Création de bases de données fines par simulation directe pour les effets de la turbulence sur les transferts thermiques pariétaux

Cédric Flageul

▶ **To cite this version:**

Cédric Flageul. Création de bases de données fines par simulation directe pour les effets de la turbulence sur les transferts thermiques pariétaux. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Poitiers, 2015. Français. NNT : . tel-01321596

HAL Id: tel-01321596
https://hal.science/tel-01321596

Submitted on 26 May 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et Ingénierie en Matériaux, Mécanique, Energétique et Aéronautique

Secteur de Recherche : Mécanique des milieux fluides

Présentée par

Cédric Flageul

le 29 octobre 2015

Création de bases de données fines par simulation directe pour les effets de la turbulence sur les transferts thermiques pariétaux

Directeur de thèse	:	**Pr. Éric Lamballais**
Co-directeur de thèse	:	**Pr. Dominique Laurence**
Co-encadrant de thèse	:	**Dr. Sofiane Benhamadouche**

Jury :

Pr. Christophe Corre, École centrale de Lyon (LMFA)	*Président*
Pr. Frédéric Ducros, CEA Grenoble	*Rapporteur*
Pr. Éric Serre, CNRS (M2P2 - Marseille)	*Rapporteur*
Dr. Sylvain Laizet, Imperial College London	Examinateur
Pr. Éric Lamballais, Université de Poitiers (Institut P')	Examinateur
Pr. Dominique Laurence, The University of Manchester	Examinateur
Dr. Sofiane Benhamadouche, EDF R&D	Examinateur

Remerciements

En premier lieu, je souhaite remercier l'ensemble des membres du jury. Messieurs Frédéric Ducros et Éric Serre pour avoir accepté le rôle de rapporteurs de ce mémoire. Messieurs Christophe Corre, Sylvain Laizet, Éric Lamballais, Dominique Laurence et Sofiane Benhamadouche pour avoir avoir accepté le rôle d'examinateurs.

Je tiens à remercier vivement et chaleureusement mon directeur de thèse M. Éric Lamballais, en particulier pour sa haute disponibilité en dépit de la distance physique qui nous séparait. Son expertise, l'attention qu'il a portée à mes travaux et les conseils affutés qu'il a prodigués tout au long de ces années ont considérablement enrichi cette thèse. Un grand monsieur, aux sens propre et figuré. Merci.

Un très grand merci à M. Dominique Laurence, co-directeur de cette thèse qui a catalysé son lancement et qui m'a permis d'étudier à la prestigieuse Université de Manchester. Un très grand merci également à M. Sofiane Benhamadouche, co-encadrant de cette thèse qui a partagé son super bureau avec moi. Je vous remercie pour les nombreuses discussions scientifiques qui ont considérablement enrichi mes travaux. Merci pour votre curiosité scientifique et votre ouverture d'esprit, pour m'avoir insufflé une partie de la passion qui vous habite et m'avoir initié aux arcanes de la turbulence. Merci pour l'accueil chaleureux qui m'a été réservé.

Cette thèse s'est déroulée au sein du groupe I83 dans le département MFEE de EDF R&D. Je tiens donc à remercier l'ensemble du groupe I83. Je pense en particulier à M. Frédéric Archambeau qui dirigeait le groupe et qui m'a accordé sa confiance. Je pense également à M. David Monfort qui dirige le groupe en ce moment et qui m'a permis de présenter mes travaux lors de conférences internationales. Je remercie le projet Durée De Vie qui a financé cette thèse CIFRE et le ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche qui l'a subventionnée. Je remercie également EDF R&D pour m'avoir donné accès à des calculateurs de rang mondial.

Un grand merci également à M. Sylvain Laizet qui a fortement contribué au développement du code de calcul que j'ai utilisé dans ma thèse et qui a toujours été disponible pour répondre à mes sollicitations.

Je souhaite également bonne chance aux thésards du groupe I83 pour leurs travaux. Xavier, Jean-François, Pierre et Benjamin (par ordre de soutenance), ne vous inquiétez pas, le pire est à venir. Je remercie également Augustin, arrivé récemment dans le bureau, pour sa contribution non-négligeable à la bonne humeur ambiante.

Je remercie également M. Zhao Wu pour l'aide qu'il m'a apporté, pour nos échanges fructueux, pour m'avoir communiqué des publications datant de 1974 (en russe !) et pour avoir étendu mes travaux à une configuration semi-académique.

Plus personnellement, je tiens à remercier mes parents sans qui je ne serais pas là. Papa, Maman, merci pour pour tout ce que nous avons partagé et pour les voyages que

nous fîmes, voyages qui ont stimulé, chez moi, une certaine curiosité et expliquent mes pérégrinations.

Je tiens également à saluer chaleureusement ma sœur et mon frère ainsi que l'ensemble de mes cousins, tontons, tatas : mes complices de longue date. Robert, toi qui a officiellement intégré notre famille récemment, je t'adresse également mes salutations chaleureuses.

Un méga merci à la déglingue, ses expéditions mémorables, sa magie qu'on laisse opérer, sa capacité à embobiner les magiciens, ses coefficients multiplicateurs, ... Ahmed, Émile, Emine, John, Jules, Kevin, Lucas, Samuel, Wahb, ce paragraphe est pour vous.

Un grand merci également à l'équipe de Maisons-Alfort, en particulier à Alizée, Damien, Étienne, Raph et William. On ne résume pas toutes ces années en quelques mots. Je vous remercie donc simplement.

Je tiens également à remercier Emine et Maïlys, mes colocataires, pour avoir transformé un banal appartement en un véritable havre de paix, d'amour et de chaos.

En guise de conclusion, je remercie vivement Jacky & Ben-J pour leur conseil inspiré : *on fait le bilan, calmement ...*

À partir du moment où il n'y a pas de parrêsia, alors les hommes, les citoyens, tout le monde est voué à la folie du maître. Et à ce moment-là, rien n'est plus douloureux que d'être obligé d'être fou avec les fous.

Michel Foucault

Le gouvernement de soi et des autres.

Cours au Collège de France. 1982-1983

Table des matières

1 Introduction **8**
- 1.1 Motivations . . . 8
- 1.2 Objectifs . . . 9
  - 1.2.1 Besoins . . . 9
  - 1.2.2 Données disponibles . . . 11
  - 1.2.3 Principaux développements . . . 13
  - 1.2.4 Notion de coefficient d'échange . . . 14

2 Méthodes numériques **16**
- 2.1 Équations résolues . . . 16
  - 2.1.1 Quantité de mouvement . . . 16
  - 2.1.2 Scalaire passif . . . 17
  - 2.1.3 Transfert thermique conjugué . . . 17
- 2.2 Discrétisation spatiale . . . 18
  - 2.2.1 Schémas compacts . . . 19
  - 2.2.2 Méthode spectrale pour le solide . . . 21
- 2.3 Discrétisation temporelle . . . 22
  - 2.3.1 Prédiction-correction . . . 23
  - 2.3.2 Semi-implicitation du terme diffusif . . . 23
  - 2.3.3 Couplage thermique fluide-solide . . . 26
- 2.4 Calcul de la pression . . . 27
  - 2.4.1 Champ de pression décalé . . . 27
  - 2.4.2 Transformée en cosinus décalés . . . 28
  - 2.4.3 Résolution spectrale de l'équation de Poisson . . . 29
  - 2.4.4 Compatibilité avec une grille inhomogène . . . 29
- 2.5 Architecture parallèle du code . . . 30

3 Vérification et validation **32**
- 3.1 Solutions analytiques . . . 32
  - 3.1.1 Diffusion dans le fluide . . . 32
  - 3.1.2 Diffusion dans le solide . . . 34
  - 3.1.3 Tourbillons de Taylor-Green . . . 35
  - 3.1.4 Cavité entrainée (Burgraff) . . . 36
- 3.2 Dynamique du canal plan . . . 38
  - 3.2.1 Présentation du cas . . . 38
  - 3.2.2 Mise en données . . . 39
  - 3.2.3 Grandeurs moyennes . . . 42
  - 3.2.4 Moments d'ordre 2 . . . 42
  - 3.2.5 Bilans des tensions de Reynolds . . . 44
  - 3.2.6 Bilan de la dissipation turbulente . . . 45
  - 3.2.7 Impact des points fantômes . . . 46

4 Canal plan turbulent avec transport d'un scalaire passif et transfert thermique conjugué **49**
4.1 Transport du scalaire . . . 49
4.1.1 Milieu fluide . . . 49
4.1.2 Milieu solide . . . 52
4.1.3 Impact de la condition à la limite . . . 52
4.1.4 Analyse de l'interface fluide-solide . . . 54
4.1.5 Analyse de la thermique solide . . . 54
4.2 Condition à la limite de type Dirichlet / Neumann / Robin . . . 57
4.2.1 Mise en données . . . 58
4.2.2 Validation . . . 58
4.2.3 Résultats . . . 62
4.3 Transfert thermique conjugué . . . 72
4.3.1 Mise en données . . . 72
4.3.2 Propriétés thermiques fluide-solide identiques . . . 78
4.3.3 Propriétés thermiques fluide-solide différentes . . . 86

5 Conclusions et perspectives **100**

Bibliographie **103**

A Bilans des moments d'ordre 1 et 2 **108**

B Optimisation sous contrainte (Script R) **111**

C Solution semi-analytique pour la diffusion fluide sur maillage étiré **113**

D Transfert thermique conjugué avec thermique solide $1D$ **114**

E Formulations du terme convectif du scalaire **116**

F Communication in 10^{th} Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements **121**

G Publication in International Journal of Heat and Fluid Flow (SI) **129**

H Communication in 8^{th} Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer **141**

Chapitre 1

Introduction

Le cœur de mes travaux concerne le transfert thermique turbulent. La première section de cette introduction contient une brève définition de la turbulence et du transfert thermique ainsi que les motivations qui sous-tendent nos travaux. La seconde section présente les objectifs de notre étude.

1.1 Motivations

La turbulence désigne l'état d'un fluide, liquide ou gaz, tel que, en tout point $\boldsymbol{x}$ *et à tout instant* t*, la vitesse* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ *présente un caractère tourbillonnaire ; mais à la différence du tourbillon qui se forme dans la baignoire lorsqu'elle se vide, ici, la taille, la localisation et l'orientation des tourbillons changent constamment. Ce caractère changeant rend impossible une prédiction détaillée de* $\boldsymbol{u}$ *et fait du régime turbulent un phénomène aléatoire.* Extrait du *Dictionnaire des sciences*, Flammarion, Paris, 1997 que l'on trouve en introduction de l'ouvrage *Turbulence* rédigé par Christophe Bailly et Geneviève Comte-Bellot [3].

Le caractère turbulent des écoulements atmosphériques fait ainsi partie des éléments qui rendent impossible une prédiction fiable du temps qu'il fera dans un mois.

Dans l'industrie, on utilise souvent un fluide (caloporteur) pour transporter la chaleur entre une source chaude et une source froide. Si le régime est turbulent il est parfois difficile de prédire le transfert thermique au niveau des sources. D'un point de vue industriel, prédire précisément le transfert thermique turbulent est crucial pour l'efficacité et la sûreté des installations. Un des outils de choix pour estimer les grandeurs turbulentes (vitesse, température, ...) est la simulation numérique.

Dans un écoulement turbulent, on trouve des tourbillons grands et petits. Résoudre toutes les échelles rencontrées demande une puissance de calcul élevée. Si elles sont toutes résolues, on qualifie la simulation de DNS (Direct Numerical Simulation). On accorde aujourd'hui autant de crédit aux DNS qu'aux expériences physiques. Ainsi, Vukoslavčević et al. [74] ont utilisé la DNS pour concevoir des capteurs (destinés aux expériences physiques) moins intrusifs.

Pour les écoulements complexes, le coût de calcul est prohibitif et on a recours à des modèles pour « simplifier » le problème. Les modèles de type RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) se limitent au champ moyen et demandent une puissance de calcul plus réduite. Les modèles de type LES (*Large Eddy Simulation*) prennent en compte les plus grands tourbillons ainsi qu'une partie de ceux de taille moindre pour un coût de calcul intermédiaire. Pour valider ces modèles, on a besoin de données de référence précises. C'est ce qui motive les présents travaux.

1.2 Objectifs

Pour produire des données de référence précises, on va effectuer des simulations de type DNS. Pour ce faire, on utilise le code de calcul Incompact3d, développé à l'Université de Poitiers et à l'Imperial College de Londres par S. Lardeau et al. [45] puis par S. Laizet et al. [41], [42], qui est sous licence libre (GNU GPL v3).

1.2.1 Besoins

Dans cette sous-section, on commence par présenter les équations qui régissent un écoulement (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie). Dans un second temps, on exprime une partie des équations que doivent résoudre les modèles de turbulence de type RANS et LES. On pourra ainsi identifier les grandeurs que l'on doit extraire de la DNS pour valider ces modèles.

Équations de Navier-Stokes. Les lois qui régissent la physique sont générales et ne varient pas lorsque l'on se déplace. L'invariance de ces lois lors d'un déplacement spatial et temporel est, d'après le théroème de Noether, équivalente à la conservation de la masse et de la quantité de mouvement (Emmy Noether [57]). On présente ici les équations qui traduisent mathématiquement ces principes de conservation. On adopte une description eulérienne du fluide. On suppose que les propriétés de ce dernier (masse volumique ρ, viscosité dynamique μ, conductivité thermique λ, capacité thermique C_p) sont constantes. On suppose également que l'écoulement est incompressible et que le fluide est newtonien.

Conservation de la masse. Soit $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ la vitesse du fluide à la position $\boldsymbol{x}$ et à l'instant t. On note u_i la composante du vecteur vitesse selon la direction i. L'équation de conservation de la masse, souvent nommée équation de continuité s'écrit alors :

$$\partial_i u_i = \partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z = 0 \tag{1.1}$$

Conservation de la quantité de mouvement. La quantité de mouvement dans la direction i est ρu_i et son équation de conservation, en l'absence de forces extérieures, est :

$$\rho \left[\partial_t u_i + \partial_j \left(u_i u_j\right)\right] = -\partial_i p + \mu \partial_{jj} u_i \tag{1.2}$$

Le terme $\rho \partial_t u_i$ représente la variation temporelle de la quantité de mouvement, $\rho \partial_j \left(u_i u_j\right)$ la convection, $\partial_i p$ le gradient de pression et $\mu \partial_{jj} u_i$ la contrainte visqueuse. On remarquera que le terme convectif est non-linéaire et qu'il couple entre elles les différentes composantes du vecteur vitesse. Il est bien connu que l'équation (1.2) peut avoir un comportement chaotique lié à cette non-linéarité.

Conservation d'un scalaire passif. Un écoulement peut transporter de la chaleur ou des composés chimiques. Par exemple, la circulation thermohaline des océans est liée aux écarts de température et de salinité. L'équation de conservation d'un scalaire passif est similaire à l'équation (1.2). Par exemple, pour la température statique dérivée de l'enthalpie, on aura :

$$\rho C_p \left[\partial_t T + \partial_j \left(T u_j\right)\right] = \lambda \partial_{jj} T \tag{1.3}$$

L'équation (1.3) fait intervenir un terme convectif et un terme diffusif mais pas le gradient de pression. En outre, par rapport à la température T, le terme convectif dans l'équation (1.3) est linéaire. D'un point de vue théorique, cette différence est fondamentale. D'un point de vue pratique, résoudre l'équation (1.3) est simple comparé à l'équation (1.2) soumise à la condition d'incompressibilité (1.1).

La pression en incompressible. On peut combiner la divergence de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.2) et l'équation de continuité (1.1) pour obtenir l'équation de Poisson satisfaite par la pression :

$$\partial_{jj} p = -\rho \partial_j u_i \partial_i u_j \tag{1.4}$$

Cette équation est elliptique. Cela implique une non-localité de la pression : une modification du gradient de vitesse localisée impacte le champ de pression partout. Physiquement, cela correspond à une vitesse de propagation du son infinie. En pratique, cette non-localité rend le calcul de la pression difficile pour les codes de calcul dédiés aux écoulements incompressibles. Dans nos simulations, le calcul de la pression se fait avec un solveur direct (voir section 2.4) et représente au maximum 30% du temps de calcul. Les solveurs itératifs utilisés dans certains codes peuvent converger lentement et consommer la majeure partie du temps de calcul.

Opérateur de Reynolds. L'opérateur de Reynolds discuté ici a été introduit par Osbourne Reynolds en 1895 [63]. On suppose ici que l'écoulement est turbulent mais *statistiquement* stationnaire. On décompose la vitesse en une partie moyenne et une partie fluctuante :

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{x}, t) = \overline{\mathbf{u}}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{u}'(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.5}$$

La partie moyenne est $\overline{\mathbf{u}}$ et la partie fluctuante $\mathbf{u}'$. L'action de cet opérateur (linéaire) sur un produit fait apparaître un terme croisé :

$$\overline{ab} = \overline{a}\ \overline{b} + \overline{a'b'} \tag{1.6}$$

Le terme convectif étant un produit, l'action de l'opérateur de Reynolds sur ce dernier amène un terme croisé, comme on va le voir ci-dessous dans notre introduction aux modèles de type RANS et LES. Pour des raisons de clarté, on se limitera à l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Le terme convectif présent dans l'équation (1.3) de conservation du scalaire amène également un terme croisé qu'il faut modéliser.

Modèles de type RANS. On applique la décomposition de Reynolds à l'équation de conservation de la quantité de mouvement. On en déduit une équation pour la conservation de la quantité de mouvement moyennée :

$$\rho \partial_t \overline{u_i} + \rho \partial_j \left(\overline{u_i}\ \overline{u_j} + \overline{u_i' u_j'} \right) = -\partial_i \overline{p} + \mu \partial_{jj} \overline{u_i} \tag{1.7}$$

Le terme croisé $\overline{u_i' u_j'}$ est le tenseur de Reynolds. On le notera R_{ij} dans la suite. Ce tenseur contient de nombreuses informations. D'une part, il permet d'estimer l'amplitude des fluctuations pour chaque composante de la vitesse. D'autre part, il permet de mesurer la corrélation entre ses parties fluctuantes. Ainsi, l'énergie cinétique turbulente k est la demi-trace de ce tenseur : $k = \frac{1}{2} R_{ii}$. C'est l'énergie cinétique moyenne contenue dans les fluctuations de vitesse. Elle vérifie l'équation de transport :

$$\begin{aligned}
\partial_t k + \partial_i \left(k \overline{u_i} \right) &= -\frac{1}{\rho} \partial_i \left(\overline{u_i' p'} \right) \text{ : Corrélation vitesse/pression} \\
&- R_{ij} \partial_j \overline{u_i} \text{ : Production} \\
&- \frac{1}{2} \partial_i \left(\overline{u_i' u_j' u_j'} \right) \text{ : Transport turbulent} \\
&- \frac{\mu}{\rho} \overline{\partial_j u_i' \partial_j u_i'} \text{ : Dissipation } (\varepsilon) \\
&+ \frac{\mu}{\rho} \partial_{ii} k \text{ : Diffusion visqueuse}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Les modèles RANS avec fermeture du premier ordre de type $k - \varepsilon$ tentent de résoudre cette équation. Les quantités disponibles sont : $\overline{u_i}$, $\overline{p}$, k et ε. Le rôle du modèle est donc

d'utiliser ce qui est connu pour estimer ce qui ne l'est pas : le tenseur de Reynolds (sa partie anisotrope), la corrélation vitesse-pression et le transport turbulent. Tout comme k, la variable ε est soumise à une équation de transport contenant des termes qui doivent être modélisés.

Les équations de bilan qui régissent l'évolution des tensions de Reynolds, des flux thermiques turbulents et de la variance de la température sont dans l'annexe A. On y trouve également les équations de bilan pour les différentes dissipations $(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{iT}, \varepsilon_{TT})$. Notre objectif, c'est d'avoir une estimation de tous les termes à modéliser avec la DNS.

Modèles de type LES. Dans une simulation de type LES, les tourbillons les plus petits sont modélisés. La vitesse résolue $(\overline{u_i})$ est obtenue en appliquant à la vitesse réelle (u_i) un filtre G :

$$\overline{u_i}\,(x,t) = \int\int u_i\,(x-x', t-t')\,G(x',t')\mathrm{d}x'\mathrm{d}t' \tag{1.9}$$

Pour des raisons de clarté et de simplicité, on suppose que le fitre G est homogène. Dans un tel cas de figure, le filtre G préserve les constantes, est linéaire et commute avec les dérivées. On applique le filtre à l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho\partial_t\overline{u_i} + \rho\partial_j\left(\overline{u_i}\;\overline{u_j}\right) = -\partial_i\left(\overline{p}\right) + \mu\partial_{jj}\overline{u_i} - \rho\partial_j\tau_{ij}^R \text{ avec } \tau_{ij}^R = \overline{u_iu_j} - \overline{u_i}\;\overline{u_j} \tag{1.10}$$

L'action du filtre G sur le terme convectif amène un terme croisé (τ_{ij}^R) qu'il faut modéliser. Il est nommé contrainte résiduelle car il est lié aux petites structures qui ne sont pas résolues. Un calcul de type LES permet d'obtenir *a posteriori* des grandeurs moyennes similaires à celles évoquées dans la validation des modèles de type RANS. Pour valider des résultats LES, on peut donc utiliser les données de validation destinées au RANS. On peut également utiliser des données beaucoup plus fines. En effet, l'opérateur de Reynolds utilisé en RANS limite la description de l'écoulement aux champs moyens et oblitère ainsi une grande quantité d'information. Théoriquement, toute cette information est accessible avec une DNS et partiellement avec une LES.

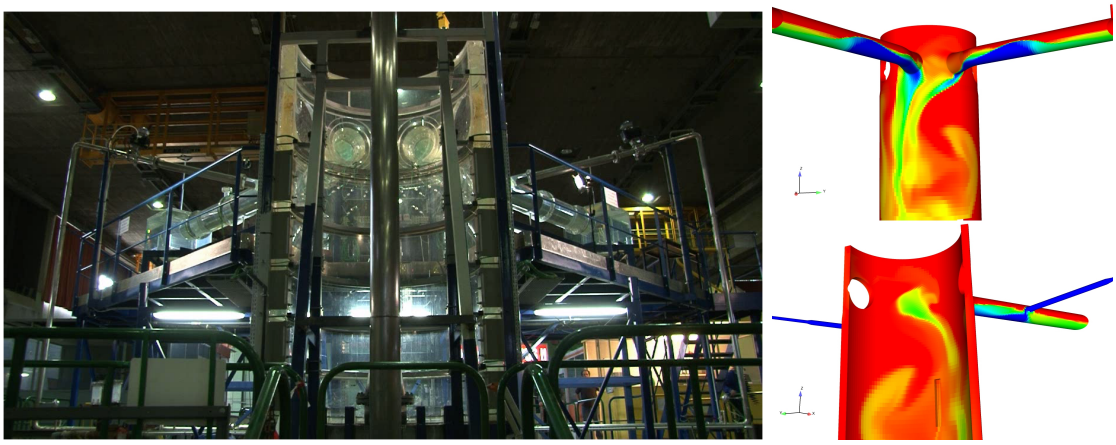
Intérêts industriels. Pour l'industriel qu'est EDF, la motivation fondamentale derrière le financement de mes travaux est la validation des modèles RANS avancés en thermique. Cette thèse s'inscrit donc dans un axe de recherche clair : construire des modèles RANS avancés pour améliorer la prédiction des échanges thermiques. Parmis les jalons amonts sur cet axe, citons la thèse de M. Frédéric Dehoux sur la modélisation numérique RANS des flux thermiques turbulents [13]. Le jalon aval le plus proche étant la thèse (en cours) de M. Jean-François Wald sur les modèles de turbulence RANS du second ordre.

De nombreuses problématiques critiques pourraient bénéficier d'une meilleure prédiction de la variance de la température à la paroi. Ainsi, en cas de choc froid (injection d'eau froide dans la cuve chaude), la cuve en métal est soumise à de fortes contraintes thermiques. Les prédire avec précision, c'est améliorer la connaissance de la durée de vie d'une tranche. Plus généralement, ce sont les problèmes de fatigue thermique (tés de mélange) qui pourraient bénéficier de telles avancées en modélisation.

1.2.2 Données disponibles

Les premières simulations de type DNS d'un écoulement turbulent comportant une paroi datent de la fin des années 80. Parmis les pionniers, citons Kim et al. [36] et Kuroda et al. [38]. La modélisation de la turbulence a commencé bien avant, les données de référence étaient alors issues d'installations expérimentales. Pour les écoulements fortement turbulents dans des géométries complexes, les nombres de Reynolds sont très élevés. L'expérience est donc toujours utilisée pour obtenir des données de référence. On trouve ainsi de nombreuses installations expérimentales dans les départements de recherche et développement de EDF. La figure 1.1 présente la maquette Hibiscus que l'on trouvait à

Chatou : c'est une demi-cuve de réacteur à l'échelle 1/2, utilisée entre autres pour étudier le choc froid.



(a) Installation expérimentale (b) Simulation RANS

FIGURE 1.1 – Demi-cuve de réacteur à l'échelle 1/2. (a) : Maquette expérimentale Hibiscus présente sur le site de Chatou. (b) : Simulation RANS d'une injection froide dans la cuve. Propriété de EDF-R&D

Des simulations de type « LES » ont été effectuées par Loginov et al. ([51], [52] et [50]) pour ce type d'écoulements. L'approche DNS pour ce problème représente actuellement un coût de calcul prohibitif. Cependant, au cours des dernières décennies, la puissance de calcul a considérablement augmenté. Si cette tendance se confirme, des écoulements de plus en plus complexes seront accessibles par DNS.

La plupart des DNS que l'on trouve dans la littérature s'appliquent à des écoulements turbulents dans des géométries relativement simples (académiques ou semi-académiques). Prenons le cas canonique du canal plan turbulent. On trouve de nombreuses bases de données pour ce type d'écoulement :

- Les résultats de Mansour et al. [55] sont disponibles à l'adresse `http://turbulence.ices.utexas.edu/data/MKM/`. Les quantités disponibles sont : la moyenne de la vitesse et de la pression, les tensions de Reynolds, la variance de la vorticité et de la pression, la corrélation vitesse-pression, les bilans des tensions de Reynolds ainsi que le bilan de la dissipation associée à l'énergie cinétique turbulente. On trouve également des spectres et des lois de probabilité.
- Les résultats de Lee et al. [46] sont accessibles à l'adresse `http://turbulence.ices.utexas.edu/channel2014/content/`. On trouve dans cette base de données : la moyenne de la vitesse et de la pression, les tensions de Reynolds, la variance de la vorticité et de la pression, la corrélation vitesse-pression ainsi que les bilans des tensions de Reynolds. La publication contient également des densité d'énergie spectrale qui pourraient être ajoutées ultérieurement à la base de données.
- Les résultats de Hoyas et al. [27] sont accessibles à l'adresse `http://torroja.dmt.upm.es/channels/data/`. On trouve dans cette base de données les mêmes grandeurs statistiques, ainsi que des spectres bidimensionnels. On trouve également quelques champs instantanés de vitesse au format binaire.
- Les résultats de Lee et al. [47] sont accessibles à l'adresse `http://turbulence.pha.jhu.edu/datasets.htm`. Les statistiques disponibles sont : la moyenne de la vitesse et de la pression, les tensions de Reynolds, la variance de la pression et la corrélation vitesse-pression. On trouve également des spectres unidimensionnels. Toute la simulation est accessible (Li et al. [49]), ce qui représente un volume de données colossal (1,6 milliards de points en espace, 2 000 champs instantanés contenant les 3 composantes de la vitesse et la pression : 12 885 milliards de valeurs soit environ 51 To en simple précision).

— Les résultats de Vreman et Kuerten [73] sont disponibles à l'adresse `http://www.vremanresearch.nl/channel.html`. Les statistiques disponibles sont : la moyenne de la vitesse et de la pression, les tensions de Reynolds, la variance de la pression. On trouve également les bilans des tensions de Reynolds diagonales et des corrélations sur les fluctuations de vitesse / pression jusqu'à l'ordre 4, ainsi que des spectres pour la vitesse et la pression.
— Les nombreux travaux de l'équipe du Pr. Kawamura sont disponibles à l'adresse `http://murasun.me.noda.tus.ac.jp/turbulence/index.html`. On trouve les statistiques habituelles liées à la vitesse et à la pression. On trouve également des statistiques sur la thermique : température moyenne, flux thermiques turbulents, variance de la température, bilans des flux thermiques turbulents, de la variance de la température et les bilans de la dissipation associée. On trouve également des corrélations spatio-temporelles sur le flux de température normal à la paroi et la loi de probabilité associée.
— Les nombreux travaux de l'équipe du Pr. Kasagi à l'université de Tokyo sont disponibles à l'adresse `http://thtlab.jp/`. On y trouve les grandeurs statistiques habituelles. On trouve également des statistiques sur la thermique : température moyenne, flux thermiques turbulents, variance de la température. On trouve également les bilans des flux thermiques turbulents, de la variance de la température et de la dissipation associée.

Globalement, il y a des grandeurs que l'on trouve dans toutes ces bases de données : vitesse moyenne, tensions de Reynolds. Il n'y a de la thermique que dans 2 des 6 bases de données évoquées. Dans les simulations « flux imposé uniforme » effectuées par les équipes japonaises, la température est imposée à la paroi (condition à la limite de type Dirichlet). Les travaux de Tiselj et al. ([67], [69]) ont étendu ces simulations aux conditions aux limites de type Neumann et aux cas avec transfert thermique conjugué fluide-solide. Bien que les simulations de l'équipe du professeur Tiselj soient de type DNS, il n'en a pas extrait les bilans qui permettent de valider les modèles de type RANS.

1.2.3 Principaux développements

Notre objectif principal est donc de produire ces bilans thermiques. Le corollaire de cet objectif est la compréhension du transfert thermique turbulent à proximité de la paroi. C'est le cœur du chapitre 4, section 4.1. La section 4.2 analyse en détail l'impact de la condition à la limite appliquée à la température sur les statistiques. La section 4.3 est dédiée au transfert thermique conjugué fluide-solide. Ce chapitre met en évidence les différences fondamentales qu'apporte la prise en compte du couplage thermique fluide-solide, d'un point de vue théorique et pratique.

Au niveau matériel, EDF R&D possède de puissants calculateurs. Les machines Ivanoé et Zumbrota sont équipées respectivement de 16 320 et 65 536 cœurs. En novembre 2014, ils figuraient toujours dans le TOP500 (`http://www.top500.org/`) à la position 394 et 73 respectivement. Au niveau logiciel, le code de calcul Incompact3d est adapté aux machines massivement parallèles (Laizet et al. [42]), on a donc pu utiliser efficacement la puissance de calcul disponible. Pour produire les données recherchées, de nombreux développements ont été effectués dans le code :

— Le code n'avait jamais été utilisé pour calculer des bilans. On a donc développé des routines pour obtenir tous les termes des bilans. Si on compte les bilans des tensions de Reynolds, des flux thermiques turbulents, de la variance de la température et le bilan de la dissipation associée à chacun de ses bilans, cela représente 342 termes.
— Bien que le code comporte des routines pour résoudre l'équation de transport thermique, rien n'était prévu pour imposer une condition à la limite générique sur la température. On a intégré ces développements dans la version semi-implicite du schéma d'avancement temporel.
— Le code ne comportait pas de module dédié à la thermique solide ni au couplage

thermique fluide-solide. On a donc développé un module dédié.
La majorité de ces développements est présentée dans le chapitre 2, le chapitre 3 étant dédié à leur validation.

1.2.4 Notion de coefficient d'échange

L'analyse bibliographique montre que dans le cas du canal plan turbulent, on trouve des simulations avec transfert thermique conjugué et des simulations sans transfert thermique conjugué avec une température (Dirichlet) ou un flux (Neumann) imposé à la paroi. Il n'y a donc aucune trace de simulations de type DNS pour un canal plan turbulent avec une condition à la limite de type Robin sur le scalaire. Or, dans de nombreuses applications industrielles, les études utilisent un coefficient d'échange pour simuler le transfert de chaleur, ce dernier pouvant être assimilé à une condition à la limite de type Robin. La digression sur le coefficient d'échange qui suit est inspirée, d'une part, par des échanges avec C. Peniguel et I. Rupp. Ils sont responsables du développement du code de calcul Syrthes. Ce dernier permet de simuler les transferts de chaleur par conduction et rayonnement. Elle est inspirée, d'autre part, par l'ouvrage rédigé par Arpaci et Larsen nommé *Convection Heat Transfer* [2].

Définition. On considère un solide d'épaisseur e et de conductivité thermique λ_s. On suppose que les 2 faces du solide sont maintenues à des températures différentes (écart ΔT). Le flux thermique par unité de surface ϕ qui traverse le solide sera alors :

$$\phi = \frac{\lambda_s}{e}\Delta T \tag{1.11}$$

Dans le cas d'une couche-limite laminaire soumise à un gradient de température perpendiculaire aux lignes de courant, le transfert thermique se fait uniquement par diffusion, comme dans un solide. On va noter ΔT l'écart de température entre le haut de la couche-limite et la paroi. On peut alors définir le coefficient d'échange h par analogie :

$$h = \frac{\phi}{\Delta T} \tag{1.12}$$

Il existe des tables permettant de calculer h sur certaines configurations. Ainsi, pour un écoulement pleinement développé à haut Reynolds ($Re > 10\ 000$) dans une conduite cylindrique de diamètre D, la formule de Colburn permet d'estimer le coefficient d'échange :

$$h = \frac{\lambda}{D} 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.33} \tag{1.13}$$

Avec λ la conductivité thermique du fluide, Re le nombre de Reynolds et Pr le nombre de Prandtl. De nombreux paramètres peuvent influer sur la valeur du coefficient d'échange : la flottabilité, les changements de phase, la rugosité de la paroi, ...

Nombres de Nusselt et Biot. On peut lier le coefficient d'échange h aux nombres de Nusselt (Nu) de de Biot (Bi). On suppose que le fluide (resp. solide) a une conductivité thermique λ (resp. λ_s) et que pour ce dernier on a une distance caractéristique l (resp. l_s). On a alors

$$h = Nu\frac{\lambda}{l} = Bi\frac{\lambda_s}{l_s} \tag{1.14}$$

La notion de coefficient d'échange est ainsi très générale. On peut l'appliquer à des problèmes de convection fluide et à des problèmes de diffusion solide. Elle est d'ailleurs souvent utilisée pour transformer un problème thermique avec couplage fluide-solide en un problème thermique sans couplage avec prise en compte d'un seul domaine.

Lien avec les conditions aux limites de type Robin. On considère une condition à la limite de type Robin :

$$aT + b\partial_y T = c \tag{1.15}$$

Par rapport aux coefficients a, b et c, la relation est homogène. On peut donc imposer $b = -\lambda$ sans perte de généralité. On obtient ainsi :

$$\phi = aT - c \tag{1.16}$$

Exprimer la relation (1.16) sous la forme d'un coefficient d'échange revient à faire un double choix :

$$a = h \text{ et } c = \frac{T_{ref}}{h} \Longrightarrow \phi = h\left(T - T_{ref}\right) = h\Delta T \tag{1.17}$$

Lorsque l'on définit un coefficient d'échange, on a donc 2 degrés de liberté et il est important de préciser quelle est la température de référence T_{ref} (sa valeur ou l'endroit où elle est prise). Dans le cas de la formule de Colburn (1.13), la température de référence T_{ref} est prise au centre de la conduite.

Ainsi, on peut simuler un écoulement turbulent sans prendre en compte le couplage thermique fluide-solide. Le coefficient d'échange permettra alors de modéliser simplement le transfert de chaleur à travers le solide.

L'analyse théorique développée dans la sous-section 4.1.3 montre l'impact qu'a le coefficient d'échange sur les fluctuations de température à la paroi. Elle montre également que l'on peut construire une condition à la limite de type Robin en s'appuyant sur les fluctuations de température et de flux à la paroi. Cette analyse est originale car, comme on l'a vu ci-dessus, la définition du coefficient d'échange h s'appuie en général sur l'écart de température ΔT et sur le flux ϕ qui sont des grandeurs moyennes. À travers nos travaux, on tentera donc de faire le lien entre les simulations fines de type DNS et la modélisation du transfert thermique conjugué turbulent.

En pratique. Lors d'une étude industrielle typique, la géométrie est complexe et il n'existe pas de table permettant d'obtenir le coefficient d'échange. Il est alors fréquent de déterminer le coefficient d'échange de manière qualitative. C'est la responsabilité des ingénieurs et des chercheurs que de comprendre et simplifier les problèmes complexes. À travers nos travaux, on tentera d'améliorer la compréhension du transfert thermique turbulent.

Chapitre 2

Méthodes numériques

Le code de calcul que nous utilisons est Incompact3d. Le code source est accessible publiquement à l'adresse `https://code.google.com/p/incompact3d/`. Il est écrit en Fortran, est multi-plaforme et adapté aux calculateurs massivement parallèles (Laizet et al. [42]). Les composantes de la vitesse et le scalaire sont colocalisés tandis que la pression est décalée.

Les équations continues discrétisées dans le code sont celles d'un écoulement incompressibles, telles qu'exprimées dans la section 2.1. Les dérivées spatiales sont discrétisées avec des schémas aux différences finies. Ces schémas compacts (ou schémas hermitiens) d'ordre élevé (6) sont décrits dans la section 2.2. L'avancement temporel repose sur un schéma classique de prédiction-correction qui est détaillé dans la section 2.3. Pour le calcul de la pression, le code utilise un solveur spectral non-itératif que l'on présente succintement dans la section 2.4. On conclura ce chapitre dédié aux méthodes numériques avec la présentation de l'architecture parallèle du code dans la section 2.5.

2.1 Équations résolues

Les équation résolues par le code diffèrent sensiblement de celles vues en introduction. D'une part, car elles sont discrétisées. D'autre part car elles sont adimensionnées : elles ne font plus apparaître la masse volumique ρ, la viscosité dynamique μ, la capacité thermique C_p ou la conductivité thermique λ. On ne s'attardera pas sur ce point : l'application de l'analyse dimensionnelle aux équations de Navier-Stokes figure dans tout bon manuel de mécanique des fluides (Pope [61]).

Dans cette section on présente les équations continues. Leur discrétisation spatiale et temporelle est discutée dans les 2 sections suivantes.

2.1.1 Quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement fait intervenir le nombre de Reynolds Re. Ce nombre adimensionnel permet de mesurer l'influence relative des effets visqueux et convectifs. Lorsque le nombre de Reynolds est faible, l'écoulement est dominé par les effets visqueux. Lorsqu'il est élevé, c'est la convection qui domine. Le nombre de Reynolds fait partie des paramètres que l'on donne au code en amont du calcul. L'équation de conservation de la quantité de mouvement est :

$$\partial_t u_i = -\partial_j \left(u_i u_j\right) - \partial_i p + \frac{1}{Re}\partial_{jj} u_i \tag{2.1}$$

On peut faire correspondre exactement l'équation (2.1) avec l'équation (1.2) en supposant que $\rho = 1$ et $\mu = \frac{1}{Re}$. Notons que le terme convectif peut être reformulé en utilisant la condition d'incompressibilité :

$$\partial_j u_j = 0 \Rightarrow \partial_j \left(u_i u_j\right) = u_j \partial_j u_i \tag{2.2}$$

La formulation du terme convectif utilisée dans nos simulations est souvent qualifiée d'*antisymétrique* (*skew-symetric* en anglais) :

$$\partial_t u_i = -\frac{\partial_j \left(u_i u_j\right) + u_j \partial_j u_i}{2} - \partial_i p + \frac{1}{Re} \partial_{jj} u_i \tag{2.3}$$

Dans sa thèse, S. Laizet [40] mentionne également ce choix en faisant référence aux travaux de S. Lardeau [44] ainsi qu'à ceux de Kravchenko et Moin [37]. Cette formulation a l'avantage de minimiser les erreurs de calcul du terme convectif qui est non-linéaire (cf Kravchenko et al. [37] et Blaisdell et al. [6]). Ce type d'erreur que l'on qualifie parfois de *repliement de spectre* (*aliasing* en anglais) impacte surtout les petites échelles.

Par ailleurs, dans certaines configurations, des forces volumiques extérieures s'exercent sur le fluide. L'équation (2.3) est alors complétée par un terme source dans le membre de droite.

Bien entendu, l'équation d'évolution (2.3) est valide partout dans le domaine. Lorsque l'on atteint son bord, on doit la compléter par une condition à la limite. Si le bord est une paroi solide, la vitesse du fluide est égale à celle de la paroi. On peut également avoir une condition de glissement libre au bord. La composante normale de la vitesse à la paroi est alors impaire, les 2 composantes tangentes étant paires.

2.1.2 Scalaire passif

L'équation de conservation du scalaire fait intervenir le nombre de Reynolds Re et le nombre de Prandtl Pr. Lorsque le nombre de Prandtl est faible, les structures thermiques sont plus grandes que les structures dynamiques. Inversement, un nombre de Prandtl élevé amène des structures thermiques plus petites. L'équation de conservation du scalaire utilisée dans nos calculs est :

$$\partial_t T = -\partial_j \left(T u_j\right) + \frac{1}{Re\ Pr} \partial_{jj} T \tag{2.4}$$

Au bord du domaine, la condition à la limite qui s'applique sur le scalaire est à la discrétion de l'utilisateur. En cas de glissement libre, le scalaire peut être pair ou impair. En présence d'une paroi, on peut imposer la valeur du scalaire (Dirichlet), de sa dérivée normale (Neumann) ou une combinaison linéaire des 2 (Robin).

2.1.3 Transfert thermique conjugué

Lorsque l'on fait du transfert thermique conjugué, on a deux domaines distincts : le domaine fluide que l'on va noter Ω et le domaine solide que l'on va noter Ω_s. L'interface entre le fluide et le solide est notée $\partial\Omega \cap \partial\Omega_s$. On adopte une notation similaire pour la température : on la note T dans le fluide et T_s dans le solide. La prise en compte du couplage thermique fluide-solide fait intervenir 2 nombres adimensionnels (Monod et al. [56], Tiselj et al. [68]) : G_1 qui est le ratio des diffusivités thermiques et G_2 qui est le ratio des conductivités thermiques. Le système d'équations régissant la température est alors :

$$\begin{aligned}
\partial_t T &= -\partial_j \left(T u_j\right) + \frac{1}{Re\ Pr} \partial_{jj} T \text{ dans } \Omega \\
\partial_t T_s &= \frac{1}{G_1\ Re\ Pr} \partial_{jj} T_s \text{ dans } \Omega_s \\
T &= T_s \text{ à l'interface } \partial\Omega \cap \partial\Omega_s \\
\partial_n T &= G_2 \partial_n T_s \text{ à l'interface } \partial\Omega \cap \partial\Omega_s
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Remarquons tout d'abord que les 2 dernières équations correspondent à des contraintes physiques naturelles. La première impose la continuité de la température à l'interface entre le fluide et le solide. La seconde impose la continuité du flux normal à l'interface, ce qui correspond physiquement à la conservation de l'énergie.

Le nombre adimensionnel G_1 représente le ratio des diffusivités thermiques : $G_1 = \frac{\lambda \rho_s C_{p_s}}{\lambda_s \rho C_p}$. On peut également le représenter comme le ratio des temps caractéristiques thermiques des domaines fluide et solide : $G_1 \propto \frac{\tau_s}{\tau}$. Dans le cas d'un réacteur à eau pressurisée, on a $G_1 \approx 10^{-3}$. Imaginons un champ de température qui produit une diffusion unitaire dans le fluide. Si ce champ de température était dans le solide, il produirait une diffusion 1 000 fois plus grande, ce qui induirait une violente variation temporelle de la temérature dans le solide. Ainsi, lorsque $\tau_s \ll \tau$, le solide va diffuser rapidement, ce qui va régulariser le champ de température T_s. À l'inverse, lorsque $\tau_s \gg \tau$, le solide va diffuser lentement, les fluctuations de température en provenance du fluide vont donc pénétrer lentement dans le solide.

Le second nombre adimensionnel G_2 représente le ratio des conductivités thermiques : $G_2 = \frac{\lambda_s}{\lambda}$. D'une part, on peut le représenter comme un rapport d'échelles spatiales car il connecte entre elles des dérivées spatiales. Il nous semble bien plus pertinent de voir G_2 comme un ratio de flux lié à la conservation de l'énergie : un écart de 1 degré dans le fluide n'est pas équivalent à un écart de 1 degré dans le solide (écart sur une distance donnée).

Dans le cas d'un problème unidimensionnel, le système (2.5) est

$$\begin{aligned}
\partial_t T &= -\partial_j \left(T u_j\right) + \frac{1}{Re\ Pr} \partial_{yy} T \text{ en } y > 0 \\
\partial_t T_s &= \frac{1}{G_1\ Re\ Pr} \partial_{yy} T_s \text{ en } y < 0 \\
T &= T_s \text{ en } y = 0 \\
\partial_n T &= G_2 \partial_n T_s \text{ en } y = 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Pour ce cas $1D$, un changement de variable permet de combiner les paramètres G_1 et G_2. Dans le solide, on pose $y_s = y\sqrt{G_1}$. Suite à ce changement de variable, on a la même diffusivité thermique dans le fluide et le solide. Le système (2.6) devient alors

$$\begin{aligned}
\partial_t T &= -\partial_j \left(T u_j\right) + \frac{1}{Re\ Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \text{ en } y > 0 \\
\partial_t T_s &= \frac{1}{Re\ Pr} \frac{\partial^2 T_s}{\partial {y_s}^2} \text{ en } y < 0 \\
T &= T_s \text{ en } y = 0 \\
\frac{\partial T}{\partial y} &= G_2 \sqrt{G_1} \frac{\partial T_s}{\partial y_s} \text{ en } y = 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Les paramètres G_1 et G_2 se combinent alors pour former le ratio d'activité thermique K :

$$K = \frac{1}{G_2 \sqrt{G_1}} = \sqrt{\frac{\lambda \rho C_p}{\lambda_s \rho_s C_{p_s}}} \tag{2.8}$$

Cette construction permet de simplifier le problème lorsque l'on s'attaque analytiquement à des cas académiques (Pozzi et al. [62]). Qualitativement, cette construction est valide lorsque, dans le solide, la diffusion tangente à l'interface est négligeable par rapport à la diffusion normale. On montre dans l'annexe D que pour notre cas qui est statistiquement homogène dans les directions tangentes à la paroi, négliger la diffusion tangente dans le solide impacte la variance de la température dans le fluide à proximité de la paroi. Dans notre étude, on conservera donc 2 paramètres pour décrire le transfert thermique conjugué, la construction (2.7) n'étant pas valide.

2.2 Discrétisation spatiale

Les équations continues de conservation de la quantité de mouvement et du scalaire font intervenir des dérivées spatiales. En pratique, on en résout une version discrétisée qui s'appuie sur la méthode des différences finies, le domaine étant représenté par une grille cartésienne.

2.2.1 Schémas compacts

La parenté des schémas compacts est attribuée à Vichnevetsky et Bowles [72] mais ce sont les travaux de Lele [48] qui sont les plus cités pour leur mise en œuvre en mécanique des fluides. On dresse ici un portrait succint de ces schémas et invitons le lecteur curieux à consulter l'article de Lele [48].

Dérivée première

On considère une grille homogène dont le pas est Δx et on note x_i la valeur discrète de la coordonnée x : $x_i = (i-1)\Delta x$ avec $1 \leq i \leq n_x$. On connaît la valeur de la fonction $f(x)$ aux points x_i, on va la noter $f_i = f(x_i)$. On peut alors estimer la dérivée de f aux points x_i :

$$\alpha_1 f'_{i-1} + f'_i + \alpha_1 f'_{i+1} = a_1 \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + b_1 \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4\Delta x} + c_1 \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6\Delta x} \tag{2.9}$$

Le jeu de coefficients $(\alpha_1, a_1, b_1, c_1)$ utilisé détermine la qualité de l'estimation. Dans nos calculs, on a utilisé $(\alpha_1, a_1, b_1, c_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{14}{9}, \frac{1}{9}, 0\right)$. C'est le jeu de coefficients par défaut du code (Laizet et al. [41]). Le schéma est alors d'ordre 6 : l'erreur est proportionnelle à Δx^6. Comme l'a montré Lele [48], ce schéma est très bon pour les trois premiers quarts du spectre, son point faible se trouvant à la coupure. Ce point faible n'est pas spécifique à notre schéma : il touche quasiment tous les schémas de dérivation colocalisés.

L'estimation de la dérivée avec le schéma (2.9) peut s'exprimer sous forme matricielle : $A_1 f' = B_1 f$. La matrice A_1 ne dépend que de α_1 et est tridiagonale tandis que la matrice B_1 ne dépend que de a_1 et b_1 et est pentadiagonale.

Dérivée seconde

De manière analogue, on peut estimer la dérivée seconde avec un schéma compact :

$$\alpha_2 f''_{i-1} + f''_i + \alpha_2 f''_{i+1} = a_2 \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + b_2 \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4\Delta x^2} + c_2 \frac{f_{i+3} - 2f_i + f_{i-3}}{9\Delta x^2} \tag{2.10}$$

Pour la dérivée seconde, on utilise un coefficient c_2 non nul. L'ajout d'un coefficient dans le schéma permet de monter en ordre : il peut être d'ordre 8. On peut également limiter l'ordre du schéma à 6. On a alors un degré de liberté pour moduler les propriétés de ce dernier. On peut ainsi contrôler finement la diffusion numérique (Lamballais et al. [43]). Dans la majorité de nos calculs, on utilise le schéma d'ordre 6 avec une sur-dissipation aux hautes fréquences modérée (4 fois la dissipation exacte à la coupure).

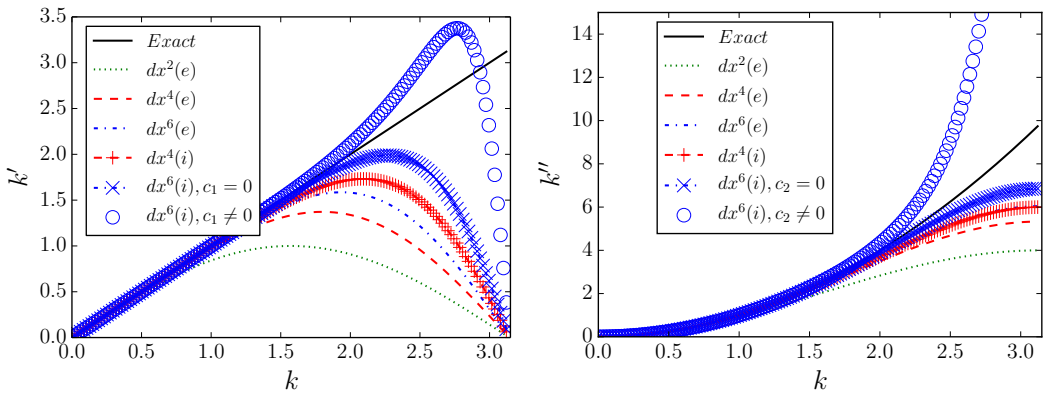
On peut exprimer le schéma (2.10) sous forme matricielle : $A_2 f^{"} = B_2 f$. La matrice A_2 est tridiagonale tandis que la matrice B_2 est septadiagonale.

Nombre d'onde modifié

On considère la fonction test $f = e^{\sqrt{-1}kx}$. Sa dérivée première est $\sqrt{-1}kf$ et sa dérivée seconde est $-k^2 f$. Si l'on applique les schémas compacts (2.9) et (2.10) à la fonction test, on trouve respectivement $\sqrt{-1}k'f$ et $-k''f$. On note donc k' et k'' les nombres d'ondes modifiés associés à ces schémas. Ils vérifient l'équation :

$$\begin{aligned} k'(k) &= \frac{a_1 \sin(k) + \frac{b_1}{2}\sin(2k) + \frac{c_1}{3}\sin(3k)}{1 + 2\alpha_1 \cos(k)} \\ k''(k) &= \frac{2a_2(1-\cos(k)) + \frac{b_2}{2}(1-\cos(2k)) + \frac{2c_2}{9}(1-\cos(3k))}{1 + 2\alpha_2 \cos(k)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

On a tracé les nombres d'ondes modifiés k' et k'' figure 2.1 pour des schémas explicites (ordre 2, 4 et 6) et compacts (ordre 4 et 6).



(a) Dérivée simple

(b) Dérivée seconde

FIGURE 2.1 – Nombres d'ondes modifiés pour la dérivée simple (a) et pour la dérivée seconde (b) colocalisées. Comparaison entre les schémas explicites ($dx^n\,(e)$) d'ordre 2, 4 et 6 et les schémas compacts ($dx^n\,(i)$) d'ordre 4 et 6.

Le nombre d'onde associé à la dérivée simple (k') montre clairement la supériorité des schémas compacts sur les schémas explicites. On a tracé k' pour un schéma d'ordre 6 avec $c_1 \neq 0$. Le jeu de coefficients de ce dernier est obtenu en utilisant un algorithme d'optimisation sous contrainte. On trouvera dans l'annexe B un script rédigé dans le langage R (GNU GPL v2, `http://www.r-project.org/`) qui effectue ladite optimisation et donne :

$$(\alpha_1, a_1, b_1, c_1) \approx (0.469, 1.58, 0.401, -0.0407) \tag{2.12}$$

Ce dernier schéma n'a jamais été utilisé dans nos simulations. Il illustre simplement les possibilités d'optimisation que l'on peut appliquer aux schémas compacts.

Grille inhomogène

Dans une simulation, on a parfois besoin d'avoir une grille fine à un endroit où l'écoulement est complexe (forts gradients, présence de structures fines, ...) et une grille plus grossière ailleurs. Utiliser une grille homogène est alors problématique voire impossible : bien résoudre la zone où l'écoulement est complexe implique de surrésoudre les autres zones. Il est alors commode d'utiliser une grille inhomogène. Dans le code Incompact3d, on peut avoir une grille inhomogène [1] dans la direction y : on utilise un changement de variable bijectif.

On note y la coordonnée étirée et s la coordonnée homogène. Soit h la fonction bijective qui vérifie $y = h(s)$. On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{1}{h'}\frac{\partial f}{\partial s} \tag{2.13}$$

En itérant le processus, on obtient la dérivée seconde sur la grille inhomogène :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{h'^2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \frac{h''}{h'^2}\frac{\partial f}{\partial s} \tag{2.14}$$

On verra dans la sous-section 2.4 comment le solveur utilisé pour calculer la pression contraint la métrique h.

1. On peut également simuler une géométrie complexe en utilisant la méthode des frontières immergées (Laizet et al. [39], Gautier [19], Gautier et al. [20])

Schémas aux bords

Si on tente d'appliquer l'équation (2.9) près d'un bord (en $i = 1$ ou $i = 2$ par exemple), on ne peut pas estimer tous les termes (f_{i-2} par exemple). On a donc besoin d'hypothèses supplémentaires aux bords du domaine.

En cas de périodicité, c'est relativement simple : au bord $i = 1$, on peut remplacer f_0 par f_n, f_{-1} par f_{n-1}, f_{-2} par f_{n-2}, f'_0 par f'_n et f''_0 par f''_n. On procède de manière similaire pour le bord $i = n$ (avec n le nombre de points dans la direction où l'on calcule la dérivée). Cette modification impacte les 2 (respectivement 3) premières et dernières lignes des matrices A_1 et B_1 (respectivement A_2 et B_2). Ces dernières deviennent cycliques. Cela modifie légèrement l'algorithme de calcul des dérivées (algorithme de Thomas [66]), pas sa complexité, qui reste en $O(n)$.

En cas de symétrie, selon que la fonction f soit paire ou impaire, on aura $f_0 = \pm f_2$, $f_{-1} = \pm f_3$, $f_{-2} = \pm f_4$, $f'_0 = \mp f'_2$ et $f''_0 = \pm f''_2$. La situation est bien entendu analogue à l'autre bord. Dans ce cas, les matrices ne sont pas cycliques et l'algorithme de Thomas peut être utilisé directement pour résoudre le système tridiagonal.

Lorsqu'il y a une paroi, l'estimation des dérivées colocalisées se fait en utilisant des schémas décentrés au bord. Les schémas de bord utilisés sont :

$$\begin{aligned}
f'_1 + 2f'_2 &= \frac{1}{2\Delta x}\left(-5f_1 + 4f_2 + f_3\right) \\
f''_1 + 11f''_2 &= \frac{1}{\Delta x^2}\left(13f_1 - 27f_2 + 15f_3 - f_4\right) \\
\frac{1}{4}f'_1 + f'_2 + \frac{1}{4}f'_3 &= \frac{3}{4\Delta x}\left(f_3 - f_1\right) \\
\frac{1}{10}f''_1 + f''_2 + \frac{1}{10}f''_3 &= \frac{6}{5\Delta x^2}\left(f_3 - 2f_2 + f_1\right) \\
\frac{2}{11}f''_2 + f''_3 + \frac{2}{11}f''_4 &= \frac{12}{11\Delta x^2}\left(f_4 - 2f_3 + f_2\right) + \frac{3}{44\Delta x^2}\left(f_5 - 2f_3 + f_1\right) \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Les 2 premiers schémas sont d'ordre 3, les 2 suivants d'ordre 4 et le dernier d'ordre 6. Les travaux de Carpenter et al. [9] sur la stabilité des schémas compacts s'appuient sur ceux de B. Gustafsson [25] et démontrent que la combinaison du schéma central ((2.9) et $c_1 = 0$) avec ces schémas de bord est stable et converge à l'ordre 4 pour une équation de transport unidimensionnelle instationnaire.

Nous venons de voir les schémas discrets permettant d'évaluer les termes convectifs et diffusifs rencontrés dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement et dans celle de conservation du scalaire. Ce sont les mêmes opérateurs discrets qui sont appliqués aux composantes de la vitesse et au scalaire car toutes ces grandeurs sont colocalisées. La sous-section qui suit est dédiée à l'évaluation discrète du terme diffusif pour la thermique solide.

2.2.2 Méthode spectrale pour le solide

Le module que nous avons développé pour la thermique solide est adapté à des configurations de type canal plan : le solide est en-dessous et au-dessus du fluide. L'écoulement fluide se fait entre 2 plaques : $0 \leq y \leq L_y$. Le solide en-dessous du fluide est entre les plans $y = 0$ et $y = -L_{s1}$. Celui au-dessus est entre les plans $y = L_y$ et $y = L_y + L_{s2}$. La figure 2.2 illustre cette configuration.

Dans les domaines solides, la grille utilisée dans les directions x et z est identique à celle utilisée dans le domaine fluide. On utilise une grille étirée dans la direction y. On a évoqué la possibilité d'utiliser une grille inhomogène dans la direction y au sein du fluide. Comme on le verra dans la section 2.4, le solveur utilisé pour la pression contraint fortement la fonction h utilisée pour faire le lien bijectif entre la grille homogène et la grille étirée. Cette contrainte n'est pas présente dans le domaine solide. Nous avons donc

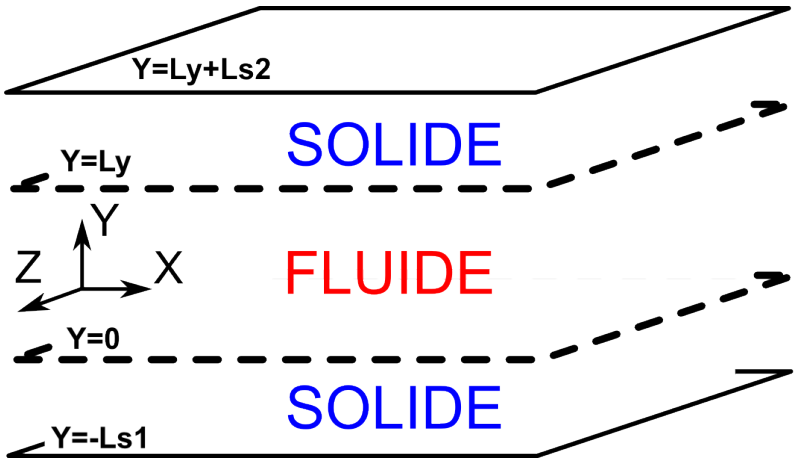


FIGURE 2.2 – Disposition des domaines solides et du domaine fluide

profité de cette liberté pour utiliser un opérateur discret de type spectral dans la direction y combiné à des schémas compacts dans les directions x et z.

Interpolation de Lagrange sur les points de Chebyshev

Dans la direction y, on utilise l'interpolation de Lagrange sur les points de Chebyshev. La grille de Chebyshev d'ordre k sur l'intervalle $[L_1, L_2]$ est donnée par les $k+1$ points y_i vérifiant :

$$y_i = \frac{L_1 + L_2}{2} + \frac{L_2 - L_1}{2} \cos\left(\frac{2\,(k-i)+1}{2k+2}\pi\right) \text{ avec } 0 \leq i \leq k \tag{2.16}$$

Soit l_i le polynôme d'interpolation de Lagrange sur la grille vérifiant $l_i(y_j) = \delta_{i,j}$. On peut l'utiliser pour estimer la dérivée seconde de la température :

$$\begin{aligned} l_i(y) &= \prod_{j=0, j\neq i}^{k} \frac{y - y_j}{y_i - y_j} \\ T(y) &= \sum_{i=0}^{k} T(y_i) l_i(y) \\ \partial_y T(y) &= \sum_{i=0}^{k} T(y_i) l_i'(y) \\ \partial_{yy} T(y) &= \sum_{i=0}^{k} T(y_i) l_i''(y) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Pour estimer la dérivée seconde $\partial_{yy}T(y_j)$, il suffit donc d'avoir la matrice $l_i''(y_j)$ et le vecteur $T(y_i)$. Au niveau matriciel, on va noter B_s la matrice de diffusion dans la direction y : $\partial_{yy}T = B_s T$. Cette matrice a le défaut d'être pleine : le calcul de la dérivée seconde a donc une complexité en $O(k^2)$. Cette complexité est compensée par une convergence en norme uniforme exponentielle : l'erreur d'interpolation est bornée par $\frac{1}{2^k}$ (Jedrzejewski, section 2.3, [29]).

Le bénéfice de la complexité accrue est donc une précision très élevée et la garantie de ne pas rencontrer d'oscillations artificielles aux bords (phénomène de Runge). Pour une même précision (et pour un problème de diffusion), on a donc besoin d'utiliser moins de points dans le solide que dans le fluide.

2.3 Discrétisation temporelle

Le code de calcul Incompact3d propose par défaut 4 schémas d'avancement temporel explicites : des schémas de type Adams-Bashforth (ordre 2 et 3) ainsi que des schémas de

type Runge-Kutta (ordre 3 et 4). Pour des raisons de simplicité, nos simulations et nos développements s'appuient sur les premiers. En effet, les schémas de type Runge-Kutta utilisent des pas de temps intermédiaires, ce qui conduit à inverser des matrices distinctes. Pour des raisons de clarté, on utilise dans cette section le schéma Adams-Bashforth d'ordre 2 que l'on notera AB2.

2.3.1 Prédiction-correction

On présente dans un premier temps l'algorithme explicite d'avancement temporel utilisé pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Dans la suite, on note u_i^n la composante de la vitesse dans la direction i au pas de temps n (à l'instant $(n-1)\,\Delta t$ avec Δt le pas de temps). On note également p^n la pression au pas de temps n.

Pour calculer la vitesse au pas de temps $n+1$, on commence par prédire une vitesse u_i^* (étape de prédiction) :

$$\begin{aligned}\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} &= -\partial_i p^n \\ &+ \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\partial_j\left(u_i^n u_j^n\right) - \frac{1}{2}u_j^n \partial_j u_i^n + \frac{1}{Re}\partial_{jj} u_i^n\right) \\ &- \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\partial_j\left(u_i^{n-1} u_j^{n-1}\right) - \frac{1}{2}u_j^{n-1} \partial_j u_i^{n-1} + \frac{1}{Re}\partial_{jj} u_i^{n-1}\right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

L'équation (2.18) pouvant s'écrire sous forme condensée $u_i^* = u_i^n + F_i\left(p^n, u_j^n, u_j^{n-1}\right)\Delta t$. Le champ de vitesse prédit u_i^* n'est pas à divergence nulle. On effectue donc une correction pour obtenir un champ de vitesse final u_i^{n+1} incompressible (étape de correction) :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} = -\partial_i p^{n+1} + \partial_i p^n \tag{2.19}$$

En pratique, l'étape de correction est scindée en 2 :

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{**} - u_i^*}{\Delta t} &= \partial_i p^n \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^{**}}{\Delta t} &= -\partial_i p^{n+1}\end{aligned} \tag{2.20}$$

Le calcul du champ de pression p^{n+1} est traité en détail à la section 2.4. Cette stratégie d'avancement temporel est relativement classique. On en trouve de nombreuses variantes (voir les travaux de Guermond et al. [23] pour une discussion sur les différentes possibilités et leurs précisions respectives). Pour la thermique, l'absence de la pression dans l'équation d'évolution de cette dernière simplifie grandement les choses :

$$\begin{aligned}\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} &= \frac{3}{2}\left(-\partial_j\left(T^n u_j^n\right) + \frac{1}{RePr}\partial_{jj} T^n\right) \\ &- \frac{1}{2}\left(-\partial_j\left(T^{n-1} u_j^{n-1}\right) + \frac{1}{RePr}\partial_{jj} T^{n-1}\right)\end{aligned} \tag{2.21}$$

Tout comme pour l'étape de prédiction (2.18), on peut écrire l'équation (2.21) sous forme condensée : $T^{n+1} = T^n + F_T\left(T^n, T^{n-1}, u_j^n, u_j^{n-1}\right)\Delta t$. En pratique, nos simulations s'appuient sur une version semi-implicite du terme diffusif, ce qui modifie l'étape de prédiction. C'est l'objet de la section qui suit.

2.3.2 Semi-implicitation du terme diffusif

La semi-implicitation d'une partie du terme diffusif développée avec Thibault Dairay (Dairay et al. [12]) a plusieurs avantages. D'une part, elle permet d'augmenter le pas de temps, ce qui limite le temps de calcul final. D'autre part, elle permet d'appliquer des conditions aux limites plus génériques, ce qui est primordial dans le cadre de nos travaux sur le transfert thermique conjugué fluide-solide.

Domaine fluide

On va intégrer le terme diffusif dans la direction y avec un schéma de Crank-Nicolson au lieu d'un schéma AB2. On a vu avec l'équation (2.14) que ce terme était scindé lorsque le maillage est étiré. Dans ce cas, la semi-implicitation temporelle ne s'applique qu'au terme $\frac{1}{h'^2}\partial_{ss}f$, pas au terme $\frac{h''}{h'^2}\partial_s f$ qui reste estimé en AB2. L'étape de prédiction est alors :

$$\begin{aligned}\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} &= -\partial_i p^n \\ &+ \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\partial_j\left(u_i^n u_j^n\right) - \frac{1}{2}u_j^n\partial_j u_i^n + \frac{1}{Re}\partial_{xx}u_i^n + \frac{1}{Re}\partial_{zz}u_i^n\right) \\ &- \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\partial_j\left(u_i^{n-1}u_j^{n-1}\right) - \frac{1}{2}u_j^{n-1}\partial_j u_i^{n-1} + \frac{1}{Re}\partial_{xx}u_i^{n-1} + \frac{1}{Re}\partial_{zz}u_i^{n-1}\right) \\ &+ \frac{1}{Re}\frac{\partial_{ss}u_i^* + \partial_{ss}u_i^n}{2h'^2} - \frac{1}{Re}\frac{h''}{h'^2}\left(\frac{3}{2}\partial_s u_i^n - \frac{1}{2}\partial_s u_i^{n-1}\right) \end{aligned} \tag{2.22}$$

On peut l'écrire sous forme condensée :

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2Reh'^2}\partial_{ss}\right)u_i^* = G_i\left(p^n, u_j^n, u_j^{n-1}\right)\Delta t \tag{2.23}$$

Les schémas compacts utilisés pour la dérivée seconde vérifient la relation $A_2\partial_{ss}f = B_2 f$. On a donc :

$$\left(A_2 h'^2 - \frac{\Delta t}{2Re}B_2\right)u_i^* = A_2 h'^2 G_i\left(p^n, u_j^n, u_j^{n-1}\right)\Delta t \tag{2.24}$$

Pour la thermique, en utilisant une stratégie identique, on obtient :

$$\left(A_2 h'^2 - \frac{\Delta t}{2RePr}B_2\right)T^{n+1} = A_2 h'^2 G_T\left(T^n, T^{n-1}, u_j^n, u_j^{n-1}\right)\Delta t \tag{2.25}$$

La matrice de la métrique h'^2 est diagonale, A_2 est tri-diagonale et B_2 est septadiagonale. La matrice à inverser dans les équations (2.24) et (2.25) est donc septadiagonale (et cyclique lorsque l'on a périodicité dans la direction y). Ces matrices ont donc une structure simple et creuse. De plus, elles ne varient pas au cours de la simulation. Il suffit donc de calculer et stocker leur décomposition LU au début de la simulation pour résoudre les équations (2.24) et (2.25) à chaque pas de temps.

Pour un calcul avec (n_x, n_y, n_z) cellules dans les directions (x, y, z), on a $n_x\ n_z$ systèmes linéaires de n_y équations à résoudre. Comme les systèmes sont indépendants, la résolution peut se faire en parallèle. En terme de complexité, les matrices issues de la décomposition LU sont creuses, le coût de résolution d'un système est donc en $O(n_y)$, ce qui est raisonnable.

Conditions aux limites

Si la direction y est soumise à des conditions aux limites de type périodicité ou glissement libre, les matrices A_2 et B_2 contiennent déjà ces informations. Il n'y a alors aucune modification à apporter aux systèmes (2.24) et (2.25). En présence d'une paroi, la situation est différente : il faut imposer une condition à la limite.

On a un système de n_y équations à n_y inconnues et 2 conditions aux limites, une pour chaque bord. Pour la prédiction de la vitesse, le nouveau système à résoudre est alors :

$$\begin{aligned} u_i^*(1) &= u_0(x,z) \\ \sum_{l=1}^{n_y}\left(A_2(k,l)h'^2(l,l) - \frac{\Delta t}{2Re}B_2(k,l)\right)u_i^*(l) &= \sum_{l=1}^{n_y} A_2(k,l)h'^2(l,l)G_i(l)\Delta t\ \forall\ k \in [1,n_y] \\ u_i^*(n_y) &= u_L(x,z) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Le problème est alors surdéterminé : on a $n_y + 2$ équations pour n_y inconnues. Pour contourner le problème, on remplace les lignes $k = 1$ et $k = n_y$ du système par les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u_i^*(1) &= u_0(x,z) \\ \sum_{l=1}^{n_y} \left(A_2(k,l)h'^2(l,l) - \frac{\Delta t}{2Re} B_2(k,l) \right) u_i^*(l) &= \sum_{l=1}^{n_y} A_2(k,l)h'^2(l,l)G_i(l)\Delta t \ \forall \ k \in [2, n_y - 1] \\ u_i^*(n_y) &= u_L(x,z) \end{aligned} \tag{2.27}$$

En pratique, dans nos calculs, on aura toujours $u_0 = 0$ et $u_L = 0$. Pour la température, on emploie une stratégie similaire, la seule différence réside dans la condition à la limite. À la paroi, on peut imposer la température (Dirichlet), sa dérivée normale (Neumann) ou une combinaison linéaire des 2 (Robin). Une condition de type Robin en $y = 0$ a la forme :

$$\alpha_0 T(y=0) + \beta_0 \partial_y T(y=0) = \gamma_0 \tag{2.28}$$

On approche la dérivée au bord avec un schéma explicite d'ordre 3 :

$$\begin{aligned} \frac{-11f_1 + 18f_2 - 9f_3 + 2f_4}{6\Delta s} &= \partial_s f_1 \\ \alpha_0 T_1 + \beta_0 \frac{1}{h'(1)} \frac{-11T_1 + 18T_2 - 9T_3 + 2T_4}{6\Delta s} &= \gamma_0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Cette approximation de la dérivée au bord a l'avantage de conserver la structure septadiagonale de la matrice. Soulignons que la formulation de la condition de Robin retenue est très générale car elle englobe les conditions de type Dirichlet ($\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$) et Neumann ($\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$).

Domaine solide

Pour des raisons de simplicité, nous avons fait le choix d'un couplage thermique fluide-solide faible (détaillé dans la sous-section suivante). Soulignons que ce couplage a une précision temporelle modérée. On a utilisé, pour la thermique solide, un schéma d'avancement temporel dont la précision est équivalente. L'équation de diffusion régissant l'évolution de la température dans le solide est parabolique et linéaire. L'absence du terme convectif rend cette dernière beaucoup moins sensible aux perturbations. L'utilisation d'un schéma d'avancement temporel de précision modérée est alors moins pénalisante. Le schéma d'avancement temporel utilisé pour la thermique solide est :

$$\begin{aligned} \frac{T_s^{n+1} - T_s^n}{\Delta t} &= \frac{2}{G_1 RePr} \left(\partial_{xx} T_s^n + \partial_{zz} T_s^n \right) \\ &- \frac{1}{G_1 RePr} \left(\partial_{xx} T_s^{n-1} + \partial_{zz} T_s^{n-1} \right) \\ &+ \frac{\kappa}{G_1 RePr} \partial_{yy} T_s^{n+1} + \frac{1-\kappa}{G_1 RePr} \left(2\partial_{yy} T_s^n - \partial_{yy} T_s^{n-1} \right) \end{aligned} \tag{2.30}$$

C'est un schéma d'ordre 1 basé sur le schéma d'Euler implicite qui évalue la diffusion à l'instant t^{n+1} dont le paramètre κ permet de moduler le niveau d'implicitation du terme diffusif dans la direction y. On peut écrire ce schéma sous la forme condensée :

$$\left(1 - \frac{\kappa \Delta t}{G_1 RePr} B_s \right) T_s^{n+1} = G_{T_s} \left(T_s^n, T_s^{n-1} \right) \Delta t \tag{2.31}$$

En pratique, la grille dans la direction y étant très fine à la paroi, on utilise une diffusion purement implicite ($\kappa = 1$) pour des raisons de stabilité.

