



Reconstruction de sollicitations dynamiques par méthodes inverses

Duc Toan Tran

► To cite this version:

Duc Toan Tran. Reconstruction de sollicitations dynamiques par méthodes inverses. Mécanique [physics.med-ph]. Université Claude Bernard Lyon 1, 2014. Français. NNT : . tel-01417230

HAL Id: tel-01417230

<https://hal.science/tel-01417230>

Submitted on 15 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
ÉCOLE DOCTORALE MÉCANIQUE - ÉNERGÉTIQUE - GÉNIE CIVIL
ET ACOUSTIQUE

THÈSE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR EN MÉCANIQUE

présentée par

Duc Toan TRAN

Reconstruction de sollicitations dynamiques par méthodes inverses

préparée au sein du Laboratoire de Biomécanique et Mécanique des Chocs

sous la direction du

Prof Eric JACQUELIN

Soutenue publiquement le 29 Août 2014, devant le jury composé de :

M. Abdellatif KHAMLI	Prof, Université de Tétouan, Maroc	Rapporteur
M. Frédéric LEBON	Prof, Université d'Aix-Marseille	Rapporteur
M. Huy Hoang PHAM	Prof associé, Université Technologique de Ho Chi Minh, Viet Nam	Examineur
M. Abdelkrim BENNANI	Prof, HES, Genève, Suisse	Co-directeur de thèse
M. Eric JACQUELIN	Prof, Université Claude Bernard Lyon 1	Directeur de thèse

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que je remercie les personnes, qui ont contribué à la réalisation de ce travail de recherche.

Tout d'abord, je souhaite remercier en premier lieu mon directeur de thèse, Monsieur Eric JACQUELIN, pour sa gentillesse, ses conseils pertinents, son soutien et son encouragement durant la thèse. Je sais que ces quelques mots ne suffisent pas pour le remercier pour tout l'effort et la patience qu'il a fourni afin de corriger les fautes de français et de m'aider depuis des années. Sans lui, cette thèse n'aurait pas été possible.

Je remercie également Monsieur Abdelkrim BENNANI, pour son aide, ses précieux conseils, son soutien surtout pendant les moments de doute et de difficultés.

J'adresse mes remerciements particulièrement aux membres de mon jury, les deux rapporteurs, Monsieur Frédéric LEBON, et Monsieur Abdellatif KHAMLICHI pour avoir consacré du temps à la lecture ce manuscrit, Monsieur Huy Hoang PHAM qui a accepté d'assister à ma soutenance de thèse.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à Madame Sylvie RONEL, Monsieur Michel MASSENZIO, pour l'aide précieuse, leur soutien et leurs encouragements. Ils ont toujours été disponibles pour m'aider et m'a permis de mener cette thèse à son terme.

Je remercie également mes camarades, mes amis, les doctorants, les membres de l'équipe "Structure", pour leur soutien moral et pour les échanges que j'ai pu avoir avec eux.

J'exprime toutes mes reconnaissances à ma famille de Vietnam, mes parents, mes frères et mes soeurs de m'avoir toujours soutenu pendant toutes ces années d'études.

Enfin, je n'oublierai jamais ma femme, Hong Phan, pour sa patience, son soutien, son amour tout au long du parcours.

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1

Président de l'Université

Vice-président du Conseil d'Administration

Vice-président du Conseil des Etudes et de la Vie Universitaire

Vice-président du Conseil Scientifique

Directeur Général des Services

M. François-Noël GILLY

M. le Professeur Hamda BEN HADID

M. le Professeur Philippe LALLE

M. le Professeur Germain GILLET

M. Alain HELLEU

COMPOSANTES SANTE

Faculté de Médecine Lyon Est – Claude Bernard

Faculté de Médecine et de Maïeutique Lyon Sud – Charles

Mérieux

Faculté d'Odontologie

Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques

Institut des Sciences et Techniques de la Réadaptation

Département de formation et Centre de Recherche en Biologie Humaine

Directeur : M. le Professeur J. ETIENNE

Directeur : Mme la Professeure C. BURILLON

Directeur : M. le Professeur D. BOURGEOIS

Directeur : Mme la Professeure C. VINCIGUERRA

Directeur : M. le Professeur Y. MATILLON

Directeur : Mme. la Professeure A-M. SCHOTT

COMPOSANTES ET DEPARTEMENTS DE SCIENCES ET TECHNOLOGIE

Faculté des Sciences et Technologies

Département Biologie

Département Chimie Biochimie

Département GEP

Département Informatique

Département Mathématiques

Département Mécanique

Département Physique

UFR Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives

Observatoire des Sciences de l'Univers de Lyon

Polytech Lyon

Ecole Supérieure de Chimie Physique Electronique

Institut Universitaire de Technologie de Lyon 1

Ecole Supérieure du Professorat et de l'Education

Institut de Science Financière et d'Assurances

Directeur : M. F. DE MARCHI

Directeur : M. le Professeur F. FLEURY

Directeur : Mme Caroline FELIX

Directeur : M. Hassan HAMMOURI

Directeur : M. le Professeur S. AKKOUCHE

Directeur : M. Georges TOMANOV

Directeur : M. le Professeur H. BEN HADID

Directeur : M. Jean-Claude PLENET

Directeur : M. Y. VANPOULLE

Directeur : M. B. GUIDERDONI

Directeur : M. P. FOURNIER

Directeur : M. G. PIGNAULT

Directeur : M. C. VITON

Directeur : M. A. MOUGNIOTTE

Directeur : M. N. LEBOISNE

Résumé

Dans le domaine de l'ingénierie, connaître le chargement appliqué sur une structure permet de résoudre des problèmes directs dont le résultat est le champ de déplacement, de déformation dans une structure. Il est alors possible d'effectuer un dimensionnement. Cependant, parfois ce chargement doit être identifié a posteriori. Malheureusement, il n'est pas toujours possible de mesurer ce chargement : ainsi, par exemple, on ne sait pas a priori où aura lieu le chargement, ou bien il n'est pas possible de placer un capteur sans l'endommager ou encore il peut nécessiter un encombrement trop important. On a alors recours à des mesures indirectes de déplacement, de déformation, d'accélération et on est alors amené à résoudre des problèmes inverses, qui sont en général mal posés. Il est alors nécessaire d'ajouter une (des) conditions supplémentaire(s) pour obtenir une solution unique et stable : c'est la régularisation du problème. Ces techniques sont bien connues et leur essor est dû à l'utilisation des décompositions en valeurs singulières des matrices de transfert. Toutefois, elles nécessitent l'utilisation d'un paramètre additionnel qui pondère cette condition supplémentaire : la détermination de ce paramètre est délicate. Peu de travaux ayant été réalisés pour tester de façon intensive les méthodes usuelles de régularisation (Tikhonov et troncature de la (G)SVD), en association avec les différents critères de détermination du paramètre de régularisation et les différentes réponses possibles, on a effectué un tel travail pour tirer des conclusions sur la méthodologie optimale. On a pu mettre en évidence que la mesure de l'accélération associée à un critère faisant intervenir les dérivées du signal à reconstruire donne en général les meilleurs résultats sous réserve d'utiliser le critère GCV pour déterminer le paramètre de régularisation. Ces méthodes supposent que la localisation de la zone de chargement est connue. Aussi on s'est intéressée à déduire cette zone de chargement en tentant de reconstruire des chargements identiquement nuls. Cette identification a été effectuée aisément sous réserve qu'on ait peu de forces à identifier par rapport au nombre de mesures disponibles. En revanche une telle identification est délicate lorsqu'on n'a pas plus de mesures que de forces à identifier. Finalement on s'est tourné vers l'identification de chargement ayant plastifié la structure étudiée. On a alors essayé de reconstruire le chargement en supposant que la structure reste linéaire élastique, alors qu'elle a été plastifiée : on a utilisé la méthode du double chargement et effectué des simulations à l'aide du logiciel de simulation Ls-dyna. La force reconstruite fait alors apparaître une composante statique traduisant la déformation résiduelle dans la structure. Dans ce cas, la réponse à utiliser pour identifier le chargement est une déformation dans une zone non plastifiée.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte	1
1.2	Objectifs et cadre de la thèse	2
2	Bibliographie	3
2.1	Introduction	3
2.2	Position du problème	4
2.2.1	Hypothèses	4
2.2.2	Equation de convolution	5
2.2.3	Domaine temporel ou fréquentiel	6
2.2.3.1	Résolution temporelle	7
2.2.3.2	Résolution fréquentielle	8
2.2.4	Problème mal posé	9
2.3	Méthode de résolution	11
2.3.1	Nécessité de stabiliser la solution	11
2.3.2	Régularisation déterministe	11
2.3.2.1	Décomposition en valeurs singulières et sa généralisation [1]	12
2.3.2.2	Régularisation par troncature de la décomposition en valeur singulières (TSVD)	13
2.3.2.3	Régularisation de Tikhonov	14
2.3.3	Méthodes de choix du paramètre de régularisation	15
2.3.3.1	Critère de la courbe en L	15
2.3.3.2	Critère de validation croisée généralisée (GCV) [2]	17
2.3.3.3	Critère de quasi-optimalité (QO)	17
2.3.3.4	Critère de Morozov	18
2.3.4	Méthodes probabilistes	18
2.3.4.1	Maximum de vraisemblance	19
2.3.4.2	Approche bayésienne	19
2.4	Nature de la force reconstruite	20
2.4.1	Force d'impact idéale	20
2.4.2	Forces reconstruites	21
2.4.2.1	Force ponctuelle	21
2.4.2.2	Force répartie	22
2.5	Localisation	23
2.6	Conclusion	25

Table des matières

3	Analyse des différents processus de régularisation	26
3.1	Introduction	26
3.2	Présentation du cas test	27
3.2.1	Système étudié	27
3.2.2	Fonctions de transfert analytique d'une poutre	30
3.2.3	Reconstruction de la force	31
3.3	Régularisation via la norme de la force	33
3.3.1	Régularisation de Tikhonov	33
3.3.2	Régularisation par Troncature de la SVD	38
3.3.3	Critères de choix du paramètre de régularisation	43
3.3.3.1	Critère de la courbe en L	43
3.3.3.2	Critère GCV	46
3.3.3.3	Critère de quasi-optimalité (QOP)	46
3.3.4	Bilan intermédiaire	48
3.4	Régularisation via la norme de la dérivée de la force	48
3.4.1	Tikhonov	48
3.4.2	Troncature de la GSVD	53
3.4.3	Critères de choix du paramètre de régularisation	58
3.4.4	Bilan intermédiaire	58
3.5	Stabilisation via la norme de la dérivée seconde de la force	58
3.5.1	Tikhonov	58
3.5.2	Troncature de la GSVD	63
3.5.3	Critères de choix du paramètre de régularisation	67
3.5.4	Bilan intermédiaire	67
3.6	Bilan global des méthodes et critères de régularisation	67
3.7	Influence de la position du capteur	69
3.8	Conclusions	73
4	Identification et localisation	74
4.1	Position du problème	74
4.2	Position du problème étudié	75
4.2.1	Mise en équation	75
4.2.2	Système étudié	76
4.3	Identification d'une action identiquement nulle	76
4.3.1	Identification d'une action identiquement nulle	77
4.3.2	Discussion	79
4.3.2.1	Paramètre de régularisation	79
4.3.2.2	Sensibilité aux points de mesures	80
4.4	Identification de plusieurs ANN	82
4.4.1	Identification de 2 forces non nulles	82
4.4.2	Reconstruction d'une pression	82
4.4.3	Sous-identification de la pression	89
4.4.4	Application	90
4.5	Conclusions	92

Table des matières

5	Vers les structures à comportement non-linéaire	94
5.1	Introduction	94
5.2	Problématique	94
5.2.1	Méthode du double chargement	95
5.3	Plastification et reconstruction “linéaire”	97
5.3.1	Forces imposées	97
5.3.2	Reconstruction jusqu’à la limite élastique	98
5.3.3	Reconstruction avec plastification localisée	99
5.3.3.1	Reconstruction avec $F_1^*(t)$	99
5.3.3.2	Reconstruction avec $\alpha F_1^*(t)$	103
5.3.4	Reconstruction avec plastification étendue	108
5.4	Conclusion	110
6	Conclusion générale	111

Table des figures

2.1	Exemple de courbe en L	16
3.1	Poutre appuyée-appuyée	27
3.2	Force d'impact du type 1	28
3.3	Force d'impact du type 2	29
3.4	Force du type 3	29
3.5	Méthode d'identification d'impact par analyse inverse avec régularisation	31
3.6	(a) Bruit numérique, (b) Force reconstruite sans régularisation	32
3.7	Valeurs singulières de la matrice	32
3.8	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement	34
3.9	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation	34
3.9	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation	35
3.10	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération	35
3.11	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement	36
3.12	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation	36
3.13	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération	37
3.14	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement	37
3.15	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation	38
3.16	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération	38
3.17	Force reconstruite par TSVD en mesurant le déplacement	39
3.18	Force reconstruite par TSVD en mesurant la déformation	39
3.18	Force reconstruite par TSVD en mesurant la déformation	40
3.19	Force reconstruite par TSVD en mesurant l'accélération	40
3.20	Force reconstruite par TSVD en mesurant le déplacement	41
3.21	Force reconstruite par TSVD en mesurant la déformation	41
3.22	Force reconstruite par TSVD en mesurant l'accélération	42
3.23	Force reconstruite par TSVD en mesurant le déplacement	42
3.24	Force reconstruite par TSVD en mesurant la déformation	43
3.25	Force reconstruite par TSVD en mesurant l'accélération	43
3.26	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov avec le critère de la courbe en L	44
3.27	Méthode de Tikhonov	45
3.28	Courbe en L , méthode de troncature	45
3.29	Méthode de la troncature de la SVD, critère GCV	46
3.30	Fonction QOP, méthode de Tikhonov	47
3.31	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov - Critère QOP	47
3.32	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement	49

List des Figures

3.33	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation	49
3.33	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation	50
3.34	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération	50
3.35	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement	51
3.36	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation	51
3.37	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération	52
3.38	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement	52
3.39	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation	53
3.40	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération	53
3.41	Force reconstruite par TGSVD en mesurant le déplacement	54
3.42	Force reconstruite par TGSVD en mesurant la déformation	54
3.42	Force reconstruite par TGSVD en mesurant la déformation	55
3.43	Force reconstruite par TGSVD en mesurant l'accélération	55
3.44	Force reconstruite par TSVD en mesurant le déplacement	56
3.45	Force reconstruite par TGSVD en mesurant la déformation	56
3.46	Force reconstruite par TGSVD en mesurant l'accélération	56
3.47	Force reconstruite par TGSVD en mesurant le déplacement	57
3.48	Force reconstruite par TGSVD en mesurant la déformation	57
3.49	Force reconstruite par TGSVD en mesurant l'accélération	57
3.50	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement	59
3.51	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation	59
3.51	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation	60
3.52	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération	60
3.53	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement	61
3.54	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation	61
3.55	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération	61
3.56	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement	62
3.57	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation	62
3.58	Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération	62
3.59	Force reconstruite par TGSVD en mesurant le déplacement	63
3.60	Force reconstruite par TGSVD en mesurant la déformation	64
3.61	Force reconstruite par TGSVD en mesurant l'accélération	64
3.61	Force reconstruite par TGSVD en mesurant l'accélération	65
3.62	Force reconstruite par TGSVD en mesurant le déplacement	65
3.63	Force reconstruite par TGSVD en mesurant la déformation	65
3.64	Force reconstruite par TGSVD en mesurant l'accélération	66
3.65	Force reconstruite par TGSVD en mesurant le déplacement	66
3.66	Force reconstruite par TGSVD en mesurant la déformation	66
3.67	Force reconstruite par TGSVD en mesurant l'accélération	67
3.68	Erreur de reconstruction en fonction du paramètre de régularisation . . .	68
3.69	Erreur relative commise avec minimisation de la norme de la force	69
3.70	Erreur relative commise avec minimisation de la dérivée première	70
3.71	Erreur relative commise avec minimisation de la dérivée seconde	70
4.1	Discrétisation éléments finis de la poutre en 4 éléments : ddl et efforts nodaux	76
4.2	Évolution temporelle des actions appliquées	77
4.3	Forces identifiées selon (a) le ddl 4 (b) le ddl 2	78

List des Figures

4.4	(a) Ecart des AIN (b) Ecart des ANN en fonction des cas de mesures pour les différentes paires d'actions : paire 1 : 'o' ; paire 2 : '+' ; paire 3 : '*' ; paire 4 : 'x' ; paire 5 : '◇'	78
4.5	Actions identifiées selon (a) le ddl 5 (M_5) (b) le ddl 4 (F_4) pour le cas 8 des mesures.	79
4.6	Critères de choix du paramètre de régularisation : (a) courbe en L , (b) GCV, (c) quasi-optimalité	81
4.7	Valeurs singulières généralisées : (a) ensemble des mesures 1, (b) ensemble des mesures 10	82
4.8	Forces appliquées selon les ddl 2 (ligne pointillée) et 4 (ligne continue) . .	83
4.9	Ecart sur les forces identifiées pour les différents cas de mesures : F_2 : 'o' ; F_4 : '+'	83
4.10	Actions identifiées : (a) F_4 (b) F_6 (c) M_5 (d) M_7	84
4.11	Travail fourni par les forces (lignes continues) et les moments (lignes pointillées)	85
4.12	Critères donnant le paramètre de régularisation pour l'identification de la pression : (a) courbe en L , (b) GCV	85
4.13	Actions identifiées ($\lambda = 0, 1$) : (a) F_4 (b) F_6 (c) M_5 (d) M_7	86
4.14	Détermination du paramètre de régularisation pour l'identification de la pression : (a) courbe en L , (b) GCV	87
4.15	Actions identifiées ($\lambda = 6, 7$) : (a) F_4 (b) F_6	87
4.15	Actions identifiées ($\lambda = 6, 7$) : (c) M_5 (d) M_7	88
4.16	Erreurs sur les actions identifiées en fonction du nombre d'éléments finis : (a) critère GCV (b) courbe en L ; forces : 'o' et '◇' ; moments : '*' et 'x' .	88
4.17	Erreurs sur les actions identifiées en fonction du nombre d'éléments finis : F_4/F_8 : 'o' ; F_6/F_{12} : '◇' ; M_5/M_9 : '*' ; M_7/M_{13} : 'x'	89
4.18	Travail dû aux actions réelles (ligne pointillées) et travail dû aux actions identifiées (ligne continue) (a) pour F_4 et (b) F_6	90
4.19	Force réelle (ligne pointillée) et force identifiée (ligne continue) (a) F_2 , (b) F_4 , (c) F_6 , (d) F_8 , (e) F_{10} , (f) F_{12}	91
5.1	Poutre sur deux appuis soumise à une force ponctuelle	96
5.2	Modélisation de la poutre en 9 éléments	96
5.3	Double chargement : (a) forces imposées, (b) déplacements de la poutre au nœud 5	96
5.4	Force reconstruite à partir du déplacement : (a) par la méthode de Tikhonov, (b) par la troncature de la SVD	97
5.5	Forces imposées	98
5.6	Force F_2 reconstruite à l'aide de la réponse en déplacement par la méthode de Tikhonov, $L=ID$	99
5.7	Force reconstruite $F_2(t)$ - déplacement mesuré au nœud 5 - méthode de Tikhonov, $L=Id$	100
5.8	Force reconstruite $F_2(t)$ - déplacement mesuré au nœud 2 - méthode de Tikhonov, $L=Id$	101
5.9	Ecart sur $F_2(t)$ - déplacement mesuré au nœud 5 et au nœud 2 - méthode de Tikhonov - courbe en L , $L=ID$	101

List des Figures

5.10	Force reconstruite $F_2(t)$ - déformation mesurée au nœud 2 - méthode de Tikhonov, $L=Id$	102
5.11	Force reconstruite $\alpha_0 F_2^*(t)$ à partir du déplacement mesuré au nœud 5 - méthode de Tikhonov, $L=Id$	103
5.12	Force reconstruite $\alpha_1 F_2^*(t)$ à partir du déplacement mesuré au nœud 5 - méthode de Tikhonov, $L=Id$	104
5.13	Force reconstruite $\alpha_2 F_2^*(t)$ à partir du déplacement mesuré au nœud 5 - méthode de Tikhonov, $L=Id$	104
5.13	Force reconstruite $\alpha_2 F_2^*(t)$ à partir du déplacement mesuré au nœud 5 - méthode de Tikhonov, $L=Id$	105
5.14	Force reconstruite $\alpha_3 F_2^*(t)$ à partir du déplacement mesuré au nœud 5 - méthode de Tikhonov, $L=Id$	105
5.15	Erreur de reconstruction de F_2 en fonction de $\alpha(F_1)$	106
5.16	Force reconstruite $F_2(t)$ avec $\alpha=1,2$ - mesure de déformation au nœud 5 - méthode de Tikhonov, $L=Id$	107
5.17	Force reconstruite $F_2(t)$ - déplacement mesuré au nœud 2 - méthode de Tikhonov, $L=Id$	108
5.18	Force reconstruite $F_2(t)$ - déformation mesurée au nœud 2 - méthode de Tikhonov - courbe en L, $L=ID$	109
5.19	Erreur reconstruit $F_2(t)$ par la méthode de Tikhonov avec le critère courbe en L, $L=ID$, en utilisant (a) le déplacement en nœud 2 (b) (a) le déformation en nœud 2	109

Liste des tableaux

3.1	Caractéristiques de la poutre	27
3.2	Paramètre de régularisation et erreurs relatives ; fonctionnelle stabilisatrice L_0	71
3.3	Paramètre de régularisation et erreurs relatives ; fonctionnelle stabilisatrice L_1	71
3.3	Paramètre de régularisation et erreurs relatives ; fonctionnelle stabilisatrice L_1	72
3.4	Paramètre de régularisation et erreurs relatives ; fonctionnelle stabilisatrice L_2	72
4.1	Caractéristiques de la poutre	76
4.2	Liste des différents cas de mesures	77
4.3	Liste des ddl associés aux actions à identifier	77
5.1	Caractéristiques de la poutre étudiée	97
5.2	Paramètres des forces imposées	98
5.3	Erreurs relatives de reconstruction pour la méthode de Tikhonov et la méthode de la troncature de la SVD	98
5.4	Valeur maximale de la force $F_2(t)$ - α	99
5.5	Erreur sur $F_2(t)$ en mesurant le déplacement ou la déformation au nœud 2 ($N2$) et au nœud 5 ($N5$)	102
5.6	Valeur maximale de $F_1(t)$ - α	103
5.7	Erreur relative sur $F_2(t)$ - déformation mesurée au nœud 5 ($N5$) et au nœud 2 ($N2$)	107
5.8	Erreur de reconstruction de $\alpha_i F_2(t)$ - déplacement mesuré au nœud 2 - méthode de Tikhonov, $L=ID$	108
5.9	Erreur relative sur l'identification de $F_2(t)$ - déplacement mesuré au nœud 2	108

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

Les divers théories ou modèles mathématiques qui ont été élaborés dans le cadre des sciences de l'ingénieur ont pour objectif de prévoir la réponse d'un système, connaissant des conditions initiales, des conditions aux limites, des actions. On est alors dans le cadre de problèmes directs.

Reconstruire des données, identifier des caractéristiques sont aussi deux grandes préoccupations qui couvrent tous les domaines de la physique et des sciences de l'ingénieur. Elles entrent dans le cadre de problèmes inverses dont l'objectif est, connaissant certaines réponses d'un système, d'en déduire les caractéristiques (le modèle) du système ou les actions qui ont conduit à ces réponses. Cependant il existe de nombreux cas où la solution n'est pas unique : des systèmes différents, des actions différentes peuvent conduire à des réponses identiques. Cette non-unicité traduit que le problème est mal-posé au sens de Hadamard [3] : en particulier il est très sensible aux incertitudes de mesure. Si l'augmentation des capacités des machines a rendu possible la résolution de problèmes directs très complexes, cela n'a pas eu le même effet sur les problèmes inverses. En effet ceux-ci sont souvent mal conditionnés et de ce fait, la propagation des imprécisions se fait très rapidement et en s'amplifiant à chaque calcul : cela conduit à des résultats divergents.

Ces problèmes ont été très largement étudiés en géophysique [4] pour évaluer les propriétés du globe terrestre. L'analyse et la reconstruction d'images sont également des branches très actives étudiant les problèmes inverses [5] ; les applications sont nombreuses en particulier dans le domaine médical (tomographie).

Les problèmes inverses qui nous intéressent concernent la dynamique de structures. De ce fait, les réponses qui sont mesurées, sont alors des déplacements, des déformations ou encore des accélérations. En dynamique de structures on est confronté à deux types de problèmes inverses [6] : le recalage de modèles et la reconstruction de chargements dynamiques qui ont conduit aux réponses mesurées. **C'est sur ce dernier type de problème inverse que nous avons travailler tout au long de notre thèse.**

La reconstruction de chargement présente deux volets : la localisation du chargement appliqué et l'évolution de la charge au cours du temps. En outre le chargement peut être multiple : plusieurs forces ponctuelles, plusieurs couples peuvent être appliqués simultanément ainsi que des pressions non forcément uniformes.

L'analyse de la bibliographie montre que peu d'études ont réellement été menées sur

la reconstruction de chargements multiples. Il en est de même pour la reconstruction de pressions : en général, la pression inconnue étant uniformément répartie, son identification se ramène à l'identification d'une seule force. Pour finir, on remarquera que si le système étudié est représenté par un modèle éléments finis, alors l'identification d'une pression (uniforme ou non) se ramène à identifier des forces et/ou des couples situés aux nœuds des éléments sur lesquels la pression est appliquée.

1.2 Objectifs et cadre de la thèse

Les problèmes inverses étant mal-posés, Tikhonov [7] a proposé dans le début des années soixante une méthode dite de régularisation. Elle consiste à ajouter au problème inverse à résoudre, des conditions supplémentaires (fonctionnelle stabilisante) qui stabilise la solution : un paramètre dit de régularisation permet alors de prendre plus ou moins en compte ces conditions supplémentaires. Cette méthode s'est largement répandue [1] et est très utilisée. Toutefois, il reste le problème des conditions supplémentaires à imposer et la détermination du paramètre de régularisation : diverses fonctionnelles et différents critères existent. Un état de l'art de ces méthodes est présenté dans le chapitre 2. On présentera également brièvement les méthodes probabilistes de régularisation, même si elles ne seront pas utilisées dans ce travail.

Notre objectif dans cette thèse n'est pas de proposer de nouvelles procédures de régularisation ni de nouveaux critères pour évaluer le paramètre de régularisation. Nous avons voulu essayer de mettre en évidence des “bonnes pratiques” qui ont de grandes chances d'aboutir à l'identification satisfaisante du chargement. Pour ce faire nous avons effectué un grand nombre de simulations utilisant les deux grandes méthodes de régularisation déterministe associées aux différents critères permettant l'obtention du paramètre de régularisation pour différentes fonctionnelles stabilisantes afin d'être en mesure de tirer des conclusions sur l'opportunité de choisir telle ou telle méthode. Ceci a fait l'objet du chapitre 3.

Dans le chapitre 4, nous avons tenté de répondre à une double problématique : l'identification de chargements multiples et la localisation automatique du chargement.

Toutes les méthodes utilisées dans la littérature repose sur une hypothèse fondamentale : la structure a et garde un comportement linéaire élastique lors de l'application du chargement. Or il est clair qu'en pratique il est possible que des non-linéarités (géométrique, de comportement) apparaissent durant le chargement. Aussi, dans le chapitre 5, nous avons voulu voir dans quelle mesure il est possible de conserver cette hypothèse de linéarité pour identifier un chargement alors qu'en réalité on a plastifié plus ou moins localement la structure étudiée.

Chapitre 2

Bibliographie

2.1 Introduction

En dynamique de structures, nous pouvons être confronté à trois types de problèmes:

- La détermination de la “sortie” (réponse) à partir de “l’entrée” (solicitations) et des paramètres du système.

- La détermination des paramètres du système lorsqu’on connaît “l’entrée” et la “sortie”.

- La détermination de l’entrée à partir des paramètres du système et de la “sortie”.

Les problèmes de la première catégorie sont appelés problèmes directs, les deuxième et troisième types sont des problèmes inverses.

Dans cette recherche, nous nous intéressons aux problèmes du troisième type et dans notre cas, il s’agit d’identifier une force de chargement et plus généralement les actions auxquelles la structure a été soumise. Le problème de l’identification d’un chargement sur les structures mécaniques peut être considéré comme l’inverse du problème direct. Cependant, ces problèmes inverses soulèvent des difficultés particulières liées au caractère mal posé du problème. Malgré ces difficultés, les problèmes inverses ont été étudiés par de nombreux chercheurs dans différents domaines des sciences de l’ingénieur : dynamique des structures, productique, aéronautique, génie civil, etc...

L’identification des forces dynamiques qui s’exercent sur un système est un enjeu important dans divers domaines, tels que le contrôle des vibrations, la prédiction de la fatigue,... Par exemple, dimensionner des structures impactées nécessite de connaître la sollicitation imposée par l’interaction entre les structures. Cette sollicitation dépend à la fois de paramètres locaux et du comportement global de la structure. Pour déterminer la sollicitation, il faudrait pouvoir instrumenter précisément au niveau du point d’impact. Or, nombreuses sont les situations où la mesure directe des forces, en utilisant des capteurs de force, est inefficace, ou impossible. Tel est le cas, par exemple, lorsque des forces sont appliquées à des endroits inaccessibles ou difficilement accessibles de la structure, ou lorsque la mise en place de capteurs de force conduit à d’importants changements dans les caractéristiques dynamiques du système mécanique. Pour résoudre ce problème, on utilise des méthodes indirectes basées sur la réponse dynamique de la structure mesurée en certains points afin de prédire la localisation et l’amplitude des charges appliquées.

Ce chapitre présente une revue de la littérature concernant les méthodes inverses. Dans

un premier temps on donnera les hypothèses générales de cette étude et on mettra en équation notre problème. Puis nous donnerons les différentes méthodes qui sont utilisées actuellement pour résoudre un problème inverse. Ces méthodes reposent sur la connaissance de la zone sur laquelle la structure est chargée : nous terminerons donc cette étude bibliographique en exposant les différentes méthodes permettant de localiser le chargement.

2.2 Position du problème

2.2.1 Hypothèses

Les problèmes de l'identification sont souvent difficiles, car on a une connaissance limitée des réponses mesurées, en raison de la complexité de la structure, le manque d'accès à certains emplacements, etc.

C'est pourquoi nous nous placerons dans un cadre restreint dans lequel nous ferons les hypothèses supplémentaires suivantes :

1. Première hypothèse : comportement linéaire élastique de la structure.

La réponse d'une structure à une sollicitation sera supposée dépendre linéairement de l'excitation. Cela suppose que la structure est constituée d'un matériau dont la loi de comportement est linéaire élastique. Cela signifie que le comportement de la structure n'est pas modifié au cours de la sollicitation : en particulier cela signifie que la déformation de la structure peut être considérée comme suffisamment petite pour négliger toute non-linéarité géométrique. Dans de tels cas, la réponse $s(t)$ en un point de la structure est liée à la force incidence $f(t)$ par l'intégrale de convolution linéaire 5.1 qui sera définie au sous-paragraphe suivant.

2. Seconde hypothèse : connaissance des fonctions de transfert entre le point d'impact et les points de mesures. On suppose connues les fonctions de transfert (ou les réponses impulsionnelles) entre les points d'excitations et les points de mesures : cela permettra de constituer les matrices de transfert. Les fonctions de transfert peuvent être estimées de manière, analytique, expérimentale ou numérique.

- Une détermination analytique suppose un modèle analytique de la structure. Celui-ci est une idéalisation d'un cas physique réel, reposant sur certaines hypothèses simplificatrices. Il est fondé principalement sur les théories des poutres ou des plaques. On se place dans le cas d'un matériau continu, élastique, homogène isotrope ou orthotrope et sous certaines conditions aux limites (libre, appui simple, encastrement). Ainsi, à partir de la théorie des poutres de Timoshenko [8], ou de Euler-Bernoulli [9] ou encore de la théorie classique des plaques [10], les relations entre les réponses mesurées et une force d'impact ont été déterminées analytiquement par de nombreux auteurs. Dans les travaux de Jacquelin et al. [11], [12] la fonction de transfert analytique a été déterminée par la théorie des plaques de "Kirchhoff" : la structure étudiée est une plaque circulaire, isotrope, en aluminium, encadrée sur son contour et soumise à un impact en son centre. Kim et Lee [13] ont reconstruit la force d'impact à partir de l'enregistrement de trois accélérogrammes, en utilisant la fonction de Green analytique d'une plaque épaisse.

- Une détermination expérimentale à l'aide d'essai de vibration ou de choc n'est pas limitée par les conditions aux limites, la forme et les propriétés des matériaux de la

structure. Wu et ses collègues [14], Chang et Sun [15] ont utilisé les fonctions de Green pour déterminer la force d'impact sur des plaques élastiques. Boukria et al. [16, 17] ont utilisé une méthode expérimentale pour déterminer la position d'impact en minimisant la fonction objectif qui a été créée à partir de la fonction de transfert entre plusieurs points d'impact et de mesure. Uslua et ses collègues [18] ont présenté une méthode indirecte pour déterminer la force sur une plaque en utilisant la fonction de réponse en fréquence (FRF) du système qui est mesurée directement sur la structure. Uhl [19] présente la théorie des méthodes inverses et leurs limites majeures : il s'appuie sur un test numérique et expérimental pour valider les procédures présentées.

- La méthode des éléments finis permet de calculer numériquement le comportement d'objets complexes. Elle permet, entre autres, de déterminer les fonctions de transfert pour une structure modélisée en éléments finis. Ainsi elle a été appliquée sur une poutre par Ma et ses collègues [20] pour obtenir le système d'équations d'état de la structure, sur une plaque par Nakamura et ses collègues [21] et par Hu et al. [22] pour obtenir la relation entre une force d'impact et les réponses en déformation correspondantes. Adams et Doyle [23] ont également présenté une méthode qui est basée sur une reformulation récursive des équations associée à une modélisation par éléments finis, pour reconstruire une force d'impact à partir des réponses mesurées sur une coque.

3. Troisième hypothèse: La localisation de l'excitation est connue. Le problème de caractérisation des impacts sur une structure devient plus complexe lorsque la localisation du point d'impact est inconnu. Dans de nombreux travaux, la localisation du point d'impact est supposée connue a priori. Lorsque ce n'est pas le cas, il faut réaliser un travail préalable pour localiser la zone sollicitée avant de remonter à l'histoire de la force.

Doyle [24] a déterminé la force d'impact exercée sur une poutre et sur une plaque à l'aide de la différence de phase entre les signaux mesurés de deux capteurs pour localiser la position de la force. Kim et Lee [13] ont besoin de trois capteurs pour localiser la position d'impact car ils travaillent sur une plaque. Lim et Pilkey [25] supposent que l'emplacement de la force est connu. Wu et al. [26] ont développé une méthode pour identifier une force d'impact exercée sur une plaque en utilisant la réponse de la déformation mesurée. L'emplacement de la force est également supposé connu. Ils ont conclu que l'utilisation simultanée de plusieurs jauges de déformation permet d'obtenir une meilleure prévision globale de la force d'impact. Chang et Sun [15] ont déterminé une force d'impact sur un panneau composite en supposant connue la localisation de la force d'impact.

Quelle que soit la méthode de détermination de la fonction de transfert, il est intéressant de réaliser un premier essai instrumenté (numérique, expérimental, théorique) afin de valider les fonctions de transfert avant la reconstruction de la force.

2.2.2 Equation de convolution

La réponse d'un système mécanique est liée à sa fonction de transfert. Pour un système ayant un comportement linéaire, la réponse s_i mesurée en un point quelconque x_i de la structure est reliée à la force d'impact f_j appliquée en un point x_j , par l'équation de convolution suivante:

$$s_i(t) = \int_0^t H_{ij}(t - \tau) f_j(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

où H_{ij} est la fonction de transfert entre les points x_i et x_j .

Le problème direct consistant à calculer la réponse s_i à partir de H_{ij} et de f_j est appelé convolution. Dans la plupart des cas, le problème direct est bien posé. On obtient des solutions analytiques ou des solutions par éléments finis proches des réalités expérimentales.

Le problème inverse de la détermination de f_j à partir de s_i est appelé déconvolution. L'analyse des nombreux problèmes de type inverse met en évidence leur caractère mal posé.

Pour effectuer une déconvolution, deux approches peuvent être utilisées :

- La première nécessite d'identifier la fonction de transfert H_{ij} . Cette opération peut être effectuée soit dans le domaine temporel soit dans le domaine fréquentiel.
- La seconde utilise un premier essai instrumenté : on réalise un premier essai dans les mêmes conditions que l'essai à identifier : une force f_{1j} est mesurée ainsi que sa réponse s_{1i} en m_i . Cette méthode sera développée et utilisée au chapitre 5.

2.2.3 Domaine temporel ou fréquentiel

Les méthodes pour identifier les fonctions de chargement à partir de mesures de réponses de la structure peuvent être classés en deux grandes catégories : les méthodes déterministes (en temporel et en fréquentiel) et les méthodes stochastiques.

Concernant les approches déterministes, on se place soit dans le domaine temporel soit dans le domaine fréquentiel pour la résolution l'équation de convolution 5.1.

La reconstruction de la force dans le domaine fréquentiel a été étudiée par un certain nombre de chercheurs. Cela nécessite de déterminer des fonctions de réponse en fréquence (FRF). Elles peuvent être obtenues par analyse modale théorique (TMA) ou par analyse modale expérimentale (EMA). Busby et Trujillo [27], Kim et ses collègues [28] ont utilisé une TMA pour obtenir les paramètres modaux de système et pour construire la fonction de réponse en fréquence. Par conséquent, l'inverse de la matrice FRF peut être facilement obtenue pour la prédiction de la force.

Martin et Doyle [9, 29] utilisent une analyse spectrale de la structure pour établir une relation entre les transformées de Fourier de la réponse et de la force d'impact. Mais, cette méthode a rencontré des difficultés à cause des réflexions sur les bords qui provoquent une perte d'information et rendent le système extrêmement sensible au bruit de mesure. Thite [30] a présenté une méthode basée sur la minimisation du nombre de conditionnement moyen dans la gamme de fréquences pour la sélection des points de mesure afin d'améliorer la détermination de la force. Jiang et Hu [31] présentent une approche basée sur une méthode de sélection de modes pour déterminer la gamme optimale de fréquence et les modes spatiaux à utiliser. Granger et Perotin [32] ont utilisé des paramètres modaux pour estimer les densités spectrales des réponses modales et les excitations généralisées. Toutefois, les approches dans le domaine fréquentiel deviennent difficiles à utiliser pour des structures complexes et perdent donc leur attrait. En particulier dans certaines applications (contrôle de structures,...) il est nécessaire d'avoir un algorithme capable d'estimer les forces agissant sur une structure en temps réel. Or les données peuvent

être disponibles sur de très courtes durées, ce qui rend le traitement dans le domaine fréquentiel délicat à réaliser.

En outre, il est important de souligner que les problèmes soulevés par les problèmes inverses se manifestent différemment dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel.

Zhu et Lu [33] ont présenté une méthode dans le domaine temporel pour identifier les charges à la fois concentrées et réparties sur les structures de type poutres et plaques. Doyle [34], [35] a présenté une série de papiers sur des poutres et des plaques soumises à des impacts transversaux dans le domaine temporel et fréquentiel. Chang et Sun [15] ont utilisé des fonctions de Green déterminées expérimentalement et effectué la déconvolution dans le domaine temporel pour déterminer la force d'impact sur une plaque composite. Un modèle prédictif de la force d'impact s'appliquant sur une poutre cantilever a été présenté par Wang et Chiu [36] dans le domaine temporel.

2.2.3.1 Résolution temporelle

Dans le domaine temporel, l'équation intégrale de convolution qui relie la force d'entrée et de la réponse de sortie peut être discrétisée. L'équation 5.1 se ramène alors à la résolution du système linéaire suivant :

$$[S_i] = [H_{ij}] [F_j] \quad (2.2)$$

où :

$$[H_{ij}] = \begin{bmatrix} H_{ij}(\Delta t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ H_{ij}(2\Delta t) & H_{ij}(\Delta t) & 0 & \cdots & 0 \\ H_{ij}(3\Delta t) & H_{ij}(2\Delta t) & H_{ij}(\Delta t) & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}(n\Delta t) & H_{ij}((n-1)\Delta t) & \cdots & \cdots & H_{ij}(\Delta t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$[S_i] = [S_i(\Delta t), S_i(2\Delta t), \dots, S_i(n\Delta t)]^t \quad (2.4)$$

$$[F_j] = [(F_j(0), F_j(1), \dots, F_j(n-1)) \Delta t]^t \quad (2.5)$$

$1/\Delta t$ est la fréquence d'échantillonnage.

n correspond au nombre de points temporels d'acquisition des signaux. On obtient ainsi un système linéaire de n équations à résoudre.

La matrice H_{ij} à inverser est généralement mal conditionnée et peut donc conduire à une solution instable. La résolution du système 2.2 par simple inversion au sens des

moindres carrées conduit à une solution instable, soit oscillante, soit divergente. Toute la difficulté va consister à éliminer cette instabilité pour obtenir une solution physiquement acceptable.

2.2.3.2 Résolution fréquentielle

La méthode qui s'appuie sur la transformée de Fourier, transforme l'équation de convolution 5.1 dans le domaine temporel en une multiplication dans le domaine des fréquences [37].

$$s_i(\omega) = H_{ij}(\omega) f_j(\omega) \quad (2.6)$$

La matrice $[H]$ relie à chaque pulsation ω , la réponse $s_i(\omega)$ à la force d'excitation $f_j(\omega)$. Cette matrice peut être déterminée de différentes façons :

- à partir d'un modèle physique de la structure exploitant les matrices de masse, de raideur et d'amortissement déduites généralement d'une approche aux éléments finis:

$$[H] = ([K] + i \omega [C] - \omega^2 [M])^{-1} \quad (2.7)$$

- à partir des paramètres modaux de la structure, eux-mêmes identifiés expérimentalement ou tirés d'un modèle aux éléments finis :

$$H(\omega) = \sum_k \{\phi_k\} \frac{1}{i\omega - \lambda_k} \{\phi_k\}^t + \sum_k \{\phi_k^*\} \frac{1}{i\omega - \lambda_k^*} \{\phi_k\}^t \quad (2.8)$$

- par mesure directe sur la structure entre couples de noeuds (i, j) de la réponse s_j et de l'excitation f_i :

$$H_{ij}(\omega) = \frac{s_j(\omega)}{f_i(\omega)} \quad (2.9)$$

L'identification de forces d'excitation passe par l'inversion de l'équation 2.6.

$$f_i(\omega) = \frac{s_j(\omega)}{H_{ij}(\omega)} \quad (2.10)$$

En réalité, l'application pratique de l'équation 2.10 n'est pas toujours aisée. Les principales difficultés sont dues aux zéros de la fonction de transfert. En effet, l'amplitude de la FRF présente un certain nombre de pics de résonances séparés ou non par des antirésonances. L'amplitude de $H(\omega)$ au voisinage des antirésonances est très faible et la mesure expérimentale des valeurs de $H(\omega)$ dans ces gammes de fréquences peut être fortement perturbée par le bruit. Il en est de même en hautes fréquences.

Pour améliorer la résolution du problème inverse, la formulation d'un problème sur-déterminé est proposée, ce qui permet l'utilisation de plus d'équations que d'inconnues. L'utilisation des informations redondantes permet de minimiser les effets de l'erreur de mesure due au bruit qui est toujours présent.

Si le nombre de réponses dépasse le nombre de forces à identifier, la fonction de réponse en fréquence est rectangulaire. On détermine alors une solution par la méthode des moindres carrés.

2.2.4 Problème mal posé

Il est généralement admis que les problèmes inverses appartiennent souvent à une classe de problèmes dits mal posés. Un problème est mal-posé au sens de Hadamard si :

- la solution peut ne pas exister.
- la solution peut ne pas être unique.
- la solution peut ne pas être stable vis-à-vis des erreurs de mesure.

Si aucune de ces difficultés n'existe, le problème est bien posé.

Ainsi un problème mal posé peut conduire à une instabilité inverse [1]. On dit qu'un problème est instable quand de petites variations sur les données de sorties entraînent de grandes variations sur les données d'entrées.

Ces problèmes sont sensibles au bruit de mesure et conduisent à la résolution de systèmes avec des matrices très mal conditionnées (valeurs singulières très petites).

L'exemple classique des problèmes mal posés est l'équation intégrale de Fredholm de première espèce :

$$\int_a^b K(s, t) f(t) dt = g(s), \quad c \leq s \leq d \quad (2.11)$$

où le terme g et le noyau K sont donnés, et f est l'inconnue recherchée.

Si la solution est perturbée par :

$$\Delta f(t) = \varepsilon \sin(2\pi p t) \quad p = 1, 2, \dots \quad \varepsilon = \text{constante} \quad (2.12)$$

La perturbation correspondante au terme $g(s)$ est donnée par :

$$\Delta g(s) = \varepsilon \int_a^b K(s, t) \sin(2\pi p t) dt \quad (2.13)$$

Le rapport $\|\Delta f\| / \|\Delta g\|$ peut être arbitrairement grand en choisissant un paramètre p grand : cela montre que c'est un problème mal posé.

En particulier, cet exemple illustre que les équations intégrales de Fredholm de première espèce sont extrêmement sensibles aux perturbations hautes fréquences.

Certains problèmes discrétisés ont des propriétés similaires aux problèmes mal posés, comme la sensibilité aux perturbations à hautes fréquences.

Ainsi pour le système d'équations linéaires suivant :

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (2.14)$$

on obtient sa solution par une méthode des moindres carrées :

$$\min_x \|Ax - b\|_2, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m > n \quad (2.15)$$

On peut dire qu'un système discret est mal posé si les deux critères suivants sont satisfaits :

- les valeurs singulières de A ne décroissent pas progressivement vers zéro: il y a présence d'un saut brusque dans l'évolution des valeurs singulières.
- le rapport entre la plus grande valeur singulière et la plus petite non nulle est grand.

On peut illustrer les difficultés associées aux problèmes mal posés par un exemple numérique simple [38]. Considérons le problème des moindres carrés donné par l'équation 2.15 avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0,16 & 0,10 \\ 0,17 & 0,11 \\ 2,02 & 1,29 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0,27 \\ 0,25 \\ 3,33 \end{pmatrix}$$

où b est la solution exacte du problème direct avec $\bar{x}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ perturbé par l'addition d'une petite perturbation :

$$b = \begin{pmatrix} 0,16 & 0,10 \\ 0,17 & 0,11 \\ 2,02 & 1,29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,00 \\ 1,00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,01 \\ -0,03 \\ 0,02 \end{pmatrix}$$

La difficulté avec ce problème de moindres carrés provient du fait que la matrice A est mal conditionnée car son nombre de conditionnement $(1,1 \times 10^3)$ est élevé. Cela implique que la solution calculée est potentiellement très sensible aux perturbations des données. La solution des moindres carrés de ce problème en utilisant la factorisation QR de A vaut:

$$x_{LSQ} = \begin{pmatrix} 7,01 \\ -8,4 \end{pmatrix}$$

Cette solution est évidemment très éloignée de la solution exacte $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi la norme de x_{LSQ} est très grande par rapport à la norme de la solution exacte :

$$\|x_{LSQ}\| = 10,95 > \|\bar{x}\| = \sqrt{2}$$

Le nombre de conditionnement de A élevé fait que les colonnes de cette matrice sont presque linéairement dépendantes. Pour contrecarrer ce problème, il est possible d'avoir recours à un autre moyen de résolution du problème de moindres carrés en limitant la norme de la solution par une valeur α telle que:

$$\min_x \|Ax - b\|_2 \quad \text{et} \quad \|x_{LSQ}\| < \alpha$$

Cette solution x_α dépend non linéairement de α et pour les valeurs de α suivantes: 0,1 ; 1 ; 1,385 et 10 on obtient :

$$x_{0,1} = \begin{pmatrix} 0,08 \\ 0,05 \end{pmatrix} \quad x_1 = \begin{pmatrix} 0,84 \\ 0,54 \end{pmatrix} \quad x_{1,385} = \begin{pmatrix} 1,17 \\ 0,74 \end{pmatrix} \quad x_{10} = \begin{pmatrix} 6,51 \\ -7,60 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer qu'avec un bon choix de α , il est possible d'obtenir une solution proche de la solution exacte désirée $\bar{x}^t$, ici $x_{1,385}$. Néanmoins, il subsiste le problème du choix a priori de ce paramètre α , c'est à dire sans connaître la solution exacte.

Ce petit exemple souligne les trois plus importantes difficultés engendrées par les problèmes mal posés :

- Le nombre de conditionnement de A est très grand,
- Remplacer A par une matrice "bien-posée" ne conduit pas nécessairement à une solution exacte,
- Il faut choisir soigneusement les contraintes à ajouter.

L'introduction de ce nouveau paramètre associé à une condition supplémentaire sur la solution est une régularisation du problème. Le but de la théorie de la régularisation numérique est de fournir des méthodes efficaces et numériquement stables pour optimiser le choix des contraintes qui conduisent à des solutions proches de la solution exacte, et stables.

2.3 Méthode de résolution

On cherche à résoudre le problème mal-posé suivant :

$$A x = b \quad (2.16)$$

2.3.1 Nécessité de stabiliser la solution

Si une solution à un problème posé n'est pas unique, il n'est pas possible d'obtenir une solution fiable sans information supplémentaire, puisque la solution choisie peut ne pas être la bonne. Même lorsque l'existence et l'unicité sont garantis, la plupart des problèmes inverses souffrent du manque de stabilité de la solution. Pour ces raisons, il est nécessaire, en pratique, d'introduire des informations a priori sur la solution, c'est-à-dire des informations que l'on a sur l'inconnue avant même d'observer les données, avant même de faire toute mesure, de manière à restreindre l'ensemble des solutions admissibles. Cette condition supplémentaire peut être physique ou réaliser un compromis

- L'information a priori s'exprime sous forme de contraintes physiques. Parmi toutes les solutions admissibles, on choisit celles qui obéissent à une contrainte définie au préalable. Dans le cas d'une force d'impact, la solution recherchée x doit être positive. Elle minimise donc le critère suivant :

$$\min_x \|Ax - b\|^2 \quad \text{avec } x \geq 0 \quad (2.17)$$

- Un compromis: on considère admissibles toutes les solutions, mais parmi ces solutions, on choisit celle qui est compatible avec une certaine information a priori. Par exemple, on cherche à minimiser la norme résiduelle de l'équation de convolution en utilisant comme condition la régularité de la solution. Dans ce cas, la solution ou une de ses dérivée ne devrait pas être trop grande et un compromis sera effectué entre obtenir un résidu faible et avoir un certain niveau de régularité.

Ces méthodes de régularisation sont présentées dans la section ci-dessous.

2.3.2 Régularisation déterministe

La résolution des problèmes mal posés ne présente un intérêt en pratique que dans la mesure où on obtient une solution unique, stable vis-à-vis des perturbations des données d'entrées et donc physiquement acceptable. Les méthodes classiques de résolution des systèmes linéaires (factorisation LU, QR,...) ne peuvent être utilisées en raison du très mauvais conditionnement des matrices. C'est pourquoi on utilise les méthodes de régularisation brièvement présentée au paragraphe précédent, qui permettent d'obtenir une solution approchée satisfaisante. Une présentation intéressante de ces méthodes repose sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice de transfert, qui nous allons maintenant présenter.

2.3.2.1 Décomposition en valeurs singulières et sa généralisation [1]

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice rectangulaire avec $m \geq n$. La décomposition en valeurs singulières (SVD) de A s'écrit sous la forme suivante:

$$A = U \Sigma V^t = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^t \quad (2.18)$$

où :

- U : matrice $(m \times m)$ orthogonale formée par m vecteurs orthonormés, qui sont les vecteurs propres de la matrice AA^t :

$$U^t U = I_m$$

- V : matrice $(n \times n)$ orthogonale formée par n vecteurs, qui sont les vecteurs propres de la matrice AA^t :

$$V^t V = I_n$$

- $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$: matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs singulières de A , classées dans l'ordre suivant : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$.

Les valeurs singulières σ_i décroissent vers zéro. Une augmentation de la dimension de la matrice A provoque un accroissement du nombre des petites valeurs singulières. En outre les vecteurs u_i et v_i sont de plus en plus oscillants à mesure que l'indice i augmente.

On cherche une solution x par une méthode des moindres carrés :

$$\min_x (\|Ax - b\|_2) \quad (2.19)$$

En utilisant la SVD, la solution s'écrit sous la forme suivante:

$$x_{lsq} = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^t b}{\sigma_i} v_i = V \Sigma U^t b \quad (2.20)$$

Lorsque les coefficients de Fourier $u_i^t b$ ne décroissent pas plus rapidement que les valeurs de σ_i , la solution obtenue a des changements de signe fréquents à cause des vecteurs singuliers qui sont de plus en plus oscillants. La solution obtenue est donc instable : cela se traduit par la présence d'oscillations parasites de fort niveau dans la solution.

Pour introduire la notion de régularisation, il s'avère important de définir la décomposition en valeurs singulières généralisée (GSVD) d'un couple de matrices (A, L) ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}, L \in \mathbb{R}^{p \times n}, m \geq n \geq p$). C'est une généralisation de la SVD dans le sens où les valeurs singulières généralisées de (A, L) sont les racines carrées des valeurs propres généralisées du couple de matrices $(A^t A, L^t L)$.

La GSVD est la décomposition de A et L sous la forme:

$$A = U \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} W^{-1}, L = V (M, 0) W^{-1} \quad (2.21)$$

où les colonnes de $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $V \in \mathbb{R}^{p \times p}$ sont orthogonales, $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est non singulière et Σ et M sont des matrices diagonales $p \times p$:

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p), M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$$

En outre, les éléments diagonaux de Σ et M sont non-négatifs et tels que :

$$0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq 1, \quad 1 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_p > 0$$

Ils vérifient la condition :

$$\sigma_i^2 + \mu_i^2 = 1, \quad i = 1..p \quad (2.22)$$

Les valeurs singulières généralisées γ_i de (A, L) sont définies par le rapport :

$$\gamma_i = \frac{\sigma_i}{\mu_i}, \quad i = 1..p$$

On peut également définir la solution du problème donné par l'équation (2.16) à l'aide de la GSVD :

$$\hat{x}_{lsq} = \sum_{i=1}^p \frac{u_i^t b}{\sigma_i} v_i + \sum_{i=p+1}^n u_i^t b v_i \quad (2.23)$$

Dans le cadre de la résolution de problèmes mal-posés, le problème vient de l'existence de petites valeurs singulières que l'on trouve soit avec la SVD, soit avec la GSVD : la régularisation consiste à modifier les "petites" valeurs singulières (généralisées). On peut donc définir d'une façon générale la solution régularisée du problème posé par l'équation (2.16) à l'aide de la SVD :

$$x_{reg} = V F \Sigma U^t b = \sum_{i=1}^n f_i \frac{u_i^t b}{\sigma_i} v_i$$

où F est une matrice diagonale de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Les termes diagonaux f_i sont appelés facteurs de filtre. De même, à partir de la GSVD, on obtient la solution régularisée suivante :

$$\hat{x}_{reg} = \sum_{i=1}^p f_i \frac{u_i^t b}{\sigma_i} v_i + \sum_{i=p+1}^n u_i^t b v_i \quad (2.24)$$

En fonction des facteurs de filtre utilisés on obtient plusieurs façons de régulariser le problème.

2.3.2.2 Régularisation par troncature de la décomposition en valeur singulières (TSVD)

Hansen [1] a présenté une procédure qui élimine la contribution des petites valeurs singulières qui résultent de la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice. Ainsi la SVD est tronquée à partir d'un indice de troncature k , avant que les petites valeurs singulières ne deviennent significatives.

La matrice A devient:

$$A_k = U \Sigma V^t = \sum_{i=1}^k u_i^t \sigma_i v_i^t \quad (2.25)$$

La solution donnée par troncature de la décomposition en valeurs singulières (TSVD) est:

$$x_k = \sum_{i=1}^k \frac{u_i^t b_i}{\sigma_i} v_i \quad (2.26)$$

Les facteurs de filtre f_i associés à la TSVD sont donnés par :

$$f_i = 1 \text{ si } i \leq k \text{ et } f_i = 0 \text{ si } i > k$$

On peut également utiliser la troncature pour des problèmes de forme plus générale qui nécessitent l'emploi de la GSVD. La solution après une troncature de la décomposition en valeurs singulières généralisée (TGSVD) est donnée par :

$$\hat{x}_{k,L} = \sum_{i=p-k+1}^p \frac{u_i^t b_i}{\sigma_i} v_i + \sum_{i=p+1}^n (u_i^t b_i) v_i \quad (2.27)$$

Les facteurs de filtre f_i associés à la TGSVD sont donc :

$$f_i = 0 \text{ si } i \leq p - k \text{ et } f_i = 1 \text{ si } i > p - k$$

La difficulté réside dans le choix du rang de troncature : on a donc un compromis entre éviter des termes oscillants de fort niveau (voire divergents) et retenir suffisamment de termes pour avoir une précision satisfaisante.

2.3.2.3 Régularisation de Tikhonov

L'une des méthodes de régularisation la plus connue et la plus utilisée est celle de Tikhonov [7]. On remplace le problème initialement mal posé par un problème voisin bien posé et bien conditionné. Le problème peut être donc formulé par :

$$\min_x \left\{ \|Ax - b\|_2^2 + \lambda^2 \Omega(x) \right\} \quad (2.28)$$

où :

- $\Omega(x)$ est une fonctionnelle stabilisatrice, par exemple :

$$\Omega(x) = \|x - x_0\|_2^2 \quad (2.29)$$

Elle permet d'imposer des contraintes supplémentaires : l'équation (2.29) permet ainsi d'empêcher d'avoir une solution dont la norme serait "grande" par rapport au résidu de l'équation (2.16).

- λ est le paramètre de régularisation : il contrôle le poids accordé à la contrainte additionnelle donnée par la fonction stabilisatrice.

- x_0 est une estimation initiale de x ; en absence de toute estimation, on choisit souvent $x_0 \equiv 0$.

La solution régularisée de ce problème est donc :

$$x_\lambda = \operatorname{argmin} \left\{ \|Ax - b\|_2^2 + \lambda^2 \|x - x_0\|_2^2 \right\} \quad (2.30)$$

En utilisant une SVD de A , la solution régularisée s'écrit sous la forme :

$$x_\lambda = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \frac{u_i^t b}{\sigma} v_i \quad (2.31)$$

Les facteurs de filtre prennent donc l'expression suivante :

$$f_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \quad (2.32)$$

On peut prendre d'autres fonctionnelles stabilisatrices. En général on les choisit de la forme suivante :

$$\Omega(x) = \|L(x - x_0)\|_2^2 \quad (2.33)$$

L est couramment l'identité (on retrouve alors la solution donnée par la SVD), l'opérateur de dérivée première ou l'opérateur de dérivée seconde. Imposer des contraintes sur les dérivées de la solution permet d'éliminer les effets d'oscillations parasites dues aux vecteurs singuliers oscillants (i.e. associés aux petites valeurs singulières). Dans ce cas, la solution s'exprime encore sous la forme:

$$x_{reg} = \sum_{i=1}^n f_i \frac{u_i^t b}{\sigma_i} v_i$$

Avec

$$f_i = \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \lambda^2} \quad (2.34)$$

où γ_i est une valeur singulière généralisée de (A, L) .

Tout le problème est donc ramené en la détermination du paramètre de régularisation. Il existe plusieurs méthodes pour choisir le paramètre de régularisation λ , que l'on va présenter.

