

Les propriétés mécaniques des mousses polymériques à cellules ouvertes : expériences, modèle théorique et simulations numériques

Giampiero Pampolini

▶ **To cite this version:**

Giampiero Pampolini. Les propriétés mécaniques des mousses polymériques à cellules ouvertes : expériences, modèle théorique et simulations numériques. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Provence (Aix Marseille 1), 2010. Français. NNT : . tel-01353411

HAL Id: tel-01353411
https://hal.science/tel-01353411

Submitted on 11 Aug 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE

THÈSE

pour l'obtention du titre de
Docteur de l'Université de Provence
École Doctorale : ED353 Sciences Pour l'Ingénieur
Spécialité : Mécanique des Solides

Les propriétés mécaniques des mousses polymériques à cellules ouvertes : expériences, modèle théorique et simulations numériques

par Giampiero PAMPOLINI

Soutenue publiquement le 16 novembre 2010 devant le jury composé de :

M. Pierre Gilormini	Rapporteur	PIIM, Arts et Métiers ParisTech
M. François Sidoroff	Rapporteur	École Centrale de Lyon
M. Marius Cocou	Examinateur	Université de Provence
M. Domenico De Tommasi	Examinateur	Politecnico di Bari
M. Marc François	Examinateur	FAST, IUT de Cachan- Paris Sud
M. Philippe Viot	Examinateur	LAMEFIP, ENSAM de Bordeaux
M. Gianpietro Del Piero	Directeur de thèse	Università di Ferrara
M. Michel Raous	Directeur de thèse	LMA-CNRS, Marseille

Thèse préparée en co-tutelle entre
l'Université de Provence (France) et l'Università di Ferrara (Italie).

Laboratoires d'accueil : Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique
Dipartimento di Ingegneria di Ferrara

à mes parents.

Table des matières

Introduction **1**

1 Les mousses polymériques **5**
1.1 Le matériau 6
1.1.1 Procédés de fabrication des mousses 7
1.1.2 Propriétés des mousses et leur applications 7
1.1.3 Comportement sous compression des mousses 8
1.2 Les modèles 11
1.2.1 Les réseaux cubiques 12
1.2.2 Les tétraèdres 14
1.2.3 Les tétrakaidécaèdres 14
1.2.4 Les structures aléatoires 16
1.2.5 Les mousses comme milieux continus poreux 17
1.2.6 Les mousses comme mélanges 18

2 Étude expérimentale **21**
2.1 Compression uniaxiale confinée 21
2.1.1 Équipement et procédure de test 22
2.1.2 Résultats expérimentaux 23
2.2 Compression uniaxiale non confinée 24
2.2.1 Équipement et procédure de test 26
2.2.2 Localisation des déformations 26
2.2.3 Essais en compression cyclique 26
2.2.4 Essais en compression cyclique après des périodes de repos . 28
2.2.5 Essais à différentes vitesses de charge 29
2.2.6 Expériences ultérieures en compression 30
2.2.7 Essais de relaxation 31

3 Modèle élastique **37**
3.1 L'origine du modèle 38
3.1.1 Le travail pionnier d'Ericksen 38
3.1.2 Les modèles discrets 42
3.1.3 L'application aux mousses 43
3.2 La loi de comportement tridimensionnelle 46
3.3 Le modèle discret 49
3.3.1 Conditions d'équilibre et de stabilité 49
3.3.2 Le cas explicatif d'une chaîne de deux ressorts 53

3.3.3 La réponse d'une chaîne de N ressorts 57
3.3.4 Comparaison avec les expériences 60

4 Modèles non élastiques **63**
4.1 Étude bibliographique 64
4.1.1 L'effet Mullins 64
4.1.2 Énergie non convexe et viscosité dans les mousses 67
4.1.3 Opérateur de dérivée fractionnaire pour la viscosité 69
4.2 Le modèle viscoélastique 71
4.2.1 La chaîne 71
4.2.2 Le problème d'évolution 72
4.2.3 Le problème incrémental infinitésimal 72
4.2.4 Le problème incrémental fini 73
4.2.5 Le premier changement de phase 74
4.2.6 Les changements de phase successifs 77
4.2.7 Le cas explicatif d'une chaîne de deux éléments 77
4.2.8 L'élément dissipatif à l'extérieur de la chaîne 82
4.3 Endommagement 82

5 Simulations numériques **85**
5.1 Identification des constantes matérielles 86
5.1.1 Paramètres visqueux 86
5.1.2 Fonctions de relaxation sommes d'exponentielles 87
5.1.3 Fonctions de relaxation somme de fonctions de Mittag-Leffler 90
5.1.4 Non linéarité de la viscosité 93
5.1.5 Viscosité interne et externe à la chaîne 94
5.1.6 Paramètres élastiques 95
5.1.7 Paramètre d'endommagement 98
5.2 Résultats numériques 98
5.2.1 Simulations des essais en compression cyclique 100
5.2.2 Simulations des essais à différentes vitesses de charge 101
5.2.3 Simulations d'ultérieurs essais en compression 102
5.2.4 Simulations avec endommagement 103

6 Conclusions et Perspectives **109**
6.1 Conclusions 109
6.2 Perspectives 110
6.2.1 Viscosité non linéaire 110
6.2.2 Un modèle continu 112

Bibliographie **115**

Table des figures

1.1 Exemples de microstructures d'une mousse 7
1.2 Propriétés des mousses 8
1.3 Courbes de réponse sous compression 10
1.4 Deux exemples de bandes de localisation des déformations 11
1.5 Modèle de Gibson et Ashby 13
1.6 Trois types de cellule de base 13
1.7 Modèle de Gong et al. [60] 14
1.8 Courbe de réponse du modèle de Gong et al. [62] 15
1.9 Modèle de Bertoldi [14].Courbes de réponse. 16

2.1 L'équipement utilisé 23
2.2 Micrographie de la mousse de polyuréthane utilisée dans les essais en compression 23
2.3 Courbes expérimentales en compression confinée 24
2.4 Localisation des déformations en compression confinée 25
2.5 Localisation des déformations sous compression uniaxiale 25
2.6 Courbes de réponse à 4 cycles de charge et décharge 27
2.7 Courbes de réponse à cycles à différentes amplitudes 28
2.8 Courbes de réponse après périodes de repos 29
2.9 Courbes de réponse à différentes vitesses 30
2.10 Cycles de charge et décharge de petites amplitudes 32
2.11 Essais complexes en compression cyclique 33
2.12 Essai de relaxation de 72 heures 34
2.13 Essai de relaxation de 10 jours 34
2.14 Essai de relaxation de 20 jours 34

3.1 Barre d'Ericksen. Énergie de déformation. 40
3.2 Barre de Ericksen. Courbes de réponse 42
3.3 Modèle de Gioia et al. [59]. Élément de base. 44
3.4 Modèle de Gioia et al. [59]. Courbe de réponse 45
3.5 Modèle de Gioia et al. [59]. Influence de la densité de la mousse . . 45
3.6 Diagrammes de la fonction constitutive f 48
3.7 Les deux fonctions constituives f et g 48
3.8 Modèle élastique 50
3.9 Une chaîne de deux ressorts. Forme de l'énergie de déformation. . . 53
3.10 Une chaîne de deux ressorts. Configurations d'équilibre 55
3.11 Une chaîne de deux ressorts. Courbes force -élongation. 56
3.12 Courbes de réponse pour une chaîne de 4 et 20 ressorts 57

3.13 Description de l'évolution de la déformation. 59
3.14 Cycle d'hystéresis 60
3.15 Courbes de réponse sous cycles à différentes amplitudes 61

4.1 Effet Mullins. 65
4.2 Effet Mullins idéalisé comme un effet *rate indipendent* 66
4.3 Interprétations de l'effet Mullins 66
4.4 Modèle de Romero at al. [111]. Représentation multi-échelles. 68
4.5 Modèle de Romero at al. [111]. Localisation des déformations. . . . 68
4.6 Modèle de Romero at al. [111]. Résultats. 69
4.7 Le modèle viscoélastique 71
4.8 La localisation des déformations au premier changement de phase . 77
4.9 Une chaîne de deux éléments viscoélastiques. Stabilité. 80
4.10 Une chaîne de deux éléments viscoélastiques. Évolution. 81
4.11 La prise en compte de l'endommagement. 83

5.1 Reproduction de la courbe de relaxation comme somme d'exponentielles. 91
5.2 Reproduction de la courbe de relaxation comme somme de fonctions de Mittag-Leffler. 92
5.3 Effets visqueux non linéaires. 94
5.4 Résultas de l'identification de paramètres visqueux et élastiques. . . 95
5.5 Étude de l'influence des paramètres élastiques. 96
5.6 Résultat de l'identification du paramètre d'endommagement 98
5.7 Influence du nombre d'éléments et du pas de temps. 99
5.8 Simulation numérique de 4 cycles de charge et décharge. 101
5.9 Simulations numériques de cycles à différentes vitesses. 102
5.10 Simulations numériques de cycles de petite amplitude 103
5.11 Simulations numériques d'essais complexes 103
5.12 Simulations avec endommagement. Cycles de différentes amplitudes. 105
5.13 Simulations avec endommagement. Réponse après périodes de repos. 106
5.14 Simulations avec endommagement. Cycles complexes. 107

6.1 Le modèle rhéologique étudié par Truskinovsky et Vainchtein[123] . 114
6.2 Lois cinétiques de transition de phase pour deux approximations continues du modèle rhéologique étudié dans [123]. 114

Liste des tableaux

3.1 Les valeurs des paramètres dans le modèle élastique. 60

5.1 Identification des paramètres visqueux. Convergence de la méthode. 90
5.2 Les valeurs des paramètres visqueux identifiées sur la courbe de relaxation à 5 mm/min 90
5.3 Les valeurs des paramètres des éléments fractionnaires. 92
5.4 Les valeurs des paramètres visqueux identifiées sur la courbe de relaxation à 250 mm/min 93
5.5 Les valeurs des paramètres visqueux identifiées sur la courbe de relaxation à 1 mm/min 95
5.6 Les valeurs des paramètres élastiques 98
5.7 Influence du pas de temps et du nombre d'éléments sur le temps de calcul. 100
5.8 Temps de calcul 100

Remerciements

Je souhaite exprimer ma gratitude à Gianpietro Del Piero et Michel Raous pour avoir dirigé cette thèse. Leurs vastes connaissances et leur rigueur scientifique m'ont énormément appris. J'ai pu également bénéficier d'une grande confiance et d'un encouragement constamment renouvelé.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Pierre Suquet, qui, comme directeur de l'École Doctorale, a soutenu cette thèse en permettant la résolution des problèmes administratifs initiaux. Je le remercie également pour m'avoir orienté dans le choix de mon chemin.

Je souhaite remercier Pierre Gilormini et François Sidoroff de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ce mémoire. J'adresse également mes remerciements à Domenico De Tommasi, Marc François et Philippe Viot pour leur participation au jury.

Je remercie particulièrement Marius Cocou pour avoir guidé, avec ses qualités humaines et pédagogiques exceptionnelles, mes premiers pas dans l'enseignement. Je le remercie également d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je voudrais remercier chaleureusement tous les membres du LMA, permanents, doctorants, post-doctorants ou stagiaires, et l'équipe MMC en particulier, pour m'avoir bien accueilli et pour les bons moments passés ensemble. Les échanges aussi bien scientifiques qu'amicaux on fait de ces deux années à Marseille une expérience unique.

Un remerciement particulier à Lucie pour la patience qu'elle a montrée dans la lecture de ce manuscrit et pour ses corrections de français.

À tous mes amis de longue date, j'exprime ma plus profonde affection. À tous les amis récents, je m'engage afin que notre amitié ne soit pas un éclair passager mais qu'elle devienne une référence dans le temps.

Je remercie enfin mes trois dames. Valeria, ma mère, et Elisa, ma soeur, pour leur soutien et leur amour. Barbara, mon coeur, pour m'avoir encouragé et supporté depuis longtemps. Sans toi je serais perdu.

Introduction

Dans ce travail de thèse on propose une étude sur le comportement d'une mousse polymérique à porosité ouverte sous compression uniaxiale. Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une thèse en cotutelle entre l'Université de Provence et l'Université de Ferrara, qui a été financée par une allocation de recherche du Ministère de la Recherche français et soutenue par une bourse Leonardo da Vinci de l'Université franco-italienne.

On a étudié le comportement des mousses polymériques à cause de l'importance qu'elles ont acquise ces dernières années, en raison de leurs caractéristiques mécaniques particulières et de leurs nombreuses applications. Les mousses polymériques, et les matériaux cellulaires en général, sont utilisées entre autres pour l'isolation thermique et acoustique, comme noyau des panneaux sandwich, ou encore pour l'absorption d'énergie dans les chocs. Elles sont très employées dans l'emballage. Le faible rapport rigidité/poids est particulièrement intéressant pour les structures aérospatiales. Dans le secteur biomédical, les mousses synthétiques sont utilisées pour la réalisation des prothèses et des tissus artificiels. Les développements technologiques ont permis de préparer sous forme alvéolaire quasiment tous les matériaux. Il y a des mousses de métal, de céramique, de verre, mais celles de polymère sont les plus utilisées. De plus, de nombreux matériaux naturels, comme par exemple le bois et le liège, ont une structure cellulaire.

Bien que les matériaux cellulaires soient largement utilisés, la compréhension de leur comportement sous compression n'est pas encore complète. Au cours d'essais de chargement cyclique en compression uniaxiale, conduits sur une mousse de polyuréthane, on a pu observer plusieurs phénomènes remarquables :

- une localisation des déformations en bandes de déformation perpendiculaires à la direction de la compression ;
- une différence entre la courbe de réponse à la charge et à la décharge, qui donne un cycle d'hystérésis d'amplitude importante ;
- une perte progressive de résistance à la charge au cours des cycles ;
- une dépendance de la résistance à la vitesse de chargement ;
- un effet de mémoire caractérisé par une dépendance de la réponse à l'histoire de déformation.

Ces phénomènes sont connus et évoqués dans la littérature mais il n'y a pas, à notre connaissance, de modèles satisfaisants pour les décrire dans leur ensemble.

Deux approches sont principalement utilisées pour la modélisation du comportement des mousses. La première s'intéresse à une modélisation micromécanique. La mousse est schématisée par un assemblage périodique de poutres, et la localisation des déformations est décrite par le flambement sous compression de celles-ci. Des techniques d'homogénéisation permettent le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique. La deuxième approche se fonde sur la mécanique des milieux poreux [31]. La mousse est considérée comme un matériau continu, où un squelette solide et un fluide interagissent. Dans l'approche micromécanique la plupart des travaux sont limités à la description de la courbe à la charge et de la localisation des déformations. Dans le deuxième on peut décrire la décharge mais pas la localisation.

Un des objectif de ce travail est d'étendre l'analyse du comportement à la décharge, pour caractériser convenablement le cycle d'hystérésis ce qui est fondamental pour décrire les performances du matériau en tant que dissipateur d'énergie. Pour la même raison, on considère la réponse pour des processus de charge et décharge plus complexes que le simple chargement cyclique. Un deuxième objectif est celui d'aborder l'étude des aspects inélastiques de la réponse, en particulier, les effets de mémoire et la sensibilité à la vitesse de chargement. Il faut préciser que plutôt que l'étude approfondie d'un matériau spécifique, on propose ici une étude à caractère méthodologique, en s'efforçant d'utiliser les développements récents des théories de comportement de matériaux pour décrire les phénomènes observés.

Ce manuscrit s'articule autour de six chapitres. Le premier chapitre est consacré à une description générale des mousses polymériques. On décrit d'abord les procédés de fabrication, les propriétés physiques et les principales applications. Puis, on introduit brièvement les approches utilisées le plus souvent pour la modélisation du comportement sous compression. Une attention particulière est portée aux modèles concernant les mousses polymériques à cellules ouvertes.

Dans le deuxième chapitre on décrit les expériences effectuées au sein du *Laboratorio di Materiali Polimerici* de l'Université de Ferrara durant la première année de thèse. Une première série a porté principalement sur les aspects élastiques du comportement. Dans une deuxième série, l'accent a été mis sur la caractérisation expérimentale des aspects inélastiques, et en particulier sur la relaxation et sur l'influence de la vitesse de chargement.

Dans le troisième chapitre, on présente la première étape de la modélisation. On se limite à la description de deux phénomènes : la localisation des déformations et le cycle d'hystérésis. Inspirés par les travaux de Ericksen [50], Fedelich et Zanzotto [53], Puglisi et Truskinovsky [107], nous avons choisi de décrire ces phénomènes avec un modèle élastique non linéaire. La mousse polymérique est représentée par une chaîne de ressorts avec une énergie de déformation non convexe. La non-convexité permet aux ressorts d'avoir plusieurs configurations d'équilibre possibles (*phases*), et la localisation des déformations peut donc être décrite comme un changement progressif de phase. Bien que les systèmes discrets avec énergie non convexe aient été largement étudiés dans la littérature, leur application à la des-

cription de l'hystérésis et de la localisation des déformations des mousses est originale.

Dans le quatrième chapitre de ce travail, on présente une extension du modèle pour décrire les aspects non élastiques du comportement des mousses. Sur la base de résultats expérimentaux, on considère d'abord un modèle viscoélastique. Ceci est obtenu avec l'ajout de deux éléments dissipatifs, régis par une loi de comportement linéaire de type Boltzmann Volterra. Dans un deuxième temps, on introduit la prise en compte de l'endommagement de la mousse pour décrire la perte de résistance à la charge au cours des cycles. Dans un souci de simplification, on suppose que seuls les ressorts non linéaires sont endommageables.

Le cinquième chapitre est dédié aux simulations numériques. La procédure d'identification des paramètres du modèle est d'abord présentée. Pour les éléments dissipatifs, deux types de fonction de relaxation sont envisagés : une somme d'exponentielles et une somme de fonctions de Mittag-Leffler, qui correspond à des amortisseurs dans lesquelles la force est proportionnelle à une dérivée fractionnaire de l'allongement. C'est la première qui sera retenue pour des raisons qui seront exposées. Les résultats des simulations numériques montreront que ce modèle associant élasticité non linéaire, viscoélasticité linéaire et endommagement permet une description convenable des comportements complexes observés lors de la campagne d'essais. Néanmoins, une reproduction complète de la dépendance de la réponse à la vitesse de déformation, et en particulier des effets non linéaires, demandera des développements supplémentaires.

Ce manuscrit se conclue avec un sixième chapitre, qui présente des considérations finales et une analyse de perspectives à court terme. La première perspective envisagée prévoit la prise en compte des effets visqueux non linéaires. La deuxième considère le développement d'un modèle unidimensionnel continu, dans lequel la chaîne de ressorts est remplacée par une barre viscoélastique endommageable avec énergie élastique non convexe.

Chapitre 1

Les mousses polymériques

Sommaire

1.1 Le matériau 6
1.1.1 Procédés de fabrication des mousses 7
1.1.2 Propriétés des mousses et leur applications 7
1.1.3 Comportement sous compression des mousses 8
1.2 Les modèles 11
1.2.1 Les réseaux cubiques 12
1.2.2 Les tétraèdres 14
1.2.3 Les tétrakaidécaèdres 14
1.2.4 Les structures aléatoires 16
1.2.5 Les mousses comme milieux continus poreux 17
1.2.6 Les mousses comme mélanges 18

L'étude du comportement des matériaux poreux est devenu un sujet de recherche important, suite à l'intérêt croissant de la part des industriels du fait de leurs caractéristiques : faible densité, bonne isolation thermique et électrique, et une surface spécifique élevée. En effet, les mousses polymériques sont le résultat de la volonté d'introduire de façon maîtrisée, une certaine proportion de cavités dans un squelette de matrice en polymère. Ceci dans le but :

- d'alléger le matériau,
- d'améliorer le caractère isolant, thermique ou phonique (mousses pour le bâtiment),
- de rendre le matériau amortissant (mousses d'emballage).

Sous compression, les mousses montrent un mécanisme de déformation caractéristique. Initialement, la déformation est homogène et la courbe de réponse force élongation est presque linéaire. Puis, on observe un écrasement progressif des cellules par flambement des arêtes. Du point de vue macroscopique, cela correspond à une localisation des déformations en bandes orthogonales par rapport à la direction de la compression. À ce stade, la courbe force élongation montre un long palier. Lorsque toutes les couches des cellules sont écrasées, les arêtes sont en contact entre eux. Ceci donne une augmentation de la résistance et la courbe de réponse montre une deuxième branche ascendante.

La modélisation du comportement des mousses en général, et des mousses polymériques à cellules ouvertes en particulier, se fonde sur deux approches : une modélisation micromécanique basée sur des études numériques, et une modélisation macromécanique qui utilise les outils de la mécanique des milieux continus. Avec la première approche, on cherche à relier le comportement des mousses sous compression aux caractéristiques de leur microstructure. Pour cela, on analyse la microstructure, à l'aide d'instruments optiques, afin de déceler une forme géométrique répétitive des cellules (*cellule de base*). La mousse est schématisée comme un assemblage périodique de poutres qui ressemble le plus possible à la cellule de base. La localisation des déformations est décrite comme un effondrement par flambement des poutres. Pour obtenir une reproduction convenable des courbes expérimentales, il faut considérer des assemblages complexes de poutres, qui demandent l'emploi de codes de calcul par éléments finis. À notre connaissance, les travaux qui utilisent cette approche sont limités à l'étude du comportement sous chargement monotone. Une modélisation macromécanique des mousses peut être obtenue ou dans le contexte de la mécanique des matériaux poreux, qui se base sur les travaux de Biot [18, 19], ou dans le contexte de la théorie des mélanges. Dans ce dernier cas, la mousse est décrite comme un assemblage de deux matériaux continus : un squelette solide et un fluide.

Ce premier chapitre est composé de deux sections. Dans la section 1.1 on décrit les propriétés des mousses, en accordant une attention particulière à leur comportement sous compression. La section 1.2 est dédiée à la présentation des deux approches les plus utilisées dans la littérature. On notera que l'approche utilisée dans cette thèse est une voie originale qui se démarque de la plupart des formulations traditionnelles sur le sujet. Par conséquent, les travaux cités ici sont rappelés seulement pour présenter le contexte général, et donc nous n'en ferons pas une présentation exhaustive et détaillée mais seulement une revue des grandes lignes.

1.1 Le matériau

Les mousses polymériques sont des matériaux alvéolaires, constitués d'un squelette solide entourant des alvéoles. Deux grandes catégories peuvent être distinguées : les matériaux cellulaires à porosité fermée et à porosité ouverte. Pour les premiers les alvéoles sont fermées. Pour les deuxièmes les alvéoles sont ouvertes sur les alvéoles voisines et sur l'extérieur. Sur la Fig. 1.1 a, b, on montre les deux microstructures différentes. On observe que dans une mousse à porosité ouverte il n'y a que les arêtes des cellules qui sont constituées de polymère solide, alors que dans une mousse à porosité fermée les faces des cellules sont également solides. Bien entendu, suite à une ouverture partielle des pores pendant le procédé de fabrication, il peut exister aussi des mousses à porosité ouverte et partiellement fermée, voir Fig. 1.1c. Dans cette thèse, on s'intéressera plus particulièrement aux mousses polymériques à porosité ouverte.

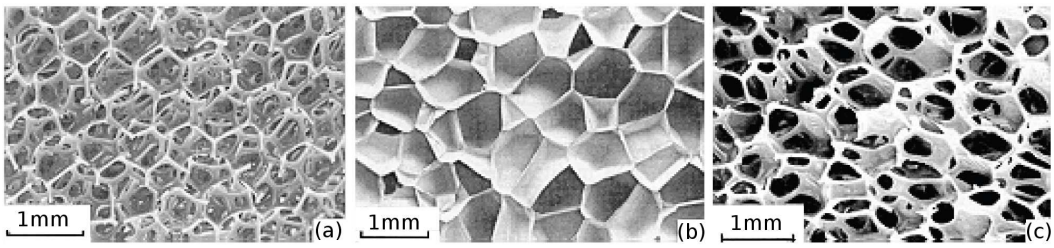


Figure 1.1 – Exemples de microstructures d'une mousse : (a) polyurethane à porosité ouverte ; (b) polyéthylène à porosité fermée ; (c) polyéther à porosité ouverte et fermée [58].

1.1.1 Procédés de fabrication des mousses

Quasiment tous les matériaux peuvent être obtenus sous une forme alvéolaire. Il existe des mousses en métal, en céramique, en verre, mais les mousses en polymère sont les plus utilisées. Parmi les différentes techniques de préparation des matériaux cellulaires, nous pouvons distinguer deux méthodes principales : l'utilisation d'un agent de soufflage ou l'utilisations d'émulsions.

Avec la première technique, deux types d'agents de soufflage sont normalement utilisés : les agents physiques et les agents chimiques. Les agents physiques sont des liquides avec une température d'ébullition près de la température ambiante. Pendant le procédé de fabrication, la pression élevée ne permet pas au liquide de passer à l'état gazeux. La formation des boules commence dès que le produit sort du moule. Les composés fluoro-chlorés furent les principaux agents physiques utilisés. Les nouvelles lois environnementales ont interdit l'utilisation de ces composés. Les agents chimiques sont des substances qui se décomposent à température élevée en libérant un gaz. En particulier, la fabrication de mousses de polyuréthane, celles utilisées dans ce travail de thèse, se fait grâce à la réaction des monomères isocyanates avec l'eau qui libère le CO_2 nécessaire à la formation de la mousse,

$$-N = C = O + H_2O \rightarrow -NH_2 + CO_2 \uparrow \ .$$

Plus grande est la quantité d'eau injectée et plus importante est la quantité de gaz produite. La densité finale dépendra de la quantité d'eau utilisée.

La deuxième technique utilise des émulsions. Elle consiste en deux étapes : on polymérise la phase liquide de l'émulsion et, une fois la matrice rigide formée, on extrait la phase dispersée par thermodégradation, évaporation, ou par l'action d'un solvant. Plus de détails sur les procédés de fabrication peuvent être trouvés dans [54].

1.1.2 Propriétés des mousses et leur applications

Préparer un matériau sous forme alvéolaire permet de changer ses propriétés. Sur la Fig. 1.2, on reprend un schéma de [58] qui compare la densité et la conductivité thermique entre les mousses et d'autres matériaux.En particulier, sur cette figure on voit qu'une des caractéristiques des matériaux alvéolaires est la faible

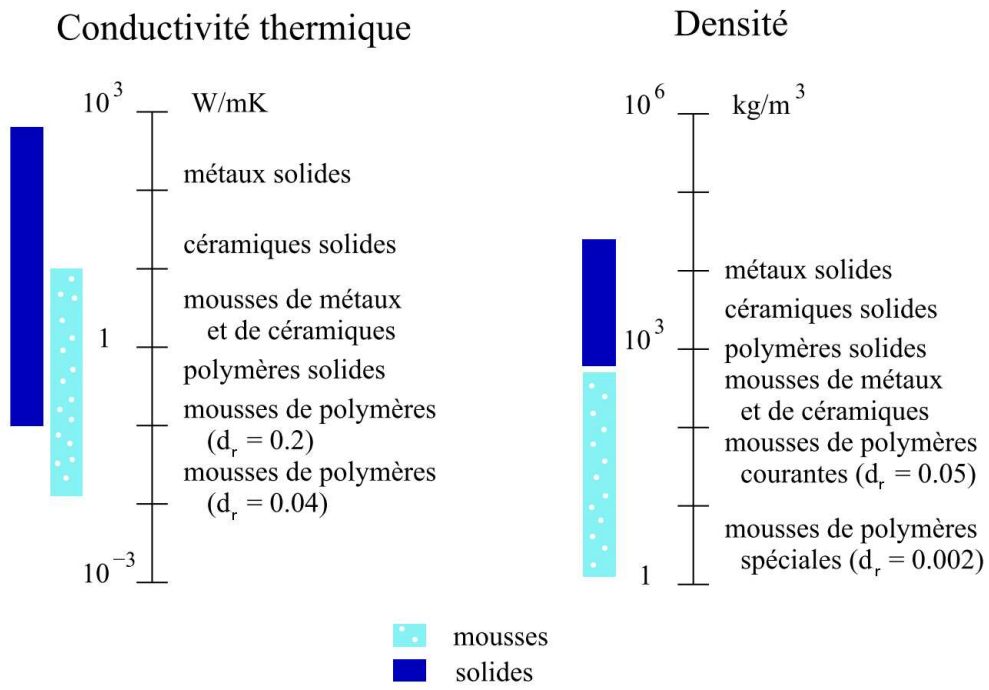


Figure 1.2 – Schéma comparatif de la conductivité thermique et de la densité des mousses et des solides [58].

conductivité thermique. Cela permet une isolation thermique fiable et économique. Par exemple, les mousses polymériques trouvent application pour l'isolation thermique des bâtiments, des camions frigorifiques et des bateaux qui transportent gaz naturel. De plus, les mousses polymériques à cellules ouvertes sont des bons isolants acoustiques.

Une autre caractéristique principale des matériaux alvéolaires est leur faible densité. Si, par exemple, les polymères ont une densité entre 800 et 1200 kg/m^3, une mousse polymérique a une densité d'environ 30 kg/m^3. Les faibles densités permettent l'utilisation dans la construction pour fabriquer des structures légères. En effet, les mousses polymériques sont largement utilisées comme noyau des panneaux sandwich. Elles trouvent leur emploi pour les châssis des avions, des yachts, des véhicules spatiaux, des skis et principalement dans toutes les structures où le poids joue un rôle important. De plus, les mousses polymériques à porosité ouverte, grâce à leur compressibilité élevée, sont idéales pour le rembourrage des coussins, sièges et canapés. En effet, leur faible coût par unité de volume encourage leur utilisation.Enfin, les mousses polymériques trouvent large emploi dans l'emballage et dans l'absorption d'énergie due au choc, grâce à leur comportement caractéristique sous compression. Ceci fera l'objet de la prochaine section.

1.1.3 Comportement sous compression des mousses

Sur la Fig. 1.3, on montre les courbes force élongation sous compression uniaxiale pour différents types de mousses trouvées dans la littérature [11, 60, 73, 89].

D'abord, on considère le comportement des **mousses à porosité ouverte de polymère thermoplastique**, Fig. 1.3a. Si l'on regarde la courbe à la charge (courbe pleine), on peut distinguer trois régimes : une première branche ascendante presque linéaire (*régime linéaire*), suivie par un palier à force presque constante (*régime plateau*), et enfin une seconde branche ascendante (*régime de densification*). La particularité de la courbe de réponse est le long palier, qui permet d'atteindre des déformations de 50-70 %. Lors de ce régime, on observe une distorsion du squelette de la mousse à cause du flambement des arêtes des cellules. Du point de vue macroscopique, le flambement des arêtes produit une localisation des déformations en bandes orthogonales à la direction de la compression [83, 126, 128], voir Fig. 1.4. Lors de l'augmentation de la déformation imposée le nombre des bandes de déformation augmente jusqu'au complet effondrement de la mousse. À ce stade, les arêtes des cellules sont en contact les unes avec les autres, tous les vides sont remplis, et si l'on continue à comprimer la mousse, la résistance augmente rapidement (régime de densification).

À la décharge (courbe en pointillés sur la Fig. 1.3a), la courbe de réponse ne suit pas le même chemin, et un cycle d'hystérésis d'amplitude très importante se forme. L'aire du cycle d'hystérésis mesure l'énergie dissipée dans le processus de charge et décharge. Un cycle d'hystérésis important permet une grande absorption d'énergie. À la fin de la phase de décharge, on observe une petite déformation résiduelle. Donc, une autre particularité du comportement de ce type des mousses est d'atteindre des grandes déformations qui peuvent être presque entièrement récupérées lorsque la charge est enlevée. Les mousses à porosité ouverte de polymère thermoplastique feront l'objet de notre étude expérimentale, qui sera présentée dans le deuxième chapitre. Dans la suite, on compare le comportement des mousses polymériques au comportement d'autres mousses.

Pour les **mousses à porosité fermée de polymère thermoplastique** (Fig. 1.3 b), on observe un palier avec une pente positive. Celle-ci est attribuée à la présence du gaz, qui est pris au piège dans les cellules [58]. Dans ce cas, un cycle d'hystérésis est également observé à la décharge.

Les courbes de réponse des **mousses métalliques** à porosité ouverte comme à porosité fermée montrent à la charge le même comportement à trois branches, voir Fig. 1.3c, d. Mais, la valeur de la force au palier est supérieure de trois ordres de grandeur à celle des mousses polymériques à porosité ouverte. D'autre part, la Fig. 1.3f montre que les comportements à la décharge sont très différents. En effet à la décharge, on suit une courbe presque verticale, et on observe une déformation résiduelle importante. Ce comportement est attribué à la plastification des jonctions des arêtes des cellules lors du régime plateau [11, 42].

Enfin, si l'on considère les courbes de réponse des **mousses de polymère thermodurcissable** ou de **céramique**, on n'observe que les deux premiers régimes : la branche linéaire et le palier. En effet dans le palier, des fissures se forment qui mènent à la rupture de l'échantillon. Dans la prochaine section, on présentera les différentes approches menées dans la littérature pour décrire le comportement des mousses polymériques.

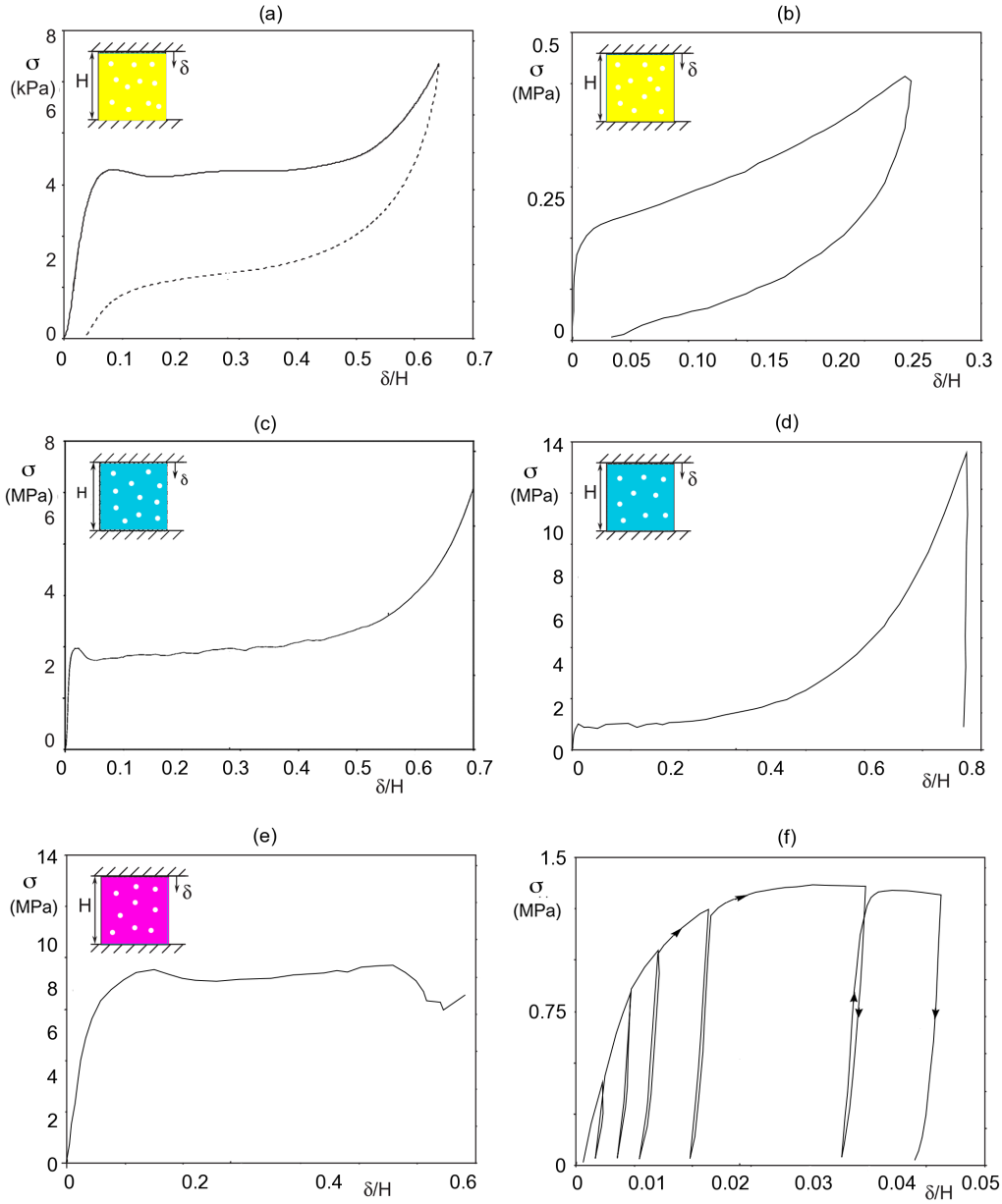


Figure 1.3 – Courbes de réponse sous compression des différents types de mousses : (a) mousse de polymère thermoplastique à porosité ouverte [60] ; (b) mousse de polymère thermoplastique à porosité fermée [89] ; (c) mousse d'aluminium à porosité ouverte [73] ; (d), (f) mousse d'aluminium à porosité fermée [11] ; (e) mousse de polymère thermodurcissable [74].

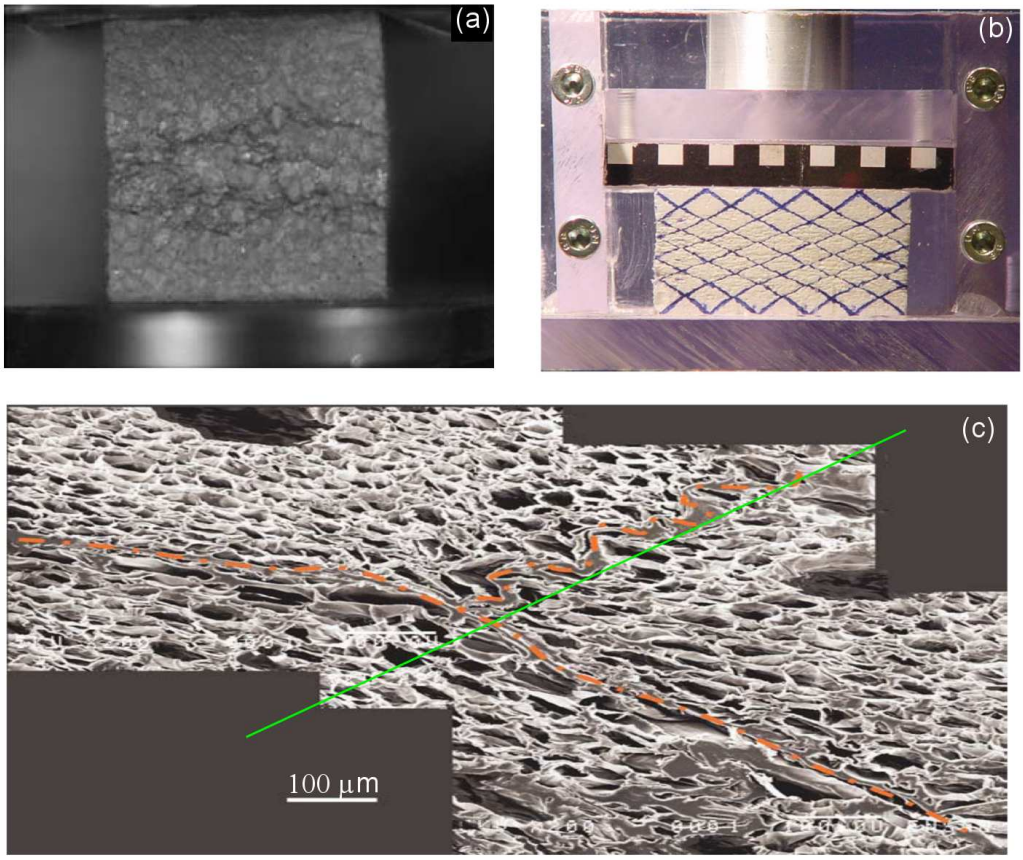


Figure 1.4 – Deux exemples de bandes de localisation des déformations sous compression observées par Viot et al. [127] (a) et par Laroussi [83] (b) (c) Image au SEM qui montre le mécanisme de déformation par flambement des arêtes des cellules [126]. La ligne en trait plein montre la direction du chargement.

1.2 Les modèles

Pour la description du comportement en compression des mousses, une approche très répandue dans la littérature est la modélisation micromécanique. Cette approche se fonde sur l'étude de la microstructure des mousses et sur sa reproduction dans un code de calcul. On schématise la microstructure réelle comme des assemblages périodiques de poutres. Ces assemblages doivent être les plus simples possible en permettant également de reproduire les caractéristiques principales du comportement. Le but est de relier les caractéristiques du comportement mécanique, comme par exemple la pente initiale de la courbe de réponse, aux caractéristiques de la microstructure, comme par exemple la densité relative. Les modèles micromécaniques montrent des difficultés dans la description du comportement des mousses pour des grandes déformations, en particulier du régime de densification, caractérisé par le contact entre les arêtes. De plus, ils ne donnent aucunes informations sur le comportement à la décharge.

Une autre approche considère une modélisation macromécanique. Dans ce cas la mousse est considérée comme un matériau continu. Son comportement est décrit

dans le contexte de la mécanique des matériaux poreux ou de la théorie des mélanges. Cet approche soulève des difficultés dans la description de l'instabilité matérielle qui induit la localisation des déformations.

Dans cette section, on présente des modèles utilisés pour les mousses polymériques à cellules ouvertes. Pour la modélisation micromécanique, on regroupe les travaux par description géométrique de la microstructure. Pour la modélisation macromécanique, on introduit brièvement le travail de Biot sur les matériaux poreux [18], et on donne les idées principales de la théorie des mélanges [23, 34, 121].

1.2.1 Les réseaux cubiques

La première schématisation de la microstructure des mousses, introduite par Gent et Thomas [55], utilise un réseau cubique périodique de poutres. L'analyse de Gent et Thomas se limite à l'étude du régime linéaire. En accord avec les résultats expérimentaux, le modèle relie la dépendance de la pente de la courbe de réponse à la densité relative de la mousse.

Une importante contribution à la modélisation des mousses a été fournie par Gibson et Asbhy [57, 58]. En particulier dans [58], les mousses à porosité ouverte sont schématisées comme un réseau de cubes dont chaque arête est une poutre de section carrée, voir Fig. 1.5a. La simplicité de la cellule de base permet d'introduire seulement deux paramètres géométriques : l, la longueur des poutres et t, le côté du carré de la section droite. La densité relative est liée aux paramètres géométrique l et t par la relation :

$$d_r = \left(\frac{t}{l}\right)^2 . \tag{1.1}$$

Gibson et Asbhy considèrent un comportement linéaire élastique des poutres, et ils supposent comme mécanisme de déformation dans le régime linéaire la seule flexion des poutres horizontales, voir Fig. 1.5b). En appliquant les résultats de la théorie des poutres, ils déterminent le module de Young E_m et le module de cisaillement G_m de la mousse en fonction de la densité relative d_r et du module de Young E_p du matériau des poutres :

$$\begin{aligned} E_m &= c_1\, E_p\, d_r^2 \,, \\ G_m &= c_2\, E_p\, d_r^2 \,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

En considérant les valeurs $c_1 = 1$, $c_2 = 3/8$, ils trouvent des résultats en accord avec les expériences.

Pour calculer la charge critique, qui détermine le début du régime plateau, Gibson et Ashby analysent le flambement des poutres verticales. En appliquant la formule d'Euler pour la contrainte critique, on a que :

$$\sigma_c = c_3\, E_p\, d_r^2 \,, \tag{1.3}$$

où c_3 est une constante positive. Pour le cas particulier des mousses de polyuréthane à porosité ouverte, Gibson et Ashby proposent la valeur $c_3 = 0.05$. Le régime plateau se termine dès que toutes les cellules se sont écrasées et que la mousse est

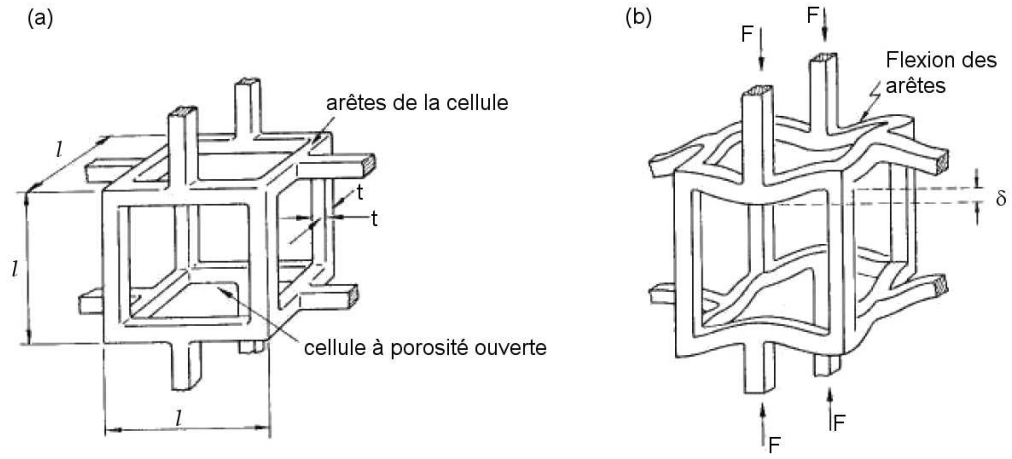


Figure 1.5 – Modèle de Gibson et Ashby [58]. Cellule de base (a) et mécanisme de déformation sous compression (b).

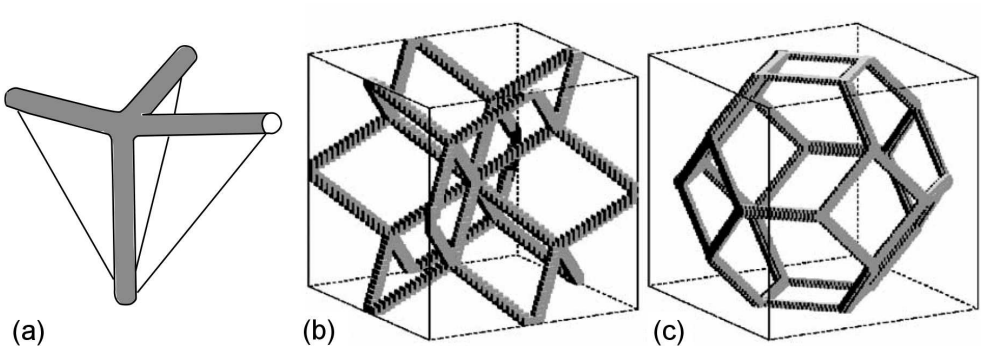


Figure 1.6 – Trois types de cellule de base utilisées pour la modelisation du comportement des mousses à porosité ouverte. (a) Le tétraèdre étudié par Zhang et Ashby [131], (b) le dodécaedre rhombique étudie par Ko [77] et la cellule de Kelvin [119].

compacte. Dans le modèle de Gibson et Ashby, cette transition a lieu pour une déformation ε_d qui dépend de la densité relative :

$$\varepsilon_d = 1 - 1.4\, d_r^2\,. \tag{1.4}$$

Ce modèle se caractérise par sa simplicité. Il permet d'obtenir une estimation du comportement mécanique d'une mousse à partir du module de Young E_p et de la densité relative d_r. Mais le modèle introduit des fortes simplifications : les déformations axiales des poutres ne sont pas prises en compte, et la microstructure de la mousse est très idéalisée. De plus, l'hypothèse que les arêtes des cellules soient des poutres à section droite constante n'est raisonnable que pour des mousses avec une faible densité relative ($d_r = 0.01$) [118].

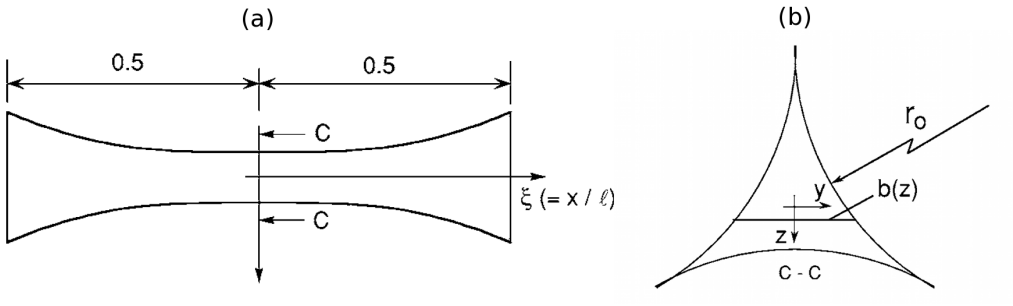


Figure 1.7 – Modèle de Gong et al. [60]. Section longitudinale (a) et transversale (b) d'une arête.