Si l'on utilise une grille de Chebyshev d'ordre k, on a alors n_x n_z systèmes linéaires de $k+1$ équations avec $k+1$ inconnues. Les $k+1$ points de la grille de Chebyshev sont tous à

l'intérieur du domaine. Imposer la température ou le flux aux bords du domaine ($y = L_1$ ou $y = L_2$) contraint donc la température sur l'ensemble des points de Chebyshev. En effet :

$$\begin{aligned} T_s\left(y = L_1\right) &= \sum_{i=0}^{k} T_s(y_i) l_i(L_1) \\ \partial_y T_s\left(y = L_2\right) &= \sum_{i=0}^{k} T_s(y_i) l_i'(L_2) \end{aligned} \tag{2.32}$$

On impose des conditions de type Robin aux bords du solide :

$$\begin{aligned} \alpha_{L_1} T_s\left(y = L_1\right) + \beta_{L_1} \partial_y T_s\left(y = L_1\right) &= \gamma_{L_1} \\ \alpha_{L_2} T_s\left(y = L_2\right) + \beta_{L_2} \partial_y T_s\left(y = L_2\right) &= \gamma_{L_2} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Au niveau discret, on a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k} \alpha_{L_1} T_s\left(y_j\right) l_j\left(L_1\right) + \beta_{L_1} T_s\left(y_j\right) l_j'\left(L_1\right) &= \gamma_{L_1} \\ \sum_{j=0}^{k} \alpha_{L_2} T_s\left(y_j\right) l_j\left(L_2\right) + \beta_{L_2} T_s\left(y_j\right) l_j'\left(L_2\right) &= \gamma_{L_2} \end{aligned} \tag{2.34}$$

On isole les points $j = 0$ et $j = k$:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \alpha_{L_1} l_0(L_1) + \beta_{L_1} l_0'(L_1) & \alpha_{L_1} l_k(L_1) + \beta_{L_1} l_k'(L_1) \\ \alpha_{L_2} l_0(L_2) + \beta_{L_2} l_0'(L_2) & \alpha_{L_2} l_k(L_2) + \beta_{L_2} l_k'(L_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_s(y_0) \\ T_s(y_k) \end{pmatrix} \\ = \; & -\sum_{i=1}^{k-1} \begin{pmatrix} \alpha_{L_1} l_i(L_1) + \beta_{L_1} l_i'(L_1) \\ \alpha_{L_2} l_i(L_2) + \beta_{L_2} l_i'(L_2) \end{pmatrix} T_s(y_i) + \begin{pmatrix} \gamma_{L_1} \\ \gamma_{L_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.35}$$

On note $\widetilde{T_s}$ le vecteur $T_s(y_i)$ avec $1 \leq i \leq k-1$. La matrice du membre de gauche étant inversible pour la plupart des conditions aux limites, on peut écrire l'équation (2.35) sous forme condensée :

$$\begin{pmatrix} T_s(y_0) \\ T_s(y_k) \end{pmatrix} = M_1 \widetilde{T_s} + M_2 \begin{pmatrix} \gamma_{L_1} \\ \gamma_{L_2} \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

Si on supprime la première et la dernière ligne du schéma d'avancement temporel (2.31), on obtient un schéma d'avancement temporel pour $\widetilde{T_s}$. Ce dernier fait intervenir $T_s(y_0)$ et $T_s(y_k)$. L'injection dans ce système de l'équation (2.36) permet de construire un système linéaire autonome pour $\widetilde{T_s}$ qui contient les conditions aux limites.

La matrice ainsi construite est pleine (si $\kappa \neq 0$) et ne varie pas au cours de la simulation (si les paramètres α_{L_1}, α_{L_2}, β_{L_1} et β_{L_2} sont constants durant le calcul). L'inverse de la matrice est donc calculé et stocké au début de la simulation. La matrice étant pleine, son inverse l'est également. La complexité de l'avancement temporel pour le solide est donc en $O(k^2)$.

Signalons que la matrice inverse stockée permet de calculer $\widetilde{T_s}$ au pas de temps $n+1$. La relation (2.36) permet de reconstruire le vecteur T_s^{n+1}. On utilise ce dernier pour calculer la température ou le flux aux bords du solide à l'aide de la relation (2.32).

2.3.3 Couplage thermique fluide-solide

Les solveurs thermiques fluide et solide fonctionnent de manière séquentielle. Le couplage entre les 2 est donc qualifié de faible, par opposition au couplage fort qui résout la température dans les 2 domaines simultanément. L'utilisation d'un couplage faible est

risquée en raison des instabilités qu'il peut engendrer. Les travaux de M.B. Giles [22] montrent que le couplage est plus stable si l'on impose une condition de type Dirichlet sur le fluide et de type Neumann sur le solide.

Suite au pas de temps n, on connait les températures fluide (T^n) et solide (T_s^n). On commence par mettre à jour la température fluide : on calcule T^{n+1} avec une condition à la limite de type Dirichlet. La température fluide à la paroi vérifie : $T^{n+1} = \frac{1}{2}(T^n + T_s^n)$. Ensuite, on met à jour la température solide : on calcule T_s^{n+1} avec une condition à la limite de type Neumann. La température solide à l'interface fluide-solide vérifie : $\partial_y T_s^{n+1} = \frac{1}{G_2}\partial_y T^{n+1}$, G_2 étant le ratio des conductivités thermiques (solide sur fluide).

Soulignons les choix que nous avons fait :

1. Couplage faible : on utilise les solveurs séquentiellement.
2. Pas de résolution itérative pour faire converger la thermique à chaque pas de temps. On économise ainsi du temps de calcul. On évite également d'avoir à fixer *arbitrairement* un seuil de précision à partir duquel on considère que la thermique a convergé (ou un nombre maximal d'itérations).
3. On résout d'abord le fluide puis le solide. Cette stratégie favorise la continuité du flux à la paroi et y autorise une légère discontinuité de la température.
4. On met à jour la température fluide avec la demi-somme des températures au pas de temps précédent. Les tests numériques que nous avons menés à $G_1 = G_2 = 1$ indiquent que c'est le choix qui maximise la stabilité du couplage.

Le couplage faible ainsi construit est d'ordre 1 en temps. Pour cette thèse, nous nous sommes limités à ce type de couplage simple et robuste mais une perspective intéressante de couplage faible serait les schémas CIBC (Combined Interface Boundary Condition, Roe et al. [64], Jaiman et al. [28]). En effet, l'utilisation d'un couplage faible classique a tendance à dégrader la précision et la stabilité du schéma d'avancement temporel. Les schémas de couplage faible de type CIBC permettent de s'affranchir de cette limitation et ne dégradent ni la stabilité ni la précision du schéma d'avancement temporel.

2.4 Calcul de la pression

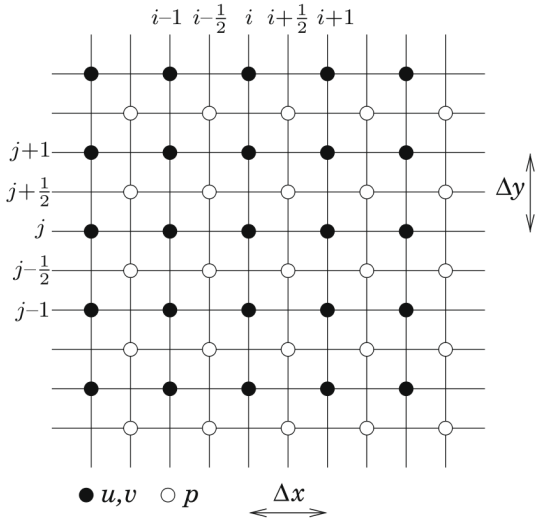


FIGURE 2.3 – Arrangement 2D d'une grille avec vitesse colocalisée et pression décalée, [41].

L'étape de correction (2.20) est décomposée en 2 phases. C'est la deuxième qui nous intéresse, en particulier sa divergence :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^{**}}{\Delta t} &= -\partial_i p^{n+1} \\ \Rightarrow \frac{\partial_i u_i^{**}}{\Delta t} &= \partial_{ii} p^{n+1} \end{aligned} \qquad (2.37)$$

On a utilisé l'hypothèse d'incompressibilité : le champ u^{n+1} est à divergence nulle. On obtient ainsi une équation de Poisson pour la pression.

2.4.1 Champ de pression décalé

Les travaux de Laizet et al. [41] ont montré que l'utilisation d'un champ de pression colocalisé produit des artefacts numériques. Dans nos calculs, le champ de pression est décalé. Comme l'illustre la figure 2.3, les points où l'on a la pression diffèrent des points où l'on a la vitesse.

On a besoin d'avoir la divergence de u_i^{**} sur la grille décalée. Pour ce faire, on utilise des schémas compacts de dérivation et d'interpolation adaptés au maillage décalé :

$$\begin{aligned} \alpha_{1/2} f'_{i-1/2} + f'_{i+1/2} + \alpha_{1/2} f'_{i+3/2} &= a_{1/2} \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + b_{1/2} \frac{f_{i+2} - f_{i-1}}{3\Delta x} \\ \alpha_I f_{i-1/2} + f_{i+1/2} + \alpha_I f_{i+3/2} &= a_I \frac{f_{i+1} + f_i}{2} + b_I \frac{f_{i+2} + f_{i-1}}{2} \end{aligned} \tag{2.38}$$

Les coefficients utilisés sont ceux qui donnent des schémas d'ordre 6. Comparé à la dérivation sur maillage colocalisé, celle sur maillage décalé est précise sur l'ensemble du spectre : le nombre d'onde modifié $k'_{1/2}$ ne vaut pas zéro à la coupure. Dans la suite, on note $k'_{i,1/2}$ le nombre d'onde modifié associé à la dérivation sur maillage décalé dans la direction i. La fonction de transfert associée à l'interpolateur dans la direction i est notée I_i. Sa précision est excellente sur les 3 premiers quarts du spectre et réduite sur le dernier : par construction, la fonction de transfert est nulle à la coupure.

Le laplacien de la pression peut s'exprimer en fonction des nombres d'ondes modifiés et des fonctions de transfert :

$$\partial_{ii} p^{n+1} \Longleftrightarrow - \left[\left(k'_{x,1/2} I_y I_z \right)^2 + \left(I_x k'_{y,1/2} I_z \right)^2 + \left(I_x I_y k'_{z,1/2} \right)^2 \right] \widehat{p^{n+1}} \tag{2.39}$$

L'équation (2.39) mérite quelques éclaircissements. p^{n+1} représente la pression dans l'espace physique et $\widehat{p^{n+1}}$ la pression dans l'espace spectral. Ce sont 2 représentations équivalentes de la pression. On passe de l'une à l'autre en utilisant une transformée de Fourier 3D (transformée en *cos* dans les directions apériodiques). L'équation (2.39) exprime l'équivalence entre le calcul du laplacien dans l'espace physique (avec les schémas (2.38)) et dans l'espace spectral (avec les nombres d'onde modifiés $k'_{i,1/2}$ et les fonctions de transfert I_i).

L'inversion du laplacien dans l'espace spectral est une simple division. On va donc résoudre l'équation de Poisson satisfaite par la pression dans l'espace spectral. Soulignons un point crucial : l'équivalence entre les opérateurs physiques et spectraux impose d'avoir des schémas compacts homogènes. Il est alors impossible d'avoir des schémas décentrés aux bords. Les schémas (2.38) utilisent donc des hypothèses de périodicité ou de parité pour estimer la dérivée et l'interpolée de la vitesse (ou de la pression) dans les directions normales aux parois.

Dans nos simulations, on suppose donc que la pression vérifie une condition de Neumann homogène aux bords. La situation est identique pour la vitesse tangente à la paroi, la vitesse normale étant supposée impaire.

2.4.2 Transformée en cosinus décalés

Une transformée de Fourier est la combinaison d'une transformée en cosinus et d'une transformée en sinus et s'applique à une fonction périodique. Dans les directions normales aux parois, il n'y a pas de périodicité et l'utilisation d'une telle transformée n'est pas faisable directement. On s'appuie alors sur les hypothèses de parité faites à la paroi pour effectuer une transformée en cosinus décalés.

Cette stratégie a été développée par Sylvain Laizet au cours de sa thèse [40] et s'appuie sur les travaux de Cooley et al. [10]. Des opérations de pré-traitement et post-traitement sont nécessaires pour la bonne prise en compte du maillage décalé. Ces opérations sont détaillées par Sylvain Laizet dans son manuscrit [40]. Soulignons un point important : la transformée en cosinus décalés est le pendant des hypothèses de parité faites dans les schémas compacts de dérivation et d'interpolation sur maillage décalé. L'étape de correction ainsi construite permet d'avoir un champ de vitesse à divergence nulle à hauteur de la précision machine (erreur de 10^{-8} en simple précision, 10^{-16} en double précision).

2.4.3 Résolution spectrale de l'équation de Poisson

L'équation de Poisson (2.37) peut s'exprimer dans l'espace physique et dans l'espace spectral :

$$\begin{aligned} \frac{\partial_i u_i^{**}}{\Delta t} &= \partial_{ii} p^{n+1} \\ \Longleftrightarrow \frac{\widehat{\partial_i u_i^{**}}}{\Delta t} &= -\left[\left(k'_{x,1/2} I_y I_z\right)^2 + \left(I_x k'_{y,1/2} I_z\right)^2 + \left(I_x I_y k'_{z,1/2}\right)^2\right] \widehat{p^{n+1}} \end{aligned} \tag{2.40}$$

La pression dans l'espace spectral vérifie donc :

$$\widehat{p^{n+1}} = \frac{-\widehat{\partial_i u_i^{**}}}{\Delta t} \frac{1}{\left(k'_{x,1/2} I_y I_z\right)^2 + \left(I_x k'_{y,1/2} I_z\right)^2 + \left(I_x I_y k'_{z,1/2}\right)^2} \tag{2.41}$$

Le calcul de la pression dans l'espace spectral est ainsi trivial : c'est une simple division. Cependant, on ne peut pas diviser par zéro. Le dénominateur s'annule pour quelques modes singuliers. Le mode constant ($I_x = I_y = I_z = 0$) n'est pas problématique car la pression est définie à une constante près : seul le gradient de pression intervient dans les équations de Navier-Stokes. Les autres modes singuliers sont les damiers 2D (2 des 3 interpolateurs nuls) et 3D (les 3 interpolateurs nuls). Ces modes singuliers de type damier sont inévitables lorsque les composantes de la vitesse sont colocalisées (Brezzi et Fortin, section $VI.5$, [17]).

Pour ces modes, nous avons conservé l'approche développée par S. Laizet dans sa thèse [40] : dans l'espace spectral, le gradient de pression est nul pour les modes singuliers.

2.4.4 Compatibilité avec une grille inhomogène

On a montré que la dérivée sur maillage étiré était obtenue avec une métrique h. La dérivation se traduit par un produit dans l'espace physique, ce qui équivaut à un produit de convolution dans l'espace spectral :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{h'} \frac{\partial f}{\partial s} \\ \Longleftrightarrow \widehat{\frac{\partial f}{\partial y}} &= \widehat{\frac{1}{h'}} \otimes \widehat{\frac{\partial f}{\partial s}} \end{aligned} \tag{2.42}$$

L'utilisation d'une métrique générique est problématique (Laizet et al. [41]). D'une part, cela rend complexe la résolution spectrale de l'équation de Poisson. D'autre part, cela détruit l'équivalence entre les opérations dans l'espace physique et spectral (aliasing).

En s'appuyant sur les travaux de Cain et al. [8], S. Laizet [40] a proposé une métrique avec un support compact dans l'espace spectral :

$$\frac{1}{h'} = \frac{1}{L_y}\left(\frac{\alpha_h}{\pi} + \frac{1}{2\pi\beta_h}\sin^2\left(\pi\left(\gamma_h s + \delta_h\right)\right)\right) \tag{2.43}$$

Cette métrique est tridiagonale dans l'espace spectral. La résolution de l'équation de Poisson consiste alors à inverser une matrice pentadiagonale. La construction de la matrice pentadiagonale est détaillée dans la publication de Laizet et al. [41]. Les paramètres $(\alpha_h, \beta_h, \gamma_h, \delta_h)$ permettent de moduler la métrique h. Ainsi, le choix $\gamma_h = 1$ et $\delta_h = 1/2$ permet de raffiner le maillage aux bords du domaine ($y = 0$ et $y = L_y$). Lorsque $\gamma_h = 1$, les paramètres α_h et β_h sont liés par la relation

$$\alpha_h = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\beta_h^2\pi^2}}{2\beta_h} \tag{2.44}$$

Il y a donc un degré de liberté dans la métrique ainsi obtenue, qui est le paramètre β_h.

La pression ainsi obtenue réside dans l'espace spectral. On la ramène dans l'espace physique avec des transformées inverses (Fourier et cosinus) et un post-traitement adapté au maillage décalé. Finalement, on utilise les schémas compacts de dérivation et d'interpolation sur maillage décalé pour obtenir la pression et son gradient sur la grille où l'on a la vitesse.

2.5 Architecture parallèle du code

Le code Incompact3d s'appuie sur la librairie 2DECOMP&FFT (`http://www.2decomp.org`) pour gérer le parallélisme (les communications entre processeurs et les accès disque). Cette librairie contient également des routines de bas-niveau permettant de calculer les transformées de Fourier.

Les schémas de dérivation, d'interpolation et d'avancement temporel que nous avons présentés sont des systèmes d'équations 1D. Ils peuvent se résoudre en parallèle efficacement si les données sont bien distribuées. Ainsi, pour calculer la dérivée dans la direction x de la variable f au nœud (I, j, k), on a besoin de connaître les valeurs $f(i, j, k)$ avec $1 \leq i \leq n_x$. La librairie 2DECOMP&FFT permet de distribuer la variable f sur les processeurs pour résoudre efficacement des systèmes 1D en x, y ou z. Supposons que nous avons 16 processeurs disponibles. On les distribue sur une grille $(4, 4)$. La figure 2.4 permet d'identifier les processeurs par couleur.

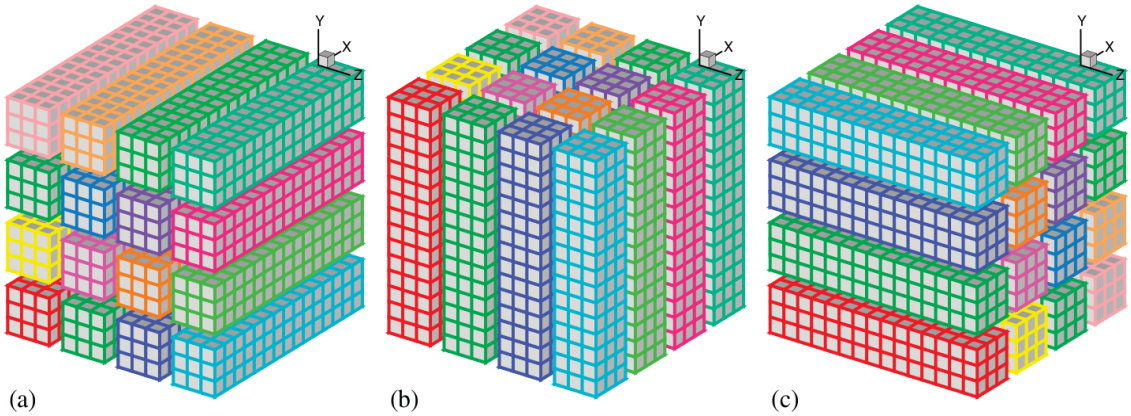


FIGURE 2.4 – Distribution d'une variable entre 16 processeurs, cas d'une grille $(4, 4)$. (a) : crayons en x. (b) : crayons en y. (c) : crayons en z. Laizet et al. [42]

Si la variable est distribuée suivant les crayons en x, on peut résoudre efficacement les systèmes d'équations dans cette direction. Si l'on a besoin de résoudre des systèmes en y (respectivement z), on utilise la librairie pour basculer la variable des crayons en x vers les crayons en y (respectivement z).

Cette stratégie permet d'utiliser efficacement des milliers de processeurs dans nos simulations (Laizet et al. [42]). Des tests récents montrent que cette stratégie permet d'utiliser efficacement un million de cœurs (cf figure 2.5).

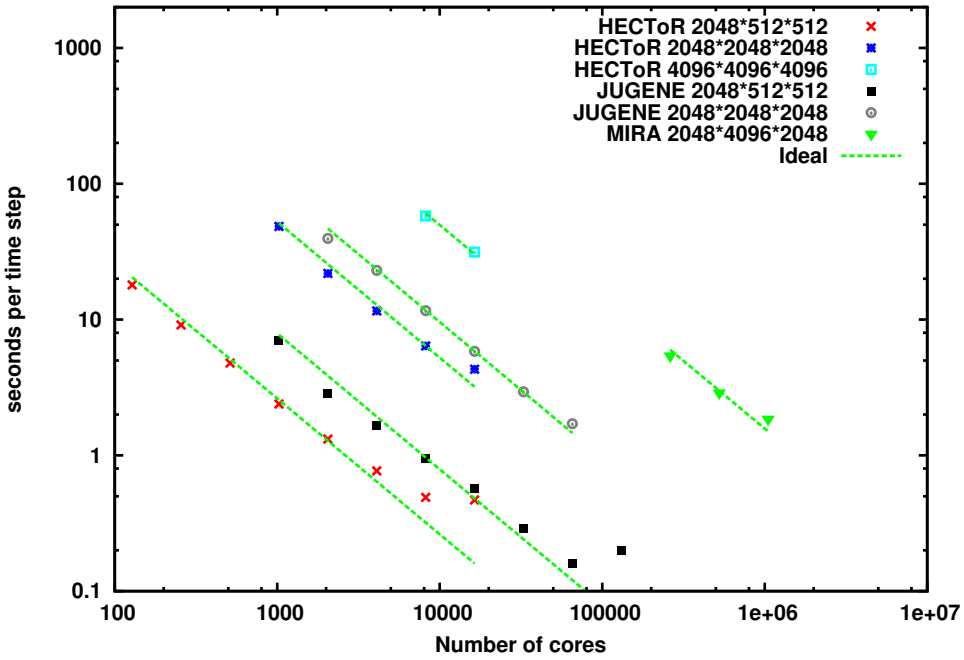


FIGURE 2.5 – Influence du nombre de cœurs sur le temps de calcul d'un pas de temps. Communication personnelle de S. Laizet.

Chapitre 3

Vérification et validation

On présente dans ce chapitre les calculs utilisés pour vérifier et valider nos développements. La section 3.1 est consacrée aux cas pour lesquels on a une solution analytique. On vérifie ainsi la consistance et l'ordre de convergence de la discrétisation. La section 3.2 est consacrée à la dynamique du canal plan turbulent. On compare nos résultats à ceux présents dans les bases de données, ce qui permet de vérifier nos routines de post-traitement. Les tests de validation, tout comme nos simulations, sont effectués en double précision.

3.1 Solutions analytiques

On dispose de solutions analytiques stables pour les équations de Navier-Stokes sur quelques configurations. Avant de valider la discrétisation de l'ensemble de l'équation de Navier-Stokes, on commence par valider la discrétisation du terme diffusif thermique. Dans la sous-section 3.1.1, on évince le terme convectif pour valider la semi-implicitation du terme diffusif thermique selon la direction y dans le domaine fluide. On vérifie ainsi la bonne implémentation des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann. La sous-section 3.1.2 est dédiée à la validation du module de thermique solide. Les sous-sections suivantes permettent de valider l'ensemble de la discrétisation car les cas prennent en compte la convection et le gradient de pression. On traite dans la sous-section 3.1.3 le cas des vortexs de Taylor-Green. Ils permettent de valider la bonne implémentation des conditions aux limites de type périodicité et symétrie. La sous-section 3.1.4 traite du cas de la cavité entrainée (Burgraff). C'est un cas stationnaire qui permet de valider la bonne prise en compte des parois.

3.1.1 Diffusion dans le fluide

Pour valider la condition de Dirichlet homogène, on utilise la fonction test : $T(y, t = 0) = \sin(2\pi y)$. Pour valider la condition de Neumann homogène, on utilise une fonction similaire : $T(y, t = 0) = \cos(2\pi y)$. L'équation résolue est :

$$\partial_t T = \frac{1}{RePr}\partial_{yy} T \tag{3.1}$$

La solution analytique est : $T(y,t) = T(y,t=0)e^{-\frac{4\pi^2}{RePr}t}$. Pour un avancement temporel semi-implicite sur un maillage homogène, on a :

$$T^{n+1} - \frac{\Delta t}{2RePr}\partial_{yy} T^{n+1} = T^n + \frac{\Delta t}{2RePr}\partial_{yy} T^n \tag{3.2}$$

Or, la solution continue vérifie : $\partial_{yy} T = -4\pi^2 T$. On en déduit la relation de récurrence :

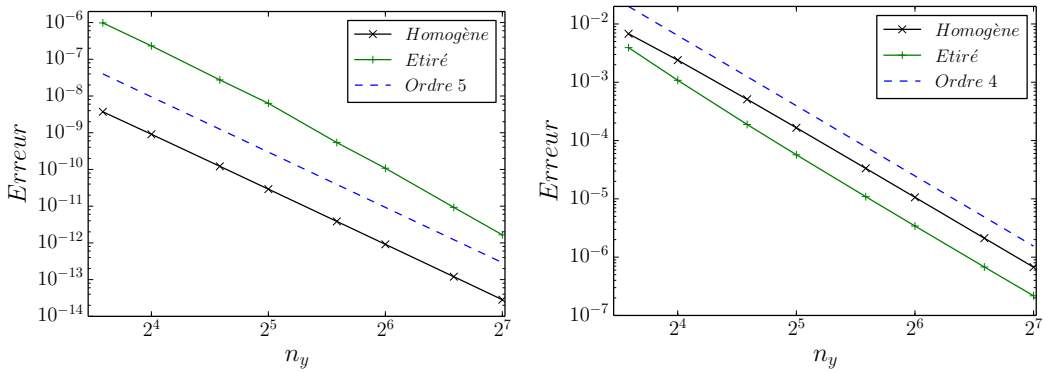
$$\left(1 + \frac{2\Delta t\pi^2}{RePr}\right) T^{n+1} = \left(1 - \frac{2\Delta t\pi^2}{RePr}\right) T^n \tag{3.3}$$

Cette relation de récurrence permet de construire une solution semi-analytique qui intègre l'erreur liée à la discrétisation temporelle. Pour le schéma semi-implicite, notre solution semi-analytique est :

$$T^{n+1} = \frac{1 - \frac{2\Delta t \pi^2}{RePr}}{1 + \frac{2\Delta t \pi^2}{RePr}} T^n \tag{3.4}$$

Un coefficient d'amortissement négatif implique un changement de signe de la température à chaque pas de temps. Si l'on souhaite éviter cette situation, la contrainte sur le pas de temps est $\Delta t < \frac{RePr}{2\pi^2}$. Dans les tests de cette sous-section, on aura $Re = 1000$, $Pr = 0.2$ et $\Delta t = 10^{-4}$. On se place donc très loin du cas où le coefficient d'amortissement est négatif.

La situation est sensiblement plus complexe lorsque le maillage est étiré. On montre dans l'annexe C que l'on a toujours une solution semi-analytique sur maillage étiré après un pas de temps si l'initialisation du champ de température est faite avec précaution. On discrétise le segment $0 \leq y \leq 1$ avec n_y points. On va mesurer la convergence spatiale en faisant varier n_y. On compare la solution numérique à la solution semi-analytique. L'erreur en norme infinie (erreur locale maximale) est tracée figure 3.1.



(a) Dirichlet (b) Neumann

FIGURE 3.1 – Erreur (L_{inf}) sur la diffusion dans le fluide. (a) : température imposée. (b) : flux imposé.

Lorsque le maillage est homogène, la convergence est d'ordre 5 (respectivement 4) pour une condition de type Dirichlet (respectivement Neumann). Lorsque la température est imposée, la condition à la limite est exacte. L'approximation vient alors du schéma diffusif au nœud suivant : il est d'ordre 4. Lorsque le flux est imposé, on l'approche avec un schéma explicite d'ordre 3. Nos tests sur maillage homogène montrent une convergence d'ordre n pour un schéma au bord d'ordre $n - 1$.

La convergence diffère sensiblement lorsque l'on étire le maillage. Avec une température imposée, la convergence est d'ordre 5 lorsque le maillage est lâche puis d'ordre 6 sur les maillages les plus denses. Avec un flux imposé, on a une convergence plus rapide sur les maillages lâches mais on retrouve bien l'ordre 4 asymptotiquement.

Les travaux de B. Gustafsson [25] sur la convection ont montré que pour un schéma au bord d'ordre $n - 1$ combiné à un schéma intérieur d'ordre n, on obtient une convergence à l'ordre n. On obtient un comportement similaire pour la diffusion dans nos tests sur maillage homogène. On trouve dans la littérature des preuves pour la superconvergence des schémas d'ordre faible sur maillage quelconque (Ferreira et al. [16], Emmrich et al. [14]). Les travaux de Svard et al. [65] démontrent d'ailleurs que pour un problème diffusif, on peut avoir une convergence à l'ordre n lorsque la dérivée seconde au bord est approchée avec une schéma d'ordre $n - 2$. Nos tests suggèrent que les schémas d'ordre élevé utilisés dans Incompact3d peuvent être superconvergents.

En conclusion, la semi-implicitation du terme diffusif pour la thermique dans le fluide permet d'imposer la température ou le flux à la paroi et est compatible avec une grille

étirée.

3.1.2 Diffusion dans le solide

On utilise la même procédure pour valider la diffusion dans la direction y dans le solide. Le schéma d'avancement temporel est alors purement implicite (Euler implicite). La solution semi-analytique est donc :

$$T^{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{4\Delta t \pi^2}{G_1 RePr}} T^n \tag{3.5}$$

La mise en données est exactement la même que dans la sous-section 3.1.1, avec $G_1 = 1$. La figure 3.2a valide la convergence exponentielle de la méthode spectrale. On observe une légère augmentation de l'erreur sur les maillages très denses. Rappellons que l'on doit calculer l'inverse d'une matrice pleine. Cette opération est complexe et sensible aux erreurs d'arrondi. D'après nos tests, la perte de précision due à l'accumulation d'arrondis est d'environ un ordre de grandeur.

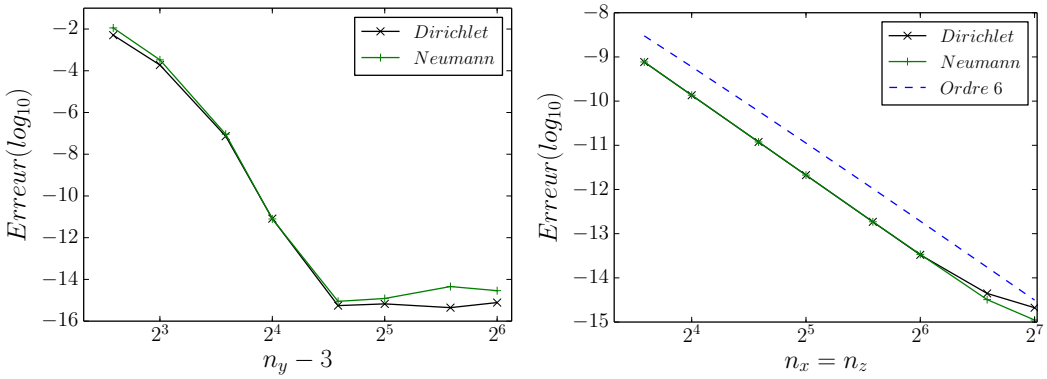
On teste également le module de thermique solide sur un problème tridimensionnel. Les fonctions utilisées sont alors :

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t = 0) &= \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \sin(2\pi z) \\ T(x, y, z, t = 0) &= \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \sin(2\pi z) \end{aligned} \tag{3.6}$$

L'avancement temporel dans la direction y est purement implicite tandis qu'il est explicite dans les directions x et z (Euler explicite). La solution semi-analytique est alors :

$$T^{n+1} = \frac{1 - \frac{8\Delta t \pi^2}{G_1 RePr}}{1 + \frac{4\Delta t \pi^2}{G_1 RePr}} T^n \tag{3.7}$$

Le nombre de points dans le solide pour la direction y est fixé à 27 (grille de Chebyshev d'ordre 24). On fait varier le nombre de points dans les directions x (n_x) et z (n_z) simultanément ($n_x = n_z$). La figure 3.2b montre une convergence à l'ordre 6. La précision du schéma de diffusion est limitée par celle des schémas compacts utilisés dans les directions x et z.



(a) 1D (direction y) (b) 3D

FIGURE 3.2 – Logarithme de l'erreur (L_{inf}) pour la diffusion dans le solide. (a) : 1D. (b) : 3D.

En conclusion, le module de thermique solide permet d'imposer la température ou le flux à la paroi. On retrouve bien la convergence exponentielle de la méthode spectrale et la convergence à l'ordre 6 des schémas compacts.

3.1.3 Tourbillons de Taylor-Green

Les tourbillons de Taylor-Green 2D constituent une solution analytique des équations de Navier-Stokes. Sur le domaine $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$, la solution est :

$$\begin{aligned} u_x(x,y,z,t) &= \sin(2\pi x)\cos(2\pi y)\, e^{\left(-\frac{8\pi^2}{Re}t\right)} \\ u_y(x,y,z,t) &= -\cos(2\pi x)\sin(2\pi y)\, e^{\left(-\frac{8\pi^2}{Re}t\right)} \\ u_z(x,y,z,t) &= 0 \\ T(x,y,z,t) &= \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\, e^{\left(-\frac{8\pi^2}{RePr}t\right)} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dans nos tests, nous utilisons $Re = 1000$, $Pr = 0.2$ et $dt = 10^{-4}$. On mesure l'erreur de discrétisation spatiale en faisant varier simultanément le nombre de mailles dans les directions x et y : $n_x = n_y$. On valide avec cette solution la bonne implémentation des équations de Navier-Stokes pour des conditions de périodicité, de symétrie et la compatibilité avec une grille étirée. On utilise comme solution de référence les solutions semi-analytiques. Pour le scalaire, sur maillage homogène, elles sont :

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^n\left(1 - \frac{3\Delta t}{2}\frac{8\pi^2}{RePr}\right) + T^{n-1}\frac{\Delta t}{2}\frac{8\pi^2}{RePr} \quad \textit{explicite (AB2)} \\ T^{n+1}\left(1 + \frac{\Delta t}{2}\frac{4\pi^2}{RePr}\right) &= T^n\left(1 - \frac{\Delta t}{2}\frac{16\pi^2}{RePr}\right) + T^{n-1}\frac{\Delta t}{2}\frac{4\pi^2}{RePr} \quad \textit{semi-implicite} \end{aligned} \tag{3.9}$$

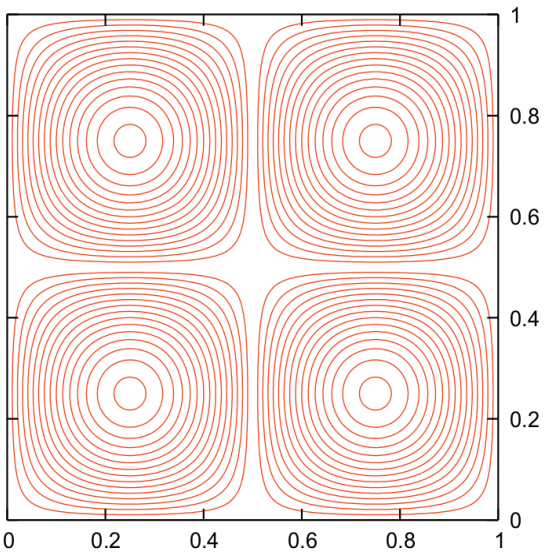
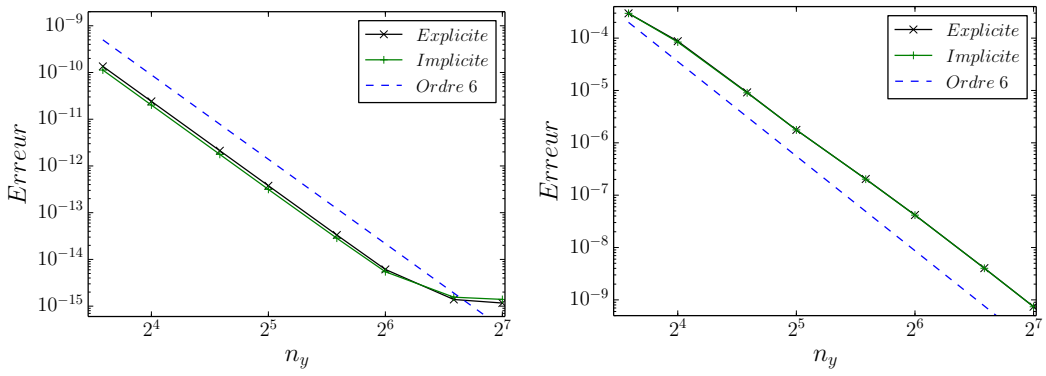


FIGURE 3.3 – Lignes de courant pour les tourbillons de Taylor-Green, Laizet et al. [41].

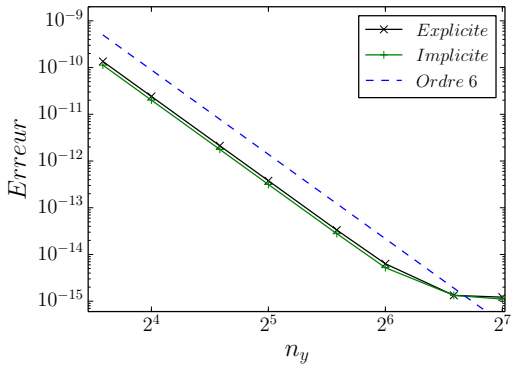
La situation est sensiblement plus complexe lorsque le maillage est étiré et l'avancement temporel implicite. La stratégie exposée dans l'annexe C s'adapte facilement aux tourbillons de Taylor-Green et permet de construire une solution semi-analytique sur maillage étiré pour un pas de temps. La structure de l'écoulement est relativement simple, en atteste les lignes de courant tracées figure 3.3. Les figures 3.4 et 3.5 montrent la convergence pour une condition de périodicité et pour une condition de symétrie sur maillage étiré. La convergence pour une condition de symétrie sur maillage homogène n'est pas tracée : elle se superpose parfaitement avec la convergence pour une condition de périodicité, comme attendu.

Pour la vitesse, la figure 3.4 montre une convergence à l'ordre 6 en implicite comme en explicite. Sur le cas périodique, l'erreur atteint un palier sur les maillages très denses lié

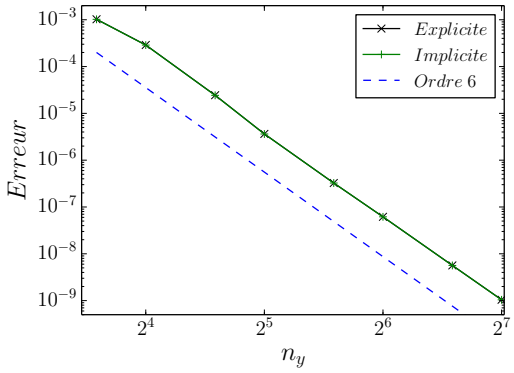


(a) u_x, périodique

(b) u_x, symétrie + étirement



(c) u_y, périodique



(d) u_y, symétrie + étirement

FIGURE 3.4 – Tourbillons de Taylor-Green. Erreur (L_{inf}) sur la vitesse. Haut : u_x. Bas : u_y. Gauche : périodique. Droite : Symétrie et maillage étiré.

aux erreurs d'arrondi (double précision). Les 2 composantes de la vitesse présentent une convergence analogue. On remarque que l'étirement de la grille amène une erreur élevée en valeur absolue par rapport à une grille homogène : une grille grossière au centre du domaine et raffinée aux bords n'est absolument pas optimale pour ce problème.

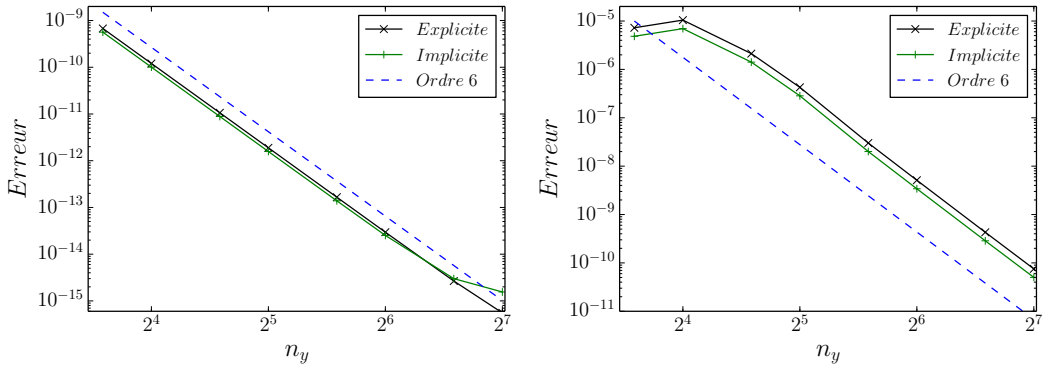
Pour la température, la figure 3.5 montre également une convergence à l'ordre 6 et un maintien de la précision lorsque l'on utilise la formulation implicite. La convergence sur un maillage étiré et grossier (~15 mailles) n'a pas un comportement asymptotique : raffiner le maillage provoque une augmentation de l'erreur. Il s'agit d'un biais introduit par la façon dont nous mesurons l'erreur (L_{inf} est une mesure locale). On retrouve bien la convergence à l'ordre 6 dès que le maillage est suffisament fin.

En conclusion, la bonne prise en compte des conditions de périodicité, de symétrie, et la compatibilité de notre algorithme avec l'étirement du maillage est démontrée. On conserve la convergence à l'ordre 6 avec l'algorithme semi-implicite et l'erreur est du même ordre de grandeur en explicite et en implicite.

3.1.4 Cavité entrainée (Burgraff)

La cavité entraineée dite de Burgraff est une solution stationnaire manufacturée des équations de Navier-Stokes. Elle fait intervenir un terme source dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement et est stable à bas Reynolds. On a une paroi en $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ et $y = 1$. La vitesse est nulle aux parois, sauf en $y = 1$: $u_x = 16x^2 (x-1)^2$ et $u_y = 0$. La solution s'écrit :

$$\begin{aligned} u_x(x,y,t) &= 8\left(x^4 - 2x^3 + x^2\right)\left(4y^3 - 2y\right) \\ u_y(x,y,t) &= -8\left(4x^3 - 6x^2 + 2x\right)\left(y^4 - y^2\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$



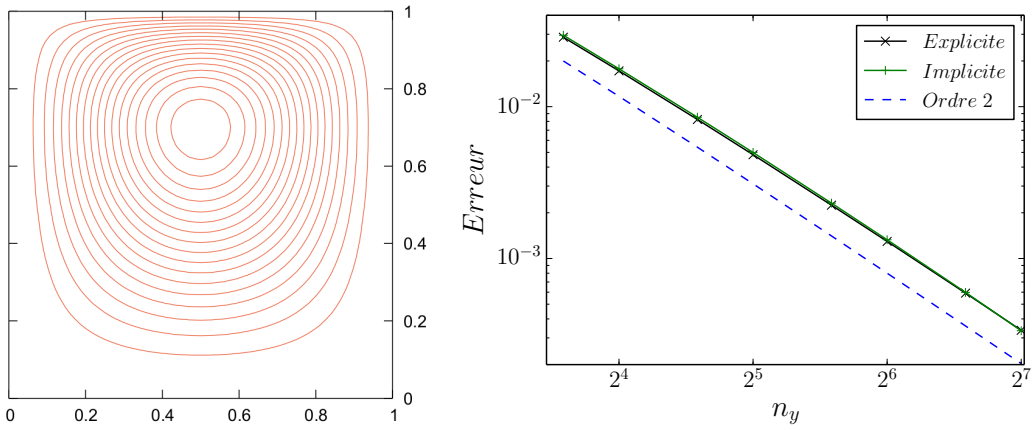
(a) Périodique (b) Symétrie + étirement

FIGURE 3.5 – Tourbillons de Taylor-Green. Erreur (L_{inf}) sur la température. Gauche : périodique. Droite : Symétrie et maillage étiré.

Le système d'équations résolues avec le terme source est :

$$\begin{aligned}
\partial_t u_i + \frac{\partial_j (u_i u_j) + u_j \partial_j u_i}{2} &= -\partial_i p + \frac{1}{Re}\partial_{jj} u_i + f_i \\
\text{avec } f_x &= -\frac{8}{Re}\left(24g + 2g^{"}h^{"} + g^{""}h\right) \\
&+ 64\left(\frac{g^{'2}}{2}\left(hh^{"} - h^{'}h^{"}\right) - hh^{'}\left(g^{'}g^{"} - g^{'2}\right)\right) \\
f_y &= 0 \\
g(x) &= \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \\
h(y) &= y^4 - y^2
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Le nombre de Reynolds (Re) utilisé pour nos tests est égal à 10. Les lignes de courant de l'écoulement sont tracées figure 3.6a.



(a) Lignes de courant, [41]. (b) Erreur (L_{inf}).

FIGURE 3.6 – Cavité entrainée (Burgraff). (a) : Lignes de courant, Laizet et al. [41]. (b) : Erreur (L_{inf}) sur la vitesse.

L'erreur tracée figure 3.6b est analogue que l'on utilise le schéma explicite ou implicite. On converge à l'ordre 2, avec une erreur maximale aux coins du domaine ($i = 2$ ou $i = n_x - 1$ et $j = n_y - 1$). C'est l'hypothèse de parité à la paroi faite pour le calcul de la divergence et du gradient de pression qui cause cette erreur (voir la section 4.4 dans l'article de Laizet

et al. [41]). En conclusion, le schéma implicite ne dégrade pas la précision du code lorsqu'il y a une paroi. Il permet également d'appliquer une condition de Dirichlet inhomogène sur la vitesse.

3.2 Dynamique du canal plan

Le cas du canal plan a été évoqué en introduction dans la sous-section 1.2.2. Dans cette section, on va décrire l'écoulement d'un point de vue purement dynamique : on analyse ainsi la pression et la vitesse. La thermique sera abordée à partir du chapitre 4.

3.2.1 Présentation du cas

Comme schématisé figure 3.7, dans un canal plan, le fluide s'écoule entre 2 plaques parallèles. Lorsque l'écoulement est turbulent, le fluide frotte contre les parois, ce qui induit une perte d'énergie cinétique. Dans notre étude, l'écoulement est statistiquement stationnaire. On a donc besoin de forcer l'écoulement pour compenser la perte d'énergie cinétique liée au frottement à la paroi. L'équation de conservation de la quantité de mouvement comporte alors un terme source :

$$\partial_t u_i = -\partial_j \left(u_i u_j\right) - \partial_i p + \frac{1}{Re}\partial_{jj} u_i + f\delta_{i,1} \tag{3.12}$$

Comme l'indique le symbole de Kronecker $\delta_{i,1}$, ce forcage n'est présent que dans la direction x. Ce forçage est choisit constant : il ne varie pas au cours du temps et ne dépend pas de la position dans le domaine de calcul. L'amplitude f du forçage est calée pour avoir une vitesse débitante moyenne unitaire.

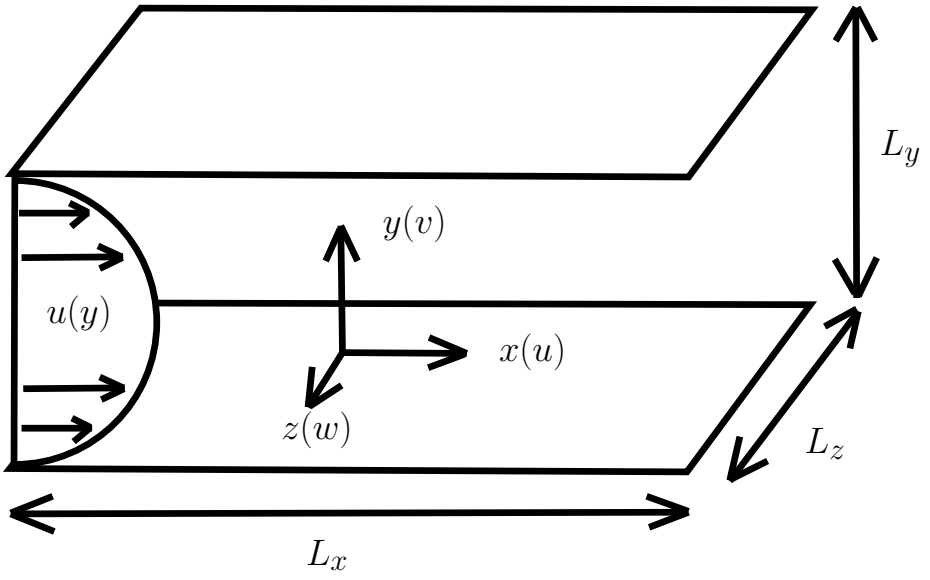


FIGURE 3.7 – Configuration d'un écoulement de type canal plan.

Le domaine de calcul est un pavé droit (parallélépipède rectangle). On a donc : $[0,0,0] \leq [x,y,z] \leq [L_x, L_y, L_z]$. Une des paroi se trouve à la position $y = 0$ tandis que l'autre est à la position $y = L_y$. Au niveau de chaque paroi, les 3 composantes de la vitesse sont nulles. Dans les directions x et z, on utilise des conditions de périodicité.

En plus d'être stationnaire, l'écoulement présente des directions d'homogénéité (périodicité pour ces dernières). On va pouvoir estimer les grandeurs statistiques en moyennant en espace et en temps. Ainsi, on suppose que l'on a à disposition le champ de vitesse axiale

u_x aux positions (x_i, y_j, z_k) avec $(1,1,1) \leq (i,j,k) \leq (n_x, n_y, n_z)$ et aux instants t_l avec $1 \leq l \leq n_t$. On peut alors estimer la vitesse moyenne :

$$\overline{u_x(y_j)} = \frac{1}{n_x n_z n_t} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{k=1}^{n_z} \sum_{l=1}^{n_t} u_x \left(x = x_i, y = y_j, z = z_k, t = t_l\right) \tag{3.13}$$

La moyenne ainsi estimée est une approximation de la vraie vitesse moyenne (on parle d'espérance en mathématiques). Plus on dispose de données, meilleure est l'approximation, plus le calcul est coûteux. Il faut donc trouver un équilibre entre le coût de calcul et la précision de l'approximation. Comme montré par Oliver et al. [58], on peut estimer précisément l'erreur commise lors de l'approximation des grandeurs moyennes. Bien entendu, l'erreur d'approximation dépend de la grandeur statistique considérée. Dans nos simulations, l'estimation de l'erreur pour les moments d'ordre 1 et 2 est de 1%.

3.2.2 Mise en données

Pour décrire complètement la simulation, on a besoin d'un grand nombre de paramètres : amplitude du forçage, taille du domaine, durée de la simulation, nombre de points dans chaque direction, taille des mailles, pas de temps utilisé, nombre de Reynolds. Dans un premier temps, on donne les grandeurs qui permettent de reproduire directement le calcul avec le code. On introduit ensuite la vitesse de frottement à la paroi. On va l'utiliser pour comparer notre mise en données avec celles disponibles dans la littérature.

Amplitude du forçage. En général, lorsque l'on lance le calcul, on ne peut pas commencer tout de suite à collecter des statistiques : l'écoulement n'est pas pleinement développé. Lors de ce transitoire, on impose le débit et on surveille la correction appliquée pour maintenir le débit constant. Le facteur correctif est directement lié au frottement à la paroi. Une fois que l'écoulement est stabilisé, on laisse tourner le calcul et on moyenne ce facteur correctif. C'est ainsi que l'on cale l'amplitude f du forçage pour obtenir une vitesse débitante moyenne (U_{deb}) unitaire dans nos calculs.

Mise en données brutes. En ce qui concerne la taille du domaine, on a : $L_x = 25.6$, $L_y = 2$ et $L_z = 8.52$. Le nombre de Reynolds basé sur la mi-hauteur du canal, la vitesse débitante moyenne et la viscosité dynamique est de 2 280 tandis que le pas de temps vaut 2.10^{-3}. Pour le maillage, on a : $n_x = 256$, $n_y = 193$ et $n_z = 256$. Le maillage est raffiné aux 2 parois (`istret=2`) et le paramètre de raffinement (`beta`) vaut 0.225. Les statistiques que nous allons voir sont celles obtenues après un million et demi de pas de temps.

Vitesse de frottement à la paroi. L'équation de conservation de la quantité de mouvement peut être moyennée en temps. Dans le cas du canal plan stationnaire, pour la direction x, on obtient :

$$0 = -\partial_y R_{xy} + \frac{1}{Re} \partial_{yy} \overline{u_x} + f \delta_{i,1} \tag{3.14}$$

À la paroi, c'est le terme visqueux qui domine. Le cisaillement associé à ce dernier est : $\frac{\partial_y \overline{u_x}}{Re}$. Il est homogène à une vitesse au carré. On l'utilise donc pour définir la vitesse de frottement à la paroi u_τ :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{1}{Re} \partial_y \overline{u_x} \left(y = 0\right)} = \sqrt{-\frac{1}{Re} \partial_y \overline{u_x} \left(y = L_y\right)} \tag{3.15}$$

Unités de paroi. On va utiliser u_τ comme vitesse caractéristique pour adimensionner nos résultats. Pour la distance caractéristique, on utilise $\frac{1}{Re\ u_\tau}$. On en déduit immédiatement le temps caractéristique $\frac{1}{Re\ u_\tau^2}$. On notera ainsi u_i^+ la composante i de la vitesse

en unité de paroi ou y^+ la distance au bord en unité de paroi. En s'appuyant sur ces grandeurs, on définit le nombre de Reynolds associé au frottement à la paroi Re_τ :

$$Re_\tau = \frac{u_\tau \frac{L_y}{2}}{\nu} = \frac{Re}{U_{deb}\frac{L_y}{2}} u_\tau \frac{L_y}{2} = Re\frac{u_\tau}{U_{deb}} \tag{3.16}$$

Mise en données adimensionnées. Le régime turbulent obtenu dans le canal plan correspond à un nombre de Reynols à la paroi (Re_τ) d'environ 150. Le tableau 3.1 compare la mise en données de notre calcul avec celle utilisée par Kasagi et al. [34] et Tiselj et al. [67] pour ce nombre de Reynolds.

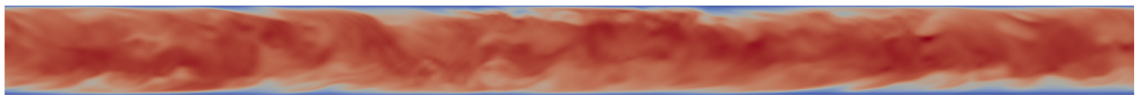
	Présente	Kasagi et al. [34]	Tiselj et al. [67]
Domaine $[L_x^+,L_y^+,L_z^+]$	[3814,298,1269]	[2356,300,942]	[2356,300,471]
Grille $[n_x,n_y,n_z]$	[256,193,256]	[128,97,128]	[128,97,65]
Re_τ	149	150	150
Δy^+	[0.49,4.8]	[0.08,4.9]	[0.08,4.9]
$[\Delta_x^+, \Delta_z^+]$	[14.8,5.1]	[18.4,7.36]	[18.4,7.4]
Δt^+	0.02	0.12	0.12
Durée	29000	2100	6000
Schémas	compacts	spectraux	

TABLE 3.1 – Paramètres de la simulation.

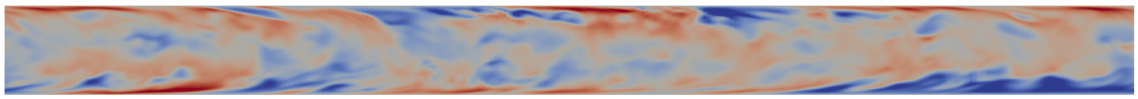
Notre domaine est plus étendu que ceux de référence et notre maillage est plus fin dans les directions x et z. La grille de Chebyshev utilisée dans la direction y dans les calculs de Kasagi et al. [34] et Tiselj et al. [67] est extrêmement raffinée à la paroi. Notre maillage est plus grossier uniquement dans la direction y à proximité de la paroi.

Au niveau temporel, notre pas de temps est plus fin. L'utilisation d'un pas de temps faible permet d'avoir une meilleure précision lorsqu'il y a un couplage thermique entre le fluide et le solide (schéma de couplage faible d'ordre 1, cf sous-section 2.3.3). La durée totale de nos simulations est plus grande que celles de référence. Cette durée est excessive d'un point de vue dynamique. En revanche, on a besoin d'effectuer des simulations très longues pour faire converger le scalaire lorsqu'il y a du transfert thermique conjugué. On montre dans l'annexe E que les statistiques convergent lentement dans le solide lorsque l'on est loin de l'interface fluide-solide. C'est ce qui explique la longue durée du calcul considéré ici.

Champs instantanés. À titre d'illustration et préalablement à l'analyse des grandeurs statistiques, on présente quelques coupes d'un champ instantané (la vitesse axiale u_x). On présente le champ de vitesse brut et sa partie fluctuante (on retranche au champ instantané le champ moyen).



(a) Vitesse axiale instantanée



(b) Partie fluctuante axiale.

FIGURE 3.8 – Écoulement de gauche à droite. Champ instantané de vitesse axiale. Coupe à z constant. (a) : Vitesse axiale instantanée. (b) : Partie fluctuante axiale.

La figure 3.8 est une coupe à z constant de l'écoulement. La vitesse instantanée est maximale loin des parois. Ce n'est pas le cas pour la partie fluctuante : les fluctuations les plus intenses se trouvent à proximité des parois. Cette observation qualitative sera confirmée par les moments d'ordre 2. Les fluctuations de vitesse forment des structures inclinées par rapport à la paroi. Ces structures turbulentes sont une caractéristique forte de la turbulence pariétale.

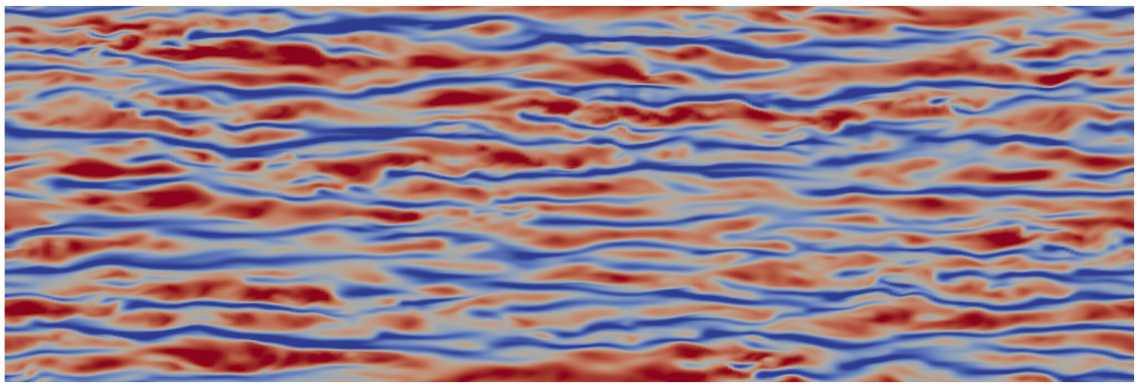
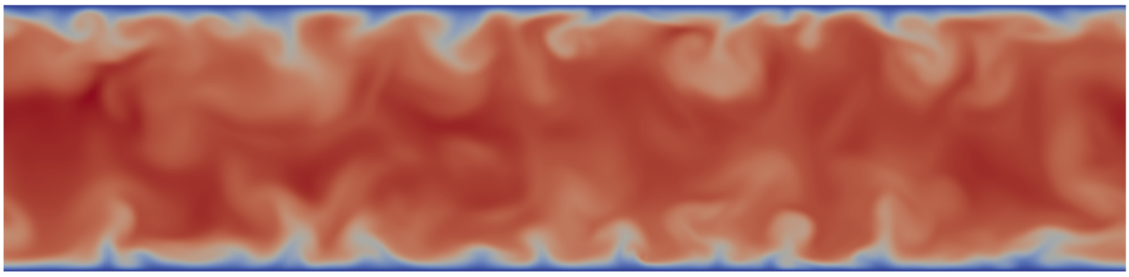
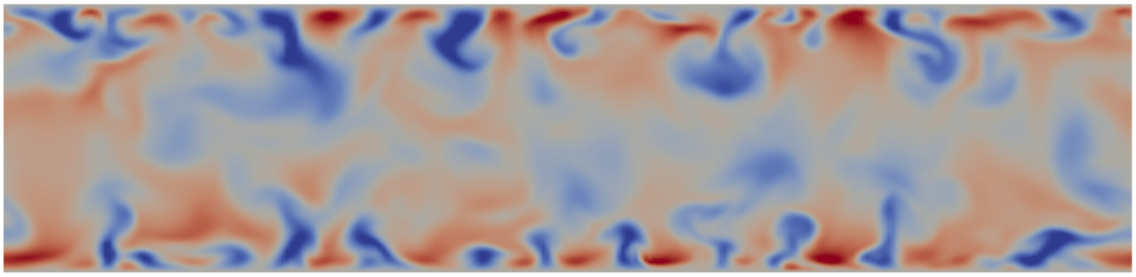


FIGURE 3.9 – Champ instantané de vitesse axiale. Coupe à y constant ($y^+ = 15$).

La figure 3.9 est une coupe à y constant. On observe des structures turbulentes allongées. D'un point de vue dynamique, ces structures sont transportées par l'écoulement : elles s'étirent et peuvent se fragmenter ou fusionner.



(a) Vitesse axiale instantanée



(b) Partie fluctuante axiale.

FIGURE 3.10 – Champ instantané de vitesse axiale. Coupe à x constant. (a) : Vitesse axiale instantanée. (b) : Partie fluctuante axiale.

La figure 3.10 est une coupe à x constant. On observe à nouveau des fluctuations maximales à proximité de la paroi. La caractérisation rigoureuse de ces structures turbulentes est délicate et s'appuie sur de puissants outils d'analyse statistique. Ce sujet a fait l'objet de nombreuses études (Blackburn et al. [5], Farrell et al. [15], Haller [26], Jimenez et al. ([32], [31], [30])) et sort du cadre de nos travaux.

3.2.3 Grandeurs moyennes

Les données de référence évoquées dans la suite de ce chapitre sont celles issues des travaux de Kasagi et al. [34]. Dans cette sous-section, on se limite aux moments d'ordre 1. Compte-tenu des symétries du problème, il n'y a que la vitesse axiale (u_x^+) et la pression (p^+) qui ont une moyenne non-nulle. La pression moyenne étant absente des données de référence à notre disposition, on reporte sa validation à la sous-section suivante. En effet, l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction y moyennée connecte la pression moyenne à la variance de la vitesse normale à la paroi (R_{yy}). Donc, si on a validé R_{yy}, on peut l'utiliser pour valider p^+.

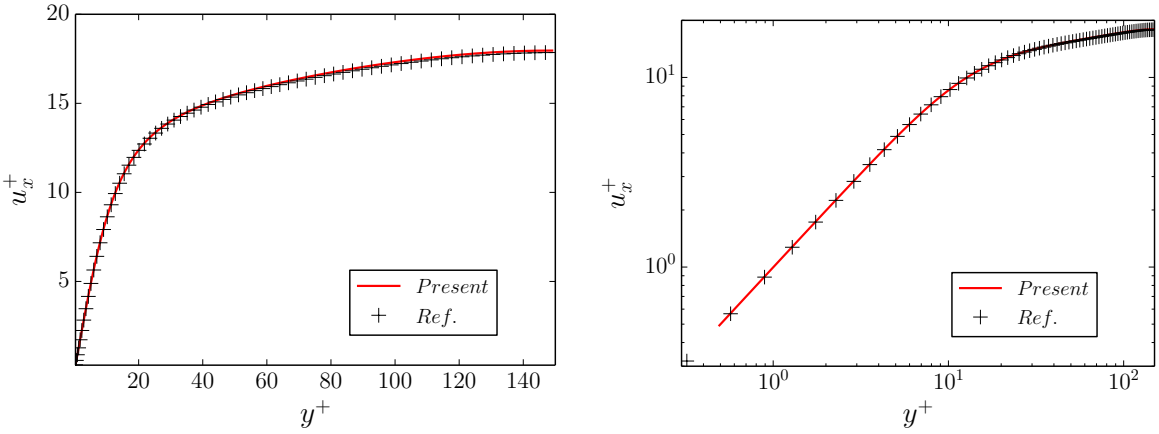


FIGURE 3.11 – Vitesse moyenne u_x^+. Gauche : axes linéaires. Droite : axes logarithmiques. Ligne : DNS. Symboles : Kasagi et al. [34]

La figure 3.11 montre un très bon accord entre nos résultats et ceux de référence pour la vitesse moyenne. Le tracé avec des axes linéaires permet de vérifier l'accord sur l'ensemble du domaine tandis que le tracé avec des axes logarithmiques permet de le vérifier à proximité de la paroi, zone où le maillage est dense et où les variations sont plus fortes.

3.2.4 Moments d'ordre 2

Les moments d'ordre 2 que nous validons ici sont les tensions de Reynolds (R_{ij}) et la variance de la pression ($\overline{p'^2}$).

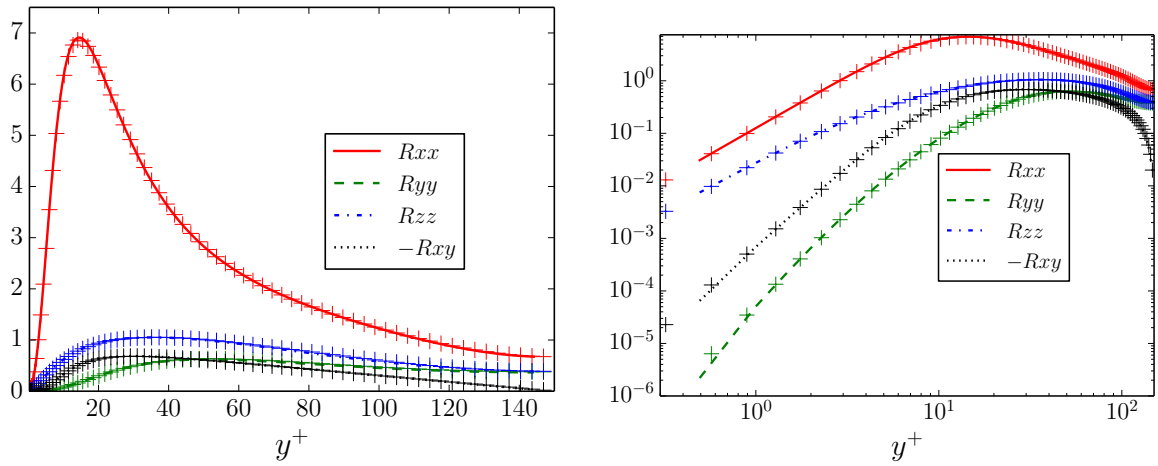


FIGURE 3.12 – Tensions de Reynolds R_{ij}. Gauche : axes linéaires. Droite : axes logarithmiques. Ligne : DNS. Symboles : Kasagi et al. [34]

La figure 3.12 montre un très bon accord entre nos résultats et ceux de référence pour les tensions de Reynolds. On confirme également les observations qualitatives issues des champs instantanés fluctuants : la variance de la vitesse axiale est maximale à proximité de la paroi ($y^+ \approx 15$).

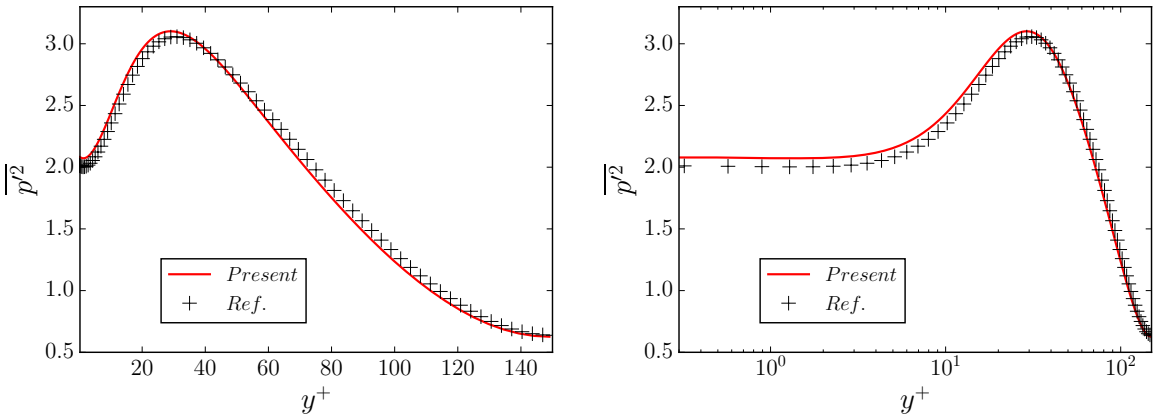


FIGURE 3.13 – Variance de la pression $\overline{p'^2}$. Gauche : axes linéaires. Droite : axes logarithmique-linéaire. Ligne : DNS. Symboles : Kasagi et al. [34]

La figure 3.13 montre un bon accord entre nos résultats et ceux de référence pour la variance de la pression. Notre estimation de $\overline{p'^2}$ à la paroi étant supérieure à celle de référence de 3%.

Compte tenu des symétries du problème, la moyenne de l'équation de conservation de la quantité de mouvement en y est :

$$0 = -\partial_y \left(R_{yy}\right) - \partial_y p^+ \tag{3.17}$$

La somme $p^+ + R_{yy}$ doit donc être constante, la valeur de la constante étant arbitraire : la pression est définie à une constante près. Rappelons que la pression est définie sur une grille décalée. On ne peut donc pas calculer directement la somme. Dans nos simulations, toutes les statistiques ont été collectées sur la grille vitesse. On va donc utiliser la moyenne de la pression interpolée (schéma compact d'ordre 6) sur la grille vitesse.

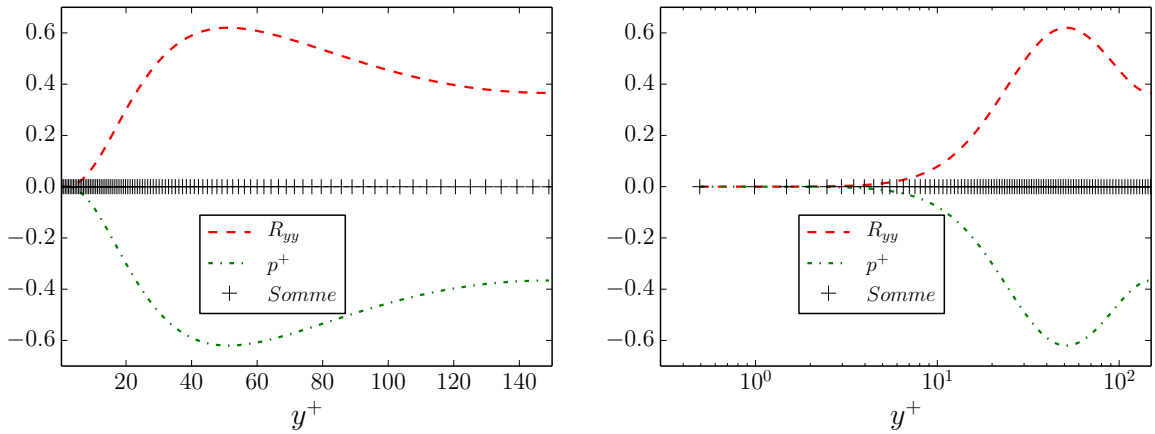


FIGURE 3.14 – Validation de la pression p^+ avec la tension de Reynolds R_{yy}. Gauche : axes linéaires. Droite : axes logarithmique-linéaire.

La figure 3.14 montre que la somme est bien constante. L'erreur relative maximale est de 2%, et se trouve près de la paroi. Si on compare la somme obtenue au maximum de R_{yy}, l'erreur tombe à 0.02%. La pression moyenne issue de nos calculs est donc en bon accord avec les résultats théoriques.

3.2.5 Bilans des tensions de Reynolds

L'équation de bilan des tensions de Reynolds est :

$$\begin{aligned}
\partial_t R_{ij} + \overline{u_k}\partial_k R_{ij} &= -R_{ik}\partial_k \overline{u_j} - R_{jk}\partial_k \overline{u_i} : \text{Production} \\
&- \partial_k \left(\overline{u_i' u_j' u_k'} \right) : \text{Diffusion turbulente} \\
&- \overline{u_j' \partial_i p'} - \overline{u_i' \partial_j p'} : \text{Corrélation vitesse - gradient de pression} \\
&+ \frac{1}{Re}\partial_{kk} R_{ij} : \text{Diffusion visqueuse} \\
&- \frac{2}{Re}\overline{\partial_k u_i' \partial_k u_j'} : \text{Dissipation } \varepsilon_{ij}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Les termes importants sont ceux qui doivent être modélisés : la diffusion turbulente, la corrélation vitesse - gradient de pression et la dissipation. Dans le cas du canal plan, de nombreux termes sont nuls. Ainsi, il n'y a de la production que pour R_{xx} et R_{xy}. À la paroi, la condition d'adhérence impose un équilibre entre la dissipation et la diffusion visqueuse (Manceau et al. [54]). Or, la contribution tangente dans la dissipation est nulle à la paroi ($u_i' = \partial_x u_i' = \partial_z u_i' = 0$). La dissipation à la paroi est donc réduite à sa contribution normale, qui vaut zéro pour R_{xy} et R_{yy} en raison de la nullité de la divergence du champ de vitesse ($u_y' \propto y^2$).

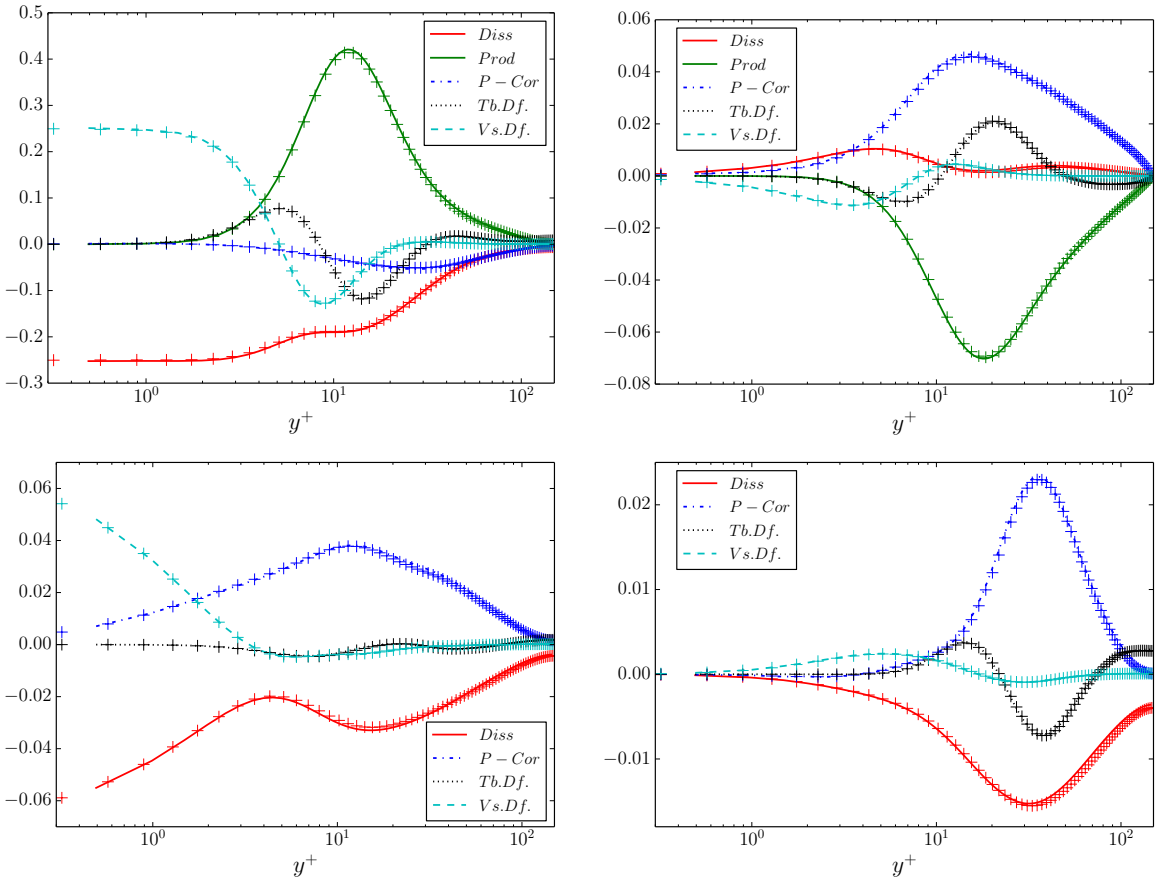


FIGURE 3.15 – Bilans des tensions de Reynolds. Dans le sens-horaire depuis le coin supérieur gauche : $R_{xx}, R_{xy}, R_{yy}, R_{zz}$. Ligne : DNS. Symboles : Kasagi et al. [34]

La figure 3.15 montre un très bon accord avec les données de référence pour tous les bilans des tensions de Reynolds.

