum_{x\in V} \beta^+(x) \mid f(x) \mid^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{y\in V} \beta^+(y) \mid f(y) \mid^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (f,f)_{\beta^+} = 1. \end{aligned}$$

□

2.2.6 Fermabilité du Laplacien

Les opérateurs fermés forment une classe d'opérateurs linéaires sur les espaces vectoriels normés plus vaste que celle des opérateurs bornés. Ils ne sont donc pas nécessairement bornés, mais il leur reste suffisamment de bonnes propriétés pour qu'on puisse définir pour eux le spectre... De plus, le domaine d'un opérateur fermé est complet pour la norme de graphe. On rappelle dans la suite la définition d'un opérateur fermable.

Définition 2.2.7 *Un opérateur $A : D(A) \to \mathcal{H}$ est dit fermable s'il admet une extension fermée, sa fermeture $\overline{A}$ est alors sa plus petite extension fermée.*

Proposition 2.2.7 *La fermeture d'un opérateur $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est l'opérateur $\overline{A}$ dont le domaine est:*

- $D(\overline{A}) = \left\{ f \in \mathcal{H};\ \exists\, (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A),\ f_n \to f \text{ et } (Af_n)_n \text{ converge} \right\}$
- $Af_n \to \overline{A}f,\ \ f \in D(\overline{A})$.

Le but ici est essentiellement de construire une extension fermée du Laplacien, puis d'étudier ses propriétés.

Lemme 2.2.3 *Δ est un opérateur fermable.*

Preuve:

La preuve de ce lemme s'appuie sur le théorème de T. Kato qui prouve qu'un opérateur densément défini est fermable si son image numérique n'est pas tout le plan complexe, voir [40] page 268.

Soit $\lambda \in W(\Delta)$, il existe $f \in \mathcal{C}_c(V)$ tel que $\| f \|_m = 1$ et $\lambda = (\Delta f, f)_m$. D'après la formule de Green on a :

$$\mathcal{R}e(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y) \mid f(x) - f(y) \mid^2 \geq 0$$

ce qui implique que $W(\Delta) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C};\ \mathcal{R}e(\lambda) \geq 0 \right\} \neq \mathbb{C}$.

□

Commentaire 2.2.2 *La fermeture de Δ est l'opérateur $\overline{\Delta}$ dont le domaine est:*

- $D(\overline{\Delta}) = \left\{ f \in \ell^2(V,m);\ \exists\, (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_c(V),\ f_n \to f \text{ et } (\Delta f_n)_n \text{ converge} \right\}$
- $\Delta f_n \to \overline{\Delta}f,\ \ f \in D(\overline{\Delta})$.

2.2.7 Spectre d'un opérateur

On rappelle maintenant les notions de spectre [48], comme pour les opérateurs bornés, le spectre d'un opérateur fermé non-borné est défini comme le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de son ensemble résolvant.

Définition 2.2.8 *Si A est un opérateur linéaire fermé sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, l'ensemble résolvant de A est*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \ (A-\lambda) : D(A) \to \mathcal{H} \text{ est inversible } \}$$

Le spectre de A est l'ensemble complémentaire de l'ensemble résolvant :

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Le spectre se décompose en plusieurs sous-ensembles, selon la (ou les) raison(s) empêchant $(A-\lambda)$ d'être inversible.

Définition 2.2.9 *Soit un opérateur linéaire A*

- *Le spectre ponctuel est constitué de ses valeurs propres:*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \ \ker(A-\lambda) \neq 0\}.$$

- *Le spectre résiduel:*

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \ (A-\lambda) \text{ est non surjectif à image dense } \}.$$

- *Le spectre discret σ_d: c'est l'ensemble des valeurs propres isolées et de multiplicité finie.*

- *Le spectre essentiel σ_{ess}: c'est l'ensemble de tous les nombres complexes λ pour lesquels l'image $R(A-\lambda)$ n'est pas fermée ou le noyau $\ker(A-\lambda)$ est de dimension infinie.*

Remarque 2.2.7 *Le spectre d'un opérateur auto-adjoint A est réel et les vecteurs propres associés aux éventuelles valeurs propres distinctes sont orthogonaux deux à deux.*

Pour un opérateur non borné A sur un espace de Hilbert la relation entre le spectre et l'image numérique est plus compliquée. On veut mettre en garde, qu'il peut très bien arriver que $\sigma(A)$ ne soit pas contenu dans $W(A)$. Mais pour un opérateur fermé A le spectre essentiel $\sigma_{ess}(A)$

est toujours un sous-ensemble de $\overline{W(A)}$, voir [4].

On va définir les invariants suivants:

$$\eta(\overline{\Delta}) = \inf\{\mathcal{R}e\lambda;\ \ \lambda \in \sigma(\overline{\Delta})\}$$

$$\eta^{ess}(\overline{\Delta}) = \inf\{\mathcal{R}e\lambda;\ \ \lambda \in \sigma_{ess}(\overline{\Delta})\}$$

$$\nu(\Delta) = \inf\{\mathcal{R}e\lambda;\ \ \lambda \in W(\Delta)\}. \tag{2.7}$$

Le lemme qui suit est du à l'inclusion de $\sigma_{ess}(\overline{\Delta})$ dans $W(\overline{\Delta})$.

Lemme 2.2.4

$$\eta^{ess}(\overline{\Delta}) \geq \nu(\overline{\Delta}) \tag{2.8}$$

D'après la proposition 2.2.8 et par la bornitude $\tilde{\Delta}$, on établit le résultat suivant.

Lemme 2.2.5

$$\eta(\tilde{\Delta}) \geq \nu(\tilde{\Delta}), \tag{2.9}$$

et si $\overline{\Delta}$ *est auto-adjoint alors* $\eta(\overline{\Delta}) = \nu(\overline{\Delta})$.

On présente les propriétés d'inclusions inspirées de [4].

Proposition 2.2.8 *1.* $\sigma_p(\tilde{\Delta}) \subset W(\tilde{\Delta})$

2. $\sigma(\tilde{\Delta}) \subset \overline{W(\tilde{\Delta})}$.

Cette proposition est une application directe de la proposition 2.4 et du théorème 2.9 de [50] et comme conséquence on peut contrôler de plus en plus le spectre du Laplacien normalisé.

Corollaire 2.2.2

$$\sigma(\tilde{\Delta}) \subset \overline{D(1,1)}.$$

2.2.8 Sur les valeurs propres du Laplacien $\tilde{\Delta}_\Omega^D$

Notre but principal dans cette section est de présenter la relation entre l'image numérique et le spectre du Laplacien borné $\tilde{\Delta}_\Omega^D$.

Le lemme 2.2.6 suivant établit un lien entre les valeurs propres d'une matrice et les valeurs propres de sa partie réelle [31]. Soit A un opérateur borné, l'opérateur appelé la partie réelle

de A et noté $\mathcal{R}e(A) = \frac{1}{2}\big(A + A^*\big)$ est auto-adjoint. Cela n'est en général pas vrai pour les opérateurs non bornés.

Lemme 2.2.6 *Soit A une matrice carrée d'ordre n, $\lambda_k(A)$ et $\lambda_k(\mathcal{R}e(A))$, $k = 1, .., n$; les valeurs propres de A et $\mathcal{R}e(A)$ respectivement, on arrange les valeurs propres de $\mathcal{R}e(A)$ dans l'ordre croissant, de sorte que $\lambda_1(\mathcal{R}e(A)) \leq \lambda_2(\mathcal{R}e(A)) \leq ... \leq \lambda_n(\mathcal{R}e(A))$. Alors*

$$\sum_{k=n-q+1}^{n} \mathcal{R}e(\lambda_k(A)) \leq \sum_{k=n-q+1}^{n} \lambda_k(\mathcal{R}e(A)), \quad q = 1, 2, ..., n$$

avec égalité pour $q = n$.

Dans la proposition 2.2.9, on étudie quelques généralités sur les valeurs propres de $\tilde{\Delta}_\Omega^D$, où $\Omega \subset V$ est fini. On suppose qu'elles sont ordonnées comme suit:

$$\mathcal{R}e(\lambda_1(\tilde{\Delta}_\Omega^D)) \leq \mathcal{R}e(\lambda_2(\tilde{\Delta}_\Omega^D)) \leq ... \leq \mathcal{R}e(\lambda_n(\tilde{\Delta}_\Omega^D)).$$

On donne également une propriété simple, mais utile pour montrer la stricte positivité de $\mathcal{R}e(\lambda_1(\tilde{\Delta}_\Omega^D))$.

Lemme 2.2.7

$$\lambda_1(\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D)) \leq \mathcal{R}e(\lambda_1(\tilde{\Delta}_\Omega^D)).$$

Preuve:

Soit f une fonction propre associée à $\lambda_1(\tilde{\Delta}_\Omega^D)$. Par le principe variationnel de $\lambda_1(H_\Omega^D)$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\tilde{H}_\Omega^D) &\leq \frac{(\tilde{H}_\Omega^D f, f)_m}{(f, f)_m} \\
&= \frac{(\tilde{\Delta}_\Omega^D f, f)_m}{(f, f)_m} + \frac{\overline{(\tilde{\Delta}_\Omega^D f, f)_m}}{(f, f)_m} \\
&= \lambda_1(\tilde{\Delta}_\Omega^D) + \overline{\lambda_1(\tilde{\Delta}_\Omega^D)}.
\end{aligned}$$

□

La proposition suivante contient un complément d'information sur les valeurs propres de $\tilde{\Delta}_\Omega^D$ et $\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D)$.

Proposition 2.2.9 *Soit Ω un sous-ensemble non vide fini de V ($\#\Omega = n$). Alors les propriétés suivantes sont satisfaites.*

1. $0 < \mathcal{R}e(\lambda_1(\tilde{\Delta}_\Omega^D)) \leq 1$

2. $\lambda_1(\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D)) + \lambda_n(\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D)) \leq 2.$

Preuve:

1. D'après le théorème 4.3 de [32], on a

$$\frac{1}{2}\lambda_1(\tilde{H}_\Omega^D) = \lambda_1(\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D)) > 0.$$

D'où le lemme 2.2.7 implique

$$\mathcal{R}e(\lambda_1(\tilde{\Delta}_\Omega^D)) > 0.$$

Ensuite, par le lemme 2.2.6 pour $q = n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{R}e(\lambda_k(\tilde{\Delta}_\Omega^D)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D))$$

d'où

$$n\mathcal{R}e(\lambda_1(\tilde{\Delta}_\Omega^D)) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D)).$$

D'autre part, comme $\tilde{\Delta}_\Omega^D$ est un opérateur borné donc son adjoint coïncide avec son adjoint formel. On obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D)f(x) =& \frac{1}{2}\left(\tilde{\Delta}_\Omega^D + (\tilde{\Delta}_\Omega^D)^*\right)\\ =& f(x) - \frac{1}{2\beta^+(x)}\sum_{y\in V_x^+} b(x,y)f(y) - \frac{1}{2\beta^-(x)}\sum_{y\in V_x^-} b(y,x)f(y)\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\big(\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D)\big) = Tr\big(\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D)\big) = n$$

ce qui montre que $n\mathcal{R}e(\lambda_1(\tilde{\Delta}_\Omega^D)) \leq n$.

2. Soit f une fonction propre associée à $\lambda_n(\tilde{\Delta}_\Omega^D + (\tilde{\Delta}_\Omega^D)^*)$, on a,

$$\begin{aligned}(**) &= \lambda_1(\tilde{\Delta}_\Omega^D + (\tilde{\Delta}_\Omega^D)^*) + \lambda_n(\tilde{\Delta}_\Omega^D + (\tilde{\Delta}_\Omega^D)^*) \\ &\leq \frac{Q_{\tilde{\Delta}_\Omega^D}(|f|)}{(f,f)_{\beta^+}} + \frac{Q_{\tilde{\Delta}_\Omega^D}(f)}{(f,f)_{\beta^+}}.\end{aligned}$$

Comme

$|f(x) - f(y)|^2 + (|f(x)| - |f(y)|)^2 \leq 2(|f(x)|^2 + |f(y)|^2)$,

il résulte que

$$\begin{aligned}(**) &\leq 2\frac{\sum\limits_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)|f(x)|^2 + \sum\limits_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)|f(y)^2}{(f,f)_{\beta^+}} \\ &\leq 2\frac{\sum\limits_{x\in V}\beta^+(x)|f(x)|^2 + \sum\limits_{y\in V}\beta^-(y)|f(y)|^2}{(f,f)_{\beta^+}} \\ &\leq 4\frac{(f,f)_{\beta^+}}{(f,f)_{\beta^+}}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lambda_1\left(\frac{\tilde{\Delta}_\Omega^D + (\tilde{\Delta}_\Omega^D)^*}{2}\right) + \lambda_n\left(\frac{\tilde{\Delta}_\Omega^D + (\tilde{\Delta}_\Omega^D)^*}{2}\right) \leq 2.$$

□

Par conséquence, on peut vérifier l'inégalité suivante.

Corollaire 2.2.3

$$\mathcal{R}e(\lambda_n(\tilde{\Delta}_\Omega^D)) < 2.$$

Preuve:

Appliquant le lemme 2.2.6 pour $q = 1$, on trouve

$$\mathcal{R}e(\lambda_n(\tilde{\Delta}_\Omega^D)) \leq \lambda_n(\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D)).$$

Mais d'après la proposition 2.2.9, on a :

$$\lambda_n(\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D)) \leq 2 - \lambda_1(\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D)).$$

On conclut donc que

$$\lambda_n(\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D)) < 2.$$

□

3

Inégalités isopérimétriques et spectre essentiel

Il y a une difficulté supplémentaire importante en dimension infinie pour les opérateurs non auto-adjoints liée à la notion de spectre essentiel, dont on peut trouver plusieurs définitions dans la littérature, plus ou moins commodes à cerner et stables par perturbation compacte. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux opérateurs $\tilde{\Delta}$ et Δ. En premier lieu, on va estimer la partie réelle de l'image numérique ainsi que le spectre essentiel de la fermeture $\overline{\Delta}$ de Δ à l'aide des constantes de Cheeger qu'on définit, dans notre cadre. Puis, on décrit quelques techniques permettant d'établir des critères pour montrer l'absence de spectre essentiel de $\overline{\Delta}$ en s'appuyant sur *le théorème de Cheeger* et *le théorème de comparaison* de Lewis [45].

3.1 Inégalités de Cheeger

En géométrie, aussi bien en géométrie Euclidienne qu'en géométrie Riemannienne, on appelle inégalité isopérimétrique comme par exemple l'inégalité de Cheeger une inégalité portant sur le volume (le longueur, l'aire...) d'une large famille de domaines par rapport au volume de leurs frontières. Dans les années 70, J. Cheeger a introduit une constante isopérimétrique notée par h rattachée à une variété Riemannienne compacte connexe pour estimer le bas du spectre de

son Laplacien [17]. Puis P. Buser a estimé la première valeur propre non nulle sur une variété Riemannienne compacte en fonction de la constante h [15] . Une constante analogue dans le cas discret a été introduite par F. R. K. Chung [18], J. Dodziuk [24] et A. Grigoryan [32]... pour des Laplaciens symétriques.
T. Sunada a établi une inégalité de Cheeger sur un graphe orienté à poids symétrique sur $\vec{E}$ [52]. Dans ce travail, on va introduire et étendre ces résultats aux cas des Laplaciens non symétriques sur les graphes orientés infini avec un poids non symétrique d'arêtes [7].

On donne une estimation aux bornes de la partie réelle de l'image numérique et du spectre essentiel du Laplacien en utilisant la constante de Cheeger sur le graphe (G, m, b). On a besoin de cette estimation pour caractériser l'absence de spectre essentiel. Des bornes similaires sont liées par une inégalité fondamentale établie par A. Grigoryan, [32] pour le Laplacien normalisé auto-adjoint d'un graphe infini pondéré symétrique.

Pour un sous-ensemble U de V, on rappelle que son bord d'arêtes ∂_E est:

$$\partial_E U = \Big\{(x,y) \in \vec{E};\ (x \in U,\ y \in U^c)\ \text{ ou }\ (x \in U^c,\ y \in U)\Big\}$$

et que sa mesure est donnée par:

$$b(\partial_E U) = \sum_{(x,y)\in\partial_E U} b(x,y).$$

On introduit les définitions suivantes de la constante de Cheeger pour un graphe pondéré non symétrique infini.

Définition 3.1.1 *Soit (G, m, b) un graphe pondéré et Ω un sous-ensemble de V, les constantes de Cheeger sur Ω sont définies par:*

$$h(\Omega) = \inf_{\substack{U\subset\Omega \\ fini}} \frac{b(\partial_E U)}{m(U)}$$

et

$$\tilde{h}(\Omega) = \inf_{\substack{U\subset\Omega \\ fini}} \frac{b(\partial_E U)}{\beta^+(U)}$$

où

$$m(U) = \sum_{x \in U} m(x), \text{ pour } U \text{ partie fini de } \Omega.$$

et

$$\beta^+(U) = \sum_{x \in U} \beta^+(x).$$

On définit de plus:

$$m_\Omega = \inf \left\{ \frac{\beta^+(x)}{m(x)}, \ \ x \in \Omega \right\}$$

$$M_\Omega = \sup \left\{ \frac{\beta^+(x)}{m(x)}, \ \ x \in \Omega \right\}.$$

Dans le cas où les poids m et b sont simples, la constante de Cheeger mesure la connectivité de G, dans le sens où une valeur faible de h indique qu'il existe une partie plutôt grosse faiblement connectée avec le reste du graphe. En particulier, pour un graphe fini, la constante de Cheeger est strictement positive si et seulement si G est un graphe connexe. Intuitivement, si la constante de Cheeger est faible, mais positive, alors il existe un "goulot d'étranglement", dans le sens où il y a des ensembles de sommets avec "un ensemble négligeable" d'arêtes entre eux. La constante de Cheeger est "grande" si toute division possible de l'ensemble de sommets en sous-ensembles a "beaucoup" d'arêtes entre ces deux sous-ensembles. Dans le cas de graphe pondéré, la faiblesse de h signifie la légèreté du poids b par rapport au poids m et non forcément la déconnectivité de G.

La proposition suivante établit le lien entre les deux constantes isopérimétriques h et $\tilde{h}$.

Proposition 3.1.1 *Soit $\Omega \subset V$, les constantes $h(\Omega)$ et $\tilde{h}(\Omega)$ vérifient les assertions suivantes:*

1. $\tilde{h}(\Omega) m_\Omega \leq h(\Omega) \leq \tilde{h}(\Omega) M_\Omega$.
2. *Si Ω est fini alors $h(\Omega)$ est nulle si et seulement si $\tilde{h}(\Omega)$ est nulle.*

Preuve:

1. Soit un sous-ensemble fini U de Ω, on a pour tout $x \in U$

$$m(x) m_\Omega \leq m(x) m_U \leq \beta^+(x)$$

et

$$m(x)M_\Omega \leq m(x)M_U \leq \beta^+(x)$$

il s'ensuit que

$$m_\Omega \frac{1}{\beta^+(U)} \leq \frac{1}{m(U)} \leq M_\Omega \frac{1}{\beta^+(U)}$$

ce qui entraîne que

$$m_\Omega \frac{b(\partial_E U)}{\beta^+(U)} \leq \frac{b(\partial_E U)}{m(U)} \leq M_\Omega \frac{b(\partial_E U)}{\beta^+(U)}.$$

D'où le résultat.

2. C'est une déduction de la première assertion.

□

On va calculer la constante de Cheeger pour quelques exemples de graphes orientés simples ($m \equiv 1$ et $b \equiv 1$) en suivant [19], page 38.