1.2.2 Les tétraèdres

Zhang et Ashby [131] proposent une cellule de base en forme de tétraèdre : un assemblage de quatre poutres faisant toutes deux à deux un angle de 109°, voir Fig. 1.6. Ils considèrent un chargement imposé en contrainte appliquée au niveau macroscopique, dont ils calculent les résultants sur chacune des quatre poutres. Les déformations des poutres sont déterminées en supposant un comportement linéaire élastique. Pour obtenir la réponse macroscopique, Zhang et Ashby introduisent une opération de moyenne. Leur analyse est limitée à la description du régime linéaire de la courbe de réponse.

La même description géométrique a été utilisée dans [129]. Warren et Kraynik considèrent des arrangements avec orientations différentes des tétraèdres. Le comportement macroscopique est obtenu comme moyenne sur toutes les orientations. Pour la pente de la première branche de la courbe de réponse force-déformation, Warren et Kraynik obtiennent le même résultat que Gibson et Asbhy (1.2), où la valeur de la constante c_1 dépend de la section droite des poutres (0.91 pour une section droite circulaire, et 1.1 pour une section triangulaire).

1.2.3 Les tétrakaidécaèdres

Des cellules de base plus complexes, comme par exemple le dodécaèdre rhombique [77, 105] ou la partition périodique de Kelvin [119], montrées sur la Fig. 1.6), ont été utilisées afin d'obtenir une description plus soignée du comportement des mousses. La partition de Kelvin, en particulier, a été utilisée par plusieurs auteurs [60, 61, 73, 117, 118, 130, 133], car elle est la structure périodique qui s'approche le plus de la microstructure réelle des mousses. La partition proposée par Kelvin est un tétrakaidécaèdre, un polyèdre à 14 faces, huit hexagonales et sis carrées, avec les arêtes de la même longueur. Cette structure a été proposée par Lord Kelvin comme étant une solution possible du problème de paver l'espace avec des cellules de volume unité telles que l'aire totale des interfaces soit minimale [119].

Dans la suite on présente le modèle proposé par Gong et al. [60, 61, 62]. Ils considèrent une cellule de Kelvin avec des arêtes à section droite de forme épicycloïdale avec trois cuspides (voir Fig. 1.7). De plus, les auteurs considèrent

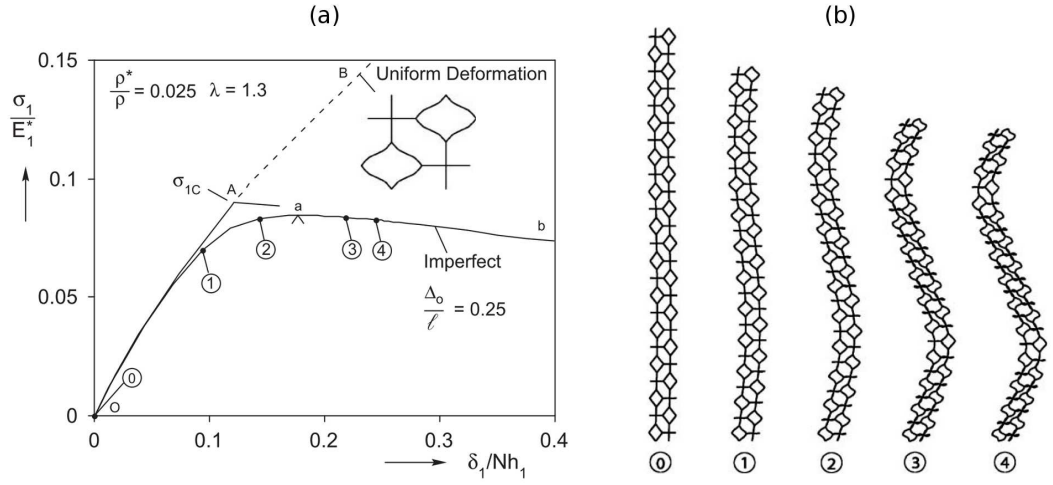


Figure 1.8 – Modèle de Gong et al. [62]. Courbe de réponse (a) et mode de déformation (b) d'une chaîne de 12 cellules de Kelvin sous compression.

une variation de l'aire des arêtes le longue de la longueur. Pour prendre en compte les effets du procédé de fabrication, qui induit un allongement des cellules dans la direction de l'expansion, Gong et al. supposent que les arêtes verticales sont de longueur différente. Cette hypothèse est également introduite en [117]. L'analyse du comportement dans le régime linéaire est réalisée avec un code de calcul par éléments finis (ABAQUS).

En [62], Gong et al. étudient également le régime plateau. Ils montrent que le début du palier correspond à un point de bifurcation, où la solution homogène, avec une déformation uniforme dans la mousse, devient instable. La valeur de la charge critique est calculée en utilisent la théorie des ondes de Bloch (voir aussi [56, 120]). Cette approche consiste à considérer la réponse incrémentale de la cellule de base, et à déterminer la valeur de la charge pour laquelle il existe un champ de déplacement $u(x)$, solution du problème d'équilibre incrémentale, sous la forme

$$u(x) = U_o(x) \exp(i\omega\, x)\,. \tag{1.5}$$

Ici $U_o(x)$ est une fonction périodique avec la même périodicité de la cellule de base, et ω est le vecteur des nombres d'onde des modes de bifurcation. Le comportement post-bifurcation est déterminé en imposant une imperfection correspondante au premier mode critique. Les résultats pour une colonne de 12 cellules sont montrés sur la Fig. 1.8. On observe que la méthode permet l'identification de la valeur critique de la charge, ainsi que le mode de flambement correspondant. Dans le cas où des imperfections de la structure sont prises en compte, on obtient une transition plus graduelle entre la première branche et le plateau, voir Fig. 1.8.

Le problème de la stabilité de structures périodiques a été étudié par plusieurs auteurs [14, 90, 120]. Par exemple, Bertoldi et al. [14] ont étudié une structure carrée avec des vides circulaires, et une structure rectangulaire avec des vides de forme elliptique. Les résultats expérimentaux ainsi que les résultats des simulations numériques montrent qu'un effet d'instabilité locale cause la localisation des

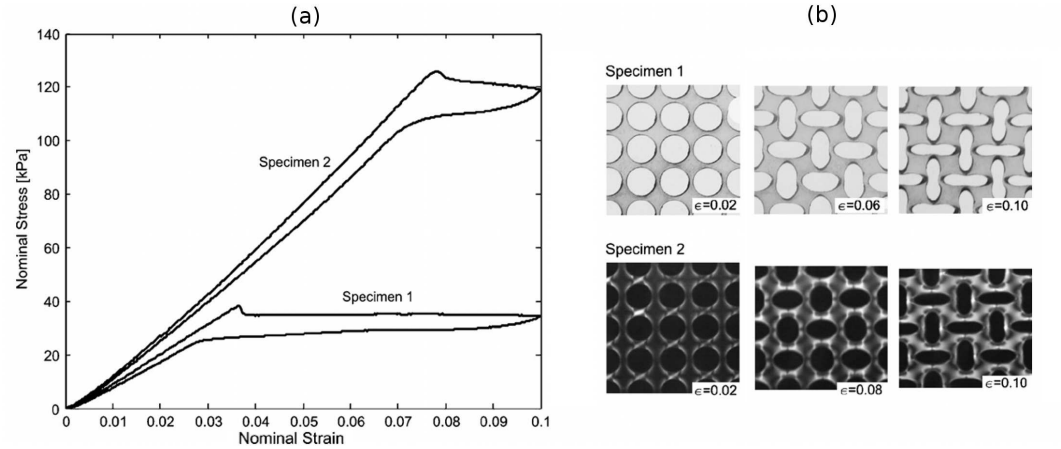


Figure 1.9 – Modèle de Bertoldi [14]. Courbes de réponse (a) et mécanismes de déformation (b) dans deux structures périodiques carrées avec vides circulaires de la même taille mais différent espacement : 9.97 mm (Specimen 1) et 10.97 mm (Specimen 2).

déformations en bandes et la formation d'un pattern de déformations, c'est-à-dire une organisation périodique particulière des cellules, voir Fig. 1.9b. De plus, leur analyse montre que les courbes de réponse, et en particulier le niveau et la longueur du plateau, varient si l'on modifie la distance entre les pores, voir Fig. 1.9a.

Le régime plateau se termine lorsque toutes les cellules sont écrasées. Le contact entre les arêtes des cellules explique la forte pente, qui caractérise la deuxième branche ascendante de la courbe de réponse. La modélisation numérique de ce régime, où les arêtes sont en contact entre elles, est très délicate. Gong et Kyriakides [61] dépassent la difficulté en introduisant un ressort qui relie les deux extrémités de la cellule. Ce ressort, qui s'active lorsque la cellule est écrasée, empêche le contact des arêtes.

Le modèle de Gong et Kyriakides donne une correcte description du mécanisme d'effondrement des mousses, et il reproduit convenablement la courbe de réponse expérimentale. Ce travail montre également que pour obtenir des résultats convenables, une modélisation micromécanique nécessite d'une description fine de la microstructure. L'étude est limitée à la description du comportement à la charge.

1.2.4 Les structures aléatoires

Dans certains cas, la représentation d'une mousse comme une structure périodique est trop idéalisée [110]. En effet, dans l'analyse de la microstructure réelle, il n'est pas toujours facile d'identifier une cellule de base répétitive. Pour cette raison certains auteurs [28, 65, 84, 110, 115] ont schématisé les mousses comme des structures aléatoires.

Une des méthodes utilisées pour obtenir des assemblages aléatoires des poutres est le pavage de Voronoï [84, 125]. Dans cette méthode, les cellules sont formées

à partir d'une distribution aléatoire de points. Autour de chaque point il y a une région de l'espace qui sera plus proche de ce point que des autres. Cette région définit une cellule de Voronoï. La structure est obtenue en plaçant une poutre à chaque arête des cellules de Voronoï.

Une méthode différente pour obtenir une structure aléatoire a été proposée par Roberts [110]. Il utilise un champ GRF (Gaussian Random Field) $y(x)$, qui assigne à chaque point un numéro aléatoire. Un matériau poreux peut être défini en imposant que la région des points où $-\beta < y(x) < \beta$ soit solide et que la région complémentaire soit vide. Une structure cellulaire à porosité ouverte peut être obtenue comme intersection de deux modèles GRF avec deux valeurs différentes de β. Des codes de calcul par éléments finis sont enfin utilisés pour étudier le comportement de ces assemblages aléatoires de poutres.

Plusieurs détails sur la modélisations micromécanique peuvent être trouvés dans la thèse de Laroussi [83], ou dans les livres de Gibson et Asbhy [58] et de Mils et al [93].

1.2.5 Les mousses comme milieux continus poreux

La première contribution importante à la compréhension du comportement des matériaux poreux a été donnée par les travaux de Fillunger et von Terzaghi au début de XXème siècle. Tous les deux professeurs à la Technische Hochschule de Vienne, et tous les deux intéressés par le dimensionnement des digues, ils étudièrent d'abord les solides poreux rigides saturés de liquide. Leurs expériences ont montré que la résistance d'un matériau poreux ne dépend pas de la pression du liquide qui est à l'intérieur des pores. Cette évidence les a menés à l'introduction du concept de "contrainte efficace", encore aujourd'hui bien utilisé.

C'est Biot [18], élève de von Terzaghi, qui, en généralisant les résultats de von Terzaghi au cas tri dimensionnel, donna une contribution décisive à la modélisation des matériaux poreux. Biot suppose que le comportement de la partie solide est élastique linéaire, que le liquide est incompressible, et que l'hypothèse de petites déformations est applicable. La loi de comportement devient

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{E} + (\lambda\mathbf{E}\cdot\mathbf{I} - \alpha\sigma)\mathbf{I} \tag{1.6}$$

où σ est la pression du liquide, μ et λ sont les constantes de Lamé, α est une constante positive, $\mathbf{T}$ est le tenseur de contrainte de Cauchy et $\mathbf{E}$ est le tenseur de déformations linéarisé,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^{\,T})\,, \tag{1.7}$$

où $\vec{u}$ est le déplacement du squelette. Une variable ultérieure θ est introduite pour prendre en compte la variation de la quantité de liquide dans les pores. En supposant que la variation de la quantité de liquide dans les pores dépend seulement de la contrainte hydrostatique dans le solide, Biot propose la relation

$$\theta = \frac{\alpha}{3\lambda + 2\mu}\mathbf{T}\cdot\mathbf{I} + \frac{\sigma}{R}\,, \tag{1.8}$$

où R est une constante positive. De l'hypothèse d'incompressibilité du liquide on obtient

$$\dot{\theta} = -\mathrm{div}\vec{v}\,, \tag{1.9}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse d'écoulement du liquide. Les forces de volume et les forces d'inertie étant négligées, la condition d'équilibre devient

$$\mathrm{div}\mathbf{T} = 0\,. \tag{1.10}$$

Le système d'équations donné par la condition d'équilibre, la loi de comportement (1.6), et la relation (1.7) ne permet pas de déterminer les déplacements $\vec{u}$ et la pression du liquide σ. Le problème est résolu en introduisant la loi de Darcy [34]

$$\vec{v} = -k\,\mathrm{grad}\,\sigma, \tag{1.11}$$

où k est le coefficient de perméabilité.

En 1956, Biot développe la théorie en dynamique pour décrire la propagation des ondes dans les milieux poreux [19]. Plus tard, Biot [20] étendra la théorie en grandes déformations avec une formulation lagrangienne qui introduit une variable d'apport de masse fluide. La même approche sera reprise par d'autres auteurs [30, 31]. En particulier, Coussy [31] a réorganisé la théorie de Biot dans le contexte plus général de la thermodynamique des matériaux continus ouverts polyphasés. De nombreux détails de cette approche se trouvent dans le livre de Coussy [31].

1.2.6 Les mousses comme mélanges

La mousse est représentée comme une superposition de deux milieux continus, le squelette et le fluide, qui peuvent interagir et qui ont une cinématique différente. Cette approche considère une échelle microscopique où le squelette et le fluide sont distinguables, et une échelle macroscopique où les deux composants sont superposés. Pour prendre en compte ces deux échelles, on introduit deux vecteurs position : r qui décrit les points au niveau de la microstructure, et x qui identifie les points à l'échelle macroscopique.

À l'échelle microscopique on considère que, dans un volume de contrôle ν, chaque composant, squelette et fluide, occupe seulement le volume ν^s, et ν^f respectivement. À l'échelle macroscopique tous les deux constituants sont superposés et ils occupent le même point x. Pour le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique on introduit une opération de moyenne. Pour cela, différentes techniques peuvent être utilisées [23]. Une technique très répandue est la moyenne sur les volumes. Si $f^\alpha(r,t)$ est une grandeur du constituant α définie à l'échelle microscopique, on définit sa moyenne $< f^\alpha > (x,t)$ à l'échelle macroscopique comme :

$$< f^\alpha > (x,t) = \frac{1}{\nu}\int_\nu f^\alpha(r,t)\chi^\alpha(r,t)\,dV\,, \tag{1.12}$$

où $\chi^\alpha(r,t)$ est la fonction indicatrice,

$$\chi^\alpha(r,t) = \begin{cases} 1 & \text{if } r \in \nu^\alpha\,, \\ 0 & \text{if } r \notin \nu^\alpha\,. \end{cases} \tag{1.13}$$

Dans la plupart des cas, la description Eulérienne est également préférée à l'échelle macroscopique. Avec l'opération de moyenne, on peut relier les vitesses macroscopiques $v_\alpha(x,t)$ aux vitesses microscopiques $v^\alpha(r,t)$

$$< \rho^\alpha > \vec{v}_\alpha(x,t) =< \rho^\alpha \, \vec{v}^\alpha(z,t) > , \quad \alpha = s,\, f \, , \tag{1.14}$$

où ρ^α est la densité relative du composant α.

Les lois de bilan pour les grandeurs moyennées à l'échelle macroscopique sont obtenues à partir des lois de bilan à l'échelle microscopique. On impose que chaque composante du mélange satisfait les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement en forme eulérienne à l'échelle microscopique :

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho^\alpha \, \vec{v}^\alpha) = 0 \, , \tag{1.15}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{T}^\alpha + \rho^\alpha \, \vec{b} = \rho^\alpha \, \vec{a}^\alpha, \tag{1.16}$$

où ρ^α, $\vec{v}^\alpha$, $\vec{a}^\alpha$ sont respectivement la densité, la vitesse et l'accélération du composant α, $\mathbf{T}^\alpha$ est le tenseur de contrainte de Cauchy, et b représente les forces de volume que l'on suppose être uniformes et identiques pour les deux constituants . En utilisant l'opération de moyenne et en négligeant le terme d'accélération, on obtient les équations de bilan à l'échelle macroscopique :

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_\alpha \, \vec{v}_\alpha) = 0 \, , \tag{1.17}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{T}_\alpha + \rho_\alpha \, \vec{b} + c^\alpha \vec{f}^{int} = 0 \qquad c^s = 1 \quad c^f = -1 \, , \tag{1.18}$$

où $\rho_\alpha =< \rho^\alpha >$, $\mathbf{T}_\alpha =< \mathbf{T}^\alpha >$ et f^{int} sont les forces d'interaction fluide-squelette, qui sont déduites de la loi de Darcy.

Les modèles dans la littérature diffèrent par le choix des lois de comportement. Par exemple, Ehlers et Markert [48] modélisent les mousses polymériques comme une mélange d'un gaz parfait et un squelette viscoélastique. La pression du gaz dans les pores est gouvernée par la loi de Boyle et Mariotte, et le squelette est décrit par le modèle viscoélastique de Maxwell avec une réponse à l'équilibre non linéaire. Pour une présentation complète de la théorie des mélanges, on cite [23, 34, 121].

Chapitre 2

Étude expérimentale

Sommaire

2.1 Compression uniaxiale confinée 21
2.1.1 Équipement et procédure de test 22
2.1.2 Résultats expérimentaux 23
2.2 Compression uniaxiale non confinée 24
2.2.1 Équipement et procédure de test 26
2.2.2 Localisation des déformations 26
2.2.3 Essais en compression cyclique 26
2.2.4 Essais en compression cyclique après des périodes de repos 28
2.2.5 Essais à différentes vitesses de charge 29
2.2.6 Expériences ultérieures en compression 30
2.2.7 Essais de relaxation 31

Dans ce chapitre on présente la campagne expérimentale effectuée au *Laboratorio di Materiali Polimerici* de l'Université de Ferrara pendant la première année de thèse. L'objet d'étude est le comportement sous compression d'une mousse de polymère thermoplastique à porosité ouverte.

On a effectué des essais en compression confinée, décrits dans la section 2.1, qui ont confirmé le comportement sous compression précédemment présenté : une courbe de réponse à trois branches, et une déformation non homogène de l'éprouvette. Dans la section 2.2, on présente la deuxième campagne expérimentale, avec des essais en compression cyclique plus complexes, qui ont permis une caractérisation mécanique complète du comportement des mousses. Ces expériences montreront l'apparition d'effets non élastiques comme une baisse de la résistance avec le nombre des cycles, une dépendance à la vitesse de chargement et un effet de mémoire.

2.1 Compression uniaxiale confinée

On a commencé l'étude expérimentale du comportement mécanique des mousses polymériques avec des essais en compression confinée. Le confinement sert à éviter le flambage latéral de la mousse. L'analyse de Gong et al. [62] montre qu'un assemblage périodique de cellules de Kelvin en compression uniaxiale montre des modes

de flambement local, qui déterminent la localisation des déformation, et des modes de flambement global, qui concernent des groupes des plusieurs cellules. On a choisi de nous concentrer sur l'étude de la localisation des déformations, qui joue, à notre avis, un rôle plus important sur la réponse des mousses.

2.1.1 Équipement et procédure de test

Les essais expérimentaux en compression confinée ont été effectués avec une machine d'essais Instron 4467 et un capteur de force de 500 N. La machine d'essais n'était pas équipée pour réaliser des essais en compression confinée. On a donc réalisé le montage nécessaire. On a construit une boîte de polystyrène de dimensions 101 × 101 × 60 mm, dont le rôle était d'assurer le confinement de l'éprouvette. La compression était réalisée grâce à une plaque d'acier de dimensions 100 × 100 × 20 mm, qui pouvait descendre dans la boite sans toucher les bords, et qui était couplée avec le capteur de force. Ce couplage a été réalisé à l'aide d'une barre filetée M16, qui, à une extrémité, se visse à la plaque et à l'autre extrémité se couple au capteur à l'aide d'une goupille. La boîte a été construite en polystyrène, qui est un matériau bien plus rigide que la mousse et qui, étant transparent, permet le contrôle visuel sur l'évolution de la déformation de l'éprouvette. La boîte a été fixée sur la plaque inférieure de la machine d'essais grâce à deux étaux, un système qui facilite le démontage des pièces, mais en même temps qui permet le centrage de la boîte par rapport à la plaque supérieure en acier. On n'a pas retenu l'idée de lubrifier les parois de la boîte, en considérant que le frottement de la mousse sur les parois était négligeable à cause de la faible déformation transversale sous compression de ce type de mousses. L'équipement utilisé est montré sur la Fig. 2.1.

On a travaillé avec une mousse polymérique standard, largement utilisée dans le domaine grand public pour le rembourrage des coussins, sièges et canapés. On n'a pas donné trop d'importance au choix du type de mousse polymérique, car l'intérêt du travail réside dans l'étude de propriétés générales (localisation des déformation, viscosité, comportement cyclique, etc.), et non dans celle de la réponse d'un matériau spécifique. La mousse utilisée est une mousse de polyuréthane à cellules ouvertes ayant une densité de 27 kg/m^3. La micrographie sur la Fig. 2.2 montre la structure alvéolaire caractéristique décrite dans le chapitre 1. La mousse de polyuréthane a été achetée en feuilles de dimensions 1000 × 1500 × 50 mm, qui ont été coupées manuellement, avec une scie à ruban, en éprouvettes de dimensions 100 × 100 × 50 mm.

Des pré-charges d'environ 2 N ont été utilisées pour garantir un bon contact entre la plaque supérieure et l'éprouvette. Les essais prennent fin lorsque le déplacement de la traverse mobile atteint la valeur de 35 mm, qui correspond à 70% de l'épaisseur de l'éprouvette. Cette valeur est suffisamment élevée pour pouvoir reproduire les aspects les plus importants de la courbe de réponse. On a choisi une vitesse de chargement de 1 mm/min, suffisamment lente pour ne pas faire entrer en jeu les effets *rate-dependent*.



Figure 2.1 – L'équipement utilisé pour les essais en compression confinée

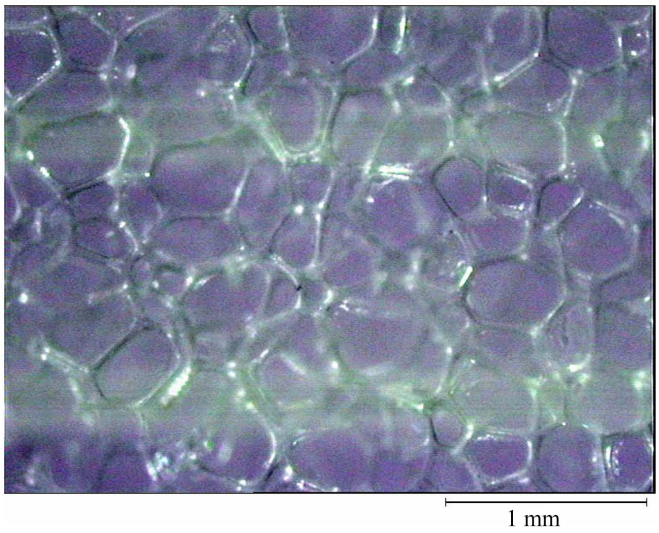


Figure 2.2 – Micrographie de la mousse de polyuréthane utilisée dans les essais en compression

2.1.2 Résultats expérimentaux

Sur la Fig. 2.3a, les évolutions de la contrainte axiale, mesurée comme force axiale divisée par la surface initiale de l'éprouvette, en fonction de la déformation axiale, calculée comme le déplacement de la traverse mobile divisé par l'épaisseur initiale de l'éprouvette, sont montrées pour cinq échantillons différents. Nous remarquons que l'éprouvette 509 montre un comportement anormal dans le régime plateau, et pour cette raison nous ne l'avons pas prise en compte dans le calcul de la courbe moyenne (Fig. 2.3b). En accord avec les résultats de la littérature présentés dans le chapitre 1, on observe que dans la réponse on peut distinguer trois régimes : une première branche ascendante, un palier, et enfin une deuxième branche ascendante. Ce comportement est typique des les matériaux poreux à cellules ouvertes [57]. En particulier on observe que, pour les mousses en question, les courbes de réponse ont une pente initiale de 145 kPa, et le palier commence pour une valeur de déformation de 0.05 et se termine pour une valeur de 0.63.

Pour mettre en évidence la localisation des déformations, une grille rectangulaire a été tracée sur une surface latérale des éprouvettes. L'évolution de la déformation de la grille sous compression confinée est montrée sur la Fig. 2.4. On observe qu'après un régime où la déformation est homogène, Fig. 2.4a, la déformation se lo-

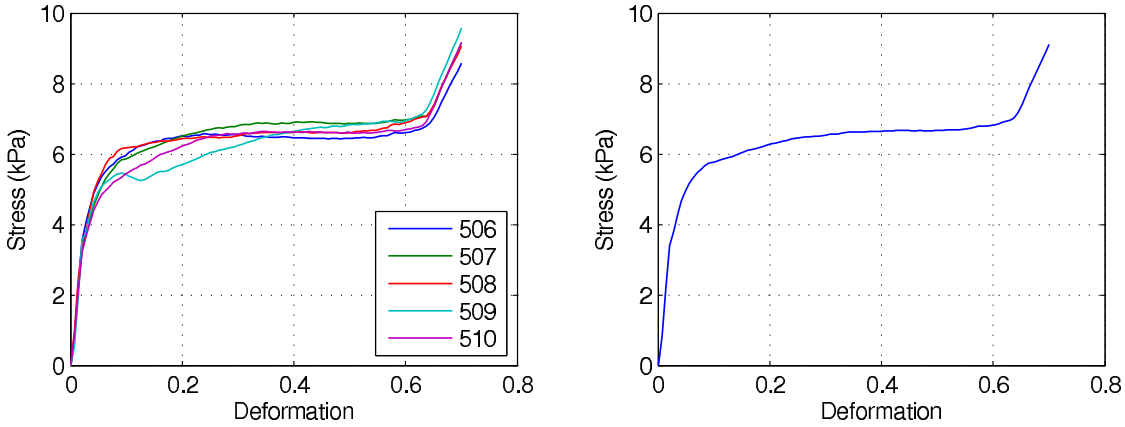


Figure 2.3 – Courbes expérimentales en compression confinée pour les cinq éprouvettes (a) et courbe moyenne (b).

calise sur les couches en contact avec la plaque en acier, Fig. 2.4b. Cette localisation est l'effet de l'écrasement des cellules causé par le flambement des arêtes. Progressivement, la localisation se propage vers les autres couches au dessous (Fig. 2.4c, 2.4d), et lorsque toutes les cellules sont écrasées, la déformation de l'éprouvette redevient homogène, Fig. 2.4e. Cette évolution des déformations a été observée sur le même matériau [81, 126, 128], mais aussi sur des mousses à porosités ouvertes d'alliage d'aluminium [9, 11] et sur des films minces de nanotube de carbone [26].

En effet, dans les expériences de Wang and Cuitiño [128] la localisation des déformations ne commence pas sur la partie supérieure de l'échantillon. Au contraire, ils observent trois ou quatre bandes de déformation perpendiculaires à la direction de la charge qui grandissent avec le déplacement imposé. Le fait que dans nos essais la localisation commence toujours sur une extrémité de l'éprouvette peut être expliqué par la différence des conditions de contact. En effet, l'extrémité supérieure où la localisation démarre est en contact avec la plaque en acier alors que l'extrémité inférieure est en contact avec la boîte de polystyrène. Dans les essais expérimentaux effectués avec différentes conditions au bord, qui seront décrits dans la section suivante, la localisation commence sur les deux extrémités.

2.2 Compression uniaxiale non confinée

Une deuxième campagne expérimentale a été dédiée à l'analyse des aspects non élastiques qui caractérisent le comportement des mousses polymériques sous compression cyclique. Le but étant la compréhension des phénomènes et non leur description quantitative et ayant une disponibilité limitée d'éprouvettes, on a préféré effectuer des différentes types d'essais sur un nombre réduit d'échantillons plutôt que effectuer le même essai sur différents échantillons. Dans cette deuxième campagne expérimentale, on a choisi d'effectuer les essais en compression simple sans confiner les éprouvettes. En effet, les différences du comportement de la mousse en compression confinée et non confinée sont modestes. L'effet le plus remarquable est une augmentation de la valeur de la force d'environ 0.5 kPa à partir du plateau dans les essais confinées.

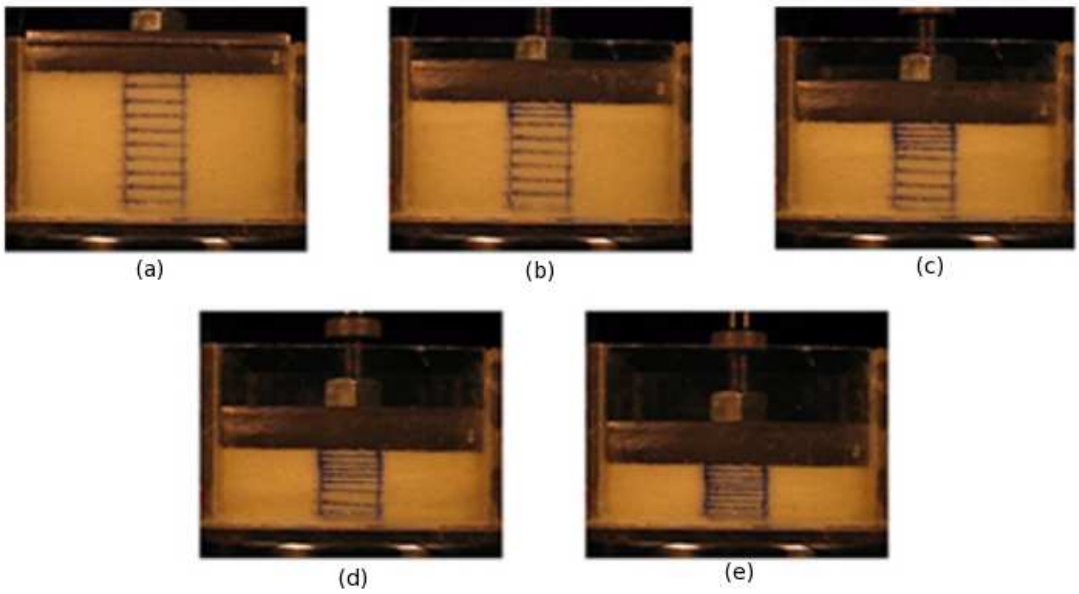


Figure 2.4 – Localisation des déformations en compression confinée. Au début la déformation est homogène (a), puis la déformation se localise sur les couches supérieures (b), elle se propage aux couches inférieures (c), (d) et lorsque toutes les couches sont écrasées la déformation redevient homogène (e). La distance entre les lignes composant la grille rectangulaire est, au début, de 5 mm.

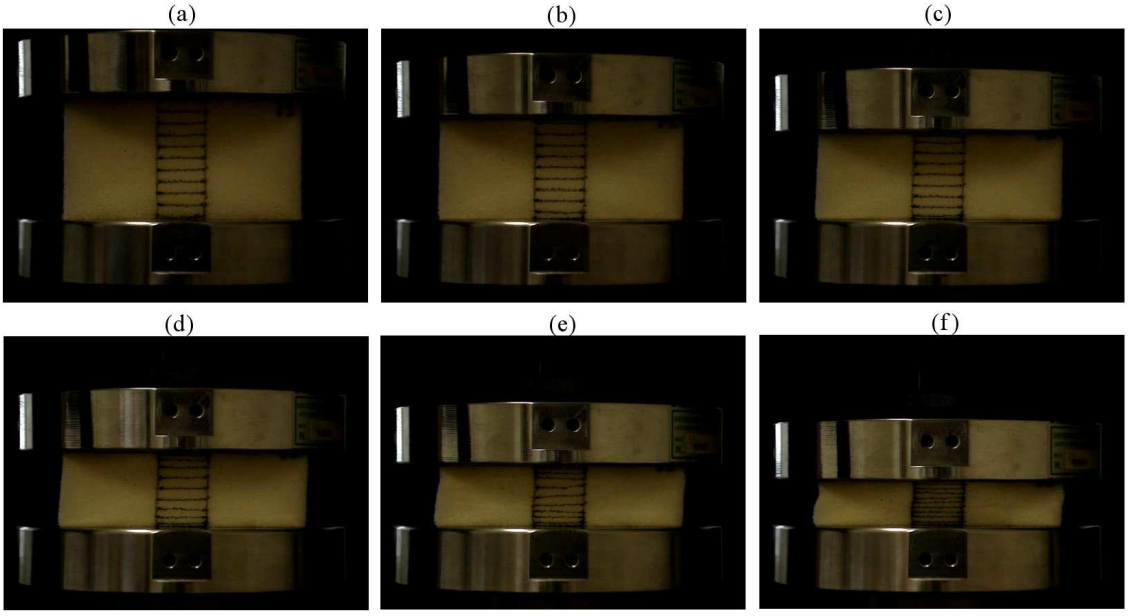


Figure 2.5 – Localisation des déformations sous compression uniaxiale non confinée. Au début la déformation est homogène (a), puis la déformation se localise sur les couches en contact avec les plaques (b), (c), elle se propage aux couches à l'intérieur (d), (e) et lorsque toutes les couches sont écrasées la déformation redevient homogène (f). La distance entre les lignes composant la grille rectangulaire est, au début, de 5 mm.

2.2.1 Équipement et procédure de test

La machine de charge aussi bien que le type de mousse polymérique et la procédure de découpage des éprouvette sont les mêmes que celles de la première campagne expérimentale. Ayant choisi de ne pas confiner les éprouvettes, on a pu utiliser les plaques standard d'origine de la machine pour les essais en compression simple. Comme dans la première campagne, on a appliqué des pré-charges d'environ 2 N pour garantir un bon contact entre la plaque et l'éprouvette. Tous les essais ont été effectués à température ambiante, en contrôlant le déplacement de la traverse mobile.

Dans les figures illustrant les résultats expérimentaux, on utilisera la même convention que précédemment : on note avec le terme *stress* la force exercée par l'éprouvette divisée par l'aire initiale et avec le terme *deformation* le rapport entre le déplacement de la traverse mobile et la distance initiale entre les deux plaques.

2.2.2 Localisation des déformations

Comme dans le cas des essais en compression confinée, durant le régime plateau, on observe une localisation des déformations en bandes perpendiculaires à la direction de la compression, voir Fig. 2.5. À la différence des essais en compression confinée, la localisation démarre dans les couches en contact avec les deux plaques, et se propage aux couches à l'intérieur. Cette évolution différente peut être attribuée aux conditions différentes de contact entre mousse et plaques. En effet, dans les essais en compression confinée l'échantillon est en contact avec une plaque d'acier en haut, et avec une plaque de polystyrène en bas. Au contraire, deux plaques identiques en acier sont utilisées dans les essais non confinés. Un léger flambement latéral de la mousse est observé pour les grandes déformations, voir Fig. 2.5e, f.

2.2.3 Essais en compression cyclique

On a effectué des essais en compression cyclique sur trois échantillons différents avec une vitesse de chargement de 5 mm/min. L'essai est constitué de quatre cycles de charge et décharge. La phase de décharge commence lorsqu'un déplacement de 35 mm est atteint, et se termine pour une valeur de la force mesurée égale à zéro.

Les courbes force-élongation des trois échantillons sont montrées sur la Fig. 2.6 a-c. On observe une certaine différence sur le plateau à la charge du premier cycle. Cette différence disparaît aux cycles suivants. On considère la courbe moyenne montrée sur la Fig. 2.6 d. À la charge, nous remarquons que la réponse change avec le nombre des cycles. On observe une perte de résistance importante entre le premier et le deuxième cycle, et une perte plus faible entre les cycles suivants. En effet, les courbes à la charge des deux premiers cycles sont bien distinctes au niveau du plateau, mais elles se rapprochent dès que l'on parcourt la deuxième branche ascendante. Elles se terminent pour des valeurs de la force quasi identiques. De plus, on observe que la forme de la courbe de réponse change après le premier cycle : les passages entre les trois différents régimes (première branche, plateau et deuxième

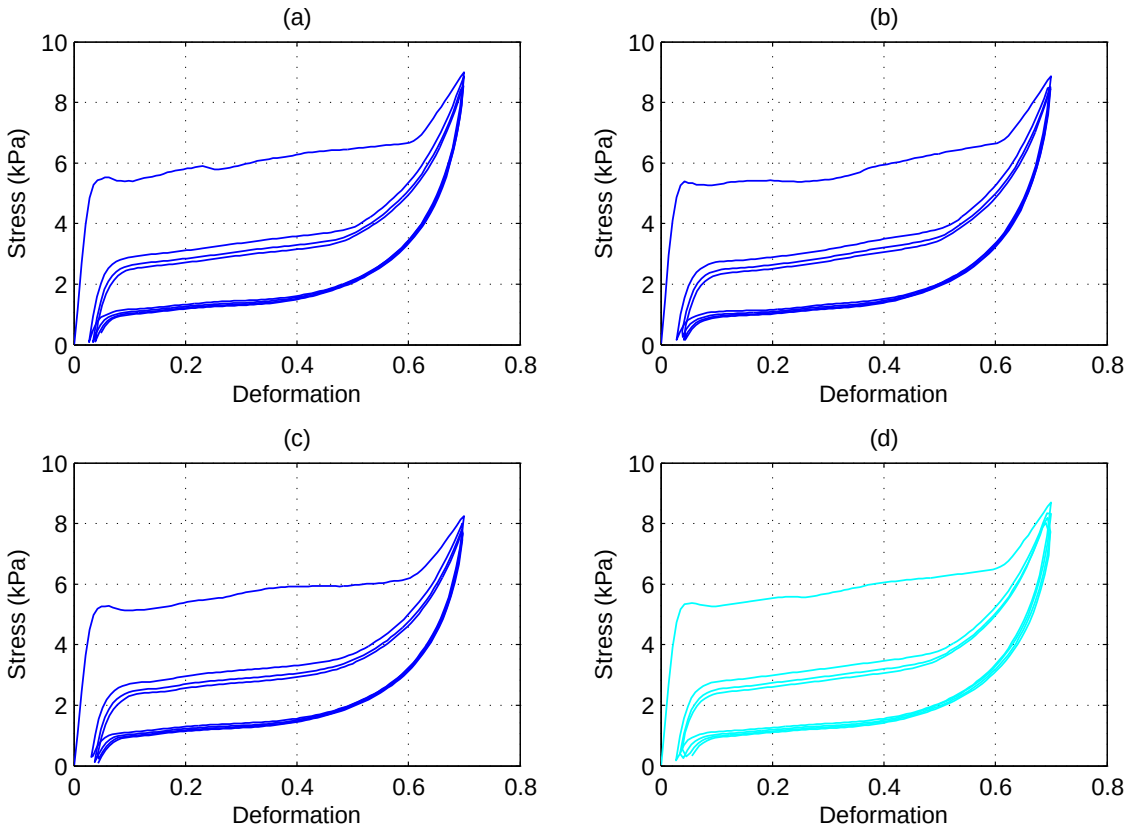


Figure 2.6 – Courbes de réponse à 4 cycles de charge et décharge pour trois éprouvettes différentes (a-c), et courbe de réponse moyenne (d). Vitesse de chargement 5 mm/min.

branche ascendante) sont plus réguliers, et la longueur du plateau est inférieure. À la décharge, les courbes de réponse des différents cycles se superposent à peu près, mais on observe une légère augmentation de la déformation résiduelle avec le nombre des cycles. Ce comportement, étudié par Gong et al. [61], ressemble à l'effet de "softening" observé dans les élastomères chargés, et connu dans la littérature comme *effet Mullins*.

Pour comprendre si la perte de résistance avec le nombre de cycles dépend de la déformation maximale, on a effectué des essais en compression cyclique avec différentes amplitudes. On a choisi quatre valeurs pour le déplacement maximal de la traverse mobile : 40, 32.5, 20 et 7.5 mm. Pour chaque valeur, une éprouvette a été soumise à trois cycles de charge et décharge. Les résultats sont montrés sur la Fig. 2.7. On remarque qu'il y a toujours une baisse importante entre la courbe de chargement du premier cycle et celle du deuxième cycle, et que cette perte ne dépend pas forcément de la valeur de la déformation maximale. On considère le cas où au premier cycle la direction de mouvement de la traverse est inversée avant qu'on atteigne la deuxième branche ascendante (Fig. 2.7 c, d). On observe une importante différence entre la courbe à la charge du premier cycle et celles des cycles suivants, avec l'apparition d'une deuxième branche ascendante. Pour toutes les valeurs de la déformation maximale, les réponses à la décharge ne changent pas avec le nombre des cycles.

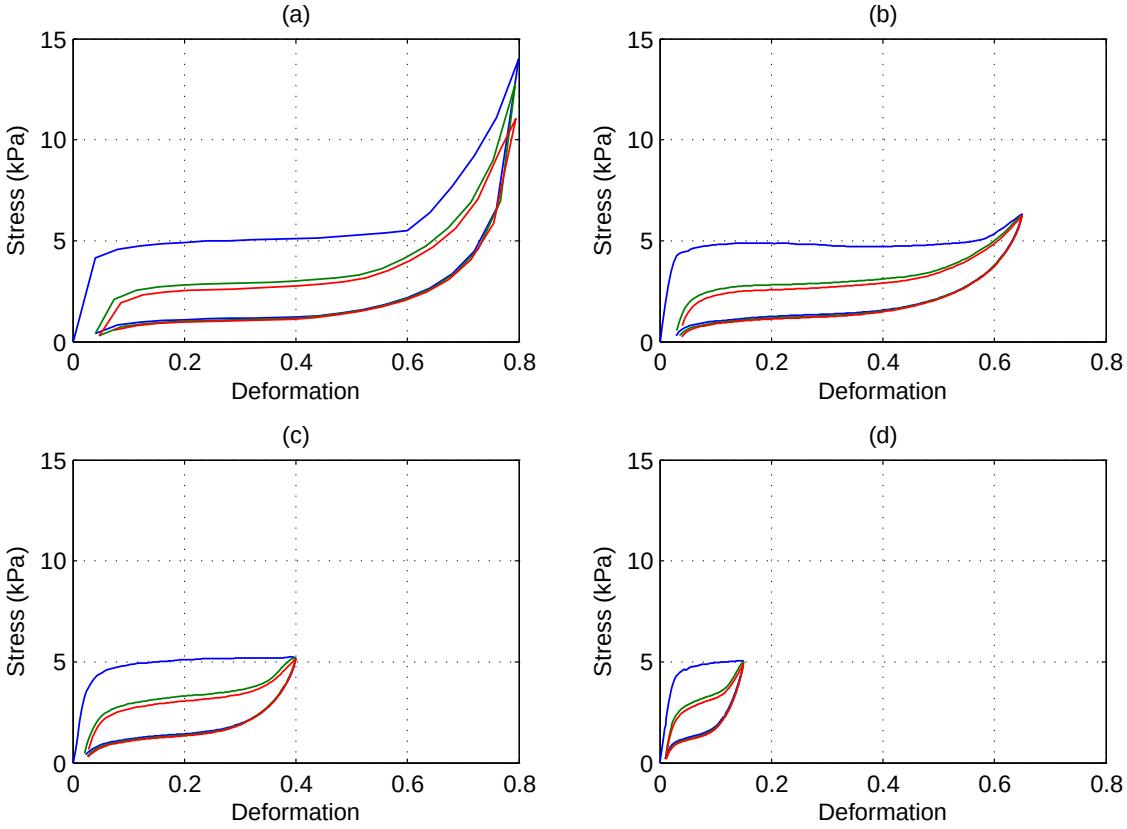


Figure 2.7 – Courbes de réponse à 3 cycles de charge et décharge à différentes amplitudes. Vitesse de chargement 5 mm/min.

2.2.4 Essais en compression cyclique après des périodes de repos

Dans cette section on étudie la nature de l'effet de *stress softening* précédemment décrit. L'analogie entre cet effet et l'effet Mullins, caractéristique des élastomères chargés, nous a fait penser que la perte de résistance était due à l'endommagement de la mousse. Pour vérifier cette hypothèse, on a effectué des essais en compression cyclique entrecoupés par des périodes de repos. Une éprouvette vierge a été soumise à quatre cycles de charge et décharge avec une déformation maximale de 70%, et une vitesse de chargement de 5 mm/min. On a effectué à nouveau le même essai sur le même échantillon après des périodes de repos de durée croissante : 16 heures, 52 heures et 33 jours. Les courbes de réponse sont montrées sur la Fig. 2.8. Dans l'essai sur l'échantillon vierge, un problème de contrôle de la machine a perturbé le démarrage des cycles suivants le premier. Donc, nous ne nous étendrons pas sur les courbes sur la Fig. 2.8a, données ici car elles concernent le même échantillon, mais on se référera plutôt à la réponse montrée sur la Fig. 2.6d, qui est une moyenne sur trois échantillons vierges.

Si l'on compare les réponses à la charge du premier cycle pour les différents essais, on remarque que seule la courbe de l'échantillon vierge a une pente positive au niveau du plateau. De plus, on observe que la courbe de réponse au premier

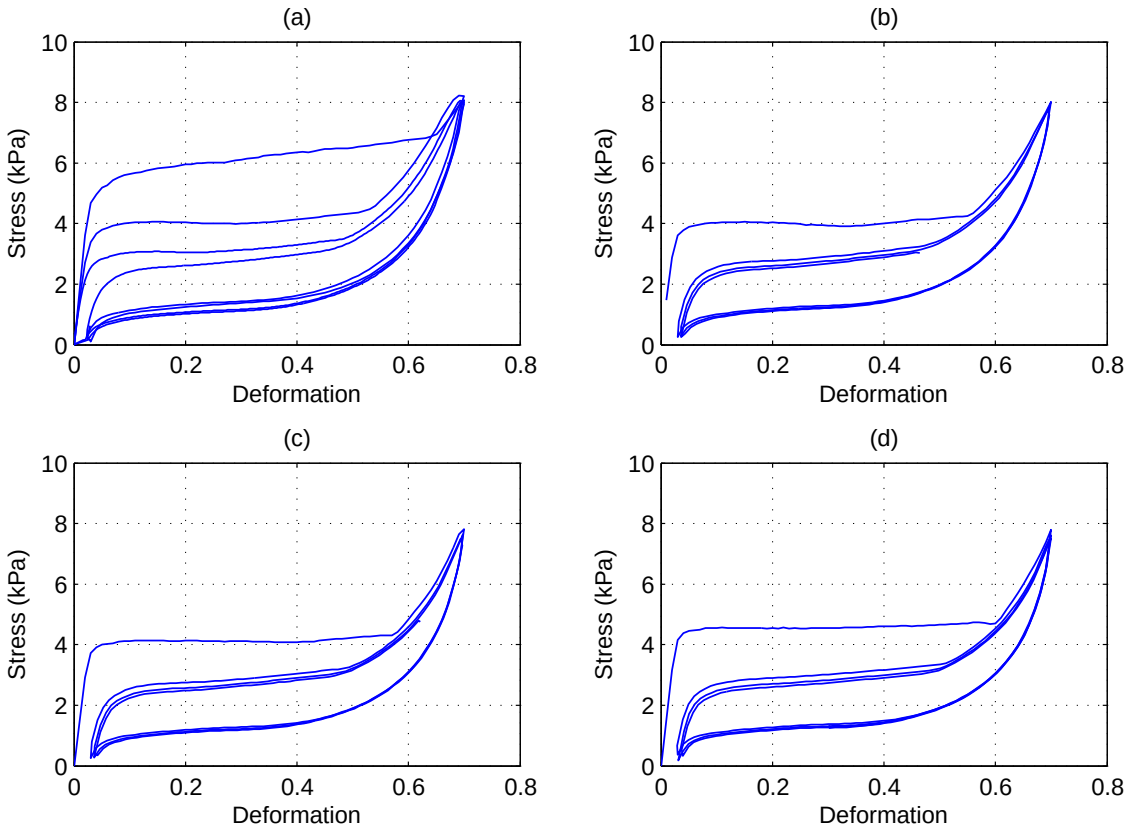


Figure 2.8 – Courbes de réponse à 4 cycles de charge et décharge sur un échantillon vierge (a), après une période de repos de 16 heures (b), 52 heures (c) et 33 jours (d).

cycle de charge du deuxième essai, Fig. 2.8b, se superpose à peu près à la courbe de réponse du deuxième cycle du premier essai, Fig. 2.8a. Ceci signifie qu'après une période de repos de 16 heures, la mousse a récupéré la perte de résistance causée par les trois derniers cycles du premier essai. Dans le troisième essai, effectué après une période de repos ultérieure de 52 heures, on n'observe pas de changements importants des courbes de réponse voir Fig. 2.8b, c. Ceci signifie que le deuxième essai n'a pas endommagé la mousse polymérique. Sur la Fig. 2.8d, qui montre les résultats du dernier essai après 33 jours, on observe une augmentation de 4 kPa à environ 4.5 kPa de la valeur de la force au niveau du plateau. Ce recouvrement suggère que la mousse a partiellement récupéré la perte de résistance causée par le premier cycle du premier essai.