2.3.3 Méthodes de choix du paramètre de régularisation

Les méthodes de régularisation exposées nécessitent de déterminer a priori un paramètre dit de régularisation qui doit donner un juste équilibre entre l'erreur de perturbation et l'erreur de régularisation dans la solution régularisée. Dans le cas de la régularisation par troncature, c'est le rang de troncature qui joue le rôle de ce paramètre. Dans ce qui suit on notera λ le paramètre de régularisation, que ce soit pour désigner le rang de troncature ou le paramètre issu de la régularisation de Tikhonov.

Quatre critères sont couramment utilisés pour choisir le paramètre de régularisation. Trois d'entre eux utilisent uniquement l'information donnée par les mesures (donc par b). La dernière suppose connu le niveau du bruit e qui perturbe les mesures.

2.3.3.1 Critère de la courbe en L

La méthode de la courbe en L est une méthode graphique représentant l'évolution de la norme de la solution régularisée $\|x_{reg}\|_2$ en fonction du résidu $\|x_{reg} - b\|_2$ pour différentes valeurs de λ .

Considérons le problème donné par l'équation (2.16) avec $b = b^* + \Delta b$, x_{reg} la solution régularisée et x^* la solution exacte non régularisée correspondant à b^* .

En utilisant la décomposition en valeurs singulières généralisées, l'erreur $x_{reg} - x^*$ vaut:

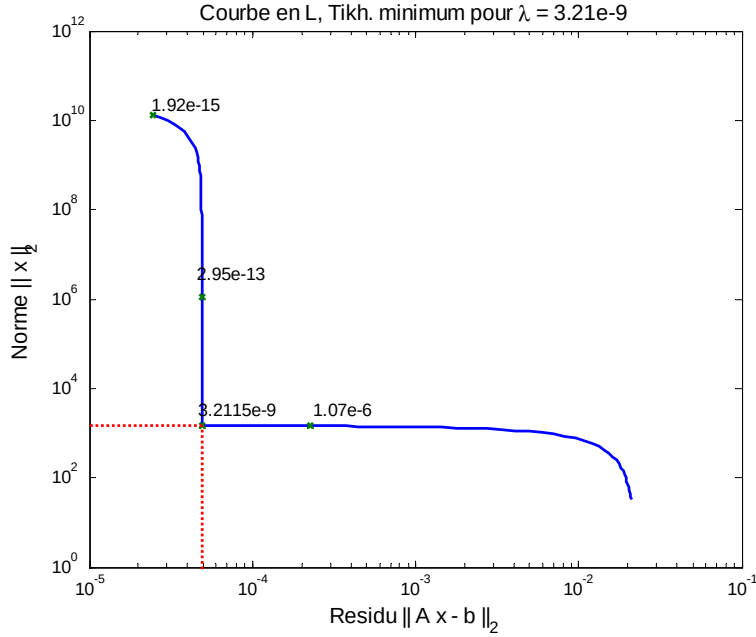


Figure 2.1: Exemple de courbe en L

$$x_{reg} - x^* = \sum_{i=1}^n f_i \frac{u_i^t \Delta b}{\sigma_i} v_i + \sum_{i=1}^n (f_i - 1) \frac{u_i^t b^*}{\sigma_i} v_i \quad (2.35)$$

Cette erreur se décompose en deux termes. Le premier représente l'erreur due à la perturbation Δb et le second terme représente l'erreur de régularisation due à la régularisation du terme non perturbé b^* .

Quand le paramètre de régularisation est faible ($f_i \rightarrow 1$), l'erreur est dominée par la perturbation de b :

$$x_{reg} - x^* \simeq \sum_{i=1}^n f_i \frac{u_i^t \Delta b}{\sigma_i} v_i \quad (2.36)$$

Quand le paramètre de régularisation augmente, le facteur de filtre devient petit ($f_i \rightarrow 0$) et l'erreur est dominée par l'erreur de régularisation :

$$x_{reg} - x^* = - \sum_{i=1}^n \frac{u_i^t b^*}{\sigma_i} v_i \quad (2.37)$$

Il existe une valeur optimale du paramètre de régularisation qui est définie comme le meilleur compromis entre l'erreur de perturbation et l'erreur de régularisation et correspond à la courbure maximale [1] de la courbe en L . La courbure κ de la courbe en L est donnée par :

$$\kappa = 2 \frac{\eta \rho \lambda^2 \eta \rho + 2 \lambda \eta \rho + \lambda^4 \eta \eta'}{\eta' (\lambda^2 \eta^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.38)$$

avec :

$$\begin{aligned}\eta &= \|x_\lambda\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(f_i \frac{u_i^t b}{\sigma_i} \right)^2 \\ \rho &= \|Ax_\lambda - b\| = \sum_{i=1}^n \left((1 - f_i) u_i^t b \right)^2 \\ \eta' &= -\frac{4}{\lambda} \sum_{i=1}^n (1 - f_i) f_i^2 \left(\frac{u_i^t b}{\sigma_i} \right)^2\end{aligned}$$

La valeur de λ donnant la courbure maximale donne alors la valeur cherchée du paramètre de régularisation par la méthode de la courbe en L .

2.3.3.2 Critère de validation croisée généralisée (GCV) [2]

Le critère GCV est basé sur des considérations statistiques et sur les qualités de la prédiction des solutions en rapport avec les données. Une bonne valeur du paramètre de régularisation devrait prédire les valeurs manquantes. Cette méthode prédictive cherche à minimiser l'erreur quadratique moyenne d'estimation $\|Ax - b^*\|_2$.

Soit $x_{\lambda,z}$ la solution obtenue en utilisant toutes les données sauf la composante b_z de b .

Si on utilise une régularisation de type Tikhonov, $x_{\lambda,z}$ minimise le critère :

$$\sum_{n=1, n \neq z}^N \|b_n - (Ax)_n\|^2 + \lambda \|x\|_2^2$$

On peut utiliser $x_{\lambda,z}$ pour prédire la donnée manquante b_z , $b_z = (Ax_{\lambda,z})_z$.

Le paramètre de régularisation représente la valeur qui minimise l'erreur de prédiction, ce qui revient à minimiser la fonction suivant [1], [2] :

$$G = \frac{\|Ax_\lambda - b\|_2^2}{(\text{trace}(I_m - AA^T))^2} \quad (2.39)$$

A^I est la matrice qui multipliée par b produit la solution x_{reg} , $x_{reg} = A^I b$.

Les facteurs de filtre peuvent être utilisés pour calculer le dénominateur selon la relation suivante [1] :

$$\text{trace}(I_m - AA^I) = m - (n - p) - \sum_{i=1}^p f_i \quad (2.40)$$

2.3.3.3 Critère de quasi-optimalité (QO)

Le critère QO est l'un des plus anciens pour trouver le paramètre de régularisation optimal. Cette méthode est basée sur l'estimation de l'erreur évaluée par $\|x - x_\lambda\|_2$.

On obtient le paramètre de régularisation en minimisant la fonction [1] suivante:

$$Q = \frac{1}{2} \left\| \lambda \frac{dx_\lambda}{d\lambda} \right\|_2 \quad (2.41)$$

Dans le cas d'un paramètre de régularisation discret, pour déterminer le rang de troncature k , on remplace λ par les valeurs singulières généralisées γ_k et on utilise les relations:

$$\left\| \frac{dx_\lambda}{d\lambda} \right\|_2 \approx \frac{\|\Delta x_\lambda\|_2}{\Delta\lambda}, \|\Delta x_\lambda\|_2 = \frac{u_k^t b}{\gamma_k}, \Delta\lambda = \gamma_k + 1 - \gamma_k \approx \gamma_k$$

On obtient les expressions suivantes que l'on cherche à minimiser:

$$Q_k = \frac{u_k^t b}{\sigma_k}, L = I_n \quad (2.42)$$

$$Q_k = \frac{u_k^t b}{v_k}, L \neq I_n \quad (2.43)$$

2.3.3.4 Critère de Morozov

Ce principe suppose que l'on connaisse la norme de l'incertitude sur les mesures, i.e. la norme du bruit des mesures $\|e\|_2$. Le paramètre de régularisation λ est choisi de sorte que :

$$\|A x_{reg, \lambda} - b\|_2 = \|e\|_2 \quad (2.44)$$

2.3.4 Méthodes probabilistes

A. Tarantola [4] a été un pionnier concernant les méthodes probabilistes appliquées à la résolution des problèmes inverses. Demoment et al. ont fait un exposé dans [5] de ces méthodes qu'ils appliquent au traitement des signaux et des images : dans un premier temps ces méthodes ont été largement utilisées en géophysique [39] et en reconstruction d'images [40]. Plus récemment Kaipio et Somersalo [41] ont fait également une synthèse de ces méthodes en insistant sur les problèmes numériques.

Toutefois, un des premiers articles concernant la reconstruction de force de chargement par une méthode inverse probabiliste a été écrit par Zhang et al. [42], même si en 2010 Yuen [43] a écrit un ouvrage sur les problèmes inverses en dynamique des structures : les problèmes abordés ne sont les mêmes. Notons que Zhang et al. travaillent dans le domaine fréquentiel et ils utilisent une méthode itérative (méthode de Monte-Carlo par chaîne de Markov) pour identifier la densité de probabilité de la force cherchée.

Le but d'une méthode inverse probabiliste est de déterminer une variable aléatoire ou un champ aléatoire d'entrée, à partir de mesures de sortie.

Dans une approche probabiliste du problème inverse on modélise les n variables inconnues sous forme probabiliste : en l'occurrence ce peut être les composantes du vecteur chargement recherché. Commençons par introduire la notion d'erreur ou de bruit dans le modèle direct. On réécrit les équations discrètes comme suit :

$$b = Ax + \epsilon$$

ϵ regroupent trois types d'erreur : le bruit de mesure, l'erreur de modèle et l'erreur de discrétisation.

La première étape de cette approche est la définition de la distribution de probabilité correspondant au bruit ϵ : on peut alors en déduire la loi de probabilité des données mesurées :

$$p(b | x, I) = p(\epsilon = b - Ax | I) \quad (2.45)$$

où I représente l'information dont on dispose a priori : en particulier elle inclut le modèle qui est construit et qui est essentiellement représenté par A .

On peut choisir une loi de probabilité gaussienne. Cette distribution permet d'obtenir la distribution de la réponse du système connaissant l'excitation :

$$p(b|x, I) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det(C_\epsilon)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(b - Ax)^t C_\epsilon^{-1} (b - Ax)\right) \quad (2.46)$$

où n est la taille du vecteur b et C_ϵ la matrice de covariance du bruit.

On distingue plusieurs approches probabilistes pour résoudre le problème inverse : les méthodes de maximum de vraisemblance et les méthodes bayésiennes.

2.3.4.1 Maximum de vraisemblance

Dans cette approche, la solution cherchée est celle qui maximise la vraisemblance donc la densité de probabilité définie par la relation (2.46) :

$$x_{MV} = \underset{x}{argmax}(p(b|x, I))$$

Toutefois, comme le problème d'origine est mal posé, cette solution conduit généralement à une solution physiquement inacceptable où le bruit est fortement amplifié [5].

2.3.4.2 Approche bayésienne

Dans une approche bayésienne du problème inverse, on définit une distribution a posteriori de l'inconnue x connaissant les données b en utilisant la règle de Bayes. Ensuite, on détermine une estimation de x en cherchant soit le maximum a posteriori (MAP) ou en calculant l'espérance a posteriori (EAP). Nous discutons ici le principe de l'approche bayésienne dans le cas linéaire.

La règle de Bayes qui définit la loi a posteriori de x est donnée par :

$$p(x|b; I) = \frac{p(b|x; I) p(x|I)}{p(b|I)}$$

où

- $p(b|x; I)$ est la vraisemblance : elle a été définie ci-dessus.
- $p(x|I)$ représente les informations a priori disponibles sur la solution du problème : c'est la loi de probabilité a priori de x . Notons que dans le cadre de la régularisation, cette densité de probabilité joue le rôle de la fonctionnelle stabilisatrice.
- $p(b|I)$ représente la probabilité des données connaissant le modèle : ce facteur joue le rôle d'une constante de normalisation.

Comme mentionné ci-dessus, l'estimation de la solution peut être faite à partir de deux estimateurs classiques :

le maximum a posteriori (MAP) :

$$\hat{x} = \underset{x}{argmax}(p(x|b; I))$$

l'espérance a posteriori (EAP) :

$$\hat{x} = E(x) = \int xp(x)dx$$

Notons que le cas d'un bruit gaussien et d'une loi a priori de type exponentiel [40] définie à l'aide d'une fonction $\varphi(x)$:

$$p(x | I) \propto \exp\left(-\frac{\lambda \varphi(x)}{2}\right)$$

la loi a posteriori s'écrit :

$$p(x | b; M) \propto \exp\left(-\frac{\|b - Ax\|_2}{2\rho_\epsilon} - \frac{\lambda \varphi(x)}{2}\right)$$

De ce fait, si on choisit un estimateur MAP, le problème d'optimisation revient à trouver le minimum du critère suivant [40] :

$$\Gamma(x) = \frac{\|b - Ax\|_2}{2\rho_\epsilon} + \frac{\lambda \varphi(x)}{2}$$

ce qui correspond à la régularisation de Tikhonov où $\varphi(x)/2$ joue le rôle de la fonctionnelle stabilisatrice.

Bien évidemment la loi a posteriori dépend de la loi a priori. Aussi, Zhang et al. utilisent une méthode itérative où la loi a posteriori devient la loi a priori à la boucle suivante : on définit une approche Monte-Carlo par chaîne de Markov (MCMC) [44]. L'intérêt est que l'influence de la loi a priori diminue au fur et à mesure que l'on fait des itérations.

2.4 Nature de la force reconstruite

Lorsque la structure est soumise à une sollicitation inconnue, la connaissance d'une part d'un modèle mathématique pour représenter la structure et d'autre part de la réponse mesurée, est essentielle afin d'estimer cette action. En général, il faut estimer l'évolution temporelle de la force, sa direction et son emplacement.

Quand une force statique ou quasi-statique est considérée, l'identification est généralement facile à réaliser. Cependant, le niveau de difficulté augmente dans le cas d'excitation de type choc à cause de la courte durée et de la variation rapide de l'amplitude de la force d'impact.

2.4.1 Force d'impact idéale

Une force d'impact $f(t)$ est caractérisée par sa courte durée dans le temps. "Courte durée" signifie que l'action de la charge est très rapide par rapport à la dynamique d'ensemble du système. Elle peut idéalement être représentée sous la forme de la fonction delta de Dirac comme :

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

La fonction delta de Dirac peut être approchée par la force d'impact $f(t)$ formulée comme suit :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{F}{\epsilon}, & 0 \leq t < \epsilon \\ 0, & 0 > t \geq \epsilon \end{cases}, \quad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = F$$

Toutefois en pratique, compte-tenu des interactions entre structures, une force d'impact n'a pas une durée qui tend nécessairement vers zéro : typiquement on considère que c'est une excitation dont la durée est inférieure à deux fois la première période propre de la structure [45]. Aussi, elle est couramment approchée par diverses expressions analytiques [45]. Une fonction couramment utilisée est le demi-sinus dont la demi-période donne la durée du choc T_c :

$$\begin{aligned} f(t) &= F \sin\left(\frac{2\pi}{T_c} t\right) \text{ pour } t \in \left[0, \frac{T_c}{2}\right] \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

A noter que dans nos simulations ultérieures on utilisera l'expression générale suivante :

$$f(t) = F t^\alpha \exp(-\gamma t)$$

où α est usuellement égal à 1, 2 ou 3 et où γ permet de régler la durée d'impact.

2.4.2 Forces reconstruites

2.4.2.1 Force ponctuelle

Dans la littérature, les sollicitations identifiées sont généralement des forces d'impacts.

Ainsi Inoue et al. [46] ont décomposé la force d'impact en trois composantes directionnelles afin de prédire son amplitude et sa direction. L'identification de la force de l'impact a été validée pour une poutre simplement appuyée, la réponse de la structure étant mesurée par des jauges de déformation.

Martin et Doyle [29] ont utilisé une méthode de déconvolution dans le domaine fréquentiel pour identifier une force d'impact. Les réponses (déformation, accélération,...) ont été enregistrées lors d'expérimentations. Une analyse spectrale de la structure permet d'établir une relation entre les transformées de Fourier de la réponse et de la force d'impact. La déconvolution dans le domaine des fréquences suivie d'une transformée de Fourier inverse permet ensuite d'obtenir l'évolution temporelle de la force d'impact.

Doyle [8, 9, 10, 24, 34] propose une méthode dans une série d'études pour identifier la force d'impact sur des poutres et des plaques. A partir de la théorie classique des poutres [8, 9] et des plaques [10], les relations entre les réponses mesurées et la force d'impact ont été obtenues. Il utilise ensuite les méthodes dans le domaine temporel et le domaine fréquentiel pour reconstruire la force d'impact.

Chang et Sun [15], Wu [14] ont identifié une force d'impact expérimentale. La méthode présentée n'est pas limitée par les conditions aux limites, la forme et les propriétés des matériaux de la structure puisqu'elle est basée sur une détermination expérimentale de la fonction de transfert. Lee et ses collègues [47] ont reconstruit la force d'impact sur une plaque épaisse en utilisant la fonction de Green et la forme d'onde acoustique. Une expérience a été réalisée par Kim et Lee [13] pour vérifier ces résultats.

Ma et ses collègues [20] ont estimé la force par une méthode inverse qui est basée sur le filtre de Kalman et un algorithme des moindres carrés récurrents. Les simulations numériques sur une poutre cantilever avec une masse sur l'extrémité libre ont été réalisées à partir des réponses de sortie. Dans les simulations numériques, la poutre cantilever subit

cinq types de force d'entrée : sinusoïdale, impulsion triangulaire, impulsion rectangulaire, une série d'impulsions.

Jacquelin et ses collègues [11] ont reconstruit une force d'impact excitant une plaque au centre. Ils étudient tout d'abord le système avec des forces numériques et ensuite avec des forces expérimentales. Avec les résultats expérimentaux, on constate que la reconstruction de la force dépend essentiellement de la position relative entre le point d'excitation et le point mesure, et il est postulé que la reconstruction de la force est meilleure si la fonction de transfert entre le point d'excitation et le point de mesure présente toujours une antirésonance entre deux résonances. Jacquelin et ses collègues [12] ont analysé une technique de déconvolution et résolu les problèmes qui surviennent. Les méthodes de régularisation de Tikhonov et de la décomposition en valeurs singulières sont présentées. Ils ont aussi mis en évidence l'influence de la position des points de mesure et les difficultés pour déterminer le paramètre de régularisation.

Uslua et ses collègues [48] ont présenté une méthode indirecte pour déterminer la force sur une plaque en utilisant la fonction de réponse fréquentielle (FRF) du système et en mesurant des niveaux de vibration ambiants. Cette méthode utilise une inversion généralisée de la matrice de FRF et le spectre des réponses mesurées.

Uhl [19] présente la théorie des méthodes inverses et leurs limites majeures. L'erreur entre la réponse simulée et mesurée est utilisée pour déterminer la fonction objectif. Un test numérique et expérimental pour vérifier la procédure a été appliquée pour l'identification de la force de contact roue-rail d'un train en service.

Adam et Doyle [23] ont identifié la force d'impact sur une structure complexe à partir des réponses mesurées.

Wang et Chiu [36] ont reconstruit d'une force d'impact s'appliquant sur une poutre cantilever. Ils ont formulé aussi un algorithme optimal pour déterminer l'amplitude de la force en utilisant la fonction objectif qui peut être définie comme l'erreur au sens des moindres carrés entre les réponses en accélération prédite et mesurée. Les effets de l'amplitude de la force, du positionnement du capteur et de la plage de fréquence excitée ont été étudiés.

N. Hu et ses collègues [22] ont proposé une technique pour identifier la force d'impact exercée sur des plaques en fibre de carbone. Un modèle d'optimisation est mis en place pour résoudre ce problème inverse en utilisant la méthode de programmation quadratique. Les polynômes de Tchebychev sont utilisés pour estimer l'histoire de la force d'impact. La méthode des éléments finis et la méthode de superposition donnent une relation entre les coefficients des polynômes de Tchebychev et les réponses des capteurs.

2.4.2.2 Force répartie

Liu et Shepard [49] ont abordé le problème de la reconstruction des charges dynamiques sur les structures de type plaques minces ou coques cylindriques. Ils ont utilisé soit la méthode modale modifiée ou la méthode de sélection de modes.

Djamaa et ses collègues [50] ont utilisé la méthode inverse et le filtrage spatial pour reconstruire une force distribuée qui est appliquée sur une coque cylindrique mince. À basse fréquence, les déformations longitudinales et tangentielles ont été utilisées pour la reconstruction de la force d'entrée.

Nakamura et ses collègues [21] proposent une méthode pour interpoler une charge distribuée continue afin d'identifier la charge aérodynamique à partir de la déformation

mesurée. Ils réalisent une analyse inverse numérique en utilisant la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose. Une extension de la méthode par couplage avec l'équation de l'aérodynamique permet d'améliorer la précision de l'estimation lorsque seule une quantité limitée des données est disponible.

El Khannoussi et ses collègues [51] ont proposé une nouvelle méthode pour la reconstruction de la force distribuée sur une plaque élastique rectangulaire. Cette méthode est basée sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice de Toeplitz. Une technique de régularisation basée sur le filtrage par troncature est effectuée pour éliminer les petites valeurs singulières généralisées. De bons résultats sont obtenus avec des temps de calcul inférieurs à celle de la méthode classique de troncature.

Jiang et Hu [31] présentent une approche pour reconstruire des charges distribuées dynamiques sur une poutre d'Euler à partir de réponses mesurées. L'approche est basée sur une méthode de sélection de modes pour déterminer la gamme optimale de la fréquence et les modes spatiaux à utiliser.

Granger et Perotin [32] ont présenté une méthode inverse pour estimer une excitation aléatoire distribuée sur les structures vibrantes. A partir de la mesure de la réponse de la structure en un certain nombre de points discrets, un modèle modal de la structure est identifié. Les paramètres modaux sont ensuite utilisés pour estimer les densités spectrales des réponses modales et les excitations généralisées. Une méthode de régularisation a été développée pour obtenir des estimations de coordonnées modales qui permettent d'obtenir les estimations des composantes modales de l'excitation.

Il est important de remarquer que, en général, ces forces réparties sont en réalité des pressions uniformes. De ce fait, la problématique se ramène à l'identification d'une force ponctuelle de chargement.

2.5 Localisation

La littérature concernant le problème de la localisation de la force d'impact est assez étoffée. Cela tient de la nécessité de connaître la localisation du chargement pour identifier ce chargement.

Doyle [9] a présenté une méthode pour déterminer l'emplacement d'impulsions dispersives sur une poutre en appliquant les informations de phase obtenues par l'analyse spectrale. Doyle [52] a également déterminé la localisation de la force d'impact sur une poutre en aluminium. Inoue [53] a réalisé une expérience pour analyser la dispersion des ondes d'une poutre afin de déterminer la location de l'impact. Gaul et Hurlebaus [54] ont développé une méthode expérimentale qui est basée sur les principes de propagation d'ondes dispersives dans des plaques isotropes pour identifier la localisation d'un impact. Wang et Hu [55] ont développé un modèle de prédiction de force pour déterminer l'amplitude et l'emplacement d'une force harmonique agissant sur une poutre cantilever à l'aide de capteurs PVDF (Polyvinylidene Fluoride). Zheng et ses collègues [56] proposent de minimiser le nombre de conditionnement pour la reconstruction de la force en analysant la cohérence de la matrice de transfert pour obtenir le facteur de cohérence qui optimise la localisation de la réponse. Sekine et Atobe [57] ont identifié la localisation de la force d'impact sur des panneaux composites.

Lorsque l'amplitude de l'impact est inconnue, il est possible de combiner une technique d'identification de la force avec un algorithme itératif pour déterminer sa localisation.

Martin et doyle [58] montrent l'intérêt qu'il y a à utiliser plusieurs capteurs. Ils proposent de coupler leur approche avec une méthode d'optimisation de type algorithme génétique afin d'obtenir de meilleurs résultats.

Hashemi et Kargarnovin [59] ont procédé à la localisation des impacts sur une structure en utilisant une fonctionnelle et en recherchant la solution en terme de position en combinant les données initiales à l'aide d'une approche du type algorithme génétique. Ce système itératif donne de bons résultats mais nécessite un très long temps de calcul. Cette approche ne sera pas utilisée car elle ne permet pas d'obtenir une solution optimale lors de l'identification.

Wu et al. [26] ont identifié la localisation de la force d'impact en comparant la réponse en déformation reconstruite entre plusieurs emplacements potentiels. Choi et Chang [60] ont introduit des capteurs piézoélectriques pour détecter l'histoire de la force d'impact et sa localisation en comparant les sorties des capteurs mesurés et estimés. Deux boucles de processus d'adaptation sont impliquées.

Wang et Chiu [61] et [36] ont fondé leur approche sur une analyse modale théorique ou expérimentale. Concernant la localisation de force l'impact, ils ont utilisé le MAC (Modal Assurance Criterion) qui semble être une piste intéressante. La fonctionnelle (2.47) utilisée impose en revanche de connaître une estimation de la valeur théorique de la mesure.

$$\begin{aligned}
 Q_t &= \sum_{r=1}^{N_t} [a_i(t_r) - \hat{a}_i(t_r)]^2 \\
 &= \sum_{r=1}^{N_t} \left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{\phi_{k,i} \phi_{k,j} F_j}{\omega_{d_k}} e^{-\xi_k \omega_k t_r} \left[(2\xi_k^2 \omega_k^2 - \omega_k^2) \sin \omega_{d_k} t_r - 2\xi_k \omega_k \omega_{d_k} \cos \omega_{d_k} t_r \right] \right) - \hat{a}_i(t_r) \right]^2
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

Avec $\hat{a}_i(t_r)$ correspondant au signal mesuré et $a_i(t_r)$ au signal estimé théoriquement.

Hu et Fukunaga [62] ont travaillé sur la détermination d'une fonctionnelle obtenue uniquement à partir de données expérimentales issues soit de mesures directes soit de simulations numériques. C'est cette dernière approche qui semble la plus appropriée à notre problème initial.

La relation entre les déformations mesurées en un point (x_0, y_0, z_0) et la force appliquée en un point (x_f, y_f) est mise sous la forme:

$$\{\tilde{\varepsilon}_i\} = [G_i(x_f, y_f, x_0, y_0, z_0)] \{\tilde{f}\}$$

où

$$\begin{aligned}
 \{\tilde{\varepsilon}_i\} &= \begin{bmatrix} \varepsilon(0) & \varepsilon(\Delta t) & \dots & \varepsilon(k\Delta t) \end{bmatrix}^t \\
 \{\tilde{f}\} &= \begin{bmatrix} f(0) & f(\Delta t) & \dots & f(k\Delta t) \end{bmatrix}^t
 \end{aligned}$$

i représente le $i^{\text{ème}}$ capteur et $G_i(x_f, y_f, x_0, y_0, z_0)$ est la fonction de transfert correspondante. Pour déterminer la localisation de la force d'impact, il est proposé de minimiser la fonctionnelle suivante par rapport aux coordonnées du point d'impact x_e et

y_e :

$$\min_{x_e, y_e} = \sum_{i=1}^m \frac{\|G_i \{\tilde{f}_e\} - \{\tilde{\varepsilon}_i\}\|^2}{\|\{\tilde{\varepsilon}_i\}\|^2} \quad (2.48)$$

Une fois la position de l'impact trouvée, il est possible de déterminer l'historique de la force en utilisant la fonctionnelle suivante :

$$F = \min_{x_e, y_e} \sum_{i=1}^m \left\| \{\tilde{\varepsilon}_i\} - G_i \{\tilde{f}\} \right\|^2 + \lambda \|\tilde{f}\|^2 \quad (2.49)$$

où λ est le paramètre de régularisation et m le nombre de capteurs sur lesquels a été faite l'acquisition.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude bibliographique sur des problèmes d'identification d'un chargement sur une structure a été effectuée permettant de dégager les points essentiels abordés dans la littérature. La mise en équation du problème inverse qui nous intéresse a été présentée ainsi que les difficultés qui peuvent se poser lors de sa résolution. La plupart de ces problèmes sont mal-posés et nécessitent l'introduction d'informations a priori afin d'obtenir des solutions admissibles : c'est ce qui s'appelle régulariser le problème. Dans la bibliographie il semble que ces méthodes sont très efficaces et que leur mise en œuvre ne pose pas de problème particulier.

Les différentes méthodes de régularisation (Tikhonov, troncature,...) ont été appliquées sur des structures travaillant dans le domaine linéaire élastique. En revanche il n'existe presque pas d'études sur la reconstruction de la charge dans le domaine plastique à l'aide de mesures effectuées durant le chargement.

A partir de l'analyse de la bibliographie, il nous semble important d'approfondir les questions suivantes :

- Analyse et limite des différentes méthodes de régularisation. En particulier y a-t-il une méthode qui soit plus fiable que les autres ? Est-ce que dans l'ensemble les différentes méthodes conduisent au même résultat ?

- Est-il possible de reconstruire simultanément plusieurs chargements appliqués en différents points de la structure ou encore une pression qui n'est pas appliquée uniformément ?

- Que se passe t-il si on sort "un peu" du domaine linéaire élastique, i.e. si la structure est endommagée, plastifiée durant l'application de la sollicitation ?

On va tenter de donner des réponses à ces questions dans les prochains chapitres en appliquant les méthodes de régularisation déterministes.

Chapitre 3

Analyse des différents processus de régularisation

3.1 Introduction

Les objectifs de ce chapitre sont doubles : illustrer d'une part les méthodes de reconstruction de la force, en appliquant les méthodes déterministes de régularisation et, d'autre part, de mettre en évidence les éventuelles difficultés à mettre en place de telles méthodes.

En particulier on testera les différentes méthodes de régularisation (méthode de Tikhonov et troncature de la SVD/GSVD) en considérant plusieurs fonctionnelle régularisante. On s'intéressera successivement aux fonctionnelles Identité (L_0), Dérivée première (L_1) et Dérivée seconde (L_2). Les méthodes seront testées en utilisant les trois critères suivants de détermination du paramètre de régularisation : la courbe en L , la fonction GCV et le critère de quasi-optimalité.

Ces méthodes seront appliquées pour tester la difficulté à reconstruire des forces plus ou moins lisses. On va donc s'intéresser à différentes forces et voir l'influence de certaines caractéristiques sur la capacité à les reconstruire. On testera donc l'influence de la durée du chargement par rapport à la durée de la mesure : typiquement, une force d'impact s'applique durant un intervalle de temps court, alors que des sollicitations ambiantes (vibrations ambiantes, bruit, etc...) vont s'appliquer en permanence. De même dans le cas d'une force d'impact, on peut avoir des variations très rapides (voire une discontinuité) de pente qui peut être difficile à retrouver. En particulier il sera intéressant de voir s'il n'est pas utile d'inclure des zéros en début de signal : l'objectif étant de voir si cela permet d'améliorer la reconstruction du début de la force, ce qui est susceptible d'aider la reconstruction de forces d'impact.

Ces méthodes reposent sur une mesure indirecte qui va dépendre des moyens de mesure dont on dispose. Hillary [63] semble suggérer que les déformations sont les mesures qui conduisent aux meilleurs résultats. Afin d'évaluer la sensibilité à la nature de la mesure utilisée, on utilisera des réponses en déplacement, en déformation et en accélération. On étudiera également l'influence de la position du point de chargement et du point où les mesures sont effectuées.

Dans ce chapitre les essais sont purement numériques et seront appliqués sur une poutre articulée-appuyée qui sera présenté dans le premier paragraphe.

3.2 Présentation du cas test

3.2.1 Système étudié

La structure considérée est une poutre articulée-appuyée excitée par une force ponctuelle comme indiqué sur la Fig 3.1. Les caractéristiques géométriques et les propriétés à prendre en considération dans l'étude sont présentés dans le tableau 3.1.

La force ponctuelle $f(t)$ est appliquée en $x_j = 60 \text{ cm}$ et la réponse $s(t)$ est mesurée en $x_i = 30 \text{ cm}$.

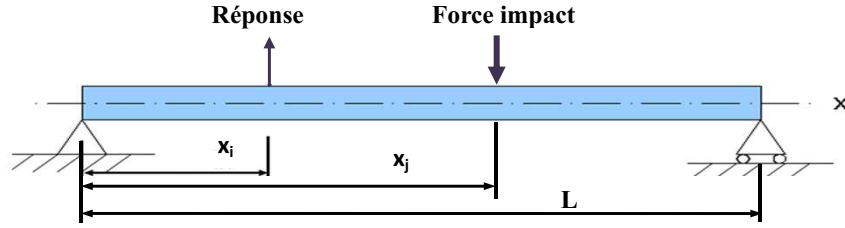


FIGURE 3.1: Poutre appuyée-appuyée

Longueur $L(\text{cm})$	Largeur $b(\text{cm})$	Hauteur $h(\text{cm})$	E (GPa)	ρ (kg/m^3)	Amortissement modal $\xi(\%)$
90	2	2	70	2800	2

TABLE 3.1: Caractéristiques de la poutre

Trois types de force sont utilisés. Les deux premiers sont des forces d'impact dont l'expression a été donnée au chapitre précédent : ils sont donc caractérisés par une “durée d'impact”, c'est-à-dire une durée durant laquelle on a l'essentiel du chargement et qui est (très) inférieure à la durée durant laquelle on effectue nos mesures ; le troisième type est un signal sinusoïdal décroissant. L'objectif est de voir si la détection du début et de la fin de l'impact est bien détecté ou s'il est plus facile de reconstruire un signal “qui dure”. De même une force d'impact étant souvent caractérisée par une force qui augmente très vite dès le début, on étudiera l'influence de la pente initiale sur la qualité de la reconstruction.

Enfin, pour chaque type de force on a étudié l'influence de la position du début du signal. Ainsi, pour chaque type, on étudie le cas d'une force qui est appliquée dès le début et le cas avec la même force mais appliquée avec un certain délai : ceci est obtenu en imposant à la force d'être identiquement nulle pendant une certaine durée. En effet, il semble a priori plus facile de reconstruire un signal qui part de zéro en imposant ce délai afin de donner un poids important à la valeur initiale de la force.

Ces différents types et cas sont répertoriés comme suit :

1. Premier type : $f(t) = f_0 t^\alpha e^{-\gamma t}$. On utilisera les quatre cas suivants :
 - Cas C1T1 : la force d'impact a une pente qui est considérée comme n'étant pas très raide : elle est d'ailleurs nulle en $t = 0$, ce qui donne une continuité C^1 à la force. Elle est représentée sur la Figure 3.2a.

- Cas C2T1 : On ajoute des zéros avant le début du signal de force du cas C1T1 (cf Figure 3.2b).
- Cas C3T1 : la force d'impact a une discontinuité de pente en zéro et la croissance en début du signal est beaucoup plus rapide que dans le cas C1T1 (cf Figure 3.2c).
- Cas C4T1 : On ajoute des zéros avant le début du signal de force du cas C3T1 (cf Figure 3.2d).

Pour obtenir ces différents cas, on choisit les paramètres suivants :

- Cas C1T1 et C2T1 : $f_0 = 2 \cdot 10^{15} \text{ N/s}^6$, $\alpha = 6$ et $\gamma = 300 \text{ s}^{-1}$
- Cas C3T1 et C4T1 : $f_0 = 3 \cdot 10^5 \text{ N/s}^6$, $\alpha = 1$ et $\gamma = 300 \text{ s}^{-1}$

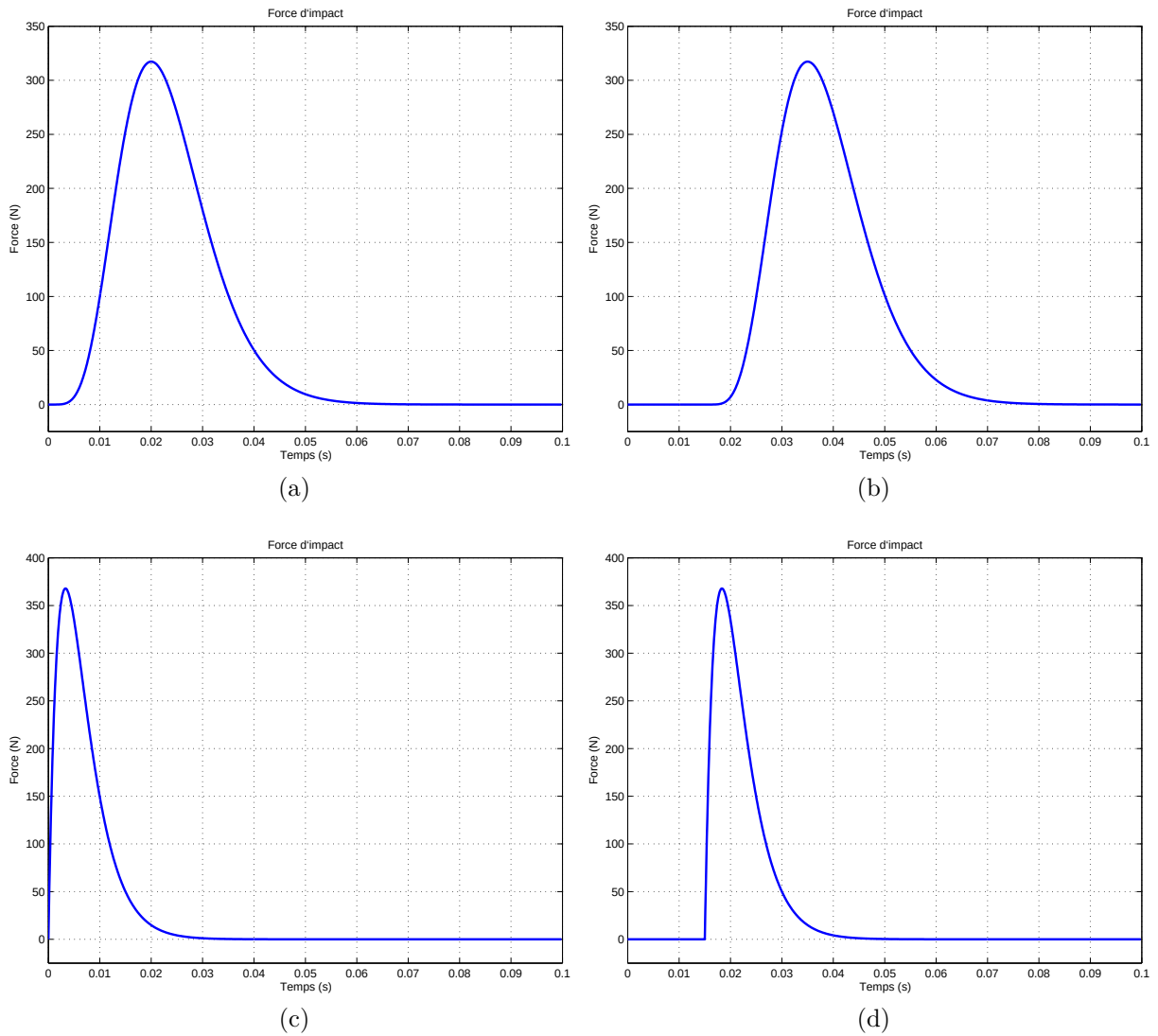


FIGURE 3.2: Force d'impact du type 1

2. Second type

$$\begin{aligned}
 f(t) &= f_0 \sin(\omega(t - t_0)) \text{ si } t - t_0 \leq \frac{\pi}{\omega} \\
 &= 0 \text{ si } t - t_0 > \frac{\pi}{\omega}
 \end{aligned}$$

avec $f_0 = 250N$, $\omega = 120 \text{ rad/s}$.

- Cas C1T2 : La force est appliquée en $t = 0$ ($t_0 = 0$), comme indiqué sur la Figure 3.3a.

- Cas C2T2 : On ajoute des zéros avant le début du signal de force du cas C1T2, Figure 3.3b.

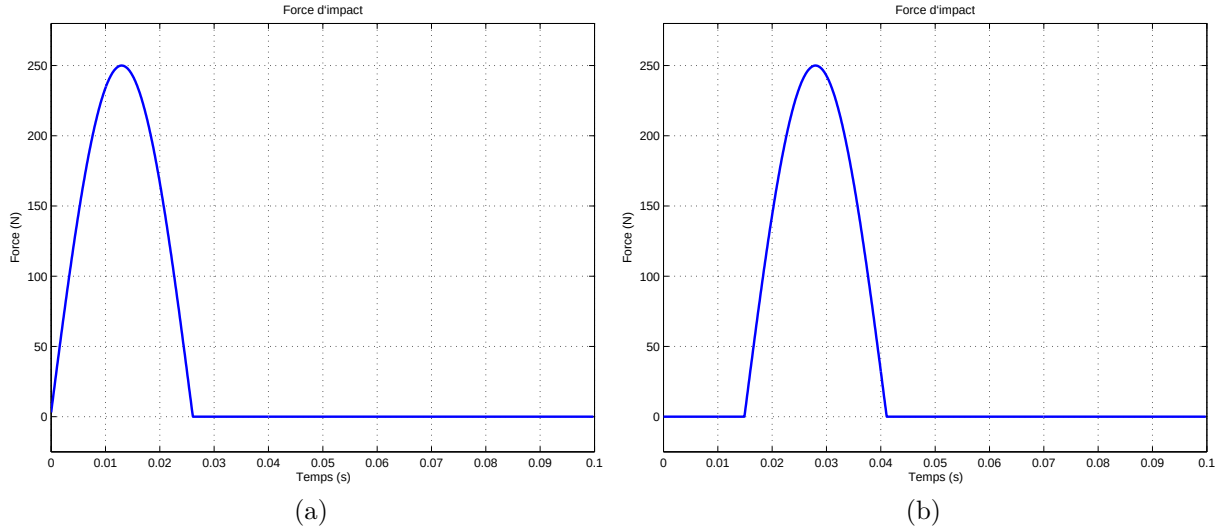


FIGURE 3.3: Force d'impact du type 2

3. Troisième type : $f(t) = f_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$, avec $f_0 = 400N$, $\gamma = 60 \text{ s}^{-1}$, $\omega = 350 \text{ rad/s}$.

- Cas C1T3 : La force harmonique exponentiellement décroissante est appliquée en $t = 0$ (cf Figure 3.4a).

- Cas C2T3 : On ajoute des zéros avant le début du signal de force du cas C1T3 (cf Figure 3.4b).

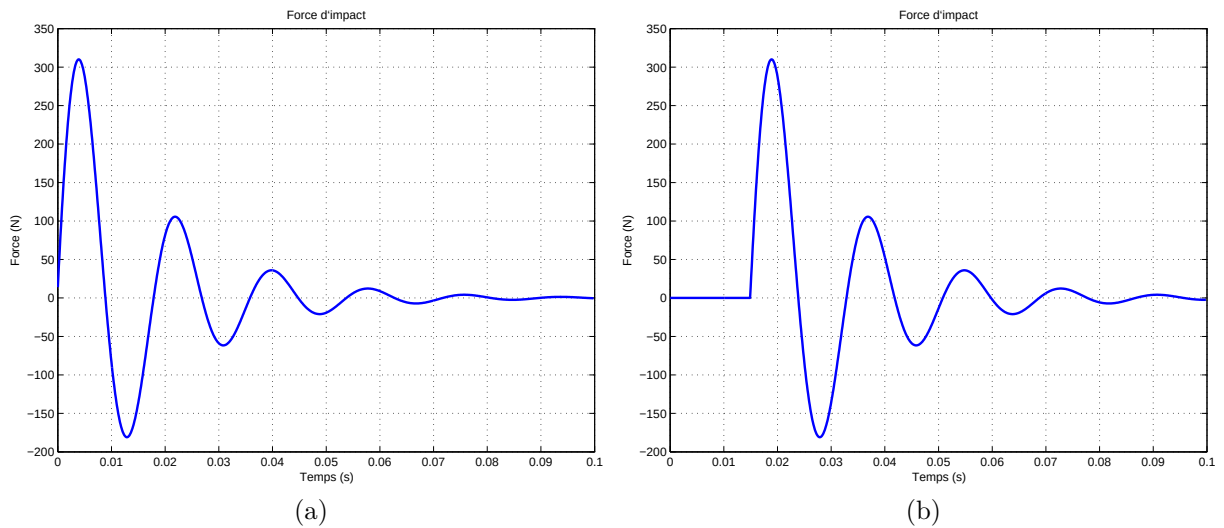


FIGURE 3.4: Force du type 3

3.2.2 Fonctions de transfert analytique d'une poutre

Une étape importante concerne l'identification des propriétés de la poutre à travers sa fonction de transfert. En l'occurrence, compte-tenu des conditions aux limites de la poutre, il existe une formulation analytique de la fonction de transfert en déplacement (appelée également réponse impulsionnelle). C'est le déplacement en $x = x_i$ de la poutre appuyée-appuyée soumise à une force $F(t) = \delta(t) \delta(x - x_j)$ (δ représente la fonction généralisée de Dirac) agissant en $x = x_j$ qui est donné par la relation suivante :

$$w(x_i, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x_i) \phi_n(x_j) e^{-\xi_n \omega_n t} \sin(\omega_{dn} t)}{m_n \omega_{dn}} \quad (3.1)$$

où :

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{n\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad n = 1, 2, \dots \\ m_n &= \int_0^L (\phi_n(x))^2 dx \end{aligned}$$

I étant le moment quadratique d'inertie et A est l'aire de la section droite de la poutre,

$$\omega_{dn} = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$$

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

Comme mentionné précédemment, on cherche à évaluer l'efficacité des signaux mesurés. Aussi trois signaux de nature différente sont utilisés : un déplacement, une déformation et une accélération. On en déduit les fonctions de transfert correspondantes entre le point d'abscisse x_i où sont effectuées les mesures et le point d'abscisse x_j où est appliquée la force :

- fonction de transfert en déplacement (donnée par l'expression 3.1) :

$$G_{dep}(x_i, x_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x_i) \phi_n(x_j) e^{-\xi_n \omega_n t} \sin(\omega_{dn} t)}{m_n \omega_{dn}} \quad (3.2)$$

- fonction de transfert en déformation (sur la fibre supérieure) :

$$G_{def}(x_i, x_j) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{h}{2} \frac{d^2 \phi_n(x_i)}{dx^2} \frac{\phi_n(x_j) e^{-\xi_n \omega_n t} \sin(\omega_{dn} t)}{m_n \omega_{dn}} \quad (3.3)$$

- fonction de transfert en accélération :

$$\begin{aligned} G_{acc}(x_i, x_j) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x_i) \phi_n(x_j) e^{-\xi_n \omega_n t}}{m_n \omega_{dn}} \left[\omega_n^2 (2 \xi_n^2 - 1) \sin(\omega_{dn} t) - 2 \xi_n \omega_n \omega_{dn} \cos(\omega_{dn} t) \right] \\ &+ \frac{1}{\rho S} \delta(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

En pratique on a retenu un nombre fini de modes (20 modes) en s'assurant de la convergence de la solution.

3.2.3 Reconstruction de la force

On cherche donc à déterminer la force $f(t)$ connaissant la mesure $s(t)$ et la fonction de transfert G entre les points x_i et x_j . On doit donc déterminer la solution du problème :

$$s(t) = G(t) * f(t)$$

Ce qui se traduit par l'équation matricielle :

$$[S] = [G][F]$$

où :

$$S_i = S(i\Delta t)$$

$$F_i = F((i-1)\Delta t)$$

$$G(i, j) = \begin{cases} G(j-i+1)\Delta t & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il s'agit de reconstruire les forces représentées sur les Figures 3.2 à 3.4 à partir d'une réponse perturbée. Le bruit utilisé est un bruit blanc de moyenne nulle et d'écart-type égal à 3% de l'amplitude maximale de la réponse (voir Figure 3.6a). Les simulations se déroulent en trois étapes :

- Calcul direct : calcul des réponses en des points de la structure en connaissant les différentes fonction de transfert et la force appliquée.
- Perturbation des signaux : le bruit est ajouté aux signaux mesurés.
- Calcul inverse : calcul de l'effort avec les signaux perturbés à l'aide des méthodes de régularisation.

Ainsi la mise en œuvre de la résolution du problème inverse se fera selon l'organigramme de la Figure 3.5.

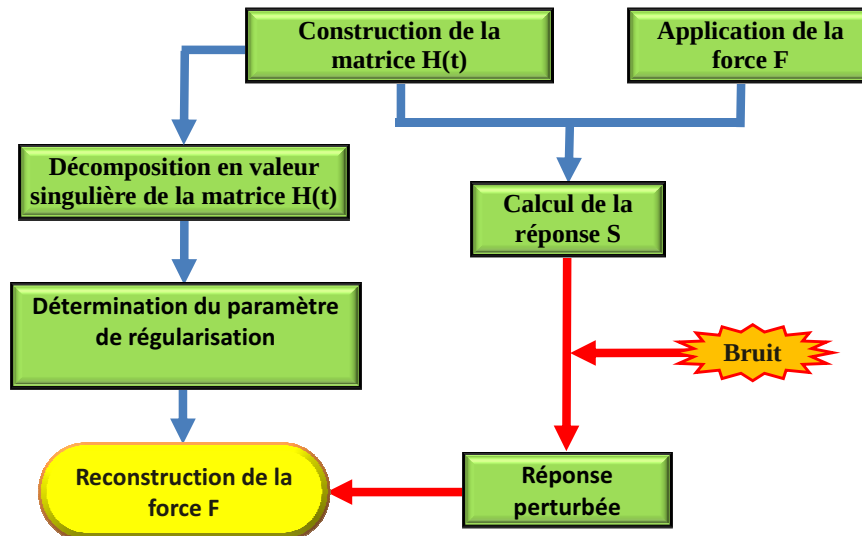


FIGURE 3.5: Méthode d'identification d'impact par analyse inverse avec régularisation

Notons que la reconstruction de la force sans régularisation conduit à une solution divergente comme montrée sur la Figure 3.6b (cas 1 de la force de type 1 ; on mesure un déplacement).

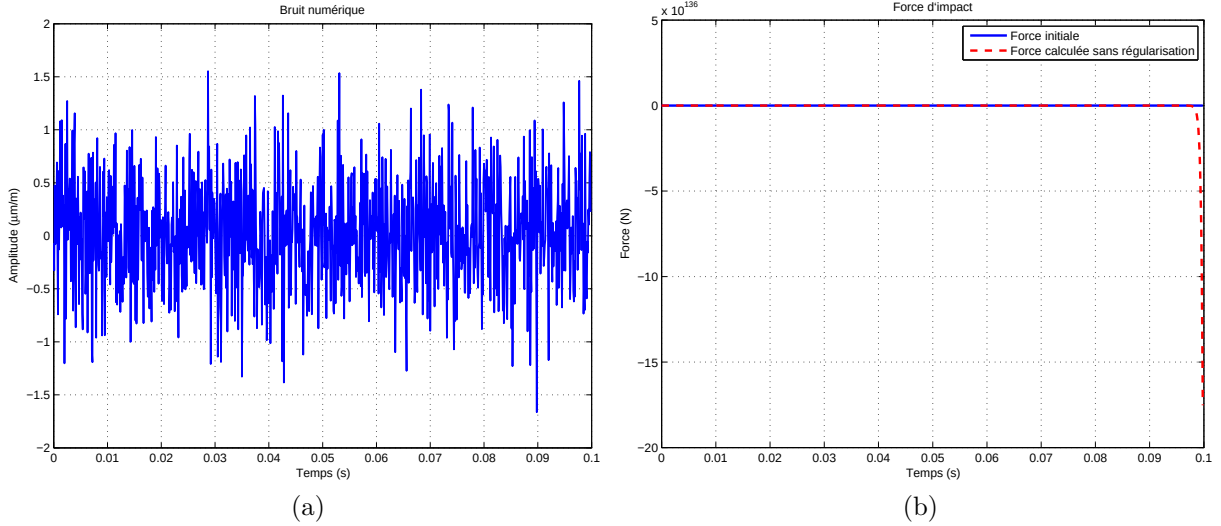


FIGURE 3.6: (a) Bruit numérique, (b) Force reconstruite sans régularisation

Il est clair que la force reconstruite est divergente à cause de l'ajout du bruit. Les valeurs singulières de la matrice G_{dep} sont représentées sur la Figure 3.7. On constate un saut entre les deux dernières valeurs singulières : la dernière valeur singulière devient inférieure à la précision de la machine, ce qui explique la divergence de la solution.

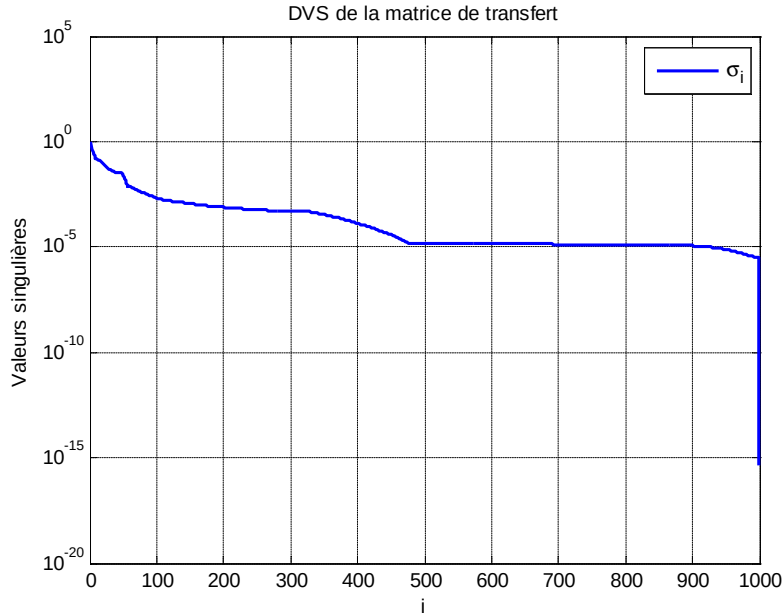


FIGURE 3.7: Valeurs singulières de la matrice

Pour valider la qualité de la reconstruction, une erreur relative entre la force exacte (initiale) et la solution régularisée a été utilisée :

$$e = 100 \times \frac{\|f_{exact} - f_{reconstruite}\|}{\|f_{exact}\|}, (\%) \quad (3.5)$$

Dans les paragraphes suivants, nous allons utiliser les méthodes de régularisation exposées au chapitre précédent pour reconstruire la force (Tikhonov et Troncature de la SVD/GSVD).

3.3 Régularisation via la norme de la force

Dans ce paragraphe, la fonction stabilisatrice est donc :

$$\Omega(F) = \|F - F_0\|_2^2$$

On prendra $F_0 \equiv 0$. On utilisera donc la SVD, même si l'utilisation de la GSVD associé à l'opérateur identité donnerait les mêmes résultats.

La reconstruction se fera sur l'intervalle $[0, 1]$ s, avec 1000 points, soit un Δt de l'ordre de 0,1 ms. Il en sera de même pour toutes les simulations de ce chapitre.

3.3.1 Régularisation de Tikhonov

Reconstruction de la force du premier type

Les Figures 3.8 à 3.10 présentent les résultats obtenus avec une réponse en déplacement, en déformation et en accélération.

On constate tout d'abord que pour une même nature de signal reconstruit et pour la même méthode de détermination du paramètre de régularisation, les écarts entre les forces identifiées et les forces initiales sont analogues, quel que soit le cas envisagé. En particulier, la pente initiale et le niveau maximal de la force sont bien estimés, ainsi que la durée d'impact. Ceci est important car cela signifie que la discontinuité de pente en début de signal que présentent les cas 3 et 4 ne pose pas de difficulté particulière. De même, mettre des zéros avant le signal n'apporte pas une meilleure détection du début du signal.

Ces résultats montrent que la mesure en déplacement donne, pour un même cas et une même méthode de détermination du paramètre de régularisation, des résultats deux fois meilleurs que l'utilisation de la déformation ou de l'accélération. Ces résultats sont en contradiction avec des les résultats de Hillary [63] qui annoncent une supériorité des déformations sur les autres natures de signaux. Toutefois Hadjit [64] n'a pas constaté cette supériorité des signaux de déformation par rapport aux accélérations, ce qui est conforme à ces résultats.

Il apparaît clairement qu'il y a une forte influence du critère utilisé pour déterminer le paramètre de régularisation. Le critère de quasi-optimalité est mis en évidence dans cette première série de calculs, suivi par le critère GCV. Une analyse des critères sera faite pour chaque fonctionnelle stabilisatrice et est placée en fin de paragraphe.