3.2.6 Bilan de la dissipation turbulente

Le tenseur dissipation des tensions de Reynolds R_{ij} vaut $-\frac{2}{Re}\varepsilon_{ij}$ avec $\varepsilon_{ij} = \overline{\partial_k u'_i \partial_k u'_j}$. Son équation de bilan est :

$$\begin{aligned}
\partial_t \varepsilon_{ij} + \overline{u_k}\partial_k \varepsilon_{ij} &= -\partial_l \overline{u_i}\varepsilon_{il} - \partial_l \overline{u_j}\varepsilon_{jl} \text{ : Production par le gradient de vitesse moyenne} \\
&- \partial_l \overline{u_k}\left(\overline{\partial_l u'_i \partial_k u'_j} + \overline{\partial_k u'_i \partial_l u'_j}\right) \text{ : Production mixte} \\
&- \partial_{lk}\overline{u_i}\,\overline{u'_l \partial_k u'_j} - \partial_{lk}\overline{u_j}\,\overline{u'_l \partial_k u'_i} \text{ : Production par la hessienne de vitesse} \\
&- \overline{\partial_l u'_i \partial_k u'_j \partial_k u'_l} - \overline{\partial_l u'_j \partial_k u'_i \partial_k u'_l} \text{ : Production turbulente} \\
&- \partial_k\left(\overline{u'_k \partial_l u'_i \partial_l u'_j}\right) \text{ : Transport turbulent} \\
&- \overline{\partial_{ik} p' \partial_k u'_j} - \overline{\partial_{jk} p' \partial_k u'_i} \text{ : Corrélation gradient } \mathbf{u} \text{ - hessienne } p \\
&+ \frac{1}{Re}\partial_{kk}\varepsilon_{ij} \text{ : Diffusion visqueuse} \\
&- \frac{2}{Re}\overline{\partial_{kl} u'_i \partial_{kl} u'_j} \text{ : Dissipation}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

La dissipation ε est la trace de ε_{ij} : $\varepsilon = \varepsilon_{ii}$. La notation utilisée ici diffère de celle présente dans la littérature classiquement (voir Mansour et al. [55] par exemple). Dans la littérature, ε_{ij} est le double du notre et ε est la demi-trace de ε_{ij}. On a ainsi un écart de définition limité à ε_{ij}. On a donc une dissipation ε qui est identique à celle que l'on trouve classiquement dans la littérature. L'équation de bilan pour ε est :

$$\begin{aligned}
\partial_t \varepsilon + \overline{u_k}\partial_k \varepsilon &= -2\partial_l \overline{u_i}\varepsilon_{il} \text{ : Production par le gradient de vitesse moyenne } (P1) \\
&- 2\partial_l \overline{u_k}\;\overline{\partial_l u'_i \partial_k u'_i} \text{ : Production mixte } (P2) \\
&- 2\partial_{lk}\overline{u_i}\,\overline{u'_l \partial_k u'_i} \text{ : Production par la hessienne de vitesse } (P3) \\
&- 2\overline{\partial_l u'_i \partial_k u'_i \partial_k u'_l} \text{ : Production turbulente } (P4) \\
&- \partial_k\left(\overline{u'_k \partial_l u'_i \partial_l u'_i}\right) \text{ : Transport turbulent } (TU) \\
&- 2\overline{\partial_{ik} p' \partial_k u'_i} \text{ : Corrélation gradient de vitesse - hessienne de pression } (PR) \\
&+ \frac{1}{Re}\partial_{kk}\varepsilon \text{ : Diffusion visqueuse } (DF) \\
&- \frac{2}{Re}\overline{\partial_{kl} u'_i \partial_{kl} u'_i} \text{ : Dissipation } (DS)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

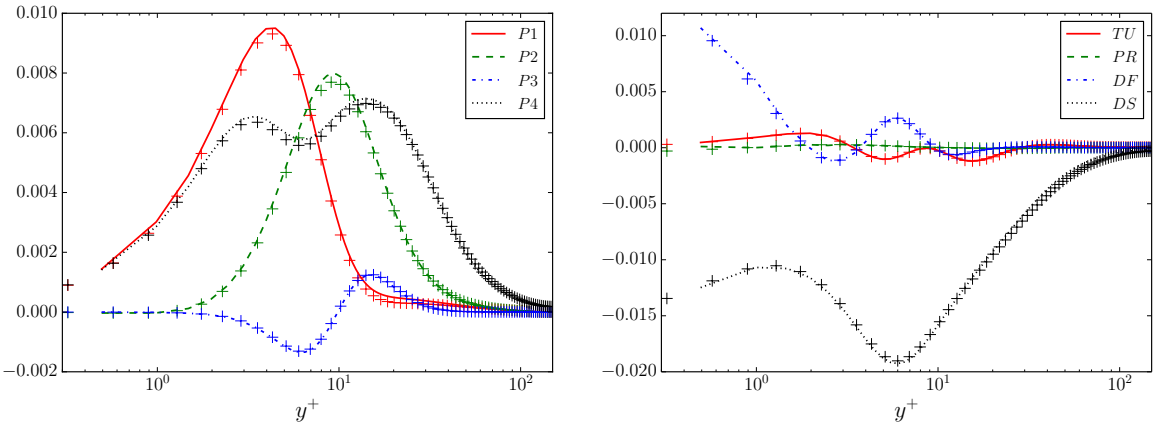


FIGURE 3.16 – Bilan de la dissipation ε. Gauche : $P1$, $P2$, $P3$, $P4$. Droite : TU, PR, DF, DS. Lignes : DNS. Symboles : Kasagi et al. [34]

La figure 3.16 montre qu'il y a un bon accord entre nos données et celles de référence pour le bilan de ε. La somme des termes ne vaut pas exactement zéro, tant pour nos

données que pour celles de référence. Dans les 2 cas, l'amplitude relative maximale de cette somme est de l'ordre de 10% (comparé au maximum de la dissipation). Dans le bilan de ε, tous les termes tendent vers 0 lorsque l'on est loin de la paroi. Les termes dominants diminuent en $\frac{1}{y^2}$. On multiplie donc tous les termes par y^2 pour obtenir le bilan compensé.

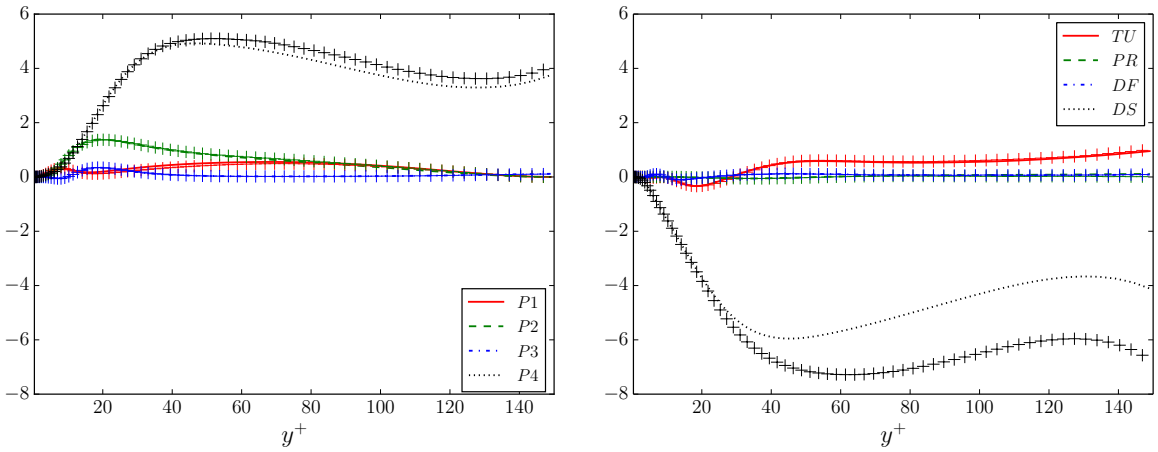


FIGURE 3.17 – Bilan compensé de la dissipation ε. Gauche : $P1$, $P2$, $P3$, $P4$. Droite : TU, PR, DF, DS. Lignes : DNS. Symboles : Kasagi et al. [34]

Sur le bilan compensé (figure 3.17), on observe un large écart entre la dissipation que nous obtenons et celle du calcul de référence. Pour ce bilan compensé, la somme des termes est de 20% pour notre calcul et pour celui de référence.

Globalement, la comparaison entre nos résultats et ceux de Kasagi et al. [34] est favorable : les schémas compacts d'ordre élevé utilisés permettent d'atteindre une précision comparable à celle des méthodes spectrales. Les statistiques obtenues montrent que la dynamique de l'écoulement est bien reproduite. D'après les données de référence, entre $y^+ = 0.03$ et la paroi, la dissipation de ε varie de 15%. Entre $y^+ = 0.5$ et la paroi, cette variation est de 47%. Bien que notre résolution en y semble marginale pour bien estimer la dissipation de ε, à la paroi, l'écart avec les données de référence est bon (8%).

L'incertitude qui plane sur nos résultats est donc du même ordre de grandeur que celle présente dans les données de référence. Nous avons effectué une simulation sur un maillage 2 fois plus fin dans les directions x et z, sans percevoir d'écarts importants dans la dynamique. Soulignons tout de même que le pas de maillage utilisé dans ce calcul très finement résolu ($\Delta x^+ = 7.4$, $\Delta z^+ = 2.5$) est supérieur aux recommandations de Vreman et al. [73] en ce qui concerne le pas de maillage ($\Delta x^+ = 6$ pour une méthode spectrale) permettant d'obtenir une bonne estimation de ε.

3.2.7 Impact des points fantômes

Globalement, le code de calcul Incompact3d permet de reproduire avec précision les statistiques que l'on trouve dans les bases de données pour le canal plan tubulent. Comme on l'a évoqué dans la section 2.4, on utilise des points fantômes pour calculer le gradient de pression dans la direction normale à la paroi. On discute dans cette sous-section l'impact qu'ils ont. Soulignons que les points fantômes tels qu'utilisés dans le code sont équivalents à des hypothèses sur la parité des variables dérivées et interpolées.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction normale à la paroi est :

$$\partial_t u_y = -\frac{\partial_i \left(u_i u_y\right) + u_i \partial_i u_y}{2} - \partial_y p + \frac{1}{Re} \partial_{ii} u_y \tag{3.21}$$

À la paroi, la vitesse est nulle. Lorsque l'on s'en rapproche, l'accélération et la convection tendent donc vers 0. On a alors un équilibre entre la diffusion visqueuse de u_y et la dérivée

de la pression dans la direction y. Or, l'hypothèse de parité faite sur la pression (elle est paire) impose une dérivée nulle dans la direction y.

D'un point de vue physique, on brise ainsi l'équilibre qu'il y a dans l'équation de Navier-Stokes. D'un point de vue mathématique, il y a une perte de consistance. Bien entendu, cette inconsistance est localisée à proximité immédiate de la paroi. On est ainsi face à une couche-limite numérique : les schémas numériques utilisés imposent une contrainte supplémentaire et non physique sur l'écoulement au voisinage de la paroi. Les travaux de Guermond et al. [23] illustrent très bien cette problématique. Soulignons tout de même que cette inconsistance n'impacte pas les champs moyens : la pression moyenne est paire.

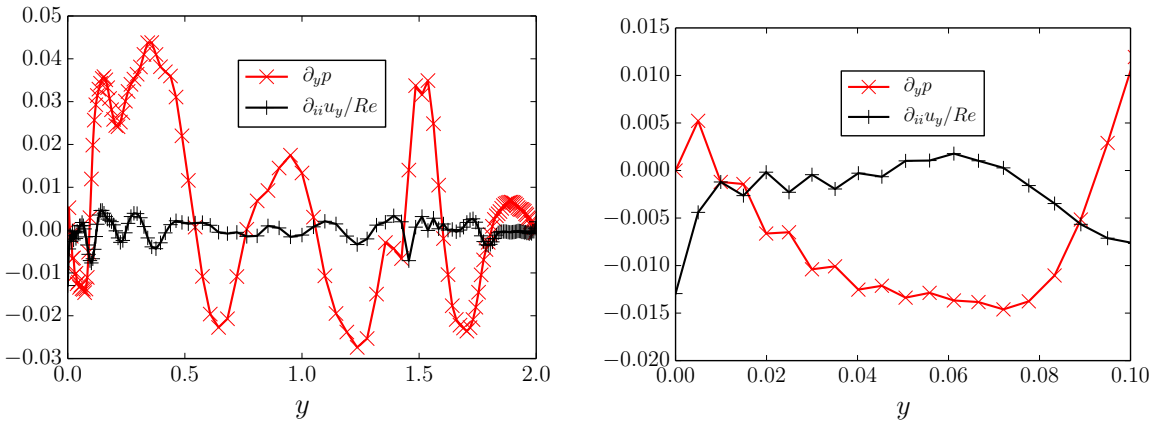


FIGURE 3.18 – Profil instantané pour le gradient de pression normal à la paroi et la diffusion visqueuse associée à u_y. Gauche : $0 \leq y \leq 2$. Droite : Zoom sur la paroi à $0 \leq y \leq 0.1$.

La figure 3.18 illustre bien le déséquilibre qui est présent sur les champs instantanés. La couche-limite numérique se traduit ainsi par de légères oscillations visibles à proximité de la paroi. Pour pallier à cette inconsistance, nos calculs utilisent un maillage relativement dense à proximité de la paroi. On parvient ainsi à obtenir des bilans équilibrés pour les tensions de Reynolds qui ne présentent pas d'artefacts numériques. En effet, pour tous les tests menés à résolution marginale ($y^+ \geq 1$ pour la première cellule), les bilans des tensions de Reynolds R_{yy} et R_{xy} sont entachés d'oscillations. Les termes impactés par ces oscillations sont la corrélation vitesse-gradient de pression et la diffusion visqueuse associée à ces tensions de Reynolds.

La corrélation vitesse-gradient de pression fait intervenir directement le gradient de la pression fluctuante, elle est donc particulièrement sensible aux oscillations qu'il peut porter. En ce qui concerne la diffusion visqueuse, elle est proportionnelle à la dérivée seconde de la tension de Reynolds. Bien que les profils de la tension de Reynolds semblent lisses, à résolution marginale, ils sont porteurs d'oscillations de faible amplitude. Or, l'opérateur de dérivée seconde amplifie fortement les grands nombres d'onde. On obtient ainsi, à résolution marginale, une diffusion visqueuse oscillante pour les tensions de Reynolds R_{xy} et R_{yy}. C'est la signature d'oscillations sur le champ de vitesse dans la direction y.

L'utilisation d'un maillage dense près de la paroi est le palliatif le plus simple à ces oscillations. D'autres solutions existent. Tout d'abord, on peut réduire l'ordre des schémas de dérivation et d'interpolation sur maillage décalé. Ainsi, avec des schémas d'ordre 2, aucune hypothèse de parité n'est faite pour le calcul de la divergence de la vitesse. Mais dégrader l'ordre du schéma c'est perdre en précision. On a alors besoin d'augmenter la finesse du maillage pour obtenir des résultats aussi précis que ceux obtenus avec des schémas d'ordre 6.

Nous avons également envisagé des modifications du schéma de prédiction-correction. Entre autres, des variantes du schéma de type rotationnel avec incrément de pression (section 3.3 dans Guermond et al. [23]). La pression auxiliaire utilisée dans ce schéma vérifie la bonne hypothèse de parité. Ce schéma s'appuie sur un terme visqueux totalement

implicite en temps.

Nous avons effectué des développement préliminaires pour implémenter un schéma d'avancement temporel avec une diffusion totalement implicite s'appuyant sur la méthode des directions alternées. Bien que les résultats soient encourageants, les incertitudes concernant la lourdeur, l'efficacité et la complexité de tels développements étaient fortes. Face à la nécessité d'obtenir des résultats, nous avons opté pour la simplicité : l'utilisation d'un maillage dense à proximité de la paroi.

Chapitre 4

Canal plan turbulent avec transport d'un scalaire passif et transfert thermique conjugué

Ce chapitre est dédié à la thermique dans le cas du canal plan turbulent. La section 4.1 présente les équations et les conditions aux limites liées à la thermique résolues dans nos simulations. L'étude que nous faisons de ces dernières est de nature fondamentale : l'analyse mathématique permet de démontrer ce que l'intuition physique suggère et ce que nos résultats montrent. La section 4.2 est dédiée aux simulations ne comportant pas de thermique solide. Les résultats des calculs avec transfert thermique conjugué se trouvent dans la section 4.3.

Champ instantané de température

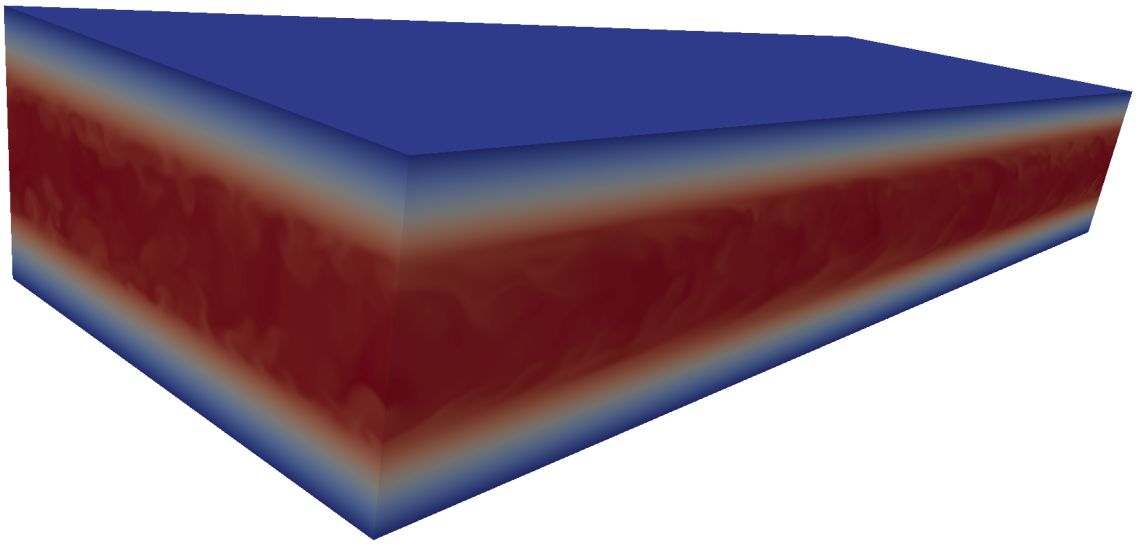
En guise d'introduction à ce chapitre et à titre illustratif, on a tracé figure 4.1 le champ de température issu d'un calcul avec transfert thermique conjugué. Le champ instantané brut (figure 4.1a) montre que chaque domaine solide est froid à son bord extérieur alors que le fluide est chaud. La partie fluctuante (figure 4.1b) du champ est plus riche. On observe des structures chaudes et froides. Les fluctuations de forte amplitude sont localisées dans le fluide et pénètrent dans le solide. Ce dernier les absorbe rapidement : au bord extérieur du solide, on ne distingue pas de fluctuations. Pour mettre en valeur la thermique solide, il faut utiliser une palette logarithmique (figure 4.1c). On voit ainsi apparaitre des spots de fluctuations dans le solide. Ces derniers, en pénétrant dans le solide, s'annihilent ou fusionnent, formant ainsi de grandes structures thermiques dont l'amplitude est réduite.

4.1 Transport du scalaire

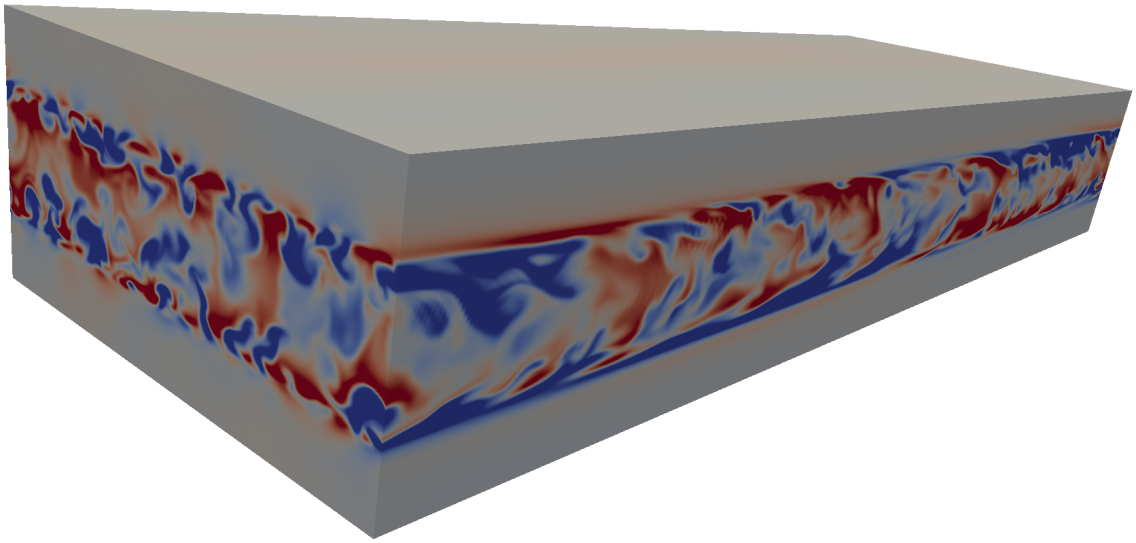
On considère un canal plan chauffé uniformément aux parois, tel que décrit par Kasagi et al. [34]. Nous retenons cette configuration car c'est celle que l'on trouve dans les bases de données. De plus, c'est celle retenue par Tiselj et al. [67] pour la DNS du canal plan avec transfert thermique conjugué. Pour des raisons de clarté, la mise en données liée à la dynamique est absente de cette section (cf sous-section 3.2.2).

4.1.1 Milieu fluide

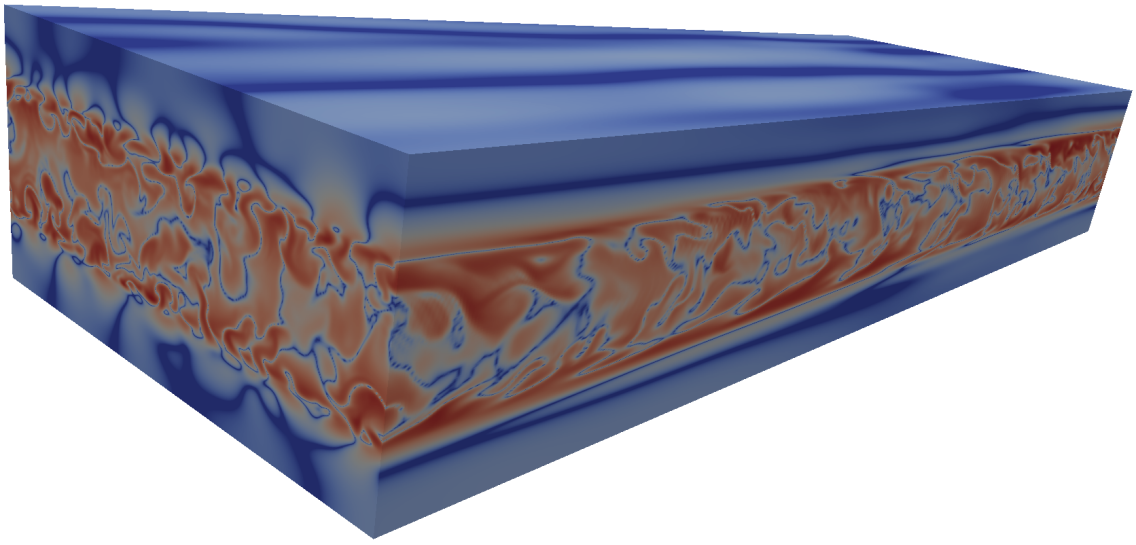
Le chauffage uniforme évoqué en préambule provoque une augmentation de température. Ainsi, pour un écoulement dans la direction x, la température moyenne augmentera linéairement avec x. Un changement de variable permet de compenser cette augmentation, ce qui introduit un terme source dans l'équation de conservation du scalaire. L'équation



(a) Champ instantané de température.



(b) Partie fluctuante.



(c) Valeur absolue de la partie fluctuante, palette logarithmique.

FIGURE 4.1 – Canal plan turbulent avec transfert thermique conjugué. (a) : Champ instantané de température. (b) : Partie fluctuante. (c) : Partie fluctuante, palette logarithmique.

résolue pour le transport du scalaire dans le fluide est alors :

$$\partial_t T = -\partial_i \left(T u_i\right) + \frac{1}{RePr}\partial_{ii} T - f_T u_x \tag{4.1}$$

On moyenne l'équation et on l'intègre sur l'ensemble du domaine. On montre ainsi que l'amplitude du forçage dépend du flux thermique aux parois, de la hauteur du canal et de la vitesse débitante :

$$f_T = \frac{1}{RePr}\,\frac{1}{U_{deb}}\,\frac{\partial_y \overline{T}\left(L_y\right) - \partial_y \overline{T}\left(0\right)}{L_y} = \frac{1}{RePr}\,\frac{1}{U_{deb}}\,\frac{2q_w}{L_y} \tag{4.2}$$

Nos simulations correspondent à une vitesse débitante unitaire ($U_{deb} = 1$), une dérivée de la température fluide moyenne à la paroi unitaire ($q_w = \partial_y \overline{T}\left[L_y\right] = -\partial_y \overline{T}\left[0\right] = -1$) et une demi-hauteur unitaire ($L_y = 2$). On en déduit l'amplitude du forçage : $f_T = \frac{-1}{RePr}$. La température ainsi obtenue est, en moyenne, indépendante de x.

Pour fermer l'équation d'évolution, on utilise des conditions aux limites en $y = 0$ et $y = L_y$, de la forme :

$$\begin{aligned} \alpha_0 T(y=0) + \beta_0 \partial_y T(y=0) &= \gamma_0 \\ \alpha_{L_y} T(y=L_y) + \beta_{L_y} \partial_y T(y=L_y) &= \gamma_{L_y} \end{aligned} \tag{4.3}$$

On peut ainsi imposer, à la paroi, la température, le flux ou une combinaison linéaire des deux. Dans toutes nos simulations, on fixe les paramètres α_* et β_* au début du calcul. Ils ne varient donc ni spatialement, ni temporellement. C'est similaire pour les paramètres γ_*, sauf en cas de transfert thermique conjugué. Ces derniers dépendent alors des températures fluide et solide à la paroi. Ces informations sont récapitulées dans le tableau 4.1.

	α_0	β_0	γ_0	α_{L_y}	β_{L_y}	γ_{L_y}
Température imposée	1	0	0	1	0	0
Flux imposé	0	-1	-1	0	1	-1
Robin	α_{rob}	-1	-1	α_{rob}	1	-1
Conjugué	1	0	$\left(T + T_s\right)/2$	1	0	$\left(T + T_s\right)/2$

TABLE 4.1 – Condition aux limites appliquées à la température fluide.

Dans tous les cas, le terme source impose le flux aux parois :

$$\partial_y \overline{T}\left[L_y\right] = -\partial_y \overline{T}\left[0\right] = -1 \tag{4.4}$$

Dans le cas Robin, on a donc naturellement $\overline{T} = 0$ aux parois.

Lorsque le flux est imposé aux bords extérieurs, le problème est mal posé : la température est définie à une constante près. Or, le flux est imposé avec un schéma spatial explicite d'ordre 3. Ce dernier a une précision modérée. On s'expose ainsi à une lente dérive temporelle de la température. Pour éviter cet écueil, lorsque le flux est imposé aux 2 parois, on corrige à chaque pas de temps la température pour maintenir sa moyenne spatiale. Cette correction de faible amplitude (10^{-9}) et dont le signe varie ne perturbe pas la collecte des statistiques. Elle permet de garantir la stationnarité de la simulation, même pour un calcul très long.

Soulignons un point important : la dérivée de la température moyenne à la paroi est unitaire. Par conséquent, pour une condition de type Dirichlet / Neumann constante, il n'y a aucun degré de liberté. En revanche, pour une condition de type Robin à coefficients constants, on a un degré de liberté (α_{rob}). Nous verrons dans la sous-section 4.1.3 quel est l'impact de ce degré de liberté sur le scalaire.

4.1.2 Milieu solide

Dans nos simulations avec transfert thermique conjugué, l'équation d'évolution du scalaire dans le solide ne fait pas intervenir de terme source. Le terme source utilisé par Tiselj et al. [70] dans le solide est constant. Il n'impacte donc que la température moyenne, pas ses fluctuations. L'omettre dans nos simulations n'a donc aucun impact sur les fluctuations de température. Pour rappel, l'équation d'évolution de la température dans le solide est :

$$\partial_t T_s = \frac{1}{G_1\ Re\ Pr}\partial_{jj} T_s \tag{4.5}$$

Avec G_1 le ratio des diffusivités thermiques : $G_1 = \frac{\lambda \rho_s C_{p_s}}{\lambda_s \rho C_p}$. Pour fermer l'équation d'évolution, on impose le flux aux bords du solide :

$$\begin{aligned} \partial_y T_s &= \frac{1}{G_2}\partial_y T \text{ à l'interface fluide-solide} \\ \partial_y T_s &= \pm\frac{q_w}{G_2} \text{ aux bords extérieurs du solide} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Avec G_2 le ratio des conductivités thermiques : $G_2 = \frac{\lambda_s}{\lambda}$. On a évoqué dans la sous-section 2.1.3 la possibilité de combiner les nombres adimensionnels G_1 et G_2 pour former le ratio d'activité thermique K :

$$K = \frac{1}{G_2\sqrt{G_1}} = \sqrt{\frac{\rho C_p \lambda}{\rho_s C_{p_s} \lambda_s}} \tag{4.7}$$

Parmis les premiers travaux sur le transfert thermique conjugué (Polyakov [60], Geshev [21], Khabakhpasheva [35], Kasagi et al. [33], Tiselj et al. [67]), certains supposaient ([33], [67]), à tort (Monod et al. [56], Tiselj et al. [68]), que l'on pouvait décrire le transfert thermique conjugué à l'interface fluide-solide avec le seul paramètre K. Il faut en fait 2 paramètres pour décrire le couplage thermique, comme le montre notre analyse de l'interface fluide-solide (sous-section 4.1.4).

Pour les simulations avec transfert thermique conjugué, le flux est imposé aux bords extérieurs du domaine (l'ensemble fluide + solide), on corrige donc à chaque pas de temps la température instantanée pour imposer sa moyenne spatiale, en la translatant.

4.1.3 Impact de la condition à la limite

On considère une condition à la limite de la forme :

$$\alpha_0 T + \beta_0 \partial_y T = \gamma_0 \tag{4.8}$$

On suppose de plus que les coefficients α_0, β_0 et γ_0 sont constants. C'est une hypothèse forte qui correspond aux simulations que nous avons effectuées (hors transfert thermique conjugué, cf tableau 4.1). Sous cette hypothèse, la partie moyenne et la partie fluctuante de la condition aux limites prennent la forme :

$$\begin{aligned} \alpha_0 \overline{T} + \beta_0 \partial_y \overline{T} &= \gamma_0 \\ \alpha_0 T' + \beta_0 \partial_y T' &= 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

On multiplie la partie fluctuante par T' ou $\partial_y T'$ et on moyenne. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \alpha_0 \overline{T'^2} + \frac{\beta_0}{2}\partial_y \overline{T'^2} &= 0 \\ \frac{\alpha_0}{2}\partial_y \overline{T'^2} + \beta_0 \overline{\partial_y T' \partial_y T'} &= 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

On obtient ainsi un systême linéaire de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{pmatrix} \overline{T} & \partial_y \overline{T} & -1 \\ \overline{T'^2} & \frac{1}{2}\partial_y \overline{T'^2} & 0 \\ \frac{1}{2}\partial_y \overline{T'^2} & \overline{\partial_y T' \partial_y T'} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

Pour une condition aux limites de type Dirichlet, Neumann ou Robin, les inconnues ne sont pas toutes nulles. Le déterminant de la matrice doit donc s'annuler pour qu'une solution à (4.11) existe. On a alors :

$$4\overline{T'^2}\ \overline{\partial_y T' \partial_y T'} = \left(\partial_y \overline{T'^2}\right)^2 \tag{4.12}$$

Lorsque l'on utilise une condition de type Dirichlet constante, le scalaire ne fluctue pas à la paroi. On a ainsi $T' = 0$. La dérivée de $\overline{T'^2}$ à la paroi est alors nulle. La situation est analogue lorsque l'on utilise une condition de type Neumann constante : $\partial_y T' = 0$, ce qui amène $\partial_y \overline{T'^2} = 0$ à la paroi. Pour une condition de type Robin non dégénérée ($\alpha_0\beta_0 \neq 0$), au contraire, on aura $\partial_y \overline{T'^2} \neq 0$ à la paroi. Récapitulons. À la paroi, on a

— Dirichlet : $0 = T' = \overline{T'^2} = \partial_y \overline{T'^2}$
— Neumann : $0 = \partial_y T' = \overline{\partial_y T' \partial_y T'} = \partial_y \overline{T'^2}$
— Robin : $4\overline{T'^2}\ \overline{\partial_y T' \partial_y T'} = \left(\partial_y \overline{T'^2}\right)^2$

Qu'ils soient nuls ou pas, les termes en $\partial_y \overline{T'^2}$ peuvent être éliminés. La combinaison des lignes 2 et 3 de la matrice permet d'obtenir la relation

$$\alpha_0^2 \overline{T'^2} = \beta_0^2 \overline{\partial_y T' \partial_y T'} \Longleftrightarrow \frac{\alpha_0^2}{\beta_0^2} = \frac{\overline{\partial_y T' \partial_y T'}}{\overline{T'^2}} \tag{4.13}$$

On a dérivé la relation (4.13) en s'appuyant sur le système d'équations (4.11). On peut l'obtenir directement en calculant la variance de la condition aux limites (4.8). En outre, le terme $\overline{\partial_y T' \partial_y T'}$ correspond à la variance de la composante normale du gradient de température. On retrouve ce terme dans la dissipation de $\overline{T'^2}$:

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{T'^2} + \overline{u_k} \partial_k \overline{T'^2} &= -2R_{kT} \partial_k \overline{T} \text{ : Production} \\ &- \partial_k \left(\overline{T'^2 u_k'} \right) \text{ : Diffusion turbulente} \\ &+ \frac{1}{RePr} \partial_{kk} \overline{T'^2} \text{ : Diffusion moléculaire} \\ &- \frac{2}{RePr} \overline{\partial_k T' \partial_k T'} \text{ : Dissipation } (\varepsilon_{TT}) \end{aligned} \tag{4.14}$$

À la paroi, pour le canal plan stationnaire, la condition d'adhérence produit un équilibre entre la diffusion et la dissipation :

$$\partial_{yy} \overline{T'^2} = 2\overline{\partial_k T' \partial_k T'} \Longleftrightarrow \partial_{yy} \overline{T'^2} = 2\overline{\partial_x T' \partial_x T'} + 2\frac{\alpha_0^2}{\beta_0^2} \overline{T'^2} + 2\overline{\partial_z T' \partial_z T'} \text{ à la paroi} \tag{4.15}$$

D'une part, cette analyse montre le fort impact qu'aura la condition aux limites appliquée au scalaire sur les statistiques à proximité de la paroi. *A priori*, la variance du scalaire sera fortement impactée par la condition aux limites, tout comme la contribution normale dans ε_{TT} à la paroi. La relation (4.15) montre que la condition aux limites va piloter la contribution normale dans ε_{TT} à la paroi.

D'autre part, la relation (4.13) montre que l'on peut définir une condition de type Robin en s'appuyant sur le seul ratio $\overline{\partial_y T' \partial_y T'} / \overline{T'^2}$. On peut obtenir $\overline{T'^2}$ avec une simulation à flux imposé et on peut obtenir $\overline{\partial_y T' \partial_y T'}$ avec une simulation à température imposée. On peut également obtenir directement ce ratio en faisant une simulation avec transfert thermique conjugué. On va donc pouvoir construire des conditions de type Robin sur-mesure et comparer les résultats qu'elles donnent à ceux obtenus avec du transfert thermique conjugué.

Soulignons un point important : les conditions de type Robin non dégénérées peuvent être assimilées à un coefficient d'échange. Lorsqu'un industriel ne souhaite pas ou ne peut pas faire de couplage thermique fluide-solide dans un calcul, il utilise souvent un coefficient d'échange pour modéliser le transfert thermique. Il semble donc important de savoir quel est l'impact de ce coefficient sur les fluctuations de température. On verra ainsi les quantités que peut (ou ne peut pas) reproduire une condition de type Robin par rapport aux simulations avec tranfert thermique conjugué.

4.1.4 Analyse de l'interface fluide-solide

À l'interface entre le fluide et le solide, il y a continuité de la température et du flux thermique :

$$T = T_s \text{ et } \partial_y T = G_2 \partial_y T_s \text{ à l'interface.} \tag{4.16}$$

Comme nos calculs sont statistiquement stationnaires, le bilan de $\overline{T'^2}$ montre qu'à l'interface, il y a un équilibre entre la diffusion moléculaire et la dissipation, aussi bien du côté fluide que du côté solide. On va noter ε_θ (resp. $\varepsilon_{\theta,s}$) la dissipation ε_{TT} dans le fluide (resp. solide) à l'interface fluide-solide. On a donc :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{yy}\overline{T'^2} - RePr\varepsilon_\theta \text{ et } 0 = \partial_{yy}\overline{T_s'^2} - G_1 RePr\varepsilon_{\theta,s} \text{ à l'interface.} \\ \iff 0 &= \partial_{yy}\overline{T'^2} - 2\overline{\partial_i T' \partial_i T'} \text{ et } 0 = \partial_{yy}\overline{T_s'^2} - 2\overline{\partial_i T_s' \partial_i T_s'} \end{aligned} \tag{4.17}$$

La continuité de la température à l'interface conduit à la continuité des dérivées tangentes : $\partial_x T' = \partial_x T_s'$ et $\partial_z T' = \partial_z T_s'$. On a donc :

$$\begin{aligned} \overline{\partial_x T' \partial_x T'} + \overline{\partial_z T' \partial_z T'} &= \frac{1}{2}\partial_{yy}\overline{T'^2} - \overline{\partial_y T' \partial_y T'} \\ &= \frac{1}{2}\partial_{yy}\overline{T_s'^2} - \overline{\partial_y T_s' \partial_y T_s'} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Finalement, on injecte la continuité du flux à l'interface pour obtenir :

$$\begin{aligned} 2\overline{\partial_y T' \partial_y T'}\left(1 - \frac{1}{G_2^2}\right) &= \partial_{yy}\overline{T'^2} - \partial_{yy}\overline{T_s'^2} \text{ à l'interface} \\ \iff 2\overline{\partial_y T' \partial_y T'}\left(1 - \frac{1}{G_2^2}\right) &= RePr\varepsilon_\theta - G_1 RePr\varepsilon_{\theta,s} \\ \iff \frac{\overline{\partial_y T' \partial_y T'}}{\overline{\partial_i T' \partial_i T'}}\left(1 - \frac{1}{G_2^2}\right) &= 1 - G_1 \frac{\varepsilon_{\theta,s}}{\varepsilon_\theta} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Cette relation montre que la dissipation associée à la variance de la température n'est pas continue à l'interface. Lorsque la dissipation fluide est dominée par sa contribution normale à la paroi, on a :

$$\frac{\varepsilon_{\theta,s}}{\varepsilon_\theta} = \frac{1}{G_1 G_2^2} = K^2 \tag{4.20}$$

En revanche, si c'est la contribution tangente qui domine, on a :

$$\frac{\varepsilon_{\theta,s}}{\varepsilon_\theta} = \frac{1}{G_1} \tag{4.21}$$

Soulignons un point important : cette analyse montre que lorsqu'il y a transfert thermique conjugué, en général, la dissipation associée à la variance de la température n'est pas continue à l'interface fluide-solide. La relation (4.19) montre que cette discontinuité est directement liée à la contribution relative de la partie normale de la dissipation à la paroi. Cette contribution est accessible quantitativement en DNS et qualitativement en LES. En revanche, avec une approche RANS, on n'a pas accès à cette contribution *a priori*. On s'attachera donc, lors de nos calculs, à extraire cette contribution. Cette donnée sera précieuse pour construire des modèles RANS adaptés au transfert thermique conjugué (Craft et al. [11]).

4.1.5 Analyse de la thermique solide

L'équation d'évolution de la température dans le solide (4.5) est linéaire et parabolique. Le premier point permet d'appliquer des outils d'analyse puissants : les transformations de Fourier et Laplace. Le second point lui donne une capacité régularisante et non-locale : l'information se propage à vitesse infinie. Cet aspect mérite une légère digression car il y a des hypothèses sous-jacentes.

Dans son ouvrage sur la diffusion thermique, Luikov [53] montre que le transfert thermique à haute fréquence est décrit par une température dont la vitesse de propagation est finie. En s'appuyant sur l'analyse dimensionnelle, on peut exprimer une vitesse de propagation c_T :

$$c_T^2 = \frac{\lambda}{\rho C_p \tau_T} \text{ avec } \tau_T \text{ le temps de relaxation du solide.} \tag{4.22}$$

Le temps de relaxation est en général très faible. Ainsi, pour l'aluminium, on a $\tau_T \approx 10^{-11}$ secondes, ce qui correspond à une vitesse c_T d'environ 3000 $m.s^{-1}$ ($\frac{\lambda}{\rho C_p} \approx 10^{-4}$ $m^2.s^{-1}$). D'un point de vue physique, ce comportement à haute fréquence correspond à un déphasage entre le flux thermique et le gradient de température. On trouvera de plus amples informations sur le sujet dans les travaux de Gurtin et al. [24], Berkovsky et al. [4], Tzou [71] ou Özişik et al. [59]. Retenons simplement que notre analyse ne s'applique pas au transfert thermique à très haute fréquence.

Pour des raisons de simplicité, on suppose que le solide est semi-infini dans la direction y ($y \geq 0$). Cette hypothèse est nécessaire pour pouvoir appliquer la transformée de Laplace. Dans le cas d'un domaine de dimension finie dans la direction y, il faut recourir aux fonctions de Green. L'analyse devient alors inutilement plus lourde. On se limite donc ici au cas d'un domaine semi-infini dans la direction y pour des raisons de clarté.

On s'appuie sur la linéarité de l'équation (4.5) pour appliquer une transformée de Fourier en temps, en x et en z. On note $\widehat{T_s}$ la température du solide dans l'espace spectral, et (k_t, k_x, k_z) les nombres d'onde en temps et dans les directions x et z, respectivement. L'équation d'évolution de $\widehat{T_s}$ après transformée de Fourier est :

$$\begin{aligned} \sqrt{-1}k_t\widehat{T_s} &= \frac{1}{G_1\ Re\ Pr}\left(-k_x^2 + \partial_{yy} - k_z^2\right)\widehat{T_s} \\ \iff \partial_{yy}\widehat{T_s} &= \left(k_x^2 + k_z^2 + \sqrt{-1}k_t G_1 RePr\right)\widehat{T_s} \end{aligned} \tag{4.23}$$

La transformée de Laplace de la fonction $\widehat{T_s}$ est notée $\widehat{\widehat{T_s}}$ et est définie par

$$\widehat{\widehat{T_s}}\,(r) = \int_0^\infty e^{-ry}\widehat{T_s}\,(k_t, k_x, y, k_z)\,\mathrm{d}y \tag{4.24}$$

La transformée de Laplace de la dérivée seconde $\partial_{yy}\widehat{T_s}$ est notée $\widehat{\partial_{yy}\widehat{T_s}}$ et vérifie

$$\widehat{\partial_{yy}\widehat{T_s}} = r^2\,\widehat{\widehat{T_s}} - r\widehat{T_s}\,(y=0) + \partial_y\widehat{T_s}\,(y=0) \tag{4.25}$$

L'application de la transformée de Laplace à l'équation (4.23) conduit donc à

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{T_s}} &= \frac{r\widehat{T_s}\,(y=0) - \partial_y\widehat{T_s}\,(y=0)}{r^2 - \left(k_x^2 + k_z^2 + \sqrt{-1}k_t G_1 RePr\right)} \\ \iff \widehat{\widehat{T_s}} &= \frac{r\widehat{T_s}\,(y=0) - \partial_y\widehat{T_s}\,(y=0)}{r^2 - R^2} \end{aligned} \tag{4.26}$$

avec le nombre complexe R vérifiant

$$R^2 = k_x^2 + k_z^2 + \sqrt{-1}k_t G_1 RePr \tag{4.27}$$

La décomposition en éléments simples de la fraction amène

$$\widehat{\widehat{T_s}} = \frac{\partial_y\widehat{T_s}\,(y=0) + R\widehat{T_s}\,(y=0)}{2R}\,\frac{1}{r+R} - \frac{\partial_y\widehat{T_s}\,(y=0) - R\widehat{T_s}\,(y=0)}{2R}\,\frac{1}{r-R} \tag{4.28}$$

Une transformée de Laplace inverse permet d'exprimer la température dans l'espace spectral sous la forme

$$\widehat{T_s} = \frac{\partial_y \widehat{T_s}\,(y=0) + R\widehat{T_s}\,(y=0)}{2R} e^{-yR} - \frac{\partial_y \widehat{T_s}\,(y=0) - R\widehat{T_s}\,(y=0)}{2R} e^{yR} \tag{4.29}$$

Une des exponentielles diverge, ce qui amène une condition de compatibilité, de la forme

$$\partial_y \widehat{T_s}\,(y=0) \pm R\widehat{T_s}\,(y=0) = 0 \tag{4.30}$$

L'utilisation des transformées de Fourier et Laplace pour résoudre un tel problème est classique. En revanche, dans la plupart des cas, on impose le chargement à la paroi (température ou flux imposé), et on cherche le champ de température dans le domaine solide. L'originalité de notre approche consiste à ne faire aucune hypothèse sur la nature du chargement, ce qui conduit à une condition de compatibilité permettant d'avoir une solution physiquement admissible.

Le signe dans l'équation (4.30) dépend du signe de la partie réelle de R. La condition de compatibilité est un produit dans l'espace spectral. Or, R n'est pas constant, il dépend des nombres d'onde k_x, k_z et k_t. On peut interpréter R comme une fonction de transfert connectant le flux et la température à l'interface. Dans l'espace physique, la condition de compatibilité prend donc la forme d'un produit de convolution. Cette conclusion montre que le transfert thermique conjugué est intrinsèquement non-local, ce qui semble naturel : l'équation d'évolution de la température dans le solide est parabolique. De plus, cette analyse montre que le transfert thermique conjugué ne peut être réduit à une relation pariétale instantanée et locale entre T et $\partial_y T$ (condition de type Robin).

Lorsque la condition de compatibilité est satisfaite, il ne reste qu'une exponentielle qui tend vers 0. Les fluctuations de température présentes à l'interface sont donc amorties par le solide : plus on va s'éloigner de l'interface, moins il y aura de fluctuations. La distance caractéristique d'amortissement des fluctuations de température est l'inverse de la partie réelle de R. On note cette distance caractéristique δ. En s'appuyant sur la définition de R, on a une estimation de δ :

$$\begin{aligned}
R^2 &= k_x^2 + k_z^2 + \sqrt{-1} k_t G_1 RePr \\
\iff R^2 &= \sqrt{\left(k_x^2+k_z^2\right)^2 + \left(k_t G_1 RePr\right)^2}\, e^{\sqrt{-1}\psi} \text{ avec } \psi \text{ l'argument du complexe } R^2 \\
\iff \delta &= \sqrt[4]{\frac{1}{\left(k_x^2+k_z^2\right)^2 + \left(k_t G_1 RePr\right)^2}} \frac{1}{\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)} \\
\Rightarrow \delta^4 &\geq \frac{1}{\left(k_x^2+k_z^2\right)^2 + \left(k_t G_1 RePr\right)^2}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Les grandes structures thermiques, qui sont associées à des nombres d'ondes faibles, correspondent donc à de grandes valeurs de δ. Les grandes structures vont donc pénétrer profondément dans le solide. À l'inverse, les petites structures sont associées à de grands nombres d'ondes. Elles ne peuvent donc pas pénétrer profondément dans le solide. En outre, dans le cadre d'une simulation, le pas de temps et les pas de maillage permettent de déterminer les valeurs maximales prises par les nombres d'ondes. La relation (4.31) donne alors la distance d'amortissement minimale pour les fluctuations de température dans le solide. On obtient ainsi un critère quantitatif pour mailler le domaine solide.

En s'appuyant sur la continuité de la température et du flux thermique à l'interface, on peut remplacer la température solide par la température fluide dans la condition de compatibilité :

$$\frac{\lambda}{\lambda_s} \partial_y \widehat{T}\,(y=0) \pm R\widehat{T}\,(y=0) = 0 \tag{4.32}$$

Exprimer la relation (4.32) dans l'espace physique sous la forme d'un produit de convolution implique de déterminer la transformée de Fourier inverse de R (que l'on va noter

G). Opération relativement complexe à priori. Bien que la théorie des distributions puisse amener une réponse, on se contente ici d'appliquer qualitativement l'analyse dimensionnelle :

$$\partial_y \widehat{T}\,(y=0) = \pm G_2 R \widehat{T}\,(y=0) \tag{4.33}$$

On sait que l'analogue du produit dans l'espace spectral est une convolution dans l'espace physique. On a donc :

$$\partial_y T\,(x, y=0, z, t) = \int_{x',z',t'} G_2 \mathbf{G}\,(x', z', t')\, T\,(x-x', y=0, z-z', t-t') \tag{4.34}$$

Dans le membre de droite de l'équation (4.33), la décroissance spatiale de R pour les basses fréquences temporelles est isotrope en x et z. On peut l'approcher avec une fonction de la forme $\sqrt{x'^2+z'^2}$. La décroissance temporelle est en $\sqrt{t'/G_1 RePr}$ pour les basses fréquences spatiales. De plus, la dimension de R est l'inverse d'une distance. On peut donc tenter d'approcher qualitativement la fonction **G** en s'appuyant sur une relation de la forme :

$$\mathbf{G}\,(x', z', t') \Rightarrow \mathbf{G}\left(L_{y,ref}, \frac{\sqrt{x'^2+z'^2}}{L_{xz,ref}}, \sqrt{\frac{t'}{G_1\ Re\ Pr\ t_{ref}}}\right) \tag{4.35}$$

De nombreuses constantes issues de l'analyse dimensionnelle sont présentes dans cette relation. Pour les déterminer, il *suffit* d'avoir la corrélation croisée spatio-temporelle entre le flux et la température à l'interface entre le fluide et le solide. Plus simplement, on peut effectuer une analyse intégrale de la relation (4.33). Sa norme L^2 est :

$$\| \widehat{\partial_y T}\,(y=0) \|_{L^2} = G_2 \| R\widehat{T}\,(y=0) \|_{L^2} \tag{4.36}$$

Comme R n'est pas dans L^2, on ne peut pas utiliser d'inégalité de type Cauchy-Schwarz. On sait cependant que notre solution est physiquement admissible. Il existe donc un nombre R_{equiv} (qui dépend de ladite solution) vérifiant

$$\| R\widehat{T}\,(y=0) \|_{L^2} = R_{equiv} \| \widehat{T}\,(y=0) \|_{L^2} \tag{4.37}$$

La transformée de Fourier conservant la norme L^2, on a

$$[G_2 R_{equiv}]^2 = \frac{\overline{\partial_y T' \partial_y T'}}{\overline{T'^2}} \text{ à la paroi.} \tag{4.38}$$

On obtient ainsi une équation très proche de (4.13). Cette analyse suggère qu'une condition de type Robin à coefficients constants peut être calibrée pour imiter le transfert thermique conjugué d'un point de vue intégral.

4.2 Condition à la limite de type Dirichlet / Neumann / Robin

Cette section est dédiée aux simulations du canal plan avec de la thermique et en l'absence de transfert thermique conjugué. Dans un premier temps, on décrit la mise en données. On valide ensuite nos simulations en s'appuyant sur les bases de données. Finalement, on expose nos résultats afin de mettre en évidence l'influence de la condition à la limite appliquée au scalaire sur les statistiques.

La simulation avec une condition à la limite de type Dirichlet correspond à une température imposée à la paroi et sera notée *isoT*. Celle avec une condition à la limite de type Neumann correspond à un flux thermique imposé à la paroi et sera notée *isoQ*. Finalement, celle avec une condition à la limite de type Robin peut être assimilée à un coefficient d'échange et sera simplement notée *Robin*.

4.2.1 Mise en données

On décrit ici la mise en données de nos simulations, indispensable à la reproduction de nos résultats. On se limite ici à la mise en données thermique, pour la mise en données dynamique, voir la sous-section 3.2.2. L'équation de transport du scalaire contient un terme source (cf section 4.1) dont l'amplitude f_T vaut $1/RePr$.

Mise en données brute. Dans le fichier de configuration de la simulation, l'activation de la thermique se fait via le paramètre `iscalar` ; on fixe sa valeur à `1`. Le nombre de Prandtl (Pr) utilisé dans nos simulations est égal à 0.71 (paramètre `sc` dans le fichier de configuration). C'est le nombre de Prandtl utilisé dans les simulations de référence (Kasagi et al. [34] et Tiselj et al. [67]).

Température *de frottement* à la paroi. La température *de frottement* à la paroi (T_τ) joue, pour la thermique, un rôle analogue à celui de la vitesse de frottement (u_τ) pour la dynamique. Sa définition est :

$$T_\tau = \frac{\lambda \partial_y \overline{T}\,(y=0)}{\rho C_p u_\tau} \tag{4.39}$$

On va utiliser T_τ comme température caractéristique pour adimensionner nos résultats. La température moyenne adimensionnée (T^+) est ainsi définie par :

$$T^+ = \frac{\overline{T} - \overline{T}\,(y=0)}{T_\tau} \tag{4.40}$$

4.2.2 Validation

La plupart des données de validation à disposition concernent le cas $isoT$. Des communications personnelles avec le Pr. I. Tiselj (Université de Ljubljana) ont permis d'obtenir quelques données pour le cas $isoQ$. Malheureusement, la plupart des résultats qu'il a publiés pour le cas $isoQ$ et tous ceux pour les cas avec transfert thermique conjugué ne sont plus disponibles.

Condition à la limite de type Dirichlet. Pour le cas $isoT$, la simulation de référence est celle de Kasagi et al. [34].

En ce qui concerne la température moyenne, la figure 4.2 montre un très bon accord entre nos résultats et ceux de référence. On observe un léger écart au milieu du canal. Cet écart relatif de 1.1% est de l'ordre de l'incertitude statistique. Pour les flux thermiques turbulents et la variance de la température, la figure 4.3 montre également un très bon accord entre nos résultats et ceux de référence.

Pour les bilans des flux thermiques turbulents, la figure 4.4 montre globalement un très bon accord entre nos résultats et ceux de référence. Pour le bilan de R_{xT}, l'accord est excellent et la somme des termes a une amplitude maximale relative de 1%. Pour le bilan de R_{yT}, on observe de légers écarts, qui sont de l'ordre de l'incertitude statistique, la somme des termes a également une amplitude maximale relative de 1%.

Pour le bilan de $\overline{T'^2}$, la figure 4.5 montre un bon accord entre nos résultats et ceux de référence. La somme des termes a une amplitude relative maximale de 2.3% sur le bilan de $\overline{T'^2}$ et 12% pour le bilan compensé. Le bilan compensé montre que, loin de la paroi, les termes dominants sont la dissipation et la diffusion turbulente. Ce sont des termes qui, dans le cadre d'une approche RANS, doivent être modélisés.

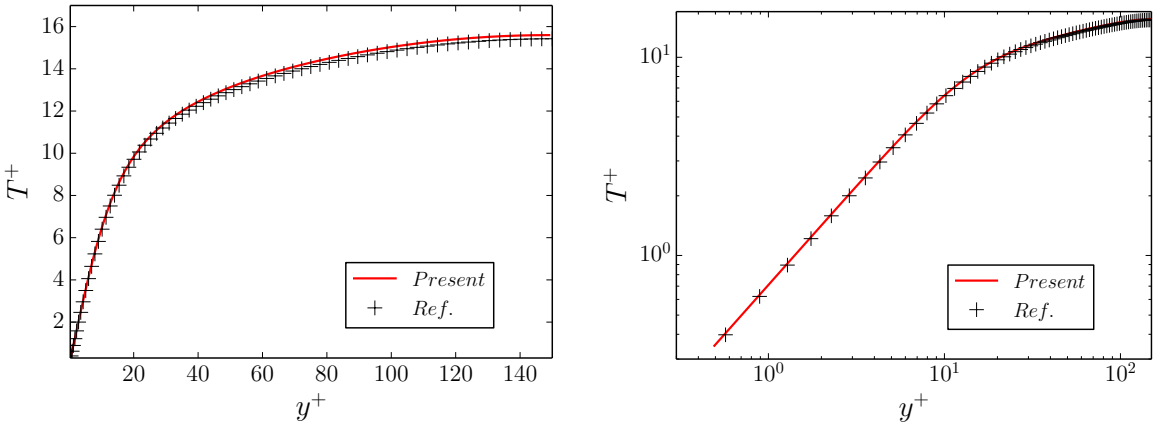


FIGURE 4.2 – Température moyenne T^+, cas *isoT*. Gauche : axes linéaires. Droite : axes logarithmiques. Ligne : *isoT*. Symboles : Kasagi et al. [34]

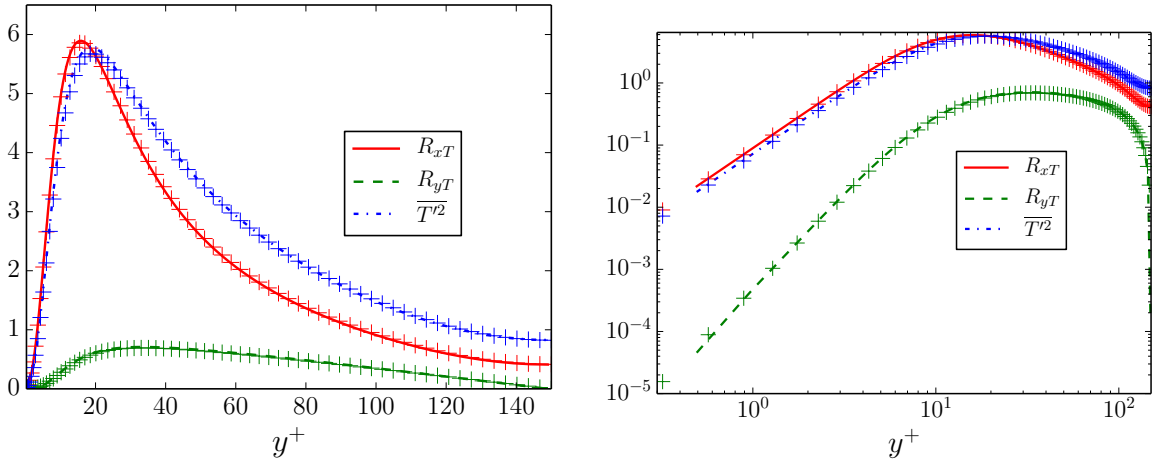


FIGURE 4.3 – Flux thermiques turbulents et variance de la température. Gauche : axes linéaires. Droite : axes logarithmiques. Lignes : *isoT*. Symboles : Kasagi et al. [34]

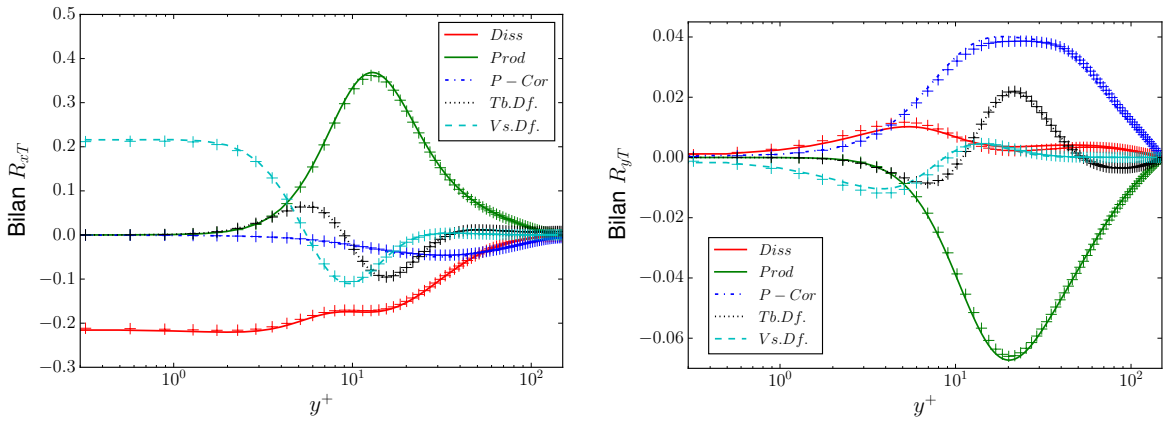


FIGURE 4.4 – Bilans des flux thermiques turbulents. Gauche : R_{xT}. Droite : R_{yT}. Lignes : *isoT*. Symboles : Kasagi et al. [34]

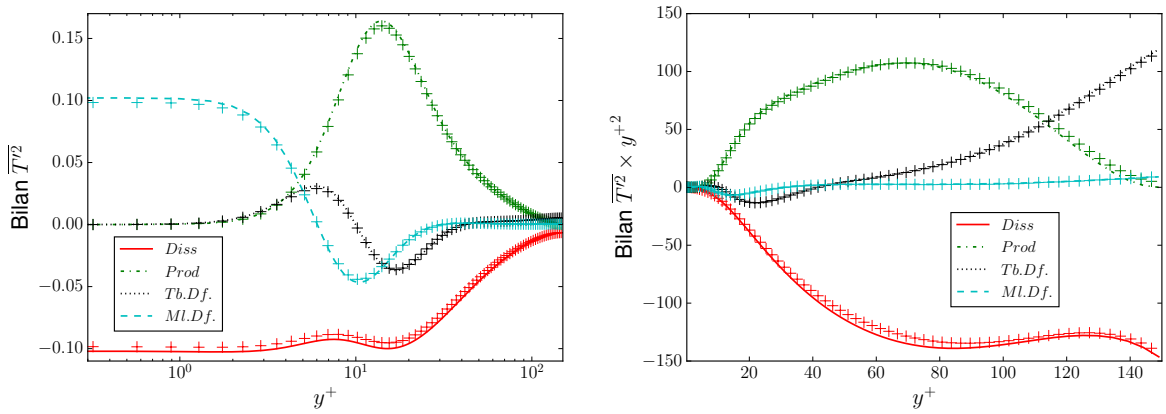


FIGURE 4.5 – Gauche : Bilan de la variance de la température $\overline{T'^2}$. Droite : Bilan compensé (termes multipliés par y^{+2}). Lignes : $isoT$. Symboles : Kasagi et al. [34]

L'équation de bilan de ε_{TT}, la dissipation associée à $\overline{T'^2}$ est :

$$\begin{aligned}
\partial_t \varepsilon_{TT} + \overline{u_k}\partial_k \varepsilon_{TT} &= -2\partial_l \overline{u_k}\ \overline{\partial_l T' \partial_k T'} : \text{Production par } \nabla\overline{T}\ (P1) \\
&- 2\partial_l \overline{T}\ \overline{\partial_k T' \partial_k u_l'} : \text{Production par } \nabla\overline{u}\ (P2) \\
&- 2\partial_{lk}\overline{T}\ \overline{u_l' \partial_k T'} : \text{Production par } \nabla^2\overline{T}\ (P3) \\
&- 2\overline{\partial_l T' \partial_k T' \partial_k u_l'} : \text{Production turbulente } (P4) \\
&- 2\partial_k \left(\overline{u_k' \partial_l T' \partial_l T'}\right) : \text{Transport turbulent } (TU) \\
&+ \frac{1}{RePr}\partial_{kk}\varepsilon_{TT} : \text{Diffusion visqueuse } (DF) \\
&- \frac{2}{RePr}\overline{\partial_{kl} T' \partial_{kl} T'} : \text{Dissipation } (DS) \qquad (4.41)
\end{aligned}$$

La figure 4.6 montre un bon accord entre nos résultats et ceux de référence pour le bilan de ε_{TT}. Tout comme pour le bilan de ε, notre maillage n'est pas suffisament fin à la paroi pour capter le comportement asymptotique des termes du bilan de ε_{TT}. En outre, on observe des oscillations sur la diffusion visqueuse à proximité de la paroi. D'une part, on ne peut pas exclure que l'inconsistance du gradient de pression normal à la paroi, par l'intermédiaire de la vitesse u_y, contamine le scalaire. Les oscillations observées sur la diffusion visqueuse de ε_{TT} seraient alors la signature d'artefacts numériques à haut nombre d'onde. D'autre part, notre maillage n'est pas très fin : les travaux de Galantucci et al. [18] ont montré que pour une configuration quasiment identique à la notre ($Re_\tau = 160$, $Pr = 1$, paroi isotherme, pas de terme source), l'estimation quantitative de ε_{TT} implique un pas de maillage très fin ($\Delta x^+ = \Delta z^+ = 1$ avec une méthode spectrale). Cette résolution est une exigence *a minima* pour les termes dans le bilan de ε_{TT}. Or, on se trouve relativement loin de cette résolution, tout comme la simulation de référence (Kasagi et al. [34]). Compte tenu du nombre de simulations effectuées et de leur durée, nous avons estimé qu'un tel maillage serait trop pénalisant. Dans la suite, on limitera donc notre analyse des bilans à ceux de la variance de la température et des flux thermiques turbulents.

En ce qui concerne le coefficient de corrélation en 2 points pour la température, nos statistiques sont extraites à $y^+ = 4.97$ tandis que celles de référence sont extraites à $y^+ = 5.1$. Ce léger décalage ne provoque pas d'écarts significatifs et la figure 4.7 montre un bon accord entre nos données et celles de référence.

Condition à la limite de type Neumann. Pour le cas $isoQ$, la simulation de référence est celle de Tiselj et al. [67].

En ce qui concerne la température moyenne, la figure 4.8 montre un très bon accord entre nos résultats et ceux de référence. La situation est similaire pour les flux thermiques

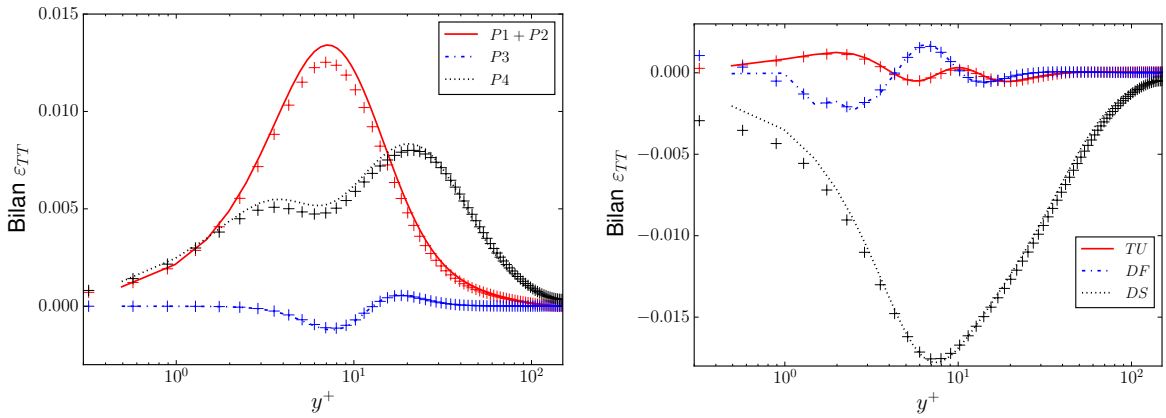


FIGURE 4.6 – Termes dans le bilan de la dissipation ε_{TT}. Gauche : Termes de production. Droite : Transport turbulent (TU), diffusion visqueuse (DF) et dissipation (DS). Lignes : $isoT$. Symboles : Kasagi et al. [34]

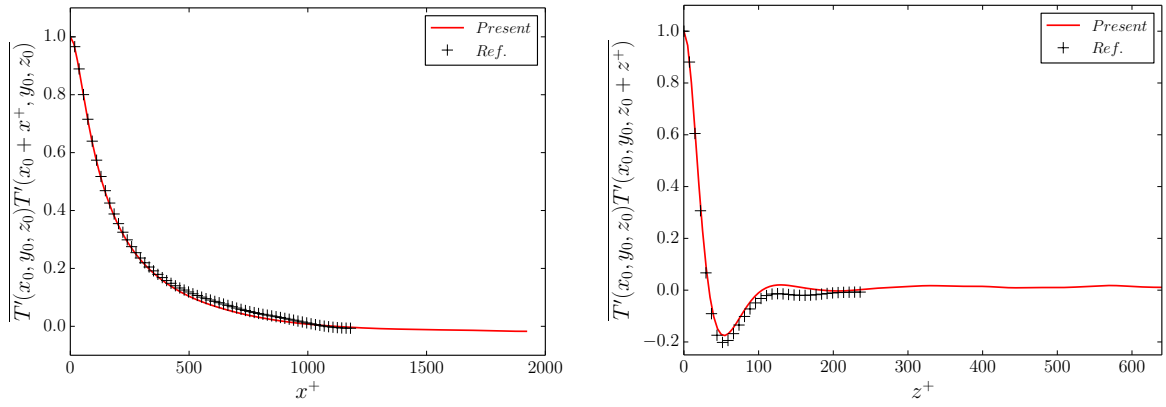


FIGURE 4.7 – Coefficient de corrélation en 2 points pour la température à $y^+ = 5$. Gauche : Direction x. Droite : Direction z. Lignes : $isoT$. Symboles : Kasagi et al. [34]

turbulents et la variance de la température : la figure 4.9 montre un très bon accord entre nos résultats et ceux de référence.

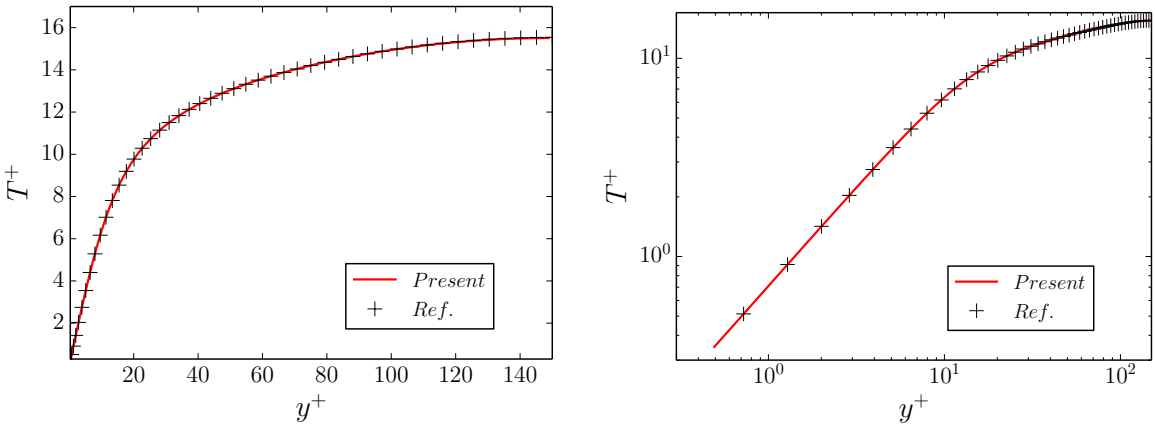


FIGURE 4.8 – Température moyenne T^+, cas *isoQ*. Gauche : axes linéaires. Droite : axes logarithmiques. Ligne : *isoQ*. Symboles : Tiselj et al. [67]

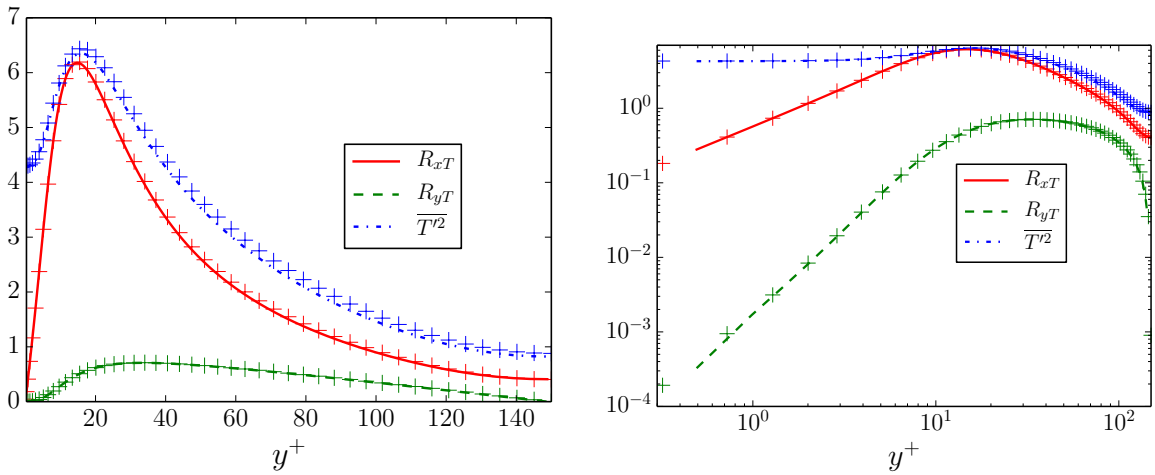


FIGURE 4.9 – Flux thermiques turbulents et variance de la température. Gauche : axes linéaires. Droite : axes logarithmiques. Lignes : *isoQ*. Symboles : Tiselj et al. [67]

Pour le coefficient de corrélation en 2 points, la figure 4.10 montre un accord qualitatif entre nos données et celles de référence. Lorsque le flux est imposé à la paroi, on a tendance à y observer de grandes structures thermiques. Les confiner dans un petit domaine diminue la représentativité de la simulation. L'utilisation dans nos simulations d'un domaine plus étendu que celui de référence dans les directions x et z peut expliquer les écarts obtenus. De ce point de vue, notre simulation du cas *isoQ* est plus fidèle que celle de référence.

Globalement, pour les cas *isoT* et *isoQ*, nos résultats sont très proches de ceux de la littérature. L'incertitude qui plane sur les bilans de la variance de la température et des flux thermiques turbulents est de l'ordre de 1%, ce qui est raisonnable. Ces derniers pourront donc être utilisés pour la validation des modèles de type RANS. De plus, le bon accord obtenu pour les coefficients de corrélation thermique en 2 points indique que ces derniers pourront être utilisés pour la validation des résultats LES.

4.2.3 Résultats

Dans cette sous-section, on va comparer nos résultats pour les cas *isoT*, *isoQ* et *Robin*. Dans la sous-section 4.1.3, on a montré que l'on pouvait définir une condition de *Robin*

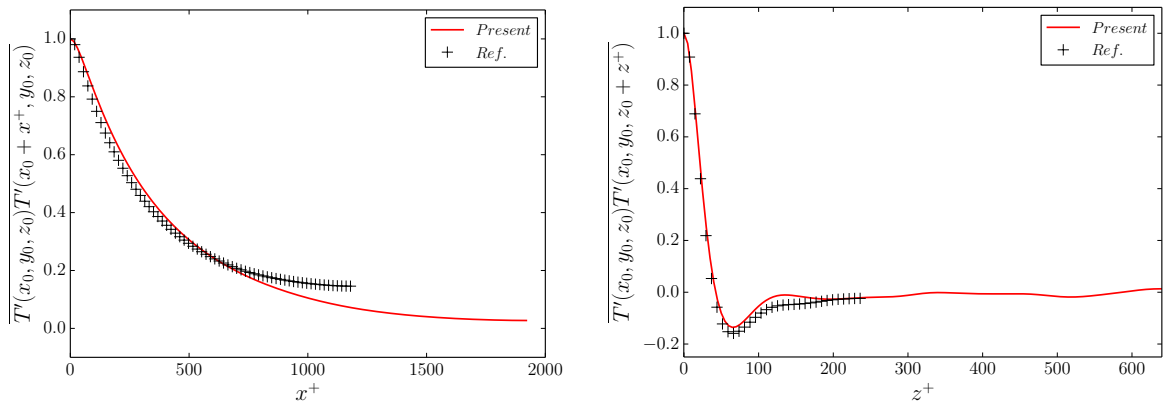


FIGURE 4.10 – Coefficient de corrélation en 2 points pour la température à $y^+ = 5$. Gauche : Direction x. Droite : Direction z. Lignes : $isoQ$. Symboles : Tiselj et al. [67]

en s'appuyant sur les statistiques à la paroi :

$$\alpha_{rob} = \frac{\partial_y \overline{T'^2}}{2\overline{T'^2}} = \frac{2\overline{\partial_y T' \partial_y T'}}{\partial_y \overline{T'^2}} = \sqrt{\frac{\overline{\partial_y T' \partial_y T'}}{\overline{T'^2}}} \tag{4.42}$$

Comme indiqué dans le tableau 4.1, le coefficient β vaut ± 1. Des considérations de stabilité (qui expliquent l'absence de coefficients d'échange négatifs dans les tables) permettent de déterminer le signe.