2.2.5 Essais à différentes vitesses de charge

On a étudié la dépendance de la réponse à la vitesse de chargement, en effectuant deux cycles de charge et décharge à trois vitesses différentes : 0.1, 5 et 100 mm/min. Pour chaque vitesse, on a testé trois éprouvettes. Les courbes moyennes contrainte-déformation sont montrées sur la Fig. 2.9a, b, c. Pour faciliter l'analyse, sur la Fig. 2.9d on compare les courbes de réponse au premier cycle pour les trois vitesses.

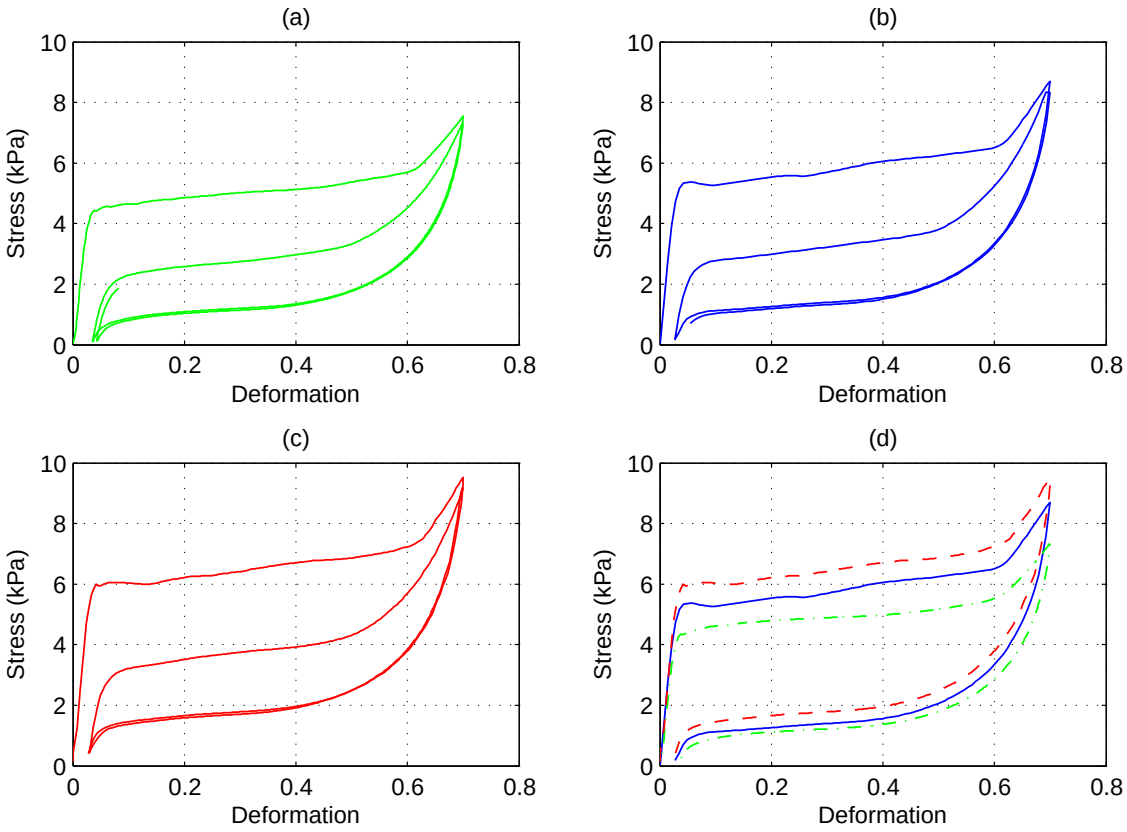


Figure 2.9 – Courbe de réponse à 2 cycles de charge et décharge à une vitesse de chargement de 0.1 mm/min (a), 5 mm/min (b) et 100 mm/min (c). (d) Comparaison des réponses aux premiers cycles pour les trois vitesses

Pour les trois vitesses (Fig. 2.9 a, b, c), on retrouve l'effet de *stress softening* décrit dans la section précédente. Cet effet ne semble pas être influencé par la vitesse de chargement. Si l'on considère la Fig. 2.9 d, on observe un décalage vers le haut des courbes de réponse avec l'augmentation de la vitesse de chargement. Ce décalage est plus important à la charge qu'à la décharge, et donc il induit une légère augmentation de l'amplitude du cycle d'hystérésis avec la vitesse de chargement. Au contraire, la déformation résiduelle ne varie pas sensiblement avec la vitesse de chargement. La dépendance à la vitesse de chargement met en évidence le caractère *rate-dependent* de la réponse.

2.2.6 Expériences ultérieures en compression

Cette section est dédiée à l'investigation du comportement des mousses lorsqu'elles sont soumises aux cycles de charge et décharge de petite amplitude qui ne causent pas de changements de phase.

L'essai consiste en un chargement en compression qui est interrompu trois fois par un cycle de décharge et recharge de petite amplitude. La direction de la traverse mobile est inversée lorsque le déplacement atteint les valeurs : 10 et 7.5 mm, 20 et 17.5 mm, 30 et 27.5 mm. On a effectué le même essai avec deux vitesses de charge-

ment différentes : 1 et 0.1 mm/min. Les résultats sont montrés sur la Fig.2.10 a,b.

Bien que l'amplitude des cycles soit la même en terme de déplacement imposé, on trouve des cycles d'hystérésis d'amplitudes différentes. En effet, l'amplitude du cycle d'hystérésis diminue si l'on augmente la déformation à laquelle on décharge. Entre deux cycles, la courbe suit la réponse observée dans les essais de chargement monotone. Une réduction de dix fois de la vitesse de chargement abaisse le niveau du palier de la courbe de réponse principale, mais ne réduit pas sensiblement les amplitudes des cycles d'hystérésis. On a effectué le même type d'essai à partir du plateau inférieur, Fig. 2.10 c. Dans ce cas, on observe des cycles d'hystérésis d'amplitude inférieure.

Pour comprendre si les cycles d'hystérésis sont causés par la viscosité de la mousse ou par la rigidité de la machine d'essai, on a effectué des expériences ultérieures. Dans ces essais, le cycle de décharge et recharge a été interrompu par des périodes où la position de la traverse restait fixe. On a considéré deux combinaisons différentes : quatre périodes de relaxation d'une heure, Fig. 2.10d, et onze périodes de relaxation de 45 minutes, Fig. 2.10e, f. Sur les courbes de réponse, on remarque la présence des segments verticaux qui montrent la relaxation de la force sous déformation constante. Si l'on augmente le nombre des intervalles de relaxation ainsi que leur durée, le cycle d'hystérésis tend à disparaître. Ceci confirme la nature visqueuse du phénomène.

Une dernière expérience a été effectuée pour comprendre si la réponse des mousses dépend de toute l'histoire de déformation précédente ou seulement de la déformation maximale précédemment atteinte. À ce propos, une éprouvette a été assujettie à trois cycles de charge et décharge avec une déformation maximale de 0.15, suivis par trois cycles avec une déformation maximale de 0.4, Fig. 2.11 a. Entre les deux chargements l'éprouvette a été maintenue à une déformation constante pour une période de $25s$, période nécessaire pour changer le réglage des paramètres de la machine. Les courbes de réponse sont montrées sur la Fig. 2.11 b. On remarque que les courbes de la deuxième série sont différentes des courbes observées pour l'échantillon vierge, 2.7 c. En effet, on observe des bosses, plus évidentes à la charge que à la décharge, correspondant à la déformation maximale de la première série de cycles. Ceci signifie que la réponse de la mousse dépend de toute l'histoire de déformation précédente et pas seulement de sa valeur maximale.

Notre analyse sur le comportement cyclique des mousses est complétée par des essais complexes avec phases de charge et de décharge, intercalées par des périodes de relaxation et de repos. Les résultats sont montrés sur les Fig. 2.11c-f.

2.2.7 Essais de relaxation

Les résultats expérimentaux décrits dans les sections précédentes montrent la présence d'effets visqueux. Par conséquent, on a effectué des essais de relaxation pour déterminer la fonction de relaxation du matériau. Du point de vue théorique, l'essai de relaxation consiste à imposer instantanément une déformation à l'éprouvette et de mesurer, en gardant fixe la déformation, la variation de la force

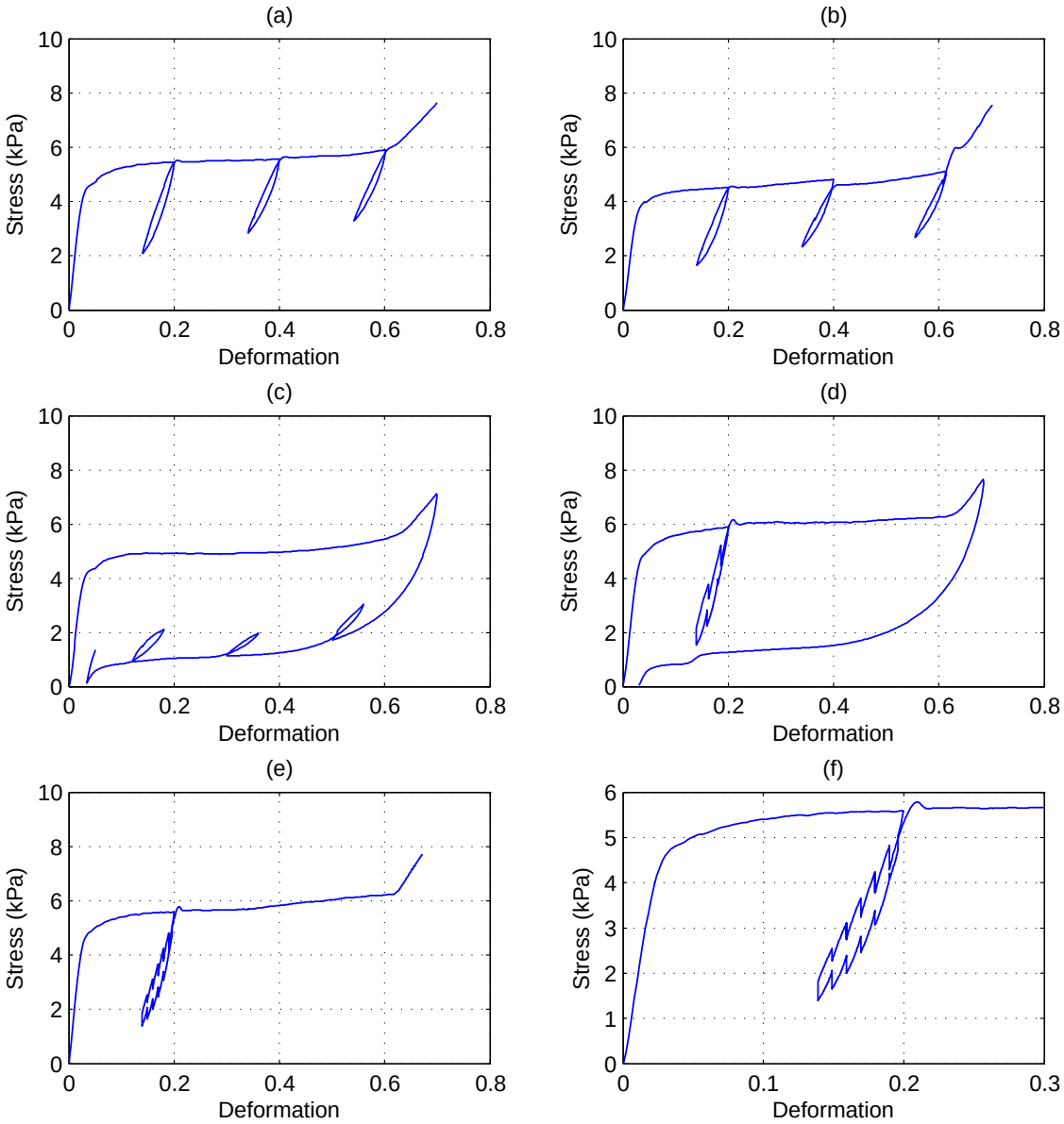


Figure 2.10 – Cycles de charge et décharge de petites amplitudes. Trois cycles sur le plateau supérieur avec une vitesse de chargement de 1 mm/min (a) et de 0.1 mm/min (b). Trois cycles sur le plateau inférieur à 1 mm/min (c). Un cycle de charge et décharge interrompu par 4 relaxations de 1h (d), et 11 relaxations de 45 min (e). (f) Détail de la figure (e).

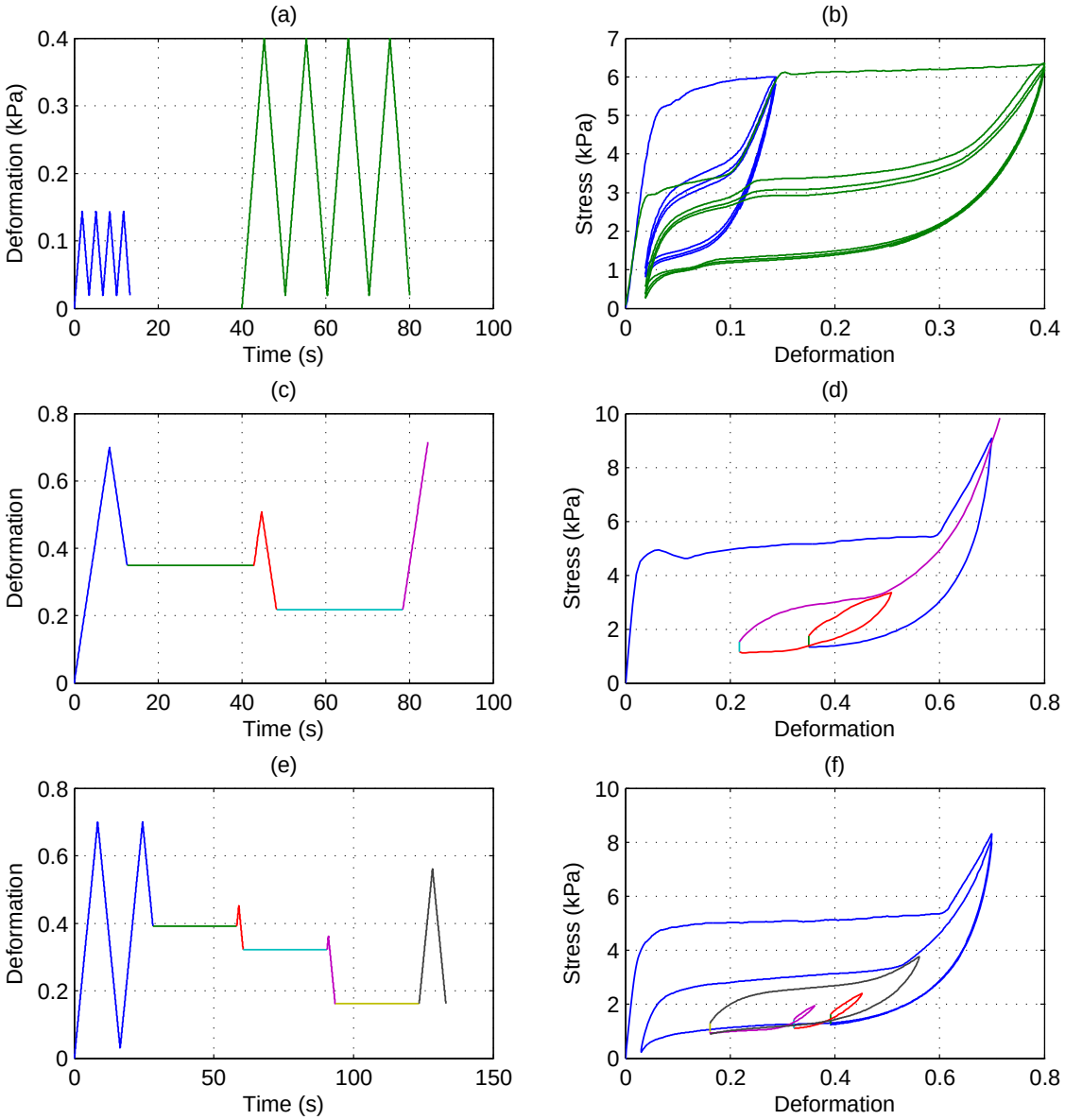


Figure 2.11 – Essais complexes en compression cyclique. Histoires de déformation appliquées (colonne à gauche) et courbes de réponse (colonne à droite).

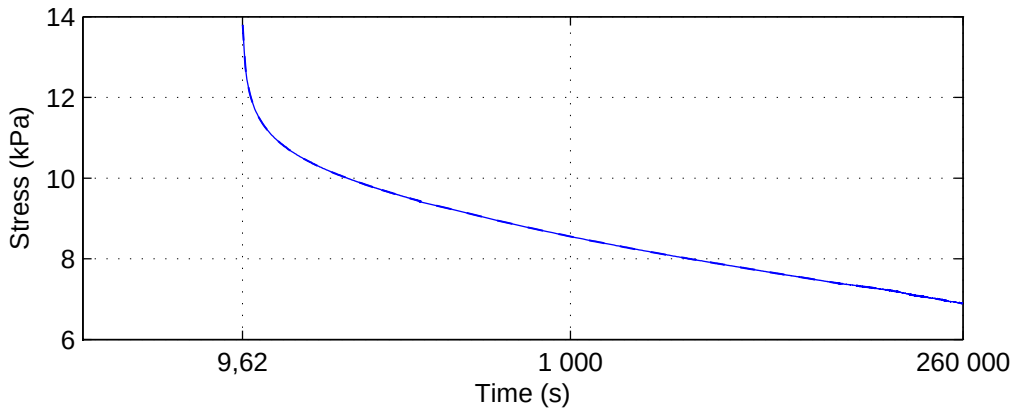


Figure 2.12 – Essai de relaxation de 72 heures avec une vitesse de chargement de 250 mm/min.

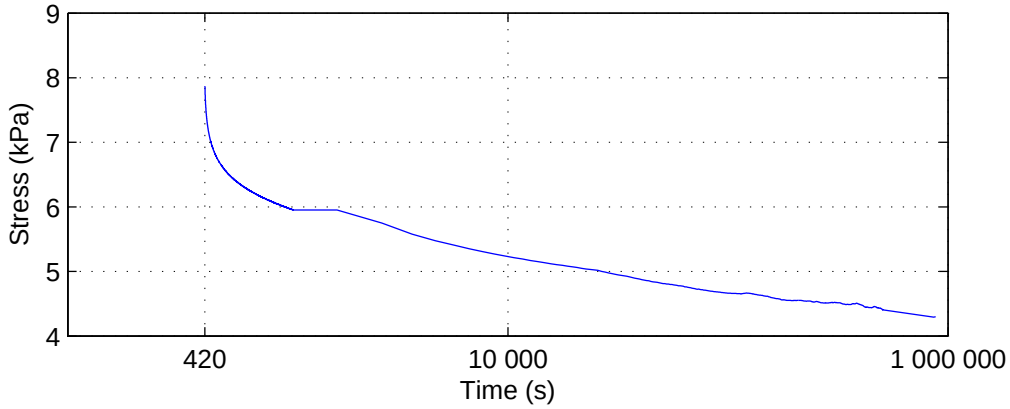


Figure 2.13 – Essai de relaxation de 10 jours avec une vitesse de chargement de 5 mm/min.

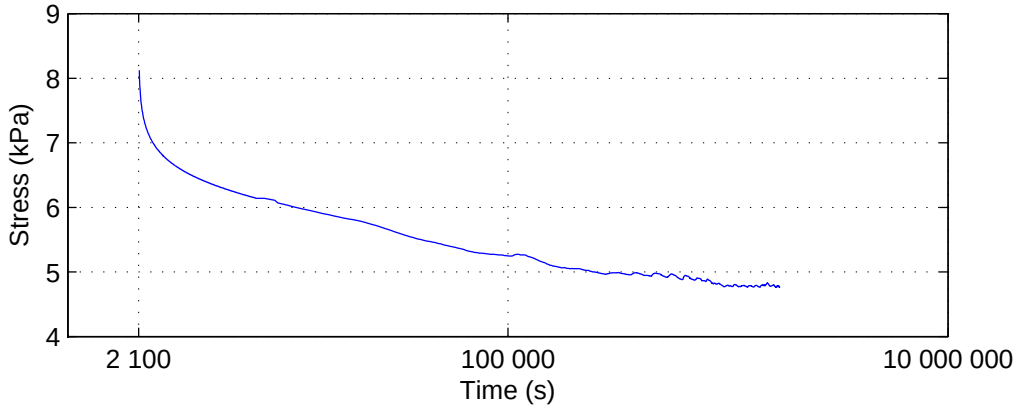


Figure 2.14 – Essai de relaxation de 20 jours avec une vitesse de chargement de 1 mm/min.

avec le temps. Il est clair qu'en pratique, le chargement n'est pas instantané. En effet, pour la machine d'essais en utilisation la vitesse de chargement maximale est de 250 mm/min.

On a effectué une phase de charge à 250 mm/min jusqu'à la valeur de déplacement de la traverse de 35 mm, et on a gardé cette valeur du déplacement pour 72 heures. Cet essai a été effectué sur trois éprouvettes vierges différentes. La courbe de réponse moyenne est montrée sur la Fig. 2.12. De plus, on a choisi d'effectuer des essais de relaxation en considérant pour la vitesse de chargement deux valeurs pour lesquelles on avait déjà effectué les essais en compression cyclique : 5 mm/min et 1 mm/min. Dans les deux cas, on a testé une seule éprouvette mais sur des temps plus longs : 10 jours pour la charge à 5 mm/min et 20 jours pour la charge à 1 mm/min, Les résultats sont montrés sur les Fig. 2.13 et 2.14.

Dans les trois cas, on observe une réduction de la force très rapide dans les premières minutes suivie par une réduction plus lente qui se manifeste pour toute la durée de l'expérience. Ce comportement, caractérisé par deux relaxations avec échelles de temps très différentes, est similaire au comportement des élastomères observé par Amin et al. [4].

Chapitre 3

Modèle élastique

Sommaire

3.1 L'origine du modèle 38
3.1.1 Le travail pionnier d'Ericksen 38
3.1.2 Les modèles discrets 42
3.1.3 L'application aux mousses 43
3.2 La loi de comportement tridimensionnelle 46
3.3 Le modèle discret 49
3.3.1 Conditions d'équilibre et de stabilité 49
3.3.2 Le cas explicatif d'une chaîne de deux ressorts 53
3.3.3 La réponse d'une chaîne de N ressorts 57
3.3.4 Comparaison avec les expériences 60

Dans ce chapitre on présente le modèle élastique utilisé en [103] pour décrire deux aspects du comportement des mousses polymériques sous compression : la localisation des déformations et le cycle d'hystérésis. Comme on a vu dans la section 2.1, la courbe de réponse sous compression des mousses polymériques à porosités ouvertes est caractérisée par trois régimes : une première branche linéaire, un palier et une deuxième branche ascendante. Dans le régime du palier, on observe une localisation des déformations en bandes perpendiculaires à la direction de la compression.

On montrera que ce comportement peut être reproduit à l'aide d'un modèle élastique où la mousse polymérique est représentée comme une chaîne de ressorts non linéaires avec une énergie de déformation non convexe. Cette approche est généralement utilisée pour la description du comportement des alliages à mémoire de forme. Dans ce cas, une énergie de déformation non convexe est introduite pour prendre en compte les deux phases cristallines *austenite* et *martensite* du matériau. Dans notre cas, les deux phase sont celles avant et après le flambement des arêtes. La localisation des déformations est décrite comme un changement progressif de phase des ressorts. Le modèle introduit est unidimensionnel, et donc il ne peut pas décrire les différences, en terme de localisation des déformations, entre compression confinée et non confinée.

Ce deuxième chapitre s'ouvre avec un aperçu des idées de base sur lesquelles notre modèle s'appuie. Le modèle élastique, objet de l'article [103], est décrit dans les sections 3.2 et 3.3. Dans la section 3.2 on propose une expression tridimensionnelle de l'énergie de déformation qui permet d'obtenir une courbe de réponse non monotone. Dans la section 3.3, on présente un modèle discret pour la description de la localisation des déformations. On verra aussi que le modèle élastique n'est pas apte à décrire tous les aspects du comportement des mousses. Une analyse plus approfondie, prenant en compte les effets visqueux, est nécessaire. Cette analyse fera l'objet du chapitre suivant de ce mémoire.

3.1 L'origine du modèle

Le but de cette section est de présenter la littérature sur le problème d'équilibre d'un corps avec une énergie de déformation non convexe. La liste des articles cités est loin d'être exhaustive, puisque on s'est borné aux études directement liées à la construction de notre modèle.

D'abord on décrit le travail d'Ericksen [50], le premier à avoir étudié la stabilité de l'équilibre d'une barre prenant en compte la non convexité de l'énergie. Puis, on présente une liste d'auteurs qui ont étudié la version discrète du problème d'Ericksen. Enfin, on décrit le travail de Gioia et al. [59], où les résultats d'Ericksen sont appliqués à la description des mousses polymériques.

3.1.1 Le travail pionnier d'Ericksen

Dans cette section on présente le travail de Ericksen [50], en suivant l'exposition de Del Piero [37]. On considère une barre de longueur L qui dans la configuration de référence occupe la région monodimensionnelle $\Omega = (0, L)$, et qui est sujette à la transformation u qui transforme le point X de Ω en le point $x = u(X)$. En suivant le travail d'Ericksen, on commence l'étude en supposant que la transformation soit assez régulière, $u \in C^2((0, L))$, et après on montrera que cette hypothèse est trop restrictive en présence d'instabilités matérielles.

L'énergie de déformation la barre peut être écrite sous la forme :

$$W(u'(X)) = \int_0^L w(u'(X))\, dX\,, \tag{3.1}$$

avec w la densité d'énergie de déformation, une fonction de classe C^3 définie sur l'intervalle (0,L).. Ericksen considère le cas où w est une fonction non convexe de u' du type montré sur la Fig. 3.1. On considère deux types de chargement de la barre : on fixe une extrémité et on applique ou une force σ (*soft device*), ou un déplacement $\bar{u}$ (*hard device*) à l'autre extrémité. Dans les deux cas, l'énergie totale du système et les conditions au bord deviennent, respectivement,

$$\begin{array}{lll} E(u'(X)) = \int_0^L w(u'(X))\, dX \, - \sigma u(L)\,, & u(0) = 0 & \text{soft device}\,, \\ E(u'(X)) = \int_0^L w(u'(X))\, dX\,, & u(0) = 0\,, u(L) = \bar{u} & \text{hard device}\,. \end{array} \tag{3.2}$$

La condition au bord (3.2) dans le cas hard device peut être réécrite sous la forme

$$\int_0^L x' \, dX = \lambda \, L \,, \tag{3.3}$$

où $\lambda = \bar{u}/L$ est l'allongement totale de la barre.

Les configurations d'équilibre y sont des configurations extrémales de E, et donc elles doivent satisfaire l'équation d'Euler- Lagrange. Cela impose que

$$w'(y'(X)) = \sigma = const. \,, \tag{3.4}$$

où w' est la dérivée de w par rapport à u' et σ est la force appliquée dans le cas *soft device* ou un multiplicateur de Lagrange dans le cas *hard device*. Puisque la dérivée w' représente la contrainte, les configurations d'équilibre sont celles où la contrainte est la même dans tous les points de la barre. Etant w' non monotone, des configurations d'équilibre biphasée sont possible.

Pour évaluer la stabilité des configurations d'équilibre, Ericksen utilise un critère énergétique. Soit y' une configuration d'équilibre, et u' toute configuration qui satisfait les conditions au bord. On dira que y' est *stable* si c'est un point de minimum global de l'énergie, et que elle est *metastable* si c'est un point de minimum local. Une condition nécessaire pour que y' soit un minimum est que la variation d'énergie

$$\Delta E = E(u') - E(y') \tag{3.5}$$

soit non négative. Dans notre cas cette condition implique la

$$w''(y'(X)) \geq 0 \,, \tag{3.6}$$

condition ponctuelle de stabilité [37].

Déterminons les configurations d'équilibre $y' \in C^0((0, L))$. Pour σ connue, les configurations d'équilibre se trouvent sur les intersections de la ligne horizontale à la valeur σ avec la courbe w', et pour la forme de w' choisie, on peut avoir au maximum trois points d'intersection. L'hypothèse que y' soit continue implique que y' soit constante dans toute la barre. De plus, la condition de stabilité (3.6) limite y' aux deux branches ascendantes,

$$w'(y') = \sigma \,, \quad a < y' \leq x'_1 \quad \text{ou} \quad x'_2 \leq y' < b \,.$$

Donc, on a une seule configuration continue d'équilibre stable si $\sigma < \sigma_1$, ou $\sigma > \sigma_2$, et deux configurations si $\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_2$. Si l'on considère le cas hard device, l'hypothèse que y' soit continue donne la solution unique :

$$y' = \bar{u}/L \,, \quad \sigma = w'(\bar{u}/L) \,.$$

Mais, cette solution ne satisfait pas la condition de stabilité (3.6) lorsque $x'_1 < \bar{u}/L < x'_2$. Il est clair que l'hypothèse initiale que la solution soit C^1 est trop restrictive.

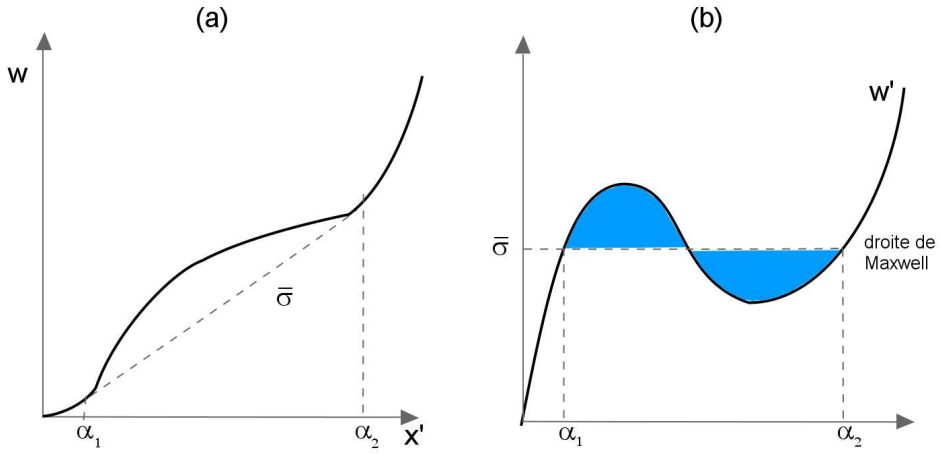


Figure 3.1 – (a) Énergie de déformation de la barre d'Ericksen (ligne pleine), et sa convexifiée (ligne en pointillé). (b) Relation d'aires égales qui gouverne la position des points α_1, α_2 et la valeur de la contrainte de Maxwell $\bar{\sigma}$.

Ericksen étend l'étude au cas de u' continue par morceaux. Dans ce cas, d'autres configurations d'équilibre sont possibles. Pour chaque valeur de σ dans l'intervalle (σ_1, σ_2), on peut trouver deux points α_σ et β_σ sur les deux branches ascendantes tels que $w'(\alpha_\sigma) = w'(\beta_\sigma) = \sigma$. Alors pour chaque $\chi \in (0,1)$, la configuration

$$y'_{\sigma,\chi}(X) = \begin{cases} \alpha_\sigma & \text{pour } X \in (0, \chi L)\,, \\ \beta_\sigma & \text{pour } X \in (\chi L, L)\,, \end{cases} \tag{3.7}$$

est une configuration d'équilibre possible. On appellera cette configuration une configuration biphasée car la valeur α_σ appartient à la première branche ascendante (phase A) et β_σ à la deuxième branche ascendante (phase B). Les valeurs χ et $(1-\chi)$ sont respectivement les fractions de phase A et B. Dans les cas limites de $\chi = 0$ et $\chi = 1$, on retrouve les configurations homogènes monophasées. À la configuration $y'_{\sigma,\chi}$ correspond une élongation totale de la barre

$$\lambda = \alpha_\sigma\,(1-\chi) + \beta_\sigma\,. \tag{3.8}$$

Au contraire, à chaque couple (σ, λ) avec $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$ et $\lambda \in [x'_1, x'_2]$, correspond la configuration biphasée avec

$$\chi = \frac{\beta_\sigma - \lambda}{\beta_\sigma - \alpha_\sigma}\,. \tag{3.9}$$

En effet, les configurations $y_{\sigma,\chi}$ ne sont pas les seules configurations d'équilibre possibles. On peut avoir des configurations avec des points sur la branche descendante de $w_{u'}$. Pour ces points la condition de stabilité (3.6) n'est pas satisfaite, donc ces configurations ne sont pas stables et elles ne seront pas considérées. De plus, pour chaque σ et χ on peut avoir des configurations d'équilibre avec des distributions des valeurs α_σ et β_σ dans la barre différentes de celle introduite en (3.7), de façon d'avoir plusieurs interfaces entre les zones avec phases différentes. Du point de vue énergétique, ces configurations sont équivalentes aux configurations $y'_{\sigma,\chi}$, et donc il n'est pas nécessaire de les distinguer.

On détermine les configurations d'équilibre stable, c'est à dire les minima globaux de l'énergie. On appelle α_1, α_2 les deux points où la courbe w a la même tangente de pente $\bar{\sigma}$ (voir Fig. 3.1), et on introduit la fonction w^c,

$$w^c(u') = \begin{cases} w(u') & \text{pour } u' \notin (\alpha_1, \alpha_2), \\ w(\alpha_1) + \bar{\sigma}(u' - \alpha_1) & \text{pour } u' \in (\alpha_1, \alpha_2)\,. \end{cases} \tag{3.10}$$

La tangente avec pente $\bar{\sigma}$ est appelée *droite de Maxwell*. La fonction w^c est la convexifiée de w, elle est convexe et

$$w^c(u') \leq w(u') \quad \forall u' \in (a, b)\,.$$

Ces propriétés permettent d'obtenir une borne inférieure de l'énergie pour une élongation λ imposée,

$$E(u') \geq L w^c(\lambda)\,.$$

Pour toute la valeur de λ, on peut trouver une configuration d'équilibre qui a une énergie $Lw^c(\lambda)$, et qui est donc un minimum global. En effet si $\lambda \notin (\alpha_1, \alpha_2)$, la configuration homogène avec $y' = \lambda$ a l'énergie totale $Lw(\lambda) = Lw^c(\lambda)$. Si $\lambda \in (\alpha_1, \alpha_2)$, la limite $Lw^c(\lambda)$ est atteinte par la configuration biphasée $y'_{\bar{\sigma},\chi}$ pour

$$\chi = \frac{\alpha_2 - \lambda}{\alpha_2 - \alpha_1}\,. \tag{3.11}$$

Dans le cas soft device, le minimum global est la configuration monophasée $y'_{\bar{\sigma},1}$ avec $\chi = 1$ si $\sigma < \bar{\sigma}$, et la configuration monophasée $y'_{\bar{\sigma},0}$ avec $\chi = 0$ si $\sigma > \bar{\sigma}$. Pour $\sigma = \bar{\sigma}$ toutes les configurations $y'_{\bar{\sigma},\chi}$ ont la même énergie et toutes sont des configurations d'équilibre stable. Donc, dans les deux cas la courbe des minima globaux est la même. Elle est l'union du segment de la première courbe ascendante avec $\sigma < \bar{\sigma}$, du segment de la deuxième courbe ascendante pour $\sigma > \bar{\sigma}$, et du segment de la droite de Maxwell entre les deux. Elle est montrée sur la Fig. 3.2.

Afin de déterminer la réponse de la barre, il faut considérer les configurations de minimum local. Celles-ci dépendent du choix de l'espace fonctionnel où on pose le problème et, en particulier, de la notion de distance que l'on introduit. Par exemple, si l'on considère la distance

$$\|y' - u'\|_1 := \int_0^L |y'(X) - u'(X)| dX\,,$$

on peut montrer que les minima locaux coïncident avec les minima globaux [37]. Au contraire, si l'on considère la distance

$$\|y' - u'\|_\infty := \sup_{X \in (0,L)} |y'(X) - u'(X)|\,,$$

toutes les configurations $y'_{\sigma,\chi}$ sont des minima locaux [37]. Donc, la réponse dépend du choix de la distance. Si l'on considère la distance $\|\cdot\|_1$, il n'y a pas d'autres configurations de minimum à part les minima globaux. Donc, la réponse suit la courbe en trait continu sur la Fig. 3.2b. Dans ce cas, les courbes à la charge et à la

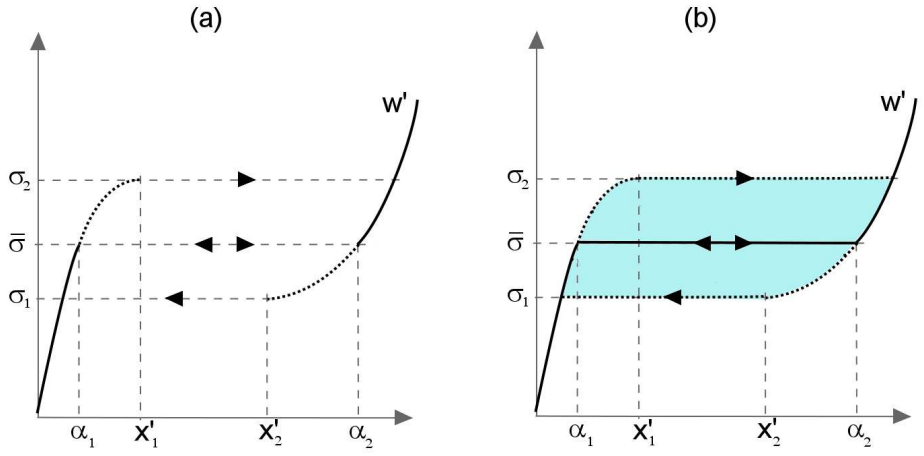


Figure 3.2 – Courbes de réponse de la barre d'Ericksen dans le cas *soft device* (a) et *hard device* (b), en considérant la distance $\|\cdot\|_1$ (lignes pleines), ou la distance $\|\cdot\|_\infty$ (lignes pointillées).

décharge coïncident. Au contraire si l'on prend la distance $\|\cdot\|_\infty$, toutes les points dans la région en gris sur la Fig. 3.2b représentent des configurations de minima locaux. Donc, le système reste dans la configuration monophasée pour $\sigma = \bar{\sigma}$, et la bifurcation de la configuration homogène se produit pour $\sigma = \sigma_1$ à la charge et pour $\sigma = \sigma_2$ à la décharge. La réponse suit la courbe en tirets sur la Fig. 3.2, et on observe un cycle d'hystérésis. Du point de vue physique, le choix de la distance devrait prendre en compte la capacité du matériau à passer les barrières d'énergie. Par exemple avec la distance $\|\cdot\|_\infty$, on considère un matériau qui ne peut pas passer aucune barrières d'énergie et qui reste dans la configuration de minimum local jusqu'à ce qu'elle devient instable. Donc, le choix de la distance pourrait être vu comme un choix constitutif sur le matériau.

Pour résumer, on a vu que le comportement d'hystérésis peut être décrit dans le contexte de l'élasticité non linéaire en supposant une énergie de déformation non convexe. De plus, ce travail de Ericksen fait émerger deux questions importantes : dans quel espace fonctionnel faut-il poser le problème d'équilibre, et quel critère de choix faut-il introduire lorsque plusieurs solutions sont possibles ? Les travaux de Ball et James [5], Müller [96] et Truskinovsky et Zanzotto [124] essayent de répondre à ces questions.

3.1.2 Les modèles discrets

Pour décrire le comportement des systèmes avec énergie non convexe, sans les difficultés techniques rencontrées dans la formulation continue, plusieurs auteurs ont proposé des versions discrètes du problème d'Ericksen. En effet avec les modèles discrets, on échappe au problème de la dépendance de la réponse du choix de la distance, car toutes les distances sont équivalentes.

Müller et Villaggio [94] ont considéré une chaîne de ressorts avec une énergie de déformation à deux puits, et ils ont montré la non unicité des chemins d'équilibre métastables. Plus tard, d'autres auteurs [53, 112] ont étudié le problème dans le cas spécifique d'une loi de comportement tri-linéaire. Dans la plupart de ces travaux, on suppose que les ressorts ne peuvent pas suivre la branche descendante de la courbe de réponse. Au contraire, Puglisi et Truskinovsky [107] analysent les configurations avec des élément sur la branche descendante, et ils trouvent une condition entre les pentes des branches de la courbe de réponse qui permet d'avoir des configurations d'équilibre stables avec un ressort sur la branche descendante.

Dans les systèmes discrets avec une seule chaîne de ressorts, les configurations d'équilibre diffèrent par le nombre des éléments dans les deux phases, mais pas par leurs positions dans la chaîne. En effet, toutes les configurations avec le même nombre d'éléments dans les deux phases sont équivalentes du point de vue énergétique. Dans ces modèles simples, on ne peut donc pas établir l'ordre des transitions de phases des éléments ni le lieu de la localisation des déformations. On a des informations supplémentaires sur l'évolution des transitions de phase si l'on ajoute à la chaîne des ressorts linéaires *next-to-neighbor*, qui relient deux éléments éloignés, voir [27, 106]. Les nouveaux ressorts schématisent les interactions non locales et ils permettent de décrire les différents modes d'évolution des transitions de phase : un seul front de propagation qui démarre à une extrémité, ou deux fronts de propagation qui démarrent au centre de la chaîne ou aux deux extrémités simultanément.

Puglisi [106] a également analysé le cas d'hétérogénéités et de défauts de la structure. Pour prendre en compte ces aspects, il suppose que les ressorts ont une énergie de déformation différente les uns des autres. Avec cette hypothèse, on obtient une courbe de réponse avec une pente positive du plateau.

Plusieurs auteurs [6, 7, 25, 116, 122] ont étudié des chaînes des masses-ressorts à énergie non convexe en dynamique. En particulier, les simulations numériques de Balk et al. [6] montrent que le système passe d'un régime stationnaire, où les déformations des ressorts sont constantes, à un régime où les masses oscillent et le système devient instable. Cette transition se produit avec deux fronts d'onde qui se propagent à des vitesses différentes. Entre les deux fronts les masses ont une vitesse constante.

Les détails sur les modèles discrets seront présentés dans la section 3.3, où les résultats de Puglisi et Truskinovsky [107] seront appliqués à la description du comportement des mousses polymériques.

3.1.3 L'application aux mousses

L'idée d'une énergie de déformation non convexe a trouvé un large champ d'application dans la modélisation du comportement des alliages à mémoire de forme [1, 16, 95]. Puisque la réponse des mousses polymériques à porosités ouvertes montre des analogies avec le comportement superélastique des alliages à mémoire de forme,

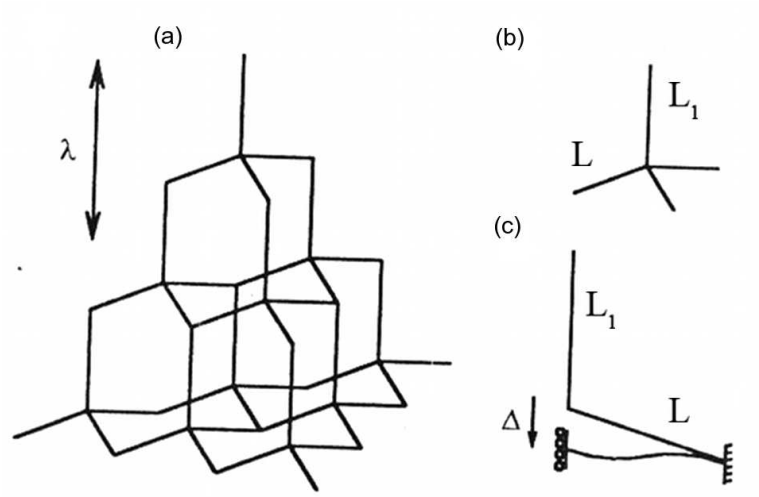


Figure 3.3 – (a) Schématisation de la mousse comme une structure de poutres. Élément de base (b) et élément de base réduit à deux poutres (c). [59]

ceci a suggère la possibilité d'appliquer l'idée d'Ericksen à la description du comportement des mousses.

Dans ce qui suit, on présente le travail de Gioia et al. [59], le premier à notre connaissance qui ait exploré cette voie. En [59], la mousse polymérique est représentée comme une structure périodique engendrée par la répétition d'un élément de base, une cellule composée de quatre poutres (Fig. 3.3a, b). Lorsqu'on applique un déplacement λ dans la direction axiale, si l'on suppose qu'il n'y a pas de flambage de la poutre L_1, l'étude de la déformation de l'élément de base se réduit à l'étude d'une structure à deux éléments, Fig. 3.3c. En plus, si l'on suppose que les poutres sont à section droite circulaire de rayon r avec une loi de comportement linéaire élastique, la géométrie de la structure est déterminée par trois paramètres : $\tilde{r} = r/L$, $\tilde{L_1} = L_1/L$, et l'angle α entre L et L_1. Avec des considérations géométriques, on peut écrire la densité relative de la mousse comme fonction de ces trois paramètres :

$$\rho = \frac{2\pi\tilde{r}^2(3+\tilde{L}_1^2)\csc^2\alpha}{3\sqrt{3}(\tilde{L}_1+\cos\alpha)}\,. \tag{3.12}$$

Gioia et al. calculent l'énergie de déformation de la structure en utilisant la théorie des poutres, et ils montrent qu'elle est une fonction non convexe de λ si la densité ρ est inférieure à une certaine valeur critique ρ_c. La non convexité de l'énergie permet d'avoir deux phases du matériau, une phase à basse densité (*phase L*) et une phase à haute densité (*phase H*), voir Fig. 3.4f, g. Deux valeurs caractéristiques de déformation λ_L et λ_H, qui correspondent aux points α_1 et α_2 introduits précédemment dans la travail d'Ericksen, sont associées à chaque phase (Fig. 3.4).