Exemple 3.1.1 *Le graphe* $\mathbb{Z}$*,*

$$h(\mathbb{Z}) = \tilde{h}(\mathbb{Z}) = 0,$$

en effet, soit U *une partie de* $\mathbb{Z}$ *ayant* n *sommets, alors que le nombre d'arêtes de bord est* 2 *qui est négligeable devant* n *lorsque* $n \to \infty$*.*

Exemple 3.1.2 *L'arbre digraphe* $2q$*-régulier* T_1*, ici* $q = 4$ *voir la Figure 3.1,*

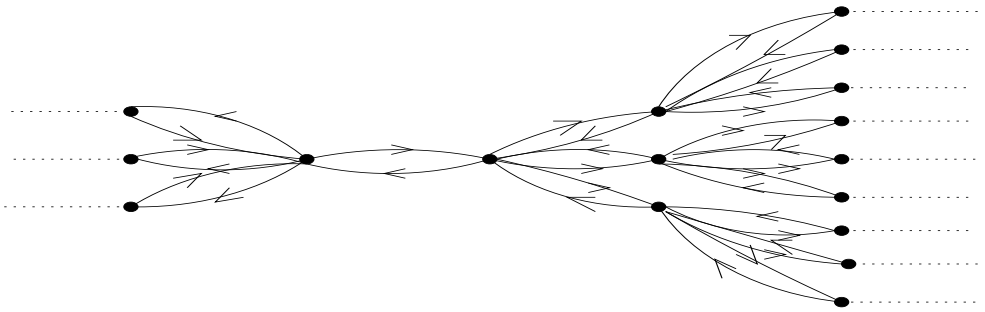


Figure 3.1: Arbre digraphe 8-régulier

$$h(T_1) = 2(q-2) \text{ et } \tilde{h}(T_1) = \frac{2(q-2)}{q}.$$

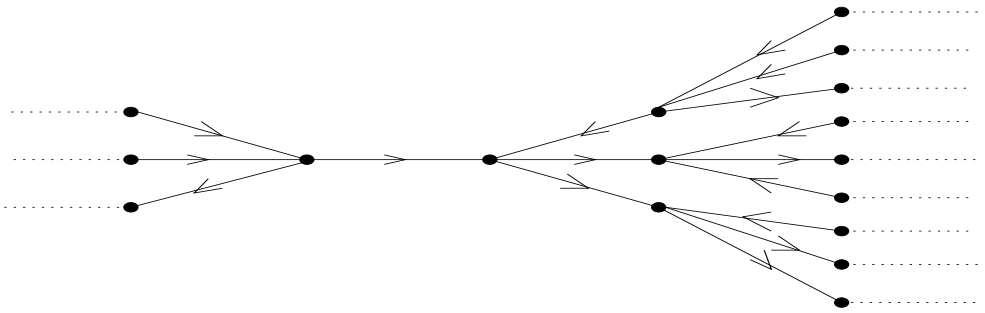


Figure 3.2: Arbre 4-régulier

En effet, si on considère les parties connexes U de T_1 qui sont des arbres, on obtient:

$$\begin{aligned} 2q|V_U| &= \sum_{x\in V_U}\sum_{y\in V_x} 1 \\ &= 2\sum_{\substack{(x,y)\in\vec{E}\\ x\in V_U}} 1 \\ &= 2\sum_{(x,y)\in\vec{E}_U} 1 + \sum_{x\in U}\sum_{\substack{y\in V_x\\ y\in U^c}} 1 \\ &= 2|\vec{E}_U| + |\partial_E U| \end{aligned}$$

où $|V_U|$ est le cardinal de V_U.
De plus on a évidemment la caractérisation d'Euler pour U:

$$2|V_U| - |\vec{E}_U| = 2$$

d'où l'on conclut que :

$$\begin{aligned} |\partial_E U| =& 2q|V_U| - 2|\vec{E}_U| \\ =& 2q|V_U| - 4|V_U| + 4 \\ =& (2q-4)|V_U| + 4 \end{aligned}$$

donc

$$\frac{b(\partial_E U)}{m(V_U)} = \frac{|\partial_E U|}{|V_U|} = 2(q-2) + \frac{4}{|V_U|}$$

et le calcul de $h(T_1)$ s'en suit.
Pour $\tilde{h}(T_1)$, il suffit de remarquer que pour un graphe régulier $\tilde{h}(T_1) = \dfrac{h(T_1)}{q}$.

Exemple 3.1.3 *L'arbre q-régulier T_2, voir la Figure 3.2*

$$h(T_2) = \frac{1}{2}h(T_1) = q-2 \text{ et } \tilde{h}(T_2) = \frac{q-2}{q}.$$

Dans la suite, on explique de quelle manière l'image numérique peut être liée aux inégalités isopérimétriques associées au Laplacien non symétrique. On commence par *la formule de la Co-aire* adaptée à notre situation. Elle est utile dans plusieurs contextes comme par exemple l'estimation des valeurs propres via les inégalités isopérimétriques pour un Laplacien discret symétrique (voir chapitre 3 de [32] et [55]).
On établit la formule de la Co-aire pour les graphes orientés.

Lemme 3.1.1 *Formule de la Co-aire*
Soit f une fonction de $\ell^2(V,m)$, on pose pour tout $t\in\mathbb{R}^+$,

$$U_t=\Big\{x\in V;\ |f(x)|\ >\ t\Big\}$$

alors l'égalité suivante est satisfaite:

$$\int_0^{+\infty} b(\partial_E U_t)\ dt\ =\ \sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\ \big||f(x)|-|f(y)|\big|. \tag{3.1}$$

Preuve:

Soit $(x,y)\in\vec{E}$, on considère l'intervalle suivant tel que $|f(x)|$ et $|f(y)|$ sont différents

$$I_{x,y}=\begin{cases}\big[|f(x)|,|f(y)|\big) & \text{si } |f(x)|<|f(y)|\\ \big[|f(y)|,|f(x)|\big) & \text{sinon}\end{cases}$$

on a clairement

$$(x,y)\in\partial_E U_t \quad\Longleftrightarrow\quad t\in I_{x,y}$$

alors, d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\sum_{(x,y)\in\partial U_t} b(x,y)\ dt\ &=\int_0^{+\infty}\sum_{\substack{(x,y)\in\vec{E}\\ t\in I_{x,y}}} b(x,y)dt\\ &=\int_0^{+\infty}\sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\ \mathbf{1}_{I_{x,y}}(t)\ \ dt\\ &=\sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\int_0^{+\infty}\mathbf{1}_{I_{x,y}}(t)\ dt\\ &=\sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\ \ long(I_{x,y}).\end{aligned}$$

Il en résulte que:

$$\int_0^{+\infty} \sum_{(x,y)\in U_t} b(x,y)\, dt \;=\; \sum_{(x,y)\in \vec{E}} b(x,y)\big||f(x)|-|f(y)|\big|.$$

□

La formule de la Co-aire permet de montrer le lemme suivant.

Lemme 3.1.2 *On a pour chaque fonction* $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$,

$$h(\Omega) \sum_{x\in V} m(x)|f(x)| \;\leq\; \sum_{(x,y)\in \vec{E}} b(x,y)\,\big||f(y)|-|f(x)|\big|. \tag{3.2}$$

Preuve:

Il suffit de suivre la même technique du lemme 4.5 dans [32], en sommant sur l'ensemble des arêtes orientées et en remplaçant f par $|\ f\ |$. En effet, on a d'après la formule de la Co-aire:

$$\sum_{(x,y)\in \vec{E}} b(x,y)\big||f(x)|-|f(y)|\big| = \int_0^{\infty} b(\partial_E U_t)dt$$

où $U_t = \{x \in V,\ \ |f(x)| > t\} \subset \Omega$, pour t strictement positif. On obtient

$$m(U_t) \leq b(\partial_E U_t)h(\Omega)$$

et en intégrant sur $\mathbb{R}_+^*$, on trouve

$$h(\Omega)\int_0^{\infty} m(U_t) \leq \sum_{(x,y)\in \vec{E}} b(x,y)\,\big||f(x)|-|f(y)|\big|.$$

Or $\displaystyle\int_0^{\infty} m(U_t) = \sum_{x\in U} m(x)\int_0^{\infty} \mathbf{1}_{[0,|f(x)|)}(t)dt = \sum_{x\in U} m(x)|f(x)|$, alors on conclut le résultat.

□

Les inégalités isopérimétriques sont apparues dans un certain nombre de travaux sur les Laplaciens symétriques de graphe [29], [32], [42], [43]... Elles concernent le bas du spectre ou la première valeur propre non nulle selon l'opérateur et le graphe considéré.

Le théorème de Cheeger dans le cas symétrique [9], [18], [32]...

$$\frac{h^2(\Omega)}{8} \leq M_\Omega \lambda_1(\Delta_\Omega^D) \leq M_\Omega h(\Omega).$$

Le théorème de Cheeger jouera aussi un rôle important dans l'étude de la version non symétrique de l'opérateur Δ_Ω^D. Mais dans le cas où l'opérateur est non symétrique le spectre peut être complexe donc on a besoin d'une autre conception liée à la partie réelle de *l'image numérique*. On établit un encadrement de l'invariant $\nu(\Delta_\Omega^D)$ qui a été introduit par l'équation (2.7).

Théorème 3.1.1 *Le bas de la partie réelle de $W(\Delta_\Omega^D)$ satisfait le contrôle suivant:*

$$\frac{h^2(\Omega)}{8} \ \leq \ M_\Omega \nu(\Delta_\Omega^D) \ \leq \ \frac{1}{2} M_\Omega h(\Omega). \tag{3.3}$$

Preuve:

Pour la borne supérieure, il est suffisant de calculer $Q_{\Delta_\Omega^D}(f)$ pour une partie fini U de Ω et $f = \dfrac{\mathbf{1}_U}{\sqrt{m(U)}}$. Il est clair que $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ et $|| \ f \ ||_m = 1$.
On constate que

$$\begin{aligned} \nu(\Delta_\Omega^D) \ \leq \nu(\Delta_U^D) \ &\leq \frac{1}{2}\big((\Delta_U^D f, f)_m + \overline{(\Delta_U^D f, f)}_m\big) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in \partial_E U} b(x,y) \frac{1}{m(U)} \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{b(\partial_E U)}{m(U)} \end{aligned}$$

Donc on a

$$\nu(\Delta_\Omega^D) \ \leq \frac{1}{2} \frac{b(\partial_E U)}{m(U)} \ .$$

Pour la borne inférieure, on considère pour $g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$,

$$\mathcal{A} = \sum_{(x,y)\in \vec{E}} b(x,y) \big| |g(x)|^2 - |g(y)|^2 \big|.$$

On applique le lemme 3.1.2 à la fonction $|g|^2$, on obtient:

$$\sum_{(x,y)\in \vec{E}} b(x,y) \big| |g(x)|^2 - |g(y)|^2 \big| \geq h(\Omega)(g,g)_m$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\big||g(x)|-|g(y)|\big|\big||g(x)|+|g(y)|\big| \\ &\leq \left(\sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\big||g(x)|+|g(y)|\big|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\big||g(x)|-|g(y)|\big|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(2\sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\big(|g(x)|^2+|g(y)|^2\big)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\big||g(x)|-|g(y)|\big|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Mais,

$$\begin{aligned}\sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\big(|g(x)|^2+|g(y)|^2\big) &= \sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)|g(x)|^2 + \sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)|g(y)|^2 \\ &= \sum_{x\in\Omega}\sum_{y\in V_x^+} b(x,y)|g(x)|^2 + \sum_{y\in\Omega}\sum_{x\in V_y^-} b(x,y)|g(y)|^2 \\ &\leq \Big(2M_\Omega\,(g,g)_m\Big)\end{aligned}$$

et grâce à l'hypothèse (β) on obtient:

$$\mathcal{A} \leq \Big(4M_\Omega(g,g)_m\Big)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)|g(x)-g(y)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$h(\Omega) \;\leq\; \Big(4M_\Omega \frac{Q_{\Delta_\Omega^D}(g)}{(g,g)_m}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

il en résulte que:

$$\frac{h^2(\Omega)}{8} \;\leq\; M_\Omega \nu(\Delta_\Omega^D). \tag{3.5}$$

□

On en déduit en particulier l'encadrement suivant.

Corollaire 3.1.1 *L'image numérique de $\tilde{\Delta}_\Omega^D$ satisfait le contrôle suivant:*

$$\frac{\tilde{h}^2(\Omega)}{8} \;\leq\; \nu(\tilde{\Delta}_\Omega^D) \;\leq\; \frac{1}{2}\tilde{h}(\Omega).$$

Preuve:

Dans le cas du Laplacien normalisé $\tilde{\Delta}_\Omega^D$, on a pour tout $x \in V$, $m(x) = \beta^+(x)$

donc $m_\Omega = M_\Omega = 1$ et grâce au théorème 3.1.1, on arrive à notre encadrement.

□

Remarque 3.1.1 *On peut vérifier aisément que*

$$\nu(\tilde{\Delta}_\Omega^D) = 0 \Leftrightarrow \tilde{h}(\Omega) = 0 \tag{3.6}$$

mais pour le cas de l'opérateur non borné Δ_Ω^D, cette dernière propriété n'est valable que si M_Ω est fini (voir l'inégalité (3.3)).

On remarque qu'un résultat intéressant est obtenu sur le spectre de l'opérateur borné $\tilde{\Delta}_\Omega^D$.

Corollaire 3.1.2

$$\frac{\tilde{h}^2(\Omega)}{8} \leq \eta(\tilde{\Delta}_\Omega^D). \tag{3.7}$$

Preuve:

On déduit notre minoration en utilisant l'inclusion $\sigma(\tilde{\Delta}_\Omega^D) \subset \overline{W(\tilde{\Delta}_\Omega^D)}$ car l'opérateur $\tilde{\Delta}_\Omega^D$ est borné et vérifie $\nu(\tilde{\Delta}_\Omega^D) \leq \eta(\tilde{\Delta}_\Omega^D)$.

□

On a par ailleurs la comparaison des deux formes quadratiques associées aux Laplaciens Δ_Ω^D et $\tilde{\Delta}_\Omega^D$. On rappelle que pour Δ_Ω^D, b et m sont indépendants mais pour $\tilde{\Delta}_\Omega^D$, on impose que $m = \beta^+$.

Lemme 3.1.3 *Soit $\Omega \subset V$ et $\lambda \in W(\Delta_\Omega^D)$, $\lambda = (\Delta_\Omega^D g, g)_m$ avec $g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ et $\|g\|_m = 1$. Alors on a*

$$m_\Omega \frac{\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D g, g)_{\beta^+}}{(g,g)_{\beta^+}} \leq 2\mathcal{R}e(\lambda) \leq M_\Omega \frac{\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D g, g)_{\beta^+}}{(g,g)_{\beta^+}}. \tag{3.8}$$

Preuve:

On remarque que pour tout $x \in \Omega$ on a:

$$m_\Omega m(x) \leq \beta^+(x) \leq M_\Omega m(x)$$

par suite on trouve:

$$m_\Omega (g,g)_m \leq (g,g)_{\beta^+} \leq M_\Omega (g,g)_m$$

ce qui implique que:

$$m_\Omega \frac{\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D g,g)_{\beta^+}}{(g,g)_{\beta^+}} \leq \frac{Q_{\Delta_\Omega^D}(g)}{2(g,g)_m} \leq M_\Omega \frac{\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D g,g)_{\beta^+}}{(g,g)_{\beta^+}} \tag{3.9}$$

car pour tout $g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, on peut facilement voir que

$$\begin{aligned}(\Delta_\Omega^D g,g)_m &= \sum_{x\in V} m(x)\overline{g(x)}\frac{1}{m(x)}\sum_{y\in V_x^+} b(x,y)\big(g(x)-g(y)\big)\\ &= \sum_{x\in V} \beta^+(x)\overline{g(x)}\frac{1}{\beta^+(x)}\sum_{y\in V_x^+} b(x,y)\big(g(x)-g(y)\big)\end{aligned}$$

et donc $(\Delta_\Omega^D g,g)_m = (\tilde{\Delta}_\Omega^D g,g)_{\beta^+}$.

□

On peut aussi estimer $\nu(\Delta_\Omega^D)$ en fonction de $\tilde{h}(\Omega)$.

Corollaire 3.1.3

$$m_\Omega \frac{\tilde{h}^2(\Omega)}{8} \;\leq\; \nu(\Delta_\Omega^D). \tag{3.10}$$

Preuve:

Grâce à l'inégalité (3.8) et au corollaire 3.1.2, on déduit notre minoration (3.10).

□

On utilise le lemme 3.1.3 pour évaluer la partie réelle de l'image numérique du Laplacien de Dirichlet en termes de la constante isopérimétrique $\tilde{h}$.

Proposition 3.1.2 *Pour tout $\Omega \subset V$ et $\lambda \in W(\Delta_\Omega^D)$ on a,*

$$m_\Omega\big(2-\sqrt{4-\tilde{h}^2(\Omega)}\big) \leq 2\mathcal{R}e(\lambda) \leq M_\Omega\big(2+\sqrt{4-\tilde{h}^2(\Omega)}\big). \tag{3.11}$$

Preuve:

On suit la même approche que celle de K. Fujiwara [29] et on applique la proposition 1 de [29] à l'opérateur $\tilde{\Delta}_\Omega^D + (\tilde{\Delta}_\Omega^D)^*$, on arrive aux inégalités suivantes

$$2-\sqrt{4-\tilde{h}^2(\Omega)} \leq \frac{2\mathcal{R}e(\tilde{\Delta}_\Omega^D g,g)_{\beta^+}}{(g,g)_{\beta^+}} \leq 2+\sqrt{4-\tilde{h}^2(\Omega)}.$$

En effet, d'après l'inégalité (3.4) dans la preuve du théorème 3.1.1 et en remplaçant m par β^+ on trouve:

$$\tilde{h}^2(\Omega)(g,g)^2_{\beta^+} \leq \Big(\sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\big||g(x)|-|g(y)|\big|^2\Big)\times \Big(\sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\big||g(x)|+|g(y)|\big|^2\Big).$$

En utilisant l'identité remarquable $|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$, on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{h}^2(\Omega)(g,g)^2_{\beta^+} &\leq \Big((\tilde{\Delta}^D_\Omega+\tilde{\Delta}^{D*}_\Omega)g,g)_{\beta^+}\Big)\times \\ &\Big(2\sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\big(|g(x)|^2+|g(y)|^2\big)-\big((\tilde{\Delta}^D_\Omega+\tilde{\Delta}^{D*}_\Omega)g,g\big)_{\beta^+}\Big)\\ &\leq \Big(\big((\tilde{\Delta}^D_\Omega+\tilde{\Delta}^{D*}_\Omega)g,g\big)_{\beta^+}\Big)\Big(4(g,g)_{\beta^+}-\big((\tilde{\Delta}^D_\Omega+\tilde{\Delta}^{D*}_\Omega)g,g\big)_{\beta^+}\Big)\\ &\leq -\Big(\big((\tilde{\Delta}^D_\Omega+\tilde{\Delta}^{D*}_\Omega)g,g\big)_{\beta^+}-2(g,g)_{\beta^+}\Big)^2+4(g,g)^2_{\beta^+}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$4-\tilde{h}^2(\Omega) \;\geq\; \Big(\frac{\big((\tilde{\Delta}^D_\Omega+\tilde{\Delta}^{D*}_\Omega)g,g\big)_{\beta^+}}{(g,g)_{\beta^+}}-2\Big)^2$$

d'où le résultat.

□

On s'intéresse également à contrôler le spectre du Laplacien normalisé $\tilde{\Delta}^D_\Omega$.

Corollaire 3.1.4 *Pour tout $\Omega\subset V$ et $\lambda\in\sigma(\tilde{\Delta}^D_\Omega)$ on a*

$$2-\sqrt{4-\tilde{h}^2(\Omega)}\leq 2\mathcal{R}e(\lambda)\leq 2+\sqrt{4-\tilde{h}^2(\Omega)}. \tag{3.12}$$

Preuve:

On démontre cette conséquence de la même manière que le corollaire 3.1.2 :

pour tout $x\in V$, $m(x)=\beta^+(x)$ ainsi $m_\Omega=M_\Omega=1$ et comme

$$\sigma(\tilde{\Delta}^D_\Omega)\subset\overline{W(\tilde{\Delta}^D_\Omega)}$$

alors on arrive à l'encadrement (3.12).

□

On peut vérifier par l'inégalité (3.12) que, dans le cas standard où le graphe est non orienté et à poids symétrique sur E, le Laplacien $\tilde{\Delta}_\Omega^D$ est auto-adjoint, on a

$$\sigma(\tilde{\Delta}_\Omega^D) \subset [0, 2].$$

Ce résultat est étudié dans [19], [32]...

Si l'on cherche à estimer le spectre de l'opérateur non symétrique $\tilde{\Delta}_\Omega^D$ en utilisant celui de sa partie réelle, ce résultat s'énonce simplement comme suit.

