



Approximation numérique par chaos de Wiener de quelques EDPS

Johann Nicod

► To cite this version:

Johann Nicod. Approximation numérique par chaos de Wiener de quelques EDPS. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Est, 2015. Français. NNT : 2015PESC1129 . tel-01292585

HAL Id: tel-01292585

<https://theses.hal.science/tel-01292585>

Submitted on 23 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ
— PARIS-EST



Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de
docteur de l'Université Paris-Est

Spécialité : Mathématiques

soutenue publiquement par

Johann Nicod

le 10 décembre 2015

**Approximation numérique par chaos de
Wiener de quelques EDPS**

devant le jury composé de

M.	Vlad Bally,	Examineur (Président)
Mme	Anne de Bouard,	Rapporteur
M.	Laurent Di Menza,	Rapporteur
M.	Antoine Lejay,	Examineur
M.	Jacques Printems,	Directeur de Recherche
M.	Bruno Saussereau,	Examineur

Résumé

Dans cette thèse¹, nous nous intéresserons à l'approximation numérique en loi des équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS). Ces équations peuvent être vues comme une généralisation du concept d'équations aux dérivées partielles (EDP) déterministes, équations servant à modéliser de nombreux phénomènes physiques, biologiques ou encore économiques. L'aspect stochastique apparaît avec la volonté de prendre en compte des données que l'on ne connaît pas de façon déterministe et dont nous avons uniquement des informations statistiques. Ces données peuvent être aussi bien un coefficient de l'équation qu'un terme de force. La discrétisation de cette source d'information bruitée pose le problème de leur troncature.

Une première méthode populaire (Monte Carlo) consiste à simuler le bruit afin d'obtenir une famille de trajectoires du bruit, puis à résoudre pour chacune de ces trajectoires l'équation associée, afin de pouvoir faire des statistiques sur l'ensemble des solutions obtenues. Elle offre l'avantage d'être relativement simple à mettre en œuvre, mais se pose alors des problèmes de lenteur de convergence dûs au coût unitaire des intégrations numériques de chaque trajectoire qui dépend en général de la méthode déterministe utilisée, de la dimension du problème et de la variance des moments que l'on souhaite estimer.

Une deuxième approche est, dans la philosophie des méthodes spectrales, la décomposition du bruit sur une base polynômiale adaptée à une mesure de référence (ici la mesure de Wiener). C'est la méthode principalement utilisée dans cette thèse. Nous décrirons comment à l'aide d'une décomposition dite en chaos il est possible d'obtenir des statistiques de solutions d'EDPS, mais également comment on peut se servir d'une telle décomposition afin de réduire la variance dans une méthode de Monte Carlo.

1. Version couleur disponible à l'adresse : perso-math.univ-mlv.fr/users/nicod.johann/These.pdf

Abstract

In this thesis, we will be interested by the numerical approximation of SPDEs. Such equations can be seen as generalization of deterministic PDEs whose coefficients have been perturbed in order to take into account incertainties. Usually those incertainties are only known through their statistical properties. This kind of data could be included into the coefficients of the PDE or can be modeled through an infinite dimensional diffusion term in the second member. The main purpose of the numerical investigations concerning SPDEs is the estimation of the joint probability distribution of its solution, and practically the estimation of some moments or some event's probabilities. The discretization of the noise's information in the small scales implies a large number of additional parameters and yields, in general, problems.

The first and most popular method used usually is the Monte Carlo method. It relies upon the simulation of a large number of trajectories of the noise followed by the numerical integration of the associated SPDE's solution. Its main advantage is its simplicity and its capacity to be parallelized. Nevertheless, its main drawback is the rather slow convergence due to the unit cost of numerical integration of each trajectory which depend on the deterministic method used, the problem's dimension. Also the convergence can be slowed down because of the large variance of the statistical moments we want to estimate.

A second approach consists in the chaos expansion of the coefficients based on a reference measure (Wiener's measure e.g.). It will be the main purpose of this thesis. We will describe how such an expansion can be made possible in the SPDEs' framework, through the examples of the KdV and Burgers stochastic equations, in order to obtain statistical moments of the solutions but also in order to reduce variance within a Monte Carlo method.

Remerciements

C'est tout naturellement que ces remerciements commencent par mon directeur Jacques Printems sans qui cette thèse n'aurait jamais existé, ses remarques ont toujours été d'une grande qualité et nos échanges très agréables. Merci pour tout ce que vous avez fait !

Je tiens à faire part de ma gratitude envers Anne de Bouard et Laurent Di Menza pour avoir accepté de donner de leur temps pour rapporter ma thèse, je les remercie pour leurs remarques constructives et le regard avisé qu'ils ont porté sur mon manuscrit. Merci également aux examinateurs Vlad Bally, Antoine Lejay et Bruno Saussereau d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je tiens également à remercier ceux qui avant ma thèse m'ont permis d'avoir une bonne formation, de développer mon sentiment d'appartenance à l'UPEC et un goût certain pour le milieu universitaire, trois éléments sans lesquels je ne me serais très probablement pas lancé dans cette aventure qu'est la thèse.

Merci donc à l'ensemble des enseignants du LAMA et du LACL de m'avoir donné de bonnes bases pour pouvoir appréhender ma thèse, mercis particuliers à Amine Asselah et Francois Vigneron qui m'ont permis de découvrir avant ma thèse mon goût prononcé pour l'enseignement en me confiant leurs TD.

Merci à l'ensemble du SCUIO-BAIP de l'UPEC, service avec qui j'ai travaillé

pendant des années avec grand plaisir et qui m’a permis d’avoir une autre vision de l’université, j’y ai trouvé du soutien quand j’en avais besoin.

Merci également à l’ensemble de la Fédération des Associations de Créteil pour tous les bons moments passés, merci à Thibault Perrin de m’avoir offert la possibilité d’intégrer le bureau malgré mon statut de l’époque;-).

Merci à REDOC Paris Est et encore désolé de vous avoir fait mal à la tête avec de très longs mails mais c’était pour notre bien;-).

Je souhaite également remercier tous les membres du LAMA, laboratoire où j’ai bénéficié de conditions de travail idéales, merci tout particulier à ceux qui ont préparé leur thèse en même temps que moi. La tradition veut que je les cite de façon exhaustive, mais face à la peur d’en oublier et de devoir être hypocrite, je préfère m’abstenir. En tout cas je leur souhaite à tous et cette fois ci de façon exhaustive, plein de courage, de chance et bonheur que ce soit pour leur doctorat ou pour la suite. Merci tout particulier à une boîte de feutres pour tableau blanc d’avoir essayé régulièrement de me remettre dans le chemin que son lanceur jugeait être le bon... (à tort quand il s’agissait d’humour mais bon;-)).

Cette thèse marque la fin de mon parcours de 10 ans à ~~Paris XII~~ ~~Paris 12~~ l’UPEC, université où j’ai commencé ma vie d’étudiant, ma vie d’enseignant, ma vie de chercheur, ma vie d’associatif, ma vie d’élu... Certaines vies s’achèvent ici, d’autres sont amenées à continuer ailleurs... Dans l’immédiat j’ai l’impression de perdre beaucoup mais durant toutes ces vies que j’ai eu à l’UPEC je me suis fait un nombre très important d’amis et c’est sûrement ce qu’il faut retenir.

Et enfin merci à mes parents qui ont été là dès les premiers instants et qui ont toujours été là pour me faciliter la vie.

Table des matières

Introduction Générale	9
1 Analyse dans l'espace de Wiener	15
1.1 Introduction	15
1.2 Rappels sur la dérivée de Malliavin	18
1.3 Décomposition en chaos de Wiener	20
1.3.1 Décomposition en chaos	20
1.3.2 Un changement d'indice	22
1.3.3 Chaos et dérivée de Malliavin	24
1.3.4 Application au produit en chaos	29
2 Approximation en chaos d'EDPS	33
2.1 Introduction	33
2.2 Comportement des équations déterministes	34
2.2.1 Équation de la chaleur	34
2.2.2 Équation de Burgers	36

2.2.3	Équation de Korteweg-de Vries	39
2.3	Processus de Wiener, intégrales stochastiques et bruit blanc	42
2.3.1	Processus de Wiener cylindrique	43
2.3.2	Bruit blanc espace-temps	44
2.3.3	Bruit corrélé en espace	45
2.4	Présentation de quelques EDP stochastiques	47
2.4.1	Équation de Korteweg-de Vries stochastique	47
2.4.2	Équation de Burgers stochastique	50
2.5	Méthode de résolution numérique	51
2.5.1	Partie déterministe	51
2.5.2	Partie stochastique	61
2.6	Résultats numériques	71
2.6.1	Équation de la chaleur stochastique	72
2.6.2	Équation de Burgers stochastique	90
2.6.3	Équation de Korteweg-de Vries stochastique	113
2.6.4	Fonctionnelles non polynomiales	131
3	Réduction de variance à l'aide des chaos	135
3.1	Variance de l'algorithme de Monte-Carlo	135
3.2	Utilisation des Chaos de Wiener	139
3.2.1	Bruit blanc temporel et bruit blanc spatial	139
3.3	Résultats numériques	141
3.3.1	Approximation des basses Fréquences	142

3.3.2 Réduction de variance	148
4 Problématique d'implémentation	157
4.1 Produit de Chaos	157
4.2 Structure de données utilisée	160
4.3 Parallélisation	163
4.4 Machines Utilisées	166
4.5 Équations Utilisées lors des tests numériques	167
4.6 Opérateurs d'affectation composé	168
4.7 Code adaptatif : Élagage automatique de l'Arbre	169
4.8 Prédiction polynomiale	173

Introduction Générale

Les équations aux dérivées partielles (EDP) et leurs variantes stochastiques (EDPS) sont omniprésentes en modélisation en physique. En effet, beaucoup d'effets dûs aux petites échelles, ou liés aux incertitudes des modèles, difficiles à appréhender en général en utilisant des méthodes traditionnelles, peuvent être naturellement modélisés par des processus stochastiques. La motivation principale aux yeux du physicien est la détermination, sinon son approximation, de la loi des solutions de ces équations, solutions vues comme des variables aléatoires indexées par les variables de temps et d'espace.

Avant de passer en revue les différentes méthodes existantes dans la littérature, commençons par classer grossièrement ces EDPS en deux grandes familles. On distingue un premier groupe d'EDP dont les coefficients ont été bruités afin de modéliser les incertitudes du modèle ou du milieu physique, on parle alors d'EDP à coefficients aléatoires. On peut penser par exemple à des équations aux dérivées partielles elliptiques à coefficients stochastiques, avec des applications aux phénomènes de vibrations aléatoires, comme l'activité sismique (voir des exemples dans [3, 30, 44]). Dans le second groupe, on peut distinguer les EDP où le terme de bruit est un terme de source (ou un forçage aléatoire) placé dans le second membre traduisant une diffusion et qui peuvent être vues comme une généralisation des EDS en dimension infinie [15]. Dans le premier groupe, les coefficients aléatoires ont souvent une longueur de corrélation (spatiale) dépendant des propriétés des matériaux. Dans le second groupe, les longueurs

de corrélation sont plus petites, voire peuvent être rendues nulles pour des questions d'intérêt théorique.

L'étude en loi de ces équations implique en général la détermination de la loi jointe de ces solutions, ce qui est en général difficile. C'est pourquoi on se contente souvent du calcul de quelques moments, ou bien de la probabilité de tel ou tel événement. Dans le cas général, on est donc amené au calcul de quantités comme par exemple $\mathbb{E}[\varphi(X_T)]$ ou $\mathbb{E}[\varphi(\int_0^T X_s ds)]$ où X_s désigne la solution de l'EDPS au temps s et où φ est une fonctionnelle à valeurs réelles.

Une méthode populaire pour estimer ces quantités est la méthode de Monte-Carlo qui nécessite l'intégration numérique de nombreuses trajectoires $(X_t^{(i)})_{t \in [0, T], i=1, \dots, n}$ de la solution et le calcul des moyennes :

$$(0.0.1) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \varphi(X_t^{(i)}) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi \left(\int_0^T X_s^{(i)} ds \right).$$

Cette méthode est simple à mettre en place et peut se paralléliser, mais malheureusement, un grand nombre de simulations est en général nécessaire. En effet, il est bien connu que sous des hypothèses convenables d'intégrabilité ($\varphi(X_T)$ de carré intégrable), la convergence de (0.0.1) est seulement en $n^{-\frac{1}{2}}$. Ce qui peut apparaître coûteux sachant que le coût unitaire de l'intégration numérique d'une trajectoire dépend de la dimension du problème, de la méthode déterministe utilisée pour intégrer l'EDP, etc. Ce coût n'est pas négligeable, surtout si l'EDP comporte des termes non linéaires impliquant des techniques d'approximation de type point fixe ou Newton à chaque itération en temps.

Différents auteurs ont proposés des alternatives à cette méthode. Dans le cas d'EDP elliptiques à coefficients aléatoires, dans [2, 4, 20, 24], l'EDP aléatoire initiale est remplacée par une EDP déterministe, où la dépendance par rapport au bruit est modélisée par une variable dans $\mathbb{R}^N$, où N dépend des propriétés statistiques des coefficients

(penser à l'ordre de troncature de la série de Karhunen-Loève des fonctions de covariance des coefficients par exemple). Les auteurs diffèrent selon la méthode utilisée pour discrétiser cette dépendance par rapport au bruit. Dans [2, 20], on utilise une méthode de Galerkin et dans [4, 24], des polynômes de Hermite sont utilisés. On peut remarquer dans les deux cas que l'approximation sera d'autant meilleure que la série de Karhunen-Loève converge rapidement et donc que les corrélations spatiales sont fortes.

L'objet principal de cette thèse est l'utilisation de méthodes numériques similaires dans le cadre d'EDPS au sens classique, c.-à-d. vues comme des diffusions dans des espaces fonctionnels (celles du second groupe). Nous nous baserons sur une approche spectrale développée dans le cas d'EDPS linéaires dans [36, 37]. Les auteurs y proposent une méthode d'approximation basée sur la décomposition en chaos de Wiener dans le cas d'EDPS paraboliques. Cette approche a la particularité de distinguer sur un plan numérique, de façon explicite et efficace, les effets déterministes (propres à la partie déterministe de l'EDPS, c.-à-d. sa dérive) des effets dûs au bruit. En particulier, elle permet de remplacer l'EDPS initiale par un système d'EDPs déterministes (appelé le propagateur) portant sur les coefficients en chaos de la solution. Dans le cas purement linéaire, le système est diagonal. Dans [36], où les auteurs s'intéressent à l'équation de Zakai, le système est triangulaire.

Les difficultés arrivent lorsque l'on s'intéresse aux EDPS semi-linéaires où le terme non linéaire induit un couplage entre les coefficients de chaos au niveau du système de propagation. Ce phénomène n'est pas nouveau et est déjà présent pour les méthodes spectrales dans le cas des équations de Navier-Stokes dans les études numériques de la turbulence et pose plus généralement le problème de la fermeture des équations. Cette technique fut néanmoins généralisée dans le cas non linéaire pour des besoins numériques, mais aussi théoriques, d'étude de la turbulence [38]. Dans [28], cette technique est appliquée au cas de l'équation de Burgers et Navier-Stokes 2D stochastiques pour des termes de bruit qui ne dépendent que du temps, et dans [35] au cas de l'équation

de Korteweg–de Vries stochastique pour des bruits plus généraux. Dans les deux cas, les moments calculés par chaos sont plus précis que ceux donnés par la méthode de Monte-Carlo mais des problèmes de convergence se posent pour des horizons de temps longs.

Le plan de cette thèse est le suivant. Après quelques rappels dans le premier chapitre de notions d’analyse dans l’espace de Wiener, nous aborderons au chapitre 2 la décomposition en chaos pour la résolution numérique d’EDPS. La méthode de résolution sera testée sur deux équations : l’équation de Burgers et de Korteweg-de Vries stochastique avec bruits additifs et multiplicatifs. Nous y testerons la méthode dans le cas où des solutions explicites sont connues (cas où le terme de bruit est indépendant de la variable d’espace). Dans le cas contraire, la méthode sera comparée à la méthode de Monte-Carlo.

Le chapitre 3 sera quant à lui une proposition de réponse à deux problématiques :

- comme nous l’aurons vu, la méthode de résolution présentée dans le chapitre 2 a une très forte complexité numérique, ce qui nous oblige à travailler sur un ensemble de chaos de taille réduite (nombre de fréquences utilisées et ordre des polynômes) ;
- la méthode de Monte-Carlo possède une variance trop élevée en général pour obtenir une précision similaire en un temps équivalent.

L’idée principale de ce chapitre est de mixer les deux méthodes en utilisant la méthode en chaos pour une des composantes du bruit pouvant être traitée avec une troncature numériquement acceptable (composante basse fréquence). La méthode de Monte-Carlo servira, quant à elle, au traitement de la composante manquante du bruit (la composante haute fréquence).

Enfin, le dernier chapitre sera le lieu de présentation de différentes problématiques d’implémentation que cette thèse a fournies, ainsi que diverses astuces d’implémentation utilisées dans le code.

Chapitre 1

Quelques rappels sur l'analyse dans l'espace de Wiener

Ce chapitre comporte des rappels sur l'analyse dans l'espace de Wiener avec un parti pris pour la décomposition en chaos d'une variable aléatoire (de carré intégrable). En particulier, l'accent est mis sur les liens entre coefficients en chaos et dérivées de Malliavin. On montre finalement que ces liens peuvent avoir une déclinaison numérique dans l'expression du produit de deux variables aléatoires.

Ce chapitre est en grande partie indépendant de ce qui suit et peut être considéré comme une annexe.

1.1 Introduction

La modélisation de l'incertitude dans l'étude des phénomènes aléatoires par des variables aléatoires de carré intégrable est très ancienne et on peut en faire remonter l'origine dans les travaux de Gauss au début du XIX^e siècle. Plus proche de nous, dans son article séminal de 1938, N. Wiener [52] (voir également [40, 47] pour une

version plus moderne) introduit la notion de chaos homogène pour décrire des variables aléatoires de carré intégrable mesurable par rapport aux trajectoires d'un mouvement brownien. Partant d'une mesure de référence (la mesure de Wiener), l'auteur modélise toute v.a. de carré intégrable comme fonctionnelle d'un mouvement brownien sur un certain intervalle $[0, T]$ à l'aide de séries polynomiales dites séries en chaos homogène de Wiener.

Plus généralement, il existe trois grandes classes de représentations de telles fonctionnelles :

- par des intégrales stochastiques (à intégrande stochastique (prévisible)) ;
- par des intégrales de Wiener multiples (à intégrande déterministe) ;
- par approche polynomiale dite aussi en chaos.

Il existe bien sûr des connections profondes entre ces divers types de représentations et on peut en général les considérer comme équivalentes. Déjà dans [52], l'auteur établit le lien entre les intégrales de Wiener itérées et les décomposition en chaos. Plus tard, dans [29], K. Itô développe la même idée en rendant plus commode et facile d'utilisation ces représentations.¹

De nos jours, le calcul de Malliavin introduit dans les années 70 par P. Malliavin (voir [41, 42] pour une bonne introduction) permet de rendre facilement transversales, par le biais de sa notion de dérivée, ces différentes représentations. On peut penser à la formule de Clark-Ocone pour la première et aux formules de Stroock pour la deuxième. Quant à la représentation en chaos, nous verrons qu'il existe des liens entre la transformée de Fourier dans $[0, T]^d$ des dérivées d'ordre d de Malliavin d'une variable aléatoire de carré intégrable et ses coefficients en chaos.

Concrètement, pour ne prendre que l'exemple de la mesure de référence gaussienne, la décomposition polynomiale en chaos de Wiener d'une variable aléatoire, $X : \Omega \rightarrow H$, où H est un espace de Hilbert séparable complexe, définie sur un espace probabilisé

1. En particulier, en travaillant avec des chaos orthogonaux.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de carré sommable $\mathbb{E}\|X\|_H^2 < +\infty$ consiste à remplacer X par la série polynomiale

$$(1.1.1) \quad X(\omega) = X_0 + X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots$$

où $X_0 = \mathbb{E}(X)$ et où les variables $X_r = X_r(\omega)$, $r \geq 1$ sont des séries polynômiales, chacune de degré exactement r , à coefficients dans H et d'indéterminées une même suite de v.a. gaussiennes centrées réduites indépendantes à valeurs complexes.² On indiquera plus loin comment construire les termes de la série (1.1.1) pour une v.a. X donnée.

Sur le plan numérique, la décomposition (1.1.1) permet également de représenter facilement un phénomène aléatoire $X(\omega)$ par un nombre fini de degré de liberté : il suffit de ne garder dans la série générale (1.1.1) que les séries $X_r(\omega)$ de degré r inférieur à un degré maximal d et de ne garder également dans chacune des séries qu'un nombre fini n d'indéterminés (ce qui correspond en général à une troncature en fréquence), ce qui fait pour chaque série $X_r(\omega)$ un nombre C_{n+r-1}^{n-1} de coefficients et au total pour $X(\omega)$

$$\sum_{r=0}^d C_{n+r-1}^{n-1} = C_{n+d}^n = \frac{(n+d)!}{n!d!}$$

degrés de libertés.

Enfin, notons que, bien qu'en général la série (1.1.1) converge pour toute v.a. de carré intégrable (résultat démontré dans [52]), le choix de la mesure de référence (c.-à-d. le choix de la loi des indéterminées) peut influencer la vitesse de convergence des approximations polynomiales lorsque r et n tendent vers l'infini.

Après quelques rappels sur la notion de dérivée de Malliavin, nous aborderons de façon plus formelle la décomposition en chaos de variable aléatoire à valeurs dans des espaces fonctionnels.

2. Dans le cas où $H = L_C^2(0, T)$, les indéterminés peuvent correspondre aux v.a. gaussiennes $\xi_k = \int_0^T m_k(s) d\beta(s)$ avec $m_k(t) = e^{i\frac{2\pi}{T}kt} / \sqrt{T}$ et $\{\beta(t)\}$ un brownien standard. Il y en a une infinité dénombrable et chacune correspond à une fréquence.

1.2 Rappels sur la dérivée de Malliavin

On résume succinctement la notion de dérivée au sens de Malliavin des v.a. de carré intégrable. Le lecteur peut consulter [41] pour plus de détails. Nous n'aborderons que le cas scalaire (unidimensionnel) pour des raisons de simplicité. Le cas de v. a. à valeurs dans un espace de Hilbert sera abordé à titre d'exemple dans la proposition 1.3.7.

On considère dans un premier temps un processus de Wiener standard (unidimensionnel) $\{\beta(t)\}_{t \geq 0}$ adapté à une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$, c.-à-d. où $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité et où $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$. Étant donné une fonction F régulière à valeurs réelles et $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de $L^2(0, T)$, on définit la dérivée de Malliavin de la variable aléatoire réelle régulière suivante

$$(1.2.1) \quad X = F \left(\int_0^T f_1(t) d\beta(t), \dots, \int_0^T f_n(t) d\beta(t) \right)$$

à la date t comme

$$(1.2.2) \quad D_t X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \left(\int_0^T f_1(t) d\beta(t), \dots, \int_0^T f_n(t) d\beta(t) \right) f_i(t).$$

Ainsi, $(D_t X)_{t \in [0, T]}$ est un processus à valeurs dans $L^2(\Omega \times [0, T])$. On note $D : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega \times [0, T])$ l'opérateur qui à $X \in L^2(\Omega)$ associe un tel processus. On note $\mathbb{D}^{1,2}$ la fermeture de l'ensemble des v. a. X de $L^2(\Omega)$ s'écrivant sous la forme (1.2.1) pour la norme suivante

$$\|X\|_{\mathbb{D}^{1,2}} = \left(\mathbb{E}|X|^2 + \int_0^T \mathbb{E}|D_s X|^2 ds \right)^{1/2}.$$

La dérivée de Malliavin à la date t d'une v. a. X , $\mathcal{F}_T$ -mesurable, représente la sensibilité de X , par définition fonctionnelle des trajectoires $\{\beta(s), s \leq T\}$, par rapport aux incréments de β à la date t . En particulier si X est $\mathcal{F}_s$ -mesurable alors $D_t X = 0$ dès que $t \geq s$.