Gioia et al. supposent que le système suit le chemin des minima globaux, et donc, pour une valeur de λ entre λ_L et λ_H le système se déforme à force constante, voir Fig. 3.4e. Dans cet intervalle, les configurations d'équilibre stables sont les configurations biphasées $y'_{\bar{\sigma},\chi}$ données par (3.7). Celles-ci sont caractérisées par une

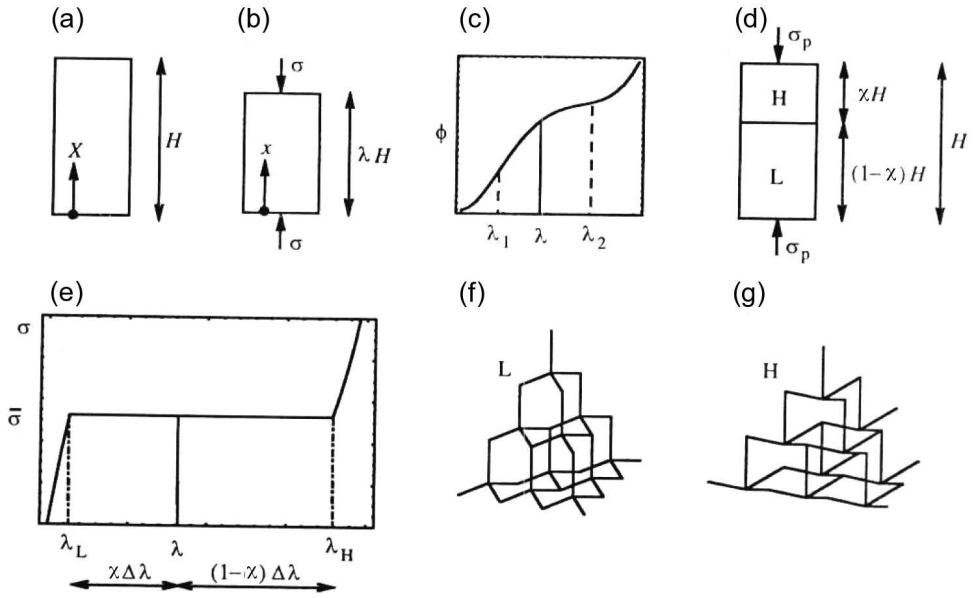


Figure 3.4 – (a)Échantillon dans la configuration initiale et dans la configuration déformée (b). (c) Déformation non homogène de l'éprouvette. (d) Courbe de réponse. Phase L (e) et phase H (f). [59]

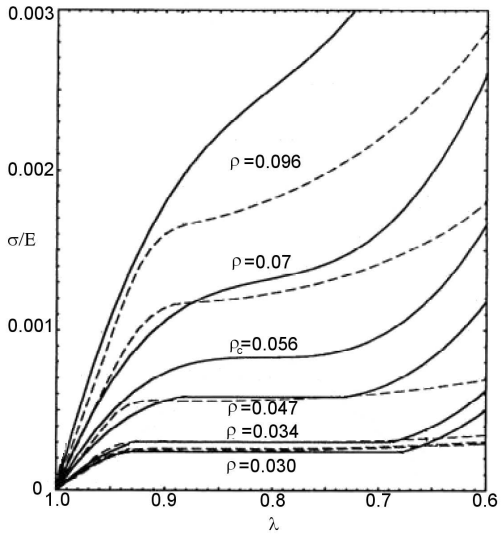


Figure 3.5 – Courbes de réponse du modèle (ligne pleine) et courbes expérimentales pour différentes densités de la mousse. [59]

déformation non homogène de la mousse. Lorsque le déplacement imposé augmente, pour $\lambda_L \leq \bar{\lambda} \leq \lambda_H$, la fraction de phase χ (3.11) augmente de 0 à 1. Dans cet intervalle, la mousse se déforme en passant progressivement de la phase L à la phase H. Avec une bonne identification des paramètres, Gioia et al. obtiennent des courbes de réponse qui reproduisent qualitativement les résultats expérimentaux, voir Fig. 3.5.

En [59], l'introduction d'une énergie non convexe est justifiée par une étude de la microstructure. De plus, une interprétation de l'influence de la densité de la mousse sur son comportement mécanique sous compression est donnée. Par contre, l'analyse énergétique n'est pas complète puisque pas toutes les configurations d'équilibre possibles sont analysées. Enfin, l'hypothèse que le matériau suit les minima globaux ne permet pas de décrire le comportement à la décharge, et donc le cycle d'hystérésis, qui est une caractéristique fondamentale de la réponse de ces matériaux.

3.2 La loi de comportement tridimensionnelle

Dans cette section, la réponse unidimensionnelle en compression confinée est déduite d'une énergie de déformation tridimensionnelle de type Néo-Hookéen [29]. Celle-ci est la plus simple généralisation d'une énergie quadratique. Elle est obtenue en ajoutant un terme qui dépend du déterminant de la transformation, c'est-à-dire des variations de volume. Dans notre cas, la non convexité de l'énergie est obtenue grâce au choix particulier de ce terme supplémentaire.

On pose Ω la région tridimensionnelle ouverte bornée occupée par le corps dans la configuration de référence, et u la transformation qui transforme le point X de Ω en le point $x = f(X)$. On suppose que le corps est formé d'un matériau isotrope et hyperélastique, avec une énergie de déformation :

$$w(\mathbf{F}) = \tfrac{1}{2}\,\alpha\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{F} + \Phi(\det\,\mathbf{F})\;, \tag{3.13}$$

où $\mathbf{F}$ est le gradient de f, α est une constante positive, et Φ une fonction non négative définie pour $\det\,\mathbf{F} > 0$ et telle que

$$\lim_{\det\mathbf{F}\to 0}\Phi(\det\,\mathbf{F}) = \lim_{\det\mathbf{F}\to+\infty}\Phi(\det\,\mathbf{F}) = +\infty\;. \tag{3.14}$$

Le gradient de w

$$\mathbf{S} = w_F(\mathbf{F}) = \alpha\mathbf{F} + \det\mathbf{F}\;\;\Phi'(\det\,\mathbf{F})\,\mathbf{F}^{-T} \tag{3.15}$$

est le tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff. Si l'on considère $w(\mathbf{I}) = 0$, où $\mathbf{I}$ est le tenseur identité, et si l'on suppose que la configuration de référence $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ soit *stress-free* $w_F(\mathbf{I}) = 0$, on a que :

$$\alpha = -\Phi'(1)\;, \qquad \tfrac{3}{2}\,\alpha + \Phi(1) = 0\,. \tag{3.16}$$

Pour la fonction Φ, on prend l'expression en [103]

$$\begin{aligned}\Phi(\det\,\mathbf{F}) = c\,(\det\,\mathbf{F})^m\Big(\tfrac{1}{m+2}\,(\det\,\mathbf{F})^2 - \tfrac{1}{m}\Big) - \mu\ln\,(\det\mathbf{F}\,)\\ +\tfrac{\beta\sqrt{\pi}}{2\,\sqrt{k}}\,\mathrm{erf}\,\Big(\sqrt{k}\,(\det\,\mathbf{F}-a)\Big) + \gamma\,,\end{aligned} \tag{3.17}$$

où $c, m, \mu, \beta, k, \gamma$ sont des constantes positives et $0 < a \leqslant 1$, $\mathrm{erf}(\cdot)$ est la fonction erreur

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\int_0^x e^{-t^2}\,dt\;. \tag{3.18}$$

La condition (3.16) détermine les valeurs de α, γ,

$$\begin{aligned}&\alpha = \mu - \beta\exp(-k(a-1)^2),\\ &\gamma = -\frac{1}{2}(\mu - \beta\exp(-k(a-1)^2)) + \frac{2c}{m(m+2)} - \frac{\beta\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}\,\mathrm{erf}(\sqrt{k}\,(a-1))\,.\end{aligned} \tag{3.19}$$

L'expression choisie pour Φ est la somme de deux contributions : une première partie, similaire à la fonction proposée dans [100], qui prend en compte les effets à long terme, et une deuxième partie, la fonction erreur, qui a une influence locale pour les valeurs de det $\mathbf{F}$ proches de a. Les conditions (3.14) sont satisfaites pour tous c, μ, et m positifs.

Si l'on considère le cas particulier d'une compression confinée dans la direction $\vec{e}$, le gradient de la transformation devient :

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + (\lambda-1)\vec{e}\otimes\vec{e}\,, \qquad \det\,\mathbf{F} = \lambda\,, \qquad 0 < \lambda < 1\,, \tag{3.20}$$

et donc le tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff a l'expression

$$\mathbf{S} = (\lambda\Phi'(\lambda) - \Phi'(1))\,\mathbf{I} + (1-\lambda)\,(\Phi'(\lambda) + \Phi'(1))\,\vec{e}\otimes\vec{e}\,. \tag{3.21}$$

On observe que $\mathbf{S}$ ne dépend que de λ et de la fonction Φ. La composante de $\mathbf{S}$ dans la direction de la charge est

$$\sigma = \mathbf{S}\,\vec{e}\cdot\vec{e} = \Phi'(\lambda) - \lambda\,\Phi'(1)\;. \tag{3.22}$$

En remplaçant Φ par la relation (3.17), l'équation (3.22) devient

$$\sigma = \left[\mu - \beta\exp\left(-k(1-a)^2\right)\right]\lambda + c\lambda^{m-1}\left(\lambda^2-1\right) - \mu\lambda^{-1} + \beta\exp\left(-k(\lambda-a)^2\right)\,. \tag{3.23}$$

Cette relation sera utilisée pour reproduire les courbes expérimentales montrées sur la Fig. 2.3. Grâce au choix de Φ, l'expression de σ peut être décomposée en deux parties f, g qui dépendent respectivement de c, m, μ, et de β, a, k,

$$\begin{aligned}&f(\lambda) = c\lambda^{m-1}\,(\lambda^2-1) - \mu\,(\lambda^{-1}-\lambda)\,,\\ &g(\lambda) = -\beta\,\lambda\,\exp(-k(1-a)^2)) + \beta\;\exp(-k(\lambda-a)^2))\,.\end{aligned} \tag{3.24}$$

On remarque que $g(\lambda)$ est positive si $0 \leq \lambda \leq 1$, et en plus on a

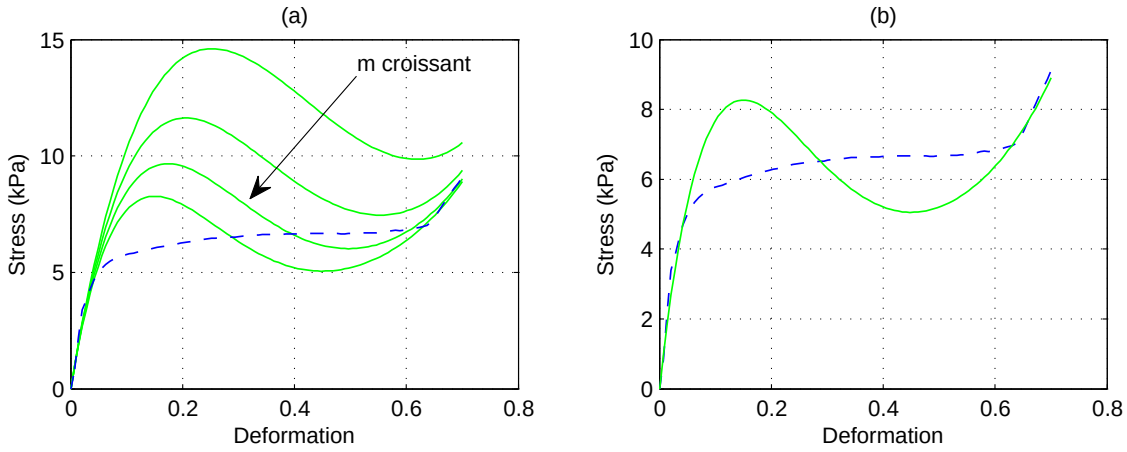


Figure 3.6 – (a) Diagrammes de la fonction constitutive f pour différentes valeurs de m avec μ et c solutions du système (3.28). (b) Courbe f pour $m = 7$ (ligne pleine) et courbe expérimentale (ligne pointillée).

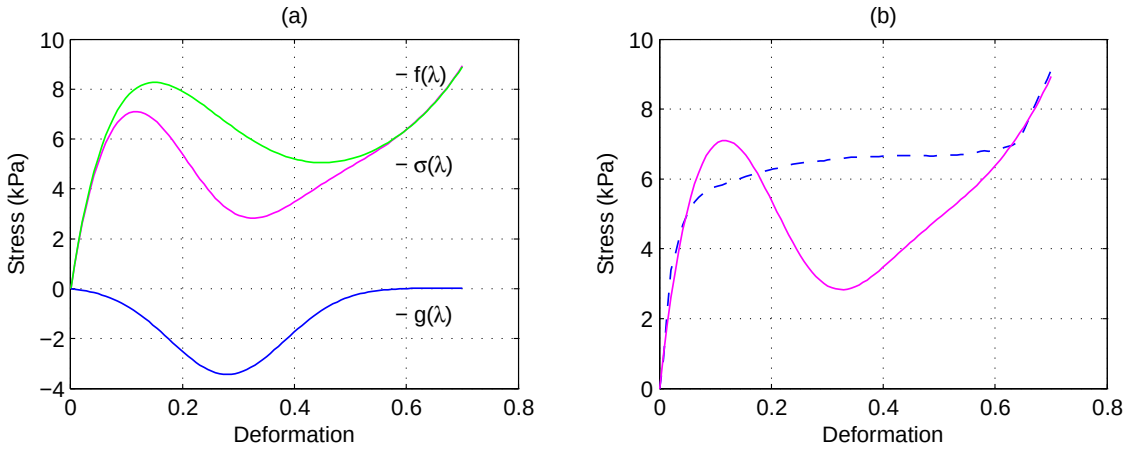


Figure 3.7 – (a) Décomposition de σ (équation 3.23) dans les deux contributions f et g avec les valeurs des paramètres reportées dans le Tableau 3.1. (b) Comparaison de σ (ligne pleine) avec la courbe expérimentale (ligne en pointillée).

$$\begin{aligned} &g(0) = \beta \exp(-k\, a^2)\,, \\ &g(a) = \beta\,(1 - a\, \exp(-k(1-a)^2)) \Rightarrow g(a) \approx \beta \quad \text{si } k \gg 1\,, \\ &g(1) = 0\,. \end{aligned} \tag{3.25}$$

En effet, la fonction g est formée par la somme d'une fonction linéaire et d'une gaussienne, et donc, si k est suffisamment grand, les valeurs de g aux extrémités sont négligeables par rapport à la valeur du maximum.

Puisque l'on a vu que pour un bon choix de k et a, l'évolution de σ proche de $\lambda = 0$ et de $\lambda = 1$ ne dépend pas de la fonction g, on peut étudier séparément les deux fonctions. Cette considération aide beaucoup pour l'identification des paramètres élastiques. Soient H et K les pentes de la courbe expérimentale pour $\lambda = 1$ et $\lambda = p$, avec p l'abscisse d'un point sur la deuxième branche ascendante. De (3.24) on a que

$$f'(\lambda) = \mu(1+\lambda^{-2}) + c(m+1)\lambda^m - c\,(m-1)\,\lambda^{m-2}\,. \tag{3.26}$$

Pour m fixé, on peut déterminer les valeurs de c et μ en imposant les conditions

$$\begin{array}{lll} \text{(a) pente initiale } (\lambda{=}1) \text{ égale à } H & \rightarrow & f'(1) = H\,, \\ \text{(b) pente en } p \text{ égale à } K & \rightarrow & f'(p) = K\,, \end{array} \tag{3.27}$$

qui donnent le système linéaire en c et μ

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu + c = H/2\,, \\ \mu(1+p^{-2}) + c\,((m+1)p^m - \,(m-1)\,p^{m-2}) = K\,. \end{array} \right. \tag{3.28}$$

Sur la Fig. 3.6a on montre l'évolution de f pour différentes valeurs de m avec c et μ solutions du système (3.28), et avec $H = 145$ kPa, $K = 25$ kPa et $p = 0.35$. Sur la Fig. 3.6b, la courbe obtenue pour $m = 7$ est comparée à la courbe expérimentale. Si maintenant on ajoute la fonction g à la fonction f, on peut changer la position du maximum et la valeur de la force correspondante avec un choix opportun des paramètres a, β et k, Fig. 3.7a. Sur la Fig. 3.7b, on montre la courbe expérimentale et la courbe (σ, λ), obtenue avec les valeurs reportées dans le Tableau 3.1. On voit que la courbe obtenue ne correspond pas à la courbe expérimentale. Mais on verra dans la suite qu'en assemblant en série un nombre suffisant de ressorts, on peut arriver à décrire correctement le comportement observé expérimentalement.

3.3 Le modèle discret

Dans cette section, on présente le modèle discret proposé par Del Piero et Pampolini [103] et inspiré par Puglisi et Truskinovsky [107].

3.3.1 Conditions d'équilibre et de stabilité

On suppose que la mousse est composée de couches parallèles de cellules, et on représente chaque couche par un ressort non linéaire (Fig. 3.8a et 3.8b). De plus, on suppose que tous les ressorts ont la même longueur initiale l et la même énergie de déformation non convexe w, Fig. 3.8c, et donc on a une courbe de réponse composée de deux branches ascendantes reliées par une branche descendante, du type montré sur la Fig. 3.8d. On note $\delta u_i = u_i - u_{i-1}$ l'élongation du $i^{éme}$ ressort. On prend en compte le cas où une élongation Δ est imposée à une extrémité , $u_0 = 0$ et $u_N = \Delta$. L'élongation totale de la chaîne Δ est la somme des élongations δu_i de chaque ressort

$$\sum_{i=1}^{n} \delta u_i = \Delta\,. \tag{3.29}$$

Si l'on écrit la condition (3.29) en terme de déformations des ressorts, on trouve

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = N\,\varepsilon_0\ , \tag{3.30}$$

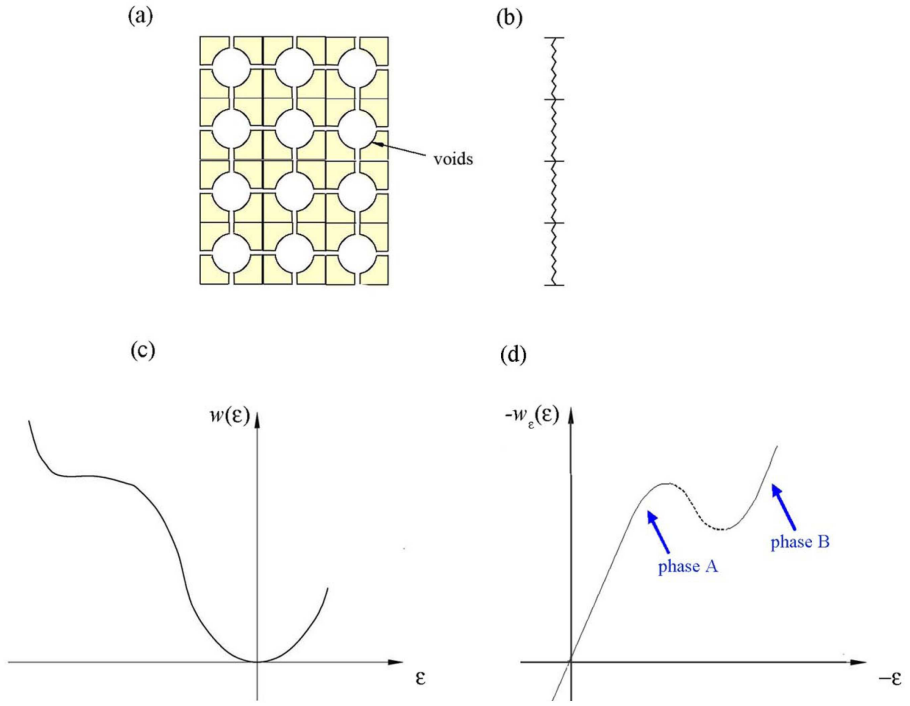


Figure 3.8 – Représentation des couches de cellules (a) comme une chaîne de ressorts (b) avec énergie de déformation non convexe (c). (d) Courbe de réponse d'un ressort.

où $\varepsilon_i = \delta u_i / l$ est la déformation du i-ème ressort, et $\varepsilon_0 = \Delta/(Nl)$ est la déformation totale de la chaîne. L'énergie totale du système est la somme des énergies de déformation des ressorts,

$$E\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_N\right) = \sum_{i=1}^{N} w(\varepsilon_i) \ . \tag{3.31}$$

En utilisant la condition au bord (3.30), on peut écrire l'énergie totale comme fonction des $(N-1)$ premières déformations

$$E\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{N-1}\right) = \sum_{i=1}^{N-1} w(\varepsilon_i) + w\Big(N\varepsilon_0 - \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_i\Big) \, . \tag{3.32}$$

Pour un système élastique discret, les positions d'équilibre sont déterminées par la condition d'annulation des dérivées partielles de l'énergie, et les configurations d'équilibre stable ou metastable [1] correspondent aux minima globaux ou locaux de l'énergie. Dans notre cas on a :

$$\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_i}\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{N-1}\right) = w'(\varepsilon_i) - w'\Big(N\varepsilon_0 - \sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon_j\Big) = 0 \, , \quad i = 1, 2, ..., N-1 \ . \tag{3.33}$$

1. Dans les modèles discrets il n'est pas nécessaire distinguer les configurations d'équilibre stables et métastable

Si l'on utilise la relation $\varepsilon_N = N\varepsilon_0 - \sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon_j$, la condition d'équilibre écrite ci-dessus devient

$$w'(\varepsilon_i) = w'(\varepsilon_N) \ , \qquad i = 1, 2, ..., N-1 \ , \tag{3.34}$$

qui nous dit que la force transmise entre les ressorts doit être la même. La valeur de cette force commune pour tous les éléments sera appelée σ.

On considère maintenant la condition de stabilité. Une condition nécessaire afin qu'une configuration d'équilibre soit stable est que la matrice Hessienne soit semi définie positive. Calculons les dérivés secondes de l'énergie totale :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial\varepsilon_i \partial\varepsilon_j} = \begin{cases} w''(\varepsilon_j) + w''(\varepsilon_N) & \text{si } i = j \, , \\ w''(\varepsilon_N) & \text{si } i \neq j \, . \end{cases} \tag{3.35}$$

Si l'on pose $A_i := w''(\varepsilon_i)$, la matrice hessienne peut être écrite sous la forme :

$$H = \begin{bmatrix} A_1 + A_N & A_N & . & A_N \\ A_N & A_2 + A_N & . & A_N \\ . & . & . & . \\ A_N & A_N & . & A_{N-1} + A_N \end{bmatrix} \, . \tag{3.36}$$

La matrice H est semi définie positive si et seulement si chacun des mineurs principaux est non négatif, et cela signifie que :

$$\begin{aligned} &A_i + A_N \geq 0 \, , \\ &A_i \, A_j + (A_i + A_j) \, A_N \geq 0 \, , \\ &A_i \, A_j \, A_k + (A_i \, A_j + A_j \, A_k + A_k \, A_i) \, A_N + (A_i + A_j + A_k) \, A_N^2 \geq 0 \, , \\ &\ldots \end{aligned} \tag{3.37}$$

Les relations ci-dessus sont satisfaites si tous les coefficients A_i sont positifs, et autrement dit si tous les ressorts ont une déformation sur les branches ascendantes de la courbe (σ, ε_i).

Les conditions (3.37) sont violées si au moins deux coefficients A_i sont négatifs. On fait un raisonnement par l'absurde en supposant que A_i et A_j soient négatifs. La deuxième relation peut être réécrite sous la forme suivante :

$$A_i \, A_N + (A_i + A_N) \, A_j \geq 0 \, . \tag{3.38}$$

La première relation (3.37) impose que A_N et le terme entre parenthèses de (3.38) soient positifs. Cela implique que les deux termes de la somme (3.38) sont négatifs et que donc la deuxième relation (3.37) est contredite. Ce résultat implique qu'une configuration est instable si deux ou davantage de ressorts ont une déformation située sur la branche descendante de la courbe de réponse (σ, ε_i), ou autrement dit, une configuration d'équilibre stable peut avoir au maximum un seul ressort avec une déformation sur la branche descendante. Dans ce cas, sans perte de généralité, on suppose que A_N est négatif et tous les autres A_i positifs [2]. Si l'on divise les relations (3.37) respectivement par $A_i \, A_N$, $A_i \, A_j \, A_N$, $A_i \, A_j \, A_k \, A_N$ on obtient :

2. On néglige le cas où les A_i sont nuls

$$\begin{array}{l} A_i^{-1} + A_N^{-1} \leq 0\,, \\ A_i^{-1} + A_j^{-1} + A_N^{-1} \leq 0\,, \\ A_i^{-1} + A_j^{-1} + A_k^{-1} + A_N^{-1} \leq 0\,, \\ \ldots \end{array} \tag{3.39}$$

et puisque chacune de ces relations implique les précédentes, il ne reste que la condition

$$\sum_{i=1}^{N} A_i^{-1} \leq 0\,. \tag{3.40}$$

De (3.40) on tire qu'une configuration d'équilibre avec le ressort N dans la branche descendante de sa courbe de réponse est stable si $w''(\varepsilon_N)$ est suffisamment petite.

Dans la suite on montre que pour une w du type montré sur la Fig. 3.8c, il existe toujours un nombre N d'éléments de la chaîne que rend instable la configuration avec un ressort sur la branche descendante. On note ε_a et ε_b les points de maximum et de minimum local de w'.On considère les configurations d'équilibre où le ressort $N^{éme}$ a une déformation ε_N sur la branche descendante ($A_N < 0$), et on définit

$$A_{max} = \max_{\varepsilon_N \in [\varepsilon_a, \varepsilon_b]} \{w''(\varepsilon_i)\,,\ \text{tel que}\, w'(\varepsilon_i) = w'(\varepsilon_N))\}\ .$$

La relation de stabilité (3.40) peut être réécrite sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{A_i} - \frac{1}{|A_N|} \leq 0\,. \tag{3.41}$$

En utilisant la définition de A_{max}, on a que

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{A_i} - \frac{1}{|A_N|} \geq \frac{N-1}{A_{max}} - \frac{1}{|A_N|}\,. \tag{3.42}$$

Donc, aucune de ces configurations n'est stable si l'on considère une chaîne avec un nombre d'éléments

$$N > \frac{A_{max}}{|A_N|} + 1\,. \tag{3.43}$$

La condition de stabilité (3.40) implique aussi une condition sur la pente de la courbe (σ, ε_0) [39]. On considère les déformations ε_i comme fonctions de la déformation moyenne ε_0, et grâce à la condition d'équilibre (3.34), on peut écrire

$$\frac{d\,\sigma}{d\,\varepsilon_0} = \frac{d\,w'}{d\,\varepsilon_0} = w''\left(\varepsilon_i(\varepsilon_0)\right) \frac{d\,\varepsilon_i}{d\,\varepsilon_0}\,, \quad i = 1, 2, \ldots N\,. \tag{3.44}$$

Si l'on dérive la condition au bord (3.30) par rapport à ε_0, on trouve

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\,\varepsilon_i}{d\,\varepsilon_0} = N\,, \tag{3.45}$$

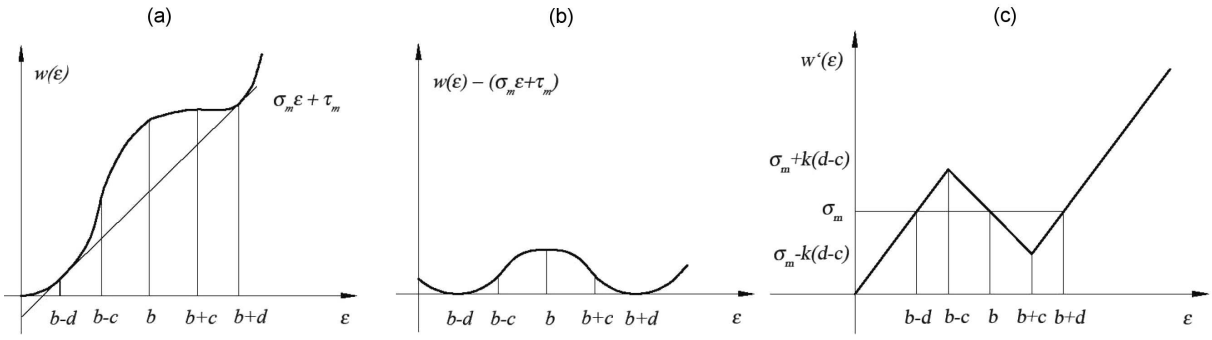


Figure 3.9 – Forme de l'énergie de déformation choisie dans le cas explicatif d'une chaîne à deux éléments (a), (b), et relatif diagramme force - élongation (c) [37]

et en utilisant la relation (3.44) on obtient

$$N = \frac{d\,\sigma}{d\,\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{w''(\varepsilon_i)}\,. \tag{3.46}$$

Nous remarquons que la somme du second terme est le premier terme de la condition de stabilité (3.40), et donc la relation ci-dessus impose que la pente de la courbe de réponse du système (σ, ε_0) soit négative pour une configuration d'équilibre stable avec un ressort sur la branche descendante. Au contraire, si tous les ressorts sont sur les branches ascendantes, la condition de stabilité garantit une pente positive de la courbe de réponse.

3.3.2 Le cas explicatif d'une chaîne de deux ressorts

On considère le cas explicatif d'une chaîne de deux ressorts avec énergie de déformation du type montré sur la Fig. 3.9 [37]. On note $w_m(\varepsilon) = \sigma_m\varepsilon - \tau_m$ l'équation de la droite tangente à la courbe $w(\varepsilon)$ en deux points. On suppose que $w - w_m$ soit parabolique par morceaux et symétrique par rapport à l'axe $\varepsilon = b$, et cela revient à supposer la forme suivante pour w :

$$w(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{k}{2}(d + (\varepsilon - b))^2 + \sigma_m\,\varepsilon + \tau_m & \text{pour } 0 \le \varepsilon < b - c\,, \\ -\frac{k}{2}\frac{dc + (\varepsilon - b))^2}{c}(d - c) + \sigma_m\,\varepsilon + \tau_m & \text{pour } b - c \le \varepsilon < b + c\,, \\ \frac{k}{2}(d - (\varepsilon - b))^2 + \sigma_m\,\varepsilon + \tau_m & \text{pour } \varepsilon \ge b + c\,, \end{cases} \tag{3.47}$$

avec b, c, d, k constantes positives et avec $c < d$. Par dérivation, on obtient la loi de réponse trilinéaire,

$$w'(\varepsilon) = \begin{cases} k(d + (\varepsilon - b)) + \sigma_m & \text{pour } 0 \le \varepsilon < b - c\,, \\ -k\frac{\varepsilon - b}{c}(d - c) + \sigma_m & \text{pour } b - c \le \varepsilon < b + c\,, \\ -k(d - (\varepsilon - b)) + \sigma_m & \text{pour } \varepsilon \ge b + c\,, \end{cases} \tag{3.48}$$

Les fonctions w, $w - w_m$ et w' sont présentées sur la Fig. 3.9.

Dans le cas de deux ressorts, la condition d'équilibre (3.34) et la condition au bord (3.30) deviennent

$$w'(\varepsilon_1) = w'(\varepsilon_2) = \sigma\,, \tag{3.49}$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon_0\,. \tag{3.50}$$

Pour n'importe quelle valeur de la force comprise entre $[\sigma_m - k(d-c), \sigma_m + k(d-c)]$ trois valeurs différentes de la déformation sont possibles, une pour chaque branche de la courbe de réponse (voir Fig. 3.9c). On dira qu'un ressort est en *phase A* (*phase B*) si sa déformation est sur la première (seconde) branche ascendante de la courbe de réponse, et qu'il est en *phase C* si sa déformation est sur la branche descendante. Pour chaque valeur de la force dans cet intervalle, neuf configurations d'équilibre différentes sont envisageables :

- trois configurations d'équilibre monophasées : AA, BB, CC ;
- six configurations d'équilibre biphasées : AB, BA, AC, CA, BC, CB.

Pour les configurations monophasées, il est clair que la condition d'équilibre impose que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$. Dans le plan $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, ces configurations sont représentées par la bissectrice, voir Fig. 3.10. Pour la configuration AC, la condition d'équilibre $w'(\varepsilon_1) = w'(\varepsilon_2)$ s'écrit

$$k(d + (\varepsilon_1 - b)) + \sigma_m = -k\frac{\varepsilon_2 - b}{c}(d - c) + \sigma_m\,,$$

et donc, on trouve la relation

$$\varepsilon_1 = -\frac{d-c}{c}(\varepsilon_2 - b) - d + b\,, \tag{3.51}$$

qui représente l'équation d'une droite qui passe par les points $(b - c,\, b - c)$ et $(b + c - 2d,\, b + c)$. Toujours à l'aide de la relation d'équilibre (3.49), on trouve la relation

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 - 2d\,, \tag{3.52}$$

pour la configuration AB, et

$$\varepsilon_2 = -\frac{d-c}{c}(\varepsilon_1 - b) + d + b\,, \tag{3.53}$$

pour la configuration CB. Les configurations CA, BA et BC sont les symétriques des cas traités, et on trouve les mêmes relations avec ε_1 et ε_2 inversés.

Maintenant, nous étudions la stabilité de ces configurations d'équilibre. Dans les configurations AA, BB, AB et BA, les deux ressorts ont des déformations dans une branche ascendante, et donc ces configurations sont stables. En revanche, la configuration CC est instable car les deux ressorts sont dans la branche descendante. Pour les autres configurations (AC, CA, BC, CB), il faut vérifier la condition de stabilité (3.40) qui prend la forme suivante

$$k - k\frac{d-c}{c} > 0\,. \tag{3.54}$$

De la relation ci-dessus on tire que ces configurations sont stables si $2c > d$ (cas *supercritique*), et instables si $2c < d$ (cas *subcritique*).

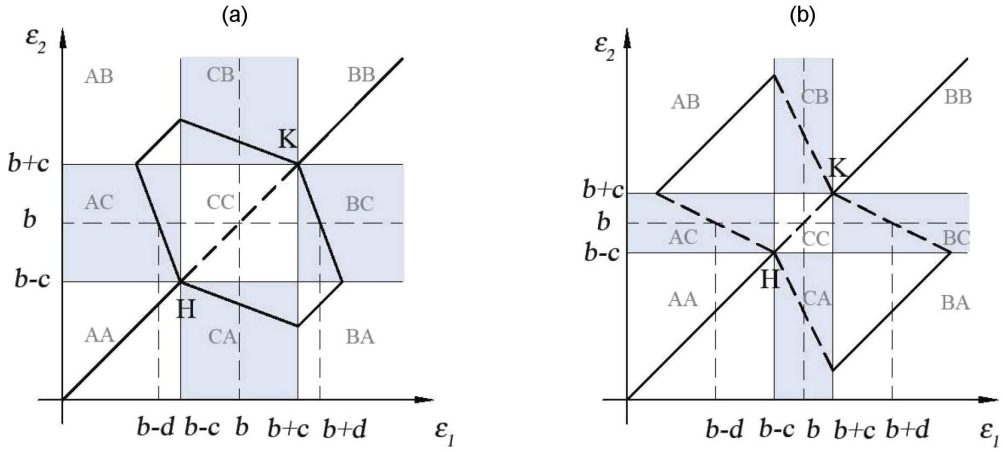


Figure 3.10 – Configurations d'équilibre dans le plan (ε_1,ε_2) dans le cas supercritique (a) et subcritique (b) [37].

Sur la Fig. 3.10 on montre une vue sur le plan $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de toutes les configurations d'équilibre pour le cas supercritique (Fig. 3.10a) et subcritique (Fig. 3.10b). Les configurations stables sont dessinées en traits pleins, celles instables en pointillée. Grâce à cette figure on peut comprendre l'évolution du système lorsque le déplacement imposé $n\,\varepsilon_0$ augmente. Les configurations avec la même déformation moyenne ε_0 se trouvent sur les droites orthogonales à la bissectrice $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Dans le cas supercritique, si $\varepsilon_0 < b - c$, la seule configuration d'équilibre possible est la configuration monophasée AA. Lorsque la condition critique $\varepsilon_0 = b - c$ est atteinte (point H sur la figure), trois chemins d'équilibre différents se débranchent, dont deux sont stables (CA-BA-BC et AC-AB-CB) et un instable (CC). Le système doit parcourir un des deux chemins stables, et cela implique que les deux déformations deviennent différentes, et donc la configuration d'équilibre perd la symétrie. Lorsque l'on arrive sur les branches AB ou BA, les déformations des deux ressorts sont bien différentes mais cette différence n'augmente pas si on augmente ε_0. Enfin, sur les branches BC et CB, la différence de déformation tend à diminuer jusqu'au point K où la configuration d'équilibre retrouve la symétrie.

Dans le cas subcritique, les chemins d'équilibre sont les mêmes, mais la pente différente des branches AC et CA cause l'apparition de plusieurs configurations d'équilibre stables avant le point de bifurcation H. Il est raisonnable de supposer que le système reste dans la configuration AA jusqu'au point H, pour sauter ensuite dans une des deux branches AB, BA. Dans ce cas, on a un passage brusque de la configuration monophasée, où les ressorts ont la même déformation, à une configuration où les ressorts ont deux déformations bien différentes. Cette configuration sera gardée au delà du point K, et seulement lorsque $\varepsilon_0 = b - c + d$ on sautera dans la configuration monophasée BB. Au contraire à la décharge, le point de saut est le point K.

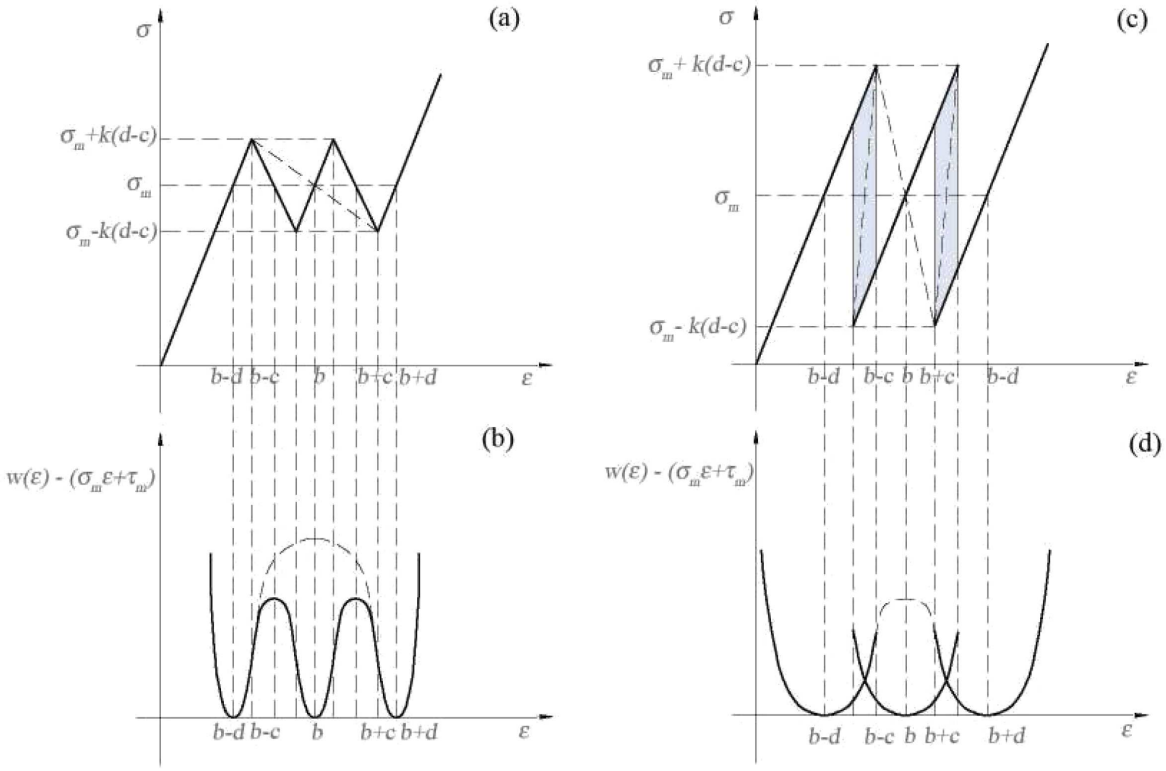


Figure 3.11 – Courbes force -élongation et énergie - élongation pour la chaîne de deux ressorts dans le cas supercritique (a), (c) et dans le cas subcritique (b), (d) [37].

Voyons la différence entre les courbes de réponse (σ, ε_0) dans les deux cas, supercritique et subcritique. En combinant pour les configurations différentes la loi de comportement (3.48), la relation d'équilibre (3.49) et la condition au bord (3.30) on trouve :

$$\begin{aligned}
&\sigma = k(d + (\varepsilon_0 - b)) + \sigma_m && \text{pour la configuration AA}\,,\\
&\sigma = k(d + (\varepsilon_0 - b)) + \sigma_m && \text{pour la configuration BB}\,,\\
&\sigma = -k\tfrac{\varepsilon_0 - b}{c}(d - c) + \sigma_m && \text{pour la configuration CC}\,,\\
&\sigma = k\tfrac{d-c}{d-2c}(2\varepsilon_0 - 2b + d) + \sigma_m && \text{pour les configurations AC et CA}\,,\\
&\sigma = k(\varepsilon_0 - b) + \sigma_m && \text{pour les configurations AB et BA}\,,\\
&\sigma = k\tfrac{d-c}{d-2c}(2\varepsilon_0 - 2b - d) + \sigma_m && \text{pour les configurations BC et CB}\,.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Nous remarquons que pour les configurations AB, BA AC et CA les relations (3.55) donnent une pente négative de la courbe de réponse dans le cas supercritique $(2c > d)$ et positive dans le cas subcritique. Les courbes de réponse ainsi que les diagrammes énergie - déformation sont montrés sur la Fig. 3.11 pour le deux cas. La différence la plus importante est la présence des sauts dans le cas subcritique, lorsque dans le cas supercritique la réponse est continue. De plus si l'on considère un processus de charge et décharge, dans le cas supercritique la réponse suit la

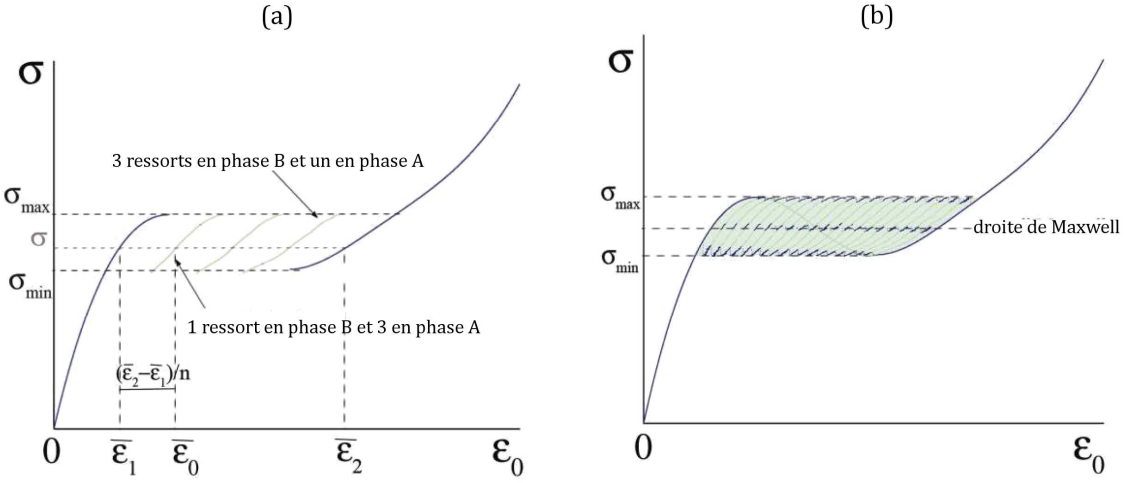


Figure 3.12 – Courbes de réponse pour une chaîne de 4 ressorts (a) et 20 ressorts (b).

même courbe (ligne en traits pleins sur la Fig. 3.11a) que se soit à la charge ou à la décharge. Au contraire dans le cas subcritique, on observe deux cycles d'hystérésis (colorés en bleu clair sur la Fig. 3.11b). Ces cycles d'hystérésis sont dus aux pertes d'énergie de caractère dissipatif (Fig. 3.11d) au passage entre les configurations monophasées et celles biphasées.

3.3.3 La réponse d'une chaîne de N ressorts

On considère un système de N ressorts avec la loi de comportement (3.23). Dans la section 3.3.1 on a montré que une configuration d'équilibre est stable si l'une des conditions suivantes est satisfaite

– tous les A_i sont positifs
– $(N-1)$ A_i sont positifs, un est négatif et la condition (3.40) est satisfaite

On suppose que la relation (3.43) est satisfaite, et donc que N est suffisamment grand pour pouvoir négliger les configurations d'équilibre avec un A_i négatif. Donc, les seules configurations d'équilibre stable sont les configurations avec tous les A_i positifs, ou autrement dit avec toutes les déformations ε_i sur une des deux branches ascendantes de la courbe de réponse. Comme pour le cas des deux ressorts précédemment traité, on dira que le i-ème ressort est en *phase A* si ε_i est sur la première branche ascendante, et en *phase B* si ε_i est sur la seconde branche ascendante.

On considère une configuration d'équilibre avec M ressorts en phase A, et pour laquelle la force $\bar{\sigma}$ est dans l'intervalle $(\sigma_{min}, \sigma_{max})$, où σ_{min} et σ_{max} sont le minimum local et le maximum local de la courbe $w'(\varepsilon)$, Fig. 3.8d. On note respectivement $\bar{\varepsilon}_1$ et $\bar{\varepsilon}_2$ les déformations sur la première et sur la seconde branche pour lesquelles on a $w'(\bar{\varepsilon}_1) = w'(\bar{\varepsilon}_2) = \bar{\sigma}$. Donc, la déformation moyenne est :

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{M}{N}\,\bar{\varepsilon}_1 + \frac{N-M}{N}\,\bar{\varepsilon}_2\,. \tag{3.56}$$

Si l'on change la valeur de $\bar{\sigma}$ en gardant M fixe, avec la relation (3.56) on peut construire un chemin d'équilibre stable $(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}_0)$. Si l'on répète cette construction pour les différentes valeurs de M on obtient tous les chemins d'équilibre stable possibles. Sur la Fig. 3.12a, cette construction a été faite pour un système de 4 ressorts. Les cas $M = 0$ et $M = N$ correspondent aux configurations homogènes. En effet, si $M = N$ de (3.56), on tire que $\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}_1$, donc le chemin $(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}_0)$ coïncide avec la première branche ascendante, et si $M = 0$ on a $\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}_2$, alors le chemin $(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}_0)$ coïncide avec la seconde branche ascendante.

A l'aide de la Fig. 3.12a, on peut comprendre la réponse du système. Si l'on suppose que l'évolution du système suit les chemins d'équilibre correspondants aux minima locaux de l'énergie, alors, lorsque le système est chargé à partir de la configuration initiale, la réponse suit la première branche ascendante jusqu'à ce que σ atteigne la valeur σ_{max}. En ce point, si l'on augmente ε_0, il n'y a plus des configurations monophasées stables. Il est raisonnable supposer que le système saute à la branche d'équilibre stable la plus proche correspondant à la configuration avec un ressort en phase B et trois ressorts en phase A. Cette transition de phase est un processus hors d'équilibre, dans lequel la force diminue à déformation ε_0 constante. Ce processus ne sera pas étudié. Dès que la nouvelle branche est atteinte, la force augmente jusqu'à ce que σ atteigne à nouveau la valeur σ_{max}, puis le système saute à la configuration avec deux ressorts en phase B. Donc on a un changement progressif de phase des ressorts. Lorsque tous les ressorts ont changé de phase, le système suit la seconde branche ascendante, qui correspond à la configuration avec tous les ressorts en phase B.

Pour résumer, le système parcourt la première branche ascendante jusqu'à σ_{max}, puis il suit une ligne oscillante presque horizontale en prenant des configurations avec un nombre M de ressorts en phase A qui décroît de N à zéro, et enfin il parcourt la seconde branche ascendante. Si l'on compare les courbes de réponse pour une chaîne de quatre (Fig. 3.12a) et une de vingt (Fig. 3.12b) éléments, nous remarquons que le nombre de branches d'équilibre aussi bien que le nombre des sauts augmentent avec N. Mais, puisque chaque transition de phase implique un saut de la force σ plus petit, la réponse devient plus régulière.

Sur la Fig. 3.13, les prédictions du modèle sont comparées avec le mécanisme de localisation des déformations que l'on a observé dans les expériences. La première ligne représente la configuration initiale et la deuxième ligne montre le système qui suit la première branche de la courbe de réponse. Elles correspondent toutes les deux à la configuration homogène avec tous les ressorts en phase A. Sur les lignes suivantes, le système passe de façon progressive aux configurations biphasées avec un nombre croissant de ressorts en phase B. Lorsque tous les ressorts ont changé de phase le système se déforme de façon homogène.