Dans le cas $isoT$, à la paroi, on a $\overline{T'^2} = \partial_y \overline{T'^2} = 0$. En ce qui concerne le cas $isoQ$, à la paroi, on a $\partial_y \overline{T'^2} = \overline{\partial_y T' \partial_y T'} = 0$. Par conséquent, pour construire une condition de type Robin cohérente avec l'analyse précédente, en s'appuyant sur les seules simulations $isoT$ et $isoQ$ effectuées, le seul choix que nous avons est d'utiliser la valeur à la paroi de $\overline{T'^2}$ issue du cas $isoQ$ et celle de $\overline{\partial_y T' \partial_y T'}$ issue du cas $isoT$:

$$\alpha_{rob}^2 = \frac{\overline{\partial_y T' \partial_y T'}\,(isoT)}{\overline{T'^2}\,(isoQ)} \tag{4.43}$$

Pour le cas *Robin* analysé ici, le coefficient α_{rob} ainsi obtenu vaut environ 0.13 en unités de paroi, soit 19 pour la mise en données brute. On s'attend à ce que la condition de Robin ainsi construite produise des résultats intermédiaires entre le cas $isoT$ et le cas $isoQ$.

Température moyenne

La figure 4.11 montre que la température moyenne n'est pas impactée par la condition aux limites appliquée au scalaire : l'écart entre les 3 configurations est inférieur à l'épaisseur du trait. Ce résultat est en accord avec la littérature (Kasagi et al. [33]) et s'explique par des écarts sur le flux thermique turbulent R_{yT} très faibles en valeur absolue et confinés à la paroi.

Moments d'ordre 2

La figure 4.12 montre que la variance de la température est fortement impactée par la condition à la limite appliquée au scalaire. Dans le cas de nos simulations à $Pr = 0.71$, cet impact est limité à la zone $y^+ \leq 30$. À la paroi, $\overline{T'^2}$ est maximal dans le cas $isoQ$ et minimal dans le cas $isoT$. La condition de Robin conduit à une valeur intermédiaire, comme attendu. La figure 4.13 montre que la situation est analogue pour les flux thermiques turbulents, bien que, pour ces derniers, la zone d'impact de la condition à la limite soit réduite à $y^+ \leq 10$. On remarque qu'ils tendent rapidement vers zéro à la paroi, comme en atteste leur tracé avec des axes logarithmiques.

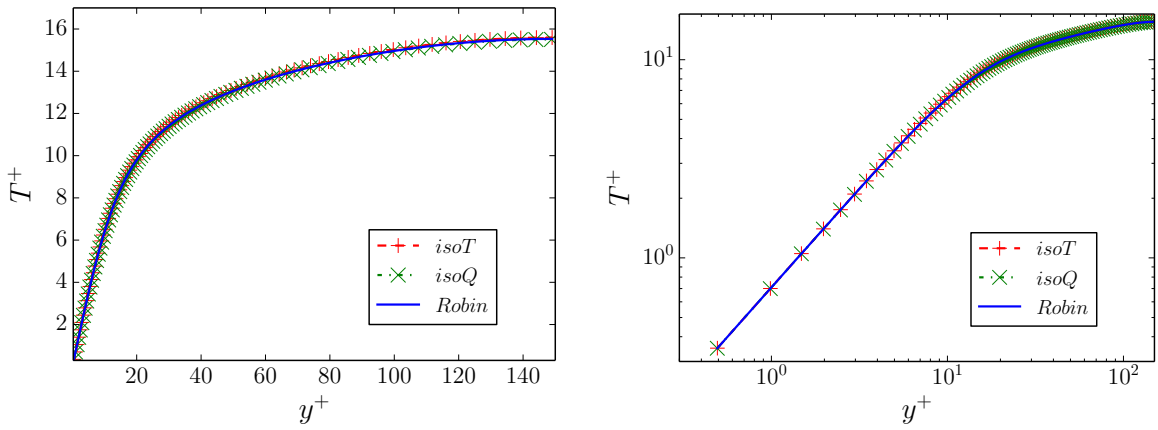


FIGURE 4.11 – Température moyenne T^+. Gauche : axes linéaires. Droite : axes logarithmiques. Ligne : *Robin*. + : *isoT*. × : *isoQ*.

Le coefficient de corrélation entre les fluctuations de vitesse et de température tracé figure 4.14 permet d'avoir un autre point de vue sur ces données. Le coefficient de corrélation associé au flux thermique turbulent R_{iT} est $R_{iT}/\sqrt{R_{ii}R_{TT}}$. Les coefficients de corrélation associés à R_{xT} et R_{yT} montrent que la corrélation est plus forte dans le cas *isoT* que dans le cas *isoQ*. Le coefficient de corrélation associé à R_{yT} confirme que le cas *Robin* est entre les cas *isoT* et *isoQ*, alors que celui associé à R_{xT} infirme cette observation, le cas *Robin* étant très proche du cas *isoT*.

La corrélation très forte entre la vitesse u_x et la température dans le cas *isoT* est en accord avec la littérature (Abe et al. [1]). Plus surprenant, la corrélation pour le cas *Robin* est identique à celle du cas *isoT* pour $y^+ \geq 8$ et elles restent très proches en deçà. Comme on va le voir dans la suite, la condition de type *Robin* étudiée ici ne produit pas les très grandes structures thermiques que l'on trouve à proximité de la paroi avec la condition *isoQ*. Nous conjecturons que ce sont ces grandes structures qui, dans le cas *isoQ*, sont responsables de la décorrélation entre u'_x et T'.

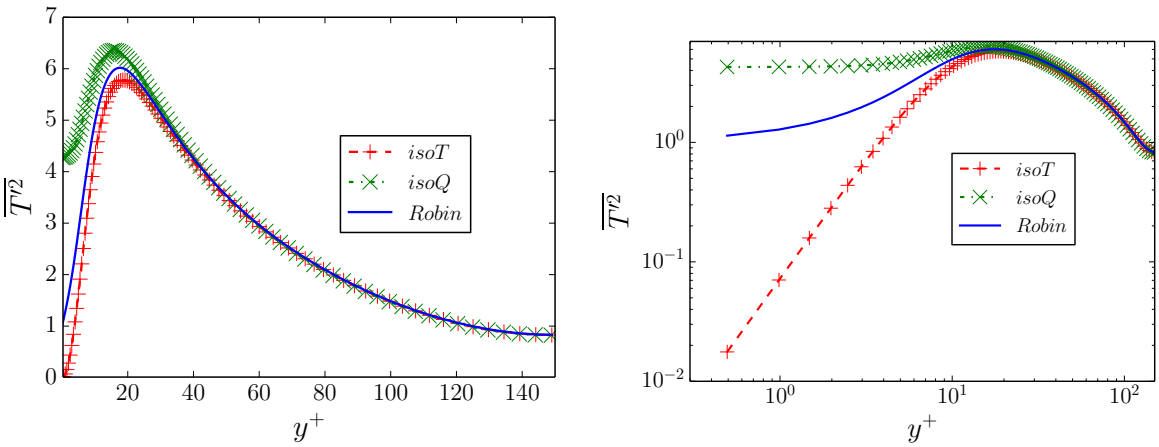


FIGURE 4.12 – Variance de la température. Gauche : axes linéaires. Droite : axes logarithmiques. Ligne : *Robin*. + : *isoT*. × : *isoQ*.

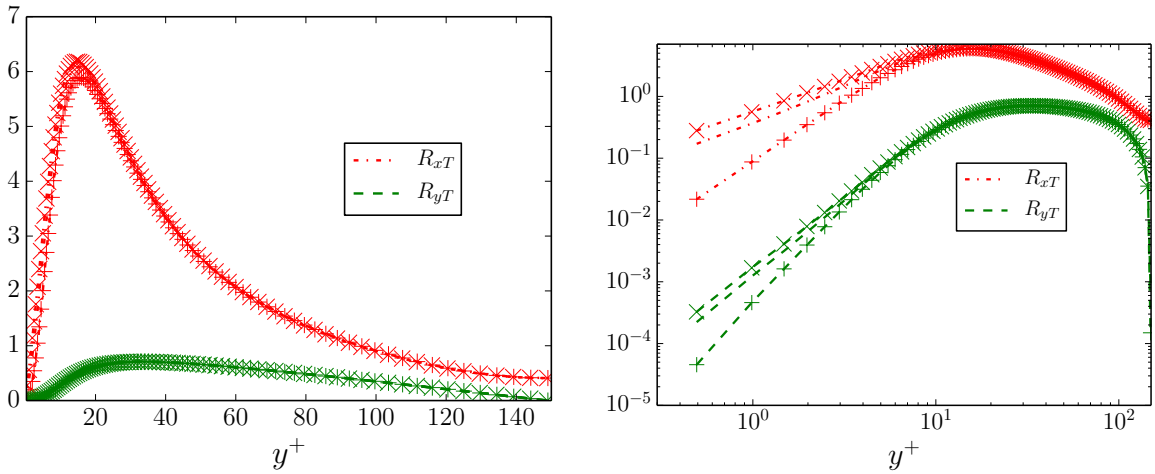


FIGURE 4.13 – Flux thermiques turbulents. Gauche : axes linéaires. Droite : axes logarithmiques. Lignes : *Robin*. + : *isoT*. × : *isoQ*.

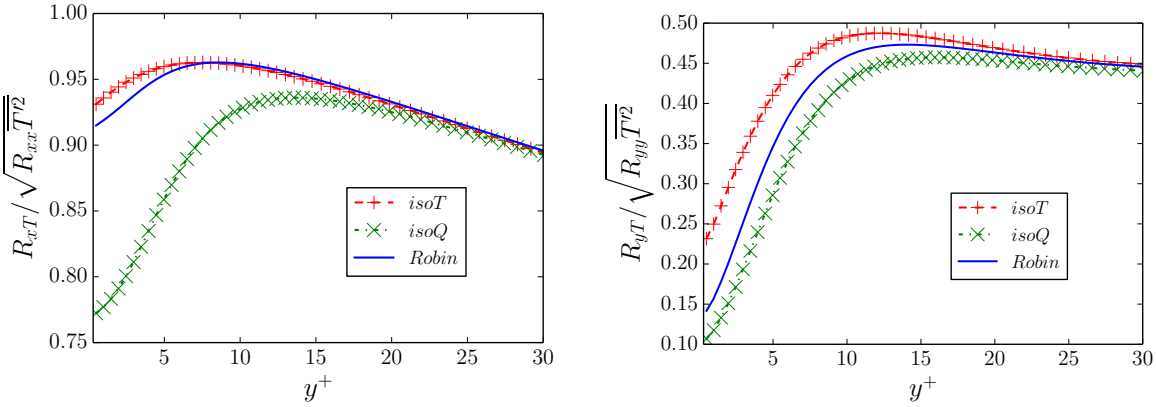


FIGURE 4.14 – Coefficient de corrélation entre les fluctuations de vitesse et de température. Gauche : Fluctuations de vitesse en x. Droite : Fluctuations de vitesse en y. Ligne : *Robin*. + : *isoT*. × : *isoQ*.

Bilans des moments d'ordre 2

On rappelle les équations de bilan pour le flux thermique turbulent R_{iT} dans la configuration du canal plan turbulent stationnaire :

$$\begin{aligned} 0 &= -R_{iy}\partial_y\overline{T} - R_{yT}\partial_y\overline{u_i} : \text{Production} \\ &- \partial_y\left(\overline{u_i'T'u_y'}\right) : \text{Diffusion turbulente} \\ &- \overline{T'\partial_i p'} : \text{Corrélation température - gradient de pression} \\ &+ \frac{1}{Re}\partial_y\left(\overline{T'\partial_y u_i'}\right) + \frac{1}{RePr}\partial_y\left(\overline{u_i'\partial_y T'}\right) : \text{Diffusion visqueuse} \\ &- \frac{1}{Re}\left(1+\frac{1}{Pr}\right)\overline{\partial_k u_i'\partial_k T'} : \text{Dissipation } (\varepsilon_{iT}) \end{aligned} \tag{4.44}$$

En ce qui concerne la variance de la température $\overline{T'^2}$, l'équation de bilan est :

$$\begin{aligned} 0 &= -2R_{yT}\partial_y\overline{T} : \text{Production} \\ &- \partial_y\left(\overline{T'^2u_y'}\right) : \text{Diffusion turbulente} \\ &+ \frac{1}{RePr}\partial_{yy}\overline{T'^2} : \text{Diffusion moléculaire} \\ &- \frac{2}{RePr}\overline{\partial_k T'\partial_k T'} : \text{Dissipation } (\varepsilon_{TT}) \end{aligned} \tag{4.45}$$

La figure 4.15 montre que pour le bilan de R_{xT}, les termes dominants à la paroi sont la dissipation et la diffusion visqueuse. Le cas *Robin* se trouve entre les cas *isoT* et *isoQ* et on observe de forts écarts sur la dissipation et la diffusion visqueuse à la paroi entre les 3 simulations. Dans le cas *isoQ*, la dissipation associée aux flux thermiques turbulents est nulle à la paroi par construction, contrairement aux cas *isoT* et *Robin*. La corrélation entre $\partial_y u_x'$ et $\partial_y T'$ montre que le cas *Robin* est bien plus proche du cas *isoT* que du cas *isoQ*, tendance déjà observée sur la corrélation entre u_x' et T'.

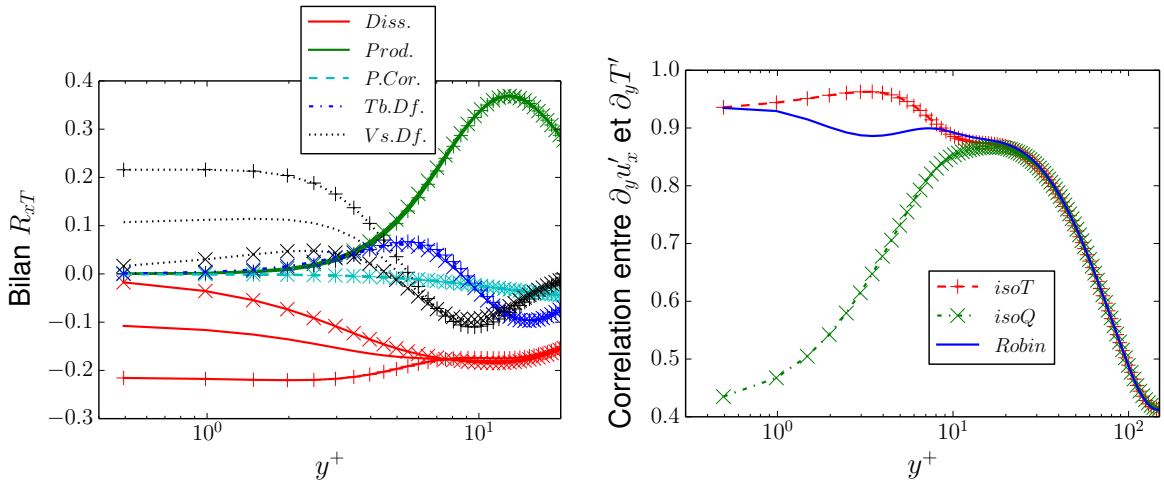


FIGURE 4.15 – Gauche : Bilan de R_{xT}. Droite : Corrélation entre $\partial_y u_x'$ et $\partial_y T'$ $\left(\frac{\overline{\partial_y u_x'\partial_y T'}}{\sqrt{\overline{\partial_y u_x'\partial_y u_x'}}\sqrt{\overline{\partial_y T'\partial_y T'}}}\right)$. Lignes : *Robin*. + : *isoT*. × : *isoQ*.

La figure 4.16 montre que pour le bilan de R_{yT}, les termes dominants à la paroi sont la diffusion visqueuse et la corrélation température - gradient de pression. La condition d'incompressibilité impose une dissipation nulle à la paroi. Dans le cas *isoT*, la corrélation température - gradient de pression est nulle à la paroi, tous les termes du bilan valent alors zéro en $y = 0$. Ce n'est pas le cas pour les simulations *isoQ* et *Robin* pour lesquelles la diffusion visqueuse et la corrélation température - gradient de pression sont non-nulles

à la paroi. La corrélation entre $\partial_y u'_y$ et $\partial_y T'$ est positive uniquement pour $10 \leq y^+ \leq 80$. La partie-normale de ε_{yT} va donc produire R_{yT} près ($y^+ \leq 10$) et ($y^+ \geq 80$) loin de la paroi et le détruire entre ces 2 zones.

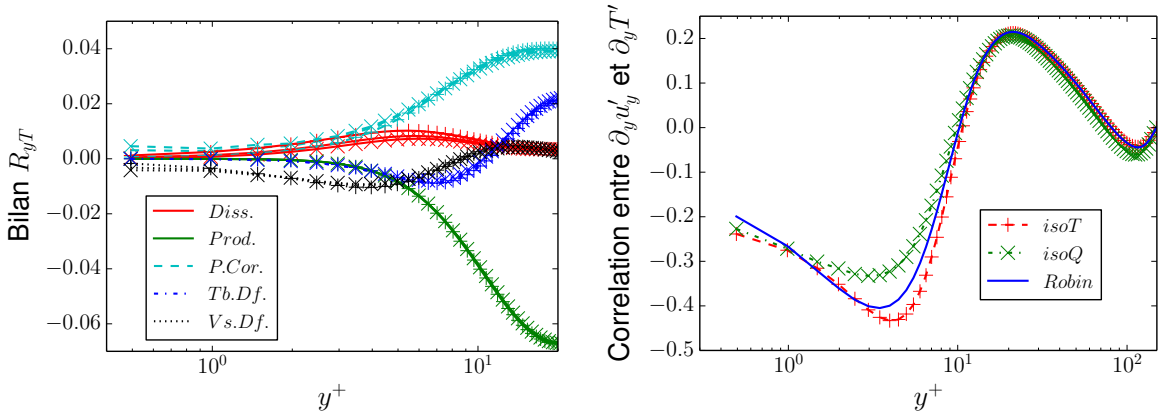


FIGURE 4.16 – Gauche : Bilan de R_{yT}. Droite : Corrélation entre $\partial_y u'_y$ et $\partial_y T'$ $\left(\frac{\overline{\partial_y u'_y \partial_y T'}}{\sqrt{\overline{\partial_y u'_y \partial_y u'_y}}\sqrt{\overline{\partial_y T' \partial_y T'}}}\right)$. Ligne : *Robin*. + : *isoT*. × : *isoQ*.

La figure 4.17 montre que pour le bilan de $\overline{T'^2}$, les termes dominants à la paroi sont la dissipation et la diffusion visqueuse. Le cas *Robin* se trouve entre les cas *isoT* et *isoQ* et on observe de forts écarts sur la dissipation et la diffusion visqueuse à la paroi entre les 3 simulations. Dans la sous-section 4.1.4, on a montré que lorsqu'il y a transfert thermique conjugué, la discontinuité de ε_{TT} à l'interface fluide-solide était pilotée par la contribution relative de la partie normale de ε_{TT}. Par construction, à la paroi, cette contribution vaut 0 dans le cas *isoQ* et 1 dans le cas *isoT*. Avec la condition de *Robin*, on obtient une contribution intermédiaire, plus proche du cas *isoT* que du cas *isoQ*.

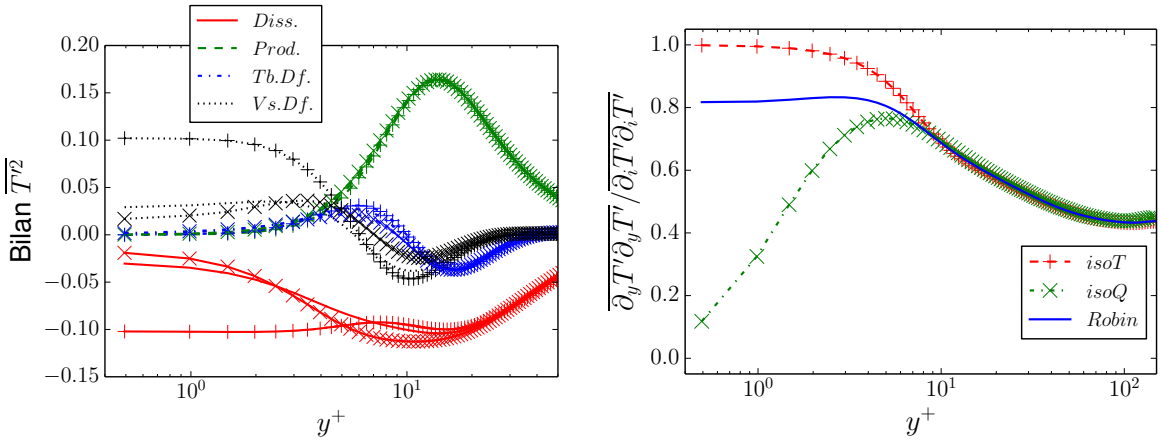


FIGURE 4.17 – Gauche : Bilan de $\overline{T'^2}$. Droite : Contribution relative à ε_{TT} de sa partie normale à la paroi. Lignes : *Robin*. + : *isoT*. × : *isoQ*.

Coefficient de corrélation en 2 points

Les figures 4.18 et 4.19 décrivent la corrélation en 2 points de la température T' et de sa dérivée normale à la paroi $\partial_y T'$. On a tracé les profils $1D$ de la corrélation en x et en z. On a également tracé les contours de la corrélation $2D$. Pour ces derniers, on notera $\mathcal{C}^+(T', isoT, 0)$ la ligne de contour de la variable T' pour le cas *isoT* dans le plan $y^+ = 0$ pour la valeur de 0.1 et $\mathcal{C}^-(\partial_y T', isoQ, 5)$ la ligne de contour de la variable $\partial_y T'$ pour le

cas $isoQ$ dans le plan $y^+ = 5$ pour la valeur de -0.1. On va tracer $\mathcal{C}^+$ avec une ligne solide et $\mathcal{C}^-$ avec une ligne pointillée.

La figure 4.18 décrit la corrélation en 2 points pour la température (gauche) et sa dérivée normale à la paroi (droite) en $y^+ = 0$. Pour le cas $isoQ$, la corrélation de T' dans la direction x diminue lentement, ce qui est la signature de grandes structures thermiques. À l'inverse, pour le cas $isoT$, la corrélation de $\partial_y T'$ dans la direction x diminue rapidement : les petites structures thermiques sont plus importantes dans le flux normal à la paroi du cas $isoT$. Or, pour la condition de Robin à coefficients constants, à la paroi, la température et sa dérivée normale ont la même corrélation. On trouve donc, pour le cas *Robin*, une corrélation en x intermédiaire entre la corrélation de T' du cas $isoQ$ et celle de $\partial_y T'$ du cas $isoT$. Dans la direction z, la situation est semblable mais moins marquée : la corrélation de T' du cas $isoQ$ chute plus lentement que la corrélation de $\partial_y T'$ du cas $isoT$ et la corrélation pour le cas *Robin* est entre les 2.

On retrouve cette position intermédiaire du cas *Robin* pour la ligne de contour $\mathcal{C}^+$. La ligne de contour $\mathcal{C}^-$ est plus révélatrice. D'une part, les contours $\mathcal{C}^-(T', isoQ, 0)$ et $\mathcal{C}^-(\partial_y T', isoT, 0)$ n'ont pas la même forme. D'autre part, les contours $\mathcal{C}^-(T', isoQ, 0)$ et $\mathcal{C}^-(T', Robin, 0)$ se croisent, tout comme ceux de $\mathcal{C}^-(\partial_y T', isoT, 0)$ et $\mathcal{C}^-(\partial_y T', Robin, 0)$. Ces observations montrent que la condition à la limite a un fort impact sur les structures thermiques que l'on trouve à proximité de la paroi.

La figure 4.19 montre que la situation est semblable en $y^+ = 5$: les corrélations $1D$ pour le cas *Robin* se trouvent entre les corrélations $isoT$ et $isoQ$. Les lignes de contour portent une information plus riche :

- Pour le cas $isoT$, les lignes de contour sont toutes les trois très semblables. Les structures thermiques en $y^+ = 5$ sont donc proches de celles en $y^+ = 0$.
- Pour le cas $isoQ$, les lignes de contour de T' aux 2 positions sont très semblables. En revanche, en $y^+ = 5$, on a un gros écart entre les contours de T' et ceux de $\partial_y T'$. Ainsi, en $y^+ = 5$, les grandes structures thermiques sont importantes dans T', alors qu'elles le sont peu dans $\partial_y T'$ qui est dominé par les petites structures.
- Pour le cas *Robin*, les lignes de contour ont un comportement analogue à celles du cas $isoQ$: en $y^+ = 5$, les lignes de contour de T' sont très proches de celles en $y^+ = 0$. On observe également, pour le cas *Robin*, une prépondérance des petites structures thermiques dans $\partial_y T'$ en $y^+ = 5$.

Le point le plus frappant pour le cas *Robin* est la brutale variation des lignes de contour de $\partial_y T'$ entre les plans $y^+ = 0$ et $y^+ = 5$, en opposition avec le cas $isoT$ qui présente de faibles variations.

Champs instantanés

Pour tous les champs instantanés, on utilise le minimum et le maximum du champ pour définir la palette de couleur. On a donc une palette de couleur différente pour chaque champ. Ainsi, on ne compare pas l'amplitude des fluctuations de température (ou de flux) mais la forme des structures qui forment ledit champ.

Les champs instantanés à la paroi ($y^+ = 0$) sont tracés figure 4.20. D'une part, on observe bien des grandes structures thermiques dans $T\,(isoQ)$ et des petites structures dans $\partial_y T\,(isoT)$. D'autre part, le cas *Robin* produit bien des structures thermiques identiques pour T et $\partial_y T$. Qualitativement, on voit que ces dernières sont plus longues que celles de $\partial_y T\,(isoT)$ et plus courtes que celles de $T\,(isoQ)$.

Les champs instantanés en $y^+ = 5$ sont tracés figure 4.21. En ce qui concerne $\partial_y T$, les champs instantanés sont très proches, le cas $isoT$ se distinguant par des structures légèrement plus allongées. Pour T, on observe des écarts plus importants sur les champs instantanés. Le cas $isoQ$ produit des structures très longues comparé au cas $isoT$ qui produit des structures plus petites. Qualitativement, on observe que le cas *Robin* est intermédiaire et plus proche du cas $isoT$. En outre, pour le cas $isoT$, en $y^+ = 5$, on observe des structures très similaires dans T et $\partial_y T$. Cette observation ne s'applique pas

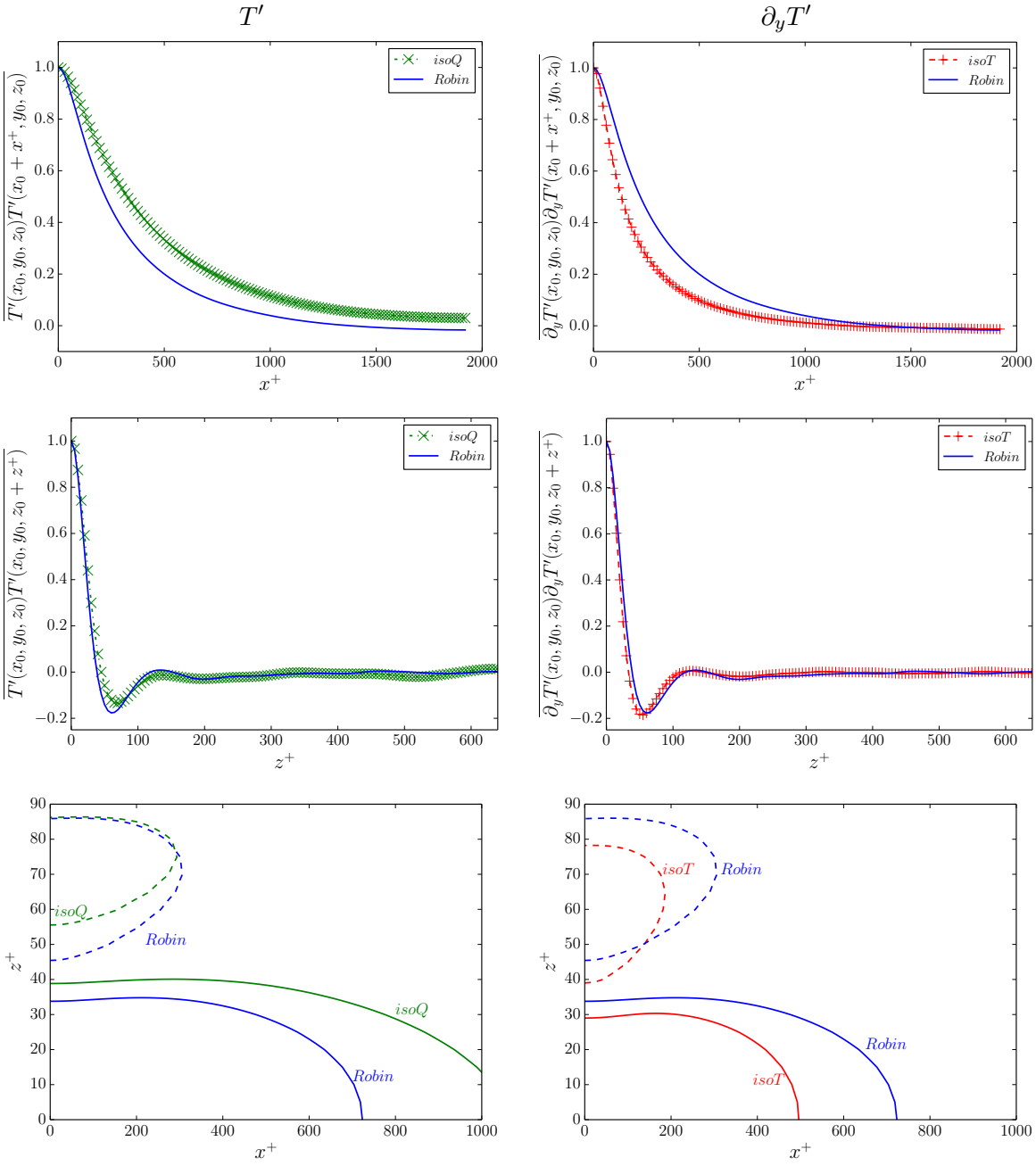


FIGURE 4.18 – Coefficient de corrélation en 2 points à $y^+ = 0$. Haut : Direction x. Milieu : Direction z. Bas : Lignes de contour (ligne solide pour le contour à 0.1 et ligne pointillée pour le contour à -0.1). Gauche : Température T'. Droite : Gradient de température normal à la paroi $\partial_y T'$.

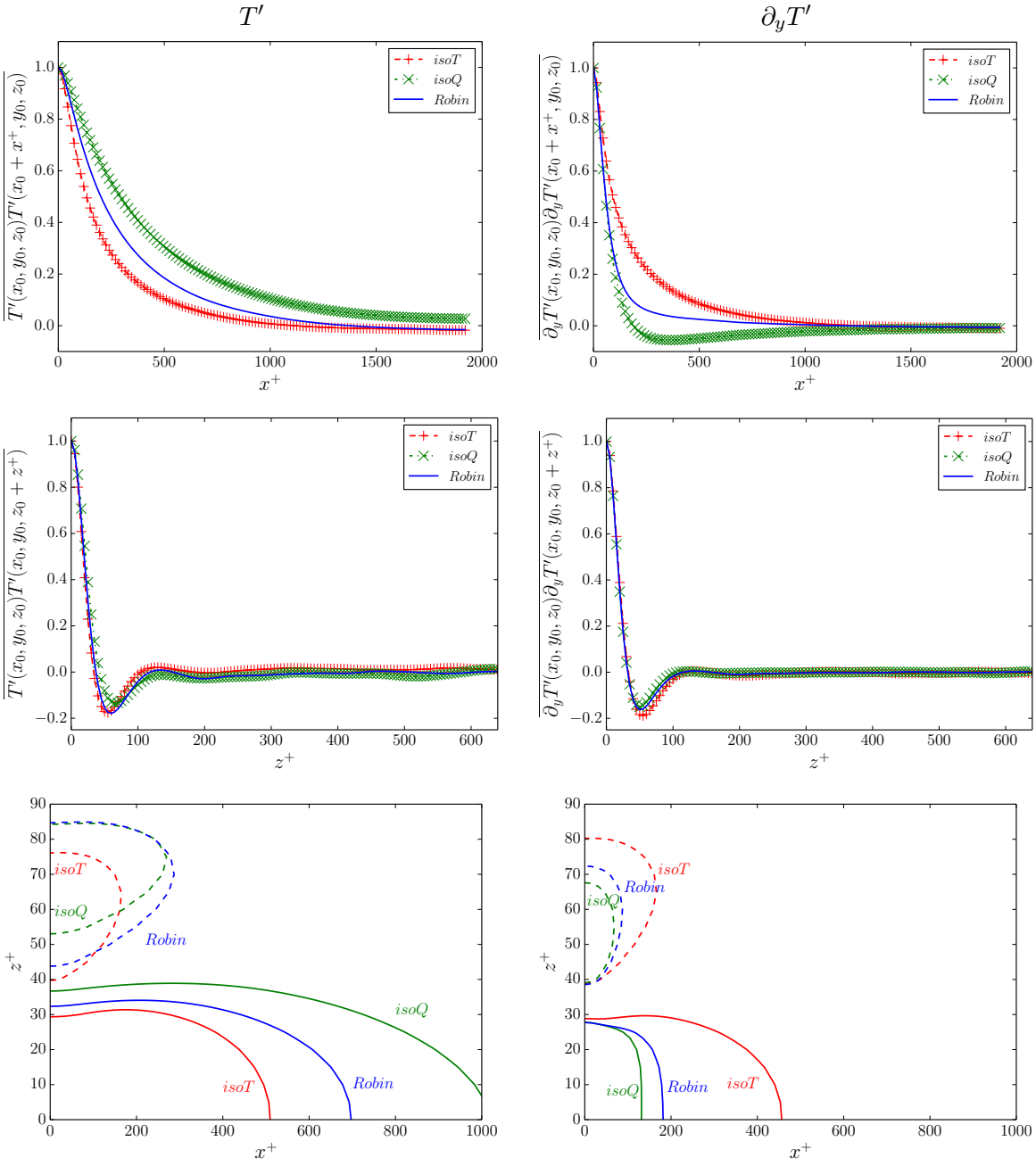


FIGURE 4.19 – Coefficient de corrélation en 2 points à $y^+ = 5$. Haut : Direction x. Milieu : Direction z. Bas : Lignes de contour (ligne solide pour le contour à 0.1 et ligne pointillée pour le contour à -0.1). Gauche : Température T'. Droite : Gradient de température normal à la paroi $\partial_y T'$.

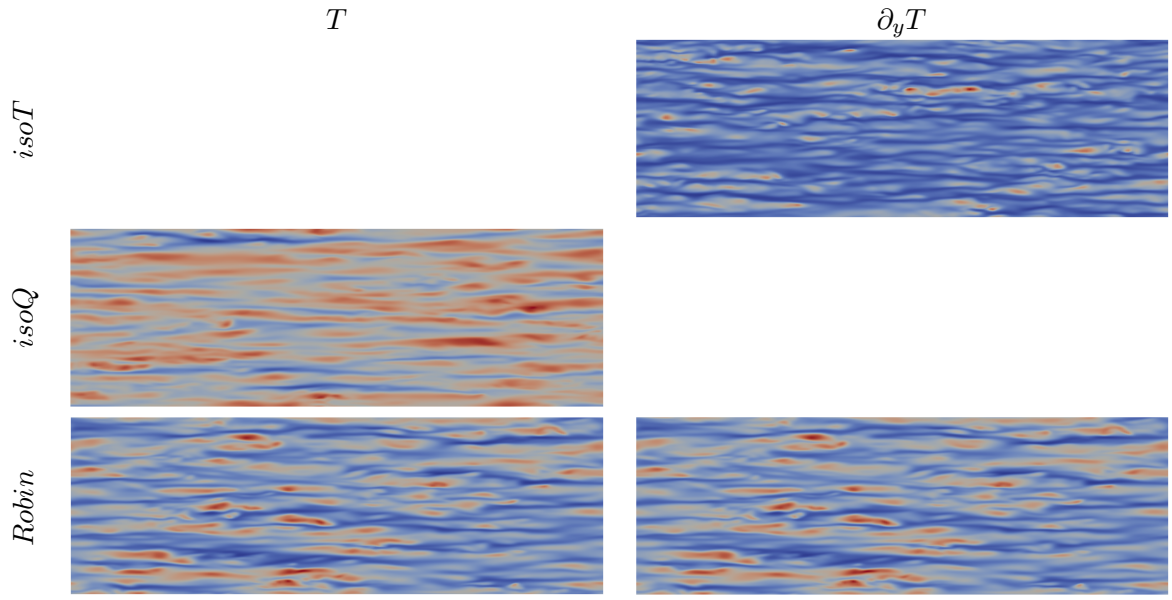


FIGURE 4.20 – Champs instantanés à la paroi ($y^+ = 0$). Gauche : Température. Droite : Flux normal à la paroi. Haut : $isoT$. Milieu : $isoQ$. Bas : $Robin$.

aux cas $isoQ$ et $Robin$ qui produisent des structures thermiques dans T très différentes de celles présentes dans $\partial_y T$.

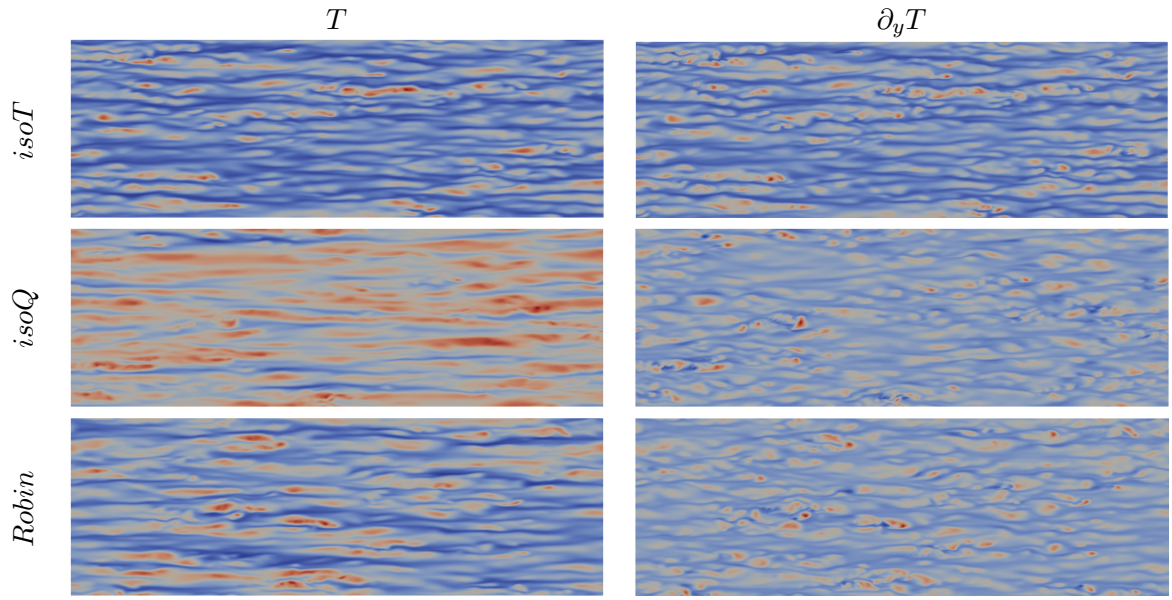


FIGURE 4.21 – Champs instantanés en $y^+ = 5$. Gauche : Température. Droite : Flux normal à la paroi. Haut : $isoT$. Milieu : $isoQ$. Bas : $Robin$.

Globalement, il y a un bon accord entre ces champs instantanés et les corrélations en 2 points tracées (figures 4.18 et 4.19). Soulignons un point important : l'analyse de champs instantanés est qualitative, par opposition aux statistiques qui sont plus quantitatives. L'analyse qualitative de la longueur des structures thermiques dans les champs instantanés est à rapprocher des autocorrélations en x et des contours $\mathcal{C}^+$ évoqués dans la sous-section précédente.

4.3 Transfert thermique conjugué

Cette section est dédiée aux simulations avec transfert thermique conjugué. La première sous-section détaille la mise en données tandis que les deux suivantes sont consacrées à l'analyse des simulations avec transfert thermique conjugué.

4.3.1 Mise en données

Mise en données brute

Les 2 domaines solides (sur et sous le fluide) ont une hauteur unitaire : $L_{s1} = L_{s2} = 1$. On les discrétise dans la direction y avec une grille de Chebyshev d'ordre 128. La hauteur de la première cellule est donc de 5.10^{-3} en unités de paroi. Le flux est imposé au bord extérieur de chaque solide. La dérivée de la température y vaut $\pm q_w/G_2$. Le champ de température moyenne ainsi obtenu est affine dans le solide. La température fluide moyenne a une dérivée unitaire à l'interface fluide-solide ($q_w = -1$), en accord avec le terme source présent dans l'équation d'évolution du scalaire dans le fluide ($f_T = \frac{1}{RePr}$).

Effets de la sous-résolution

On sait que pour estimer précisément la dissipation associée à $\overline{T'^2}$, on doit utiliser une grille très fine ($\Delta x^+ = \Delta z^+ = 1$). Bien que notre grille ne satisfasse pas cette exigence, les bilans de $\overline{T'^2}$, R_{xT} et R_{yT} pour les cas *isoT*, *isoQ* et *Robin* sont équilibrés et l'erreur pour ces derniers est de l'ordre de 1%. La figure 4.22 montre que ce n'est plus le cas avec transfert thermique conjugué : la somme des termes du bilan de $\overline{T'^2}$ est non-nulle et maximale à $y^+ \approx 40$. On ne dispose pas de statistiques en 2 points en $y^+ = 40$, uniquement en $y^+ = [0; 5; 15; 150]$. En $y^+ = 150$, la corrélation en 2 points de la température dans la direction x oscille légèrement, contrairement à celle en z. Ces oscillations se traduisent par un pic à haut nombre d'onde dans le spectre [1] de la corrélation en x. Soulignons un point important : ces oscillations ne sont pas physiques, ce sont des artefacts numériques produits par une résolution spatiale insuffisante. On remarque de plus que le spectre des cas *isoT* et *Robin* présente également un pic à haut nombre d'onde d'amplitude moindre. Ce pic suggère que pour ces 2 cas, la résolution spatiale utilisée est à la limite de la résolution DNS. La simulation *Conjug.* qui illustre ces oscillations utilise des propriétés thermiques dans le solide identiques à celles du fluide. ($G_1 = G_2 = 1$).

Ces résultats montrent que la mise en données actuelle ne permet pas de simuler les cas avec transfert thermique conjugué de manière pleinement satisfaisante. On observe donc qu'en présence de transfert thermique conjugué, on a besoin de décrire finement des échelles plus petites que dans les cas *isoT*, *isoQ* et *Robin*. On va comparer dans ce qui suit quelques solutions à cette problématique.

Solutions

On va comparer 4 solutions :

— Solution 0 ($Sol.0$) : On ne change rien. Comme l'a montré la figure 4.22, on a alors un bilan de $\overline{T'^2}$ non-équilibré et des oscillations sur la corrélation de T' dans la direction x en $y^+ = 150$.

— Solution 1 ($Sol.1$) : On corrige simplement le bilan de $\overline{T'^2}$ par la somme des termes. Cette approche est fréquente dans les simulations de type LES (Bogey et al. [7]). Dans le cas d'une simulation à résolution marginale, les petites échelles sont mal résolues et la dissipation des moments d'ordre 2 tend alors à être sur-estimée.

1. Spectre obtenu en appliquant une transformée en cosinus discrète sur la corrélation en 2 points. La transformée est effectuée en *python* à l'aide la fonction *dct* de la librairie *fftpack* du module *scipy*. On utilise les options par défaut de la fonction. `http://docs.scipy.org/doc/scipy-0.13.0/reference/generated/scipy.fftpack.dct.html`

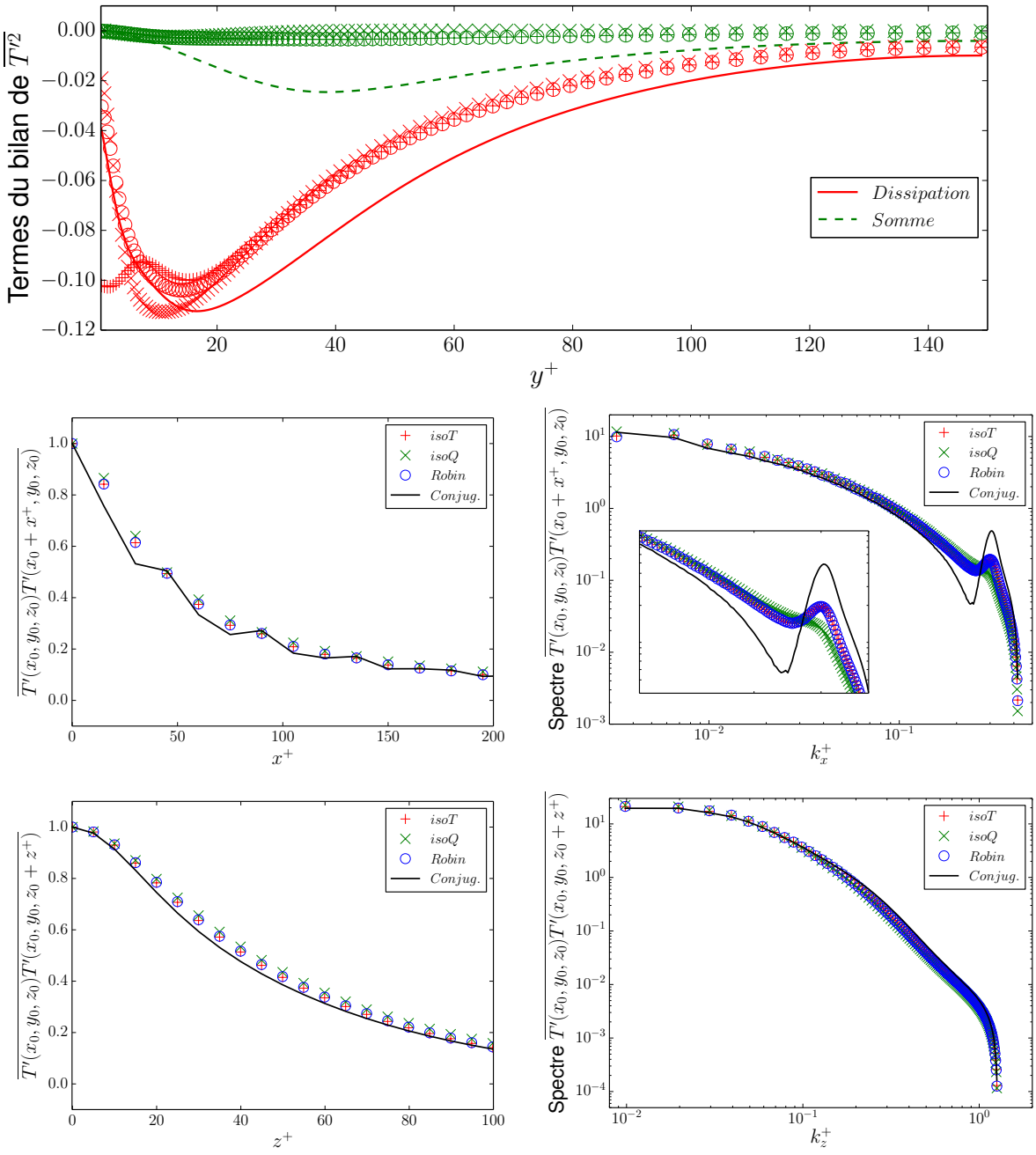


FIGURE 4.22 – Haut : Dissipation et somme des termes dans le bilan de $\overline{T'^2}$. Milieu : Coefficient de corrélation en 2 points dans la direction x pour T' à $y^+ = 150$ et spectre associé. Bas : Coefficient de corrélation en 2 points dans la direction z pour T' à $y^+ = 150$ et spectre associé. Lignes : *Conjug.* Symboles : + : *isoT*. × : *isoQ*. ∘ : Robin.

Corriger la dissipation par la somme du bilan revient à assimiler le déséquilibre qu'il présente à de la dissipation numérique artificielle. Cette solution n'impacte pas la mise en données de la simulation et modifie seulement le post-traitement.

— Solution 2 ($Sol.2$) : On va utiliser, pour le scalaire, des schémas numériques qui sont plus dissipatifs à haut nombre d'onde, ce qui permet de compenser la sous-résolution du maillage. On utilise ce schéma sur-dissipatif uniquement dans la direction x. Le schéma en question est d'ordre 4 (Schéma SVV avec $\nu_0/\nu = 19$ dans Lamballais et al. [43]). Ainsi, on fige l'anisotropie du maillage et on ajoute de la dissipation numérique uniquement dans la direction x, qui présente des oscillations.

— Solution 3 ($Sol.3$) : On va utiliser un maillage 2 fois plus dense dans les directions x et z, la taille du domaine restant la même. On multiplie alors par 4 le nombre de points, ce qui augmente considérablement le coût du calcul. Ainsi, on ne modifie pas l'anisotropie du maillage dans les plans à y constant. On obtient de la sorte une simulation plus finement résolue et que l'on peut considérer comme la solution de référence.

La figure 4.23 montre que le bilan de $\overline{T'^2}$ est équilibré pour les solutions 1, 2 et 3. De plus, ces 3 solutions produisent quasiment la même dissipation. La corrélation de T' dans la direction x en $y^+ = 150$ montre que les solutions 2 et 3 ne produisent pas d'oscillations. La solution 2 (schéma diffusif sur-dissipatif pour la diffusion scalaire en x) semble donc être le meilleur compromis entre le coût de calcul et la précision.

La figure 4.24 montre que la ligne de contour $\mathcal{C}^+$ (ligne de contour de l'autocorrélation en x et z pour la valeur de 0.1) de T' est impactée par la mise en données. Soulignons que la figure est un zoom sur le contour, l'impact est donc modéré pour le contour $\mathcal{C}^+$ en $y^+ = 0$. Les écarts sont plus visibles lorsque la séparation dans la direction x est élevée. Qualitativement, on observe que la solution 2 (diffusion thermique hybride ordre 4 / ordre 6) produit une ligne de contour plus courte, alors que la solution 3 (maillage fin) produit une ligne de contour plus allongée, la solution 0 étant intermédiaire. Il semble important de souligner que ces écarts sont de faible amplitude et de l'ordre de l'incertitude statistique.

La figure 4.25 montre que la ligne de contour $\mathcal{C}^-$ de T' est fortement impactée par la mise en données. Les solutions 0 et 3 (diffusion thermique isotrope d'ordre 6) produisent quasiment la même ligne de contour, ligne qui diffère sensiblement de celle produite par la solution 2 (diffusion thermique hybride ordre 4 / ordre 6). On observe ainsi que l'utilisation d'une diffusion numérique anisotrope perturbe fortement la dynamique du scalaire.

La figure 4.26 illustre ces statistiques avec un champ instantané de température dans le plan $y^+ = 150$. Le cas $Sol.0$ se démarque nettement des 2 autres cas par la présence visible de hachures sur l'image. Les cas $Sol.2$ et $Sol.3$ sont nettement moins hachurés. Ces hachures sont le pendant du pic aux grands nombres d'onde que l'on a mis en évidence dans le spectre de la température.

Comme en atteste la figure 4.23, la solution 2 permet d'obtenir les quantités intégrales (i.e. les bilans des moments d'ordre 2) avec précision pour un coût de calcul moindre. Elle permet également de supprimer les oscillations mises en évidence sur la corrélation de T' dans la direction x au milieu du canal. En revanche, elle semble avoir une précision dégradée pour les données plus fines (corrélations en 2 points). Soulignons un point important : en l'absence de données de référence pour ces corrélations en 2 points, on ne peut pas trancher et affirmer que la solution 2 est moins réaliste que la solution 3. On discute ce point plus en détail dans l'annexe E. Nos résultats montrent que les lignes de contour de l'autocorrélation de la température sont très sensibles à la mise en données (en particulier une sensibilité forte à la formulation du terme convectif et au schéma de discrétisation spatiale du terme diffusif).

Dans un premier temps (sous-section 4.3.2), on va comparer les cas $isoT$, $isoQ$ et $Robin$ avec la simulation du transfert thermique conjugué raffinée (cas $Sol.3$) qui utilise des propriétés thermiques fluide-solide identiques. On analysera alors les bilans des moments d'ordre 2 et les corrélations en 2 points. Dans un second temps (sous-section 4.3.3), on va

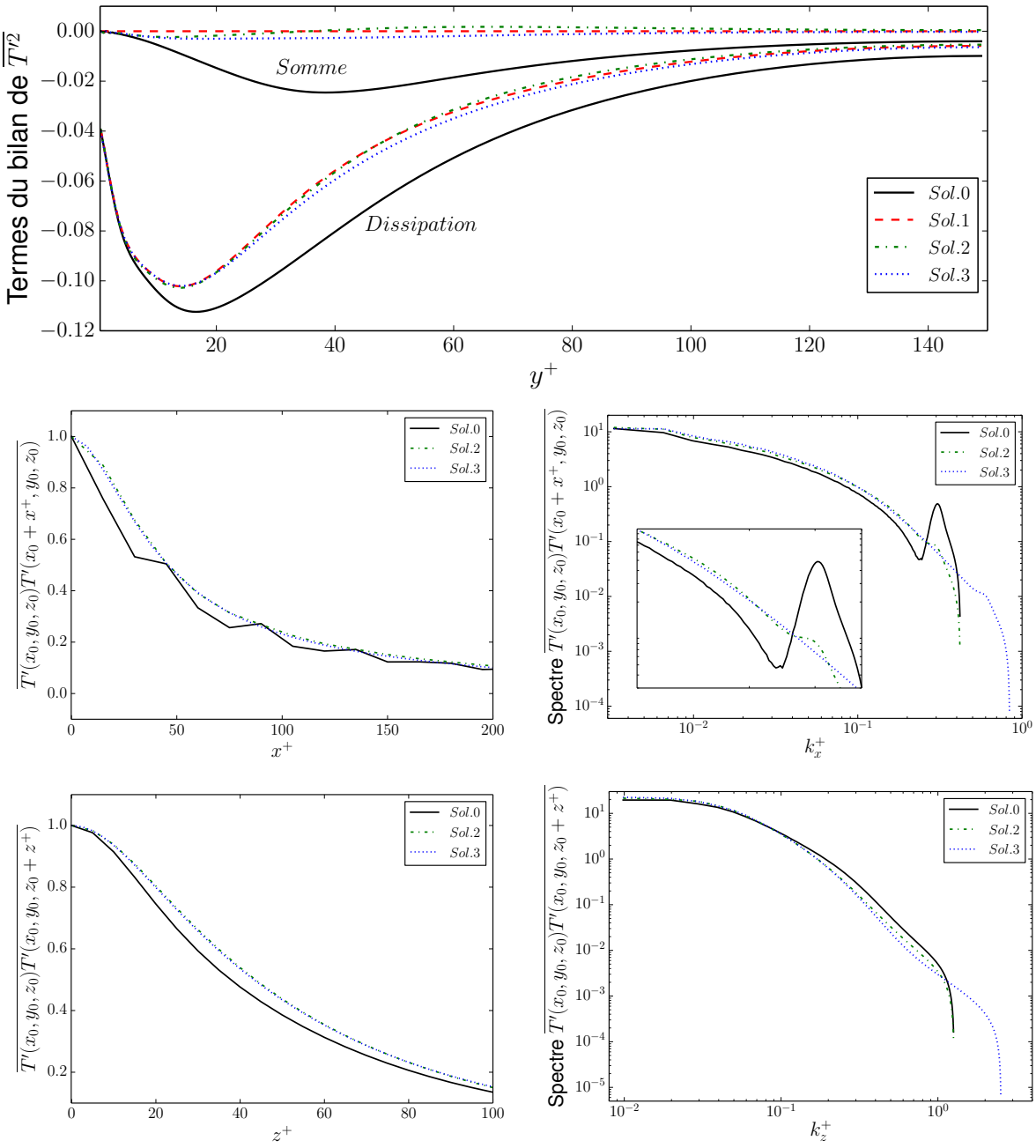


FIGURE 4.23 – Haut : Dissipation et somme des termes dans le bilan de $\overline{T'^2}$. Milieu : Coefficient de corrélation en 2 points dans la direction x pour T' à $y^+ = 150$ et spectre associé. Bas : Coefficient de corrélation en 2 points dans la direction z pour T' à $y^+ = 150$ et spectre associé.

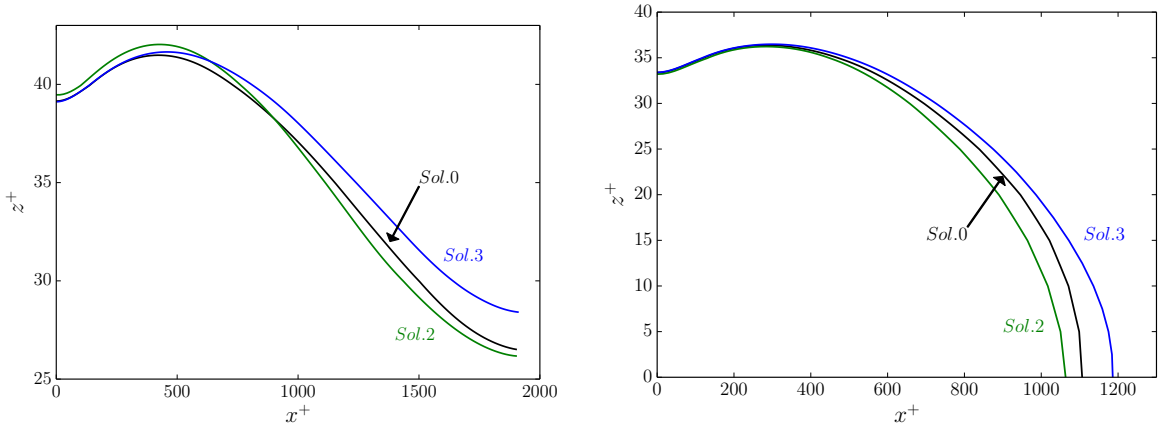


FIGURE 4.24 – Contour $\mathcal{C}^+$ de T' pour les 3 mises en données conjugué. Gauche : En $y^+ = 0$. Droite : En $y^+ = 5$.

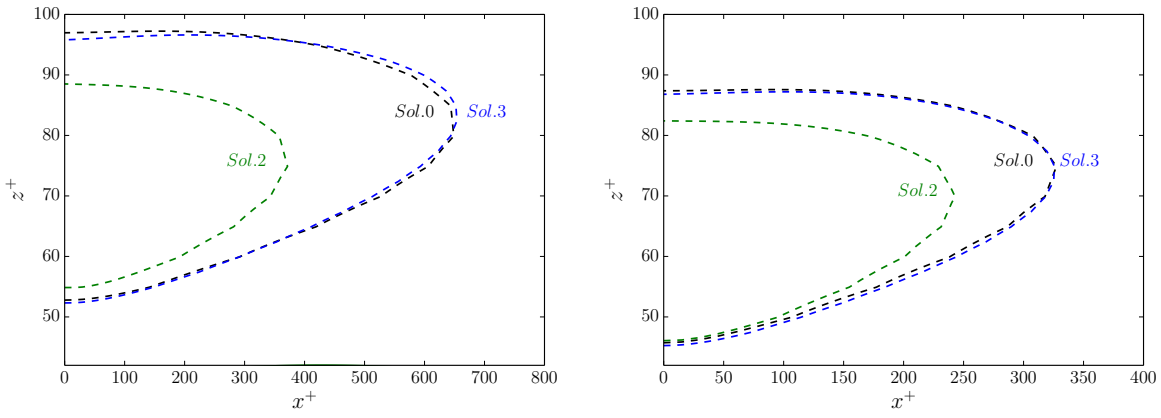


FIGURE 4.25 – Contour $\mathcal{C}^-$ de T' pour les 3 mises en données conjugué. Gauche : En $y^+ = 0$. Droite : En $y^+ = 5$.

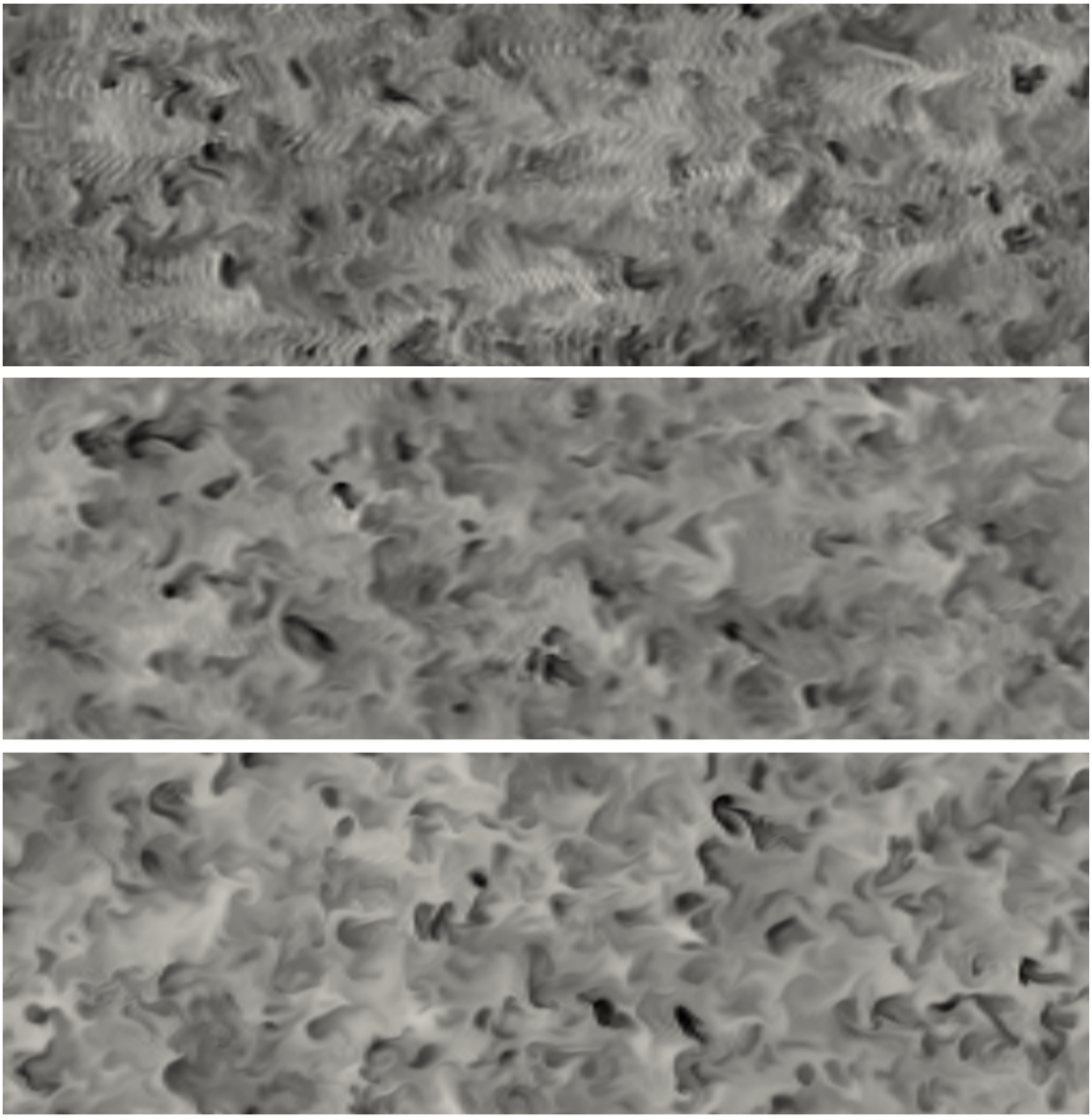


FIGURE 4.26 – Champs instantanés de température à $y^+ = 150$. Haut : $Sol.0$. Milieu : $Sol.2$. Bas : $Sol.3$.

comparer des simulations avec transfert thermique conjugué qui utilisent des propriétés thermiques fluide-solide différentes. On s'appuiera alors sur la mise en donnée du cas $Sol.2$ avec un schéma de diffusion thermique hybride ordre 4 / ordre 6. L'analyse se limitera alors aux bilans des moments d'ordre 2.

4.3.2 Propriétés thermiques fluide-solide identiques

Lorsque les propriétés thermiques du fluide et solide sont identiques, les paramètres G_1 et G_2 valent 1. On compare ici les cas $isoT$, $isoQ$, $Robin$ et $Sol.3$. Le cas $Sol.3$ sera noté $Conju.$ dans la suite.

Température moyenne

Le figure 4.27 montre que la température moyenne n'est pas impactée par la nature de la condition aux limites, ce qui est en accord avec les résultats précédents (figure 4.11) et la littérature (Kasagi et al. [33]).

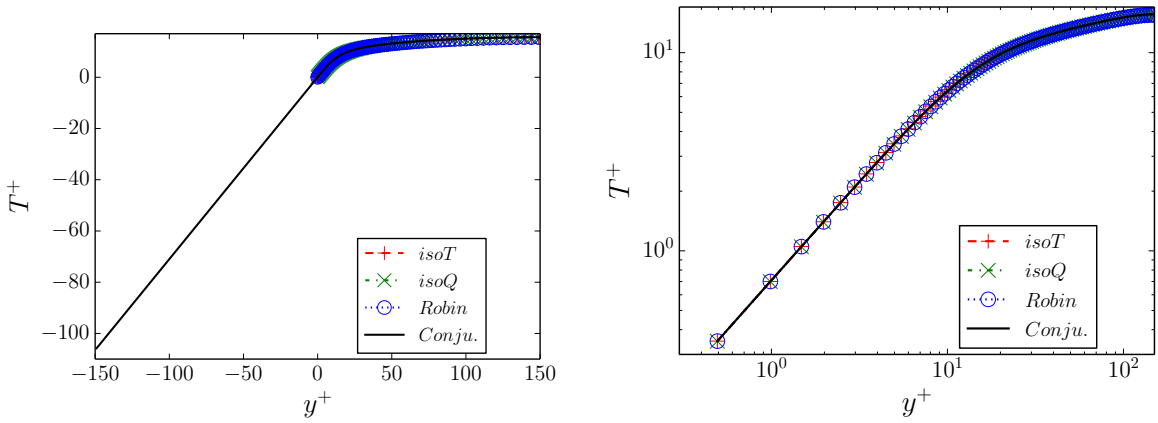


FIGURE 4.27 – Température moyenne T^+. Gauche : axes linéaires. Droite : axes logarithmiques. Ligne : $Conju.$. $+$: $isoT$. $\times$: $isoQ$. $\circ$: $Robin$.

Moments d'ordre 2

La figure 4.28 montre que la variance de la température obtenue avec transfert thermique conjugué est très proche de celle obtenue avec la condition de Robin. Cette dernière, construite avec les seules statistiques des cas $isoT$ et $isoQ$ est donc, à première vue, une bonne approximation du transfert thermique conjugué, lorsque les propriétés thermiques du solide sont identiques à celles du fluide. La figure 4.29 montre que la situation est similaire pour les flux thermiques turbulents.

Les coefficients de corrélation entre les fluctuations de vitesse et de température tracés (figure 4.30) apportent une compréhension plus fine. La corrélation entre T' et u'_y indique un bon accord entre le cas Robin et le cas conjugué. La situation est radicalement différente pour la corrélation entre T' et u'_x. Pour $y^+ \geq 10$, les cas Robin et conjugué sont très proches du cas $isoT$. En deçà, le cas Robin reste proche du cas $isoT$ alors que le cas conjugué tend vers le cas $isoQ$. Cet écart entre le cas Robin et le cas conjugué n'est pas spécifique à la corrélation entre u'_x et T', comme on va le voir dans la suite.

Bilans des moments d'ordre 2

Pour le bilan de R_{xT}, la figure 4.31 montre un bon accord entre le cas Robin et le cas conjugué. La corrélation entre $\partial_y u'_x$ et $\partial_y T'$ montre qu'à proximité de la paroi ($y^+ \leq 10$), les cas Robin et conjugué ont un comportement similaire et restent proches du cas $isoT$.

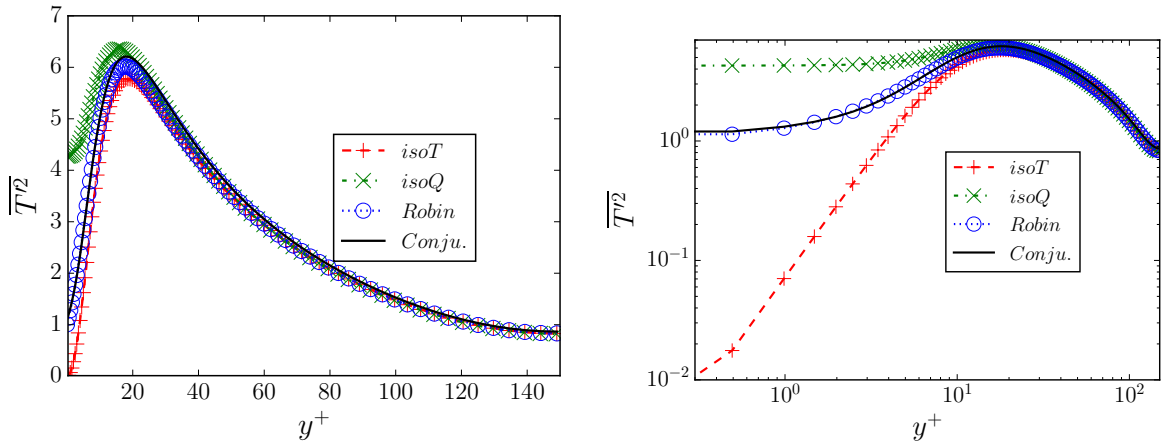


FIGURE 4.28 – Variance de la température. Gauche : axes linéaires. Droite : axes logarithmiques. Ligne : $Conju.$ + : $isoT$. × : $isoQ$. ∘ : $Robin$.

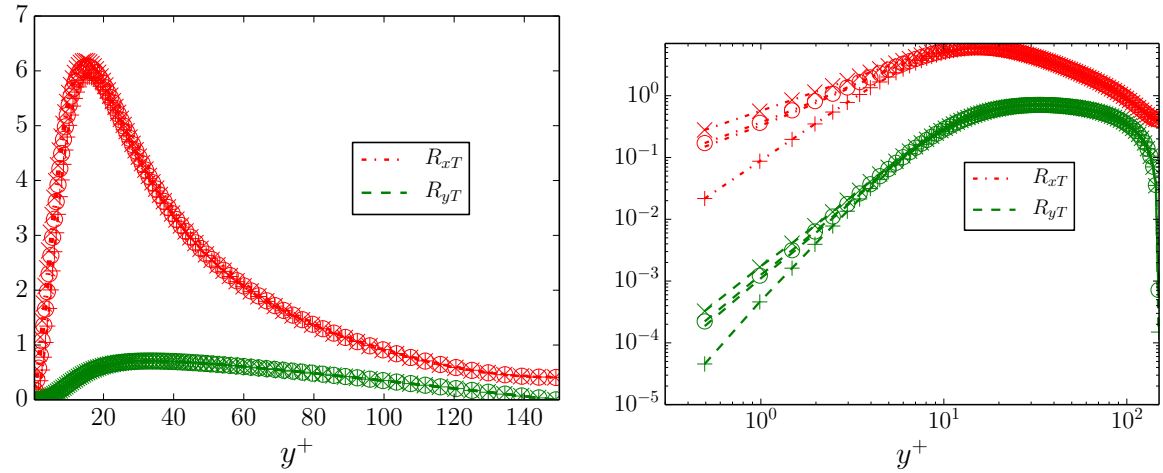


FIGURE 4.29 – Flux thermiques turbulents. Gauche : axes linéaires. Droite : axes logarithmiques. Ligne : $Conju.$. + : $isoT$. × : $isoQ$. ∘ : $Robin$.

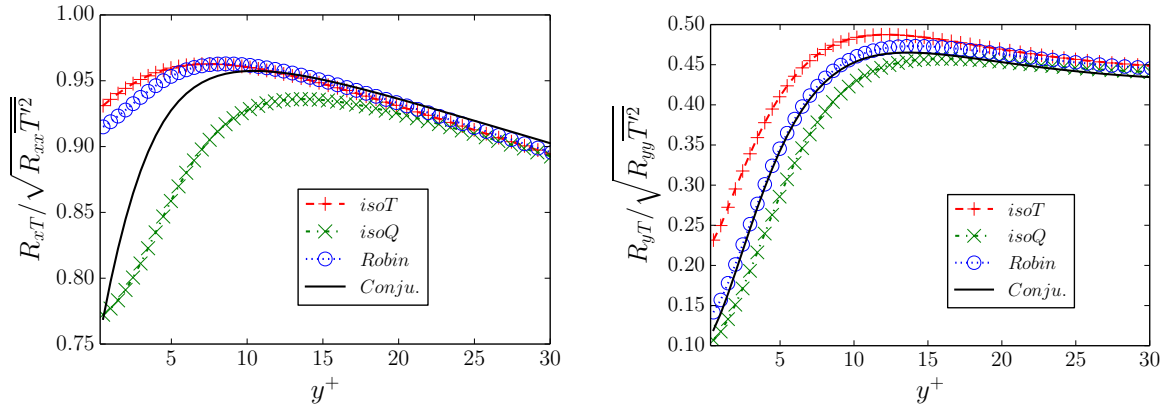


FIGURE 4.30 – Coefficient de corrélation entre les fluctuations de vitesse et de température. Gauche : Fluctuations de vitesse en x. Droite : Fluctuations de vitesse en y. Ligne : $Conju.$. + : $isoT$. × : $isoQ$. ∘ : $Robin$.

Pour le bilan de R_{yT} (figure 4.32), dans le cas conjugué, la corrélation entre la température et le gradient de pression n'est pas nulle à la paroi, comme dans les cas Robin et *isoQ*. La corrélation entre $\partial_y u'_y$ et $\partial_y T'$ montre qu'à proximité de la paroi ($1 \leq y^+ \leq 10$), les cas Robin et conjugué sont très proches. En deçà, les cas *isoT*, *isoQ* et conjugué sont semblables, la corrélation du cas Robin étant un peu plus proche de zéro.

Pour le bilan de $\overline{T'^2}$, la figure 4.33 montre que le cas Robin est une bonne approximation du cas conjugué comparé aux cas *isoT* et *isoQ*. L'accord entre les cas Robin et conjugué n'est cependant pas parfait, en atteste les écarts dans la contribution relative de la partie normale dans ε_{TT} : à proximité de la paroi ($y^+ \leq 10$), cette contribution relative est plus importante dans le cas conjugué que dans le cas Robin.