L'opérateur D a, en général, toutes les bonnes propriétés des opérateurs de dérivation. En particulier, la règle de dérivation en chaîne s'applique. Pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ par

exemple, $\varphi(X) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et on a

$$(1.2.3) \quad D(\varphi(X)) = \varphi'(X)DX.$$

Enfin, citons le résultat d'intégration par partie suivant. Pour $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $f \in L^2(\Omega \times [0, T])$ telle que $f(t) \in \mathbb{D}^{1,2}$ pour tout $t \in [0, T]$, $(f(t))_{t \in [0, T]}$ progressivement mesurable³, on a

$$(1.2.4) \quad \mathbb{E} \left(X \int_0^T f(t) d\beta(t) \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^T D_t X f(t) dt \right)$$

Dérivées d'ordre supérieures

On peut itérer l'opérateur D pour des v.a. X de type (1.2.1). Pour $k \geq 1$, on définit ainsi un processus $D^k X = (D_t^k X)_{t \in [0, T]^k}$ à valeurs dans $L^2(\Omega, L^2(0, T)^{\otimes k})$, c.-à-d. indexé par les k -uplets $t = (t_1, \dots, t_k) \in [0, T]^k$. De même, l'opérateur $D^k : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega \times [0, T]^{\otimes k})$ est fermable pour la norme

$$\|X\|_{\mathbb{D}^{k,2}} = \left(\mathbb{E}|X|^2 + \int_{[0, T]^k} \mathbb{E}|D_t^k X|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Le fait que les dérivées d'ordres supérieures soient indexées par des n -uplets fait que les formules standards (comme Leibniz) doivent être adaptées. Pour cela, pour tout $p \leq r$, notons $\mathcal{S}_r^p$ l'ensemble des permutations sur $\{1, \dots, r\}$ telles que

$$(1.2.5) \quad 1 \leq \sigma(1) < \dots < \sigma(p) \leq r, \quad 1 \leq \sigma(p+1) < \dots < \sigma(r) \leq r\}.$$

Il s'agit de paramétrer à l'aide de permutations l'ensemble des combinaisons à p éléments parmi r éléments. On a alors la formule de Leibniz suivante

Proposition 1.2.1. *Soit $X, Y \in \mathbb{D}^{r,2}$ alors $XY \in \mathbb{D}^{r,2}$ et*

$$(1.2.6) \quad D_t^r(XY) = \sum_{p=0}^r \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r^p} D_{t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(p)}}^p(X) D_{t_{\sigma(p+1)}, \dots, t_{\sigma(r)}}^{r-p}(Y).$$

Remarquons dans (1.2.6) que l'on a bien $|\mathcal{S}_r^p| = C_n^p = \frac{r!}{p!(r-p)!}$ termes dans la somme en σ et $\sum_{p=0}^r C_n^p = 2^r$ termes en tout.

3. c.-à-d. pour tout $t \in [0, T]$, $f_{|[0, t] \times \Omega}$ est $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ -mesurable.

1.3 Décomposition en chaos de Wiener

1.3.1 Décomposition en chaos

Chaos temporel

On se placera (sauf exception) dans la cas de v .a. à valeurs complexes afin d'avoir des notations plus légères. On note pour $n \geq 1$ et $u, v \in \mathbb{C}^n$, $\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}$ le produit scalaire de $\mathbb{C}^n$. On note $\mathbb{N}^{(\mathbb{Z})}$ l'ensemble des multi-indices sur $\mathbb{Z}$ à support fini, c.-à-d.

$$\mathbb{N}^{(\mathbb{Z})} = \{\alpha = (\alpha_j)_{j \in \mathbb{Z}} \text{ tel que } |\{j, \alpha_j \neq 0\}| < \infty\}.$$

Il est commode d'utiliser les notations suivantes :

$$|\alpha| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k, \quad \alpha! = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k!,$$

où les sommes (resp. les produits) ne comportent à chaque fois qu'un nombre fini de termes (resp. de facteurs). On appellera ordre du multi-indice l'entier $|\alpha|$.

On note $(H_n)_{n \geq 0}$ la suite de polynôme de Hermite définie par récurrence par

$$H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1}, \quad H_1 = X, \quad H_0 = 1.$$

Par convention, on posera $H_n = 0$ pour $n \leq -1$. Il est bien connu que $(\frac{1}{\sqrt{n!}} H_n)_{n \geq 0}$ constitue une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}; e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}})$. On utilisera aussi par la suite

$$(1.3.1) \quad H'_n = nH_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Soit $T > 0$ et $(m_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de $L^2([0, T])$. Par exemple,

$$(1.3.2) \quad m_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i \frac{2\pi}{T} kt}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, T].$$

Pour construire, les « indéterminées »⁴ mentionnées à propos de (1.1.1), on considère un mouvement brownien standard $(\beta_t)_{t \geq 0}$ et sa filtration associée $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$,

4. On les désignera parfois par la suite sous le terme d'indéterminés même s'il s'agit à proprement parlé de v.a..

on pose

$$\xi_k = \int_0^T m_k(t) d\beta_t.$$

Il est bien connu que la famille $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ constitue une famille de v.a. normales indépendantes. Pour former des polynômes à partir de ces indéterminés, nous formons les produits⁵

$$(1.3.3) \quad \xi^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \prod_{k \in \mathbb{Z}} H_{\alpha_k}(\xi_k), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Z})}.$$

Ainsi, la suite $\{\xi^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Z})}}$ constitue une base hilbertienne de $L^2(\Omega, \mathbb{C})$. En particulier, soit $X \in L^2(\Omega; \mathbb{C})$, on pose

$$(1.3.4) \quad X_\alpha = \mathbb{E}(X \overline{\xi^\alpha}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Z})}.$$

Les coefficients $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Z})}}$ sont appelés les coefficients en chaos de X . La série suivante est convergente dans $L^2(\Omega; \mathbb{C})$ (voir [10, 52]) :

$$(1.3.5) \quad X = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Z})}} X_\alpha \xi^\alpha.$$

Chaos espace-temps

Les v.a. considérées au paragraphe précédent sont des fonctionnelles d'un seul mouvement brownien à travers les indéterminés $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Ces dernières permettent d'associer un bruit à chaque fréquence temporelle. Si l'on souhaite maintenant travailler avec des processus stochastiques dépendant du temps et de l'espace par exemple (indexés par deux paramètres donc), par exemple $X = X(x, t, \omega)$ avec $x \in (0, 1)$ ou $x \in \mathbb{R}$ et $t \in (0, T)$, il est naturel de remplacer $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ par une famille $\{\xi_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$ où l'indice i représente une fréquence spatiale et j une fréquence temporelle. Pour cela, on considère une famille de mouvements browniens scalaires $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ indépendants et une base

5. Où il n'y a qu'un nombre fini de facteurs par définition.

hilbertienne $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ (par exemple), et on pose

$$W(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \beta_i(t) e_i,$$

c'est le processus de Wiener cylindrique sur $L^2(\mathbb{R})$. Pour $T > 0$, on pose

$$\xi_{i,j} = \int_0^T m_j(t) d\beta_i(t) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} m_j(t) e_i(x) dW(x, t) = \int_0^T (m_j(t) e_i, dW(t)) \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

où on a noté $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire $L^2(\mathbb{R})$, puis pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})}$,

$$(1.3.6) \quad \xi^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \prod_{i,j \in \mathbb{Z}} H_{\alpha_{i,j}}(\xi_{i,j}).$$

Soit alors $X \in L^2(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$, l'équivalent de (1.3.5) converge également dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R})$.

1.3.2 Un changement d'indice

Pour la suite, nous nous placerons (sauf exception) dans le cas de chaos temporel pour exposer les principales idées. Celles-ci se généralise sans inconvénients au cas du chaos espace-temps, si ce n'est que, dans ce cas, les multi-indices sont indexés par deux entiers relatifs au lieu d'un seul.

Soit $r \geq 1$ un entier. On va chercher un moyen de paramétrer le support des multi-indices d'ordre r . Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Z})}$ tel que $|\alpha| = r \geq 1$, on pose

$$(1.3.7) \quad \mathcal{O}(\alpha) = \{k \in \mathbb{Z}^r \text{ tel que } |\{\ell \in \mathbb{Z}, k_\ell = j\}| = \alpha_j\} \subset \mathbb{Z}^r.$$

Les propriétés suivantes sont immédiates.

Proposition 1.3.1. *(i) Pour $r \geq 1$, la réunion dénombrable des ensembles d'indices $\{\mathcal{O}(\alpha)\}_{|\alpha|=r}$ pour $r \geq 1$ forme une partition de $\mathbb{Z}^r$:*

$$(1.3.8) \quad \mathbb{Z}^r = \bigcup_{\alpha, |\alpha|=r} \mathcal{O}(\alpha).$$

(ii) Pour $\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Z})}$ donné, l'ensemble $\mathcal{O}(\alpha)$ a pour cardinal

$$(1.3.9) \quad |\mathcal{O}(\alpha)| = \frac{|\alpha|!}{\alpha!}.$$

(iii) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Z})}$, on a

$$\mathcal{O}(\alpha) \times \mathcal{O}(\beta) \subset \mathcal{O}(\alpha + \beta).$$

On notera $k(\alpha) \in \mathbb{Z}^r$ l'unique élément de $\mathcal{O}(\alpha)$ dont les composantes sont croissantes.

Exemple 1.3.2. Pour $\alpha = (\dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 2, 0, \dots)$ où les seuls éléments non nuls sont $\alpha_i = 1$, $\alpha_j = 2$ pour $i < j$, on a

$$\mathcal{O}(\alpha) = \{(i, j, j); (j, i, j); (j, j, i)\}, \quad \mathcal{O}(\alpha) = \frac{3!}{2!}, \quad k(\alpha) = (i, j, j).$$

Pour toute v. a. $X \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$, on notera

$$(1.3.10) \quad Z_k^{r,X} = Z_{k(\alpha)}^{r,X} = \sqrt{\alpha!} X_\alpha, \quad \forall k \in \mathcal{O}(\alpha), \quad |\alpha| = r \geq 1.$$

Bien sûr, la notation $Z_k^{r,X}$ pour $\sqrt{\alpha!} X_\alpha$ introduit de la redondance puisque sa valeur ne dépend que du multi-indice α et reste la même quelque soit k dans $\mathcal{O}(\alpha)$. Néanmoins, on verra que, dans certains cas, cette redondance permet de mieux appréhender des sommes portant sur des multi-indices. Notons déjà les relations évidentes :

$$(1.3.11) \quad \sqrt{\alpha!} X_\alpha = \frac{1}{|\mathcal{O}(\alpha)|} \sum_{j \in \mathcal{O}(\alpha)} Z_j^{r,X}, \quad |\alpha| = r \geq 1,$$

$$(1.3.12) \quad \varphi(\sqrt{\alpha!} X_\alpha) = \frac{1}{|\mathcal{O}(\alpha)|} \sum_{j \in \mathcal{O}(\alpha)} \varphi(Z_j^{r,X}), \quad |\alpha| = r \geq 1,$$

pour toute fonction $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (ex : $\varphi(z) = z^p$).

Exemple 1.3.3. Soit X, Y deux v. a. complexes de carrés intégrable. Avec les mêmes notations que plus haut, on a

$$(1.3.13) \quad \mathbb{E}(X\bar{Y}) = \sum_{\alpha} X_{\alpha} \bar{Y}_{\alpha} = X_0 \bar{Y}_0 + \sum_{r \geq 1} \sum_{|\alpha|=r}^{\infty} X_{\alpha} \bar{Y}_{\alpha},$$

où pour $r \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=r} X_{\alpha} \bar{Y}_{\alpha} &= \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{|\mathcal{O}(\alpha)|} \sum_{k \in \mathcal{O}(\alpha)} Z_k^{r,X} \overline{Z_k^{r,Y}} / \alpha!, \\ &= \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{|\alpha|!} \sum_{k \in \mathcal{O}(\alpha)} Z_k^{r,X} \overline{Z_k^{r,Y}}, \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{k \in \mathbb{Z}^r} Z_k^{r,X} \overline{Z_k^{r,Y}}, \end{aligned}$$

où on a exploité la redondance (1.3.11) dans la première ligne, utilisé (1.3.9) dans la deuxième et (1.3.8) dans la dernière. En remplaçant cette dernière relation dans (1.3.13), on obtient

$$(1.3.14) \quad \text{Cov}(X, Y) = \sum_{r \geq 1}^{\infty} \frac{1}{r!} \langle Z^{r,X}, Z^{r,Y} \rangle_{\mathbb{C}^r}.$$

Nous allons maintenant voir que cette redondance des chaos apparaît naturellement lorsque l'on calcule des dérivées de Malliavin et permet d'interpréter ces dernières d'une autre manière.

1.3.3 Chaos et dérivée de Malliavin

Proposition 1.3.4. Soit $\{\xi^{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}(\mathbb{Z})}$ donnée par (1.3.3). Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}(\mathbb{Z})$, $|\alpha| \geq 1$, $\xi^{\alpha} \in \mathbb{D}^{\infty,2}$, $D_t^r \xi^{\alpha} = 0$ si $r > |\alpha|$ et on a pour tout $s \in [0, T]$ et $t \in [0, T]^r$ pour $r \geq 1$,

$r \leq |\alpha| :$

$$(1.3.15) \quad D_s \xi^\alpha = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{\alpha_k} \xi^{\alpha(k)} m_k(s),$$

$$(1.3.16) \quad D_t^r \xi^\alpha = \sum_{k \in \mathbb{Z}^r} f_\alpha(k) \xi^{\alpha(k)} \prod_{j=1}^r m_{k_j}(t_j),$$

$$(1.3.17) \quad \mathbb{E}(D_t^r \xi^\alpha) = \delta_{|\alpha|,r} \sqrt{\alpha!} \sum_{k \in \mathcal{O}(\alpha)} \prod_{j=1}^r m_{k_j}(t_j),$$

où on a posé

$$f_\alpha(k) = \sqrt{\alpha_{k_1}(\alpha_{k_2} - \delta_{k_1, k_2}) \cdots \left(\alpha_{k_r} - \sum_{j=1}^{r-1} \delta_{k_j, k_r} \right)},$$

et, par abus de notation,

$$(1.3.18) \quad \alpha(k_1, \dots, k_r) = \alpha - u_{k_1} - \cdots - u_{k_r},$$

avec $u_k \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ tel que $(u_k)_j = \delta_{k,j}$.

Preuve

Les relations (1.3.15), (1.3.16) découlent de (1.2.2), (1.3.1) et (1.3.3). En effet, pour $s \in [0, T]$, on a, en utilisant successivement (1.2.2) et (1.3.1) :

$$\begin{aligned} D_s \xi^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{k \neq i} H_{\alpha_k}(\xi_k) \right) H'_{\alpha_i}(\xi_i) D_s \xi_i, \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{k \neq i} H_{\alpha_k}(\xi_k) \right) \alpha_i H_{\alpha_i-1}(\xi_i) m_i(s), \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sqrt{\alpha_i} \xi^{\alpha(i)} m_i(s). \end{aligned}$$

La généralisation à (1.3.16) est immédiate.

Pour finir, prenons l'espérance de (1.3.16). Celle-ci est nulle lorsque $|\alpha(k)| = |\alpha| - r \neq 0$. Pour $r = |\alpha|$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_t^r \xi^\alpha) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^r} f_\alpha(k) \prod_{j=1}^r m_{k_j}(t_j), \\ &= \sum_{k \in \mathcal{O}(\alpha)} f_\alpha(k) \prod_{j=1}^r m_{k_j}(t_j), \\ &= \sum_{k \in \mathcal{O}(\alpha)} \sqrt{\alpha!} \prod_{j=1}^r m_{k_j}(t_j), \end{aligned}$$

□

Remarque 1.3.5. D'après (1.3.17), les coefficients de Fourier $\{\zeta_k^\alpha\}_{k \in \mathbb{Z}^r}$ de $t \mapsto \mathbb{E}(D_t^r \xi^\alpha)$ pour $t \in [0, T]^r$ et $r = |\alpha|$ sont constants dans $\mathcal{O}(\alpha)$ et nulle en dehors :

$$(1.3.19) \quad \zeta_k^\alpha = \begin{cases} \sqrt{\alpha!}, & \text{si } k \in \mathcal{O}(\alpha), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que $D_t^{|\alpha|} \xi^\alpha$ est déterministe, ce qui est naturel lorsque l'on pense à l'action de la dérivée sur les polynômes. La proposition qui suit établit un lien entre les coefficients de chaos d'une variable aléatoire et la transformée de Fourier de ses dérivées de Malliavin.

Proposition 1.3.6. Soit $X \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$ suffisamment régulière.⁶ Soit $r \geq 1$, alors

$$(1.3.20) \quad \mathbb{E}(D_t^r X) = T^{-r/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^r} Z_k^{r,X} \exp\left(i \frac{2\pi}{T} k \cdot t\right).$$

où $Z_k^{r,X}$ est défini par (1.3.10).

Preuve

6. au sens donnée par (1.2.1).

On écrit successivement pour $r \geq 1$ et $t \in [0, T]^d$:

$$D_t^r X = \sum_{\alpha} X_{\alpha} D_t^r \xi^{\alpha} = \sum_{|\alpha| \geq r} X_{\alpha} D_t^r \xi^{\alpha}.$$

Puis en prenant l'espérance, les termes pour $|\alpha| > r$ s'annulent et en utilisant (1.3.17) on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_t^r X) &= \sum_{|\alpha|=r} \sum_{k \in \mathcal{O}(\alpha)} X_{\alpha} \sqrt{\alpha!} \prod_{j=1}^r m_{k_j}(t_j), \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^r} Z_k^{r,X} \prod_{j=1}^r m_{k_j}(t_j), \\ &= T^{-r/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^r} Z_k^X e^{i \frac{2\pi}{T} k \cdot t}, \end{aligned}$$

où on a utilisé (1.3.8) et (1.3.10) dans la deuxième ligne. $\square$

Proposition 1.3.7 (Version bruit espace-temps). *Pour ξ^{α} donné par (1.3.6), pour $h \in L^2(\mathbb{R})$, on exprime la dérivée de Malliavin de ξ^{α} pour $|\alpha| \geq 1$ dans la direction h à l'instant t par*

$$(1.3.21) \quad D_t^h \xi^{\alpha} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_{i,j}} \xi^{\alpha(i,j)} m_j(t)(h, e_i).$$

Lorsque $h = e_i$, on notera plus simplement $D_t^i \xi^{\alpha}$.

Preuve On calcule successivement

$$\begin{aligned} D_t^h \xi^{\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \sum_{i,j} \left(\prod_{(k,\ell) \neq (i,j)} H_{\alpha_{k,\ell}}(\xi_{k,\ell}) \right) H'_{\alpha_{i,j}}(\xi_{i,j}) D_t^h \xi_{i,j}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \sum_{i,j} \left(\prod_{(k,\ell) \neq (i,j)} H_{\alpha_{k,\ell}}(\xi_{k,\ell}) \right) H'_{\alpha_{i,j}}(\xi_{i,j}) (m_j(t) e_i, h), \\ &= \sum_{i,j} \sqrt{\alpha_{i,j}} \xi^{\alpha(i,j)} m_j(t)(h, e_i). \end{aligned}$$

□

Au passage, la proposition 1.3.6 permet de préciser (1.3.14) et on a, grâce à Plancherel, la

Proposition 1.3.8. *Soit $X, Y \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$. Alors $X\bar{Y} \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$ et*

$$(1.3.22) \quad \mathbb{E}(X\bar{Y}) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(\bar{Y}) + \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r!} \int_{[0,T]^r} \mathbb{E}(D_t^r X) \overline{\mathbb{E}(D_t^r Y)} dt,$$

$$(1.3.23) \quad \sum_{|\alpha|=r} X_\alpha \bar{Y}_\alpha = \frac{1}{r!} \int_{[0,T]^r} \mathbb{E}(D_t^r X) \overline{\mathbb{E}(D_t^r Y)} dt, \quad r \geq 1.$$

De plus, si $X \in \mathbb{D}^{p,2}$ et $Y \in \mathbb{D}^{q,2}$ alors

$$(1.3.24) \quad \text{Cov}(D_t^p X, D_s^q Y) = \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r!} \int_{[0,T]^r} \mathbb{E}(D_{t,u}^{r+p} X) \overline{\mathbb{E}(D_{s,u}^{r+q} Y)} du.$$

La proposition suivante permet d'évaluer, dans le cas où la mesure de référence est la mesure de Wiener (donc chaos de Wiener), l'erreur d'approximation d'une v.a. par sa série en chaos tronquée, à l'aide de ses dérivées de Malliavin. Elle est une conséquence directe de la proposition précédente.

Proposition 1.3.9. *Soit $X \in \mathbb{D}^{p,2}$ pour un entier $p \geq 1$. Soit $k \geq p$ un entier. Alors, on a l'inégalité suivante*

$$(1.3.25) \quad \mathbb{E}|X - \sum_{|\alpha| \leq k} X_\alpha \xi^\alpha|^2 \leq \frac{(k-p+1)!}{(k+1)!} \int_{[0,T]^p} \text{Var}(D_t^p X) dt.$$

Preuve La relation (1.3.23) fournit

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \geq k+1} |X_\alpha|^2 &= \sum_{m \geq k+1} \frac{1}{m!} \int_{[0,T]^m} |\mathbb{E}(D_t^m X)|^2 dt \\ &\leq \frac{1}{(k+1) \cdots (k-p+2)} \sum_{m \geq k+1} \frac{m \cdots (m-p+1)}{m!} \int_{[0,T]^m} |\mathbb{E}(D_t^m X)|^2 dt \\ &\leq \frac{(k-p+1)!}{(k+1)!} \int_{[0,T]^p} ds \sum_{m \geq k+1} \frac{1}{(m-p)!} \int_{[0,T]^{m-p}} |\mathbb{E}(D_u^{m-p}(D_s^p X))|^2 du. \end{aligned}$$

La dernière somme en m peut être majorée par la même somme à partir de $m \geq p+1$ et on conclut alors grâce à (1.3.24) où $X = Y$, $q = p$ et où l'indice de sommation est changé en $r = m - p$.

□

1.3.4 Application au produit en chaos

Lors de la résolution numérique des EDPS dans les chapitres suivants, l'expression des séries de chaos des termes quadratiques sera cruciale et au centre des problèmes posés d'un point de vue algorithmique par l'étude numérique. Il est nécessaire, pour le moins, de pouvoir exprimer les coefficients de chaos d'un produit $XY = \sum_{\gamma} c_{\gamma} \xi^{\gamma}$ de deux v.a. à l'aide des coefficients de $X = \sum_{\alpha} X_{\alpha} \xi^{\alpha}$ et $Y = \sum_{\beta} Y_{\beta} \xi^{\beta}$. Malheureusement, on se convainc facilement que $\xi^{\alpha} \xi^{\beta} \neq \xi^{\alpha+\beta}$ (voir Prop. 1.3.11). L'objet des propositions suivantes est de fournir deux expressions équivalentes des coefficients c_{γ} du produit.