A la décharge, le modèle prédit un comportement analogue : le système parcourt la seconde branche ascendante jusqu'à la valeur σ_{min}, puis la réponse oscille autour de cette valeur, le système prend des configurations avec un nombre M de ressorts en phase A qui croit de zéro à N, et enfin le système parcourt la première branche

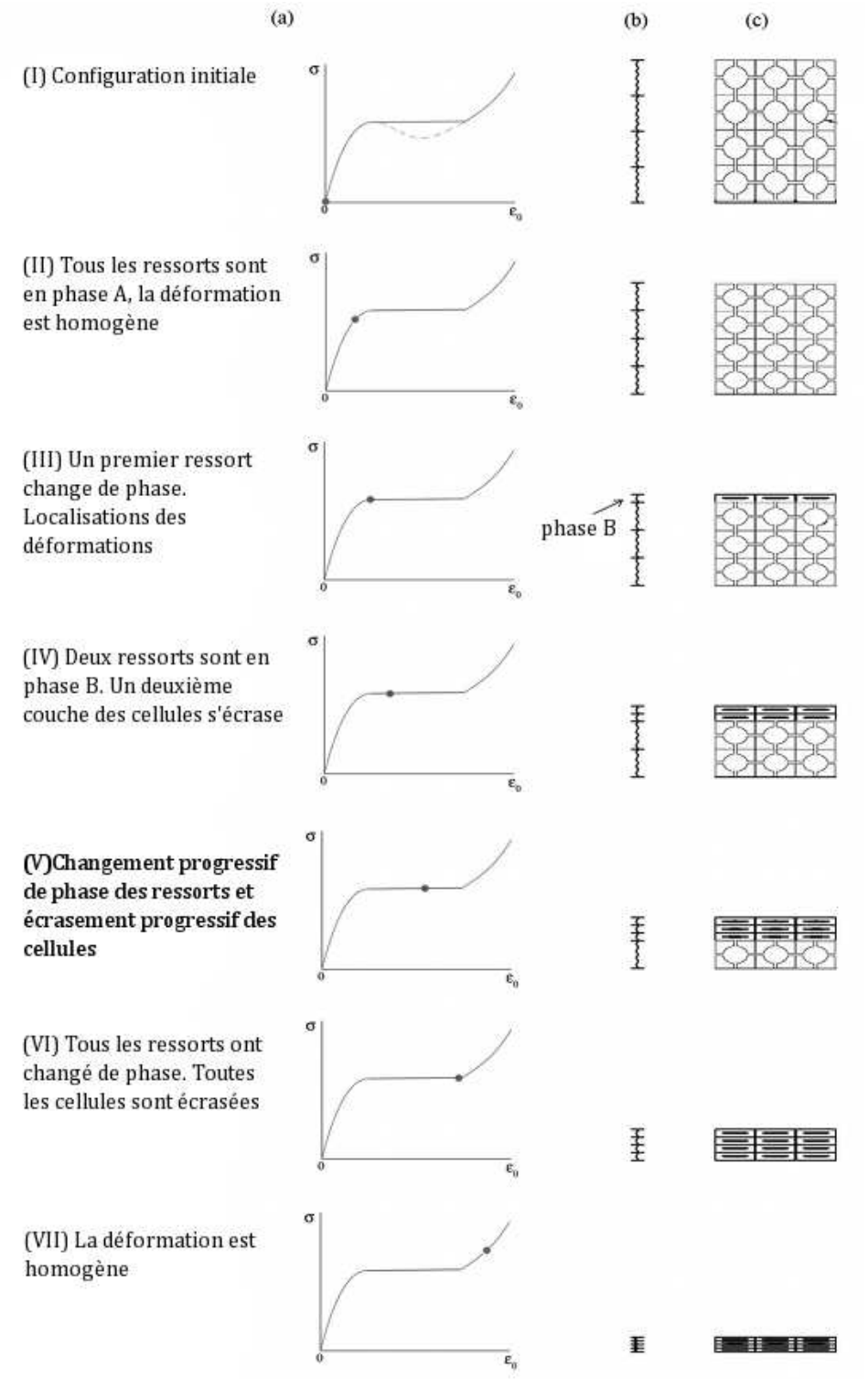


Figure 3.13 – Description de l'évolution de la déformation de la chaîne des ressorts (b), et de la mousse (c), en suivant la courbe de réponse (a).

Tableau 3.1 – Les valeurs des paramètres dans le modèle élastique.

$c = 69.9$ kPa	$m = 7$	$\mu = 2.92$ kPa	$a = 0.72$	$\beta = 3.5$ kPa	$k = 18$

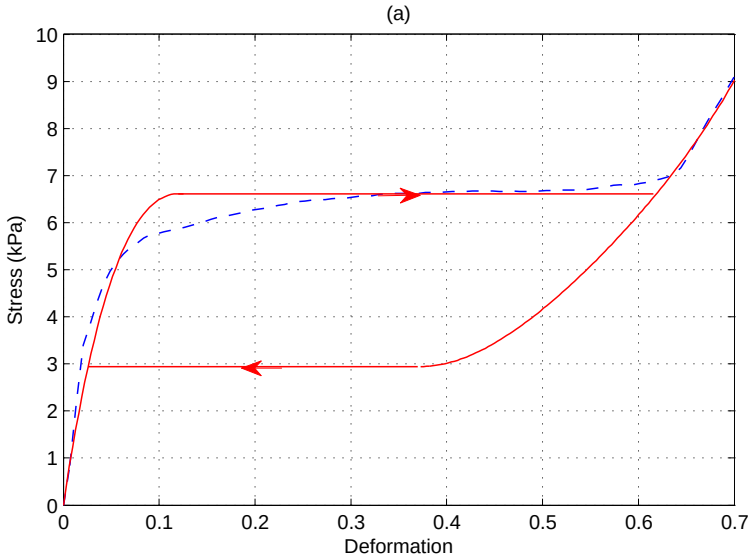


Figure 3.14 – Courbe de réponse du modèle et cycle d'hystéresis (ligne pleine) comparés avec la courbe expérimentale (ligne en pointillée).

ascendante. Le modèle prédit un cycle d'hysteresis en analogie avec les résultats expérimentaux, voir la section 2.1 et [60].

Si l'on décharge le système lorsqu'il y a encore des ressorts en phase A, c'est-à-dire lorsque $M > 0$, le système suit le chemin d'équilibre qui correspond à cette valeur de M jusqu'à ce que σ atteigne la valeur σ_{min}. À ce point, la réponse suit une ligne qui oscille autour la valeur $\sigma = \sigma_{min}$, et progressivement tous les ressorts reviennent en phase A. Dans la section suivante, nous présentons une comparaison entre les essais expérimentaux et les réponses prédites par le modèle.

3.3.4 Comparaison avec les expériences

Sur la Fig. 3.14 la courbe de réponse expérimentale (ligne en traits discontinus) est comparée avec la réponse du modèle (ligne pleine) caractérisée par les constantes matérielles du Tableau 3.1. On note que, dans le modèle le palier est reproduit par une suite de changements de phase des ressorts, et donc au lieu d'une ligne horizontale il devrait y avoir une courbe avec des petites oscillations. Ces oscillations deviennent négligeables si l'on suppose que la chaîne est composée d'un nombre suffisamment grand de ressorts. La courbe en trait plein sur la Fig. 3.14 est obtenue avec cette hypothèse.

On note que le modèle ne décrit pas la pente positive de la courbe de réponse expérimentale dans l'intervalle de déformations $0.1 < \varepsilon_0 < 0.3$. Cette partie du diagramme a été l'objet d'étude en [88, 107]. Puglisi et Truskinovsky [107]

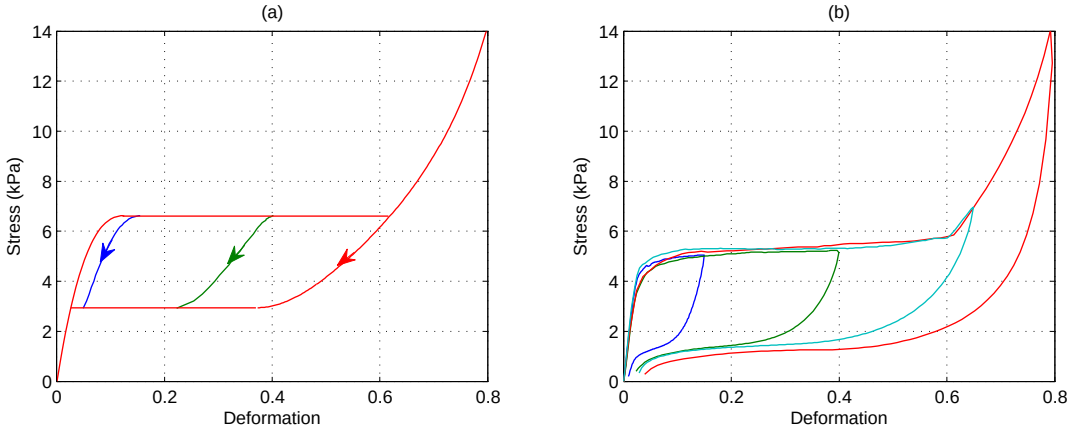


Figure 3.15 – Courbe de réponse du modèle (a), et courbes expérimentales (b) sous cycles de charge-décharge à différentes amplitudes

montrent qu'une pente positive peut être obtenue en supposant une énergie de déformation légèrement différente pour chaque ressort composant la chaîne, donc une hétérogénéité du matériau. Dans ce travail de thèse, on a évité de compliquer le modèle en ajoutant une dispersion des données. En effet, l'identification des paramètres caractérisant l'hétérogénéité du matériau nous semble une question délicate. On a préféré attribuer l'effet de la pente positive à la viscoélasticité du matériau.

La Fig. 3.15 montre la comparaison entre les courbes prédites par le modèle et les courbes expérimentales sous un cycle de charge et décharge avec différentes valeurs de la déformation maximale. Nous remarquons que le modèle décrit bien la forme des cycles d'hystérésis, mais quelques discordances sont observables :

- dans le modèle, les courbes de réponse pour $\varepsilon_{max} = 0.65$ et $\varepsilon_{max} = 0.8$ coïncident ; dans les expériences, elles coïncident à la charge mais diffèrent à la décharge ;
- dans le modèle le palier inférieur est horizontal et sa forme ne dépend pas de la déformation maximale ε_{max}. Dans les expériences, pour différentes valeurs de la déformation maximale ε_{max}, il y a différents paliers inférieurs qui ont une pente positive ;
- dans le modèle, à la fin d'un cycle complet de charge et décharge les courbes de réponse se terminent à l'origine. Dans les expériences, on peut observer une déformation résiduelle qui dépend de ε_{max}.

De plus, ce modèle purement élastique ne peut pas décrire les effets inélastiques comme le "*stress softening*", la dépendance à la vitesse de chargement et l'effet de mémoire observés sous compression cyclique. Ces différences peuvent être réduites en prenant en compte la viscosité. Un modèle viscoélastique fait l'objet de la partie suivante de ce rapport de thèse.

Chapitre 4

Modèles non élastiques

Sommaire

4.1 Étude bibliographique 64
4.1.1 L'effet Mullins 64
4.1.2 Énergie non convexe et viscosité dans les mousses 67
4.1.3 Opérateur de dérivée fractionnaire pour la viscosité . . . 69
4.2 Le modèle viscoélastique 71
4.2.1 La chaîne 71
4.2.2 Le problème d'évolution 72
4.2.3 Le problème incrémental infinitésimal 72
4.2.4 Le problème incrémental fini 73
4.2.5 Le premier changement de phase 74
4.2.6 Les changements de phase successifs 77
4.2.7 Le cas explicatif d'une chaîne de deux éléments 77
4.2.8 L'élément dissipatif à l'extérieur de la chaîne 82
4.3 Endommagement 82

Le modèle élastique avec une énergie de déformation non convexe, présenté dans le chapitre précédent, a permis de décrire la localisation des déformations et le cycle d'hystérésis observés dans les mousses à porosité ouverte sous compression. Les essais expérimentaux décrits dans la section 2.1 montrent aussi la présence d'effets inélastiques comme, par exemple, la baisse de la résistance avec le nombre des cycles (Fig. 2.6), la dépendance de la réponse à la vitesse de chargement (Fig. 2.9) et la relaxation de la force lorsque la déformation est maintenue constante (Fig. 2.10).

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la description de ces aspects, et on présente le modèle viscoélastique et son raffinement avec l'introduction de l'endommagement, décrits dans [38, 104].

Le modèle viscoélastique est obtenu avec l'ajout d'éléments dissipatifs qui ont une loi de comportement linéaire du type Boltzmann Volterra. Dans ce modèle, chaque ressort élastique non linéaire du type décrit au chapitre précédent est associé en parallèle avec un élément dissipatif. De plus, un second élément dissipatif est

associé en parallèle à l'ensemble de la chaîne. Cet assemblage a la même structure que celle du modèle de Zener, où le ressort linéaire est remplacé par le ressort non linéaire, tandis que la combinaison restante "ressort linéaire - amortisseur" est remplacée par un élément viscoélastique linéaire plus complexe. La démarche suivie est bien celle de prendre le modèle le plus simple possible pour décrire les effets complexes observés. L'élément dissipatif supplémentaire à l'extérieur de la chaîne permettra la reproduction de la pente positive du plateau.

Nous montrerons dans le chapitre suivant que le modèle viscoélastique proposé conduit à une description qualitative du comportement des mousses sous compression cyclique, bien que la concordance avec les expériences ne soit pas encore complète. En particulier, la perte de résistance à l'issue du premier cycle est sous-estimée. Cet écart peut être attribué à l'endommagement de la mousse. C'est ce que nous ferons en supposant que les ressorts non linéaires soient en effet des éléments endommageables.

Ce chapitre est composé de trois sections. La première section est dédiée à une étude bibliographique, afin de présenter les travaux utilisés pour la formulation du modèle. Dans la deuxième section on présente le modèle viscoélastique, et dans la troisième on prend en compte l'endommagement.

4.1 Étude bibliographique

Cette section est composée de trois parties. D'abord, on décrit le comportement sous sollicitation cyclique des élastomères et en particulier l'effet Mullins. On verra que l'effet Mullins ressemble beaucoup à l'effet de "*stress softening*" qu'on a observé dans les mousses polymériques à porosité ouverte.

Puis, on présente le travail de Romero et al. [111], qui, pour la description du comportement des mousses, considère le couplage d'une énergie de déformation non convexe avec une dissipation de type visqueux. Cette idée sera également reprise dans notre modèle viscoélastique.

Enfin, on introduit la définition de dérivée fractionnaire. En effet, le calcul fractionnaire a été utilisé par plusieurs auteurs pour la description du comportement viscoélastique des polymères. Dans le prochain chapitre (section 5.1.3), on en discutera l'application à la description des propriétés visqueuses des mousses polymériques, et on expliquera les raisons qui nous ont induit à écarter cette possibilité.

4.1.1 L'effet Mullins

L'effet de "stress softening" qui, comme on l'a vu dans la section 2.1, caractérise le comportement en compression cyclique des mousses polymériques à porosité ouverte, ressemble à l'effet d'adoucissement observé pour les élastomères. On illustre cet effet à l'aide de la Fig. 4.1, prise de [43]. Dans cette figure, on montre la réponse

d'un élastomère chargé soumis à une tension uniaxiale (ligne en pointillée), avec des cycles de charge et de décharge de différentes amplitudes (ligne pleine).

Si l'on considère le comportement en tension cyclique, on observe une perte de résistance à la charge après le premier cycle. Cette perte est importante en passant du premier au deuxième cycle, et elle est faible pour les cycles suivants. Au contraire, la réponse à la décharge ne change pas avec le nombre de cycles. À la fin de chaque cycle on observe une déformation résiduelle. De plus, lorsque la déformation dépasse la déformation maximale précédemment atteinte, la courbe de réponse se rapproche de la courbe en tension uniaxiale. L'analogie avec le comportement des mousses polymériques est encore plus marquée si l'on effectue l'essai de tension cyclique sur une éprouvette en forme de disque [85], voir Fig. 4.2a.

Ce comportement a été observé par Bouasse et Carrière [21], et il a été intensivement étudié par Mullins [97, 98, 99]. Suite ces travaux, ce comportement a été appelé *Mullins effect*, et plusieurs auteurs ont proposé différents micro mécanismes pour l'expliquer. En particulier, Bueche [24] attribue le stress softening à la rupture des liaisons entre les chaînes polymériques qui relient les charges de noir de carbone. Les chaînes polymériques étant de longueurs différentes, lorsque l'on applique une charge, on aura une rupture graduelle des liaisons.

Cette interprétation micromécanique a induit plusieurs auteurs à décrire l'effet Mullins comme un endommagement progressif du matériau [12, 41, 35, 75, 85, 92, 101]. Dans ces travaux, on introduit une variable interne d'endommagement et on décrit l'effet Mullins idéalisé comme un phénomène *rate-independent* : on néglige les déformations résiduelles, et on suppose que les courbes à la charge aux cycles suivants se superposent à la courbe de réponse à la décharge, voir Fig. 4.2b. Cet approche comporte des difficultés dans le choix de la loi d'évolution de la variable d'endommagement. En effet, malgré le grand nombre d'essais expérimentaux avec différentes conditions de chargement [3, 44, 76, 85], les grandeurs mécaniques qui pilotent l'endommagement ne sont pas encore clairement identifiées.

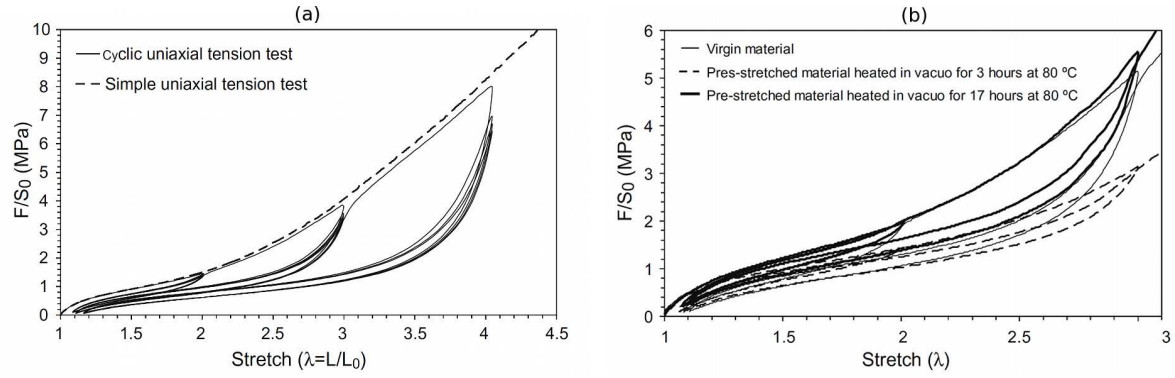


Figure 4.1 – Effet Mullins. (a) Courbes de réponse d'un élastomère chargé sous traction cyclique. (b) Effet de recouvrement de la réponse initiale après réchauffement. Figure prise de [43].

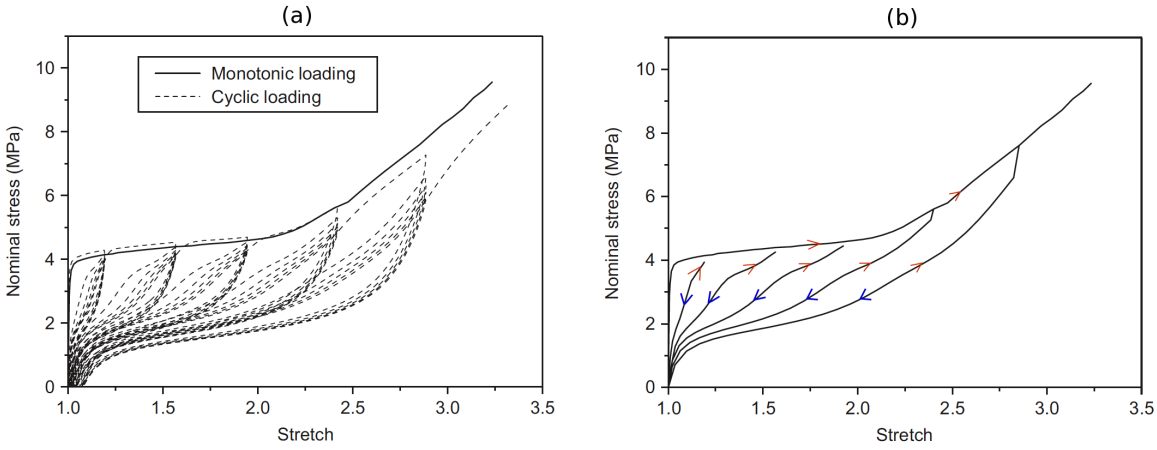


Figure 4.2 – Effet Mullins pour une éprouvette d'élastomère à forme de disque. Courbes expérimentales (a) et leurs schématisations idéalisées (b) [85].

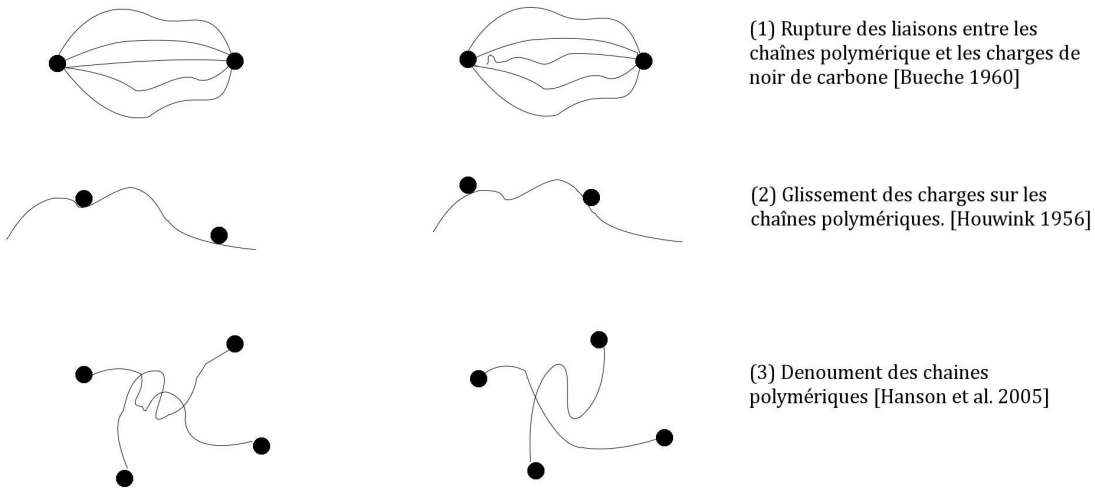


Figure 4.3 – Schématisation de trois interprétations possibles de l'effet Mullins [43].

Une description plus complète, qui prend en compte la déformation résiduelle et la différence entre les courbes de décharge et de recharge, peut être obtenue avec la prise en compte de la viscosité [66, 80, 86, 91]. Par exemple, le modèle de Miehe et Keck [91] dans sa version unidimensionelle est constitué de trois éléments rhéologiques en parallèle : un ressort, un amortisseur et un élément elasto-plastique. L'endommagement concerne en égale mesure les trois branches.

L'interprétation de l'effet Mullins comme endommagement du matériau par rupture des chaînes polymériques contraste avec de récents résultats expérimentaux qui montrent un recouvrement partiel de la résistance après des phases de repos [64]. Le recouvrement peut être accéléré en augmentant la température, [43, 82]. Par exemple, les essais de Diani et al. [43] sur des élastomères chargés de noir de carbone montrent un recouvrement total de la résistance après une phase de chauffage de 17

heures à 80 °C (voir Fig. 4.1b). Ce recouvrement laisse supposer l'existence d'autres micro mécanismes, comme par exemple le glissement de charges de noir carbone le long des chaînes polymériques [72], ou le dénouement des chaînes polymériques [64], voir Fig. 4.3. Jusqu'à aujourd'hui, il n'y a pas une théorie communément acceptée sur le mécanisme à l'origine de l'effet Mullins. De plus, le même effet de stress softening a été observé dans des élastomères non chargés, qui cristallisent sous chargements [47]. Donc, toutes les théories qui se fondent seulement sur l'interaction charges-chaînes polymériques sont insatisfaisantes.

Une bonne reproduction de l'effet Mullins a été obtenue par Besdo and Ihlemann [15] en appliquant l'idée de *self-organizing linkage patterns*. Dans le modèle proposé, l'effet de stress softening est attribué à un processus de redistribution de liaisons qui sont continuellement coupées et régénérées.

D'autres auteurs [36, 108] ont exploité l'idée initiale de Mullins et Tobin [99], à savoir, l'existence de différentes phases du matériau. En particulier, De Tommasi et al. [36] supposent l'existence de trois phases : une phase active qui résiste à la charge appliquée, une phase inactive qui est déchargée, et enfin une phase endommagée. En chaque point matériel, les fractions de phase sont déterminées en fonction de la déformation actuelle et de la déformation maximale atteinte dans l'histoire de déformation précédente. L'effet Mullins est idéalisé comme un phénomène *rate-independent*. Le modèle permet de décrire les expériences même pour des histoires déformation complexes. De plus, dans [32] le recouvrement de résistance avec le temps est introduit en supposant la possibilité de la transformation d'une partie de la phase endommagée en phase active pendant la décharge.

Pour plus de détails sur le comportement des élastomères chargés et sur l'effet Mullins on peut se reporter à des ouvrages spécifiques, comme par exemple, celui de Dorfmann et Muhr [45] ou celui de Boukamel et al. [22].

4.1.2 Énergie non convexe et viscosité dans les mousses

Dans cette section, on décrit le travail de Romero et al. [111], qui représente une évolution du travail de Gioia et al. [59], décrit dans le chapitre 3, avec la prise en compte des propriétés visqueuses des mousses polymériques.

Romero et al. [111] proposent un modèle multiéchelle pour la description du comportement en dynamique de mousses à cellules ouvertes. À l'échelle macroscopique la mousse est modélisée comme un matériau continu avec énergie de déformation non convexe et dissipation de type visqueux. Les expressions des deux potentiels sont déterminées à partir d'un modèle microscopique de la cellule. Dans le modèle local, la cellule est schématisée avec le même élément de base introduit en [59] : quatre ligaments confluant dans un point qu'on appelle le vertex de la cellule, voir Fig. 4.4a. Les auteurs considèrent l'hypothèse cinématique que les ligaments restent rectilignes pendant la déformation et que les déplacements des extrémités des ligaments sont déterminés directement par le champ des déplacements macroscopiques, voir Fig. 4.4b. Au contraire, le déplacement du vertex est considéré

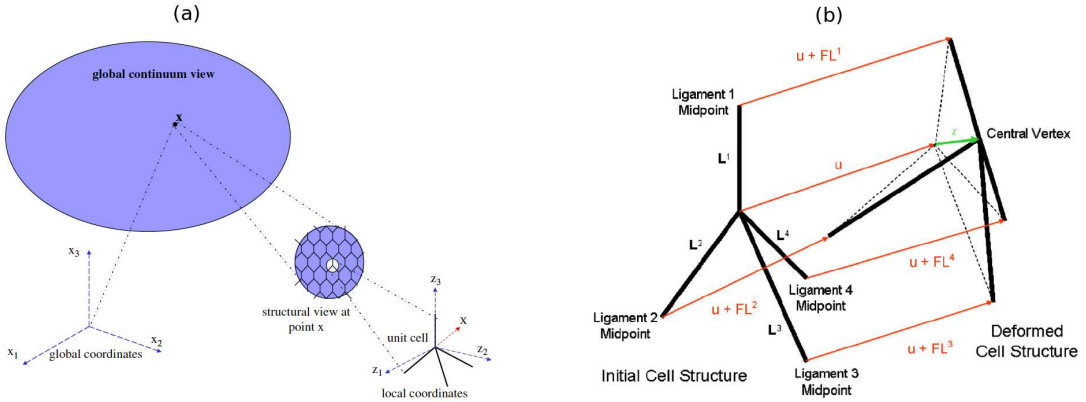


Figure 4.4 – Modèle de Romero at al. [111]. (a) Représentation multi-échelles de la mousse. (b) Détail de la mousse à l'échelle microscopique.

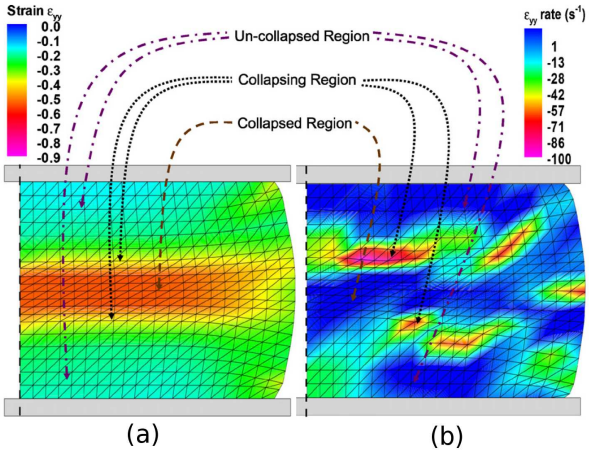


Figure 4.5 – Modèle de Romero at al. [111]. Résultats de simulations numériques qui montrent la localisation des déformations (a) et une distribution non homogène des vitesses de déformation (b).

comme libre. Celui-ci est calculé en résolvant le problème d'équilibre local :

$$f^E + f^\eta - m\ddot{\chi} = 0\,,$$

où f^E, f^η sont les forces élastiques et visqueuses qui agissent sur le vertex, et χ est le déplacement du vertex.

Les résultats des simulations numériques sont montrés sur la Fig. 4.5. On voit que le modèle décrit la localisation des déformations due à l'écrasement progressif des cellules. Au contraire l'étude de l'influence de la vitesse de chargement n'est pas suffisamment développée. En effet, la réponse globale est obtenue en utilisant la construction des aires égales de Maxwell, voir la Fig. 3.1b. La droite de Maxwell représente le chemin des minima globaux de l'énergie élastique, et donc l'utiliser pour déterminer l'évolution d'un système avec une dissipation de type visqueux n'est pas correctement justifié.

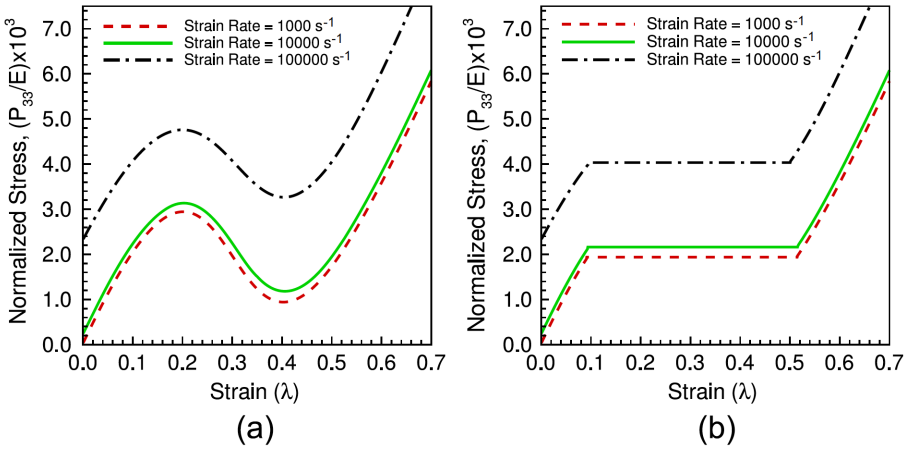


Figure 4.6 – Modèle de Romero at al. [111]. Courbes de réponse de la cellule de base (a) et de la mousse (b) pour différentes vitesses de chargement.

4.1.3 Opérateur de dérivée fractionnaire pour la viscosité

Dans cette section, on introduit quelques notions de base du calcul fractionnaire. Les détails peuvent être trouvés dans des livres spécifiques, comme par exemple [63, 102]. À la différence des dérivées d'ordre entier, les dérivées d'ordre fractionnaire n'ont aucune interprétation géométrique. Deux principales définitions sont utilisées pour introduire les dérivées d'ordre fractionnaire. La première, donnée par Grünwald (1987) (voir [102]), se fonde sur l'idée de regrouper sous la même formule récursive, la définition de dérivée comme différence finie et la définition d'intégrale comme somme de Riemann. La deuxième définition est fondée sur la transformation intégrale appelée *Riemann-Liouville integral* [102].

Dans la suite, on introduit la deuxième définition, puisque elle a une application directe à la théorie de la viscoélasticité linéaire La transformation intégrale de Riemann-Liouville

$$\frac{d^q}{dx^q} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^x (x-y)^{-q-1} f(y) dy \,, \quad q < 0 \,, \tag{4.1}$$

est l'extension à n réel négatif de la formule de Cauchy de l'intégration répétée

$$\begin{aligned} \tfrac{d^{-n}}{dx^{-n}} f(x) &= \textstyle\int_0^x dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_0^{x_1} f(x_0) dx_0 \\ &= \tfrac{1}{(n-1)!} \textstyle\int_0^x (x-y)^{n-1} f(y) dy \,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ici Γ est la fonction Gamma [102]

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \exp(-x)\, dx \,. \tag{4.3}$$

Pour définir les dérivées d'ordre fractionnaire, il faut étendre la formule (4.1) au cas de q positif. Ceci se fait en imposant que

$$\frac{d^q}{dx^q}f(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^{q-n}}{dx^{q-n}}f(x)\right), \tag{4.4}$$

avec $q > 0$ et n un nombre entier tel que $q - n < 0$. Par exemple, si l'on veut définir l'opérateur de dérivée fractionnaire d'ordre α, avec $0 < \alpha < 1$, en utilisant la définition (4.1) on obtient

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-y)^{-\alpha} f(y)dy\right). \tag{4.5}$$

Après changement de variable et différentiation, l'expression ci-dessus peut être réécrite sous la forme

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-y)^{-\alpha} f'(y)dy\,. \tag{4.6}$$

Cette définition est utilisée pour définir une loi de comportement dans le contexte de la théorie de la viscoélasticité linéaire. Par exemple, on considère un élément rhéologique, que l'on appellera amortisseur fractionnaire, gouverné par la loi de comportement

$$\sigma(t) = \eta\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\varepsilon(t)\,, \quad 0 \le \alpha \le 1\,, \tag{4.7}$$

où η est une constante positive. Si l'on utilise la définition de dérivée fractionnaire (4.6), on obtient

$$\sigma(t) = \eta\int_0^t \frac{(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\dot{\varepsilon}(s)ds\,. \tag{4.8}$$

Pour un processus $t \mapsto \varepsilon(t)$ tel que $\varepsilon(t) = 0\,,\ \forall t \in (-\infty, 0)$, cette expression peut être réécrite sous forme d'équation de Boltzmann Volterra

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-s)\dot{\varepsilon}(s)ds\,, \tag{4.9}$$

avec

$$G(t) = \eta\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\,. \tag{4.10}$$

De plus, on peut montrer [63, 78] que dans les cas limites $\alpha = 1\,, \alpha = 0$, la loi (4.7) redevient, respectivement, la loi de comportement d'un amortisseur classique et d'un ressort élastique linéaire. Un amortisseur fractionnaire a donc un comportement qui se situe entre ces deux cas limites. L'application du calcul fractionnaire à la théorie de la viscoélasticité linéaire a suscité l'étude de modèles rhéologiques complexes avec combinaisons de ressorts, d'amortisseurs linéaires et d'amortisseurs fractionnaires [69, 78, 87]. Dans la suite, on évaluera la possibilité de décrire les propriétés visqueuses des mousses avec d'éléments fractionnaires, et on verra les raisons qui nous ont induit à écarter cette possibilité.

4.2 Le modèle viscoélastique

Sur la base des résultats expérimentaux décrits dans le chapitre 2 de cette thèse, on a choisi de négliger dans un premier temps l'endommagement et de construire un modèle viscoélastique [38]. Nous considérons ici une généralisation du modèle de Zener où le ressort linéaire est remplacé par le ressort non linéaire, tandis que la combinaison restante "ressort linéaire - amortisseur" est remplacée par un élément viscoélastique linéaire gouverné par le loi intégrale de Boltzmann-Volterra. Un second élément viscoélastique linéaire est associé en parallèle à l'ensemble de la chaîne.

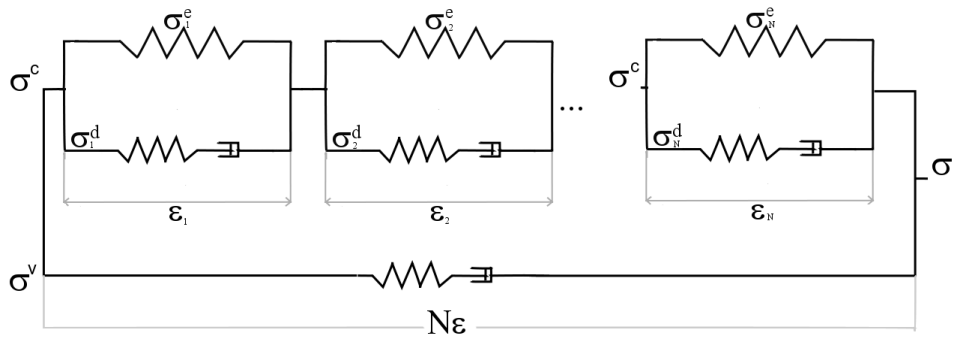


Figure 4.7 – Le modèle viscoélastique

4.2.1 La chaîne

On considère l'extension suivante du modèle élastique décrit dans le chapitre 3. À chaque ressort non linéaire avec une énergie de déformations non convexe, on ajoute en parallèle un élément dissipatif. On utilise la même notation que celle introduite dans le modèle élastique : on note $\varepsilon_i(t)$ la déformation de l'élément i-ème, $\varepsilon_0(t)$ la déformation totale de la chaîne et N le nombre des éléments de la chaîne. On retrouve la condition de *hard device* :

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(t) = N\varepsilon_0(t)\,. \tag{4.11}$$

La force dans le ressort $i^{éme}$ à l'instant t est

$$\sigma_i^e(t) = w'(\varepsilon_i(t))\,, \tag{4.12}$$

où w est l'énergie des déformation du ressort, et $(\cdot)'$ note la dérivation par rapport à ε. Pour w, on suppose la forme non convexe introduite dans le modèle élastique, voir section 3.2.

L'élément dissipatif est gouverné par le loi de Boltzmann-Volterra

$$\sigma_i^d(t) = G(0)\,\varepsilon_i(t) + \int_0^\infty \dot{G}(s)\,\varepsilon_i(t-s)\,ds\,, \tag{4.13}$$

où G est la fonction de relaxation que l'on suppose $C^2(0,\infty)$, et avec $G(s)$ positive et $\dot{G}(s)$ négative pour tout s. La force totale σ^c dans la chaîne est la somme des deux contributions :

$$\sigma^c(t) = \sigma_i^e(t) + \sigma_i^d(t)\,, \tag{4.14}$$

et elle est la même pour tous les éléments. Par contre, les déformations ε_i, ainsi que les forces σ_i^d, σ_i^e, peuvent être différentes pour chacun des éléments de la chaîne.

4.2.2 Le problème d'évolution

On suppose que pour tous les instants $t < 0$, les éléments de la chaîne sont au repos, avec $\varepsilon_i(t) = 0$ pour tout i. Pour $t \geq 0$ on applique un processus de déformation $t \mapsto \varepsilon_0(t)$, avec la condition initiale $\varepsilon_0(0) = 0$. On veut résoudre le problème d'évolution suivant :

Problème $\mathcal{P}1$. *Soit le processus $t \mapsto \varepsilon_0(t)$ connu, trouver les processus $t \mapsto \sigma^c(t)$, $t \mapsto \varepsilon_i(t)$ tels que :*

$$\begin{array}{lll} (i) & \varepsilon_i(0) = 0 & \textit{pour tout } i, \\ (ii) & \sum_i \varepsilon_i(t) = N\varepsilon_0(t) & \textit{pour tout } t, \\ (iii) & \textit{pour tout } t > 0\,, & \textit{pour tout } i, \end{array} \tag{4.15}$$

$$\sigma^c(t) = w'(\varepsilon_i(t)) + G(0)\,\varepsilon_i(t) + \int_0^t \dot{G}(s)\,\varepsilon_i(t-s)\,ds \tag{4.16}$$

4.2.3 Le problème incrémental infinitésimal

Des solutions approchées du problème d'évolution $\mathcal{P}1$ peuvent être construites via la discrétisation temporelle, en utilisant une approche incrémentale. De la différentiation de (4.16) on obtient [1]

$$\dot{\sigma}^c(t) = \big(w''(\varepsilon_i(t)) + G(0)\big)\,\dot{\varepsilon}_i(t) + \int_0^t \dot{G}(s)\,\dot{\varepsilon}_i(t-s)\,ds\,, \tag{4.17}$$

et, en posant

$$\begin{aligned} Q_i &= w''(\varepsilon_i(t)) + G(0)\,, \\ A_i &= \int_0^t \dot{G}(s)\,\dot{\varepsilon}_i(t-s)\,ds\,, \end{aligned} \tag{4.18}$$

on a N equations

$$\dot{\sigma}^c = Q_i\dot{\varepsilon}_i + A_i\,, \tag{4.19}$$

une pour chaque élément i. Les coefficients Q_i et A_i sont connus : les Q_i dépendent des valeurs actuelles des déformations $\varepsilon_i(t)$, et les A_i dépendent des histoires des déformations ε_i dans l'intervalle $(0,t)$. Si l'on dérive l'équation (4.11), on obtient la relation suivante :

1. Dorénavant, un point superposé notera la dérive à droite par rapport le temps. Les hypothèses de régularité garantissent l'existence de $\dot{\sigma}^c$, $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\varepsilon}_i$, et de $\dot{G}$ pour tout t.

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\varepsilon}_i = N\dot{\varepsilon}_0 \,, \tag{4.20}$$

qui nous permet d'introduire le problème incrémental suivant :

Problème $\mathcal{P}2$. *Soient connus Q_i, A_i ainsi que la dérivée à droite $\dot{\varepsilon}_0$ de la déformation totale à l'instant t, trouver les dérivées à droite $\dot{\varepsilon}_i$, $\dot{\sigma}^c$ à l'instant t, qui sont solution du système* (4.19), (4.20).

Les équations (4.19) et (4.20) forment un système de $N+1$ équations algébriques linéaires, avec la matrice des coefficients

$$H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccccc} Q_1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & Q_2 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & Q_3 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{array} \right\} , \tag{4.21}$$

dont le déterminant est

$$\det H \;=\; \sum_{i=1}^{N} \Big(\prod_{j \neq i} Q_j \Big) \,. \tag{4.22}$$

Le système a une solution unique si $\det H \neq 0$. Mais cette solution est affectée par des instabilités numériques lorsque $\det H$ est proche de zéro. De plus, il y a des cas où il n'y a pas de solutions, comme par exemple, si $Q_1 = Q_2 = 0$ et $A_1 \neq A_2$. À cause de ces problèmes, on reformule le problème incrémental en considérant des incréments évalués sur un intervalle de temps τ petit, mais fini.

4.2.4 Le problème incrémental fini

Si pour chaque élément i on écrit l'équation (4.16) à l'instant t et à l'instant $t+\tau$ et que l'on soustrait, on obtient

$$\begin{aligned} \delta\sigma^c \;=\; & w'(\varepsilon_i(t) + \delta\varepsilon_i) - w'(\varepsilon_i(t)) + G(0)\,\delta\varepsilon_i \\ & + \int_0^{t+\tau} \dot{G}(s)\,\varepsilon_i(t+\tau-s)\,ds - \int_0^{t} \dot{G}(s)\,\varepsilon_i(t-s)\,ds \,, \end{aligned} \tag{4.23}$$

avec $\delta\sigma^c = \sigma^c(t+\tau) - \sigma^c(t)$ et $\delta\varepsilon_i = \varepsilon_i(t+\tau) - \varepsilon_i(t)$.
On décompose la première intégrale en deux parties

$$\int_0^{\tau} \dot{G}(s)\,\varepsilon_i(t+\tau-s)\,ds + \int_{\tau}^{t+\tau} \dot{G}(s)\,\varepsilon_i(t+\tau-s)\,ds$$

et après des changements de variable, on peut réécrire la différence des deux intégrales en (4.23) sous la forme :

$$\int_0^{\tau} \dot{G}(s)\,\varepsilon_i(t+\tau-s)\,ds + \int_0^{t} (\dot{G}(s+\tau) - \dot{G}(s))\,\varepsilon_i(t-s)\,ds \,.$$

et avec une intégration par partie, on obtient :

$$\int_0^\tau G(s)\,\dot\varepsilon_i(t+\tau-s)\,ds + G(\tau)\varepsilon_i(t) - G(0)\varepsilon_i(t+\tau)$$
$$+ \int_0^t (G(s+\tau)-G(s))\,\dot\varepsilon_i(t-s)\,ds - (G(\tau)-G(0))\,\varepsilon_i(t)\,.$$

On fait une approximation, dans l'intervalle $(t, t+\tau)$, de la dérivée $\dot\varepsilon_i$ avec la constante $\delta\varepsilon_i/\tau$. On trouve

$$\bar G_\tau \delta\varepsilon_i - G(0)\delta\varepsilon_i + \int_0^t (G(s+\tau)-G(s))\,\dot\varepsilon_i(t-s)\,ds\,,$$

avec

$$\bar G_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau G(s)\,ds\,.$$

Avec ces changements, l'équation (4.23) devient

$$\delta\sigma^c \;=\; w'(\varepsilon_i(t)+\delta\varepsilon_i) - w'(\varepsilon_i(t)) + \;\bar G_\tau\,\delta\varepsilon_i + \int_0^t (G(s+\tau)-G(s))\,\dot\varepsilon_i(t-s)\,ds\,.$$

Elle peut être réécrite sous la forme

$$\delta\sigma^c \;=\; f_\tau(\varepsilon_i+\delta\varepsilon_i) - f_\tau(\varepsilon_i) + B_i\,, \tag{4.24}$$

avec

$$f_\tau(\varepsilon) \;=\; w'(\varepsilon) + \bar G_\tau\varepsilon\,,$$
$$B_i = \textstyle\int_0^t (G(s+\tau)-G(s))\,\dot\varepsilon_i(t-s)\,ds\,,$$

L'équation (4.24) avec la version discrétisée de (4.20),

$$\sum_{i=1}^N \delta\varepsilon_i = \;N\delta\varepsilon_0\,, \tag{4.25}$$

forment un système de $N+1$ équations algébriques non linéaires d'inconnues $\delta\varepsilon_i\,, \delta\sigma^c$. Il est clair qu'à la limite de $\tau\to 0$, on obtient à nouveau le système linéaire (4.19), (4.20). Enfin, on peut écrire le problème incrémental $\mathcal{P}3$:

Problème $\mathcal{P}3$. *Soient* $\tau>0$, ε_i, B_i, *et* $\delta\varepsilon_0$ *connus, trouver des incréments* $\delta\varepsilon_i$, $\delta\sigma^c$ *qui soient solutions du système* (4.24), (4.25).

4.2.5 Le premier changement de phase

On considère un processus de déformation $t\mapsto\varepsilon_0(t)$ tel que $\dot\varepsilon_0(t)>0$ pour tout $t\geq 0$. Pour $t=0$ les coefficients A_i et Q_i sont les mêmes pour tous les éléments i, et les Q_i sont positifs. Alors, il existe un intervalle de temps $(0, t_A)$ dans lequel le problème $\mathcal{P}2$ admet la seule solution

$$\dot\varepsilon_i = \;\dot\varepsilon_0\,, \qquad \dot\sigma^c = \;Q_i\,\dot\varepsilon_0 + A_i\,,$$

avec les mêmes Q_i et A_i pour tout i. Donc, dans cet intervalle la chaîne se déforme de façon homogène. Le régime de déformation homogène se termine à l'instant t_A, lorsque les Q_i deviennent nuls. À ce moment, le déterminant (4.22) est nul, et le système (4.19), (4.20) devient

$$\dot\sigma^c = A_i\,, \qquad \sum_{i=1}^{N} \dot\varepsilon_i = N\dot\varepsilon_0\,. \tag{4.26}$$

Il admet une infinité de solutions, car seule la somme des $\dot\varepsilon_i$ est déterminée. En effet, la solution homogène $\dot\varepsilon_i = \dot\varepsilon_0$ est encore une solution possible. Mais elle est instable puisque une petite perturbation de A_i et Q_i détermine une évolution du système pour $t \geq t_A$ complètement différente. Une solution stable peut être obtenue en supposant qu'il y a une petite dispersion des valeurs de Q_i. Dans ce cas, il y a un élément, on suppose qu'il s'agit du premier de la chaîne, $i = 1$, qui atteint la condition $Q_i = 0$ avant les autres. À l'instant t_A, on a

$$Q_1 = 0\,, \qquad Q_i > 0 \quad \forall i > 1\,,$$

et le système (4.19), (4.20) a la solution unique

$$\dot\sigma^c = A_1\,, \qquad \dot\varepsilon_i = \frac{A_1 - A_i}{Q_i} \quad \forall\, i > 1\,, \qquad \dot\varepsilon_1 = N\dot\varepsilon_0 - \sum_{i=2}^{N} \dot\varepsilon_i\,. \tag{4.27}$$

De (4.18) on déduit que

$$A_1 - A_i = \int_0^{t_A} \dot G(s)\,\big(\dot\varepsilon_1(t_A - s) - \dot\varepsilon_i(t_A - s)\big)\,ds\,.$$

L'élément $i = 1$ est le premier à atteindre la valeur critique $\varepsilon_i(t_A)$, donc on peut imaginer qu'à l'instant précédent t_A, la dérivée $\dot\varepsilon_1$ est légèrement supérieure à $\dot\varepsilon_i$. Donc, $\dot G$ étant négative, on a

$$A_1 - A_i < 0\,.$$

De (4.27), on déduit que $\dot\varepsilon_i < 0$ pour tous $i > 1$, et de (4.20) on obtient enfin

$$\dot\varepsilon_1 = N\dot\varepsilon_0 - \sum_{i=2}^{N} \dot\varepsilon_i > N\dot\varepsilon_0\,. \tag{4.28}$$

On a trouvé qu'une petite dispersion des données à l'instant $t = t_A$ détermine une solution où la déformation du premier élément $\dot\varepsilon_1$ est bien plus grande que la déformation de la chaîne $\dot\varepsilon_0$. Donc, si parmi toutes les solutions possibles du système (4.26) on choisit cette solution, on peut éviter d'introduire parmi les données du problème une dispersion des constantes matérielles des éléments.