Corollaire 3.1.5

$$\sigma(\tilde{\Delta}_\Omega^D) \subset D\,(1, r)\,,$$

avec $r = \sqrt{1 - \frac{\tilde{h}^2(\Omega)}{4}}$.

Les inégalités de Cheeger donnent également des informations importantes sur le spectre essentiel de $\overline{\Delta}$, notamment elles servent à prouver l'absence de spectre essentiel.

3.2 Absence de spectre essentiel du Laplacien

Cette partie est consacrée à l'étude du spectre essentiel en relation avec la géométrie du graphe.

3.2.1 Préliminaires

On commene par introduire quelques définitions nécessaires pour cette section.

Définition 3.2.1 *Une filtration de graphe* $G = (V, \vec{E})$ *est une suite croissante de sous-graphes finis* $\{G_n = (V_n, \vec{E}_n);\ \ n \in \mathbb{N}\}$ *telle que* $G_n \subset G_{n+1}$ *et*

$$\bigcup_{n\geq 0} V_n = V.$$

Soit G un graphe connexe infini, $\{G_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une filtration de G. Notons

$$m_\infty = \lim_{n\to\infty}\ m_{V_n^c}$$

$$M_\infty = \lim_{n\to\infty}\ M_{V_n^c}.$$

La constante isopérimétrique à l'infini h_∞ est définie par:

$$h_\infty = \lim_{n\to\infty} h(V_n^c).$$

Remarque 3.2.1 *Ces limites existent dans* $\mathbb{R}^+\cup\{\infty\}$ *car les suites* $(m_{V_n^c})_n$, $(M_{V_n^c})_n$ *et* $(h(V_n^c))_n$ *sont croissantes.*

Dans la suite on définit une classe de graphes dont le spectre essentiel peut être vide.

Définition 3.2.2 *Soit* $\{G_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ *une filtration de* G*, le graphe* G *est dit rapidement branché si* $\lim\limits_{n\to\infty}\ \inf\limits_{x\in V_n^c} d(x) = \infty$.

Les graphes simples et rapidement branchés sont étudiés pour des Laplaciens symétriques par [41] et [29]. Mais dans le cadre de graphe pondéré, on donne cette définition.

Définition 3.2.3 *Un graphe pondéré* (G, m, b) *est dit lourd à l'infini si* $m_\infty = \infty$.

Remarque 3.2.2 *Soit* G *un graphe simple et symétrique.* G *est lourd à l'infini si et seulement si* G *est rapidement branché. En effet,*

$$\begin{aligned} m_\infty &= \lim_{n\to\infty}\ m_{V_n^c} \\ &= \lim_{n\to\infty}\ \inf_{x\in V_n^c} d^+(x) \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Ceci n'est pas vrai pour un graphe pondéré.

On donne un exemple de graphe pondéré lourd à l'infini sans être rapidement branché. On montre que la perturbation du poids d'un graphe peut jouer un rôle important dans l'étude du spectre.

Exemple 3.2.1 *On considère le digraphe arbre* q*-régulier d'origine* o*, ce graphe n'est pas rapidement branché. Il existe une filtration de graphe* $\{G_n\}$ *tel que* $V_n = \{x\in V,\ d(o,x)\le n\}$ *et* d *la distance combinatoire sur* G*. On suppose pour tous* $x\in V_{n+1}\setminus V_n$ *et* $y\in V_x^+$, $m(x) = q^n$ *et* $b(x,y) = q^{2n}$*, il est clair que* $m_\infty = \infty$*. Donc le digraphe est lourd à l'infini.*

3.2.2 Historiques et observation

On présente quelques historiques qui concernent l'absence du spectre essentiel pour un Laplacien symétrique.

Dans le cas d'une variété Riemannienne, H. Donnelly et P. Li [25] ont montré que le spectre essentiel ne dépend que de la géométrie à l'infini et qu'il est vide si la courbure est rapidement négative. Dans le cas d'un graphe symétrique simple, M. Keller [41] et K. Fujiwara [29] ont montré l'absence de spectre essentiel du Laplacien où la constante de Cheeger est non nulle et si le graphe vérifie: le degré des sommets à l'infini tend vers l'infini. Un graphe satisfaisant cette condition est un graphe rapidement branché.

On présente certains travaux qui traitent l'absence du spectre essentiel pour le Laplacien discret. Elle est étudiée sur des graphes simples et symétriques sur E et pour $\tilde{h}_\infty$ strictement positive, voir par exemple:

- K. Fujiwara [29] 1996: Le spectre essentiel d'un arbre rapidement branché est vide.
- M. Keller [41] 2010: Le spectre essentiel d'un graphe rapidement branché est vide.

La proposition suivante peut expliquer le lien entre les deux résultats de K. Fujiwara et de M. Keller.

Proposition 3.2.1 *[30] Soit A, B deux opérateurs auto-adjoints. On suppose que*

$$D(B^{\frac{1}{2}}) \subset D(A^{\frac{1}{2}}) \text{ et } 0 \leq (f, Af) \leq (f, Bf),$$

pour tout $f \in D(B^{\frac{1}{2}})$. Alors on a : $\inf \sigma_{ess}(A) \leq \inf \sigma_{ess}(B)$.
En particulier, si A et B ont le même domaine, alors $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$ si et seulement si $\sigma_{ess}(B) = \emptyset$.

Observation 3.2.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté simple, il existe un arbre couvrant $T = (V, E_1)$, voir [51] et [21]. C'est un graphe partiel de G sans cycle et connexe.*
On considère la forme quadratique Q_G associée à G donnée par:

$$Q_G f(x) = \sum_{\{x,y\} \in E} \left| f(x) - f(y) \right|^2$$

pour le domaine $D(Q_G) = \big\{f \in \ell^2(V,m),\ \ Q_G f \in \ell^2(V,m)\big\}$. *L'opérateur auto-adjoint sur* $\ell^2(V,m)$ *correspondant à cette forme sera noté par* Δ_G *et donné pour* $f \in D(\Delta_G)$ *par*

$$\Delta_G f(x) = \sum_{\substack{y\sim x \\ x,y\in G}} \big(f(x) - f(y)\big)$$

on a

$$D(\Delta_G^{\frac{1}{2}}) \subset D(\Delta_T^{\frac{1}{2}})$$

et

$$0 \leq (f, \Delta_T f) \leq (f, \Delta_G f).$$

En effet

$$\begin{aligned}(f, \Delta_T f) &= \sum_{\{x,y\}\in E_1} \big|f(x) - f(y)\big|^2 \\ &\leq \sum_{\{x,y\}\in E} \big|f(x) - f(y)\big|^2 \\ &\leq (f, \Delta_G f).\end{aligned}$$

Cela prouve que l'absence de spectre essentiel de Δ_T *implique celle de* Δ_G.

Dans la suite, on propose de généraliser ces résultats pour un graphe pondéré non symétrique.

3.2.3 Absence deu spectre essentiel de $\overline{\Delta}$ par la constante de Cheeger

Dans cette partie, on va voir l'intérêt de l'étude de l'image numérique des opérateurs non symétriques sur G dans l'étude de spectre essentiel.

On utilise le lien entre $W(\overline{\Delta})$ et $\sigma_{ess}(\overline{\Delta})$. Puis, on fournit l'inégalité de Cheeger à l'infini pour le Laplacien $\overline{\Delta}$ pour estimer son spectre essentiel.

On pourrait également évaluer le spectre essentiel en terme des inégalités de Cheeger à l'infini. On reformule le lemme suivant pour pouvoir passer de l'image numérique de Δ au spectre essentiel de $\overline{\Delta}$.

Lemme 3.2.1 *Pour chaque sous-ensemble* U *de* V, *on a*

$$\nu(\overline{\Delta}_U^D) = \nu(\Delta_U^D).$$

Preuve:

Il est facile de voir que

$$\nu(\overline{\Delta}_U^D) \leq \nu(\Delta_U^D).$$

Pour la deuxième inégalité, soit $f \in D(\overline{\Delta}_U^D) = \{f \in D(\overline{\Delta}),\ f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in U^c\}$ telle que $\| f \|_m = 1$. Ainsi, il existe une suite $(f_n)_n$ dans $\mathcal{C}_c(V) = D(\Delta)$ qui converge vers f telle que $(\Delta f_n)_n$ converge vers $\overline{\Delta} f$. Il s'ensuit que $g_n = \mathbf{1}_U f_n = 0$ sur U^c, alors $(\Delta_U^D g_n)_n$ converge vers $\overline{\Delta}_U^D f$ et

$$\nu(\Delta_U^D) \leq \mathcal{R}e(\Delta_U^D g_n, g_n)_m \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{R}e(\overline{\Delta}_U^D f, f)_m$$

on trouve

$$\nu(\Delta_U^D) \leq \nu(\overline{\Delta}_U^D).$$

□

On énonce l'un des résultats principaux de ce chapitre basé sur l'inégalité de Cheeger et sur la stabilité du spectre essentiel par une perturbation compacte de l'opérateur fermé $\overline{\Delta}$. On présente l'estimation liée au spectre essentiel par rapport à la constante h_∞.

Théorème 3.2.1 *Le spectre essentiel de $\overline{\Delta}$ satisfait:*

$$\frac{h_\infty^2}{8} \leq M_\infty \eta^{ess}(\overline{\Delta}) \tag{3.13}$$

et

$$m_\infty \frac{\tilde{h}_\infty^2}{8} \leq \eta^{ess}(\overline{\Delta}). \tag{3.14}$$

Preuve:

On a d'après le théorème 5.35 de T. Kato page 244 [40], le spectre essentiel de $\overline{\Delta}$ est stable par perturbation compacte. Soit $\{G_n\}$ une filtration de G, grâce à l'inégalité (2.8) on trouve

$$\eta^{ess}(\overline{\Delta}) = \eta^{ess}(\overline{\Delta}_{V_n^c}^D) \geq \nu(\overline{\Delta}_{V_n^c}^D).$$

D'où

$$\eta^{ess}(\overline{\Delta}) \geq \nu(\Delta_{V_n^c}^D).$$

Le résultat découle alors du théorème 3.1.1 et de l'inégalité (3.10).

□

Les deux inégalités (3.13) et (3.14) entraînent le résultat suivant.

Corollaire 3.2.1

$$\frac{\tilde{h}_\infty^2}{8} \leq \eta^{ess}(\tilde{\Delta}).$$

Le corollaire suivant est une conséquence de théorème 3.1.4. Il donne une caractérisation agréable du spectre de $\overline{\Delta}$.

Corollaire 3.2.2 *Le spectre essentiel de $\overline{\Delta}$ sur un graphe G lourd à l'infini avec $\tilde{h}_\infty > 0$, est vide.*

Preuve:

L'absence du spectre essentiel de $\overline{\Delta}$ sur un graphe *lourd à l'infini* est une conséquence de l'inégalité (3.14), alors si $m_\infty = \infty$ et $\tilde{h}_\infty > 0$, on a $\sigma_{ess}(\overline{\Delta}) = \emptyset$.

□

L'objectif de la section suivante est de vérifier que les hypothèses du théorème de comparaison de Lewis s'appliquent dans notre cas. On établit l'absence de spectre essentiel de $\overline{\Delta}$ pour des graphes plus généraux que dans [29] et [41], dans lesquels on ne fait pas l'hypothèse de stricte positivité de $\tilde{h}_\infty$. On définit un opérateur spécial auto-adjoint qui permet d'estimer le spectre essentiel du Laplacien non symétrique $\overline{\Delta}$.

3.3 Opérateur spécial auto-adjoint sur G

Dans l'étude du problème non symétrique, il est naturel d'espérer utiliser l'abondante littérature qui existe déjà pour les problèmes qui concernent les opérateurs auto-adjoints. On montre que l'opérateur symétrique $H = \Delta + \Delta'$ est essentiellement auto-adjoint sous certaines conditions étudiées par N. Torki-Hamza dans [54] pour des graphes pondérés symétriques non orientés. On présente le théorème de comparaison de R. T. Lewis [45] et on cherche à l'appliquer: en comparant les spectres essentiels de $\overline{\Delta}$ et de l'opérateur $S = \overline{\Delta} + \Delta^*$. On montre l'absence de spectre essentiel de $\overline{\Delta}$ par celle de spectre essentiel de S.

3.3.1 Caractère essentiellement auto-adjoint

Cette partie est inspirée de [54]. On étudie le caractère essentiellement auto-adjoint de l'opérateur symétrique $H = \Delta + \Delta'$ pour des graphes non symétriques. Avec l'hypothèse (β):

$$\forall x \in V,\ \beta^+(x) = \beta^-(x),$$

l'opérateur H est défini pour tout $f \in \mathcal{C}_c(V)$ par

$$Hf(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y \in V} a(x,y)\big(f(x) - f(y)\big).$$

Définition 3.3.1 *Soit (G, m, b) un graphe pondéré, on définit la distance pondérée sur (G, m, b), qu'on note $\delta_{m,b}$, par:*

$$\delta_{m,b}(x,y) = \min_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} L(\gamma)$$

où $\Gamma_{x,y}$ est l'ensemble de toutes les chaînes de x à y et $L(\gamma)$ la est longueur pondérée de la chaîne γ: $\{x_1, x_2\},\ \{x_2, x_3\}, .., \{x_n, x_{n+1}\}$; qui est donnée par

$$L(\gamma) = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\sqrt{m(x_i)m(x_{i+1})}}{\sqrt{b(x_i, x_{i+1}) + b(x_{i+1}, x_i)}}.$$

En appliquant le théorème 1.3 de [54] pour l'opérateur symétrique H, on trouve le résultat suivant pour un poids constant sur les sommets.

Théorème 3.3.1 *Soit (G, m, b) un graphe pondéré, si le poids m est constant sur V alors pour tout poids b sur $\vec{E}$, l'opérateur H est essentiellement auto-adjoint.*

Le théorème qui suit correspond au théorème 6.2 de [54].

Théorème 3.3.2 *Soit G un graphe infini à valence bornée. On suppose que la métrique associée à la distance $\delta_{m,b}$ est complète. Alors l'opérateur H est essentiellement auto-adjoint.*

3.3.2 Hypothèse (γ)

On introduit une hypothèse sur G qui permet d'étudier le caractère auto-adjoint de l'opérateur S comme extension de H.

Hypothèse (γ):

$$\exists\, M > 0,\ \forall\, x \in V,\ \sum_{y \in V_x^+ \cup V_x^-} \mid b(x,y) - b(y,x) \mid \leq M m(x)$$

où M est une constante strictement positive.

On considère l'opérateur suivant défini sur $\mathcal{C}_c(V)$ par :

$$(\Delta - \Delta')f(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y \in V_x^+ \cup V_x^-} (b(x,y) - b(y,x))\,(f(x) - f(y))\,.$$

On s'appuie sur l'hypothèse (γ) pour fournir une propriété sur $\Delta - \Delta'$. Elle apporte une information importante sur $D(\overline{\Delta} + \Delta^*)$.

Proposition 3.3.1 *Si l'hypothèse (γ) est vérifiée alors $(\Delta - \Delta')$, qui est défini sur $\mathcal{C}_c(V)$, s'étend en un unique opérateur borné sur $\ell^2(V,m)$.*

Par abus de notation on note $(\Delta - \Delta')$.

Preuve:

Soit $f, g \in \mathcal{C}_c(V)$,

$$\begin{aligned}(\Delta f, g)_m - (\Delta' f, g)_m &= \sum_{x \in V} \beta^+(x) f(x) \overline{g(x)} - \sum_{x \in V} \beta^-(x) f(x) \overline{g(x)} \\ &\quad + \sum_{x \in V} \overline{g(x)} \sum_{y \in V_x} \big(b(x,y) - b(y,x)\big) f(y) \\ &= \sum_{x \in V} \overline{g(x)} \sum_{y \in V_x} \big(b(x,y) - b(y,x)\big) f(y).\end{aligned}$$

D'après les hypothèses (β) et (γ) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve,

$$\begin{aligned}
\big|\big((\Delta-\Delta')f,g\big)_m\big| &\leq \sum_{x\in V}|\overline{g(x)}| \sum_{y\in V_x^+\cup V_x^-}\big|b(y,x)-b(x,y)\big||f(y)| \\
&\leq \sum_{x\in V}|\overline{g(x)}|\Big(\sum_{y\in V_x^+\cup V_x^-}\big|b(y,x)-b(x,y)\big|\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \Big(\sum_{y\in V_x^+\cup V_x^-}\big|b(y,x)-b(x,y)\big||f(y)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(M\sum_{x\in V}m(x)|\overline{g(x)}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{x\in V}\sum_{y\in V_x^+\cup V_x^-}\big|b(y,x)-b(x,y)\big||f(y)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(M\sum_{x\in V}m(x)|\overline{g(x)}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{y\in V}|f(y)|^2\sum_{x\in V_y^+\cup V_y^-}\big|b(y,x)-b(x,y)\big|\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(M\sum_{x\in V}m(x)|\overline{g(x)}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(M\sum_{y\in V}m(y)|f(y)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Par le théorème (BLT), l'opérateur $(\Delta-\Delta')$ s'étend d'une façon unique en un opérateur borné.

□

Remarque 3.3.1 *L'hypothèse (γ) s'interprète graphiquement par la Figure 3.3:*

$$2W(\Delta)\subset W=\{z\in\mathbb{C};\ \mathcal{R}e(z)\geq 0 \text{ et } |Im(z)|\leq M\}.$$

En effet d'après la proposition 2.2.5-1, on a $\mathcal{R}e\big((\Delta f,f)_m\big)\geq 0$ et d'après la proposition 3.3.1, on a $2Im\big((\Delta f,f)_m\big)\leq M$.

Remarque 3.3.2 *L'adjoint Δ^* a comme domaine :*

$$D(\Delta^*)=\big\{f\in\ell^2(V,m),\ x\to\frac{1}{m(x)}\sum_{y\in V}b(x,y)\big(f(x)-f(y)\big)\in\ell^2(V,m)\big\}.$$

Parsuite,

Lemme 3.3.1 *En supposant l'hypothèse (γ) on a,*

$$D(\overline{\Delta})\subset D(\Delta^*).$$

Preuve:

Comme le graphe est localement fini, alors pour tout $f\in\mathcal{C}(V)$, Δf et $\Delta' f$ ont un sens. Soit f une fonction de $D(\overline{\Delta})$, on a $\|\Delta' f\|_m<\infty$. En effet $\Delta' f=$

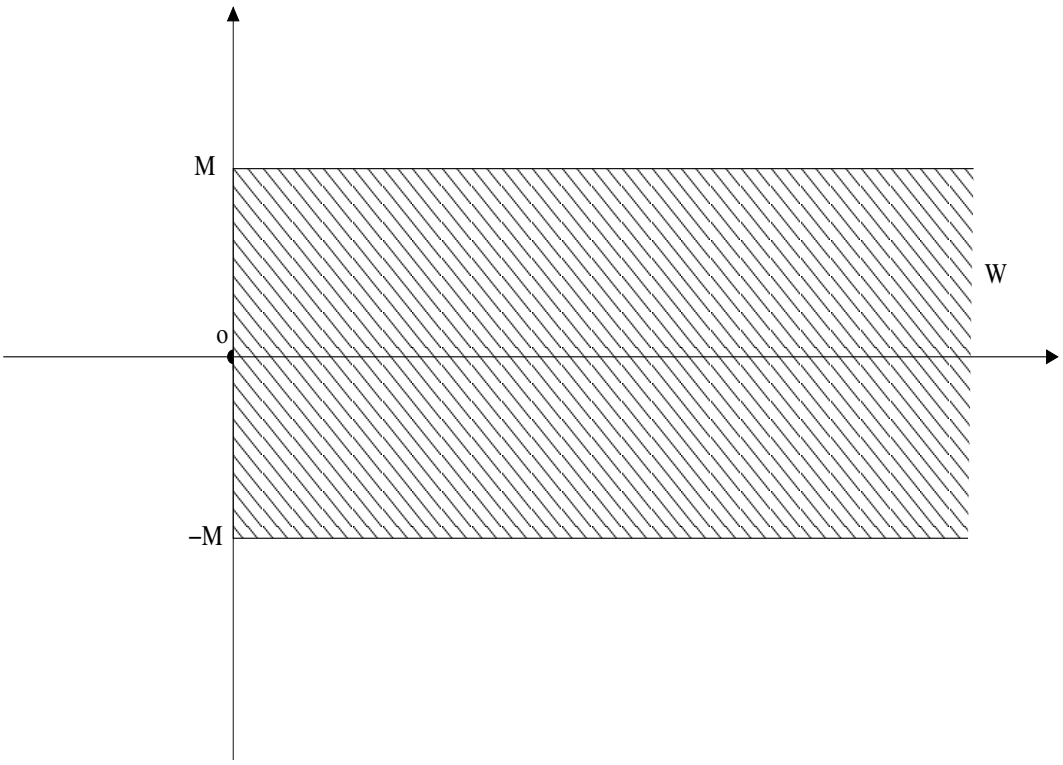


Figure 3.3: W dans le plan complexe.