Première forme

La première donne l'expression de ces coefficients via la redondance (1.3.11) et met à profit, via la relation de Plancherel, le fait que la nonlinéarité est quadratique.

Proposition 1.3.10. *Soient $X, Y \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$. Soit $r \geq 1$. Notons $Z_k^{r,XY}$ (resp. $Z_j^{p,X}$, $Z_{\ell}^{q,Y}$), les coefficients donnés par (1.3.10) pour $(XY)_{\gamma}$ (resp. pour X_{α} , Y_{β}). On a*

$$(1.3.26) \quad Z_k^{r,XY} = \sum_{p=0}^r \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r^p} \sum_{q \geq 0} \frac{1}{q!} \sum_{j \in \mathbb{Z}^q} Z_{k_{\sigma},j}^{p+q,X} Z_{-k'_{\sigma},-j}^{r-p+q,Y}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^r,$$

où on a noté $k_{\sigma} = (k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(p)})$ et $k'_{\sigma} = (k_{\sigma(p+1)}, \dots, k_{\sigma(r)})$.⁷

Preuve On part de la formule de Leibniz (1.2.6) pour exprimer $D_t^r(XY)$ pour tout

7. En omettant la dépendance en p pour ne pas alourdir les notations.

$t \in [0, T]^r$, suivi de (1.3.24) après avoir pris l'espérance. On a avec notations évidentes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_t^r(XY)) &= \sum_{p=0}^r \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r^p} \mathbb{E}(D_{t_\sigma}^p(X) D_{t'_\sigma}^{r-p}(Y)) \\ &= \sum_{p=0}^r \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r^p} \sum_{q \geq 0} \frac{1}{q!} \int_{[0, T]^q} \mathbb{E}(D_{t_{\sigma, s}}^{p+q}(X)) \overline{\mathbb{E}(D_{t'_{\sigma, s}}^{r-p+q}(\bar{Y}))}. \end{aligned}$$

On conclut grâce à (1.3.20) en prenant la transformée de Fourier de la dernière égalité sur $[0, T]^r$.

□

Seconde forme

La proposition suivante exprime de façon explicite le produit $\xi^\alpha \xi^\beta$ sur la base des $(\xi^\gamma)_\gamma$. Nous le donnons à titre indicatif car nous ne l'utiliserons pas numériquement. Il s'agit d'un résultat bien connu de l'analyse sur les polynômes de Hermite. La démonstration classique utilise les fonctions génératrices des dits polynômes. Nous allons ici le démontrer en utilisant la proposition précédente.

Proposition 1.3.11. *Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Z})}$, on a*

$$(1.3.27) \quad \xi^\alpha \xi^\beta = \sum_{\delta \leq \alpha \wedge \beta} \sqrt{\binom{\alpha}{\delta} \binom{\beta}{\delta} \binom{\alpha + \beta - 2\delta}{\alpha - \delta}} \xi^{\alpha + \beta - 2\delta},$$

$$\text{où on a noté } \binom{\alpha}{\delta} = \frac{\alpha!}{\delta!(\alpha - \delta)!}.$$

Preuve

À l'instar de (1.3.19), on note $\{\zeta_k^{\alpha, \beta}\}_{k \in \mathbb{Z}^r}$ les coefficients de Fourier de $t \in [0, T]^r \mapsto \mathbb{E}(D_t(\xi^\alpha \xi^\beta))$. On note également $c_{\alpha, \beta, \gamma} = \mathbb{E}(\xi^\alpha \xi^\beta \overline{\xi^\gamma})$ où $\gamma \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Z})}$ tel que $|\gamma| = r$. On a

dans un premier temps en utilisant (1.3.11) :

$$\begin{aligned}\sqrt{\gamma!} c_{\alpha,\beta,\gamma} &= \zeta_k^{\alpha,\beta}, \quad \forall k \in \mathcal{O}(\gamma) \\ &= \frac{1}{|\mathcal{O}(\gamma)|} \sum_{k \in \mathcal{O}(\gamma)} \zeta_k^{\alpha,\beta}.\end{aligned}$$

Les coefficients $\zeta_k^{\alpha,\beta}$ sont fournis par la proposition précédente 1.3.10. Ainsi, pour tout $k \in \mathcal{O}(\gamma)$, on a

$$\zeta_k^{\alpha,\beta} = \sum_{p=0}^r \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r^p} \sum_{q \geq 0} \frac{1}{q!} \sum_{j \in \mathbb{Z}^q} \zeta_{k_\sigma, j}^\alpha \zeta_{-k'_\sigma, -j}^\beta.$$

Il est facile de voir, en vertu de la remarque 1.3.5, que les sommes en p et q ne comporte chacune qu'un seul élément tel que $p + q = |\alpha|$ et $r - p + q = |\beta|$. En particulier, cela implique que

$$(1.3.28) \quad 2q = |\alpha| + |\beta| - r \geq 0, \quad 2p = |\alpha| - |\beta| + r \leq 2r,$$

et donc que nécessairement $|\alpha| - |\beta| \leq r \leq |\alpha| + |\beta|$ avec r de même parité que $|\alpha| + |\beta|$.

Nous avons donc

$$\begin{aligned}\sqrt{\gamma!} c_{\alpha,\beta,\gamma} &= \frac{1}{|\mathcal{O}(\gamma)|} \sum_{k \in \mathcal{O}(\gamma)} \zeta_k^{\alpha,\beta} \\ &= \frac{1}{|\mathcal{O}(\gamma)|} \sum_{k \in \mathcal{O}(\gamma)} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r^p} \frac{1}{q!} \sum_{j \in \mathbb{Z}^q} \zeta_{k_\sigma, j}^\alpha \zeta_{-k'_\sigma, -j}^\beta \\ &= \frac{1}{|\mathcal{O}(\gamma)|} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r^p} \frac{1}{q!} \sum_{|\delta|=q} \sum_{j \in \mathcal{O}(\delta)} \sum_{k \in \mathcal{O}(\gamma)} \zeta_{k_\sigma, j}^\alpha \zeta_{-k'_\sigma, -j}^\beta,\end{aligned}$$

avec p et q donnés par (1.3.28) et où on a utilisé (1.3.8) dans la deuxième ligne. Pour chaque δ d'ordre q , on remarque que les $p+q$ -uplets $\zeta_{k_\sigma, j}^\alpha$ apparaissant dans la relation précédente sont construits à partir de $k_\sigma \in \mathcal{O}(\alpha - \delta)$ et $j \in \mathcal{O}(\delta)$. De même, les $r - p + q$ -uplets $\zeta_{k'_\sigma, j}^\beta$ sont construits à partir de $k_\sigma \in \mathcal{O}(\beta - \delta)$ et $j \in \mathcal{O}(\delta)$. Ainsi $(k_\sigma, k'_\sigma) \in \mathcal{O}(\alpha + \beta - 2\delta)$. Du fait de (1.3.8) dans $\mathbb{Z}^q$, il n'y a donc qu'un seul élément δ tel que $\alpha + \beta - 2\delta = \gamma$ dans la somme en δ précédente.

Avec $p = |\alpha| - q = |\alpha - \delta|$ et $r - p = |\beta| - q = |\beta - \delta|$, on a successivement (en utilisant (1.3.19) et plusieurs fois de suite (1.3.9)) :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\gamma!} c_{\alpha, \beta, \gamma} &= \frac{1}{|\mathcal{O}(\gamma)|} \left(\frac{r!}{p!(r-p)!} \right) \frac{1}{q!} |\mathcal{O}(\delta)| \sqrt{\alpha!} \sqrt{\beta!} |\mathcal{O}(\alpha - \delta)| |\mathcal{O}(\beta - \delta)| \\
&= \frac{1}{|\mathcal{O}(\gamma)|} \left(\frac{\gamma!}{(\alpha - \delta)!(\beta - \delta)!} \frac{|\mathcal{O}(\gamma)|}{|\mathcal{O}(|\alpha - \delta|)| |\mathcal{O}(|\beta - \delta|)|} \right) \times \\
&\quad \frac{1}{q!} |\mathcal{O}(\delta)| \sqrt{\alpha!} \sqrt{\beta!} |\mathcal{O}(\alpha - \delta)| |\mathcal{O}(\beta - \delta)| \\
&= \frac{\gamma!}{(\alpha - \delta)!(\beta - \delta)! \delta!} \sqrt{\alpha! \beta!},
\end{aligned}$$

soit le résultat souhaité avec $\alpha + \beta - 2\delta = \gamma$.

□

Chapitre 2

Approximation numérique en chaos de Wiener de solution d'EDPS

2.1 Introduction

Nous allons dans ce chapitre reprendre l'étude numérique de Korteweg-de Vries et de Burgers stochastiques. Dans la section suivante, nous allons présenter ces équations dans le cas déterministe et rappeler brièvement quelques propriétés. Dans la section 3, nous introduisons le processus de Wiener qui servira de cadre à notre étude, ainsi que le formalisme d'Itô. Dans la section 4, seront rappelés quelques résultats connus concernant les versions stochastiques des équations précédemment citées. Enfin, nous aborderons dans les dernières sections les méthodes de résolutions numériques pour la partie déterministe et la partie stochastique, c.-à-d. la méthode utilisant la décomposition du bruit en chaos.

2.2 Comportement des équations étudiées dans le cas déterministe

2.2.1 Équation de la chaleur

Considérons l'équation d'évolution linéaire bien connue :

$$(2.2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad [0, L],$$

où l'on impose des conditions aux bords périodiques dans le dernier cas. L'équation de la chaleur (2.2.1) est une équation aux dérivées partielles parabolique décrivant la diffusion de la chaleur. Elle a été introduite par Joseph Fourier en 1811 et résolue en 1822 par ce dernier dans son ouvrage "Théorie analytique de la chaleur" [22]. C'est dans cet ouvrage qu'il expose les séries et la transformation à qui il a donné son nom.

En dimension 1, cette équation va représenter l'évolution de la température d'une barre de fer. Ici $u(x, t)$ désigne la température de la barre au temps t et au point x , $u(x, 0)$, la température initiale de la barre et β , sa conductance thermique. Plus cette valeur sera grande, plus la température va s'uniformiser rapidement sur le support considéré. L'éventuel second membre de l'équation représentera la source de chaleur de l'espace considéré. L'équation de la chaleur (2.2.1) est une bonne première étape pour tester notre méthode. Elle offre deux avantages : sa linéarité et l'aspect diffusif qu'elle possède grâce à son Laplacien qui va régulariser les solutions et ainsi faciliter la résolution numérique.

La projection sur les modes de Fourier de (2.2.1) diagonalise l'équation. Ainsi, dans le cas périodique, si on note $\widehat{f}(k) = \int_0^L f(x) e^{-i \frac{2\pi k x}{L}} \frac{dx}{\sqrt{L}}$, pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R})^1$, on obtient la famille d'équations différentielles ordinaires concernant les fonctions $t \mapsto \widehat{u}(k, t)$:

$$\widehat{u}(k, t)' + \beta k^2 \widehat{u}(k, t) = 0, \quad \widehat{u}(\cdot, 0) = \widehat{u}_0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1. Avec $\widehat{f}(-k) = \overline{\widehat{f}(k)}$ si f est à valeurs réelles.

Ainsi, $\widehat{u}(k) = \widehat{u}_0(k)e^{-\beta k^2 t}$ et formellement dans $L^2(0, L)$, on a

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_0(k) e^{-\beta k^2 t + i \frac{2\pi}{L} kx} = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L u_0(x) dx + \frac{2}{\sqrt{L}} \operatorname{Re} \sum_{k \geq 1} \widehat{u}_0(k) e^{-\beta k^2 t + i \frac{2\pi}{L} kx}.$$

En particulier,

$$\|u(t)\|_{L^2(0, L)}^2 = \left(\int_0^L u_0 \right)^2 + \sum_{k \geq 1} |\widehat{u}_0(k)|^2 e^{-2\beta k^2 t} \rightarrow \left(\int_0^L u_0 \right)^2,$$

lorsque t tend vers l'infini.

Ainsi, l'énergie (ici la norme L^2) se diffuse dans tous les modes de Fourier de façon indépendante.

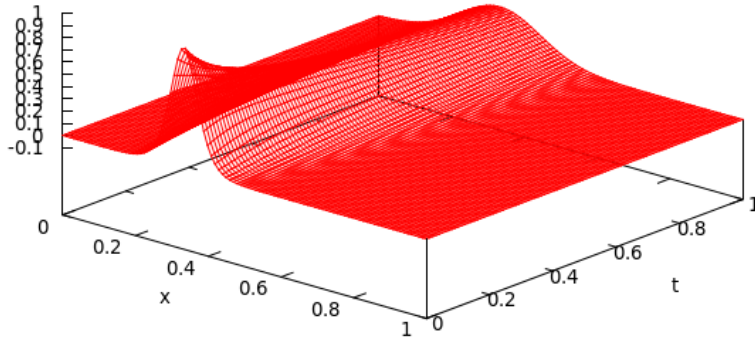


FIGURE 2.1 – Exemple de simulation de l'équation de la chaleur déterministe avec (2.5.4) comme donnée initiale.

2.2.2 Équation de Burgers

Considérons maintenant l'équation suivante, où un terme non linéaire est introduit :

$$(2.2.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad [0, L],$$

avec encore une fois des conditions aux bords adéquates (périodiques dans le cas compact). L'équation de Burgers (2.2.2) est utilisée dans divers domaines des mathématiques appliquées, comme la modélisation de gaz ou celle du trafic routier (voir une bonne introduction dans [51, Chap. 4], [53]). Elle est également utilisée d'un point de vue théorique comme un modèle simple pour l'équation de Navier-Stokes 1d où l'on a négligé les termes de force et de pression ([9]).

En l'absence de terme de diffusion ($\varepsilon = 0$), il est bien connu que la solution de (2.2.2) ne possède pas de solution régulière pour tout temps et ceci même avec une donnée initiale $\mathcal{C}^\infty$. En effet, la technique des équations caractéristiques appliquée à (2.2.2) avec $\varepsilon = 0$ ne garantit pas l'unicité au delà d'un temps T^* tel que

$$(T^*)^{-1} = \min_x u'_0(x).$$

Ce phénomène traduit la formation d'ondes de chocs (solutions discontinues).

Nous utiliserons par la suite cette équation avec deux types de conditions initiales illustrant deux phénomènes non linéaires différents. Dans le premier, le terme d'advection $u \frac{\partial u}{\partial x}$ tend à produire des régions de fort gradient impliquant un transfert d'énergie des basses fréquences vers les hautes fréquences finissant par se dissiper du fait du terme de diffusion. Le second phénomène est la propagation d'onde progressives (voir figures 2.2 et 2.3).

Avec une sinusoïde comme condition initiale ($u_0(x) = \sin(2\pi x)$) (voir Fig. 2.2), la partie positive de la sinusoïde va se déplacer vers la droite, la partie négative va avoir un mouvement inverse créant ainsi un gros gradient en $t = \frac{1}{2}$.

L'autre phénomène correspond à la propagation d'onde progressives. En effet, en cherchant une solution du type $u(x, t) = W(x - ct)$ (voir Fig. 2.3), on trouve une

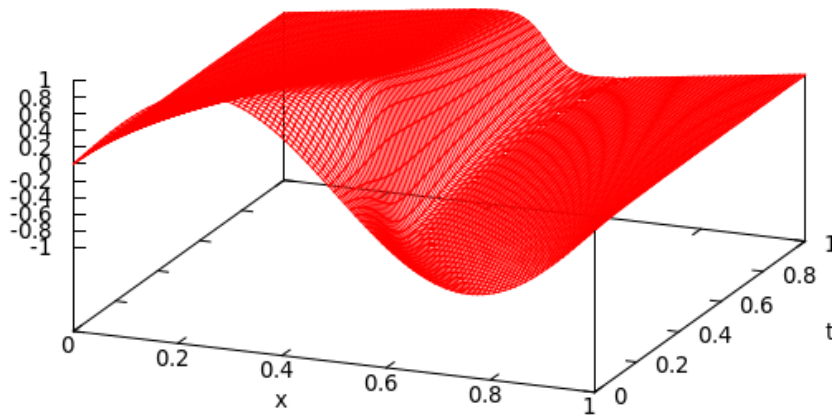


FIGURE 2.2 – Solution de l'équation de Burgers déterministe avec un sinus comme condition initiale.

solution particulière (voir [53, p. 27]). Nous avons en effet immédiatement l'équation suivante sur W :

$$-cW' + WW' = \varepsilon W''.$$

En prenant des conditions aux limites de Neumann : $W'(+\infty) = W'(-\infty) = 0$, on obtient après intégration : $-cW + W^2 = \varepsilon W'$. D'où la famille de solution paramétrée par x_0 et $c > 0$:

$$W(x) = c \left(1 + \tanh \left(\frac{c}{2\varepsilon} (x - x_0) \right) \right).$$

D'où la famille de solution paramétrée par x_0 et $c > 0$:

$$(2.2.3) \quad u_{c,x_0}(x, t) = c \left(1 + \tanh \left(\frac{c}{2\varepsilon} (x - ct - x_0) \right) \right).$$

Ce qui correspond à une "marche" d'amplitude $2c$ se déplaçant à vitesse c .

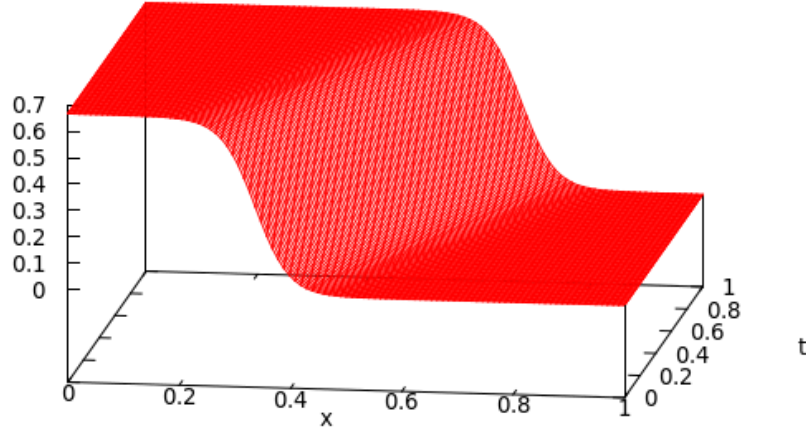


FIGURE 2.3 – Solution de l'équation de Burgers déterministe avec $u(x, 0) = c(1 + \tanh(\frac{c}{2\varepsilon}(x - 1/2)))$ comme donnée initiale.

2.2.3 Équation de Korteweg-de Vries

Il est intéressant de faire contraster le phénomène d'ondes de chocs de Burger, avec un autre phénomène non linéaire : la création, propagation et l'interaction d'ondes solitaires, c.-à-d. le soliton. Parmi toutes les équations pour lesquelles de telles solutions localisées existent, nous nous restreindrons ici au cas de l'équation de Korteweg-de Vries.

Son histoire est très fortement liée à celle de l'étude des solitons. Un soliton est une onde solitaire se propageant dans un milieu non linéaire sans se déformer. Ce phénomène a été décrit pour la première fois dans la littérature par l'ingénieur Écossais John Scott Russell, qui, lors d'une promenade en août 1834 le long d'un étroit canal, a observé sur plusieurs kilomètres une vague remontant le courant sans faiblir [45]. C'est en 1895² que les deux chercheurs Hollandais Diederik Korteweg et Gustav de Vries élaborent, en se basant sur les équations d'Euler incompressibles en dimension 2 linéarisées autour d'ondes progressives de grande longueur d'onde et de faible amplitude (par rapport à la profondeur du canal), une équation d'évolution (2.2.4) gouvernant la propagation des ondes à la surface, possédant le fameux soliton comme solution. Contrairement à ce qui se passe dans le cas de Burgers (2.2.2), ce phénomène de propagation sans déformation est la conséquence de la balance entre les effets nonlinéaires dûs aux petites amplitudes et les effets dispersifs dûs aux grandes longueurs d'onde (voir la théorie « water waves », [51, Chap. 13]). Notons que dans (2.2.3) la solution n'est pas localisée et les effets dispersifs sont bien sûr absents.

De nos jours, l'équation de Korteweg-de Vries s'écrit sous la forme normalisée suivante :

$$(2.2.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

où $u = u(x, t)$ désigne l'élévation de l'onde et où $x \in \mathbb{R}$.³ La solution connue la plus

2. Voir toutefois [8].

3. On peut donner un sens à (2.2.4) dans un domaine borné avec conditions aux bords périodiques.

classique ayant motivé sa découverte, celle du soliton, s'écrit pour tout $c > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ (voir Fig. 2.4 pour une simulation) :

$$(2.2.5) \quad u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(\kappa(x - x_0 - ct)), \quad \kappa = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{\varepsilon}}, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Après soixante-dix ans pendant lesquels l'intérêt porté à l'équation de Korteweg-de Vries fut assez limité, en 1965, Zabusky et Kruskal [54] remarquèrent différents phénomènes lors de simulations numériques de l'équation, dont les deux suivants :

- l'éclatement en plusieurs solitons d'amplitudes différentes en choisissant certains profils comme conditions initiales ;
- l'effet d'une collision entre deux solitons, à savoir un déphasage des deux solitons lors de la collision mais aucun changement d'amplitude.

Ils mettront en place deux ans plus tard [23] une méthode (à l'origine de la méthode dite de diffusion inverse ou inverse scattering) permettant de calculer explicitement les solutions de l'équation pour des données initiales plus générales que le soliton. Notons que lorsque cette méthode s'applique à une équation d'évolution, elle met en évidence son caractère complètement intégrable [1]. Ce qui se traduit entre autres par l'existence d'une infinité de fonctionnelles invariantes de la solution [39].

Outre la méthode de diffusion inverse déjà citée, parmi les premiers résultats figure le résultat d'existence globale de solutions faibles dans $H^1(\mathbb{R})$ (existence globale et unicité dans $H^2(\mathbb{R})$) de R. Temam [48]. D'autres travaux ensuite [6, 46] établirent le caractère localement bien posé dans les espaces $H^s(\mathbb{R})$ pour $s > 3/2$. À partir de là, il semble naturel de travailler avec des hypothèses de régularité sur la donnée initiale de plus en plus faible.

La première utilisation d'effets régularisants locaux de la partie linéaire de l'équation est due à Kato [31] et lui permit de démontrer l'existence globale d'une solution pour une donnée initiale dans $L^2(\mathbb{R})$. Ces mêmes effets généralisés dans des espaces à poids [25] permirent de déterminer l'existence globale et l'unicité de solutions dans ces mêmes espaces à poids.

Des techniques d'intégrales oscillantes permirent une utilisation plus fine encore de la dispersion et fut employée par Kenig, Ponce et Vega [33] pour démontrer le caractère localement bien posé de l'équation dans $H^s(\mathbb{R})$ pour $s > 3/4$ (et donc globalement bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1$). C'est alors qu'intervinrent les travaux de Bourgain. Dans [7], l'auteur démontra le caractère globalement bien posé du problème dans $L^2(\mathbb{R})$ à l'aide de techniques d'analyse harmonique néanmoins très différentes en utilisant de nouveaux espaces fonctionnels. Finalement, Kenig, Ponce et Vega [32], en reprenant les travaux de Bourgain sous une forme plus simple et en réutilisant quelques estimées de leur précédent travail prolongèrent ses résultats en démontrant le caractère localement bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$ pour $s > -3/4$.