Une déformation localisée est, en général, trop grande pour être bien calculée avec des incréments infinitésimaux. Un calcul plus correct peut être obtenu en résolvant le problème incrémental fini $\mathcal{P}3$ avec les données :

$$\varepsilon_i = \varepsilon_A\,, \quad B_i = B_A\,, \qquad \forall i \in \{1, \dots N\}\,, \tag{4.29}$$

où $\varepsilon_A = \varepsilon(t_A)$, et B_A est une constante connue. En effet, les données (4.29) correspondent à la configuration homogène où tous les éléments arrivent à la déformation critique ε_A avec la même histoire de déformation. Si l'on écrit l'équation (4.24) pour deux éléments i, j, et que l'on soustrait, on obtient :

$$f_\tau(\varepsilon_A + \delta\varepsilon_i) = f_\tau(\varepsilon_A + \delta\varepsilon_j)\,, \qquad i, j \in \{1 \dots N\}\,, \tag{4.30}$$

qui avec l'équation (4.25) forme un système $N \times N$ d'équations non linéaires d'inconnues $\delta\varepsilon_i$. Ce système a plusieurs solutions. En effet, pour un $\delta\varepsilon_i$ connu et suffisamment petit et pour chaque élément j, il y a trois déformations $\varepsilon_A + \delta\varepsilon_j$, qui sont solution de l'équation (4.30). Deux déformations sont sur les deux branches ascendantes, et une sur la branche descendante de f_τ. En particulier, la localisation des déformations obtenue avec le problème incrémental infinitésimal correspond maintenant à une solution où une déformation, par exemple ε_1, saute sur la deuxième branche ascendante, alors que les autres ε_i reviennent en arrière toutes au même point sur la première branche ascendante. Dans ce cas, les équations (4.25) et (4.30) forment un système 2×2

$$f_\tau^I(\varepsilon_A + \delta\varepsilon_i) = f_\tau^{II}(\varepsilon_A + \delta\varepsilon_1)\,, \qquad \delta\varepsilon_1 + (N-1)\,\delta\varepsilon_i = N\delta\varepsilon_0\,, \tag{4.31}$$

où f_τ^I, f_τ^{II} sont les restrictions de f_τ aux deux branches ascendantes, et i est n'importe quel index différent de 1. La déformation

$$\xi \doteq \delta\varepsilon_1 - N\delta\varepsilon_0 = -(N-1)\,\delta\varepsilon_i$$

représente la déviation de la situation idéale où seulement le premier élément se déforme. L'introduction de la variable ξ permet de réécrire le système sous la forme

$$f_\tau^I(\varepsilon_A - \xi\,(N-1)^{-1}) = f_\tau^{II}(\varepsilon_A + N\delta\varepsilon_0 + \xi)\,. \tag{4.32}$$

La solution correspond à l'intersection des courbes $\xi \mapsto f_\tau^I(\varepsilon_A - \xi\,(N-1)^{-1})$, $\xi \mapsto f_\tau^{II}(\varepsilon_A + N\delta\varepsilon_0 + \xi)$, montrées sur la Fig. 4.8. On dira que f_τ^I et f_τ^{II} caractérisent respectivement la phase A et la phase B du matériau. Donc, la solution de (4.32) décrit la situation où l'élément $i = 1$ passe de la phase A à la phase B, alors que les autres éléments restent en phase A.

Si l'on augmente $\varepsilon_0(t)$, on arrive à la configuration où le premier élément est en phase B et les autres atteignent la valeur critique ε_A. À ce moment là, on considère la solution avec un deuxième élément, par exemple $i = 2$, qui passe à la phase B. Cette configuration est la solution du système 3×3

$$\begin{aligned}
&f_\tau^{II}(\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_1) - f_\tau^{II}(\varepsilon_1) + B_1 = f_\tau^{II}(\varepsilon_A + \delta\varepsilon_2) - f_\tau^I(\varepsilon_A) + B_2\,,\\
&f_\tau^I(\varepsilon_A + \delta\varepsilon_i) = f_\tau^{II}(\varepsilon_A + \delta\varepsilon_2)\,,\\
&\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 + (N-2)\,\delta\varepsilon_i = N\delta\varepsilon_0\,.
\end{aligned}$$

On répète cette procédure jusqu'à ce que tous les éléments aient changé de phase.

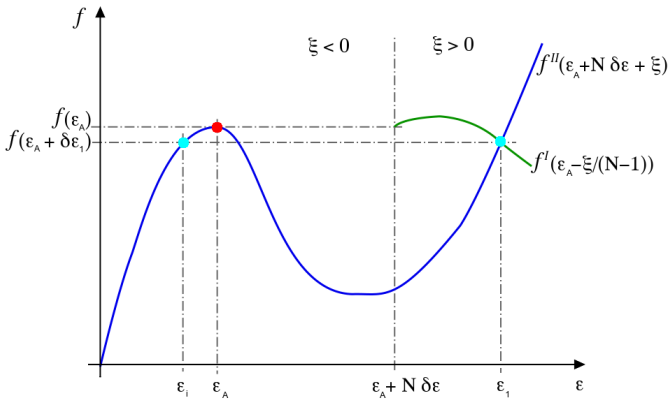


Figure 4.8 – La localisation des déformations au premier changement de phase

4.2.6 Les changements de phase successifs

On considère un processus où $\varepsilon_0(t)$ oscille entre zéro et une valeur ε_{max} suffisamment élevée pour permettre des changements de phase. Dans la phase de décharge du premier cycle les déformations ε_i diminuent, et lorsqu'elles sont proches de la valeur ε_B, la valeur minimale accessible en phase B, le déterminant (4.22) redevient petit. Encore une fois ceci provoque un changement de phase. Soit ε_1 le plus petit des ε_i. On considère la solution où ε_1 saute à la phase A, alors que les autres ε_i restent en phase B. Puisque les ε_i ainsi que les termes d'histoire B_i sont tous différents, le changement de phase est gouverné par l'équation (4.25) et par les $(N-1)$ équations

$$f_\tau^I(\varepsilon_1+\delta\varepsilon_1) - f_\tau^{II}(\varepsilon_1) + B_1 = f_\tau^{II}(\varepsilon_i+\delta\varepsilon_i) - f_\tau^{II}(\varepsilon_i) + B_i\,, \qquad i \in \{2,\dots N\}\,.$$

Lorsque $\varepsilon_0(t)$ diminue, on arrive à la situation où un deuxième élément, par exemple $i=2$, atteint la valeur critique ε_B. Cet élément change de phase, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les éléments reviennent en phase A. Aux cycles suivants on applique la même procédure.

4.2.7 Le cas explicatif d'une chaîne de deux éléments

On considère le cas d'une chaîne de deux éléments. Pour le ressort avec une énergie de déformation non convexe w, on considère la loi de comportement trilinéaire introduite dans la section 3.3.2,

$$\sigma^e = w'(\varepsilon) = \begin{cases} k(d+(\varepsilon-b)) + \sigma_m & \text{pour } 0 \le \varepsilon < b-c\,, \\ -k\frac{\varepsilon-b}{c}(d-c) + \sigma_m & \text{pour } b-c \le \varepsilon < b+c\,, \\ -k(d-(\varepsilon-b)) + \sigma_m & \text{pour } \varepsilon \ge b+c\,, \end{cases} \tag{4.33}$$

avec b, c, d, k, σ_m des constantes positives et avec $c<d$. Pour l'élément dissipatif, on considère un fluide de Maxwell (un ressort linéaire et un amortisseur linéaire en série), dont la loi de comportement est

$$\dot\sigma^d + p\,\sigma^d = k^d\dot\varepsilon\,, \tag{4.34}$$

avec k^d et p des constantes positives. k^d est la raideur du ressort et $p = k^d/\eta$, avec η la viscosité de l'amortisseur qui compose le fluide de Maxwell. L'équation (4.34) peut être réécrite en fonction de la force totale σ,

$$\dot{\sigma} + p\,\sigma = (w''(\varepsilon_i) + k^d)\dot{\varepsilon}_i + p\,w'(\varepsilon_i) \quad i = 1, 2\,, \tag{4.35}$$

et si l'on soustrait les deux équations (4.35) on trouve

$$(w''(\varepsilon_1) + k^d)\dot{\varepsilon}_1 + p\,w'(\varepsilon_1) - (w''(\varepsilon_2) + k^d)\dot{\varepsilon}_2 - p\,w'(\varepsilon_2) = 0\,. \tag{4.36}$$

Dans le cas d'une chaîne à deux éléments, la condition de hard device (4.11) devient

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon_0\,, \tag{4.37}$$

et en remplaçant celle-ci dans (4.35) on obtient

$$(w''(\varepsilon_1) + w''(2\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + 2k^d)\dot{\varepsilon}_1 + p\,(w'(\varepsilon_1) - w'(2\varepsilon_0 - \varepsilon_1)) = 2(w''(2\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + k^d)\dot{\varepsilon}_0\,, \tag{4.38}$$

On veut étudier l'évolution de la chaîne sous un processus de déformation $\varepsilon_0(t) = \dot{\varepsilon}_0\,t + \bar{\varepsilon}$ à vitesse constante. Tout d'abord, on considère les deux éléments en phase A en prenant $\bar{\varepsilon} < b - c$ et la condition initiale $\varepsilon_1(0) = \bar{\varepsilon}_1 < b - c$. De plus, on suppose que durant le processus de déformation les deux éléments ne changent pas de phase. Ces hypothèses satisfaites, l'équation (4.38) devient

$$\dot{\varepsilon}_1 + \frac{k\,p}{k + k^d}\,\varepsilon_1 = \dot{\varepsilon}_0 + \frac{k\,p}{k + k^d}(\dot{\varepsilon}_0\,t + \bar{\varepsilon})\,, \tag{4.39}$$

qui admet la solution

$$\varepsilon_1(t) = (\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon})\exp\left(-\frac{k\,p}{k + k^d}\,t\right) + \dot{\varepsilon}_0\,t + \bar{\varepsilon}\,. \tag{4.40}$$

On remarque que pour $t \to +\infty$ cette solution converge vers la solution homogène

$$\lim_{t \to +\infty} \varepsilon_1(t) = \dot{\varepsilon}_0\,t + \bar{\varepsilon}\,.$$

Dans la section 4.2.5 on a montré que la solution homogène devient instable lorsque les Q_i sont nuls. En effet, on a montré qu'une petite variation des conditions initiales induit une évolution avec localisation de la déformation. Dans notre cas spécifique, ceci se vérifie dans la configuration $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = b - c$ lorsque les $w''(\varepsilon_i) + k^d$ devient négatifs.

À partir de cette configuration, on étudie l'évolution CA avec un élément, par exemple l'élément 1, qui se déforme suivant la branche descendante (phase C), alors que l'autre élément reste en phase A. Dans ce cas, la relation (4.38) devient

$$\dot{\varepsilon}_1 + R\,\varepsilon_1 = \frac{2(k + k^d)c}{(2c - d)k\,p}R\,\dot{\varepsilon}_0 + \frac{2c}{2c - d}R\,\dot{\varepsilon}_0\,t + \frac{b - c}{2c - d}d\,, \tag{4.41}$$

qui admet la solution

$$\varepsilon_1(t) = Z\,\dot\varepsilon_0(\exp(-R\,t)-1) + \frac{2c}{2c-d}\,\dot\varepsilon_0\,t + b - c\,, \tag{4.42}$$

où

$$R = \frac{(2c-d)\,k\,p}{(2c-d)\,k + 2c\,k^d}\,, \quad Z = \frac{2\,c\,d\,k^d}{(2c-d)^2\,k\,p}\,. \tag{4.43}$$

Si l'élément 1 reste en phase C et l'élément 2 en phase A, à l'instant initial on a que

$$\dot\varepsilon_1(0) \geq 2\dot\varepsilon_0\,, \tag{4.44}$$

et donc,

$$\left(\frac{2c}{2c-d} - Z\,R\right)\dot\varepsilon_0 \geq 2\dot\varepsilon_0\,. \tag{4.45}$$

De (4.45), en utilisant les relations (4.43), on trouve la condition

$$\frac{2(d-c)k - 2c\,k^d}{(2c-d)k + 2c\,k^d} \geq 0\,, \tag{4.46}$$

qui est satisfaite dans les cas suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{si}\ \ 2c > d\ \text{(cas supercritique)} & \text{et} & k^d \leq \frac{d-c}{c}k\,, \\ \text{si}\ \ 2c < d\ \text{(cas subcritique)} & \text{et} & \frac{d-2c}{2c}\,k < k^d \leq \frac{d-c}{c}k\,. \end{array} \tag{4.47}$$

Donc, l'évolution CA est possible seulement si $k^d < \frac{d-c}{c}k$. Au contraire, si $k^d > \frac{d-c}{c}k$ la seule évolution possible est l'évolution homogène, où les deux éléments parcourent la branche descendante. En effet, la condition $k^d > \frac{d-c}{c}k$ est l'équivalent de $Q_i > 0$ dans la formulation générale, et donc dans ce cas la condition $\det H = 0$ (4.22), qui détermine une localisation des déformations, n'est jamais satisfaite, voir section 4.2.5.

Dans la suite on considère $k^d < \frac{d-c}{c}k$, et on étudie la stabilité[2] de l'évolution CA. Les mêmes conclusions seront valides pour l'évolution AC. Si l'on considère une perturbation de la position initiale $\varepsilon_1^p(0) = b - c + \delta$, la solution du problème perturbé devient

$$\varepsilon_1^p(t) = \delta\exp(-R\,t) + Z\,\dot\varepsilon_0(\exp(-R\,t)-1) + \frac{2c}{2c-d}\,\dot\varepsilon_0\,t + b - c\,, \tag{4.48}$$

qui converge à la solution (4.42) pour $R > 0$. Donc, la stabilité de l'évolution CA dépend du signe de R. De (4.43), on tire que

$$\begin{array}{lll} \text{si } 2c > d\ \text{(cas supercritique)} & \Rightarrow & R > 0\,, \\ \text{si } 2c < d\ \text{(cas subcritique) et} & k^d < \frac{d-2c}{2c}k & \Rightarrow\ R > 0\,, \\ & k^d > \frac{d-2c}{2c}k & \Rightarrow\ R < 0\,. \end{array} \tag{4.49}$$

L'évolution CA est stable dans le cas supercritique, et instable dans le cas subcritique, car la condition (4.47_2) impose $k^d > \frac{d-2c}{2c}k$, et donc on a $R < 0$ (voir la Fig.

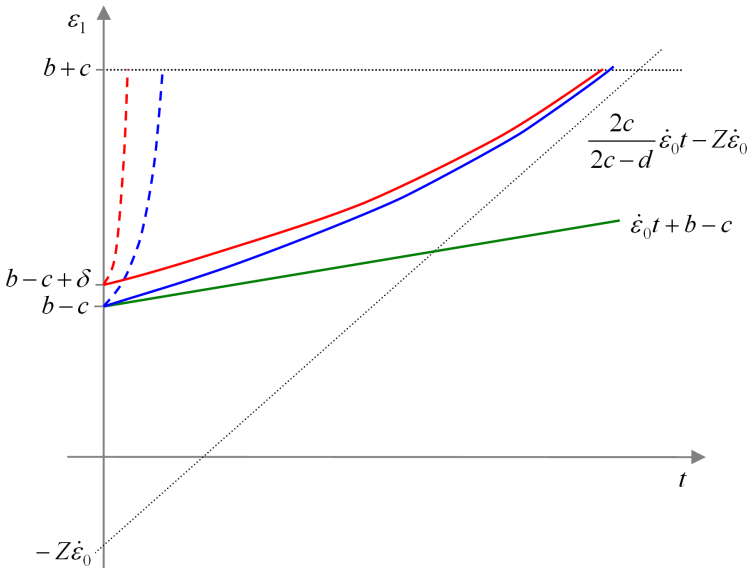


Figure 4.9 – Les évolutions CA dans le cas supercritique (lignes pleines) et subcritique (lignes en traits discontinus). En trait vert, on montre l'évolution homogène.

4.9). Dans ce dernier cas, la résolution du problème incrémental fini montre que un élément passe dans la phase B (voir section 4.2.5).

Il nous reste d'analyser la stabilité des évolutions AB, BA et BB. On suppose que l'élément 1 est en phase B, $\varepsilon_1(0) = \bar{\varepsilon}_1 > b + c$, et que l'élément 2 est en phase A, $\varepsilon_2(0) = 2\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_1 < b - c$. L'équation (4.38) devient

$$\dot{\varepsilon}_1 + \frac{k\,p}{k+k^d}\varepsilon_1 = \dot{\varepsilon}_0 + \frac{k\,p}{k+k^d}(\dot{\varepsilon}_0\,t + \bar{\varepsilon} + d)\,. \tag{4.50}$$

Elle admet la solution

$$\varepsilon_1(t) = (\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon} - d)\exp\left(-\frac{k\,p}{k+k^d}t\right) + \dot{\varepsilon}_0\,t + \bar{\varepsilon} + d\,, \tag{4.51}$$

qui pour $t \to +\infty$, converge vers $\dot{\varepsilon}_0\,t + \bar{\varepsilon} + d$. On peut donc conclure que l'évolution BA est stable. De manière analogue, on montre que AB est stable. Enfin, avec la même argumentation utilisée pour l'évolution AA, on montre que le système tend à la configuration homogène lorsque les deux éléments sont en phase B.

Dans la suite, on discute de l'influence de l'élément dissipatif sur les diagrammes de réponse (ε_1, ε_2) dans les cas supercritique (Fig. 4.10a, b) et subcritique (Fig. 4.10c, d). Pour aider la comparaison, sur la Fig. 4.10 en lignes noires, on montre les diagrammes (ε_1, ε_2) dans les cas sans les éléments dissipatifs. Si l'on considère des variations de k^d avec p constante (Fig. 4.10a, c) on observe que

– après le premier changement de phase (début des branches AB, BA), la différence entre les déformations ε_1, ε_2 diminue si l'on augmente k^d ;

2. On considère un critère de stabilité de type asymptotique

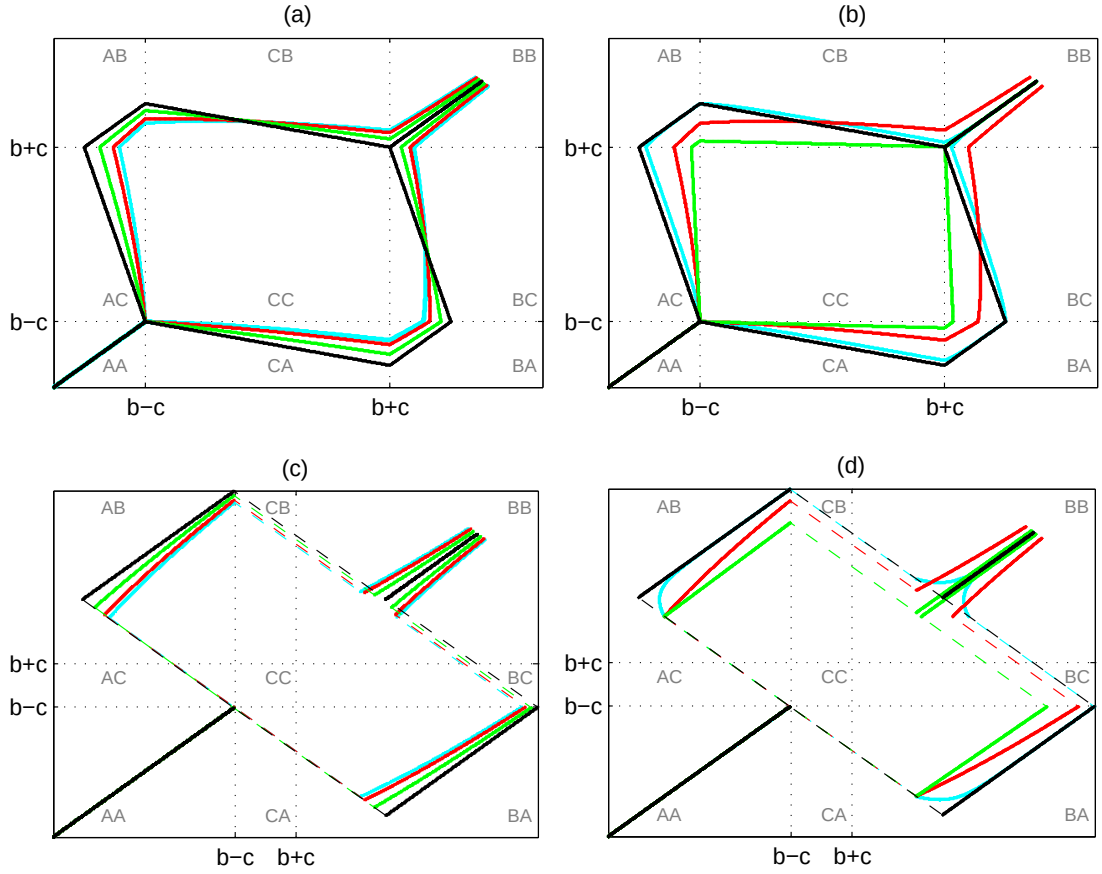


Figure 4.10 – Diagrammes $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ dans le cas supercritique (a), (b) et dans le cas subcritique (c), (d) pour des valeurs différentes de k^d et p. Dans (a) et (c) on considère $p = 10^{-2}$ s^{-1} fixe et on fait varier la valeur de k_d : 25 kPa (lignes bleu clair), 20 kPa (rouge), 10 kPa (vert). Dans (b) et (d) on considère $k_d = 25$ kPa fixe et on fait varier la valeur de p : 0.1 s^{-1} (lignes bleu clair), 10^{-2} s^{-1}(rouge), 10^{-3} s^{-1} (vert). En traits noir, on montre les courbes dans les cas élastiques ($k^d = 0$).

- si l'on diminue k^d, le deuxième changement de phase (fin des branches AB, BA) se produit pour un déplacement imposé inférieur ;
- lorsque tous les éléments sont en phase B, on converge à la configuration symétrique plus rapidement plus la valeur de k^d est faible.

On considère des variations de p avec k^d constante (Fig. 4.10b, d). On remarque que

- pour des valeurs faibles de p (courbes en vert), les diagrammes ont la même forme que dans le cas élastique, mais avec les branches AB, BA de longueur inférieure. En effet, on retrouve les diagrammes que l'on aurait trouvé dans le cas élastique si l'on avait choisi une valeur de d plus petite ;
- pour des valeurs élevées de p (courbes en bleu clair) , on trouve des diagrammes qui restent proches des diagrammes élastiques. En effet dans le cas subcritique (Fig. 4.10d), on trouve des valeurs de déformations différentes juste après les changements de phase, mais on converge rapidement à la so-

lution du cas élastique ;
– si l'on diminue p, le deuxième changement de phase se produit à une valeur du déplacement imposé plus faible.

4.2.8 L'élément dissipatif à l'extérieur de la chaîne

Comme on a vu dans le paragraphe 1.1.3, les mousses à porosité fermée montrent une courbe de réponse avec une pente positive dans la régime plateau, alors que les mousses à porosité ouverte montrent un palier presque plat. Dans les essais expérimentaux que nous avons effectué on observe une légère pente positive dans le régime plateau. Ceci peut être attribué à la présence de cellules fermées ou partiellement fermées provenant de défauts de fabrication de la mousse. On peut penser aussi que la pente positive soit due à une résistance résiduelle des arêtes, pendant l'effondrement de la mousse. Ces interprétations permettent d'expliquer la différence entre nos résultats expérimentaux et ceux de Gong et al. [61], où pour le même type de mousse un plateau plat est observé (voir Fig. 1.3).

Pour obtenir une pente positive dans le plateau, on a choisi d'introduire un élément dissipatif à l'extérieur, connecté en parallèle à la chaîne (voir Fig. 4.7). Pour cet élément, on suppose une loi de comportement de type Boltzmann-Volterra

$$\sigma^v(t) = \Sigma(0)\varepsilon(t) + \int_0^\infty \dot{\Sigma}(s)\varepsilon(t-s)ds\,, \tag{4.52}$$

en analogie avec le choix effectué pour l'élément dissipatif à l'intérieur de la chaîne. La fonction de relaxation Σ sera, en général, différente de G. La force totale σ est la somme des deux contributions σ^c et σ^v,

$$\sigma(t) = w'(\varepsilon_i(t)) + G(0)\,\varepsilon_i(t) + \int_0^\infty \dot{G}(s)\,\varepsilon_i(t-s)\,ds + \Sigma(0)\,\varepsilon(t) + \int_0^\infty \dot{\Sigma}(s)\,\varepsilon(t-s)\,ds\,. \tag{4.53}$$

L'addition d'un élément à l'extérieur de la chaîne ne perturbe pas la stratégie de résolution proposée dans la section 4.2. En effet, pour tout processus de chargement à déplacement imposé, on peut résoudre le problème d'évolution de façon découplée, en calculant séparément les deux contributions σ^c et σ^v.

4.3 Endommagement

Dans le chapitre suivant on verra que la viscosité linéaire ne peut pas expliquer complètement le comportement des mousses sous compression cyclique. En effet, dans le modèle viscoélastique la baisse de la courbe à la charge après le premier cycle est sous-estimée. Cette baisse ressemble beaucoup à l'effet Mullins des élastomères. Dans la section 4.1.1, on a vu que l'effet Mullins est généralement décrit comme endommagement du matériau. En suivant cette analogie, on a choisi d'introduire l'endommagement. En effet, il est raisonnable de penser qu'au premier cycle l'effondrement de la mousse cause l'endommagement des arêtes des cellules, et qu'aux cycles suivants une force plus faible soit suffisante pour écraser celles-ci.

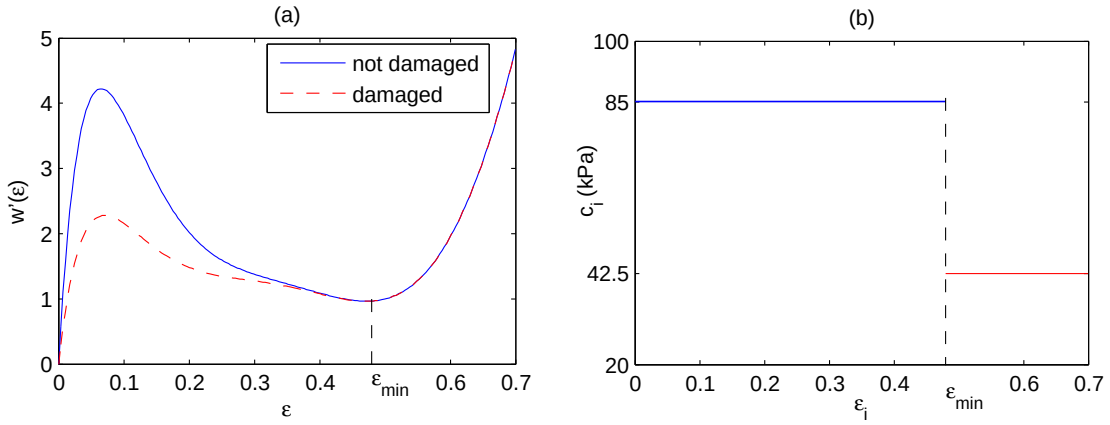


Figure 4.11 – (a) Courbes $(w'(\varepsilon), \varepsilon)$ pour le ressort non endommagé (ligne pleine bleue) et pour le ressort endommagé (ligne en pointillée rouge). (b) Évolution du paramètre c_i.

Dans notre modèle, cette idée se traduit par la considération des ressorts non linéaires comme éléments endommageables. On suppose que l'endommagement influence principalement la première branche de la courbe de réponse. Par simplicité, on fait l'hypothèse que l'endommagement cause seulement une variation du paramètre c, qui influence la pente de la première branche de w'. On suppose que

$$c_i(t) = \begin{cases} c & \text{si } \varepsilon_i(s) < \varepsilon_{min} \quad \forall s \in (-\infty, t] \\ c\,d & \text{autrement} \end{cases} \tag{4.54}$$

où $d \in (0, 1)$ est le paramètre d'endommagement, c est la valeur reportée dans le Tableau 5.6, et ε_{min} est la déformation qui correspond au minimum local de w', et qui repère donc le début de la deuxième branche ascendante. Cette loi met en pratique une idée d'endommagement très simple : lorsque le ressort i passe sur la deuxième branche ascendante, la valeur du paramètre c_i passe de c à $c\,d$ et elle ne changera plus. Les courbes de réponse (w', ε_i) du ressort non linéaire avant et après endommagement sont montrées sur la Fig. 4.11. Sur la Fig. 4.11b, on montre la loi de variation du paramètre c_i.

Chapitre 5

Simulations numériques

Sommaire

5.1 Identification des constantes matérielles 86
5.1.1 Paramètres visqueux 86
5.1.2 Fonctions de relaxation sommes d'exponentielles 87
5.1.3 Fonctions de relaxation somme de fonctions de Mittag-Leffler 90
5.1.4 Non linéarité de la viscosité 93
5.1.5 Viscosité interne et externe à la chaîne 94
5.1.6 Paramètres élastiques 95
5.1.7 Paramètre d'endommagement 98
5.2 Résultats numériques 98
5.2.1 Simulations des essais en compression cyclique 100
5.2.2 Simulations des essais à différentes vitesses de charge . . 101
5.2.3 Simulations d'ultérieurs essais en compression 102
5.2.4 Simulations avec endommagement 103

Ce chapitre concerne les études numériques conduits dans le but de valider le modèle. Les simulations concernent aussi bien le modèle viscoélastique que le modèle avec endommagement.

Les résultats des simulations sur le modèle viscoélastique montrent une concordance qualitative, mais pas encore complète, avec les expériences. En particulier, il y a deux aspects sur lesquels la réponse n'est pas satisfaisante : la dépendance de la contribution visqueuse à la vitesse de chargement et la perte de résistance à l'issue du premier cycle. Le premier écart peut être attribué à la non linéarité de la viscosité, dont la prise en compte est envisagée parmi les perspectives. Le deuxième sera traité ici en prenant en compte l'endommagement de la mousse. Le modèle viscoélastique avec endommagement permet alors d'obtenir une description convenable du comportement de la mousse, y compris pour des chargements complexes, constitués de combinaisons de cycles de charge et décharge, de périodes de relaxation et de fluage.

La première section de ce chapitre est dédiée à la description de la procédure d'identification des constantes matérielles et la deuxième est dédiée à la présentation des résultats des simulations numériques.

5.1 Identification des constantes matérielles

Dans cette section on présente la procédure utilisée pour l'identification des paramètres du modèle. On commence par l'étude des paramètres visqueux en considérant d'abord les essais de relaxation. On a pris en considération deux types de fonction de relaxation : la somme d'exponentielles et la somme de fonctions de Mittag-Leffler. La première consiste à considérer l'élément dissipatif comme une combinaison de ressorts linéaires et d'amortisseurs. La deuxième est associée à une combinaison de ressorts linéaires et d'amortisseurs fractionnaires, dont la force est proportionnelle à une dérivée fractionnaire de la vitesse de déformation. Cette deuxième possibilité sera écartée pour de raisons de complexité de calcul et de comportement à l'origine non convenable.

Pour l'identification des paramètres visqueux, on a choisi d'utiliser la courbe expérimentale de relaxation avec une vitesse de 5 mm/min pour la phase de charge, la même vitesse que celle utilisée pour les essais en compression cyclique. Deux courbes de relaxation à différentes vitesses sont également considérées, et une discussion sur la non linéarité de la viscosité est présentée.

Une fois que les paramètres visqueux sont déterminés, on peut identifier la contribution élastique sur la courbe expérimentale en compression. Le paramètre d'endommagement sera enfin choisi afin de mieux reproduire l'effet de *"stress softening"*.

5.1.1 Paramètres visqueux

L'identification des paramètres visqueux a été faite en utilisant les résultats des essais de relaxation décrits au chapitre 2. Dans le modèle, on a deux contributions de relaxation : la relaxation des éléments à l'intérieur de la chaîne gouvernée par la fonction de relaxation G et celle de l'élément à l'extérieur de la chaîne gouvernée par la fonction Σ. Les essais de relaxation ne permettent que l'identification de la somme des deux contributions.

On détermine la courbe de réponse du modèle pour un essai de relaxation prennant en compte une vitesse de chargement finie $\dot{\varepsilon}_0$. Soit $\{t \mapsto \varepsilon(t)\,,\ t \in [0, \bar{t}]\}$ le processus de relaxation

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} t\,\dot{\varepsilon}_0 & \text{pour } 0 \leq t < t_1\,, \\ \varepsilon_0 & \text{pour } t_1 \leq t < \bar{t}\,, \end{cases} \tag{5.1}$$

où ε_0, $\dot{\varepsilon}_0$ sont donnés, et $t_1 = \varepsilon_0/\dot{\varepsilon}_0$. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, tous les éléments soient au repos $\varepsilon_i(0) = 0$. Après l'intégration par parties de (4.53), on trouve que la force σ à l'instant t est

$$\sigma(t) = \begin{cases} w'(\varepsilon_i(t)) + \int_0^t G(t-s)\,\dot{\varepsilon}_i(s)\,ds + \dot{\varepsilon}_0 \int_0^t \Sigma(t-s)\,ds\,, & \text{pour } 0 \le t < t_1\,, \\ w'(\varepsilon_i(t)) + \int_0^{t_1} G(t-s)\,\dot{\varepsilon}_i(s)\,ds + \dot{\varepsilon}_0 \int_0^{t_1} \Sigma(t-s)\,ds\,, & \text{pour } t_1 \le t < \bar{t}\,, \end{cases} \tag{5.2}$$

Le problème d'identification des paramètres visqueux est couplé au choix des paramètres de w'. Pour résoudre le problème des hypothèses simplificatrices sont nécessaires. On considère que ε_0 est suffisamment grande pour être loin du plateau, et on simplifie le problème en considérant la solution homogène $\varepsilon_i = \varepsilon_0\,, \forall i$. Dans ce cas, la force σ pour $t \ge t_1$ devient

$$\sigma(t) = w'(\varepsilon_0) + \dot{\varepsilon}_0 \int_{t-t_1}^{t} \Upsilon(s)\,ds\,, \quad \text{pour } t_1 \le t < \bar{t}\,, \tag{5.3}$$

avec $\Upsilon(s) = G(s) + \Sigma(s)$. Dans la suite, on montrera la procédure utilisée pour caractériser Υ. Puis, dans la section 5.1.5, on expliquera comment la fonction Υ sera répartie entre G et Σ.

5.1.2 Fonctions de relaxation sommes d'exponentielles

On suppose que la fonction de relaxation Υ soit la somme de J exponentielles

$$\Upsilon(t) = \sum_{\alpha}^{J} k_\alpha \exp(-p_\alpha\,t)\,, \tag{5.4}$$

avec k_α, p_α des constantes positives. Ceci correspond à supposer que chaque élément dissipatif est constitué de J éléments de Maxwell, obtenus par l'assemblage en série de ressorts linéaires d'équation

$$\sigma_\alpha^d = k_\alpha\,\varepsilon_\alpha^e\,, \tag{5.5}$$

avec des amortisseurs d'équation

$$\sigma_\alpha^d = \frac{k_\alpha}{p_\alpha}\dot{\varepsilon}_\alpha^d\,, \quad \alpha = 1, 2...N\,. \tag{5.6}$$

En utilisant (5.3), on trouve que dans l'intervalle $(t_1, \bar{t})$, la force σ est donnée par

$$\sigma(t) = w'(\varepsilon_0) + \sum_{\alpha}^{J} \dot{\varepsilon}_0 \frac{k_\alpha}{p_\alpha}(\exp(p_\alpha\,t_1) - 1)\exp(-p_\alpha\,t)\,, \tag{5.7}$$

et si l'on pose $K_\alpha = \dot{\varepsilon}_0 \frac{k_\alpha}{p_\alpha}(\exp(p_\alpha\,t_1) - 1)$, on peut réécrire cette relation sous la forme

$$\sigma(t) = w'(\varepsilon_0) + \sum_{\alpha}^{J} K_\alpha \exp(-p_\alpha\,t)\,. \tag{5.8}$$

Pour optimiser la description de la courbe de relaxation expérimentale, on minimise la fonctionnelle

$$F(K_\alpha, p_\alpha) = \sum_{i=1}^{M} \left(y(t_i) - \sum_{\alpha=1}^{J} K_\alpha\, \exp\left(-p_\alpha\,t_i\right) \right)^2\,, \tag{5.9}$$

avec

$$y(t_i) = \tilde{y}(t_i) - w'(\varepsilon_0)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, M\,,$$

où $(t_i, \tilde{y}(t_i))$ sont M points de la courbe de relaxation expérimentale, voir Fig. 2.13, et $w'(\varepsilon_0)$ est la valeur asymptotique, pour $t = +\infty$, de la courbe de relaxation. J est le nombre minimum d'exponentielles nécessaires pour obtenir une reproduction convenable de la relaxation. Deux ou trois exponentielles sont d'habitude suffisantes. Dans notre cas, à cause de la co-existance des effets visqueux à différentes échelles de temps, il sera nécessaire de considérer cinq exponentielles.

On a choisi d'utiliser comme référence la courbe expérimentale de relaxation de 10 jours avec un déplacement imposé de 35 mm ($\varepsilon_0 = 0.7$) et avec une phase de charge à 5 mm/min ($\dot{\varepsilon}_0 = 1.7 \times 10^{-2}\, s^{-1}$). La courbe est montrée sur la de relaxation Fig. 2.13. On note une irrégularité pour $t = 11000\, s$, causée par une erreur de mesure due au changement de gamme de la fréquence d'échantillonnage. Cette erreur a été corrigée en considérant, sur les points $(t_i, \tilde{y}(t_i))$ avec $t_i > 12000$s, un décalage de t_i à $t_i = t_i + 600$s

La procédure de minimisation utilisée consiste en deux étapes : on détermine d'abord une solution approchée grossière, et puis on applique une méthode systématique d'optimisation en utilisant cette solution comme valeur initiale. Deux approches différentes ont été utilisées pour calculer une solution approchée initiale : une méthode graphique et la méthode de Prony [70, 109].

La méthode graphique est fondée sur une analyse directe de la courbe de relaxation. On trace la courbe $(t, \ln y)$, et on cherche la droite qui reproduit le mieux la partie finale de la courbe. La pente et l'ordonnée à l'origine de la droite déterminent respectivement p_1 et K_1 de la première exponentielle. Puis, on trace la courbe $(t, \ln \bar{y})$, avec $\bar{y} = y - K_1 \exp(-p_1\, t)$, et on répète la même procédure pour obtenir les coefficients de la deuxième exponentielle. De la même manière on obtient les coefficients des autres exponentielles.

La méthode de Prony est plus raffinée. On détermine les $2J$ coefficients (K_α, p_α), en résolvant deux systèmes linéaires, obtenus en imposant le passage de la série d'exponentielles par $2J$ points régulièrement espacés de la courbe expérimentale. Cela correspond au système non linéaire

$$\begin{aligned}
&K_1 + K_2 + \cdots + K_J = y(0)\\
&K_1\, u_1 + K_2\, u_2 + \cdots + K_J\, u_J = y(\lambda)\\
&K_1\, u_1^2 + K_2\, u_2^2 + \cdots + K_J\, u_J^2 = y(2\lambda)\\
&\vdots\\
&K_1\, u_1^{J-1} + K_2\, u_2^{2J-1} + \cdots + K_J\, u_J^{2J-1} = y((2J-1)\lambda)\,,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

où $u_\alpha = exp(-p_\alpha\, \lambda)$ et λ est la distance d'échantillonnage. L'idée de la méthode est de transformer ce système en deux systèmes linéaires, en interprétant la somme d'exponentielles comme solution d'une équation aux différences finies

$$\begin{aligned}
y((J+L)\lambda) + C_1 y((J+L-1)\lambda) + C_2 y((J+L-2)\lambda) + \ldots\\
+ C_L y(L) = 0\,, \qquad L = 1, 2, \ldots, J\,,
\end{aligned} \tag{5.11}$$

On obtient ainsi un système linéaire qui nous donne les valeurs des C. Les valeurs de p_α sont obtenues comme les racines du polynôme caractéristique

$$p^L - C_1 p^{L-1} - C_2 p^{L-2} - \cdots - C_L = 0\,. \tag{5.12}$$

Une fois les valeurs de p_α connues, le système (5.10) devient un système linéaire d'inconnues K_α.

La deuxième étape consiste à utiliser une méthode d'optimisation pour minimiser F (5.9). Deux méthodes ont été testées : la méthode du gradient à pas optimal et la méthode de Hooke and Jeeves. La première méthode consiste à déterminer le vecteur $v = (K_\alpha, p_\alpha)$ de façon à maximiser l'incrément de descente

$$\Delta F(v) = F(v^i) - F(v)\,. \tag{5.13}$$

Du développement

$$F(v^i + \delta v) = F(v^i) + F_v(v^i) \cdot\ \delta v + o(\delta v)\,, \tag{5.14}$$

on déduit que le vecteur δv qui maximise ΔF est le vecteur colinéaire au gradient $F_v(v^i)$. Donc, on peut écrire la formule itérative

$$v^{i+1} = v^i - \gamma\, \frac{F_v(v^i)}{\|F_v(v^i)\|}\,, \tag{5.15}$$

où γ est une constante (pas optimale) destinée à assurer la convergence rapide de la méthode. Dans le cas d'un système linéaire, le pas optimal peut être évalué exactement à chaque itération. Dans le cas non linéaire, comme c'est le cas ici, on recourt à une interpolation parabolique utilisant un calcul intermédiaire pour une valeur choisie de γ. Dans le cas présent, la détermination du pas optimal s'est avérée difficile en raison de la grande différence de sensibilité de la fonction erreur par rapport aux paramètres K_α et p_α.

On a choisi d'utiliser la méthode de Hooke and Jeeves [71]. Celle-ci est une méthode heuristique itérative qui se base sur des évaluations directes de la fonctionnelle F au voisinage de v. Par exemple, à l'itération $h^{éme}$, pour le paramètre $j^{éme}$ on évalue la variation de F le long de la direction $d_j = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{j-1} 1, 0, \ldots, 0)$

$$\Delta F_j = F(v) - F(v \pm \gamma_j d_j)\,, \tag{5.16}$$

et on modifie v dans le sens où la variation est positive. Si la variation ΔF_j est négative dans les deux sens, on diminue la valeur de l'incrément γ_j. La procédure s'arrête à l'itération dont tous les incréments γ_j sont plus petits que d'un valeur limite prédéterminé. La forme basique de Hooke and Jeeves a été améliorée ici en tenant compte du caractère spécifique des paramètres (K_α, p_α). Ainsi à chaque itération, ces paramètres sont traités par couple lors de la recherche de la direction minimisante. Classiquement un incrément double dans cette direction est tenté et conservé si la minimisation est plus importante. Cette méthode s'est avérée tout à fait satisfaisante. La détermination d'une solution approchée grossière a

Tableau 5.1 – Convergence de la méthode de Hooke and Jeeves (3320 points de mesure).

J	*Iter.*	*Temps approx.*	F
3	578	2 min	6.1×10^{-3}
4	2458	10 min	4.4×10^{-4}
5	2001	11 min.	3.3×10^{-5}

Tableau 5.2 – Les valeurs des paramètres des éléments dissipatifs identifiées sur la courbe de relaxation avec une phase de charge à 5 mm/min

α	k_α [kPa]	p_α [s^{-1}]	h_α
1	0.99	9.64×10^{-7}	0
2	1.09	3.13×10^{-5}	1
3	1.81	1.04×10^{-3}	0
4	5.25	1.20×10^{-2}	1
5	34.8	9.41×10^{-2}	0

permis de réduire le temps de calcul. On peut noter dans le Tableau 5.1 que pour 5 exponentielles et 3320 points de mesure, le nombre d'itérations était de 2001 et le temps de calcul d'environ 11 minutes.

Sur la courbe de relaxation expérimentale avec une charge à 5 mm/min ($\dot{\varepsilon}_0 = 1.7 \times 10^{-2}\, s^{-1}$) et $\varepsilon_0 = 0.7$, on a estimé la valeur de l'asymptote à 4 kPa. Ceci fixe la valeur de $w'(\varepsilon_0)$. Sur la Fig. 5.1, on montre les résultats de la minimisation avec 3, 4 et 5 exponentielles. On note que les 5 exponentielles permettent d'obtenir une bonne reproduction de la courbe expérimentale aussi bien dans les premières minutes (voir Fig. 5.1d) qu'à long terme. Les valeurs de k_α et p_α pour les 5 exponentielles sont données dans le Tableau 5.2. Dans le même tableau on montre également les valeurs des paramètres h_α qui seront introduits dans la section 5.1.5 pour caractériser les fonctions G et Σ. La question de la sensibilité du processus d'identification des paramètres visqueux sur les courbes de relaxation a été considérée. Nous avons vérifié que des solutions approchées grossières différentes (mais restant dans le domaine des valeurs acceptables des grandeurs mécaniques) nous conduisent à la fin du processus d'optimisation au même jeu des paramètres $k_\alpha\, p_\alpha$. Seul le temps de calcul est modifié.

5.1.3 Fonctions de relaxation somme de fonctions de Mittag-Leffler

Suite aux bons résultats obtenus par plusieurs auteurs [67, 69, 78] dans la description du comportement viscoélastique des élastomères avec le calcul fractionnaire, on a considéré la possibilité d'appliquer cette approche.

On considère le cas où les amortisseurs qui composent les éléments dissipatifs sont des amortisseurs fractionnaires. Ceci signifie que la loi de comportement (5.6)

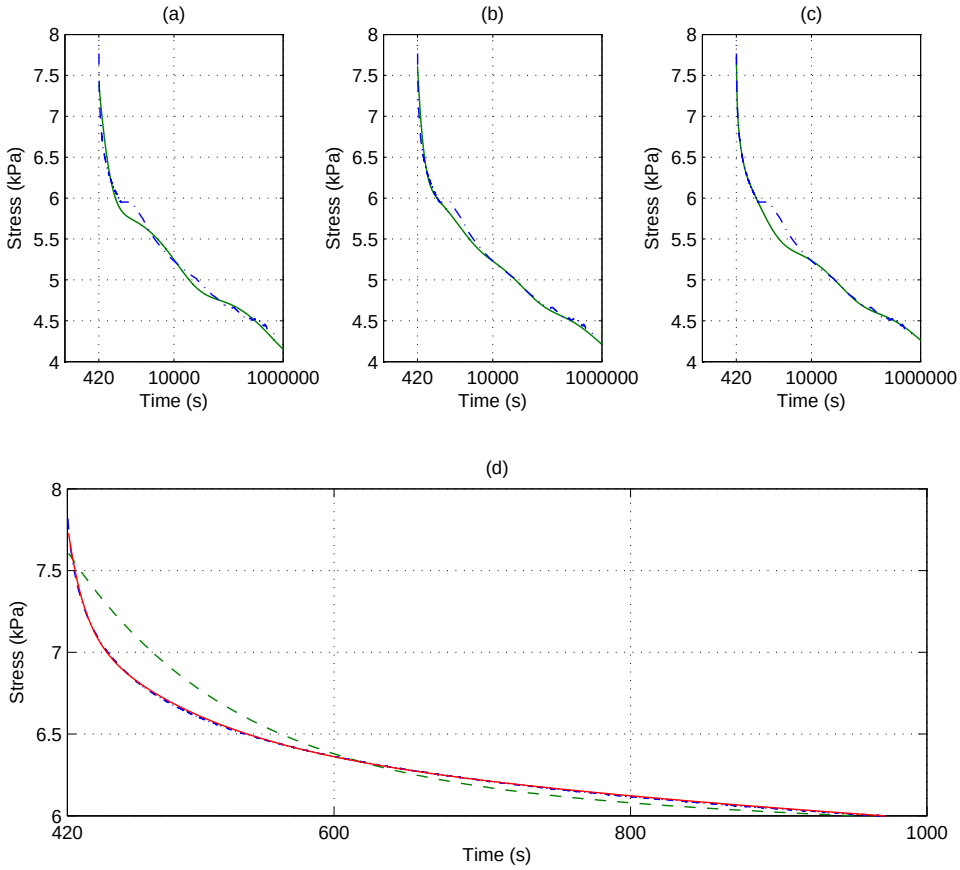


Figure 5.1 – Reproduction de la courbe de relaxation de 10 jours avec une vitesse de chargement de 5 mm/min (lignes en pointillée), avec 3(a), 4(b), et 5(c) exponentielles (lignes pleines). (d) Comparaison des courbes avec 4 (en traits discontinus) et 5 exponentielles (ligne pleine rouge) avec la courbe expérimentale (ligne en pointillés) dans le premier 1000 s.

est remplacée par la loi aux dérivés fractionnaires

$$\sigma_\alpha^d = \frac{k_\alpha}{p_\alpha} \frac{d^{q_\alpha}}{dt^{q_\alpha}} \varepsilon_\alpha^d \,, \tag{5.17}$$

avec $0 < q_\alpha < 1$. Dans ce cas, la fonction de relaxation Υ devient :

$$\Upsilon(t) = \sum_{\alpha=1}^{J} k_\alpha E_{q_\alpha} \left(-p_\alpha \, t^{q_\alpha}\right) , \tag{5.18}$$

où $E_q(\cdot)$ est la fonction de Mittag-Leffler

$$E_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(qn+1)} \,, \tag{5.19}$$

et Γ est la fonction Gamma (4.3).