$(\Delta - \Delta')f + \Delta f$ dans $\mathcal{C}_c(V)$

$$\| \Delta' f \|_m \leq \| (\Delta - \Delta')f \|_m + \| \Delta f \|_m < \infty,$$

puisque $(\Delta - \Delta')$ est borné d'après la proposition 3.3.1.

□

Définition 3.3.2 *Soit G un graphe satisfaisant l'hypothèse (γ). On définit un Laplacien spécial S comme la somme de deux Laplaciens non auto-adjoints $\overline{\Delta}$ et Δ^* par :*

$$\begin{aligned} Sf(x) &= (\overline{\Delta} + \Delta^*)f(x) \\ &= \frac{1}{m(x)} \sum_{y \in V_x^+ \cup V_x^-} \big(b(x,y) + b(y,x)\big)\big(f(x) - f(y)\big). \end{aligned}$$

pour toute $f \in D(\overline{\Delta}) \cap D(\Delta^*) = D(\overline{\Delta})$

Une des premières questions à traiter lors de l'étude spectrale d'un opérateur linéaire est celle du caractère auto-adjoint, ou à défaut du caractère essentiellement auto-adjoint.

Commentaire 3.3.1 *Soient A et B deux opérateurs sur un espace de Hilbert, si $A + B$ est à domaine dense alors $(A + B)^*$ est une extension de $A^* + B^*$. On déduit alors que l'opérateur*

S est symétrique, en effet

$$\begin{aligned} S &= \overline{\Delta} + \Delta^* \\ &= \Delta^{**} + \overline{\Delta}^* \end{aligned}$$

donc $S^* = (\Delta^* + \overline{\Delta})^*$ est une extension de S.

Proposition 3.3.2 *On suppose que le graphe G est à **valence bornée** et que la métrique associée à la distance $\delta_{m,b}$ est **complète**. Alors S est auto-adjoint.*

Preuve:

Comme G est à valence bornée et la métrique associée à la distance $\delta_{m,b}$ est complète, alors H est essentiellement auto-adjoint, voir le théorème 3.3.1. Ainsi, S est une extension de H, donc pour montrer que S est auto-adjoint, il suffit de prouver qu'il est fermé. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $D(S)$ qui converge vers f et telle que $(Sf_n)_n$ converge vers g, comme $D(S) = D(\overline{\Delta})$ d'où $f \in D(\overline{\Delta})$, et on a

$$\begin{aligned} Sf_n &= \overline{\Delta} f_n + \Delta^* f_n \\ &= 2\overline{\Delta} f_n - (\overline{\Delta} - \Delta^*) f_n. \end{aligned}$$

Or $\overline{\Delta} - \Delta^*$ est un opérateur borné comme une extension de l'opérateur borné $\Delta - \Delta'$, ce qui implique que $(\overline{\Delta} - \Delta^*) f_n$ converge vers $(\overline{\Delta} - \Delta^*) f$ et $\overline{\Delta} f_n = Sf_n + (\overline{\Delta} - \Delta^*) f_n$ ainsi il converge vers $\overline{\Delta} f$. Il s'ensuit que $(Sf_n)_n$ converge vers Sf.

□

Un autre exemple de graphe cité dans la remarque 6.1 de [54].

Exemple 3.3.1 *Prenons le digraphe $G = (V, \vec{E})$ tel que $V = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(n, n+1) \in \vec{E}$ et $(n+1, n) \in \vec{E}$ pour tous $n \in V$.*



Figure 3.4: Le graphe $\mathbb{N}$

On suppose que G est pondéré par n^2 sur $n \in V$, par $n + \frac{1}{2}$ sur $(n, n+1) \in \vec{E}$ et par $n - \frac{1}{2}$ sur $(n+1, n) \in \vec{E}$. Donc d'après la remarque 6.2 de [54], la métrique associée à la distance $\delta_{m,b}$ est complète. Et comme les hypothèse (β) et (γ) sont vérifiées, alors S est auto-adjoint.

Remarque 3.3.3 *Soit Ω un sous-ensemble de V, le domaine de S_Ω^D est:*

$$\begin{aligned} D(S_\Omega^D) &= \{f \in D(S) = D(\overline{\Delta});\ \ f \text{ à support dans } \Omega\} \\ &= D(\overline{\Delta}_\Omega^D). \end{aligned}$$

Dans le reste de ce chapitre, on suppose que le graphe G est à ***valence bornée*** et vérifie l'hypothèse (γ) et que la métrique associée à la distance $\delta_{m,b}$ est ***complète***.

La borne inférieure du spectre de l'opérateur auto-adjoint S_Ω^D peut donc s'écrire comme,

Lemme 3.3.2

$$\lambda_1(S_\Omega^D) = 2\nu_1(\Delta_\Omega^D).$$

Preuve:

Soit $\Omega \subset V$, par la même technique utilisée dans le lemme 3.2.1, le bas du spectre λ_1 de S_Ω^D admet la définition variationnelle:

$$\begin{aligned} \lambda_1(S_\Omega^D) :=& \inf_{\substack{f\in\mathcal{C}_c(\Omega)\setminus\{0\}\\ \|f\|_m=1}} \left((\Delta_\Omega^D + \Delta_\Omega'^D)f, f\right)_m \\ =& 2 \inf_{\substack{f\in\mathcal{C}_c(\Omega)\setminus\{0\}\\ \|f\|_m=1}} \mathcal{R}e(\Delta_\Omega^D f, f)_m = 2\nu(\Delta_\Omega^D). \end{aligned}$$

□

3.3.3 Absence de spectre essentiel et théorème de comparaison

Dans cette partie, on étudie l'absence de spectre essentiel pour $\overline{\Delta}$ sur des graphes non nécessairement lourds à l'infini. On applique le théorème de comparaison et la convergence de spectre de $S_{V_n^c}^D$, pour établir des propriétés sur les spectres essentiels de S et $\overline{\Delta}$.

Soit A un Laplacien auto-adjoint. On note par $\lambda_1^{ess}(A)$ le bas du spectre essentiel de A. Il admet la caractérisation suivante qui est donnée, pour le Laplacien agissant sur une variété non compacte complète M (voir [14]), par :

$$\lambda_1^{ess}(A) = \lim_{K\to M} \lambda_1(A_{K^c}^D).$$

On rappelle une proposition introduite par M. Keller [41] qui utilise des techniques tout à fait

standards et peut être d'intérêt indépendant. En outre, M. Keller donne une caractérisation des bornes du spectre essentiel.

Proposition 3.3.3 *Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, B est auto-adjoint et borné inférieurement de domaine $D(B)$ tel que $\mathcal{C}_c(V) \subseteq D(B) \subseteq \ell^2(V, m)$ alors:*

$$\inf \sigma_{ess}(B) = \lim_K \inf_{\substack{f\in\mathcal{C}_c(V)\\ suppf\subseteq K^c,\ Kfini}} \frac{(Bf,f)_m}{(f,f)_m} = \lim_K \inf \sigma(B_K)$$

$$\sup \sigma_{ess}(B) \leq \lim_K \sup_{\substack{f\in\mathcal{C}_c(V)\\ suppf\subseteq K^c,\ Kfini}} \frac{(Bf,f)_m}{(f,f)_m} = \lim_K \sup \sigma(B_K)$$

où B_K est la restriction de B sur K^c avec condition de Dirichlet.

On a à présent tous les outils pour fournir le théorème de Cheeger associé à l'opérateur auto-adjoint S^D_Ω.

Proposition 3.3.4 *Soit Ω un sous-ensemble de V. Alors*

$$\frac{h^2(\Omega)}{4} \leq M_\Omega \lambda_1(S^D_\Omega). \tag{3.15}$$

Preuve:

C'est une simple déduction du lemme 3.3.2,

$$\lambda_1(S^D_\Omega) = 2\nu(\Delta^D_\Omega).$$

Ensuite, on utilise l'inégalité (3.5) pour conclure.

□

Afin d'étudier le spectre essentiel de S et la dépendance de la géométrie à l'infini, on commence par le lemme fondamental suivant ;

Lemme 3.3.3 *Soit $\{G_n\}$ une filtration de G, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \big(\lim_{k\to\infty} \lambda_1(S^D_{G_k\setminus G_n}) \big) = \lambda_1^{ess}(S).$$

Preuve:

On note par $l = \lim_{n\to\infty} \big(\lim_{k\to\infty} \lambda_1(S^D_{G_k\setminus G_n}) \big)$, on a pour $(G_k \setminus G_n)_{k\geq n+1}$ est une suite de sous-graphes finis dont la réunion est égale à G^c_n. Ces limites existent parce

que les familles sont monotones. Ainsi, d'après le théorème 2.3.6 de [1] on a :

$$\lambda_1(S^D_{G_n^c}) = \lim_{k\to\infty} \left(\lambda_1(S^D_{G_k\setminus G_n})\right)$$

donc par application de la proposition 3.3.3, on obtient

$$l = \lambda_1^{ess}(S).$$

□

Le théorème suivant est utile pour établir l'absence de spectre essentiel de S dans des cas plus généraux par exemple sur des graphes non nécessairement lourds à l'infini, aussi on inclut le cas où $\tilde{h}_\infty = 0$.

Théorème 3.3.3 *Soit G_n une filtration de G, s'il existe une suite de poids c_n tels que pour tous $k \geq n+1$*

$$\frac{h^2(V_k \setminus V_n)}{4M_{V_k\setminus V_n}} \geq c_n \text{ et } \lim_{n\to\infty} c_n = \infty \tag{3.16}$$

alors $\sigma_{ess}(S)$ est vide.

Preuve:

Par le théorème 3.1.1 on a pour tous $k \geq n+1$:

$$\lambda_1(S^D_{V_k\setminus V_n}) \geq c_n$$

on déduit que si $k \to \infty$, on a:

$$\lambda_1(S^D_{V_n^c}) \geq c_n$$

ainsi d'après la proposition 3.3.3

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1(S^D_{V_n^c}) = \lambda_1^{ess}(S)$$

d'où on obtient le résultat.

□

Dans la suite, on explique de quelle manière la forme quadratique associée à un opérateur auto-adjoint peut être reliée à l'étude des spectres des opérateurs non symétriques. Le but est

de montrer la discontinuité du spectre de l'opérateur $\overline{\Delta}$ par celle de l'opérateur S.

Le spectre essentiel dans le cas non auto-adjoint a plusieurs définitions, voir le chapitre annexe. La définition du spectre essentiel utilisée par R. T. Lewis dans [45] est donnée en termes de suites singulières Cette définition qui est aussi la plus largement utilisée dans les problèmes des opérateurs différentiels, possède des propriétés qui ne sont pas partagées par d'autres définitions de spectres essentiels.
On rappelle maintenant la définition considérée par R. T. Lewis dans *le théorème de comparaison*: Le spectre essentiel d'un opérateur fermé, densément défini T, est l'ensemble de tous les nombres complexes λ pour lesquelles l'opérateur $T - \lambda I$ admet une suite singulière. Cette définition est équivalente à celle qui est donnée dans la définition 2.2.9 (voir théorème 1.6 [26] et le chapitre annexe).

Théorème de comparaison de R. T. Lewis [45]:
Soit T un opérateur linéaire fermé dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ à domaine dense $D(T)$. Soit A un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{H}$ qui est borné inférieurement avec $D(T) \subset D(A)$. Si

$$\mathcal{R}e(Tu, u) \geq (Au, u), \quad u \in D(T)$$

alors

$$\sigma_{ess}(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C};\ \ \mathcal{R}e(\lambda) \geq \inf \sigma_{ess}(A)\}.$$

Si $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$ alors $\sigma_{ess}(T) = \emptyset$.

On va tout de suite voir une application importante de ce théorème au calcul du spectre du Laplacien.

Corollaire 3.3.1 *Dans notre situation,*

$$\sigma_{ess}(\overline{\Delta}) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C};\ \ 2\mathcal{R}e(\lambda) \geq \inf \sigma_{ess}(S)\}$$

et si $\sigma_{ess}(S) = \emptyset$ *alors* $\sigma_{ess}(\overline{\Delta}) = \emptyset$.

Le théorème de comparaison donne également:

Corollaire 3.3.2 *Soit G un graphe qui satisfait les conditions (3.16).*
Alors $\sigma_{ess}(\overline{\Delta}) = \emptyset$.

Preuve:

Par le théorème 3.3.3, $\sigma_{ess}(S) = \emptyset$, ce qui implique, d'après le corollaire précédent l'absence de spectre essentiel pour $\overline{\Delta}$.

□

3.3.4 Exemple

On propose un exemple de graphe dont le spectre de S est totalement discret et $\tilde{h}_\infty = 0$. Il permet de mettre en évidence l'absence de spectre essentiel sur un graphe qui n'est pas rapidement branché.

Exemple 3.3.2 *On considère le digraphe $\mathbb{Z}$:*



Figure 3.5: Le digraphe $\mathbb{Z}$

Soit $\{G_n\} = \{(V_n, \vec{E}_n)\}$ une filtration de graphe $\mathbb{Z}$, où $V_n = \{-n, ..., -1, 0, 1, ..., n\}$ On suppose que $\mathbb{Z}$ est pondéré comme suit, $m(l) = 1$, $b(l, l+1) = \dfrac{(|l|^3+1)}{2} + \dfrac{1}{4}$ et $b(l+1, l) = \dfrac{(|l|^3+1)}{2} - \dfrac{1}{4}$, pour tous $l = -n, .., -1, 0, 1, .., n$. Comme m est constante alors d'après le théorème 3.3.1, H est essentiellement auto-adjoint. De plus l'hypothèse (γ) est satisfaite et donc S est auto-adjoint. On a

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(V_n^c) &\leq \frac{b(\partial_E(V_{2n} \setminus V_n))}{\beta^+(V_{2n} \setminus V_n)} \\
&\leq \frac{(|n|+1)^3 + (|2n|+1)^3}{\sum_{t=n}^{2n} \frac{1}{2}\left((|t|+1)^3\right)} \\
&\leq 2\frac{(|n|+1)^3 + (|2n|+1)^3}{(n+1)\left((|n|+1)^3\right)}
\end{aligned}$$

donc

$$\tilde{h}_\infty = \lim_{n\to\infty} \tilde{h}(V_n^c) \leq \lim_{n\to\infty} 2\frac{2(|2n|+1)^3}{(n+1)\left((|n|+1)^3\right)} = 0.$$

Pourtant, $\sigma_{ess}(S) = \emptyset$ sur $\mathbb{Z}$, en effet:
Soit f une fonction à support fini, on a

$$\begin{aligned}\|f\|_m^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)|^2 \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (k+1-k)|f(k)|^2 \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (k+1)|f(k)|^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}} k|f(k)|^2 \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} k(|f(k-1)|^2 - |f(k)|^2) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} k(|f(k-1)| - |f(k)|)(|f(k-1)| + |f(k)|).\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}\|f\|_m^2 &\leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|f(k-1)-f(k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (|f(k-1)|+|f(k)|)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|f(k-1)-f(k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(4\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{4}\|f\|_m^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|f(k-1)-f(k)|^2.$$

Maintenant, si f est à support dans V_n^c, $|k| \geq n$

$$\frac{1}{4}\|f\|_m^2 \leq \sum_{|k|\geq n} \frac{(|k|^3+1)}{n}|f(k-1)-f(k)|^2.$$

Alors pour tout f est non nulle et à support fini dans V_n^c, on a

$$\frac{n}{4} \leq \frac{(S_{V_n^c}^D f, f)_m}{(f,f)_m} = \frac{\sum_{|k|\geq n} (|k|^3+1)|f(k-1)-f(k)|^2}{(f,f)}.$$

Ceci implique que si $n \to \infty$, $\lambda_1(S_{V_n^c}^D) \to \infty$. D'où d'après la proposition 3.3.3, on déduit que $\sigma_{ess}(S) = \emptyset$ et donc l'absence de spectre essentiel de $\overline{\Delta}$.

4

Monotonicité et comparaison des valeurs propres

Depuis le papier pionnier de M. Fiedler [27] dans les années 70, une abondante littérature a été consacrée à l'analyse de la monotonicité des valeurs propres par rapport au graphe perturbé. Le chapitre présenté ici a pour thème central l'étude des variations des valeurs propres sur un graphe orienté, pondéré et **fini**. On étudie comment certaines perturbations de ce graphe peut affecter les valeurs propres. L'approche adoptée est de prendre des techniques bien connues dans l'analyse matricielle et de chercher à les généraliser pour le Laplacien de graphe. Dans ce chapitre, on va se concentrer sur l'opérateur auto-adjoint S_G où G est supposé fini, connexe et vérifiant l'Hypothèse (β) introduite dans la sous-section 2.2.4.

On décrit brièvement le contenu de ce chapitre qui est inspiré de [8]. On va commencer par une courte section de préliminaires consacrée à certaines propriétés de base pour l'étude du spectre de l'opérateur S_G. Une deuxième partie concerne l'étude de monotonicité des valeurs propres du graphe par rapport à l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes comme le théorème d'entrelacement des valeurs propres. Dans la troisième partie on s'intéresse à la comparaison des valeurs propres du Laplacien et du Laplacien de Dirichlet ce qui donne des bornes supérieures aux parties réelles des valeurs propres sur G.

Dans notre discussion et pour l'étude du spectre d'un opérateur auto-adjoint, il est naturel d'introduire les différents principes variationnels.

4.1 Principes variationnels et Propriétés

Soit A un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension n. Les valeurs propres de A peuvent se caractériser par trois principes variationnels fondamentaux : le principe de Rayleigh, le principe de min-max Poincaré-Ritz et le principe de Courant-Fischer-Weyl appliqué au quotient de Rayleigh $\mathcal{R}(f) = \dfrac{(Af, f)}{(f, f)}$, $f \in \mathcal{H}$, $f \neq 0$, voir [36].
On arrange les valeurs propres de A comme suit

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$$

en comptant leur ordre de multiplicité.

Dans ce cas le principe de Rayleigh indique:

$$\lambda_k = \min_{\substack{f\neq 0,\ (f,f_i)=0 \\ i=1,\dots,k-1}} \mathcal{R}(f) \tag{4.1}$$

où $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de fonctions propres relatives aux valeurs propres λ_i et le minimum est atteint en f_k.

Le principe de Poincaré-Ritz établit que:

$$\lambda_k = \min_{\substack{\dim \Omega = k \\ \Omega \subset \mathcal{H}}} \ \max_{f\in\Omega,\ f\neq 0} \mathcal{R}(f). \tag{4.2}$$

Le troixième principe variationnel, connu comme principe de Courant-Fischer-Weyl, peut être donné sous la forme:

$$\lambda_k = \max_{\substack{\dim \Omega = k-1 \\ \Omega \subset \mathcal{H}}} \ \min_{\substack{f\in\mathcal{H},\ f\perp\Omega \\ f\neq 0}} \mathcal{R}(f). \tag{4.3}$$

Dans ce chapitre on suppose que G est un graphe fini et on s'intéresse à l'étude des opérateurs S et $\tilde{S}$ sur les espaces fonctionnels suivants:

- $\mathcal{C}_m(V) = \{f : V \to \mathbb{C}\}$

  muni du produit scalaire suivant défini par

  $$(f,g)_m = \sum_{x\in V} m(x) f(x)\overline{g(x)}$$

  de norme associée, donnée par :

  $$\|f\|_m = \left(\sum_{x\in V} m(x)|f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

- $\mathcal{C}_m(U) = \{f \in \mathcal{C}_m(V);$ à support dans U$\}$, pour $U \subset V$.