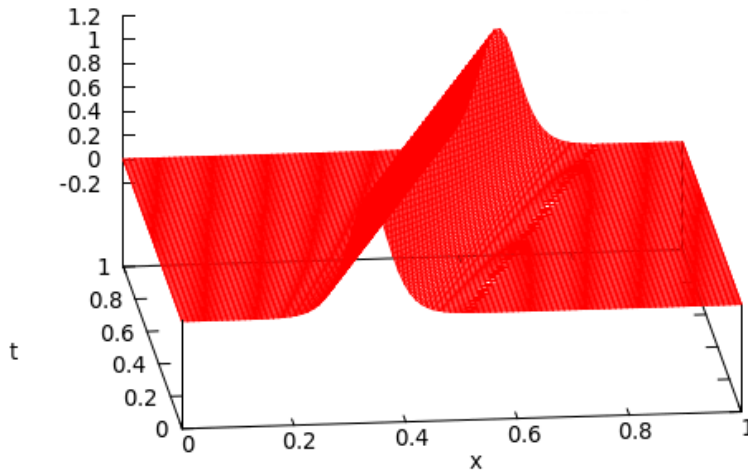


FIGURE 2.4 – Solution de l'équation de Korteweg-de Vries déterministe

2.3 Processus de Wiener, intégrales stochastiques et bruit blanc

Avant de passer aux versions stochastiques des équations précédentes, nous rappellerons quelques résultats sur la construction de l'intégrale stochastique en dimension infinie. Nous rappellerons d'abord des résultats sur les opérateurs Hilbert-Schmidt, souvent nécessaires lorsque l'on considère des bruits à valeurs dans des espaces fonctionnels, puis nous introduirons le processus de Wiener cylindrique et l'intégrale stochastique à valeurs dans un Hilbert.⁴ Les bruits que nous allons décrire sont gaussiens.

Si $(E, (\cdot, \cdot)_E)$ et $(F, (\cdot, \cdot)_F)$ désignent deux espaces de Hilbert séparables. Soit $\{e_i\} \subset E$ un système orthonormé complet. Un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est dit être Hilbert-Schmidt si

$$\sum_{i \geq 1} \|Te_i\|_F^2 < \infty.$$

Il est bien connu qu'une telle somme est indépendante de la base choisie. L'ensemble de tous les opérateurs Hilbert-Schmidt muni de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}_2(E, F)} = \left(\sum_{i \geq 1} \|Te_i\|_F^2 \right)^{1/2},$$

est un espace de Hilbert, noté $\mathcal{L}_2(E, F)$.

On introduit également la trace d'un opérateur nucléaire $T \in \mathcal{L}_1(E, E)$ par

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{i \geq 1} (Te_i, e_i)_E.$$

Il est facile de voir que, lorsqu'il existe, $\mathrm{Tr}(T)$ est indépendant de la base choisie. Les relations entre opérateurs Hilbert-Schmidt et opérateurs de trace finie peuvent se

4. L'auteur suppose que le lecteur est déjà averti de l'intégrale stochastique ou produit d'Itô dans le cas scalaire.

résumer ainsi : un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est Hilbert–Schmidt si T^*T est un opérateur de trace finie sur E , ou si TT^* est un opérateur de trace finie sur F . Ainsi, on a

$$\|T\|_{\mathcal{L}_2(E, F)} = (\text{Tr}(TT^*))^{1/2} = (\text{Tr}(T^*T))^{1/2},$$

les deux traces ne portant pas sur les mêmes espaces.

On pourra consulter [15] (appendice C) ou [26] pour plus de détails sur les opérateurs nucléaires et Hilbert–Schmidt.

2.3.1 Processus de Wiener cylindrique

Afin d'introduire nos processus stochastiques, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, représentant la richesse des événements possibles à la date t . On a la définition suivante :

Definition 2.3.1 (Processus de Wiener cylindrique). *Soit $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ un espace de Hilbert séparable et $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de H . Soit U un espace de Hilbert tel que $H \subset U$ avec injection Hilbert-Schmidt. On appelle processus de Wiener cylindrique sur H à valeurs dans U , un processus stochastique W défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ tel que*

- (i) $\forall i \geq 0, \quad t \mapsto (W(t), e_i)_H$ est un mouvement brownien scalaire adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$;
- (ii) $\{(W, e_i)_H\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille de processus mutuellement indépendants.

On pose alors,

$$(2.3.1) \quad \beta_i(t) = (W(t), e_i)_H \quad \text{et} \quad W(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \beta_i(t) e_i.$$

où $\{\beta_i(t)\}_{i \in \mathbb{N}}$ désigne une famille de mouvements browniens mutuellement indépendants sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$. De plus, la série (2.3.1) converge dans $L^2(\Omega; U)$ ainsi que dans $\mathcal{C}([0, T]; U)$, $\mathbb{P}$ p.s. mais $W(t)$ n'est $\mathbb{P}$ p.s. pas à valeurs dans H .

La somme (2.3.1) ne converge pas dans H et cela reflète l'irrégularité en espace d'un tel processus. Cependant, il converge p.s. et dans $L^p(\Omega, U)$ pour tout $p \geq 1$ pour tout espace U tel que $H \subset U$ avec injection Hilbert–Schmidt.⁵

Un tel processus gaussien peut également être caractérisé par

$$\mathbb{E} W(t) = 0 \quad \text{dans } H, \quad \mathbb{E} (W(t), u)_H (W(s), v)_H = \min(t, s) (u, v)_H,$$

pour tout $u, v \in H$.

Étant donnée une fonction aléatoire, prévisible, à valeurs opérateurs $t \mapsto \Phi(t)$, $t \in [0, T]$, il est possible de définir $\int_0^T \Phi(s) dW(s)$ dans un espace de Hilbert K si Φ prend des valeurs dans $\mathcal{L}_2(H, K)$ et $\int_0^T \|\Phi(s)\|_{\mathcal{L}_2(H, K)}^2 ds < +\infty$ p.s.. Dans ce cas $\int_0^T \Phi(s) dW(s)$ est une v.a. bien définie à valeurs dans K et

$$\int_0^T \Phi(s) dW(s) = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^T \Phi(s) e_i d\beta_i(s).$$

De plus, si $\mathbb{E} \left(\int_0^T \|\Phi(s)\|_{\mathcal{L}_2(H, K)}^2 ds \right) < +\infty$, alors on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T \Phi(s) dW(s) &= 0, \\ \mathbb{E} \left(\left(\int_0^T \Phi(s) dW(s) \right)^2 \right) &= \mathbb{E} \left(\int_0^T \|\Phi(s)\|_{\mathcal{L}_2(H, K)}^2 ds \right). \end{aligned}$$

2.3.2 Bruit blanc espace-temps

Qu'appelle-t-on communément bruit-blanc ? En dimension infinie, nous donnons une définition que l'on trouve dans [50] : on appelle bruit blanc espace-temps dans

5. Si $H = L^2(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné, on peut prendre $U = H^{-s}(\mathcal{O})$ avec $s > d/2$.

$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, pour $d \geq 1$, un processus stochastique $\{\eta_t\}_{t \in [0, T]}$ gaussien centré à valeurs mesure tel que pour tout Borélien A et B de $\mathbb{R}^d$ et pour tous $t, s > 0$, on a

$$\mathbb{E} \langle \eta_t, A \rangle \langle \eta_s, B \rangle = \lambda_d(A \cap B) \delta_{t-s},$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On parle aussi de processus indexé par la mesure de Lebesgue. Soit W un processus de Wiener cylindrique sur $H = L^2(\mathbb{R}^d)$ défini en (2.3.1), on montre qu'au sens des distributions on a p.s.

$$(2.3.2) \quad \frac{dW}{dt} = \eta.$$

Les premiers processus de Wiener à valeurs dans des espaces de Hilbert, où plus généralement les premiers processus de diffusion à valeurs dans des espaces de Hilbert, ont été introduits comme outils pour étudier certains problèmes de Dirichlet où les fonctions dépendent d'une infinité de variables.

2.3.3 Bruit corrélé en espace

Même si dans les cas concrets, il est légitime de continuer de considérer des bruits blancs en temps, le cas du bruit blanc en espace est bien sûr un cas idéal et il est souvent nécessaire de prendre en compte des longueurs de corrélations spatiales non nulles. Nous allons maintenant décrire de tels bruits, toujours dans le cas gaussien.

Soit $\dot{\xi}(x, t)$ un processus gaussien centré de corrélation

$$(2.3.3) \quad \mathbb{E} \dot{\xi}(x, t) \dot{\xi}(y, s) = c(x, y) \delta_{t-s}.$$

Il est δ -corrélé en temps puisque c'est un bruit blanc en temps. On montre comment construire un tel processus. Soit W un processus de Wiener cylindrique sur $L^2(I)$ où $I = [0, L]$ par ex. (voir paragraphe 2.3.1) qui s'écrit donc comme

$$W(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i(t) e_i$$

où $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ désigne une base Hilbertienne de $L^2(0, L)$ et $\{\beta_i(t)\}_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de mouvements browniens mutuellement indépendants définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$. La série précédente ne converge bien sûr pas dans $L^2(\Omega, L^2(I))$, mais dans un espace plus grand tel que $L^2(\Omega, U)$ où l'injection de $L^2(I)$ dans U est Hilbert-Schmidt. Le bruit blanc en espace et en temps peut être défini de façon formelle par

$$\dot{\eta} = \frac{dW}{dt}.$$

C'est un processus gaussien caractérisé par

$$\mathbb{E} \langle \dot{\eta}, u \rangle \langle \dot{\eta}, v \rangle = \int_{I \times \mathbb{R}_+} u(x, t) v(x, t) dx dt$$

pour tout $(u, v) \in (H_0^\alpha(I))^2$ où $\alpha > 1/2$. Soit Φ un opérateur linéaire de $L^2(I)$ dans lui-même et posons

$$\widetilde{W} = \Phi W = \sum_{i=0}^{+\infty} \Phi e_i \beta_i, \quad \text{et} \quad \dot{\xi} = \Phi \dot{\eta}.$$

On peut choisir par exemple pour Φ un opérateur de la forme

$$\Phi f = \int_I k(x, y) f(y) dy, \quad f \in L^2(I),$$

alors le processus gaussien $\dot{\xi}$ est caractérisé par

$$\mathbb{E} \langle \dot{\xi}, u \rangle \langle \dot{\xi}, v \rangle = \iiint_{\mathbb{R}_+ \times I^2} c(y, z) u(y, t) v(z, t) dy dz dt$$

où on a posé

$$c(y, z) = \int_I k(y, x) k(z, x) dx.$$

Ainsi, pour un choix de Φ tel que k soit une fonction invariante par translation (c.-à-d. $k(x, y) = k(x - y)$, $(x, y) \in I^2$), c est également homogène et on retrouve un bruit homogène dans (2.3.3).

Il est facile de voir que l'opérateur Φ est Hilbert-Schmidt de $L^2(I)$ dans lui-même ssi $k \in L^2(I \times I)$. Par contre, lorsque k est invariante par translation, cas du bruit

homogène en espace, Φ n'est pas Hilbert–Schmidt à moins que I soit un intervalle borné (cas périodique).

2.4 Présentation de quelques EDP stochastiques

Nous allons maintenant présenter les versions stochastiques des équations mentionnées au paragraphe 2.2. Dans tous les cas, le terme de bruit sera dans le second membre et sera considéré comme un forçage aléatoire. Les équations aux dérivées partielles stochastiques obtenues seront mises sous forme d'Itô et, de ce point de vue, on peut les considérer comme des diffusions dans des espaces de dimension infinie.

2.4.1 Équation de Korteweg-de Vries stochastique

L'équation de Korteweg-de Vries (2.2.4) est un modèle idéal utilisé en physique comme modélisation de phénomènes où l'on a négligé un certain nombre de paramètres (ex : dérivation à partir des équations d'Euler 2d). D'un point de vue théorique, il n'est pas déraisonnable de prendre en compte ces paramètres stochastiquement par l'adjonction d'un terme de bruit $\dot{\xi}(x, t)$ dans le second membre. Lorsque les échelles de temps du phénomène modélisé par (2.2.4) sont plus grandes que les corrélations du bruit, on peut supposer que celui est de type bruit-blanc. Ainsi, est on ramené à considérer l'équation

$$(2.4.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \gamma \dot{\xi}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

pour un processus stochastique $\dot{\xi}(x, t)$ de type bruit blanc gaussien (voir (2.3.3)). Il existe également d'autres raisons pour motiver l'ajout d'un terme de forçage aléatoire. Pour reprendre le cas ayant motivé la découverte de l'équation, à savoir, le déplacement d'une vague, cette vague va effectivement se propager indéfiniment sans déformation

si aucune forme ne s'oppose à elle et ne la perturbe. Dans les faits, la pression atmosphérique, l'inégalité du fond marin, ou des différences de température sont autant d'éléments venant perturber la vague, qui aura tendance à s'amortir avec le temps. En particulier, dans le cadre de la propagation de solitons de type ions acoustiques dans un plasma, des expériences physiques [12] observent que pour un profil initial de type soliton, l'onde moyenne (calculée sur plusieurs expériences) est amortie et que son amplitude décroît comme $t^{-\alpha}$ pour $\alpha > 0$. Or ce comportement a déjà été mis en évidence théoriquement pour (2.4.1) dans le cas où $\dot{\xi} = \dot{\xi}(t)$, processus gaussien de type bruit blanc, ne dépend pas du temps [49]. C'est un cas très particulier car dans ce cas (2.4.1) reste intégrable. Détaillons ce point.

Considérons $u = u(x, t)$ la solution de (2.4.1) où $\dot{\xi}(x, t) = \dot{\xi}(t)$ est un bruit blanc gaussien et où $u(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon}}(x - x_0))$ pour un réel $c > 0$. On pose $U(x, t) = u(x, t) - \gamma W(t)$ où W est un processus de Wiener scalaire. Alors U est solution formelle de

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \gamma W \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

On effectue le changement de variables et de fonctions suivant : $X = x - \gamma \int_0^t W(s) ds$, $V(X, t) = U(x, t)$. Alors le nouveau système satisfait l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^3 V}{\partial X^3} + V \frac{\partial V}{\partial X} = 0,$$

avec la donnée initiale $V(X, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(\kappa x)$ (voir (2.5.4)). Ainsi, la solution de (2.4.1) avec $\dot{\xi}$ un bruit blanc en temps s'écrit dans ce cas :

$$(2.4.2) \quad u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left(\kappa(x - x_0 - ct) - \gamma \kappa \int_0^t W(s) ds \right) + \gamma W(t).$$

L'auteur montre dans [49] qu'alors $\max_x \mathbb{E}u(x, t)$ décroît comme $t^{-3/2}$. Ce résultat théorique avec l'expérience de physique citée suggèrent alors un modélisation du bruit comme de ceux décrits en 2.3.3. Dans la figure 2.5 sont montrés quelques simulations de la diffusion de $\mathbb{E}(u)$ avec $\dot{\xi}(x, t) = \dot{\xi}(t)$ bruit blanc gaussien pour plusieurs niveaux de bruit.

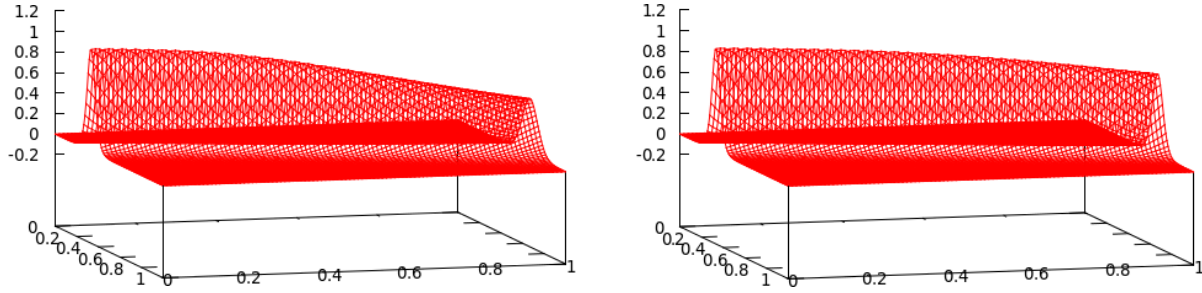


FIGURE 2.5 – $\mathbb{E}[u]$ pour KDV stochastique avec bruit blanc additif temporel ($\varepsilon = 0.1$ à gauche, 0.05 à droite)

Pour un bruit gaussien tels que (2.3.3), la forme d'Itô de (2.4.1) s'écrit comme

$$(2.4.3) \quad du + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dt = \gamma \Phi dW, \quad u(\cdot, 0) = u_0.$$

Il s'agit de l'équation de Korteweg–de Vries stochastique qu'il faut comprendre comme

$$u(t) - u_0 + \int_0^t \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) d\tau = \gamma \Phi W(t), \quad \forall t \geq 0,$$

au sens des distributions.

Pour des données dans $H^1(\mathbb{R})$ (c.-à-d. $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ et $\Phi \in \mathcal{L}_2(L^2(\mathbb{R}), H^1(\mathbb{R}))$), l'existence et l'unicité pour (2.4.5) a été établi dans [16] et dans le cadre $L^2(\mathbb{R})$ dans [19] généralisant au cas stochastique les techniques utilisées dans [33] pour le cas H^1 et [32] pour le cas L^2 . Dans [43], l'auteur utilise les propriétés de régularisation locale pour construire une unique solution à (2.4.5) dans des espaces à poids basés sur $L^2(\mathbb{R})$ pour des données localisées.

Mentionnons pour finir les cas où le terme de bruit dépend de la solution, c.-à-d. de la forme $\sigma(u(x, t))\dot{\xi}(x, t)$. On parle dans ce cas de bruit multiplicatif. Dans le cas contraire, on parle de bruit additif. Dans le cas où $\sigma(u) = u$ et où l'opérateur Φ est un opérateur de convolution avec un noyau $H^1(\mathbb{R})$ (bruit homogène $H^1(\mathbb{R})$), citons les travaux [17, 18].

Dans nos simulations, les bruits considérés seront souvent plus irréguliers que ce que supporte les théories d'existence des solutions. En particulier, nous travaillerons dans le cas cylindrique où $\Phi = I$.

2.4.2 Équation de Burgers stochastique

L'équation de Burger (2.2.2) a été considéré un temps comme un modèle commode de la turbulence (comme simplification des équations de Navier–Stokes). Au début des années 50, J. Cole et E. Hopf [13, 27] mirent au point une technique de représentation des solutions de (2.2.2) pour une classe assez large de donnée initiale. Dans ce cas, même les structures de petites échelles ne peuvent paraître chaotiques ou imprévisibles et ce modèle de turbulence a du être abandonné. Dans [11], les auteurs suggérèrent néanmoins la version stochastique de l'équation de Burgers comme un modèle de la turbulence.

Pour reprendre les notations du paragraphe précédent, la version stochastique de Burger que nous allons considérer ici s'écrit

$$(2.4.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \gamma \dot{\xi}(x, t),$$

ou sous forme d'Itô

$$(2.4.5) \quad du + \left(-\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dt = \gamma \Phi dW,$$

avec la donnée initiale $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

L'existence et l'unicité de la solution pour $\Phi = I$ et $x \in [0, 1]$ (bruit blanc espace-temps) avec conditions aux bords périodiques a été montrée par G. Da Patro, A. Debussche et R. Temam dans [14] pour des données initiale $u_0 \in L^2(0, 1)$.

2.5 Méthode de résolution numérique

2.5.1 Partie déterministe

Comme nous le verrons un peu plus tard, aussi bien dans le cas de méthode de Monte-Carlo que dans le cas de la méthode utilisant les chaos de Wiener, nous avons besoin d'une méthode de résolution du cas déterministe. Nous allons exposer ici la méthode utilisée à travers l'exemple de la résolution de l'équation de Korteweg-de Vries :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad u(\cdot, 0) = u_0.$$

avec conditions aux bords périodiques. En effet, si l'intervalle de résolution est suffisamment large (ou le paramètre $\varepsilon > 0$ suffisamment petit) la solution de (2.2.4) avec conditions aux bords périodiques peut être considérée comme une bonne approximation de la solution sur $\mathbb{R}$.

Notation 2.5.1. *Nous utiliserons dans la suite les notations suivantes :*

X : horizon en espace $x \in [0, X]$

T : horizon en temps $t \in [0, T]$

NBx : nombre de pas d'espace

NBt : nombre de pas de temps

h : précision en espace, $h = \frac{X}{NBx}$

Δt : précision en temps, $\Delta t = \frac{T}{NBt}$

$\mathbb{L}_2$: espace $L^2([0, X])$ de norme notée $\|\cdot\|_2$.

Schéma utilisé en temps

Nous savons que le soliton est une solution de l'équation de Korteweg-de Vries. Ainsi, il est évident que le schéma en temps doit conserver à chaque pas de temps

la norme $\mathbb{L}_2$ de $u(., t)$. Il n'est donc pas envisageable d'utiliser un schéma d'Euler, méthode numérique ne conservant pas cette norme et avec lequel nous aurions une diffusion purement numérique du soliton. Le schéma en temps utilisé sera celui de Crank-Nicolson.

Soit Δt le pas de temps utilisé par le schéma, on note u^n l'approximation de $u(., n\Delta t)$. Le schéma s'écrit alors de la façon suivante :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \varepsilon \frac{\partial^3 u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(u^{n+\frac{1}{2}})^2}{2} \right) = 0$$

Avec :

$$u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^{n+1} + u^n}{2}$$

La convergence de ce schéma a été étudiée pour KdV dans [5]. Nous devons ainsi résoudre à chaque pas de temps le système suivant :

$$(2.5.1) \quad \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\Delta t/2} + \varepsilon \frac{\partial^3 u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(u^{n+\frac{1}{2}})^2}{2} \right) = 0, \quad n \geq 0,$$

puis poser

$$u^{n+1} = 2u^{n+\frac{1}{2}} - u^n.$$

Afin de résoudre (2.5.1), nous réaliserons un point fixe sur $u^{n+\frac{1}{2}}$, pour $p \geq 0$ on notera $u^{n+\frac{1}{2},p}$ la p -ème itérée du point fixe sur $u^{n+\frac{1}{2}}$. L'initialisation de $u^{n+\frac{1}{2},0}$ se fera avec la solution obtenue au pas de temps précédent ou à l'aide d'un procédé de prédiction polynômiale décrit dans le dernier chapitre (section 4.8, chap. 4).

Schéma utilisé en espace

En espace nous utilisons un maillage régulier et des splines d'ordres $n \geq 1$. Discretisons l'intervalle $[0, X]$ en N intervalles distincts de même longueur, $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i \leq N - 1$. On note h le réel $x_1 - x_0 = X/N$, longueur commune des intervalles. Étant dans le cas périodique, nous assimilerons x_N à x_0 et plus généralement x_{N+k} à x_k , $\forall k \in \mathbb{N}$.

Soit V_h^n , l'espace vectoriel de dimension N engendré par les fonctions périodiques ϕ polynomiale par morceaux de degré n sur $\cup_{j=0}^{N-1} [x_j, x_{j+1}]$ dont le support est de taille minimale, à savoir $(n+1)h$, pour une régularité maximale aux points x_j , à savoir $\mathcal{C}^{n-1}$. Ainsi, on a

$$V_h^n = \{v_h \in \mathcal{C}^{n-1}([0, 1]); \forall i \in \{0, \dots, N-1\}, v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_n\},$$

où $\mathbb{P}_n$ désigne l'ensemble des polynômes d'ordre n .

Afin de pouvoir travailler numériquement dans cet espace, nous avons besoin d'une base de V_h^n . Nous allons maintenant en donner un exemple.