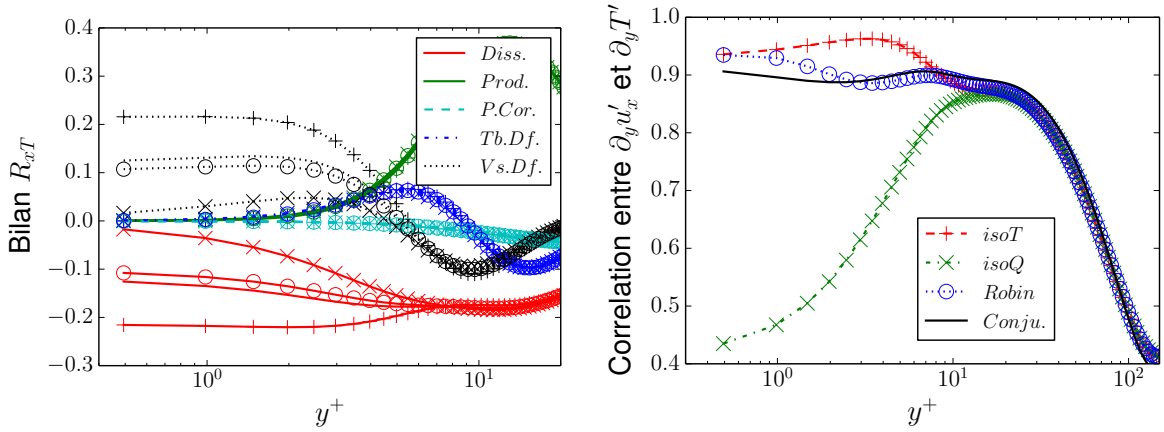


FIGURE 4.31 – Gauche : Bilan de R_{xT}. Droite : Corrélation entre $\partial_y u'_x$ et $\partial_y T'$. Ligne : *Conju.*. + : *isoT*. × : *isoQ*. ∘ : *Robin*.

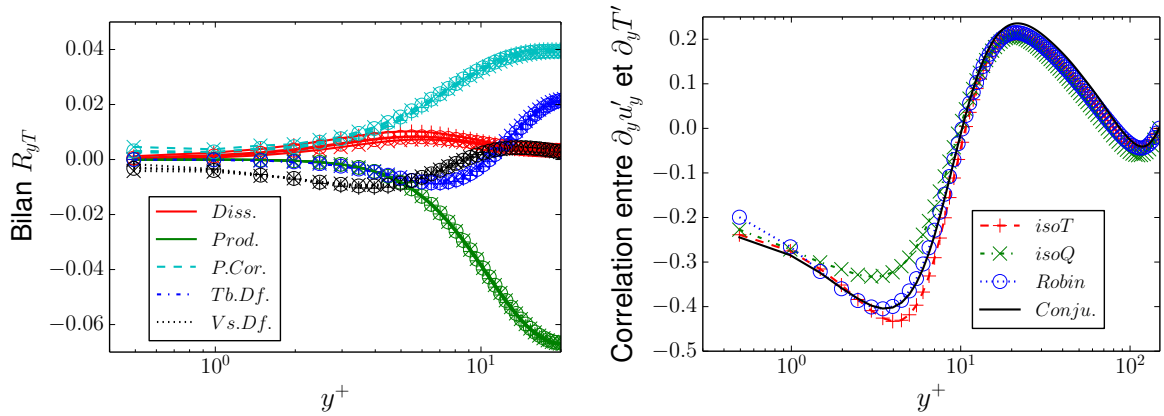


FIGURE 4.32 – Gauche : Bilan de R_{yT}. Droite : Corrélation entre $\partial_y u'_y$ et $\partial_y T'$. Ligne : *Conju.*. + : *isoT*. × : *isoQ*. ∘ : *Robin*.

Interface fluide-solide

Comme on l'a montré dans la sous-section 4.1.5, les fluctuations de température sont amorties par le solide : dans ce dernier, plus on est loin de l'interface fluide-solide, moins il y a de fluctuations de température. Le profil de $\overline{T'^2}$ dans le domaine solide (figure 4.34) confirme cette analyse, en accord avec les travaux de Tiselj et al. [67]. En théorie, pour un solide semi-infini, chaque composante spectrale de la sollicitation thermique a une décroissance exponentielle. Un tel comportement correspondrait à une ligne droite avec les axes utilisés (linéaire en abscisse et logarithmique en ordonnée). La figure 4.34

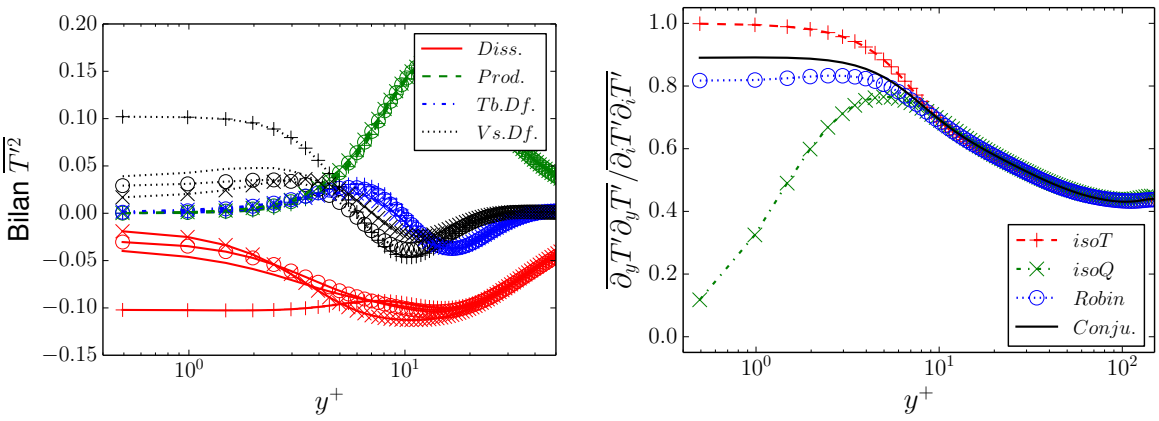


FIGURE 4.33 – Gauche : Bilan de $\overline{T'^2}$. Droite : Contribution relative à ε_{TT} de sa partie normale à la paroi. Ligne : *Conju.*. + : *isoT*. × : *isoQ*. ∘ : *Robin*.

montre que ce n'est clairement pas le cas. D'une part, notre domaine n'est pas semi-infini : le flux est imposé au bord extérieur du solide. La dérivée de $\overline{T'^2}$ y est donc nulle, ce qui est incompatible avec une décroissance exponentielle. D'autre part, la sollicitation thermique à l'interface contient de nombreuses fréquences. Or chaque fréquence a sa propre vitesse de décroissance. L'absence d'une décroissance exponentielle pour $\overline{T'^2}$ peut ainsi « intuitivement » s'expliquer par la richesse du spectre de la sollicitation thermique à l'interface entre le fluide et le solide.

Le profil de la dissipation ε_{TT} (figure 4.34) chute rapidement lorsque l'on s'enfonce dans le solide. Globalement, toutes les quantités intégrales étudiées indiquent que la condition de Robin est une très bonne approximation du cas conjugué, à l'exception de la contribution relative de la partie normale de ε_{TT} et de la corrélation entre les fluctuations de température T' et de vitesse axiale u'_x.

Autocorrélations

Les corrélations en 2 points en $y^+ = 0$ tracées figure 4.35 montrent que le cas conjugué diffère sensiblement du cas Robin. Ainsi, dans le cas de la corrélation de T' dans la direction x, pour une séparation x^+ donnée, la corrélation du cas conjugué est supérieure à celle du cas *isoQ*, elle-même supérieure à celle du cas Robin. À l'inverse, dans le cas de la corrélation de $\partial_y T'$ dans la direction x, pour une séparation x^+ donnée, la corrélation du cas conjugué est inférieure à celle du cas *isoT*, elle-même inférieure à celle du cas Robin.

On a vu que l'utilisation de coefficients constants dans la condition de Robin produit, à la paroi, la même autocorrélation pour T' et $\partial_y T'$, ce qui coince la condition de Robin entre les cas *isoT* et *isoQ*. Ce n'est clairement pas le cas pour la simulation avec transfert thermique conjugué : elle est proche du cas *isoQ* pour la corrélation de T' et proche du cas *isoT* pour la corrélation de $\partial_y T'$. La situation est similaire pour les corrélations en z, bien que moins marquée. En ce qui concerne les lignes de contour de la corrélation, la ligne pointillée qui marque le contour à -0.1 du cas conjugué croise celle du cas Robin pour T' et $\partial_y T'$. C'est la signature de forts écarts au niveau des structures thermiques présentes à la paroi.

Les corrélations en 2 points en $y^+ = 5$ tracées figure 4.36 diffèrent sensiblement de celles à la paroi. D'une part, les corrélations de T' et $\partial_y T'$ en x montrent que pour de faibles séparations, le cas conjugué est très proche du cas Robin et se trouve entre les cas *isoT* et *isoQ*. La situation est similaire pour les corrélations en z, bien que moins marquée. Pour de plus grandes séparations, la corrélation de T' en x du cas conjugué dépasse celle des cas Robin et *isoQ*. C'est la signature de très grandes structures thermiques, déjà observées en $y^+ = 0$. Globalement, en $y^+ = 5$, les autocorrélations montrent que la condition de Robin

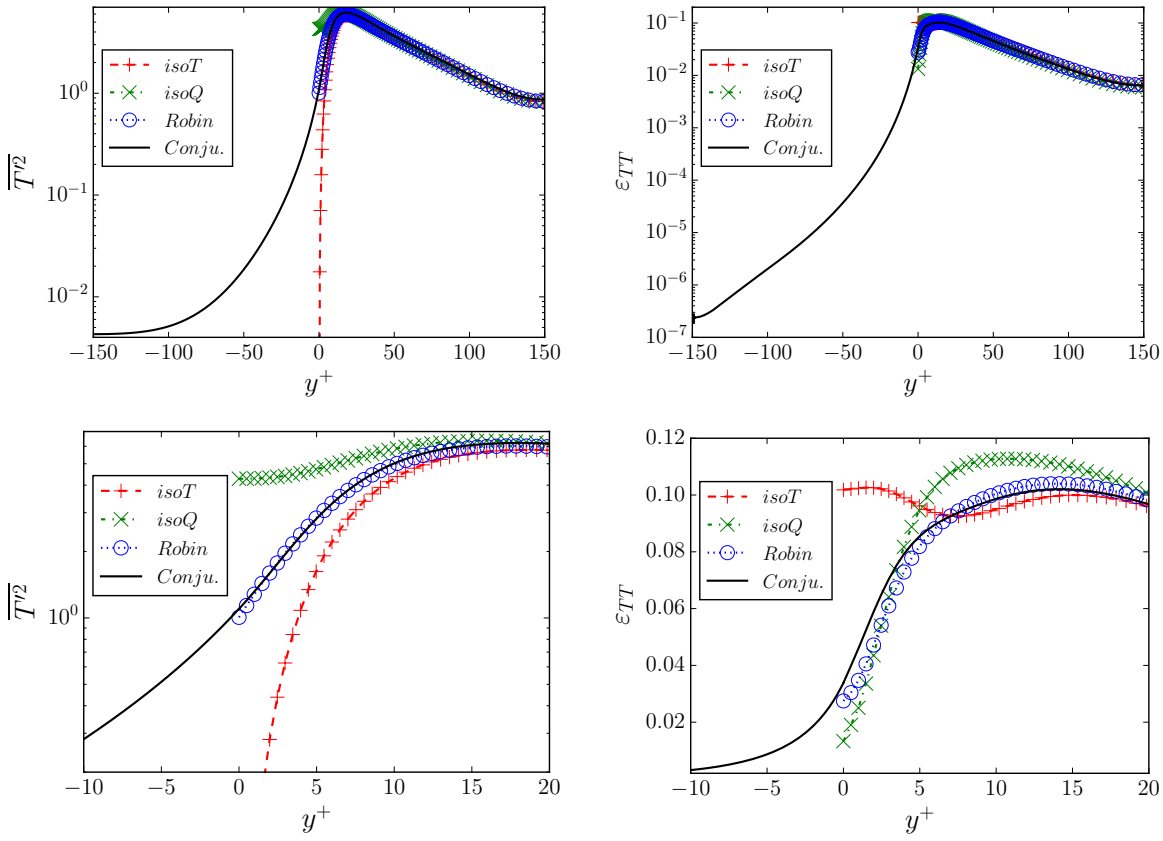


FIGURE 4.34 – Comportement de $\overline{T'^2}$ et ε_{TT} à l'interface fluide-solide. Haut : Domaine total. Bas : Zoom sur l'interface. Gauche : $\overline{T'^2}$. Droite : ε_{TT}.

est une bonne approximation du cas conjugué lorsque la séparation est faible.

Champs instantanés

En ce qui concerne les cas *isoT*, *isoQ* et *Robin*, les champs instantanés que l'on présente ici sont exactement ceux des figures 4.20 et 4.21. Nous les avons déjà commentés. On se limitera donc ici à les comparer à ceux tirés du cas avec transfert thermique conjugué.

Les champs instantanés à la paroi sont tracés figure 4.37. En ce qui concerne la température, on observe des structures thermiques très longues dans $T(conju.)$, similaires à celles dans $T(isoQ)$. Au contraire, dans le flux normal à la paroi, on observe des structures thermiques petites dans $\partial_y T(conju.)$, similaires à celles dans $\partial_y T(isoT)$. À la paroi, le cas avec transfert thermique conjugué produit donc une température qui ressemble à celle du cas *isoQ* et un flux normal qui ressemble à celui du cas *isoT*.

Les champs instantanés en $y^+ = 5$ sont tracés figure 4.38. En ce qui concerne $\partial_y T$, le cas conjugué est similaire aux autres. Il produit des structures légèrement allongées et semble donc plus proche du cas *isoT* sur ce champ instantané. En ce qui concerne la température, le cas conjugué produit des structures allongées. Ces structures sont hybrides : elles sont alllongées comme celles du cas *isoQ* et présentent une forte variabilité spatiale comme celles du cas *Robin*.

Globalement, les champs instantanés confortent l'analyse faite sur les autocorrélations car ils sont en accord avec celle-ci. Soulignons un point important : ils ne démontrent rien, leur analyse étant hautement subjective. Ils ont le mérite de mettre en valeur la complexité du champ thermique dans un écoulement turbulent, complexité qui est souvent masquée derrière des statistiques unidimensionnelles dans le cas du canal plan turbulent.

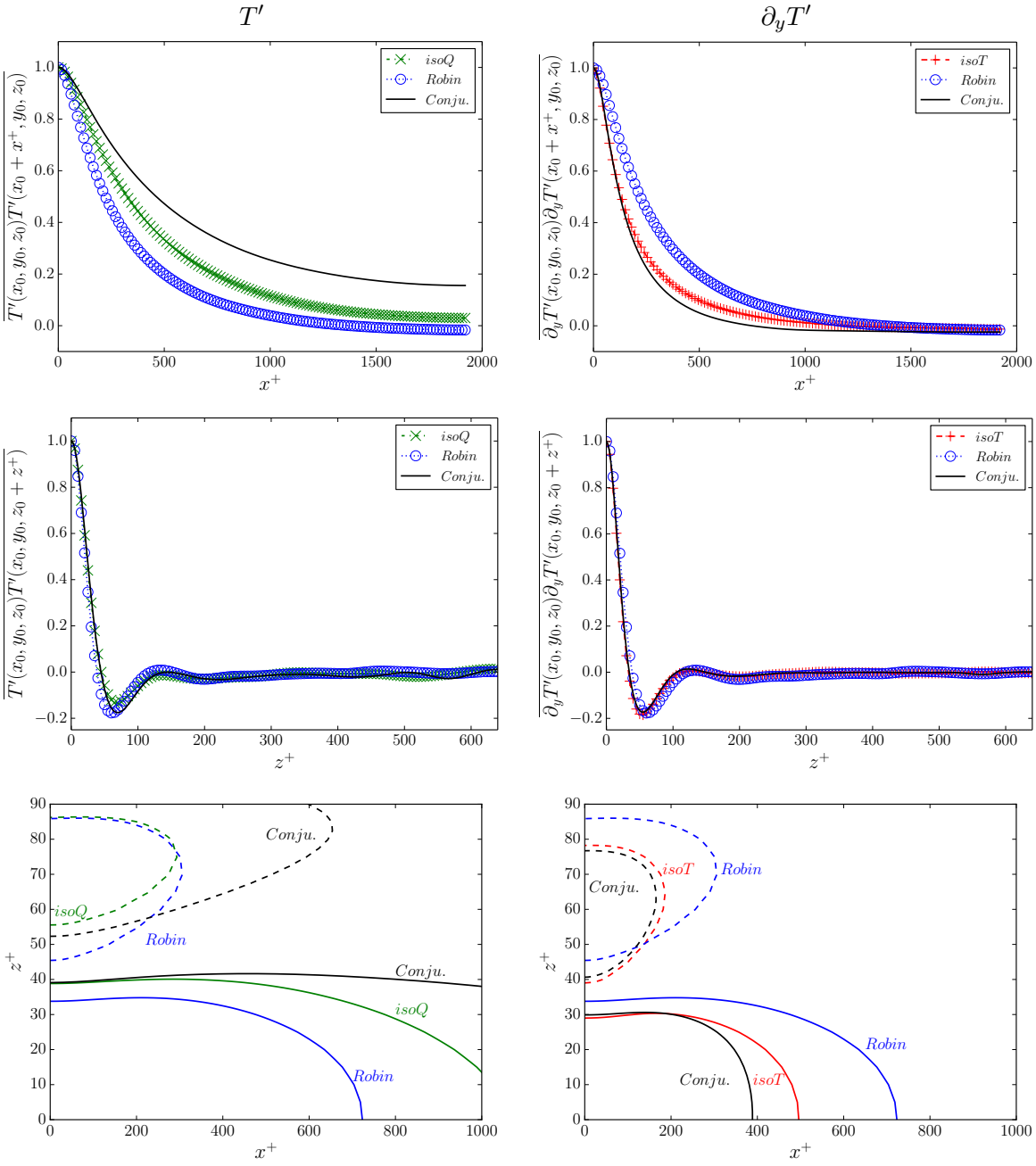


FIGURE 4.35 – Coefficient de corrélation en 2 points à $y^+ = 0$. Haut : Direction x. Milieu : Direction z. Bas : Lignes de contour (ligne solide pour le contour à 0.1 et ligne pointillée pour le contour à -0.1). Gauche : Température T'. Droite : Gradient de température normal à la paroi $\partial_y T'$.

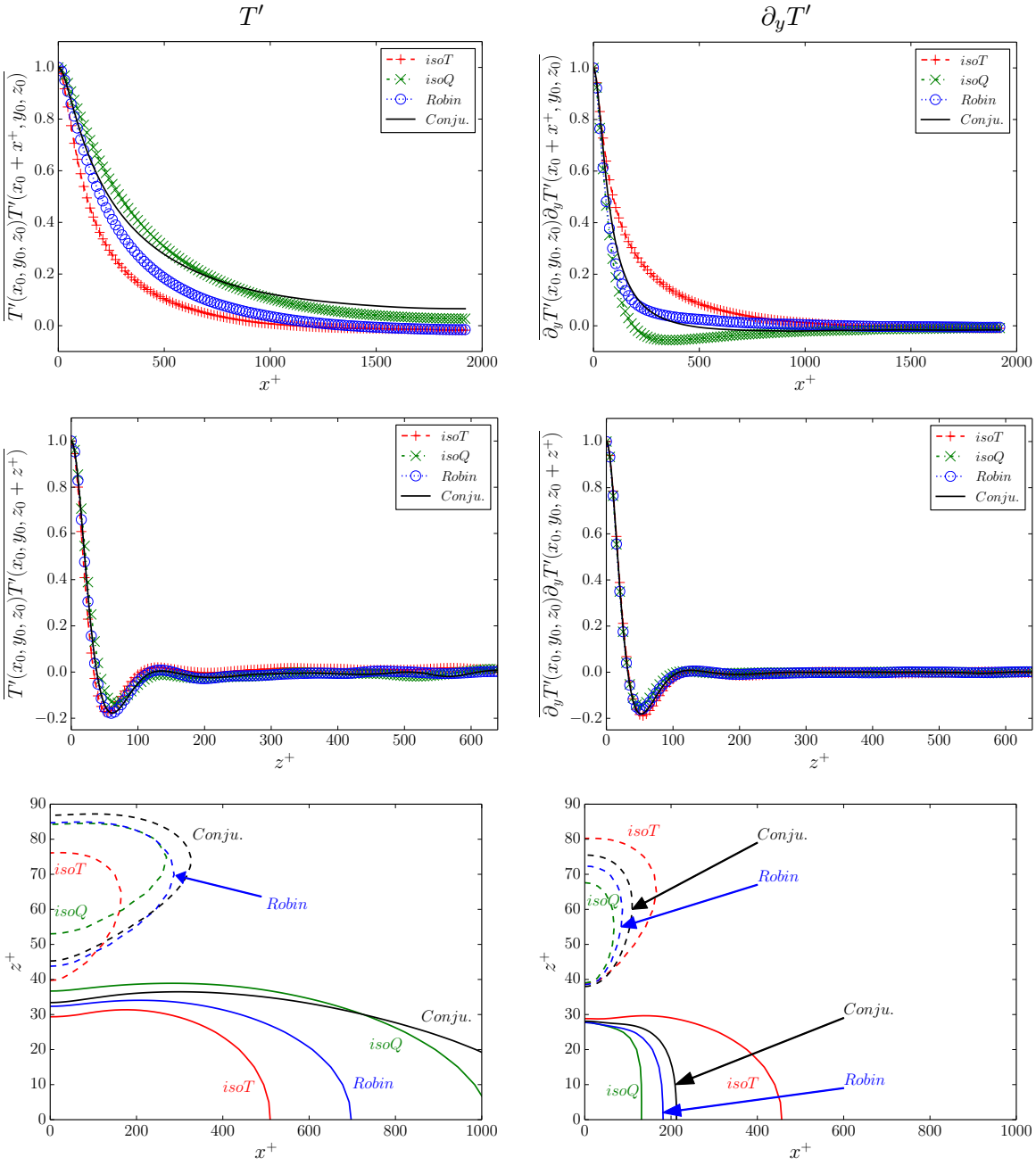


FIGURE 4.36 – Coefficient de corrélation en 2 points à $y^+ = 5$. Haut : Direction x. Milieu : Direction z. Bas : Lignes de contour (ligne solide pour le contour à 0.1 et ligne pointillée pour le contour à -0.1). Gauche : Température T'. Droite : Gradient de température normal à la paroi $\partial_y T'$.

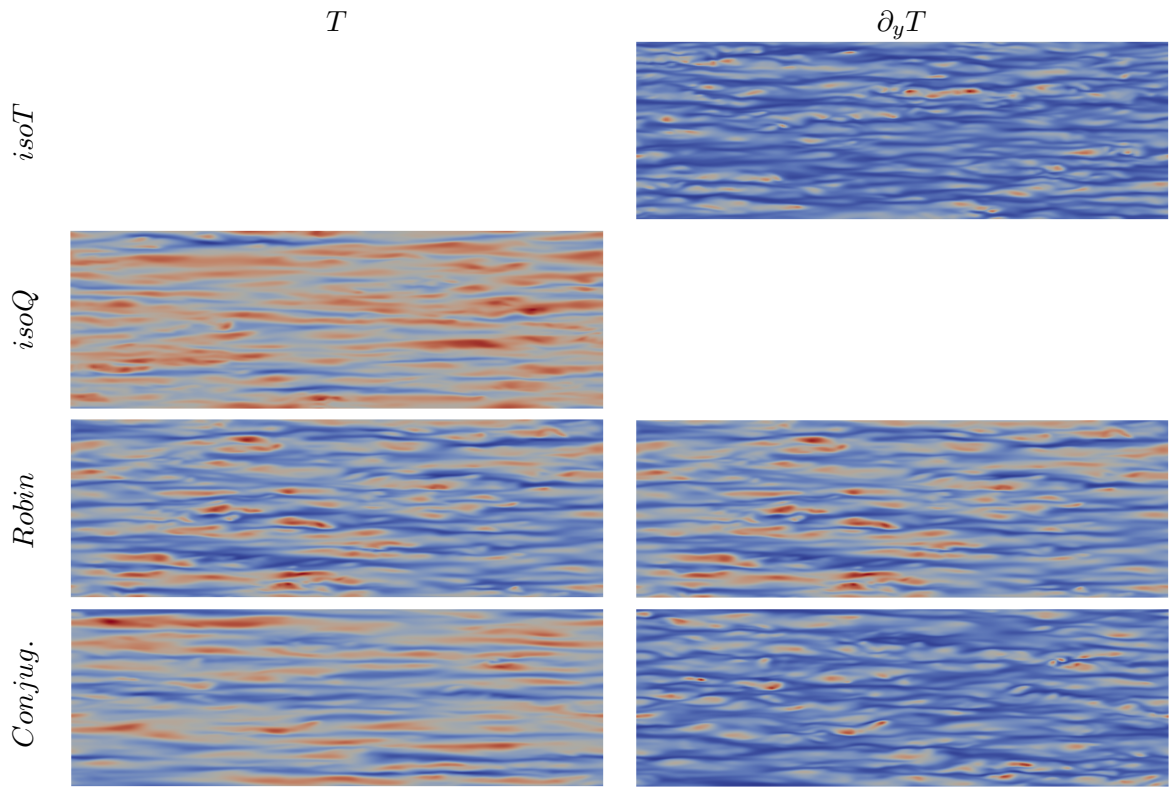


FIGURE 4.37 – Champs instantanés à la paroi ($y^+ = 0$). Gauche : Température. Droite : Flux normal à la paroi. Haut : $isoT$. Milieu-haut : $isoQ$. Milieu-bas : $Robin$. Bas : $Conjug.$

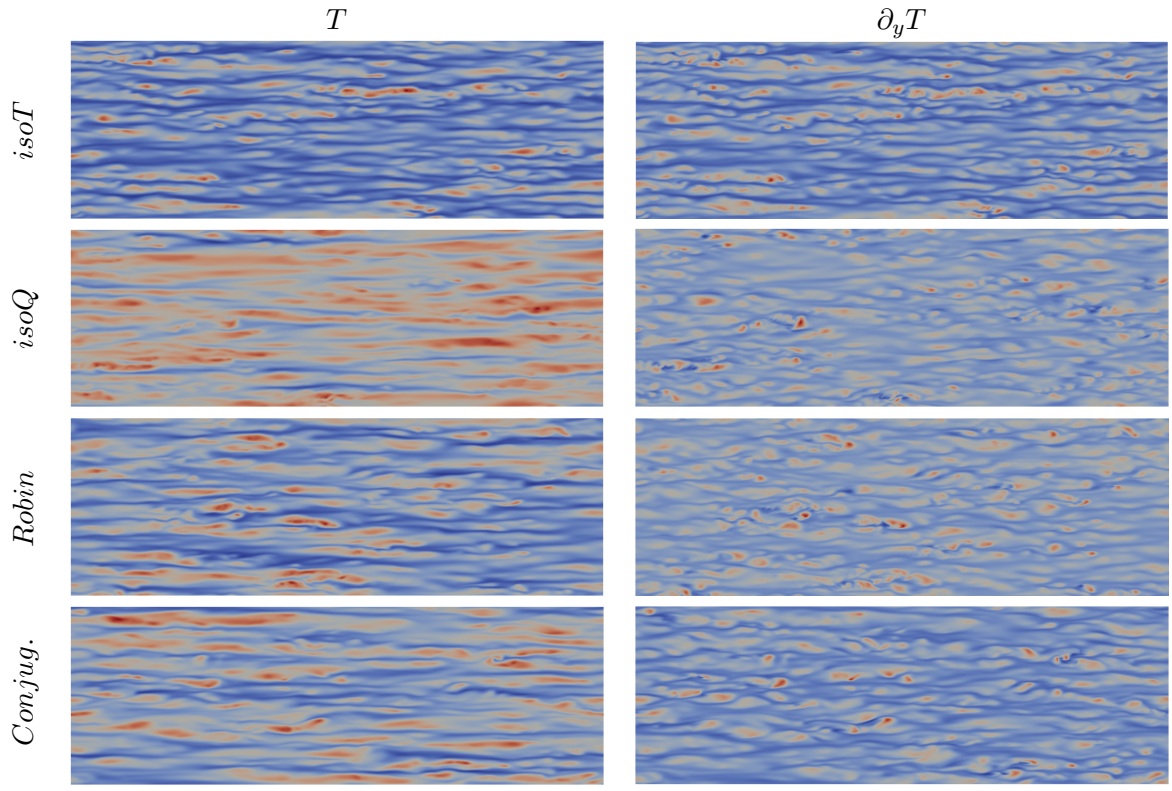


FIGURE 4.38 – Champs instantanés en $y^+ = 5$. Gauche : Température. Droite : Flux normal à la paroi. Haut : $isoT$. Milieu-haut : $isoQ$. Milieu-bas : $Robin$. Bas : $Conjug.$

G_2	2			1			$\frac{1}{2}$		
G_1	2	1	$\frac{1}{2}$	2	1	$\frac{1}{2}$	2	1	$\frac{1}{2}$
K	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	

TABLE 4.2 – Valeurs prises par le ratio d'activité thermique K

Conclusion

La majorité des données présentées ici montrent que la condition de Robin imite correctement le cas conjugué. Bien entendu, l'accord n'est pas parfait. C'est ce que présageait l'analyse du début de ce chapitre. La corrélation entre u'_x et T' montre que les écarts entre le cas conjugué et le cas Robin apparaissent en-deçà de $y^+ = 10$. Les coefficients de corrélations en 2 points à $y^+ = 5$ montrent la persistence des grandes structures thermiques dans le cas conjugué à cette position et un bon accord entre le cas conjugué et le cas Robin pour de faibles séparations. Finalement, la corrélation entre $\partial_y u'_x$ et $\partial_y T'$ confirme ce bon accord en $y^+ = 5$: selon cette dernière, c'est en-deçà de $y^+ = 3$ que les écarts sont significatifs.

L'utilisation de coefficients constants semble donc handicaper le cas Robin car cela inhibe les grandes structures thermiques à la paroi. Cependant, lorsque l'on s'éloigne de la paroi, on retrouve rapidement un bon accord entre le cas conjugué et le cas Robin.

4.3.3 Propriétés thermiques fluide-solide différentes

Dans cette sous-section, on présente les cas avec transfert thermique conjugué pour lesquels les propriétés thermiques du solide diffèrent de celles du fluide. Pour ces simulations, on utilise dans le fluide la mise en données *Sol*.2 avec un nombre de Prandtl toujours fixé à 0.71. Pour rappel, on caractérise cette différence dans les propriétés thermiques avec les nombres adimensionnels G_1 et G_2. Le premier (G_1) est le ratio des diffusivités thermiques tandis que le second (G_2) est le ratio des conductivités thermiques. On peut les combiner pour former le ratio d'activité thermique K :

$$G_1 = \frac{\lambda \rho_s C_{p_s}}{\lambda_s \rho C_p} \text{ , } G_2 = \frac{\lambda_s}{\lambda} \text{ et } K = \frac{1}{G_2 \sqrt{G_1}}$$

Mise en données

Le ratio des diffusivités thermique G_1 peut prendre les valeurs $\frac{1}{2}$, 1 ou 2. Il en est de même pour le ratio des conductivités thermique G_2. On a donc 9 simulations avec transfert thermique conjugué. Le ratio d'activité thermique K peut prendre 7 valeurs entre $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $2\sqrt{2}$, comme l'indique le tableau 4.2. Pour les cas $K = \sqrt{2}$ et $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on dispose donc de 2 mises en données différentes. Pour chacune des simulations avec transfert thermique conjugué, on peut construire une condition de Robin à partir des statistiques obtenues.

On va noter $\alpha_{rob}(G_1, G_2)$ le degré de liberté dans la condition de Robin destinée à imiter le transfert thermique conjugué avec les ratios de propriété thermique G_1 et G_2. On utilise un produit en croix pour fixer ce coefficient :

$$\alpha_{rob}\left(G_1 = G_2 = 1\right)^2 = \frac{\overline{\partial_y T' \partial_y T'}\left(isoT\right)}{\overline{T'^2}\left(isoQ\right)} = \alpha_{rob}\left(iso\right)^2 \tag{4.46}$$

$$\frac{\alpha_{rob}\left(G_1, G_2\right)^2}{\alpha_{rob}\left(iso\right)^2} = \frac{\overline{\partial_y T' \partial_y T'}\left(G_1, G_2\right)}{\overline{T'^2}\left(G_1, G_2\right)} \frac{\overline{T'^2}\left(G_1 = G_2 = 1\right)}{\overline{\partial_y T' \partial_y T'}\left(G_1 = G_2 = 1\right)} \tag{4.47}$$

Les équations (4.46) et (4.47) représentent un choix que nous avons fait dans la détermination du coefficient α_{rob}. Le choix fait dans l'équation (4.46) est motivé par le bon accord

obtenu dans la sous-section précédente entre le cas *Robin* et le cas conjugué $G_1 = G_2 = 1$. Le choix fait dans l'équation (4.47) est plus discutable.

D'une part, l'utilisation du produit en croix permet d'avoir un coefficient α_{rob} qui est continu lorsque les ratios G_1 et G_2 varient autour de 1. D'autre part, on aurait pu, toujours avec un produit en croix, définir le coefficient α_{rob} en utilisant la valeur de $\partial_y\overline{T'^2}$ à la paroi dans les cas avec transfert thermique conjugué. Pour rappel, l'analyse présente dans la section 4.1.3 montre que lors d'une simulation avec une condition à la limite de type Robin, à la paroi, on a :

$$\alpha_{rob} = \frac{\partial_y\overline{T'^2}}{2\overline{T'^2}} = \frac{2\overline{\partial_y T'\partial_y T'}}{\partial_y\overline{T'^2}} = \sqrt{\frac{\overline{\partial_y T'\partial_y T'}}{\overline{T'^2}}} \tag{4.48}$$

Or, en présence de transfert thermique conjugué, ces grandeurs sont distinctes. Avec le produit en croix, on a donc 3 options pour construire une condition à la limite de type Robin qui s'appuie sur les résultats avec transfert thermique conjugué :

$$\frac{\alpha_{rob}(G_1,G_2)}{\alpha_{rob}(iso)} = \frac{\partial_y\overline{T'^2}(G_1,G_2)}{\overline{T'^2}(G_1,G_2)}\frac{\overline{T'^2}(G_1=G_2=1)}{\partial_y\overline{T'^2}(G_1=G_2=1)} \; Opt.\ 1 \tag{4.49}$$

$$\frac{\alpha_{rob}(G_1,G_2)}{\alpha_{rob}(iso)} = \frac{\overline{\partial_y T'\partial_y T'}(G_1,G_2)}{\partial_y\overline{T'^2}(G_1,G_2)}\frac{\partial_y\overline{T'^2}(G_1=G_2=1)}{\overline{\partial_y T'\partial_y T'}(G_1=G_2=1)} \; Opt.\ 2 \tag{4.50}$$

$$\frac{\alpha_{rob}(G_1,G_2)^2}{\alpha_{rob}(iso)^2} = \frac{\overline{\partial_y T'\partial_y T'}(G_1,G_2)}{\overline{T'^2}(G_1,G_2)}\frac{\overline{T'^2}(G_1=G_2=1)}{\overline{\partial_y T'\partial_y T'}(G_1=G_2=1)} \; Opt.\ 3 \tag{4.51}$$

L'option 3 correspond à la moyenne géométrique des options 1 et 2. Lorsque $G_1 = G_2 = 1$, on a :

	$\frac{\partial_y\overline{T'^2}}{2\overline{T'^2}}$	$\frac{2\overline{\partial_y T'\partial_y T'}}{\partial_y\overline{T'^2}}$	$\sqrt{\frac{\overline{\partial_y T'\partial_y T'}}{\overline{T'^2}}}$
$G_1 = G_2 = 1$	13.32	33.40	21.09
$\alpha_{rob}(iso)$	19.35		

TABLE 4.3 – Comparaison du coefficient α_{rob} tiré des simulations $isoT$ et $isoQ$ avec les statistiques à la paroi du cas conjugué.

On observe donc que pour le cas $G_1 = G_2 = 1$, lorsque l'on compare $\frac{\partial_y\overline{T'^2}}{2\overline{T'^2}}$, $\frac{2\overline{\partial_y T'\partial_y T'}}{\partial_y\overline{T'^2}}$ et $\sqrt{\frac{\overline{\partial_y T'\partial_y T'}}{\overline{T'^2}}}$, c'est le dernier qui est le plus proche de $\sqrt{\frac{\overline{\partial_y T'\partial_y T'(isoT)}}{\overline{T'^2(isoQ)}}}$. C'est la motivation principale dans notre choix de l'option 3 (équation (4.51)). On a tracé figure 4.39 le coefficient α_{rob} pour ces 3 options. Comme attendu, l'option 3 se trouve entre les options 1 et 2 (c'est leur moyenne géométrique). Pour l'option retenue, on a également tracé (figure 4.39) des régressions en fonction puissance. Bien que l'accord soit très bon, la plage de données dont nous disposons est assez réduite. En l'absence de données complémentaires, on ne recommande pas l'utilisation de ces régressions pour des ratios G_1 et G_2 supérieurs à 2 et inférieurs à 0.5.

Le coefficient ainsi obtenu est donné dans le tableau 4.4. Lorsque G_1 (resp. G_2) est fixé, diminuer G_2 (resp. G_1) rapproche le cas conjugué du cas $isoQ$. Plus globalement, lorsque l'on augmente K, on rapproche le cas conjugué du cas $isoQ$. Le cas des doublons ($K = \sqrt{2}$ et $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$) tempère cette tendance : ils conduisent à des valeurs de α_{rob} proches mais distinctes. Pour le doublon à $K = \sqrt{2}$ (resp. $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$), on a un écart relatif de 6% (resp. 9%) entre les 2 valeurs de α_{rob}.

La variance de la température tracée figure 4.40 confirme ces observations. On observe également que la dissipation ε_{TT} est élevée dans une large zone autour de $y^+ = 40$ pour

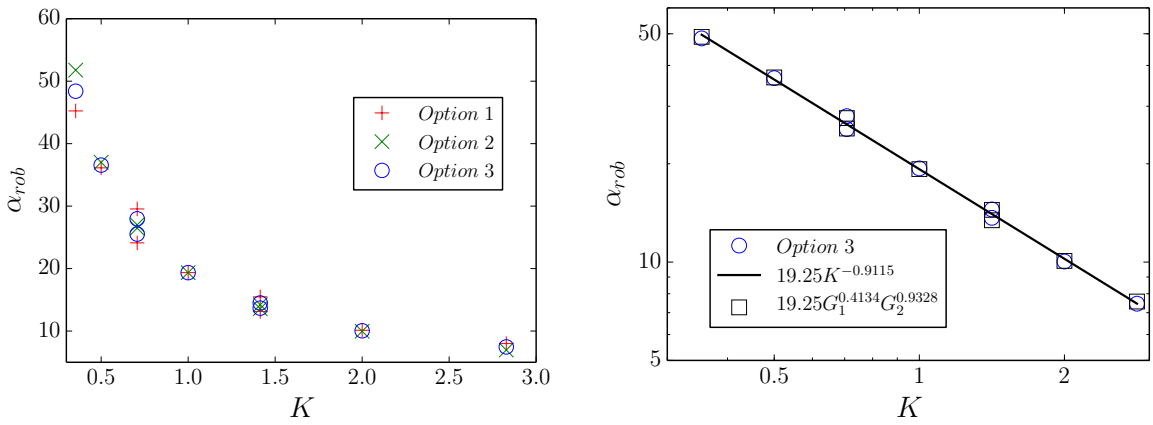


FIGURE 4.39 – Gauche : Valeur dimensionnelle du coefficient α_{rob} pour les 3 options envisagées. Droite : Régressions en fonction puissance pour l'option 3

G_2	2			1			$\frac{1}{2}$		
G_1	2	1	$\frac{1}{2}$	2	1	$\frac{1}{2}$	2	1	$\frac{1}{2}$
K	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1	$\sqrt{2}$		2	$2\sqrt{2}$
α_{rob}	48.39	36.57	27.97	25.52	19.35	14.49	13.66	10.04	7.458

TABLE 4.4 – Valeur dimensionnelle du coefficient α_{rob} pour imiter le transfert thermique conjugué.

tous les cas $G_2 = \frac{1}{2}$. Le schéma diffusif sur-dissipatif utilisé pour le scalaire qui semblait adapté au cas $G_1 = G_2 = 1$ n'est pas bien adapté à toutes les autres configurations. La somme des termes du bilan de $\overline{T'^2}$ confirme cette observation. En s'appuyant sur la sous-section précédente, on peut donc affirmer que notre maillage n'est pas suffisamment raffiné dans la direction x. Corriger la dissipation ε_{TT} avec la somme des termes du bilan de $\overline{T'^2}$ permet d'obtenir une dissipation plus réaliste qui ne dépend pas des propriétés du solide lorsque l'on est loin de la paroi. On remarque également que cette dissipation corrigée semble ne dépendre que de K : on obtient quasiment la même dissipation pour les doublons.

Dans un premier temps, on va donc se focaliser sur ces doublons. Pour chacun d'entre eux, on va ainsi comparer les cas *isoQ*, *isoT*, le cas *Robin* adapté au doublon et les deux cas avec transfert thermique conjugué. Pour $K = 1$, on avait arrondi α_{rob} à 19. Pour $K = \sqrt{2}$ (resp. $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$), on va l'arrondir à 14 (resp. 27). On peut obtenir le coefficient α_{rob} en adimensionnel avec une simple division par Re_τ, qui vaut environ 150 ici. On mettra ainsi en évidence les grandeurs qui ne dépendent que de K sur la plage de paramètres testés. Pour chacun des doublons, on comparera les 2 cas conjugués entre eux. On va également comparer le cas Robin au cas conjugué moyen. Ce dernier est obtenu en moyennant les 2 cas conjugués du doublon.

Soulignons un point important : la somme des termes du bilan de $\overline{T'^2}$ montre que c'est le paramètre G_2 qui semble piloter le besoin en résolution. S'appuyer sur des simulations sous-résolues pour soutenir ce point est irraisonnable : seule une étude approfondie de la sensibilité au maillage permettrait de conclure. On peut tout de même affirmer que l'effet de la sous-résolution (i.e. la somme des termes du bilan de $\overline{T'^2}$ non-nulle) dépend du paramètre G_2 et pas du paramètre G_1. Dans les bilans de $\overline{T'^2}$ que nous allons présenter, la dissipation sera donc corrigée par la somme des termes du bilan.

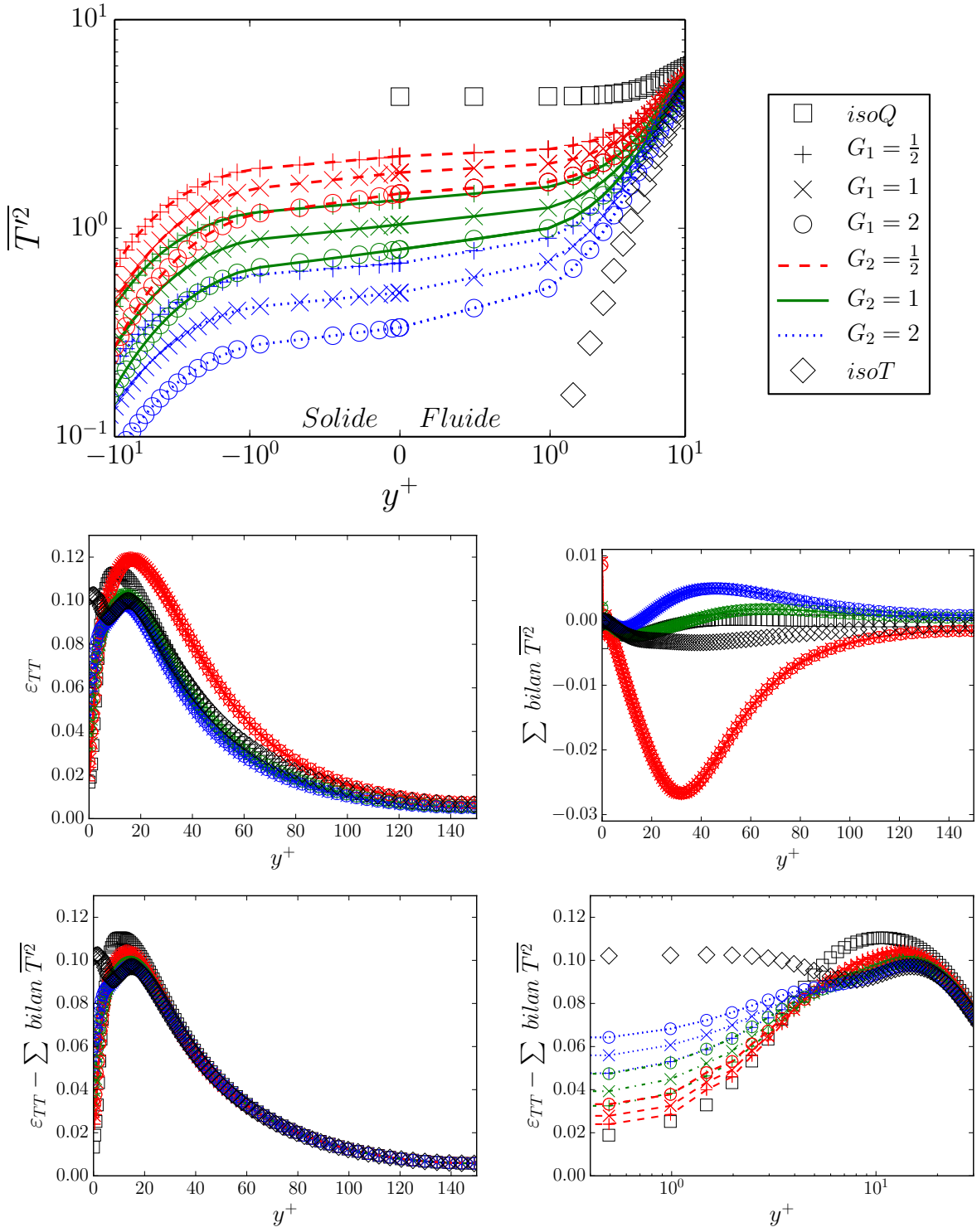


FIGURE 4.40 – Haut : Variance de la température. Milieu : ε_{TT} et somme des termes du bilan de $\overline{T'^2}$. Bas : ε_{TT} corrigée par la somme des termes du bilan de $\overline{T'^2}$

Température moyenne

Le champ de température moyenne pour les 2 doublons est tracé figure 4.41. La température moyenne dans le fluide est similaire pour l'ensemble de nos simulations. Ce n'est pas le cas dans le domaine solide. Cet écart est lié au ratio de conductivité thermique G_2. Dans le solide, l'absence de terme source dans l'équation d'évolution de la température produit une température moyenne affine qui vérifie : $\overline{T} = \frac{Pr\ y^+}{G_2}$, avec $y^+ \leq 0$ dans le solide.

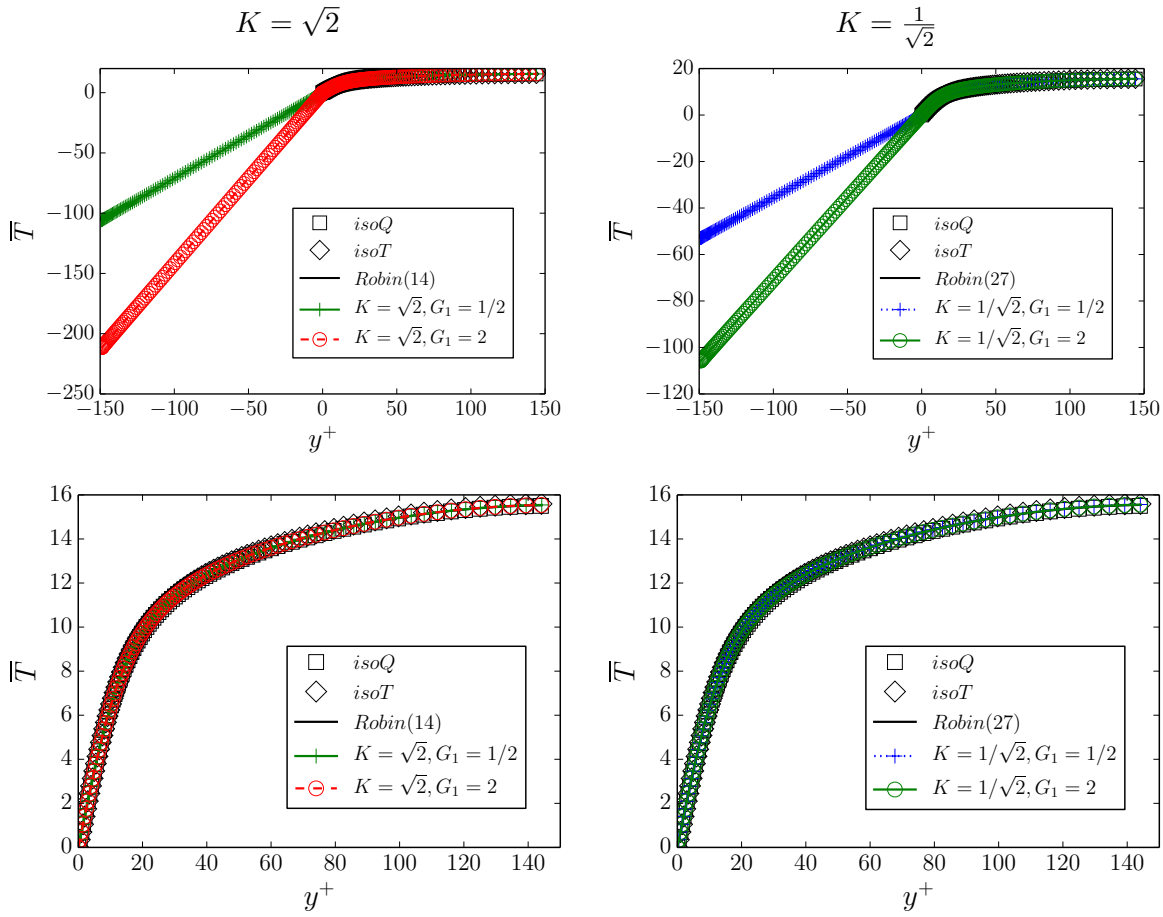


FIGURE 4.41 – Température moyenne. Gauche : $K = \sqrt{2}$. Droite : $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Haut : Domaine total. Bas : Domaine fluide.

Moments d'ordre 2

La variance de la température tracée figure 4.42 montre que, dans le domaine fluide, c'est le ratio d'activité thermique K qui pilote $\overline{T'^2}$. À la première cellule, l'écart relatif entre les cas conjugués est de 6% (resp. 12%) pour $K = \sqrt{2}$ (resp. $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$). Dans le fluide, cet écart est maximal à la paroi et diminue rapidement avec y^+. La comparaison entre le cas Robin et le cas conjugué moyen conduit à un bon accord, l'écart relatif à la première cellule étant de 3% (resp. 1%) pour $K = \sqrt{2}$ (resp. $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$). Pour les 2 doublons, on obtient des écarts importants dans le domaine solide. D'un point de vue qualitatif, on peut affirmer que ces écarts traduisent l'impact du ratio de diffusivité thermique G_1. On a montré que, dans l'espace spectral, les structures présentes dans le solide étaient amorties sur une distance caractéristique δ avec

$$\delta^4 \geq \frac{1}{\left(k_x^2 + k_z^2\right)^2 + \left(k_t G_1 RePr\right)^2}.$$

Lorsque l'on diminue G_1, on augmente δ. En accord avec cette analyse, pour chacun des doublons, le cas avec le ratio G_1 le plus faible produit la plus grande variance de la température dans le solide. Nous obtenons des écarts sur $\overline{T'^2}$ dans le solide. Il y a donc des écarts sur la diffusion associée (sa dérivée seconde). Or, le bilan de $\overline{T'^2}$ montre que, dans le domaine solide, il y a un équilibre entre la diffusion et la dissipation. Par conséquent, on s'attend pour chacun des doublons à obtenir des écarts sur la dissipation ε_{TT} dans le domaine solide. La sous-section suivante est dédiée aux bilans et apportera une compréhension plus fine de ces écarts.

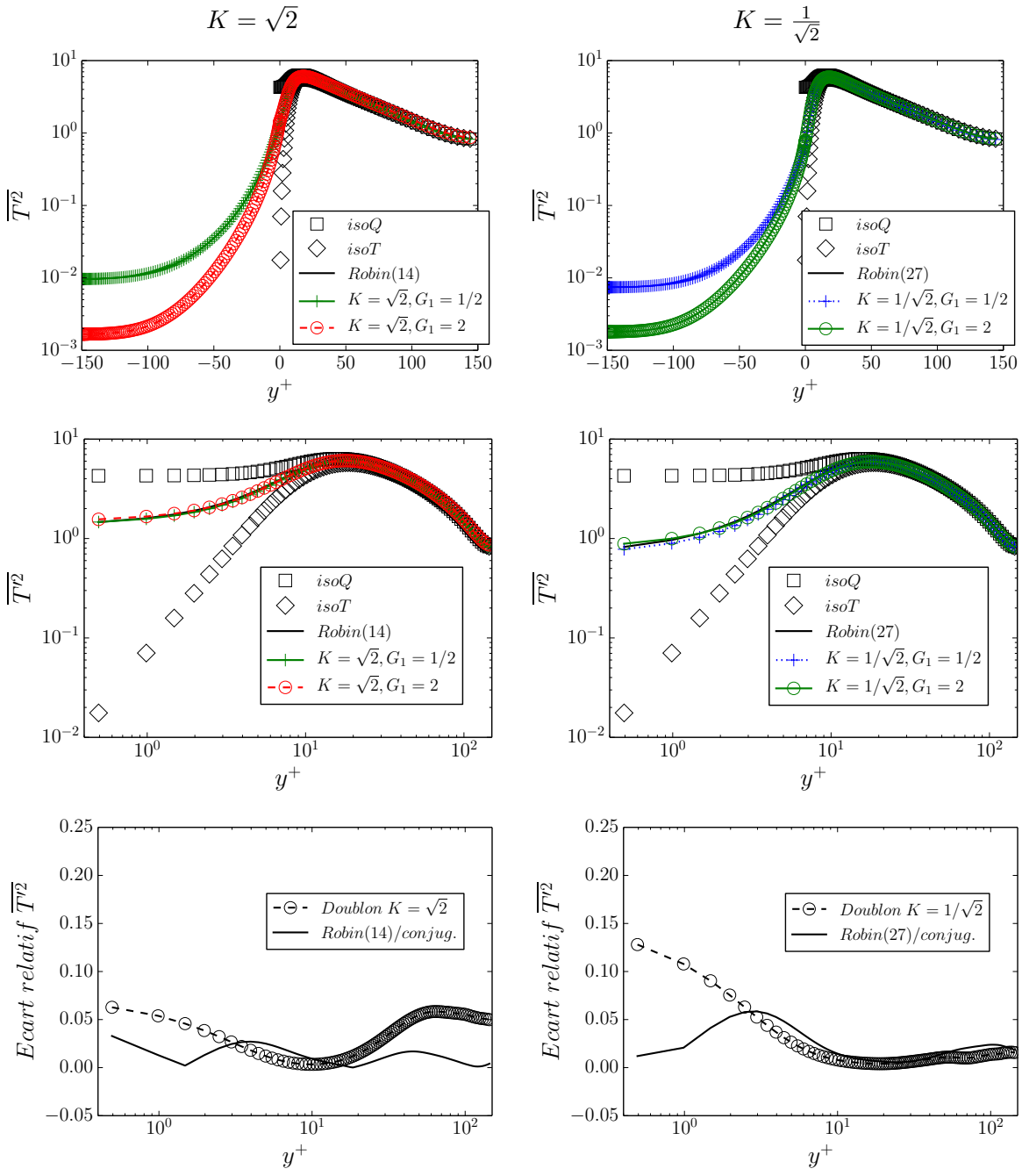


FIGURE 4.42 – Variance de la température. Gauche : $K = \sqrt{2}$. Droite : $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Haut : Domaine total. Milieu : Domaine fluide. Bas : Écart relatif dans le domaine fluide.

Le flux thermique turbulent dans la direction de l'écoulement ($\overline{u'_x T'}$) et la corrélation en un point associée sont tracés figure 4.43. En ce qui concerne le flux thermique turbulent, il semble ne dépendre que du ratio d'activité thermique K. En effet, pour les doublons, l'écart relatif entre les flux à la première cellule est inférieur à 1% (resp. 3%) pour $K = \sqrt{2}$

(resp. $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$). Le flux obtenu avec la condition de Robin est proche de celui obtenu avec transfert thermique conjugué, bien que, comparé au cas conjugué moyen, le cas Robin surestime le flux thermique turbulent à proximité de la paroi. À la première cellule ($y^+ = 0.5$), l'écart relatif entre le cas Robin et le cas conjugué moyen est ainsi de 14% (resp. 19%) pour $K = \sqrt{2}$ (resp. $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

La corrélation en un point associée au flux thermique turbulent $\overline{u'_x T'}$ permet de mieux visualiser ces écarts. Pour les doublons, l'écart relatif entre les corrélations à la première cellule est faible : 2% (resp. 3%) pour $K = \sqrt{2}$ (resp. $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$). En revanche, on obtient un large écart entre le cas conjugué moyen et le cas Robin associé : 15% (resp. 19%) pour $K = \sqrt{2}$ (resp. $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$). Ces résultats sont analogues à ceux obtenus pour $G_1 = G_2 = 1$.

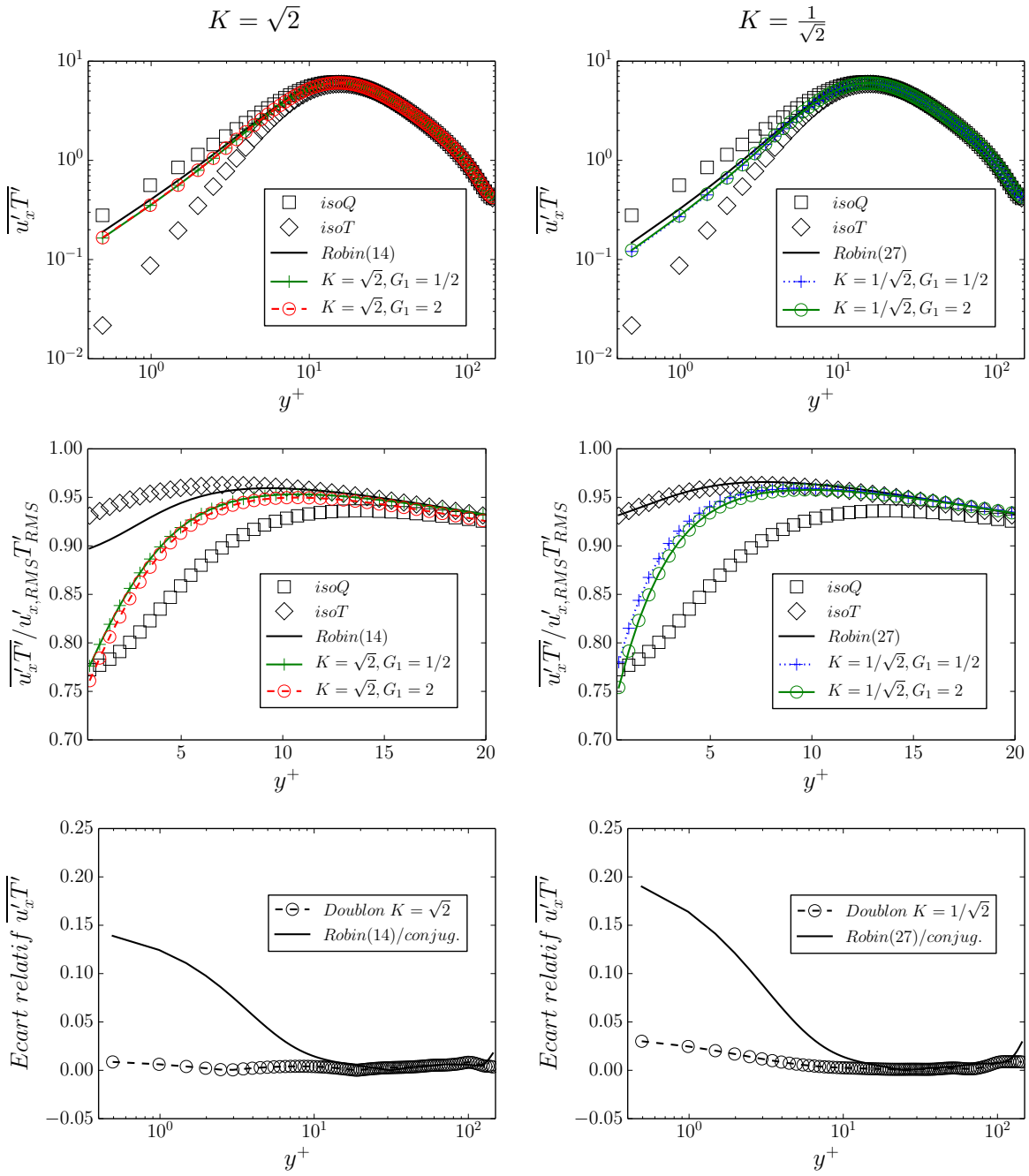


FIGURE 4.43 – Gauche : $K = \sqrt{2}$. Droite : $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Haut : Flux thermique turbulent axial ($\overline{u'_x T'}$). Milieu : Corrélation associée $\left(\frac{\overline{u'_x T'}}{\sqrt{\overline{u'^2_x}} \sqrt{\overline{T'^2}}} \right)$. Bas : Écart relatif sur le flux thermique turbulent axial ($\overline{u'_x T'}$).

Le flux thermique turbulent normal à la paroi ($\overline{u'_y T'}$) et la corrélation en un point associée sont tracés figure 4.44. En ce qui concerne le flux thermique turbulent, il semble ne dépendre que du ratio d'activité thermique K : pour les doublons, l'écart relatif entre les flux à la première cellule est de 2% pour $K = \sqrt{2}$ et $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Comparé au cas conjugué moyen, le cas Robin surestime le flux à la paroi, l'écart relatif à la première cellule étant de 17% (resp. 22%) pour $K = \sqrt{2}$ (resp. $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

La corrélation en un point associée au flux thermique turbulent $\overline{u'_y T'}$ conduit à des résultats similaires. À la première cellule, l'écart entre les cas conjugués est de 5% pour $K = \sqrt{2}$ et $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Comparé au cas conjugué moyen, le cas Robin surestime la corrélation à la paroi, l'écart relatif à la première cellule étant de 19% (resp. 23%) pour $K = \sqrt{2}$ (resp. $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

Globalement, l'analyse des moments d'ordre 2 montre que, dans le fluide, la variance de la température et les flux thermiques turbulents ne dépendent que du ratio d'activité thermique K. En revanche, la variance de la température dans le solide a un comportement plus complexe et ne dépend pas que de K. Ces écarts dans le domaine solide peuvent impacter $\overline{T'^2}$ dans le domaine fluide à proximité de la paroi ($y^+ \leq 3$). Les simulations avec une condition de type Robin permettent de reproduire la variance de la température dans le domaine fluide. En revanche, elles ont tendance à sur-estimer les flux thermiques turbulents à proximité de la paroi ($y^+ \leq 10$). Bien que l'erreur relative ainsi commise soit importante, son amplitude est faible car le flux thermique turbulent tend vers 0 lorsque l'on se rapproche de la paroi.

Bilans des moments d'ordre 2

On a vu que les flux thermiques turbulents, dans les cas conjugués, ne dépendent que de K. En outre, le cas *Robin*, comparé au cas conjugué, surestime légèrement les flux. Pour le cas *Robin*, ces derniers sont alors entre le cas conjugué et le cas *isoQ*.

On retrouve ces tendances dans le bilan de $\overline{u'_x T'}$ tracé figure 4.45, en particulier pour la dissipation et la diffusion visqueuse à proximité de la paroi, où elles sont en équilibre, la corrélation entre les fluctuations de température et le gradient de pression étant négligeable.

Pour le bilan de $\overline{u'_y T'}$ tracé figure 4.46, ce sont la diffusion visqueuse et la corrélation entre T' et $\partial_y p'$ qui sont en équilibre à la paroi. Les écarts ne sont pas flagrants sur le bilan. Le zoom sur la diffusion visqueuse à proximité de la paroi (figure 4.47) permet de mieux visualiser les écarts. On retrouve bien une diffusion visqueuse pilotée par K dans les cas conjugués tandis que la diffusion visqueuse du cas *Robin* est un peu plus proche du cas *isoQ*. Ces écarts sur la diffusion visqueuse des flux thermiques turbulents sont confinés à proximité immédiate de la paroi ($y^+ \leq 2$). Or, sur cette zone, on dispose uniquement de 5 points. L'analyse que nous faisons est donc qualitative. Cela signifie que les tendances observées sont supposées correctes mais qu'il y a une incertitude sur la valeur exacte de la diffusion visqueuse des flux thermiques turbulents.

Dans le bilan de $\overline{T'^2}$ tracé figure 4.48, la dissipation et la diffusion visqueuse sont en équilibre à la paroi. Les doublons donnent des résultats identiques : dans le fluide, les termes dans le bilan de $\overline{T'^2}$ sont pilotés uniquement par K. Pour un doublon donné, les 2 simulations donnent des diffusions visqueuses quasiment identiques : l'écart relatif est de l'ordre de 1%. Ce léger écart entre les dérivées secondes combiné à des propriétés thermiques différentes dans le solide explique les écarts observés sur $\overline{T'^2}$ dans le fluide à proximité de la paroi. Finalement, le bilan de $\overline{T'^2}$ montre qu'il y a un accord qualitatif entre les cas conjugués et le cas *Robin* associé, ce dernier étant un peu plus proche du cas *isoQ*.

Au-delà du bon accord entre les cas conjugués et *Robin* dans les bilans, on peut mettre en évidence des écarts. Ainsi, la contribution relative de la partie normale de ε_{TT} (figure 4.49) dans le fluide à proximité de la paroi est bien plus importante dans les cas conjugués

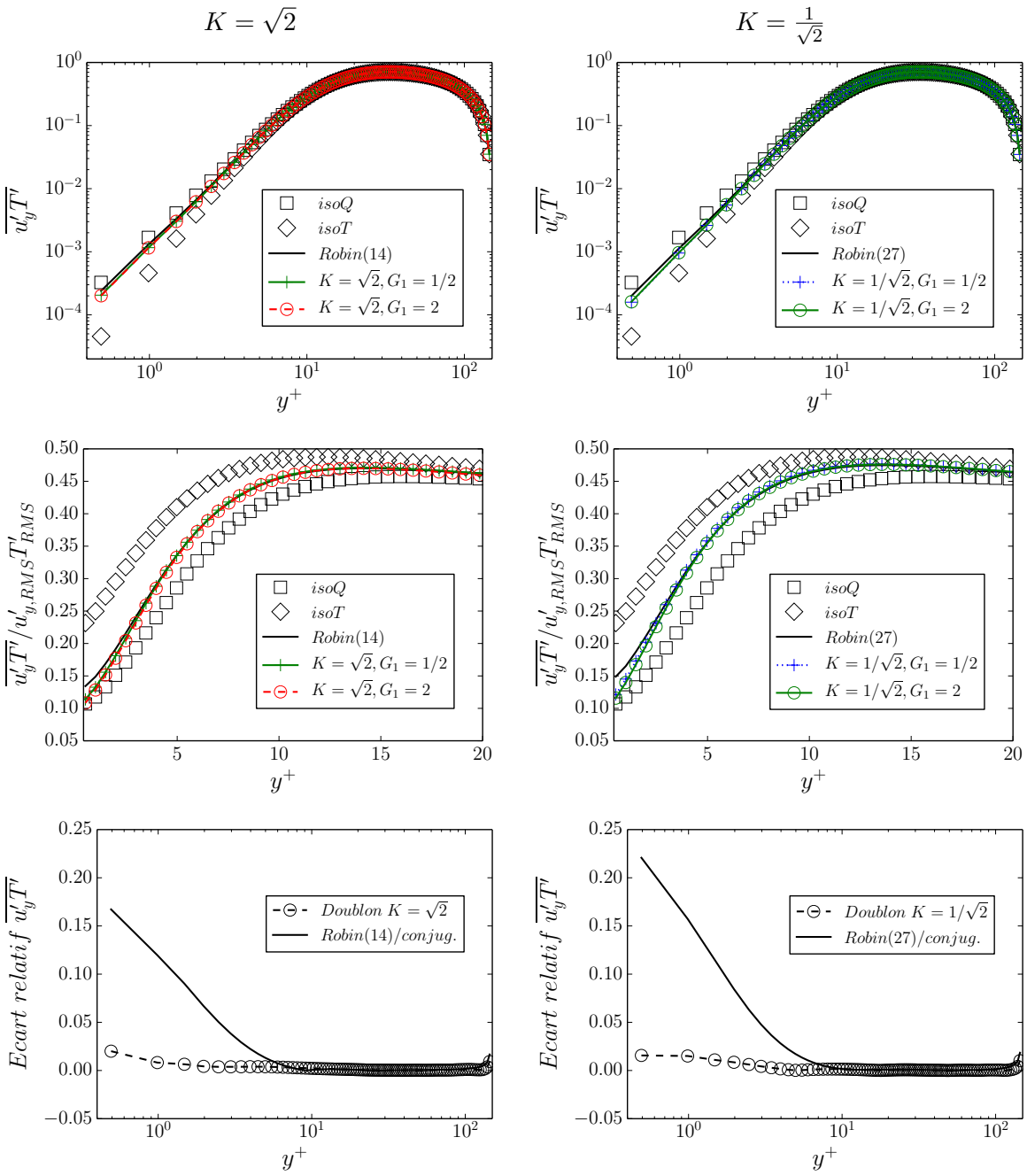


FIGURE 4.44 – Gauche : $K = \sqrt{2}$. Droite : $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Haut : Flux thermique turbulent normal ($\overline{u'_y T'}$). Milieu : Corrélation associée $\left(\frac{\overline{u'_y T'}}{\sqrt{\overline{u'_y}^2} \sqrt{\overline{T'^2}}} \right)$. Bas : Écart relatif sur le flux thermique turbulent normal à la paroi ($\overline{u'_y T'}$).

que dans le cas *Robin* associé. Globalement, pour chacun des doublons, les 2 cas conjugués produisent des résultats proches dans le domaine fluide. La dissipation ε_{TT} tracée figure 4.50 montre que les écarts sont nettement plus importants dans le domaine solide. Dans le domaine solide, les écarts sur ε_{TT} sont le pendant de ceux mis en évidence sur $\overline{T'^2}$. La discontinuité de ε_{TT} à l'interface et la connection entre ce saut et la contribution relative de la partie normale dans ε_{TT} à la paroi représente un défi majeur du point de vue de la modélisation RANS. À cet effet, l'analyse de la sous-section 4.1.4 qui montre le lien entre cette contribution relative à la paroi et la discontinuité pourra être utilisée : toutes nos simulations avec transfert thermique conjugué produisent des résultats en accord avec la relation de sa sous-section 4.1.4

$$\frac{\overline{\partial_y T' \partial_y T'}}{\overline{\partial_i T' \partial_i T'}} \left(1 - \frac{1}{G_2^2}\right) = 1 - G_1 \frac{\varepsilon_{TT}\,(y=0,\ solide)}{\varepsilon_{TT}\,(y=0,\ fluide)}$$

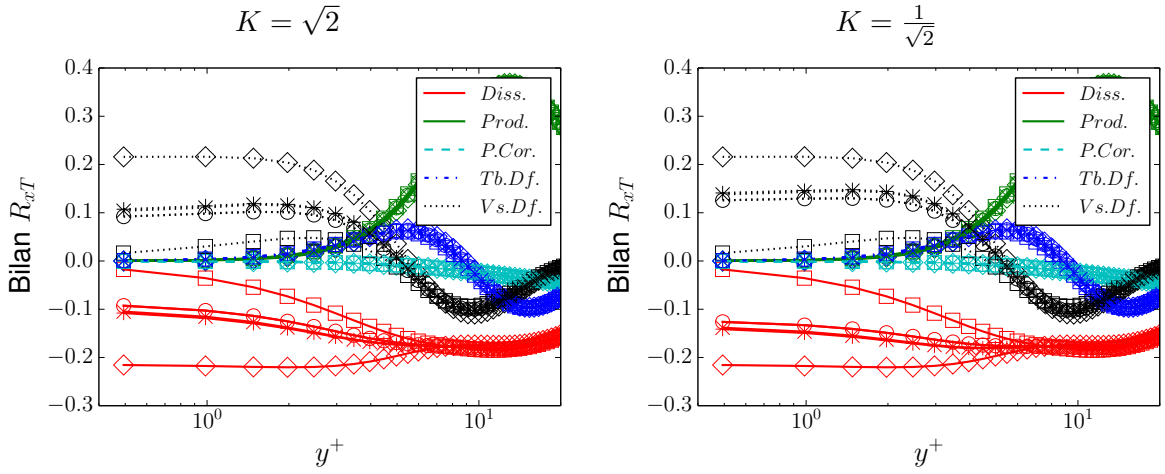


FIGURE 4.45 – Bilan du flux thermique turbulent axial ($\overline{u'_x T'}$). Gauche : $K = \sqrt{2}$. Droite : $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Symboles : □ pour *isoQ*, ◊ pour *isoT*, ∘ pour *Robin*, + pour $G_1 = 1/2$ et × pour $G_1 = 2$

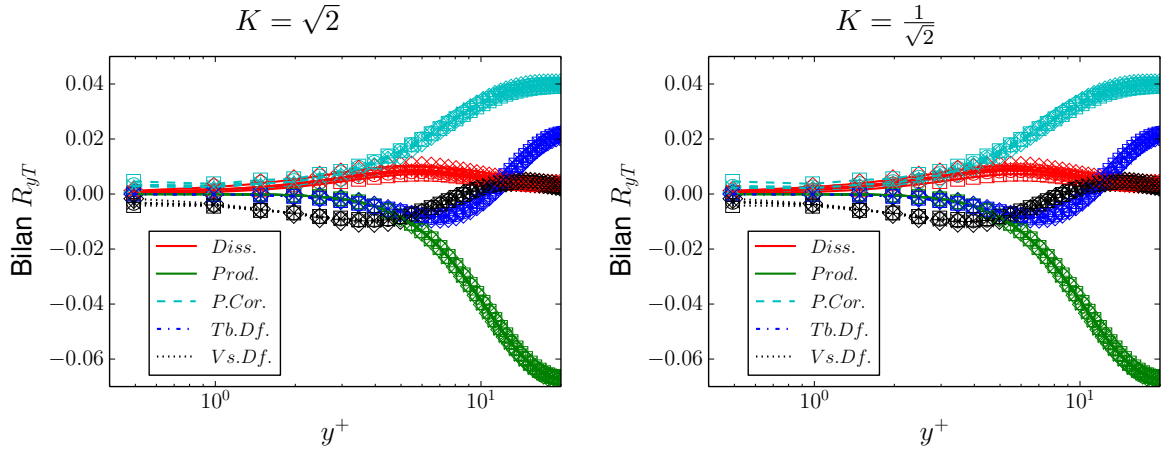


FIGURE 4.46 – Bilan du flux thermique turbulent normal ($\overline{u'_y T'}$). Gauche : $K = \sqrt{2}$. Droite : $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Symboles : □ pour *isoQ*, ◊ pour *isoT*, ∘ pour *Robin*, + pour $G_1 = 1/2$ et × pour $G_1 = 2$

Interface fluide-solide

À la première cellule fluide ($y^+ = 0.5$), les flux thermiques turbulents tracés figure 4.51 montrent que, pour les cas conjugués, plus le ratio d'activité thermique K est élevé, plus

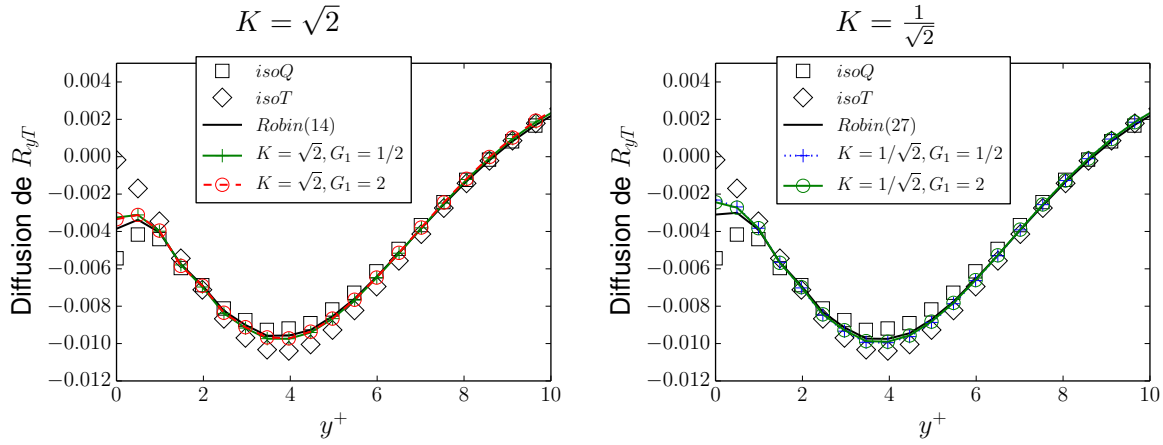


FIGURE 4.47 – Diffusion visqueuse associée au flux thermique turbulent normal à la paroi ($\overline{u'_y T'}$). Gauche : $K = \sqrt{2}$. Droite : $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

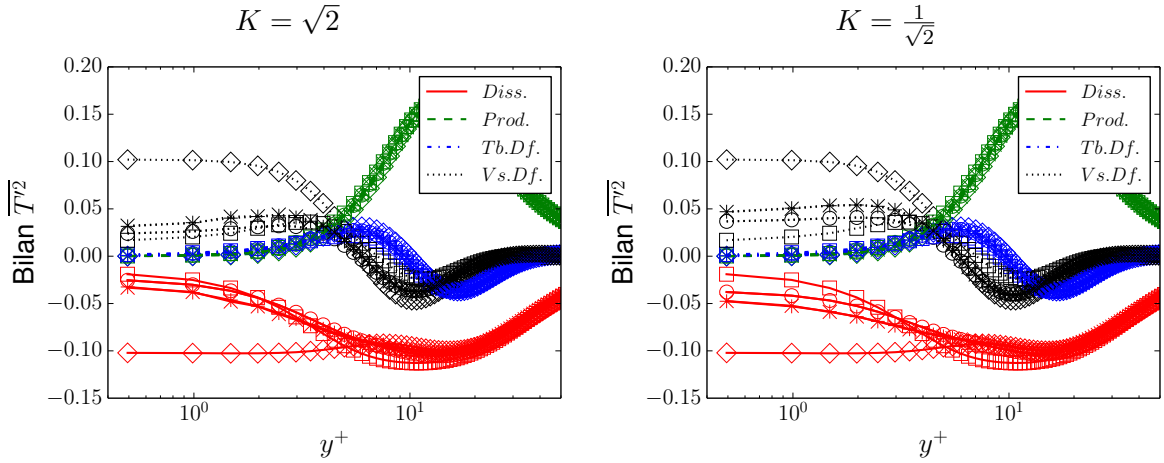


FIGURE 4.48 – Bilan de la variance de la température ($\overline{T'^2}$). Gauche : $K = \sqrt{2}$. Droite : $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Symboles : □ pour *isoQ*, ◊ pour *isoT*, ∘ pour *Robin*, + pour $G_1 = 1/2$ et × pour $G_1 = 2$

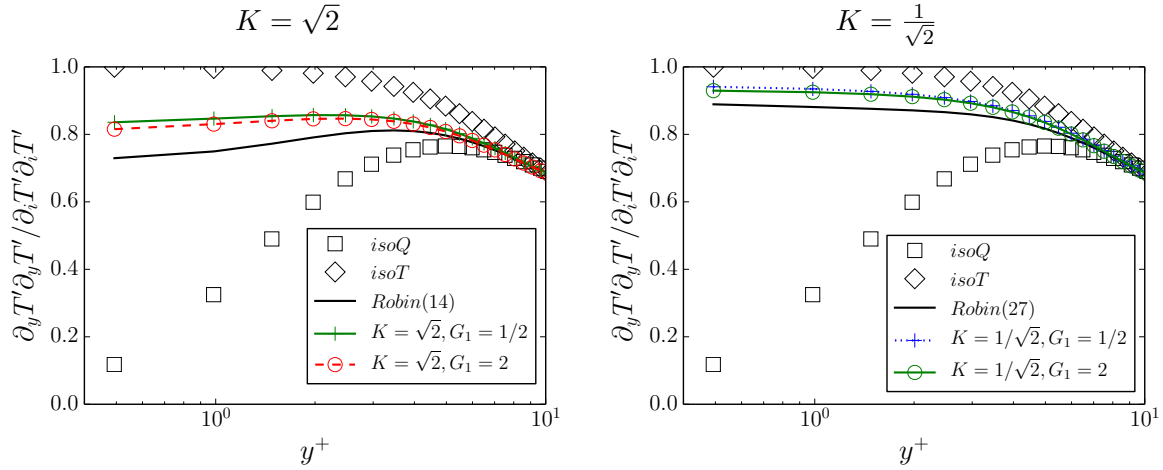


FIGURE 4.49 – Contribution relative de la partie normale dans ε_{TT}. Gauche : $K = \sqrt{2}$. Droite : $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

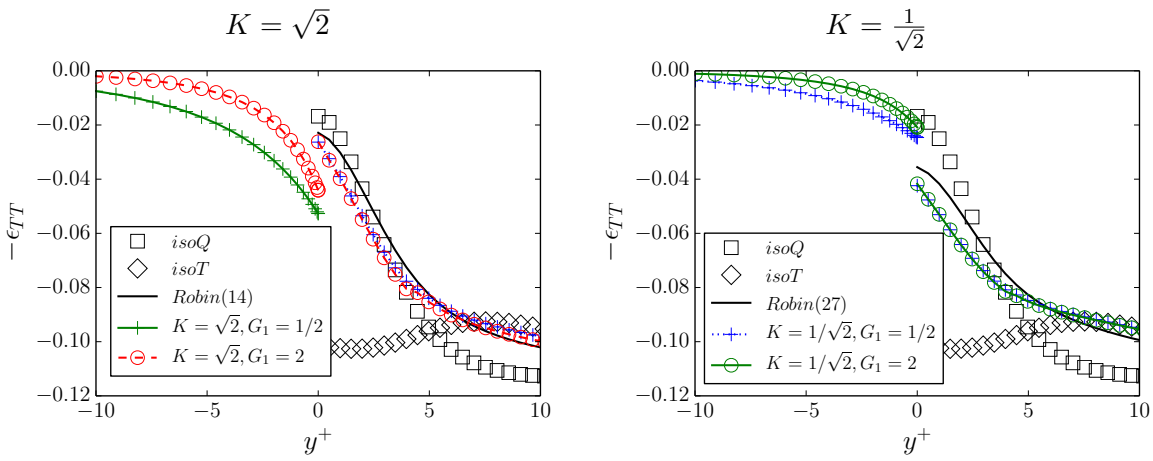


FIGURE 4.50 – Dissipation ε_{TT}. Gauche : $K = \sqrt{2}$. Droite : $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

on est proche du cas *isoQ*. Inversement, plus K est petit, plus on est proche du cas *isoT*. Les ratios G_1 et G_2 testés ici sont proches de 1. On obtient ainsi des flux intermédiaires entre ceux des cas *isoT* et *isoQ*. Pour les cas conjugués, les corrélations en un point entre la vitesse u' et la température T' sont toutes proches du cas *isoQ* à la première cellule, alors que les cas *Robin* sont proches du cas *isoT*. Or, on sait que les cas *Robin* et *isoT* sont caractérisés par l'absence de très grandes structures thermiques à la paroi. On peut donc raisonnablement conjecturer que ce sont ces dernières qui sont responsables de la décorrélation entre la vitesse et la température à la paroi pour les cas *isoQ* et conjugués.