Définition 4.1.1 ***Adjoint d'un opérateur****: L'opérateur adjoint Δ^* de Δ est défini par:*

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{C}_m(V),\ (\Delta\psi, \phi) = (\psi, \Delta^*\phi).$$

Comme le graphe est fini, l'adjoint de Δ a l'expression suivante.

Proposition 4.1.1 *Soit f une fonction de $\mathcal{C}_m(V)$, on a*

$$\begin{aligned}\Delta^* f(x) &= \Delta' f(x)\\ &= \frac{1}{m(x)} \sum_{y\in V_x^-} b(y,x)\big(f(x) - f(y)\big).\end{aligned}$$

Notation 4.1.1 *Ici on introduit quelques notations pour ce chapitre:*

- *Δ_G est le Laplacien défini sur le graphe pondéré G.*
- *$S_G = \Delta_G + \Delta_G^*$ est le Laplacien symétrique spécial sur G.*
- *G^s désigne le graphe simple G (à poids simples).*

Dans ce cadre, la formule de Green est donnée par la proposition suivante.

Proposition 4.1.2 *Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}_m(V)$. Alors*

$$(\Delta_G f, g)_m + (\Delta_G^* f, g)_m = \sum_{(x,y)\in \vec{E}} b(x,y)\big(f(x) - f(y)\big)\big(\overline{g(x) - g(y)}\big).$$

Preuve:

On a simplement pour $f, g \in \mathcal{C}_m(V)$

$$\begin{aligned}(\Delta_G^* f, g)_m &= (f, \Delta_G g)_m \\ &= \overline{(\Delta_G g, f)}_m.\end{aligned}$$

Donc d'après le lemme 2.2.2 on arrive au résultat.

□

Proposition 4.1.3 *1. $S_G = \Delta_G + \Delta_G^*$ est un opérateur auto-adjoint.*

2. S_G est positif.

Preuve:

1. Comme Δ et Δ^* sont bornés , on a

$$\begin{aligned}S_G^* &= (\Delta_G + \Delta_G^*)^* \\ &= \Delta_G^* + \Delta_G^{**} \\ &= \Delta_G^* + \Delta_G.\end{aligned}$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}_m(V)$, on a

$$\begin{aligned}(S_G f, f)_m =& (\Delta_G f, f)_m + (\Delta_G^* f, f)_m \\ =& \sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\big|f(x) - f(y)\big|^2 \\ \geq& 0.\end{aligned}$$

□

Le résultat suivant établit le lien entre les spectres de S_G et Δ_G, de même pour $\tilde{S}_G$ et $\tilde{\Delta}_G$. On suppose que les valeurs propres, répétées suivant leur multiplicité, de Δ_G sont ordonnées respectivement comme suit:

$$\mathcal{R}e(\lambda_1(\Delta_G)) \leq \mathcal{R}e(\lambda_2(\Delta_G)) \leq ... \leq \mathcal{R}e(\lambda_n(\Delta_G)).$$

On retrouve ici un résultat optimal conséquence directe du lemme 2.2.6

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{R}e(\lambda_k(\Delta_G)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\mathcal{R}e(\Delta_G)).$$

En exploitant le principe variationnel (4.1), on a l'inégalité suivante concernant la n^{ime} valeur propre de S_G.

Lemme 4.1.1

$$2\mathcal{R}e(\lambda_n(\Delta_G)) \leq \lambda_n(S_G). \tag{4.4}$$

Preuve:

Soit f est une fonction propre associée à $\lambda_n(\Delta_G)$, on a

$$\begin{aligned}\lambda_n(S_G) \geq & \frac{(S_G f, f)_m}{(f,f)_m} \\ \geq & \frac{(\Delta_G f, f)_m + \overline{(\Delta_G f, f)_m}}{(f,f)_m} \\ = & 2\mathcal{R}e(\lambda_n(\Delta_G)).\end{aligned}$$

□

Remarque 4.1.1 *1. L'inégalité (4.4) peut être stricte. On considère le graphe pondéré donné par la Figure 4.1 tel que:*

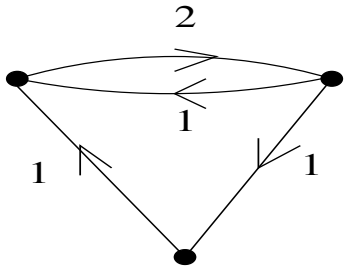


Figure 4.1: Graphe orienté G.

$b(x,y) = 2,\ b(y,x) = 1$
$b(x,z) = 0,\ b(z,x) = 1$
$b(y,z) = 1,\ b(z,y) = 0.$

Les matrices associées aux opérateurs S_G et Δ_G sont données respectivement par:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les spectres de S_G et Δ_G sont:

$$\sigma(S_G) = \{0, 3, 7\} \text{ et } \sigma(\Delta_G) = \{0, 2, 3\}.$$

2. *On peut avoir l'égalité dand 4.1.1 et même l'égalité ensembliste:*

$$\sigma(S_G) = 2\mathcal{R}e\big(\sigma(\Delta_G)\big).$$

On considère le graphe cyclique simple C_3, voir la Figure 4.2.

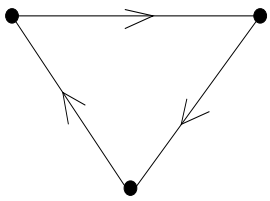


Figure 4.2: Graphe cyclique

Les matrices associées aux Laplaciens Δ_{C_3} et S_{C_3} sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a ,

$$\sigma(\Delta_{C_3}) = \left\{0,\ \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

et

$$\sigma(S_{C_3}) = \{0, 3, 3\}.$$

Il n'y a pas de méthodes générales pour calculer le spectre d'un opérateur non symétrique, le calcul est souvent difficile.

On se propose de calculer le spectre du Laplacien Δ_{C_n} sur le graphe cyclique orienté $C_n = (V_n, \vec{E}_n)$, avec $V_n = \{0, 1, .., n-1\}$ et $\vec{E}_n = \{(0,1),\ (1,2) \in \vec{E}, .., (n-2, n-1),\ (n-1, 0)\}$.

En supposant que le graphe C_n est simple, son Laplacien Δ_{C_n} est donné par

$$\begin{aligned}\Delta_{C_n} f(k) &= \sum_{l \in V_k^+} \big(f(k) - f(l)\big) \\ &= f(k) - \sum_{l \in V_k^+} f(l) \\ &= (I - P_n) f(k).\end{aligned}$$

où l'opérateur P_n est défini par

$$P_n f(k) = \sum_{l \in V_k^+} f(l).$$

La proposition suivante donne le spectre du Laplacien non symétrique sur le graphe cyclique Δ_{C_n}:

Proposition 4.1.4 *Les valeurs propres de Δ_{C_n} sont:*

$$\lambda_l = 1 - e^{i\frac{2l\pi}{n}} \quad \textit{pour tout } l = 0, .., n-1 \textit{ (simple)}.$$

Preuve:

Pour calculer les valeurs propres de $\Delta_{C_n} = I - P_n$, il suffit de déterminer celles de P_n. Soit $\alpha \in \sigma(P_n)$ et $f \in \mathcal{C}_m(V_n)$ une fonction propre associée à α.

$$P_n f(k) = \sum_{l \in V_k^+} f(l) = f(k+1), \text{ pour } k = 0, .., n-1,$$

ceci implique que $f(k) = \alpha^k f(0)$ mais $f(n) = f(0)$. Donc $\alpha^n f(0) = f(0)$. Mais $f(0)$ est non nulle car sinon on aurait $f(k) = 0$ pour tout k ce qui est impossible. Par suite $\alpha^n = 1$ et le spectre est formé par les racines n^{ime} de l'unité. On obtient n valeurs propres distinctes $\alpha = e^{\frac{2il\pi}{n}}$, $0 \leq l \leq n-1$, donc la famille de fonctions propres correspondantes est complète.

□

Commentaire 4.1.1 *Soit $C_n = (V_n, \vec{E}_n)$ le graphe cyclique orienté non symétrique et (V_n, E_n) le graphe cyclique non orienté associé à C_n. On introduit sur C_n l'opérateur symétrique,*

$\frac{1}{2}(P_n + P_n^*)$ *défini pour* $f \in \mathcal{C}_m(V_n)$ *par*

$$\frac{1}{2}(P_n + P_n^*)f(k) = \frac{1}{2}\big(f(k+1) + f(k-1)\big).$$

Cet opérateur a le même spectre que l'opérateur P_n *sur* (V_n, E_n)*, alors d'après le lemme 2.7 de [32] on établit la proposition suivante.*

Proposition 4.1.5 *Les valeurs propres de* $\frac{1}{2}(P_n + P_n^*)$ *sur* C_n *sont comme suit:*

1. *Si* n *est impair, alors les valeurs propres sont* $\lambda = 1$ *(de multiplicité 1) et* $\lambda = \cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)$ *pour tout* $l = 1, .., \frac{n-1}{2}$ *(de multiplicité 2) .*
2. *Si* n *est pair, alors les valeurs propres sont* $\lambda = \pm 1$ *(de multiplicité 1) et* $\lambda = \cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)$ *pour tout* $l = 1, .., \frac{n}{2} - 1$ *(de multiplicité 2) .*

On détermine donc le lien entre le spectre de S_{C_n} et le spectre de Δ_{C_n}.

Corollaire 4.1.1

$$\sigma(S_{C_n}) = 2\mathcal{R}e\big(\sigma(\Delta_{C_n})\big).$$

Preuve:

On remarque que les valeurs propres de $\mathcal{R}e(P_n) = \frac{1}{2}(P_n + P_n^*)$ coïncident avec la partie réelle des valeurs propres de P_n et donc ça reste vrai pour Δ_{C_n}.

□

Dans certains cas, on ne sait pas calculer le spectre du Laplacien. On essaye alors de le décrire d'une manière qualitative. On verra en particulier le cas des graphes bipartis.

Définition 4.1.2 *Un graphe orienté* $(V, \vec{E})$ *est appelé biparti si* V *admet une partition en deux sous-ensembles disjoints non vides* V_1 *et* V_2 *telle que* $(x, y) \notin \vec{E}$ *pour tous* x *et* y *appartenant au même ensemble* V_j*,* $j = 1, 2$*.*

Exemple 4.1.1 *Le graphe* $\mathbb{Z}$ *est biparti avec la partition suivante:*

- V_1 *est l'ensemble de tous les entiers impairs.*
- V_2 *est l'ensemble de tous les entiers pairs.*

On utilise la formule de Green pour établir certaines généralités sur le spectre. On note par

$$M = \sup_{x \in V} \frac{\beta^+(x)}{m(x)}.$$

Proposition 4.1.6 *1.* 0 *est une valeur propre simple de* S_G.

2. *Le spectre de* S_G *est contenu dans* $[0, 4M]$.
3. *Les parties réelles de toutes les valeurs propres de* Δ_G *appartiennent à* $[0, 2M]$.
4. *Si* 2 *est une valeur propre de* $\tilde{\Delta}_G$ *alors* G *est biparti.*

Preuve:

1. Comme dans le cas du graphe non orienté [32], on a pour tout $f \in \mathcal{C}_m(V)$,

$$(S_G f, f)_m = \sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)|f(x) - f(y)|^2.$$

Il est clair que la fonction constante est une fonction propre associée à la valeur propre 0. Réciproquement, on suppose que f est une fonction propre de 0. Par la connexité de G, f est constante, ce qui implique que 0 est une valeur propre simple. C'est pareil pour $\tilde{S}_G$.

2. Il suffit de prouver que S_G est borné par $4M$ car S_G est un opérateur positif. En effet, soit $f \in \mathcal{C}_m(V)$, on a

$$\begin{aligned}
(S_G f, f)_m =& \sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)|f(x) - f(y)|^2 \\
\leq& 2 \sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\big||f(x)|^2 + |f(y)|^2\big| \\
\leq& 2 \sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)|f(x)|^2 + 2 \sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)|f(y)|^2 \\
\leq& 2 \sum_{x\in V} \sum_{y\in V_x^+} b(x,y)|f(x)|^2 + 2 \sum_{y\in V} \sum_{x\in V_y^-} b(x,y)|f(y)|^2 \\
\leq& 2 \sum_{x\in V} |f(x)|^2 \beta^+(x) + 2 \sum_{y\in V} |f(y)|^2 \beta^-(y)
\end{aligned}$$

et grâce à l'hypothèse (β), on arrive à

$$\begin{aligned}
(S_G f, f)_m \leq& 4 \sum_{x\in V} |f(x)|^2 \beta^+(x) \\
\leq& 4M(f,f)_m.
\end{aligned}$$

3. On déduit directement le résultat grâce au lemme 4.1.1.

4. Soit f est une fonction propre associée à la valeur propre 2, on a $(\tilde{\Delta}_G f, f)_{\beta^+} = 2(f,f)_{\beta^+}$ et $\overline{(\tilde{\Delta}_G f, f)_{\beta^+}} = 2(f,f)_{\beta^+}$, et donc

$$(\tilde{\Delta}_G f, f)_{\beta^+} + \overline{(\tilde{\Delta}_G f, f)_{\beta^+}} = 2(f,f)_{\beta^+} + 2(f,f)_{\beta^+}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)\big|f(x)-f(y)\big|^2 =& 2(f,f)_{\beta^+} + 2(f,f)_{\beta^+} \\
=& 2\Big(\sum_{x\in V}\beta^+(x)|f(x)|^2 + \sum_{x\in V}\beta^+(x)|f(x)|^2\Big) \\
=& 2\Big(\sum_{x\in V}\beta^-(x)|f(x)|^2 + \sum_{x\in V}\beta^+(x)|f(x)|^2\Big) \\
=& 2\Big(\sum_{x\in V}\sum_{y\in V_x^-} b(y,x)|f(x)|^2 \\
&+ \sum_{x\in V}\sum_{y\in V_x^+} b(x,y)|f(x)|^2\Big) \\
=& 2\Big(\sum_{(y,x)\in\vec{E}} b(y,x)|f(x)|^2 + \sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)|f(x)|^2\Big) \\
=& 2\Big(\sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)|f(y)|^2 + \sum_{(x,y)\in\vec{E}} b(x,y)|f(x)|^2\Big).
\end{aligned}$$

D'où pour tout x, y, avec $(x,y)\in\vec{E}$

$$\big|f(x)-f(y)\big|^2 = 2\big(|f(x)|^2 + |f(y)|^2\big)$$

qui est équivalent à

$$f(x) + f(y) = 0.$$

Si pour certains x_0, $f(x_0) = 0$ alors $f(y) = 0$ pour tout $y \in V_{x_0}^+$, donc d'après la connexité du graphe G, on a $f \equiv 0$ qui est absurde car f est une fonction propre. Alors V s'écrit comme la réunion disjointe de deux ensembles non vides:

$$V_1 = \{x \in V;\ f(x) < 0\} \text{ et } V_2 = \{x \in V;\ f(x) > 0\}.$$

Cette partition montre que si un sommet x est dans V_1 alors ses voisins $y \in V_x^+$ sont dans V_2 et vice versa en permutant 1 et 2, ainsi G est biparti.

□

4.2 Monotonicité des valeurs propres

Le but de cette partie est de donner certains résultats de monotonicité des valeurs propres du Laplacien auto-adjoint S_G sur un graphe fini et connexe.

Remarque 4.2.1 *Une confusion entre la notion de sous-graphe et celle de partie de graphe peut créer une interprétation fausse sur la monotonicité des valeurs propres, voir définitions 2.1.8, 2.1.9 et 2.1.10.*

4.2.1 Monotonicité relative aux sommets

On étudie la monotonicité des valeurs propres sous la variation de l'ensemble des sommets.

Par le principe de Courant-Fischer-Weyl, on établit le théorème suivant.

Théorème 4.2.1 *Soit $H = (V_H, \vec{E}_H)$ un sous-graphe connexe d'un graphe $G = (V_G, \vec{E}_G)$, on note $\sharp V_G = n$. Alors pour tout $1 \leq k \leq \sharp V_H = r$,*

$$\lambda_k(S_H) \leq \lambda_{n-r+k}(S_G).$$

Preuve:

Soient $f_1,\ f_2, ..., f_r$ les r fonctions propres associées à $\lambda_1(S_H),\ \lambda_2(S_H), ..., \lambda_r(S_H)$. Soit $1 \leq k \leq r$, on considère $F = \{f_1,\ f_2, ..., f_{k-1}, \delta_1, .., \delta_{n-r}\}$, où $\delta_1, .., \delta_{n-r}$ désignent les masses de Dirac sur G sur les sommets de $V_G \setminus V_H$. Il est clair que $\dim F = k+n-r-1$. En utilisant le principe variationnel de Courant-Fischer-Weyl (4.3), on obtient:

$$\lambda_{n-r+k}(S_G) \geq \min_{\varphi \in F^{\perp} \setminus \{0\}} \frac{(S_G\varphi, \varphi)_m}{(\varphi, \varphi)_m}.$$

Donc $\exists \varphi_k \in F^{\perp}$ à support dans H tel que

$$\begin{aligned}\lambda_{n-r+k}(S_G)(\varphi_k,\varphi_k)_m &\geq (S_G\varphi_k,\varphi_k)_m \\ &= (S_H\varphi_k,\varphi_k)_m \\ &\geq \lambda_k(S_H)(\varphi_k,\varphi_k)_m.\end{aligned}$$

□

Pour étudier les comportements des valeurs propres par rapport à certaines perturbations du graphe G, on décrit une catégorie spéciale de graphe appelée graphe *type-fleur* dans la définition suivante.

Définition 4.2.1 *Soit $G = (V_G, \vec{E}_G)$ un graphe connexe et $H = (V_H, \vec{E}_H)$ un sous-graphe de G. G est dit H-type-fleur par rapport au sous-graphe H s'il existe une famille $(H_i)_{i\in I}$ de sous-graphes de G tels que:*

1. $V_G = V_H \cup (\sqcup_i V^{\circ}_{H_i})$
2. $\forall\, i,j \in I,\quad x \in V^{\circ}_{H_i},\ y \in V^{\circ}_{H_j},\ i \neq j \ \Rightarrow\ x \nsim y.$
3. $\forall\, i \in I,\ \exists\, x_i \in V_G,\ V_H \cap V_{H_i} = \{x_i\}.$

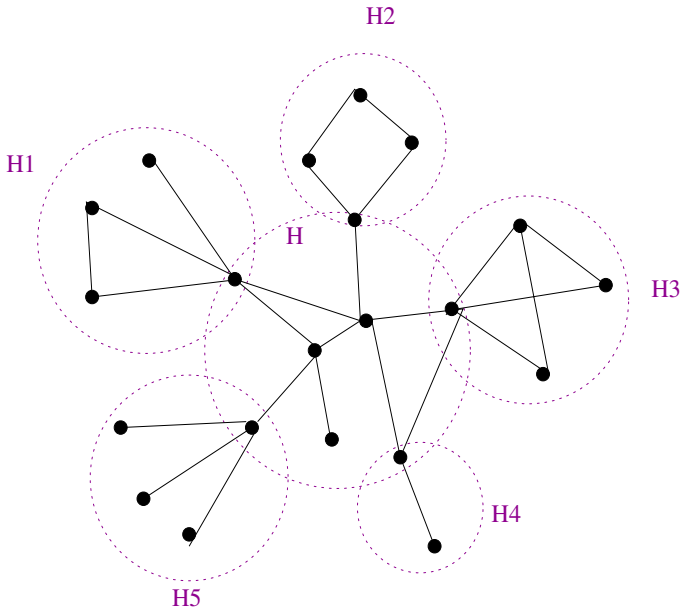


Figure 4.3: Graphe H-type-fleur

Cette notion des graphes type-fleurs va nous permettre d'énoncer une propriété de monotonicité des valeurs propres sous une perturbation donnée de graphe.