Remarque 2.5.2. *Dans les faits, nous sommes contraint d'utiliser des polynômes d'ordre 3 ou supérieur en raison de la présence dans l'équation de Korteweg-de Vries d'une dérivée d'ordre 3 en espace. Après intégration par partie (voir 2.5.1), cette dérivée peut être ramenée à un produit d'une dérivée d'ordre 1 et d'une d'ordre 2 sur les fonctions de base utilisées. La présence de cette dérivée d'ordre 2 empêche l'utilisation de polynôme d'ordre 1 (interpolation $\mathbb{P}_1$), ces derniers se retrouveraient annulés lors de la dérivation. Dans le cas de l'équation de Burger ou celle de la chaleur, l'utilisation des fonctions $\mathbb{P}_1$ est tout à fait possible.*

Ainsi, nous utiliserons dans toutes nos simulations les splines d'ordre 3 définies de

la façon suivante (voir Fig. 2.6 (a)) :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{x^3}{6} \\ P_2(x) &= -\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \\ P_3(x) &= \frac{x^3}{2} + x^2 + \frac{2}{3} \\ P_4(x) &= -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Soit φ la spline définie sur $[0, 4]$ par (voir Fig. 2.6 (b)) :

$$\varphi(x) = \begin{cases} P_1(x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ P_2(x-1) & \text{si } x \in [1, 2] \\ P_3(x-2) & \text{si } x \in [2, 3] \\ P_4(x-3) & \text{si } x \in [3, 4] \end{cases}$$

et $\varphi_k \in V_h^n$ définie par $\varphi_k(x) = \varphi\left(\left(\frac{x}{h} + 2 - k\right) \bmod X\right)$. Alors $(\varphi_k)_{k=0, \dots, N-1}$ est une base de V_h , l'inclusion de $\text{Vect}((\varphi_k)_{k=0, \dots, N-1})$ est triviale, φ_k étant polynôme d'ordre 3, la liberté de la famille est quant à elle facilement démontrable en regardant les supports de φ_k .

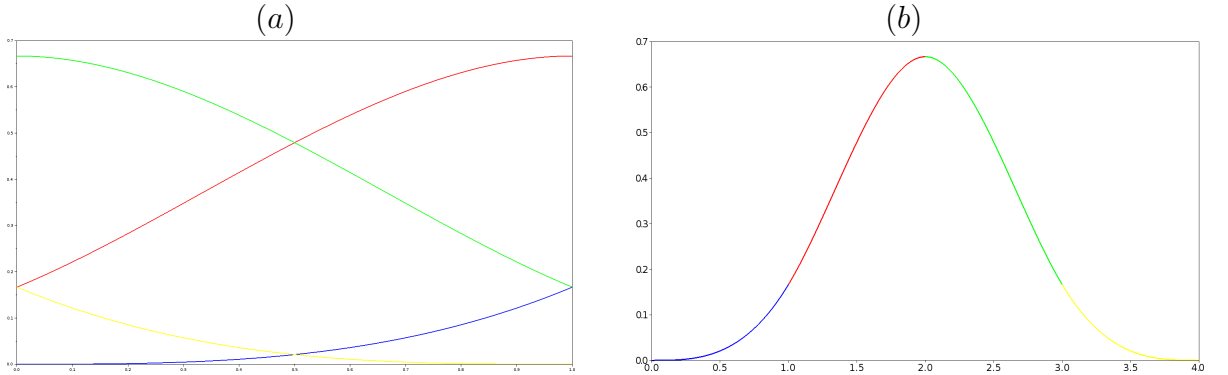


FIGURE 2.6 – Splines et fonctions de base utilisées.

En reprenant (2.5.1), on cherche à obtenir à chaque itération du point fixe la

fonction $u_h^{n+\frac{1}{2},p+1} \in V_h^n$ tel que

$$u_h^{n+\frac{1}{2},p+1} - u_h^n + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^3 u_h^{n+\frac{1}{2},p+1}}{\partial x^3} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(u_h^{n+\frac{1}{2},p})^2}{2} \right) = 0$$

En explicitant $u_h^n = \sum_i u_i^n \varphi_i$, $u_h^{n+\frac{1}{2},p} = \sum_i u_i^{n+\frac{1}{2},p} \varphi_i$ et $u_h^{n+\frac{1}{2},p+1} = \sum_i u_i^{n+\frac{1}{2},p+1} \varphi_i$, on a

$$\sum_i (u_i^{n+\frac{1}{2},p+1} - u_i^n) \varphi_i + \frac{\Delta t}{2} \sum_i u_i^{n+\frac{1}{2},p+1} \varphi_i''' + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i,j} u_i^{n+\frac{1}{2},p} u_j^{n+\frac{1}{2},p} (\varphi_i \varphi_j)' = 0.$$

On multiplie cette dernière équation par φ_k et on obtient après une intégration par partie pour tout k :

$$\begin{aligned} & \sum_i (u_i^{n+\frac{1}{2},p+1} - u_i^n) \int \varphi_i \varphi_k dx - \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \int \sum_i u_i^{n+\frac{1}{2},p+1} \int \varphi_i'' \varphi_k' dx \\ & + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i,j} u_i^{n+\frac{1}{2},p} u_j^{n+\frac{1}{2},p} \int (\varphi_i \varphi_j)' \varphi_k dx = 0. \end{aligned}$$

Soit M (matrice de masse) et D les matrices définies par :

$$M_{i,j} = \int \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \quad D_{i,j} = \int \varphi_i''(x) \varphi_j'(x) dx, \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

Ainsi, à chaque itéré de point fixe, on approche $u^{n+\frac{1}{2},p+1}$ par la fonction $u_h^{n+\frac{1}{2},p+1}$ vérifiant la formulation faible mise sous forme matricielle suivante :

$$(M - \varepsilon \frac{\Delta t}{2} D) U^{n+\frac{1}{2},p+1} = M U^n - \frac{\Delta t}{2} C(U^{n+\frac{1}{2},p}),$$

ou encore

$$(2.5.2) \quad U^{n+\frac{1}{2},p+1} = \left(M - \varepsilon \frac{\Delta t}{2} D \right)^{-1} \left(M U^n - \frac{\Delta t}{2} C(U^{n+\frac{1}{2},p}) \right),$$

où U et $C(U)$ désignent des vecteurs de $\mathbb{R}^N$ tels que $U = {}^t[u_1, \dots, u_N]$ et $C(U)_k = \sum_{i,j} u_i u_j \int (\varphi_i \varphi_j)' \varphi_k$.

La condition d'arrêt du point fixe utilisée est la suivante : $\|U^{n+\frac{1}{2},p+1} - U^{n+\frac{1}{2},p}\| < e$ avec e l'erreur machine.

Validation du code déterministe

Avant d'étudier le cas stochastique il est important de valider la méthode utilisée dans le cas déterministe. Pour cela nous allons la confronter à différentes situations qui ont été étudiées formellement pour l'équation qui est la plus délicate à traiter numériquement, c'est à dire l'équation de Korteweg-de Vries. Ces solutions particulières sont issues de deux articles. Premièrement, celui de 1895 écrit par les deux auteurs qui donnent leur nom à cette équation ([34]) et celui de 1965 de Zabusky et Kruskal ([54]) où les auteurs se sont intéressé à l'interaction entre plusieurs solitons.

Nous allons travailler ici avec la version suivante de l'équation de Korteweg-de Vries pour plusieurs types de données initiales :

$$(2.5.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Soliton simple

Le premier test que nous allons faire pour valider la méthode est de la confronter au cas qui a motivé la recherche de l'équation de Korteweg-de Vries : la propagation d'une onde solitaire. Pour cela, nous allons résoudre numériquement l'équation (2.5.3) avec la condition initiale suivante :

$$(2.5.4) \quad u(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(\kappa(x - x_0)).$$

Avec $\kappa = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\varepsilon}}$ et $x_0 \in [0, 1]$ le centre de la condition initiale, la solution de cette équation avec cette condition initiale est connue et est ce qu'on appelle un soliton :

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(\kappa(x - x_0 - ct))$$

Sur le graphique 2.7, on observe bien le déplacement sans déformation de l'onde à une vitesse $\frac{1}{3}$.

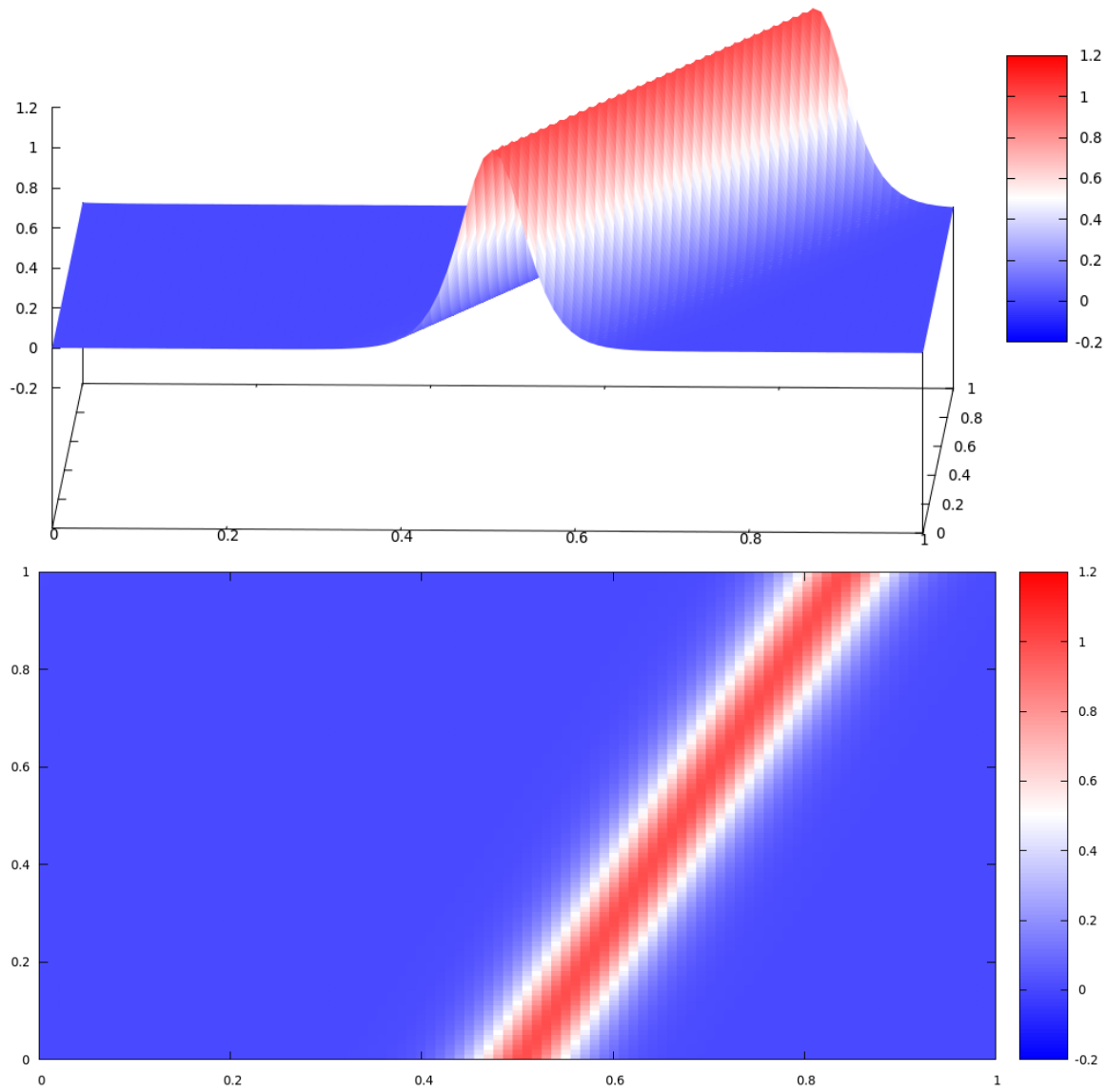


FIGURE 2.7 – KdV déterministe : $c = \frac{1}{3}, \varepsilon = 2.10^{-4}$

Collision de deux solitons

Le deuxième test est la simulation de la collision de deux solitons. Nous allons donc prendre deux solitons de vitesses différentes pour que les deux puissent interagir :

$$u(x, 0) = 3c_1 \operatorname{sech}^2(\kappa_1(x - x_{0,1})) + 3c_2 \operatorname{sech}^2(\kappa_2(x - x_{0,2}))$$

Avec $\kappa_i = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_i}{\varepsilon}}$ pour $i = 1, 2$ et $x_{0,1}$ et $x_{0,2} \in [0, 1]$ les points de départ des 2 solitons que nous prendrons suffisamment éloignés pour que les deux solitons soient bien distincts à $t = 0$.

On observe dans la figure 2.8 que chaque soliton sort de la zone d'interaction sans aucune déformation, si ce n'est un certain déphasage, ce qui est parfaitement en accord avec les résultats obtenus par Zabusky et Kruskal ([54]).

Split en n solitons distincts

Le dernier test est la simulation de l'équation (2.5.3) avec la condition initiale suivante :

$$u(x, 0) = \mu p(p+1) \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{\mu}{6\varepsilon}}(x-1)\right),$$

où μ est un réel et p un entier. Il est a été montré dans l'ouvrage [21, Chap 4, §11] que ce profil se décomposait en p solitons, ces solitons sont même parfaitement connus formellement :

$$u_n(x, t) = a_n \operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{\mu}{6\varepsilon}}n(x - c_nt)\right],$$

où $a_n = \mu n^2$, $c_n = \frac{2}{3}\mu n^2$ pour $1 \leq p \leq n$.

Comme attendu, nous avons bien l'apparition de trois solitons distincts (voir Fig. 2.9).

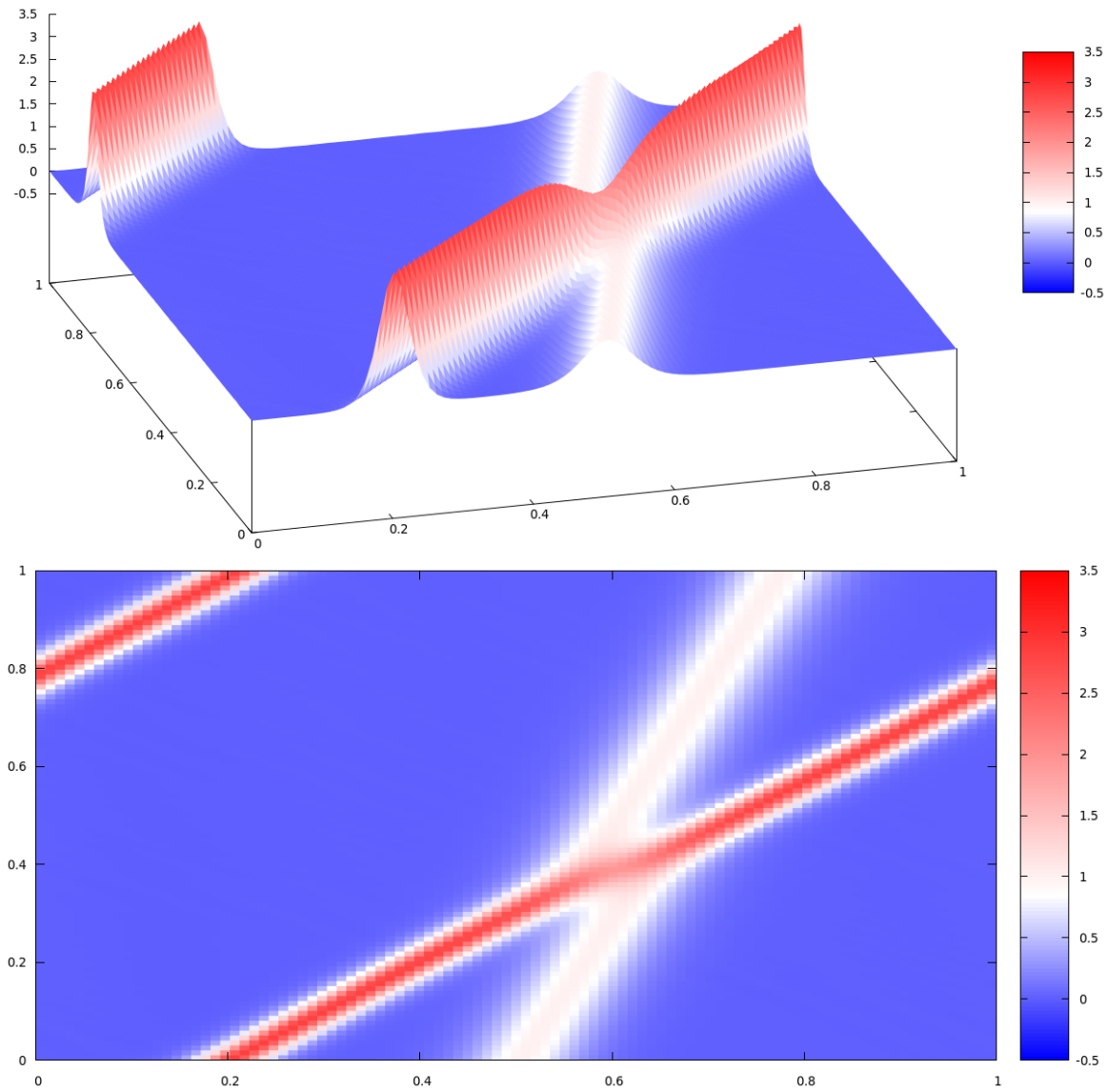
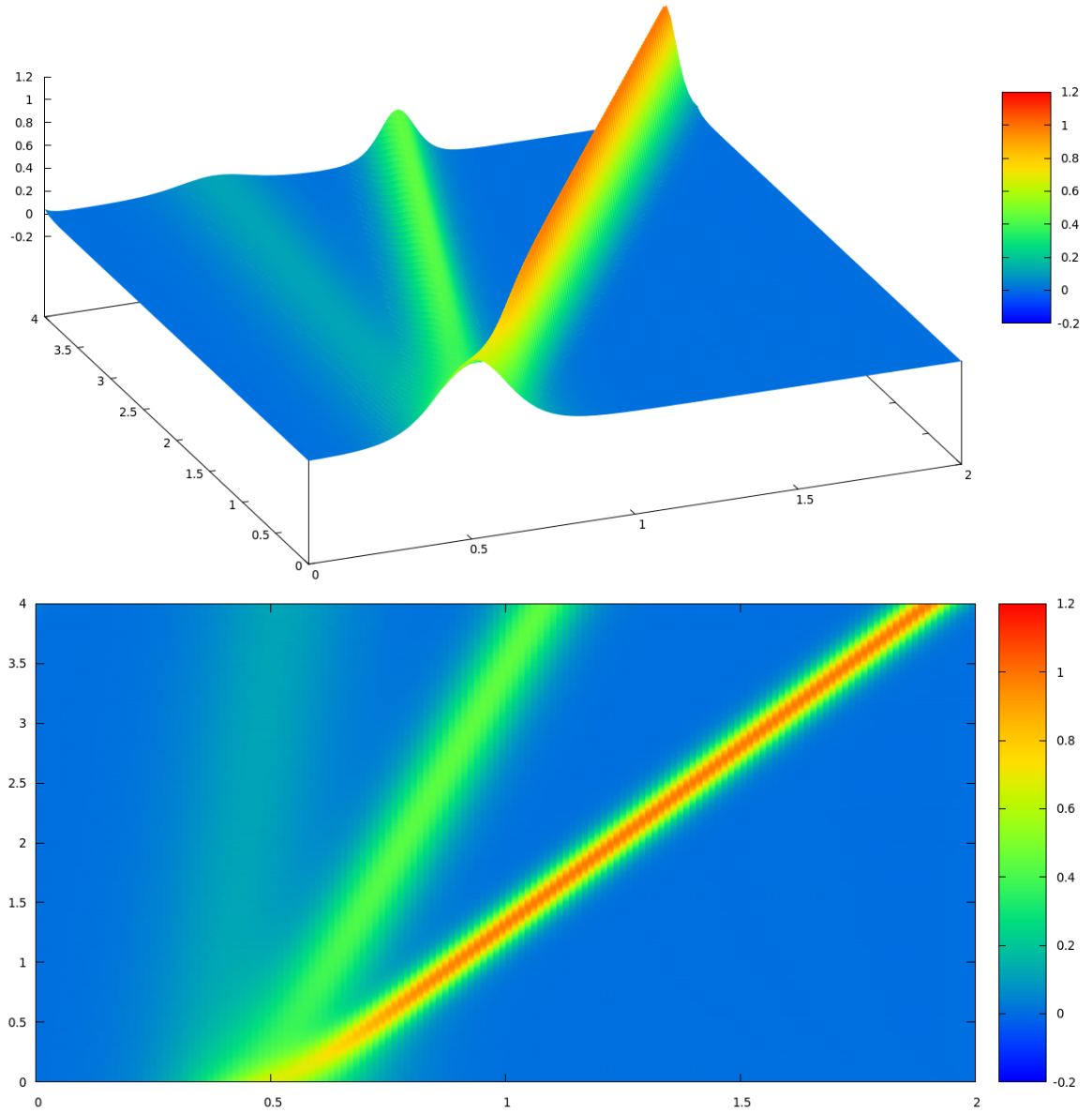


FIGURE 2.8 – Collision de deux solitons : $c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = 1$, $\varepsilon = 2.10^{-4}$

FIGURE 2.9 – Split en 3 solitons ($p=3, \mu = \frac{1}{18}$)

2.5.2 Partie stochastique

Dans cette section, nous allons exposer deux méthodes de résolution d'EDPS en loi. Ces méthodes numériques vont nous fournir des estimateurs sur les moments de la solution. Nous allons encore une fois illustrer nos propos à l'aide de l'équation de Korteweg-de Vries, mais ici dans le cas stochastique avec un bruit additif et multiplicatif :

$$du + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dt + \gamma u \frac{\partial u}{\partial x} dt = \varepsilon_1 dW_1(x, t) + \varepsilon_2 u dW_2(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

avec $\beta, \gamma, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ des constantes positives, W_1 et W_2 des processus de Wiener cylindriques (voir §2.3.1) ou des mouvements browniens scalaires s'ils n'ont qu'une seule dépendance. Nous parlerons de bruit additif si $\varepsilon_2 = 0$ et de bruit multiplicatif si $\varepsilon_1 = 0$.

Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est une méthode couramment utilisée pour estimer la loi de la solution d'EDPS à travers le calcul d'espérance de fonctionnelle de la solution. Typiquement, on l'utilise pour obtenir des estimateurs des moments de la solution. Cette méthode est basée sur la convergence que nous donne la loi des grands nombres.

L'application de la méthode de Monte-Carlo dans le cadre de résolution d'EDPS se fait de la façon suivante :

Soit $(\omega_{i,1})_{i>0}$ (resp $(\omega_{i,2})_{i>0}$) une famille de réalisations indépendantes du processus de loi W_1 (resp W_2) et soit u_i la solution de l'équation suivante :

$$(2.5.5) \quad du_i + \beta \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3} dt + \gamma u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dt = \varepsilon_1 d\omega_{i,1}(x, t) + \varepsilon_2 u_i d\omega_{i,2}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Pour une fonction f à valeurs réelles telle que $\mathbb{E}[|f(u)|] < \infty$ (condition nécessaire pour que la loi forte des grands nombres s'applique), on définit $\overline{f(u)}_n = \frac{\sum_{i=1}^n f(u_i)}{n}$.

Généralement on prendra des fonctions polynomiales de la forme x^k afin d'obtenir les moments de la solution (moyenne, variance...).