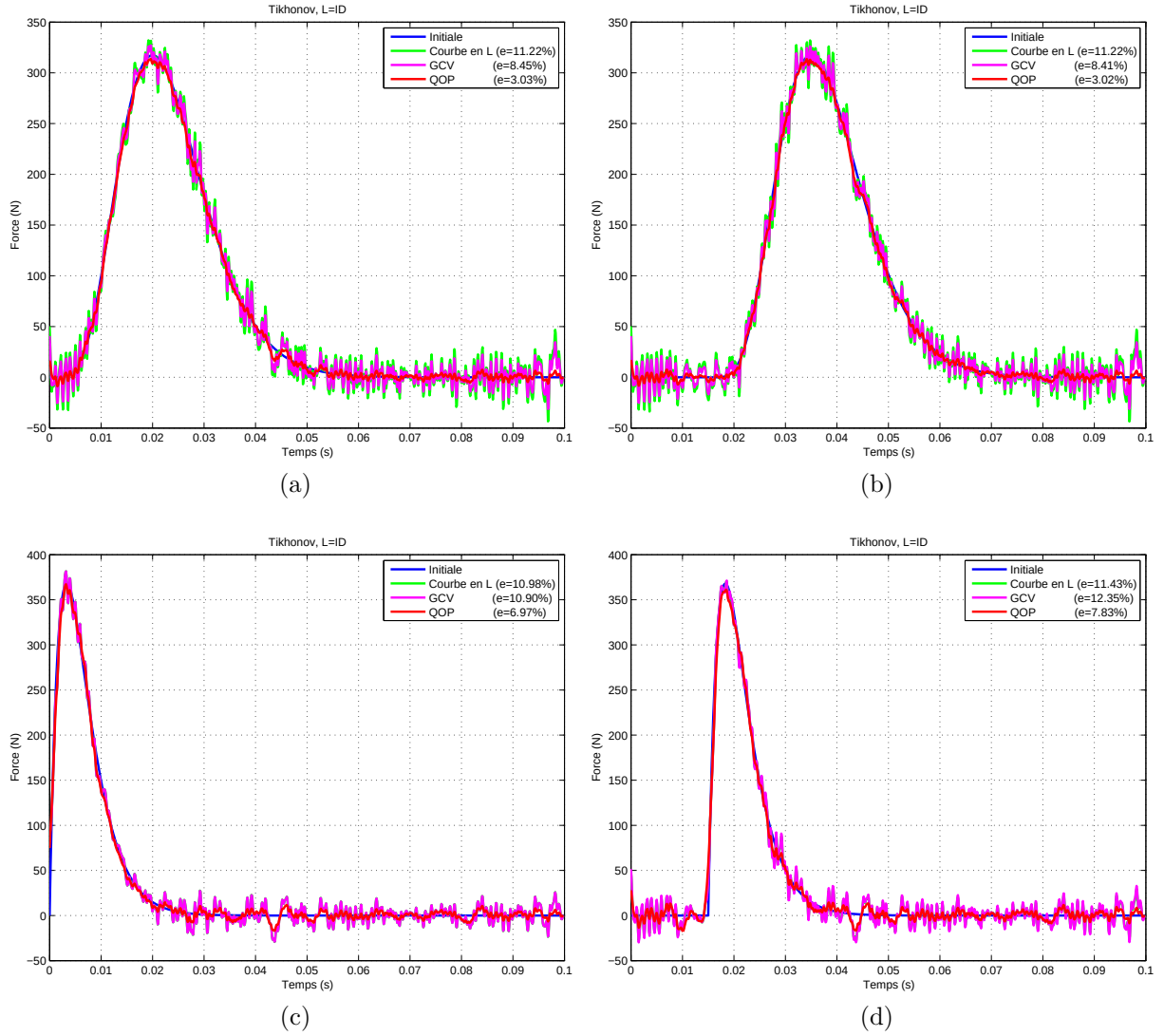


FIGURE 3.8: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement

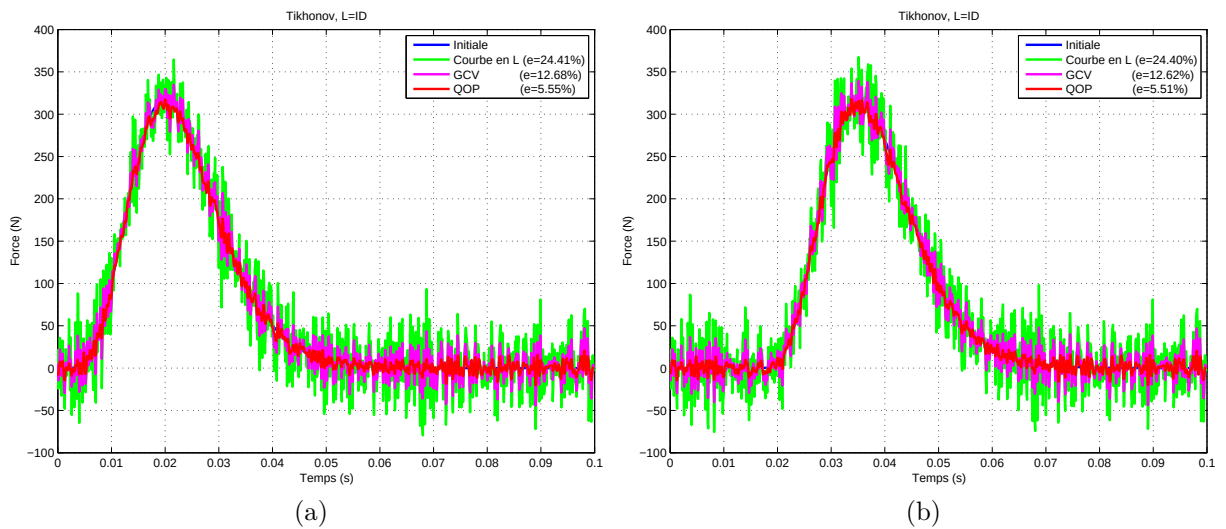


FIGURE 3.9: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation

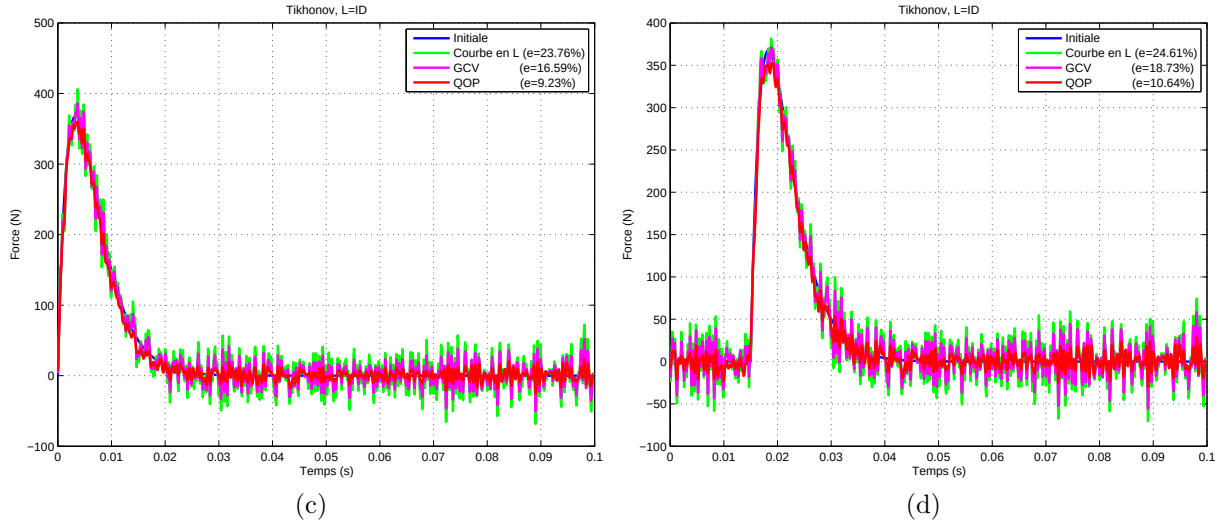


FIGURE 3.9: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation

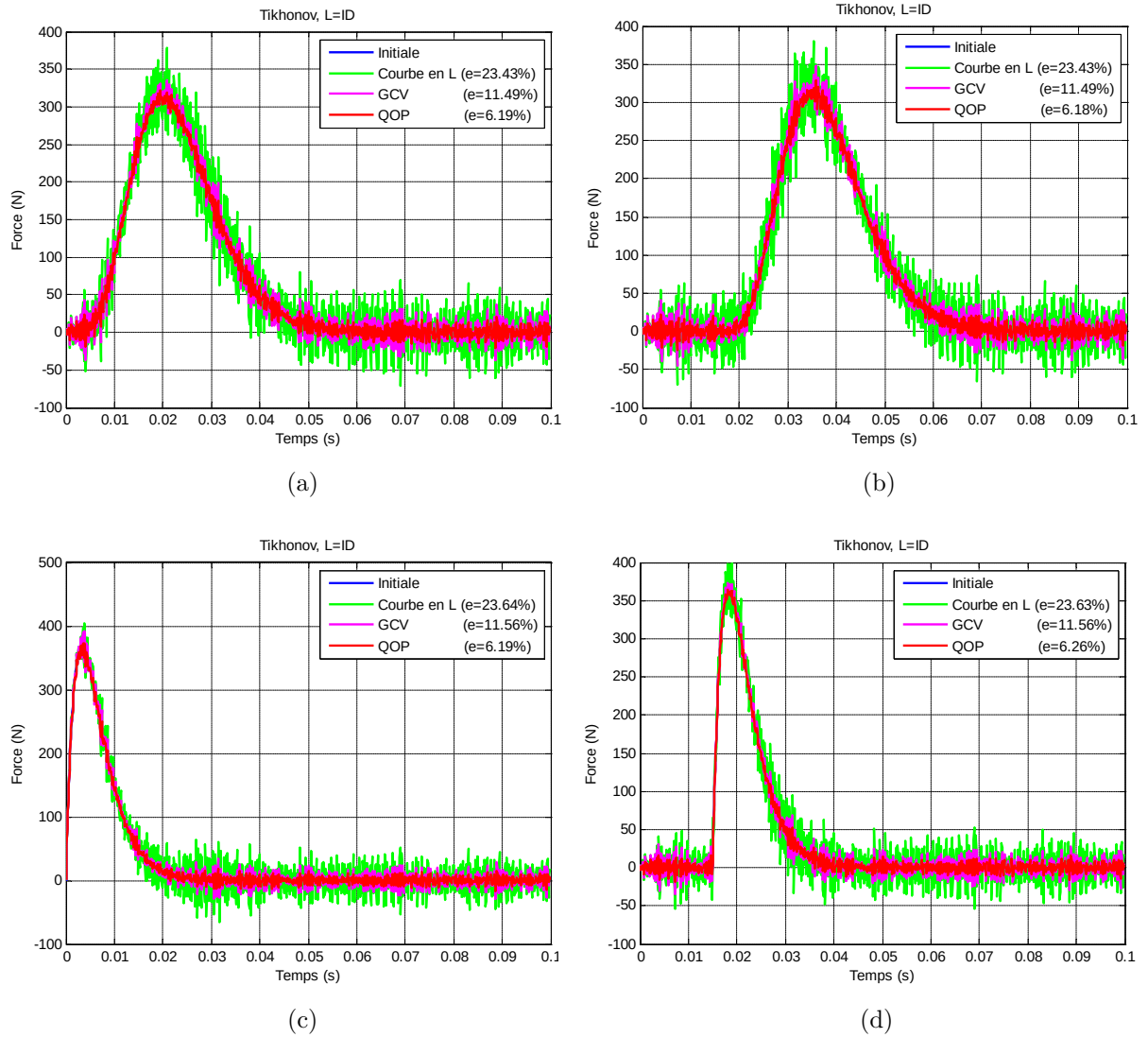


FIGURE 3.10: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération

Reconstruction de la force du second type

Les mêmes conclusions que pour le premier type, peuvent être tirées des Figures 3.11 à 3.13. Ceci confirme qu'une rupture brutale de pente peut être correctement identifiée : en l'occurrence, cette discontinuité de la dérivée première de la force est présente tant au début du signal qu'en fin de signal.

Le déplacement associé au critère de quasi-optimalité permet de reconstruire au mieux la force du second type.

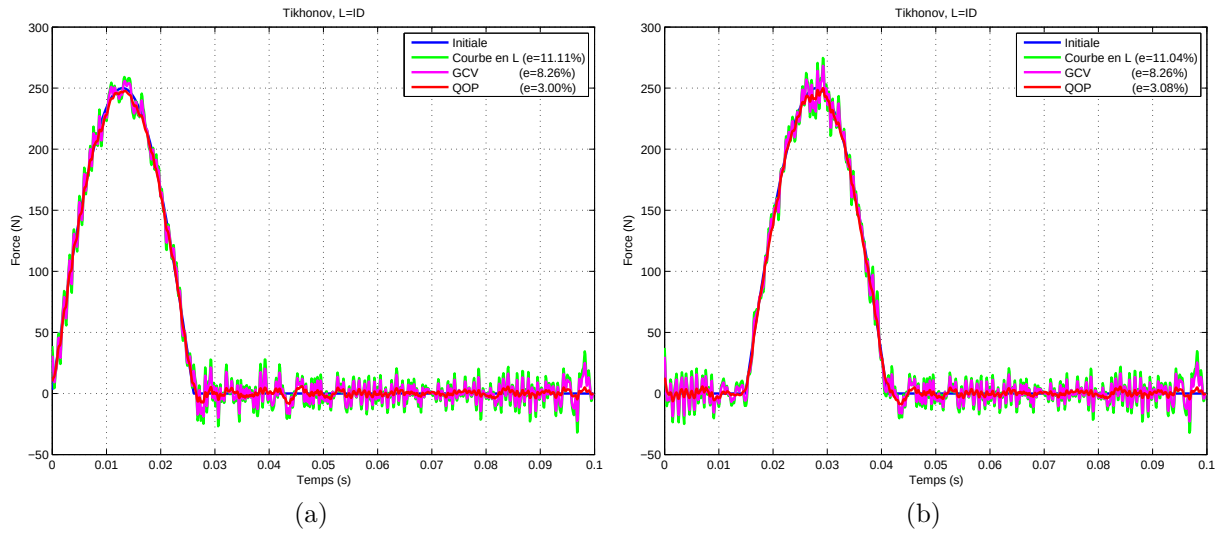


FIGURE 3.11: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement

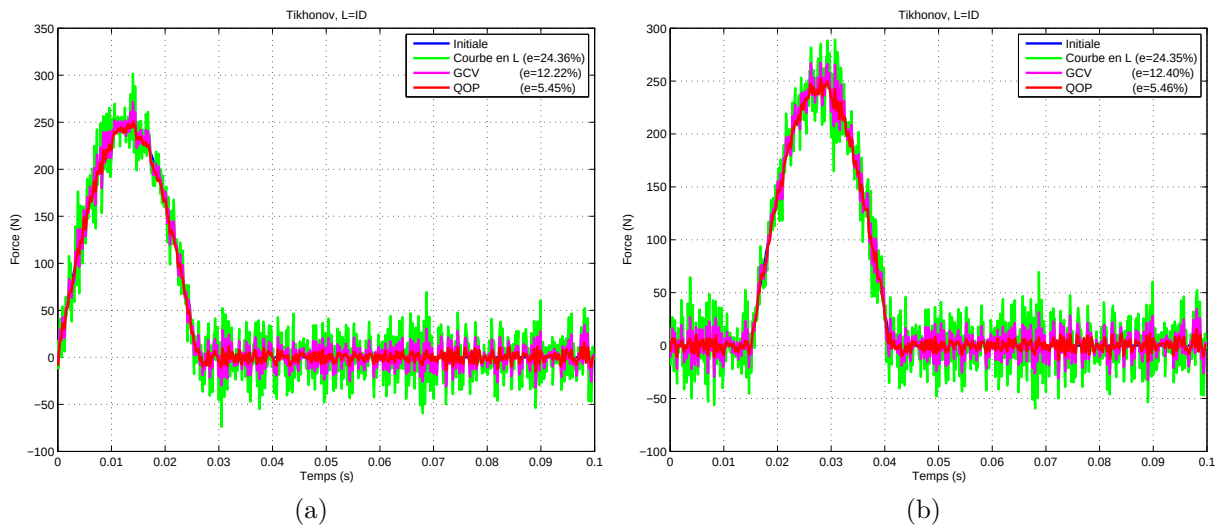


FIGURE 3.12: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation

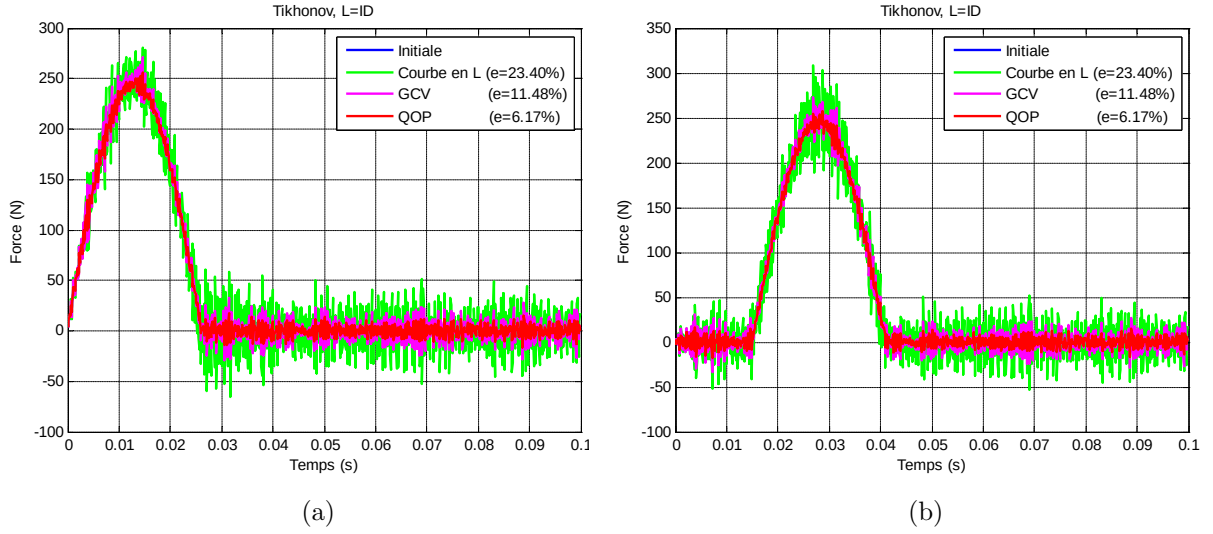


FIGURE 3.13: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération

Reconstruction de la force du troisième type

Si on excepte les résultats obtenus à partir du critère de quasi-optimalité, on a encore les mêmes conclusions (voir Figures 3.14 et 3.15). On peut donc reconstruire des signaux qui ne sont pas exclusivement des forces d'impact. Même si ces dernières peuvent s'avérer plus complexes à reconstruire, elles ont l'avantage d'être associées à une contrainte naturelle : la positivité. Ce n'est pas le cas de la force de type 3 qui est donc, finalement, plus générale.

Il apparaît que, dans ce cas, le critère de quasi-optimalité n'arrive pas à détecter un début différé du signal (sauf lorsque l'accélération est utilisée).

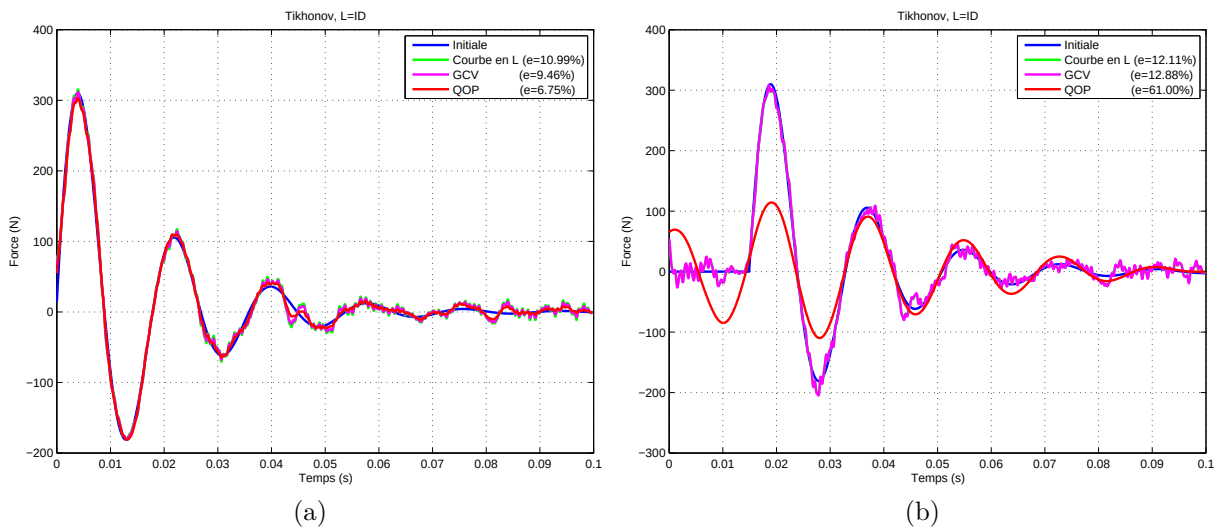


FIGURE 3.14: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement

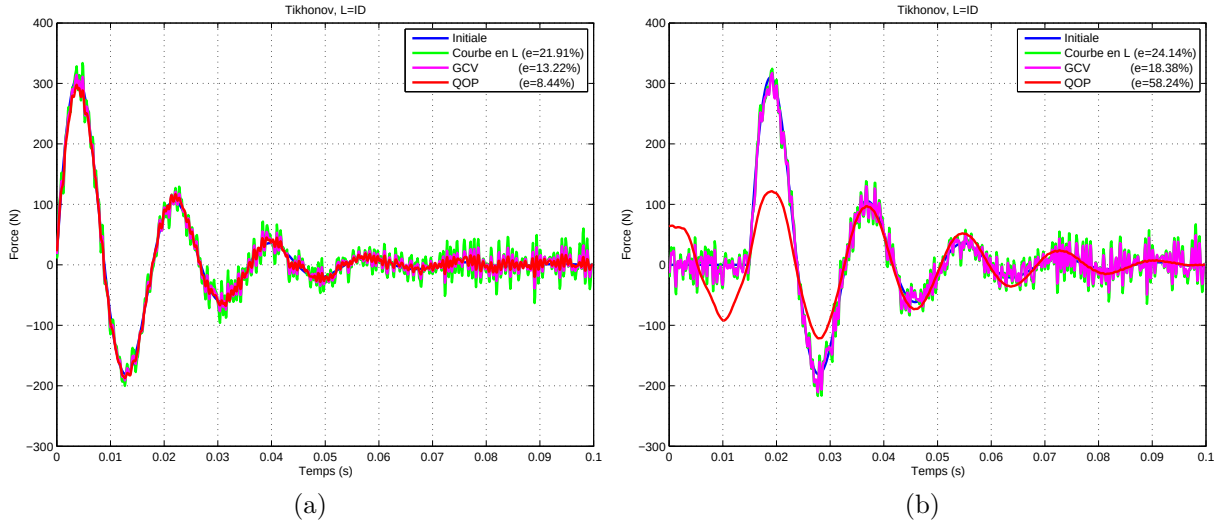


FIGURE 3.15: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation

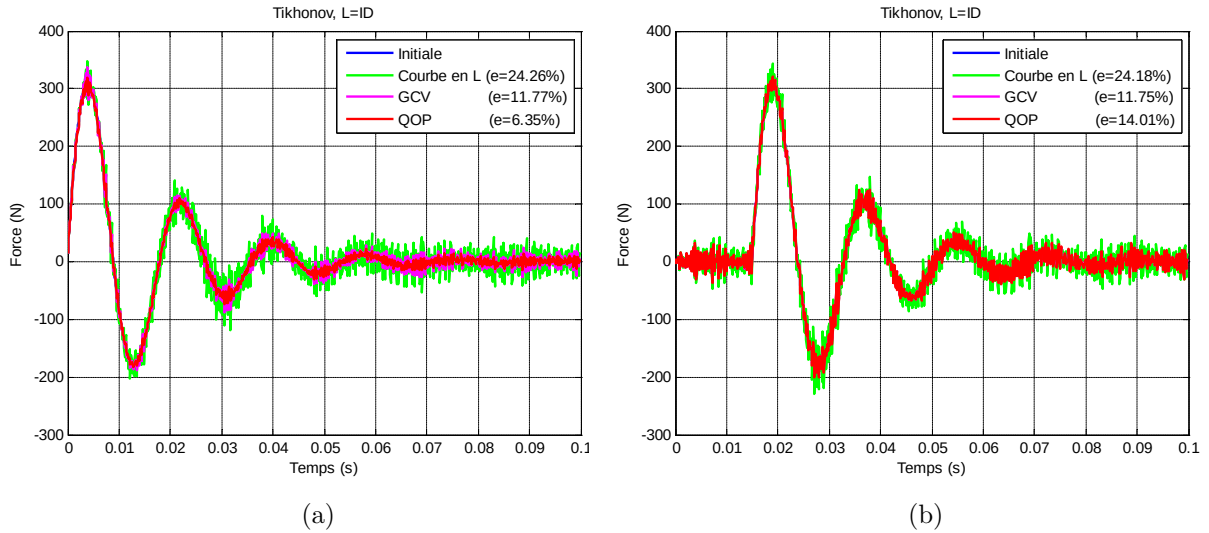


FIGURE 3.16: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération

3.3.2 Régularisation par Troncature de la SVD

Reconstruction de la force du premier type

Nous avons représenté sur les Figures 3.17 à 3.19 les résultats obtenus en utilisant une troncature de la SVD. La qualité des résultats obtenus est très haute pour les cas 1 et 2, lorsqu'on utilise les signaux en déplacement et en accélération; cette qualité reste très bonne pour les cas 3 et 4. Il ressort que le filtrage des oscillations parasites dues aux vecteurs singuliers associés aux très petites valeurs singulières est très efficace.

Les signaux de déformation ne conduisent pas à une reconstruction très performante des efforts, sauf si on utilise le critère GCV.

Le critère de quasi-optimalité, s'il peut s'avérer performant dans certains cas, peut conduire à des résultats très éloignés des forces à reconstruire.

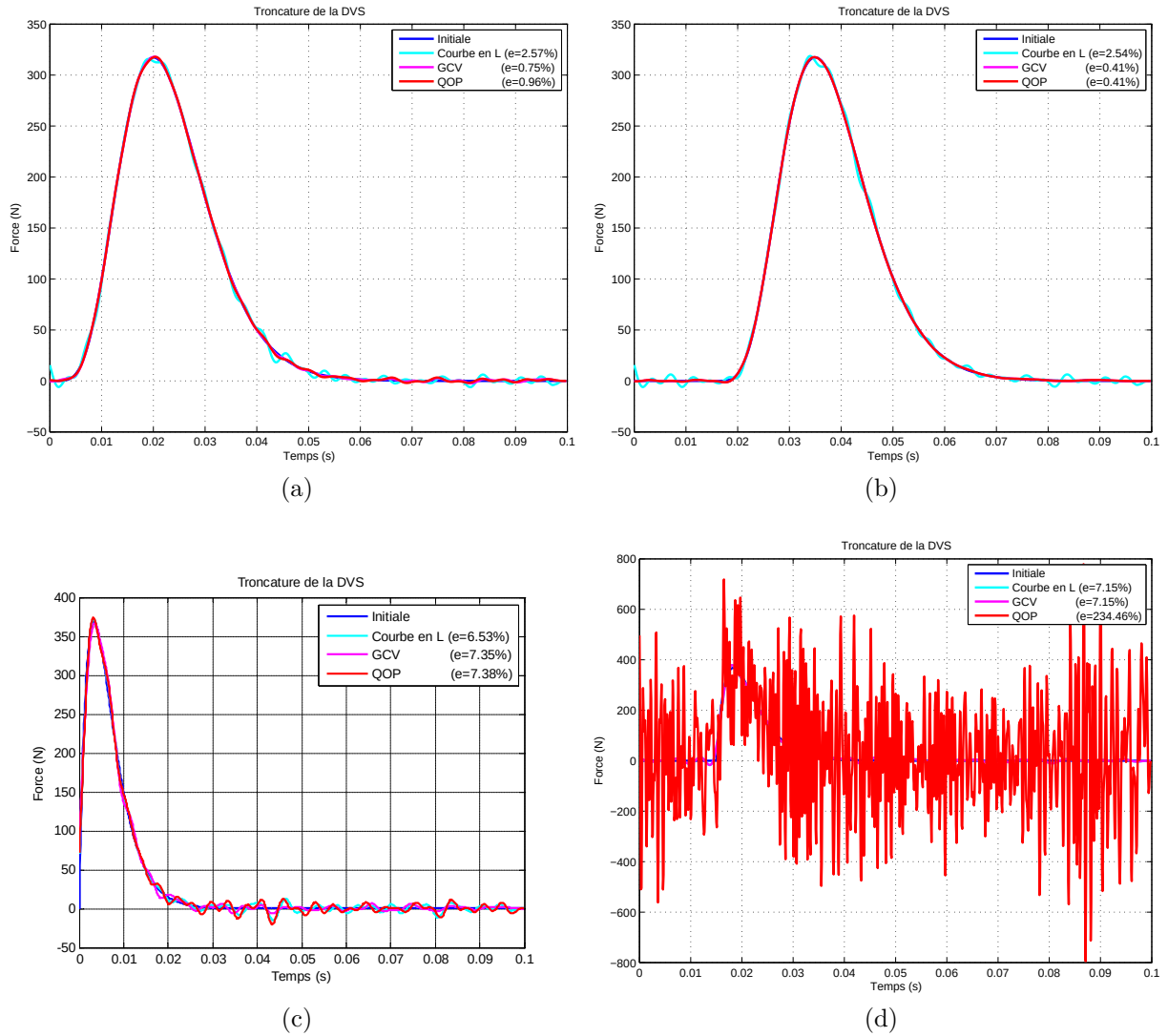


FIGURE 3.17: Force reconstruite par TSVD en mesurant le déplacement

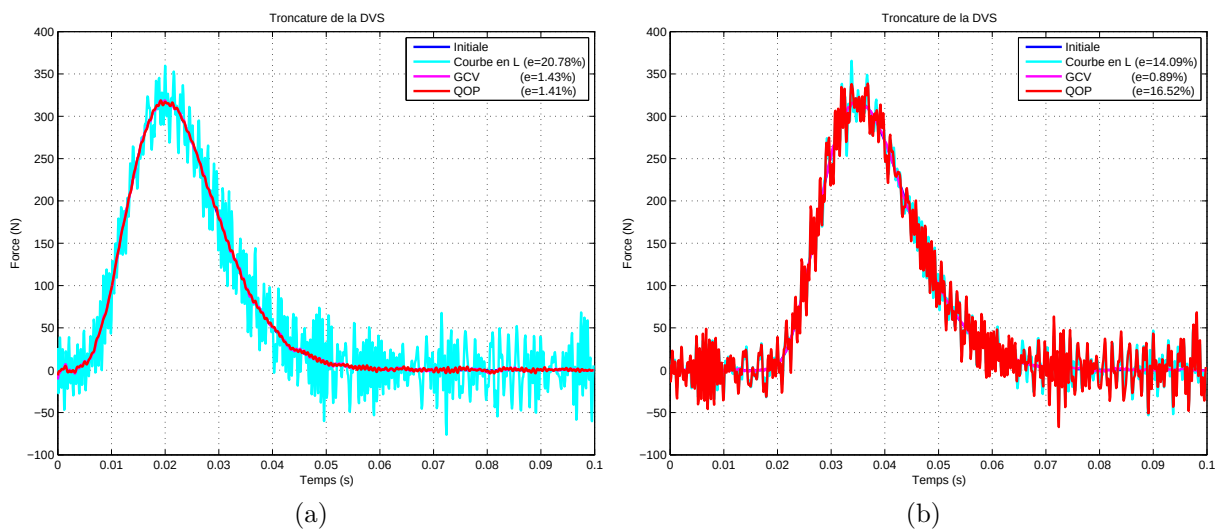


FIGURE 3.18: Force reconstruite par TSVD en mesurant la déformation

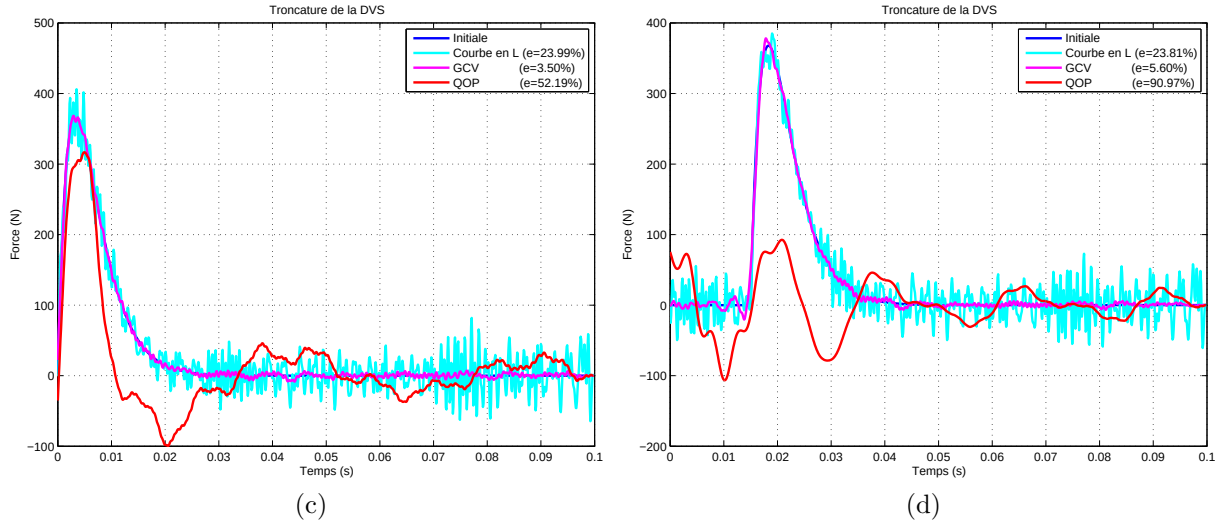


FIGURE 3.18: Force reconstruite par TSVD en mesurant la déformation

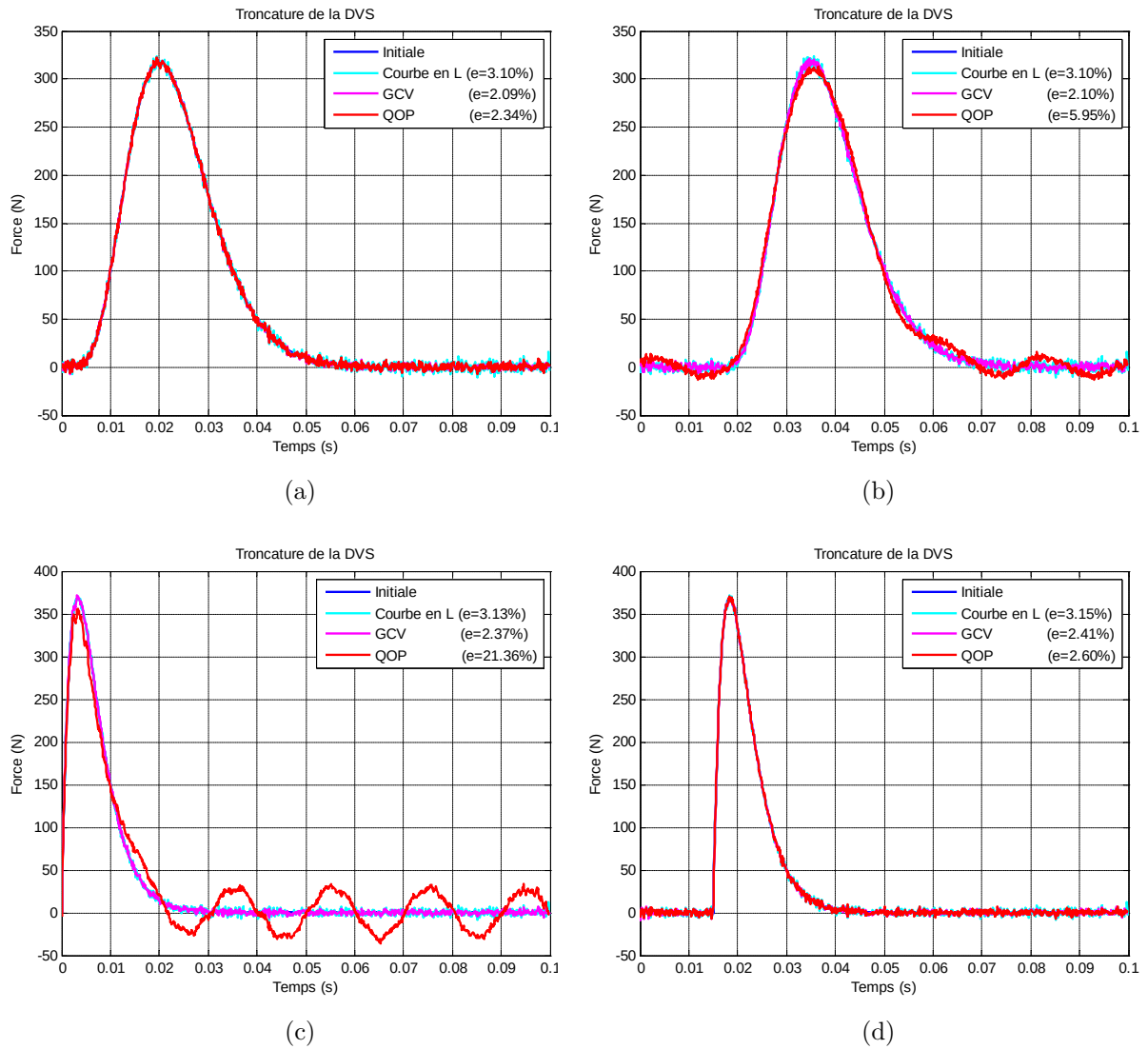


FIGURE 3.19: Force reconstruite par TSVD en mesurant l'accélération

Reconstruction de la force du second type

Les Figures 3.20 à 3.22 montrent que, là encore, les déplacements et les accélérations permettent une meilleure reconstruction de la force. En revanche les critères de la courbe en L et de quasi-optimalité associés aux signaux de déformation laissent encore un contenu haute fréquence notable.

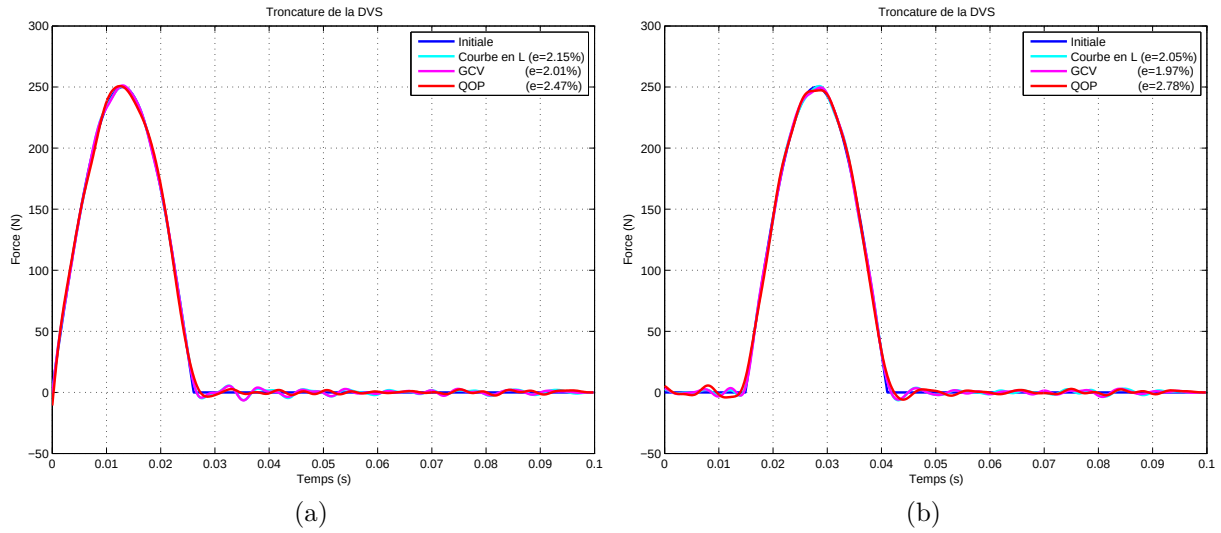


FIGURE 3.20: Force reconstruite par TSVD en mesurant le déplacement

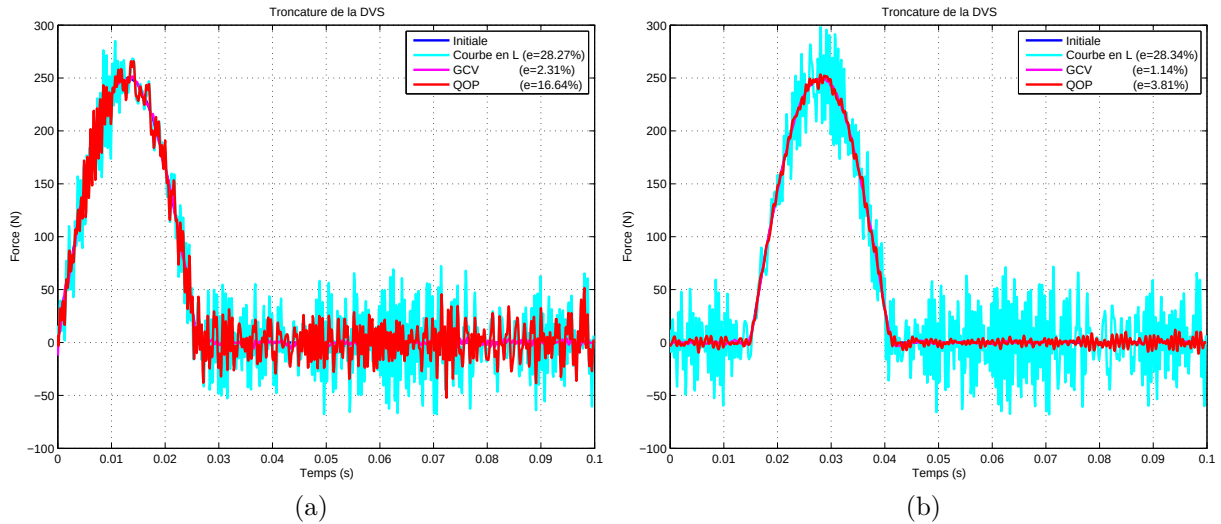


FIGURE 3.21: Force reconstruite par TSVD en mesurant la déformation

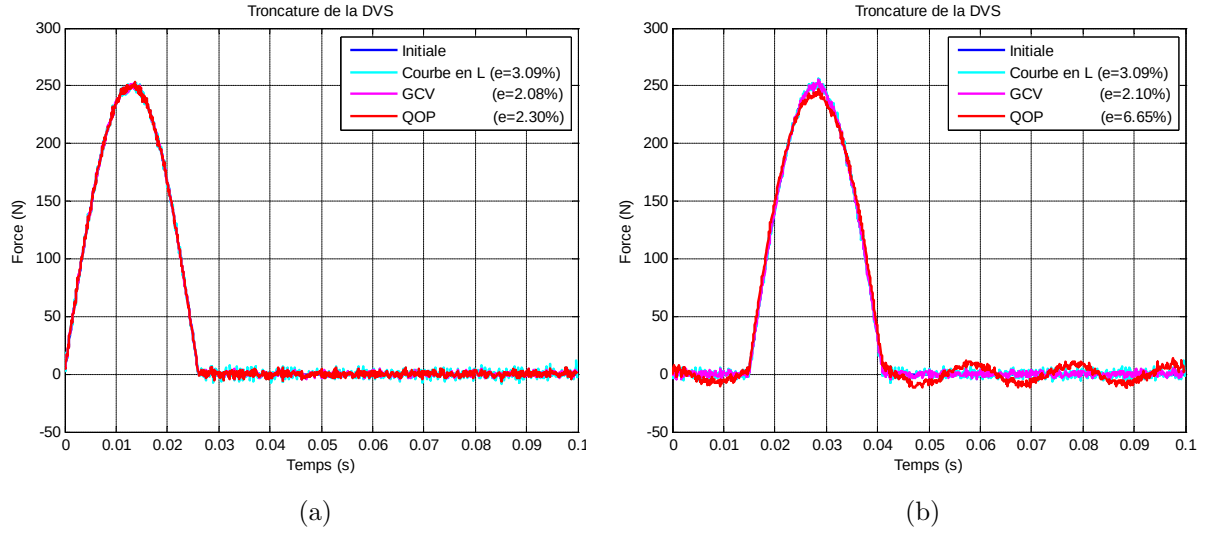


FIGURE 3.22: Force reconstruite par TSVD en mesurant l'accélération

Reconstruction de la force du troisième type

Les résultats donnés sur les Figures 3.23 à 3.25 sont très bons, sauf ceux reconstruits à l'aide des signaux de déformation associés au critère de la courbe en L .

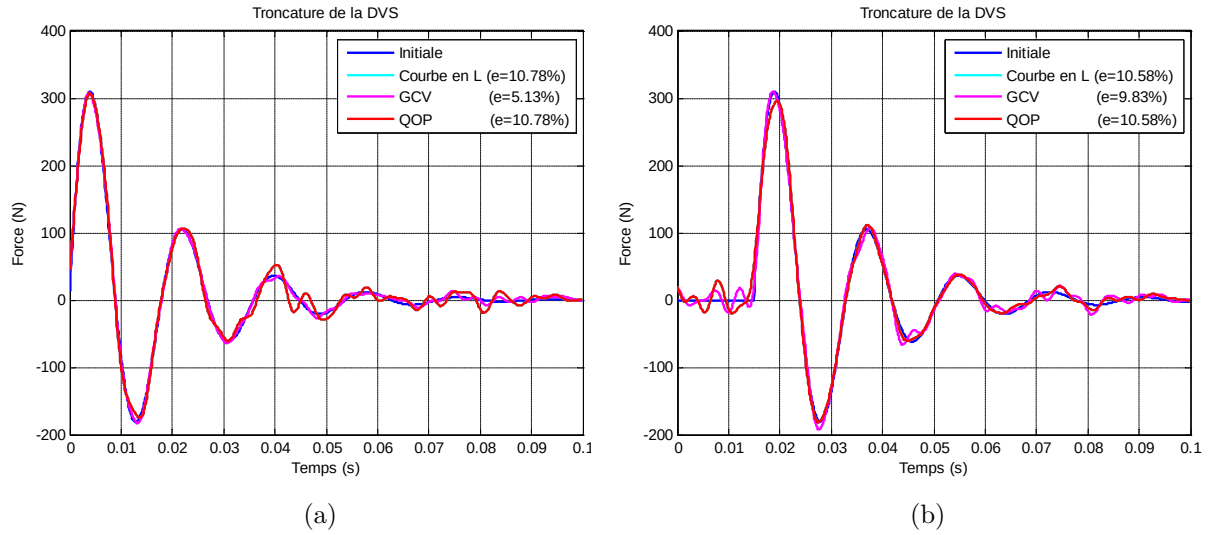


FIGURE 3.23: Force reconstruite par TSVD en mesurant le déplacement

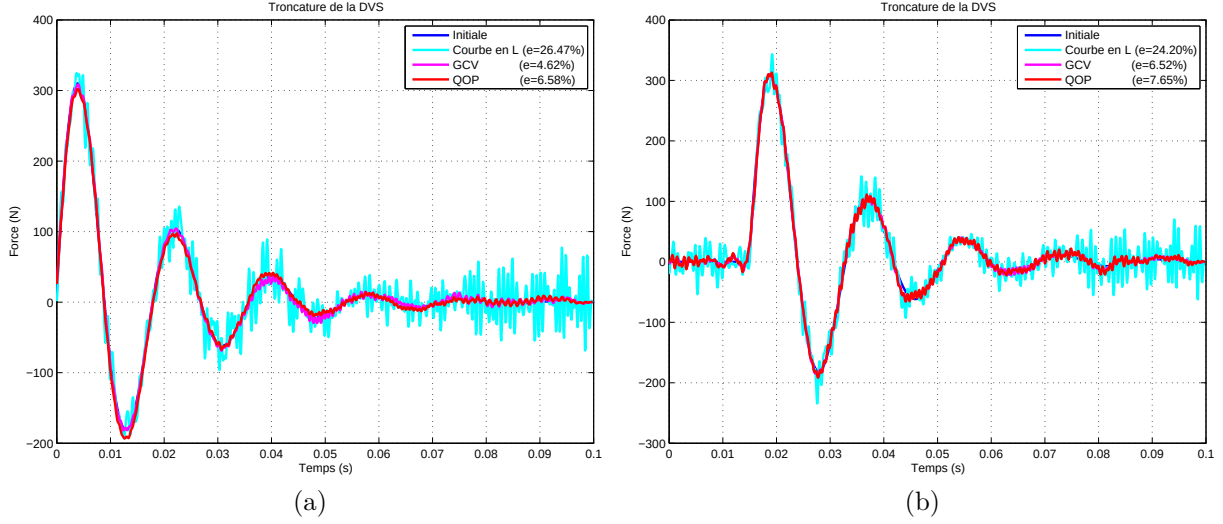


FIGURE 3.24: Force reconstruite par TSVD en mesurant la déformation

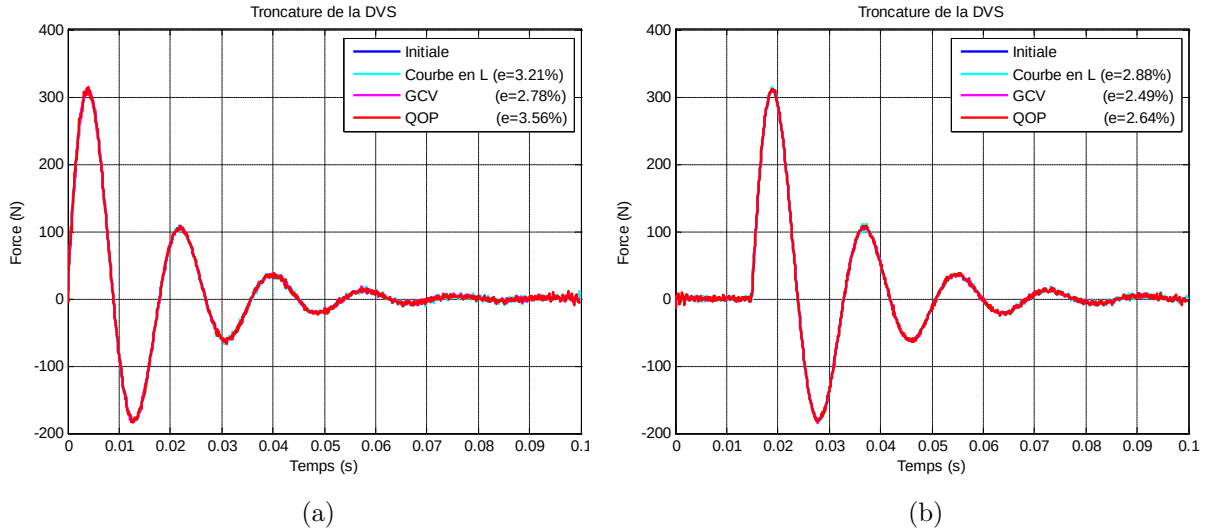


FIGURE 3.25: Force reconstruite par TSVD en mesurant l'accélération

3.3.3 Critères de choix du paramètre de régularisation

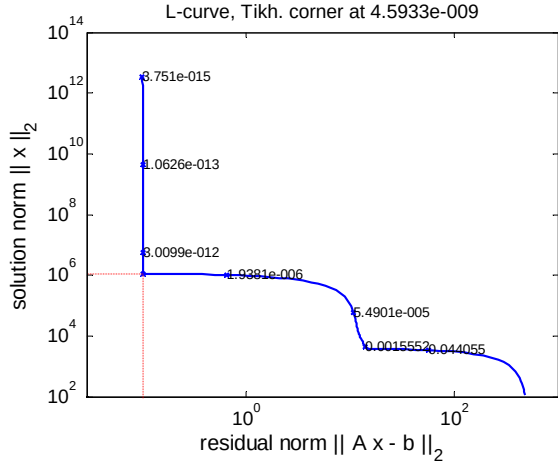
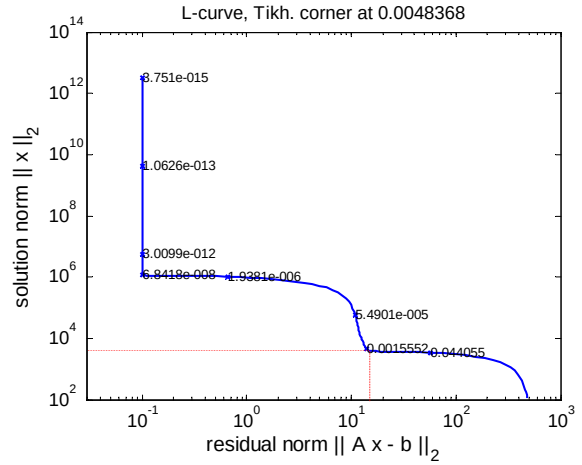
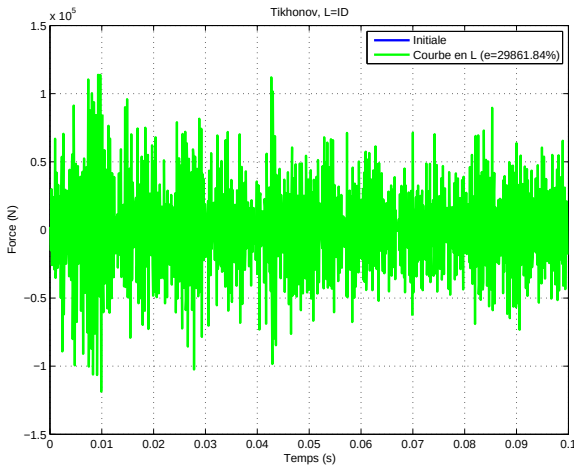
La régularisation du problème inverse dépend fortement du choix du paramètre de régularisation : une difficulté majeure de la régularisation du problème inverse est de déterminer ce paramètre [65]. En effet, rappelons qu'il doit être choisi suffisamment petit pour conduire à une faible erreur mais il doit être assez grand pour garantir la stabilité.

3.3.3.1 Critère de la courbe en L

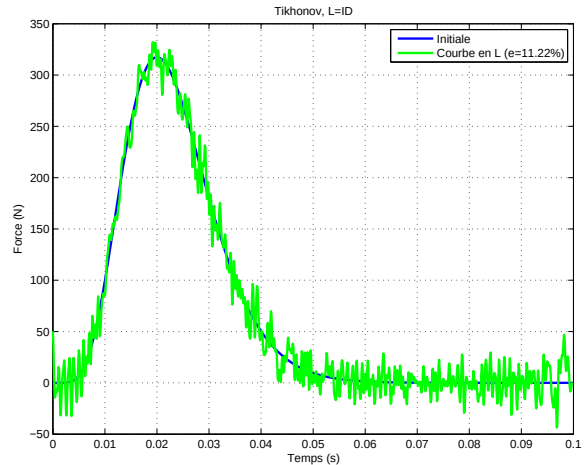
Dans la plupart des cas, la courbe présente une forme typique en L . Le coin de la courbe représente un compromis entre la minimisation de la norme du résidu et la semi-norme de la solution. Dans [38], la détection du coin est basée sur la maximisation de

la courbure de la courbe. Très souvent, la courbe en L donne des valeurs correctes du paramètre de régularisation. Cependant dans d'autres situations, la valeur obtenue ne conduit pas à une solution satisfaisante. C'est le cas, par exemple, lorsque la courbe en L présente plusieurs coins : le point de courbure maximale peut ne pas correspondre au paramètre de régularisation optimal. Toutefois, une valeur intéressante du paramètre de régularisation se trouve toujours au niveau d'un coin, qui correspond toujours à un compromis. Par ailleurs, si une courbe en L présente deux coins dont l'un est un point anguleux (courbure extrêmement grande), l'expérience montre que le coin qui conduira à un paramètre de régularisation intéressant est généralement l'autre coin.

Comme illustré dans la Figure 3.26, l'utilisation du coin associé à la courbure maximale de la courbe en L (voir Figure 3.26a) conduit à une force oscillante, instable et donc inacceptable (Figure 3.26c) ; en revanche la force reconstruite en utilisant le coin suivant est correcte est tout à fait satisfaisante (Figure 3.26b).


 (a) Courbe en L

 (b) Courbe en L


(c) Force reconstruite



(d) Force reconstruite

FIGURE 3.26: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov avec le critère de la courbe en L

Le critère de la courbe en L donne des valeurs du paramètre de régularisation accep-

tables lorsque la régularisation est de type Tikhonov. Toutefois, ces valeurs sont un peu loin du paramètre optimal λ_{res} . Comme on peut le voir sur la Figure 3.27, (cas C1T1), le paramètre de régularisation obtenu, $\lambda_{courbe\ en\ L} = 4,84 \cdot 10^{-3}$ conduit à une erreur relative de reconstruction de l'ordre de 11,2 %, tandis que $\lambda_{res} = 1,62 \cdot 10^{-2}$ donne une erreur de 3 %. Toutefois, il faut insister sur le fait que ce paramètre de régularisation optimal n'a pas été déterminé de façon automatique : il a fallu procéder à une succession d'essais de différentes valeurs λ pour le déterminer.

La méthode de troncature de la SVD utilisée avec le critère de la courbe en L a donné de bons résultats : la force a été reconstruite avec une erreur relative de 2,57 % pour la force de type 1 et une mesure en déplacement. On constate que la force reconstruite avec le critère de la courbe en L par la méthode de Tikhonov est moins proche de la force initiale que celle obtenue par troncature. Toutefois, si ceci est vrai sur les différentes forces testées, il faut souligner qu'on travaille ici avec une fonctionnelle stabilisatrice qui est la norme de la force. Il faudra ensuite voir ce qu'il en est pour les autres fonctionnelles stabilisatrices.

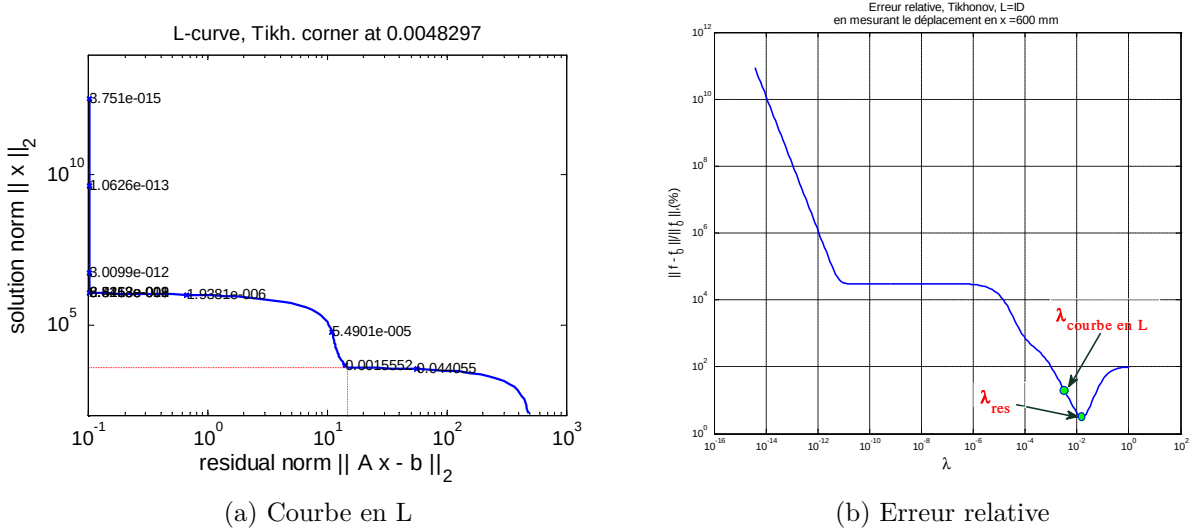
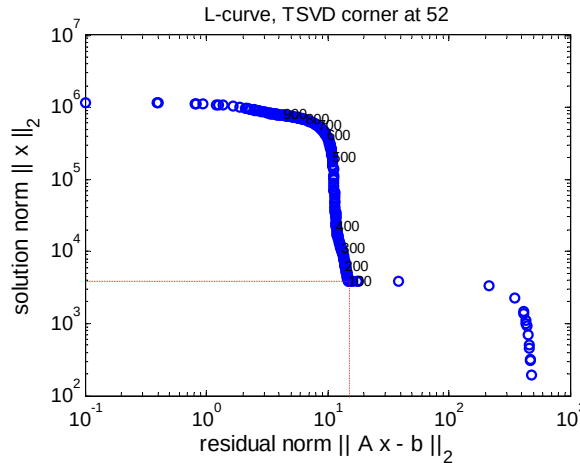


FIGURE 3.27: Méthode de Tikhonov


 FIGURE 3.28: Courbe en L , méthode de troncature

3.3.3.2 Critère GCV

Nous observons que les valeurs du paramètre de régularisation obtenues avec le critère GCV conduisent généralement à des solutions plus fiables que celles utilisant le critère de la courbe en L ou le critère de quasi-optimalité. Ce critère ne permet pas toujours d'avoir le paramètre optimal, mais il n'a jamais été pris en défaut et a toujours permis de reconstruire une force satisfaisante.

De même, le critère GCV donne une valeur très acceptable du rang de troncature. Par exemple, pour le cas C1T1 utilisant le déplacement pour réponse, le critère GCV conduit à un rang $k = 27$ qui permet de reconstruire la force avec une erreur relative de 0,75%. Le rang optimisé $k_{res} = 24$ donne une erreur relative de 0,61% (Figure 3.29).

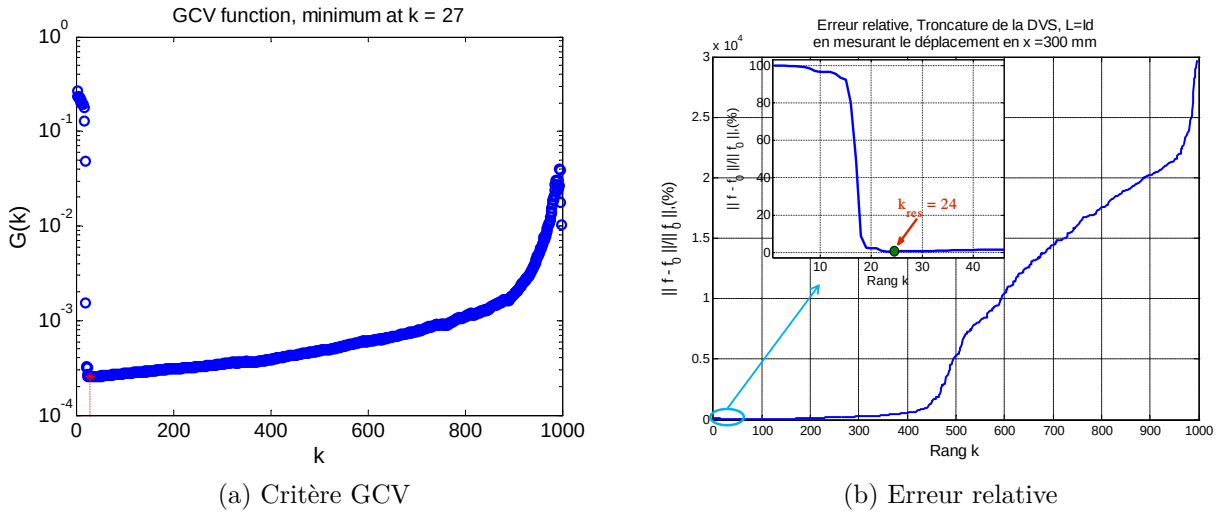


FIGURE 3.29: Méthode de la troncature de la SVD, critère GCV

3.3.3.3 Critère de quasi-optimalité (QOP)

Le critère QOP fournit le paramètre de régularisation qui correspond au minimum de la fonction QOP (Figure 3.30). Cependant, lorsque la fonction QOP a plusieurs minima locaux (Figure 3.31a), il peut conduire à une force très oscillante (Figure 3.31c), ce qui montre que le minimum minimorum ne fournit pas toujours un paramètre de régularisation donnant une force satisfaisante. Toutefois, en utilisant une autre valeur du paramètre de régularisation qui est associée à un autre minimum, on arrive à reconstruire la force avec une erreur relative de 3.03%. Ceci rend ce critère peu fiable, car il y a peu d'indices nous permettant de détecter quel minimum doit être choisi.