Les statistiques à la paroi sont regroupées figure 4.52. La diffusion visqueuse des flux thermiques turbulents a un comportement analogue aux flux à la première cellule. Pour la variance de la température, on obtient à nouveau un rapprochement entre les cas conjugués et le cas *isoQ* lorsque K augmente. En outre, pour $\overline{T'^2}$, les cas conjugués sont plus proches du cas *isoT* que du cas *isoQ*. Ainsi, pour le K maximal testé ($2\sqrt{2}$), $\overline{T'^2}$ n'est que la moitié de celle du cas *isoQ*. Pour la contribution relative de la partie normale de ε_{TT} du côté fluide, la situation est similaire. L'influence de K sur la valeur de la dissipation ε_{TT} à la paroi du côté fluide est analogue mais on est plus proche du cas *isoQ*. Ainsi, pour le K minimal testé ($\frac{1}{2\sqrt{2}}$), la dissipation ε_{TT} fluide n'est que la moitié de celle du cas *isoT*. À la paroi, du côté fluide, on obtient donc une dissipation pour les cas conjugués et *Robin* dont la valeur est plus proche du cas *isoQ* et dont la contribution relative de la partie normale est plus proche du cas *isoT*.

À l'inverse, la dissipation à la paroi du côté solide, augmente avec K. Elle se rapproche donc du cas *isoT* lorsque K augmente, tendance qui est opposée à celle de la dissipation du côté fluide. Les valeurs de K élevées testées ici correspondent à $G_2 = \frac{1}{2}$. Or, la condition de continuité du flux est $\partial_y T = G_2 \partial_y T_s$. En outre, pour toutes nos simulations, la contribution de la partie normale de ε_{TT} dans le fluide est supérieure à 50%. Qualitativement, l'augmentation de la dissipation du côté solide avec K s'explique donc par l'utilisation d'un G_2 faible et d'une forte contribution de la partie normale de la dissipation. Le doublon en $K = \sqrt{2}$ tempère fortement cette analyse car la diminution de G_2 (donc augmentation de G_1) amène également une diminution de la contribution normale de la dissipation, ce qui produit, *in fine*, une diminution de la dissipation du côté solide.

D'un point de vue théorique, il serait intéressant d'avoir d'autres doublons pour mieux comprendre l'influence de G_1 et G_2 lorsque K est élevé. D'un point de vue pratique, l'utilisation de K élevés correspond à peu de cas réalistes : dans la plupart des applications, K est inférieur à 1. On trouve tout de même des K proches de 1 sur certaines configurations, en particulier le couplage sodium liquide / acier, mais le nombre de Prandtl est alors beaucoup plus faible (environ 0.01).

Au niveau industriel, pour les réacteurs à eau pressurisée ($T \approx 300\ C$ et $P \approx 150\ bars$),

on a un nombre de Prandtl égal à 0.87. Le ratio des diffusivités thermiques G_1 est proche de 10^{-3} tandis que le ratio des conductivités thermiques est proche de 40. On obtient ainsi un ratio d'activité thermique K égal à 0.79. Étendre notre étude à des ratios G_1 et G_2 plus éloignés de 1 est donc une perspective intéressante. Des simulations fines pour étudier ladite configuration sont en cours.

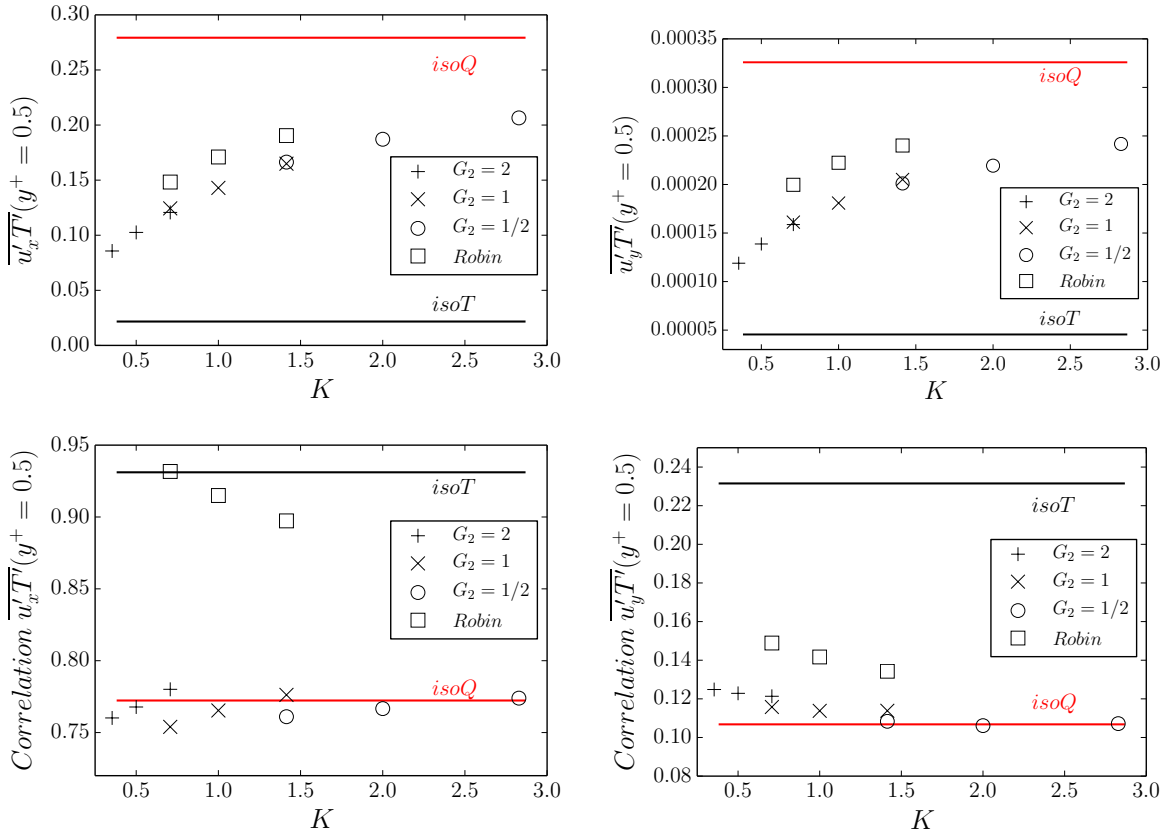


FIGURE 4.51 – Gauche : flux axial $\overline{u'_x T'}$. Droite : flux normal $\overline{u'_y T'}$. Haut : flux thermique turbulent à la première cellule ($y^+ = 0.5$). Bas : corrélation en un point associée au flux à la première cellule.

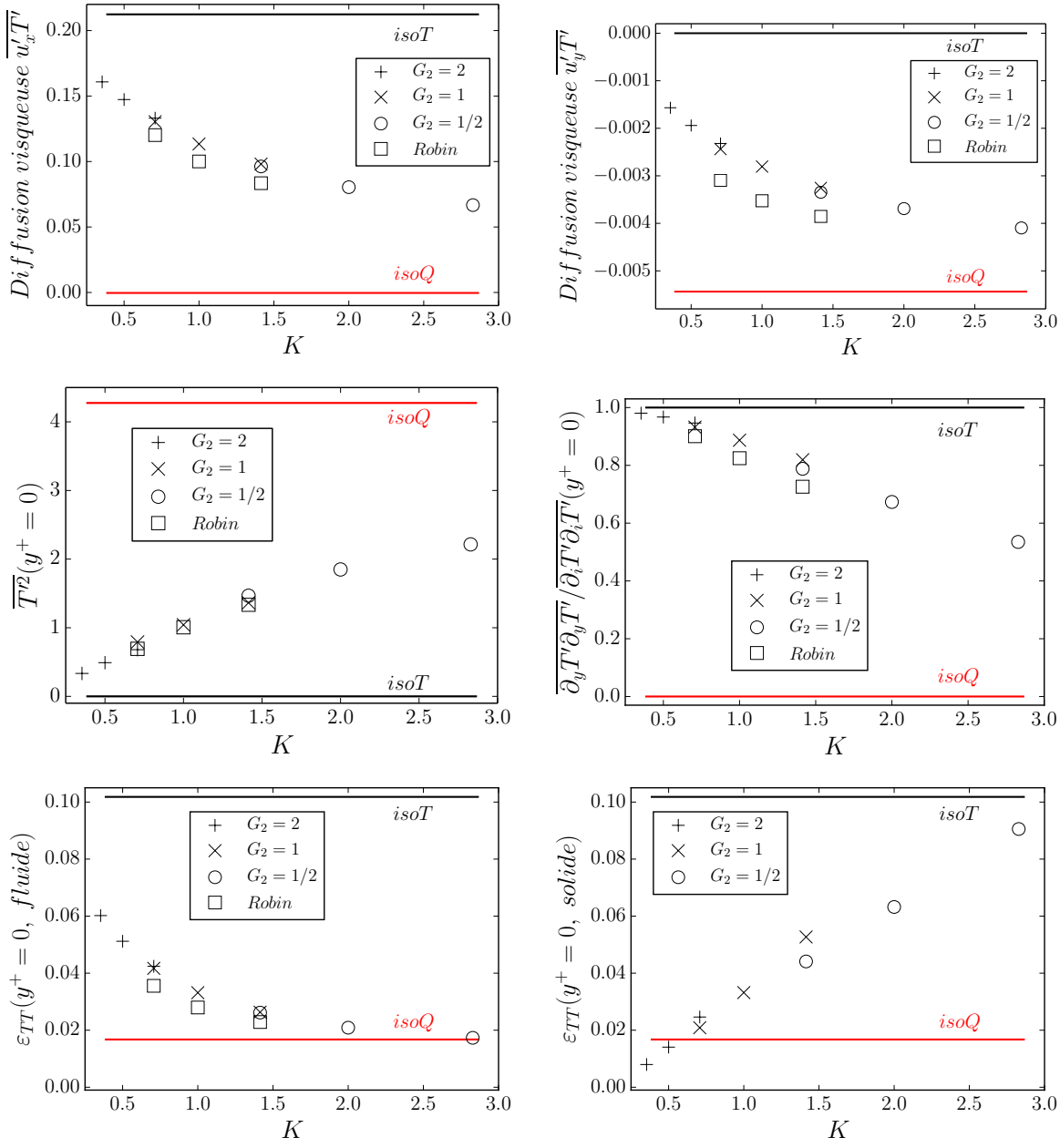


FIGURE 4.52 – Profils à la paroi. Haut : diffusion visqueuse des flux thermiques turbulents. Milieu : $\overline{T'^2}$ et contribution normale à la paroi dans ε_{TT} du côté fluide. Bas : ε_{TT} dans le fluide et dans le solide

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

Conclusions

L'objectif principal de nos travaux, formulé en introduction, était d'obtenir les bilans des moments d'ordre 2 (flux thermiques turbulents et variance de la température) pour des simulations avec transfert thermique conjugué. Nous avons atteint cet objectif sur la configuration du canal plan turbulent. Dans la littérature, on ne trouvait ces bilans que pour les cas avec une température ou un flux constant à la paroi. Nous les avons produit pour 9 configurations avec transfert thermique conjugué et 3 configurations avec une condition de type Robin à coefficients constants.

Le corollaire de l'objectif principal était de mieux comprendre le transfert thermique turbulent et l'influence des conditions aux limites sur ce dernier. Nous avons donc étudié théoriquement 2 situations : avec et sans transfert thermique conjugué.

En l'absence de transfert thermique conjugué, imposer la température ou le flux à la paroi produit un champ de température dont la variance a une dérivée normale nulle aux bords. L'utilisation d'une condition de type Robin permet de s'affranchir de cette propriété. En outre, nous avons mis en évidence, pour les cas non conjugués, une relation de compatibilité qui lie certaines grandeurs statistiques à la paroi. D'une part, cette relation permet de mieux appréhender l'impact de la condition aux limites sur les statistiques. D'autre part, elle nous a permis de construire des conditions de type Robin spécifiques dont les coefficients ne sont pas fixés arbitrairement.

En présence de transfert thermique conjugué, notre analyse s'est portée sur 2 fronts : la thermique dans le solide, d'une part, et l'interface fluide-solide d'autre part. Dans le solide, l'analyse spectrale menée permet de mieux comprendre l'amortissement des fluctuations de température à mesure que l'on s'éloigne du fluide. De cette analyse, on a déduit une condition de compatibilité entre la température et le flux à la paroi du solide. Cette dernière est un produit de convolution dans l'espace physique, ce qui souligne l'aspect non-local de la thermique solide.

L'étude de l'interface fluide-solide a permis d'identifier une discontinuité de la dissipation associée à la variance de la température à l'interface. Cette discontinuité est pilotée par la contribution relative de la partie normale de la dissipation et par les propriétés thermiques du fluide et du solide.

Globalement, nos résultats montrent que, lorsqu'il y a transfert thermique conjugué, les quantités intégrales liées à la thermique dans le fluide sont pilotées par le ratio d'activité thermique K. La contribution relative de la partie normale de la dissipation semble néanmoins avoir un comportement plus complexe qui ne peut être réduit au seul paramètre K. De même, les quantités intégrales dans le solide ne sont pas pilotées par le seul paramètre K.

En ce qui concerne l'aptitude d'une condition à la limite de type Robin à imiter le transfert thermique conjugué, nos résultats montrent une nette amélioration par rapport aux cas avec température ou flux imposé.

En s'appuyant sur les travaux de Galantucci et Quadrio [18], on sait que nos simulations ne sont pas idéalement résolues. On parvient tout de même à obtenir des résultats satisfaisants en l'absence de transfert thermique conjugué. Lorsque cet aspect est pris en compte, nos travaux montrent une exigence en résolution spatiale accrue dans la direction de l'écoulement. Ce résultat est surprenant et n'avait pas été anticipé. Cela montre que la prise en compte du transfert thermique conjugué impacte fondamentalement le champ de température.

Perspectives

Le besoin de résolution élevé observé en cas de transfert thermique conjugué suggère l'utilisation, pour le scalaire, d'une grille différente de celle de la vitesse. En s'appuyant sur les opérateurs de dérivation et d'interpolation utilisés pour la pression, on pourrait définir le scalaire sur une grille plus fine. Il faudrait modifier ces derniers pour qu'ils utilisent des schémas décentrés aux bords. On pourrait ainsi définir la température sur les nœuds de vitesse et sur les nœuds de pression. La résolution du scalaire dans chaque direction serait alors doublée. Dans un tel cas de figure, le traitement du terme convectif sera sensible, en attestent les résultats présentés dans l'annexe E.

En ce qui concerne la condition de Robin, l'utilisation de coefficients constants semble tout de même limitative car l'accord n'est pas parfait. En outre, le canal plan turbulent est un cas statistiquement unidimensionnel donc relativement simple. Sur un cas plus complexe (marche descendante, té de mélange, jet impactant, ...), on s'attend à des écarts plus importants. Pour de tels cas, l'utilisation de coefficients variables dans la condition de Robin devrait permettre de mieux reproduire le transfert thermique conjugué.

On peut distinguer plusieurs niveaux de variabilité dans les coefficients. Ainsi, des coefficients constants en temps et variables en espace qui correspondraient à un coefficient d'échange inhomogène appliqué à la température seraient bien adaptés aux cas plus complexes évoqués (il y a des tables pour le jet impactant). En revanche, on conjecture qu'ils ne peuvent pas reproduire les effets non-locaux associés au transfert thermique conjugué. Seuls des coefficients variables en espace et en temps et qui dépendent du champ de température aux alentours et dans le passé peuvent reproduire ces effets. La construction de tels coefficients, évoquée dans le sous-section 4.1.5, semble complexe.

Nous n'avons pas mis en évidence l'impact du nombre de Prandtl sur nos résultats. Nos simulations s'appuient sur un nombre de Prandtl proche de 1. Cela correspond aux gaz dans les conditions usuelles et à l'eau dans le circuit primaire d'un réacteur à eau pressurisée. Les métaux liquides se situent à bas Prandtl ($Pr \leq 0.02$). Dans les conditions usuelles, l'eau vérifie $Pr \approx 10$ tandis que les grands nombres de Prandtl ($Pr \geq 100$) correspondent aux huiles. Soulignons tout de même qu'une étude approfondie de cet impact peut s'avérer délicate. En effet, lorsque le nombre de Prandtl est élevé, on a besoin de résoudre plus finement la thermique. Et lorsqu'il est faible, on a besoin d'agrandir le domaine car les structures thermiques sont plus grandes que les structures dynamiques.

En ce qui concerne les propriétés thermiques du solide (les ratios G_1 et G_2), notre étude c'est focalisée sur des ratios proches de 1. On en a déduit une régression en fonction puissance permettant d'estimer une condition de Robin reproduisant relativement correctement un cas conjugué en fonction de G_1 et G_2. Étendre nos travaux à des ratios plus grands / petits permettrait, d'une part, de construire une corrélation dont le domaine de validité est plus large. D'autre part, cela enrichirait la base de validation. De plus, c'est un besoin industriel pour EDF.

Outre l'étude de cas plus complexes, une perspective intéressante serait l'augmentation du nombre de Reynolds. En effet, pour le canal plan turbulent à $Re_\tau = 150$, de nombreux codes de calcul RANS ont tendance à laminariser. Bien que le coût de calcul soit élevé, porter nos simulations à $Re_\tau = 395$ permettrait de construire une base de validation plus pertinente pour les modèles de type RANS et LES.

D'un point de vue pratique, utiliser nos développements pour étudier le canal plan turbulent à un nombre de Reynolds / Prandtl différent est immédiat, à condition d'avoir accès à la puissance de calcul adéquate. D'un point de vue théorique, étendre notre analyse aux écoulements avec un scalaire actif est une perspective intéressante. En effet, on a montré que la prise en compte du couplage thermique fluide-solide change la forme des structures thermiques à proximité de la paroi. Or, lorsque le scalaire est actif, il y a un couplage entre la thermique et la dynamique. Ce qu'on esquisse ici, c'est que la prise en compte du transfert thermique conjugué en présence de flottabilité sur une configuration semi-académique produirait une physique complexe et riche. Cela produirait également un cas-test particulièrement exigeant pour les modèles de type RANS et LES.

Bibliographie

[1] Hiroyuki Abe and Robert Anthony Antonia. Near-wall similarity between velocity and scalar fluctuations in a turbulent channel flow. *Physics of Fluids (1994-present)*, 21(2) :025109, 2009.

[2] V.S. Arpaci and P.S. Larsen. *Convection heat transfer*. Prentice-Hall, 1984.

[3] C Bailly and G Comte-Bellot. Turbulence (cnrs éditions). *Sciences et techniques de língénieur*, 2003.

[4] BM Berkovsky and VG Bashtovoi. The finite velocity of heat propagation from the viewpoint of the kinetic theory. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 20(6) :621–626, 1977.

[5] Hugh M Blackburn, Nagi N Mansour, and Brian J Cantwell. Topology of fine-scale motions in turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 310 :269–292, 1996.

[6] GA Blaisdell, ET Spyropoulos, and JH Qin. The effect of the formulation of nonlinear terms on aliasing errors in spectral methods. *Applied Numerical Mathematics*, 21(3) :207–219, 1996.

[7] Christophe Bogey and Christophe Bailly. Large eddy simulations of transitional round jets : influence of the reynolds number on flow development and energy dissipation. *Physics of Fluids (1994-present)*, 18(6) :065101, 2006.

[8] AB Cain, JH Ferziger, and WC Reynolds. Discrete orthogonal function expansions for non-uniform grids using the fast fourier transform. *Journal of Computational Physics*, 56(2) :272–286, 1984.

[9] Mark H Carpenter, David Gottlieb, and Saul Abarbanel. The stability of numerical boundary treatments for compact high-order finite-difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 108(2) :272–295, 1993.

[10] James W Cooley and John W Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of computation*, 19(90) :297–301, 1965.

[11] Tim J Craft, Hector Iacovides, and S Uapipatanakul. Towards the development of RANS models for conjugate heat transfer. *Journal of Turbulence*, (11), 2010.

[12] T Dairay, V Fortuné, E Lamballais, and LE Brizzi. LES of a turbulent jet impinging on a heated wall using high-order numerical schemes. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 50 :177–187, 2014.

[13] Frédéric Dehoux. *Modélisation statistique des écoulements turbulents en convection forcée, mixte et naturelle*. PhD thesis, Poitiers, 2012.

[14] E Emmrich and RD Grigorieff. Supraconvergence of a finite difference scheme for elliptic boundary value problems of the third kind in fractional order sobolev spaces. *Computational Methods in Applied Mathematics Comput. Methods Appl. Math.*, 6(2) :154–177, 2006.

[15] Brian F Farrell and Petros J Ioannou. Dynamics of streamwise rolls and streaks in turbulent wall-bounded shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 708 :149–196, 2012.

[16] JA Ferreira and RD Grigorieff. On the supraconvergence of elliptic finite difference schemes. *Applied numerical mathematics*, 28(2) :275–292, 1998.

[17] Michel Fortin and Franco Brezzi. *Mixed and hybrid finite element methods.* New York : Springer-Verlag, 1991.

[18] L Galantucci and M Quadrio. Very fine near-wall structures in turbulent scalar mixing. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 31(4) :499–506, 2010.

[19] Rémi Gautier. *Calcul haute fidélité de la turbulence en géométrie complexe : Application au contrôle fluidique d'un jet.* PhD thesis, Poitiers, 2013.

[20] Rémi Gautier, Sylvain Laizet, and Eric Lamballais. A DNS study of jet control with microjets using an immersed boundary method. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 28(6-10) :393–410, 2014.

[21] PI Geshev. Influence of the heat conductivity of the wall on the value of the turbulent prandtl number in the viscous sublayer. *Inzhenerno Fizicheskii Zhurnal*, 35 :292–296, 1978.

[22] MB Giles. Stability analysis of numerical interface conditions in fluid-structure thermal analysis. 1997.

[23] JL Guermond, Peter Minev, and Jie Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(44) :6011–6045, 2006.

[24] Morton E Gurtin and Allen C Pipkin. A general theory of heat conduction with finite wave speeds. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 31(2) :113–126, 1968.

[25] Bertil Gustafsson. The convergence rate for difference approximations to mixed initial boundary value problems. *Mathematics of Computation*, 29(130) :396–406, 1975.

[26] George Haller. Distinguished material surfaces and coherent structures in three-dimensional fluid flows. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 149(4) :248–277, 2001.

[27] Sergio Hoyas and Javier Jiménez. Reynolds number effects on the reynolds-stress budgets in turbulent channels. *Physics of Fluids (1994-present)*, 20(10) :101511, 2008.

[28] R Jaiman, P Geubelle, E Loth, and X Jiao. Combined interface boundary condition method for unsteady fluid–structure interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(1) :27–39, 2011.

[29] Franck Jedrzejewski. *Introduction aux méthodes numériques.* Springer Science & Business Media, 2006.

[30] Javier Jiménez. Cascades in wall-bounded turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 44(1) :27, 2011.

[31] Javier Jimenez, Juan C Del Alamo, and Oscar Flores. The large-scale dynamics of near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 505 :179–199, 2004.

[32] Javier Jiménez and Alfredo Pinelli. The autonomous cycle of near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 389 :335–359, 1999.

[33] N Kasagi, A Kuroda, and M Hirata. Numerical investigation of near-wall turbulent heat transfer taking into account the unsteady heat conduction in the solid wall. *Journal of Heat Transfer*, 111(2) :385–392, 1989.

[34] N Kasagi, Y Tomita, and A Kuroda. Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow. *Journal of heat transfer*, 114(3) :598–606, 1992.

[35] Ye M Khabakhpasheva. Experimental investigation of turbulent momentum and heat transfer in the proximity of the wall. In *Proceedings of the eighth international heat transfer conference*, 1986.

[36] John Kim, Parviz Moin, and Robert Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. *Journal of fluid mechanics*, 177 :133–166, 1987.

[37] AG Kravchenko and Parviz Moin. On the effect of numerical errors in large eddy simulations of turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, 131(2) :310–322, 1997.

[38] A Kuroda, N Kasagi, and M Hirata. A direct numerical simulation of the fully developed turbulent channel flow at a very low reynolds number. In *ISCFD Nagoya 1989-3rd International Symposium on Computational Fluid Dynamics*, volume 1, pages 1174–1179, 1989.

[39] S Laizet, E Lamballais, and JC Vassilicos. A numerical strategy to combine high-order schemes, complex geometry and parallel computing for high resolution DNS of fractal generated turbulence. *Computers & fluids*, 39(3) :471–484, 2010.

[40] Sylvain Laizet. *Développement d'un code de calcul combinant des schémas de haute précision avec une méthode de frontières immergées pour la simulation des mouvements tourbillonnaires en aval d'un bord de fuite.* PhD thesis, Poitiers, 2005.

[41] Sylvain Laizet and Eric Lamballais. High-order compact schemes for incompressible flows : A simple and efficient method with quasi-spectral accuracy. *Journal of Computational Physics*, 228(16) :5989–6015, 2009.

[42] Sylvain Laizet and Ning Li. Incompact3d : A powerful tool to tackle turbulence problems with up to $O(10^5)$ computational cores. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 67(11) :1735–1757, 2011.

[43] Eric Lamballais, Véronique Fortuné, and Sylvain Laizet. Straightforward high-order numerical dissipation via the viscous term for direct and large eddy simulation. *Journal of Computational Physics*, 230(9) :3270–3275, 2011.

[44] Sylvain Lardeau. *Simulation numérique directe du contrôle d'écoulements cisaillés libres par injection de fluide.* PhD thesis, Poitiers, 2001.

[45] Sylvain Lardeau, Éric Lamballais, and Jean-Paul Bonnet. Direct numerical simulation of a jet controlled by fluid injection. *Journal of turbulence*, (3), 2002.

[46] M. Lee and R. D. Moser. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 5200$. *ArXiv e-prints*, October 2014.

[47] Myoungkyu Lee, Nicholas Malaya, and Robert D Moser. Petascale direct numerical simulation of turbulent channel flow on up to 786k cores. In *Proceedings of the International Conference on High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*, page 61. ACM, 2013.

[48] Sanjiva K Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of computational physics*, 103(1) :16–42, 1992.

[49] Yi Li, Eric Perlman, Minping Wan, Yunke Yang, Charles Meneveau, Randal Burns, Shiyi Chen, Alexander Szalay, and Gregory Eyink. A public turbulence database cluster and applications to study lagrangian evolution of velocity increments in turbulence. *Journal of Turbulence*, page N31, 2008.

[50] MS Loginov, EMJ Komen, and T Höhne. Application of large-eddy simulation to pressurized thermal shock : Assessment of the accuracy. *Nuclear Engineering and Design*, 241(8) :3097–3110, 2011.

[51] MS Loginov, EMJ Komen, and AK Kuczaj. Application of large-eddy simulation to pressurized thermal shock problem. In *17th International Conference on Nuclear Engineering*, pages 649–658. American Society of Mechanical Engineers, 2009.

[52] MS Loginov, EMJ Komen, and AK Kuczaj. Application of large-eddy simulation to pressurized thermal shock problem : A grid resolution study. *Nuclear Engineering and Design*, 240(8) :2034–2045, 2010.

[53] A v Luikov. *Analytical heat diffusion theory.* Elsevier, 1968.

[54] Remi Manceau and Kemal Hanjalić. Elliptic blending model : A new near-wall reynolds-stress turbulence closure. *Physics of Fluids (1994-present)*, 14(2) :744–754, 2002.

[55] NN Mansour, J Kim, and P Moin. Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 194 :15–44, 1988.

[56] R Monod, G Brillant, A Toutant, and F Bataille. Large eddy simulations of a turbulent periodic channel with conjugate heat transfer at low prandtl number. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 395, page 012026. IOP Publishing, 2012.

[57] Emmy Noether. Invariante variationsprobleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse*, 1918 :235–257, 1918.

[58] Todd A Oliver, Nicholas Malaya, Rhys Ulerich, and Robert D Moser. Estimating uncertainties in statistics computed from direct numerical simulation. *Physics of Fluids (1994-present)*, 26(3) :035101, 2014.

[59] MN Özişik and DY Tzou. On the wave theory in heat conduction. *Journal of Heat Transfer*, 116(3) :526–535, 1994.

[60] AF Poliakov. Wall effect on temperature fluctuations in the viscous sublayer. *High Temperature Science*, 12 :286–293, 1974.

[61] Stephen B Pope. *Turbulent flows*. Cambridge university press, 2000.

[62] Amilcare Pozzi, Giuliano Quaranta, and Renato Tognaccini. A self-similar unsteady flow with conjugated heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51(7) :1804–1809, 2008.

[63] Osborne Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, pages 123–164, 1895.

[64] B Roe, R Jaiman, A Haselbacher, and PH Geubelle. Combined interface boundary condition method for coupled thermal simulations. *International journal for numerical methods in fluids*, 57(3) :329–354, 2008.

[65] Magnus Svärd and Jan Nordström. On the order of accuracy for difference approximations of initial-boundary value problems. *Journal of Computational Physics*, 218(1) :333–352, 2006.

[66] LH Thomas. Elliptic problems in linear differential equations over a network. Technical report, Watson Scientific Computing Laboratory, Columbia Univ., NY, 1949.

[67] Iztok Tiselj, Robert Bergant, Borut Mavko, Ivan Bajsić, and Gad Hetsroni. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with heat conduction in the solid wall. *Journal of heat transfer*, 123(5) :849–857, 2001.

[68] Iztok Tiselj and Leon Cizelj. DNS of turbulent channel flow with conjugate heat transfer at prandtl number 0.01. *Nuclear Engineering and Design*, 253 :153–160, 2012.

[69] Iztok Tiselj, Andrej Horvat, Borut Mavko, Elena Pogrebnyak, Albert Mosyak, and Gad Hetsroni. Wall properties and heat transfer in near-wall turbulent flow. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, 46(7) :717–729, 2004.

[70] Iztok Tiselj, Jure Oder, and Leon Cizelj. Double-sided cooling of heated slab : Conjugate heat transfer DNS. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 66 :781–790, 2013.

[71] Da Yu Tzou. An engineering assessment to the relaxation time in thermal wave propagation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36(7) :1845–1851, 1993.

[72] Robert Vichnevetsky and John B Bowles. *Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations*, volume 5. Siam, 1982.

[73] AW Vreman and JGM Kuerten. Comparison of direct numerical simulation databases of turbulent channel flow at $Re_\tau = 180$. *Physics of Fluids (1994-present)*, 26(1) :015102, 2014.

[74] Petar V Vukoslavčević and James M Wallace. Using direct numerical simulation to analyze and improve hot-wire probe sensor and array configurations for simultaneous measurement of the velocity vector and the velocity gradient tensor. *Physics of Fluids (1994-present)*, 25(11) :110820, 2013.

Annexe A

Bilans des moments d'ordre 1 et 2

Dans ce chapitre, on présente les équations de bilan des moments d'ordre 1 et 2. Pour dériver ces équations de bilan, on s'appuie sur l'équation de continuité, sur l'équation de conservation de la quantité de mouvement et sur l'équation de conservation du scalaire passif sous leur forme adimensionnelle. Pour rappel, ces équations sont respectivement :

$$\begin{aligned} \partial_i u_i &= 0 \\ \partial_t u_i &= -\partial_j \left(u_i u_j\right) - \partial_i p + \frac{1}{Re}\partial_{jj} u_i \\ \partial_t T &= -\partial_j \left(T u_j\right) + \frac{1}{RePr}\partial_{jj} T \end{aligned} \tag{A.1}$$

Bilans des moments d'ordre 1

Les moments d'ordre 1 dont on fait le bilan sont :
— la vitesse moyenne : $\overline{u_i}$
— la température moyenne : $\overline{T}$
Les équations de bilan des moments d'ordre 1 font intervenir des moments d'ordre 2 :
— les tensions de Reynolds : $R_{ij} = \overline{u_i' u_j'} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i}\ \overline{u_j}$
— les flux thermiques turbulents : $R_{iT} = \overline{u_i' T'} = \overline{u_i T} - \overline{u_i}\ \overline{T}$
Les bilans des moments d'ordre 1 sont :

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{u_i} + \overline{u_j}\partial_j \overline{u_i} &= -\partial_j \left(R_{ij}\right) - \partial_i \overline{p} + \frac{1}{Re}\partial_{jj}\overline{u_i} \\ \partial_t \overline{T} + \overline{u_j}\partial_j \overline{T} &= -\partial_j \left(R_{jT}\right) + \frac{1}{RePr}\partial_{jj}\overline{T} \end{aligned} \tag{A.2}$$

Soulignons que dans les cas académiques, on a fréquemment des directions homogènes, de nombreux termes sont alors nuls. Ainsi, pour un canal plan stationnaire avec un écoulement dans la direction x et des parois à y constant, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= -\partial_y \left(R_{xy}\right) - \partial_x \overline{p} + \frac{1}{Re}\partial_{yy}\overline{u_x} \\ 0 &= -\partial_y \left(R_{yy}\right) - \partial_y \overline{p} \\ 0 &= -\partial_y \left(R_{yT}\right) + \frac{1}{RePr}\partial_{yy}\overline{T} \end{aligned} \tag{A.3}$$

La deuxième relation est très forte : la variance de la vitesse normale à la paroi est égale à l'opposé du gradient de pression moyen normal à la paroi. Ces relations simples sont importantes car elles sont vérifiées par les grandeurs moyennes et par l'estimation de ces dernières lors d'une simulation.

Bilans des moments d'ordre 2

Les moments d'ordre 2 dont on fait le bilan sont :

— les tensions de Reynolds : $R_{ij} = \overline{u_i' u_j'} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i}\ \overline{u_j}$
— les flux thermiques turbulents : $R_{iT} = \overline{u_i' T'} = \overline{u_i T} - \overline{u_i}\ \overline{T}$
— la variance de la température : $\overline{T'^2} = \overline{T^2} - \left(\overline{T}\right)^2$

Pour les tensions de Reynolds, le bilan est :

$$\begin{aligned}
\partial_t R_{ij} + \overline{u_k}\partial_k R_{ij} &= -R_{ik}\partial_k \overline{u_j} - R_{jk}\partial_k \overline{u_i} : \text{Production} \\
&- \partial_k \left(\overline{u_i' u_j' u_k'}\right) : \text{Diffusion turbulente} \\
&- \overline{u_j' \partial_i p'} - \overline{u_i' \partial_j p'} : \text{Corrélation vitesse - gradient de pression} \\
&+ \frac{1}{Re}\partial_{kk} R_{ij} : \text{Diffusion visqueuse} \\
&- \frac{2}{Re}\overline{\partial_k u_i' \partial_k u_j'} : \text{Dissipation } \varepsilon_{ij}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Pour les flux thermiques turbulents, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_t R_{iT} + \overline{u_k}\partial_k R_{iT} &= -R_{ik}\partial_k \overline{T} - R_{kT}\partial_k \overline{u_i} : \text{Production} \\
&- \partial_k \left(\overline{u_i' T' u_k'}\right) : \text{Diffusion turbulente} \\
&- \overline{T' \partial_i p'} : \text{Corrélation température - gradient de pression} \\
&+ \frac{1}{Re}\partial_k \left(\overline{T' \partial_k u_i'}\right) + \frac{1}{RePr}\partial_k \left(\overline{u_i' \partial_k T'}\right) : \text{Diffusion visqueuse} \\
&- \frac{1}{Re}\left(1 + \frac{1}{Pr}\right)\overline{\partial_k u_i' \partial_k T'} : \text{Dissipation } \varepsilon_{iT}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Finalement, pour la variance de la température, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_t \overline{T'^2} + \overline{u_k}\partial_k \overline{T'^2} &= -2R_{kT}\partial_k \overline{T} : \text{Production} \\
&- \partial_k \left(\overline{T'^2 u_k'}\right) : \text{Diffusion turbulente} \\
&+ \frac{1}{RePr}\partial_{kk}\overline{T'^2} : \text{Diffusion moléculaire} \\
&- \frac{2}{RePr}\overline{\partial_k T' \partial_k T'} : \text{Dissipation } \varepsilon_{TT}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Dans le cas d'un écoulement statistiquement stationnaire, au niveau d'une paroi immobile, la vitesse est nulle. De nombreux termes dans les bilans sont alors nuls. Prenons le bilan des tensions de Reynolds. À la paroi, on a un équilibre entre la diffusion visqueuse et la dissipation car tous les autres termes valent nécessairement zéro.

Comme la température peut varier à la paroi, la situation est différente pour les flux thermiques turbulents : à la paroi, il y a un équilibre entre la diffusion visqueuse, la dissipation et la corrélation température - gradient de pression. Si l'on impose la température à la paroi, on y impose un équilibre entre la diffusion visqueuse et la dissipation. En revanche, si l'on impose le flux à la paroi, on y impose un équilibre entre la diffusion visqueuse et la corrélation température - gradient de pression. Ce comportement asymptotique des équations illustre parfaitement l'impact que peuvent avoir les conditions aux limites sur les grandeurs turbulentes à proximité de la paroi.

En ce qui concerne le bilan de la variance de la température, c'est plus simple : on a toujours un équilibre entre la diffusion moléculaire et la dissipation à la paroi, peu importe la condition à la limite pour la température.

Pour les bilans de la dissipation, on utilise la notation suivante : $\varepsilon_{ij} = \overline{\partial_l u_i' \partial_l u_j'}$, $\varepsilon_{iT} =$

$\overline{\partial_l u_i' \partial_l T'}$ et $\varepsilon_{TT} = \overline{\partial_l T' \partial_l T'}$. Pour le bilan de ε_{ij}, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_t \varepsilon_{ij} + \overline{u_k} \partial_k \varepsilon_{ij} &= -\partial_l \overline{u_k} \left(\overline{\partial_l u_i' \partial_k u_j'} + \overline{\partial_k u_i' \partial_l u_j'} \right) \text{ : Production mixte} \\
&- \partial_l \overline{u_i} \varepsilon_{il} - \partial_l \overline{u_j} \varepsilon_{jl} \text{ : Production par le gradient de vitesse moyenne} \\
&- \partial_{lk} \overline{u_i} \overline{u_l' \partial_k u_j'} - \partial_{lk} \overline{u_j} \overline{u_l' \partial_k u_i'} \text{ : Production par la hessienne de vitesse} \\
&- \overline{\partial_l u_i' \partial_k u_j' \partial_k u_l'} - \overline{\partial_l u_j' \partial_k u_i' \partial_k u_l'} \text{ : Production turbulente} \\
&- \partial_k \left(\overline{u_k' \partial_l u_i' \partial_l u_j'} \right) \text{ : Transport turbulent} \\
&- \overline{\partial_{ik} p' \partial_k u_j'} - \overline{\partial_{jk} p' \partial_k u_i'} \text{ : Corrélation gradient } \mathbf{u} \text{ - hessienne } p \\
&+ \frac{1}{Re} \partial_{kk} \varepsilon_{ij} \text{ : Diffusion visqueuse} \\
&- \frac{2}{Re} \overline{\partial_{kl} u_i' \partial_{kl} u_j'} \text{ : Dissipation}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Pour le bilan de ε_{TT}, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_t \varepsilon_{TT} + \overline{u_k} \partial_k \varepsilon_{TT} &= -2 \partial_l \overline{u_k} \ \overline{\partial_l T' \partial_k T'} \text{ : Production par le gradient de vitesse moyenne} \\
&- 2 \partial_l \overline{T} \ \varepsilon_{lT} \text{ : Production par le gradient de température moyenne} \\
&- 2 \partial_{lk} \overline{T} \ \overline{u_l' \partial_k T'} \text{ : Production par la hessienne de température} \\
&- 2 \overline{\partial_l T' \partial_k T' \partial_k u_l'} \text{ : Production turbulente} \\
&- 2 \partial_k \left(\overline{u_k' \partial_l T' \partial_l T'} \right) \text{ : Transport turbulent} \\
&+ \frac{1}{RePr} \partial_{kk} \varepsilon_{TT} \text{ : Diffusion visqueuse} \\
&- \frac{2}{RePr} \overline{\partial_{kl} T' \partial_{kl} T'} \text{ : Dissipation}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Pour le bilan de ε_{iT}, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_t \varepsilon_{iT} + \overline{u_k} \partial_k \varepsilon_{iT} &= -\partial_l \overline{u_k} \left(\overline{\partial_l T' \partial_k u_i'} + \overline{\partial_k T' \partial_l u_i'} \right) \text{ : Production mixte} \\
&- \partial_k \overline{u_i} \ \varepsilon_{kT} \text{ : Production par le gradient de vitesse moyenne} \\
&- \partial_k \overline{T} \ \varepsilon_{ik} \text{ : Production par le gradient de température moyenne} \\
&- \partial_{lk} \overline{u_i} \ \overline{u_k' \partial_l T'} \text{ : Production par la hessienne de vitesse} \\
&- \partial_{lk} \overline{T} \ \overline{u_k' \partial_l u_i'} \text{ : Production par la hessienne de température} \\
&- \overline{\partial_k u_i' \partial_l T' \partial_l u_k'} - \overline{\partial_k T' \partial_l u_i' \partial_l u_k'} \text{ : Production turbulente} \\
&- \partial_k \left(\overline{u_k' \partial_l T' \partial_l u_i'} \right) \text{ : Transport turbulent} \\
&- \overline{\partial_{ik} p' \partial_k T'} \text{ : Corrélation gradient de température - hessienne } p \\
&+ \frac{1}{Re} \partial_k \left(\overline{\partial_l T' \partial_{lk} u_i'} \right) + \frac{1}{RePr} \partial_k \left(\overline{\partial_l u_i' \partial_{lk} T'} \right) \text{ : Diffusion visqueuse} \\
&- \frac{1}{Re} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \overline{\partial_{kl} u_i' \partial_{kl} T'} \text{ : Dissipation}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Dans nos simulations, on a donc collecté des statistiques pour estimer les différents termes de ces bilans. Toutes les statistiques ont été collectées sur la grille vitesse. Or, la pression est définie sur une grille décalée. Pour estimer les termes qui font intervenir la pression, son gradient ou sa hessienne, on a utilisé les schémas compacts d'interpolation et de dérivation sur maillage décalé présents dans le code.

Annexe B

Optimisation sous contrainte (Script R)

On détaille ci-dessous le script écrit dans le langage R permettant d'optimiser le nombre d'onde modifié associé à la dérivée première. Le script permet d'optimiser des schémas pentadiagonaux de la forme :

$$\beta_1 f'_{i-2} + \alpha_1 f'_{i-1} + f'_i + \alpha_1 f'_{i+1} + \beta_1 f'_{i+2} = a_1 \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + b_1 \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4\Delta x} + c_1 \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6\Delta x} \tag{B.1}$$

Dans la procédure d'optimisation, on impose l'égalité $\beta_1 = 0$. Le schéma que l'on optimise est donc exactement celui présenté équation (2.9).

On commence par charger la librairie d'optimisation :

```
library(Rsolnp)
```

On donne un point de départ pour l'optimisation dans *init* : ce sont des valeurs pour a_1, b_1, c_1, α_1 et β_1.

```
init <- c(14/9,1/9,0,1/3,0)
```

On définit la fonction *target* à optimiser : l'intégrale entre 0 et π de l'écart quadratique entre k' et k.

```
target <- function(x) {
aa <- x[1]
bb <- x[2]
cc <- x[3]
alpha <- x[4]
beta <- x[5]
err_loc <- function(xx) {
(xx - ( aa*sin(xx)+bb*sin(2*xx)/2+cc*sin(3*xx)/3 )/
      ( 1+2*alpha*cos(xx)+2*beta*cos(2*xx) ) )^2
}
val=integrate(err_loc,lower=0,upper=acos(-1))$value
return(val)
}
```

On définit les contraintes en égalité dans *matequ* et la valeur qu'elles prennent dans *vecequ*. Les 3 premières contraintes imposent un schéma d'ordre 6. La quatrième impose $\beta_1 = 0$.

```
matequ <- function(x) {
aa <- x[1]
bb <- x[2]
```

```
cc <- x[3]
alpha <- x[4]
beta <- x[5]
eq1 <- aa+bb+cc-2*alpha-2*beta
eq2 <- aa+4*bb+9*cc-2*3*alpha-2*3*4*beta
eq3 <- aa+16*bb+81*cc-2*5*alpha-2*5*16*beta
eq4 <- beta
return(c(eq1,eq2,eq3,eq4))
}
vecequ <- c(1,0,0,0)
```

Comme on souhaite contraindre le dénominateur à ne pas valoir 0, on commence par définir le minimum sur $[0, \pi]$ de ce dernier dans *denom*.

```
denom <- function(x) {
aa <- x[1]
bb <- x[2]
cc <- x[3]
alpha <- x[4]
beta <- x[5]
den_val <- function(xx) {
1+2*alpha*cos(xx)+2*beta*cos(2*xx)
}
return(optimize(den_val,interval=c(0,acos(-1)),maximum=FALSE)$objective)
}
```

On définit ensuite les contraintes en inégalité dans *matine*. La borne inférieure de l'inégalité est dans *vecineLB* et la borne supérieure dans *vecineUB*.

```
matine <- function(x) {
aa <- x[1]
bb <- x[2]
cc <- x[3]
alpha <- x[4]
beta <- x[5]
eq3 <- denom(x)
return(c(eq3))
}
vecineLB <- c(0.01)
vecineUB <- c(5)
```

Finalement, on lance l'optimisation sous contraintes. Pour des raisons de clarté, l'appel qui doit se faire en une ligne est découpé en 2 lignes.

```
solnp(pars=init,fun=target,eqfun=matequ,eqB=vecequ
                          ,ineqfun=matine,ineqLB=vecineLB,ineqUB=vecineUB)
```

Et on obtient :

```
$pars
[1]  1.578172e+00  4.005999e-01 -4.070936e-02  4.690312e-01 -5.330903e-15
```

On a donc :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.578172 \\ 0.4005999 \\ -0.04070936 \\ 0.4690312 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Annexe C

Solution semi-analytique pour la diffusion fluide sur maillage étiré

Sur le segment $0 \leq y \leq 1$, on va résoudre l'équation de diffusion $\partial_t T = \frac{1}{RePr}\partial_{yy}T$. Selon que l'on teste une condition de type Dirichlet ou Neumann, on va utiliser la fonction $T(y, t = 0) = \sin(2\pi y)$ ou $T(y, t = 0) = \cos(2\pi y)$. Lorsque le maillage est étiré, la métrique h scinde le terme diffusif en deux :

$$\begin{aligned} \partial_{yy}T &= \frac{1}{h'^2}\partial_{ss}T - \frac{h^{"}}{h'^2}\partial_s T \\ \Longleftrightarrow \frac{1}{h'^2}\partial_{ss}T &= \partial_{yy}T + \frac{h^{"}}{h'}\partial_y T \end{aligned} \tag{C.1}$$

Le schéma d'avancement temporel est alors :

$$\begin{aligned} T^{n+1} - \frac{\Delta t}{2RePr}\partial_{yy}T^{n+1} - \frac{\Delta t}{2RePr}\frac{h^{"}}{h'}\partial_y T^{n+1} &= T^n + \frac{\Delta t}{2RePr}\partial_{yy}T^n + \frac{\Delta t}{2RePr}\frac{h^{"}}{h'}\partial_y T^n \\ &- \frac{\Delta t}{RePr}\frac{h^{"}}{h'}\left(\frac{3}{2}\partial_y T^n - \frac{1}{2}\partial_y T^{n-1}\right) \end{aligned} \tag{C.2}$$

On suppose que T^{n-1} vérifie la relation $\lambda T^{n-1} = T^n$. L'écriture complexe permet de remplacer $\partial_y T$ par $\sqrt{-1}\ 2\pi T$ et $\partial_{yy}T$ par $-4\pi^2 T$. On obtient ainsi :

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{2RePr}\left[4\pi^2 - \sqrt{-1}\frac{h^{"}}{h'}2\pi\right]\right)T^{n+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2RePr}\left[-4\pi^2 + \sqrt{-1}\frac{h^{"}}{h'}2\pi\left(-2 + \frac{1}{\lambda}\right)\right]\right)T^n \tag{C.3}$$

On va noter temporairement $a = \frac{\Delta t 4\pi^2}{2RePr}$ et $b = \frac{\Delta t}{2RePr}\frac{h"}{h'}2\pi$. On utilise le complexe conjugué du membre de gauche pour obtenir :

$$T^{n+1} = \frac{1 - a^2 + 2b^2 - \frac{b^2}{\lambda} + \sqrt{-1}b\left[1 - a + (1+a)\left(-2 + \frac{1}{\lambda}\right)\right]}{(1+a)^2 + b^2}T^n \tag{C.4}$$

Pour que la température reste réelle, on doit avoir :

$$\frac{1}{\lambda} = 2 - \frac{1-a}{1+a} \tag{C.5}$$

Cette condition permet d'initialiser correctement le calcul. Le facteur d'accroissement est alors :

$$\frac{T^{n+1}}{T^n} = \frac{1 - a^2 + 2b^2 - \frac{b^2}{\lambda}}{(1+a)^2 + b^2} \tag{C.6}$$

Le coefficient b fait intervenir la métrique. Le facteur d'accroissement n'est donc pas homogène en y lorsque le maillage est étiré. La solution semi-analytique ainsi construite permet de mesurer exactement l'erreur de discrétisation spatiale sur un pas de temps.

Annexe D

Transfert thermique conjugué avec thermique solide $1D$

En cas de transfert thermique conjugué, au niveau spatial, la thermique dans le domaine solide est tridimensionnelle : la diffusion se fait dans les directions x, y et z. Nous avons montré que, dans le cas d'un domaine semi-infini, dans l'espace spectral, les fluctuations de température sont amorties exponentiellement. La distance caractéristique d'amortissement δ fait intervenir les nombres d'onde k_x et k_z dans les directions x et z et la pulsation temporelle k_t :

$$\delta^4 \geq \frac{1}{(k_x^2 + k_z^2)^2 + (k_t G_1 RePr)^2}$$

Plus le module des nombres d'onde k_x et k_z est faible, plus la distance de pénétration δ est grande. Pour conforter cette analyse, on a réalisé une simulation avec transfert thermique conjugué $1D$: dans le solide, la diffusion ne se fait que dans la direction y. Pour ce faire, on utilise la mise en données $Sol.2$: la diffusion thermique dans le fluide est d'ordre 6 dans les directions y et z tandis qu'elle est sur-dissipative et d'ordre 4 dans la direction x (Schéma SVV), cf sous-section 4.3.1. On va donc comparer le cas conjugué $1D$ avec celui qui est $3D$ lorsque les paramètres G_1 et G_2 valent 1.

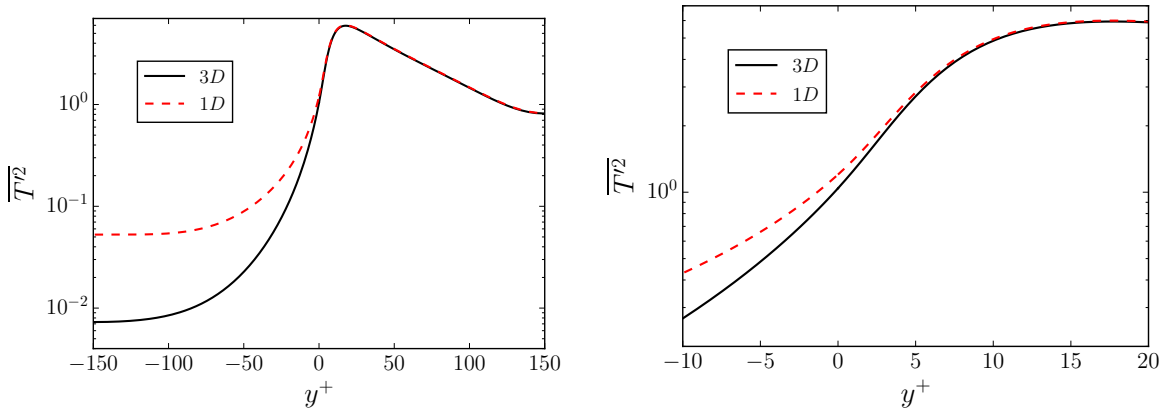


FIGURE D.1 – Comparaison transfert thermique conjugué $1D$ / $3D$: variance de la température $\overline{T'^2}$. Gauche : Domaine total. Droite : Autour de l'interface.

La figure D.1 confirme l'analyse : au bord extérieur du solide, la variance de la température du cas $1D$ dépasse celle du cas $3D$ de quasiment une décade. Dans le fluide, l'impact est moindre et limité à la zone $y^+ \leq 5$. En ce qui concerne les flux thermiques turbulents, il n'y a pas d'écarts visibles. La situation est similaire pour les bilans des moments d'ordre 2 dans le fluide. Tout comme $\overline{T'^2}$, la dissipation ε_{TT} dans le domaine solide est modifiée. L'absence de la contribution tangente dans la dissipation provoque ainsi une discontinuité

de ε_{TT} à l'interface fluide-solide (cf figure D.2). Dans notre cas, la contribution normale est dominante dans le fluide à l'interface. L'absence de la contribution tangente dans le solide produit donc une discontinuité de faible amplitude.

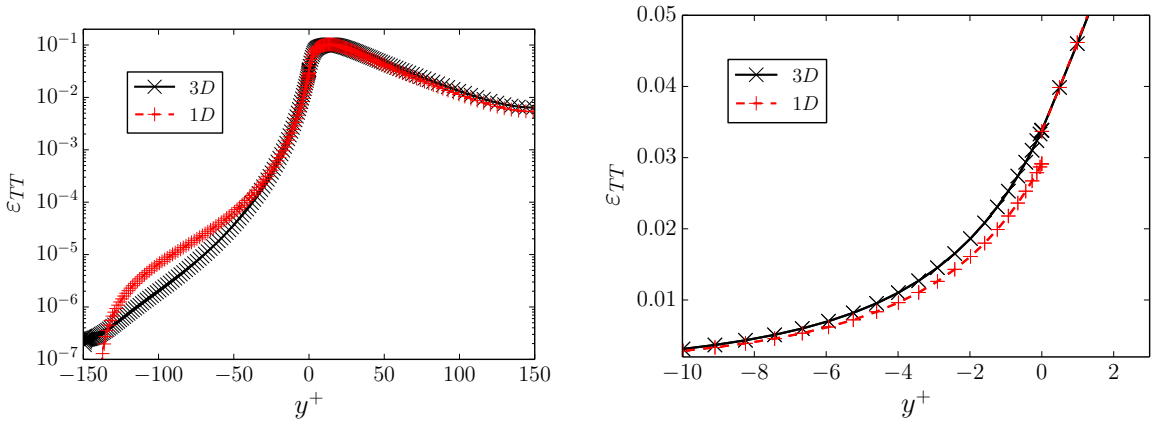


FIGURE D.2 – Comparaison transfert thermique conjugué $1D$ / $3D$: Dissipation ε_{TT}. Gauche : Domaine total. Droite : Autour de l'interface.

Annexe E

Formulations du terme convectif du scalaire

Lorsque l'écoulement est incompressible, on peut exprimer la convection sous différentes formes : divergence (Div), gradient ($Grad$) ou leur demi-somme ($\sum/2$). Le tableau E.1 détaille les 3 formulations étudiées ici :

	Div	$\sum/2$	$Grad$
Convection	$\partial_i(Tu_i)$	$\frac{1}{2}\left[\partial_i(Tu_i) + u_i\partial_i T\right]$	$u_i\partial_i T$

TABLE E.1 – Formulations du terme convectif pour le scalaire.

En théorie, toutes ces formulations sont équivalentes. Au niveau discret, elles produisent des erreurs différentes, avec une contribution supplémentaire liée au fait que la divergence de la vitesse n'est nulle que si on la calcule avec les shcémas compacts sur la grille décalée. On va comparer ces 3 formulations sur un cas avec transfert thermique conjugué ($G_1 = G_2 = 1$). On utilise le maillage habituel et un schéma diffusif isotrope d'ordre 6 pour le scalaire. La solution de référence (notée $Ref.$) est celle obtenue avec le schéma Div sur un maillage 2 fois plus fin dans les directions x et z.

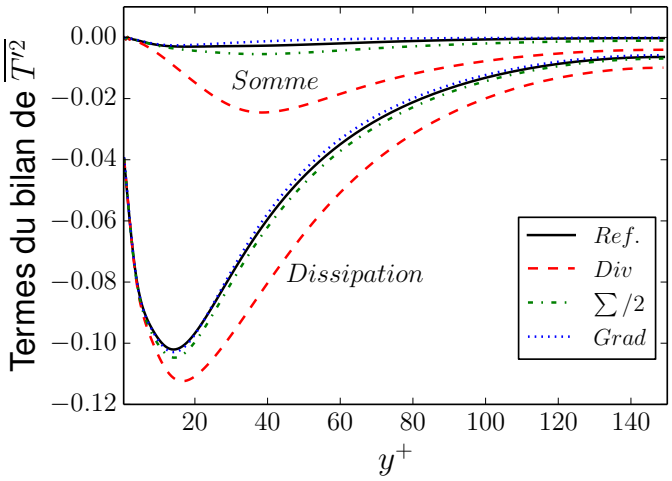


FIGURE E.1 – Impact de la formulation du terme convectif scalaire : bilan de la variance de la température $\overline{T'^2}$.

Le bilan de $\overline{T'^2}$ tracé figure E.1 montre clairement que les formulations $\sum/2$ et $Grad$ sont meilleures que la formulation Div. D'une part, les 3 formulations du terme convectif amènent des erreurs d'aliasing différentes. D'autre part, le nombre d'onde modifié associé à la dérivée première colocalisée calculée avec nos schémas compacts vaut 0 à la coupure.

Ainsi, la spécificité de la formulation *Div* est que le terme convectif vaut 0 autour des hautes fréquences. Cet aspect, combiné à un champ de vitesse dont la divergence n'est nulle que sur la grille décalée, pourrait expliquer les écarts que l'on obtient sur la dissipation ε_{TT}.

Ces considérations sur les erreurs d'aliasing et sur le nombre d'onde modifié impactent directement le spectre du chargement thermique que le fluide transmet au solide. Or, on sait que chaque composante spectrale du chargement est amortie différemment par le solide. Pour rappel, dans le cas d'un solide semi-infini, la température du solide dans l'espace spectral vérifie :

$$\begin{aligned} R^2 &= k_x^2 + k_z^2 + \sqrt{-1} k_t G_1 RePr \\ \widehat{T_s} &= \frac{\partial_y \widehat{T_s}\,(y=0) + R\widehat{T_s}\,(y=0)}{2R} e^{-yR} \end{aligned} \tag{E.1}$$

Modifier la formulation du terme convectif va modifier l'amplitude et la phase de la sollicitation thermique.

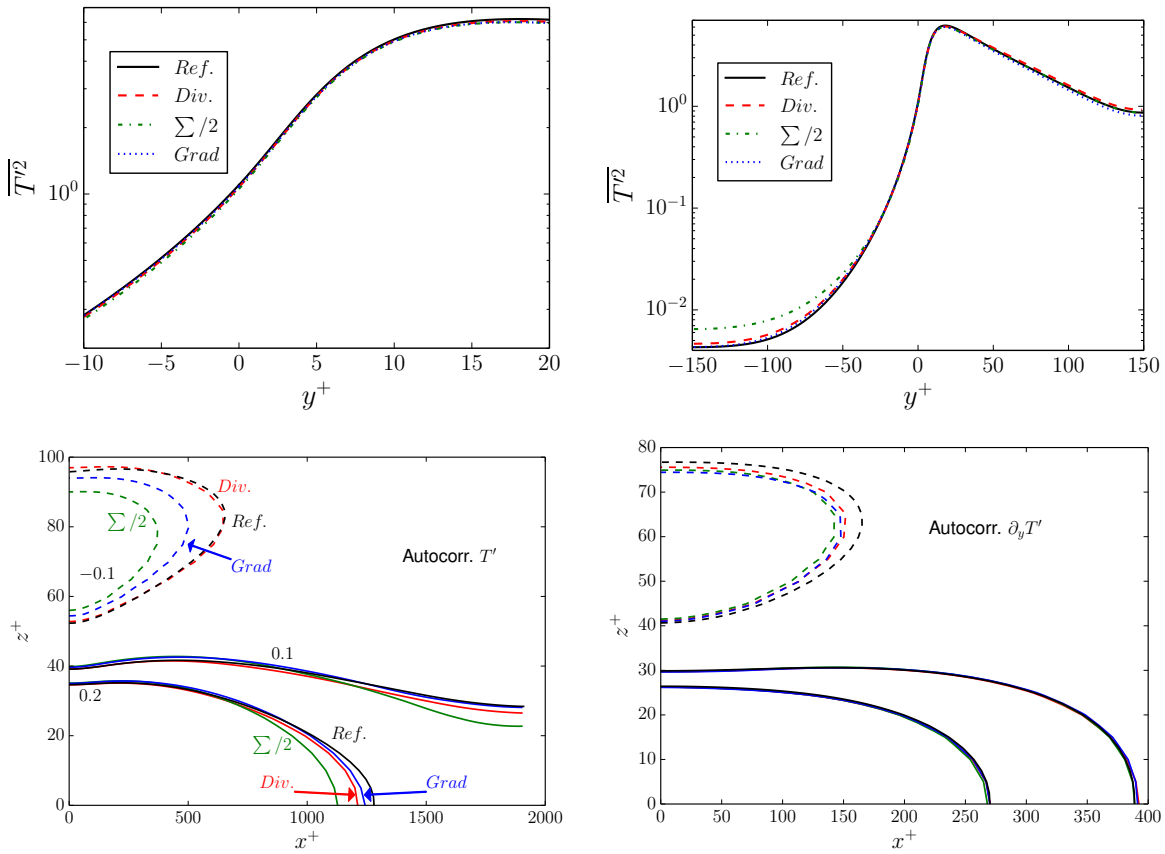


FIGURE E.2 – Haut : Variance de la température. Bas : Lignes de contour (0.2, 0.1 et -0.1) de l'autocorrélation de T' (gauche) et de $\partial_y T'$ (droite) en $y^+ = 0$.

La figure E.2 montre que la variance de la température dans le solide est impactée par la formulation du terme convectif thermique. Les lignes de contour de l'autocorrélation de la température et du flux normal à l'interface fluide-solide confirment l'analyse et démontrent que le spectre de la sollicitation thermique est bien impacté par la formulation du terme convectif thermique.

D'une part, la variance de la température est impactée loin de la paroi. Cela correspond aux basses fréquences dans le spectre. La formulation $\sum/2$ est donc plus riche en basses fréquences comparée aux autres formulations. D'autre part, les lignes de contour de la formulation $\sum/2$ sont plus courtes que les autres. La formulation $\sum/2$ est donc plus riche en hautes fréquences comparée aux autres formulations ! La contradiction est manifeste.

L'analyse théorique de la thermique solide est spatio-temporelle. Or, l'autocorrélation que nous analysons est purement spatiale. Il manque donc une dimension dans cette dernière, ce qui pourrait expliquer la contradiction obtenue.

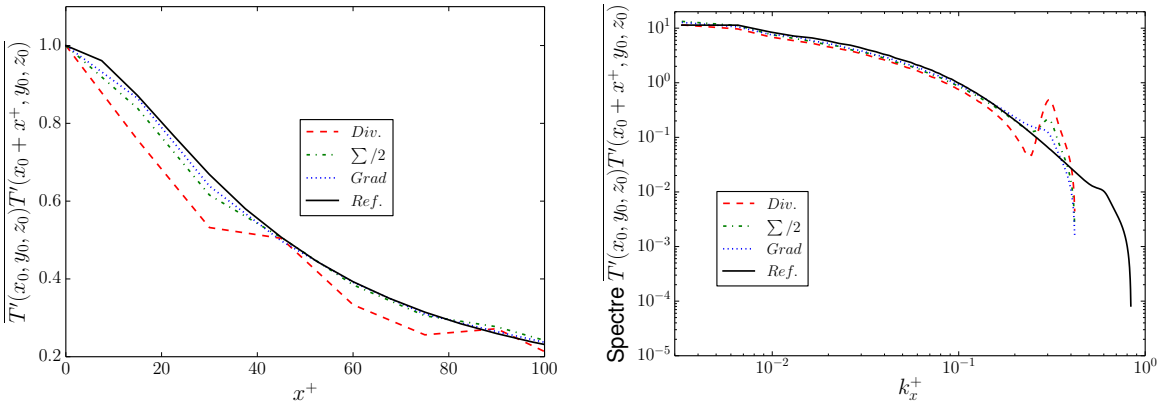


FIGURE E.3 – Gauche : Autocorrélation de la température en x au milieu du canal ($y^+ = 150$). Droite : Spectre associé.

La figure E.3 montre l'autocorrélation de la température dans la direction x au milieu du canal et le spectre associé. Sur la grille classique, on observe une accumulation d'énergie à hautes fréquences pour toutes les formulations du terme convectif étudiées. C'est la formulation *Div.* qui présente l'accumulation la plus forte. L'accumulation est plus faible pour la formulation *Grad* tandis que la formulation $\sum/2$ produit une accumulation intermédiaire. Ces spectres à grande distance de la paroi montrent que lorsque la résolution est marginale, changer la formulation du terme convectif impacte le spectre de la température.

La figure E.4 montre qu'à la paroi, le spectre est moins impacté par la formulation du terme convectif. Le spectre de la corrélation en z est plus révélateur que celui en x car on observe des écarts à basse fréquence. On a tracé, figure E.5, le spectre de l'autocorrélation de T' et $\partial_y T'$ à la paroi dans la direction z en zoomant sur les basses fréquences. Outre les écarts évoqués, on remarque que le spectre est hachuré. Ces hachures traduisent un manque de convergence à basse fréquence.

On sait que dans le solide, loin de la paroi, ce sont les basses fréquences *spatio-temporelles* qui produisent $\overline{T'^2}$. Or, la figure E.5 montre qu'en ce qui concerne les bas nombres d'ondes dans la direction z, notre simulation est faiblement convergée. On peut donc affirmer que nos simulations produisent un champ $\overline{T'^2}$ modérément convergé loin de l'interface fluide-solide, ce qui pourrait expliquer les écarts obervés sur $\overline{T'^2}$ au bord extérieur du solide. Pour illustrer ce point, on a tracé, figure E.6, la convergence de $\overline{T}$ et $\overline{T'^2}$ au cours de la simulation sur la grille fine. On compare la convergence à 3 positions : à l'interface fluide-solide ($y^+ = 0$), au milieu du solide ($y^+ = -75$) et au bord extérieur du solide ($y^+ = -150$).

On a 15 estimations des statistiques uniformément réparties dans le temps (une tous les 100 000 pas de temps). En ce qui concerne la variance de la température au bord extérieur, il y a un facteur 1.77 entre la première estimation et la dernière. Ce facteur est de 1.65 à mi-hauteur tandis qu'il est de 1.05 à l'interface fluide-solide. On voit donc que dans le solide, plus on est proche du fluide, plus les statistiques convergent vite.