La loi des grands nombres nous donne la convergence (presque sûrement) :

$$\overline{f(u)}_n \longrightarrow_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(u)]$$

Le classique théorème central de la limite nous donne une vitesse de convergence

$$\frac{\overline{f(u)}_n - \mathbb{E}[f(u)]}{\sqrt{\text{Var}[f(u)]n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, 1).$$

La variance de $f(u)$ n'étant pas connue, nous utiliserons la variance empirique afin d'obtenir des intervalles de confiance. L'algorithme pour obtenir une estimation de $f(u)$ est le suivant :

```

S = 0 ;
Pour i allant de 1 à n
    simulation d'une trajectoire  $\omega_{i,1}$  de loi  $W_1$ 
    simulation d'une trajectoire  $\omega_{i,2}$  de loi  $W_2$ 
    résolution de l'équation déterministe (2.5.5) (solution  $u_i$ )
     $S = S + f(u_i)$ 
end
S=S/n

```

Remarque 2.5.3. *Ainsi, pour obtenir $\mathbb{E}[f(u)]$, la méthode de Monte Carlo nous demande de connaître la fonctionnelle f avant le lancement de la méthode afin de pouvoir sommer les $f(u_i)$ à chaque itération. Une autre solution est le stockage de l'ensemble des solutions u_i afin de pouvoir moyenner les $f(u_i)$ a posteriori, stockage qui peut être très lourd voir impossible si n est grand.*

Simulation de bruit blanc

Dans le cas où W_1 et W_2 sont des mouvements browniens ou des draps browniens, les processus $\dot{W}_1$ et $\dot{W}_2$ sont des bruits blancs temporels, spatiaux ou spatio-temporels,

suivant le type de mouvement brownien considéré. Nous devons ainsi simuler des bruits blancs gaussiens, plus précisément nous avons besoin de matrice de taille $NBt \times NBx$ représentant un bruit blanc gaussien sur $[0, T] \times [0, X]$. Pour cela, nous pouvons utiliser la définition qui voit le bruit blanc brownien comme les incréments d'un mouvement brownien. Pour un bruit blanc temporel, cela nous donne :

$$\dot{W}(k\Delta t) = W(k\Delta t) - W((k-1)\Delta t) \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{\Delta t}).$$

Cela revient donc à prendre une matrice $B_t \in \mathcal{M}_{NBx, NBt}$ définie par :

$$\forall x, t, \quad B_{x,t} = N_t \text{ avec } N_t \text{ une famille indépendante de } \mathcal{N}(0, \sqrt{\Delta t}).$$

De même, B_x correspondant respectivement au bruit blanc spatial est définie de la façon suivante :

$$\forall x, t, \quad B_{x,t} = N_x \text{ avec } N_x \text{ une famille indépendante de } \mathcal{N}(0, \sqrt{h}).$$

Méthode basée sur la décomposition en chaos de Wiener

Nous allons illustrer la méthode de décomposition en chaos sur l'équation de Korteweg-de Vries Stochastique suivante :

$$(2.5.6) \quad du + \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] dt = \begin{cases} \varepsilon dW, \\ \varepsilon u dW, \end{cases}$$

où $\varepsilon > 0$ et W est un processus Wiener cylindrique :

$$W(t) = \sum_{i \geq 0} \beta_i e_i,$$

avec $(\beta)_{i \geq 0}$ une famille indépendante de Browniens scalaires. Soit $\{m_j\}_{j \geq 0}$ une base Hilbertienne de $\mathbb{L}^2(0, T)$, par exemple :

$$m_j(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{T}} & \text{si } j = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{j\pi t}{T}\right) & \text{si } j > 0 \end{cases}$$

On pose

$$(2.5.7) \quad \forall i, j, \quad \xi_{i,j} = \int_0^T m_j(t) d\beta_i(t) = \int_0^T (m_j(t) e_i, dW(t))$$

On a alors $\xi_{i,j} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Enfin on pose pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N}^2)}$

$$\xi^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \prod_{i,j} H_{\alpha_{i,j}}(\xi_{i,j}).$$

On sait que $\{\xi^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N}^2)}}$ constitue une base de $L^2(\Omega)$ (voir chapitre 1).

En multipliant (2.2.4) par ξ^α puis en prenant l'espérance, on obtient formellement :

$$(2.5.8) \quad du_\alpha + \left[\frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathbb{E}[u^2 \xi^\alpha]}{2} \right) \right] dt = \begin{cases} \varepsilon \mathbb{E}[\xi^\alpha dW], \\ \varepsilon \mathbb{E}[\xi^\alpha u dW], \end{cases}$$

où on note $u_\alpha = \mathbb{E}[u \xi^\alpha]$. Grâce au caractère gaussien du bruit et (2.5.7), (2.5.8) est équivalent à :

$$(2.5.9) \quad du_\alpha + \left[\frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathbb{E}[u^2 \xi^\alpha]}{2} \right) \right] dt = \begin{cases} \varepsilon \delta_{|\alpha|=1} m_{j(\alpha)} e_{i(\alpha)} dt \\ \varepsilon \mathbb{E}[\xi^\alpha u dW] \end{cases}$$

où $|\alpha|$ est l'ordre de α défini par $|\alpha| = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}$. Ainsi, le second membre sera non nul uniquement pour les multi-indices contenant uniquement un 1, on note $j(\alpha)$ et $i(\alpha)$ les indices de cette unique composante non nulle.

Une formule d'intégration de Malliavin (Cf : Chapitre 1) permet de simplifier le dernier terme :

$$\mathbb{E}[\xi^\alpha u dW] = \mathbb{E}[u D_t \xi^\alpha] dt = \sum_{i,j} \sqrt{\alpha_{i,j}} m_j(t) e_i u_{\alpha(i,j)},$$

où on a utilisé (1.3.15) et où $\alpha(i,j)$ est défini de la façon suivante :

$$\alpha(i,j)_{k,l} = \begin{cases} \alpha_{i,j} - 1 & \text{si } k = i, l = j \\ \alpha_{i,j} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant la dernière égalité dans (2.5.8) on obtient :

$$(2.5.10) \quad du_\alpha + \left[\frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathbb{E}[u^2 \xi^\alpha]}{2} \right) \right] dt = \begin{cases} \varepsilon \delta_{|\alpha|=1} m_{j(\alpha)} e_{i(\alpha)} dt \\ \varepsilon \sum_{i,j} \sqrt{\alpha_{i,j}} m_j u_{\alpha(i,j)} e_i \end{cases}$$

Le terme quadratique se développe de la façon suivante :

$$\mathbb{E}[u^2 \xi^\alpha] = \sum_{\beta, \gamma} u_\beta u_\gamma \mathbb{E}[\xi^\beta \xi^\gamma \xi^\alpha] = \sum_{\beta, \gamma} c_{\alpha, \beta, \gamma} u_\beta u_\gamma,$$

où (voir chapitre 1)

$$(2.5.11) \quad c_{\alpha, \beta, \gamma} = \mathbb{E}[\xi^\alpha \xi^\beta \xi^\gamma] = \sqrt{\binom{\alpha}{\gamma} \binom{\beta}{\gamma} \binom{\alpha + \beta - 2\gamma}{\alpha - \gamma}}.$$

Cette projection du bruit sur la base en chaos de Wiener nous permet ainsi d'obtenir une famille d'équations différentielles déterministes que l'on peut résoudre avec différentes méthodes (Fourier, éléments finis...). Contrairement à la méthode de Monte-Carlo nous avons ici l'indépendance entre la méthode de discrétisation du bruit et la méthode de résolution de l'EDP déterministe sous-jacente au sens où les trajectoires des processus de Wiener ne sont pas ici projetées sur la grille déterministe.

Nous utiliserons une méthode de résolution analogue à celle de l'équation présentée précédemment (2.5.1). Comme dans le cas déterministe nous utilisons un schéma de

Crank-Nicolson en temps avec un point fixe sur le demi-pas de temps :

$$\begin{aligned} \frac{u_\alpha^{n+\frac{1}{2},p+1} - u_\alpha^n}{\Delta t/2} + \frac{\partial^3 u_\alpha^{n+\frac{1}{2},p+1}}{\partial x^3} + \sum_{\beta,\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_\beta^{n+\frac{1}{2},p} u_\gamma^{n+\frac{1}{2},p}}{2} \right) \mathbb{E}[\xi_\beta \xi_\gamma \xi_\alpha] \\ = \begin{cases} \varepsilon \delta_{|\alpha|=1} m_{j(\alpha)} ((n + \frac{1}{2}) \Delta t) e_{i(\alpha)}. \\ \varepsilon \sum_{i,j} \sqrt{\alpha_{i,j}} m_j ((n + \frac{1}{2}) \Delta t) u_{\alpha(i,j)} e_i. \end{cases} \end{aligned}$$

Puis en projetant sur V_h^n et en notant $u_\alpha = \sum_i u_{\alpha,i} \varphi_i$, on a, pour chaque multi-indice α , les systèmes linéaires suivants :

$$U_\alpha^{n+\frac{1}{2},p+1} = (M - \frac{\Delta t}{2} D)^{-1} \left(M U_\alpha^n - \frac{\Delta t}{2} C_\alpha(U^{n+1,p}) + \begin{cases} \varepsilon M b_{add} \\ \varepsilon M b_{mult} \end{cases} \right)$$

où U_α et $C_\alpha(U)$ désignent les vecteurs ${}^t[u_{\alpha,1}, \dots, u_{\alpha,M}]$ et

$$C_\alpha(U)_k = \sum_{i,j,\beta,\gamma} c_{\alpha,\beta,\gamma} u_{\beta,i} u_{\gamma,j} \int (\varphi_i \varphi_j)' \varphi_k dx.$$

où b_{add} (respectivement b_{mult}) est le vecteur des coordonnées de la projection dans l'espace des splines de

$$\delta_{|\alpha|=1} m_{j(\alpha)} ((n + \frac{1}{2}) \Delta t) e_{i(\alpha)},$$

(resp.

$$\sum_{i,j} \sqrt{\alpha_{i,j}} m_j ((n + \frac{1}{2}) \Delta t) u_{\alpha(i,j)} e_i).$$

Ici la condition d'arrêt du point fixe est uniforme et porte sur tous les multi-indices α , soit : $\sum_\alpha \|U_\alpha^{n+\frac{1}{2},p+1} - U_\alpha^{n+\frac{1}{2},p}\| < e$ avec e l'erreur machine.

Numériquement on se restreindra à un ensemble de chaos A tel que par exemple (troncature en ordre et en fréquence) :

$$A_{r,n} = \{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n}, \quad |\alpha| \leq r\}.$$

On aura donc comme approximation de la solution u :

$$(2.5.12) \quad u \approx u^{r,n} = \sum_{\alpha \in A_{r,n}} u_\alpha \xi^\alpha$$

Il est intéressant de noter que si l'on restreint l'algorithme sur l'ensemble $A_{r,n} = \{0\}$, soit $r = n = 0$, le système se réduit à une seule EDP :

$$\frac{\partial u^{0,0}}{\partial t} + \frac{\partial^3 u^{0,0}}{\partial x^3} + \sum_{(\beta,\gamma) \in \{0\}^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_\beta u_\gamma}{2} \right) \mathbb{E}[\xi^\beta \xi^\gamma \xi^0] = \varepsilon_1 \mathbb{E}[\dot{W}_1(x, t) \xi^0] + \varepsilon_2 \mathbb{E}[u_0 \dot{W}_2(x, t) \xi^0].$$

Soit

$$\frac{\partial u^{0,0}}{\partial t} + \frac{\partial^3 u^{0,0}}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(u^{0,0})^2}{2} \right) = 0.$$

Ainsi le cas déterministe peut être vu comme un cas particulier de la méthode en chaos, cela nous permet d'utiliser le même code aussi bien pour la résolution en chaos que pour la méthode de Monte-Carlo, méthode qui nécessite la possession d'un code pour la résolution de la version déterministe de l'équation. Ceci offre principalement deux avantages, premièrement cela permet d'avoir qu'un seul code à modifier et deuxièmement cela rend plus facile la comparaison des méthodes, l'ordre des splines, la méthode d'inversion du système, le schéma en temps, l'initialisation du point fixe... Etc, ces facteurs étant tous gérés par un code unique.

Second membre dans le cas additif

Pour des raisons numériques évidentes nous devons nous restreindre à des sous-ensembles de $L^2[0, T]$ (de même pour $L^2[0, X]$. en espace), les deux sous-espaces dans lesquels nous travaillerons seront l'ensemble des fonctions de $L^2[0, T]$ constantes sur chaque intervalle $\left[\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n} \right]$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ dont voici une base orthonormée :

$$\left\{ \sqrt{\frac{n}{T}} \mathbf{1}_{\left[\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n} \right]}, k \in \{0, \dots, n-1\} \right\},$$

et l'espace vectoriel engendré par une troncature de la base de Fourier de $L^2[0, T]$:

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \left(\frac{2\pi n x}{T} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \left(\frac{2\pi n x}{T} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \right\}.$$

Ainsi nous allons pouvoir avec la méthode en chaos tracer le second membre associé à un chaos d'ordre 1 dans le cas additif :

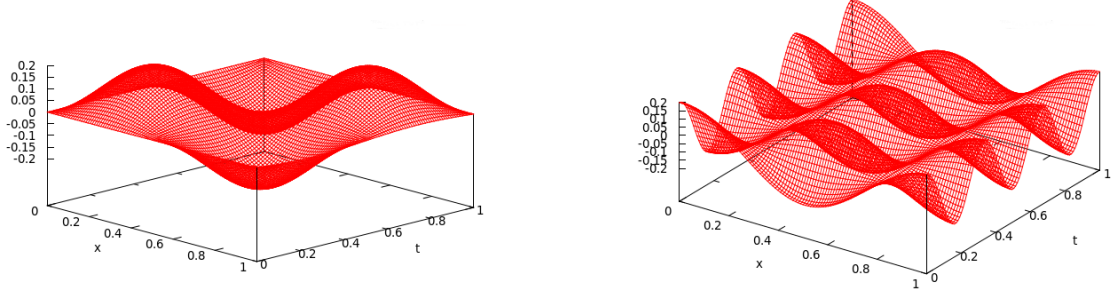


FIGURE 2.10 – Second membre associé au chaos définie par $\alpha(i, j) = \delta_{i=2, j=2}$ à gauche et $\alpha(i, j) = \delta_{i=1, j=4}$ droite, base Fourier

Dans le cas de la Base de Fourier, l'emplacement du 1 indiquera le nombre de fréquence en temps et le nombre de fréquence en espace du second membre (graphique 2.10).

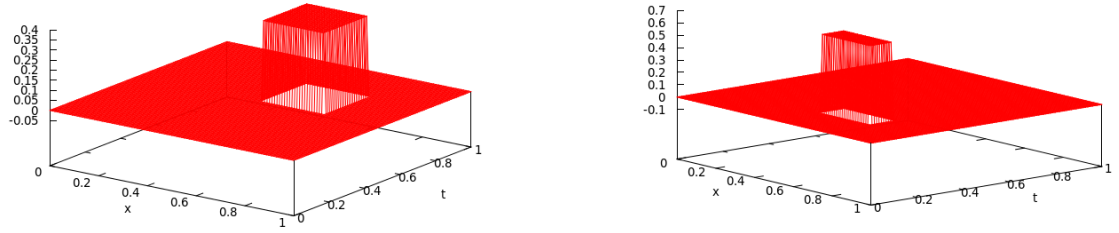


FIGURE 2.11 – Second membre associé au chaos définie par $\alpha(i, j) = \delta_{i=2, j=2}$, taille 4x4 à gauche, 4x10 à droite, base constante par morceaux

En utilisant des fonctions constantes par morceaux, la taille des chaos permet de choisir un niveau de précision en espace et en temps. Le graphe 2.11 représente le second membre associé à deux chaos d'ordre un ayant leur 1 pour $(i, j) = (2, 2)$ mais de tailles différentes.

Il est également possible de mixer les deux bases en utilisant une base différente

sur chaque composante, les graphes représentent les seconds membres associés à des chaos portés par la même fonction en temps (base constante par morceaux) mais par des fonctions en espace différentes. En particulier, cela peut permettre le traitement numérique d'un bruit limité à une période temporelle (ou une zone de l'espace) en travaillant sur un ensemble de chaos restreint aux chaos portés par la fonction correspondant à la période temporelle souhaitée. Avec uniquement des chaos du même type que ceux des graphes, la méthode traitera alors un bruit limité à la période temporelle $t \in [0.4, 0.6]$.

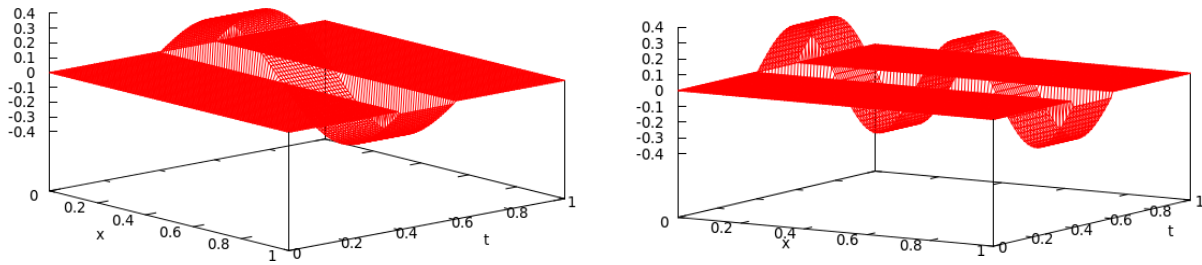


FIGURE 2.12 – Second membre associé au chaos définie par $\alpha(i, j) = \delta_{i=2, j=2}$, $\alpha(i, j) = \delta_{i=4, j=2}$

Fonctionnelle de la solution

Avec cette méthode on obtient une famille de fonctions $\{u_\alpha\}$ pour $\alpha \in A_{r,n}$ et non directement des fonctionnelles de u comme c'est le cas avec la méthode de Monte-Carlo. Mais il est assez facile en utilisant l'estimation (2.5.12) ainsi que les propriétés d'orthogonalité de ξ^α d'obtenir les moments de u .

Le caractère centré des ξ^α pour $|\alpha| \neq 0$ nous donne de façon immédiate le premier moment de u .

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[u] &= \mathbb{E} \left[\sum_{\alpha \in A} u_{\alpha} \xi^{\alpha} \right] \\
&= \sum_{\alpha \in A} u_{\alpha} \mathbb{E} [\xi^{\alpha}] \\
&= u_0
\end{aligned}$$

L'orthogonalité des ξ^{α} nous donne facilement le second moment de u :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[u^2] &= \mathbb{E} \left[\sum_{\alpha \in A} u_{\alpha} \xi^{\alpha} \sum_{\beta \in A} u_{\beta} \xi^{\beta} \right] \\
&= \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in A} u_{\alpha} u_{\beta} \mathbb{E} [\xi^{\alpha} \xi^{\beta}] \\
&= \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in A} u_{\alpha} u_{\beta} \delta_{\alpha, \beta} \\
&= \sum_{\alpha} u_{\alpha}^2
\end{aligned}$$

En utilisant l'orthogonalité de la base nous pouvons ainsi obtenir des formules pour $\mathbb{E}[u^n] \forall n \in \mathbb{N}$. Par contre cela ne permet l'obtention de formule "exacte" (une fois l'erreur due à la restriction sur l'ensemble $A_{r,n}$ admise) pour $\mathbb{E}[f(u)]$ si f n'est pas une fonction polynomiale. Par contre nous connaissons parfaitement la loi des ξ^{α} et nous sommes en mesure de les simuler, $\forall i > 0$ et $\alpha \in A_{r,n}$ on note ξ_i^{α} une réalisation de ξ^{α} .

À partir de cette famille et de l'ensemble des solutions u_{α} , nous avons désormais des trajectoires approchées u_i de la vraie solution.

$$u_i = \sum_{\alpha \in A_{r,n}} u_{\alpha} \xi_i^{\alpha}$$

Si l'ensemble $A_{r,n}$ n'est pas trop restreint, nous avons alors une famille de trajectoire suivant une loi proche de celle de la vraie solution. Nous pouvons donc utiliser l'algorithme de Monte-Carlo pour avoir une approximation de $\mathbb{E}[f(u)]$.

$$\frac{\sum_{i=1}^n f(u_i)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(u)]$$

Il est important de noter que cette méthode de Monte-Carlo sera beaucoup plus rapide que celle précédemment exposé même si la variance de l'estimateur reste sensiblement la même. En effet sur l'ensemble $A_{r,n}$ est suffisamment important pour donner des trajectoires u_i proches en loi des trajectoires de la vraie solution, la variance des trajectoires u_i sera sensiblement du même ordre que les vraies trajectoires. Ce qui rend ce Monte-Carlo plus rapide, c'est la simplicité de chaque itération. Elles consistent juste en l'addition de matrices. Alors que dans le Monte-Carlo classique pour chaque itération nous avons de très nombreux produits matriciels dans la résolution des EDPs.

Remarque 2.5.4. *Il est très intéressant de noter que les u_α sont constants. Ils ne dépendent que de l'équation considérée et non d'une trajectoire du bruit ou de la fonctionnelle que l'on cherche à moyenner. Il est ainsi possible de considérer un ensemble de chaos $A_{r,n}$ suffisamment grand pour avoir une approximation précise et stocker l'ensemble des u_α afin de pouvoir calculer à posteriori $\mathbb{E}[f(u)]$ pour une fonction f , de façon extrêmement rapide.*

2.6 Résultats numériques

Nous allons appliquer ces deux méthodes aux trois équations présentées précédemment au début du chapitre 2. L'équation de la chaleur qui offre l'avantage d'être linéaire et régularisante de par ses propriétés diffusives sera la première à être traitée pour ces raisons. Dans un second temps, nous traiterons de l'équation de Burgers pour la difficulté supplémentaire apportée par sa non linéarité et enfin l'équation de

Korteweg-de Vries qui, en plus d'être non linéaire, est une équation dispersive et non diffusive comme les précédentes, ce qui en terme de stabilité est une difficulté supplémentaire.

Concernant les chaos les notations seront les suivantes :

Notation 2.6.1.

A : Ensemble de chaos

NBx : Taille des chaos en espace (nombre de fréquences en espace)

NBt : Taille des chaos en temps (nombre de fréquences en temps)

Ord : Ordre des chaos utilisés. f et c : désigneront respectivement la base en Fourier et celle constante par morceaux.

" $A = 413ff$ " signifie que l'ensemble A est l'ensemble des chaos de taille 4 en temps, 1 en espace, que les chaos de A sont limités à l'ordre 3 et qu'ils sont définis aussi bien en temps qu'en espace avec la base de Fourier.

2.6.1 Équation de la chaleur stochastique

Nos premiers tests porteront sur l'équation de la chaleur stochastique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon_1 \dot{W}_1(x, t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

Cette équation une fois décomposée sur notre base en chaos, nous donne la famille d'EDP suivante :

$$(2.6.1) \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} = \varepsilon_1 \delta_{|\alpha|=1} m_{j(\alpha)} e_{i(\alpha)} \quad \alpha \in A$$

Ces équations sont linéaires contrairement à celles obtenues avec l'équation de KDV précédemment traitée dans la présentation de la méthode. Ainsi nous n'avons pas ici

de couplage entre les équations, chaque équation est indépendante. De plus, le second membre est nul pour les chaos d'ordre supérieur à 1, ainsi il est inutile d'utiliser des chaos d'ordre supérieur afin de traiter une telle équation. Nous aurons donc que deux variables d'ajustement concernant les chaos : le nombre de chaos utilisé ($|A|$) et le choix des bases m_j et e_i utilisées.