Théorème 4.2.2 *Soit $G = (V_G, \vec{E}_G)$ un graphe H-type-fleur, on a alors pour tout $1 \leq k \leq r = \sharp V_H$,*

$$\lambda_k(S_H) \geq \lambda_k(S_G). \tag{4.5}$$

Preuve:

On utilise le principe de minimum (4.1). Soit $f_1,\ f_2, ..., f_{k-1}$ des fonctions propres de $\mathcal{C}_m(V_G)$ associées aux valeurs propres $\lambda_1(S_G),\ \lambda_2(S_G), ...,\ \lambda_{k-1}(S_G)$ et $g_1, g_2, ..., g_k$ des fonctions propres associées aux valeurs propres $\lambda_1(S_H), \lambda_2(S_H), ...\lambda_k(S_H)$
On définit, pour $j = 1, .., k$, la fonction ϕ_j sur V_G par:

$$\phi_j(x) = \begin{cases} g_j(x) & \text{si } x \in V_H \\ g_j(x_1) & \text{si } x \in V_{H_1} \\ . & \\ . & \\ . & \\ g_j(x_s) & \text{si } x \in V_{H_s} \end{cases}$$

avec $\{x_i\} = V_H \cap V_{H_i},\ \forall i \in I = \{1, .., s = \#(H \setminus \overset{\circ}{H})\}$.
Soit $F = Vect\{\phi_j\}_{1 \leq j \leq k}$, $\dim F = k$ puisque les g_j forment une famille libre.
Ainsi, il existe k réels $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ non tous nuls, satisfaisant:

$$\Big(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \phi_j\ ,\ f_l\Big)_m = 0 \quad \forall\ 1 \leq l \leq k-1.$$

Donc la fonction $\psi(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \phi_j(x) \neq 0$ est orthogonale à f_l pour tout $1 \leq l \leq k-1$. On définit ψ', la restriction de ψ sur H, donnée par $\psi'(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j g_j(x)$, pour tout $x \in H$.

Alors :

$$\begin{aligned}\lambda_k(S_G)(\psi,\psi)_m &\leq (S_G\psi,\psi)_m \\ &= (S_H\psi',\psi')_m \quad \text{car } \psi \text{ est constante sur chaque } H_i \\ &\leq \lambda_k(S_H)(\psi',\psi')_m\end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned}(\psi,\psi)_m &= \sum_{x\in V_G} m(x)|\psi(x)|^2 \\ &\geq \sum_{x\in V_H} m(x)|\psi'(x)|^2 \\ &= (\psi',\psi')_m.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\lambda_k(S_G)(\psi',\psi')_m \leq \lambda_k(S_H)(\psi',\psi')_m.$$

□

Le théorème 4.2.2 s'applique en particulier à un arbre digraphe, qui peut être considéré comme un graphe type-fleur.

Corollaire 4.2.1 *Soit G^s un arbre symétrique simple et $q = \max_{x\in V} d(x)$ alors les valeurs propres de G^s satisfont pour $k = 1, .., q$:*

$$\lambda_k(S_{G^s}) \leq 2$$

et

$$\lambda_{q+1}(S_{G^s}) \leq 2(q+1).$$

Preuve:

Clairement, il existe dans G^s un sous-graphe en étoile symétrique S_q à $q+1$ sommets. L'arbre G^s peut-être considéré comme un graphe S_q-type-fleur. Donc G^s satisfait les hypothèses de le théorème 4.2.2. Ètant donné que les valeurs propres de S_q , voir [53], sont:

$$0,\ 2, ..., 2,\ 2(q+1).$$

Il en résulte que pour $k = 1, .., q$

$$\lambda_k(S_{G^s}) \leq \lambda_k(S_{S_q})$$

et

$$\lambda_{q+1}(S_{G^s}) \leq \lambda_{q+1}(S_{S_q}).$$

□

On obtient grâce au lemme 4.1.1 l'inégalité suivante.

Corollaire 4.2.2

$$\mathcal{R}\big(\lambda_{q+1}(\Delta_{G^s})\big) \leq q + 1.$$

Dans la suite, on va montrer quelques résultats plus généraux concernant la perturbation d'un graphe G par l'ajout d'un sommet ou d'une arête. On rappelle à ce propos la proposition 2 de [44].

Proposition 4.2.1 *Soit G un graphe et soit G_1 un autre graphe obtenu de G en ajoutant un sommet et une arête entre le nouveau sommet et un sommet de G. Alors, on a*

$$\lambda_2(S_G) \geq \lambda_2(S_{G_1}).$$

On a comme généralisation le corollaire suivant dans le sens que cette monotonicité reste garantie pour toutes les valeurs propres et même si on perturbe le graphe par l'ajout d'un graphe.

Corollaire 4.2.3 *Soit G un graphe à n sommets et G_1 obtenu à partir de G en lui ajoutant un graphe fini relié à un seul sommet de G. Alors pour $k = 1, .., n$;*

$$\lambda_k(S_G) \geq \lambda_k(S_{G_1}).$$

Exemple 4.2.1 *On remarque ici qu'on peut avoir une décroissance de $\lambda_k(S_G)$ même en ajoutant au graphe G deux sommets et 3 arêtes, i.e un cycle qui sera lié à un seul sommet de G.*

Les valeurs propres de S_{G^s} sont $0, 1, 1, 4$ *et les valeurs propres de $S_{G_1^s}$ sont* $0, \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}, 1, 3, 3, \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$.

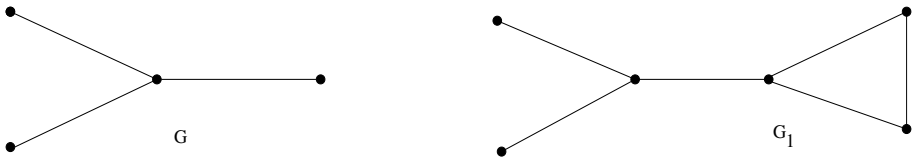


Figure 4.4: Ajout d'un cycle

4.2.2 Monotonicité relative aux arêtes

On applique le théorème de Weyl sur les matrices [37] pour étudier comment le spectre du Laplacien d'un graphe change lors de l'ajout d'une arête ou d'un ensemble d'arêtes au même graphe.

Maintenant, on a plusieurs possibilités d'invoquer l'observation de base suivante sur l'intersection des sous-espaces (voir [37] page 235).

Lemme 4.2.1 *Soit W un espace vectoriel de dimension finie et soit S_1, S_2,..,S_k des sous-espaces de W, si*

$$\delta = \dim S_1 + ... + \dim S_k - (k-1)\dim W \geq 1$$

alors $\dim(S_1 \cap .. \cap S_k) \geq \delta$ *et donc* $S_1 \cap .. \cap S_k$ *contient* δ *vecteurs linéairement indépendants, en particulier , il contient un vecteur non nul.*

On présente une observation utile dans cette partie.

Observation 4.2.1 *Soit S_G l'opérateur spécial auto-adjoint dont les valeurs propres sont $\lambda_1(S_G) \leq \lambda_2(S_G) \leq ... \leq \lambda_n(S_G)$, les valeurs propres de $-S_G$ sont $\lambda_1(-S_G) \leq \lambda_2(-S_G) \leq ... \leq \lambda_n(-S_G)$ avec $\lambda_k(-S_G) = -\lambda_{n-k+1}(S_G),\ k = 1, ..., n$.*

On montre que la k^{me} valeur propre $\lambda_k(S_G)$ est monotone croissante par rapport à l'ensemble d'arêtes.

Proposition 4.2.2 *Soit $G = (V, \vec{E})$ un graphe ($\sharp V = n$), on considère des graphes partiels connexes $G_1 = (V, \vec{E}_1)$ et $G_2 = (V, \vec{E}_2)$ où $E_1 \sqcup E_2 = E$, (réunion disjointe). Alors pour tous $k = 1, ..., n$ et $r, s = 1, 2$, $r \neq s$:*

$$\lambda_k(S_G) \leq \lambda_{k+j}(S_{G_s}) + \lambda_{n-j}(S_{G_r}) \quad j = 0, ..., n-k \tag{4.6}$$

et

$$\lambda_k(S_G) \geq \lambda_{k-j+1}(S_{G_s}) + \lambda_j(S_{G_r}) \quad j = 1, ..., k.$$

Preuve:

Soient g_k, h_k, et f_k les fonctions propres associées aux valeurs propres $\lambda_k(S_{G_1}), \lambda_k(S_{G_2})$ et $\lambda_k(S_G)$ respectivement pour tous $k = 1, .., n$. On pose, pour $j = 0, ..., n-k$,

$$S_1 = Vect\{g_1, ..., g_{k+j}\},$$

$$S_2 = Vect\{h_1, ..., h_{n-j}\}$$

et

$$S_3 = Vect\{f_k, ..., f_n\}.$$

Par le lemme 4.2.1 il existe une fonction non nulle ψ dans $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ de sorte qu'on a:

$$\begin{aligned} \lambda_k(S_G)(\psi,\psi)_m &\leq (S_G\psi,\psi)_m \\ &= (S_{G_s}\psi,\psi)_m + (S_{G_r}\psi,\psi)_m \\ &\leq \lambda_{k+j}(S_{G_s})(\psi,\psi)_m + \lambda_{n-j}(S_{G_r})(\psi,\psi)_m \\ &\leq \big(\lambda_{k+j}(S_{G_s}) + \lambda_{n-j}(S_{G_r})\big)(\psi,\psi)_m. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dans la suite, on applique l'inégalité (4.6) à l'opérateur $-S_G$ parce que l'inégalité (4.7) ne dépend pas de la positivité de l'opérateur S_G et comme:

$$\lambda_k(-S_G) = -\lambda_{n-k+1}(S_G).$$

on obtient:

$$\lambda_k(S_G) \geq \lambda_{k-j+1}(S_{G_s}) + \lambda_j(S_{G_r}), \quad j = 1, ..., k.$$

□

On peut voir aisément la conséquence suivante de la proposition 4.2.2.

Corollaire 4.2.4 *Soit $G = (V, \vec{E})$ un graphe à n sommets et $G_1 = (V, \vec{E}_1)$, $G_2 = (V, \vec{E}_2)$ deux graphes partiels connexes de G où $E_1 \sqcup E_2 = E$, alors pour tous $k = 1, ..., n$ et $r, s = 1, 2$, $r \neq s$:*

$$\lambda_k(S_{G_s}) \leq \lambda_k(S_G) \leq \lambda_k(S_{G_s}) + \lambda_n(S_{G_r}).$$

Preuve:

Par application de la proposition 4.2.2 à $j = 0$ et $j = 1$ respectivement, on obtient le résultat car $\lambda_1(S_{G_r}) = 0$.

□

Autrement dit, l'ajout d'un sous-ensemble d'arêtes à E entraîne toujours une augmentation de la k^{me} valeur propre, ou elle reste inchangée, à condition qu'on garde le même ensemble de sommets.

Corollaire 4.2.5 *Soit $G = (V, \vec{E})$ un graphe et G_1 un graphe obtenu par l'ajout d'un ensemble d'arêtes à G, $(\#V = n)$ alors pour tout $k = 1, ..., n$:*

$$\lambda_k(S_G) \leq \lambda_k(S_{G_1}).$$

Remarque 4.2.2 *Ce corollaire généralise la proposition 1 de [44] qui n'établit le résultat que pour la première valeur propre non nulle.*

Exemple 4.2.2 *On considère les graphes G et G_1 donnés par la Figure 4.5.*



Figure 4.5: Ajout d'une arête

Les valeurs propres de S_{G^s} sont $0, 1, 3$ et les valeurs propres de $S_{G_1^s}$ sont $0, 3, 3$.

4.3 Valeurs propres du Laplacien et du Laplacien de Dirichlet

Dans cette section, on examine quelques résultats de comparaison entre le spectre du Laplacien et celui du Laplacien de Dirichlet en établissant un lien clair et explicite entre les valeurs propres.

Pour $U \subset V$, on considère le Laplacien de Dirichlet spécial S_U^D défini sur $\mathcal{C}_m(U)$ par:

$$\forall f \in \mathcal{C}_m(U),\ x \in U,\ \ S_U^D f(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{\substack{y \in V_x \\ y \in V_G}} a(x,y)\big(f(x) - f(y)\big).$$

Par les mêmes techniques utilisées dans le lemme 4.1.1, on peut montrer le Lemme suivant.

Lemme 4.3.1

$$\lambda_1(S_U^D) \leq 2\mathcal{R}e(\lambda_1(\Delta_U^D))$$

et

$$\lambda_n(S_U^D) \geq 2\mathcal{R}e(\lambda_n(\Delta_U^D)).$$

Preuve:

Soient f et g les fonctions propres associées à $\lambda_1(\Delta_U^D)$ et $\lambda_n(\Delta_U^D)$ respectivement.

Par le principe variationnel concernant $\lambda_1(S_U^D)$ et $\lambda_n(S_U^D)$, on a

$$\begin{aligned}\lambda_1(S_U^D) &\leq \frac{(S_U^D f, f)_m}{(f,f)_m} \\ &= \frac{(\Delta_U^D f, f)_m}{(f,f)_m} + \frac{\overline{(\Delta f, f)_m}}{(f,f)_m} \\ &= \lambda_1(\Delta_U^D) + \overline{\lambda_1(\Delta_U^D)}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lambda_n(S_U^D) &\geq \frac{(S_U^D g, g)_m}{(g,g)_m} \\ &= \frac{(\Delta_U^D g, g)_m}{(g,g)_m} + \frac{\overline{(\Delta g, g)_m}}{(g,g)_m} \\ &= \lambda_n(\Delta_U^D) + \overline{\lambda_n(\Delta_U^D)}.\end{aligned}$$

□

Concernant la relation entre les valeurs propres de S_H^D et S_H, on montre la proposition suivante qui est une application au Laplacien du graphe orienté pondéré du théorème de Cauchy étudiant le spectre des matrices bordantes, ([37], page 243, 246).

Proposition 4.3.1 *Soit $G = (V_G, \vec{E}_G)$ un graphe et $H = (V_H, \vec{E}_H)$ un sous-graphe connexe de G, ($\#V_G = n$ et $\#V_H = r$), alors les valeurs propres de S_H^D et de S_G satisfont:*

$$\lambda_k(S_H^D) \leq \lambda_{k+n-r}(S_G),\ \textit{pour tout}\ 1 \leq k \leq r.$$

Preuve:

Soient $h_1, .., h_r$ et $f_1, .., f_n$ des fonctions propres associées à $\lambda_1(S_H^D), .., \lambda_r(S_H^D)$ et $\lambda_1(S_G), .., \lambda_n(S_G)$ respectivement, on définit les fonctions g_k pour $k = 1, .., r$ par:

$$g_k = \begin{cases} h_k & \text{sur } V_H \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Soit $1 \leq k \leq r$, on pose

$$S_1 = Vect\{g_k, ..., g_r\}$$

et

$$S_2 = vect\{f_1, ..., f_{k+n-r}\}.$$

D'après le lemme 4.2.1 il existe une fonction non nulle ψ dans $S_1 \cap S_2$. Alors, elle est de la forme

$$\psi = \begin{cases} g & sur\ V_H \\ 0 & sinon \end{cases}$$

pour un $g \in Vect\{g_k, ..., g_r\}$. On observe que:

$$\begin{aligned} \lambda_k(S_H^D)(g, g)_m &\leq (S_H^D g, g)_m \\ &\leq (S_G\psi, \psi)_m. \end{aligned}$$

Et comme $(g, g)_m = (\psi, \psi)_m$, on trouve

$$\lambda_k(S_H^D) \leq \frac{(S_G\psi, \psi)_m}{(\psi, \psi)_m}$$

alors,

$$\lambda_k(S_H^D) \leq \lambda_{k+n-r}(S_G).$$

□

En combinant le théorème 4.2.1 et la proposition 4.3.1, on trouve la conséquence suivante.

Corollaire 4.3.1 *Soit $G = (V_G, \vec{E}_G)$ un graphe et $H = (V_H, \vec{E}_H)$ un sous-graphe de G,*

($\#V_G = n$ et $\#V_H = r$), alors les valeurs propres sur G satisfont:

$$\lambda_{k+n-r}(S_G) \geq \max\left(\lambda_k(S_H), \lambda_k(S_H^D)\right), \quad \textit{pour tout } 1 \leq k \leq r.$$

La relation entre $\lambda_n(S_G)$ et $\lambda_n(\Delta_G)$ qui est établie dans le lemme 4.3.1, entraîne le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.2 *On considère un sous-graphe connexe $H = (V_H, \vec{E}_H)$ de $G = (V_G, \vec{E}_G)$, ($\#V_G = n, \#V_H = r$), alors:*

$$\lambda_n(S_G) \geq \max\Big(2\mathcal{R}e\big((\lambda_r(\Delta_H)\big), 2\mathcal{R}e\big(\lambda_r(\Delta_H^D)\big)\Big).$$

Dans la proposition suivante on montre comment donner une borne supérieure au spectre de S_G en termes d'un quotient de Rayleigh. On donne une version discrète de la proposition 2.1 de [11] en appliquant le principe de min-max Poincaré-Ritz . On évalue les valeurs propres de S_G en fonction des valeurs propres de Dirichlet sur une partition de G. Les méthodes qu'on utilise suivent de près les arguments donnés par B. Benson dans [11] pour le cas des variétés Riemanniennes.

Proposition 4.3.2 *Soit $G = (V, \vec{E})$ un graphe, $U = (V_U, \vec{E}_U)$ une partie de G et $A = (V_A, \vec{E}_A)$, $B = (V_B, \vec{E}_B)$ deux sous-graphes satisfaisant les conditions suivantes comme dans la Figure 4.6.*

1. $V = V_A \sqcup V_B = V_{\overset{\circ}{A}} \sqcup V_{\overset{\circ}{B}} \sqcup V_U$ *(réunion disjointe)*
2. $\vec{E} = \vec{E}_A \sqcup \vec{E}_B \sqcup \vec{E}_U$
3. $\partial_E A = \partial_E B = \vec{E}_U$.

Alors on a pour tous $1 \leq k, l \leq \min(\sharp V_{\overset{\circ}{A}}, \sharp V_{\overset{\circ}{B}})$:

$$\lambda_{k+l}(S_G) \leq \max\left(\lambda_k(S_{\overset{\circ}{A}}^D), \lambda_l(S_{\overset{\circ}{B}}^D)\right).$$

Preuve:

Soient $h_1, .., h_k$ et $g_1, .., g_l$ les fonctions propres associées à $\lambda_1(S_{\overset{\circ}{A}}^D), .., \lambda_k(S_{\overset{\circ}{A}}^D)$ et $\lambda_1(S_{\overset{\circ}{B}}^D), .., \lambda_l(S_{\overset{\circ}{B}}^D)$ respectivement, pour $1 \leq k \leq \sharp V_{\overset{\circ}{A}}$ et $1 \leq l \leq \sharp V_{\overset{\circ}{B}}$.

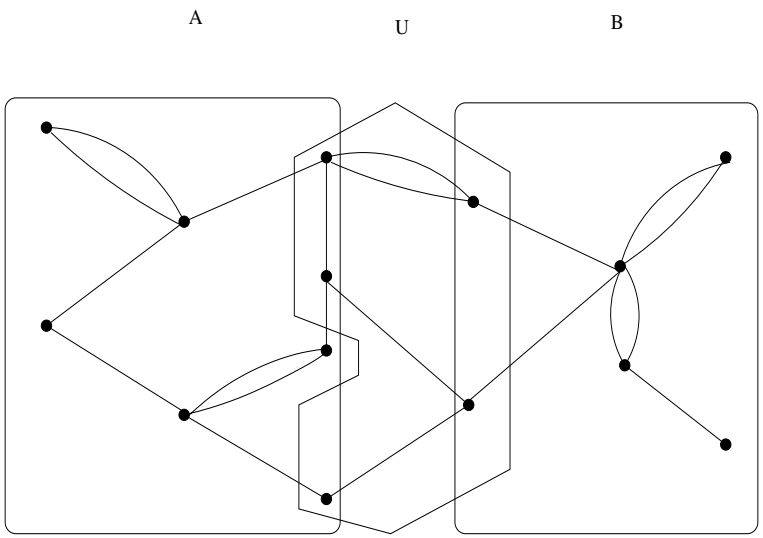


Figure 4.6: Les parties $A,\ U$ et B dans le graphe G.