Comparé à Kasagi et al. [34], notre simulation fine est très longues d'un point de vue temporel (facteur 10) tout en utilisant un pas de temps plus faible (facteur 5). Elle s'appuie également sur un domaine plus grand dans les directions x et z (facteur 1.6 en x et 1.3 en z). Dans ces directions, notre maillage est également beaucoup plus fin (facteurs 2.5 en x et 2.9 en z). Malheureusement, ces précautions ne semblent pas être suffisantes pour obtenir une estimation quantitative de la variance de la température en profondeur dans un solide épais. Cette difficulté à obtenir des statistiques convergées pour les grandes structures

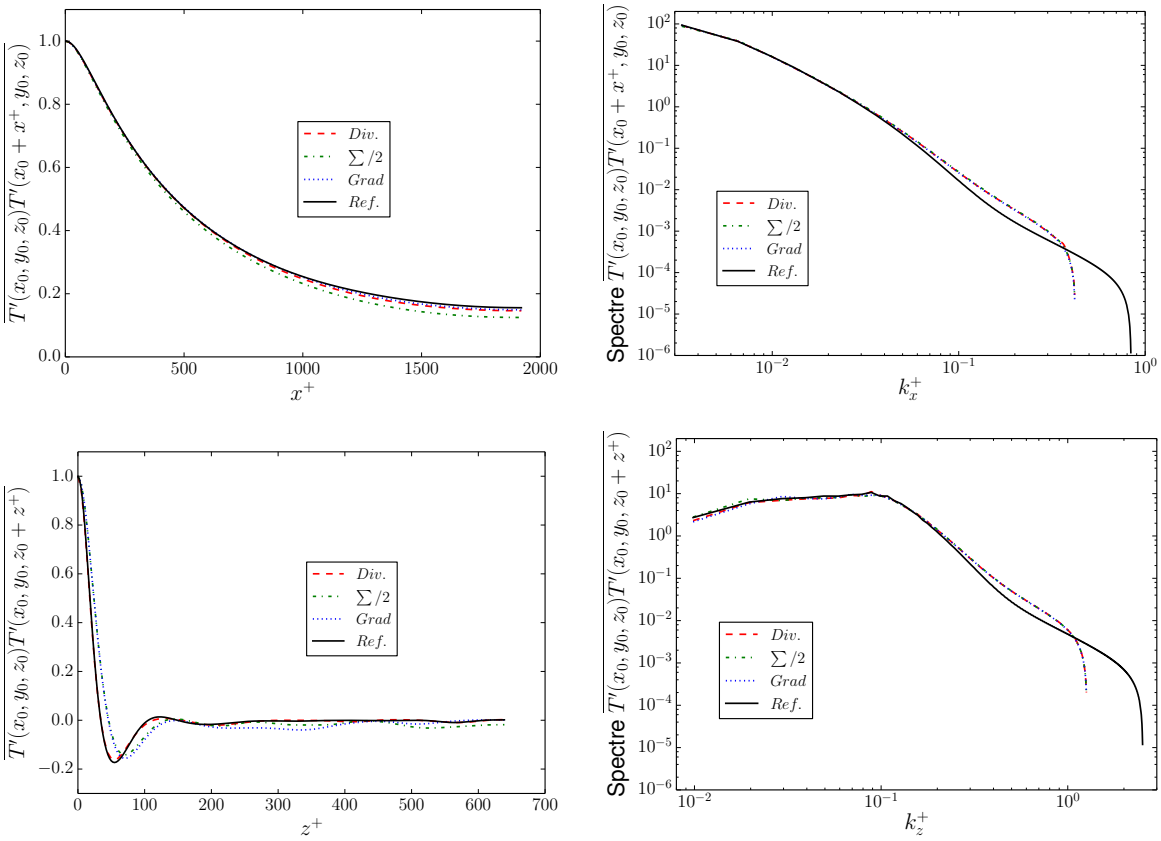


FIGURE E.4 – Gauche : Autocorrélations de la température à la paroi ($y^+ = 0$). Droite : Spectres associés. Haut : En x. Bas : En z.

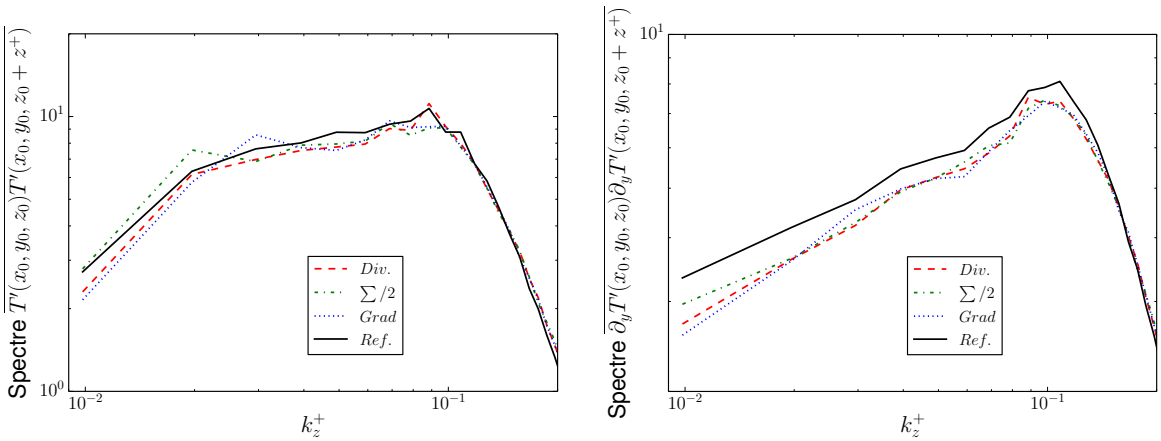


FIGURE E.5 – Spectres de l'autocorrélation dans la direction z à la paroi ($y^+ = 0$). Gauche : Température. Droite : Flux normal.

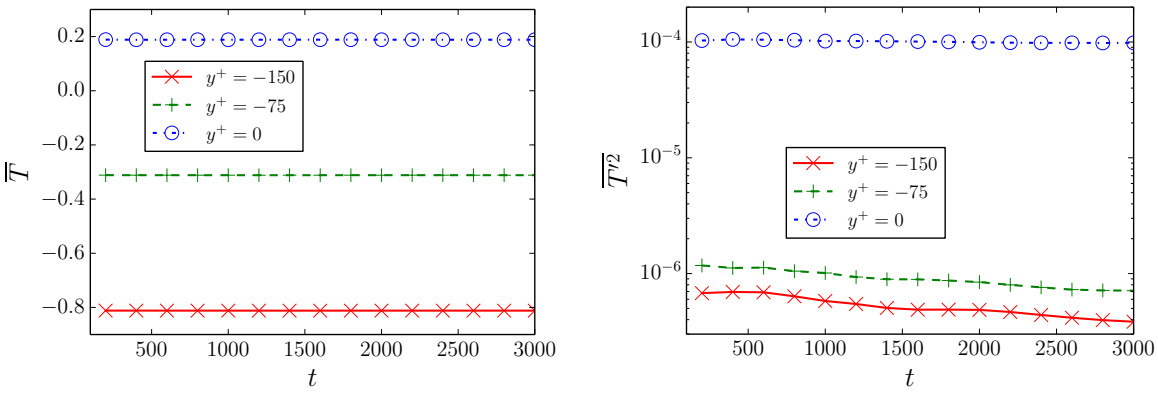


FIGURE E.6 – Convergence des statistiques (dimensionnelles) dans le solide. Gauche : convergence de $\overline{T}$. Droite : convergence de $\overline{T'^2}$.

thermiques se répercute sur les basses fréquences du spectre des autocorrélations en z à proximité de la paroi.

Soulignons un point important : en cas de transfert thermique conjugué, les difficultés de modélisation se rencontrent à l'interface fluide-solide et dans le fluide à proximité de la paroi. De plus, les contraintes qui s'exercent dans un solide soumis à un chargement thermique turbulent sont localisées au voisinage de l'interface fluide-solide. Ce qui se passe au bord extérieur du solide est donc secondaire.

Annexe F

Communication in 10^{th} Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements

Below is the extended abstract submitted at the 10^{th} *International ERCOFTAC Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements* (Sept. 2014). This was my first oral presentation in an international scientific symposium.

Ci-dessous se trouve l'article soumis à la conférence ETMM10 (10^{th} *International ERCOFTAC Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements*) en septembre 2014. C'était ma première présentation orale à une conférence internationale.

`https://hal.archives-ouvertes.fr/UNIV-POITIERS/hal-01162346v1`

DNS OF CHANNEL FLOW WITH CONJUGATE HEAT TRANSFER - BUDGETS OF TURBULENT HEAT FLUXES AND TEMPERATURE VARIANCE

C. Flageul[1], S. Benhamadouche[1], E. Lamballais[2] and D. Laurence[1,3]

[1]EDF R&D, Fluid Mechanics, Energy and Environment Dept. 6 Quai Wattier, 78401 Chatou, France

[2] Institute PPRIME, Department of Fluid Flow, Heat Transfer and Combustion, Université de Poitiers, CNRS, ENSMA, Téléport 2 - Bd. Marie et Pierre Curie B.P. 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France

[3]School of Mechanical, Aerospace and Civil Engineering, The University of Manchester, Sackville Street, Manchester M60 1QD, UK

cedric.flageul@edf.fr

1 Introduction

More than 40 years ago, Direct Numerical Simulation started with the pioneering work of Orszag (1971). This powerful workbench to study turbulence tempts more and more people as the computational power available increases. Only few DNS dealt with conjugate heat transfer issues. To the authors' knowledge, Tiselj et al. (2001a) were among the first to investigate this more realistic situation in a channel flow using pseudo-spectral methods. Kang et al. (2009) performed Quasi-DNS with conjugate heat transfer of a heated cylinder in a channel using immersed boundaries and a fully implicit LES solver based on unstructured collocated mesh using finite volume approach.

Conjugate heat transfer simulations are needed in industrial applications where fluctuating thermal stresses are a concern, in case of a severe emergency cooling or long ageing materials. High Reynolds RANS and LES simulations rely on wall-modeling as the viscous sub-layer is not resolved. DNS is a valuable tool for understanding the flow physics of such complex phenomena and to provide fine data in order to improve RANS and LES approaches.

The present work provides budgets of turbulent heat fluxes and temperature variance for a channel flow with different thermal boundary conditions: an imposed temperature, an imposed heat flux and with conjugate heat transfer combined with an imposed heat flux at the outer wall.

2 Numerical approach

Present simulations are based on the open-source software Incompact3d developed at Université de Poitiers and Imperial College London (http://code.google.com/p/incompact3d/) by Laizet et al. (2009, 2011). Sixth-order compact finite difference schemes are used on a Cartesian grid. The pressure is computed on a staggered grid using a spectral approach while velocity's components and temperature are collocated.

The incompressible Navier-Stokes and energy equations of a fluid with constant properties (1) and (2) are solved using a projection method (eqs (3) and (4)). The convective term in the momentum equation is computed using the skew-symmetric form.

$$\partial_i u_i = 0 \quad \partial_t u_i + \partial_j (u_i u_j) = -\partial_i p + \frac{1}{\mathrm{Re}} \partial_{jj} u_i \quad (1)$$

$$\partial_t T + \partial_j (T u_j) = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \partial^2_{jj} T \quad (2)$$

$$\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\left(\partial_{yy} u_i^* + \partial_{yy} u_i^n\right)}{2\,\mathrm{Re}} + F_i\left(u^n, u^{n-1}, p^n\right) \quad (3)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} = -\partial_i \delta p^{n+1} \quad (4)$$

The convective and the wall-parallel viscous terms are integrated through a 2nd order Adams-Bashforth time advancing scheme and the wall-normal viscous term through a Crank-Nicolson one. The numerical approach is exactly the same for the fluid temperature. While performing conjugate heat transfer, the diffusion equation for the temperature in the solid is given by eq. (5):

$$\frac{T_s^{n+1} - T_s^n}{\Delta t} = \frac{1}{G\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \partial^2_{yy} T_s^{n+1} + F\left(T_s^n, T_s^{n-1}\right) \quad (5)$$

The thermal diffusivity ratio G is set to unity for the present computations. The solid domain is on top ($y \geq L_y$) and on the bottom ($y \leq 0$) of the fluid domain. The thermal solver for the solid domain uses *finite differences* for the wall-parallel diffusion and a *spectral* method for the wall-normal one. Time-advancement is similar to the flow except for the wall-normal diffusion that is fully implicit.

The thermal coupling between both solvers is performed as follow. First, the fluid temperature is

subjected to a Dirichlet boundary condition: $T^{n+1} = \left(T^n + T_s^n\right)/2$. Then, the solid temperature is subjected to a Neumann boundary condition: $\partial_n T_s^{n+1} = \beta \partial_n T^{n+1}$. The ratio of thermal conductivities β is set to unity for the present computations. Tthe coupling strategy is first order in time: the resulting temperature field is slightly discontinuous at the interface while the heat flux is continuous through the Neumann boundary condition.

The set of coefficients used in the fluid domain with compact finite difference schemes for the collocated derivatives ($\partial_c^1, \partial_c^2$), the staggered derivation (∂_s^1) and the staggered interpolation (I_s) are recalled table 1. Only approximated values are given here for ∂_c^2 (Lamballais et al. (2011) with $k_c''\Delta x^2 = 4\pi^2$).

	∂_c^1	∂_c^2	∂_s^1	I_s
α	1/3	0.478	9/62	3/10
a	14/9	0.421	63/62	3/2
b	1/9	1.70	17/62	1/10
c	0	-0.164	0	0

Table 1: Finite difference coefficients

In the solid domain, the finite difference scheme is the only 6th order non-compact centered scheme with a stencil of 7 points.

3 Configuration, Results

A channel flow with a Reynolds number (based on the bulk velocity and the channel half-height) of 2280 is simulated with a Prandtl number of 0.71. The reference simulations are from Kasagi et al. (1992) which uses a Dirichlet boundary condition for the temperature and from Tiselj et al. (2001a) which uses a Neumann boundary condition for the temperature. Table 2 gives a comparison for the main parameters between our simulation and Kasagi et al. (1992).

	Present	Ref
Domain	[12.8; 2; 4.26]	[5π; 2; 2π]
Grid	[256;193;256]	[128;97;128]
Re_τ	148.8	150
Δy^+	[0.49; 4.8]	[0.08; 4.9]
$[\Delta x^+, \Delta z^+]$	[7.4; 2.5]	[18.4; 7.36]
Δt^+	0.02	0.12
Duration	16000	2100

Table 2: Simulation parameters. Ref: Kasagi et al. (1992)

The flow rate is imposed with a source term in the momentum equation. The source term in the energy equation is similar to the one used by Kasagi et al. (1992) and balances the overall heat input at the walls. The simulation with a temperature imposed at the boundary is called isothermal. The one with a heat flux imposed is called isoflux. For the case with conjugate heat transfer, the solid domain size is [12.8; 1; 4.26], located on top and bottom of the fluid domain, as sketched figure 1. The external faces of the solid domain are subjected to a constant heat flux, equal to the one imposed in the isoflux case.

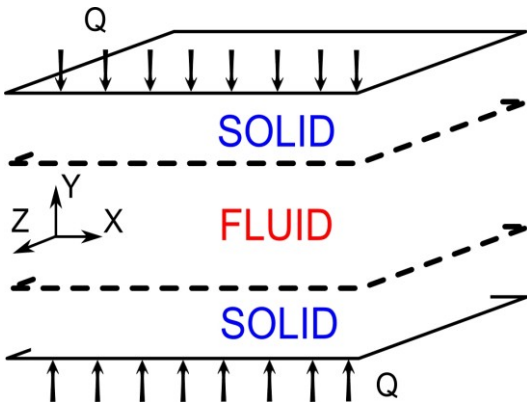


Figure 1: Sketch of the configuration.

As shown figures 2 and 3, the present compact finite-difference simulation compares well with the pseudo-spectral results of Kasagi et al. (1992), even for high order statistics such as the budgets of the turbulent heat fluxes.

In figure 4, turbulent heat fluxes and the temperature variance for the isoflux case are in perfect agreement with the results of Tiselj et al. (2001a).

Budgets for the isoflux case are available for a flume configuration (Tiselj et al. (2001b)) and for a concentric annular pipe flow (Chung et al. (2003)). However, to the authors' knowledge, no budgets are available in the literature when the heat flux is imposed or in case of conjugate heat transfer for the channel flow configuration. It is therefore interesting to compare the budgets for isoflux and conjugate simulations with their isothermal counterparts.

In figure 5, the molecular diffusion and the dissipation behave differently in the near-wall region. They have lower amplitude in the isoflux case compared with the isothermal one. The behavior is similar for the budgets of the temperature variance with lower amplitudes obtained in the isoflux case.

In figure 6, the situation is similar for conjugate heat transfer: the molecular diffusion and the dissipation rate have lower amplitude in the near-wall region when compared with the isothermal case. In fact, for most of the statistics, a 3-way comparison puts conjugate heat transfer in-between isothermal and isoflux results, as expected. The impact of the thermal boundary condition on some statistical quantities is important when $y^+ \leq 20$, especially for the dissipation and the molecular diffusion associated with the streamwise turbulent heat flux and the temperature variance, in agreement with the results in Kasagi et al. (1989).

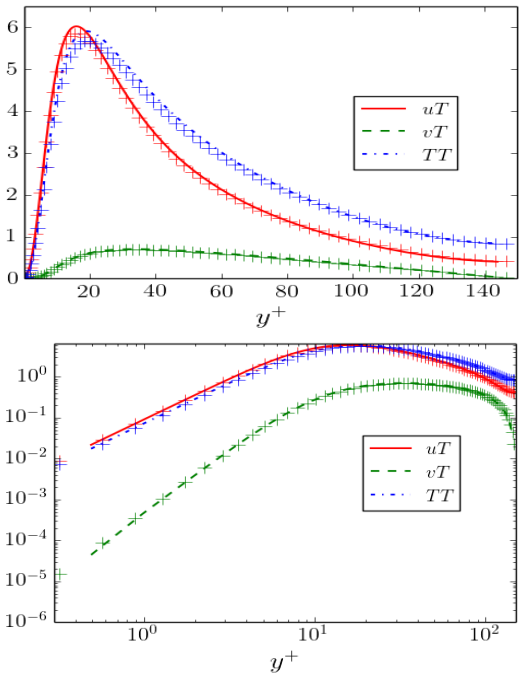


Figure 2: Isothermal b.c., turbulent heat fluxes and temperature variance. Line: present. Symbol: Kasagi et al. (1992).

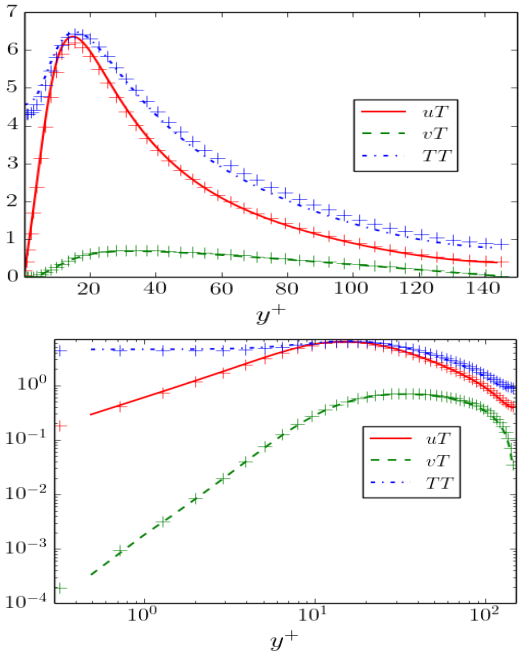


Figure 4: Isoflux b.c., turbulent heat fluxes and temperature variance. Line: present. Symbol: Tiselj et al. (2001a).

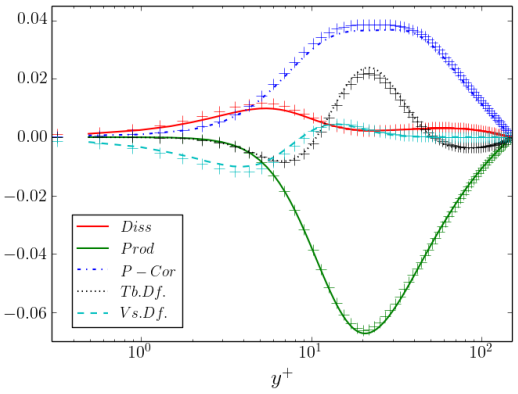


Figure 3: Isothermal b.c., budget of wall-normal turbulent heat flux. Line: present. Symbol: Kasagi et al. (1992).

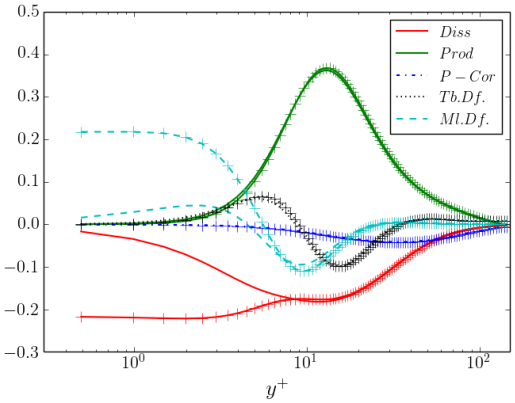


Figure 5: Budget of axial turbulent heat flux. Line: isoflux b.c. Line+Symbol: isothermal b.c.

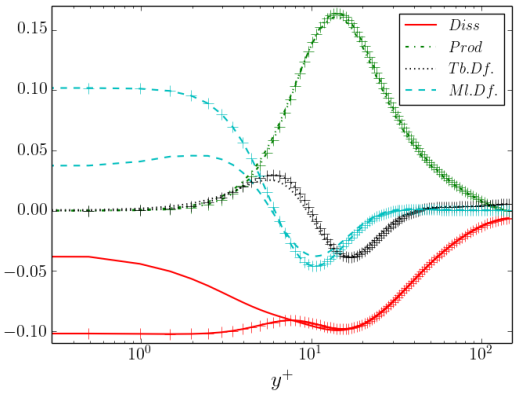


Figure 6: Budget of temperature variance. Line: conjugate. Line+Symbol: isothermal b.c.

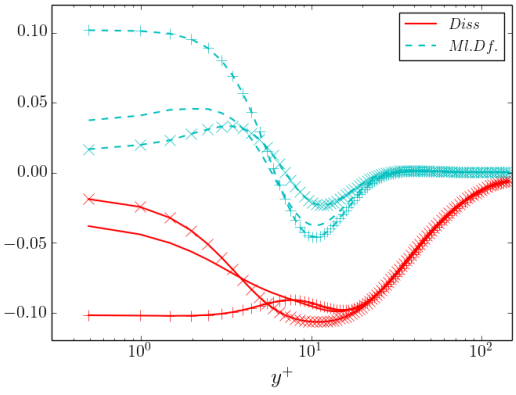


Figure 7: Molecular diffusion and dissipation of the temperature variance. Line: conjugate. Line+Symbol: isothermal b.c.(+) and isoflux b.c.(x)

4 Asymptotic analysis ($y \to 0$)

The near-wall instantaneous temperature and velocity fields can be approached using a Taylor expansion (eqn. (6)-(9)) where the coefficients depend on (x,z,t).

$$T(x,y,z,t) = a + by + cy^2 + \ldots \quad (6)$$

$$u_1 = b_1 y + c_1 y^2 + \ldots \quad (7)$$

$$u_2 = c_2 y^2 + \ldots \quad (8)$$

$$u_3 = b_3 y + c_3 y^2 + \ldots \quad (9)$$

Extracting the 0^{th} order term in the temperature evolution (2) leads to:

$$\partial_t a = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\left(\partial_{xx} a + 2c + \partial_{zz} a\right) \quad (10)$$

At the wall, the molecular diffusion from the temperature variance budget is equal to $2\left\langle b'^2 + 2a'c' \right\rangle (\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr})^{-1}$ (a' is the fluctuating part of a and <> denote average in time and in the homogeneous directions). Using (10), the asymptotic value of the molecular diffusion is:

$$MlDf \xrightarrow[y\to 0]{} \frac{2}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\left\langle b'^2 + \left(\partial_x a'\right)^2 + \left(\partial_z a'\right)^2 \right\rangle \quad (11)$$

At the wall, this term is the opposite of the dissipation rate. The first term is linked the fluctuating wall-normal temperature gradient (dominant for the isothermal configuration in the near-wall region). The second and third ones are connected with the fluctuating wall-parallel temperature gradient (dominant in the isoflux configuration in the near-wall region).

In figure 7, the molecular diffusion in the isothermal case is ≈ 7 times higher compared with the isoflux one: the Dirichlet boundary condition produces important fluctuations of the normal temperature gradient at the wall. Actually, the ratio of the molecular diffusion associated to the temperature variance budget between isoflux and isothermal configurations is equal to 0.13, which is lower than the values mentioned in Kasagi et al. (1989) and obtained with an unsteady 2D synthetic model; in the range [0.3-0.5].

The region around $y^+ \approx 5$ is also remarkable: isothermal and isoflux cases have almost the same molecular diffusion, slightly differing from the one obtained in the conjugate case. Results in the conjugate heat transfer configuration are not always in-between isothermal and isoflux ones. Moreover, they are closer to isothermal ones after $y^+ \approx 10$.

5 Turbulent Prandtl number

Geshev (1978), has derived analytically a turbulent Prandtl number (ratio of turbulent shear stress to heat flux) for isothermal and isoflux walls as well as conjugate cases. (eq. (13))

$$\left\langle u_2(y_1,t)u_2(y_2,t-\tau)\right\rangle \propto y_1^{\,2} y_2^{\,2} \exp\left(-\tau/\Delta\right) \quad (12)$$

$$\mathrm{Pr}_t = \mathrm{Pr}\,\frac{1 + \frac{y^{+2}}{2\Delta} - \exp\left(-y^+/\sqrt{\Delta}\right)}{1 + \mathrm{Pr}\,\frac{y^{+2}}{2\Delta} - \frac{\Lambda}{1+\Lambda}\exp\left(-y^+\sqrt{\mathrm{Pr}/\Delta}\right)} \quad (13)$$

Λ is the thermal activity ratio (which is also the thermal effusivity ratio) and Δ, defined via the spatio-temporal correlation of equation (12) is 20 according to Geshev (1978).

In figure 8, the agreement is qualitative ($\mathrm{Pr}_t \propto y^+$ at the wall for conjugate and isoflux configurations). This clearly shows that wall-modelling of temperature-related quantities inside the fluid should care for the thermal boundary condition when $y^+ \le 20$ and $\mathrm{Pr} \approx 1$. The Geshev model does not account for the wall-parallel diffusion and the source term. This may explain the overall underestimation of the turbulent Prandtl number.

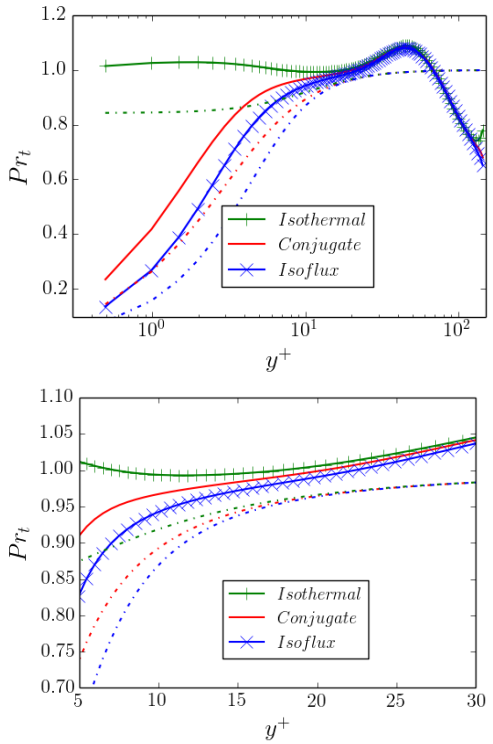


Figure 8: Turbulent Prandtl number. Lines: present. Dash-dotted lines: Geshev.

6 Velocity-temperature correlations

Abe et al. (2009) have investigated the normalized correlation between velocity and temperature: $corr = <UT> / U_{RMS} T_{RMS}$. In the isothermal case, the correlation between the streamwise velocity and the temperature reaches a peak for $y^+ \approx 7$.

In figure 9, almost the same peak is observed in the isothermal case. Our isoflux result is also in very good agreement with Tiselj et al. (2001a).

In figure 10, a trend similar to the one in figure 9 is observed: around $y^+ \approx 20$, the normalized correlation for conjugate heat transfer is close to the isothermal one while around $y^+ \approx 0$ it is almost equal to the isoflux one. This trend seems general as it is also observed in figure 7 for the molecular diffusion and dissipation rate of the temperature variance budget.

The loss of correlation between streamwise velocity and temperature at the wall is related to the presence of temperature fluctuations at the wall while the velocity components are constant.

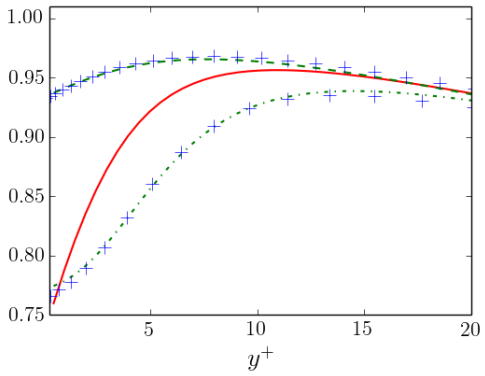


Figure 9: Correlation uT. Line: conjugate. Dashed line: isothermal. Dash-dotted line: isoflux. Symbols: Kasagi et al. (1992), Tiselj et al. (2001a).

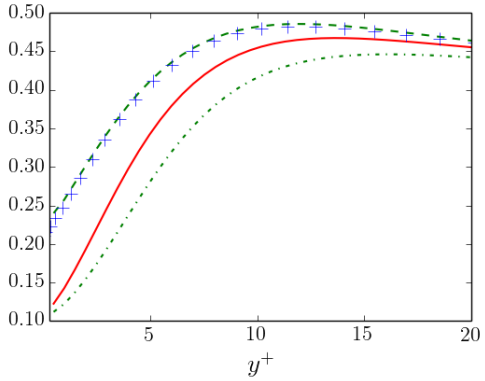


Figure 10: Correlation vT. Line: conjugate. Dashed line: isothermal b.c. Dash-dotted line: isoflux b.c. Symbols: Kasagi et al. (1992).

7 Fourier and Laplace analysis of the solid conduction

A solid domain, infinite in x and z directions and semi-infinite in the y direction is subjected to a thermal load at $y = 0$, which is statistically stationary and homogeneous in x and z. Applying a Fourier transform in time and in the homogeneous directions to the solid heat diffusion equation leads to:

$$ik_t \frac{\rho C_p}{\lambda} T_s = \partial_{yy}^2 T_s - \left[k_x^2 + k_z^2\right] T_s \qquad (14)$$

The solid heat diffusion equation is linear: the general solution is a superposition of Fourier modes. k_t is the angular frequency while k_x and k_z are the wave-numbers in the streamwise and in the spanwise direction. When $k_t = 0$, the averaged temperature in the solid decreases exponentially:

$$T_s(y) \propto T_s(0) \exp\left(-|y|\sqrt{k_x^2 + k_z^2}\right) \qquad (15)$$

The characteristic penetration depth of temperature fluctuations δ satisfies:

$$\frac{1}{\delta^2} \propto k_x^2 + k_z^2 \qquad (16)$$

When $k_x = k_z = 0$, there is a phase shift between the temperature taken at different depths. However, the decay of the amplitude is still exponential and the characteristic penetration depth δ satisfies:

$$\frac{1}{\delta^2} \propto \frac{\rho C_p}{\lambda} k_t \qquad (17)$$

In the general case, the analysis is more complex. Applying a Laplace transform (denoted by an overbar hereafter) in y direction leads to:

$$\overline{\partial_{yy}^2 T(y)} = s^2 \overline{T}(s) - s T_{y=0} - \partial_y T_{y=0} \qquad (18)$$

$$\overline{T} = \frac{s T_{y=0} + \partial_y T_{y=0}}{s^2 - \left(k_x^2 + k_z^2\right) - ik_t \dfrac{\rho C_p}{\lambda}} \qquad (19)$$

Applying partial fraction decomposition and an inverse Laplace transform leads to an exponential decay of the temperature fluctuations with a characteristic penetration depth satisfying equation 20:

$$\frac{1}{\delta^4} \propto \left(k_x^2 + k_z^2\right)^2 + \left(\frac{\rho C_p}{\lambda} k_t\right)^2 \qquad (20)$$

From this analysis, it is clear that large scale temperature fluctuations with a long lifespan are more likely to penetrate deep in the solid. It is often overlooked that structures highly localized in space and times are responsible for severe thermal constraint in the solid, near the fluid interface. A 1D model of solid heat diffusion that does not account for the lateral heat conduction ($k_x = k_z = 0$) may over-estimate δ and under-estimate the thermal constraint at the fluid interface.

The present analysis could be extended to domains with a finite length in the y direction. This involves Green functions. Such developments are more complex.

8 Analysis of temperature variance

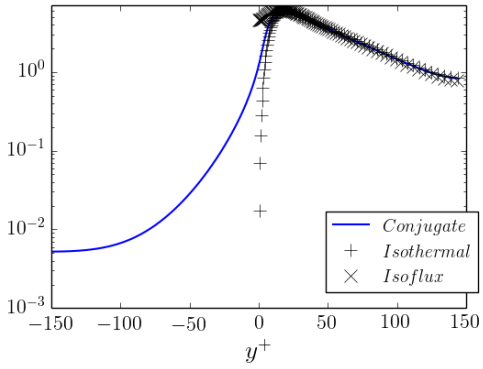


Figure 11: Temperature variance inside the fluid (y>0) and solid (y<0) domains.

Figure 11 shows that it is not possible to fit the temperature variance to an exponential curve (straight line in this linear-log plot) as it may be done for a given (k_x, k_z, k_t). As the turbulent forcing at the wall contains a broad range of spatial and temporal frequencies, the superposition of the exponentials may prevent a simple curve fitting to be efficient.

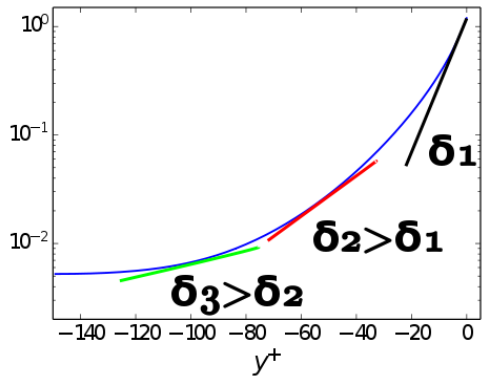


Figure 12: Temperature variance inside the solid domain.

At a given depth y_i, the slope of the temperature variance can be used to compute a characteristic length δ_i, as illustrated in figure 12. It is the low wave-number range of the fluctuating temperature spectrum that determine local $\delta_i(y^+)$ as the integral length-scale of the spectrum increases with increasing depth, as sketched figure 13. Considering the temperature variance is the squared temperature fluctuation and assuming $k_x = k_t = 0$, the length-scale in z associated with δ_1 is $\lambda_z^+ = 2\pi/k_z^+ = 79$. This is reasonably close to the spacing between velocity streaks ($\lambda_z^+ \approx 100$).

Indeed, from the theorem of Parseval, L2-norm is conserved during a Fourier transform. Therefore, at a given depth, the temperature variance scales with the integral of the squared spectrum (Fourier transforms in time and homogeneous directions). The decaying temperature variance in the solid domain should correspond to spectrum similar to the ones of figure 13.

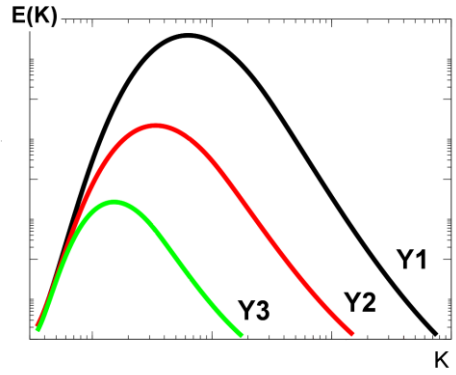


Figure 13: Conjectured spectrum of the fluctuating temperature in the solid domain at different depths.

However, our first simulation was not instrumented to extract the spectrum of temperature fluctuations inside the solid. This is an ongoing work. From the spectrum of the temperature and the heat flux at the wall, the temperature field inside a semi-infinite solid and any related statistical quantity can be theoretically reconstructed. It is delicate to extract such result because of the broad range of frequencies involved (high frequencies at the fluid interface and low frequencies at the outer wall).

Note that the imposed heat flux brings a null derivative of the temperature variance at the outer boundary. The solid heat diffusion equation being elliptic, the outer boundary condition impacts the whole thermal field. A boundary condition of Robin type may be more relevant since our solid domain is not semi-infinite.

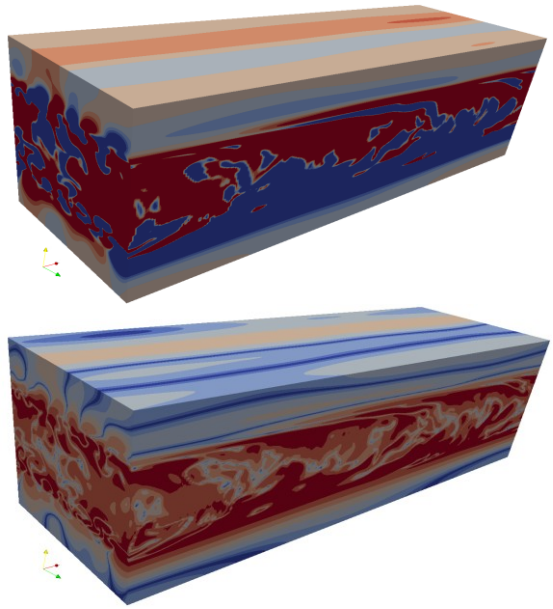


Figure 14: Instantaneous fluctuating temperature field in log scaling. Top: hot and cold spots. Bottom: absolute value.

9 Instantaneous temperature field

The instantaneous fluctuating temperature field in the domain is presented using a colour map in logarithmic scale because the fluctuations inside the solid have low amplitude compared to the ones in the fluid.

Some fluctuating spots have clearly penetrated the top wall. Very long thermal structures are also visible at the outer boundary of the wall. Their size suggests that the computational domain should be longer in x direction to capture faithfully the temperature fluctuations in the solid region.

10 Perspectives

The channel flow is one of the simplest geometries for a wall-bounded turbulent flow. It was selected to verify our developments. The ability to compute high-order statistics was established on an isothermal case. Then, the impact of the thermal boundary condition on the budgets of the heat fluxes and temperature variance was investigated.

From our results, it is clear that conjugate heat transfer provides different results compared with an imposed temperature or heat flux at the wall and that wall-parallel conduction together with topology of hot and cold temperature spots plays a significant role in the penetration depth of turbulent thermal loading. The authors are currently carrying out more simulations to extend the present analysis with larger domains than used for the classical channel flow DNS: the small wave-number range of the spectrum is of particular interest for conjugate heat transfer.

The objective behind the present DNS is to build a reference database focused on temperature-related statistics including conjugate heat transfer. The DNS results reported here are currently available on request and will be made publicly available on the user group of the Incompact3d website.

Acknowledgements

The authors thank Prof. I. Tiselj for providing results and assistance. We also thank the French National Research Agency and EDF R&D for funding the study and providing computational time on Zumbrota supercomputer (IBM – BlueGene/Q).

References

Abe, H., Antonia, R. A., and Kawamura, H. (2009). Correlation between small-scale velocity and scalar fluctuations in a turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 627, pp. 1-32.

Chung, S. Y., and Sung, H. J. (2003). Direct numerical simulation of turbulent concentric annular pipe flow: Part 2: Heat transfer. *International journal of heat and fluid flow*, Vol. 24, pp. 399-411.

Geshev, P. I. (1978). Influence of heat conduction of the wall on the turbulent prandtl number in the viscous sublayer. *Journal of engineering physics*, Vol. 35, pp. 949-952.

Kang, S., Iaccarino, G., and Ham, F. (2009). DNS of buoyancy-dominated turbulent flows on a bluff body using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, pp. 3189-3208.

Kasagi, N., Kuroda, A., and Hirata, M. (1989). Numerical investigation of near-wall turbulent heat transfer taking into account the unsteady heat conduction in the solid wall. *Journal of Heat Transfer*, Vol. 111, pp. 385-392.

Kasagi N., Tomita Y., and Kuroda A. (1992), Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 114, pp. 598–606.

Laizet S. and Lamballais E. (2009), High-order compact schemes for incompressible flows: A simple and efficient method with quasi-spectral accuracy. *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, pp. 5989–6015.

Laizet S. and Li N. (2011), Incompact3d: A powerful tool to tackle turbulence problems with up to $o(10^5)$ computational cores. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 67, pp. 1735–1757.

Lamballais, E., Fortuné, V., and Laizet, S. (2011). Straightforward high-order numerical dissipation via the viscous term for direct and large eddy simulation. *Journal of Computational Physics*, Vol. 230, pp. 3270-3275.

Orszag S. A. (1971), Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: I-galerkin (spectral) representations, *Journal of Fluid Mechanics,* Vol. 49, pp. 75–112.

Tiselj I., Bergant R., Mavko B. et al. (2001a), DNS of turbulent heat transfer in channel flow with heat conduction in the solid wall, *Journal of heat transfer*, Vol. 123, pp. 849-857.

Tiselj, I., Pogrebnyak, E., Li, C., Mosyak, A., and Hetsroni, G. (2001b). Effect of wall boundary condition on scalar transfer in a fully developed turbulent flume. *Physics of Fluids*, Vol. 13, pp. 1028-1039.

Annexe G

Publication in International Journal of Heat and Fluid Flow (SI)

Below is the article published in the *International Journal of Heat and Fluid Flow*, in the special issue dedicated to the international symposium ETMM10.

Ci-dessous se trouve l'article publié dans le journal *International Journal of Heat and Fluid Flow* au sein du numéro dédié à la conférence ETMM10.

http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2015.07.009

International Journal of Heat and Fluid Flow xxx (2015) xxx–xxx

Contents lists available at ScienceDirect

International Journal of Heat and Fluid Flow

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijhff

DNS of turbulent channel flow with conjugate heat transfer: Effect of thermal boundary conditions on the second moments and budgets

Cédric Flageul [a,*], Sofiane Benhamadouche [a], Éric Lamballais [b], Dominique Laurence [a,c]

[a] EDF R&D, Fluid Mechanics, Energy and Environment Dept., 6 Quai Wattier, 78401 Chatou, France
[b] Institute PPRIME, Department of Fluid Flow, Heat Transfer and Combustion, Université de Poitiers, CNRS, ENSMA, Téléport 2 – Bd. Marie et Pierre Curie, B.P. 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France
[c] School of Mechanical, Aerospace and Civil Engineering, The University of Manchester, Sackville Street, Manchester M13 9PL, UK

ARTICLE INFO

Article history:
Available online xxxx

Keywords:
Direct Numerical Simulation
Channel flow
Robin boundary condition
Conjugate heat transfer
Second-moment closures
Budgets

ABSTRACT

Budgets of turbulent heat fluxes and temperature variance obtained from the Direct Numerical Simulation of an incompressible periodic channel flow with a Reynolds number of 150 (based on friction velocity) and a Prandtl number of 0.71 are presented and analysed for four cases: locally imposed temperature at the wall (constant Dirichlet), locally imposed heat flux (constant Neumann), heat exchange coefficient (Robin) and 3D conjugate heat transfer. The dissipation rate associated with the temperature variance is strongly impacted by the thermal boundary condition. For non-conjugate cases, a straightforward analytical analysis establishes the connection between the boundary condition, the temperature variance and the wall-normal part of the thermal dissipation rate at the wall. For the conjugate case, the two-point correlations of the thermal field in the solid domain confirms the existence of very large scale thermal structures.

© 2015 Elsevier Inc. All rights reserved.

1. Introduction

More than 40 years ago, Direct Numerical Simulation (DNS) started with the pioneering work of Orszag (1970) and is now widely used as a powerful workbench to study turbulence but more rarely heat and mass transfer. As a generic turbulent wall flow, the channel flow configuration has been extensively investigated by DNS while including the near-wall heat transfer through the consideration of a passive scalar (Kasagi et al., 1992; Tiselj et al., 2001a; Kawamura et al., 1998). Most of the DNS performed with a passive scalar are based on an imposed temperature at the wall as an isothermal, i.e., constant Dirichlet boundary condition for the temperature (Kasagi et al., 1992; Kawamura et al., 1998). When the temperature is imposed at the wall, there is a close similarity between thermal and momentum streaks (Abe and Antonia, 2009). For a temperature subjected to such a boundary condition, the near-wall correlation between the streamwise velocity and the temperature is high, leading to a strong correlation between the scalar dissipation rate and the enstrophy (Abe et al., 2009).

In a significantly more reduced number of previous DNS, a constant heat flux is imposed at the wall, i.e., constant Neumann boundary condition for the temperature (Tiselj et al., 2001a,b). Although these previous DNS studies were very helpful to investigate the physical mechanisms responsible of heat transfer, it is widely recognised that neither isothermal nor isoflux boundary conditions can realistically mimic the actual heat transfer in real life, especially when the thermal diffusivity of the solid and the fluid are of the same order of magnitude. In this situation, the thermal interaction between the fluid and the solid must be described. When such a coupling is explicitly considered, it is common to refer to conjugate heat transfer. Tiselj et al. (2001a) were the first to investigate by DNS the influence of the thermal boundary condition through direct comparisons between conjugate heat transfer, imposed temperature and imposed heat flux at the wall.

Conjugate heat transfer simulations are required in industrial applications where fluctuating thermal stresses are a concern, e.g. in case of a severe emergency cooling or long-term ageing of materials. High Reynolds RANS and LES simulations rely on wall-modelling as the viscous sub-layer is not resolved. DNS is a valuable tool for understanding the flow physics of such complex phenomena and providing fine data in order to improve RANS and LES modelling.

In this paper, budgets of turbulent heat-fluxes and temperature variance are presented for three different boundary conditions (locally imposed temperature (isoT), locally imposed heat flux (isoQ) and heat exchange coefficient (Robin)) as well as for

* Corresponding author.
E-mail address: cedric.flageul@gmail.com (C. Flageul).

http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2015.07.009
0142-727X/© 2015 Elsevier Inc. All rights reserved.

Please cite this article in press as: Flageul, C., et al. DNS of turbulent channel flow with conjugate heat transfer: Effect of thermal boundary conditions on the second moments and budgets. Int. J. Heat Fluid Flow (2015), http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2015.07.009

conjugate heat-transfer (Conjug). For the conjugate simulation, the thermal properties are identical for both the solid and the fluid. For the Robin boundary condition, the heat exchange coefficient was designed specifically to mimic an intermediate situation in between the imposed temperature and imposed heat flux cases as explained Section 2.

2. Governing equations and numerical setup

Present simulations are based on the open-source software Incompact3d developed at Université de Poitiers and Imperial College London by Laizet and Lamballais (2009) and Laizet and Li (2011). Sixth-order compact schemes are used on a Cartesian grid stretched in the wall-normal direction. The pressure is computed with a direct solver on a staggered grid while velocity components and temperature are collocated. The time-advancement used is a second-order hybrid explicit/implicit Adams–Bashforth/Crank–Nicolson scheme implemented by Dairay et al. (2014).

The mass and momentum equations read

$$\partial_i u_i = 0$$

$$\partial_t u_i = -\frac{\partial_j(u_i u_j) + u_j \partial_j u_i}{2} - \partial_i p + \frac{1}{Re}\partial_{jj} u_i + f\delta_{i,x} \tag{1}$$

where $\delta_{i,x}$ is the Kronecker symbol and x stands for the streamwise direction. The convective term is computed using the skew-symmetric formulation. The source term driving the channel flow ($f\delta_{i,x}$) is present only in the streamwise direction: it is a constant in space and time, fitted so that the averaged bulk velocity is 1. The Reynolds number (Re) based on the averaged bulk velocity and the channel half-height ($h = 1$) is 2280.

The passive scalar conservation equation in the fluid domain reads

$$\partial_t T = -\partial_j(Tu_j) + \frac{1}{RePr}\partial_{jj} T + f_T u_x \tag{2}$$

The Prandtl number (Pr) is equal to 0.71. The scalar equation contains a source term ($f_T u_x$) as defined by Kasagi et al. (1992). In case of conjugate heat transfer, the passive scalar conservation equation in the solid domain is given by

$$\partial_t T_s = \frac{1}{GRePr}\partial_{jj} T_s \tag{3}$$

The ratio of fluid-to-solid thermal diffusivities (G) is 1 in the present simulations. As pointed out by Tiselj et al. (2013), a source term can be introduced in the solid domain but its impact is limited to the averaged temperature: it has no influence on the temperature fluctuations. In addition to the scalar conservation equations, the continuity of the scalar and its flux at the interface between both domains reads

$$T_s = T \text{ and } \partial_y T_s = G_2 \partial_y T \tag{4}$$

The ratio of fluid-to-solid thermal conductivities (G_2) is 1 in the present simulation.

Table 1
Simulation parameters.

	Present	Kasagi et al. (1992)	Tiselj et al. (2001a)
Domain	[25.6,2,8.52]	$[5\pi,2,2\pi]$	$[5\pi,2,\pi]$
Grid	[256,193,256]	[128,97,128]	[128,97,65]
Re_τ	149	150	150
Δy^+	[0.49,4.8]	[0.08,4.9]	[0.08,4.9]
$[\Delta_x^+, \Delta_z^+]$	[14.8,5.1]	[18.4,7.36]	[18.4,7.4]
Δt^+	0.02	0.12	0.12
Duration	29,000	2100	6000

Table 1 gives a comparison for the main parameters between present simulations and their reference counterparts: Kasagi et al. (1992) for the imposed temperature case and Tiselj et al. (2001a) for the imposed heat flux case. In order to ensure a satisfactory statistical convergence deep inside the solid domain for the conjugate heat transfer case, the present statistics already averaged by longitudinal and spanwise average have been also accumulated in time over an interval that is significantly longer than in previous studies (about five times longer). In order to allow comparison with same level of convergence for velocity statistics, every DNS presented in this paper has been performed with the same duration. The statistics are gathered on the fly during the simulation using each time step (1.5×10^6 samples), except for the autocorrelations that were obtained a posteriori using 75×10^3 samples (one sample every 20 time steps).

At the end of the simulation, the averaged quantities are normalised using the friction velocity (u_τ), the channel half-height ($h = 1$), the kinematic viscosity ($\nu = \frac{1}{Re}$) and the friction temperature (T_τ). The friction velocity and temperature are estimated using the y derivative of the averaged streamwise velocity and temperature at the wall, respectively. These derivatives have been computed using the same collocated compact finite difference scheme as the one used in the code to solve the governing equations. The set of coefficients used in the fluid domain with compact finite difference schemes for the collocated derivatives ($\partial_c^1, \partial_c^2$), the staggered derivation (∂_s) and the staggered interpolation (I_s) are recalled in Table 2 using the notations of Lele (1992). Only approximated values are given here for the second derivative ∂_c^2 (sixth order scheme in Lamballais et al., 2011 with $k_c''\Delta x^2 = 4\pi^2$). In the solid domain, the finite difference scheme used for ∂_c^2 is identical to the fluid one.

2.1. Conjugate heat transfer

As already stated, the conjugate heat transfer simulations were performed with the same thermal properties for the fluid and solid domains. The solid domain is on top ($[0,2,0] \leqslant [x,y,z] \leqslant [25.6,3,8.52]$) and on the bottom ($[0,-1,0] \leqslant [x,y,z] \leqslant [25.6,0,8.52]$) of the fluid domain, as illustrated in Fig. 1. The thermal solver for the solid domain uses the same finite difference schemes as Incompact3d for the wall-parallel diffusion and a spectral method for the wall-normal one. The boundary condition at the outer wall is an imposed heat flux, equal to the one imposed in the isoQ case.

The thermal coupling between both solvers is performed as follows. First, the fluid temperature is subjected to a Dirichlet boundary condition: $T_{fluid}^{n+1} = \frac{1}{2}\left(T_{solid}^{n} + T_{fluid}^{n}\right)$ where the superscript refers to the time-step number and the temperatures are taken at the wall. Then, the solid temperature is subjected to a Neumann boundary condition: $\lambda_{solid}\partial_n T_{solid}^{n+1} = \lambda_{fluid}\partial_n T_{fluid}^{n+1}$ with $\lambda_{solid} = \lambda_{fluid}$ for the present computation. Following the work of Giles (1997), this approach is stable and first-order accurate in time: the resulting temperature field is slightly discontinuous at the interface while the heat flux is continuous through the Neumann boundary condition.

Table 2
Finite difference coefficients.

	∂_c^1	∂_c^2	∂_s^1	I_s
α	1/3	0.478	9/62	3/10
a	14/9	0.421	63/62	3/2
b	1/9	1.70	17/62	1/10
c	0	−0.164	0	0

Please cite this article in press as: Flageul, C., et al. DNS of turbulent channel flow with conjugate heat transfer: Effect of thermal boundary conditions on the second moments and budgets. Int. J. Heat Fluid Flow (2015), http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2015.07.009

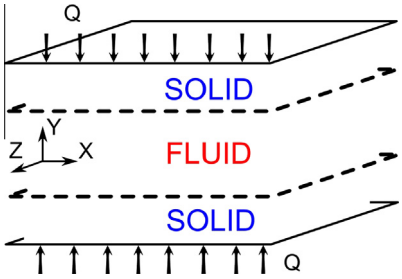


Fig. 1. Sketch of the domain.

2.2. Impact of the thermal boundary condition

One considers the general linear boundary condition with constant coefficients.

$$AT + B\partial_y T = C \text{ at the wall} \tag{5}$$

When $B = 0$, this is a Dirichlet boundary condition (imposed temperature). When $A = 0$, this is a Neumann boundary condition (imposed heat flux). When $AB \neq 0$, this is a Robin boundary condition. When B is equal to the thermal conductivity of the fluid, the parameter A is the heat exchange coefficient.

As a consequence of the general boundary condition (5), it is easy to show that the temperature statistics must satisfy the following linear system

$$\begin{pmatrix} \overline{T} & \partial_y \overline{T} & -1 \\ \overline{T'^2} & \frac{1}{2}\partial_y \overline{T'^2} & 0 \\ \frac{1}{2}\partial_y \overline{T'^2} & \overline{\partial_y T' \partial_y T'} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

where $\overline{T}$ and T' are the mean and fluctuating parts of the instantaneous T, respectively.

The determinant of the matrix must vanish, otherwise, the coefficients A, B and C are all zero. This condition provides a compatibility condition given by

$$\overline{T'^2} \times \overline{\partial_y T' \partial_y T'} = \left(\frac{1}{2}\partial_y \overline{T'^2}\right)^2 \tag{7}$$

that connects the temperature variance and its derivative at the wall with the wall-normal part of the dissipation rate of the temperature variance (ϵ_θ). Dirichlet (Neumann) boundary condition imposes the lack of wall fluctuations for the temperature (heat flux). As a consequence, the temperature variance derivative must vanish at the wall for both boundary conditions as shown by the compatibility condition (7). This is obviously not the case for the more general Robin boundary condition. Considering the sub-system of the last 2 lines of (6), one can notice that the statistics of the fluctuating temperature field are not directly subjected by C. Assuming $AB \neq 0$, only one degree of freedom remains: the ratio $\frac{A}{B}$

$$\frac{A}{B} = \frac{\partial_y \overline{T'^2}}{2\overline{T'^2}} = 2\frac{\overline{\partial_y T' \partial_y T'}}{\partial_y \overline{T'^2}} \Rightarrow A^2 \overline{T'^2} = B^2 \overline{\partial_y T' \partial_y T'} \tag{8}$$

This condition can be used to define a specific Robin boundary condition where the couple of parameters (A, B) are chosen here using the temperature variance obtained in the isoQ case and the wall-normal part of ϵ_θ obtained with the isoT case in the r.h.s. of Eq. (8).

3. Validation

In order to check that the DNS accuracy is ensured in the present study, an extensive comparison with reference results has been carried out for the conventional isoT and isoQ cases. An excellent agreement was found, as shown for instance in Fig. 2 for the turbulent heat fluxes and temperature variance. The same level of agreement is recovered for corresponding budgets, as illustrated in Figs. 3 and 4 for the isoT case.

The main conclusion of this brief validation section is that the present high-order numerical methods (compact finite differences) enable us to provide results with accuracy similar to the reference data obtained using a pseudo-spectral method. The same spatial resolution and physical parameters have been used for all the calculations presented in this paper, thus, an equivalent accuracy is expected for the new results obtained with the Robin boundary conditions and the conjugate heat transfer. However, as reported in Section 4, a specific requirement has been observed for this last case that was found more demanding in terms of numerical resolution. In the rest of the present paper, an extensive comparison between the four cases (referred as isoT, isoQ, Robin and Conjug) is presented with a focus on the effects of these different sets of boundary conditions on temperature statistics.

4. Results

In Fig. 5, the strong impact of the thermal boundary condition on the temperature variance is visible in the near-wall layer. As already reported in the literature, this zone of impact is limited to $y^+ \lesssim 20$ when the Prandtl number is around unity. Present results also suggest that the location and the amplitude of the peak in the temperature variance is impacted by the thermal boundary condition. This behaviour is consistent with the observations of Tiselj et al. (2001a). It is remarkable that the present Robin boundary condition gives almost exactly the same temperature variance as the conjugate case. This agreement suggests that the equal weighting of the temperature variance (for the isoQ case) and the wall-normal part of ϵ_θ (for the isoT case) in Eq. (8) enables a simplified Robin boundary condition to mimic a clearly more complex situation involving a thermal solid/fluid interaction.

The one point correlation coefficient associated with the wall-normal turbulent heat flux $< v'T' >$ is $\frac{< v'T' >}{T_{rms} v_{rms}}$. From Fig. 6, the wall-normal turbulent heat flux obtained with the Robin boundary condition and the conjugate case are very close, as it is the case for the temperature variance. The same similarity can be observed for the associated one point correlation coefficient, except at the wall where the small difference between the turbulent heat fluxes becomes more visible.

In Fig. 7, the streamwise turbulent heat flux obtained with the Robin boundary condition and the conjugate case are closer to the isoQ case. Here again, the one point correlation coefficient emphasises the small difference in the turbulent heat flux. The one point correlation coefficient for the Robin boundary condition is very close to the isoT case. The one point correlation coefficient for the conjugate case, is closer to the isoT one for $y^+ \geqslant 10$ and closer to the isoQ one at the wall.

The obtained one point correlation coefficients suggest that there is a fundamental difference between conjugate and non-conjugate heat-transfer, as discussed in the next section.

In Fig. 8, the budgets of the streamwise turbulent heat flux is strongly impacted by the thermal boundary condition, in particular in the near wall region. The dissipation rate and the viscous diffusion are in equilibrium at the wall and are impacted symmetrically, which is normal, as they are the dominating terms in equilibrium in the near-wall region. Here again, the Robin and the conjugate cases are very close. The impact of the thermal boundary condition on the budgets of the wall-normal turbulent heat flux is less visible. A non-zero correlation is found between the temperature

Please cite this article in press as: Flageul, C., et al. DNS of turbulent channel flow with conjugate heat transfer: Effect of thermal boundary conditions on the second moments and budgets. Int. J. Heat Fluid Flow (2015), http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2015.07.009

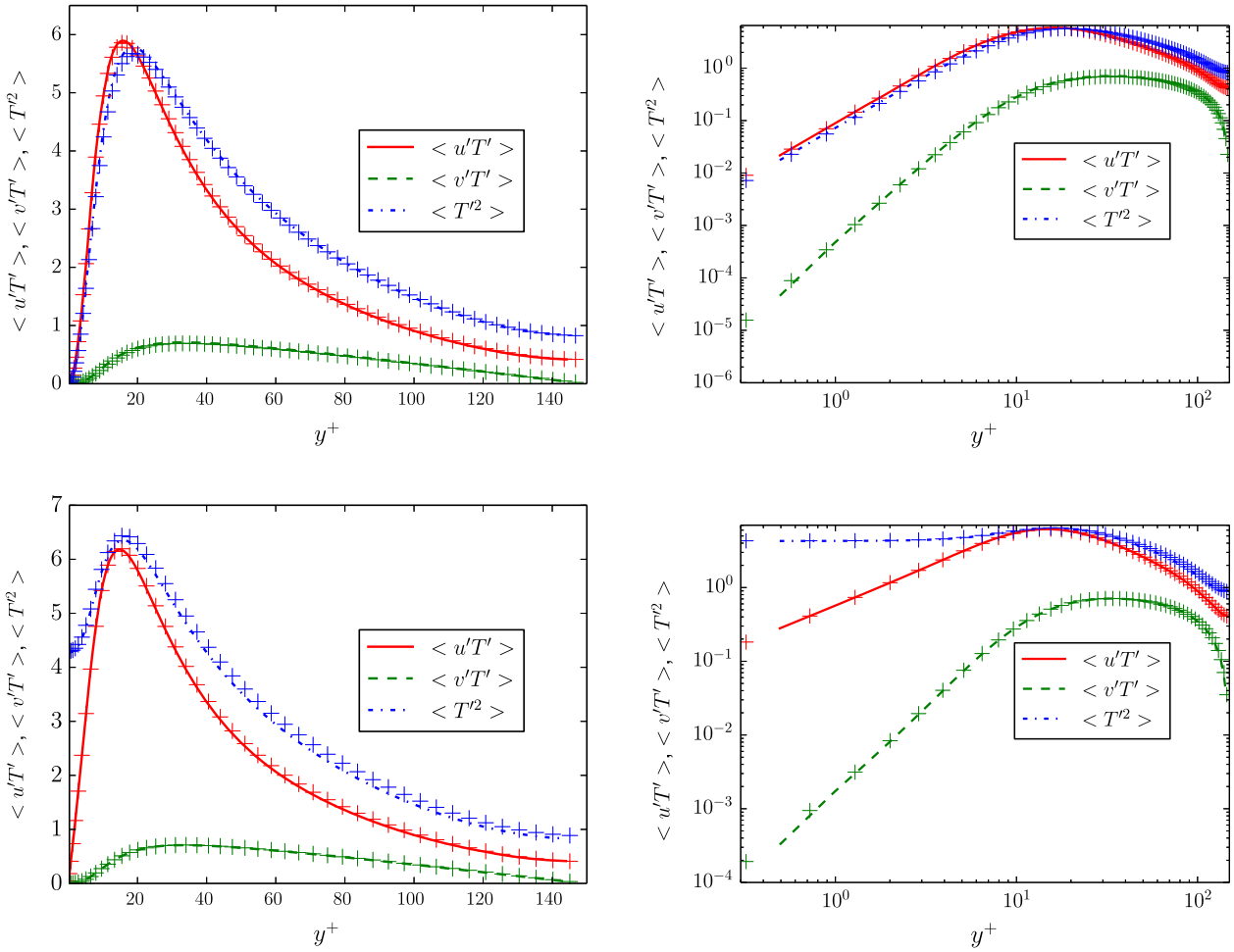


Fig. 2. Turbulent heat fluxes and variance of temperature. Line: present. Symbol: (Kasagi et al., 1992) or (Tiselj et al., 2001a). Top: isoT. Bottom: isoQ. Left: linear scale. Right: logarithmic scale.

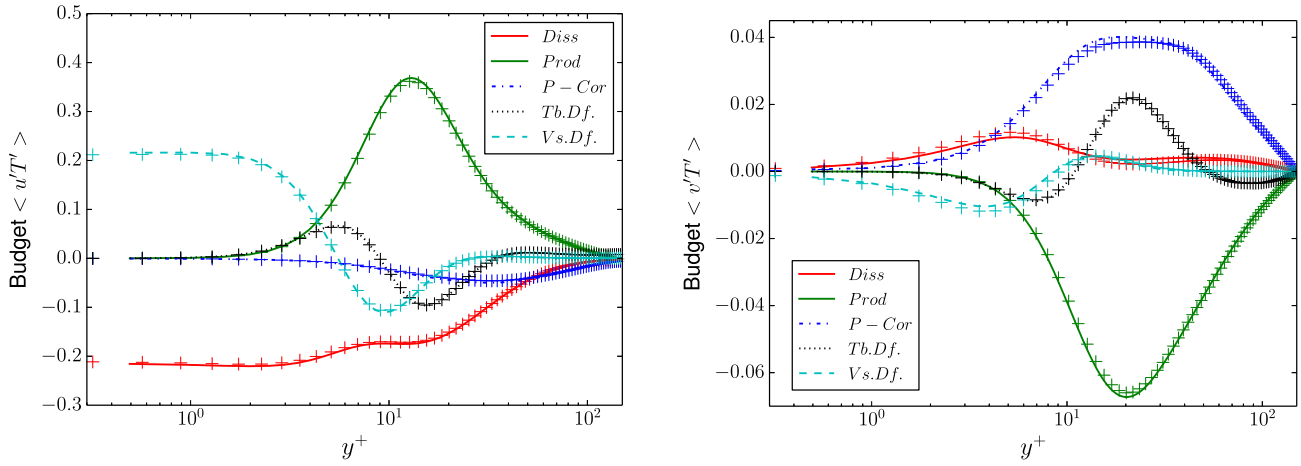


Fig. 3. Budgets of turbulent heat fluxes with an imposed temperature at the wall. Line: present, isoT. Symbol: (Kasagi et al., 1992), isoT. Left: streamwise turbulent heat flux. Right: wall-normal turbulent heat flux.

and the pressure gradient for the isoQ, Robin and conjugate cases, as reported by Tiselj et al. (2001a) for the isoQ case.

In Fig. 9, the budgets of temperature variance obtained for the conjugate case have a significant imbalance that is maximum at $y^+ \simeq 40$. The instantaneous temperature fields for the conjugate case are flawed by spurious oscillations. This point can be quantitatively confirmed by the examination of temperature two-point correlation (see Fig. 10) for which spurious oscillation are only visible in the streamwise direction. Despite the low amplitude of these oscillations, their dominant small-scale component can produce an artificial over-estimation of the dissipation ϵ_θ. The authors speculate that those oscillations are generated by the centred scheme used for the convective term in the temperature equation. The non-stationary and inhomogeneous Dirichlet boundary

Please cite this article in press as: Flageul, C., et al. DNS of turbulent channel flow with conjugate heat transfer: Effect of thermal boundary conditions on the second moments and budgets. Int. J. Heat Fluid Flow (2015), http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2015.07.009

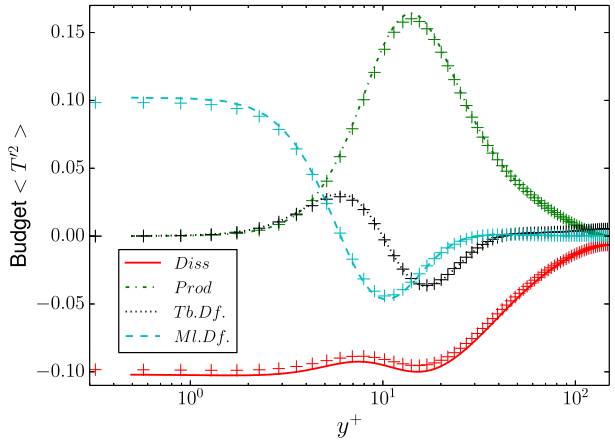


Fig. 4. Budgets of the temperature variance with an imposed temperature at the wall. Line: present, isoT. Symbol: (Kasagi et al., 1992), isoT.

condition imposed at the wall when the fluid temperature is updated may be the trigger of those oscillations.

Due to the type of the numerical schemes used here, which are high-order and weakly dissipative only at very small scale, the only option to avoid these spurious oscillations is to increase the spatial resolution in the longitudinal direction for the conjugate case. In order to check this point, an additional simulation has been performed using twice the number of cells in the streamwise and spanwise directions. For this extra simulation, the budgets of the temperature variance becomes correctly balanced without spurious oscillations on the temperature fields. Another option to obtain satisfactory temperature variance budgets is to keep the same spatial resolution while increasing the numerical dissipation through the use of spectral vanishing viscosity (of fourth-order accuracy) as reported in (Lamballais et al., 2011) but only in the streamwise direction. Comparisons between results from the three simulations (normal resolution, high resolution, spectral vanishing viscosity) have confirmed that the spurious oscillations only have a significant effect on the dissipation rate of the temperature variance with negligible impact on the temperature variance itself and on the turbulent heat fluxes including their budget. Following the work of Galantucci and Quadrio (2010), it is established that the accurate resolution of the scalar evolution equation is very demanding in terms of grid spacing: they recommend $\Delta_x^+ = \Delta_z^+ = 1$ to obtain an accurate evaluation of ϵ_θ for the isoT case. However, the present excitation of small-scale temperature fluctuations in the conjugate case with a grid spacing similar to the canonical ones (Kasagi et al., 1992; Tiselj et al., 2001a; Kawamura et al., 1998) was unexpected in this study, suggesting a careful analysis of the data in this more demanding situation to ensure the DNS accuracy.

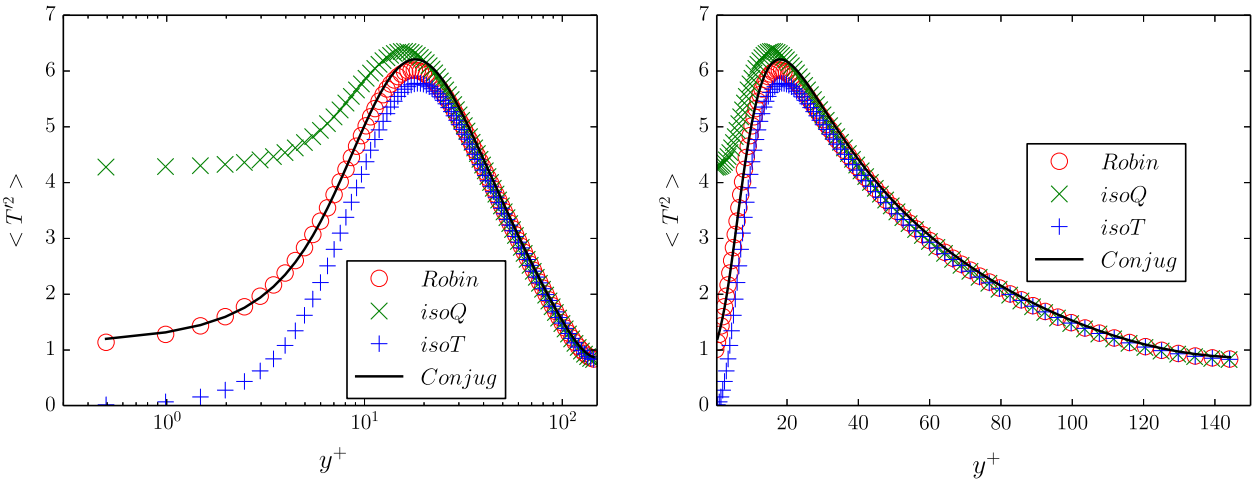


Fig. 5. Temperature variance with the four boundary conditions.

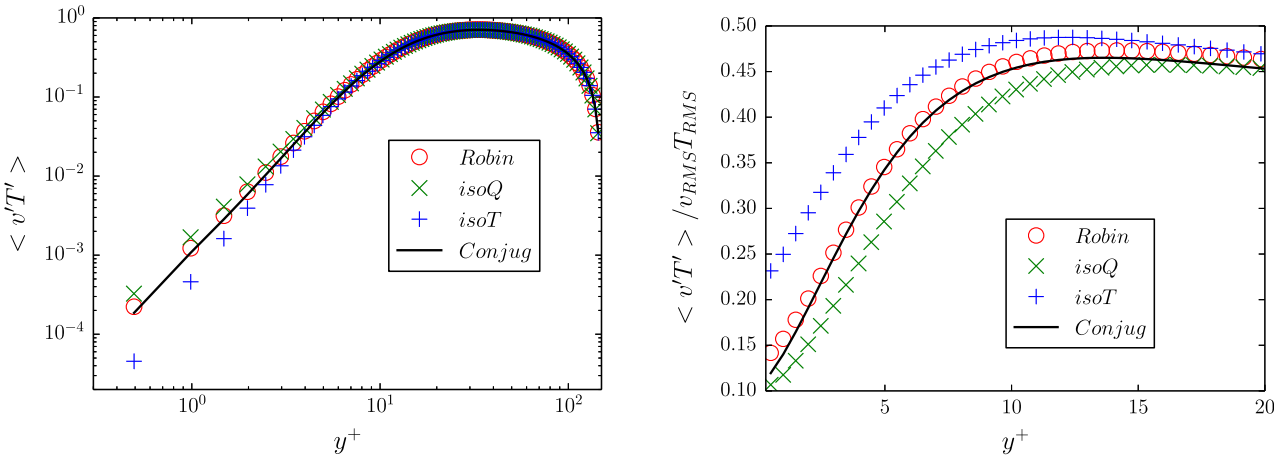


Fig. 6. Left: Wall-normal turbulent heat flux ($< v'T' >$). Right: Associated one point correlation coefficient.

Please cite this article in press as: Flageul, C., et al. DNS of turbulent channel flow with conjugate heat transfer: Effect of thermal boundary conditions on the second moments and budgets. Int. J. Heat Fluid Flow (2015), http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2015.07.009

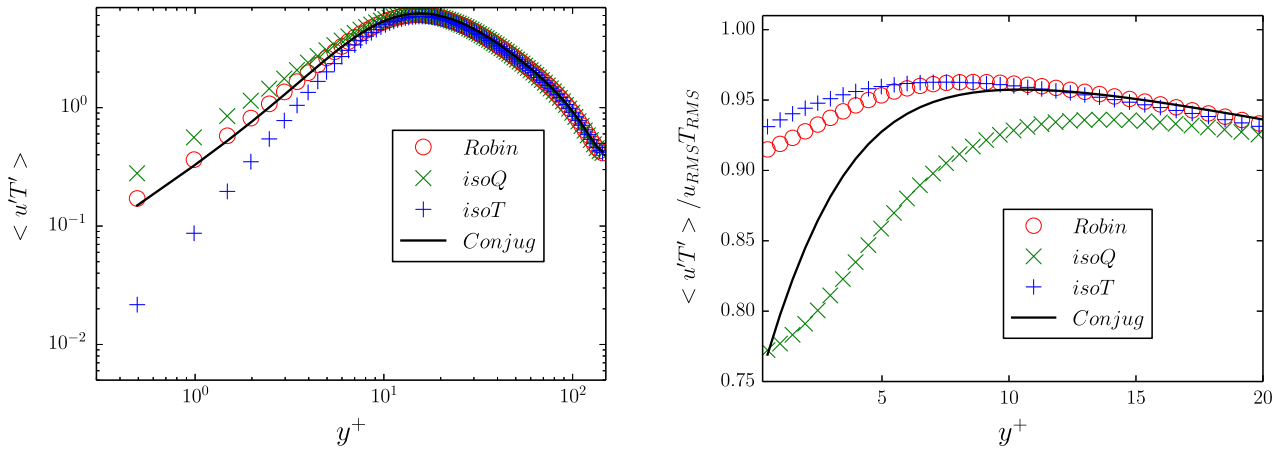


Fig. 7. Left: Streamwise turbulent heat flux ($< u'T' >$). Right: Associated one point correlation coefficient.