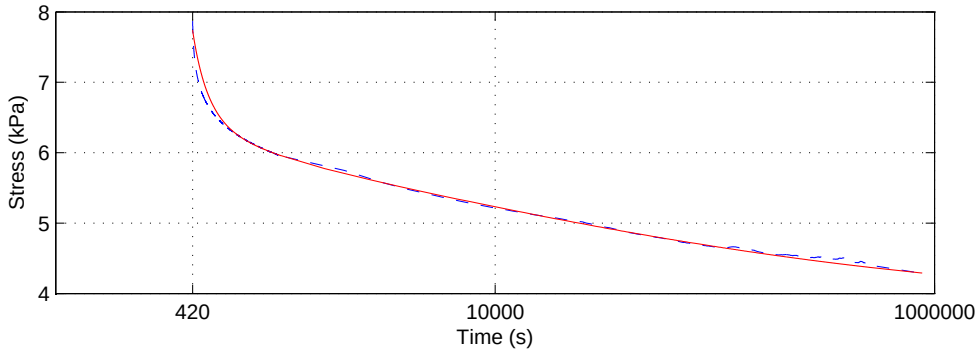


Figure 5.2 – Reproduction de la courbe de relaxation de 10 jours avec une vitesse de chargement de 5 mm/min (lignes en pointillée), avec une somme de fonctions de Mittag-Leffler (5.19) (lignes pleines).

Tableau 5.3 – Les valeurs des paramètres des éléments fractionnaires identifiées sur la courbe de relaxation avec une phase de charge à 5 mm/min

α	k_α [kPa]	p_α [s^{-q_α}]	q_α
1	4.5	5.25×10^{-2}	0.32
2	12.7	2.61×10^{-2}	0.89

Une bonne reproduction de la courbe de relaxation expérimentale (voir Fig. 5.2) a été obtenue en considérant deux éléments fractionnaires avec les paramètres $k_\alpha, p_\alpha, q_\alpha$ donnés dans le Tableau 5.3.

Bien que les amortisseurs fractionnaires permettent d'obtenir une description convenable de la courbe expérimentale avec moins de paramètres (6 à la place de 10), on a écarté cette possibilité. Ceci pour deux raisons. Tout d'abord, pour les éléments fractionnaires la fonction de relaxation est singulière à l'origine. Ceci donne des problèmes numériques pour les changements de phase, là où les valeurs de la fonction de relaxation dans le voisinage de l'origine jouent un rôle décisif. Ensuite, les exponentielles permettent de réduire énormément le temps de calcul des simulations numériques. En effet, l'évaluation des termes d'histoire A_i peut être effectuée avec une procédure itérative. Par exemple, on considère le terme

$$C(t) = \int_0^t \exp(-ps)\, \dot{\varepsilon}(t-s)\, ds\,, \tag{5.20}$$

que l'on trouve dans les termes d'histoire $A_i(t)$. Avec le changement de variable $r = t - s$, on obtient

$$C(t) = \exp(-pt) \int_0^t \exp(pr)\, \dot{\varepsilon}(r)\, dr\,. \tag{5.21}$$

Donc à l'instant $t + \tau$,

Tableau 5.4 – Les valeurs des paramètres des éléments dissipatifs identifiées sur la courbe de relaxation avec une phase de charge à 250 mm/min

α	k_α [kPa]	p_α [s^{-1}]
1	4.27	7.27×10^{-7}
2	1.23	7.56×10^{-6}
3	2.60	7.10×10^{-3}
4	3.56	1.48×10^{-1}
5	33.8	1.57

$$\begin{aligned} C(t+\tau) &= \exp(-p(t+\tau)) \Big(\int_0^t \exp(pr)\, \dot{\varepsilon}(r)\, dr + \int_t^{t+\tau} \exp(pr)\, \dot{\varepsilon}(r)\, dr \Big) \\ &= \exp(-k\tau)\, C(t) + \exp(-p(t+\tau)) \int_t^{t+\tau} \exp(pr)\, \dot{\varepsilon}(r)\, dr\,. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Enfin, si l'on suppose que $\dot{\varepsilon}(r)$ est constante dans l'intervalle $(t, t+\tau)$,

$$C(t+\tau) = \exp(-p\tau)\, C(t) + (1 - \exp(-p\tau))\, \frac{\dot{\varepsilon}}{p}\,. \tag{5.23}$$

on obtient une formule récursive qui, à partir de $C(t)$, nous donne directement $C(t+\tau)$. Au contraire avec les drivées fractionnaires, on est obligé de calculer les termes d'histoire A_i à chaque pas de temps et de stocker leurs valeurs. Ceci mène à un temps de calcul de l'ordre de 10 heures pour la simulation de 4 cycles de charge et décharge avec une chaîne de 30 éléments. Les dérivées fractionnaires n'auraient pas permis d'utiliser la procédure d'identification des paramètres élastique décrite dans la suite.

5.1.4 Non linéarité de la viscosité

On prend en compte les deux courbes expérimentales de relaxation obtenues avec une vitesse de la phase de charge de 1 mm/min et 250 mm/min (courbe en pointillé sur la Fig. 5.3). Avec la procédure de minimisation décrite dans la section 5.1.3, on a obtenu les valeurs des paramètres k_α et p_α reportées dans les Tableau 5.4, 5.5. Les résultats de la minimisation sont montrés en trait noir sur la Fig. 5.3. On remarque que les valeurs des paramètres sont bien différentes pour les deux vitesses, et les deux sont aussi différentes des valeurs précédemment identifiées sur la courbe à 5 mm/min.

Si l'on considère les paramètres visqueux identifiés sur la courbe à 5 mm/min, et que l'on simule les essais de relaxation aux autres vitesses, on obtient des courbes de relaxation qui ne reproduisent pas les résultats expérimentaux (courbes en rouge sur la Fig. 5.3). En particulier, on observe une importante surestimation de la viscosité pour une vitesse de 250 mm/min, et une sous-estimation pour la vitesse de 1 mm/min. On conclue que la viscosité est fortement non linéaire. La prise en compte de ce caractère non linéaire sera évoquée dans le chapitre final, dans lequel on discutera les perspectives immédiates de ce travail.

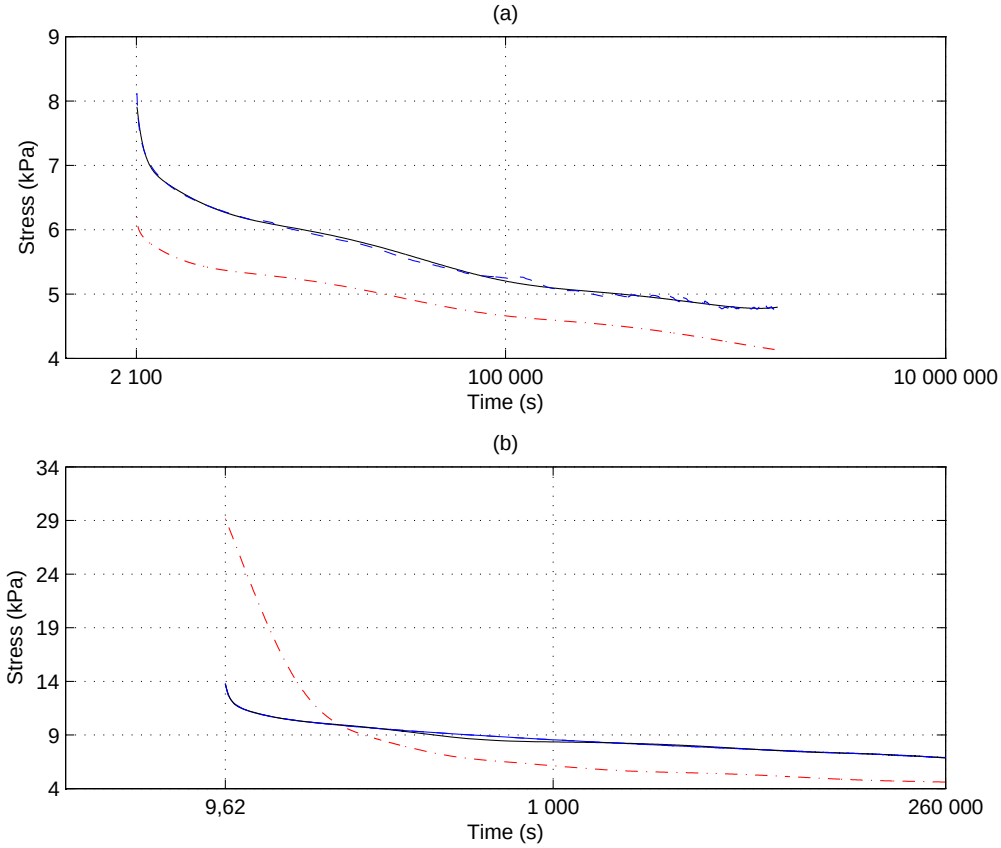


Figure 5.3 – (a) Reproduction de la courbe de relaxation de 20 jours avec une vitesse de chargement de 1 mm/min (ligne en pointillée bleue) avec cinq exponentielles (ligne pleine noir). (b) Reproduction de la courbe de relaxation de 72 heures avec une vitesse de chargement de 250 mm/min (ligne en pointillée bleue) avec cinq exponentielles (ligne pleine noir). Les courbes en traits-points rouge sont les résultats des simulations numériques des deux essais de relaxation à 1 mm/min et 250 mm/min, avec les paramètres identifiés sur la courbe à 5 mm/min.

5.1.5 Viscosité interne et externe à la chaîne

L'essai de relaxation nous a permis d'identifier la somme Υ des deux fonctions de relaxation G et Σ, mais il n'a pas donné des informations sur comment distribuer les cinq exponentielles entre les deux. Ces informations peuvent être récupérées en considérant la réponse sous compression. En effet, des distributions différentes des cinq exponentielles entre G et Σ donnent des courbes de réponse qui ont des pentes différentes dans le plateau, voir Fig. 5.4a.

On a introduit cinq paramètres supplémentaires h_α qui représentent le degré de contribution de chaque exponentielle à l'intérieur et à l'extérieur de la chaîne. On a fait entrer les paramètres h_α dans le procédé d'identification sous une forme simplifiée en considérant comme valeurs possibles : 1 (exponentielle à l'intérieur) et 0 (exponentielle à l'extérieur). Les expressions de G et Σ deviennent :

Tableau 5.5 – Les valeurs des paramètres des éléments dissipatifs identifiées sur la courbe de relaxation avec une phase de charge à 1 mm/min

α	k_α [kPa]	p_α [s^{-1}]
1	0.01	8.30×10^{-7}
2	1.53	6.01×10^{-7}
3	1.60	2.48×10^{-5}
4	2.04	6.10×10^{-4}
5	18.4	7.02×10^{-3}

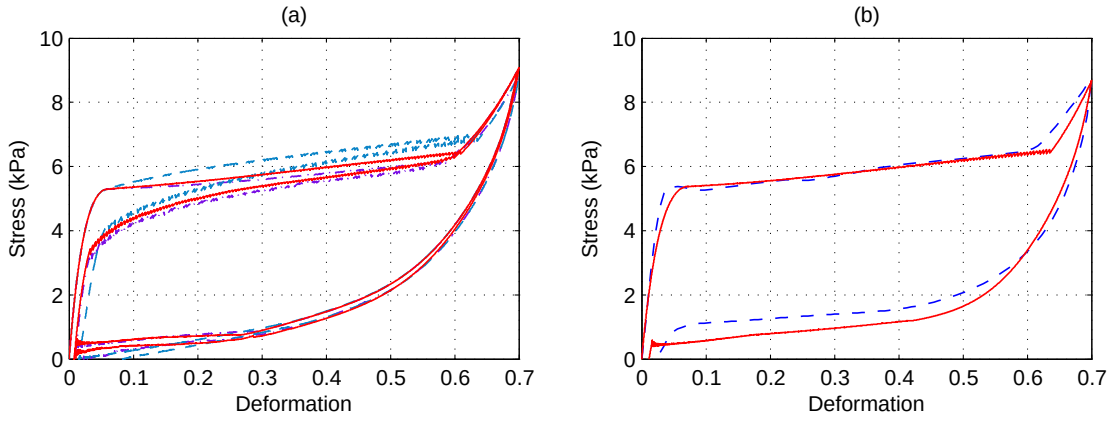


Figure 5.4 – (a) Courbes de réponse pour différents choix de G et Σ. (b) Courbe expérimentale d'un cycle de charge et décharge à 5 mm/min (ligne en pointillée bleue) utilisée pour l'identification des paramètres élastiques, et résultat de la simulation numérique après identification (ligne pleine rouge).

$$G(t) = \sum_{\alpha=1}^{5} h_\alpha \, k_\alpha \exp(-p_\alpha \, t) \, , \quad \Sigma(t) = \sum_{\alpha=1}^{5} (1 - h_\alpha) \, k_\alpha \exp(-p_\alpha \, t) \, . \tag{5.24}$$

Une bonne reproduction de la pente de la courbe de réponse dans la phase du plateau a été obtenue avec les valeurs de h_α reportés dans le Tableau 5.2. Cette distribution correspond à utiliser deux exponentielles dans G et trois exponentielles dans Σ.

5.1.6 Paramètres élastiques

Pour les ressorts non linéaires, on considère l'expression de l'énergie de déformation unidimensionnelle que l'on avait introduite dans le modèle élastique (section 3.2),

$$w(\varepsilon) = \frac{1}{2} \, \alpha \, (1+\varepsilon)^2 + c \, (1+\varepsilon)^m \Big(\frac{1}{m+2} \, (1+\varepsilon)^2 - \frac{1}{m} \Big) \\ - \mu \log(1+\varepsilon) + \frac{\beta \sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}} \, \mathrm{erf}\big(\sqrt{k}(1+\varepsilon-a)\big) + \gamma \, , \tag{5.25}$$

Les valeurs de α et γ sont déterminées par la condition (3.19) imposant que l'énergie w et la force σ^e sont nulles dans la configuration de référence $\varepsilon = 0$.

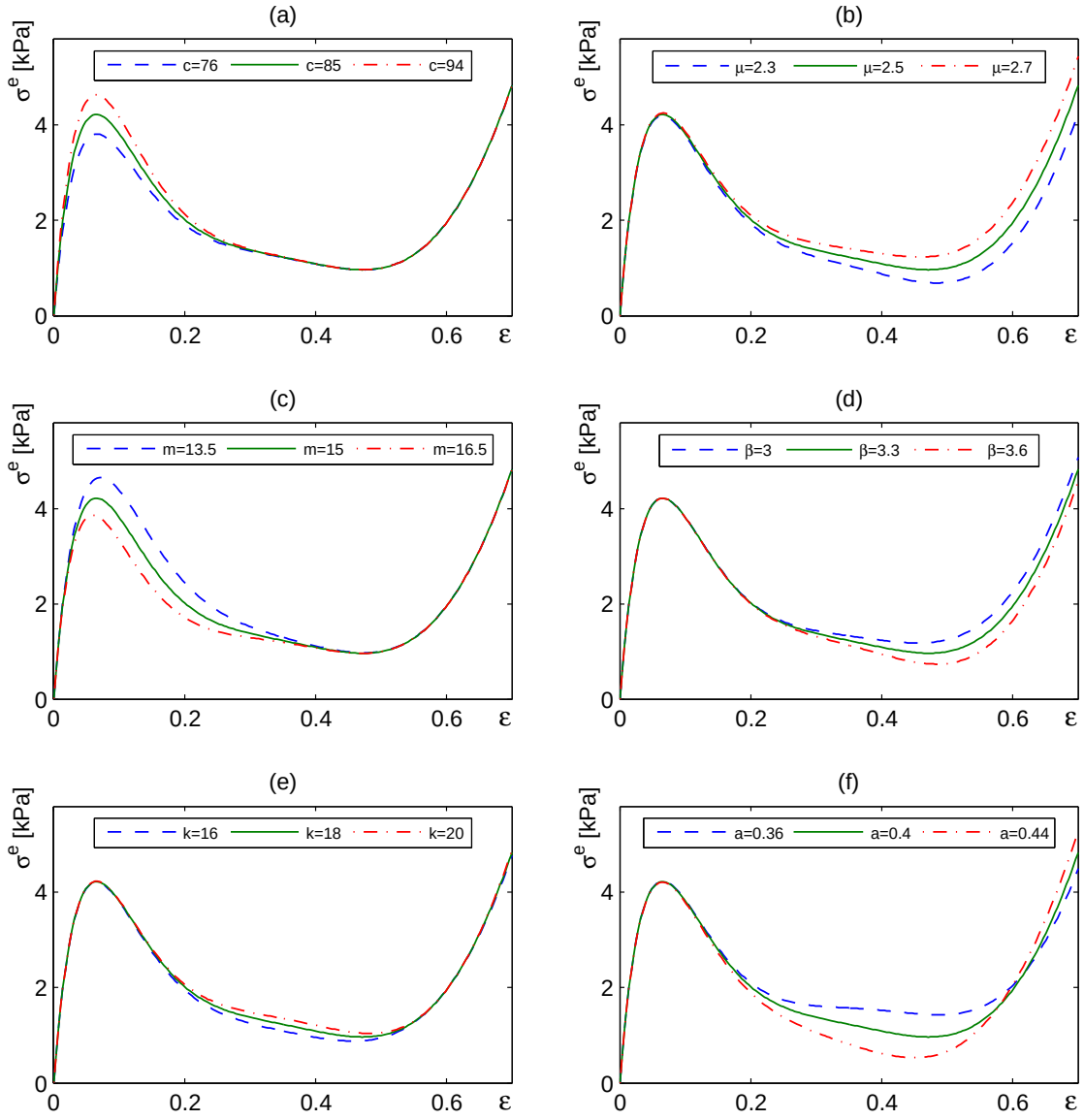


Figure 5.5 – Étude de l'influence des paramètres élastiques. Dans les six figures, les courbes (σ^e, ε) sont obtenues en faisant varier un des paramètres $(c,\ \mu,\ m,\ \beta,\ k,\ a)$ à la fois.

Dans la suite, on présente la procédure utilisée pour déterminer les six paramètres restants c, μ, m, β, k, a. On s'attend des valeurs différentes des celles déterminées dans la section 3.2 pour le modèle élastique. On rappelle que β, k, a sont les paramètres qui caractérisent la gaussienne. En particulier, a et β déterminent respectivement la position et la valeur du minimum, et k est l'écart type.

La procédure d'identification comporte deux étapes. D'abord, on évalue l'influence de chacun des paramètres sur la courbe (σ^e, ε) en les faisant varier l'un après l'autre. Les résultats sont montrés sur la Fig. 5.5 . On remarque que :

- c influence la pente initiale et la valeur du maximum,
- μ influence la deuxième branche ascendante,
- m influence la branche descendante, la position et la valeur du maximum et du minimum,
- si l'on augmente β, on baisse la courbe autour la valeur de a,
- k détermine le pente de la courbe autour la valeur de a,
- si l'on change a on modifie la position et la valeur du minimum.

On voit aussi qu'une variation de l'ordre de 10% de la valeur de chacun des paramètres induit sur la courbe de réponse une variation moyenne [1] infèrieure au 9%. Cette analyse de sensibilité montre la stabilité de la forme de la courbe de réponse élastique par rapport à des petites variations des constantes matérielles.

La procédure d'identification a été complétée par une identification numérique. On a effectué des simulations numériques en prenant en compte la contribution visqueuse précédemment identifiée. On a considéré une chaîne de 120 éléments et un pas de temps de 0.03 s. Une justification de ce choix sera donnée dans la section 5.2. On a identifié les paramètres élastiques sur la courbe expérimentale d'un cycle de charge et décharge à 5 mm/min, montrée en pointillés sur la Fig. 5.4b. L'identification est menée directement sur la courbe expérimentale pour trois des paramètres, et à l'aide d'une optimisation avec la méthode de Hooke and Jeeves pour les trois autres. En effet, l'analyse de sensibilité, menée dans la première étape, nous a permit de comprendre que les valeurs des paramètres c, μ, m peuvent être ajustées directement sur la courbe de réponse sans les inclure dans le processus d'optimisation. Pour l'identification on a donc suivi la procédure suivante :

1. on a déterminé c pour reproduire la pente initiale de la courbe de réponse,
2. on a déterminé m (avec c fixe) pour reproduire la valeur de la force du début plateau,
3. on a déterminé μ (avec c et m fixes) pour reproduire la valeur de la force à la fin de la phase de charge $\varepsilon = 0.7$,
4. on a effectué une minimisation aux moindre carrés avec la méthode de Hooke and Jeeves pour trouver les valeurs des trois paramètres β, k et a.

Les valeurs des paramètres élastiques obtenues par cette procédure sont reportées

1. On a pris la variation moyenne v suivante : $v(\eta) = \frac{\int_0^{0.7} |\sigma^e(\varepsilon,\eta) - \sigma^e(\varepsilon,0)| d\varepsilon}{\int_0^{0.7} |\sigma^e(\varepsilon,0)| d\varepsilon}$ où η correspond au vecteur des paramètres modifiés.

Tableau 5.6 – Les valeurs des paramètres élastiques

$c = 85$ kPa	$m = 15$	$\mu = 2.5$ kPa	$a = 0.4$	$\beta = 3.3$ kPa	$k = 18$

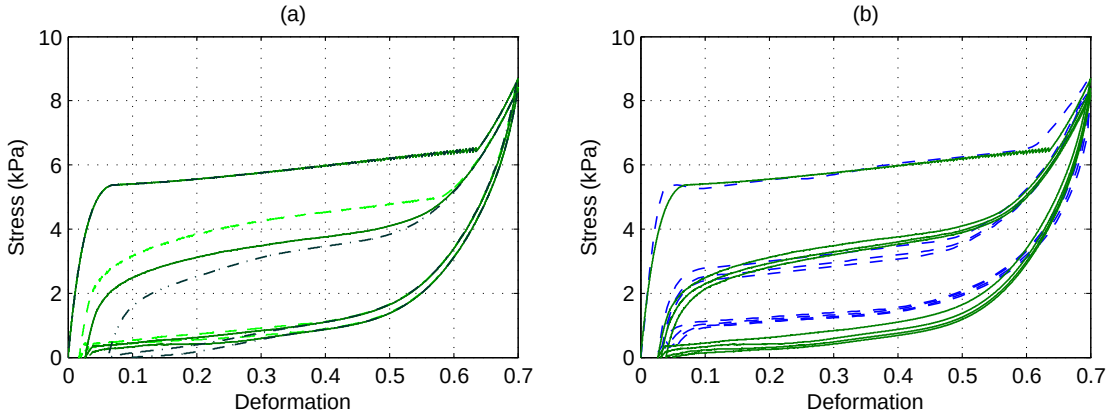


Figure 5.6 – (a) Simulations numériques de deux cycles de charge et de décharge pour valeurs différentes du paramètre d'endommagement d : $d = 0.3$ (ligne tirets-points verte foncé), $d = 0.5$ (ligne pleine verte) et $d = 0.7$ (ligne en pointillés vert clair). (b) Comparaison entre simulations numériques avec $d = 0.5$ (ligne plein verte) et expériences (ligne en pointillée bleue) pour 4 cycles de charge et de décharge à 5 mm/min.

dans le Tableau 5.6. Sur la Fig. 5.8, le résultat de la simulation numérique d'un cycle de charge et de décharge est comparé à la courbe expérimentale.

5.1.7 Paramètre d'endommagement

Le paramètre d'endommagement d, introduit en (4.54), a été identifié sur les courbes expérimentales en compression cyclique. À ce propos, on a effectué des simulations numériques de deux cycles de charge et de décharge à 5 mm/min avec différentes valeurs de d, voir Fig. 5.6a. Une reproduction convenable des courbes expérimentales a été obtenue avec $d = 0.5$, Fig. 5.6b.

La prise en compte de l'endommagement permet de décrire aussi bien la baisse de la courbe à la charge au deuxième cycle, que d'autres effets significatifs. En effet avec l'endommagement, on observe une forme différente des courbes de réponse après le premier cycle : la déformation résiduelle à la fin de chaque cycle de charge et décharge est plus importante, et la longueur de la phase du plateau est inférieure. Donc, l'introduction de l'endommagement permet d'éliminer les trois insuffisances précédemment trouvées avec le modèle viscoélastique.

5.2 Résultats numériques

On a effectué des simulations numériques sur la chaîne montrée sur la Fig. 4.7 soumise à des processus de déformation $t \to \varepsilon_0(t)$. On a considéré les valeurs des paramètres du matériau reportées dans les Tableau 5.2, 5.6.

Pour obtenir une solution du problème d'évolution $\mathcal{P}1$ (section 4.2.2), on considère une séquence d'intervalles de temps de durée Δt, et dans chaque intervalle on remplace les vitesses de déformation $\dot{\varepsilon}_i(t)$ par des valeurs constantes $\dot{\varepsilon}_i$. À chaque pas de temps, le choix de la méthode utilisée pour calculer la solution (ε_i, σ) dépend de la valeur du déterminant de la matrice H. S'il n'a pas changé de signe, et si $\det H > 10^{-2}$, on considère le problème incrémental infinitésimal $\mathcal{P}2$, et on résout le système linéaire algébrique (4.19), (4.20). Sinon, on considère le problème incrémental fini $\mathcal{P}3$, et le système algébrique non linéaire (4.24) est résolu avec la méthode itérative de Newton-Raphson.

L'utilisation des exponentielles dans les fonctions de relaxation permet de réécrire les réponses σ_i^d et σ^v des éléments dissipatifs en terme d'équations différentielles

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{\alpha=1}^{2} \dot{\sigma}_i^d(t) = \dot{\sigma}_{i\,\alpha}^d(t) \\
&\dot{\sigma}_{i\,\alpha}^d(t) + p_\alpha \sigma_{i\,\alpha}^d(t) = k_\alpha \dot{\varepsilon}_i \qquad i = 1, 2, ...N, \ et\ \alpha = 1, 2. \\
&\textstyle\sum_{\alpha=3}^{5} \dot{\sigma}^v(t) = \dot{\sigma}_\alpha^v(t) \\
&\dot{\sigma}_\alpha^v(t) + p_\alpha \sigma_\alpha^v(t) = k_\alpha \dot{\varepsilon} \qquad \alpha = 3, 4, 5.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Donc, au lieu de déterminer les termes d'histoire A_i avec la formule récursive 5.23, on peut intégrer directement les équations ci-dessus. Parmi les méthodes d'intégration d'équations différentielles, nous avons d'abord envisagé des méthodes de type Runge-Kutta ou Heunn ou encore des Θ-*methodes* [132]. En effet, une série de tests nous a montré qu'une méthode d'Euler explicite convenait.

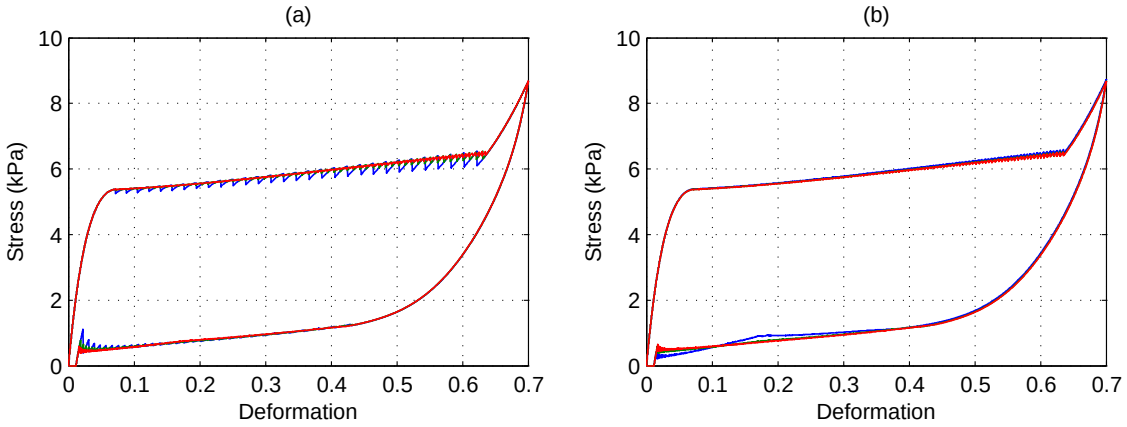


Figure 5.7 – Simulation d'un cycle de charge et de décharge avec des valeurs différents de N (a) : chaîne de 30 éléments (ligne bleue), 60 éléments (vert), et 120 éléments (rouge) ; et des valeurs différentes de Δt (b) : 0.3 s (bleue), 0.03 s(rouge) et 0.01 s (vert).

On a fait des tests pour choisir le bon pas de discrétisation temporelle Δt, et le nombre d'éléments composants la chaîne. Sur la Fig. 5.7a et b on montre, respectivement, les courbes de réponse pour un cycle de charge et de décharge avec trois pas de temps différents et avec des nombres d'éléments N différents. Comme

Tableau 5.7 – Influence du pas de temps Δt et du nombre d'éléments N sur le temps de calcul pour la simulation d'un cycle de charge et décharge à 5 mm/min (durée réelle de 14 min).

N	Δt	*Temps de calcul*
30	0.03 s	1 min 15 s
60	0.03 s	1 min 40 s
120	0.03 s	2 min 38 s
120	0.01 s	8 min
120	0.3 s	22 s.

Tableau 5.8 – Temps de calcul des simulations pour différents types de chargement avec $N = 120$.

Chargement	*Temps d'observation*	Δt	*Temps de calcul*
Un cycle	14 min	0.03 s	2 min et 38 s
Quatre cycles	56 min	0.03 s	11 min et 40 s
Période de repos	33 jours	0.03 s et 10 s	1 h 50 min

dans le modèle élastique, si l'on augmente le nombre des éléments on diminue les amplitudes des sauts correspondant aux changements de phase. Pour les simulations qui suivent, on considéra une chaîne de 120 éléments et un pas de temps $\Delta t = 0.03$ s. En effet, on observe sur la Fig. 5.7b que les résultats obtenus par $\Delta t = 0.01s$ sont identiques à ceux obtenus pour $\Delta t = 0.03s$, ce qui justifie notre choix. Le Tableau 5.7 donne des précisions sur les temps de calcul pour les différents choix de N et Δt.

Pour les simulations des périodes de repos, qui peut aller jusqu'à 33 jours, deux pas de temps ont été utilisés : $\Delta t = 0.03$ pour les premières 30 min , et un $\Delta t = 10\,s$ pour le reste de la période du repos. Ceci correspond à des temps de calcul de l'ordre de deux heures (voir Tableau 5.8). On remarque que la simulation des périodes de repos est possible grâce aux temps de calcul réduits dus à l'utilisation des exponentielles. Au contraire, avec les éléments fractionnaires ce calcul demanderait plusieurs jours.

5.2.1 Simulations des essais en compression cyclique

On a commencé par la simulation des essais en compression cyclique décrits à la section 2.2.3. Chacun de ces essais est constitué par quatre cycles de charge et de décharge à une vitesse de chargement de 5 mm/min. Les courbes de réponse des simulations sont montrées sur la Fig. 5.8. Dans la même figure, elles sont comparées avec les courbes expérimentales présentées sur la Fig. 2.6. On remarque que le modèle viscoélastique reproduit qualitativement :

- la forme du cycle d'hystérésis,
- une baisse de la courbe de réponse à la charge avec le nombre de cycles,

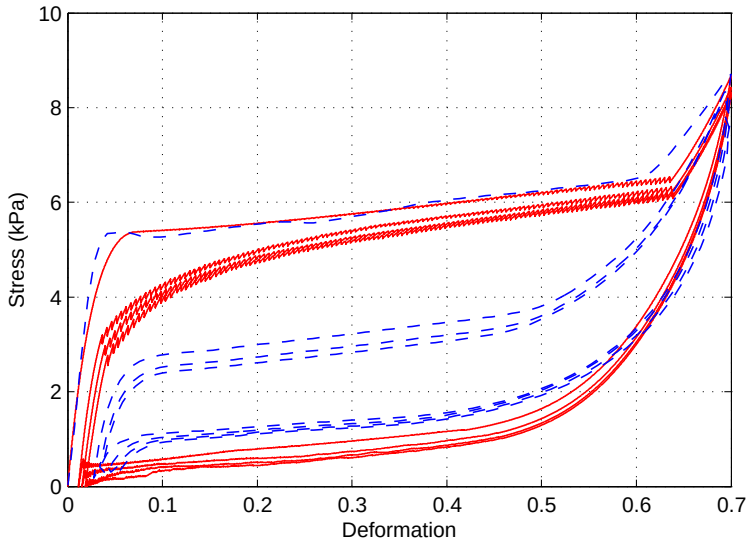


Figure 5.8 – Simulation numérique de 4 cycles de charge et de décharge à 5 mm/min (ligne pleine rouge) et courbes expérimentales (ligne en pointillé bleue).

- une transition marquée entre la première branche ascendante et le plateau dans le premier cycle, qui devient plus graduelle dans les cycles suivants,
- une indépendance substantielle au nombre de cycles de la courbe à la décharge,
- une déformation résiduelle qui augmente avec le nombre de cycles.

Mais des insuffisances importantes sont évidentes dans les simulations numériques :

– la déformation résiduelle à la fin de chaque cycle de charge et de décharge est inférieure à celle des expériences,
– la baisse de la résistance avec le nombre de cycles ("stress softening") est sous-estimée. Toutes les courbes de réponse à la charge sont proches les unes des autres pour des déformations supérieures à 0.4,
– le passage du plateau à la deuxième branche ascendante ne change pas sensiblement avec le nombre de cycles. Dans les expériences, il passe de la valeur de $\varepsilon = 0.6$ pour la première courbe de charge à la valeur de $\varepsilon = 0.5$ pour les cycles suivants.

Ces différences peuvent être attribuées à l'endommagement des arêtes des cellules lors de l'effondrement de la mousse. En effet dans la section 5.2.4, on verra que la prise en compte de l'endommagement des ressorts non linéaires permet de réduire sensiblement ces insuffisances.

5.2.2 Simulations des essais à différentes vitesses de charge

Sur la Fig. 5.9a, on montre les résultats des simulations numériques des essais à différentes vitesses de chargement décrits dans la section 2.2.5. On observe que le modèle viscoélastique décrit

- l'augmentation de la force avec la vitesse de chargement,
- une dépendance de la déformation résiduelle à la vitesse de chargement.

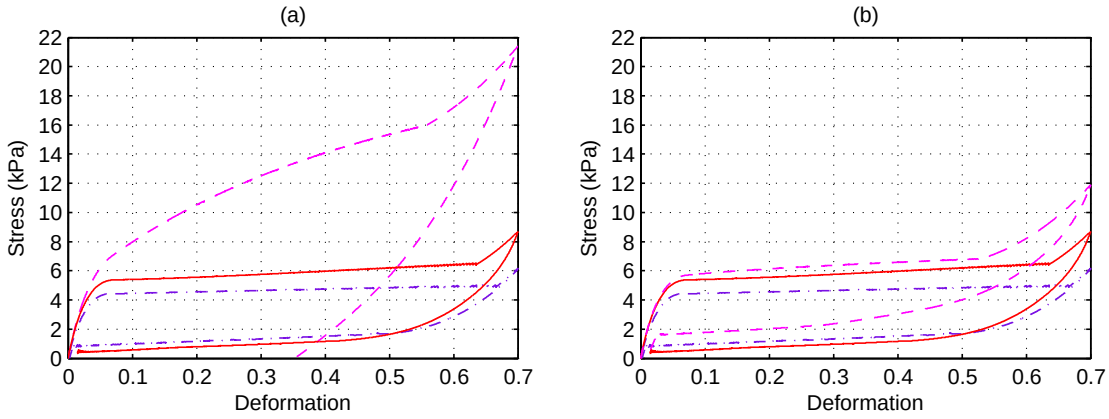


Figure 5.9 – Simulations numériques d'un cycle de charge et de décharge à différentes vitesse de chargement : 0.1 mm/min (ligne en pointillée violette), 5 mm/min (ligne pleine rouge), 100 mm/min (ligne tirets-points magenta). Pour les simulations à 0.1 mm/min et à 5 mm/min on a considéré les valeurs des paramètres visqueux reportées dans le Tableau 5.2. Pour la simulation à 100 mm/min on a pris les valeurs reportées dans le Tableau 5.2 dans (a), et les valeurs dans le Tableau 5.4 dans (b).

Si l'on compare ces résultats numériques avec l'essai expérimental décrit dans la section 2.2.5, on remarque d'importantes différences. Tout d'abord, les courbes de réponse à 100 mm/min sont très différentes. En effet, ceci était un résultat attendu. On avait déjà constaté que les paramètres visqueux identifiés sur la courbe de relaxation à 5 mm/min ne peuvent pas décrire la relaxation pour des vitesses différentes. Une viscosité non linéaire devrait être prise en compte. En effet, une reproduction plus satisfaisante des expériences à 100 mm/min peut être obtenue en considérant les valeurs des paramètres visqueux identifiés sur la courbe de relaxation à 250 mm/min, voir Fig. 5.9b. De plus, dans les simulations numériques on observe qu'aussi bien la pente que la longueur du plateau varient avec la vitesse de chargement. Au contraire dans les expériences, elles ne changent pas. La prise en compte d'une viscosité non linéaire devrait réduire également ces écarts.

5.2.3 Simulations d'ultérieurs essais en compression

Sur la Fig. 5.10 on présente les résultats des simulations numériques de cycles de charge et de décharge de petites amplitudes décrits dans la section 2.2.6. On remarque que le modèle prédit des cycles d'hystérésis de petite amplitude aussi bien à la charge qu'à la décharge. Ces cycles ne sont pas dus aux changements de phase, mais à la dissipation visqueuse. Les amplitudes des cycles sont légèrement plus petites que celles observées expérimentalement. Cette différence peut être encore une fois attribuée à la non linéarité de la viscosité et donc à la faiblesse de la fonction de relaxation choisie à décrire la contribution visqueuse pour une vitesse de charge différente de 5 mm/min.

Enfin, on considère la Fig. 5.11, où les résultats numériques sont comparés aux expériences dans le cas du processus de charge et décharge complexe décrit dans la

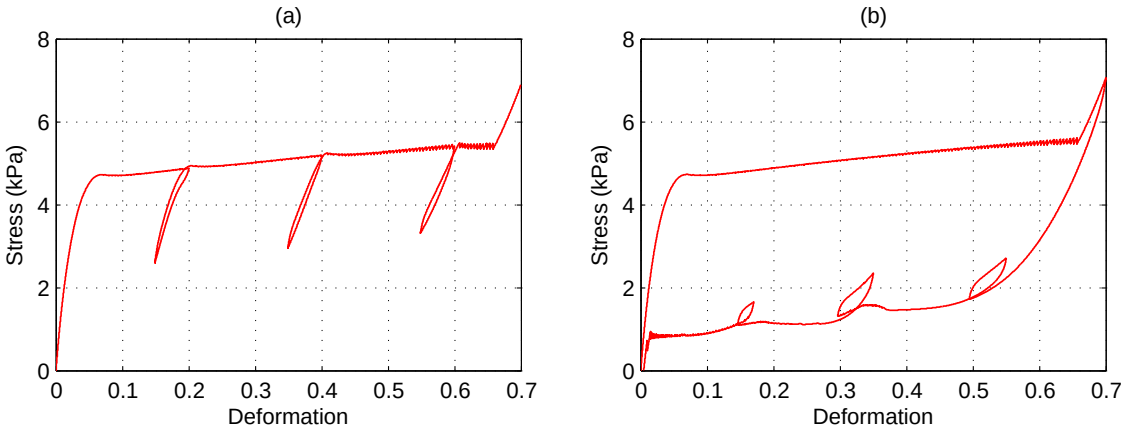


Figure 5.10 – Simulations numériques de cycles de charge et de décharge de petite amplitude sur le plateau supérieur (a) et sur le plateau inférieur (b). Vitesse de chargement 1 mm/min. Les résultats sont à comparer avec les courbes expérimentales montrées sur la Fig. 2.10a, b.

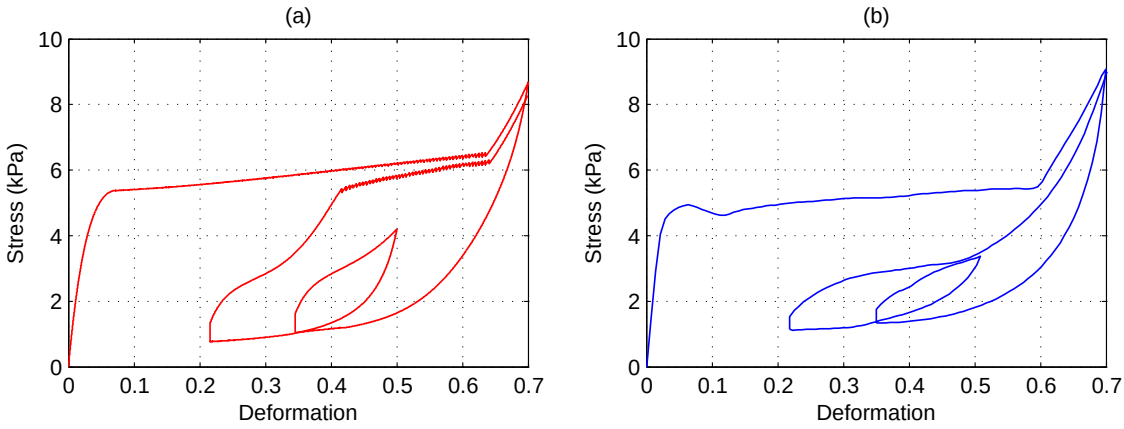


Figure 5.11 – Comparaison entre les simulations numériques (a) et les expériences (b) pour un processus de chargement complexe.

section2.2.6. Le modèle décrit qualitativement le comportement de la mousse. En particulier, il prédit le petit cycle d'hystérésis à la décharge, et les deux segments verticaux pour $\varepsilon = 0.35$ et $\varepsilon = 0.22$ qui correspondent aux deux phases de relaxation effectuées avant la recharge. Au contraire, la courbe à la recharge n'est pas bien décrite.

5.2.4 Simulations avec endommagement

On présente ici les simulations avec le modèle complet (élasticité non linéaire, viscoélasticité et endommagement) des expériences présentées dans le chapitre 2. On considère la valeur de $d = 0.5$ et les valeurs des paramètres élastiques et visqueux identifiées dans les sections précédentes.

Sur la Fig. 5.12, dans la colonne à gauche on montre les résultats des simulations

numériques pour 3 cycles de charge et décharge à différentes amplitudes. Pour faciliter la comparaison on reporte, dans la colonne à droite, les courbes expérimentales décrites dans le chapitre 2. On observe que, dans les trois cas, il y a une baisse importante de la courbe à la charge en passant du premier au deuxième cycle, et que cette baisse ne dépend pas de la valeur de déformation maximale. De plus, dans les simulations on retrouve, en accord avec les expériences, une deuxième branche ascendante lors des chargements suivant le premier.

Nous avons également simulé les essais en compression cyclique intercalés avec des périodes de repos décrits dans la section 2.2.5. Ils consistent en quatre cycles de charge et de décharge à 5 mm/min (Fig. 5.13a), qui sont répétés après des périodes de repos de durée croissante : 16 heures (Fig. 5.13b), 52 heures (Fig. 5.13c) et 33 jours (Fig. 5.13d). Les périodes de repos étant des intervalles de fluage à force zéro, dans ces intervalles la déformation résiduelle diminue, car le système tend vers la configuration à déformation moyenne nulle ($\varepsilon = 0$), qui représente la position d'équilibre. Il faut comparer les résultats avec les courbes expérimentales sur la Fig. 2.8.

Si l'on considère la réponse au premier cycle de charge après 16 heures de repos, on observe un bon accord avec les expériences. En effet, on retrouve une valeur de la force au niveau du plateau de 4 kPa et une longueur du plateau correcte. Il commence pour $\varepsilon = 0.05$ et il se termine pour une valeur de déformation de $\varepsilon = 0.55$. De plus à la fin de la première phase de charge, on atteint une valeur de la force de 8 kPa. Ce qui correspond aux résultats expérimentaux. Aux cycles suivants, les courbes à la charge s'approchent rapidement de la courbe à la charge du premier cycle. En effet pour $\varepsilon = 0.4$, dans les simulations la différence de la force entre la première et la deuxième phase de charge est d'environ 0.2 kPa, alors que dans les expériences elle est de 1 kPa. Les valeurs de la déformation résiduelle à la fin de chaque cycle de charge et de décharge sont en accord avec les expériences.

En accord avec les expériences, les courbes de réponse après 52 heures de repos coïncident avec les courbes après 16 heures. Au contraire, dans les simulations on n'observe pas le recouvrement de la force après 33 jours de repos. En effet, la différence de la déformation résiduelle après 16 heures et 33 jours est minimale, et donc la seule viscosité ne peut pas reproduire le recouvrement de la force observé après 33 jours. Pour décrire cet effet, il faudrait introduire dans le modèle un mécanisme de recouvrement de l'endommagement.

Enfin, nous avons simulé les essais complexes avec combinaisons de phases de charge, de décharge, de relaxation et de fluage décrits dans la section 2.2.6. Sur la Fig. 5.14, on montre les résultats des simulations numériques à gauche, et les courbes expérimentales à droite.

La première simulation, Fig. 5.14a, consiste en deux séries de 4 cycles de charge et de décharge à différente amplitude. Les deux séries sont intercalées par une période de repos de 25 s. On observe que le comportement dans la première série n'est décrit que qualitativement. En effet, dans les simulations les régimes pla-

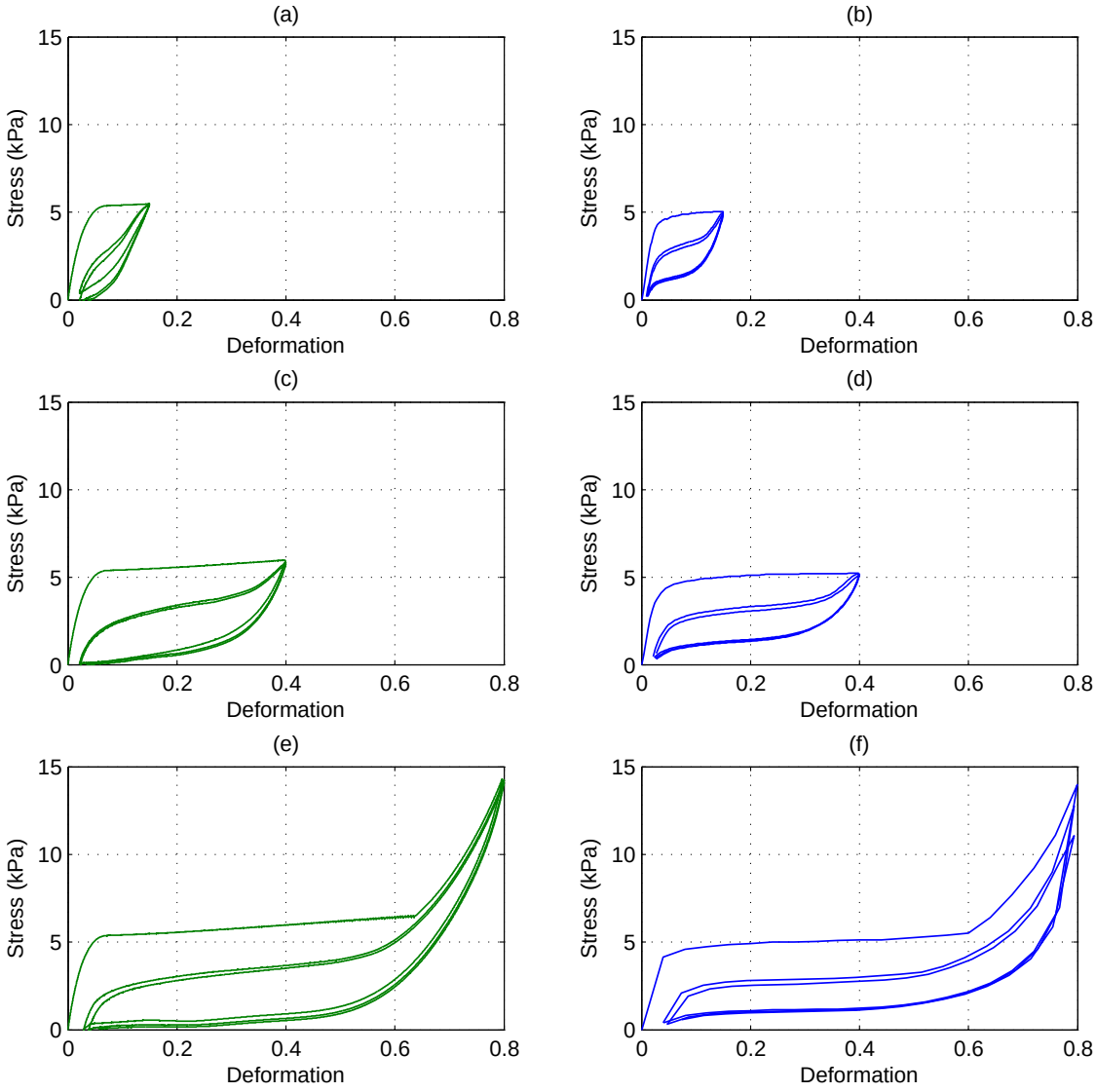


Figure 5.12 – Comparaison entre simulations numériques (a), (c), (e) et expériences (b), (d), (f) sous 3 cycles de charge et de décharge à différentes amplitudes.