Ainsi, nos calculs montrent que si pour une force d'impact du premier ou du second type, le critère QOP via une régularisation de Tikhonov, est supérieur aux deux autres critères, il peut conduire à des résultats catastrophiques dans le cas du troisième type. De même, avec la méthode de la troncature, la force reconstruite par le critère QOP s'est avérée fortement instable dans trois cas sur les 24 cas étudiés, alors que les résultats étaient bons dans les autres cas.

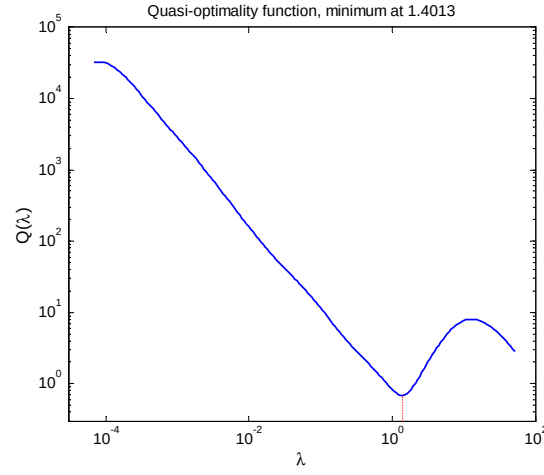
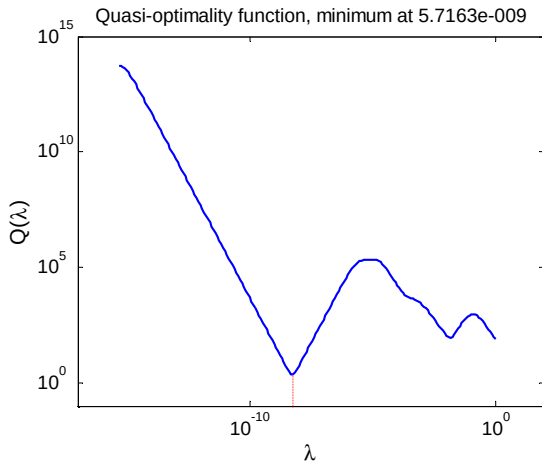
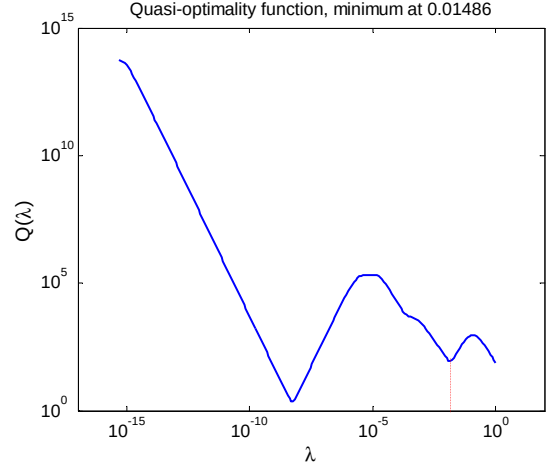


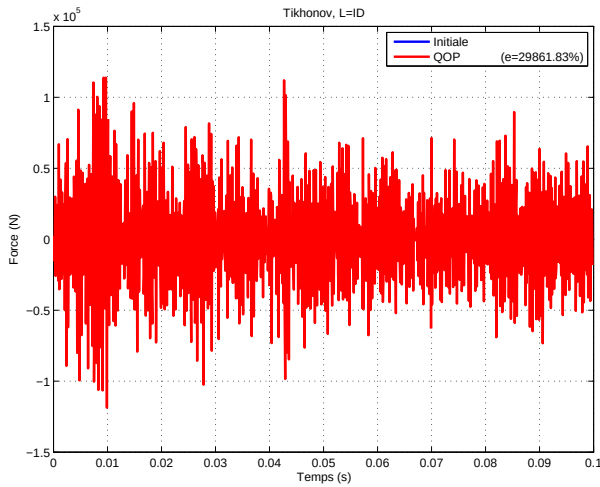
FIGURE 3.30: Fonction QOP, méthode de Tikhonov



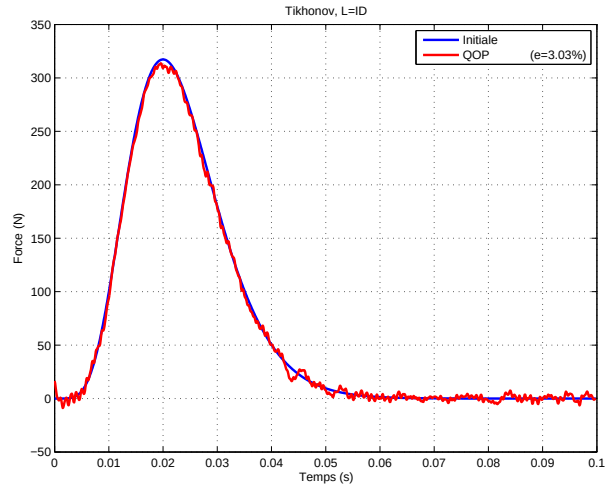
(a) Fonction QOP



(b) Courbe en L



(c) Force reconstruite



(d) Force reconstruite

FIGURE 3.31: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov - Critère QOP

3.3.4 Bilan intermédiaire

Avec une stabilisation utilisant un critère sur la norme de la force, nous observons que :

- Chaque type de force a été reconstruit de façon satisfaisante à l'aide de paramètres de régularisation donnés par au moins deux critères.
- Mettre des zéros avant le début de la force n'améliore pas forcément l'identification du début du signal.
- Dans l'ensemble, la force reconstruite en utilisant pour réponse un déplacement ou une accélération est meilleure que celle utilisant une déformation.
- Le critère GCV a conduit aux résultats les plus satisfaisants : ce critère n'a pas conduit nécessairement au paramètre de régularisation optimal, mais il s'est avéré fiable, à la différence du critère de quasi-optimalité. Notons que le critère de la courbe en L , même s'il n'a pas conduit à des résultats aussi bons que le critère GCV, s'est révélé fiable avec des erreurs satisfaisantes.
- La méthode de régularisation par troncature s'est révélée supérieure à la méthode de Tikhonov pour reconstruire les efforts présentés.

3.4 Régularisation via la norme de la dérivée de la force

Dans ce paragraphe, la fonction stabilisatrice est :

$$\Omega(F) = \|L_1 F\|_2^2$$

où L_1 est l'opérateur dérivée première, qui est donc ici une matrice $(n_t - 1) \times n_t$ où n_t est la dimension de F .

La décomposition en valeurs singulières généralisée est utilisée dans ce paragraphe.

3.4.1 Tikhonov

Reconstruction de la force du premier type

Les résultats sont donnés par les Figures 3.32 à 3.34. Il apparaît que cette fonctionnelle stabilisatrice est très performante, même si les paramètres donnés par le critère de quasi-optimalité ne permet pas d'identifier correctement la force qui a une discontinuité de pente au moment où cette force est appliquée. Par ailleurs on notera que, quel que soit le critère utilisé, pour le cas 3, la valeur de la force à $t = 0$ est mal identifiée, alors que pour le cas 4, cette valeur est satisfaisante : dans ce cas, le fait de mettre des zéros avant l'application de la force, a un effet bénéfique.

Il est intéressant de constater une oscillation parasite basse fréquence lorsque l'accélération est utilisée. Tout se passe comme si, pour minimiser les variations rapides de la solution dues aux vecteurs singuliers associés aux petites valeurs singulières, un poids important était donné aux vecteurs singuliers associés aux grandes valeurs singulières et donc aux basses fréquences. Ce poids est d'autant plus important pour les signaux en accélérations que ces signaux ont des composantes hautes fréquences importantes : cela peut expliquer pourquoi ces oscillations basses fréquences sont visibles uniquement sur les signaux en accélération.

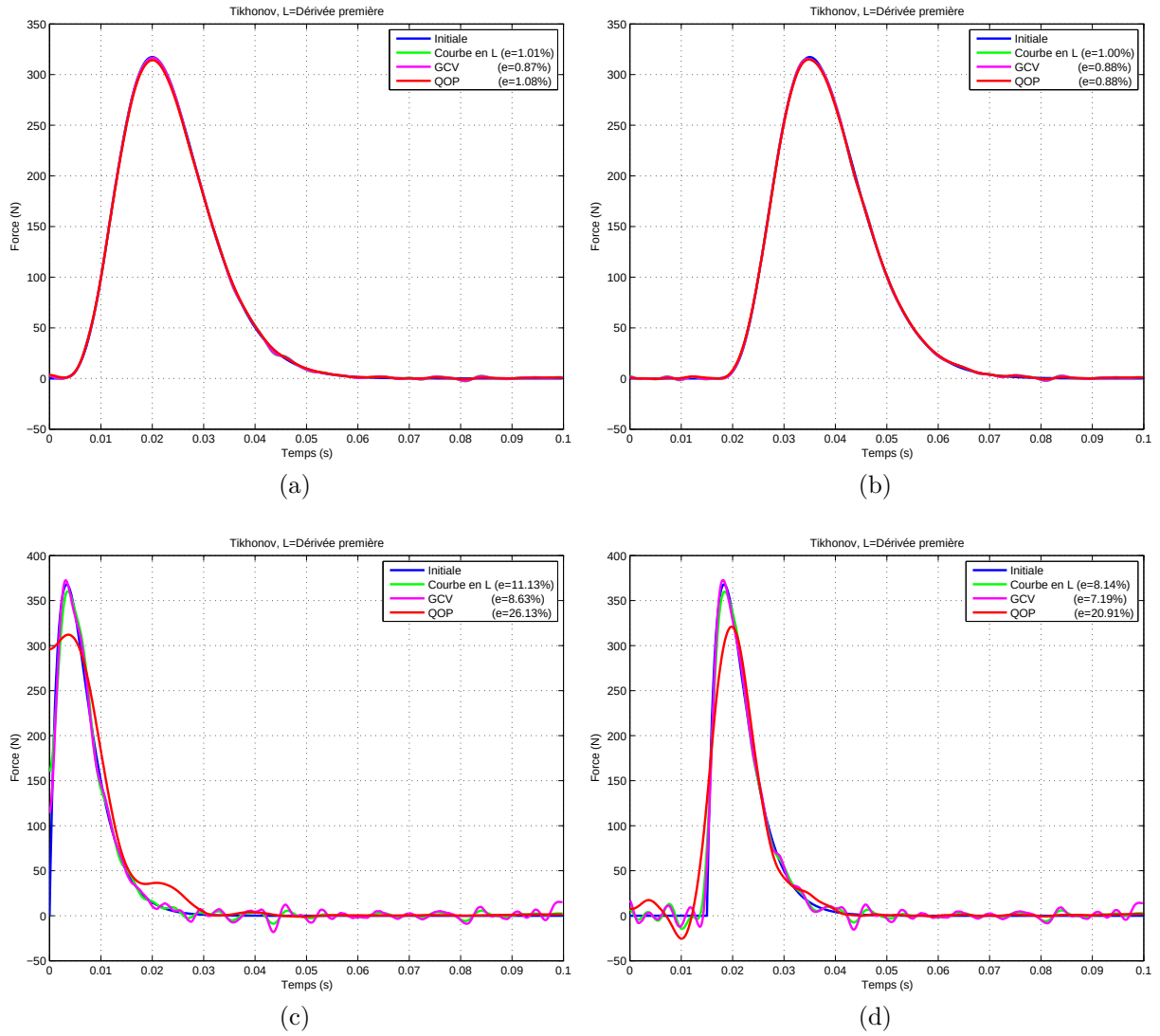


FIGURE 3.32: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement

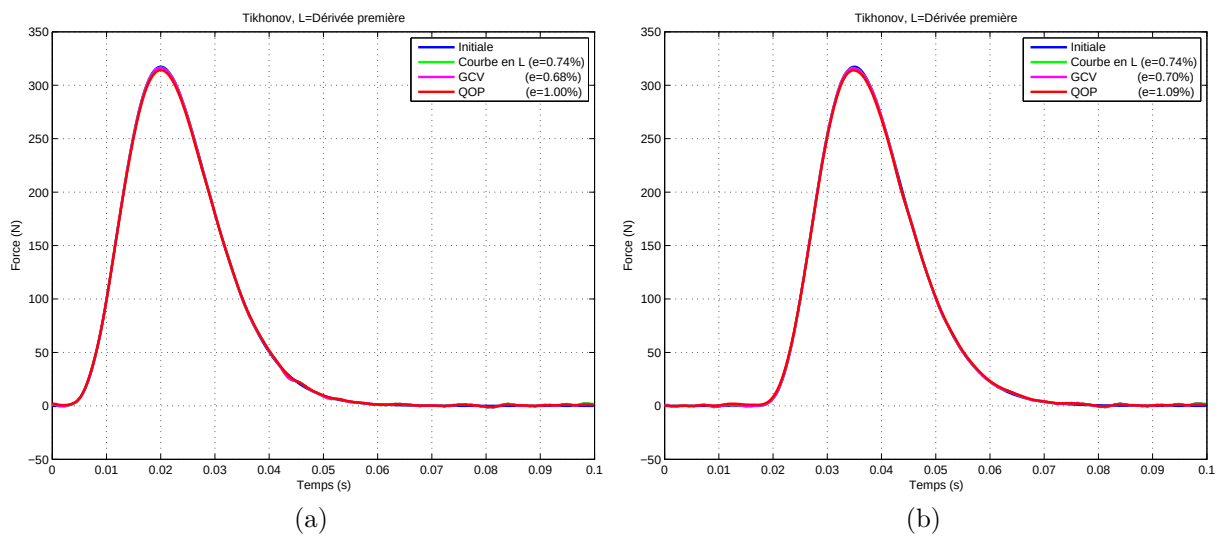


FIGURE 3.33: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation

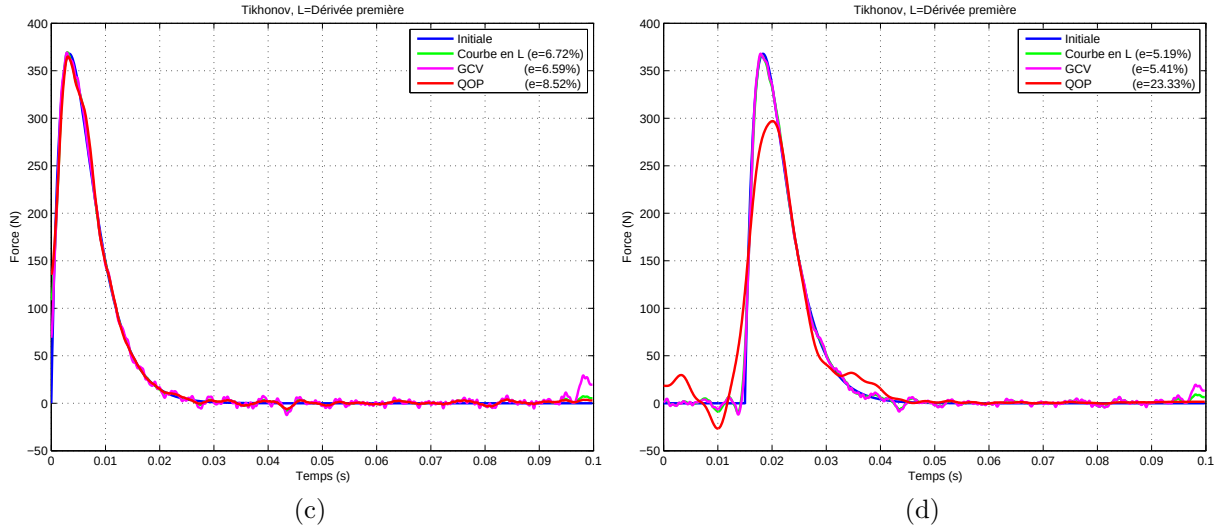


FIGURE 3.33: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation

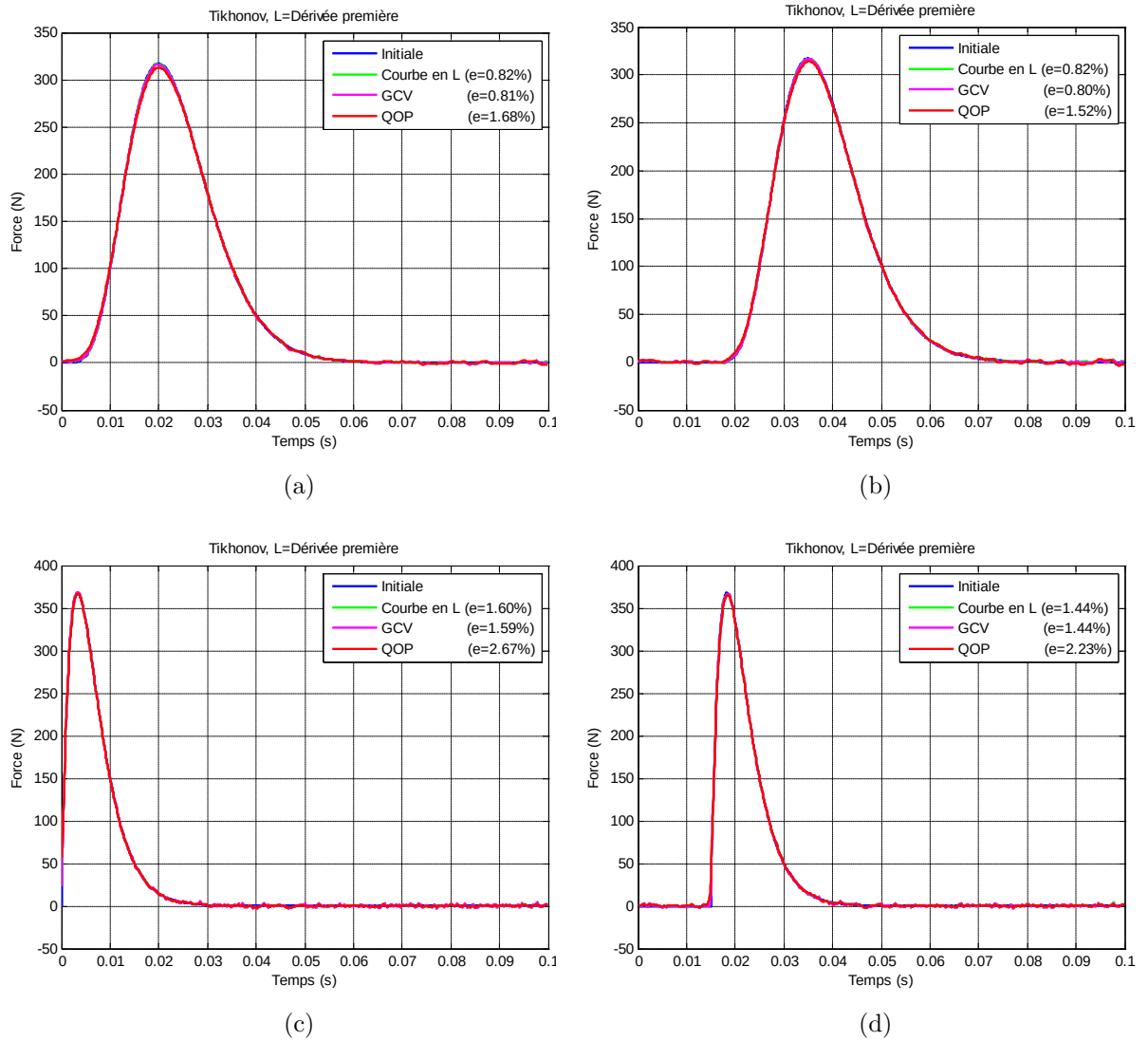


FIGURE 3.34: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération

Reconstruction de la force du second type

Les Figures 3.35 à 3.37 montrent que la force du second type est toujours bien identifiée, même si la valeur en $t = 0$ n'est pas forcément très bien identifiée : ceci est corrigé si on met des zéros avant le début du signal.

Visiblement, concernant l'accélération, le critère de quasi-optimalité conduit à une sous-régularisation, puisque le contenu haute fréquence est notable : toutefois, la force identifiée reste satisfaisante.

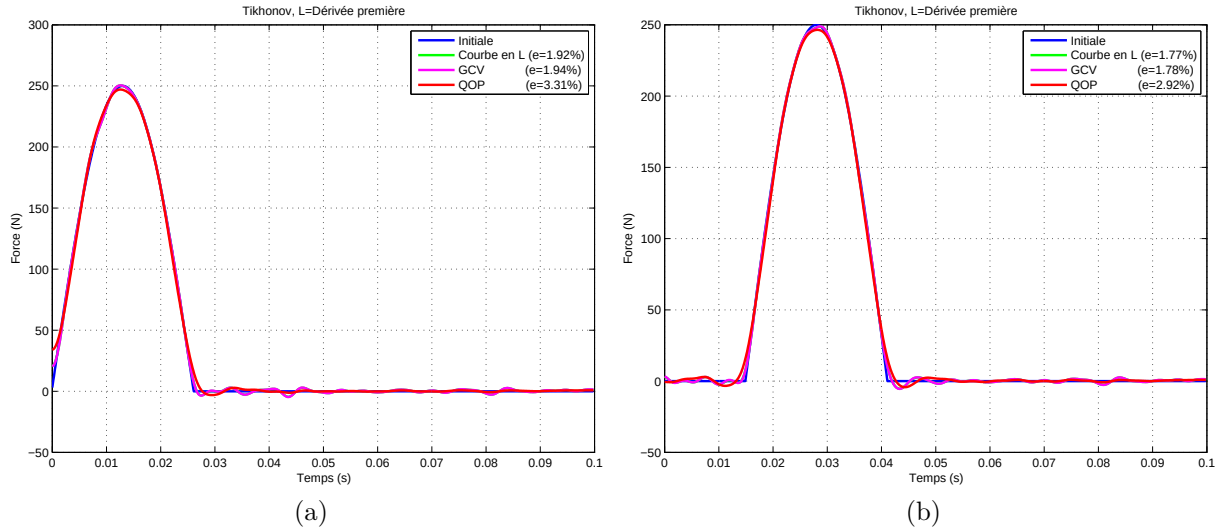


FIGURE 3.35: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement

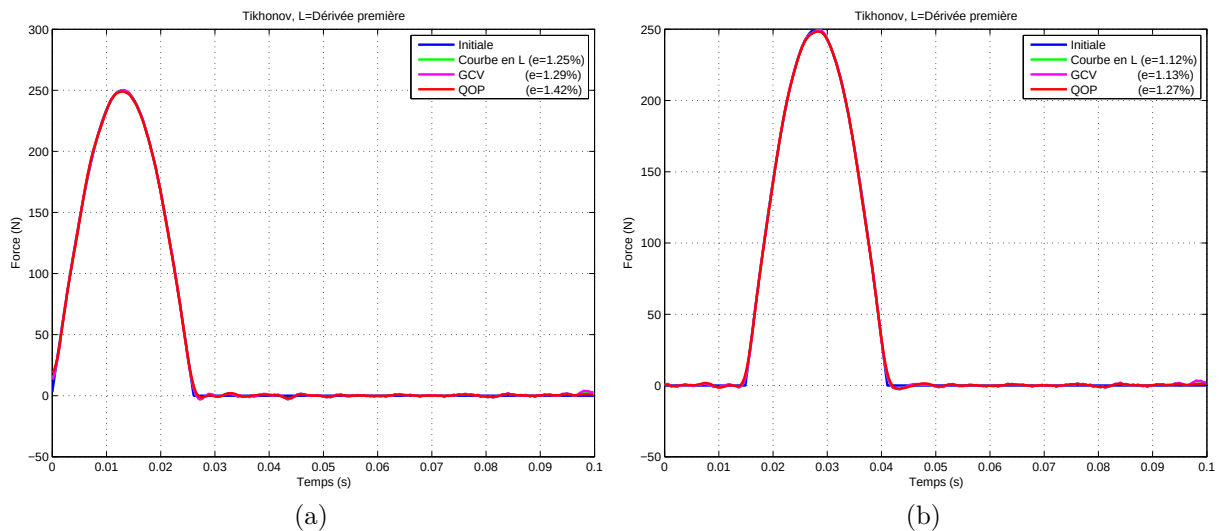


FIGURE 3.36: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation

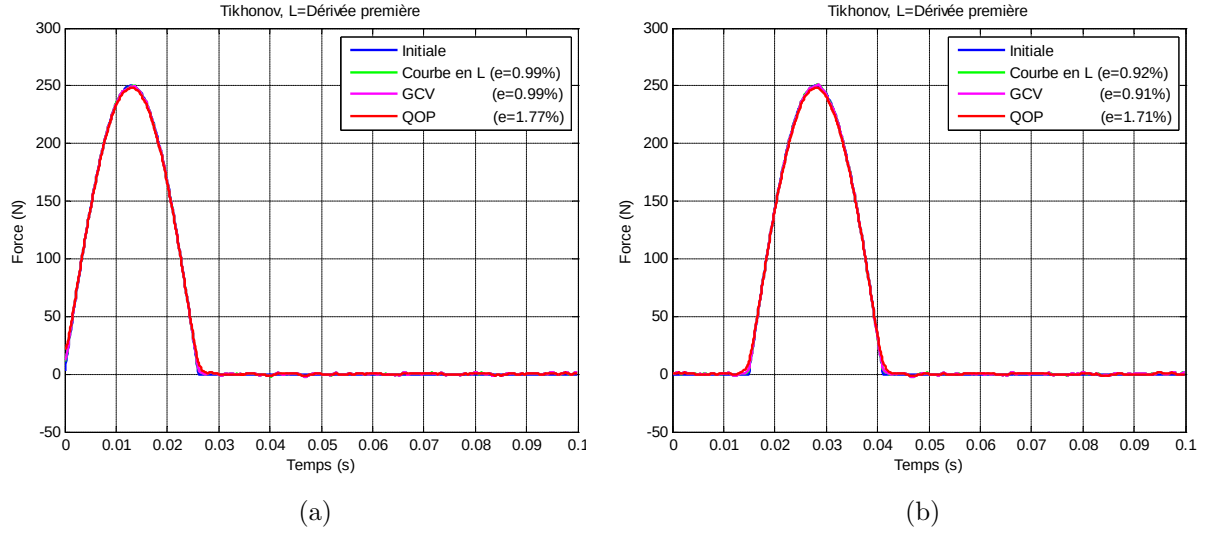


FIGURE 3.37: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération

Reconstruction de la force du troisième type

Les mêmes remarques peuvent être faites (voir Figures 3.38 à 3.40), concernant la force en $t = 0$.

Il est notable que dans ce cas, le critère QOP ne conduit pas à un paramètre identifiant correctement le début du signal lorsqu'un délai est appliqué.

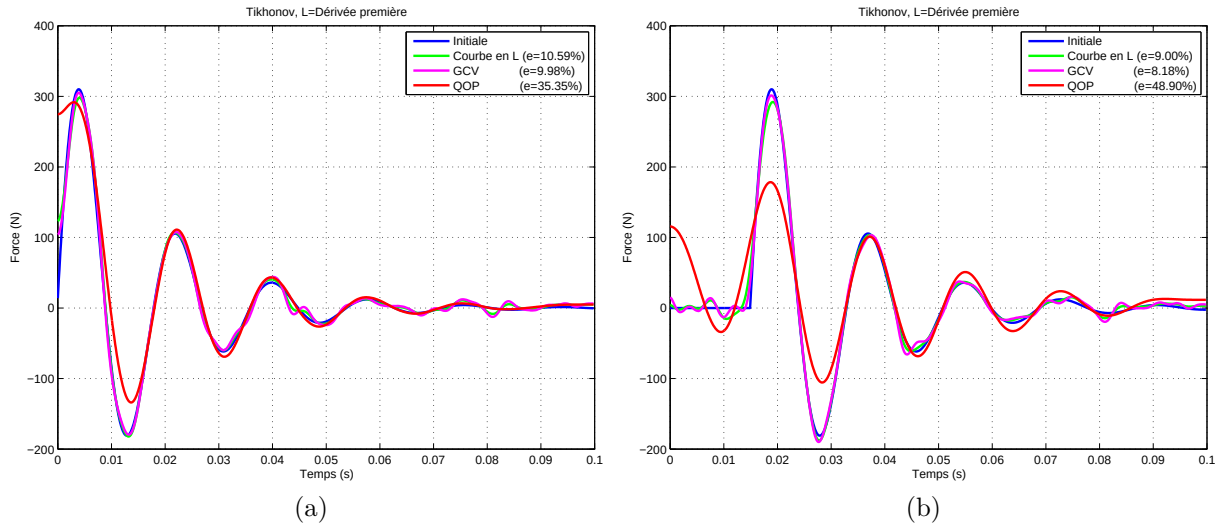


FIGURE 3.38: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement

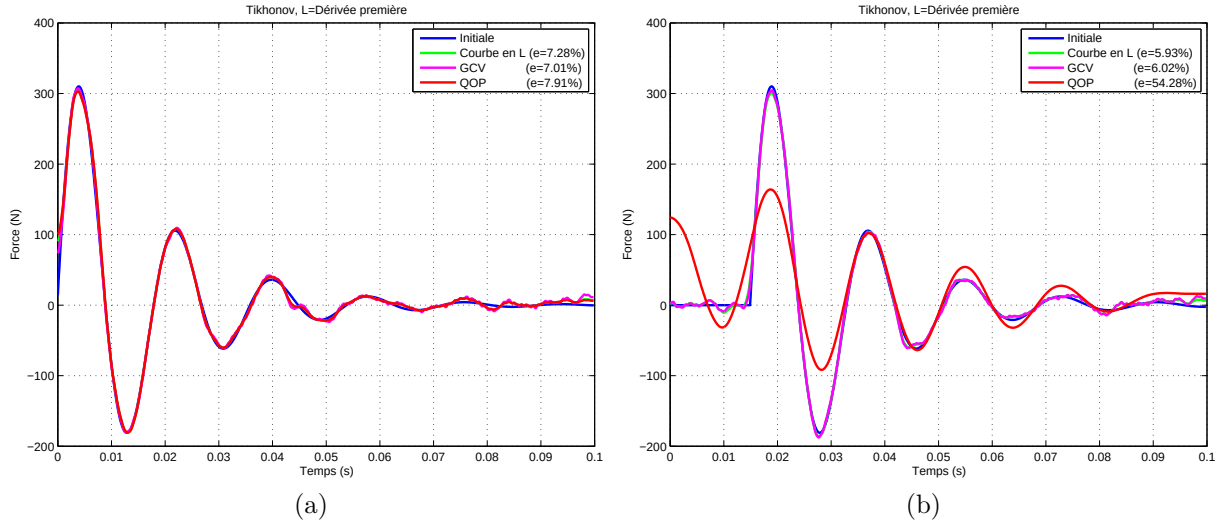


FIGURE 3.39: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation

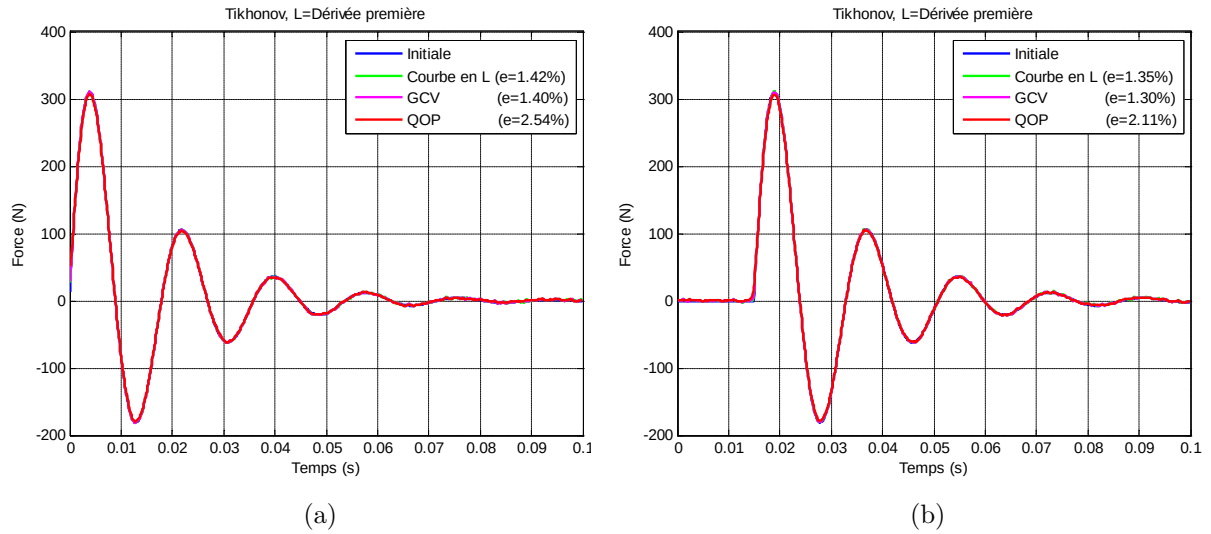


FIGURE 3.40: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération

3.4.2 Troncature de la GSVD

Les résultats obtenus pour les trois types de force sont donnés dans les Figures 3.41 à 3.49. Les conclusions ne semblent pas sensible au type de force, aussi on ne détaillera plus nos conclusions type de force par type de force.

Les résultats sont excellents si on considère les critères GCV et QOP. Le critère de la courbe en L donne une force où il reste une composante haute fréquence notable, même si les forces identifiées sont globalement satisfaisantes.

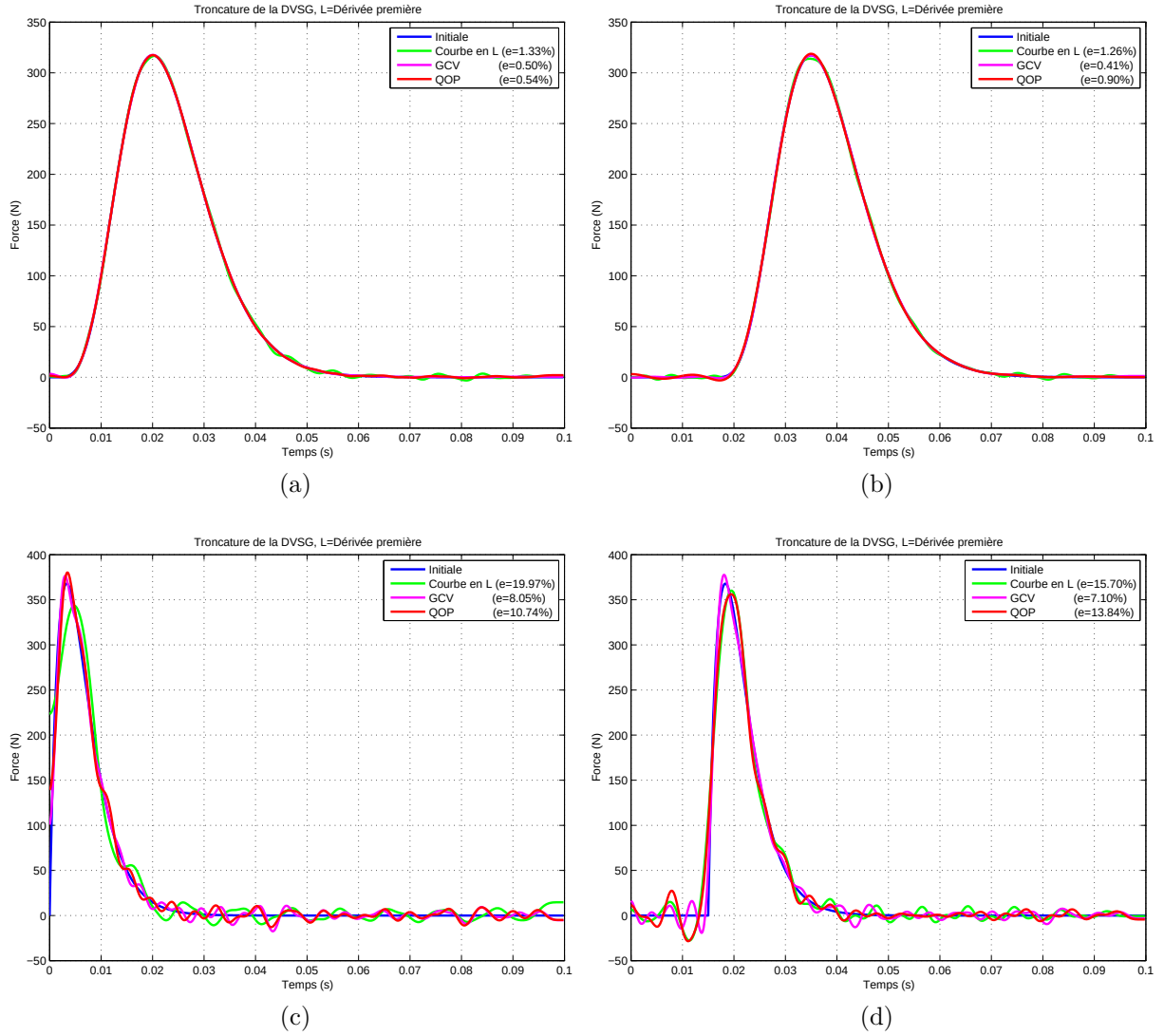


FIGURE 3.41: Force reconstruite par TGSVD en mesurant le déplacement

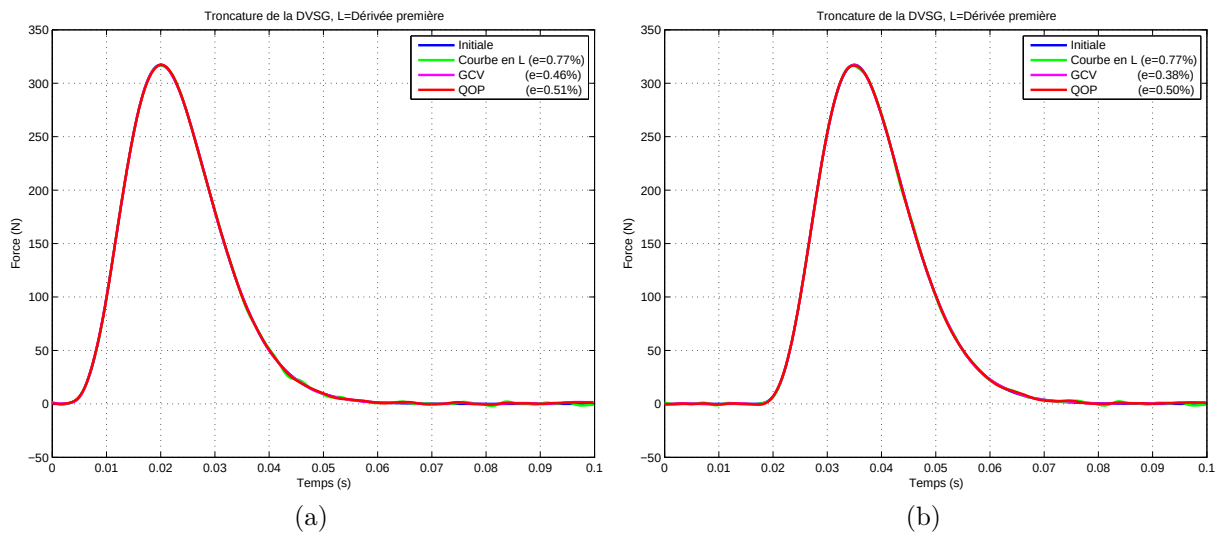


FIGURE 3.42: Force reconstruite par TGSVD en mesurant la déformation

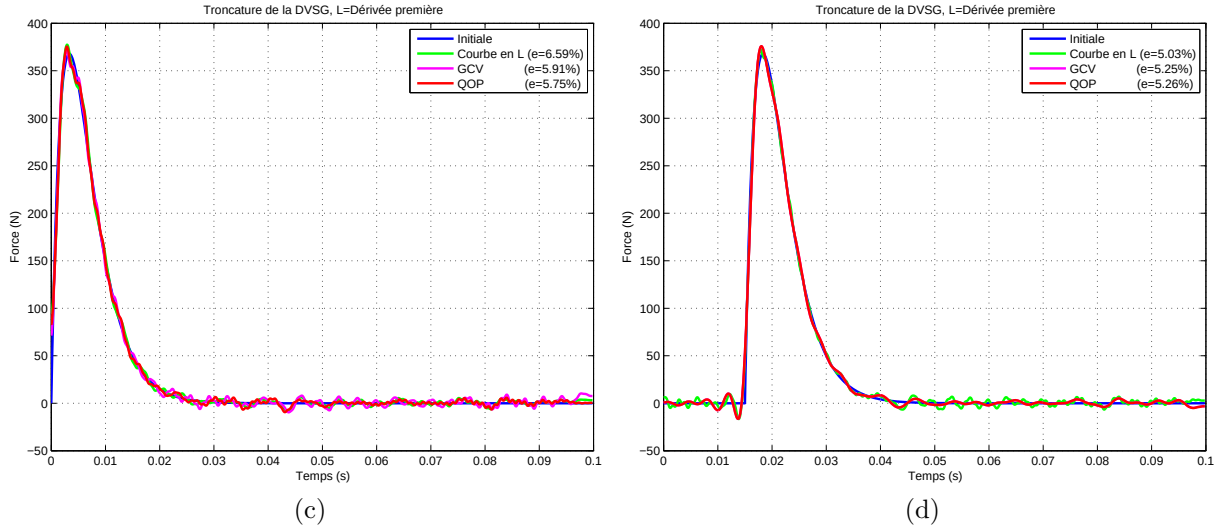


FIGURE 3.42: Force reconstruite par TGSVD en mesurant la déformation

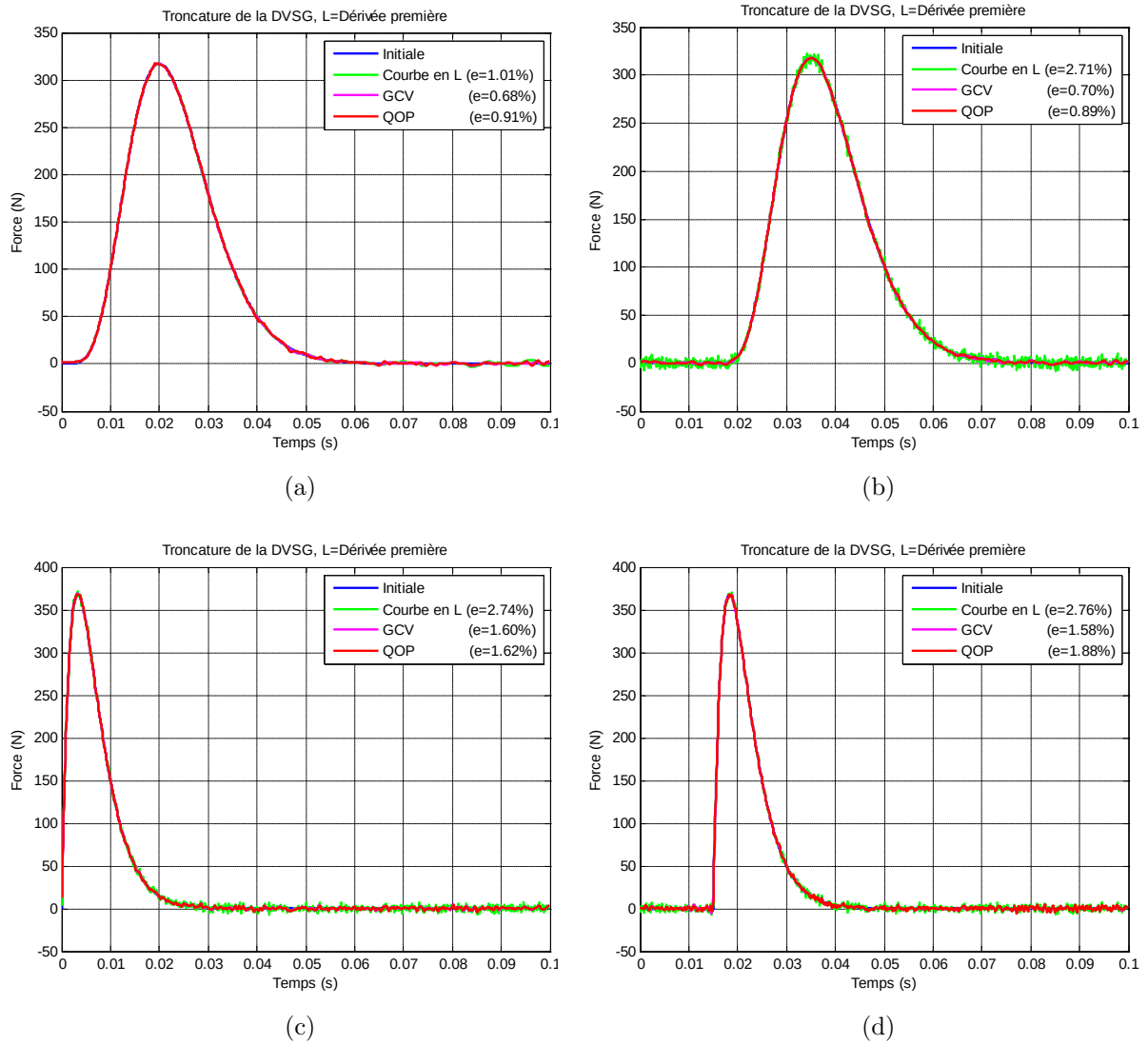


FIGURE 3.43: Force reconstruite par TGSVD en mesurant l'accélération

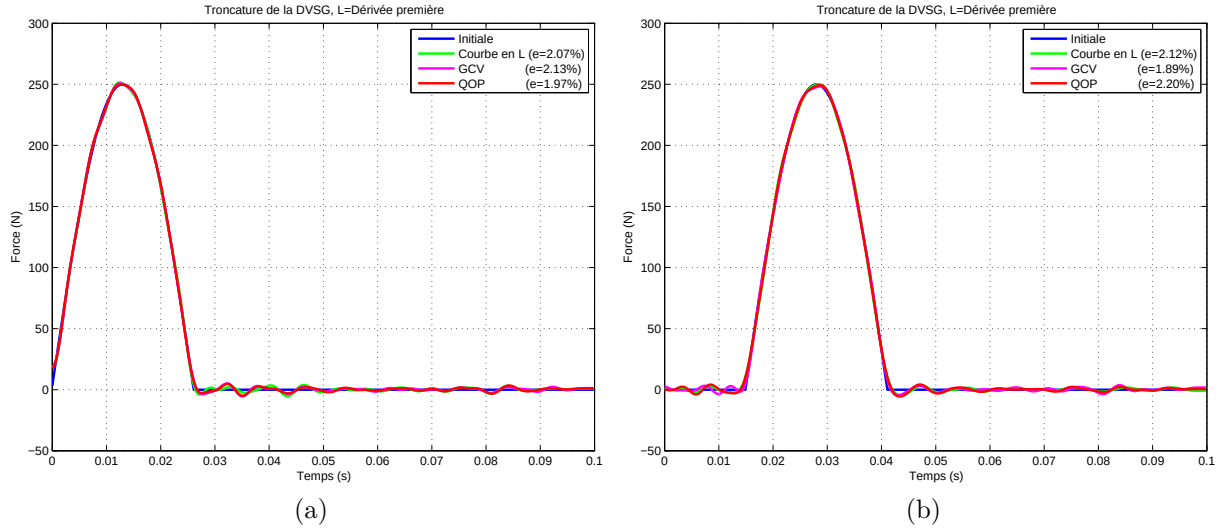


FIGURE 3.44: Force reconstruite par TSVD en mesurant le déplacement

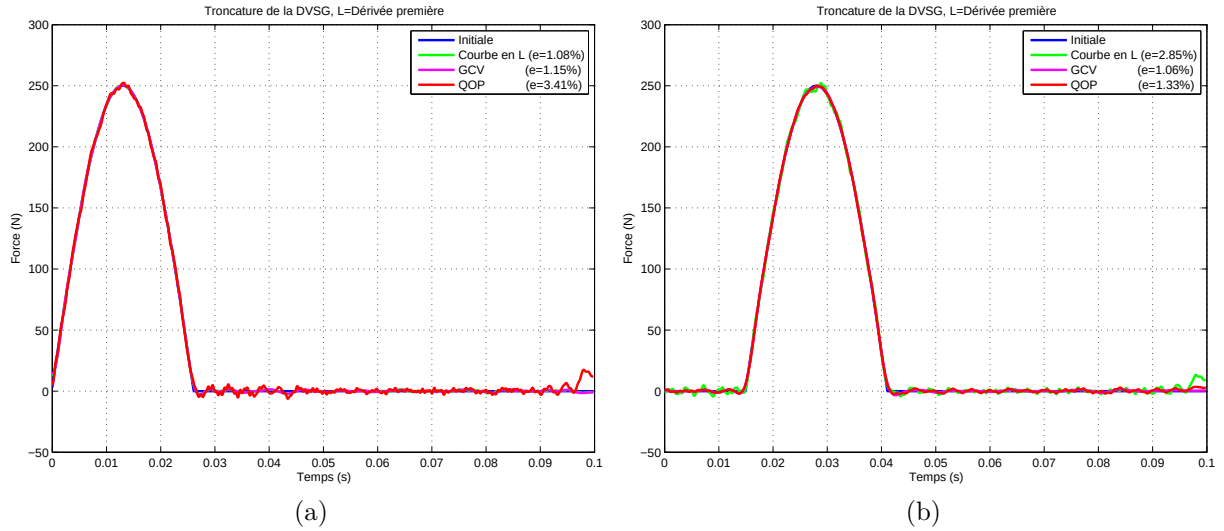


FIGURE 3.45: Force reconstruite par TGSVD en mesurant la déformation

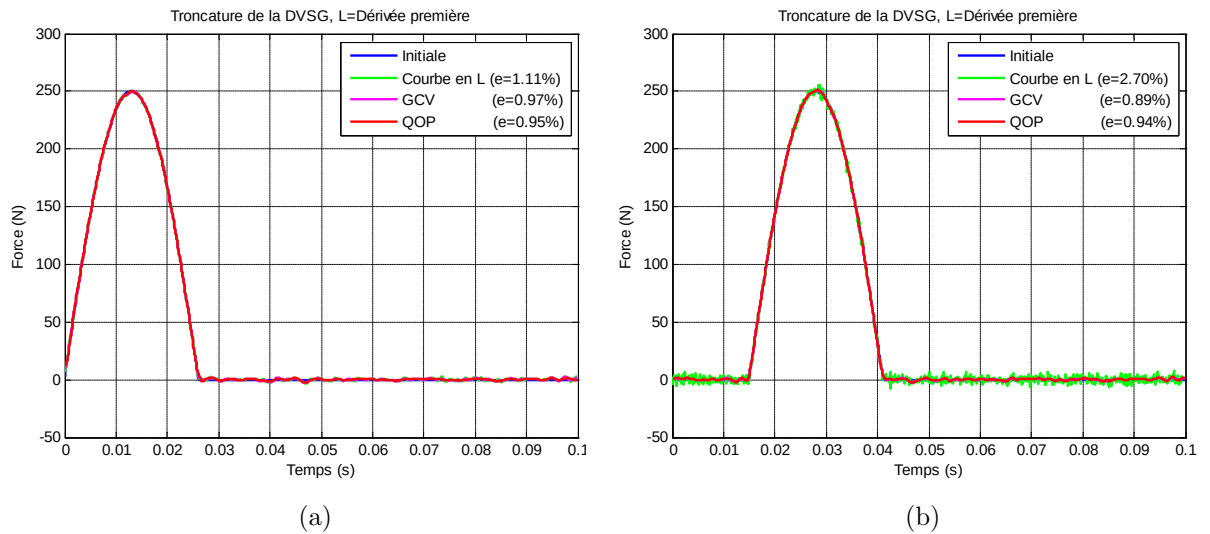


FIGURE 3.46: Force reconstruite par TGSVD en mesurant l'accélération

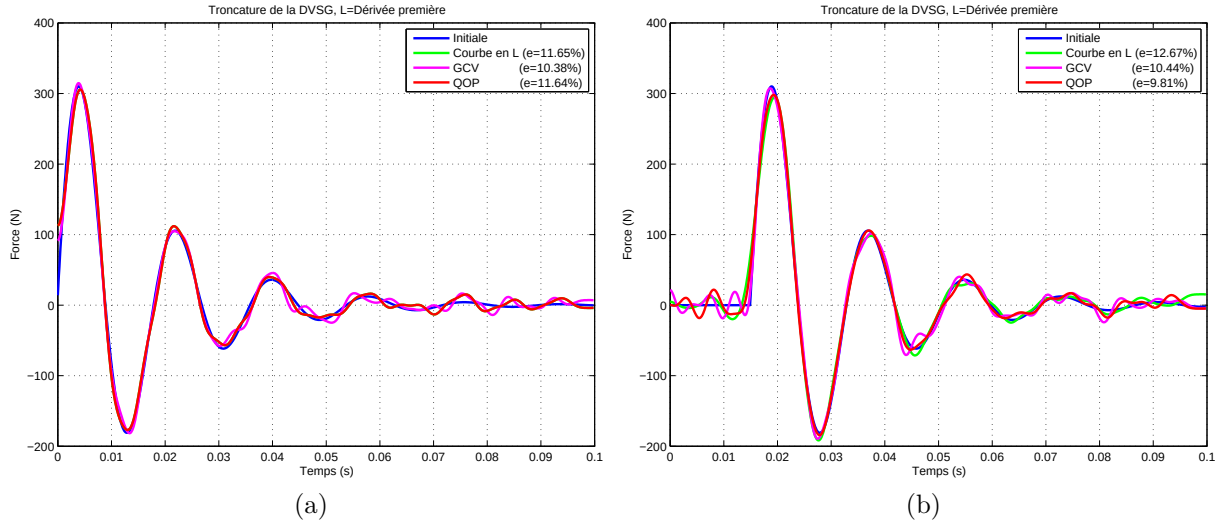


FIGURE 3.47: Force reconstruite par TGSVD en mesurant le déplacement

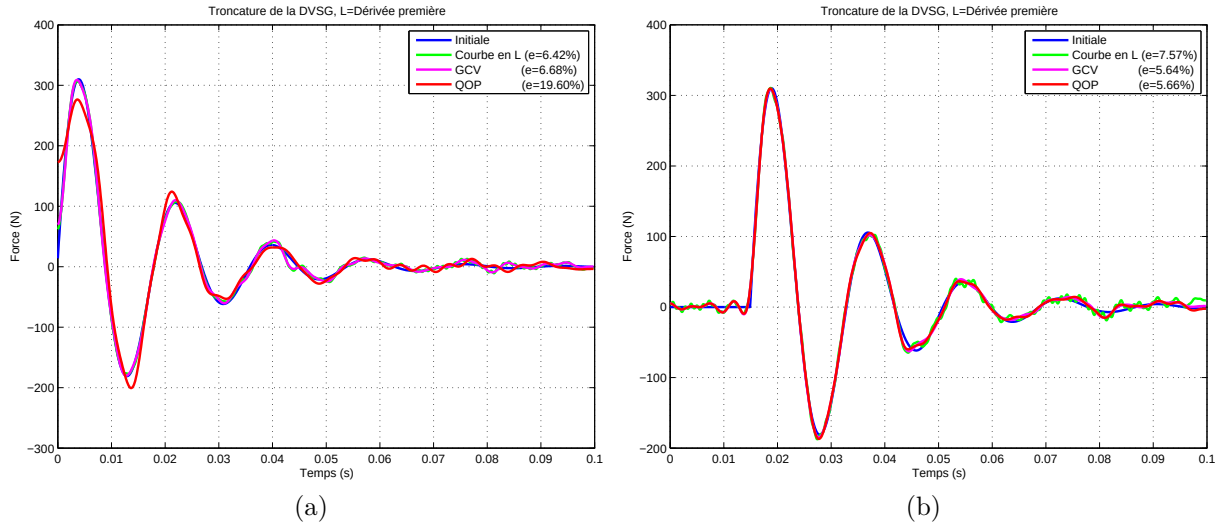


FIGURE 3.48: Force reconstruite par TGSVD en mesurant la déformation

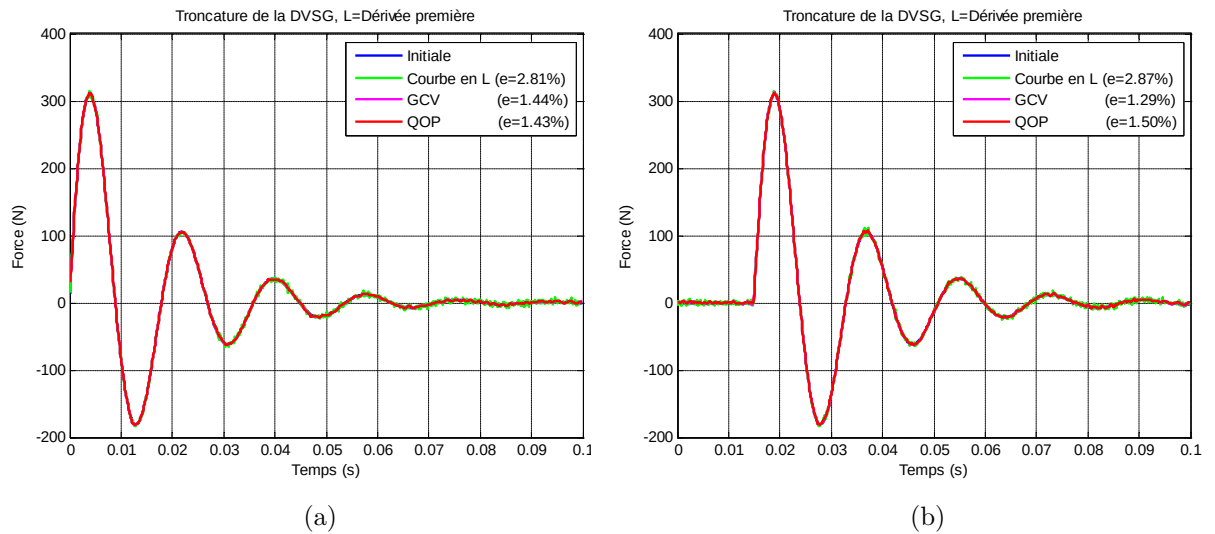


FIGURE 3.49: Force reconstruite par TGSVD en mesurant l'accélération

3.4.3 Critères de choix du paramètre de régularisation

Le critère GCV s'est, là encore, avéré être le critère le plus satisfaisant : non seulement il est très fiable, mais encore il a conduit très souvent à la meilleure force identifiée. Le critère de la courbe en L a conduit à des forces satisfaisantes mais parfois le filtrage associé n'était pas assez important. Le critère de quasi-optimalité n'a pas permis, dans plusieurs cas, de bien identifier le début du signal : son manque de fiabilité a encore été mis en évidence.