Nous allons donc comparer les résultats obtenus avec la méthode de Monte-Carlo et ceux obtenus avec les chaos. Notons qu'il est inutile de comparer les moyennes obtenues, chaque équation étant indépendante, le nombre de chaos utilisés n'aura aucune influence sur u_0 , solution associée au chaos d'ordre 0, seul porteur de la moyenne $\mathbb{E}[u]$. Nous utiliserons dans la suite les notations suivantes :

Notation 2.6.2. :

$\mathbb{E}_C$: moyenne obtenue avec la méthode en chaos

$\mathbb{E}_{MC}$: moyenne obtenue via la méthode de Monte-Carlo.

$err_1 : ||\mathbb{E}_C[u(.,.)] - \mathbb{E}_{MC}[u(.,.)]||_2^2$

$err_2 : ||\mathbb{E}_C[u^2(.,.)] - \mathbb{E}_{MC}[u^2(.,.)]||_2^2$

$err_3 : ||\mathbb{E}_C[u^3(.,.)] - \mathbb{E}_{MC}[u^3(.,.)]||_2^2$

bruit additif blanc temporel

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon_1 \dot{W}_1(t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

Nbt	err_1	err_2	err_3
2	5.14319e-09	8.35125e-07	2.01753e-07
6	5.14319e-09	8.81462e-08	2.12277e-08
10	5.14319e-09	5.66866e-09	1.31605e-09

TABLE 2.1 – Erreurs en fonction de la taille des chaos (1 million d'itérations pour le MC de référence), $\varepsilon_1 = 0.1$

On observe ici qu'avec des chaos d'ordre 1, la méthode s'avère très efficace en offrant une erreur de l'ordre de 10^{-9} sur les trois moments de la solution. En terme de temps de calcul, la méthode en chaos sur deux fréquences prend 2.3sec, tandis que le MC de référence utilisé prend une douzaine d'heures (configuration 3 (voir dernier chapitre section 4.4)). Les simulations donnant les résultats du tableau 2.6.1 ont été réalisées avec des chaos définis par la base de Fourier, les résultats avec la base constante par morceaux sont parfaitement semblables.

Un des avantages de la méthode en chaos est de pouvoir regarder le comportement de chaque chaos. Pour cela, nous allons numéroter les chaos de la façon suivante. Le chaos nul (celui correspondant à la condition initiale) portera le numéro 0, puis pour les autres, le chaos correspondant à la i -ème fréquence de la base aura le numéro i . L'indicateur choisi pour observer l'importance d'un chaos α à un instant t , sera le pourcentage de la norme $\mathbb{L}_2$ qu'il représente, soit :

$$\frac{100 \|u_\alpha(\cdot, t)\|_{\mathbb{L}_2}}{\sum_{\beta \in A} \|u_\beta(\cdot, t)\|_{\mathbb{L}_2}}$$

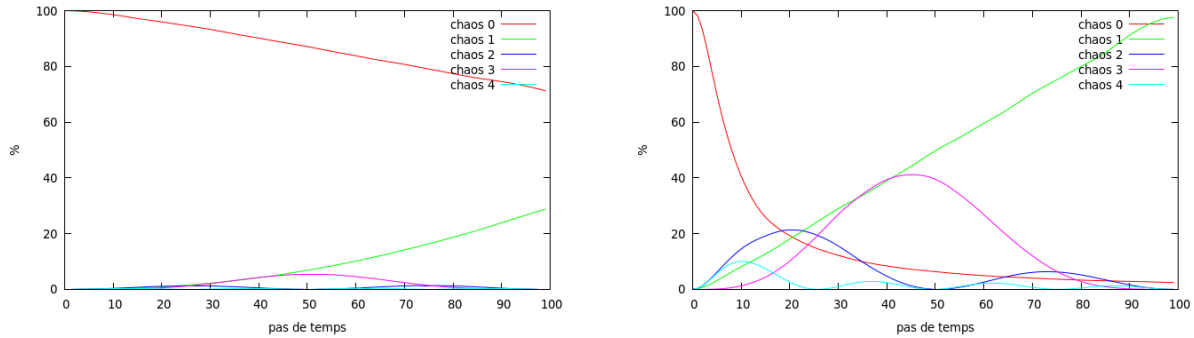


FIGURE 2.13 – Évolution de l'importance relative (en %) de la norme $\mathbb{L}_2$ de chaque chaos à travers de temps ($\varepsilon = 0.1$ à gauche, 1 à droite, base Fourier)

En observant les graphiques 2.13, nous voyons plusieurs choses :

- Plus le niveau est élevé, plus l'importance de la condition initiale (chaos nul, numéroté 0) diminue rapidement avec le temps, ce qui est un résultat attendu de façon évidente.
- L'unique chaos non nul ayant encore de l'importance à la fin de la résolution est le chaos correspondant à la première fréquence en Fourier, c'est à dire la moyenne du bruit. Les chaos de fréquence supérieur finissant tous avec une norme nulle en $t=T$.

Nbt	err_1	err_2	err_3
2	5.14319e-09	1.81097e-10	4.62395e-11
6	5.14319e-09	2.23529e-10	9.2624e-11
10	5.14319e-09	3.02233e-10	7.75265e-11

FIGURE 2.14 – Erreurs à $t=T$ en fonction de la taille des chaos $\varepsilon_1 = 0.1$

Ce deuxième point est intéressant dans le sens où si nous nous intéresserons uniquement à la solution au temps final T , il est parfaitement inutile de considérer des chaos de taille supérieur à 1. Ceci s'explique facilement : les chaos α correspondant aux fréquences supérieures fourniront un second membre d'intégrale en temps nulle à leur EDP, ainsi, sur l'intervalle $[0, T]$, l'apport énergétique de ce terme sera nul, il aura autant chauffé que refroidi. Ainsi $u_\alpha(., T) = 0$, si l'on regarde les erreurs non plus sur toutes la trajectoire mais uniquement à $t=T$, on observe que l'augmentation de la taille des chaos n'apporte rien (tableau 2.14).

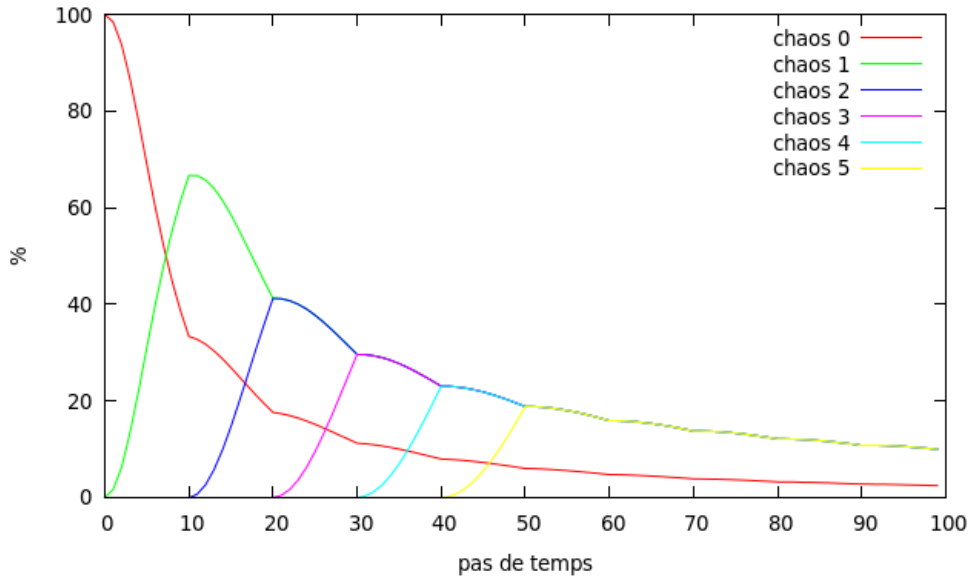


FIGURE 2.15 – Évolution de l'importance relative (en %) de la norme $\mathbb{L}_2$ de chaque chaos à travers de temps ($\varepsilon = 1$ base constante par morceau)

Avec une base constante par morceau, l'évolution est totalement différente :

- A la fin du processus, chaque chaos non nulle a exactement la même importance. Dans le cas d'un bruit écrasant la solution initiale comme c'est le cas sur le schéma 2.6.1, chaque chaos possède très exactement $\frac{1}{n}$ de la norme $\mathbb{L}_2$ totale, avec la taille de la base.
- On observe un phénomène de réveil progressif des chaos, en effet la base étant constante par morceau, le second membre associé à un chaos sera nul jusqu'au moment où la variable du temps atteindra le support de la fonction associée à ce chaos. Ce qui numériquement peut être intéressant, si l'on prend en compte ce phénomène, nous pouvons potentiellement limiter la complexité du code en désactivant de force certains chaos avant leur réveil.

Une conclusion rapide serait que dans le cas d'une base constante par morceaux, chaque chaos ayant la même importance à $t=T$, il est important de ne pas réduire la taille des chaos même pour une étude se limitant aux résultats finaux. Ce n'est pas le cas, car contrairement au cas Fourier, les différentes fonctions de la base dépendent de la taille des chaos. Nous avons vu précédemment que seule la moyenne avait de l'importance pour une étude à $t=T$. De ce fait, toute taille de chaos conviendra. En effet si nous considérons des chaos de taille n , l'information sur le bruit sera limitée à ses moyennes sur des intervalles de taille $\frac{T}{n}$, mais quel que soit n , l'information de la moyenne totale du bruit sera une information portée (à parts égales) par l'ensemble des chaos. Ainsi, comme dans le cas Fourier, des chaos de taille 1 suffisent pour une telle étude (Pour cette taille de chaos, les deux bases donnent en fait exactement les mêmes chaos).

bruit additif blanc spatial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon_1 \dot{W}_1(x) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

NBx	err_1	err_2	err_3
2	5.74901e-07	7.03792e-05	1.59952e-05
5	5.74901e-07	3.5442e-06	7.56029e-07
10	5.74901e-07	1.09065e-07	3.04293e-08
20	5.74901e-07	2.42376e-08	5.4195e-09

FIGURE 2.16 – Erreurs en fonction de la taille des chaos, $\varepsilon_1 = 0.1$

NBx	err_1	err_2	err_3
2	5.74901e-07	0.000254265	3.73382e-05
5	5.74901e-07	3.69657e-05	6.20992e-06
10	5.74901e-07	3.2728e-06	5.8207e-07
20	5.74901e-07	7.97188e-08	2.32272e-08

FIGURE 2.17 – Erreurs à $t=T$ en fonction de la taille des chaos, $\varepsilon_1 = 0.1$

Dans le cas d'un bruit spatial, on observe une amélioration de la précision avec l'augmentation de la taille des chaos utilisés et ce même si on limite l'étude sur la solution au temps final. Cette méthode reste toujours intéressante en terme de temps de calcul, en utilisant des chaos de taille 20, le temps de calcul est de l'ordre de 2.5sec, le millions de d'itération de MC servant de référence prenant quant à lui toujours une douzaine d'heures.

L'augmentation du nombre de chaos n'influe quasiment pas sur le temps de résolution. Cela viens du fait que la linéarité de l'équation de la chaleur nous permet de nous limiter à des chaos d'ordre 1. Ainsi nous avons $\#A = \binom{0}{NBx} + \binom{1}{NBx} = NBx + 1$. Plus précisément nous avons le chaos d'ordre 0 porteur de la condition initiale et NBx chaos d'ordre 1, un pour chaque fréquence. L'augmentation du nombre d'EDP à résoudre est donc linéaire. Cette augmentation ne provoque pas pour autant une augmentation linéaire du temps de calcul, cela viens du fait que la résolution d'une EDP est extrêmement rapide par rapport à d'autres opérations (préparation des matrices de masse/laplacien, écriture des résultats dans un fichier...).

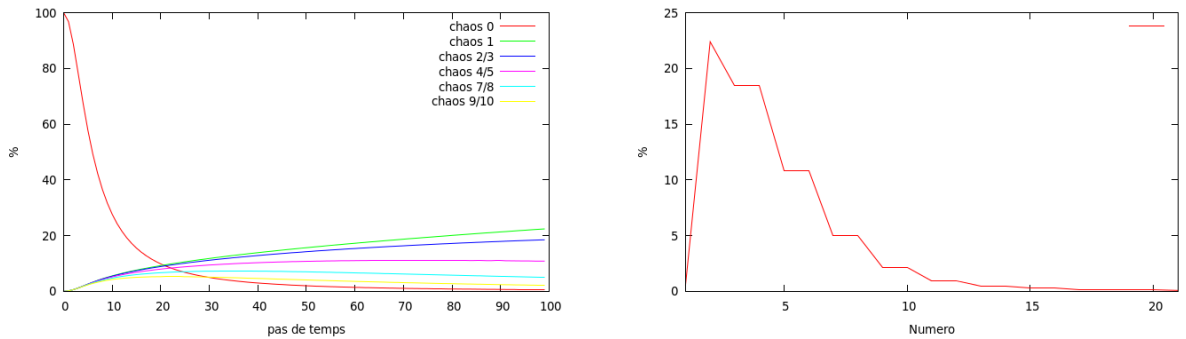


FIGURE 2.18 – Évolution de l'importance relative (en %) de la norme L_2 de chaque chaos ($\varepsilon = 1$, état à $t=1$ à droite, base Fourier)

Ici, on observe que le chaos correspondant à la moyenne est toujours le plus important avec 23% de la norme totale, mais les chaos suivants (ceux en cosinus et sinus) ont également une importance non négligeable, ce qui est tout à fait cohérent avec le fait que dans le cas d'un bruit spatial, il est nécessaire même dans le cas d'une étude se limitant au résultat au temps final, d'utiliser des chaos d'une certaine taille afin d'avoir des résultats précis.

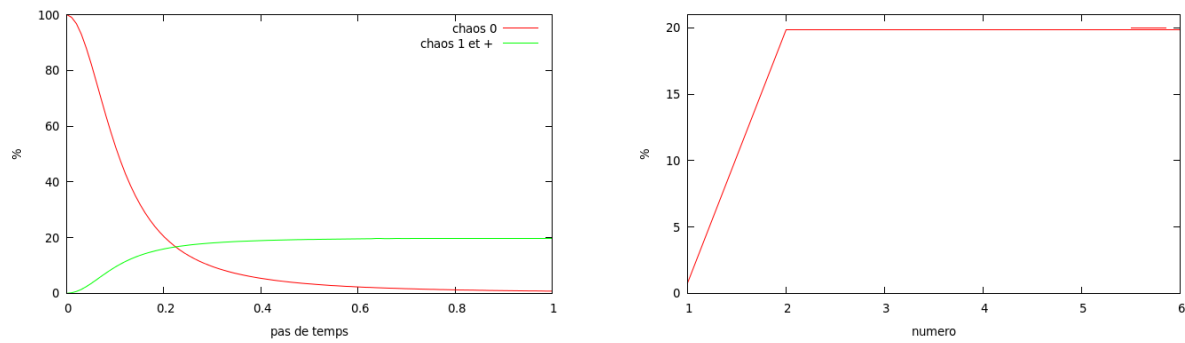


FIGURE 2.19 – Évolution de l'importance relative (en %) de la norme L_2 de chaque chaos ($\varepsilon = 1$, état à $t=1$ à droite, base Constante)

Comme dans le cas temporel, on observe une égalité de chaque chaos (non nulle) en terme d'importance.

bruit blanc spatio-temporel

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon_1 \dot{W}_1(x, t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

Dans le cas d'un bruit spatio-temporel, Les chaos ne seront plus identifiés par des vecteurs. Ils seront identifiés par des matrices non nécessairement carrées. Dans cette section, nous aurons donc un tableau pour chaque erreur. Comme dans les cas précédents, l'estimateur pour le moment d'ordre 1 fourni par la méthode est indépendant de la taille des chaos utilisés. La comparaison portera donc uniquement sur les erreurs faites sur le moment d'ordre 2.

NBx/Nbt	2	5	10	20
2	0.00139848	0.00139716	0.00139697	0.00139685
5	0.000369943	0.000354388	0.0003522	0.000350728
10	0.000153257	0.00010144	9.32741e-05	8.78588e-05
20	0.000105757	4.45243e-05	3.11226e-05	2.26386e-05
40	9.72873e-05	3.57717e-05	1.96315e-05	9.63308e-06

FIGURE 2.20 – err_2 à $t=1$ en fonction de la taille des chaos, $\varepsilon_1 = 0.1$

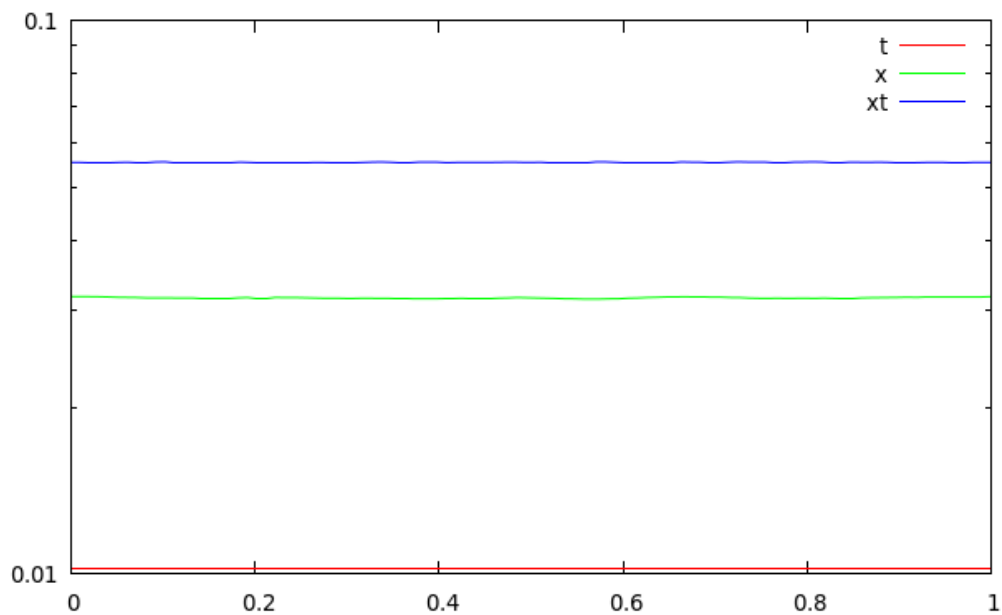
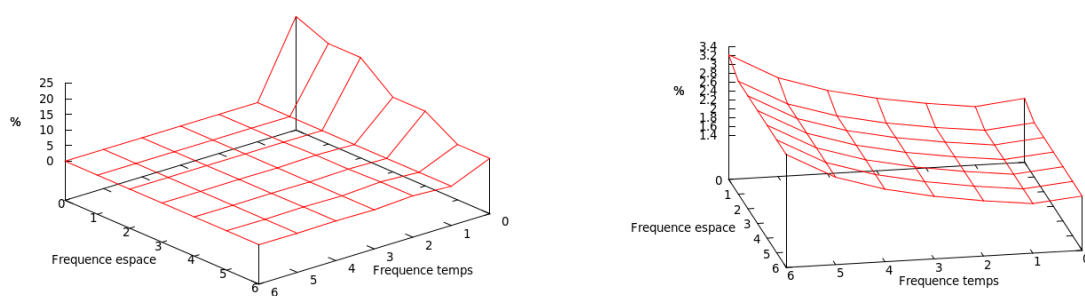
NBx/Nbt	2	5	10	20
2	0.0136048	0.000847151	0.000828194	0.00081714
5	0.000518587	0.000336074	0.000307318	0.000291275
10	0.00033566	0.000136328	0.000105985	9.0453e-05
20	0.000280897	7.48641e-05	4.20642e-05	2.68631e-05
40	0.000271881	6.38898e-05	2.88503e-05	1.26012e-05

FIGURE 2.21 – err_2 en fonction de la taille des chaos, $\varepsilon_1 = 0.1$

Comme dans le cas d'un bruit blanc ayant uniquement une dépendance en temps, l'augmentation du nombre de fréquences en temps n'apporte rien en terme de précision pour une étude à $t = T$. La raison est toujours la même : les chaos portés en temps pour une fonction de base autre que la constante donnent une EDP dont le second membre est d'intégrale nulle en temps. Par contre, il est nécessaire de traiter un certain nombre de fréquences spatiales afin d'obtenir des résultats précis.

Les résultats ci-dessus sont ceux obtenus avec la base de Fourier en temps et en espace, avec une base constante par morceaux ou en mixant les bases (Fourier sur une composante, constante sur l'autre) les résultats sont légèrement moins bon à nombre de fréquences égal, mais la dynamique d'amélioration des résultats en fonction du nombres de fréquence est la même.

La dégradation des résultats (10^{-11} dans le cas temporel, 10^{-9} dans le cas spatial et 10^{-6} ici) s'explique par l'augmentation de la variance de l'algorithme de Monte Carlo en fonction du type de bruit (cf : graphe 2.22)

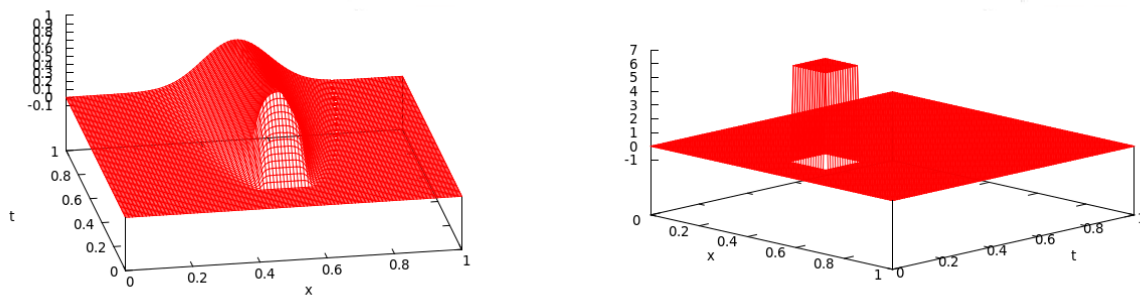
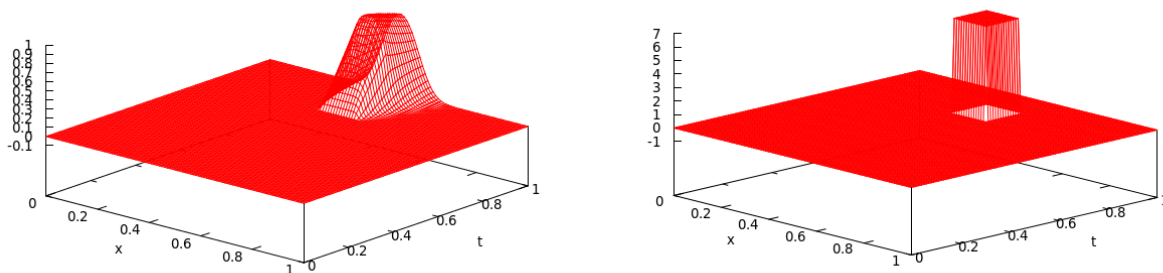
FIGURE 2.22 – Variance à $T=1$ en fonction du type de bruitFIGURE 2.23 – Importance relative (en %) de la norme $\mathbb{L}_2$ de chaque chaos ($\varepsilon = 1$, état à $t=1$, Foutier à gauche, constant par morceaux à droite)

chaos spatio-temporel oblige, les chaos d'ordre 1 ne sont pas identifiés par un seul entier. Ils le sont désormais par deux : celui correspondant à leur fréquence en temps et celui correspondant à leur fréquence spatiale, le graphe 2.23 a ainsi ses deux entiers en abscisse et ordonné.