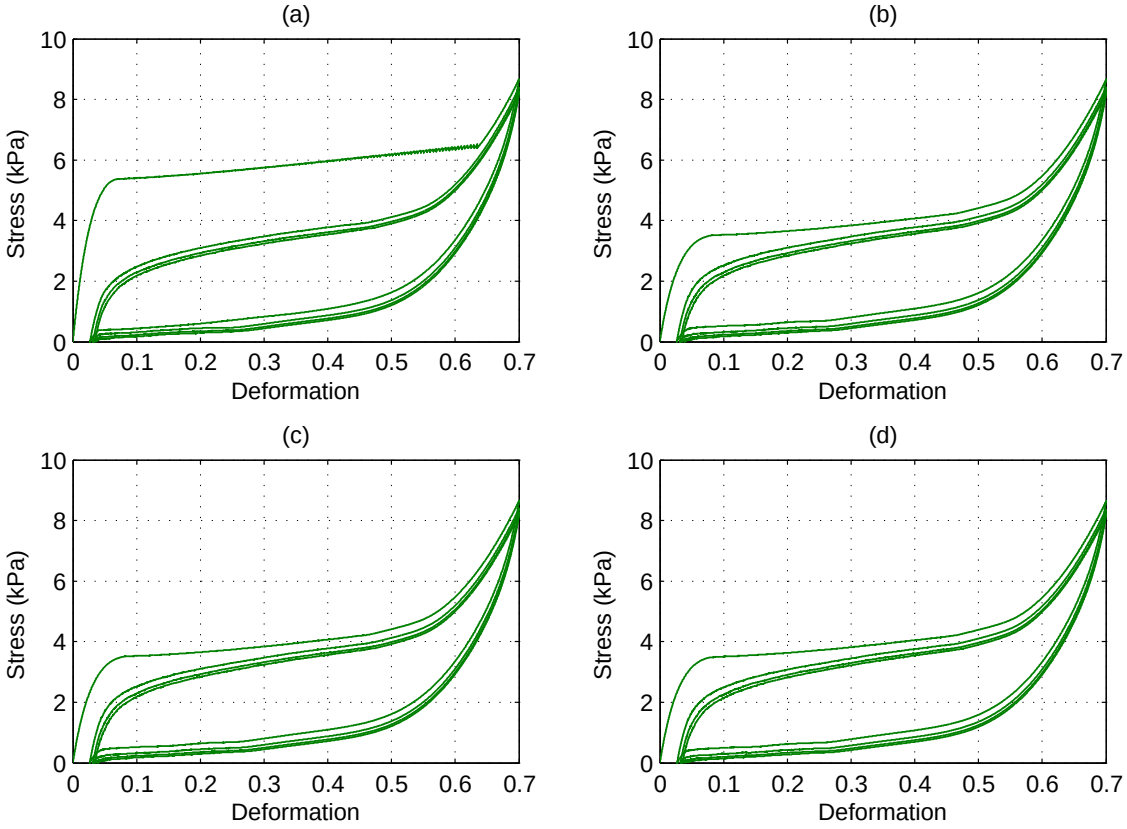


Figure 5.13 – Simulations numériques de 4 cycles de charge et de décharge sur un échantillon vierge (a), après une période de repos de 16 heures (b), de 52 heures (c) et de 33 jours. Les résultats sont à comparer avec les courbes expérimentales montrées sur la Fig. 2.8.

teau disparaissent après le premier cycle, et il y a une importante différence entre la courbe à la décharge du premier cycle et celles des cycles suivants. Dans la deuxième série de 4 cycles, on trouve une réponse qui est davantage en accord avec les expériences. La courbe à la charge au premier cycle montre deux régimes plateau pour deux différentes valeurs de la force. De plus, pour les cycles successifs on observe des petites marches pour environ $\varepsilon = 0.05$, qui montrent l'influence de la première série de cycles.

Les deux dernières simulations concernent les cycles de charge et décharge de différentes amplitudes intercalés avec des périodes de relaxation décrits dans la section 2.2.6. Les résultats, Fig. 5.14 c, e, montrent la capacité du modèle à décrire le comportement des mousses sous chargement complexes. En effet, les formes des cycles d'hystérésis soit de petites que de larges amplitudes sont reproduites. D'autres détails de la courbe expérimentale sont également décrits, comme les petits segments verticaux en correspondance des périodes de relaxation. De plus, à la fin des processus de chargement les courbes de réponse s'approchent à la première courbe de charge en accord avec les expériences.

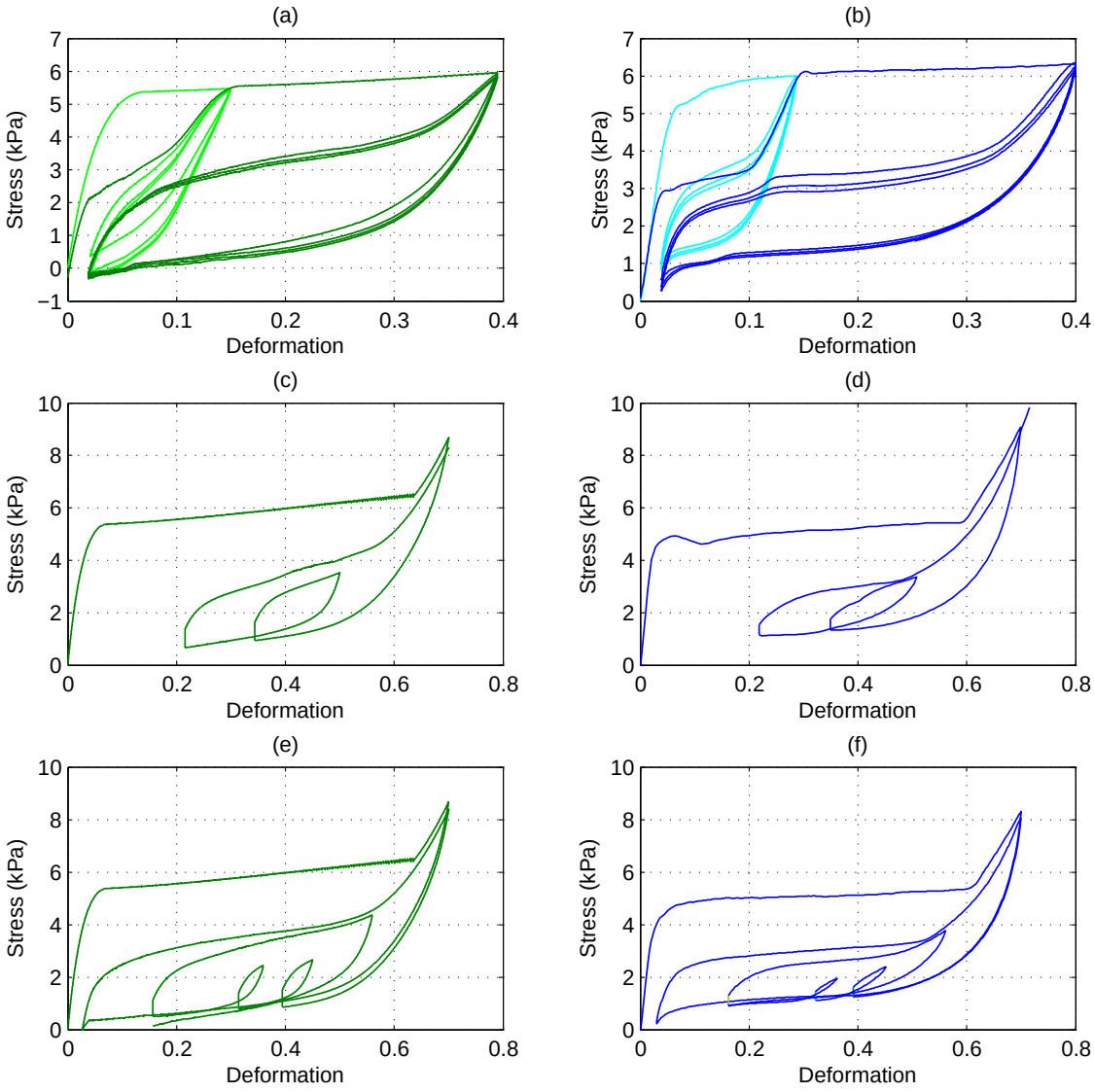


Figure 5.14 – Comparaison entre simulations numériques (a), (c), (e) et expériences (b), (d), (f) sous cycles complexes avec phases de charge, de décharge, de relaxation et de fluage.

Chapitre 6

Conclusions et Perspectives

Sommaire

6.1 Conclusions 109
6.2 Perspectives 110
6.2.1 Viscosité non linéaire 110
6.2.2 Un modèle continu 112

6.1 Conclusions

Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'étude du comportement d'une mousse polymérique à porosité ouverte sous compression cyclique. Après un premier chapitre de description générale du matériau, dans le deuxième chapitre on a présenté l'étude expérimentale effectuée au *Laboratorio di Materiali Polimerici* de l'Université de Ferrara. Cette étude a montré la complexité du comportement des mousses. En effet, les essais en compression cyclique ont mis en évidence la localisation des déformations, le cycle d'hystérésis, la diminution de résistance avec le nombre des cycles, et la dépendance de la réponse à la vitesse de chargement.

Dans le troisième chapitre on a introduit un modèle élastique, où la mousse est représentée par une chaîne de ressorts non linéaires avec une énergie de déformation non convexe. Le modèle élastique non linéaire donne une description convenable de la localisation des déformations et des cycles d'hystérésis.

Le quatrième chapitre présente une extension du modèle précédent, pour décrire les effets non élastiques. D'une part, nous avons développé un modèle viscoélastique en introduisant des éléments dissipatifs régis par une loi de comportement linéaire de type Bolzmann Volterra. Les simulations numériques ont montré le bien fondé de la prise en compte de la viscosité. D'autre part, nous avons introduit l'endommagement pour mieux décrire la diminution de la résistance de la mousse après le premier cycle de charge dans les essais en compression cyclique.

Les résultats des simulations numériques présentés dans le cinquième chapitre ont montré que le modèle viscoélastique avec endommagement permet de décrire

avec une bonne précision du comportement de la mousse considérée, y compris sous sollicitations complexes avec combinaison de phases de charge, de décharge et de repos.

On remarque que ces aspects complexes ne sont pas décrits par les modèles qu'on trouve dans la littérature. Sur ce point, on peut affirmer que cette thèse ouvre des perspectives nouvelles pour la description de ce type de matériau. En particulier, l'interprétation de la localisation des déformations comme un changement de phase provenant de la non convexité de l'énergie de déformation élastique a permis de reproduire le comportement du matériau sous cycles complexes de charge et décharge. Un autre résultat de cette étude est la reconnaissance du rôle essentiel des phénomènes visqueux parmi les effets non élastiques, tandis que celui de l'endommagement, considéré ailleurs comme fondamentale, ne constitue ici qu'une composante supplémentaire. Néanmoins, plusieurs aspects du modèle peuvent encore être améliorés. Ceci est discuté dans la section suivante, dédiée aux perspectives de développement du modèle.

6.2 Perspectives

Un des développements qu'on peut envisager pour le modèle proposé est le passage de l'unidimensionnel au tridimensionnel. Mais, dans l'état présent de la connaissance, ce type de généralisation parait extrêmement difficile, à cause des difficultés mathématiques importantes liées à la non convexité de l'énergie de déformation. En restant sur le modèle unidimensionnel, on envisage deux directions principales de développement à court terme : la prise en compte d'une viscosité non linéaire et la formulation d'un modèle continu.

6.2.1 Viscosité non linéaire

On a vu, dans le quatrième chapitre de cette thèse, que la description de la dépendance de la réponse des mousses à la vitesse de chargement demande l'introduction d'une viscosité non linéaire.

Dans la littérature, plusieurs auteurs, voir par exemple [3, 79], ont souligné la nécessité de la prise en compte de la non linéarité des effets *rate dependent* pour les polymères. Dans le modèle rhéologique proposé ici, l'introduction d'une contribution visqueuse non linéaire conduirait à remplacer des combinaisons de ressorts et d'amortisseurs par des éléments élastiques et viscoélastiques avec des lois de comportement non linéaires du type

$$\begin{aligned} \sigma &= k(\varepsilon)\,, \\ \sigma &= \eta(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \sigma)\,. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Le choix des fonctions k, η est délicat. Il n'est pas toujours évident de justifier ce choix avec des résultats expérimentaux, et donc dans la plupart des cas un choix phénoménologique est nécessaire.

Par souci de simplicité, en première approximation on pourrait supposer une loi linéaire pour les éléments élastiques, et prendre en compte seulement une non linéarité des amortisseurs. D'abord, on pourrait considérer η comme fonction seulement de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$, et prendre des lois à deux paramètres comme la loi de puissance

$$\sigma = \eta_0 \, \dot{\varepsilon}^n \,, \tag{6.2}$$

ou la loi introduite par Eyring [49] et récemment reprise par Bardella [8],

$$\sigma = \eta_0 \, \sinh^{-1} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{c} \right) \,, \tag{6.3}$$

où n, η_0 et c sont des constantes positives. Avec ces choix la viscosité η ne dépend pas de σ et ε. Si ce type de non linéarités se révèle insuffisant, on pourra utiliser des lois plus complexes, comme celles proposées pour les élastomères dans [4, 13, 68, 86, 91]. Par exemple, Boyce et Bergstron [13], sur la base d'études micromécaniques, proposent une loi du type

$$\sigma = \eta_0 \, \varepsilon^m \dot{\varepsilon}^n \,, \tag{6.4}$$

où η dépend aussi de la valeur actuelle de la déformation ε. Dans le modèle de Lion [86], la non linéarité est introduite en considérant une dépendance de η par rapport à la force σ.

Une approche intéressante pour déterminer la loi de variation de η par analyse directe des expériences a été récemment proposée par Amin et al. [4]. La technique se fonde sur l'analyse de la courbe de réponse pour un processus de chargement en escalier : phases de charge intercalées avec des phases de relaxation. Cette technique permet la séparation des contributions élastique et visqueuse. En effet, la courbe qui relie les points (σ, ε) à la fin des phases de relaxation donne une estimation de la contribution élastique, et la contribution visqueuse peut être déterminée par différence. Enfin, la répétition de la même procédure pour différentes vitesses de chargement permet d'identifier une loi de variation de η. Amin et al. [4] déterminent ainsi une loi de puissance du type

$$\eta = \eta_0 \frac{\varepsilon^\phi}{\sigma^\delta} \tag{6.5}$$

où η_0, ϕ et δ sont des constantes positives. On remarque que, contrairement aux expressions précédentes, dans (6.5) la viscosité ne dépend pas explicitement de la vitesse de déformation.

L'application de la technique de Amin et al.[4] aux mousses polymériques est plus difficile que pour les élastomères. En effet, les mousses se caractérisent par une phase finale de relaxation très lente, qui rend difficile l'identification de la contribution élastique avec un processus de charge en escaliers. Des expériences supplémentaires devraient être envisagées. En particulier, il faudrait effectuer des essais de relaxation pour différentes valeurs de la déformation maximale et à différentes vitesses de charge.

6.2.2 Un modèle continu

Un deuxième développement proposé est la formulation d'un modèle continu. Dans la formulation continue, la chaîne de ressorts est remplacée par une barre avec énergie de déformation non convexe, et les changements progressifs de phase des ressorts sont décrits comme la propagation d'un front d'onde de discontinuité des déformations. Dans la littérature, les modèles continus ont été utilisés surtout pour la description du comportement des alliages à mémoire de forme [1, 2, 7, 16, 114]. L'exposé suivant est inspiré par les travaux d'Abeyaratne et al.[2].

On considère une barre de longueur L qui occupe le domaine $(0, L)$. On dénote par σ et u respectivement la contrainte et le déplacement de la barre. L'équation du mouvement en l'absence des forces de volume est

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,, \tag{6.6}$$

où ρ est la densité de la barre dans la configuration initiale. On note v et ε respectivement la vitesse et la déformation de la barre,

$$v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,, \quad \varepsilon(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,.$$

On suppose que le déplacement u est continu, et que ses dérivées premières ε et v et sa dérivée seconde par rapport à t sont aussi continues sauf éventuellement sur un nombre fini de points de discontinuité $p = s(t)$.

On considère un processus de déformation où une vitesse $\dot{\delta}$ est imposée à une extrémité de la barre. La barre étant élastique, la dissipation serait nulle si le champ des déformations était continu [2]. Au contraire, la propagation d'une discontinuité de la déformation implique une dissipation de l'énergie. Dans l'expression de la vitesse de dissipation

$$\dot{D} = [\![\sigma\, v]\!] + [\![w]\!]\dot{s} + [\![\frac{1}{2}\rho\, v^2]\!]\dot{s} \geq 0\,, \tag{6.7}$$

w est l'énergie de déformation de la barre et $[\![g]\!]$ est le saut de g, c'est-à-dire la différence entre la valeur de la limite à droite $g(s^+(t))$ et à gauche $g(s^-(t))$. Cette relation peut être réécrite [2] sous la forme

$$f\,\dot{s} \geq 0\,, \tag{6.8}$$

où

$$f = [\![w]\!] - \frac{1}{2}[\![\sigma]\!][\![\varepsilon]\!]\,, \tag{6.9}$$

est la *driving force*, la force associée à la propagation de la discontinuité. Le problème d'évolution à résoudre est donc le suivant :

Problème *Trouver les champs de vitesses v, de déformations ε et de contraintes σ tels que :*

$$\begin{aligned}
&\sigma(\varepsilon) = w'(\varepsilon)\,, \quad \tfrac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \tfrac{\partial v}{\partial t}\,, \qquad \tfrac{\partial v}{\partial x} = \rho \tfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad \text{dans (0,L)}\backslash\{p\}\ ,\\
&\rho \dot{s}^2 = \tfrac{[\![\sigma]\!]}{[\![\varepsilon]\!]} \qquad [\![v]\!] = -\dot{s}[\![\varepsilon]\!]\,, \qquad f\dot{s} \geq 0\,, \quad \text{pour } x = p\ ,\\
&\varepsilon(x,0) = 0\,, \qquad v(x,0) = 0\,,\\
&v(0,t) = 0\,, \qquad v(L,t) = \dot{\delta} > 0\,.
\end{aligned}$$

Si l'énergie de déformation w est non convexe, le problème peut avoir plusieurs solutions. Dans ce cas, la cinétique de propagation de la discontinuité reste indéterminée. Cette difficulté peut être résolue avec l'introduction d'un critère de nucléation et d'une loi de propagation de la surface de discontinuité [1]. Le critère de nucléation donne la condition pour que la surface de discontinuité se forme, et il s'écrit comme une condition sur la *driving force*

$$f > f_{nuc} \tag{6.10}$$

où f_{nuc} est une valeur critique à déterminer expérimentalement. La loi cinétique relie la vitesse de propagation de la discontinuité s à la force conductrice f par une relation de la forme

$$f = \phi(\dot{s})\,, \tag{6.11}$$

où ϕ est un potentiel de dissipation, $\dot{s}\,\phi(\dot{s}) \geq 0$. Avec cette approche plusieurs choix pour la cinétique de propagation de la discontinuité peuvent être faits [113, 114].

En effet, des travaux récents [52, 123] montrent que la cinétique de la propagation est déterminée si l'on ajoute une dissipation visqueuse. Cela rend inutile l'introduction d'un critère de nucléation et d'une loi d'évolution de la discontinuité. Par exemple, Făciu et Mihailescu-Suliciu [52] considèrent une loi constitutive du type Maxwell

$$\dot{\sigma} - \frac{k}{\eta}(\sigma - \sigma_{eq}) = k\dot{\varepsilon}\,, \tag{6.12}$$

où k, η sont des constantes positives, et σ_{eq} est la réponse à l'équilibre. Făciu et Mihailescu-Suliciu analysent le cas où σ_{eq} est une fonction trilinéaire de ε avec une branche de pente négative. Dans ce cas, ils montrent que la transition de phase démarre lorsqu'on atteint la branche descendante de la courbe $(\sigma_{eq}, \varepsilon)$, et que l'amplitude du saut de la déformation sur la surface de discontinuité croît avec t de manière exponentielle.

Dans [123], Truskinovsky et Vainchtein montrent que le critère de nucléation et la loi de propagation peuvent être déduites de l'analyse du problème discret. Ils considèrent un modèle discret semblable à celui proposé dans ce travail de thèse : une chaîne de masses reliées par des éléments viscoélastiques. Chaque élément est constitué par un ressort non linéaire avec une énergie de déformation non convexe connecté en parallèle avec un amortisseur linéaire. Ils ajoutent des ressorts linéaires de longueur double qui relient deux masses éloignées et qui schématisent les interactions non locales, voir Fig. 6.1. Ils introduisent un paramètre adimensionnel δ,

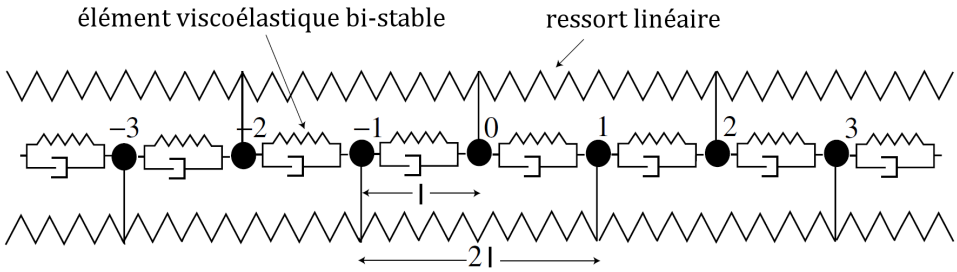


Figure 6.1 – Le modèle rhéologique étudié par Truskinovsky et Vainchtein[123]

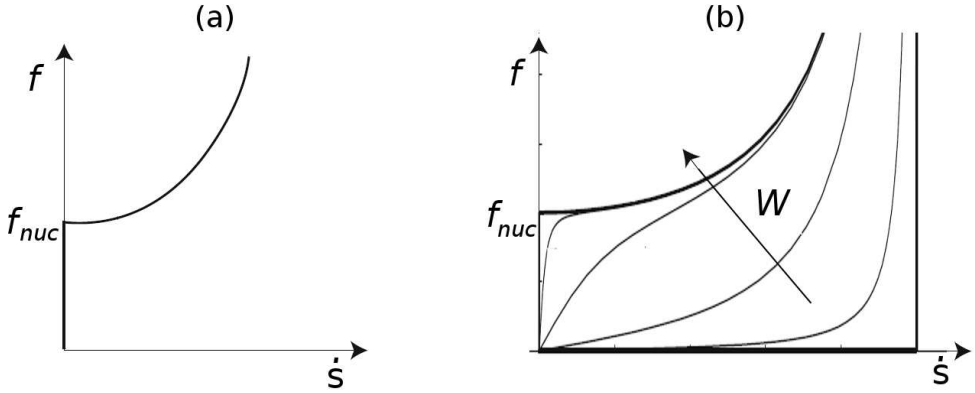


Figure 6.2 – Lois cinétiques de transition de phase pour deux approximations continues du modèle rhéologique montré sur la Fig. 6.1. (a) Approximation au premier ordre (*viscoelasticity model*). (b) Approximation au deuxième ordre (*viscosity-capillarity model*). W est un paramètre adimensionnel qui quantifie la dissipation. [123]

défini comme le rapport entre la distance initiale des masses l et la longueur totale de la chaîne L. Ils montrent que, à la limite pour $\delta \to 0$, on obtient un modèle continu avec une cinétique de transition de phase déterminée. En particulier, la relation cinétique dépend de la façon de passer à la limite. Si l'on considère δ petit mais fini, le développement au premier ordre par rapport à δ de l'équation du mouvement donne une relation cinétique avec une valeur de seuil pour la nucléation, voir Fig. 6.2. Au contraire, le développement au deuxième ordre prédit une cinétique qui dépend de la viscosité mais sans valeur de seuil, voir Fig. 6.2. Si les effets inertiels et visqueux sont importants, la relation cinétique a la même structure asymptotique dans les deux cas. Ce modèle a l'avantage d'éviter l'introduction de variables supplementaires. Une perspective intéressante serait d'appliquer l'analyse de Truskinovsky et Vainchtein à notre modèle discret.

Bibliographie

[1] Abeyaratne R. et Knowles J.K., Kinetic relations and the propagation of phase boundaries in solids. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 114 : 119−154 1991.

[2] Abeyaratne R., Bhattacharya K., Knowles J.K., Strain−Energy Functions with Multiple Local Minima : Modeling phase transformations using finite thermoelasticity *Nonlinear elasticity : theory and applications. ed. FU, Y., Ogden R.W.* Cambridge Univ. Press, 433−490, 2001.

[3] Amin A.F.M.S., Alam M.S., Okui Y., An improved hyperelasticity relation in modeling viscoelasticity response of natural and high damping rubbers in compression : experiments, parameter identification and numerical verification. *Mech. Mater.* 34 75−95, 2002.

[4] Amin A.F.M.S., Lion A., Sekita S., Okui Y., Nonlinear dependence of viscosity in modeling the rate−dependent response of natural and high damping rubbers in compression and shear : experimental identification and numerical verification *Int. J. Plasticity* 22 : 1610−1657, 2006.

[5] Ball J.M., James R.D., Fine phase mixtures as minimizers of energy, *Arch. Ration. Mech. Anal.,* 100 : 13−52, 1987.

[6] Balk A.M., Cherkaev A.V., Slepyan L.I., Dynamics of solids with non−monotone stress−strain relations. I. Model and numerical experiments. *J. Mech. Phys. Solids* 49 : 131−148, 2001.

[7] Balk A.M., Cherkaev A.V., Slepyan L.I., Dynamics of solids with non−monotone stress−strain relations. II. Nonlinear waves and waves of phase transition. *J. Mech. Phys. Solids* 49 : 149−171, 2001.

[8] Bardella L., A phenomenological constitutive law for the nonlinear viscoelastic behavior of epoxy resins in the glassy state *Eur. J. Mech. A−Solids* 20 : 907−924, 2001.

[9] Bart−Smith H., Bastawros A.F., Mumm D.R., Evans A.G., Sypeck D.J., Wadley H.N.G., Compressive deformation and yielding mechanisms in cellular Al alloys determined using X−ray tomography and surface strain mapping. *Acta Mater.* 46 : 3583−3592, 1998.

[10] Bardenhagen S.G., Brydon A.D., Guilkey J.E., Insight into the physics of foam densification via numerical simulation. *J. Mech. Phys. Solids* 53 : 597−617, 2005.

[11] Bastawros A.F., Bart−Smith H., Evans A.G., Experimental analysis of deformation mechanism in a closed−cell aluminium alloy. *J. Mech. Phys. Solids* 48 : 301−322, 2000.

[12] Beatty M.F., Krishnaswamy S., A theory of stress−softening in incompressible isotropic materials. *J. Mech. Phys. Solids* 48 : 1931−1965, 2000.

[13] Bergström J.S., Boyce M.C., Constitutive modeling of the large strain time−dependent behavior of elastomers. *J. Mech. Phys. Solids* 46 : 931−954, 1998.

[14] Bertoldi K., Boyce M.C, Deschanel S., Prange S.M., Mullin T., Mechanics of deformation−triggered pattern transformations and superelastic behavior in periodic elastomeric structures *J. Mech. Phys. Solids* 56 : 2642−2668, 2008.

[15] Besdo D., Ihlemann J., Properties of rubberlike materials under large deformations explained by self−organizing linkage patterns. *Int. J. Plasticity* 19 1001−1018, 2003.

[16] Bhattacharya K., Microstructure of Martensite − Why it forms and how it gives rise to the shape−memory effect, *Oxford University Press* Oxford, 2003.

[17] Bhattacharya K., James R.D., A theory of thin films of martensitic materials with applications to microactuators, *J. Mech. Phys. Solids* 47 : 531−576, 1999.

[18] Biot M.A., General theory of three−dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.* 12 : 155−164, 1941.

[19] Biot M.A., Theory of propagation of elastic waves in a fluid−saturated porous solid. Part I : Low frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.* 28 : 168−178, 1956.

[20] Biot M.A., Theory of finite deformations of porous solids. *Indiana Univ. Math. J.* 21 : 597−620, 1972.

[21] Bouasse H., Carriére Z., Courbes de traction du caoutchouc vulcanisé. *Ann. Fac. Sci. Toulouse* 5 : 257−283, 1903.

[22] Boukamel A., Laiarinandrasana L., Méo S., Verron E., Constitutive models for rubeer V. *Taylor I& Francis Group* London, 2008

[23] Bowen R.M., Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. *Int. J. Eng. Sci.* 20 : 697−735, 1982.

[24] Bueche F., Mullins effect and rubber−filler interaction. *J. Appl. Polymer Sci.* 15 271−281, 1961.

[25] Cardin F., Favretti M., Dynamics of a chain of springs with non convex potential energy *Math. Mech. Solids* 8 : 651−669, 2003.

[26] Cao A., Dickrell P.L., Sawyer W.G., Ghasemi−Neihad M.N., Ajayan P.M., Super−compressible foamlike carbon nanotube films *Science* 310 : 1307−1310, 2005.

[27] Charlotte M., Truskinovsky L., Linear elastic chain with a hyper−pre−stress. *J. Mech. Phys. Solids* 50 : 217−251, 2002.

[28] Christensen R.M., Mechanics of low density materials. *J. Mech. Phys. Solids* 34 : 563−578, 1986

[29] Ciarlet P.G., Mathematical elasticity. Volume 1 : Three dimensional elasticity. *North-Holland*, 1986

[30] Coussy O., Thermomechanics of saturated porous solids in finite deformation. *Eur. J. Mech. A−Solids* 8 : 1−14, 1989.

[31] Coussy O., *Mechanics of porous continua.* Wiley, 1995.

[32] D'Ambrosio P., De Tommasi D., Ferri D., Puglisi G., A phenomenological model for healing and hysteresis in rubber−like materials. *Int. J. Eng. Sci.* 46 : 293−305, 2008.

[33] Dacorogna B., Introduction to the calculus of variations *Imperial College Press* London, 2004.

[34] de Boer R., Theory of porous media : highlights in the historical development and current state *Springer− Verlag* Berlin, 2000.

[35] De Souza Neto E. A., Perič D., Owen D. R., A phenomenolocial three−dimensional rate−indipendent continuum damage model for highly filled polymers : formulation and computational aspects. *J. Mech. Phys. Solids* 42 1533−1550, 1994.

[36] De Tommasi D., Puglisi G., Saccomandi G., A micromechanics−based model for the Mullins effect. *J. Rheol.* 50 : 495−512, 2006.

[37] Del Piero G., Modelli matematici per il comportamento di materiali *Lecture notes* University of Ferrara, 2005.

[38] Del Piero G., Pampolini G., The inelastic properties of open cell polymeric foams : experiments and theoretical model *submitted to J. Mech. Phys. Solids* > 2010.

[39] Del Piero G., Truskinovsky L., Elastic bars with cohesive energy *Continuum Mech. Thermodyn.*, 21 :141−171 2009.

[40] Deng R., Davies P., Bajaj A.K., A nonlinear fractional derivative model for large uni−axial deformation behavior of polyurethane foam. *Signal Process.* 86 2728−2743, 2006.

[41] De Simone A., Marigo J.J., Teresi L., A damage mechanics approach to stress softening and its application to rubber. *Eur. J. Mech. A−Solids* 20 873−892, 2001.

[42] Deshpande V.S., Fleck N.A., Isotropic constitutive models for metallic foams. *J. Mech. Phys. Solids* 48 : 1253−1283, 2000.

[43] Diani J., Fayolle B., Gilormini P., A review on the Mullins effect. *Eur. Polym. J.* 45 : 601−612, 2009.

[44] Dorfmann A., Ogden R.W., A pseudo−elastic model for loading, partial unloading and reloading of particle−reinforced rubber. *Int. J. Solids Struct.* 40 2699−2714, 2003.

[45] Dorfmann A., Muhr A., Constitutive models for rubber. *A.A. Balkema* Rotterdam, 1999.

[46] Drozdov A.D., Dorfmann A., A micro−mechanical model for the response of filled elastomers at finite strains. *Int. J. Plasticity* 19 1037−1067, 2003.

[47] Drozdov A.D., Mullins' effect in semicrystalline polymers. *Int J. Solids Struct.* 46 : 3336−3345, 2009.

[48] Ehlers W., Markert B., A macroscopic finite strain model for cellular polymers. *Int. J. Plasticity* 19 : 961−976, 2003.

[49] Eyring H., Viscosity, plasticity and diffusion as examples of absolute reaction rates. *J. Chem. Phys.* 4 : 263−, 1936.

[50] Ericksen J.L., Equilibrium of bars. *J. Elast.* 5 : 191−−201, 1975.

[51] Făciu C., Suliciu I., A Maxwellian model for pseudoelastic materials, *Scripta Metall. Mater.* 31 : 1399−1404, 1994.

[52] Făciu C., Mihăilescu−Suliciu M., Phase nucleation and wave propagation in phase−transforming strings. A rate−type approach. *Int. J. Non−Linear Mech.* : in press, 2010

[53] Fedelich B., Zanzotto G., Hysteresis in discrete systems of possibly interacting elements with a double−well energy. *J. Nonlinear Sci.* 2 : 319−342, 1992.

[54] Garcia−Loera, A., Mélanges réactifs thermodurcissable / Additifs extractibles : phénomènes de séparation de phase et morphologies. Application aux matériaux poreux. *Thèse de doctorat de l'École doctorale Matériaux de Lyon.* Lyon, 2002.

[55] Gent A.N., Thomas A.G., Mechanics of foamed elastic materials. *Rubber Chem. Technol.* 36 : 597−610, 1963

[56] Geymonat G., Müller S., Triantafyllidis N., Homogenization of nonlinearly elastic materials, microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank−one convexity. *Arch. Ration Mech. Anal.* 122 : 231−290, 1993.

[57] Gibson L.J., Ashby M.F., The mechanics of three dimensional cellular materials. *Proc. R. Soc. Lond.* 382 : 43−59,1982.

[58] Gibson L.J., Ashby M.F., *Cellular Solids : Structure and Properties.* Cambridge University Press, second edition, 1997.

[59] Gioia G., Wang Y., Cuitiño A. M., The energetics of heterogeneous deformation in open−cell solid foams. *Proc. R. Soc. Lond. A* 457 : 1079−1096, 2001.

[60] Gong L., Kyriakides S., Jang W. Y., Compressive response of open−cell foams. Part I : Morphology and elastic properties. *Int. J. Solids Struct.* 42 : 1355−1379, 2005.

[61] Gong L., Kyriakides S., Compressive response of open−cell foams. Part II : initiation and evolution of crushing. *Int. J. Solids Struct.*, 42 : 1381−1399, 2005.

[62] Gong L., Kyriakides S., Triantafyllidis N., On the stability of Kelvin cell foams under compressive loads *J. Mech. Phys. Solids* 53 : 771−794, 2005.

[63] Gorenflo R., Mainardi F., Fractional calculus : integral and differential equations of fractional order. In : Fractals and fractional calculus in continuum mechanics, *A. Carpinteri and F. Mainardi eds, CISM Courses and Lectures*, Springer 378 : 223−276, 1997.

[64] Hanson D.E., Hawley M., Houlton R., Chitanvis K., Rae P., Orler E.B., et al. Stress softening experiments in silica−filled polydimethylsiloxane provide insight into a mechanism for the Mullins effect. *Polymer* 46 10989−10995, 2005.

[65] Hardenacke V., Hohe J., Local probabilistic homogenization of two−dimensional model foams accounting for micro structural disorder. *Int. J. Solids Struct.* 46 : 989−1006, 2009.

[66] Haupt P., Continuum Mechanics and Theory of Materials. *Springer− Verlag, Berlin,* 2000.

[67] Haupt P., Lion A., Backhaus E., On the dynamic behavior of polymers under finite strains. *Int. J. Solids Struct.* 37 : 3633−3646, 2000.

[68] Haupt P., Sedlan K., Viscoplasticity of elastomeric materials : experimental facts and constitutive modelling. *Arch. Appl. Mech.* 71 : 89−109, 2001.

[69] Heymans N., Bauwens J. C., Fractal Rheological Models and Fractional Differential Equations for Viscoelastic Behaviour. *Rheol. Acta* 33 : 210−219, 1994.

[70] Holmström K., Petersson J., A review of the parameter estimation problem of fitting positive exponential sums to empirical data *Appl. Math. Comput.* 126 : 31−61, 2002.

[71] Hooke R., Jeeves T.A., Direct search solution of numerical and statistical problems, *J. Assoc. Computing Machinery*, 8 : 212−229, 1960

[72] Houwink R., Slipping of molecules during the deformation of reinforced rubber. *Rubber Chem. Technol.* 29 : 888−893, 1956.

[73] Jang W.−Y., Kyriakides S., On the crushing of aluminum open−cell foams : Part I. Experiments *Int. J. Solids Struct.* 46 : 617 −634, 2009.

[74] Jin H., Lu W.−Y., Scheffel S., Hinnerichs T.S., Neilsen M.K., Full−field characterization of mechanical behavior of polyurethane foams *Int. J. Solids Struct.* 44 : 6930−6944, 2007.

[75] Johnson M.A., Beatty M.F., A constitutive equation for the Mullins effect in stress controlled uniaxial extension experiments. *Continuum Mech. Thermodyn.* 5 : 301 −318, 1993.

[76] Johnson M.A., Beatty, M.F., The Mullins effect in equibiaxial extension and its influence on the inflation of a balloon. *Int. J. Engng Sci.* 33 : 223 −245, 1995

[77] Ko W.L., Deformations of foamed elastomers *J. Cell. Plast.* 1 : 45−50, 1965.

[78] Koeller R.C., Applications of Fractional Calculus to the Theory of Viscoelasticity. *ASME J. of Appl. Mech.* 51 : 299−307, 1984.

[79] Krempl E., Models of viscoplasticity : some comments on equilibrium (back) stress and drag stress. *Acta Mech.* 69 : 25−42, 1987.

[80] Laiarinandrasana L., Piques R., Robisson A., Visco−hyperelastic model with internal state variable coupled with discontinuous damage concept under total Lagrangian formulation. *Int. J. Plasticity* 19 : 977−1000, 2003.

[81] Lakes R., Rosakis P., Ruina A., Microbuckling instability in elastomeric cellular solids. *J. Mater. Sci.* 28 : 4667−4672, 1993.

[82] Laraba−Abbes F., Ienny P., Piques R., A new Taylor−made methodology for the mechanical behavior analysis of rubber−like materials : II. Application to the hyperelastic behavior characterization of a carbon−black filled natural rubber vulcanizate. *Polymer* 44 : 821−840, 2003.

[83] Laroussi M., Modélisation du comportement des mousses solides à porosité ouverte : une approche micromécanique. *Thèse de doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées*. Champs−sur−Marne, 2002.

[84] Li K., Gao X.L., Subhash G., Effects of cell shape and strut cross−sectional area variations on the elastic properties of three−dimensional open−cell foams. *J. Mech. Phys. Solids* 54 : 783−806, 2006.

[85] Li J., Mayau D., Lagarrigue V., A constitutive model dealing with damage due to cavity growth and the Mullins effect in rubber−like materials under triaxial loading. *J. Mech. Phys. Solids* 56 : 953−973, 2008.

[86] Lion A., A constitutive model for carbon black filled rubber. Experimental investigations and mathematical representations. *Continuum Mech. Thermodyn.* 8 : 153−169, 1996.

[87] Lion A., On the thermodynamics of fractional damping elements. *Continuum Mech. Thermodyn.* 9 : 83−96, 1997.

[88] Marzano S., Piccioni M.D., Puglisi G., Un modello di isteresi per fili di leghe a memoria di forma. *Proc. 16th AIMETA National Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, 2003.

[89] Masso Moreu Y., Mills N.J., Rapid hydrostatic compression of low−density polymeric foams *Polym. Test* 23 : 313−322, 2004.

[90] Michel J.C., Lopez−Pamies O., Ponte Castañeda P., Triantafyllidis N., Microscopic and macroscopic instabilities in finitely strained porous elastomers *J. Mech. Phys. Solids* 44 : 900−938, 2007.

[91] Miehe C., Keck J., Superimposed finite elastic−viscoelastic−plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. Experiments, modelling and algorithmic implementation. *J. Mech. Phys. Solids* 48 : 323−365, 2000.

[92] Miehe C., Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden type large−strain elastic materials. *Eur. J. Mech. A−Solids* 14 : 697−720, 1995.

[93] Mills N.J., Polymer foams handbook. Engineering and biomechanics applications and design guide *Butterworth−Heinemann*, 2007.

[94] Müller I., Villaggio P., A model for an elastic−plastic body. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 65 : 25−−46, 1977.

[95] Müller I., Xu H., On the pseudo−elastic hysteresis. *Acta Metall. Mater.* 39 : 263−271, 1991.

[96] Müller S., Singular perturbation as a selection criterion fer periodic minimizing sequences. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* 1 : 169−204, 1993.

[97] Mullins L., Effect of stretching on the properties of rubber. *Rubber Chem. Technol.* 21 : 281−300, 1948.

[98] Mullins L., Softening of rubber by deformation. *Rubber Chem. Technol.* 42 : 339−362, 1969.

[99] Mullins L., Tobin N.R., Theoretical model for the elastic behavior of filler−reinforced vulcanized rubbers. *Rubber Chem. Technol.* 30 : 555−571, 1957.

[100] Ogden R.W., *Non−Linear Elastic Deformations*. Dover Publications, New York, 1997.

[101] Ogden R.W., Roxburg D.G., A pseudo−elastic model for the Mullins effect in filled rubber *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 455 : 2861−2877, 1999.

[102] Oldham K.B., Spanier J., The fractional calculus : theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. *Academic Press London*, 1974.

[103] Pampolini G., Del Piero G., Strain localization in open−cell polyurethane foams : experiments and theoretical model. *J. Mech. Mater. Struct.* 3 : 969−981, 2008.

[104] Pampolini G., Raous M., Non linear elasticiy, viscosity and damage for polymeric foams *in preparation* > 2010.

[105] Patel M.R., Finnie I., Structural features and mechanical properties of rigid cellular plastics *J. Mater.* 5 : 909−932, 1970.

[106] Puglisi G., Hysteresis in multi−stable lattices with non−local interactions. *J. Mech. Phys. Solids* 54 : 2060−2088, 2006.

[107] Puglisi G., Truskinovsky L., Mechanics of a discrete chain with bi−stable elements. *J. Mech. Phys. Solids* 48 : 1−27, 2000.

[108] Qi H.J., Boyce M.C., Constitutive model for stretch−induced softening of the stress−stretch behavior of elastomeric materials. *J. Mech. Phys. Solids* 52 : 2187−2205, 2004.

[109] Raous M., Détermination du module d'Young opérationnel d'un corps viscoélastique à partir de sa courbe de relaxation *Rheologica Acta*, 13 1233−1237, 1974

[110] Roberts A.P., Garboczi E.J., Elastic properties of model random three−dimensional open−cell solids. *J. Mech. Phys. Solids* 50 : 33−55, 2002.

[111] Romero P.A., Zheng S.F., Cuitiño A.M., Modeling the dynamic response of visco−elastic open−cell foams *J. Mech. Phys. Solids* 56 : 1916−1943, 2008.

[112] Rogers R., Truskinovsky L., Discretization and hysteresis. *Physica B* 233 : 370−375, 1997.

[113] Rosakis P., An Equal Area Rule for Dissipative Kinetics of Propagating Strain Discontinuities. *SIAM J. Appl. Math.* 55 : 100−123, 1995.

[114] Rosakis P., Knowles J.K., Unstable kinetic relations and the dynamics of solid−solid phase transitions. *J. Mech. Phys. Solids* 45 : 2055−2081, 1997.

[115] Schraad M.W., Harlow F.H., A stochastic constitutive model for disordered cellular materials : Finite−strain uni−axial compression. *Int. J. Solids Struct.* 43 : 3542−3568, 2006.

[116] Slepyan L.I., Dynamic factor in impact phase transition and fracture. *J. Mech. Phys. Solids* 48 : 927−960, 2000.

[117] Sullivan R.M., Ghosn L.J., Lerch B.A., A general tetrakaidecahedron model for open−celled foams. *Int. J. Solids Struct.* 45 : 1754−1765, 2008.

[118] Takahashi, Y., Okumura, D., Ohno N., Yield and buckling behavior of Kelvin open−cell foams subjected to uniaxial compression. *Int. J. Solids Struct.* 52 : 377−385, 2010.

[119] Thomson W. (Lord Kelvin), On the division of space with minimum partitional area. *Phil. Mag.* 24, 503−514, 1887.

[120] Triantafyllidis N., Schraad M.W., Onset of failure in aluminum honeycombs under general in−plane loading. *J. Mech. Phys. Solids* 46 : 1089−1124, 1998.

[121] Truesdell C., Rational Thermodynamics, *Springer Verlag*, Berlin 1984.

[122] Truskinovsky L., Vainchtein A., Kinetics of martensitic phase transitions lattice models. *SIAM J. Appl. Math.* 2 : 533−553, 2005.

[123] Truskinovsky L., Vainchtein A., Dynamics of martensitic phase boundaries : discreteness, dissipation and inertia. *Continuum Mech. Thermodyn.* 20 : 97−122, 2008.

[124] Truskinovsky L., Zanzotto G., Ericksen's bar revisited : energy wiggles *J. Mech. Phys. Solids* 44 : 1371−1408, 1996.

[125] Van Der Burg M.W.D., Shulmeister V., Van Der Geissen E., Marissen R., On the linear elastic properties of regular and random open−cell foam models. *J. Cell Plast.* 33 : 31−54, 1997.

[126] Viot P., Beani F., Lataillade J.L., Polymeic foam behavior under dynamic compressive loading *J. Mater. Sci.* 40 : 5829−5837, 2005.

[127] Viot P., Iordanoff I., Bernard D., Multiscale description of polymeric foam behavior : a new approach based on discrete element modeling. *Polym. Sci.* 50 : 679−689, 2008.

[128] Wang Y., Cuitiño A.M., Full−field measurements of heterogeneous deformation patterns on polymeric foams using digital image correlation. *Int. J. Solids Struct.* 39 : 3777−3796, 2002.

[129] Warren W.E., Kraynik. A. M., The non linear elastic properties of open−cell foams. *ASME J. Appl. Mech.* 58 : 376−381, 1991.

[130] Warren W.E., Kraynik. A. M., Linear elastic behavior of a low−density Kelvin foam with open cells. *ASME J. Appl. Mech.* 64 : 787−793, 1997.

[131] Zhang J., Ashby M.F., Theoretical studies on isotropic foams. *Cambridge University Engineering Department report n.4*, 1989.

[132] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., The Finite Element Method, fifth ed. volume 2 : Solid Mechanics *Butterworth−Heinemann*, Oxford, 2000.

[133] Zhu H.X., Mills N.J., Knott J.F., Analysis of the high strain compression of open−cell foams. *J. Mech. Phys. Solids* 45 : 1875−1904, 1997.