3.4.4 Bilan intermédiaire

La force reconstruite par la stabilisation via la norme de la dérivée première force a conduit à de très bonnes solutions. Il est surtout notable que la qualité de reconstruction a été peu sensible à la nature du signal mesuré. Toutefois, on notera qu'il est plus difficile de déterminer de façon satisfaisante la force durant les premiers instants où elle est appliquée, lorsque la méthode de Tikhonov est utilisée. De ce fait, il est alors intéressant de considérer la force avec un certain délai : le signal nul mis avant l'application de la force permet de mieux identifier la force durant les premiers instants où elle est appliquée.

3.5 Stabilisation via la norme de la dérivée seconde de la force

La fonction stabilisatrice est :

$$\Omega(F) = \|L_2 F\|_2^2$$

où L_2 est l'opérateur dérivée seconde, qui est donc ici une matrice $(n_t - 2) \times n_t$.

La décomposition en valeurs singulières généralisée est utilisée dans ce paragraphe.

3.5.1 Tikhonov

Les forces reconstruites pour les trois types de force sont tracées sur les Figures 3.50 à 3.58. Les conclusions sont analogues à celles tirées pour la régularisation avec l'opérateur de dérivée première.

Les valeurs de la force pour les premiers instants où la force est appliquée est bien identifiée sauf dans le cas 3 du premier type de force : ceci est surtout vrai si on utilise des signaux en déplacement et en déformation. Ceci est fortement amélioré si on ajoute des zéros (cas 4), à l'exception du cas où le déplacement est utilisé : ceci est particulièrement vrai lorsque le critère QOP est utilisé.

Il est toutefois intéressant de noter une mauvaise reconstruction sur les tous derniers instants, dans plusieurs cas : c'est ce qui explique l'erreur assez importante entre la force reconstruite et la force initiale avec le critère GCV dans ces cas-ci, alors que globalement l'identification est satisfaisante.

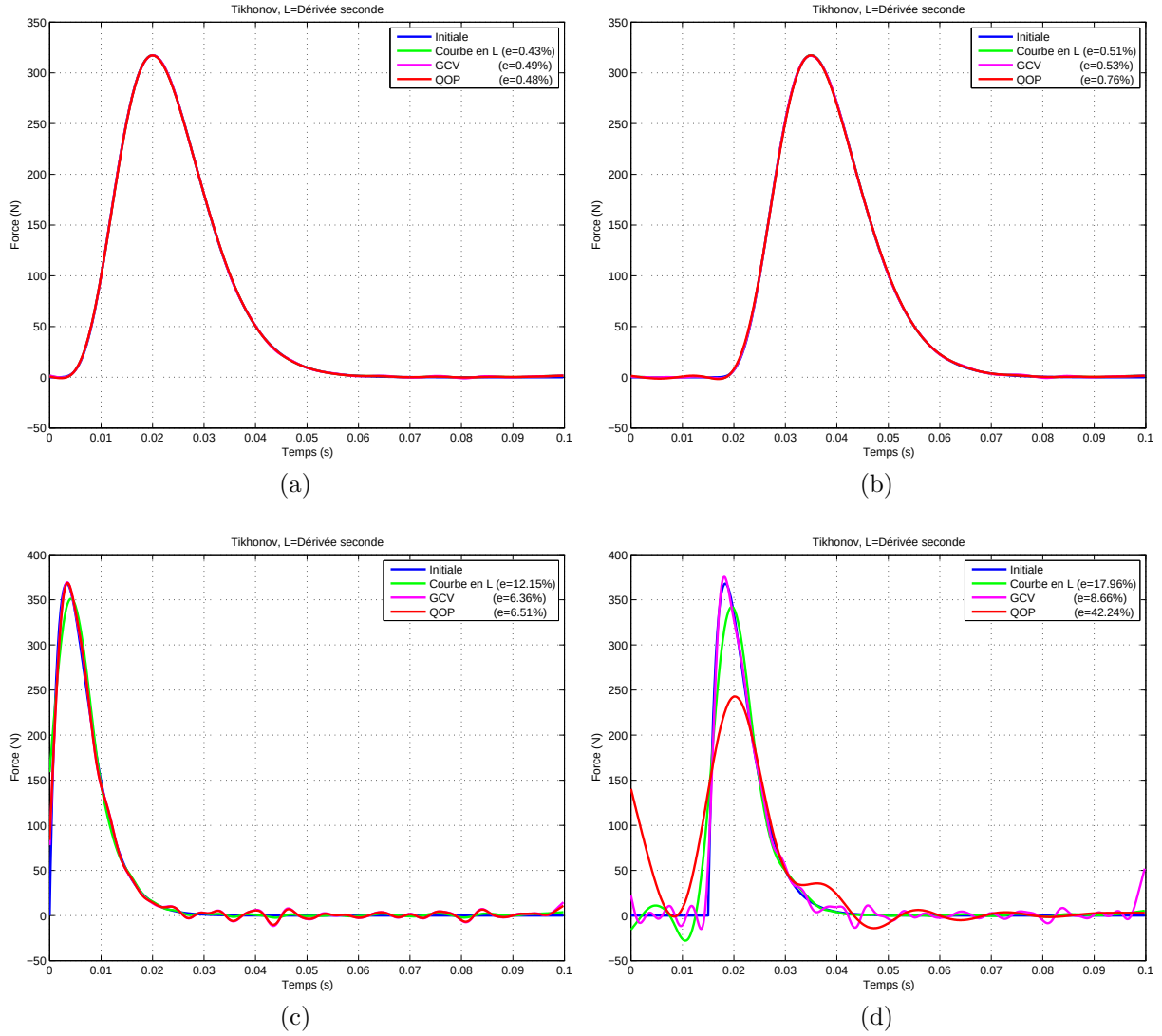


FIGURE 3.50: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement

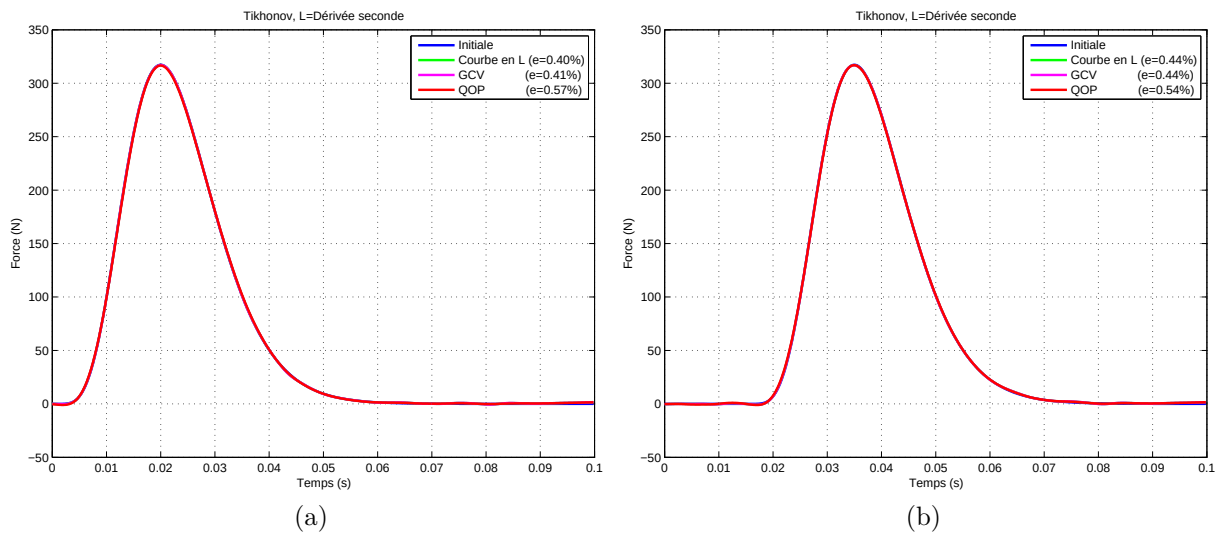


FIGURE 3.51: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation

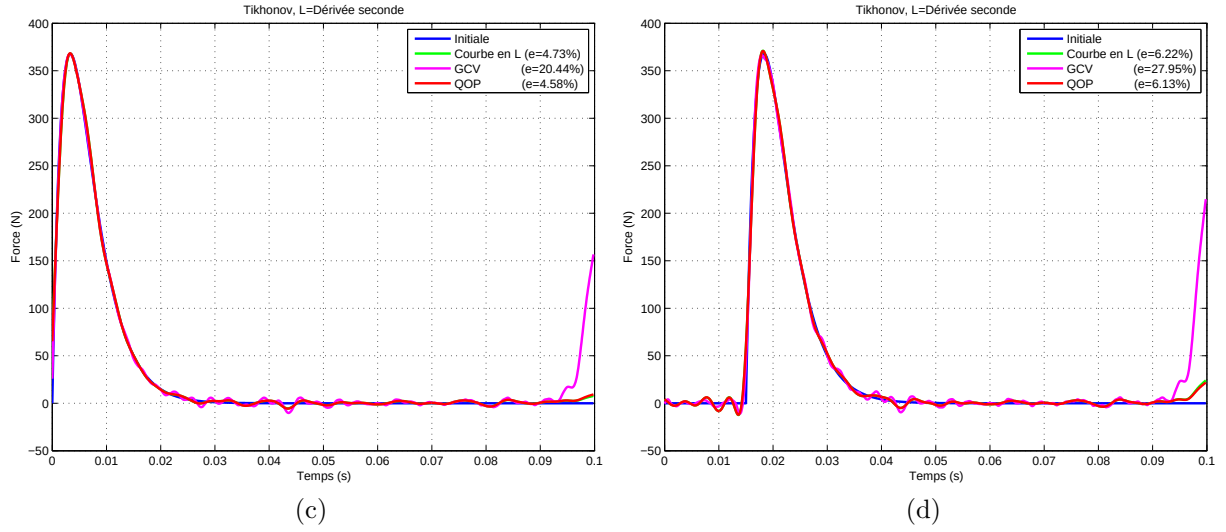


FIGURE 3.51: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation

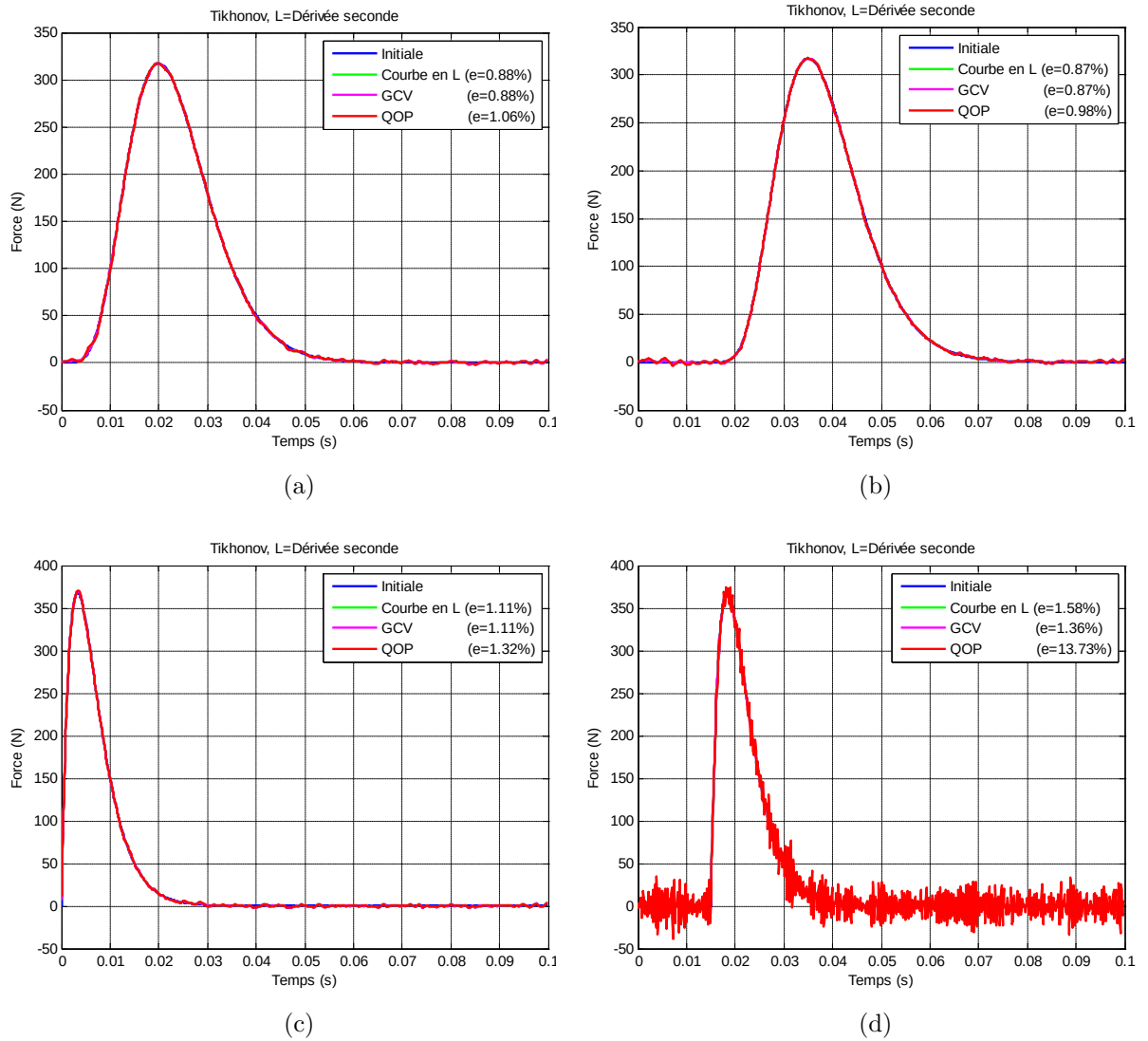


FIGURE 3.52: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération

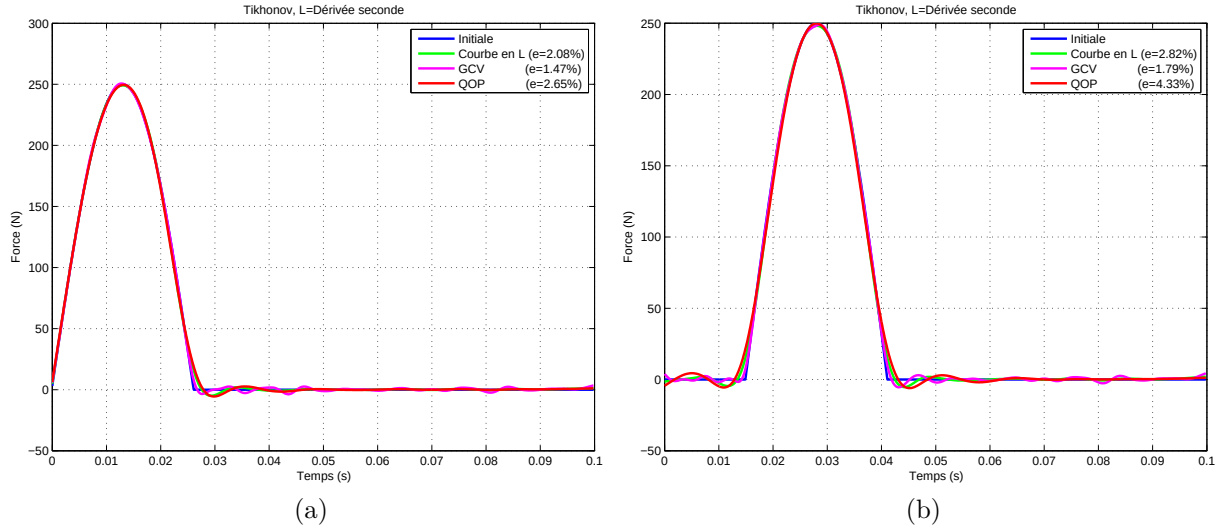


FIGURE 3.53: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement

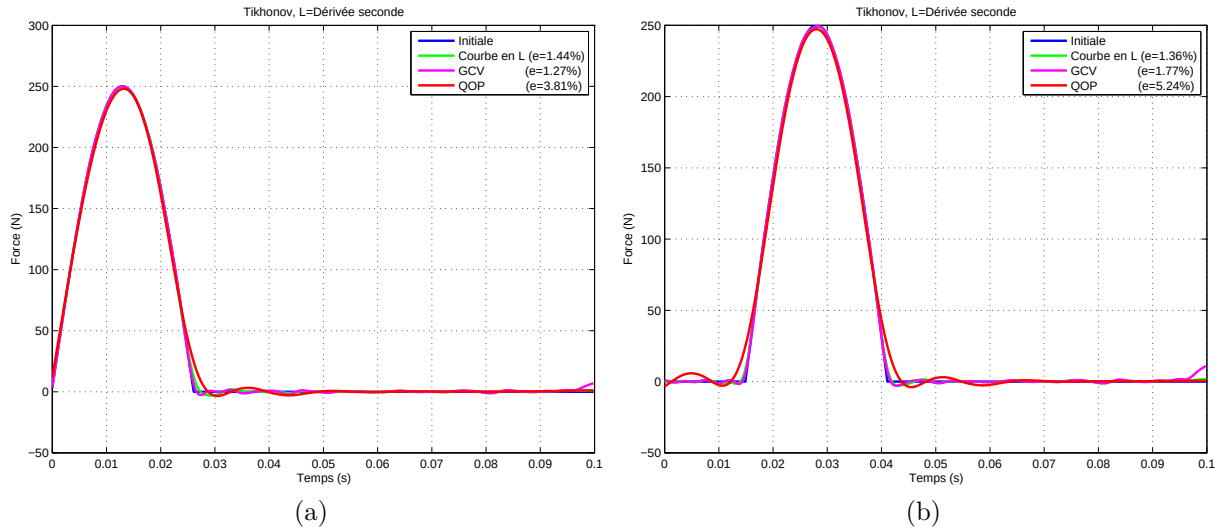


FIGURE 3.54: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation

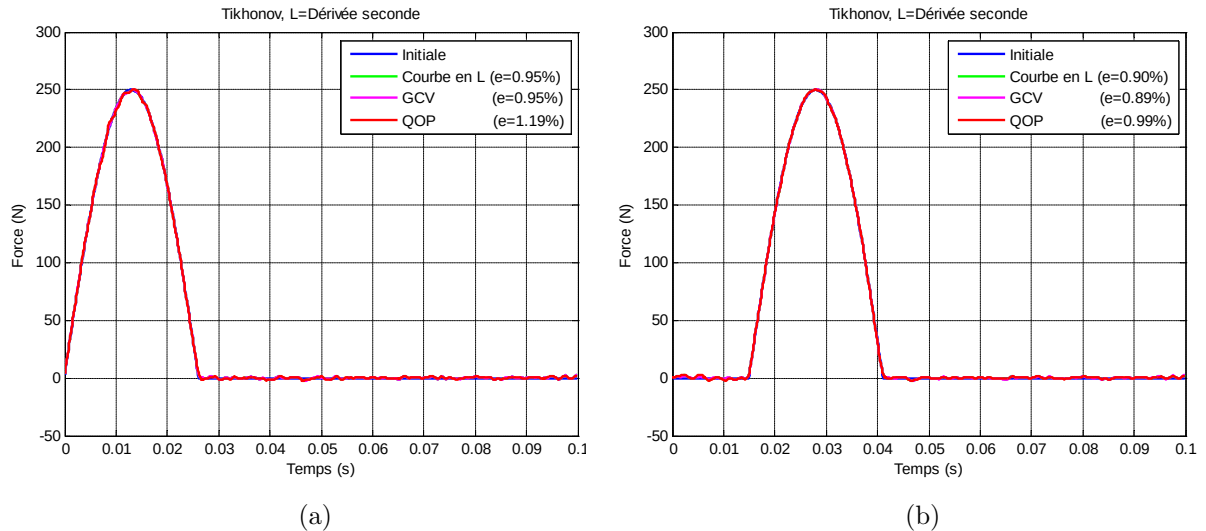


FIGURE 3.55: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération

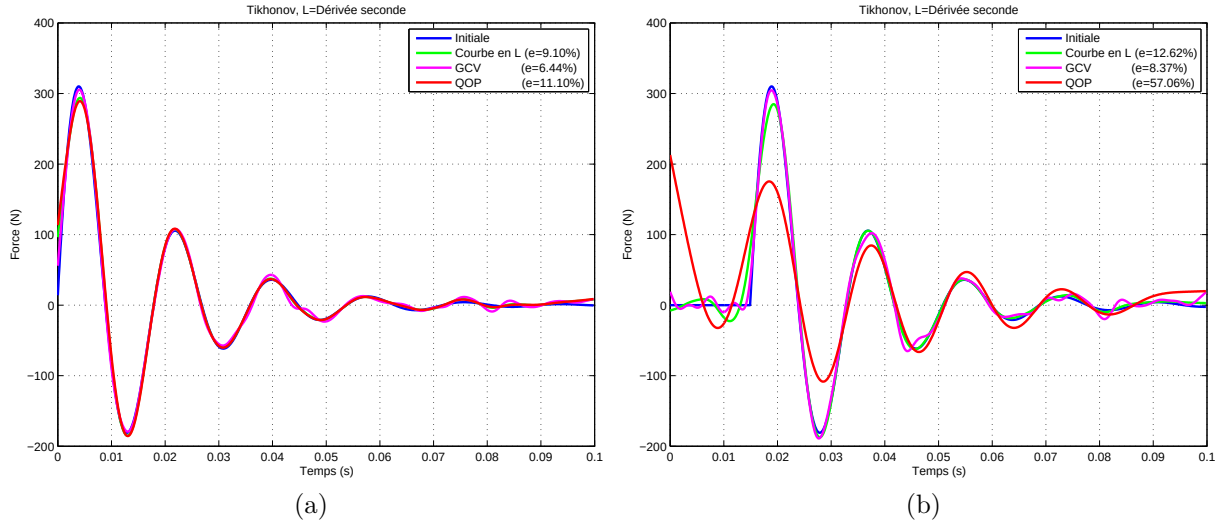


FIGURE 3.56: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant le déplacement

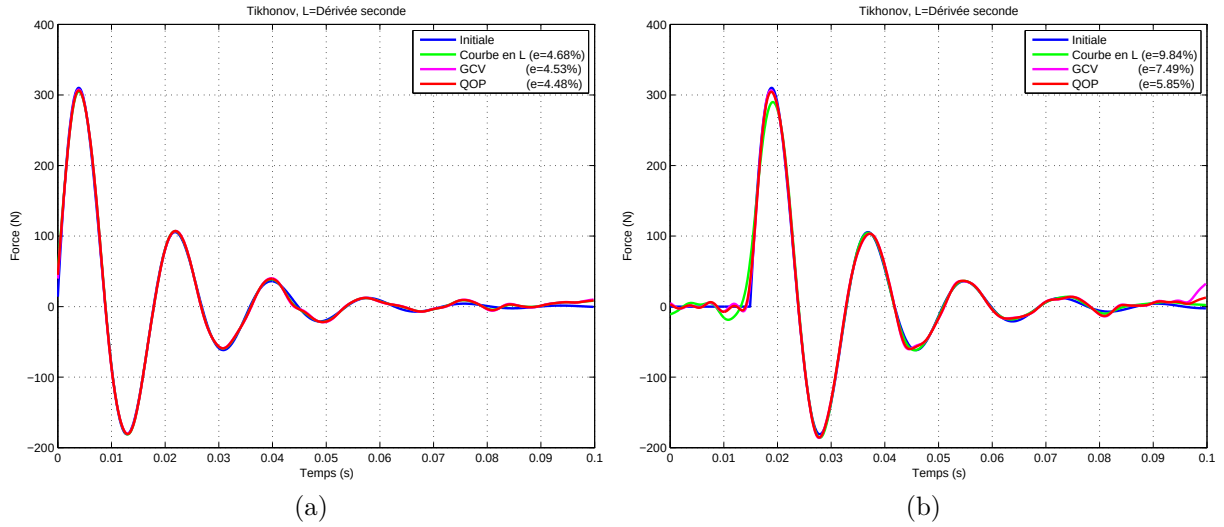


FIGURE 3.57: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant la déformation

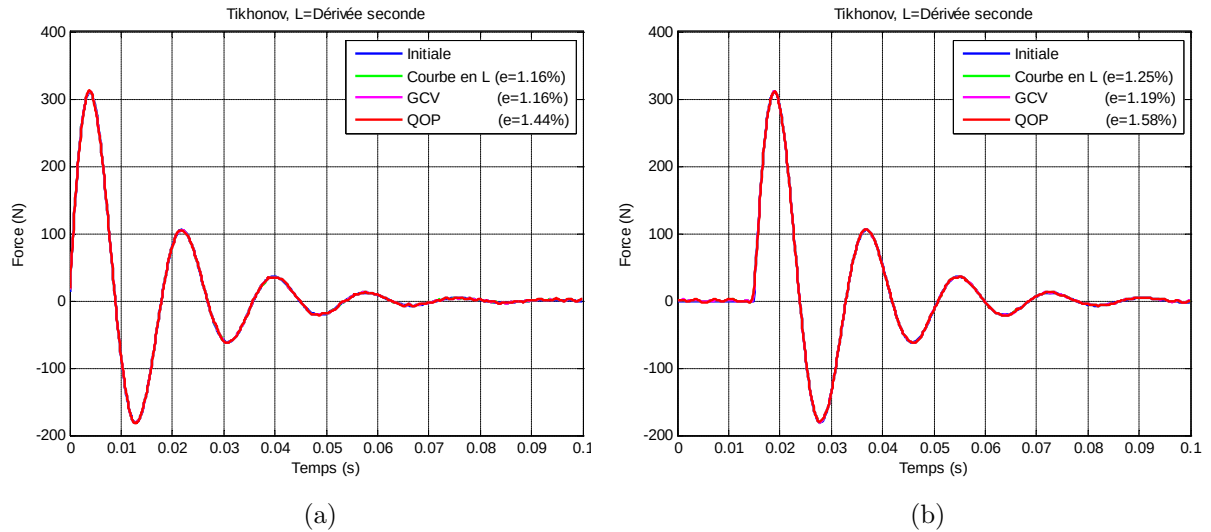


FIGURE 3.58: Force reconstruite par la méthode de Tikhonov en mesurant l'accélération

3.5.2 Troncature de la GSVD

Les Figures 3.59 à 3.67 montrent que les forces initiales sont bien identifiées à l'exception des cas 3 et 4 du type 1 de force. Dans ce dernier cas, le critère de la courbe en L donne de très bons résultats. Cependant, là encore, le critère GCV a une dérive sur les tous derniers instants, alors que le reste de la force est très bien identifié. Le critère de quasi-optimalité n'est pas performant essentiellement en début de signal, c'est à dire là où l'essentiel de la force est appliqué sur la structure.

Notons que la force de type trois est bien reconstruite, quel que soit le critère utilisé pour déterminer le paramètre de régularisation.

La qualité de la reconstruction semble peu sensible à la nature des signaux utilisés.

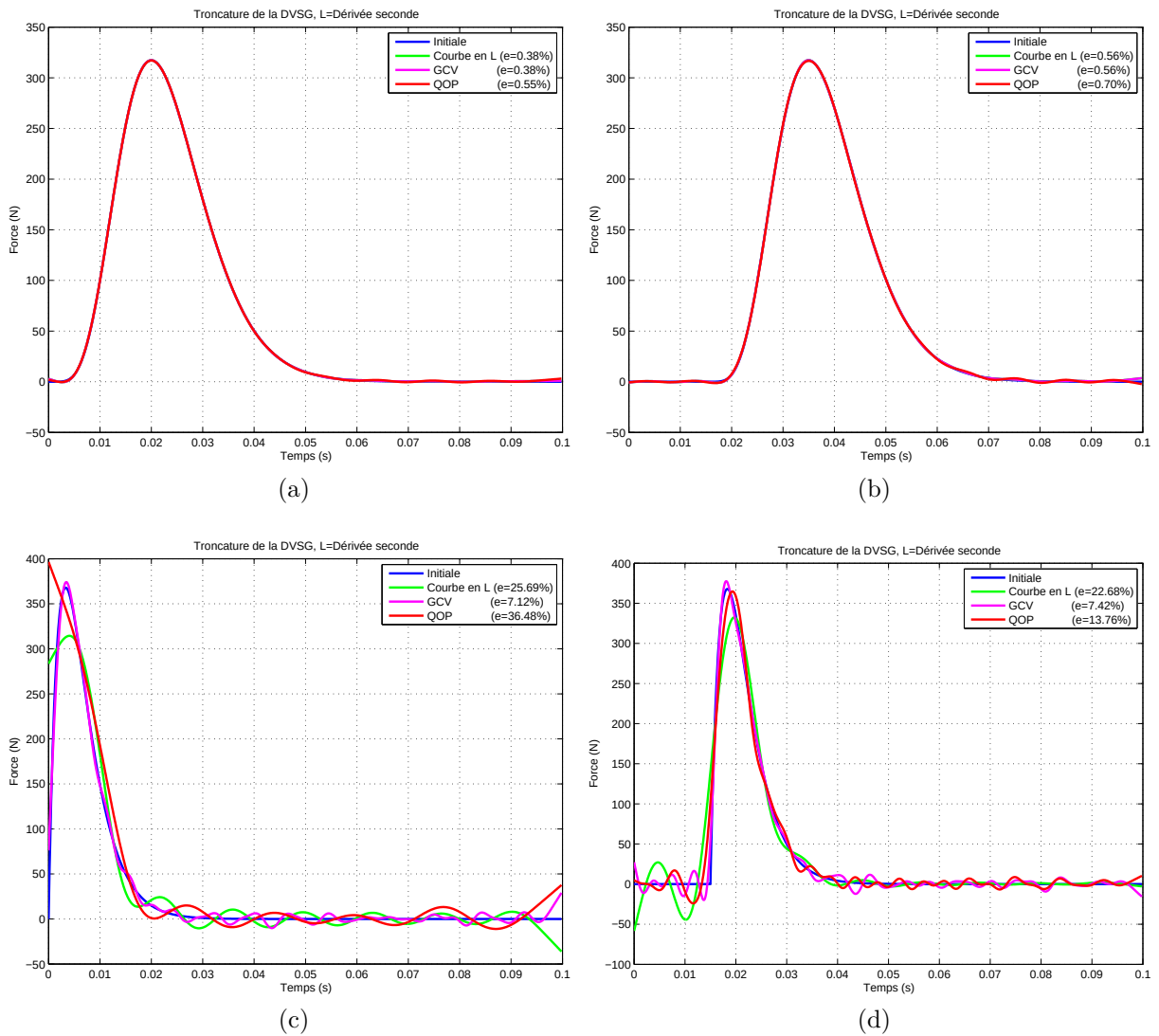


FIGURE 3.59: Force reconstruite par TGSVD en mesurant le déplacement

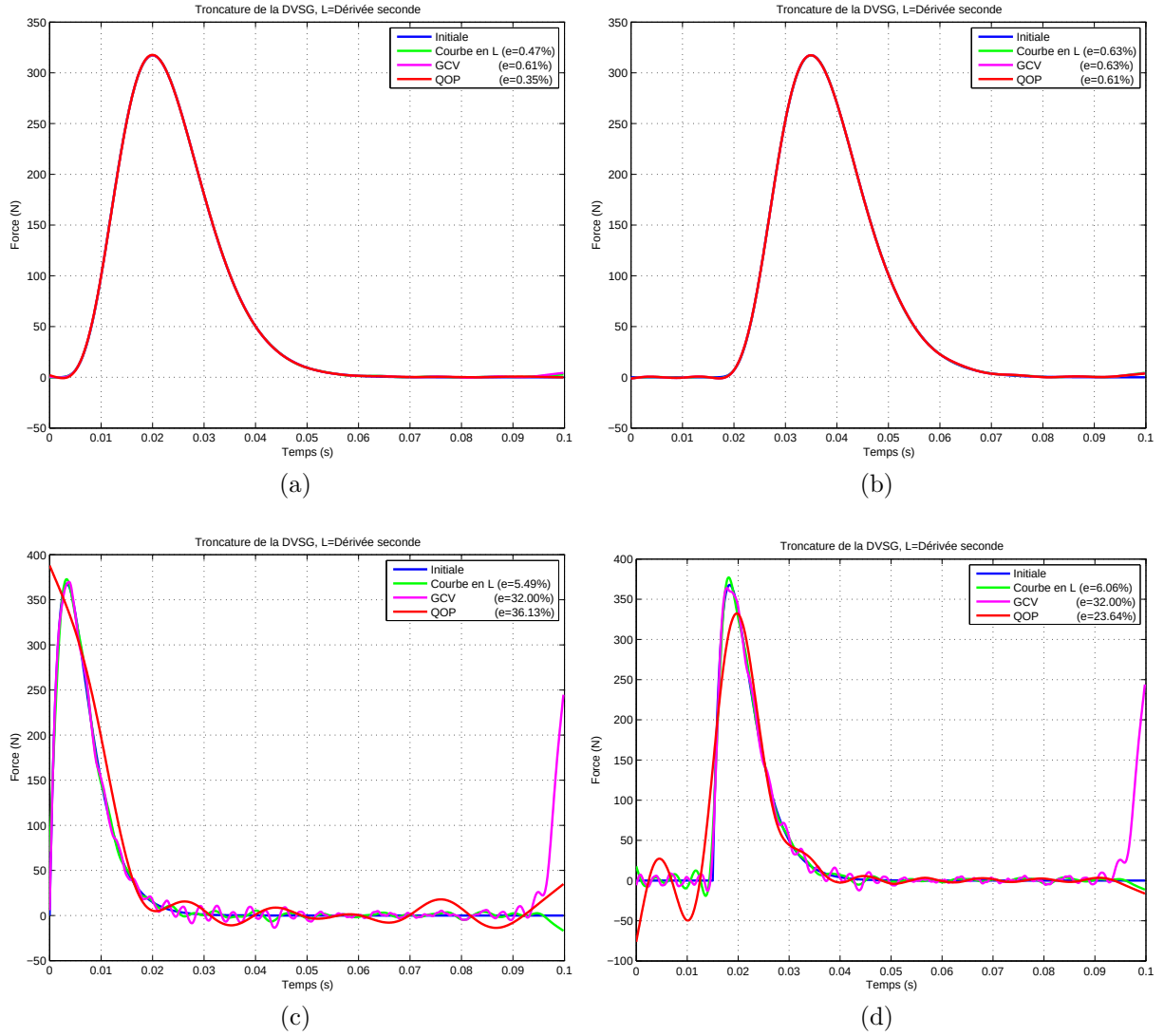


FIGURE 3.60: Force reconstruite par TGSVD en mesurant la déformation

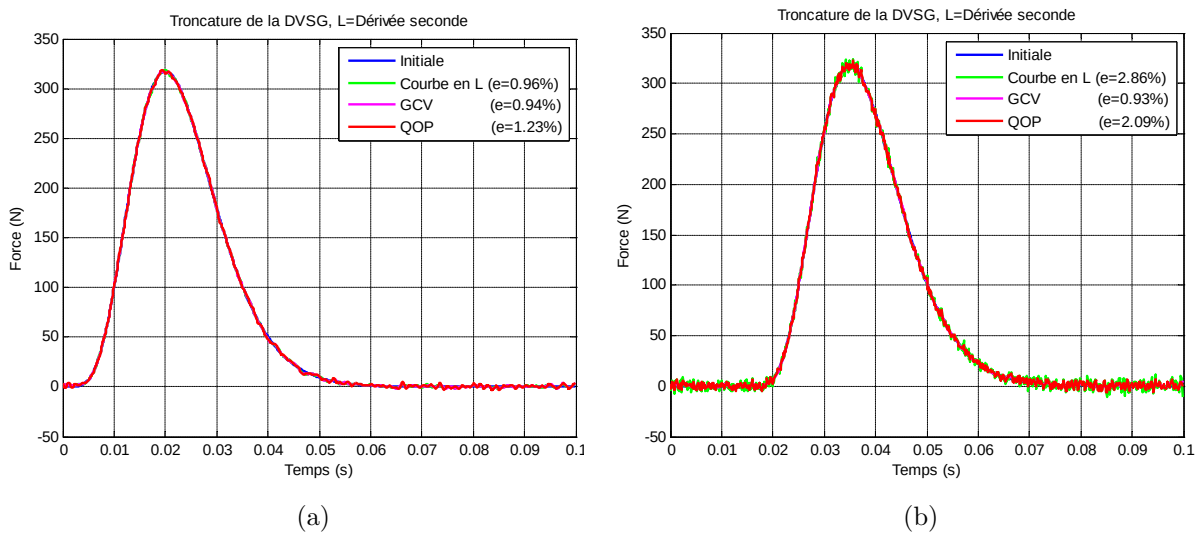
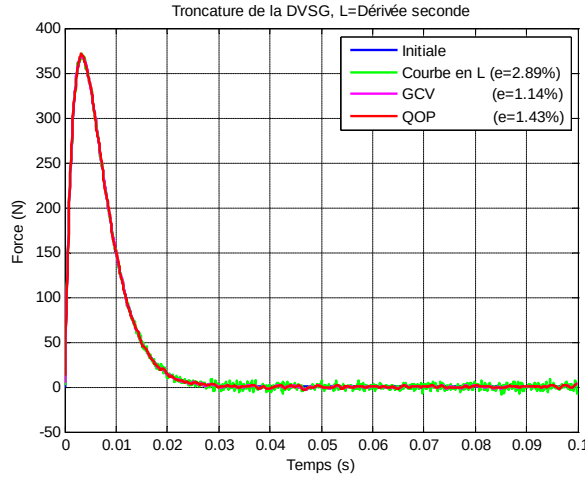
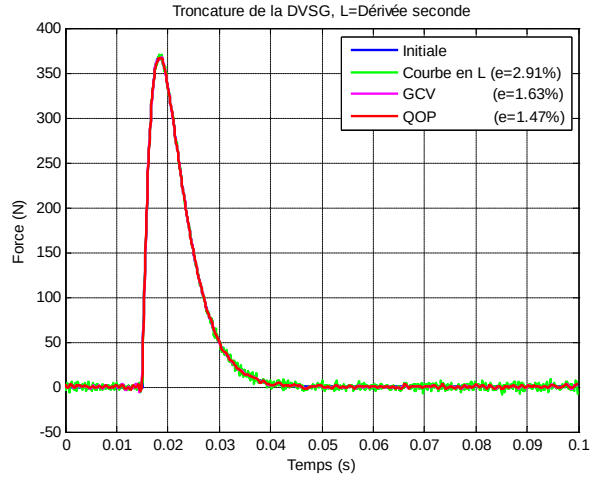


FIGURE 3.61: Force reconstruite par TGSVD en mesurant l'accélération

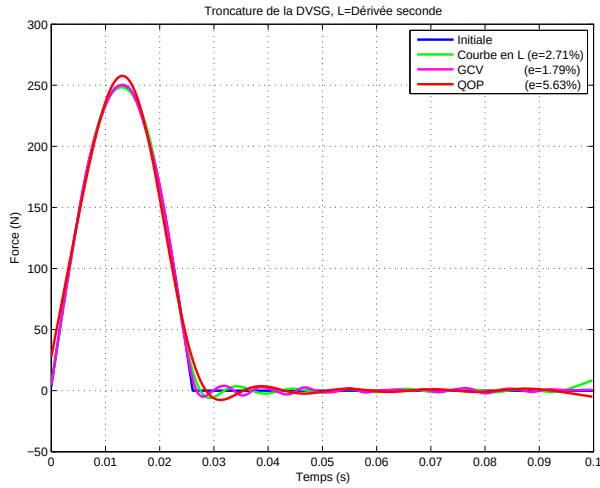


(c)

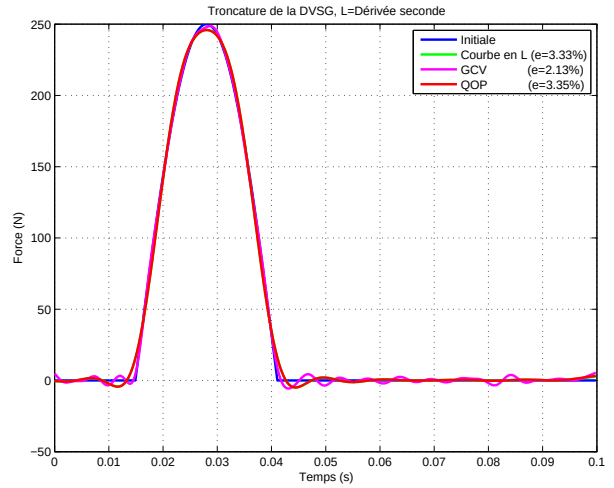


(d)

FIGURE 3.61: Force reconstruite par TGSVD en mesurant l'accélération

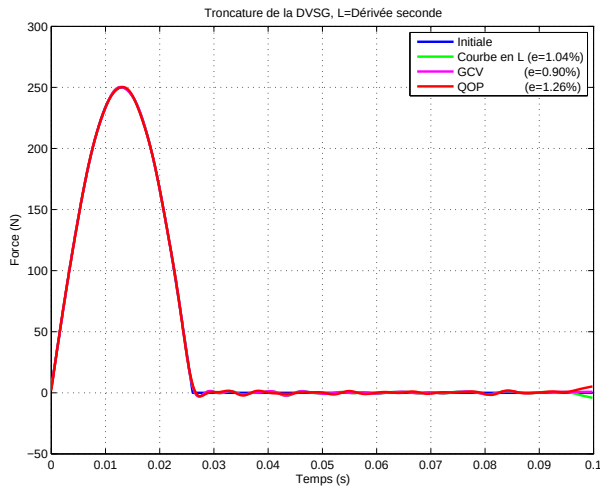


(a)

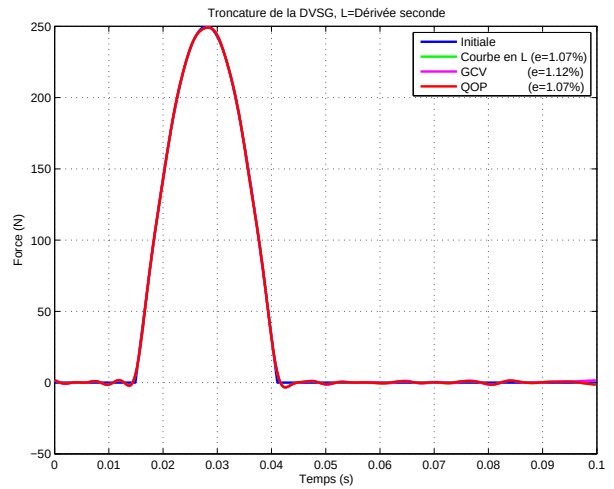


(b)

FIGURE 3.62: Force reconstruite par TGSVD en mesurant le déplacement

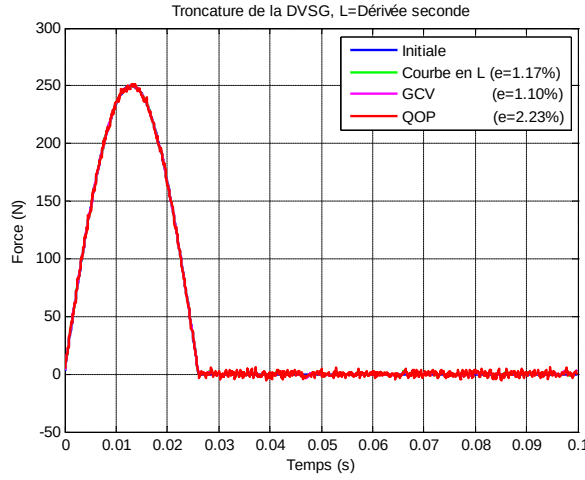


(a)

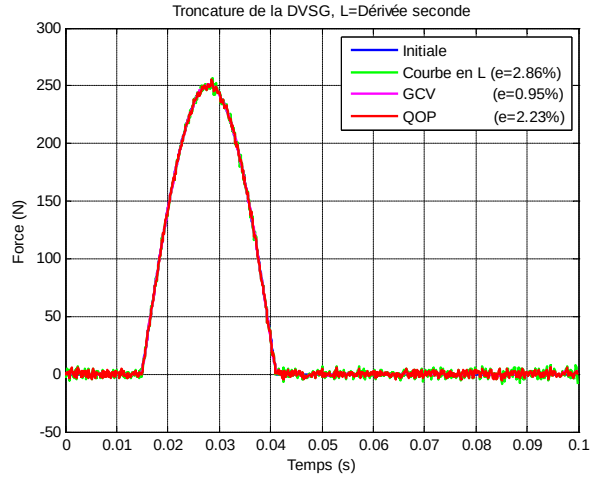


(b)

FIGURE 3.63: Force reconstruite par TGSVD en mesurant la déformation

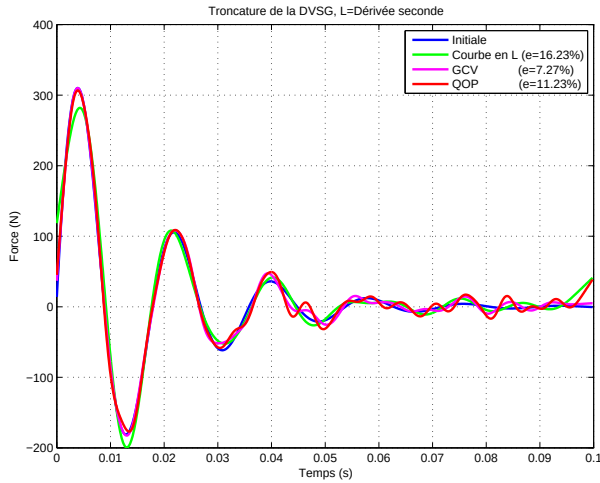


(a)

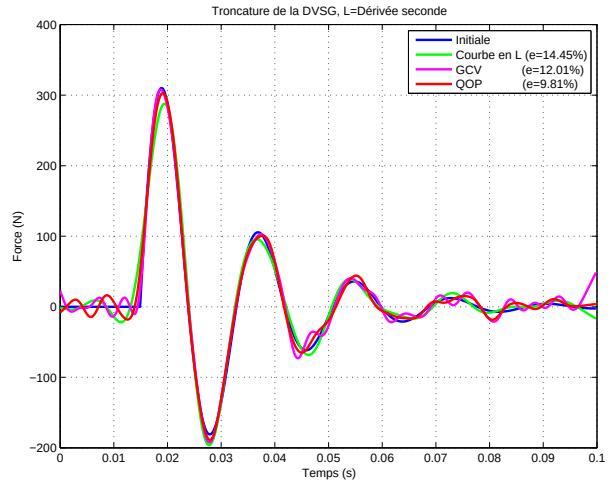


(b)

FIGURE 3.64: Force reconstruite par TGSVD en mesurant l'accélération

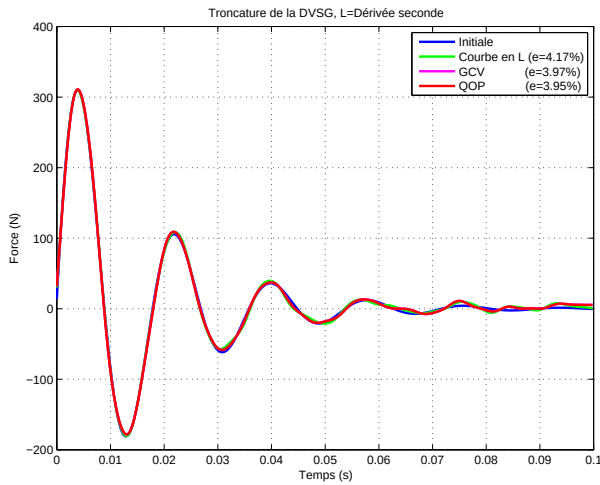


(a)

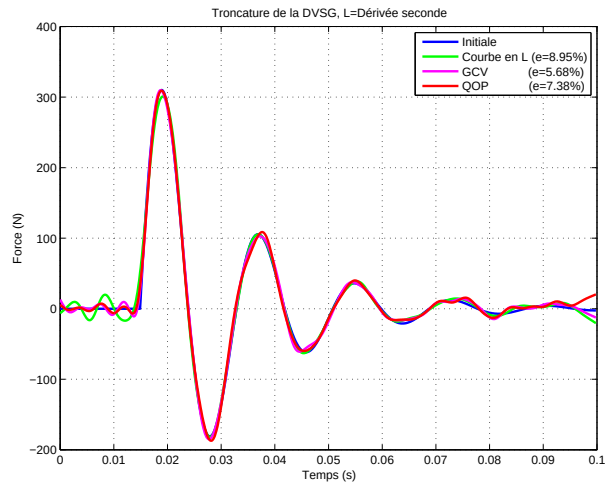


(b)

FIGURE 3.65: Force reconstruite par TGSVD en mesurant le déplacement



(a)



(b)

FIGURE 3.66: Force reconstruite par TGSVD en mesurant la déformation

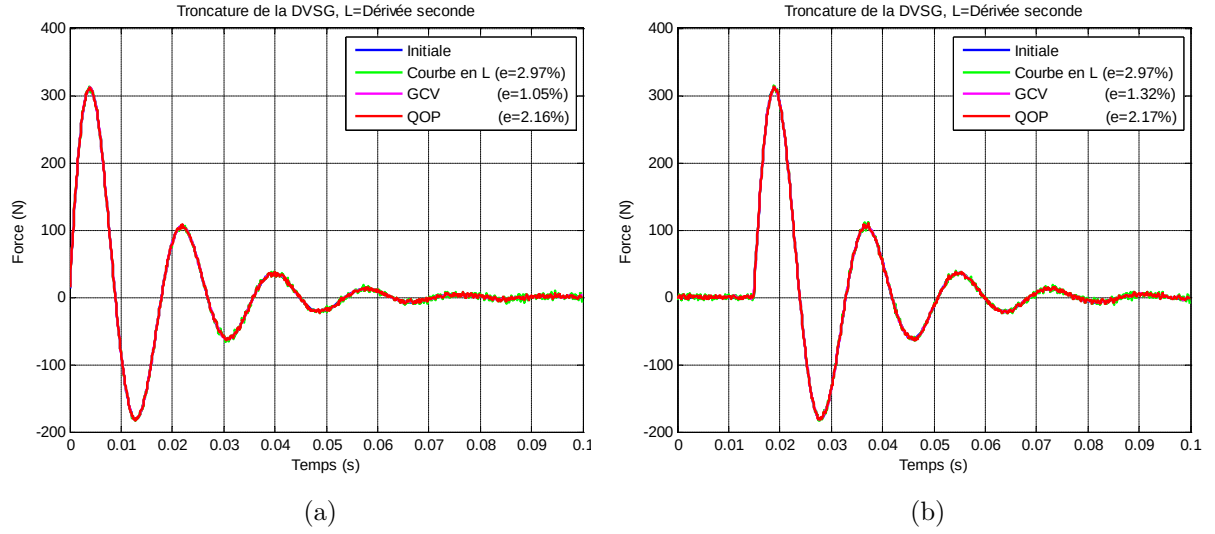


FIGURE 3.67: Force reconstruite par TGSVD en mesurant l'accélération

3.5.3 Critères de choix du paramètre de régularisation

Les critères de la courbe en L et du GCV donnent des paramètres de régularisation qui conduisent à une bonne identification de la force de chargement. Le critère de quasi-optimalité est globalement moins performant, essentiellement lorsqu'il faut identifier une force dont la variation est très rapide lors de l'application de cette force (type 1, cas 3 et 4).

3.5.4 Bilan intermédiaire

L'utilisation de la dérivée seconde pour stabiliser la solution conduit à une force identifiée en très bon accord avec la force initiale.

Si les méthodes de Tikhonov et de la troncature de la GSVD donnent de bons résultats, on notera que la TGSVD peut laisser passer certaines composantes hautes fréquences : cela vient d'un rang de troncature qui ne supprime pas suffisamment de termes.

3.6 Bilan global des méthodes et critères de régularisation

Plusieurs aspects sont à prendre en considération de façon indépendante :

1. - la fonctionnelle stabilisatrice,
2. - la méthode de régularisation (Tikhonov / troncature),
3. - le critère permettant de déterminer de façon fiable un paramètre de régularisation satisfaisant.

Sur la Figure 3.68, on a tracé l'erreur relative minimisée potentielle accessible par la méthode Tikhonov et par la troncature de la SVD/GSVD pour les trois fonctionnelles stabilisatrices étudiées, pour le cas 1 de la force de type 1. Ceci permet de déterminer

quelle fonctionnelle est susceptible, si on est capable de déterminer le paramètre de régularisation optimal, d'identifier la force en ayant une erreur la plus petite possible. Il s'avère que la régularisation via la dérivée seconde de la force conduit à l'erreur potentielle la plus faible, lorsque le déplacement est mesuré. Un travail similaire a été fait avec la déformation et l'accélération : on arrive à la même conclusion. Cependant, ces résultats ont également montré que les écarts potentiels entre les différentes méthodes sont faibles. On notera que nos résultats montrent que la régularisation via la norme de la force est en retrait des deux autres fonctionnelles stabilisatrices. En revanche, ces deux dernières ont conduit à des erreurs du même ordre de grandeur, avec un léger avantage pour la régularisation avec minimisation de la dérivée première. Ceci est assez prévisible car les problèmes sont liés aux vecteurs singuliers associés aux petites valeurs singulières or, comme mentionné, ces vecteurs apportent des composantes hautes fréquences donc une variation rapide de la solution. Ces variations sont naturellement minimisées en minimisant les dérivées du signal.

Si on regarde les erreurs obtenues dans les *432 configurations testées*, l'erreur minimale obtenue est de l'ordre de 0,4 % : on notera que cette valeur a été atteinte aussi bien pour la régularisation de Tikhonov que pour la méthode de troncature. Ceci indique qu'il est difficile de privilégier une méthode par rapport à l'autre.

Le critère GCV est le critère qui s'avère être le plus fiable et a toujours donné des forces identifiées satisfaisantes. Le critère de la courbe en L est assez satisfaisant surtout avec les stabilisations via les dérivées des forces. Le critère de quasi-optimalité peut être très performant mais peut également conduire à des forces mal identifiées : il ne semble donc pas être un critère fiable.

Il est important de souligner qu'en général, au moins deux critères permettent d'identifier la force de façon satisfaisante. Aussi, il est conseillé d'utiliser systématiquement tous les critères et de comparer les résultats obtenus, tout en considérant, a priori, le critère GCV comme une référence.

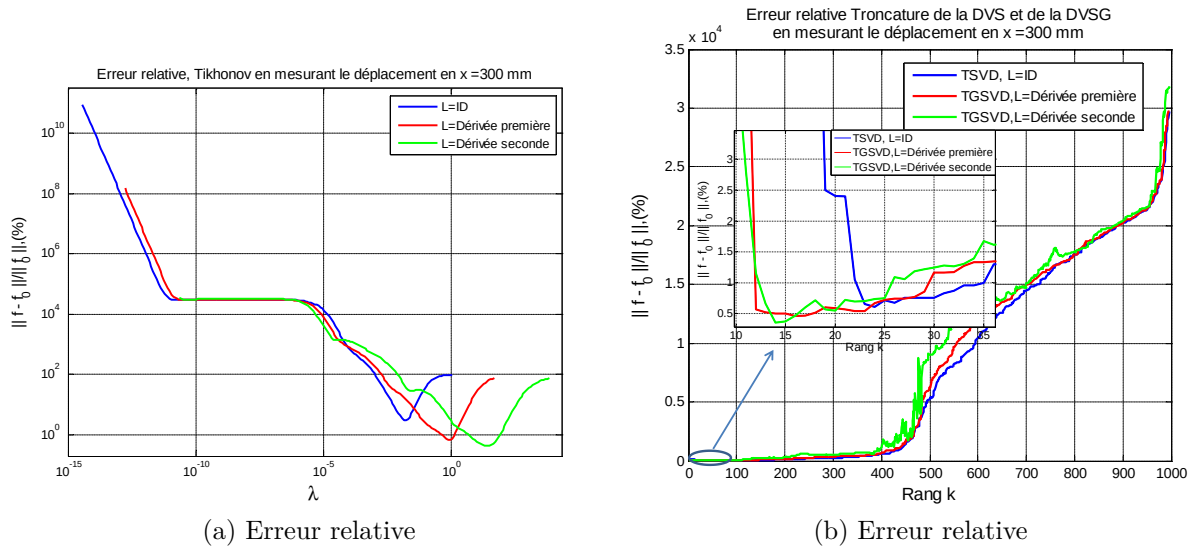


FIGURE 3.68: Erreur de reconstruction en fonction du paramètre de régularisation

3.7 Influence de la position du capteur

Afin d'évaluer l'influence de la position du capteur, nous avons réalisé des simulations lorsque la position du point de mesure coïncide avec la position du point d'application de la force d'excitation. On a utilisé le cas 1 de la force du premier type. La force d'impact est toujours appliquée en $x = 60$ cm et on mesure la réponse en M_2 ($x = 60$ cm) : on a donc une colocalisation force appliquée/mesure. Notons qu'on dispose également des résultats lorsque la mesure est effectuée en M_1 ($x = 30$ cm).

On a représenté sur les Figures 3.69a à 3.71b l'erreur relative commise lors de la reconstruction en fonction du paramètre de régularisation, en utilisant la régularisation de Tikhonov et par troncature de la SVD/GSCVD pour les trois fonctionnelles stabilisatrices utilisées dans ce chapitre. Il apparaît clairement que l'erreur minimale potentiellement accessible sur la solution identifiée n'est pas sensible à la position de mesure. Toute la difficulté est d'atteindre effectivement ce minimum, c'est à dire de détecter avec les différents critères la valeur optimale du paramètre de régularisation. Les résultats des Figures 3.69a à 3.71b sont obtenus pour une réponse en déplacement. Des calculs analogues ont été réalisés pour des mesures en déformation et en accélération : les conclusions sont identiques.