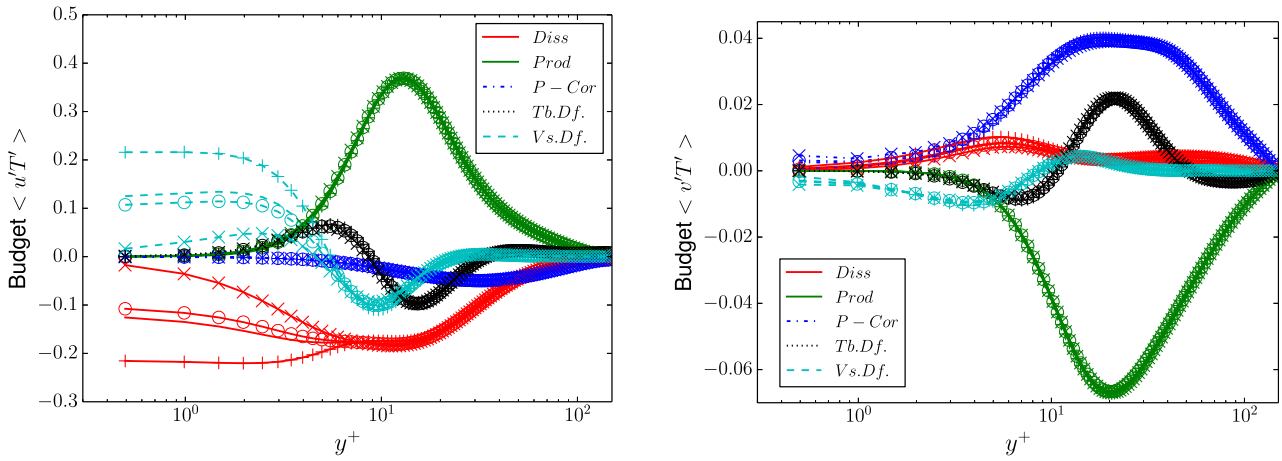


Fig. 8. Budgets of the turbulent heat fluxes. Line: Conjugate. Line + Symbol: isoT(+), isoQ(x) and Robin(o). Left: Streamwise turbulent heat flux. Right: Wall-normal turbulent heat flux.

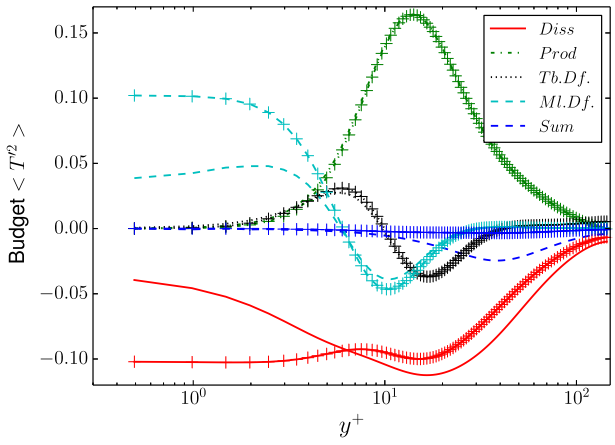


Fig. 9. Budgets of the temperature variance. Line: conjugate. Line + symbol: isoT.

In Fig. 11, the budgets of the temperature variance are suitably balanced and the impact of the thermal boundary condition is significant. Present results for the isoQ case confirm the impact of the thermal boundary condition on the dissipation rate and on the molecular diffusion predicted by Kasagi et al. (1989) with an unsteady 2D synthetic turbulence model. The results for the Robin case and for the conjugate one are closer to the isoQ case for the dominant terms at the wall (dissipation rate and molecular diffusion). Further away from the wall, the thermal boundary condition impact is lighter. For instance, at $y^+ \simeq 10$, the thermal dissipation rate in the Robin and conjugate cases is closer to the isoT result.

5. Analysis of the thermal field in the solid domain

In the solid domain, the source of temperature fluctuations is located at the fluid/solid interface. Then, the deeper one goes in the solid domain (i.e. farther from the fluid) obviously as it contains no source of fluctuations, the lower the temperature variance. This behaviour, already reported by Tiselj et al. (2001a), is well recovered here as shown in Fig. 12. Naturally, the spatial damping of temperature fluctuations across the solid is strongly dependent on the time and spatial scales involved in the heat conduction process. This selective damping can be easily exhibited through a Fourier and Laplace analysis of an idealised problem.

5.1. Fourier and Laplace analysis of the solid heat conduction

One considers a solid domain, infinite in x and z directions and semi-infinite in the y direction, subjected to a thermal load at $y = 0$, which is statistically stationary and homogeneous in x and

Please cite this article in press as: Flageul, C., et al. DNS of turbulent channel flow with conjugate heat transfer: Effect of thermal boundary conditions on the second moments and budgets. Int. J. Heat Fluid Flow (2015), http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2015.07.009

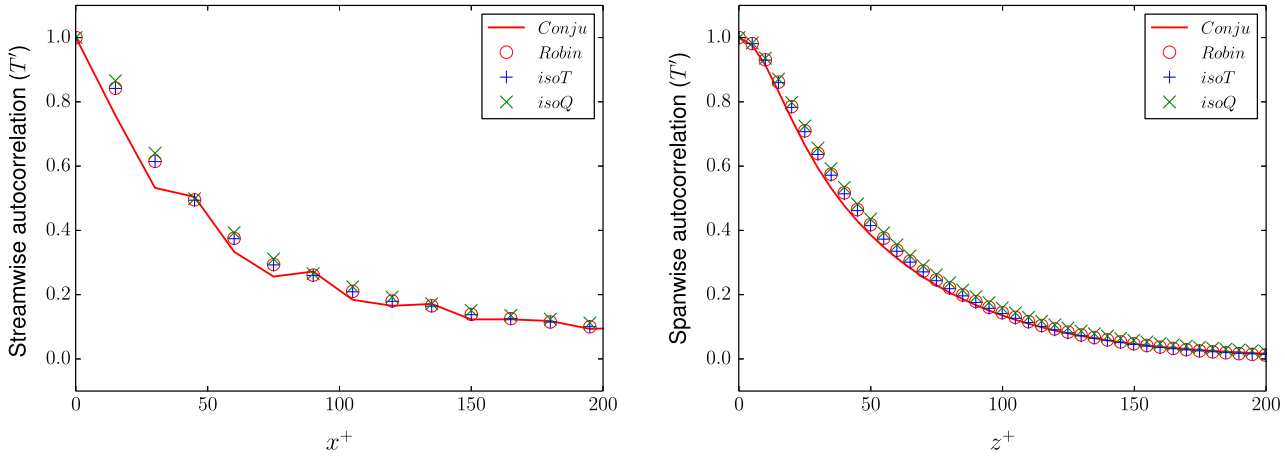


Fig. 10. Autocorrelation of the temperature at $y^+ = 150$. Left: Streamwise autocorrelation. Right: Spanwise autocorrelation.

z directions. Applying Fourier transform in time and in the homogeneous directions to the solid heat diffusion equation leads to

$$ik_t \frac{\rho C_p}{\lambda} \widehat{T_s} = \partial_{yy} \widehat{T_s} - \left(k_x^2 + k_z^2\right) \widehat{T_s} \tag{9}$$

(hereafter, the temperature in the Fourier space is denoted as $\widehat{T_s}$ and $[k_x, k_z, k_t]$ are the wavenumbers associated with the Fourier transforms in x, z and in time, respectively).

Applying a Laplace transform (denoted by an overbar hereafter) in y direction to Eq. (9) leads to

$$\begin{aligned} \overline{\partial_{yy} \widehat{T_s}} &= r^2 \overline{\widehat{T_s}}(r) - r\widehat{T_s}(y=0) - \partial_y \widehat{T_s}(y=0) \\ \overline{\widehat{T_s}} &= \frac{r\widehat{T_s}(y=0) + \partial_y \widehat{T_s}(y=0)}{r^2 - \left(k_x^2 + k_z^2\right) - ik_t \frac{\rho C_p}{\lambda}} \end{aligned} \tag{10}$$

Hereafter, the complex variable r is the frequency associated with the coordinate y after the Laplace transform.

The denominator can be expressed as $r^2 - R^2$ with $R^2 = k_x^2 + k_z^2 + ik_t \frac{\rho C_p}{\lambda}$. Applying partial fraction decomposition and an inverse Laplace transform leads to the temperature in the Fourier space

$$\widehat{T_s} = \frac{\partial_y \widehat{T_s}(y=0) + R\widehat{T_s}(y=0)}{2R} e^{yR} - \frac{\partial_y \widehat{T_s}(y=0) - R\widehat{T_s}(y=0)}{2R} e^{-yR} \tag{11}$$

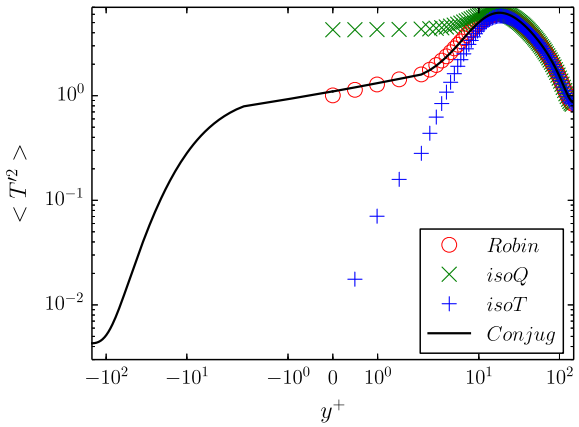


Fig. 12. Temperature variance. Fluid domain: $y^+ \geqslant 0$. Solid domain: $y^+ \leqslant 0$.

In this equation, one term corresponds to an exponential growth and the other to an exponential decay. As the physical solution of the present heat conduction equation is not unbounded, there is a compatibility condition connecting the heat flux and the temperature at the wall: $\partial_y \widehat{T_s} \pm R\widehat{T_s} = 0$ (the sign depends on the sign of the real part of R). This compatibility condition is a product in Fourier space, which is equivalent to a convolution in the physical space. Such a boundary condition is non-local in time and space.

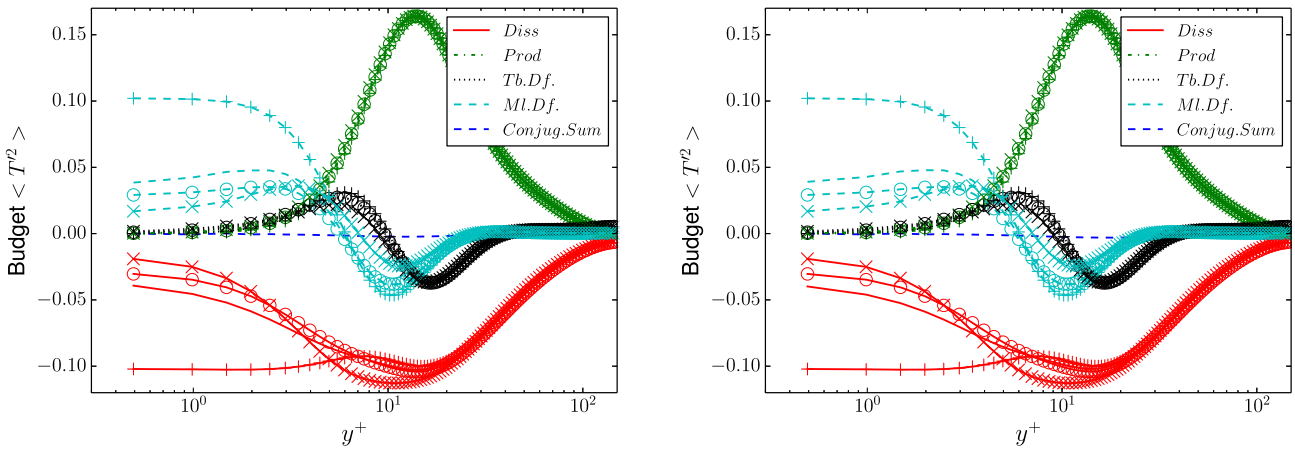


Fig. 11. Budgets of the temperature variance. Line: Conjugate. Line + Symbol: isoT(+), isoQ(x) and Robin(o). Left: blended fourth/sixth order scheme for the scalar diffusion on the regular grid. Right: sixth order scheme for the scalar diffusion on the refined grid.

Please cite this article in press as: Flageul, C., et al. DNS of turbulent channel flow with conjugate heat transfer: Effect of thermal boundary conditions on the second moments and budgets. Int. J. Heat Fluid Flow (2015), http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2015.07.009

It is a way to understand why a Robin boundary condition with constant coefficients cannot mimick perfectly conjugate heat-transfer as it cannot reproduce those non-local effects.

Assuming this compatibility condition is satisfied, one can conclude that there is an exponential decay of temperature fluctuations in the semi-infinite solid domain. The characteristic penetration depth is δ (the inverse of the real part of R) with

$$\frac{1}{\delta^4} \propto \left(k_x^2 + k_z^2\right)^2 + \left(\frac{\rho C_p}{\lambda} k_t\right)^2$$

The implication of such a relation is that only large-scale structures with a long lifetime are able to penetrate deeply inside the solid domain. This conclusion is supported by Fig. 13 where a high autocorrelation value of the temperature field is found deeply inside the solid domain, even at large separations. This is the signature of very large-scale thermal structures. As the solid heat diffusion equation is linear, those thermal structures, observed deeply inside the solid domain, must be also present at the fluid–solid interface. Therefore, very large-scale thermal structures should

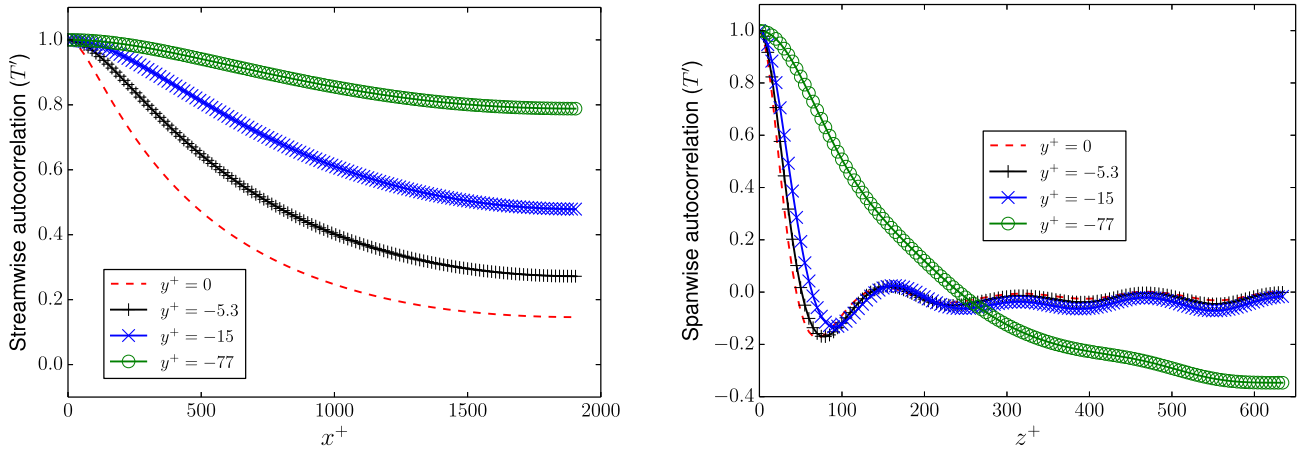


Fig. 13. Autocorrelation of the temperature in the solid domain. Left: Streamwise autocorrelation. Right: Spanwise autocorrelation.

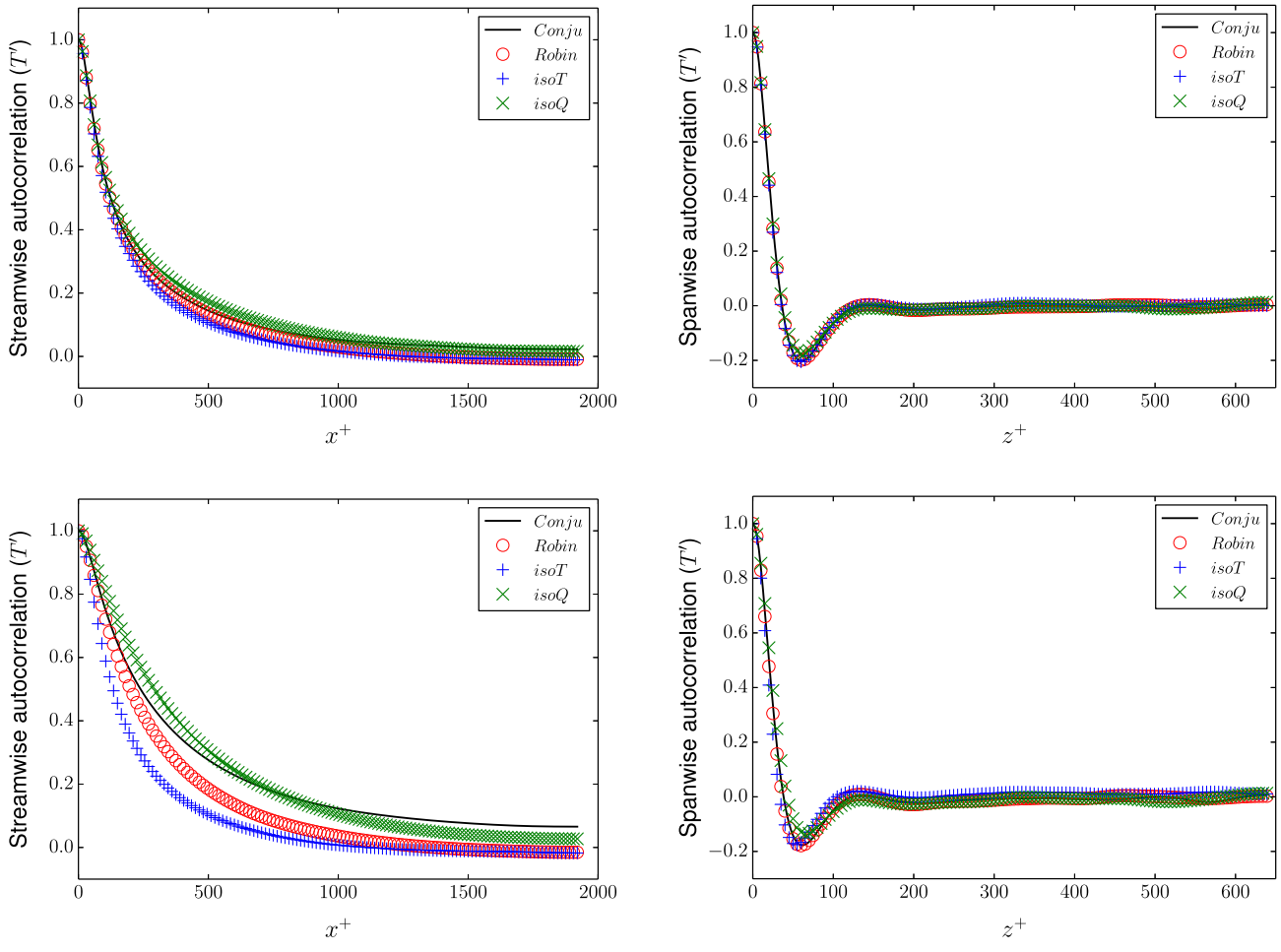


Fig. 14. Autocorrelation of the temperature. Left: Streamwise autocorrelation. Right: Spanwise autocorrelation. Top: $y^+ = 15$. Bottom: $y^+ = 5$.

Please cite this article in press as: Flageul, C., et al. DNS of turbulent channel flow with conjugate heat transfer: Effect of thermal boundary conditions on the second moments and budgets. Int. J. Heat Fluid Flow (2015), http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2015.07.009

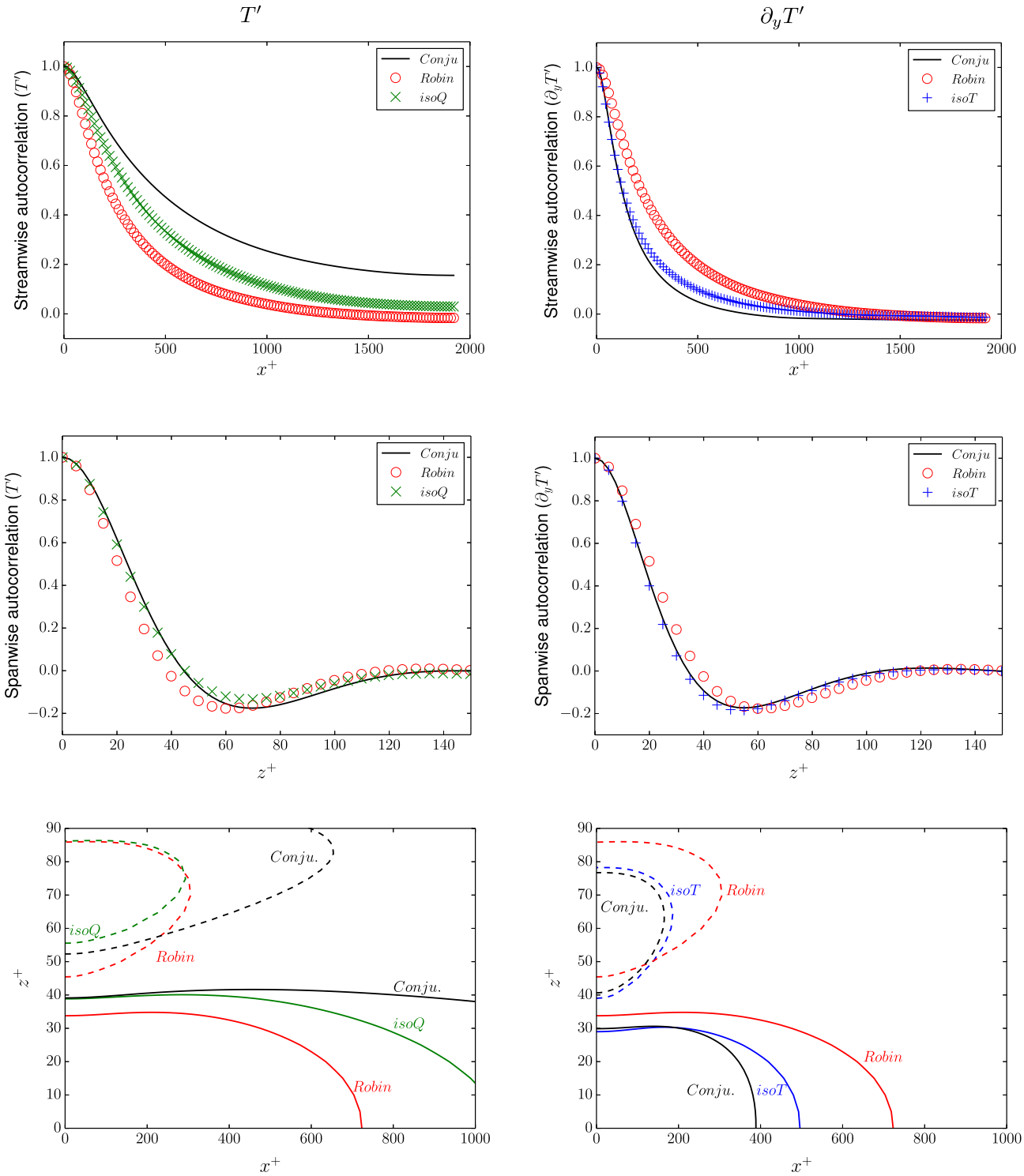


Fig. 15. Autocorrelation at the wall. Left: Temperature. Right: Wall-normal heat flux. Top: 1*D* streamwise autocorrelation. Middle: 1*D* spanwise autocorrelation. Bottom: Contour of 2*D* autocorrelation, solid (dashed) line for contour at 0.1 (−0.1).

be present in the fluid domain, at least in the vicinity of the wall. On the one hand, our domain is not infinite and the periodic boundary condition may artificially promote very large-scale thermal structures. On the other hand, these very large structures deep inside the solide actually have very low amplitudes as the previous graphs are normalised by the variance at the same depth. For $y^+ = -77$, this temperature variance is reduced by a factor 10^{-3} compared to the fluid layer value as seen from Fig. 12, so that the temperature variance in the fluid domain, the turbulent heat fluxes and the associated budgets can be assumed to be weakly impacted by the limited extension of the computational domain.

The present analytical analysis exhibits clearly the link between thermal structures highly localised in space/time (that can be associated with high wavenumbers/frequencies) and the thermal constraint subjected to the solid near the solid/fluid interface. This link can explain the trend for one-dimensional model of solid heat

Please cite this article in press as: Flageul, C., et al. DNS of turbulent channel flow with conjugate heat transfer: Effect of thermal boundary conditions on the second moments and budgets. Int. J. Heat Fluid Flow (2015), http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2015.07.009

diffusion (i.e. that does not account for the lateral heat condition with $k_x = k_z = 0$ in Eq. (9)) to overestimate the penetration depth δ while underestimating the associated thermal constraint in the fluid/solid interface region.

While the focus was on the solid domain, the obtained compatibility condition can be expressed with the fluid temperature and different thermal properties in the fluid and solid domains. Using the continuity of temperature and heat flux at the *fluid–solid interface* leads to

$$\widehat{T_s} = \pm\frac{1}{R}\partial_y\widehat{T_s} \iff \widehat{T_f} = \pm\frac{1}{R}\frac{\lambda_f}{\lambda_s}\partial_y\widehat{T_f} \text{ with}$$
$$R^2 = k_x^2 + k_z^2 + ik_t GRePr \tag{12}$$

Hereafter, the temperature in the fluid domain (at the wall) and in the Fourier space is noted $\widehat{T_f}$. The impact of the fluid-to-solid thermal diffusivity ratio cannot be isolated easily: R depends only on the solid thermal diffusivity and is involved in a convolution. The analysis is easier for the fluid-to-solid conductivity ratio. When the solid is infinitely conductive ($\lambda_s \gg \lambda_f$), the temperature variance vanishes at the wall and the case can be idealised as an imposed temperature case. Oppositely, when the solid consists of insulation ($\lambda_s \ll \lambda_f$), the variance of the wall-normal temperature derivative vanishes and the case can be idealised as an imposed heat flux case. Indeed, following the Parseval theorem, a Fourier transform conserves the quadratic norm (L_2). If the dependence of R on k_x, k_z and k_t was neglected, the quadratic norm of the spectral compatibility condition would be

$$T'^2 = \frac{1}{R^2}\frac{\lambda_f^2}{\lambda_s^2}\left(\partial_y T'\right)^2 \tag{13}$$

where T'^2 is the temperature variance at the wall and $\left(\partial_y T'\right)^2$ is the value at the wall of the wall-normal part of ϵ_θ. This equation is directly connected to the compatibility condition (8) associated with the Robin boundary condition. Therefore, the assumption that R is constant in the spectral space leads to a direct connection between R, the thermal conductivity ratio and the coefficients used in the Robin boundary condition (A and B):

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{1}{R^2}\frac{\lambda_f^2}{\lambda_s^2} \tag{14}$$

The Robin boundary condition obtained using T'^2 from the isoQ case and $\left(\partial_y T'\right)^2$ from the isoT case leads to $R \approx 0.154$ while the statistics from the conjugate case lead to $R \approx 0.165$. The authors estimate that the relative small difference between those values (6.9%) explains the good agreement between the Robin and conjugate cases considered in this study.

5.2. Autocorrelation of the temperature field in the fluid domain

In Fig. 14, the autocorrelation of the temperature at $y^+ = 15$ does not suggest a significant impact of the thermal boundary condition. This impact is more visible at $y^+ = 5$, especially for the streamwise autocorrelation.

In Fig. 15, the situation is similar at the wall. The streamwise autocorrelation of the temperature at the wall decreases faster in the Robin case: small-scale structures are more dominant in the Robin case compared with the conjugate one. Oppositely, for the wall-normal heat flux, small-scale structures are more dominant in the conjugate case compared with the Robin case. The Robin boundary condition with constant coefficients leads to the same autocorrelation for the temperature and wall-normal heat flux at the wall. This is obviously not the case for conjugate heat transfer. Those evidences support the conclusion of the previous analytical analysis: a Robin boundary condition with constant coefficients cannot mimick faithfully the non-local feature of conjugate heat-transfer. The situation is similar for the spanwise autocorrelations. The contours of the 2*D* autocorrelation in Fig. 15 show that near-wall thermal structures are severely impacted by the thermal boundary condition. The contours of the temperature fluctuations at the wall indicate that large-scale structures are more dominant in the conjugate case. Oppositely, the contours of the wall-normal temperature derivative at the wall show that small-scale structures are more dominant in the conjugate case. In addition, for both the temperature and wall-normal heat flux, the dashed contour (value of -0.1) of the conjugate case crosses the Robin one, which is evidence of large deviations of near-wall thermal structures between both cases.

6. Conclusion

Our results demonstrate the sensitivity of the dissipation rate associated with the temperature variance to the thermal boundary condition. We have also investigated the ability of a specific Robin boundary condition with constant coefficients to mimic conjugate heat-transfer. Regarding the case of conjugate heat-transfer considered here (same physical properties in the fluid and solid domain), the present Robin boundary condition produces statistics close to the conjugate ones for the turbulent heat fluxes, temperature variance and their budgets. Some analytical evidences suggest that very large scale thermal structures are intrinsic to conjugate heat-transfer. However, it is not yet clear whether the large thermal structures observed in the simulation confirm this fact or are the consequence of a periodic boundary condition. The compatibility condition obtained from the analytical analysis (a convolution in space and time) emphasises the non-local aspects of conjugate heat-transfer, which cannot be mimicked by a Robin boundary condition with constant coefficients.

The impact of the thermal boundary condition at the outer wall has not been investigated: further simulations should be performed with an imposed temperature or a heat exchange coefficient at the outer wall. It would also be interesting to study cases with different thermal properties in the fluid and solid domain.

Acknowledgements

The authors thank Pr. I. Tiselj for providing results and assistance. We also thank the French National Research Agency and EDF R&D for funding the study (CIFRE 2012/0047) and providing computational time on Zumbrota supercomputer (IBM – Blue-geneQ).

References

Abe, H., Antonia, R.A., 2009. Near-wall similarity between velocity and scalar fluctuations in a turbulent channel flow. Phys. Fluids (1994-present) 21 (2), 025109. http://dx.doi.org/10.1063/1.3081555.

Abe, H., Antonia, R.A., Kawamura, H., 2009. Correlation between small-scale velocity and scalar fluctuations in a turbulent channel flow. J. Fluid Mech. 627, 1–32. http://dx.doi.org/10.1017/S0022112008005569.

Dairay, T., Fortuné, V., Lamballais, E., Brizzi, L., 2014. Large eddy simulation of a turbulent jet impinging on a heated wall using high-order numerical schemes. Int. J. Heat Fluid Flow (0). http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2014.08.001.

Galantucci, L., Quadrio, M., 2010. Very fine near-wall structures in turbulent scalar mixing. Int. J. Heat Fluid Flow 31 (4), 499–506. http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2010.04.002.

Giles, M., 1997. Stability analysis of numerical interface conditions in fluid-structure thermal analysis. Int. J. Numer. Meth. Fluids 25, 421–436. http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19970830)25:4<421::AID-FLD557>3.0.CO;2-J.

Kasagi, N., Kuroda, A., Hirata, M., 1989. Numerical investigation of near-wall turbulent heat transfer taking into account the unsteady heat conduction in the

solid wall. J. Heat Transfer 111 (2), 385–392. http://dx.doi.org/10.1115/1.3250689.

Kasagi, N., Tomita, Y., Kuroda, A., 1992. Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow. J. Heat Transf. 114 (3), 598–606. http://dx.doi.org/10.1115/1.2911323.

Kawamura, H., Ohsaka, K., Abe, H., Yamamoto, K., 1998. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid. Int. J. Heat Fluid Flow 19 (5), 482–491. http://dx.doi.org/10.1016/S0142-727X(98)10026-7.

Laizet, S., Lamballais, E., 2009. High-order compact schemes for incompressible flows: a simple and efficient method with quasi-spectral accuracy. J. Comput. Phys. 228 (16), 5989–6015. http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2009.05.010.

Laizet, S., Li, N., 2011. Incompact3d: a powerful tool to tackle turbulence problems with up to o(10^5) computational cores. Int. J. Numer. Meth. Fluids 67 (11), 1735–1757. http://dx.doi.org/10.1002/fld.2480.

Lamballais, E., Fortuné, V., Laizet, S., 2011. Straightforward high-order numerical dissipation via the viscous term for direct and large eddy simulation. J. Comput. Phys. 230 (9), 3270–3275. http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2011.01.040.

Lele, S.K., 1992. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. J. Comput. Phys. 103 (1), 16–42. http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(92)90324-R.

Orszag, S.A., 1970. Analytical theories of turbulence. J. Fluid Mech. 41 (02), 363–386. http://dx.doi.org/10.1017/S0022112070000642.

Tiselj, I., Bergant, R., Mavko, B., Bajsić, I., Hetsroni, G., 2001a. Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in channel flow with heat conduction in the solid wall. J. Heat Transf. 123 (5), 849–857. http://dx.doi.org/10.1115/1.1389060.

Tiselj, I., Pogrebnyak, E., Li, C., Mosyak, A., Hetsroni, G., 2001b. Effect of wall boundary condition on scalar transfer in a fully developed turbulent flume. Phys. Fluids (1994-present) 13 (4), 1028–1039. http://dx.doi.org/10.1063/1.1350899.

Tiselj, I., Oder, J., Cizelj, L., 2013. Double-sided cooling of heated slab: conjugate heat transfer DNS. Int. J. Heat Mass Transf. 66, 781–790. http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.07.076.

Please cite this article in press as: Flageul, C., et al. DNS of turbulent channel flow with conjugate heat transfer: Effect of thermal boundary conditions on the second moments and budgets. Int. J. Heat Fluid Flow (2015), http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2015.07.009

Annexe H

Communication in 8^{th} Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer

Below is the extended abstract submitted at the 8^{th} *International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer* (Sept. 2015). This was my second oral presentation in an international scientific symposium.

Ci-dessous se trouve l'article soumis à la conférence THMT8 (8^{th} *International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*) en septembre 2015. C'était ma seconde présentation orale à une conférence internationale.

Turbulence, Heat and Mass Transfer 8
© 2015 Begell House, Inc.

DNS of turbulent channel flow: Can we imitate conjugate heat-transfer with a Robin boundary condition?

C. Flageul[1], S. Benhamadouche[1], E. Lamballais[2] and D. Laurence[1,3]

[1]*EDF R&D, Fluid mechanics, Energy and Environment, 78401 Chatou, France,* cedric.flageul@edf.fr

[2]*Institute PPRIME, Department of Fluid Flow, Heat Transfer and Combustion, Université de Poitiers, CNRS, ENSMA, Téléport 2 – Bd. Marie et Pierre Curie B.P. 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France*

[3]*School of Mechanical, Aerospace and Civil Engineering, The University of Manchester, Sackville Street, Manchester M60 1QD, UK*

Abstract – Turbulent heat fluxes, temperature variance and associated budgets obtained from the Direct Numerical Simulation of an incompressible turbulent channel flow with a Reynolds number of 150 based on the wall friction velocity and a Prandtl number of 0.71 are presented and analysed for four different cases: imposed temperature at the wall (Dirichlet), imposed heat flux (Neumann), heat exchange coefficient (Robin) and 3D conjugate heat transfer. Present results show that a Robin boundary condition can imitate most of the one point statistics obtained with conjugate heat-transfer accurately compared to the statistics obtained with an imposed temperature or heat flux at the wall.

1. Introduction

Most of the DNS of the turbulent channel flow performed with a passive scalar are based on an imposed temperature at the wall (Kasagi et al. 1992, Kawamura et al. 1998). When the temperature is imposed at the wall, there is a close similarity between thermal and momentum low-speed near-wall streaks (Abe et al. 2009).

In a small number of DNS, a constant heat flux is imposed at the wall (Tiselj et al. 2001). However, it is widely recognized that neither isothermal nor isoflux boundary conditions can realistically mimic the actual heat transfer in real life where the wall has a thickness, especially when the thermal diffusivity of the fluid and solid are of the same order of magnitude. When such a coupling is considered, it is referred as conjugate heat-transfer. To the authors' knowledge Tiselj et al. (2001) were the first to investigate by DNS the influence of the thermal boundary conditions with a direct comparison between conjugate heat transfer, imposed temperature and imposed heat flux at the wall.

In the present paper, the turbulent heat-fluxes, the temperature variance and the associated budgets obtained for three different boundary conditions (imposed temperature (isoT), imposed heat flux (isoQ), heat exchange coefficient (Robin)) and conjugate heat transfer (Conjug) are compared. In the present conjugate simulations, the ratio of thermal diffusivity and conductivity between the solid and the fluid can be equal to 2, 1 and 0.5: 9 conjugate simulations were performed (the heat flux is imposed at the outer wall of the solid domain).

2. Numerical setup

Present simulations are based on the open-source software Incompact3d

(https://code.google.com/p/incompact3d/) developed at Université de Poitiers and Imperial College London by Laizet et al. (2011). The details of the numerical methods employed here are similar to the ones given in Flageul et al. (2014): high-order compact finite difference schemes in the fluid domain are combined with a mixed finite difference/spectral discretization in the solid domain. The number of computational cells is equal to 256x193x256 and the domain size is [25.6,2,8.52]. For the conjugate heat transfer cases, the solid domain is on top and bottom of the fluid one, as sketched figure 1. For such cases, the equation of evolution of the passive scalar reads

$$\begin{aligned} &\partial_t T + \partial_j (T u_j) = \alpha_f \partial^2_{jj} T \quad \text{in the fluid} \\ &\partial_t T_s = \frac{\alpha_f}{G_1} \partial^2_{jj} T_s \quad \text{in the solid} \\ &T_f = T_s \text{ and } \partial_y T_f = G_2 \partial_y T_s \text{ at the interface} \end{aligned} \tag{1}$$

where G_1 is the ratio of thermal diffusivities α_f / α_s and G_2 is the ratio of thermal conductivities λ_s / λ_f. Based on those dimensionless numbers, the thermal activity ratio K can be defined with $1/K = G_2\sqrt{G_1}$ (Tiselj et al. (2012)). The ratio of thermal diffusivities and conductivities considered here lead to $K = \left[1/2\sqrt{2}; 1/2; 1/\sqrt{2}; 1; \sqrt{2}; 2; 2\sqrt{2}\right]$. Both for $K = 1/\sqrt{2}$ and $K = \sqrt{2}$, two simulations were performed: $(G_1, G_2) = (2,1)$, $(G_1, G_2) = (1/2, 2)$ and $(G_1, G_2) = (1/2, 1)$, $(G_1, G_2) = (2, 1/2)$. Theoretical analysis shows that a very low (resp. high) thermal conductivity in the solid domain is equivalent to an imposed heat-flux (resp. imposed temperature) at the fluid boundary. Therefore, for a given G_1, the lower G_2, the higher K, the closer to the imposed heat flux case. Accordingly as illustrated in figure 1 for the temperature variance, the higher K, the closer "Conjugate" results move to the imposed heat flux case.

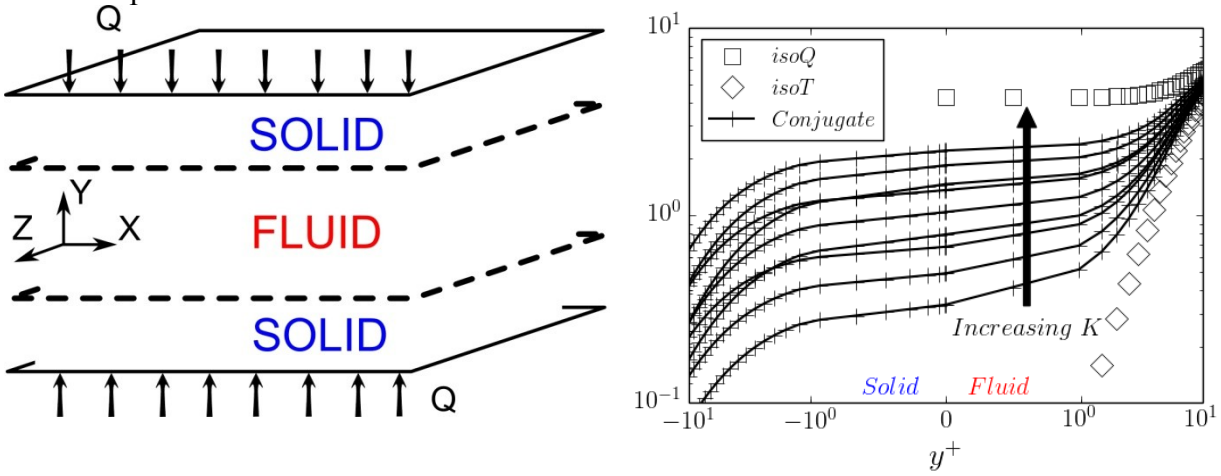


Figure 1: Left: Sketch of the configuration. Right: Temperature variance.

3. Compatibility condition for the non-conjugate cases

One considers a general boundary condition for the temperature at the wall $aT + b\partial_y T = c$. Furthermore, if one assumes the coefficients a, b and c are constant, one obtains:

$$aT + b\partial_y T = c \Rightarrow a\overline{T} + b\partial_y \overline{T} = c \text{ and } aT' + b\partial_y T' = 0 \tag{2}$$

The second condition in (1) can be multiplied by T' or $\partial_y T'$. The resulting 3 equations can be used to build a matrix:

$$\begin{pmatrix} \overline{T} & \partial_y \overline{T} & -1 \\ T'^2 & \partial_y (T'^2)/2 & 0 \\ \partial_y (T'^2)/2 & \partial_y T' \partial_y T' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 4T'^2 \times \partial_y T' \partial_y T' = \partial_y (T'^2) \times \partial_y (T'^2) \quad (3)$$

The determinant of the matrix must vanish to allow non trivial solutions. The resulting relation connects the values (at the wall) of the temperature variance, its derivative and the wall-normal part of the dissipation rate associated with the temperature variance. One can combine the second and the third lines of the matrix in (3) to obtain: $a^2/b^2 = T'^2/\partial_y T' \partial_y T'$. Our Robin boundary condition for $(G_1, G_2) = (1,1)$ was built using this relation with the temperature variance from the isoQ case and the wall-normal part of the dissipation rate from the isoT one. The Robin boundary condition for the other conjugate cases was obtained using cross-multiplication between the one at $(G_1, G_2) = (1,1)$, and the ratio $T'^2/\partial_y T' \partial_y T'$ of the conjugate cases.

4. Compatibility condition for the conjugate cases

Assuming the solid domain is semi-infinite in the wall-normal direction and the case is stationary, one can apply Fourier and Laplace analysis to the solid heat diffusion equation:

$$ik_t \frac{\rho C_p}{\lambda} T = \partial_{yy}^2 T - \left[k_x^2 + k_z^2\right] T \xrightarrow{\text{Laplace}} T = \frac{s T_{y=0} + \partial_y T_{y=0}}{s^2 - \left(k_x^2 + k_z^2\right) - ik_t \frac{\rho C_p}{\lambda}} \quad (4)$$

The denominator can be written as $s^2 - S^2$ with $S^2 = k_x^2 + k_z^2 + ik_t \rho C_p / \lambda$. Applying an inverse Laplace transform leads to a compatibility condition between the wall-normal heat flux and the temperature at the wall: $\partial_y T_{y=0} \pm S T_{y=0} = 0$. The sign in the expression depends on the sign of the real part of S and on the orientation of the y-axis. This condition is a product in the spectral space, which is equivalent to a convolution in physical space. If one were to neglect the dependency of S on k_x, k_z and k_t, the quadratic norm of the compatibility condition would be $1/S^2 = T'^2/\partial_y T' \partial_y T'$. As this ratio is used to define our Robin boundary condition, there is strong connection between the conjugate cases and the Robin ones. Using a Robin boundary condition with constant coefficients, one can imitate conjugate heat transfer but neglect the non-local effects (i.e. the convolution).

5. Results

In figure 2, the temperature variance obtained for the conjugate cases and the Robin ones are in between the isoT and the isoQ one. There is a remarkable agreement between the conjugate cases and the Robin ones. It is similar for the dissipation rate associated with the temperature variance, although the agreement between the Robin case and the conjugate ones is degraded for $y^+ \leq 7$. For the ratio of thermal properties considered in the present conjugate simulations, the temperature variance and the associated dissipation rate depends only on the thermal activity ratio K.

The one point correlation coefficient associated with the turbulent heat flux $< u'_j T' >$ is $< u'_j T' > / \left(u_{jRMS} T_{RMS}\right)$. In figure 3, the one point correlation coefficient associated with the

wall-normal turbulent heat flux obtained with conjugate heat transfer and a Robin boundary condition lies in between the isoT and isoQ cases. There is a good agreement between the Robin case and the conjugate ones, although the agreement is more qualitative for $y^+ \leq 3$. The one point correlation coefficient associated with the streamwise turbulent heat-flux obtained with conjugate heat transfer and a Robin boundary condition lies in between the isoT and isoQ cases. The Robin cases are however now very close to the isoT one. In addition, for a given thermal activity ratio, the one point correlation coefficient for the conjugate cases does not overlap (cases $K = 1/\sqrt{2}$ and $K = \sqrt{2}$). Therefore, the turbulent heat fluxes depends both on K and G_1, even if the temperature variance and the associated dissipation rate depends only on K.

In figure 4, the two-point streamwise autocorrelation of the temperature at the wall for the Robin cases is lower than the conjugate and isoQ ones. Oppositely, the two-point streamwise autocorrelation of the wall-normal heat flux at the wall for the Robin cases is higher than the conjugate and isoT ones. As the coefficients in the Robin boundary condition are constants, the autocorrelation of the temperature and wall-normal heat flux are identical. This is obviously not the case for conjugate heat transfer. This confirms the failure of a Robin boundary condition with constant coefficients to mimic the non-local aspects of conjugate heat transfer.

In figure 5, the two point spanwise autocorrelation of the temperature and wall-normal heat flux at the wall show a similar trend, although the impact of the thermal boundary condition is less severe.

In figure 2, the temperature variance in the fluid domain overlap for the simulations at $K = 1/\sqrt{2}$ and $K = \sqrt{2}$. As shown figure 6, this is not the case in the solid domain. This leads to distinct second derivatives of the temperature variance in the solid domain (for a given thermal activity ratio K). In the budgets of the temperature variance in the solid domain, ε_θ balances the molecular diffusion. The small difference observed on θ^2 in the solid domain leads to a larger difference on $\varepsilon_{\theta,s}$.

The relative contribution to ε_θ of its wall-normal part is $\partial_y T' \partial_y T' \big/ \partial_i T' \partial_i T'$. As shown figure 7 (left), in the fluid domain, the wall-normal part of $\varepsilon_{\theta,f}$ is dominant in the near-wall region for the conjugate, Robin and isoT cases. Therefore, in the vicinity of the wall, for the conjugate and Robin cases, the value of $\varepsilon_{\theta,f}$ is closer to the isoQ case while its anisotropy is closer to the isoT case. Using the continuity of temperature and heat-flux at the fluid-solid interface and the budgets of the temperature variance in the fluid and solid domains leads to the interface condition:

$$2\partial_y T_f^{'} \partial_y T_f^{'} \left(1 - \frac{\lambda_f^2}{\lambda_s^2}\right) = \partial_{yy}\left(T_f^{'2}\right) - \partial_{yy}\left(T_s^{'2}\right) = \frac{\varepsilon_{\theta,f}}{\alpha_f} - \frac{\varepsilon_{\theta,s}}{\alpha_s} \Leftrightarrow \frac{\partial_y T_f^{'} \partial_y T_f^{'}}{\partial_i T_f^{'} \partial_i T_f^{'}} \left(1 - \frac{1}{G_2^2}\right) = 1 - G_1 \frac{\varepsilon_{\theta,s}}{\varepsilon_{\theta,f}} \tag{5}$$

Assuming the wall-parallel contribution to $\varepsilon_{\theta,f}$ is negligible at the fluid-solid interface leads to:

$$\frac{\varepsilon_{\theta,s}}{\varepsilon_{\theta,f}} = \frac{1}{G_1 G_2^2} = K^2 \tag{6}$$

This is in good agreement with our results: the higher K, the higher $\varepsilon_{\theta,s} \big/ \varepsilon_{\theta,f}$.

In figure 7 (right), the temperature variance in the solid domain near the fluid-solid interface

seems to overlap when the abscissa and ordinate axes are rescaled with G_2 and K respectively. However, the focus on the wall-value indicates large deviations.
The relative contribution of the wall-normal part of $\varepsilon_{\theta,f}$ at the wall as a function of K seems linear with a slope of -0.19 for the ratio of thermal properties considered in this study. However, there are few chances for this trend to be valid for ratio of thermal properties farther from unity as this relative contribution is bounded in [0,1].

6. Discussion

On the one hand, our results show that a Robin boundary condition can imitate accurately conjugate heat-transfer: the temperature variance and the associated budgets are in good agreement. On the other hand, the one point correlation coefficient associated with the streamwise turbulent heat flux and the streamwise autocorrelations at the wall show that there remains a difference between conjugate and non-conjugate heat-transfer.
From section 4, in case of conjugate heat transfer, there is a compatibility condition that is a product in the spectral space, which is equivalent to a convolution in the physical space. Such a condition is non-local and cannot be imitated by a Robin boundary condition with constant coefficients. The theoretical failure of such a Robin boundary condition to mimic the non-local aspect of conjugate heat transfer is confirmed by our results.
The relatively high autocorrelation of the temperature at the wall for the conjugate cases at large separations may be explained by the periodicity and the limited streamwise extension of our domain, even if it is longer than the reference ones (Kasagi et al. 1992, Tiselj et al. 2001). Very large scale thermal structures may also be intrinsic to conjugate heat transfer: those are the only ones able to penetrate deep inside the solid domain. For instance, at $K = 1/\sqrt{2}$, the streamwise autocorrelation of the temperature at the wall at the largest separation is 0.19 for $(G_1, G_2) = (2,1)$ and 0.14 for $(G_1, G_2) = (1/2,2)$. The higher G_1, the lower the thermal diffusion in the solid domain, the more important are very large scale thermal structures.

7. Conclusion

From a RANS perspective, a Robin boundary condition with constant coefficients seems able to mimic conjugate heat transfer: the second moments and their budgets are satisfactorily reproduced (fig. 2). From a LES perspective, this is no longer the case, as shown by the streamwise autocorrelations of the temperature and wall-normal heat-flux at the wall (fig. 4).
Those conclusions may not be valid for ratio of thermal properties farther from unity than the ones considered here. When the Prandtl number is 0.01, the temperature variance at the wall depends both on K and G_1 (Tiselj et al. (2012)).
Following the analysis developed in section 4, a Robin boundary condition with varying coefficient could offer a better potential to mimic conjugate heat-transfer. However, the coefficients should depend on values of the temperature and wall-normal heat flux at the wall in a non-local fashion: both previous time-steps and surrounding nodes should be considered to mimic the convolution accurately.

7. Acknowledgements

The authors thank the French National Research Agency (ANRT) and EDF R&D for its contribution in funding the present study (CIFRE 2012/0047) and providing computational time on Zumbrota supercomputer (IBM – Blue-geneQ) respectively.

References

1. H. Abe, R. A. Antonia, and H. Kawamura. Correlation between small-scale velocity and scalar fluctuations in a turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 627, 1-32, 2009.
2. C. Flageul, S. Benhamadouche, E. Lamballais, and D. Laurence. DNS of channel flow with conjugate heat transfer-Budgets of turbulent heat fluxes and temperature variance. In *10th International ERCOFTAC Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements*, 2014 (to appear in Int. J. of Heat and Fluid Flow).
3. N. Kasagi, Y. Tomita, and A. Kuroda. Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow. *Journal of heat transfer*, 114(3), 598-606, 1992.
4. H. Kawamura, K. Ohsaka, H. Abe, and K. Yamamoto. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 19(5), 482-491, 1998.
5. S. Laizet, and N. Li. Incompact3d: A powerful tool to tackle turbulence problems with up to O (10^5) computational cores. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 67(11), 1735-1757, 2011.
6. I. Tiselj, R. Bergant, B. Mavko, I. Bajsić, and G. Hetsroni. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with heat conduction in the solid wall. *Journal of heat transfer*, 123(5), 849-857, 2001.
7. I. Tiselj, and L. Cizelj. DNS of turbulent channel flow with conjugate heat transfer at Prandtl number 0.01. *Nuclear Engineering and Design*, 253, 153-160, 2012.

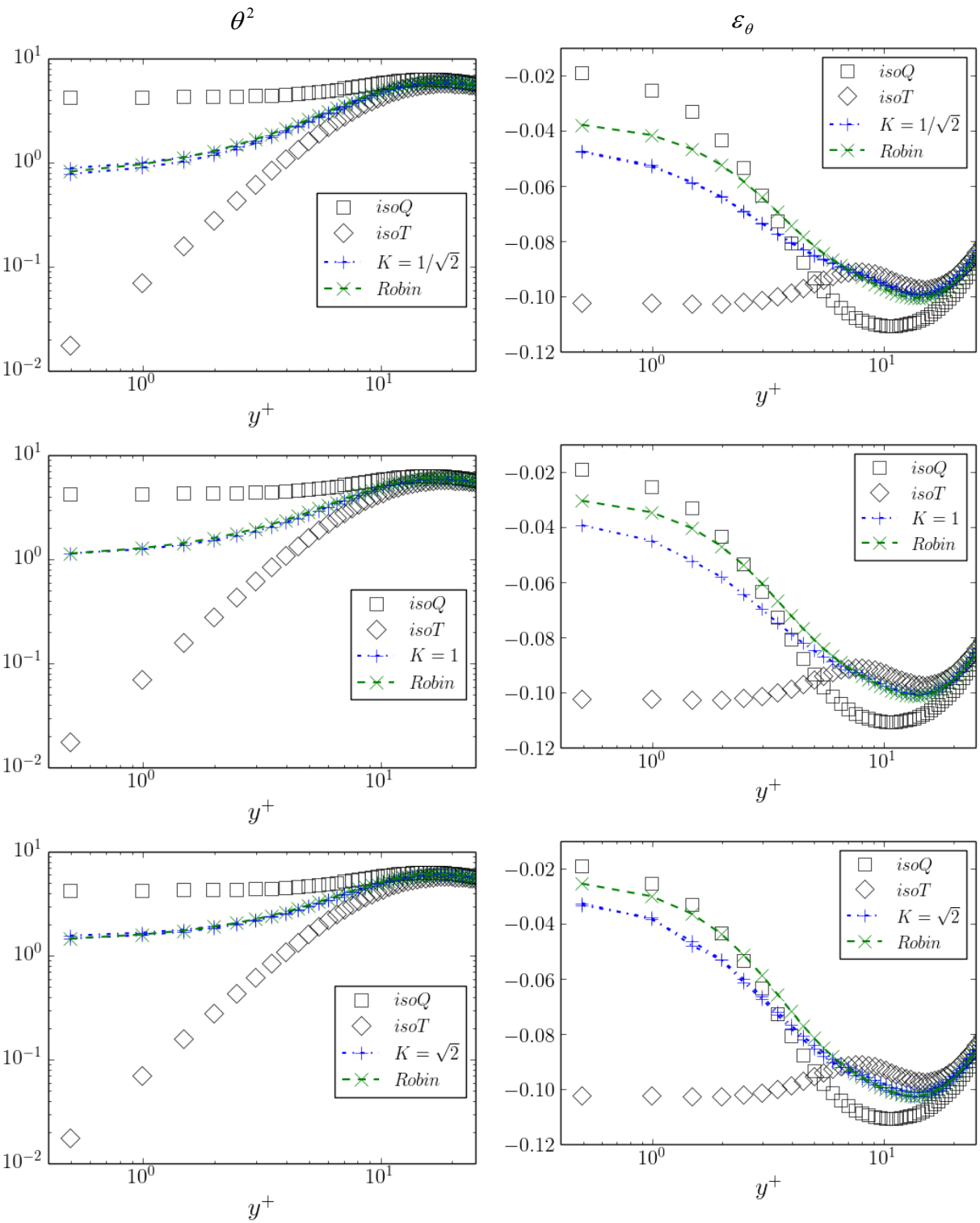


Figure 2. Left: Temperature variance. Right: Associated dissipation rate. Top: $K = 1/\sqrt{2}$. Middle: $K = 1$. Bottom: $K = \sqrt{2}$. +: Conjugate. ×: Robin.

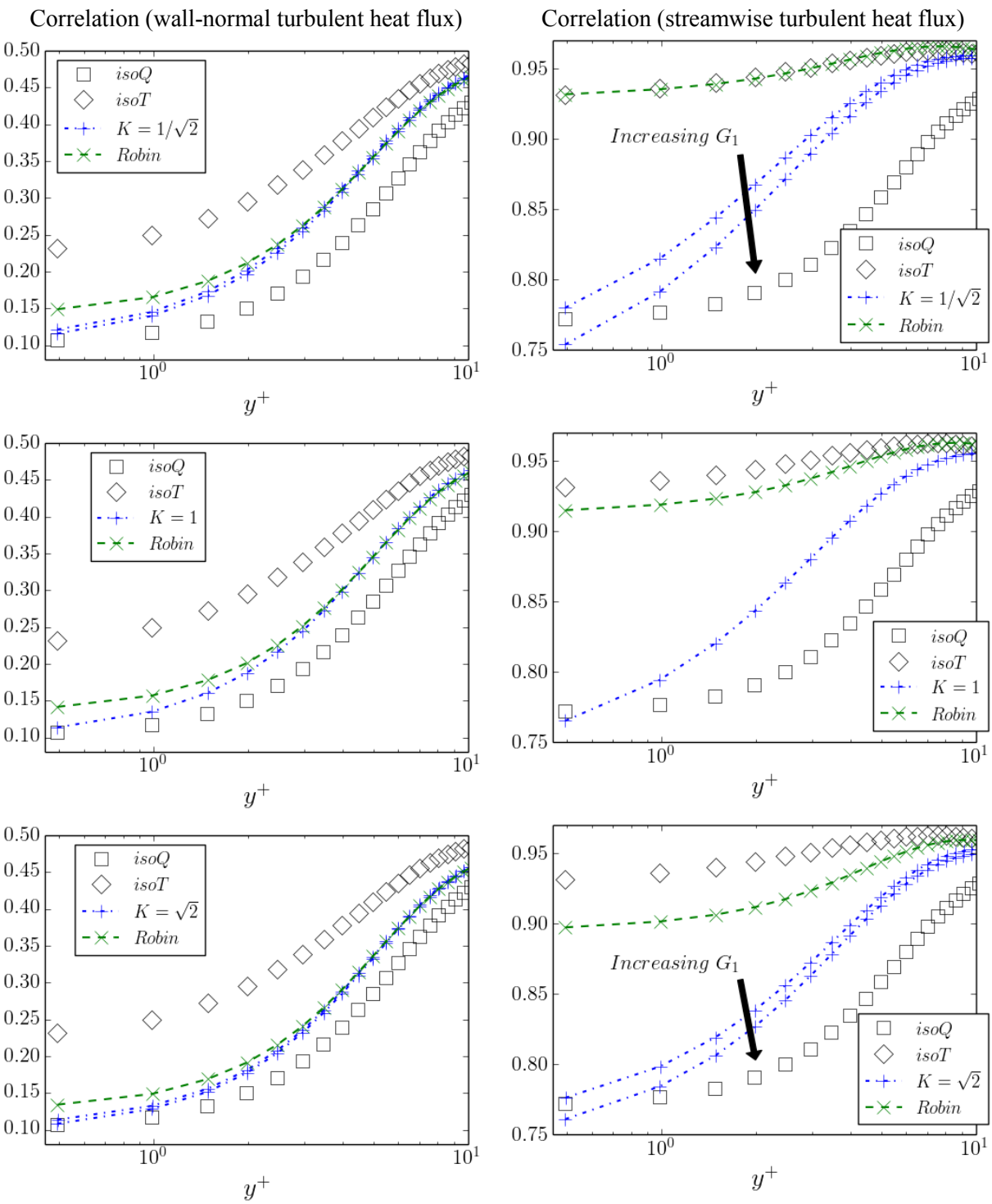


Figure 3: One point correlation coefficient associated with the turbulent heat flux. Left: Wall-normal turbulent heat flux. Right: Streamwise turbulent heat flux. Top: $K = 1/\sqrt{2}$. Middle: $K = 1$. Bottom: $K = \sqrt{2}$. +: Conjugate. ×: Robin.

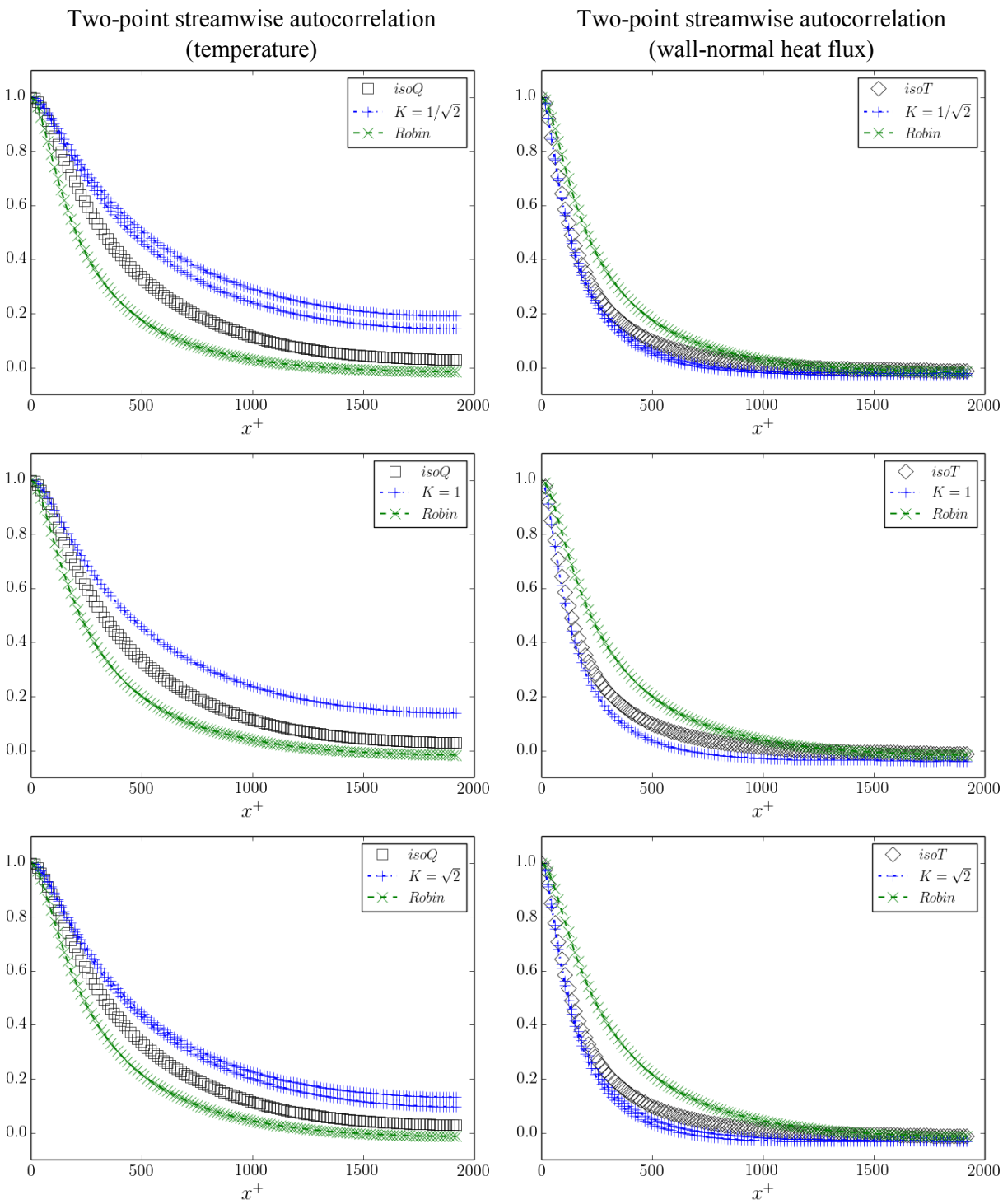


Figure 4: Two-point streamwise autocorrelation at the wall. Left: Temperature. Right: Wall-normal heat flux. Top: $K = 1/\sqrt{2}$. Middle: $K = 1$. Bottom: $K = \sqrt{2}$. +: Conjugate. ×: Robin.

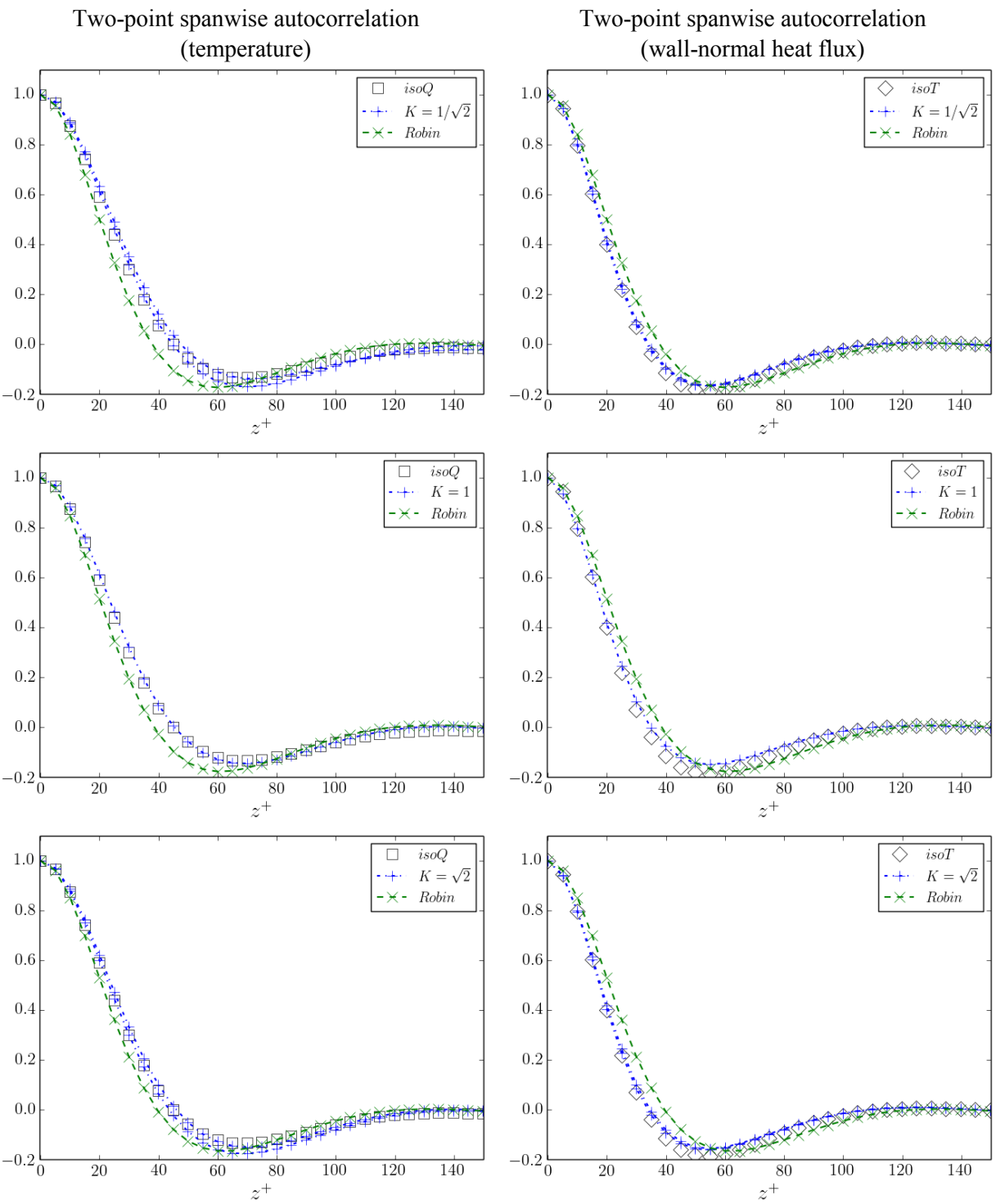


Figure 5: Two-point spanwise autocorrelation at the wall. Left: Temperature. Right: Wall-normal heat flux. Top: $K = 1/\sqrt{2}$. Middle: $K = 1$. Bottom: $K = \sqrt{2}$. +: Conjugate. ×: Robin.

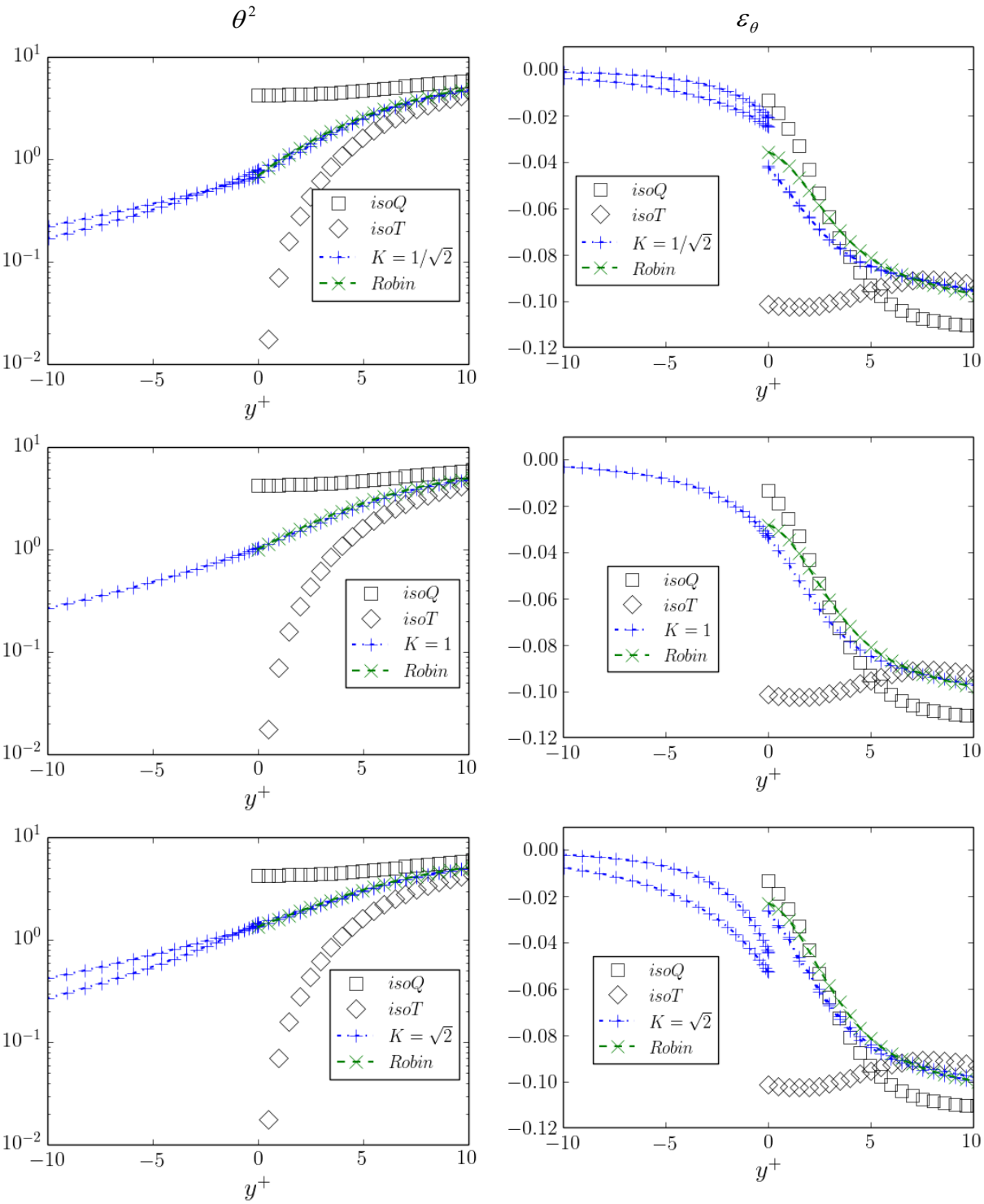


Figure 6: Left: Profile of θ^2 around the fluid-solid interface. Right: Profile of ε_θ around the fluid-solid interface.

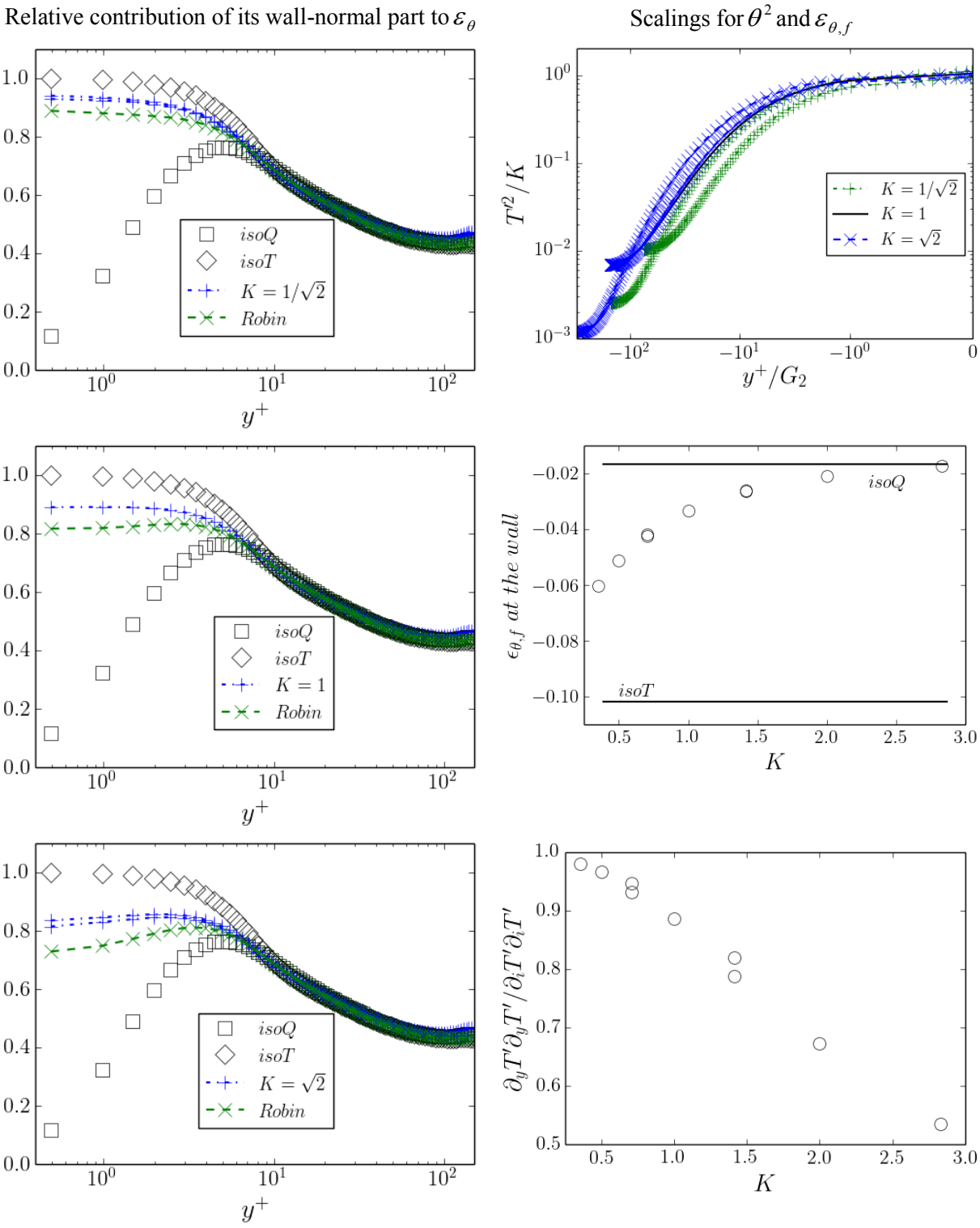


Figure 7: Left: Relative contribution to ε_θ of its wall-normal part. Right: Scaling for θ^2 in the solid domain and for $\varepsilon_{\theta,f}$ and its wall normal contribution to at the fluid-solid interface.