On considère $f = h + g$ avec h une fonction de $F_{\overset{\circ}{A}}$, l'espace engendré par $h_1, .., h_k$ et g est une fonction de $F_{\overset{\circ}{B}}$, l'espace engendré par $g_1, .., g_l$. On a

$$(Sf, f)_m = (S^D_{\overset{\circ}{A}} h, h)_m + (S^D_{\overset{\circ}{B}} g, g)_m.$$

Donc, on trouve en utilisant le principe de min-max Poincaré-Ritz (4.2):

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+l}(S_G) \leq \max_{f \in F_{\overset{\circ}{A}} + F_{\overset{\circ}{B}}} \frac{(S_G f, f)_m}{(f, f)_m} &= \max_{h \in F_{\overset{\circ}{A}}, g \in F_{\overset{\circ}{B}}} \frac{(S^D_{\overset{\circ}{A}} h, h)_m + (S^D_{\overset{\circ}{B}} g, g)_m}{(h, h)_m + (g, g)_m} \\
&\leq \frac{\lambda_k(S^D_{\overset{\circ}{A}})(h, h)_m + \lambda_l(S^D_{\overset{\circ}{B}})(g, g)_m}{(h, h)_m + (g, g)_m} \\
&\leq \max\left(\lambda_k(S^D_{\overset{\circ}{A}}), \lambda_l(S^D_{\overset{\circ}{B}})\right).
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient:

$$\lambda_{k+l}(S_G) \leq \max\left(\lambda_k(S^D_{\overset{\circ}{A}}), \lambda_l(S^D_{\overset{\circ}{B}})\right).$$

□

Une estimation de $\lambda_2(S_G)$ peut être obtenue en fonction de $\lambda_1(\Delta^D_{\overset{\circ}{B}})$ et $\lambda_1(\Delta^D_{\overset{\circ}{B}})$.

Corollaire 4.3.3 *Sous les mêmes hypothèses de la proposition 4.3.2 on a*

$$\lambda_2(S_G) \leq \max\left(2\mathcal{R}e\big(\lambda_1(\Delta^D_{\overset{\circ}{A}})\big), 2\mathcal{R}e\big(\lambda_1(\Delta^D_{\overset{\circ}{B}})\big)\right).$$

Preuve:

C'est une simple déduction du lemme 4.3.1.

□

Grâce au corollaire 4.1.1 qui établit la coïcidence de $\sigma\big(\mathcal{R}e(\Delta_{C_n})\big)$ avec $\mathcal{R}e\big(\sigma(\Delta_{C_n})\big)$, on donne le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.4 *Sous les mêmes hypothèses de la proposition 4.3.2, pour le graphe cyclique C_n on a,*

$$\mathcal{R}e\big(\lambda_2(\Delta_{C_n})\big) \leq \max\Big(\mathcal{R}e\big(\lambda_1(\Delta^D_{\underset{A}{\circ}})\big), \mathcal{R}e\big(\lambda_1(\Delta^D_{\underset{B}{\circ}})\big)\Big).$$

5

Annexe

Le but dans cet annexe est de présenter des résultats classiques de base et des applications de l'image numérique et du spectre d'un opérateur, utiles dans cette thèse. On montre des généralités qu'on a utilisé à plusieurs reprises. Ensuite, dans l'étude du spectre essentiel d'un opérateur non symétrique, on donne une illustration du théorème de comparaison, du à R. T. Lewis [45]. Enfin, on présente quelques théorèmes sur la variation des valeurs propres des matrices perturbées utiles dans le chapitre 4 pour la monotonicité des valeurs propres des graphes finis.

5.1 Image numérique et spectre

Dans cette section, on va rappeler la définition de l'image numérique d'un opérateur linéaire agissant sur un espace de Hilbert complexe. Ensuite on va énumérer une liste de ses propriétés importantes. On invite le lecteur à lire [50] pour plus d'informations sur l'image numérique d'un opérateur.

Définition 5.1.1 *On appelle image numérique d'un opérateur linéaire A dans un espace de Hilbert le sous-ensemble du plan complexe défini par*

$$W(A) = \{(Af, f);\ \ f \in D(A),\ \|f\| = 1\}.$$

Voici quelques propriétés de base souvent utilisées dans le calcul de l'image numérique et

faciles à démontrer, voir [50].

Proposition 5.1.1 *Soient A et B deux opérateurs bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on a*

- $W(I) = \{1\}$.
- $W(aI + bA) = a + bW(A)$ *pour tous* $a,\ b \in \mathbb{C}$,
- $W(A + B) \subset W(A) + W(B)$.
- $W(U^*AU) = W(A)$ *où U est un opérateur unitaire.*
- $W(A) \subset \overline{D(0, \|A\|)}$.

Parmi les propriétés les plus importantes sur l'image numérique, celle qui est fournie par le théorème de Toeplitz-Hausdorff [50], [33].

Théorème 5.1.1 *(Toeplitz-Hausdorff) L'image numérique d'un opérateur borné sur un espace de Hilbert est convexe.*

On rappelle qu'un opérateur A à domaine dense $D(A)$ est dit symétrique si et seulement si

$$(Af, g) = (f, Ag) \text{ pour chaque } f, g \in D(A).$$

Théorème 5.1.2 *[40] Un opérateur densément défini A est symétrique si et seulement si $W(A)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*

Preuve:

On suppose que A est un opérateur symétrique et à domaine dense $D(A)$. Soit g est une fonction de $D(A)$ de norme 1 et $\lambda = (Ag, g)$. On a

$$\begin{aligned}\overline{\lambda} =& \overline{(Ag, g)} \\ =& (g, Ag) \\ =& (Ag, g) = \lambda.\end{aligned}$$

Réciproquement, soit $f, g \in D(A)$ tel que $(Af, f) \in W(A) \in \mathbb{R}$. On a en utilisant l'identité de polarisation

$$\begin{aligned}(Af, g) &= \frac{1}{2}\Big((Af, f) + (Ag, g) - (A(f-g), (f-g))\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big((f, Af) + (g, Ag) - \big((f-g), A(f-g)\big)\Big) \\ &= (f, Ag)\end{aligned}$$

donc A est symétrique.

□

On projette d'étudier le spectre et ses relations avec l'image numérique, à la fois d'un point de vue théorique, pour des opérateurs différentiels généraux, et dans des cas précis comme les Laplaciens de graphe.

Proposition 5.1.2 *[50] Soit A un opérateur borné sur $\mathcal{H}$, alors*

1. *$W(A)$ est un ensemble borné non vide contenant toutes les valeurs propres de A.*
2. *$W(A^*) = \{\overline{\lambda}\,;\ \ \lambda \in W(A)\}$.*

Preuve:

1. La première propriété découle du fait que, si λ est une valeur propre de A avec une fonction propre non nulle f, alors $g = \dfrac{f}{\|f\|}$ est un vecteur propre unitaire et ainsi $\lambda = (Ag, g) \in W(A)$ comme on le souhaite.
2. Clairement, on arrive à ce résultat par le fait que $(A^*g, g) = \overline{(Ag, g)}$ pour tout $g \in \mathcal{H}$.

□

En général l'image numérique n'est pas nécessairement fermée et ne semble pas avoir de relation directe avec le spectre. Dans le théorème suivant, on montre qu'il existe une relation entre le spectre et la fermeture de l'image numérique.

Théorème 5.1.3 *[50] Soit A est un opérateur borné sur $\mathcal{H}$, alors le spectre de A est contenu dans la fermeture de son image numérique.*

Preuve:

Soit $\lambda \in \sigma(A)$. On pose $B_\lambda = A - \lambda I$, $B_\lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est borné, non inversible.

Plusieurs cas sont possibles:

1. $\ker(B_\lambda) \neq \{0\}$. Donc $\exists\, f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1$ et $Af = \lambda f$. Alors $\lambda \in W(A)$.
2. $\ker(B_\lambda) = \{0\}$ tel que $\exists \alpha > 0$ vérifiant $\|B_\lambda(f)\| \geq \alpha\|f\|, \forall f \in \mathcal{H}$. Donc $R(B_\lambda)$ est fermé mais B_λ n'est pas inversible. Ceci implique qu'il existe $f \in R(B_\lambda)^\perp$, $\|f\| = 1$. Alors $\forall u \in \mathcal{H}$, $(B_\lambda u, f) = 0$ ou $(Au, f) = \lambda(u, f)$. En faisant $u = f$, on trouve $(Af, f) = \lambda$. D'où $\lambda \in W(A)$
3. $\ker(B_\lambda) = \{0\}$ et α n'existe pas. Alors $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\ \exists f_n \in \mathcal{H},\ \|f_n\| = 1$ et $\|B_\lambda(f_n)\| \leq \frac{1}{n}$. Il s'ensuit que $|(B_\lambda f_n, f_n)| \leq \frac{1}{n}$ et donc $|(Af_n, f_n) - \lambda| \leq \frac{1}{n}$. Alors $\lambda \in \overline{W(A)}$.

□

5.2 Laplaciens sur le graphe $\mathbb{Z}$

Cette partie est consacrée à l'étude des Laplaciens non symétriques sur le graphe $\mathbb{Z}$, qu'on note aussi par $\mathbb{Z}$.

5.2.1 Laplaciens normaux

En général Δ et $\tilde{\Delta}$ sont des opérateurs non normaux, mais pour des cas particuliers, ils peuvent être normaux comme on va voir dans la suite.

Observation 5.2.1 *On considère le graphe orienté simple non symétrique $\mathbb{Z}$, les Laplaciens associés Δ et Δ^* sont définis sur $\ell^2(\mathbb{Z}, 1)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, par:*

$$\Delta f(k) = f(k) - f(k+1)$$

$$\Delta^* f(k) = f(k) - f(k-1)$$

on a pour tout $f \in \ell^2(V,1)$,

$$\Delta\Delta^* f(x) = \Delta^*\Delta f(k) = 2f(k) - f(k-1) - f(k+1).$$

De même pour $\tilde{\Delta}\tilde{\Delta}^*$. Donc Δ et $\tilde{\Delta}$ sont normaux.

On remarque que $\Delta\Delta^*$ et $\Delta + \Delta^*$ coïncident et donc ils ont le même spectre $[0,4]$.

Appliqué à l'étude des opérateurs normaux, ce résultat permet d'obtenir une caractérisation nouvelle du spectre du Laplaciens [2].

Proposition 5.2.1 *Le spectre résiduel de* Δ *est vide.*

On rappelle la définition de l'envelope convexe d'un ensemble.

Définition 5.2.1 *L'enveloppe convexe d'un ensemble* X *est le plus petit convexe contenant* X.

Le théorème suivant montre que l'image numérique d'un opérateur normal est une bonne approximation de son spectre. S. K. Berberian [12] et P. Skoufranis [50] ont montré que la fermeture de l'image numérique d'un opérateur normal est l'enveloppe convexe de son spectre.

Théorème 5.2.1 *La fermeture de l'image numérique du Laplacien* Δ *sur le graphe simple* $\mathbb{Z}$ *est l'enveloppe convexe de son spectre.*

Comme Δ est un opérateur normal, alors on a la caractérisation suivante:

Proposition 5.2.2 *La norme de l'opérateur* Δ *sur* $\mathbb{Z}$ *est donnée par:*

$$\|\Delta\|_1 = \sup\big\{|\lambda|,\ \ \lambda \in W(\Delta)\big\}.$$

Cette caractérisation reste vraie pour $\tilde{\Delta}$.

5.2.2 Spectre du Laplacien

Le Laplacien Δ sur le graphe simple $\mathbb{Z}$ est borné sur $\ell^2(\mathbb{Z},1)$. Il s'écrit:

$$\text{pour tout } f \in \ell^2(\mathbb{Z},1) \text{ et } k \in \mathbb{Z},\ \ \Delta f(k) = f(k) - f(k+1).$$

On va déterminer le spectre de Δ en adoptant le calcul fait par H. Ayadi dans [6] pour un Laplacien symétrique.

La transformée de Fourier, définie par :

$$F : L^2(]0, 2\pi\,[) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$
$$\phi \longrightarrow \hat{\phi}$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{\phi}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \phi(t)e^{-int}dt$$

est une isométrie unitaire d'inverse

$$F^{-1} : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(]0, 2\pi\,[)$$
$$(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \phi = \sum_n c_n e^{in.}.$$

Le spectre étant invariant par conjugaison : $\sigma(F^{-1}\Delta F) = \sigma(\Delta),$ pour F inversible, on a pour $\phi \in L^2(]0, 2\pi\,[)$

$$F^{-1}\Delta F f = \sum_n c_n e^{in.}$$

avec

$$c_n = \Delta F\phi(n) = \Delta\hat{\phi}(n) = \hat{\phi}(n) - \hat{\phi}(n+1).$$

Ainsi, on obtient

$$F^{-1}\Delta F\phi = \sum_n (\hat{\phi}(n) - \hat{\phi}(n+1))e^{in.}$$
$$= (1 - e^{i.})\phi$$

c'est l'opérateur de muliplication par $1-e^{i.}$, son spectre est égale à son image essentielle (pages 8-9, [10]). Par suite,

$$\sigma(\Delta) = \sigma(F^{-1}\Delta F) = \mathrm{C}(1, 1),$$

le cercle de centre 1 et de rayon 1.

Il serait intéressant alors de pouvoir caractériser l'image numérique de Δ sur $\ell^2(\mathbb{Z}, 1)$, suite

au calcul du spectre.

Proposition 5.2.3 *$\overline{W(\Delta)}$ est le disque de centre 1 et de rayon 1, en effet $\overline{W(\Delta)}$ est le plus petit convexe contenant $\sigma(\Delta) = \mathrm{C}(1,1)$, donc c'est le disque de centre 1 et de rayon 1.*

5.3 Spectre essentiel

5.3.1 Définitions et propriétés

Les opérateurs non auto-adjoints ont quatre différents spectres essentiels, voir [26] et [39]. Ces spectres essentiels coïncident pour les opérateurs auto-adjoints qui ont dominé la recherche sur la théorie spectrale des opérateurs différentiels à ce jour.

- $\sigma_e^1(A) = \big\{\lambda \in \mathbb{C};\ \ R(A-\lambda)$ est non fermée ou $\dim\ker(A-\lambda) = codim(A-\lambda) = \infty\big\}$.

- $\sigma_e^2(A) = \big\{\lambda \in \mathbb{C};\ \ R(A-\lambda)$ est non fermée ou $\dim\ker(A-\lambda) = \infty\big\}$.

- $\sigma_e^3(A) = \big\{\lambda \in \mathbb{C};\ \ R(A-\lambda)$ est non fermée ou $\dim\ker(A-\lambda) = \infty$ ou $codim(A-\lambda) = \infty\big\}$.

- $\sigma_e^4(A) = \big\{\lambda \in \mathbb{C};\ \ R(A-\lambda)$ est non fermée ou $\dim\ker(A-\lambda) = codim(A-\lambda)\big\}$.

Il est clair que

$$\sigma_e^1(A) \subset \sigma_e^2(A) \subset \sigma_e^3(A) \subset \sigma_e^4(A).$$

En général, ces inclusions sont strictes, mais comme on va le voir dans le théorème 5.3.1 donné dans [26], la situation est un peu plus particulière pour les opérateurs auto-adjoints.

Théorème 5.3.1 *Soit A un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors*

1. *les ensembles $\sigma_e^k(A)$ pour $k = 1,2,3,4$ sont identiques.*
2. *λ appartient au complémentaire du spectre essentiel dans le spectre entier si et seulement si λ est une valeur propre isolée et de multiplicité finie.*

Il y a, dans la littératue, plusieurs définitions du spectre essentiel d'un opérateur non borné non auto-adjoint. On a adapté la définition suivante surtout qu'elle a le mérite de rendre le spectre essentiel stable par perturbation compacte.

Définition 5.3.1 *Le spectre essentiel σ_{ess} d'un opérateur fermé A est l'ensemble de tous les nombres complexes λ pour lesquels l'image $R(A-\lambda)$ n'est pas fermée ou bien le noyau $\ker(A-\lambda)$ est de dimension infinie.*

5.3.2 Théorème de comparaison

On présente dans la suite l'un des résultats importants dans l'étude du spectre essentiel d'un opérateur densément défini et fermé: *le théorème de comparaison*. Il porte sur la définition du spectre essentiel considérée dans [45]. En outre, cette définition est définie en termes de suites singulières. Elle a été la plus largement utilisée dans les problèmes impliquant des opérateurs différentiels car elle possède des propriétés qui ne sont pas partagées par d'autres spectres essentiels.

Définition 5.3.2 *Soit $u_n \in D(A)$ de norme 1 une suite telle que u_n n'admet pas de sous-suite convergente et $Au_n \to 0$. Alors u_n est dite une suite singulière de A.*

Définition 5.3.3 *Soit A un opérateur densément défini et fermé, son spectre essentiel est donné par*

$$\sigma_e(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ A - \lambda \text{ a une suite singulière}\}.$$

Pour appliquer le théorème de comparaison, on utilise la définition 5.3.2 pour le spectre essentiel. La propsition 5.3.1 permet de montrer l'équivalence des définitions 5.3.2 et 5.3.3. On présente la démonstration dans la suite, voir F. Wolf dans [57].

Définition 5.3.4 *Un opérateur A est dans l'ensemble Σ s'il a une suite singulière.*

Proposition 5.3.1 *Si B est un opérateur à image non fermée ou si son noyau est de dimension infinie. Alors $B \in \Sigma$.*

Preuve:

Si $\dim\ker(B) = \infty$, alors un orthonormé situé dans $\ker(B)$ est une suite singulière et donc $B \in \Sigma$. Maintenant, on suppose que $\dim\ker(B) < \infty$ et que $I - P$ est la projection sur $\ker(B)$ tels que $Bx_n \to y_o$ et $y_o \notin R(B)$. Évidemment on

a $BPx_n = Bx_n$, on va montrer que $\|Px_n\| \to \infty$. En effet, si $\|Px_n\|$ a été borné, il existerait une suite (Px_{n_i}) convergent faiblement vers x_o. Alors, pour tout $y \in D(B^*)$, $\lim(Px_{n_i}, B^*y) = (x_o, B^*y) = (BPx_{n_i}, y) = (y_o, y)$. Ceci montre que $x_0 \in D(B)$ et $Bx_o = y_o$ qui est une contradiction. Par conséquent $\|Px_n\| \to +\infty$. Evidemment que $z_n = Px_n/\|Px_n\|$ est de norme 1 et $\lim Bz_n = Bx_n/\|Px_n\| = 0$. Si on montre que $(z_n)_n$ est une suite non-compacte, on a obtenu une suite singulière de B. On suppose qu'elle est compacte. Alors, il existe une sous-suite (z_{n_i}) convergente vers un certains z_o, $\|z_o\| = 1$. Par la fermeture de B on a $Bz_0 = 0$. Ainsi $z_o \in \ker(B)$. D'autre part, pour tout n, $(z_n, \ker(B)) = 0$ d'où $(z_0, \ker(B)) = 0$, ou $z_o = 0$. Ceci est en contradiction avec le fait que $\|z_0\| = 1$ et donc la preuve se termine.

□

On peut déduire de cette équivalence de définition, le corollaire suivant

Corollaire 5.3.1

$$\sigma_e^2(A) \subset \sigma_e(A).$$

En effet, il suffit de prendre $B = A - \lambda$, avec λ un nombre complexe.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate due à l'inclusion des différents spectres essentiels.

Corollaire 5.3.2

$$\sigma_e(A) = \emptyset \implies \sigma_e^2(A) = \emptyset \implies \sigma_e^1(A) = \emptyset.$$

5.4 Variation des valeurs propres

5.4.1 Théorème d'entrelacement

On étudie dans le chapitre 4, de nombreuses inégalités sur les valeurs propres d'un graphe perturbé. Dans cette partie, on présente le théorème de Weyl et le théorème de Cauchy qui sont utiles dans certaines inégalités sur les valeurs propres de graphe prouvées dans le chapitre 4.

Le théorème de Weyl suivant, page 239 de [37], donne une estimation de la variation d'une valeur propre d'une matrice par une perturbation de manière additive de la matrice.

Théorème 5.4.1 ***(Weyl)*** *Soit A et B deux matrices hermitiennes de dimension n, $\{\lambda_i(A)\}_1^n$, $\{\lambda_i(B)\}_1^n$ et $\{\lambda_i(A+B)\}_1^n$ les valeurs de A, B et $A+B$. Alors pour tout $i = 1, ..., n$,*

$$\lambda_i(A+B) \leq \lambda_{i+j}(A) + \lambda_{n-j}(B), \quad j = 0, 1, ..., n-i$$

avec égalité si et seulement s'il existe un vecteur non nul x tel que $Ax = \lambda_{i+j}(A)x$, $Bx = \lambda_{n-j}(B)x$ et $(A+B)x = \lambda_i(A+B)x$. De plus,

$$\lambda_{i-j+1}(A) + \lambda_j(B) \leq \lambda_i(A+B), \quad j = 1, ..., i$$

pour chaque $i = 1, ..., n$, avec égalité si et seulement s'il existe un vecteur non nul x tel que $Ax = \lambda_{i-j+1}(A)x$, $Bx = \lambda_j(B)x$ et $(A+B)x = \lambda_i(A+B)x$.
Si A et B n'ont pas de vecteur propre commun, alors l'inégalité est stricte.