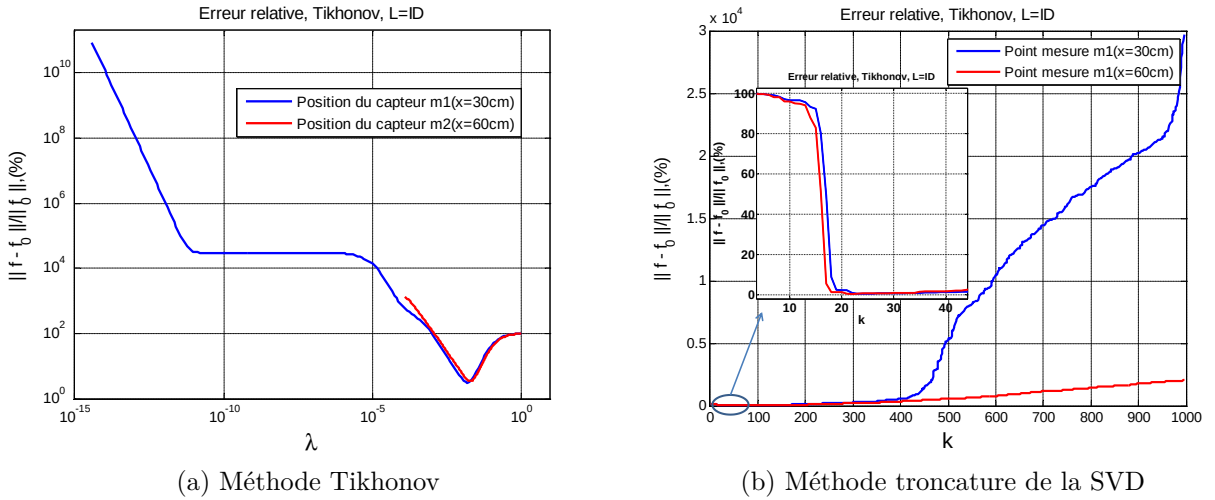
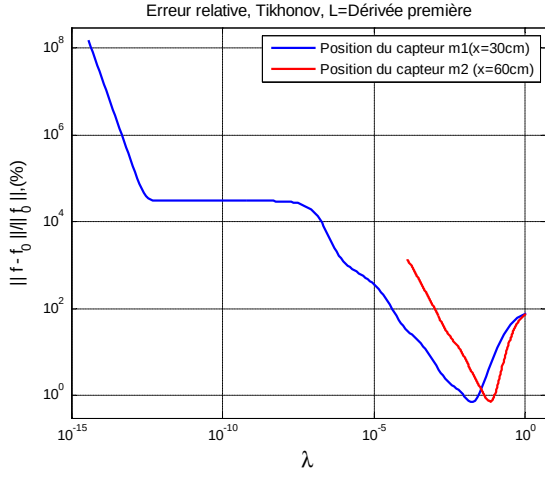
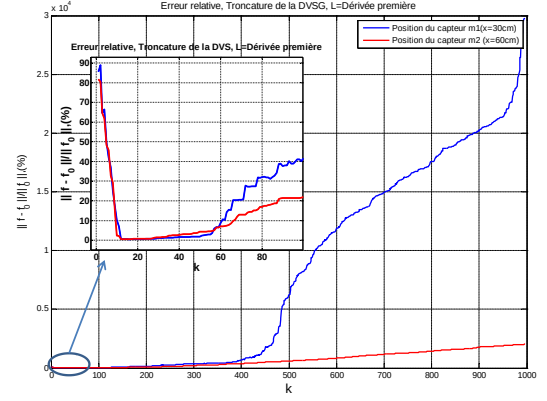


FIGURE 3.69: Erreur relative commise avec minimisation de la norme de la force

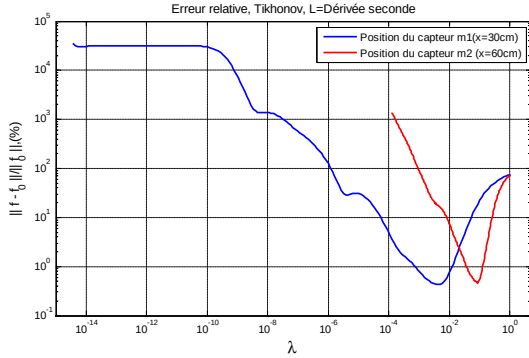


(a) Méthode de Tikhonov

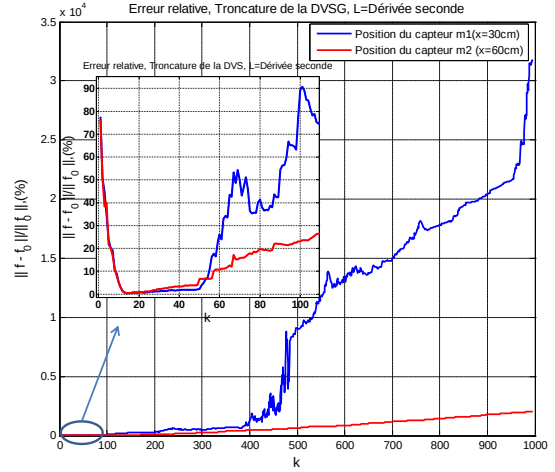


(b) Méthode troncature de la SVD

FIGURE 3.70: Erreur relative commise avec minimisation de la dérivée première



(a) Méthode Tikhonov



(b) Méthode troncature de la SVD

FIGURE 3.71: Erreur relative commise avec minimisation de la dérivée seconde

Les tableaux 3.2 à 3.4 sont une synthèse de la performance des différentes méthodes et des différents critères pour reconstruire le cas C1T1 de la force du première type pour les positions M_1 et M_2 : on y a consigné non seulement les erreurs relatives pour chaque méthode et l'erreur optimale que l'on peut atteindre, mais également les paramètres de régularisation. On se rend compte que ces paramètres peuvent prendre des valeurs très différentes, allant, pour la méthode de Tikhonov, de très petites valeurs ($9.08 \cdot 10^{-4}$) à de très grandes valeurs ($3.96 \cdot 10^6$). Bien évidemment, plus un critère est capable de donner une valeur du paramètre de régularisation proche de la valeur optimale, plus ce critère s'approche de l'erreur optimale. Les erreurs relatives optimales confirment la non sensibilité de ces erreurs avec la position du point de mesure. En outre, on constate que, quel que soit le point de mesure, il existe toujours un critère qui donne une solution proche de la solution optimale. Ainsi lorsque la régularisation se fait avec la dérivée

seconde l'écart entre l'erreur optimale et la meilleure des erreurs est inférieure à 0,06 % ; cet écart est de 0,26 % pour la régularisation L_1 et 0,99 % pour L_0 .

	Critère	Paramètre de régularisation				Erreur relative (%)			
		M_1		M_2		M_1		M_2	
		Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal
Tikh.	Courbe en L	4.84E-03	1.62E-02	5.30E-03	2.02E-02	11.22	3.00	16.18	3.50
	GCV	5.92E-03		7.50E-03		8.45		10.33	
	QOP	1.49E-02		1.91E-02		3.03		3.54	
Tronc.	Courbe en L	5.20E+01	2.40E+01	2.20E+01	2.20E+01	2.57	0.61	0.42	0.42
	GCV	2.70E+01		2.40E+01		0.75		0.81	
	QOP	3.40E+01		2.00E+01		0.96		1.05	

(a) Paramètre de régularisation et erreur reconstruites en utilisant le déplacement

	Critère	Paramètre de régularisation				Erreur relative (%)			
		M_1		M_2		M_1		M_2	
		Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal
Tikh.	Courbe en L	1.24E-01	5.94E-01	2.99E-04	9.08E-04	24.41	5.42	19.28	8.86
	GCV	2.29E-01		3.83E-04		12.68		16.04	
	QOP	5.51E-01		7.17E-04		5.55		9.85	
Tronc.	Courbe en L	3.38E+02	1.04E+02	2.30E+02	2.34E+02	20.78	1.32	2.66	2.63
	GCV	9.50E+01		2.33E+02		1.43		2.63	
	QOP	1.14E+02		2.34E+02		1.41		2.63	

(b) Paramètre de régularisation en utilisant la déformation

	Critère	Paramètre de régularisation				Erreur relative (%)			
		M_1		M_2		M_1		M_2	
		Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal
Tikh.	Courbe en L	8.90E+01	8.25E+04	1.08E+01	2.77E+03	23.43	5.50	4.25	1.77
	GCV	2.58E+04		8.28E+02		11.49		3.14	
	QOP	6.00E+04		2.76E+03		6.19		1.77	
Tronc.	Courbe en L	7.57E+02	5.51E+02	9.95E+02	9.91E+02	3.10	2.09	4.25	1.52
	GCV	5.59E+02		9.91E+02		2.09		1.52	
	QOP	6.62E+02		9.87E+02		2.34		4.68	

(c) Paramètre de régularisation en utilisant l'accélération

TABLE 3.2: Paramètre de régularisation et erreurs relatives ; fonctionnelle stabilisatrice L_0

	Critère	Paramètre de régularisation				Erreur relative (%)			
		M_1		M_2		M_1		M_2	
		Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal
Tikh.	Courbe en L	4.15E-01	8.61E-01	4.96E-01	8.84E-01	1.01	0.7	0.92	0.71
	GCV	5.09E-01		4.88E-01		0.87		0.93	
	QOP	1.37E+00		1.32E+00		1.08		0.91	
Tronc.	Courbe en L	3.40E+01	1.60E+01	1.30E+01	1.60E+01	1.33	0.46	0.47	0.47
	GCV	1.40E+01		1.20E+01		0.50		0.47	
	QOP	2.30E+01		1.40E+01		0.54		0.47	

(a) Paramètre de régularisation et erreur reconstruites en utilisant le déplacement

	Critère	Paramètre de régularisation				Erreur relative (%)			
		M_1		M_2		M_1		M_2	
		Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal
Tikh.	Courbe en L	1.53E+01	2.35E+01	2.52E-02	3.56E-02	0.74	0.66	0.79	0.69
	GCV	1.85E+01		2.73E-02		0.68		0.75	
	QOP	4.00E+01		6.56E-02		1.00		1.44	
Tronc.	Courbe en L	5.10E+01	2.20E+01	6.20E+01	4.50E+01	0.77	0.37	0.45	0.39
	GCV	2.50E+01		3.90E+01		0.46		0.40	
	QOP	3.50E+01		2.50E+01		0.51		0.45	

(b) Paramètre de régularisation en utilisant la déformation

TABLE 3.3: Paramètre de régularisation et erreurs relatives ; fonctionnelle stabilisatrice L_1

	Critère	Paramètre de régularisation				Erreur relative (%)			
		M_1		M_2		M_1		M_2	
		Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal
Tikh.	Courbe en L	1.61E+06	1.93E+06	1.92E+05	9.12E+04	0.82	0.81	1.05	0.79
	GCV	2.00E+06		2.41E+05		0.81		1.29	
	QOP	4.29E+06		5.77E+05		1.68		3.79	
Tronc.	Courbe en L	2.10E+01	4.30E+01	4.49E+02	2.22E+02	1.01	0.62	0.66	0.60
	GCV	3.30E+01		2.07E+02		0.68		0.67	
	QOP	1.11E+02		5.58E+02		0.91		0.69	

(c) Paramètre de régularisation en utilisant l'accélération

TABLE 3.3: Paramètre de régularisation et erreurs relatives; fonctionnelle stabilisatrice L_1

	Critère	Paramètre de régularisation				Erreur relative (%)			
		M_1		M_2		M_1		M_2	
		Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal
Tikh.	Courbe en L	2.34E+01	2.64E+01	2.35E+01	3.40E+01	0.43	0.43	0.50	0.47
	GCV	1.40E+01		1.66E+01		0.49		0.56	
	QOP	4.00E+01		3.78E+01		0.48		0.47	
Tronc.	Courbe en L	1.50E+01	1.40E+01	1.50E+01	1.40E+01	0.38	0.35	0.44	0.38
	GCV	1.50E+01		1.50E+01		0.38		0.44	
	QOP	2.00E+01		1.80E+01		0.55		0.78	

(a) Paramètre de régularisation et erreur reconstruites en utilisant le déplacement

	Critère	Paramètre de régularisation				Erreur relative (%)			
		M_1		M_2		M_1		M_2	
		Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal
Tikh.	Courbe en L	7.60E+02	7.91E+02	1.05E+00	1.40E+00	0.40	0.40	0.46	0.44
	GCV	6.57E+02		1.31E+00		0.41		0.44	
	QOP	1.66E+03		3.43E+00		0.57		0.90	
Tronc.	Courbe en L	2.10E+01	1.40E+01	3.40E+01	2.70E+01	0.47	0.35	0.34	0.31
	GCV	1.80E+01		2.10E+01		0.61		0.67	
	QOP	1.50E+01		2.70E+01		0.35		0.31	

(b) Paramètre de régularisation en utilisant la déformation

	Critère	Paramètre de régularisation				Erreur relative (%)			
		M_1		M_2		M_1		M_2	
		Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal	Calcul	Optimal
Tikh.	Courbe en L	4.35E+06	3.96E+06	9.37E+05	6.26E+05	0.88	0.88	0.60	0.59
	GCV	3.35E+06		1.15E+06		0.88		0.61	
	QOP	6.45E+06		1.91E+06		1.06		0.81	
Tronc.	Courbe en L	8.90E+01	1.04E+02	4.51E+02	9.70E+01	0.96	0.93	0.70	0.60
	GCV	1.09E+02		1.30E+02		0.94		0.61	
	QOP	1.84E+02		1.59E+02		1.23		0.61	

(c) Paramètre de régularisation en utilisant l'accélération

TABLE 3.4: Paramètre de régularisation et erreurs relatives; fonctionnelle stabilisatrice L_2

3.8 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons mis en œuvre différentes méthodes de régularisation associées à des critères permettant de déterminer le paramètre de régularisation sur un exemple donné (poutre articulée-appuyée), avec trois types de force ponctuelle différents. Ces trois types de force permettent de voir si les méthodes identifient de façon satisfaisante soit une force de durée limitée, soit une force appliquée sur toute la plage de mesures. En outre, on a regardé s'il est plus difficile d'identifier des signaux de variations très rapides, afin de voir l'aptitude des méthodes à identifier des forces d'impact. Nous avons utilisé les méthodes de régularisation de Tikhonov, de troncature (SVD ou GSVD) et nous avons appliqué les critères de la courbe en L , de validation croisée et de quasi-optimalité pour obtenir les paramètres de régularisation.

Les résultats obtenus dans ce chapitre permettent d'évaluer l'efficacité de la méthode de la reconstruction du chargement. Nous avons défini une erreur et nous avons ainsi pu comparer nos résultats.

Nous nous sommes également intéressés à l'influence de la nature du signal mesuré en comparant les résultats obtenus à partir d'une réponse en déplacement, en déformation et en accélération, ainsi qu'à l'influence de la position du point de mesure.

A parti de toutes les simulations, plusieurs conclusions ont été établies. Nous avons pu mettre en évidence que :

- Le critère de la validation croisée GCV a fourni presque dans tous les cas une valeur satisfaisante du paramètre de régularisation. Ce critère semble le plus fiable. A l'opposé, le critère de quasi-optimalité est autant susceptible de prévoir les valeurs optimales du paramètre de régularisation que de donner des valeurs inacceptables : ce critère manque donc de fiabilité. Il n'en demeure pas moins qu'en pratique, il est important d'utiliser simultanément les trois critères et de comparer les valeurs du paramètre de régularisation.

- Les solutions obtenues à l'aide de la régularisation via la norme de la dérivée première et seconde de la force donnent des résultats satisfaisants et sont donc à privilégier. En revanche, la méthode de stabilisation minimisant la norme de la force donne de moins bons résultats, même s'ils restent tout à fait corrects.

- Les forces reconstruites à partir des réponses en accélération donnent souvent des meilleurs résultats : mais ce n'est pas général, en particulier si on minimise la norme de la solution avec la méthode de Tikhonov. De même, dans ce cas, on notera que l'utilisation des déformations semble à proscrire.

- La qualité potentielle de la reconstruction semble indépendante de la position du capteur vis-à-vis de la position du point de mesure. C'est ce qui a été globalement retrouvé lorsque le paramètre de régularisation a été déterminé par les trois critères utilisés.

- La reconstruction d'une force qui a une pente initiale raide (donc une variation très rapide de la force dès l'application de la force) semble un peu plus délicate. Toutefois la forme globale (maximum, durée de l'application de la force) a été bien retrouvée. Pour améliorer la reconstruction durant les premiers instants d'application de la force, on a imposé un délai : ceci n'a pas eu l'effet escompté et ne s'est pas toujours révélé positif.

Chapitre 4

Identification et localisation

4.1 Position du problème

Reconstruire un chargement quelconque est étroitement lié au problème de la localisation. En effet, si on suppose a priori que le chargement à identifier est réparti sur toute la surface de la structure étudiée, on élimine le problème de localisation. Ainsi, là où le chargement identifié sera (quasi-)nul, on pourra alors conclure qu'il n'y avait pas de chargement appliqué : il est donc alors possible a posteriori de localiser la zone de chargement. La qualité du résultat est donc directement liée à l'aptitude des méthodes utilisées à identifier un effort constamment égal à zéro ainsi qu'à identifier simultanément des actions multiples.

En pratique, que ce soit d'un point de vue expérimental ou d'un point de vue numérique, il est nécessaire de quadriller la structure par des capteurs ou par un maillage de type éléments finis par exemple. Ensuite on identifie toutes les fonctions de transfert H_{ij} entre chaque couple de ddl (i, j) lié à l'ensemble du quadrillage : en l'occurrence, i correspond à un ddl selon lequel on effectue une mesure et j un ddl selon lequel on applique un chargement. Puis, pour le chargement que l'on cherche à identifier, on écrit le système matriciel faisant intervenir toutes les fonctions de transfert : il reste alors à résoudre ce problème qui est un problème mal-posé. Il semble clair que les résultats seront d'autant plus précis que le quadrillage est fin.

Nous allons appliquer cette démarche dans le cas de la poutre appuyée appuyée. Nous utiliserons une approche éléments finis : la poutre est discrétisée en éléments "poutres" et nous utiliserons la réponse "mesurée" de plusieurs ddl, voire de tous les ddl.

A la différence des chapitres précédents, nous nous focaliserons ici sur une méthode de régularisation : la méthode de Tikhonov associée à l'opérateur régularisant L_2 , qui cherche donc à minimiser la dérivée seconde des signaux à reconstruire. Le paramètre de régularisation sera systématiquement déterminé par le critère GCV, même s'il arrivera de faire un commentaire sur les autres critères (courbe en L et quasi-optimalité).

Dans un premier temps, nous allons établir les équations régissant ce problème : ce sera une extension des équations écrites dans les chapitres précédents. Puis nous passerons à la reconstruction de deux actions (force et/ou moment) uniquement, sachant que l'une des actions sera identiquement nulle (AIN) alors que l'autre sera forcément non nulle (ANN). Puis nous passerons à la reconstruction simultanée de plusieurs actions non nulles et finalement nous conclurons quant à la possibilité de localiser la région application d'une action. Nous nous interrogerons également sur l'intérêt d'avoir des mesures

surabondantes.

4.2 Position du problème étudié

4.2.1 Mise en équation

La structure étudiée est modélisée en élément finis. Appelons $H_{ij}(t)$ sa réponse impulsionnelle entre le ddl i et le ddl j . Cette fonction peut être déterminée facilement en utilisant la superposition modale par exemple, comme indiqué dans le sous-paragraphe 3.2.2.

Supposons que n_F actions soient appliquées sur la structure selon ses différents ddl et que n_m mesures soient faites. Alors la réponse $s_{i_l}(t)$ du ddl mesuré i_l est

$$\forall l \in 1, \dots, n_m, s_{i_l}(t) = \sum_{k=1}^{n_F} \int_0^t H_{i_l j_k}(t - \tau) F_{j_k}(\tau) d\tau \quad (4.1)$$

où $\{j_k\}_{k=1 \dots n_F}$ est l'ensemble des ddl le long desquels, les actions sont appliquées ; de même $\{i_l\}_{l=1 \dots n_m}$ est l'ensemble des ddl le long desquels les mesures sont effectuées.

L'équation de convolution est discrétisée. Cela conduit au système d'équations algébriques suivant :

$$\forall l \in 1, \dots, n_m, \mathbf{s}_{i_l} = \mathbf{H}_{i_l, \mathbf{j}_k} \mathbf{F}_{\mathbf{j}_k} \quad (4.2)$$

où :

Δt représente le pas de temps de discrétisation ; on appelle n_t le nombre de points temporels.

$\mathbf{H}_{i_l, \mathbf{j}_k}$ est la matrice $n_t \times n_t$ de transfert :

$$\mathbf{H}_{i_l, \mathbf{j}_k} = \Delta t \begin{pmatrix} H_{i_l, j_k}(\Delta t) & 0 & & 0 \\ H_{i_l, j_k}(2\Delta t) & H_{i_l, j_k}(\Delta t) & \ddots & \\ H_{i_l, j_k}(3\Delta t) & H_{i_l, j_k}(2\Delta t) & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ H_{i_l, j_k}(n_t \Delta t) & H_{i_l, j_k}((n_t - 1)\Delta t) & \dots & \dots & H_{i_l, j_k}(\Delta t) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{s}_{i_l} = [s_{i_l}(\Delta t), \dots, s_{i_l}(n_t \Delta t)]^t$ est un vecteur de dimension n_t ,

$\mathbf{F}_{\mathbf{j}_k} = [F_{j_k}(0), \dots, F_{j_k}((n_t - 1)\Delta t)]^t$ est un vecteur de dimension n_t ,

Les équations (4.2) conduisent au problème suivant :

$$\mathbf{s} = \mathbf{H} \mathbf{F} \quad (4.3)$$

où $\mathbf{s} = [\mathbf{s}_{i_1}^t, \dots, \mathbf{s}_{i_{n_m}}^t]^t$; $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_{\mathbf{j}_1}^t, \dots, \mathbf{F}_{\mathbf{j}_{n_F}}^t]^t$; $\mathbf{H}$ est une matrice de Toeplitz par blocs $\mathbf{H}_{kl}$ tels que $\mathbf{H}_{kl} = \mathbf{H}_{i_l, \mathbf{j}_k}$ pour $k = 1 \dots n_F$ et $l = 1 \dots n_m$; ainsi $\mathbf{H}$ est une matrice $m \times n$, $\mathbf{s}$ est un vecteur de dimension m , $\mathbf{F}$ est un vecteur de dimension n , où $m = n_t \times n_m$ et $n = n_t \times n_F$.

Comme $\mathbf{H}_{i_l, \mathbf{j}_k}$ est une matrice de Toeplitz, résoudre l'équation matricielle (4.3) est encore un problème mal-posé : c'est pourquoi on utilisera les techniques de régularisation pour le résoudre.

L (m)	a (cm)	E (GPa)	ρ (kg/m ³)
0,9	2	70	2400

TABLE 4.1: Caractéristiques de la poutre

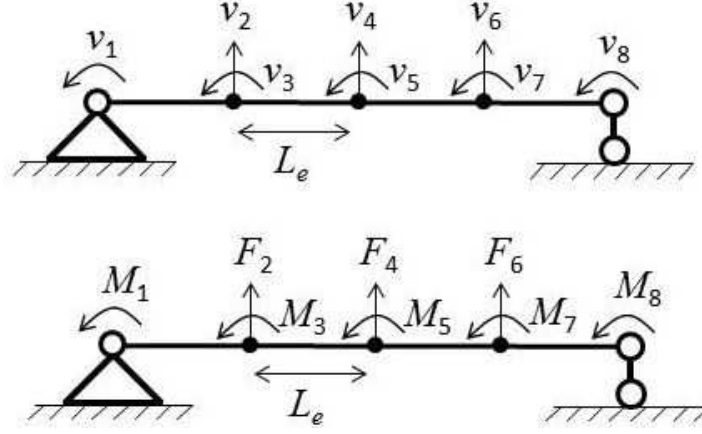


FIGURE 4.1: Discretisation éléments finis de la poutre en 4 éléments : ddl et efforts nodaux

4.2.2 Système étudié

Les caractéristiques de la poutre étudiée (aluminium, section carrée de côté a , longueur L) sont listées dans le tableau 4.1. Elle est discrétisée en 4 éléments et 8 ddl (voir figure 4.1). Bien que ce système soit très simple, une première difficulté apparaît : les ddl et donc les actions nodales n'ont pas tous la même nature. On a donc des translations et des rotations associées à des efforts nodaux et des moments nodaux.

4.3 Identification d'une action identiquement nulle

Une action est appliquée selon le ddl i_A uniquement ; le problème direct donné par l'équation 4.3 donne alors la réponse du système selon tous les ddl. Parmi ces réponses certaines sont retenues et sont considérées comme étant les réponses "mesurées" qui vont permettre de reconstruire le chargement. Chaque réponse est perturbée par l'ajout d'un bruit : il s'agit d'un signal aléatoire gaussien défini au chapitre précédent. Finalement on identifie non seulement l'action appliquée selon le ddl i_A , mais également une action appliquée selon un autre ddl : cette dernière est donc identiquement nulle.

L'objectif a donc deux aspects : évaluer la capacité de la méthode à identifier simultanément deux actions d'une part, et d'autre part tester la possibilité d'identifier une action nulle. Plusieurs cas seront examinés : on testera l'influence de la nature de l'action (force ou moment), du choix des ddl mesurés (nombre de points de mesure, nature des ddl qui peuvent être une translation ou une rotation).

Quasiment toutes les actions testées seront proportionnelles au signal $q(t)$:

$$q(t) = q_0 t^3 \exp(-\gamma t) \quad (4.4)$$

où $q_0 = 3 \cdot 10^{11}$ et $\gamma = 1300 \text{ s}^{-1}$. Cette fonction est représentée figure 4.2.

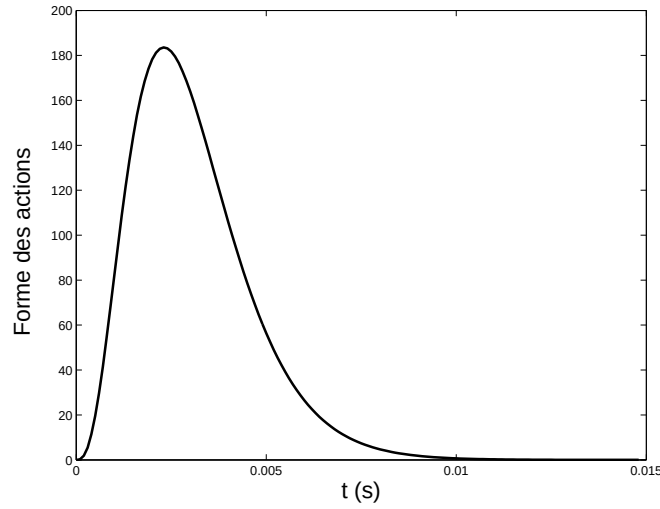


FIGURE 4.2: Évolution temporelle des actions appliquées

numéro du cas ddl “mesurés”	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2&4	4&6	1&4	4&5	2&6	1&2	2&3	2&5	2&4&6	all

TABLE 4.2: Liste des différents cas de mesures

4.3.1 Identification d’une action identiquement nulle

Différents cas de mesures sont étudiés. Ils sont listés dans le tableau 4.2.

De même plusieurs paires d’actions sont identifiées (voir tableau 4.3) : la première action est une AIN et la seconde, une ANN.

Ainsi, par exemple, les forces identifiées F_2 et F_4 (paire d’actions 1) sont dessinées figure 4.3 : le cas 1 des mesures a été utilisé. Il est facile de définir un critère pour évaluer l’écart entre l’action identifiée (A^{id}) et l’action réelle (A^{re}) si l’action en question est l’ANN, donc ici, F_4 :

$$D_{24}(F_4) = \frac{\|F_4^{id} - F_4^{re}\|}{\|F_4^{re}\|} \times 100 \quad (4.5)$$

Il n’en est pas de même pour F_2 parce que $\|F_2^{re}\|$ est égale à zéro. Aussi un autre critère est proposé pour les AIN :

$$D_{24}^0(F_2) = \frac{1}{n} \frac{\|F_2^{id}\|}{\max(\|F_4^{re}\|)} \quad (4.6)$$

Dans cette dernière expression $\max(\|F_4^{re}\|)$ est une sorte de facteur d’échelle : l’idée étant de proportionner les résultats à la sollicitation non-nulle. Cependant, $\max(\|F_4^{re}\|)$ n’est pas un facteur adimensionnalisant, compte-tenu que les actions peuvent être de nature différente. Ainsi si l’ANN est une force et l’AIN un moment, l’écart quantifiant l’action

numéro de la paire d’actions	1	2	3	4	5
ddl associé à l’AIN	2	1	5	4	4
ddl associé à l’ANN	4	4	4	5	2

TABLE 4.3: Liste des ddl associés aux actions à identifier

nulle est exprimée en mètres. C'est ce qui explique qu'il n'est pas simple de comparer les écarts pour différentes paires d'AIN et d'ANN.

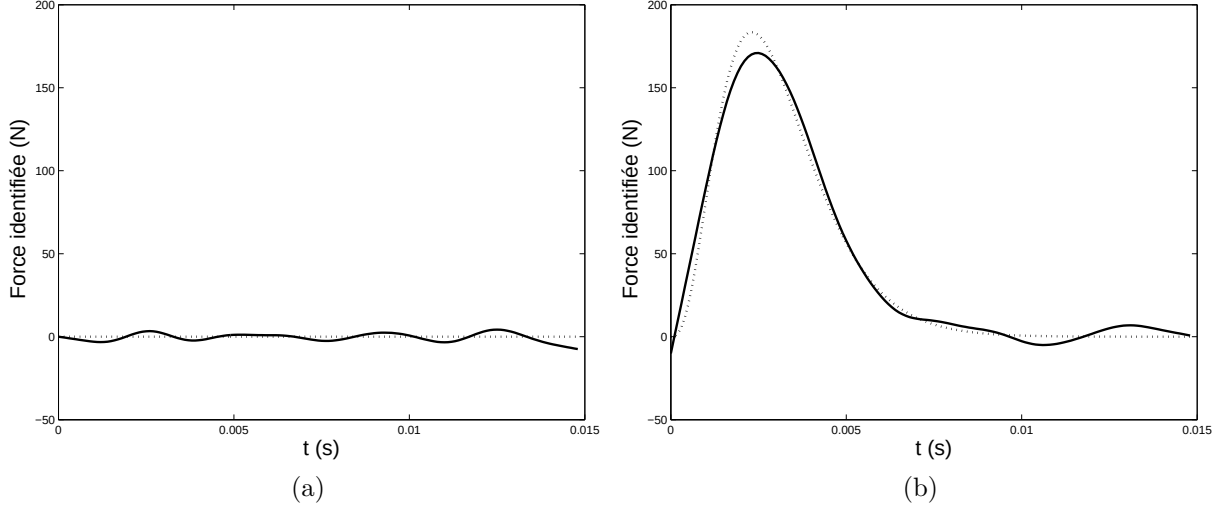


FIGURE 4.3: Forces identifiées selon (a) le ddl 4 (b) le ddl 2

Pour se faire une idée sur ces écarts, l'écart des forces identifiées et représentées figure 4.3 est égal à $D_{24}^0(F_2) = 0.2$ et $D_{24}(F_4) = 8.95$ % respectivement. Tous les écarts sont représentés sur la figure 4.4 de façon à détecter une influence éventuelle des mesures (position, nature) sur les résultats.

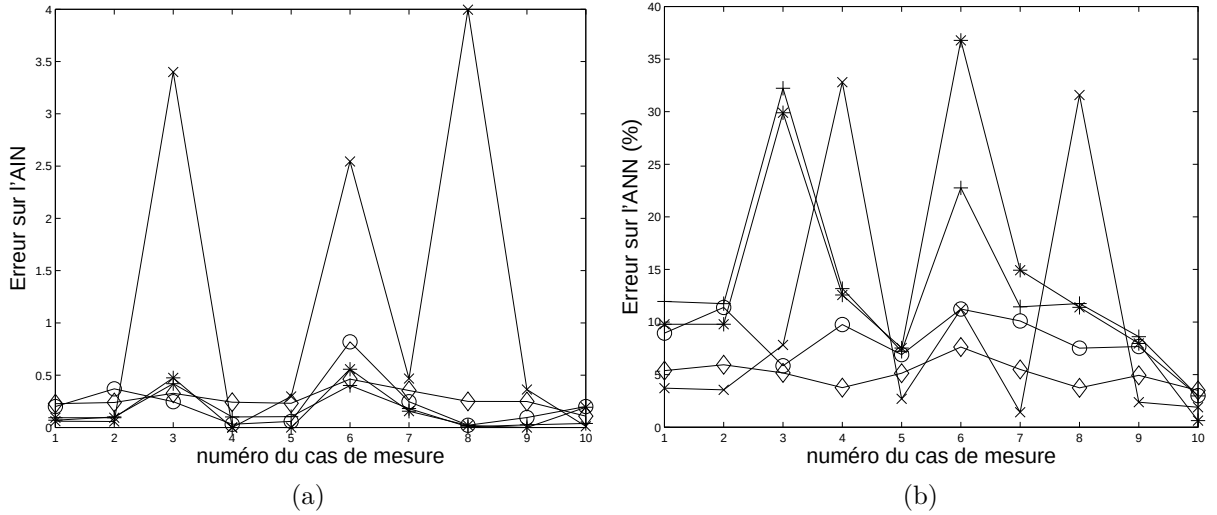


FIGURE 4.4: (a) Ecart des AIN (b) Ecart des ANN en fonction des cas de mesures pour les différentes paires d'actions : paire 1 : 'o' ; paire 2 : '+' ; paire 3 : '*' ; paire 4 : 'x' ; paire 5 : '◇'

4.3.2 Discussion

4.3.2.1 Paramètre de régularisation

Par rapport aux différents cas listés dans les tableaux 4.2 et 4.3, le cas le plus défavorable est pour la paire 4, soit pour une force et un moment à identifier associés aux ddl du nœud situé à mi-travée, associé au cas de mesure 8. Ces actions identifiées ont été représentées sur la figure 4.5. Il est clair que des oscillations parasites de fort niveau perturbent les résultats et de ce fait, le processus d'identification ne donne pas de bons résultats.

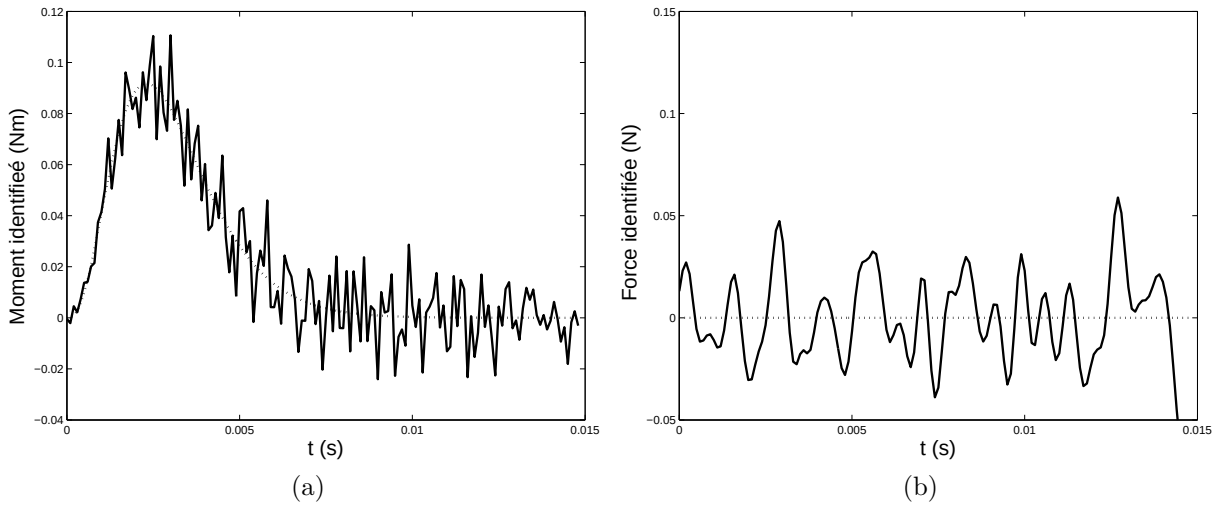


FIGURE 4.5: Actions identifiées selon (a) le ddl 5 (M_5) (b) le ddl 4 (F_4) pour le cas 8 des mesures.

Ceci est dû à une mauvaise estimation du paramètre de régularisation par la méthode GCV. Ainsi, en utilisant le paramètre donné par le critère de la courbe en L , les résultats sont excellents : l'écart entre actions réelle et identifiée est égal à $D_{25}^0(F_4) = 0.4$ et $D_{25}(M_5) = 2.7$ % respectivement. Ce fait a été observé systématiquement lorsque les résultats étaient médiocres : en général le critère GCV donne une excellente estimation du paramètre de régularisation sauf dans certains cas ; dans ces cas, le critère de la courbe en L donne un résultat assez bon, c'est-à-dire avec un écart inférieur à 15 % pour les ANN.

Le choix du paramètre de régularisation est beaucoup plus difficile lorsque deux actions doivent être identifiées plutôt qu'une seule. En effet, lorsqu'une seule action doit être identifiée les différents critères proposent une seule solution acceptable : la courbe en L présente généralement un seul coin (ou on a deux coins et l'autre coin a une courbure extrêmement grande et ne correspond pas à un paramètre de régularisation satisfaisant : ceci a déjà été mis en évidence au chapitre précédent), les fonctions GCV et quasi-optimalité ont, en général, un seul minimum (le critère de quasi-optimalité peut avoir jusqu'à deux minima). Ceci est rarement le cas lorsque plusieurs actions doivent être identifiées, comme le montre la figure 4.6a. Ainsi plusieurs coins apparaissent et il n'est pas évident a priori de choisir celui qui permet de retrouver l'action initiale : dans cet exemple les deux valeurs proposées par le critère sont dans les plages usuelles de paramètres de régularisation pour ce type de problème. En particulier le critère de courbure maximale

énoncé par Hansen [1] ne convient pas mais ces courbures sont du même ordre de grandeur. Il en est de même pour les deux autres critères (GCV et quasi-optimalité). Là encore, les figures 4.6b et 4.6c montrent que les fonctions GCV et quasi-optimalité présentent plusieurs minima locaux. Dans les deux cas on peut quasi-sûrement éliminer le premier minimum qui correspond à une valeur très faible du paramètre de régularisation : cela ne peut conduire qu'à une sous-régularisation de la solution. Ainsi le critère de quasi-optimalité proposent deux choix qui semblent également acceptables. En l'occurrence le GCV devient intéressant car il ne reste plus que le minimum 2. Toutefois, on peut voir sur la courbe de la figure 4.6b, qu'il y a une tangente quasi-horizontale autour de 1 : dans de très nombreux cas, la courbe GCV est similaire avec un troisième minimum local à peine marqué et qui n'est pas le minimum minimorum ; on est alors dans l'incertitude quant au choix du paramètre. Il est à noter que la fonction GCV est cohérente avec la courbe en L : le premier coin de la courbe en L correspond au second minimum alors que le second coin correspond au point où la fonction GCV a une pente quasiment nulle. Dans cet exemple, c'est la valeur correspondant au second minimum de la fonction GCV (donc au premier coin de la courbe en L) qui a naturellement été choisie : pourtant c'est là où la fonction GCV a une pente quasiment nulle (second coin de la courbe en L) qu'on a la valeur du paramètre de régularisation qui permet de retrouver les actions initiales ; la valeur choisie conduit à une sous-régularisation et donc aux oscillations parasites évoquées ci-dessus (cf figure 4.5).

Cette difficulté supplémentaire de choix du “bon” paramètre de régularisation vient de l'identification d'actions multiples : en général, le nombre de coins, de minima locaux, augmente avec le nombre d'actions à identifier. Aussi, une fois de plus, il est conseillé d'identifier le paramètre de régularisation avec les trois critères et d'analyser les courbes données par ces critères, afin de se faire une idée sur le meilleur choix. On peut une nouvelle fois souligner que le critère de quasi-optimalité conduit souvent à de mauvais résultats : en particulier, on n'a jamais trouvé un cas où le paramètre de régularisation qu'il indique donne des résultats supérieurs à ceux obtenus avec les paramètres donnés par les autres critères, dans le cadre de l'identification d'actions multiples. En revanche, une forte cohérence a été constatée entre les deux autres critères, courbe en L et GCV.

4.3.2.2 Sensibilité aux points de mesures

La figure 4.4 ne montre pas d'influence claire de la localisation ou de la nature (translation ou rotation) du ddl mesuré, du moins tant que deux ddl sont utilisés.

Le cas 9 mesure les translations des ddl 2, 4 et 6 : il s'avère que les résultats ne sont pas meilleurs que ceux obtenus dans le cas 5 où les translations 2 et 6 uniquement sont utilisées. On peut se demander si, dans ce cas particulier, la symétrie permet d'expliquer cette observation. L'examen du cas de charge 5 qui est un cas de chargement non symétrique, montre que la symétrie n'est pas forcément un point positif, puisque ce cas s'avère être bien reconstruit, quelles que soient les mesures effectuées. Là encore, le cas 9 des mesures n'améliore pas véritablement la qualité de la reconstruction. Cependant il faut souligner que, quelle que soit la paire de force considérée, le cas 9 présente une bonne qualité d'identification du chargement nul et du chargement non nul (écart inférieur à 10 %).

Toutefois, toutes les simulations montrent que le cas de mesures le plus adapté est le

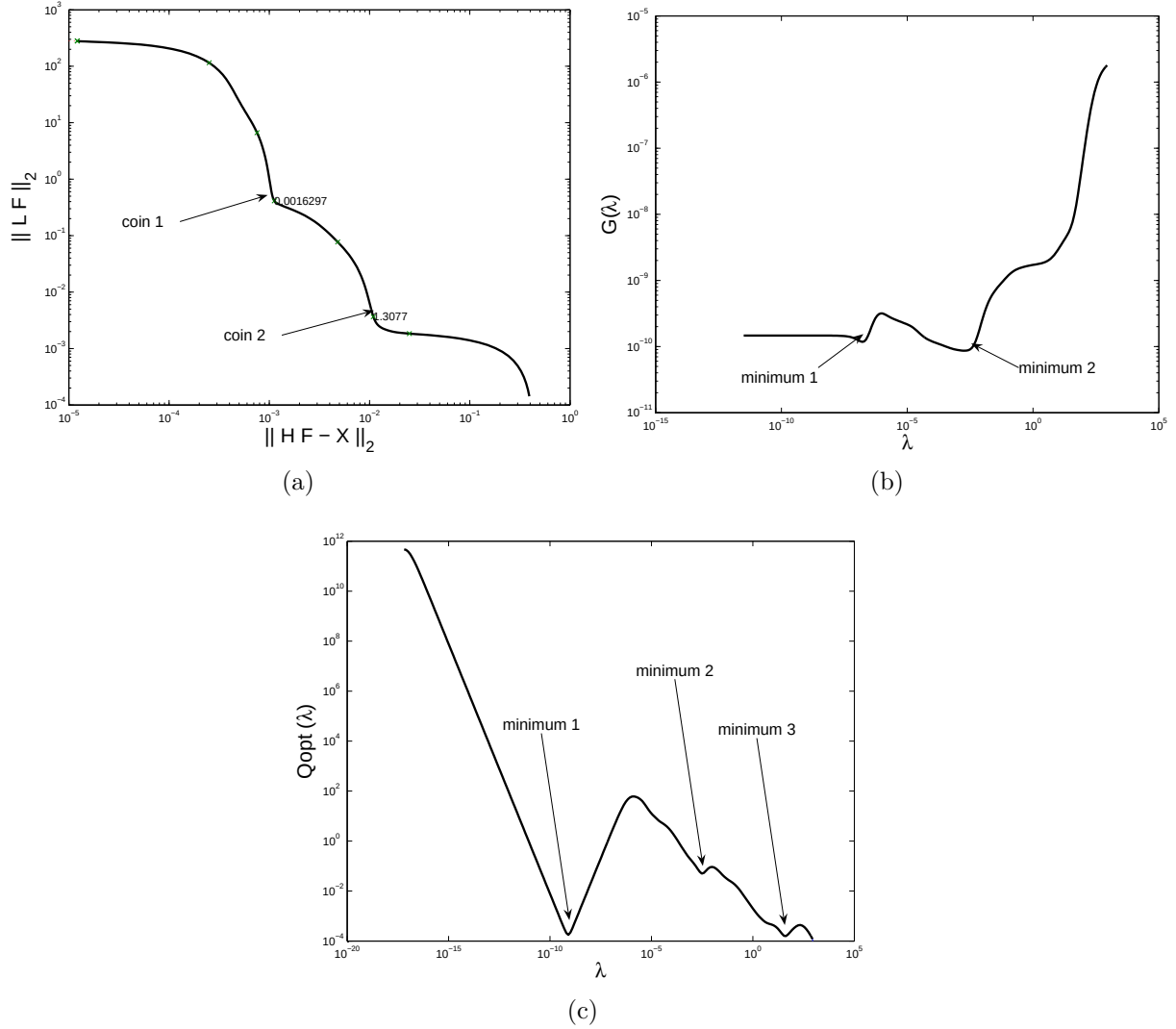


FIGURE 4.6: Critères de choix du paramètre de régularisation : (a) courbe en L , (b) GCV, (c) quasi-optimalité

cas 10, c'est-à-dire lorsque l'on mesure tous les ddl. A première vue ce résultat est attendu puisque c'est le cas où l'information est la plus abondante. Ceci peut également s'expliquer en examinant les valeurs singulières de la matrice de transfert, comme expliqué dans [66]. En effet, lorsqu'on utilise deux ou trois mesures, le problème inverse peut être de rang non maximal. C'est le cas lorsque les mesures 2 sont utilisées : la figure 4.7a montre un très grand saut entre la première valeur singulière généralisée et la suivante ; en outre la première valeur singulière généralisée est inférieure à la précision de la machine et c'est ce qui va engendrer une divergence des résultats, si aucune régularisation n'est effectuée. Au contraire lorsque tous les ddl sont utilisés (cas 10), le problème est toujours de rang maximal : non seulement la plus petite valeur singulière est très supérieure à la précision de l'ordinateur (elle vaut approximativement 10^{-3}), mais encore aucun saut dans la suite des valeurs singulières n'est observé, comme le montre la figure 4.7b. Le cas 10 n'est toutefois pas le seul cas où le rang soit maximal : en particulier le rang est toujours maximal si une mesure est effectuée selon chaque ddl associé à un chargement que l'on cherche à identifier : c'est la situation qu'on rencontre par exemple avec l'ensemble des

mesures 1 et la paire à identifier 1. Cependant, la plus petite valeur singulière associée au cas 10 est toujours plus grande que la plus petite valeur singulière obtenue dans tous les cas : ainsi, il présente le meilleur conditionnement possible. Dans ce cas, la régularisation n'est même pas forcément nécessaire : la solution donnée par les moindres carrés peut donner une identification satisfaisante du chargement.

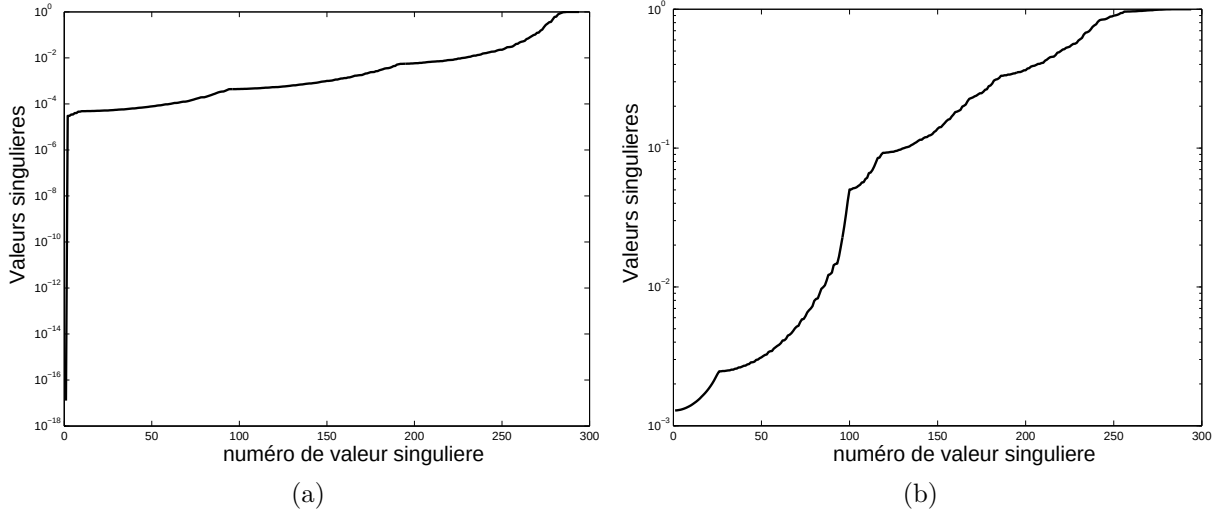


FIGURE 4.7: Valeurs singulières généralisées : (a) ensemble des mesures 1, (b) ensemble des mesures 10

4.4 Identification de plusieurs ANN

4.4.1 Identification de 2 forces non nulles

Deux forces sont appliquées le long des ddl 2 (F_2) et 4 (F_4). Elles sont identiques si ce n'est qu'un retard a été introduit dans la force F_2 , comme le montre la figure 4.8.

Les écarts ont été évalués avec les mêmes cas de mesures que précédemment. Les résultats sont représentés figure 4.9. Aucun ensemble de ddl mesurés n'est notablement meilleur que les autres. Il n'était pas vraiment attendu que les écarts soient très différents pour une force ou l'autre, cependant, si on considère les mesures 4 et 8, elles sont excellentes pour identifier F_2 (ces cas sont même plus adaptés que le cas 10, là où tous les ddl sont utilisés), alors que l'écart sur F_4 est 4 fois plus grand, tout en restant acceptable. Ceci est inexplicable. Notons que le cas 10 reste malgré tout le cas pour lequel les deux forces identifiées sont les plus proches des forces initiales : une fois de plus, la redondance est utile.

4.4.2 Reconstruction d'une pression

Une pression uniforme $p(t)$ est appliquée sur le troisième élément : la forme de la pression est toujours celle de la fonction représentée figure 4.2 ($p(t) = q(t)$). Compte-tenu que la pression est uniforme sur l'élément, on pourrait se ramener à identifier une seule fonction. Toutefois, l'idée ici est de reconstruire la pression telle que la représente un

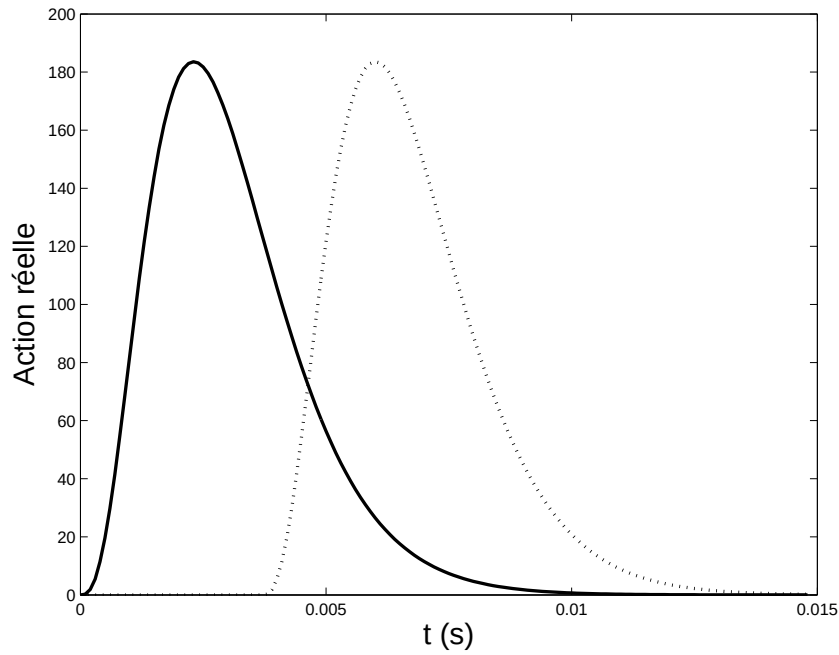


FIGURE 4.8: Forces appliquées selon les ddl 2 (ligne pointillée) et 4 (ligne continue)

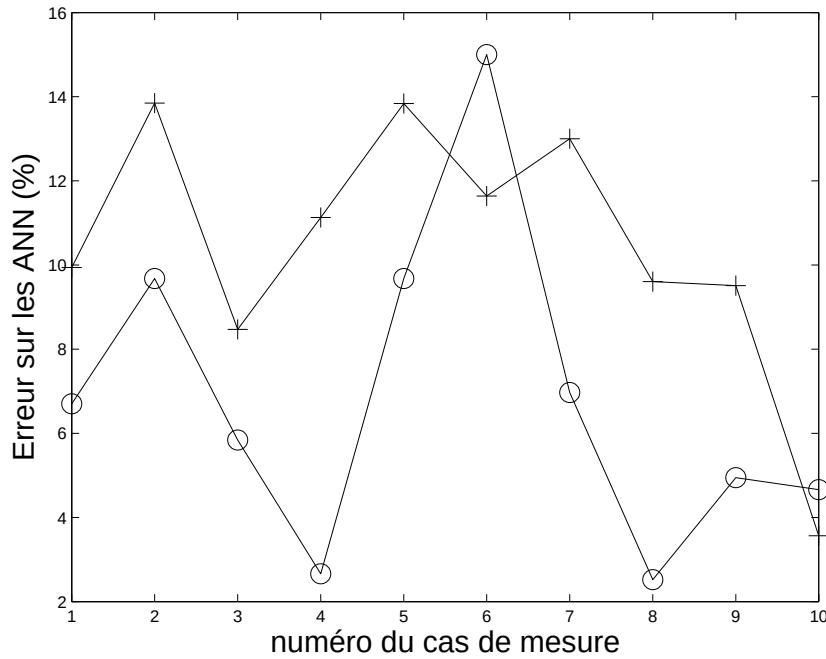


FIGURE 4.9: Ecart sur les forces identifiées pour les différents cas de mesures : F_2 : 'o' ; F_4 : '+'

modèle éléments finis, c'est à dire en projetant la pression sur les ddl du modèle éléments finis : on obtient donc quatre actions qui sont les forces $F_4 = F_6 = p L_e/2$ et les moments $M_5 = -M_7 = p L_e^2/12$, où L_e est la longueur de l'élément fini. On utilise ici le cas des mesures 10 (tous les ddl sont mesurés). Rappelons que la méthode de régularisation choisie nécessite au moins autant de signaux mesurés que d'actions à identifier, c'est-à-dire au moins 4 mesures, dans ce cas.

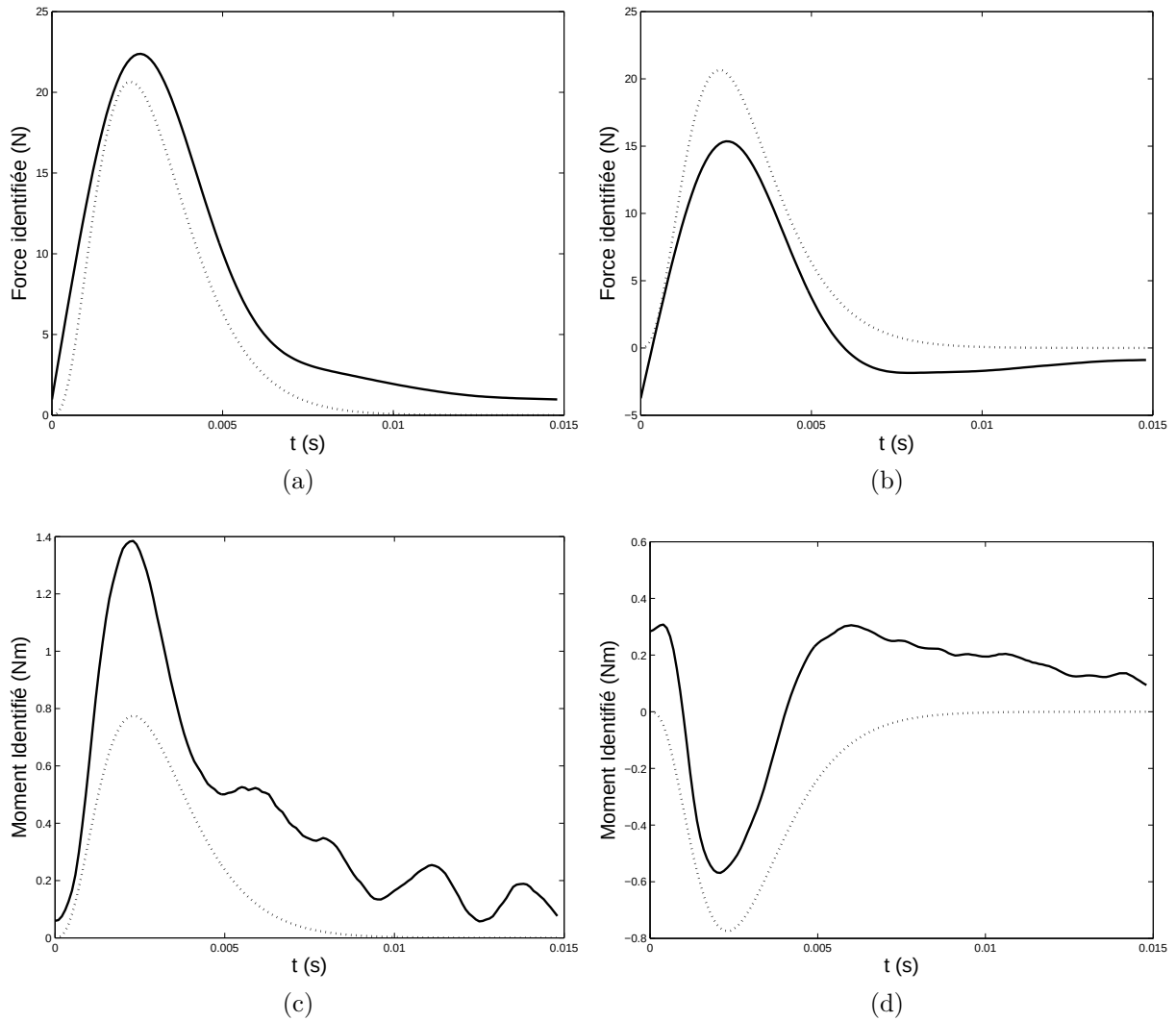


FIGURE 4.10: Actions identifiées : (a) F_4 (b) F_6 (c) M_5 (d) M_7

La figure 4.10 montre que si les forces identifiées sont acceptables tout en ayant un écart d'environ 30 %, les moments identifiés ne sont pas du tout satisfaisants puisqu'on a des écarts allant jusqu'à 90 %. Cependant il faut également être conscient que le travail produit par la pression se traduit essentiellement par le travail fourni par les forces : celui dû aux moments étant négligeable comme le montre la figure 4.11. En conséquence, cette mauvaise identification des moments n'a pas une incidence notable sur un dimensionnement qui serait fait à partir des actions identifiées.

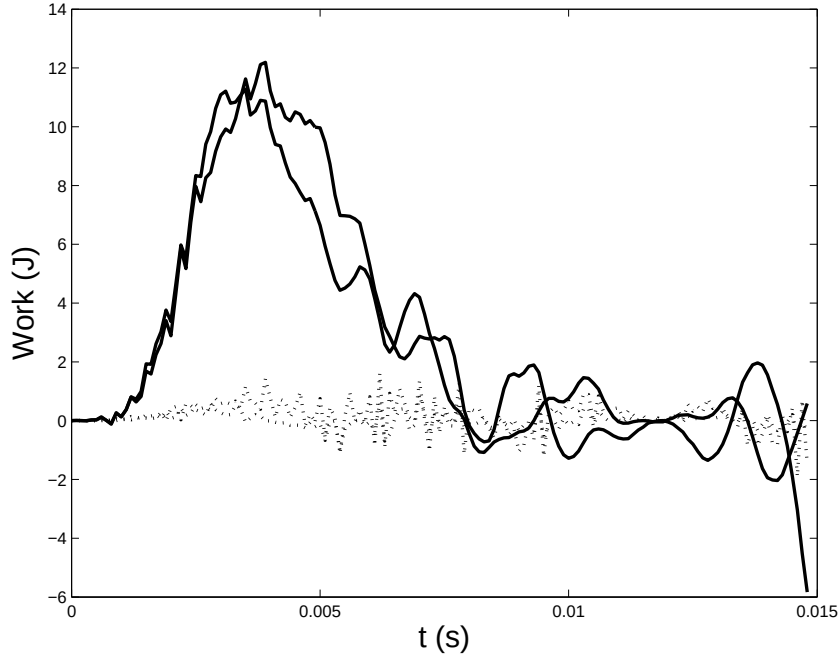


FIGURE 4.11: Travail fourni par les forces (lignes continues) et les moments (lignes pointillées)

De même il faut souligner que, dans cette configuration, la fonction GCV ne semble pas performante pour fournir un paramètre de régularisation satisfaisant, comme le montre la figure 4.12. En effet, le critère GCV est une fonction très plate sur une grande plage de valeurs du paramètre de régularisation et il se trouve que la meilleure solution n'est pas pour le minimum du GCV, mais pour une valeur du plateau qui se trouve également être un coin de la courbe en L ($\lambda = 4.9$).

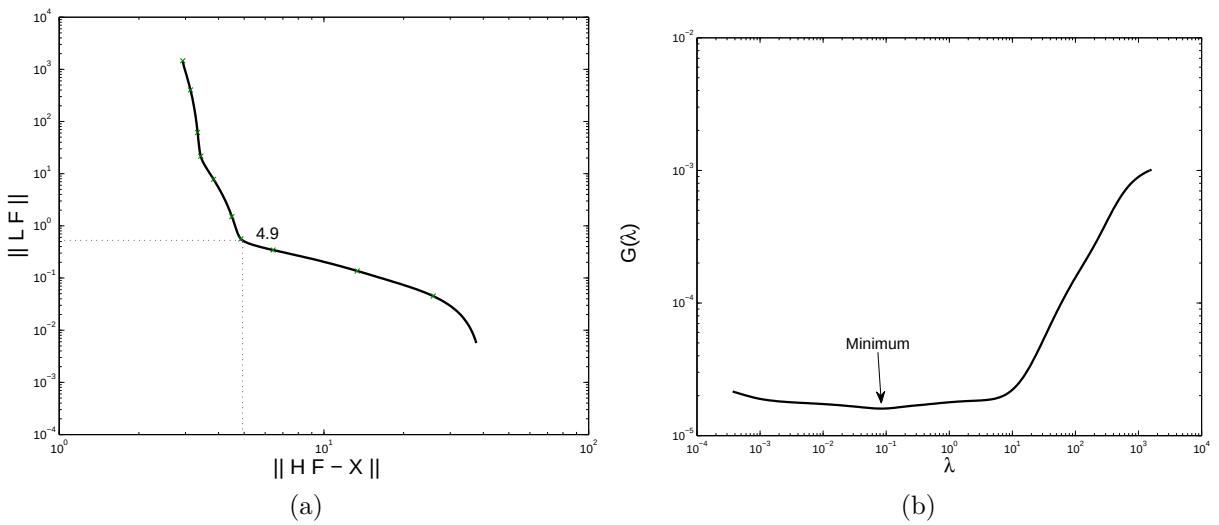


FIGURE 4.12: Critères donnant le paramètre de régularisation pour l'identification de la pression : (a) courbe en L , (b) GCV

Afin de tester l'influence du nombre d'informations, nous avons augmenté le nombre

d'éléments. En fait, le troisième élément est toujours l'élément chargé par la pression et on reconstruit toujours les forces F_4 et F_6 et les moments M_5 et M_7 mais on a de plus en plus de redondance en augmentant le nombre de points de mesures.

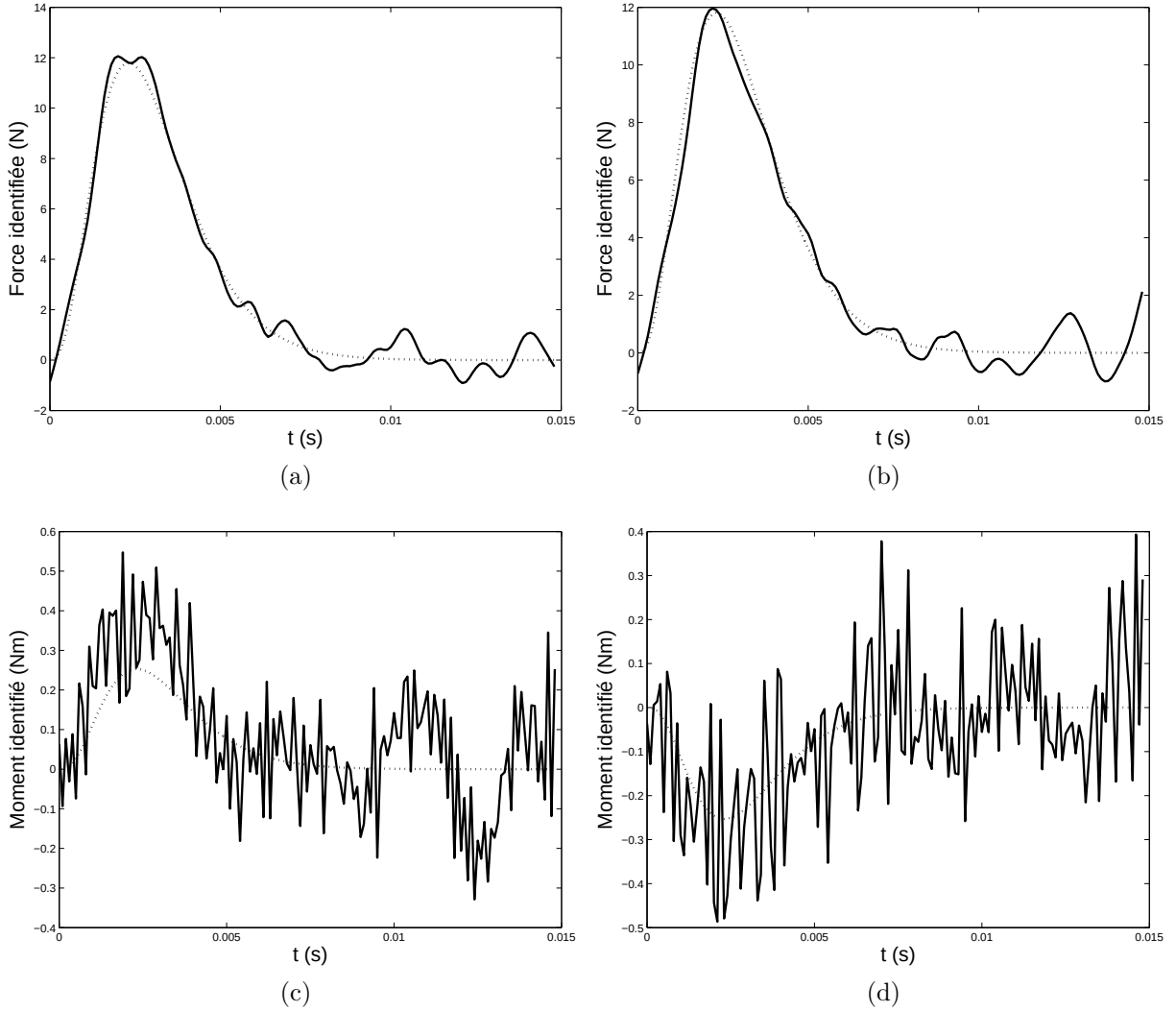


FIGURE 4.13: Actions identifiées ($\lambda = 0, 1$) : (a) F_4 (b) F_6 (c) M_5 (d) M_7

Considérons le cas avec 7 éléments. La figure 4.13 montre que les forces identifiées sont satisfaisantes avec un écart de l'ordre de 10 % mais que les moments sont mal identifiés puisque l'écart est d'environ 130 %. On voit donc une amélioration notable des forces identifiées mais une dégradation des moments. En outre, là encore il est intéressant de souligner que le critère GCV met peu en évidence une valeur du paramètre de régularisation, comme le montre la figure 4.14. En effet, il se trouve que la fonction est très plate autour de la valeur du minimum $\lambda = 0, 1$. En outre, après une légère remontée, elle s'aplatit à nouveau autour de $\lambda = 5$ sans toutefois présenter un autre minimum : ces deux valeurs de paramètre de régularisation correspondent par ailleurs aux deux coins de la courbe en L .

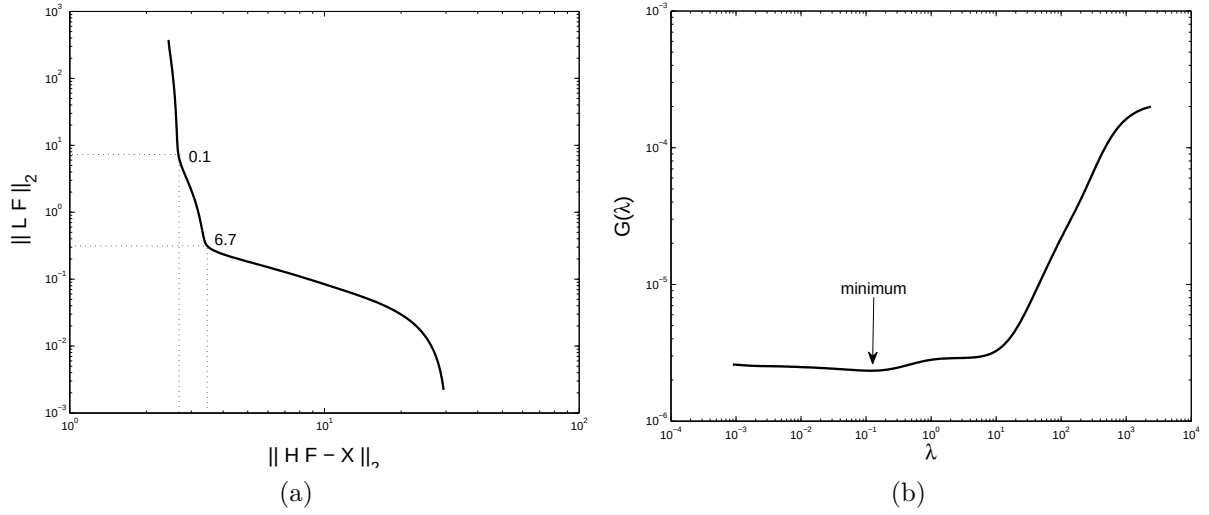


FIGURE 4.14: Détermination du paramètre de régularisation pour l'identification de la pression : (a) courbe en L , (b) GCV

Si alors on effectue la régularisation pour $\lambda = 6, 7$ qui correspond au second coin de la courbe en L , on obtient les résultats de la figure 4.15 : les erreurs sur les efforts sont légèrement moindres (autour de 9 %) et sont autour de 100 % pour les moments. L'incidence est faible pour les forces mais cela montre que le premier paramètre de régularisation choisi grâce à la courbe en L sous-régularise les moments : le second coin de la courbe en L offre une meilleure régularisation des moments. Cela montre une fois de plus que le choix du paramètre de régularisation est crucial, puisqu'il ne semble pas optimal pour régulariser simultanément des actions de nature différente.

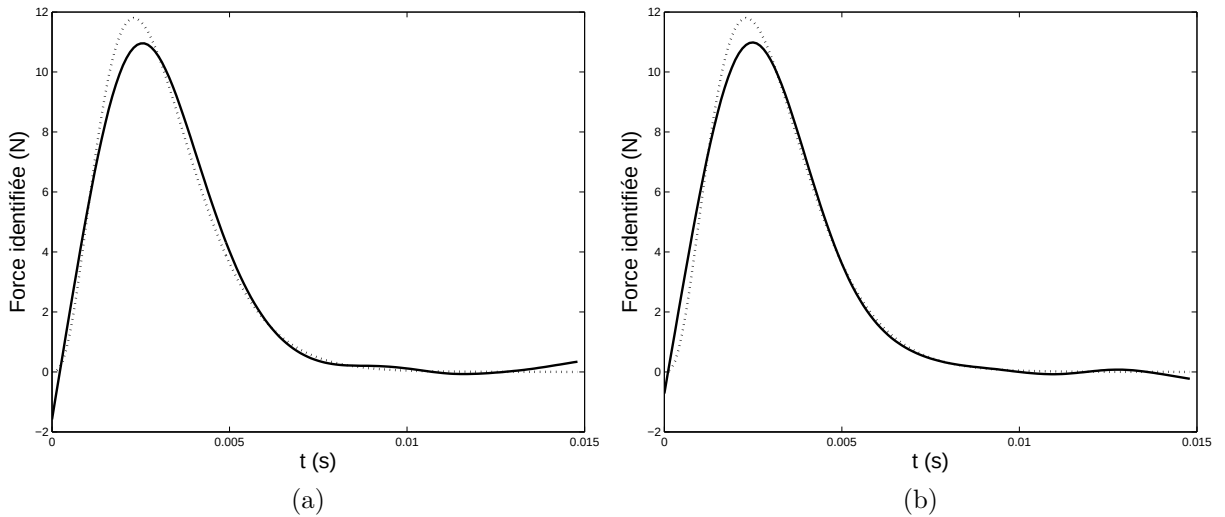
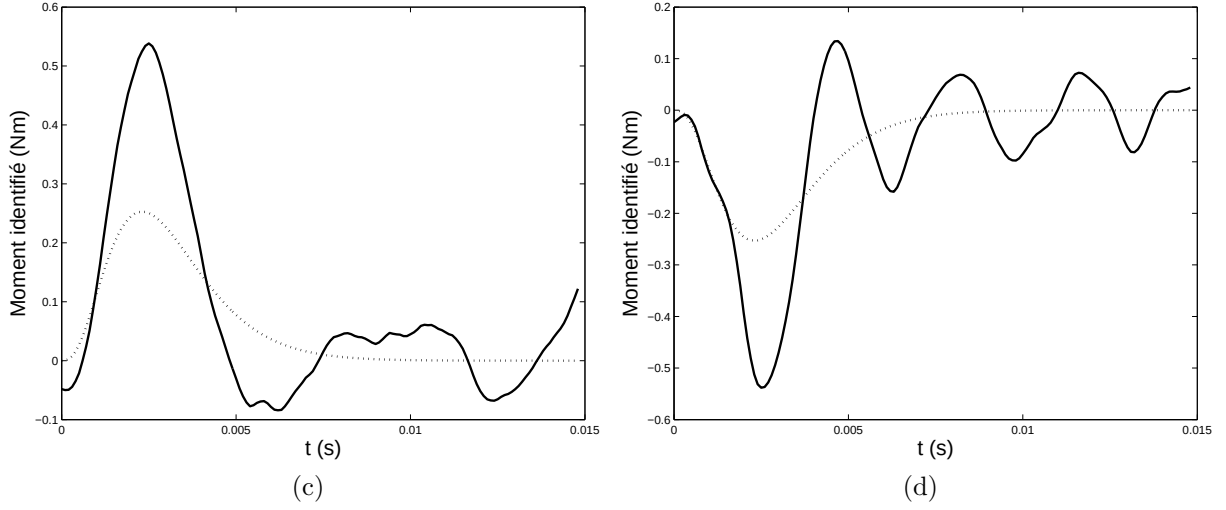
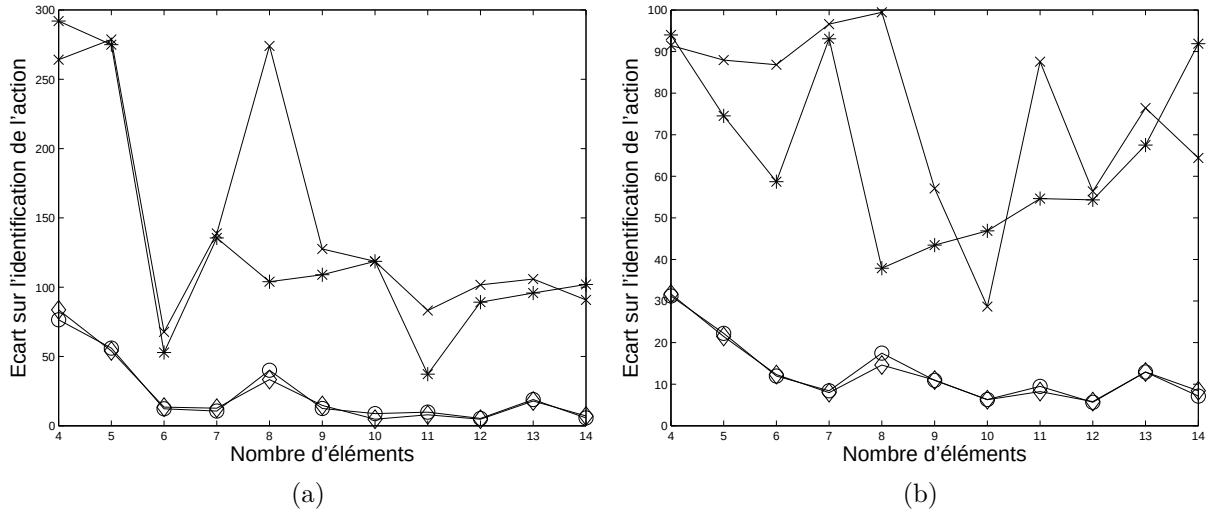


FIGURE 4.15: Actions identifiées ($\lambda = 6, 7$) : (a) F_4 (b) F_6


 FIGURE 4.15: Actions identifiées ($\lambda = 6, 7$) : (c) M_5 (d) M_7

La figure 4.16 montre qu'en augmentant le nombre de signaux mesurés on améliore l'identification des forces : cela avait déjà été remarqué auparavant. En revanche ceci ne semble pas être vrai pour les moments identifiés. Cette figure montre également que le critère GCV est, pour les raisons décrites précédemment, moins performant que le critère de la courbe en L pour identifier un paramètre de régularisation essentiellement pour les moments. D'une façon générale, quel que soit le nombre d'éléments finis, le paramètre identifié avec le critère GCV conduit à une solution sous-régularisée.


 FIGURE 4.16: Erreurs sur les actions identifiées en fonction du nombre d'éléments finis : (a) critère GCV (b) courbe en L ; forces : 'o' et '◇' ; moments : '*' et 'x'

Pour étudier l'influence du nombre d'information on a également comparé le cas avec 4 éléments et le cas avec 8 éléments, mais en faisant attention à ce que le même chargement soit appliqué dans les deux cas : la même pression est appliquée sur la même portion de poutre. Ainsi, à partir du cas à 4 éléments finis, on a divisé chacun des éléments en deux

mais en gardant les mêmes chargements. De ce fait, avec le cas à 8 éléments on dispose de deux fois plus d'information pour reconstruire les mêmes actions (F_4 , M_5 , F_6 et M_7 dans le cas à 4 éléments ; F_8 , M_9 , F_{12} et M_{13} dans le cas à 8 éléments) . La figure 4.17 montre qu'alors la qualité de reconstruction est améliorée non seulement sur les forces mais également sur les moments.

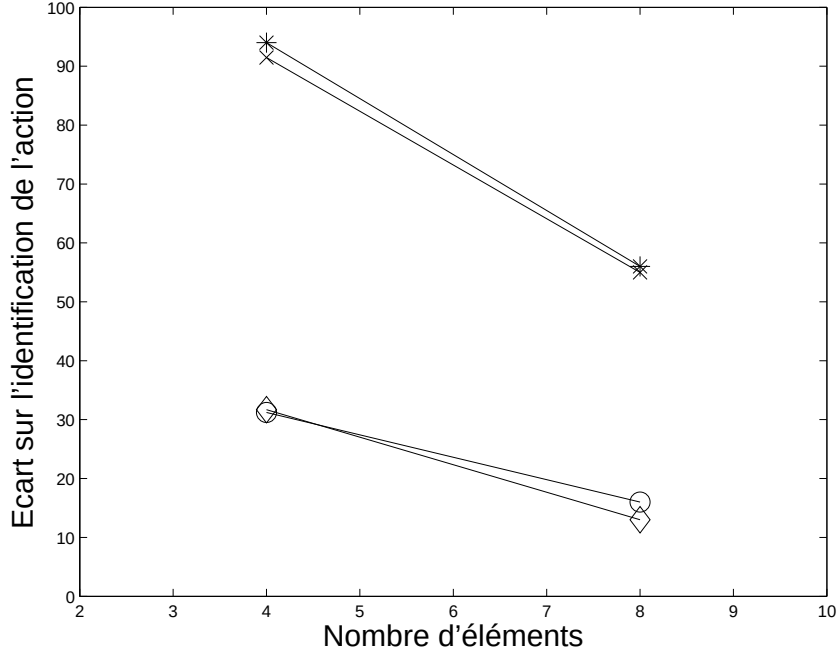


FIGURE 4.17: Erreurs sur les actions identifiées en fonction du nombre d'éléments finis : F_4/F_8 : 'o' ; F_6/F_{12} : '◇' ; M_5/M_9 : '*' ; M_7/M_{13} : 'x'

4.4.3 Sous-identification de la pression

Dans ce paragraphe, “sous-identification” voudra dire que, bien qu'on sache que l'on a certaines ANN, on considérera a priori quelles sont nulles et, en conséquence, on ne cherche pas à les identifier. On va étudier cette sous-identification dans le problème de l'identification d'une pression : l'idée consiste à n'identifier que les forces nodales produites par la pression et à considérer que les moments sont des actions nulles. Ceci se justifie par le faible niveau de travail produit sur la structure par les moments nodaux. Cela simplifie ainsi l'identification puisqu'on n'aura plus deux actions de nature différentes à identifier : plus précisément on n'aura plus à identifier les moments qui sont fortement sous-régularisés par l'utilisation des paramètres de régularisation déterminés par les critères usuels. En outre, ceci se rapproche d'une mise en œuvre pratique d'un dispositif de mesures : on mesure couramment un champ de déplacements mais pas un champ de rotations.

Ceci veut dire qu'on cherche donc à identifier les forces produites par la pression, au niveau des nœuds d'un réseau, à partir des mesures des translations des nœuds de ce réseau.

Les résultats sont assez satisfaisants puisqu'on obtient un écart de 14 % (resp. 24 %) sur F_4 (resp. F_6). Il est important de souligner que si on applique un problème direct à partir des actions identifiées, les réponses recalculées sont très proches des réponses

calculées avec les actions réelles. ceci a été observé non seulement pour les réponses en translation, mais également pour les réponses en rotation, alors que les moments ont été négligés. Ceci montre bien que la sous-identification est tout à fait adaptée au cas du problème de l'identification d'une pression. Il est intéressant de voir que les oscillations qui sont présentes sur les actions identifiées, sont filtrées par la structure lorsque ces actions sont réappliquées. Aussi, d'un point de vue du dimensionnement de structures, ces actions identifiées sont tout à fait satisfaisantes : en particulier la figure 4.18 montre que les travaux des actions identifiées sont très proches des travaux des actions réelles.

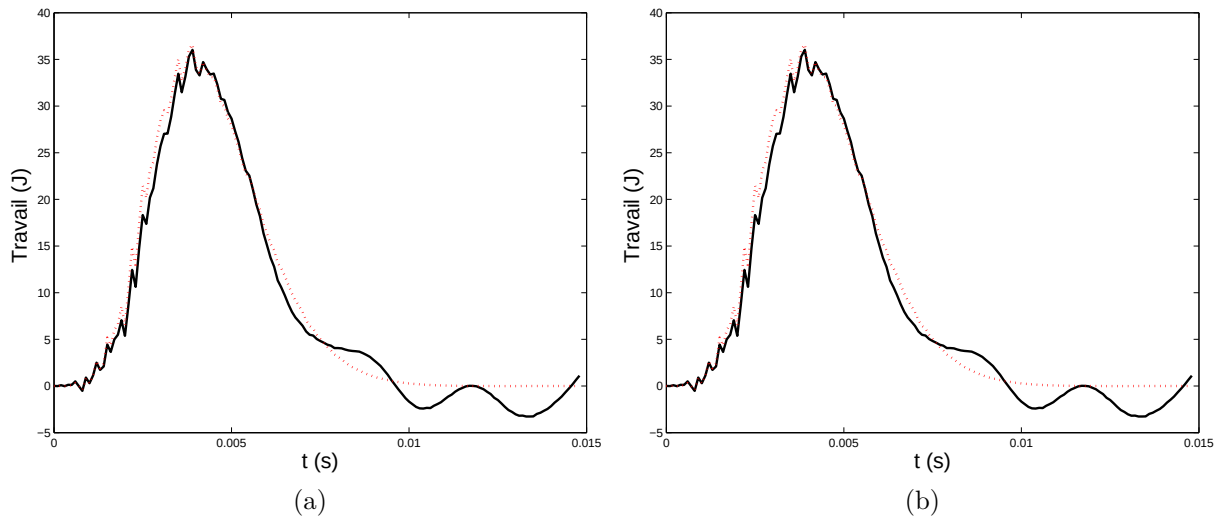


FIGURE 4.18: Travail dû aux actions réelles (ligne pointillées) et travail dû aux actions identifiées (ligne continue) (a) pour F_4 et (b) F_6

4.4.4 Application

La plupart des travaux sur l'identification de chargement repose sur la connaissance de la zone où les actions sont appliquées : cela nécessite parfois un travail préalable pour estimer cette zone.

Savoir identifier des actions identiquement nulles et des actions non nulles rend inutile cette nécessité de localiser la zone d'application des actions : en fait, la localisation se fait automatiquement et naturellement par détection des nœuds où les actions sont nulles.

On a divisé la poutre en 7 éléments et on a appliqué une pression sur le deuxième et le cinquième élément. En conséquence, par projection des pressions, on a appliqué des forces selon les translations 2, 4, 8 et 10 et on applique des moments selon les rotations 3, 5, 9 et 11. Un problème direct est alors effectué pour déterminer les réponses selon tous les ddl. Toutefois, comme expliqué au précédent paragraphe, on effectuera une sous-identification : les forces sont identifiées mais les moments sont supposés être identiquement nuls.

La pression appliquée sur le deuxième élément est celle qui a été utilisée dans les deux précédents paragraphes (voir figure 4.19d), alors que la pression appliquée sur le cinquième élément est appliquée avec un certain retard et est de forme sinusoïdale, comme indiqué figure 4.19e.

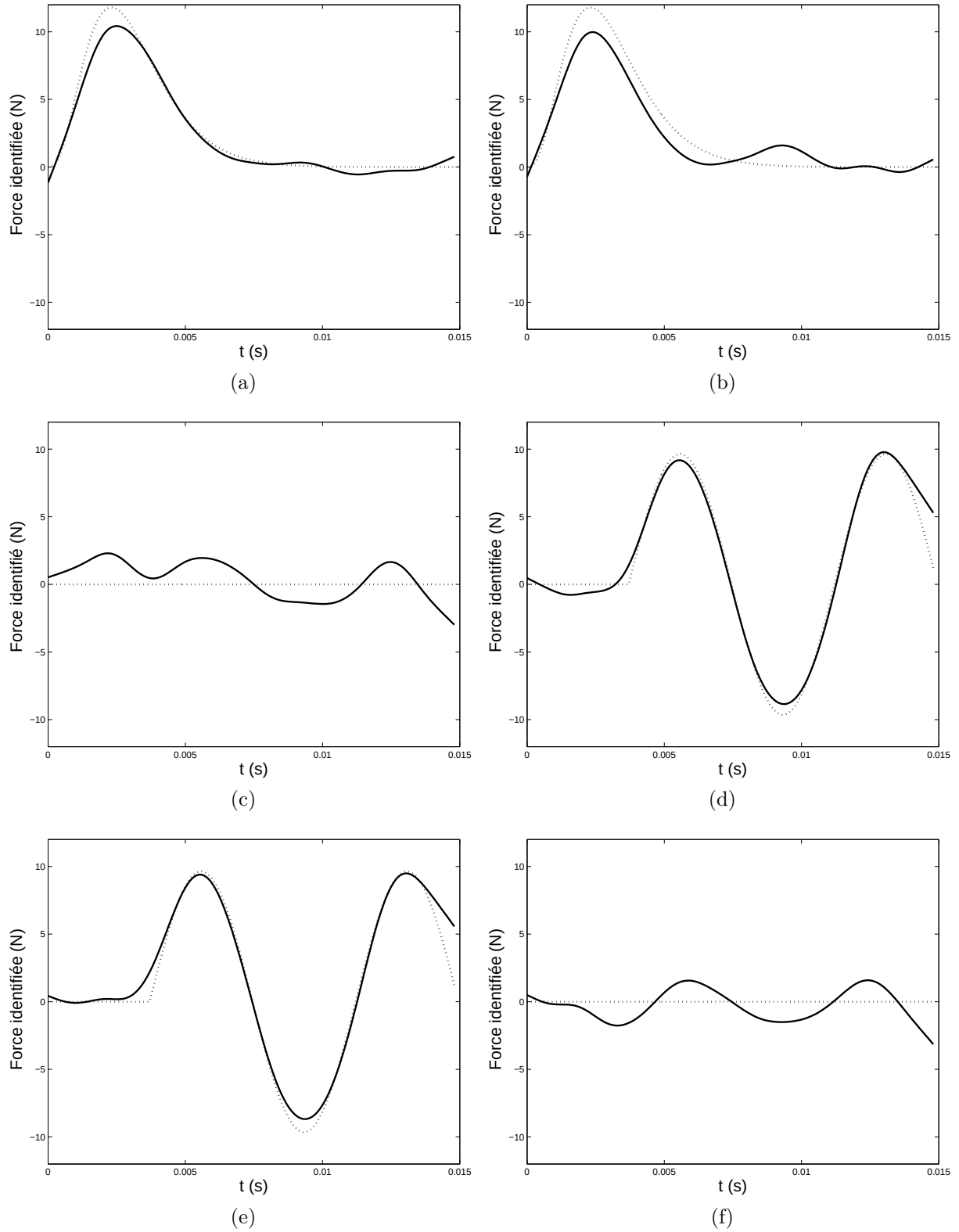


FIGURE 4.19: Force réelle (ligne pointillée) et force identifiée (ligne continue) (a) F_2 , (b) F_4 , (c) F_6 , (d) F_8 , (e) F_{10} , (f) F_{12}

Les résultats sont illustrés par la figure 4.19. Ainsi, que le laissaient entendre les résultats des paragraphes précédents, l'identification des ANN est tout à fait satisfaisante :

l'écart entre les forces réelles et identifiées est d'environ 15 %. En revanche, l'identification des forces qui sont censées être identiquement nulles fait apparaître des oscillations parasites qui sont d'un niveau beaucoup plus élevé que ce qu'on a observé jusqu'à présent. De ce fait, il n'est pas possible de savoir si F_6 et F_{12} sont ou non des actions identiquement nulles. De ce fait, à partir des résultats obtenus, il n'est pas possible de savoir que seuls les deuxième et cinquième éléments sont chargés.

On a alors essayé d'identifier toutes les actions (moments et forces) : les résultats sur les forces non nulles étaient quasiment inchangés et cela n'a amené aucune amélioration.

Aussi, finalement, il n'est pas vraiment possible d'identifier clairement la zone de chargement. Toutefois, il est important de souligner une fois de plus que les réponses reconstruites avec les chargement identifiés sont très proches des réponses réelles de la structure.

4.5 Conclusions

Ce chapitre s'est tourné vers l'identification d'actions multiples et a été appliqué à l'identification d'actions multiples sur une poutre en flexion : les actions à identifier étaient donc de différentes natures puisqu'on a été amené à identifier simultanément des forces et des moments.

On a abordé ce problème dans le cadre de la régularisation de Tikhonov associé au critère GCV pour déterminer le paramètre de régularisation.

Dans un premier temps on a identifié deux actions : l'une était non nulle alors que l'autre était identiquement nulle. Cela a permis de mettre en évidence ce qu'on peut attendre de l'identification d'une force "nulle". Les résultats ont été satisfaisants. En outre il est apparu que la qualité de l'identification ne semble pas être corrélée aux ddl mesurés. En revanche l'augmentation du nombre de mesures améliore l'identification : en particulier, l'identification s'avère excellente quand on utilise toutes les réponses disponibles.

Ensuite on a identifié plusieurs actions non nulles. La qualité de l'identification a été liée à la nature des signaux mesurés : d'une façon générale les moments sont mal identifiés car le paramètre de régularisation donné par le critère GCV sous-régularise fortement ces moments. Le critère de la courbe en L semble mieux approprié pour régulariser simultanément les forces et les moments. En fait, l'identification d'actions multiples est rendue délicate par la forme que prennent les différents critères de choix du paramètre de régularisation : de même que la courbe en L peut présenter de nombreux coins, les fonctions GCV peuvent présenter de nombreux minima locaux. Il se trouve par ailleurs que ce n'est pas le paramètre associé à un coin de courbure maximale de la courbe en L ou au plus petit des minima de la fonction GCV qui fournit le paramètre de régularisation optimal. Il a également été remarqué qu'un paramètre de régularisation satisfaisant ne se trouve pas nécessairement à un minimum local du GCV mais au niveau d'un point d'inflexion : en général, un point d'inflexion de la fonction GCV correspond à un coin de la courbe en L . En conséquence il est important de tester simultanément les différents critères.

Pour simplifier le problème d'identification des chargements, on a effectué une sous-identification : systématiquement, on considère que les moments sont nuls ce qui, si une pression est appliquée, n'est évidemment pas exacte. Les résultats ont montré que cette sous-identification est satisfaisante.

Enfin, on a essayé de tester dans une configuration de chargement assez compliquée,

s'il est possible de retrouver la zone de chargement à partir de l'identification de toutes les forces du maillage. Malheureusement il s'est avéré qu'il n'est pas toujours facile de savoir si une force est réellement non nulle ou si elle est en fait une AIN.

Une fois de plus toute la difficulté se concentre sur l'identification du “bon ” paramètre de régularisation. Il semblerait intéressant de prospecter des méthodes permettant d'identifier autant de paramètre de régularisation que de nature d'actions différentes. En effet, il semble que le niveau de régularisation ne doit pas être le même si on identifie une force ou si on identifie un moment : aussi, inclure simultanément une fonctionnelle régularisante des forces et une fonctionnelle régularisante des moments pourrait permettre d'adapter le niveau de régularisation.

Chapitre 5

Vers les structures à comportement non-linéaire

5.1 Introduction

Bien qu'un certain nombre d'approches différentes aient été développées pour résoudre le problème d'identification d'un chargement, la quasi-totalité de ces travaux ont été limités à des problèmes linéaires. Cependant, même si dans de nombreuses applications industrielles on cherche à maintenir un comportement linéaire des structures, en réalité, les non-linéarités sont inévitables : ce peut être dû à des non-linéarités géométriques ou encore à de la plastification ou de l'endommagement produit par et pendant le chargement.

L'article de Jankowski [67] est le seul cas où une identification d'une structure élastoplastique a été réalisée. Toutefois cette méthode est basée sur la méthode des distortions virtuelles (VDM) qui est adaptée aux structures à barres (treillis), ce qui est donc restrictif: des travaux sont menés actuellement pour étendre la VDM aux poutres.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de voir les limites de la reconstruction "linéaire" d'un chargement : on va supposer que le comportement reste élastique durant le chargement, alors qu'en réalité la structure a un comportement qui évolue et devient non-linéaire. Pour ce faire nous réalisons des essais numériques avec un logiciel commercial qui va nous permettre de simuler une structure plastifiée. Puis nous réalisons l'identification "linéaire" via différentes mesures de chargement afin d'évaluer jusqu'à quel niveau de plastification, la reconstruction "élastique" donne des résultats satisfaisants. Toutefois, l'utilisation d'un logiciel de calcul dédié aux problèmes de dynamique rapide, va nous amener à utiliser la méthode du double chargement afin de ne pas avoir à identifier préalablement une fonction de transfert. Cette méthode sera donc présentée préalablement.

5.2 Problématique

On s'intéresse donc à des structures ayant subi une plastification ou un endommagement lors du chargement. On essaye de voir s'il est possible de reconstruire le chargement. Pour ce faire, Il faut donc se poser la question de ce qui doit être connu avant d'aborder ce problème :

1. Les résultats d'un premier essai instrumenté réalisé dans le domaine élastique ?

2. Faut-il prévoir des essais instrumentés préalables dans le domaine post-élastique ?
3. La loi de comportement non-linéaire du matériau doit-elle être identifiée ?

La deuxième question est très importante. Dans le cas d'une réponse positive, ce ne peut être fait que par un logiciel, car on ne souhaite a priori pas endommager ou plastifier la structure étudiée. L'utilisation d'un code de calcul permet de faire des calculs non-linéaires et de réduire considérablement les essais réels. Des logiciels commerciaux comme Ansys, Nastran, Ls-Dyna permettent de réaliser de tels calculs. Nous avons choisi d'utiliser Ls-dyna pour réaliser nos calculs : il permet de simuler des comportements physiques non-linéaires en dynamique rapide à l'aide de méthodes numériques explicites. En revanche il n'est pas adapté à la détermination des fonctions de transfert, aussi nous allons utiliser la méthode du double chargement qui est présentée au paragraphe suivant..

5.2.1 Méthode du double chargement

Si une structure a un comportement linéaire, on a vu que la relation entre les mesures et le chargement est entièrement définie par l'intermédiaire des fonctions de transfert. Si l'on sort du domaine élastique cette relation via les fonctions de transfert n'est plus valable. Toutefois, on va considérer dans ce chapitre que la relation de convolution écrite jusqu'à présent est toujours valable, même si on sort du domaine linéaire élastique. Toutefois, pour tenir compte d'une certaine façon de l'évolution de la fonction de transfert, celle-ci ne sera pas identifiée directement : de ce fait, on ne l'utilisera pas directement dans ce chapitre pour reconstruire le chargement. Pour ce faire on utilisera la méthode du double chargement.

Cette méthode consiste à mettre en œuvre dans un premier temps un essai instrumenté : une mesure de la force F_{1j} est effectuée en x_j et une mesure de la réponse s_{1i} est effectuée en x_i .

On considère que l'on reste dans le domaine élastique et l'équation reliant la mesure et le chargement est donc :

$$s_{1i}(t) = H_{ij} * F_{1j} \quad (5.1)$$

La structure est soumise alors à un autre chargement, inconnu, F_{2j} au même endroit. On mesure la réponse s_{2i} . On garde l'hypothèse a priori de linéarité et on a donc la relation suivante :

$$s_{2i}(t) = H_{ij} * F_{2j} \quad (5.2)$$

En post-convoluant les deux membres de l'équation 5.2 et en utilisant la commutativité de la convolution, on en déduit la relation suivante :

$$s_{2i} * F_{1j} = s_{1i} * F_{2j} \quad (5.3)$$

Par analogie avec les chapitres précédents, dans l'équation 5.3, s_{1i} joue le rôle de la matrice de transfert H_{ij} et $s_{2i} * F_{1j}$ celui de la mesure connue s_i : ainsi grâce à l'équation 5.3, la connaissance de la fonction de transfert est remplacée par celle des données (chargement et réponse) d'un premier essai instrumenté.

Nous appliquons dans ce chapitre la méthode du double chargement. Pour vérifier sa validité, on va la tester dans un premier temps sur la même poutre doublement appuyée

qui a déjà été étudiée dans les chapitres précédents. On applique une charge ponctuelle sur la poutre (voir figure 5.1) ; on reprend les caractéristiques de la poutre du paragraphe 3.1 de chapitre 3. La poutre, représentée figure 5.2, est discrétisée en 9 éléments et 18 ddl.

Les forces sont imposées au nœud 6. Elles ont été représentées figure 5.3a et elles ont pour expression :

$$F_1(t) = f_{01} t^2 \exp(-\gamma_1 t) \quad (5.4)$$

$$F_2(t) = f_{02} t^3 \exp(-\gamma_2 t) \quad (5.5)$$

où : $f_{01} = 5 \times 10^7 \text{ N s}^{-2}$, $f_{02} = 7 \times 10^8 \text{ N s}^{-3}$, $\gamma_1 = 350 \text{ s}^{-1}$, $\gamma_2 = 230 \text{ s}^{-1}$.

La force F_2 est inconnue et doit être identifiée. La force F_1 est connue et la réponse (déplacement) s_1 à ce chargement est mesuré au nœud 5.

À partir du déplacement calculé par la méthode des éléments finis au nœud 5 (figure 5.3b), on a identifié la force $F_2(t)$ par la méthode du double chargement : le résultat a été tracé figure 5.4. Pour cette simulation on a fait attention à rester dans le domaine élastique : les résultats obtenus sont tout à fait satisfaisants, ce qui valide la méthode du double chargement.

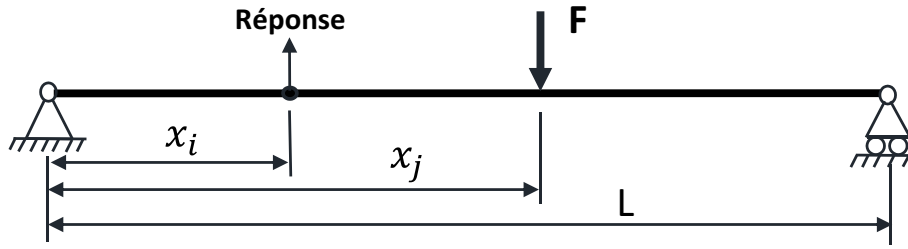


Figure 5.1: Poutre sur deux appuis soumise à une force ponctuelle

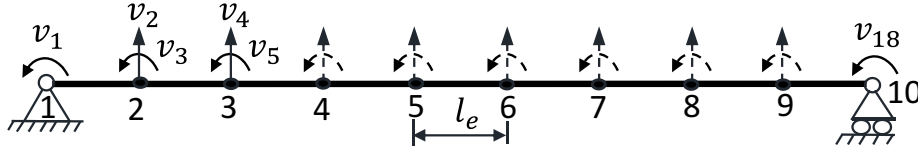


Figure 5.2: Modélisation de la poutre en 9 éléments

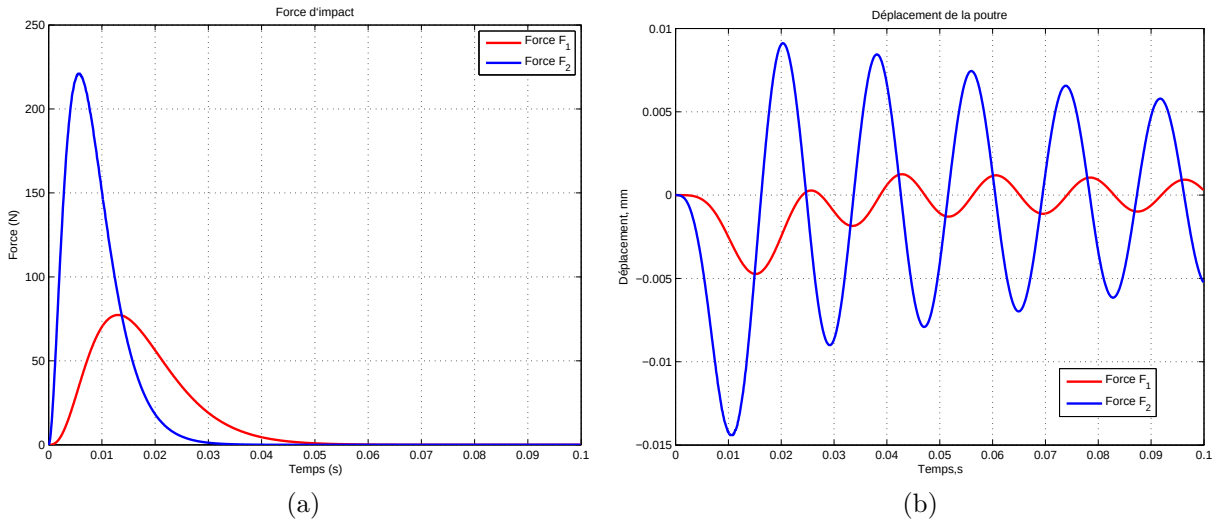


FIGURE 5.3: Double chargement : (a) forces imposées, (b) déplacements de la poutre au nœud 5

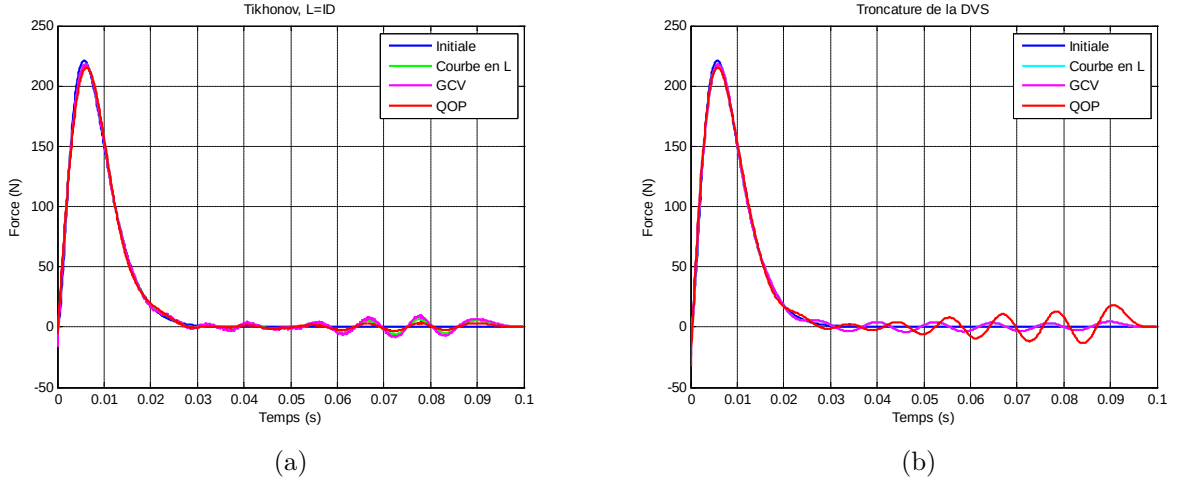


Figure 5.4: Force reconstruite à partir du déplacement : (a) par la méthode de Tikhonov, (b) par la troncature de la SVD

Nous allons ensuite appliquer cette méthode pour la reconstruction dans le domaine plastique. On va surtout voir à partir de quand il n'est plus possible de l'utiliser pour reconstruire de façon satisfaisante le chargement.

5.3 Plastification et reconstruction “linéaire”

Dans un premier temps nous allons appliquer la méthode du double chargement pour reconstruire le chargement dans le domaine élastique lors de simulations effectuées avec ls-dyna. La poutre est discrétisée en 9 éléments qui sont des éléments de type poutre de Hughes-Liu. Cet élément est basé sur une dégénérescence d'un élément volumique à 8 nœuds (fonction d'interpolation linéaire par rapport à chaque variable) et est associé à une loi de comportement élasto-plastique. Ses caractéristiques sont données dans le tableau 5.1.

Les forces sont appliquées au nœud 6 et les réponses utilisées dans les différentes simulations sont mesurées aux nœuds 2 et 5.

largeur	hauteur	longueur	Module de Young	limite élastique	Module tangent
2 cm	2 cm	90 cm	70 GPa	125 MPa	118 MPa

Table 5.1: Caractéristiques de la poutre étudiée

5.3.1 Forces imposées

Nous avons chargé la poutre avec la paire de forces représentées figure 5.5 et données par les expressions ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 1. \quad & F_1(t) = f_1 t^3 \exp(-\gamma_1 t) \\
 2. \quad & F_2(t) = \begin{cases} f_2 \sin(\omega t) & \text{si } t \leq \frac{\pi}{\omega} \\ 0 & \text{si } t > \frac{\pi}{\omega} \end{cases}
 \end{aligned}$$

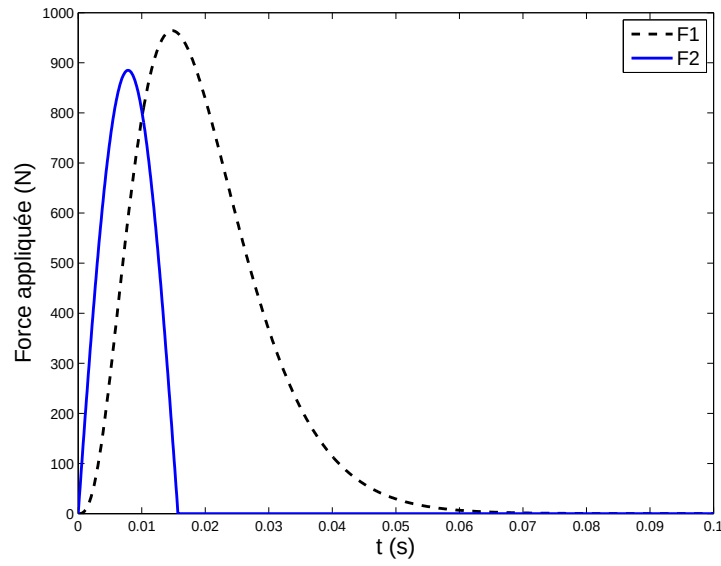


Figure 5.5: Forces imposées

5.3.2 Reconstruction jusqu'à la limite élastique

Lorsque la structure est soumise à chacune des forces imposées $F_1(t)$ et $F_2(t)$ avec le jeu de paramètres donné dans le tableau 5.2, le comportement de la structure reste élastique. En fait, f_1 et f_2 ont été choisis de sorte que la contrainte maximale dans la structure atteigne la limite d'élasticité du matériau : en conséquence, si on augmente f_1 ou f_2 , même légèrement, la structure va localement se plastifier. Dans la suite, ces forces associées au jeu de paramètres du tableau 5.2 seront notées F_1^* et F_2^* .

f_1 (N s ⁻³)	γ_1 (s ⁻¹)	f_2 (N)	ω (rad s ⁻¹)
5,98 10 ⁹	203	885	200

Table 5.2: Paramètres des forces imposées

La force $F_2^*(t)$ est identifiée à l'aide de la réponse en déplacement et du premier essai réalisé avec $F_1^*(t)$: le résultat est représenté figure 5.6. Les résultats sont tout à fait satisfaisants, comme le montre également le tableau 5.3 où les erreurs d'identification résultant de différentes méthodes et critères sont rassemblées.

Méthode	Critère	Erreur relative (%)
	Courbe en L	7,75
Tikhonov	GCV	8,13
	QOP	7,39
	Courbe en L	7,02
Troncature	GCV	7,68
	QOP	7,75

Table 5.3: Erreurs relatives de reconstruction pour la méthode de Tikhonov et la méthode de la troncature de la SVD

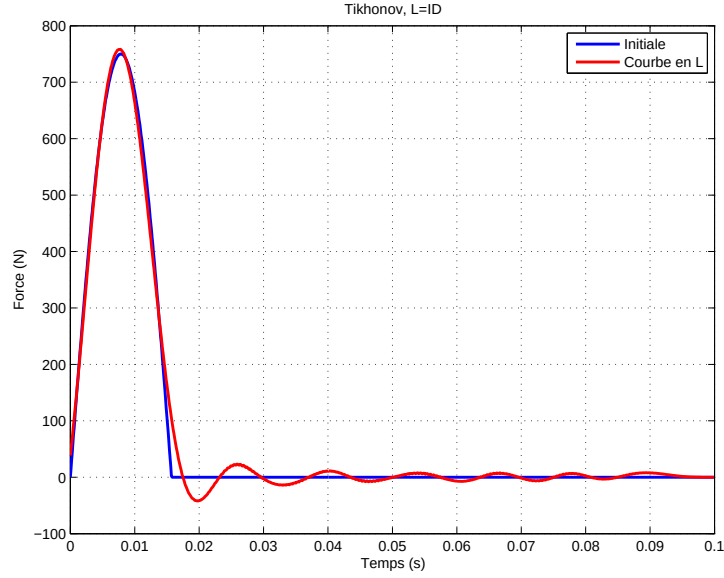


Figure 5.6: Force F_2 reconstruite à l'aide de la réponse en déplacement par la méthode de Tikhonov, $L=ID$

5.3.3 Reconstruction avec plastification localisée

5.3.3.1 Reconstruction avec $F_1^*(t)$

Nous allons augmenter le niveau de la force maximale de façon à plastifier la structure et nous allons essayer de reconstruire la force F_2 qui provoque de la plastification dans la poutre. Ainsi la force F_2 est définie par :

$$F_2 = \alpha F_2^* \quad (5.6)$$

où α caractérise l'incursion dans le domaine plastique. Les valeurs maximales de la force $F_2(t)$ et les valeurs de α associées sont listées dans le tableau 5.4. Notons que lorsque la force $F_2(t)$ est appliquée sur le nœud 6, l'élément 5 de la poutre subit une déformation plastique : les autres éléments restent dans le domaine élastique.

i	0	1	2	3
α_i	1	1,05	1,1	1,2
F_{2max} (N)	885	929,3	973,5	1062

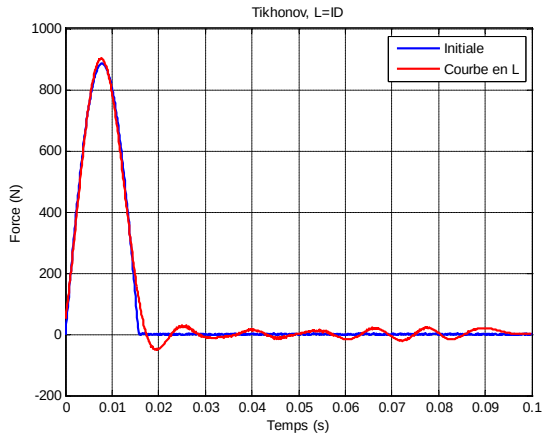
Table 5.4: Valeur maximale de la force $F_2(t)$ - α

Nous avons réalisé la reconstruction de la force $F_2(t)$ pour les trois valeurs de $\alpha > 0$ du tableau 5.4 à partir du déplacement mesuré au nœud 2 et au nœud 5.

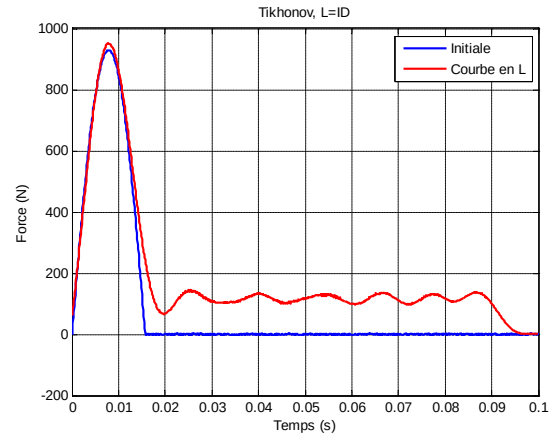
Les figures 5.7 et 5.8 montrent que, lorsque α augmente de plus en plus, la force est de plus en plus mal identifiée. On notera toutefois que le maximum de la force et la durée globale du signal de force sont bien identifiés. En revanche, la plastification et les déplacements résiduels associés impliquent que le niveau de la force reconstruite après le pic ne retourne pas à zéro : tout se passe comme si une force statique imposait le niveau résiduel observé après plastification. Ces résultats sont donc cohérents. On notera que la

qualité d'identification n'est pas améliorée si on se place au nœud 2, même si en ce nœud, la poutre est toujours dans le domaine linéaire élastique : ceci vient du déplacement résiduel qui est également mesuré en ce nœud. La figure 5.9 met en évidence l'écart entre la reconstruction entre les nœuds 2 et 5 : même si l'erreur de reconstruction entre ces 2 nœuds augmente avec α , il n'en demeure pas moins que les résultats ne sont pas satisfaisants dans les deux cas.

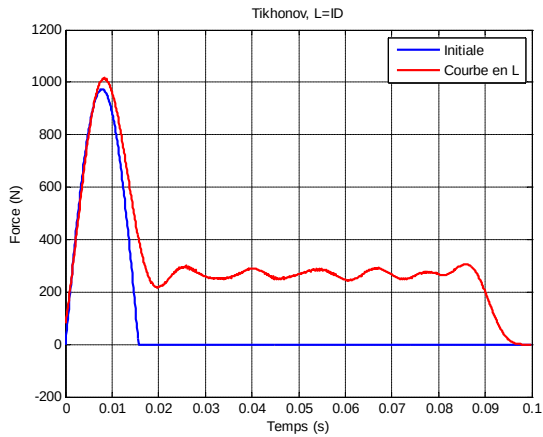
Ces résultats permettent cependant de faire de l'auscultation de structure. En effet, une force reconstruite conduisant à identifier une force statique en fin de partie dynamique, est la signature d'un déplacement résiduel donc d'un dépassement de la contrainte limite d'élasticité : le niveau de cette force doit permettre l'évaluation du niveau d'incursion dans le domaine plastique.



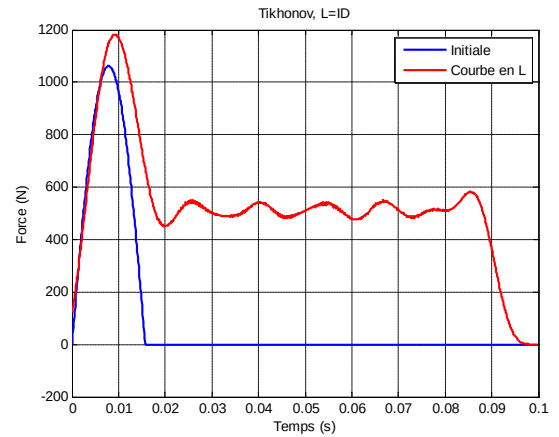
(a) $\alpha(F_2) = 1$



(b) $\alpha(F_2) = 1,05$

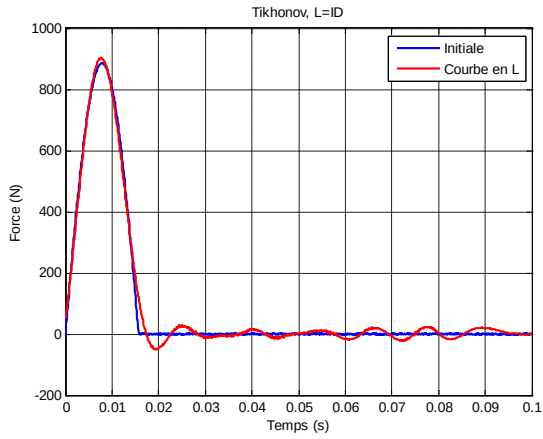


(c) $\alpha(F_2) = 1,1$

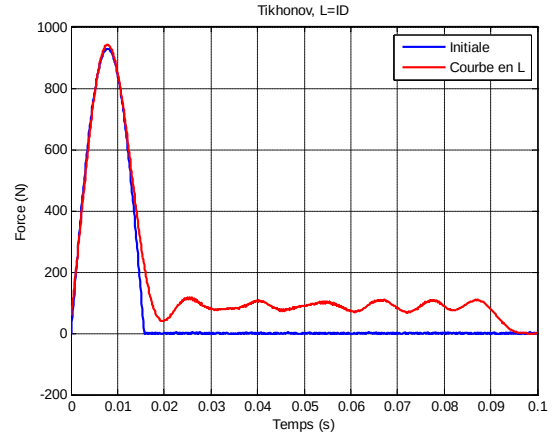


(d) $\alpha(F_2) = 1,2$

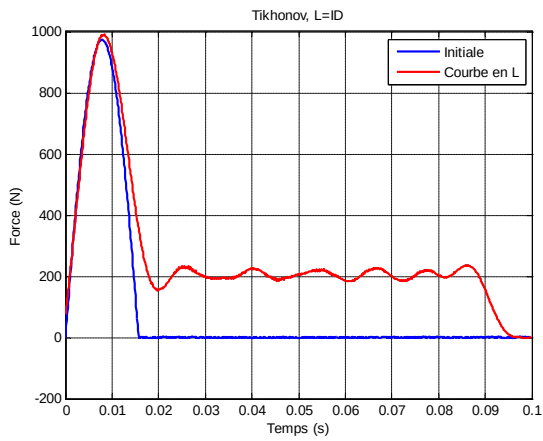
Figure 5.7: Force reconstruite $F_2(t)$ - déplacement mesuré au nœud 5 - méthode de Tikhonov, $L=Id$



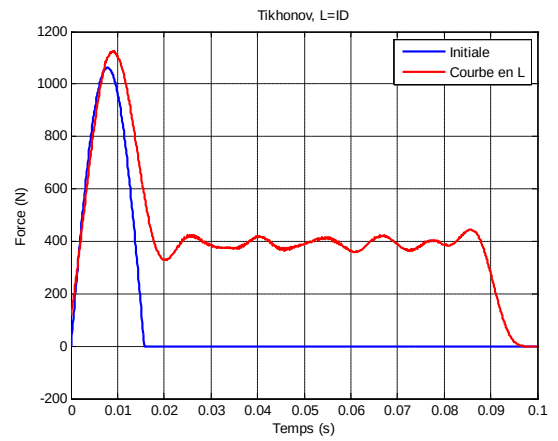
(a) $\alpha(F_2) = 1$



(b) $\alpha(F_2) = 1,05$



(c) $\alpha(F_2) = 1,1$



(d) $\alpha(F_2) = 1,2$

Figure 5.8: Force reconstruite $F_2(t)$ - déplacement mesuré au nœud 2 - méthode de Tikhonov, $L=Id$

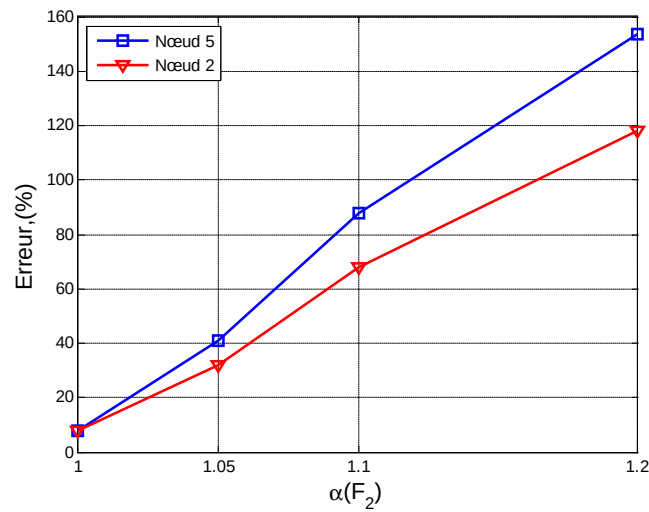
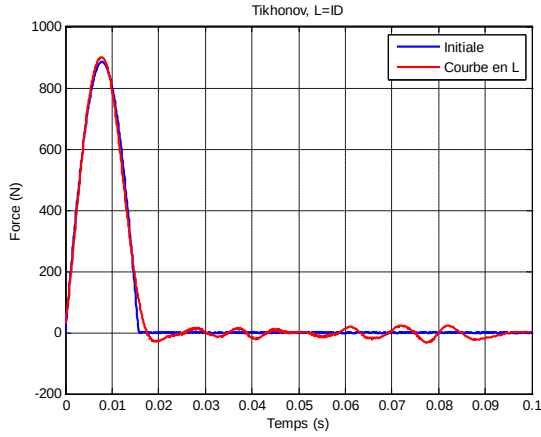
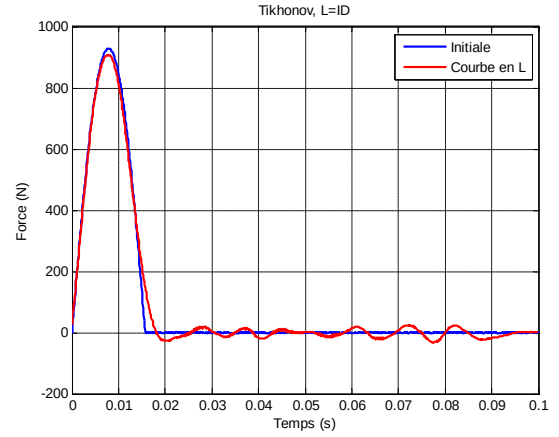


Figure 5.9: Ecart sur $F_2(t)$ - déplacement mesuré au nœud 5 et au nœud 2 - méthode de Tikhonov - courbe en L , $L=Id$

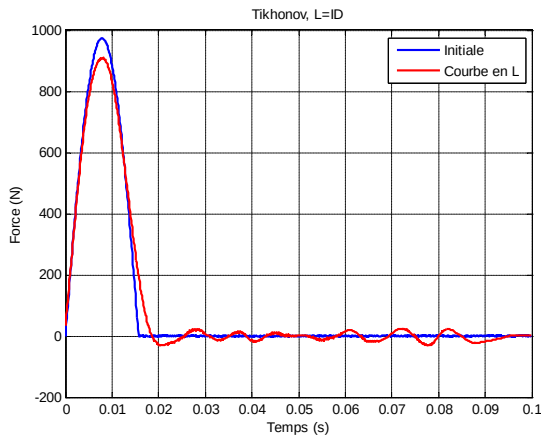
Aussi, compte-tenu que la mauvaise qualité de reconstruction est a priori essentiellement due au déplacement résiduel, nous avons testé la reconstruction de la force à l'aide de la déformation mesurée au nœud 2. En effet, la zone plastifiée étant limitée à l'élément 5, la déformation mesurée au nœud 2 ne présente pas de déformation résiduelle. Les résultats sont donnés en figure 5.10. Il apparaît alors clairement que cette mesure s'avère très intéressante puisque la force est reconstruite de façon satisfaisante, même pour une incursion importante dans le domaine plastique (pour $\alpha=1,2$, par exemple). En revanche l'utilisation des déformations mesurées au nœud 5 conduit à des résultats très mauvais, comme on pouvait s'y attendre (voir tableau 5.5).