Le corollaire suivant est connu sous le nom de théorème de la monotonie, voir [37].

Corollaire 5.4.1 *Soit A, B deux matrices hermitiennes de dimension n. On suppose que B est semi-définie positive. Alors*

$$\lambda_i(A) \leq \lambda_i(A+B), \quad i = 1, .., n.$$

Corollaire 5.4.2 *Soient A, B deux matrices hermitiennes de dimension n. Alors*

$$\lambda_i(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_i(A+B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_n(B), \quad i = 1, ...n$$

avec égalité dans l'inégalité de droite si et seulement s'il existe un vecteur non nul x tel que $Ax = \lambda_i(A)x$, $Bx = \lambda_n(B)x$ et $(A+B)x = \lambda_i(A+B)x$; égalité dans l'inégalité de gauche se produit si et seulement s'il existe un vecteur non nul x tel que $Ax = \lambda_i(A)x$, $Bx = \lambda_1(B)x$, et $(A+B)x = \lambda_i(A+B)x$.
Si A et B n'ont pas de vecteur propre commun, l'inégalité est donc stricte.

Les inégalités de Weyl et leurs corollaires concernent les perturbations additives d'une matrice hermitienne. D'autres inégalités des valeurs propres découlent en extrayant une sous-matrice principale d'une matrice hermitienne. Le résultat suivant est le théorème d'entrelacement de Cauchy, page 242 de [37], pour une matrice hermitienne bordante, parfois appelé le théorème de séparation.

Théorème 5.4.2 ***(Cauchy)*** *Soient B une matrice hermitienne de dimension n, $y \in \mathbb{C}^n$ et $a \in \mathbb{R}$.*

On considère la matrice A de dimention $n+1$ de la forme,

$$A = \begin{bmatrix} B & y \\ y^* & a \end{bmatrix}.$$

Alors on a

$$\lambda_1(A) \leq \lambda_1(B) \leq \lambda_2(A) ... \leq \lambda_n(A) \leq \lambda_n(B) \leq \lambda_{n+1}(A)$$

dans laquelle $\lambda_i(A) = \lambda_i(B)$ si et seulement s'il existe un $z \in \mathbb{C}^n$ tel que $Bz = \lambda_i(B)z$, $y^*z = 0$, et $Bz = \lambda_i(A)z$; $\lambda_i(B) = \lambda_{i+1}(A)$ si et seulement s'il existe un $z \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $Bz = \lambda_i(B)z$, $y^*z = 0$ et $Bz = \lambda_{i+1}(A)z$. Si aucun vecteur propre de B n'est orthogonal à y, alors l'inégalité est stricte.

Remarque 5.4.1 *La somme de deux matrices de dimension n donne toujours une matrice de même dimension, mais pour le Laplacien d'un graphe le cas n'est pas toujours simple. Si on considère deux graphes $G_1 = (V_1, \vec{E_1})$ et $G_2 = (V_2, \vec{E_2})$, la somme $S_{G_1} + S_{G_2} = S_{G_1 \cup G_2}$ si et seulement si $V_1 = V_2$ et $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ce qui explique la considération dans la proposition 4.2.2.*

5.4.2 Comparaison des valeurs propres

Le but de cette partie est de trouver la relation entre le poids de sommet habituel sur un sous-graphe H d'un graphe fini G et son poids de bords, pour comparer des valeurs propres sur H et G.

Théorème 5.4.3 *[27] Soit G un graphe fini, soit H un sous-graphe de G (c'est à dire un graphe issu de G en supprimant k sommets et toutes les arêtes adjacentes). Alors*

$$\lambda_2(H) \geq \lambda_2(G) - k.$$

$\lambda_2(G)$ désigne la première valeur propre non nulle de Laplacien symétrique sur G.

Une autre vision de ce théorème pour un graphe pondéré fini peut être intéressante. Le but ici est d'introduire la relation entre le poids usuel d'un sommet sur un sous-graphe H de G et son poids d'arêtes. Comme le poids β_G sur le graphe G est défini par:

$$\beta_G(x) = \sum_{\substack{y \in V_x \\ y \in V_G}} a(x, y)$$

alors pour un sous-graphe H de G on a;

$$\beta_G(x) = \beta_H(x) + \beta_{\partial H}(x)$$

avec

$$\beta_H(x) = \sum_{\substack{y\in V_x \\ y\in V_H}} a(x,y) \text{ et } \beta_{\partial H}(x) = \sum_{\substack{y\in V_x \\ y\in \partial V_H}} a(x,y)$$

en effet:

$$\begin{aligned}\beta_G(x) &= \sum_{\substack{y\in V_x \\ y\in V_G}} a(x,y) \\ &= \sum_{\substack{y\in V_x \\ y\in V_H}} a(x,y) + \sum_{\substack{y\in V_x \\ y\in \partial V_H}} a(x,y)\end{aligned}$$

Pour la proposition suivante, on garde les mêmes notations et définitions considérées dans le chapitre 4.

Proposition 5.4.1 *Soit $H = (V_H, \vec{E}_H)$ un sous-graphe d'un graphe fini $G = (V_G, \vec{E}_G)$, alors la première valeur propre non nulle de S_H satisfait:*

$$\lambda_2(S_H) \geq \lambda_2(S_G) - \alpha_H$$

où

$$\alpha_H = \sup_{x\in H} \frac{\beta_{\partial H}(x)}{m(x)}.$$

Preuve:

Soit g une fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_2(S_H)$, on définit la fonction f sur V_G par:

$$f = \begin{cases} g & sur \ \ V_H \\ 0 & sinon \end{cases}$$

d'après le principe de Rayleigh (4.1),

$$\lambda_2(S_G) = \min_{f\neq 0,\ (f,1)_m=0} \mathcal{R}(f)$$

ainsi on a

$$\begin{aligned}\lambda_2(S_G)(f,f)_m &\leq (S_G f, f)_m \\ &\leq (S_H g, g)_m + \sum_{x\in V_H} \sum_{\substack{y\in V_x \\ y\in \partial V_H}} a(x,y) g^2(x) \\ &\leq \lambda_2(H)(g,g)_m + \sum_{x\in V_H} \beta_{\partial H}(x) g^2(x)\end{aligned}$$

donc

$$\lambda_2(S_G)(g,g)_m \leq \lambda_2(H)(g,g)_m + \alpha_H(g,g)_m$$

d'où le résultat.

□

Remarque 5.4.2 *Cette inégalité est optimale.*
En effet, si on considère le digraphe simple complet G_n à n sommets, H un sous-graphe de G_n, donc il va être un digraphe complet noté par G_r avec $r \leq n$, on a

$$\sigma(S_{G_n^s}) = \{0, n, n\} \text{ et } \alpha_{G_r^s} = n - r,$$

et alors

$$\lambda_2(S_H) = \lambda_2(S_G) - \alpha_H = n - (n - r).$$

On s'intéresse à l'étude de quelques propriétés de l'invariant α_H, on a l'interprétation suivante:

Observation 5.4.1 *Soit $H = (V_H, \vec{E}_H)$ un sous-graphe fini de G*

$$\alpha_H \geq h(V_H)$$

en effet, soit $x \in V_H$, on a

$$\alpha_H m(x) \geq \beta_{\partial H}(x)$$

donc

$$\alpha_H m(V_H) \geq b(\partial_E V_H)$$

ce qui implique que

$$\alpha_H \geq \frac{b(\partial_E V_H)}{m(V_H)} \geq h(V_H).$$

Bibliography

[1] S. Akkouch. *Sur la théorie spectrale des opérateurs de Schrödinger discrets*. PhD thesis, Institut des Mathématiques de Bordeaux, Novembre 2010. 64

[2] M. Akkouchi. Remarks on the spectrum of bounded and normal operators on Hilbert spaces. *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, 16:7–14, 2008. 97

[3] C. Anné and N. Torki-Hamza. The Gauss-Bonnet operator of an infinite graph. *Anal. Math. Phys.*, 16:137–159, 2015. 15

[4] Y. Arlinskii and V. Zagrebnov. Numerical range and quasi-sectorial contractions. *Anal. Math. Phys.*, 16:33–43, 2010. 34

[5] A. Aslanyan and E. B. Davies. Spectral instability for some Schrödinger operators. *Numer. Math.*, 85:525–552, 2000. 11

[6] H. Ayadi. *Opérateur de Gauss-Bonnet semi-Fredholm et propriétés spectrales sur les graphes infinis*. PhD thesis, Université de Carthage et Université de Nantes, Novembre 2015. 98

[7] M. Balti. Non self-adjoint Laplacians on a directed graph. *Preprint*, 2016. 40

[8] M. Balti. On the eigenvalues of non symmetric directed graphs. *Complex Analysis and Operator Theory, (DOI: 10.1007/s11785-016-0615-7)*, 2016. 69

[9] F. Bauer, M. Keller, and R. K. Wojciechowski. Cheeger inequalities for unbounded graph Laplacians. *Journal of the European Mathematical Society*, 17:259–271, 2015. 24, 46

[10] J. Bell. *Decomposition of the spectrum of a bounded linear operator*. Department of Mathematics, University of Toronto. Individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/SVD.pdf., 2014. 98

[11] B. Benson. Sturm-Liouville estimates for the spectrum and Cheeger constant. *International Mathematics Research Notices*, 2015:7510–7551, 2015. 13, 14, 89

[12] S. K. Berberian. The numerical range of a normal operator. *Journal of the European Mathematical Society*, 31:479–483, 1964. 30, 97

[13] N. Biggs. *Algebraic graph theory*. Cambridge University Press, 1974. 15

[14] R. Brooks. On the spectrum of non-compact manifolds with finite volume. *Mathematische Zeitschrift*, 17:425–432, 1984. 62

[15] P. Buser. A note on the isoperimetric constants. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 17:213–230, 1982. 40

[16] I. Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*. Academic Press, INC, 1984. 12

[17] J. Cheeger. A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. *Problems in Analysis, (R. C. Gunning, ed.) Princeton Univ. Press*, 17:195–199, 1970. 12, 40

[18] F. R. K. Chung. Laplacians of graphs and Cheeger's inequalities. *"Combinatorics, Paul Erdös is eighty", J. Bolyai Soc. Math. Stud., Budapest*, 2:157–172, 1996. 40, 46

[19] Y. Colin de Verdière. *Spectres de graphes*. Cours spécialisés. Société Mathématique de France, 1998. 42, 51

[20] Y. Colin de Verdière, N. Torki-Hamza, and F. Truc. Essential self-adjointness for combinatorial Schrödinger operators II- Metrically non complete graphs. *Mathematical Physics Analysis and Geometry*, 14:21–38, 2011. 12, 13

[21] Y. Colin de Verdière, N. Torki-Hamza, and T. Truc. Essential self-adjointness for combinatorial Schrödinger operators III-Magnetic fields. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 6:599–611, 2011. 53

[22] M. Demuth, M. Hansmann, and G. Katriel. On the discrete spectrum of non-selfadjoint operators. *J. Funct. Anal.*, 257:2742–2759, 2009. 11

[23] R. Diestel. *Graph theory*. Springer-Verlag New York, 2005. 15

[24] J. Dodziuk. Elliptic operator on infinite graphs. *Analysis, geometry and topology of elliptic operators, World Sci. Publ., Hackensack NJ.*, 17:353–368, 2006. 15, 24, 40

[25] H. Donnelly and P. Li. Pure point spectrum and negative curvature for noncompact manifolds. *Duke Mathematical Journal*, 46:497–503, 1979. 12, 53

[26] W. D. Evans, R. T. Lewis, and A. Zettl. Non self-adjoint operators and their essential spectra. *Lecture Notes in Math.*, 1032:123–160, 1983. 11, 65, 99

[27] M. Fiedler. Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 23:298–305, 1973. 13, 14, 69, 103

[28] R. L. Frank, A. Laptev, and R. Seiringer. A sharp bound on eigenvalues of Schrödinger operators on the half-line with complex-valued potentials. *Journal of the European Mathematical Society*, 214:39–44, 2011. 11

[29] K. Fujiwara. The Laplacian on rapidly branching trees. *Duke Mathematical Journal*, 83:191–202, 1996. 12, 13, 45, 49, 52, 53, 56

[30] S. Golénia. Hardy inequality and Weyl asymptotic for discrete Laplacians. *J. Funct. Anal.*, 266:2662–2688, 2014. 53

[31] L. Golinskii and S. Serra-Capizzano. The asymptotic properties of the spectrum of non symmetrically perturbed Jacobi matrix sequences. *Journal of Approximation Theory*, 17:84–102, 2006. 34

[32] A. Grigor'yan. *Analysis on graphs*. Lecture Notes, University of Bielefeld, WS, 2011/2012. 12, 36, 40, 44, 45, 46, 51, 76, 77

[33] K. E. Gustafson and K. M. R. Duggirala. *Numerical range, the field of values of linear operators and matrices*. Springer, New York, 1997. 94

[34] S. Haeseler, M. Keller, D. Lenz, and R. K. Wojciechowski. Laplacians on infinite graphs: Dirichlet and Neumann boundary conditions. *Journal of Spectral Theory*, 2:397–432, 2012. 24

[35] M. Hansmann. An eigenvalue estimate and its application to non-selfadjoint Jacobi and Schrödinger operators. *Lett. Math. Phys.*, 98:79–95, 2011. 11

[36] M. Hasanov. Spectral problems for operator pencils in non-separated root zones. *Turkish Journal of Mathematics*, 31:43–52, 2007. 70

[37] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 1996. 14, 84, 87, 101, 102

[38] K. Jahedi and B. Yousefi. Numerical ranges of operators acting on Banach spaces. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 62:495–503, 2012. 30

[39] A. Jeribi. *Spectral theory and applications of linear operators and block operator matrices*. Springer International Publishing, 2015. 99

[40] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelburg and New York, 1976. 15, 26, 30, 32, 55, 94

[41] M. Keller. The essential spectrum of the Laplacian on rapidly branching tessellations. *Mathematische Annalen*, 346:51–66, 2010. 13, 52, 53, 56, 62

[42] M. Keller and D. Lenz. Unbounded Laplacians on graphs: basic spectral properties and the heat equation. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 5:198–224, 2010. 45

[43] M. Keller and D. Lenz. Dirichlet forms and stochastic completeness of graphs and subgraphs. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2012:189–223, 2012. 45

[44] P. Kurasov, G. Malenovà, and S. Naboko. Spectral gap for quantum graphs and their connectivity. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46:275–309, 2013. 13, 83, 86

[45] R. T. Lewis. Applications of a comparison for quasi-accretive operators in a Hilbert space. *In: Everitt W., Sleeman B. (eds) Ordinary and Partial Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg*, 964:422–434, 1982. 11, 12, 15, 39, 56, 65, 93, 100

[46] R. G. Pinsky. On domain monotonicity for the principal eigenvalues 1 of the Laplacian with a mixed Dirichlet-Neumann boundary condition. *Contemp. Math.*, 387:245–252, 2005. 12

[47] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern Mathematical Physics*. I. Academic Press, 1980. 25

[48] R. Schnaubelt. *Lecture notes spectral theory*. Karlsruher Institut für Technologie, 2012. 33

[49] J. Sjöstrand. *Spectral properties of non self-adjoint operators*. E. D. P., Exposé n. I (2009) p1-111, 2009. 11

[50] P. Skoufranis. *Numerical range of operators*. Lecture Notes. Department of Mathematics and Statistics, York University, 2014. 34, 93, 94, 95, 96, 97

[51] L. Soukup. Infinite combinatorics: from finite to infinite. *In Horizons of combinatorics of Bolyai Soc. Math. Stud. Springer, Berlin*, 17:789–213, 2008. 53

[52] T. Sunada. Discrete geometric analysis. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 77:51–86, 2008. 40

[53] A. Torgasev and M. Petrovic. On the spectrum of infinite graph. *Mathematical Notes*, 80:773–785, 2006. 12, 21, 82

[54] N. Torki-Hamza. Laplaciens de graphes infinis I Graphes métriquement complets. *Confluentes Mathematici*, 2:333–350, 2010. 12, 13, 56, 57, 61

[55] N. Torki-Hamza. *Graphes et spectres*. Cours de mastere 2. Faculté des Sciences de Bizerte, 2011-2012. 44

[56] N. L. Trefethen. *Spectra and pseudospectra, the behavior of non normal matrices and operators*. Princeton University Press 41 William Street, Princeton, New Jersey, 2005. 11

[57] F. Wolf. On the essential spectrum of partial differential boundary problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 12:211–228, 1959. 100

[58] D. Yafaev. *Analyse microlocale et théorie spectrale*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2014. 25

List of Figures

2.1 Digraphe $\mathbb{Z}$. 18
2.2 Graphe $\mathbb{Z}$. 18
2.3 Graphe $\mathbb{N}$. 18
2.4 Le graphe en étoile S_6 19
2.5 Cycle 19
2.6 H sous-graphe de G 22

3.1 Arbre digraphe 8-régulier 42
3.2 Arbre 4-régulier 43
3.3 W dans le plan complexe. 60
3.4 Le graphe $\mathbb{N}$ 61
3.5 Le digraphe $\mathbb{Z}$ 66

4.1 Graphe orienté G. 73
4.2 Graphe cyclique 74
4.3 Graphe H-type-fleur 80
4.4 Ajout d'un cycle 84
4.5 Ajout d'une arête 86
4.6 Les parties A, U et B dans le graphe G. 90

Thèse de Doctorat

Marwa BALTI

Laplaciens non auto-adjoints sur un graphe orienté.

Non self-adjoint Laplacians on a directed graph.

Résumé

Cette thèse traite des questions de théorie spectrale des graphes portant sur les opérateurs non auto-adjoints. On considère un Laplacien sur un graphe pondéré orienté avec un poids non symétrique sur les arêtes. On s'intéresse aux différentes propriétés spectrales de ce Laplacien en s'appuyant sur l'étude d'autres opérateurs auto-adjoints pour obtenir des résultats sur son spectre. En outre, on établit des inégalités isopérimétriques relatives à l'image numérique du Laplacien non symétrique. Ces inégalités isopérimétriques servent à montrer l'absence de spectre essentiel de notre Laplacien sur des graphes *lourds à l'infini*. Ensuite, on définit un opérateur spécial auto-adjoint sous une hypothèse géométrique donnée et on compare son spectre essentiel avec celui du Laplacien non auto-adjoint considéré. Après, on étudie le problème de la monotonicité et de la comparaison des valeurs propres. On examine comment la perturbation de graphe peut affecter les valeurs propres. Notre approche est de prendre des techniques bien connues en dimension finie sur l'analyse matricielle et on cherche à étudier comment elles peuvent être généralisées pour les Laplaciens auto-adjoints de graphe.

Mots clés

graphes orienté, Laplacien non auto-ajoint, image numérique, inégalités de Cheeger, spectre et spectre essentiel.

Abstract

This thesis deals with spectral graph theory issues relating to questions of spectral theory of non self-adjoint operator. We consider a Laplacian on a directed weighted graph with non symmetric edge weights. We are interested on different spectral properties of the Laplace operator by pressing the study of other self-adjoint operators to deliver results on its spectrum. Moreover we establish isoperimetric inequalities to show the absence of essential spectrum of Laplacian on *heavy end* directed graphs. Next, we define a special self-adjoint operator in a given special hypothesis and compare its essential spectrum with that of the considered non self-adjoint Laplacian. After, we study the problem of monotonicity and comparison of eigenvalues. We investigate how perturbations of a graph can affect its eigenvalues. Our approach is to take well known techniques from finite dimensional matrix analysis and show how they can be generalized for self-adjoint graph Laplacians.

Key Words

Directed graph, non self-adjoint Laplacian, numerical range, Cheeger inequalities, spectrum and essential spectrum.