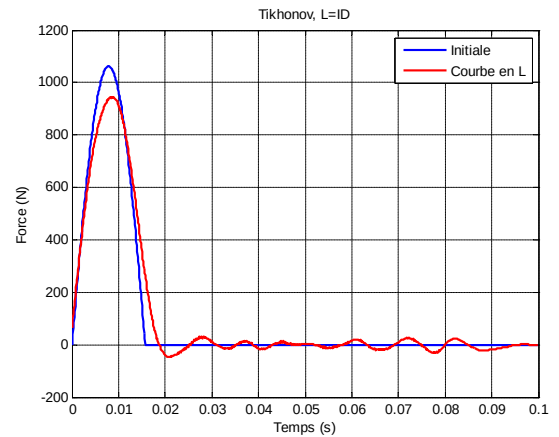
(a) $\alpha(F_2) = 1$



(b) $\alpha(F_2) = 1,05$



(c) $\alpha(F_2) = 1,1$



(d) $\alpha(F_2) = 1,2$

Figure 5.10: Force reconstruite $F_2(t)$ - déformation mesurée au nœud 2 - méthode de Tikhonov, $L=Id$

Erreur (%)								
α	1		1,05		1,1		1,2	
	N5	N2	N5	N2	N5	N2	N5	N2
Déplacement	7,75	7,72	40,73	31,74	87,98	67,79	153,71	118,14
Déformation	7,37	7,23	278,46	8,39	579,59	11,37	729,68	16,55

Table 5.5: Erreur sur $F_2(t)$ en mesurant le déplacement ou la déformation au nœud 2 (N2) et au nœud 5 (N5)

5.3.3.2 Reconstruction avec $\alpha F_1^*(t)$

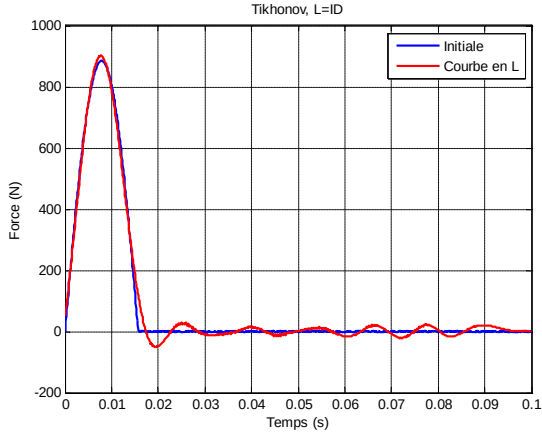
De même que pour F_2 , on peut simuler la réponse de la poutre sous le chargement $F_1(t) = \alpha F_1^*(t)$, où α est donné dans le tableau 5.6.

j	0	1	2	3
α_j	1	1,05	1,1	1,2
F_{1max} (N)	960,8	1008,8	1056,9	1153,0

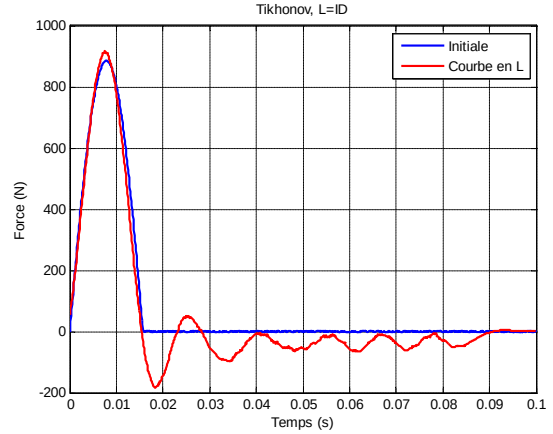
Table 5.6: Valeur maximale de $F_1(t) - \alpha$

On va alors reconstruire chaque force $\alpha_i(F_2) \times F_2^*(t)$ à partir de chaque force $\alpha_j(F_1) \times F_1^*(t)$ et de la réponse mesurée associée. Bien évidemment, on suppose donc implicitement que la réponse reste linéaire élastique pour $\alpha(F_1) \times F_1^*(t)$ ainsi que pour $\alpha_i(F_2) \times F_2^*(t)$ alors que tel n'est pas le cas.

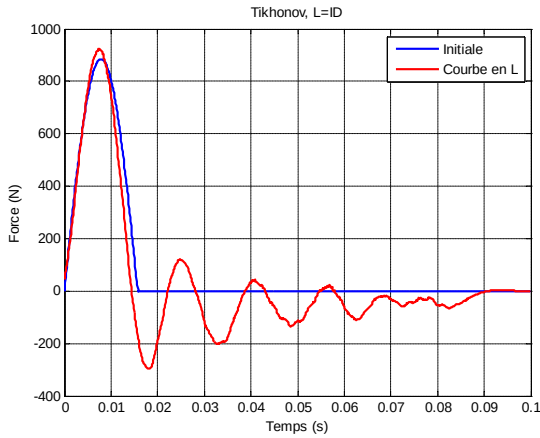
Les résultats sont donnés figures 5.11 à 5.14. La figure 5.15 donnent une synthèse des résultats observés. Il est intéressant de voir que les résultats sont assez satisfaisants s'il y a coïncidence entre $\alpha_j(F_1)$ et $\alpha_i(F_2)$.



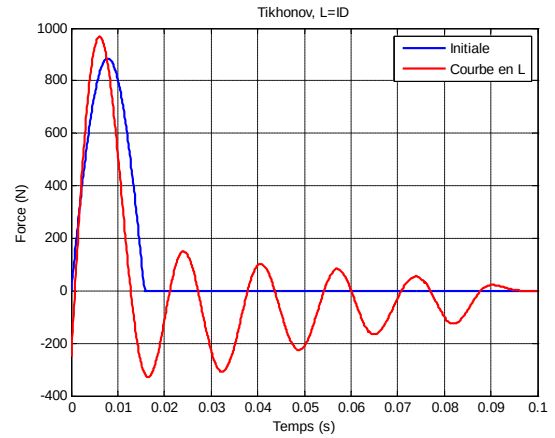
(a) $\alpha(F_1) = 1$



(b) $\alpha(F_1) = 1,05$

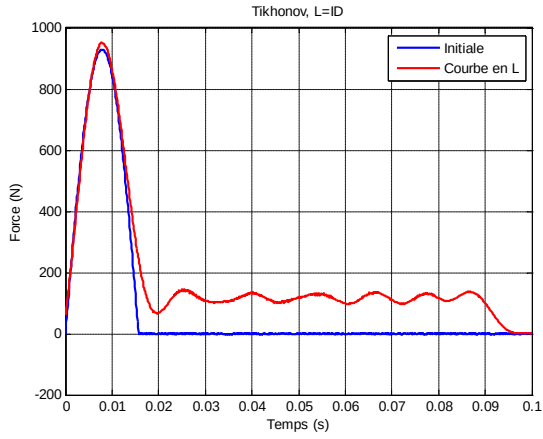


(c) $\alpha(F_1) = 1,1$

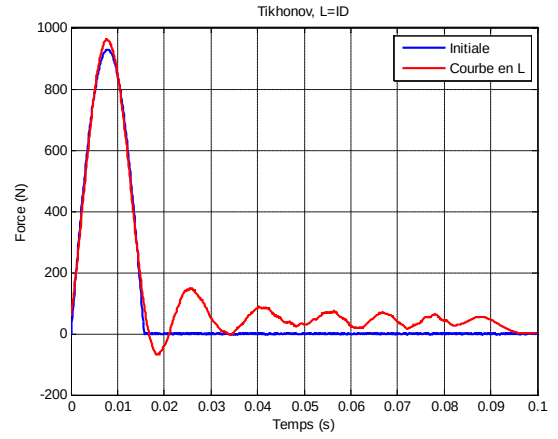


(d) $\alpha(F_1) = 1,2$

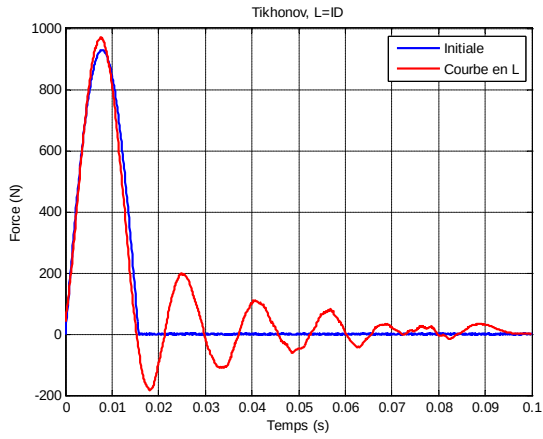
Figure 5.11: Force reconstruite $\alpha_0 F_2^*(t)$ à partir du déplacement mesuré au nœud 5 - méthode de Tikhonov, L=Id



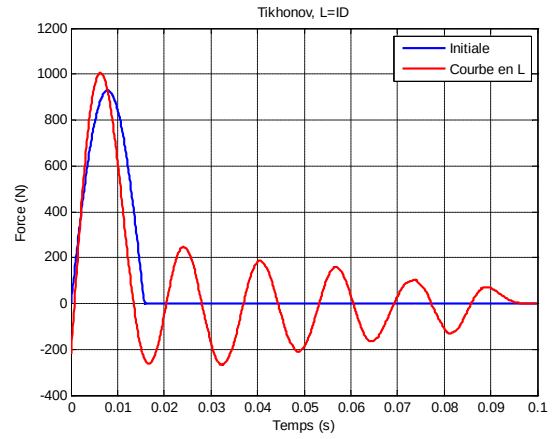
(a) $\alpha(F_1) = 1$



(b) $\alpha(F_1) = 1,05$

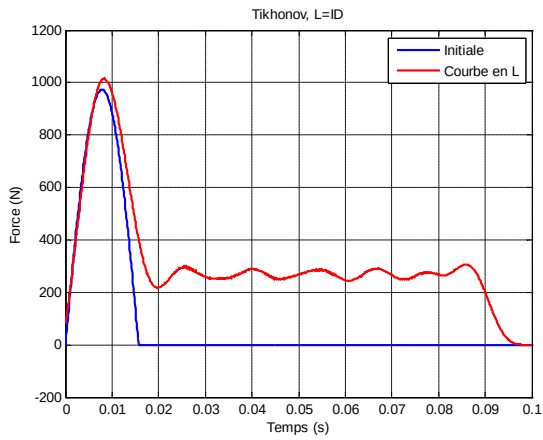


(c) $\alpha(F_1) = 1,1$

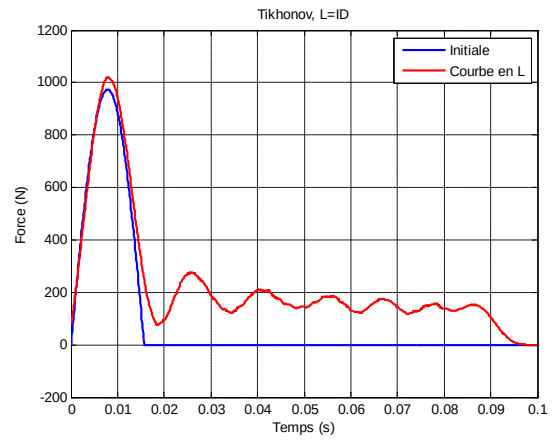


(d) $\alpha(F_1) = 1,2$

Figure 5.12: Force reconstruite $\alpha_1 F_2^*(t)$ à partir du déplacement mesuré au nœud 5 - méthode de Tikhonov, $L=Id$

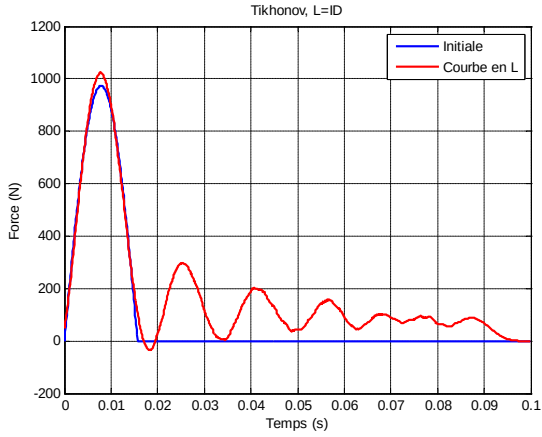


(a) $\alpha(F_1) = 1$

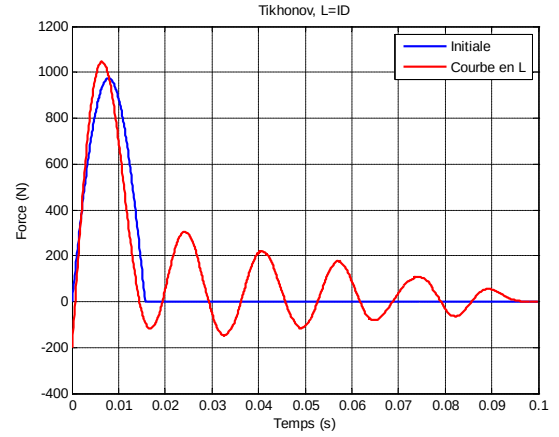


(b) $\alpha(F_1) = 1,05$

Figure 5.13: Force reconstruite $\alpha_2 F_2^*(t)$ à partir du déplacement mesuré au nœud 5 - méthode de Tikhonov, $L=Id$

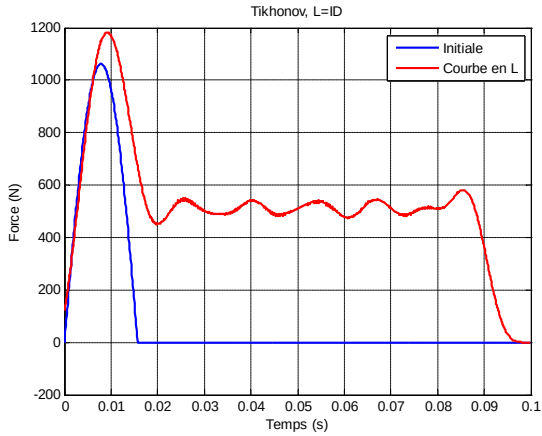


(c) $\alpha(F_1) = 1, 1$

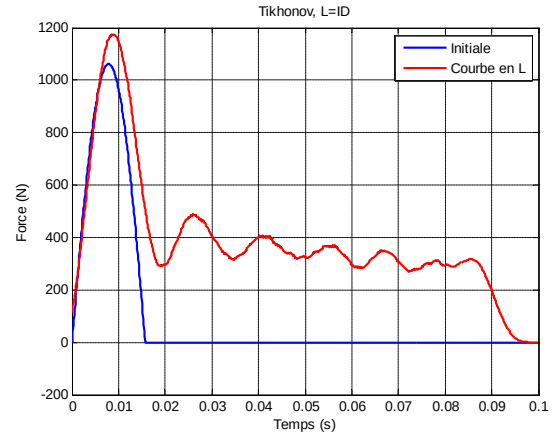


(d) $\alpha(F_1) = 1, 2$

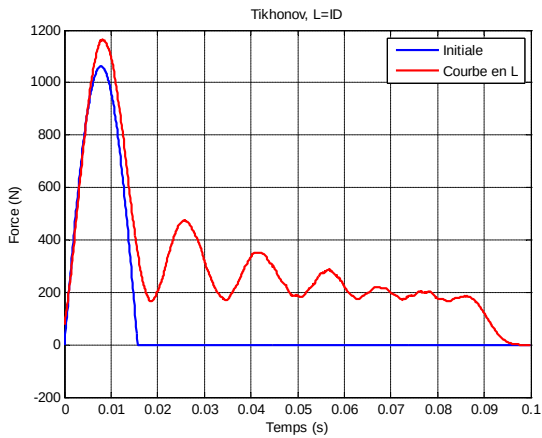
Figure 5.13: Force reconstruite $\alpha_2 F_2^*(t)$ à partir du déplacement mesuré au nœud 5 - méthode de Tikhonov, $L=Id$



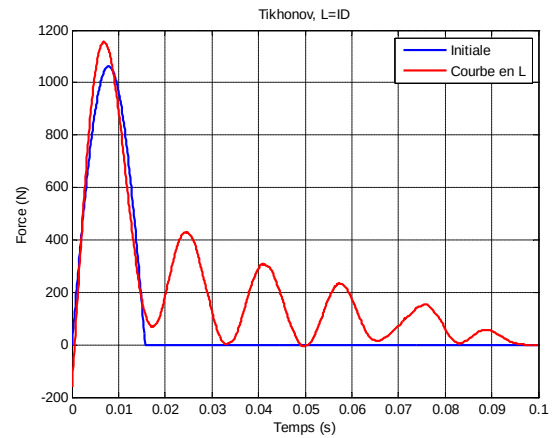
(a) $\alpha(F_1) = 1$



(b) $\alpha(F_1) = 1, 05$



(c) $\alpha(F_1) = 1, 1$



(d) $\alpha(F_1) = 1, 2$

Figure 5.14: Force reconstruite $\alpha_3 F_2^*(t)$ à partir du déplacement mesuré au nœud 5 - méthode de Tikhonov, $L=Id$

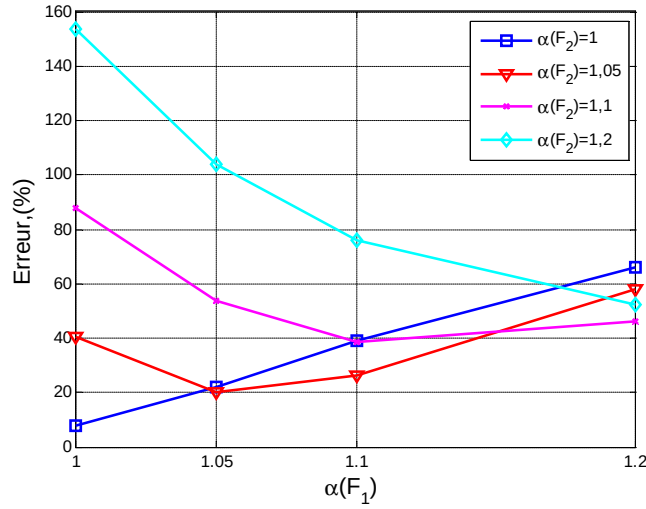


Figure 5.15: Erreur de reconstruction de F_2 en fonction de $\alpha(F_1)$

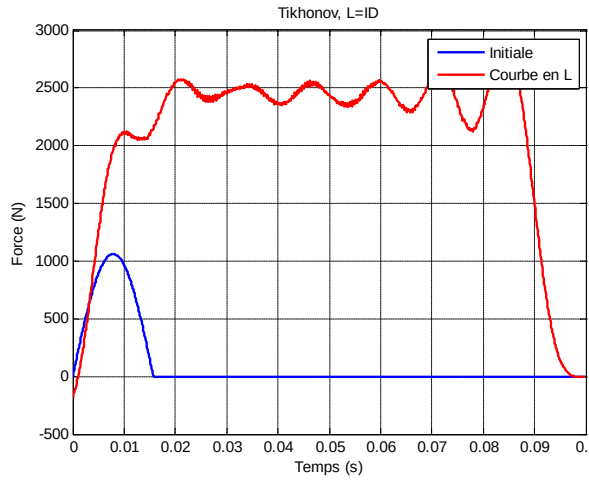
Certes ces résultats n'offrent pas un grand intérêt en pratique puisqu'on ne peut pas calculer l'erreur lorsqu'on ne connaît pas F_2 . En revanche il est intéressant de voir que l'approche par double chargement est plus riche que l'approche par déconvolution de la fonction de transfert. En effet, cela permet d'inclure en partie la non-linéarité de comportement à travers la réponse au chargement donné par F_1 .

Nous avons fait la même analyse en utilisant les déformations mesurées au nœud 5. Nous avons représenté les résultats obtenus figure 5.16 pour $\alpha = 1, 2$. On voit clairement l'apport de la reconstruction à partir d'un premier essai où on a la même incursion dans le domaine plastique que la force à reconstruire, même si la durée du signal de force n'est pas bien identifiée. Là encore la non-linéarité de comportement est partiellement prise en compte via le premier essai instrumenté, ce qui améliore significativement le résultat (voir tableau 5.7).

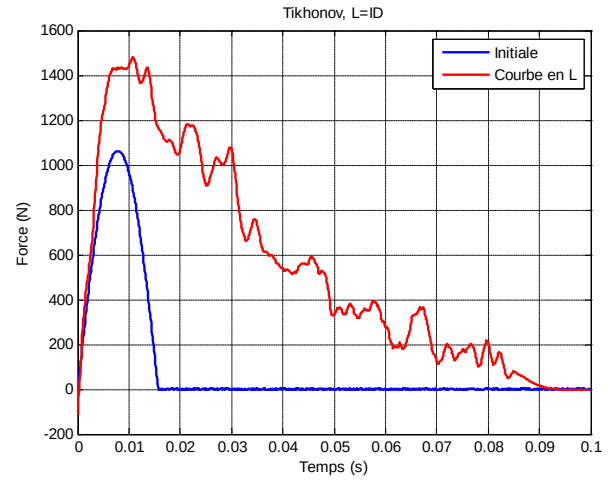
Toutefois le tableau 5.7 montre que pour le nœud 2, la force reconstruite est toujours meilleure si on utilise $\alpha(F_1)=1$, lorsque la déformation est mesurée. cela s'explique par le fait qu'une plastification locale n'apporte pas de déformation résiduelle dans une zone élastique. Au contraire la plastification a une influence à grande portée sur le déplacement : il existe un déplacement résiduel même au niveau de zones non plastifiées.

Erreur relative (%)								
$\alpha (F_2)$								
$\alpha (F_1)$	1		1,05		1,1		1,2	
	N5	N2	N5	N2	N5	N2	N5	N2
1	7.37	7,23	277.10	8,38	577.05	11,36	726.56	16,54
1,05	60.27	13,74	53.32	11,70	142.23	12,14	188.53	17,30
1,1	74.11	24,00	46.63	22,04	88.36	19,78	117.31	23,74
1,2	82.05	34,17	54.54	32,64	69.17	28,41	86.72	19,74

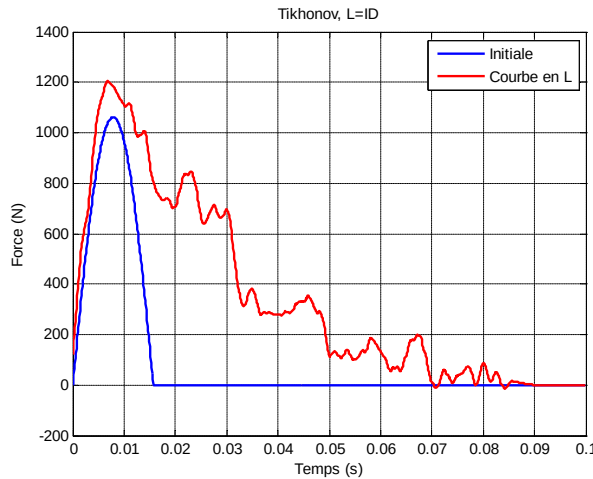
Table 5.7: Erreur relative sur $F_2(t)$ - déformation mesurée au nœud 5 (N5) et au nœud 2 (N2)



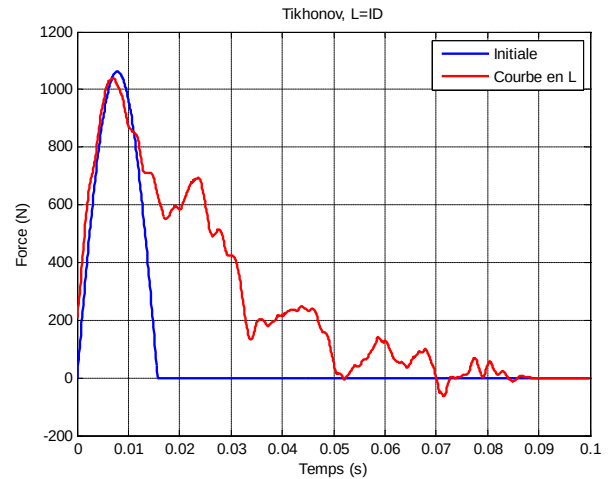
(a) $\alpha(F_1) = 1$



(b) $\alpha(F_1) = 1,05$



(c) $\alpha(F_1) = 1,1$



(d) $\alpha(F_1) = 1,2$

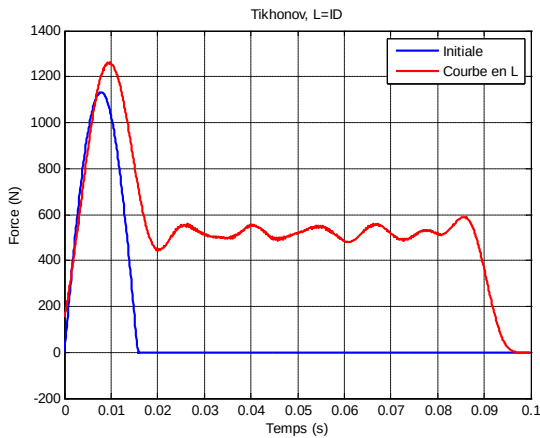
Figure 5.16: Force reconstruite $F_2(t)$ avec $\alpha=1,2$ - mesure de déformation au nœud 5 - méthode de Tikhonov, L=Id

5.3.4 Reconstruction avec plastification étendue

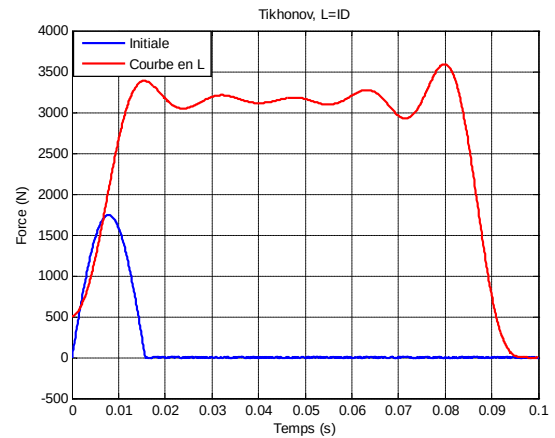
Nous allons maintenant augmenter α de sorte que la force $\alpha F_2(t)$ produise une augmentation de la zone plastifiée. Nous considérerons donc 2 autres valeurs de α qui conduiront respectivement à plastifier respectivement 2 et 3 éléments (voir tableau 5.8). $F_2(t)$ a alors été reconstruite à partir de $F_1^*(t)$ à partir des mesures du déplacement au nœud 2, qui appartient à un élément non plastifié. Les résultats ne sont pas du tout satisfaisants (voir tableau 5.8 et figure 5.17) : là encore on observe un plateau plastique qui est d'autant plus élevé que la force est importante, puisqu'alors le déplacement résiduel est plus élevé.

i	4	5
α_i	1.28	1,97
éléments plastifiés	5, 6	4, 5, 6
erreur relative (%)	147,3	545,6

Table 5.8: Erreur de reconstruction de $\alpha_i F_2(t)$ - déplacement mesuré au nœud 2 - méthode de Tikhonov, L=ID



(a) $\alpha(F_2) = 1,28$



(b) $\alpha(F_2) = 1,97$

Figure 5.17: Force reconstruite $F_2(t)$ - déplacement mesuré au nœud 2 - méthode de Tikhonov, L=Id

Nous avons reconstruit $\alpha F_2(t)$ à partir de $\alpha F_1(t)$ pour les deux valeurs de α du tableau 5.8. Les résultats sont donnés dans le tableau 5.9 et la figure 5.19. Il est intéressant de constater que même pour $\alpha = 1,97$, l'erreur chute considérablement lorsqu'on introduit la "bonne" information non-linéaire, c'est-à-dire lorsque $\alpha(F_1) = \alpha(F_2)$.

Erreur relative (%)		
$\alpha(F_1)$	$\alpha(F_2)$	
	1,28	1,97
1,28	58,96	218.38
1,97	83,52	68,78

Table 5.9: Erreur relative sur l'identification de $F_2(t)$ - déplacement mesuré au nœud 2

Toutefois, comme le nœud 2 n'est pas dans une zone plastifiée, il nous est à nouveau apparu intéressant de reconstruire en prenant en compte la déformation mesurée au nœud 2. Effectivement, la figure 5.18 montre que les résultats sont bien supérieurs à ceux obtenus avec le déplacement, même si la force identifiée avec un fort niveau de plastification est un peu sous-estimée.

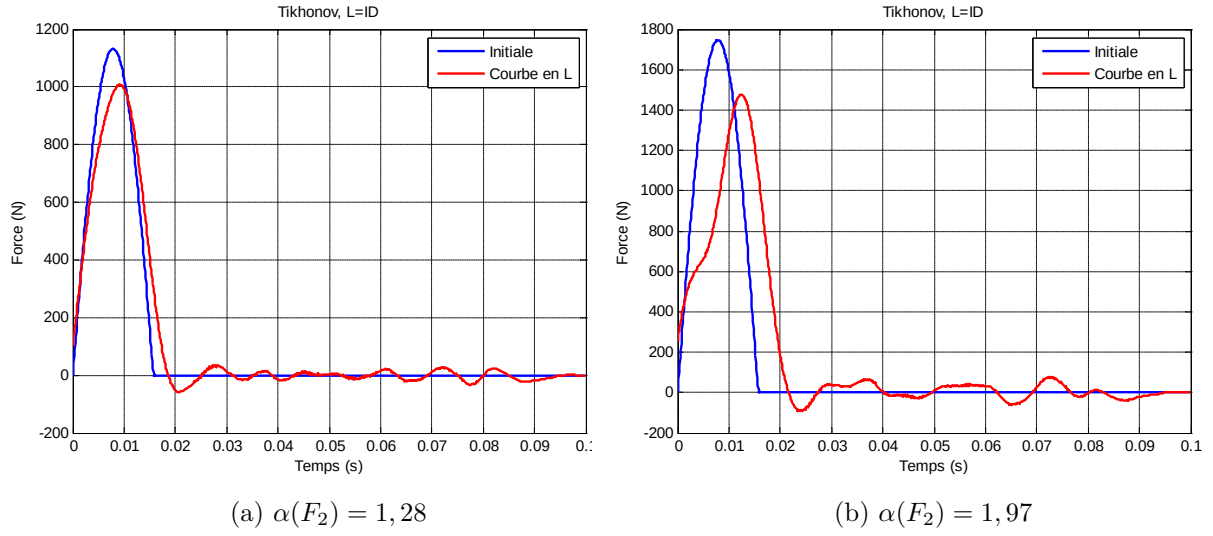


Figure 5.18: Force reconstruite $F_2(t)$ - déformation mesurée au nœud 2 - méthode de Tikhonov - courbe en L, $L=ID$

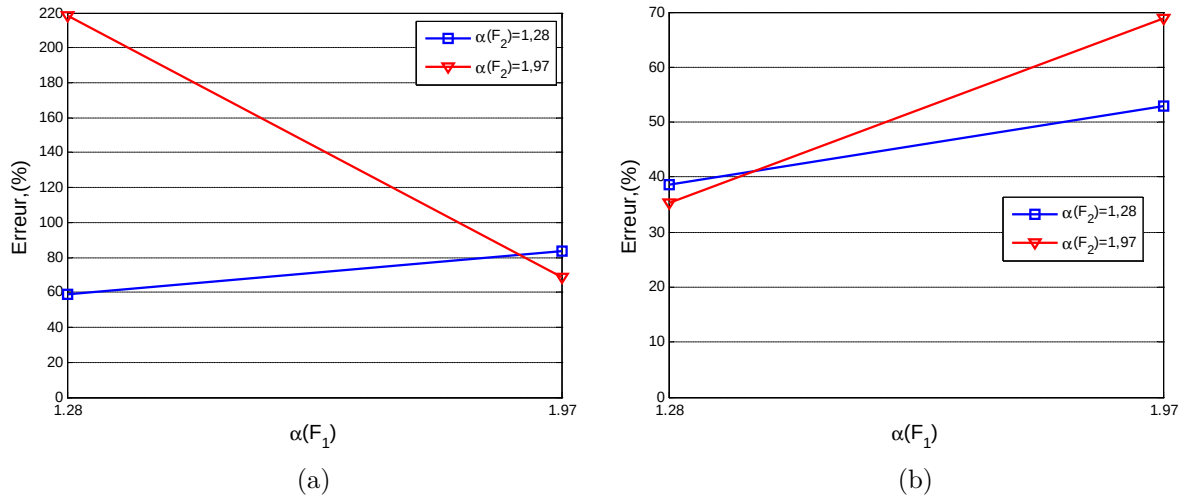


Figure 5.19: Erreur reconstruite $F_2(t)$ par la méthode de Tikhonov avec le critère courbe en L, $L=ID$, en utilisant (a) le déplacement en nœud 2 (b) (a) le déformation en nœud 2

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode de reconstruction de la force par double chargement : cela évite d'avoir à identifier une fonction de transfert et permet également d'utiliser directement des résultats de simulations ou d'expériences. La modélisation de la poutre étudiée a été faite sur le logiciel Ls-dyna pour effectuer des essais numériques qui engendrent une plastification de la structure. Ce logiciel permet d'avoir accès à des réponses diverses : déplacement, déformation, vitesse et accélération. Nous avons donc essayé de voir l'influence de la zone plastifiée sur la qualité de reconstruction. Aussi, dans un premier temps, un seul élément a été plastifié et on a utilisé des mesures de déplacement effectué en des endroits plastifiés et non-plastifiés. Les résultats n'ont pas été satisfaisant dans les deux cas. En particulier un effort statique est identifié à tort : il est le résultat du déplacement résiduel dû à la plastification locale. Pour contrer l'influence de la plastification même sur des zones non plastifiées, nous avons effectué les mêmes opérations avec les déformations. Comme attendu, les résultats obtenus à l'aide des mesures de déformations faites au nœud 5 se sont révélés mauvais. En revanche les résultats obtenus à partir des mesures de déformation au nœud 2 (zone élastique) ont été tout à fait satisfaisants. Aussi, ce résultat tend à montrer l'intérêt d'utiliser des mesures de déformations lorsqu'on pense que la structure a perdu son caractère linéaire durant la sollicitation. Ceci est à mettre en balance avec les résultats du chapitre 3 où il ressortait que les réponses en accélération ou en déplacement sont préférables.

On a vu qu'il est également possible d'inclure en partie le comportement non-linéaire induit par la plastification, en reconstruisant avec un effort produisant également une incursion dans le domaine plastique. Les résultats sont satisfaisant si la force servant à reconstruire et la force à identifier ont la même incursion dans le domaine plastique. Cependant ce résultat n'a un intérêt pratique que si on peut connaître cette incursion.

Chapitre 6

Conclusion générale

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent l'identification de chargements par méthode inverse, c'est-à-dire à partir de mesures indirectes. Cette thèse a permis, à travers de nombreux tests numériques, de faire le point sur les méthodes de régularisation déterministe. On s'est ainsi intéressé à déterminer la bonne combinaison entre méthode de régularisation, fonctionnelle régularisante, critère de détermination du paramètre de régularisation et nature du signal, pour obtenir une reconstruction satisfaisante. De même on a étudié la possibilité de reconstruire simultanément des chargements multiples et ainsi de localiser un chargement de façon automatique. Finalement, on a regardé la possibilité de reconstruire un chargement qui a conduit à plastifier plus ou moins localement une structure. Tous ces essais numériques ont été faits sur une poutre articulée-appuyée modélisée en éléments finis.

Plus précisément, nous avons reconstruit divers chargements en utilisant la méthode de Tikhonov et la troncature de la SVD/GSVD via trois fonctionnelles régularisantes (L_0 , L_1 ou L_2) afin de tester l'efficacité de la reconstruction. Nous avons également analysé la difficulté à choisir le paramètre de régularisation avec le critère de la courbe en L , la fonction GCV et la fonction de quasi-optimalité. Nous avons donc effectué la reconstruction de trois types de forces ponctuelles (forces d'impact et force sinusoïdale amortie) afin de voir l'influence de certaines de leurs caractéristiques sur la capacité à les reconstruire. Ainsi on a étudié l'influence de la pente initiale de la force d'impact et l'influence de la position du début du signal pour chaque type de force. Pour reconstruire, il est également nécessaire de connaître la réponse du système. Aussi nous avons testé les réponses couramment mesurées pour un système vibrant : le déplacement, les déformations et l'accélération. À partir des résultats obtenus, les conclusions suivantes ont été tirées :

- Sur le type de force : La reconstruction des divers chargements est en général satisfaisante. Cependant, la reconstruction d'une force d'impact qui a une pente initiale raide semble un peu plus délicate. De même, mettre des zéros avant le début de la force pour mettre plus de poids sur le fait que la force part d'une valeur nulle avant d'augmenter parfois fortement et rapidement, n'améliore pas forcément l'identification du début du signal.

- Sur le critère de détermination du paramètre de régularisation : Chaque critère apporte ses propres difficultés d'interprétation. Ainsi la courbe en L peut présenter plusieurs coins et les simulations ont montré que le point de courbure maximale peut ne pas correspondre au paramètre de régularisation optimal. De même la fonction QOP peut

présenter plusieurs minima locaux : il se trouve que le minimum minimorum peut ne pas conduire à une solution satisfaisante. Il en est de même avec la fonction GCV. Toutefois, parmi ces trois critères, le critère GCV s'est avéré le critère le plus fiable et a toujours donné des forces identifiées satisfaisantes. Le critère de la courbe en L est assez satisfaisant surtout lorsqu'il est associé à une stabilisation via les dérivées des chargements. Le critère de quasi-optimalité peut être très performant mais peut également conduire à des forces mal identifiées : il ne semble donc pas être un critère fiable. On peut donc conclure qu'il vaut mieux partir avec le critère GCV, mais qu'il faut de toutes les façons déterminer le paramètre avec les trois critères. La confrontation des résultats de ces critères doit permettre de déterminer un paramètre de régularisation satisfaisant.

- Sur la stabilisation : La stabilisation étudiée consiste à minimiser soit la norme de la force, soit la norme de sa dérivée première ou seconde. La reconstruction associée à une stabilisation via la norme de la dérivée première ou seconde semble la plus performante.

- Sur le signal de mesure utilisé : La force reconstruite en utilisant une réponse en accélération ou, dans une moindre mesure, un déplacement est meilleure que celle utilisant une déformation.

- Sur la position de la mesure : La qualité de reconstruction s'est avérée peu sensible à la position du signal mesuré.

L'identification d'actions multiples a permis de voir s'il est possible d'identifier un chargement identiquement nul et en particulier de voir s'il est possible de le distinguer d'un chargement non nul. Nous avons dû utiliser la réponse "mesurée" selon plusieurs ddl (voire tous les ddl) pour avoir suffisamment d'informations. Les résultats ont été satisfaisants lorsqu'il s'agissait de reconstruire deux chargements dont l'un était nul. En particulier nous avons montré que la qualité de la reconstruction est peu influencée par la position des mesures mais dépend du nombre de mesures : la qualité d'identification augmente lorsqu'on augmente le nombre de mesures et d'ailleurs l'identification s'avère excellente quand on utilise toutes les réponses disponibles. Nous avons également reconstruit de façon satisfaisante plusieurs actions non nulles. En revanche pour la reconstruction d'une pression, les résultats sont moins convaincants. En effet, puisqu'on est dans un cadre éléments finis, cette pression se traduit en termes de forces et de moments nodaux. Les simulations ont montré que les moments sont souvent mal identifiés car le paramètre de régularisation donné par le critère GCV sous-régularise fortement ces moments, alors qu'il régularise correctement les forces. Cela démontre une nouvelle fois l'importance du paramètre de régularisation, puisqu'il ne semble pas optimal pour régulariser simultanément des actions de nature différente. Cela sous-entend qu'il faudrait deux paramètres de régularisation : un paramètre pour régulariser les forces et un second pour régulariser les moments. Toutefois, comme les moments ont une influence plus faible que les forces sur la réponse, nous avons effectué une sous-identification de la pression : on a considéré que les moments issus de la pression étaient a priori nuls. Cela a conduit à une identification très satisfaisante des forces nodales. A partir de ces résultats, nous avons essayé d'identifier la zone de chargement. Cela revient à supposer que la structure est chargée selon tous les ddl : les ddl selon lesquels les efforts sont non nuls donnent alors la localisation du chargement. Cependant, la méthode n'a pas donné les résultats escomptés : il faudrait avoir plus de mesures que de chargements à identifier pour améliorer cette procédure.

Toutes ces méthodes de reconstruction reposent sur l'hypothèse de linéarité de la

structure (loi linéaire entre entrées et sorties). Or il est clair qu'en pratique cette hypothèse n'est pas toujours valable et méritait donc d'être étudiée. Pour ce faire, on a effectué des simulations avec un chargement tel qu'il plastifie la structure. L'idée est ensuite de voir dans quelle mesure il est possible de reconstruire le chargement. Pour ce faire on a présenté une méthode de reconstruction de la force par double chargement. Cela évite d'avoir à identifier une fonction de transfert et permet également d'utiliser directement des résultats de simulations : ainsi si on a simulé une structure qui sort du domaine élastique avec le premier chargement (connu), on inclut d'une certaine façon la plastification.

Nous avons montré l'influence de la nature du signal mesuré. Ainsi, les résultats obtenus à partir des mesures de déplacement effectuées en des endroits plastifiés et non-plastifiés ne sont pas satisfaisants. Ceci est essentiellement dû à la présence du déplacement résiduel que l'on a en tout point de la structure : cela induit un effort statique parasite dans la force reconstruite. Il en est de même en utilisant des mesures de déformation effectuées en des endroits plastifiés. En revanche les résultats obtenus lorsque les mesures de déformation se font en zone non-plastifiée ont été tout à fait satisfaisant : en effet, dans ce cas, il n'existe pas de déformation résiduelle. Ces résultats se sont avérés corrects même en étendant la zone de plastification de la structure.

Ce travail a montré certaines faiblesses des méthodes de régularisation usuelles : en particulier lorsque plusieurs forces doivent être identifiées il est nécessaire d'avoir un grand nombre de points de mesure. Bien évidemment des variantes existent qui améliorent un peu les résultats. Les méthodes de régularisation itératives entrent dans ces méthodes. Même si elles n'ont pas été mentionnées dans ce mémoire, elles ont été testées durant la thèse. Cependant il s'avère que pour améliorer significativement les résultats il faut actualiser le paramètre de régularisation à chaque itération. Aussi, il est alors plus naturel de passer à l'utilisation de résolution par méthode probabiliste. En effet l'approche bayésienne permet d'avoir une méthode itérative dont l'actualisation du paramètre de régularisation est automatique. En outre, il semble possible avec ce type de méthode d'inclure plusieurs paramètres de régularisation, ce qui permettrait de mieux aborder la reconstruction de chargements complexes faisant intervenir des efforts de nature différente.

Toutefois, l'axe de recherche le plus ardu sur lequel il semble important de se pencher dans le futur, est de réaliser l'identification de chargements endommageant ou plastifiant fortement la structure. A la différence de la procédure utilisée dans ce travail, il s'agit de prendre en compte l'évolution de la fonction de transfert en fonction du niveau d'endommagement ou de plastification.

Bibliographie

- [1] P. Hansen, Rank-Deficient and Discrete III-Posed Problems, SIAM Monographs on Mathematical Modeling and computation, 1998. Cité aux pages [v](#), [2](#), [9](#), [12](#), [13](#), [16](#), [17](#) et [80](#).
- [2] G. Golub, M. Heathand, G. Wahba, Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter, *Technometrics* 21 (2) (1979) 215–223. Cité aux pages [v](#) et [17](#).
- [3] J. Hadamard, Lectures on Cauchy’s problem in linear partial differential equations, New Haven Yale University Press, 1923. Cité à la page [1](#).
- [4] A. Tarantola, Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation, SIAM, 2005. Cité aux pages [1](#) et [18](#).
- [5] J.-F. G. Guy Demoment, Jérôme Idier, A. Mohammad-Djafari, Problèmes inverses en traitement du signal et de l’image, *Techniques de l’ingénieur*. Cité aux pages [1](#), [18](#) et [19](#).
- [6] E. Zhang, Etude de problèmes inverses en dynamique des structures par inférence bayésienne (recalage de modèle et reconstruction des efforts)., Ph.D. thesis, Université Technologique de Compiègne (2010). Cité à la page [1](#).
- [7] A. Tikhonov, V. Arsenin, Solutions of Ill-Posed Problems, John Wiley and Sons, 1977. Cité aux pages [2](#) et [14](#).
- [8] J. Doyle, Further developments in determining the dynamic contact law, *Experimental Mechanics* 24 (1984) 265–270. Cité aux pages [4](#) et [21](#).
- [9] J. Doyle, An experimental method for determining the location and time of initiation of an unknown dispersing pulse, *Experimental Mechanics* 27 (1987) 229–233. Cité aux pages [4](#), [6](#), [21](#) et [23](#).
- [10] J. Doyle, Determining the contact force during the transverse impact of plates, *Experimental Mechanics* 27 (1987) 68–72. Cité aux pages [4](#) et [21](#).
- [11] E. Jacquelin, A. bennani, P. Hamelin, Paramètre liés a reconstruction d’une force d’impact, in : XV ème Congrès Francais de Mécanique, nancy, 3-7 Septembre, 2001. Cité aux pages [4](#) et [22](#).
- [12] E. Jacquelin, A. Bennani, P. Hamelin, Force reconstruction analysis and regularization of a deconvolution problem, *Journal of Sound and Vibration* 265 (2003) 81–107. Cité aux pages [4](#) et [22](#).
- [13] S.-J. Kim, S.-K. Lee, Identification of impact force in thick plates based on the elastodynamics and time-frequency method (ii), *Journal of Mechanical Science and Technology* 22 (2008) 1359–1373. Cité aux pages [4](#), [5](#) et [21](#).

- [14] E. Wu, T. T. sai, C. Yen, Two methods for determining impact-force history on elastic plates, *Experimental Mechanics* 35 (1995) 11–18. Cité aux pages 5 et 21.
- [15] C. Chang, C. Sun, Determining transverse impact force on a composite laminate by signal deconvolution, *Experimental Mechanics* 29 (1989) 414–419. Cité aux pages 5, 7 et 21.
- [16] Z. Boukria, Caractérisation des impacts sur une galerie pare-blocs structurellement dissipant, Ph.D. thesis, L’Université de Savoie (2009). Cité à la page 5.
- [17] Z. Boukria, P. Perrotin, A. Bennani, Experimental impact force location and identification using inverse problems, application for a circular plate, *International journal of mechanics* 5. Cité à la page 5.
- [18] A. A. Uslua, K. Y. Sanliturkb, M. Gui, Force estimation using vibration data, in : *Inter-noise*, Istanbul, Turkey, 28-31 august 2007. Cité à la page 5.
- [19] T. Uhl, The inverse identification problem and its technical application, *Archive of Applied Mechecanics* 77 (2007) 325–337. Cité aux pages 5 et 22.
- [20] C. Ma, J.-M. Chang, D.-C. Lin, Input forces estimation of beam structures by an inverse method, *Journal of Sound and Vibration* 259(2) (2003) 387–407. Cité aux pages 5 et 21.
- [21] T. Nakamura, H. Igawa, A. Kanda, Inverse identification of continuously distributed loads using strain data, *Aerospace Science and Technology*. Cité aux pages 5 et 22.
- [22] N. Hu, H. Fukunaga, S. Matsumoto, B. Yan, X. Peng, An efficient approach for identifying impact force using embedded piezoelectric sensors, *International Journal of Impact Engineering* 34 (2007) 1258–1271. Cité aux pages 5 et 22.
- [23] R. Adams, J. F. Doyle, Multiple force identification for complex structures, *Experimental Mechanics* 42 (2002) 25–36. Cité aux pages 5 et 22.
- [24] J. Doyle, A wavelet deconvolution method for impact force identification, *Experimental Mechanics* 37 (1997) 403–408. Cité aux pages 5 et 21.
- [25] T. W. Lim, W. Pilkey, A solution to the inverse dynamics problem for lightly damped flexible structures using a model approach, *Computers & structures* 43 (1992) 53–59. Cité à la page 5.
- [26] E. Wu, J.-C. Yeh, C.-S. Yen, Identification of impact forces at multiple locations laminated plates, *AIAA Journal* 32 (1994) 2433–2439. Cité aux pages 5 et 24.
- [27] R. Busby, M. Trujillo, Solution of an inverse dynamics problem, *Computers and Structure* 25 (1987) 109–117. Cité à la page 6.
- [28] Y. R. Kim, K. J. Kim, Indirect input identification by modal technique, *Proceedings of SPIE, the International Society for Optical Engineering* 3089 (2) (1997) 1263–1269. Cité à la page 6.
- [29] M. Martin, J. Doyle, Impact force identification from wave propagation responses, *International Journal of Impact Engineering* 18 (1) (1996) 65 – 77. Cité aux pages 6 et 21.
- [30] A. A.N.Thite, T. D.J., Selection of response measurement locations to improve inverse force determination, *Applied Acoustics* 67 (2006) 797–818. Cité à la page 6.

- [31] Q. Jiang, H. Hu, Reconstruction of distributed dynamic loads on an euler beam via mode-selection and consistent spatial expression, *Journal of Sound and Vibration* 316 (2008) 122–136. Cité aux pages 6 et 23.
- [32] S. Granger, L. Perotin, An inverse method for the identification of a distributed random excitation acting on a vibrating structure part 1 : theory, *Mechanical Systems and Signal Processing* 13 (1999) 53–65. Cité aux pages 6 et 23.
- [33] J. Zhu, Z. Lu, A time domain method for identifying dynamic loads on continuous systems, *Journal of Sound and Vibration* 148 (1991) 137–146. Cité à la page 7.
- [34] J. Doyle, An experimental method for determining the dynamic contact law, *Experimental Mechanics* 24 (1984) 10–16. Cité aux pages 7 et 21.
- [35] J. F. Doyle, Determining the contact force during the transverse impact of plates, *Experimental Mechanics* 27 (1997) 68–72. Cité à la page 7.
- [36] B. Wang, C.H.Chiu, Determination of unknown impact force acting on a simply supported beam, *Mechanical systems and signal processing* 17 (2003) 683–704. Cité aux pages 7, 22 et 24.
- [37] R. Randall, *Application of B&K Equipment to Frequency Analysis*, Bruel & Kjaer, 1977. Cité à la page 8.
- [38] P. Hansen, A matlab package for analysis and solution of discrete ill posed problems, *Numerical Algorithms* 6 (1994) 1–35. Cité aux pages 9 et 43.
- [39] D. Gibert, F. Lopes, *Théorie de l'information (problèmes inverses & traitement du signal).*, Cours, Institut de Physique du Globe de Paris (2011-2012). Cité à la page 18.
- [40] H. Ayasso, Une approche bayésienne de l'inversion. application à l'imagerie de diffraction dans les domaines micro-onde et optique, Ph.D. thesis, Faculté des Sciences d'Orsay - Université Paris X1 (2010). Cité aux pages 18 et 20.
- [41] J. Kaipio, E. Somersalo, *Statistical and computational Onverse problems*, Springer, 2010. Cité à la page 18.
- [42] E. Zhang, J. Antoni, P. Feissel, Bayesian force reconstruction with an uncertain model, *Journal of Sound and Vibration* 331 (4) (2012) 798–814. Cité à la page 18.
- [43] K.-V. Yuen, *Bayensian Methods For Structural Dynamics and Civil Engineering*, John Wiley & Sons (Asia), 2010. Cité à la page 18.
- [44] C. Robert, *Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov*, Economica, 1996. Cité à la page 20.
- [45] C. Lalanne, *Chocs mécaniques*, Hermès, 1999. Cité à la page 21.
- [46] H. Inoue, N. Ikeda, K. Kishimoto, T. Shibuya, T. Koizumi, Inverse analysis of the magnitude and direction of impact force, *JSME International Journal Series A* 38 (84-91). Cité à la page 21.
- [47] S. Lee, Identification of impact force in thick plates based on the elastodynamics and time-frequency method (i), *Journal of Mechanical Science and Technology* 22 (2008) 1349–1358. Cité à la page 21.
- [48] A. A. Uslua, K. Y. Sanliturkb, M. Gul, Force estimation using vibration data, in : *Inter-noise*, Istanbul, Turkey, 2007, pp. 28–31. Cité à la page 22.

- [49] Y. Liu, W. S. S. Jr, An improved method for the reconstruction of a distributed force acting on a vibrating structure, *Journal of Sound and Vibration* 291 (2006) 369–387. Cité à la page [22](#).
- [50] M. Djamaa, N. Ouelaa, C. Pezeratb, J. Guyader, Reconstruction of a distributed force applied on a thin cylindrical shell by an inverse method and spatial filtering, *Journal of Sound and Vibration* 301 (2007) 560–575. Cité à la page [22](#).
- [51] F. E. Khannoussi, A. Hajraoui, A. Khamlichi, A. Elbakari, R. Dkiouak, E. Jacquelin, A. Limam, Reconstruction of a distributed force impacting an elastic rectangular plate, *Journal of Basic and Applied Scientific Research* 1 (2010) 20–30. Cité à la page [23](#).
- [52] J. Doyle, A genetic algorithm for determining the location of structural impacts, *Experimental Mechanics* 34 (1994) 37–44. Cité à la page [23](#).
- [53] H. Inoue, K. Kishimoto, T. Shibuya, Experimental wavelet analysis of flexural waves in beams, *Experimental Mechanics* 36 (1996) 212–217. Cité à la page [23](#).
- [54] L. Gaul, S. Hurlebaus, Identification of the impact location on a plate using wavelets, *Mechanical Systems and Signal Processing* 12 (6) (1998) 783 – 795. Cité à la page [23](#).
- [55] B. T. Wang, H. Hu, Prediction of unknown harmonic force acting on beam by pvdf sensors, in : 17th International Conference on Adaptive Structures and Technologies, Taipei, Taiwan, 2006. Cité à la page [23](#).
- [56] S. Zheng, L. Zhou, X. Lian, K. Li, Technical note : Coherence analysis of the transfer function for dynamic force identification, *Mechanical Systems and Signal Processing* 25 (2011) 2229–2240. Cité à la page [23](#).
- [57] H. Sekine, S. Atobe, Identification of locations and force histories of multiple point impacts on composite isogrid-stiffened panels, *Composite Structures* 89 89 (2009) 1–7. Cité à la page [23](#).
- [58] M. Martin, J. Doyle, Impact force location in frame structures, *International Journal of Impact Engineering* 18 (1) (1996) 79 – 97. Cité à la page [24](#).
- [59] R. Hashemi, M. y, Vibration base identification of impact force using genetic algorithm, *World Academy of Science, Engineering and Technology* 36. Cité à la page [24](#).
- [60] K. Choi, F. Chang, Identification of impact force and location using distributed sensors, *AIAA Journal* 34 (1996) 136–142. Cité à la page [24](#).
- [61] B.-T. Wang, Prediction of impact and harmonic forces acting on arbitrary structures theoretical formulation, *Mechanical Systems and signal processing* 16 (2002) 935–953. Cité à la page [24](#).
- [62] N. Hu, H. Fukunaga, A new method for health monitoring of composite structures through identification of impact force, *Journal of Advanced Science* 17, no.1&2 (2005) 82–89. Cité à la page [24](#).
- [63] B. Hillary, D. Ewins, The use of strain gauges in force determination and frequency response function measurements, in : 2nd international modal analysis conference, Orlando FL USA, 1984, pp. 627–634. Cité aux pages [26](#) et [33](#).
- [64] R. Hadjit, Méthodes inverse adaptées à l’identification de forces d’excitation de struc-

- tures mécaniques, Ph.D. thesis, Faculté Polytechnique de Mons, Belgique (2001). Cité à la page [33](#).
- [65] L. D. Silva, D. Rade, Time domain-based identification of mechanical characteristics of supporting elements, Proceedings of the 17th IMAC (1999) 1616–1621. Cité à la page [43](#).
- [66] E. Jacquelin, A. Bennani, M. Massenzio, Analysis of a force reconstruction problem, Structural Engineering and Mechanics 21 (3) (2005) 237–254. Cité à la page [81](#).
- [67] L. Jankowski, Off-line identification of dynamic loads, Structural and Multidisciplinary Optimization 37 (2009) 609–623. Cité à la page [94](#).