En utilisant la base de Fourier aussi bien en temps qu'en espace, nous voyons (graphique 2.23 à droite) qu'à $t=1$, seul les chaos ayant une fréquence nulle en temps (dont la fonction de base associée est la fonction constante) sont non nuls. Cela s'explique de la même manière que dans le cas temporel. Les chaos ayant une fréquence temporelle supérieure sont portés en temps par une fonction d'intégrale nulle. Ainsi les seconds membres des équations déterministes associés à ces chaos, unique terme apportant de l'énergie au système, vont autant chauffer que refroidir au cours du temps. Ainsi, à $t=1$, l'énergie restante est nulle.

Avec des fonctions constantes par morceaux (graphique 2.23 gauche), le résultat est tout autre et un peu plus surprenant. Alors que dans le cas d'un bruit blanc temporel ou spatial, chaque chaos défini avec des fonctions constantes par morceaux avait, à $t=1$ la même importance que les autres, ce n'est plus le cas ici. Les chaos étant portés par la même fonctions spatiales ont la même importance, par contre, plus le support de leur fonction en temps apparaît rapidement, moins le chaos aura une norme importante à l'arrivée.

Ceci s'explique par la diffusion de l'équation de la chaleur, chaque chaos va apporter au système la même quantité énergie, mais plus cette énergie apparaîtra tôt, plus l'équation de la chaleur aura du temps pour diffuser cette énergie et ainsi réduire la norme $\mathbb{L}_2$ du chaos associé. Les graphes 2.24 et 2.25 illustrent cela à travers l'exemple de deux chaos ayant le même support en espace mais un support en temps différent. Notons que la notion d'importance des chaos que nous utilisons ici est directement liée au choix de la norme, l'équation de la chaleur conservant la norme $\mathbb{L}_1$ avec ce choix, tous les chaos auraient la même "importance" pour la base constante par morceaux.

FIGURE 2.24 – solution u_α / second membre associé au chaos $\alpha(i, j) = \delta_{i=3, j=1}$ FIGURE 2.25 – solution u_α / second membre associé au chaos $\alpha(i, j) = \delta_{i=3, j=5}$

bruit multiplicatif blanc temporel

Avec un bruit multiplicatif, le second membre de la famille d'EDP déterministe après projection sur la base ξ^α est : $\sum_{i,j} \varepsilon \sqrt{\alpha_{i,j}} m_j u_{\alpha(i,j)} e_i$, terme qui est non nul même pour $|\alpha| > 1$, sauf dans le cas trivial où la condition initiale est elle-même nul. Ainsi, avec un bruit multiplicatif, il n'y plus de raison de se limiter à des chaos d'ordre 1. La méthode en chaos a désormais deux paramètres : la taille des chaos et l'ordre maximal.

Notons que si $|\alpha| = 0$, la somme $\sum_{i,j} \sqrt{\alpha_{i,j}} m_j u_{\alpha(i,j)} e_i$, le chaos nul n'ayant pas de prédécesseurs, ainsi la taille et l'ordre des chaos n'auront aucune influence sur u_0 , pour cette raison comme dans le cas additif, la comparaison des résultats des estimateurs du moment d'ordre 1 n'a aucun intérêt.

NBt / ordre	1	2	3
1	6.11765e-06	5.72443e-06	5.71518e-06
3	1.31259e-06	9.93178e-07	9.85351e-07
5	6.27061e-07	3.78632e-07	3.73169e-07
20	1.5571e-07	2.19294e-08	2.06189e-08

FIGURE 2.26 – err_2 en fonction de la taille de l'ordre des chaos. , $\varepsilon_1 = 0.4$, base Fourier

NBt / ordre	1	2	3
1	3.43125e-07	1.05368e-10	1.67292e-10
3	3.43125e-07	1.07877e-10	1.68496e-10
5	3.43125e-07	1.11424e-10	1.69527e-10
20	3.43125e-07	1.30719e-10	1.78317e-10

FIGURE 2.27 – err_2 à $t=1$ en fonction de la taille de l'ordre des chaos. , $\varepsilon_1 = 0.4$, base Fourier

Comme dans le cas temporel additif, l'augmentation de la taille des chaos ne réduit pas l'erreur de la méthode pour une étude à $t = 1$. Par contre, on note une amélioration significative des résultats en passant à des chaos d'ordre 2. Dans le cadre d'une étude sur toute la trajectoire, l'augmentation de la taille des chaos augmente la précision de la méthode.

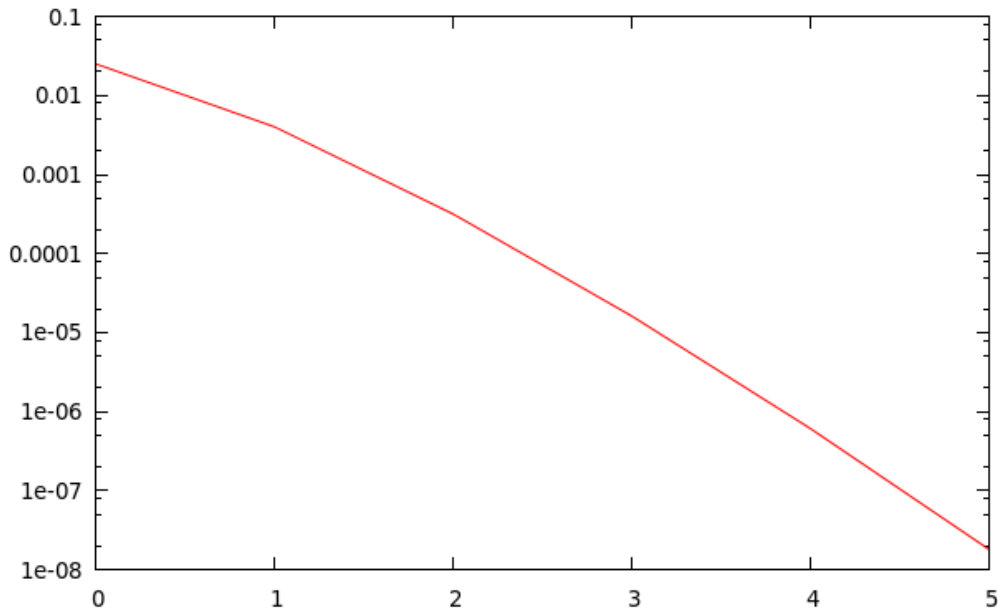


FIGURE 2.28 – Norme $\mathbb{L}_2$ de chaque chaos en fonction de son ordre (Nbt=1), échelle logarithmique

La décroissance des normes de u_α est exponentielle, ce qui explique le faible effet des chaos de taille 3. Ce résultat facilement déductible de $\sum_{i,j} \varepsilon \sqrt{\alpha_{i,j}} m_j(t) u_{\alpha(i,j)} e_i$, le coefficient ε se répandant en cascade avec l'ordre des chaos.

2.6.2 Équation de Burgers stochastique

$$(2.6.2) \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + \sum_{\beta, \gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_\beta u_\gamma}{2} \right) \mathbb{E}[\xi^\beta \xi^\gamma \xi^\alpha] = \varepsilon_1 \delta_{|\alpha|=1} m_{j(\alpha)} e_{i(\alpha)}$$

Ici, l'équation n'étant pas linéaire, le terme $\sum_{\beta, \gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_\beta u_\gamma}{2} \right) \mathbb{E}[\xi^\beta \xi^\gamma \xi^\alpha]$ lie les équations entre elles. Ainsi, bien que le second membre soit nul pour les chaos d'ordre supérieur à 1, les solutions u_α associées à ses chaos ne le seront pas car alimentés par ce terme issu de la non linéarité. Nous avons donc ici trois variables pour régler notre méthode en chaos : le nombre de fréquences traitées en chaos, le choix de la base utilisée et désormais l'ordre des chaos.

Contrairement au cas précédent, le temps de calcul de la méthode en chaos va fortement augmenter, A n'étant plus uniquement constitué de chaos d'ordre 0 ou 1, son cardinal augmente très rapidement avec le nombre de fréquences dès que l'ordre des chaos utilisés est élevé. Plus précisément, nous avons :

$$\#A = \sum_{k=0}^{k=Ord} \binom{(NBx * NBt) + k - 1}{k} = \frac{((NBx * NBt) + Ord)!}{(NBt * NBx)! Ord!}$$

NBx*Nbt / ordre	1	2	3	4
2	3	6	10	15
3	4	10	20	35
4	5	15	35	70
5	6	21	56	126
6	7	28	84	210
7	8	36	120	330

FIGURE 2.29 – #A en fonction de la taille et de l'ordre des chaos

NBx*Nbt / ordre	1	2	3	4	5
2	0h0m13s	0h0m24s	0h0m32s	0h0m53s	0h1m18s
3	0h0m16s	0h0m33s	0h1m10s	0h2m34s	0h6m20s
4	0h0m21s	0h0m47s	0h2m11s	0h8m20s	0h26m53s
5	0h0m20s	0h1m8s	0h4m19s	0h23m5s	1h32m37s

FIGURE 2.30 – Exemple de temps d'exécution en fonction de la taille et de l'ordre des chaos (KDV, Machine 1 (voir chap 4.4.4), $\varepsilon = 0.05$)

A moins de se limiter à des chaos d'ordre 1, l'augmentation du nombre d'équations à résoudre n'est plus linéaire par rapport au nombre de fréquence considéré en chaos. De plus, la résolution de chaque équation est également plus longue à cause de la non linéarité et ce pour deux raisons :

- Le terme $\sum_{\beta,\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_\beta u_\gamma}{2} \right) \mathbb{E}[\xi^\beta \xi^\gamma \xi^\alpha]$ nécessite un assemblage pouvant s'avérer long.
- La non linéarité fait qu'un seul point fixe ne suffit pas. Il faut environ une quinzaine d'itérations du point fixe pour atteindre l'erreur machine, pour un coefficient de bruit de 0.05, le nombre de point de fixe nécessaire augmentant avec le niveau de bruit.

Nous pouvons même être plus précis : en utilisant Gprof, un profileur libre de code, nous avons la proportion exacte de temps que le programme met pour calculer le terme $\sum_{\beta,\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_\beta u_\gamma}{2} \right) \mathbb{E}[\xi^\beta \xi^\gamma \xi^\alpha]$

NBx*NBT / ordre	1	2	3	4
2	46.4%	73.8%	91.5%	92.0%
3	53.5%	83.8%	92.8%	96.4%
4	58.8%	89.4%	95.7%	97.9%

FIGURE 2.31 – Proportion du temps passée à construire le terme non linéaire

Même avec un ensemble de chaos très restreint, le calcul du terme non linéaire représente déjà la moitié du temps de calcul, proportion qui augmente très vite avec le nombre d'équations à traiter.

Avec l'équation de la chaleur, nous n'avions que des chaos d'ordre 1, nous avons ainsi un classement naturel des chaos : le chaos nul en premier, suivi des autres chaos dans l'ordre naturel de la base considérée. Ici la non linéarité nous oblige à choisir une autre relation d'ordre : nous classerons les chaos par ordre, puis par fréquence, ce qui nous donne formellement :

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow |\alpha| < |\beta|$$

ou

$$|\alpha| = |\beta| \text{ et } \alpha(i, j) < \beta(i, j) \text{ pour } (i, j) = \min_{(a, b)} (\alpha(a, b) \neq \beta(a, b))$$

Le min se fera selon l'ordre lexicographique.

Bruit blanc temporel

NBx / ordre	1	2	3	4
2	8.65135e-06	1.02646e-05	1.00754e-05	1.00859e-05
3	1.15579e-06	1.55596e-06	1.37066e-06	1.38033e-06
4	1.10728e-06	1.49206e-06	1.30768e-06	1.3173e-06
5	7.82586e-07	6.27114e-07	4.72059e-07	4.78052e-07

FIGURE 2.32 – err_1 en fonction de la taille de l'ordre des chaos. , $\varepsilon_1 = 0.05$, base Fourier

NBx / ordre	1	2	3	4
2	6.55881e-05	8.95664e-05	7.78363e-05	7.85144e-05
3	3.79482e-05	2.76849e-05	1.14439e-05	1.13112e-05
4	3.76515e-05	2.70231e-05	1.07987e-05	8.86566e-06
5	4.36584e-05	2.10455e-05	4.43874e-06	1.83747e-06

FIGURE 2.33 – err_1 en fonction de la taille de l'ordre des chaos. $\varepsilon_1 = 0.1$, base Fourier

Nous avons donc maintenant deux paramètres pour notre méthode en chaos : la taille et l'ordre de ces derniers. On observe une amélioration des résultats en augmentant l'ordre des chaos, amélioration faible ou inexistante avec des chaos de petite taille. L'interprétation à avoir est la suivante : la méthode approche non pas la vraie équation qui elle possède un bruit blanc, par définition sans aucune corrélation temporelle, elle approche l'équation qui aurait comme second membre un bruit composé uniquement des fréquences correspondant à la taille des chaos, un bruit corrélé donc. Avec des chaos de très petite taille la principale source d'erreur est la différence de corrélation de ces deux bruits, l'augmente de l'ordre des chaos améliorera la précision des traitements de ce bruit blanc corrélé mais ne pourra en aucun cas palier à ce manque de corrélation. Avec des chaos de très faible taille, le fait d'utiliser ou non des chaos d'ordre suffisamment élevé afin de bien gérer le bruit, aura peu d'effet sur la précision générale, la principale source d'erreur étant l'excès de corrélation. Avec des chaos de taille plus élevée cette erreur est réduite et l'amélioration provoquée par l'utilisation de chaos d'ordre supérieur est visible.

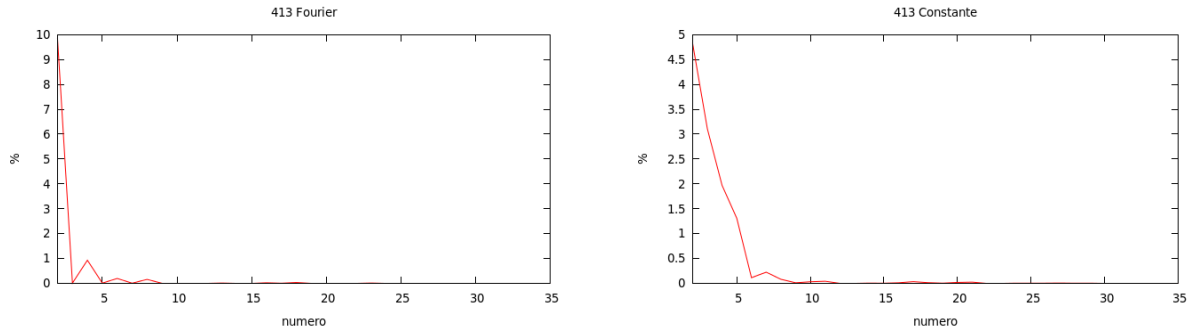


FIGURE 2.34 – Importance relative (en %) de la norme $\mathbb{L}_2$ de chaque chaos à $t=1$

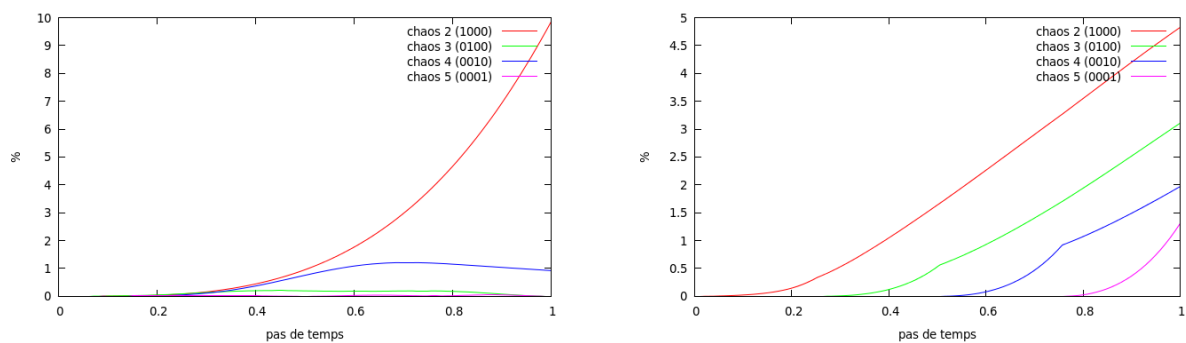


FIGURE 2.35 – Évolution de l'importance relative (en %) de la norme $\mathbb{L}_2$ de chaque chaos (Fourier/Constant par morceaux)

Concernant l'importance des chaos, que ce soit avec la base de Fourier ou la base constante par morceaux, les chaos ayant à $t=1$ la plus grande importance sont ceux avec un petit ordre, puis à ordre égal ceux correspondant aux premières fonctions de bases, ce qui dans le cas de la base de Fourier correspond à la fonction constante suivante des fonctions sinus/cosinus de faible fréquence, et dans le cas de la seconde base cela correspond aux fonctions dont le support apparaît en premier, nous avons toujours ce phénomène de réveil progressif comme dans le cas de l'équation de la chaleur mais ici les chaos continuent à prendre de la masse au cours du temps.

Plus généralement nous pouvons regarder l'évolution de l'ensemble des chaos d'un même ordre (graphe 2.36)

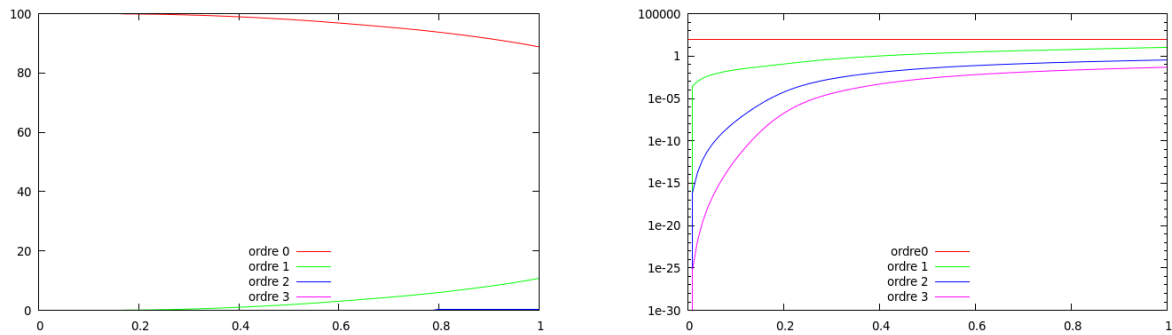


FIGURE 2.36 – Évolution de l'importance relative (en %) de la norme $\mathbb{L}_2$ de l'ensemble des chaos d'un ordre donné (échelle log à droite)

On retrouve le résultat précédemment observé concernant l'unique chaos d'ordre 0, une décroissance de son importance, étant le porteur de la solution initiale, cela est la conséquence que cette dernière perd de l'importance face au bruit. Concernant les chaos d'ordre 1 ou supérieur, nous avons une forte décroissance de l'importance en fonction de l'ordre de chaos.

Notons que les résultats sont indépendants de la base choisie.

Bruit blanc spatial

NBx / ordre	1	2	3	4
2	1.52948e-06	1.98425e-07	1.50647e-07	1.44178e-07
3	1.43464e-06	2.71758e-07	1.99358e-07	1.95008e-07
4	1.4135e-06	2.40121e-07	1.69376e-07	1.64881e-07
5	1.37936e-06	2.30759e-07	1.55185e-07	1.51431e-07

FIGURE 2.37 – err_1 en fonction de la taille de l'ordre des chaos. , $\varepsilon_1 = 0.05$, base Fourier

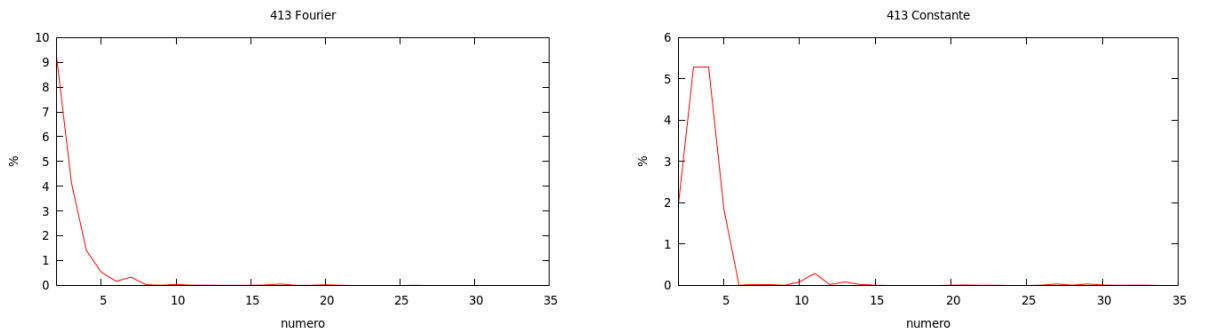


FIGURE 2.38 – Importance relative (en %) de la norme $\mathbb{L}_2$ de chaque chaos

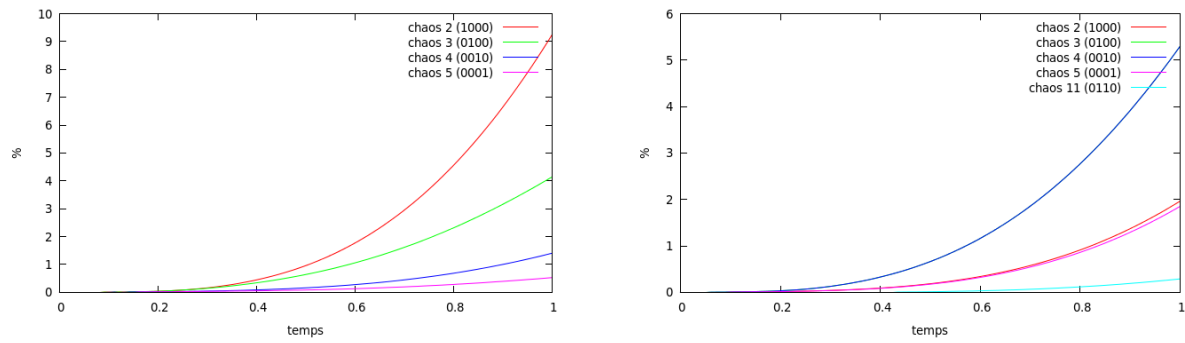
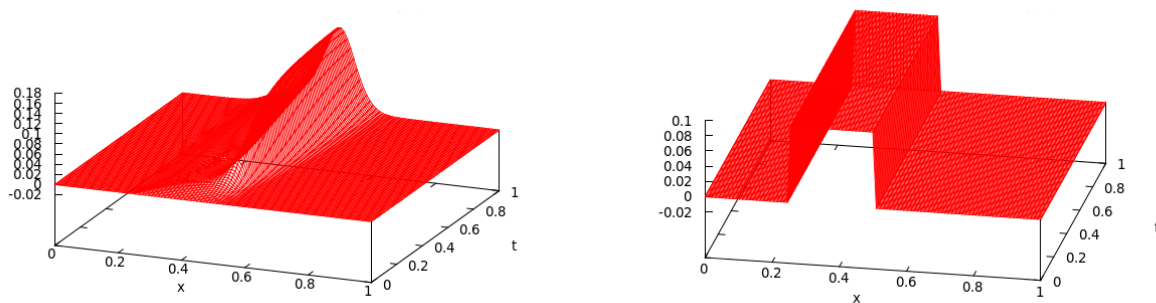


FIGURE 2.39 – évolution de l'importance relative (en %) de la norme $\mathbb{L}_2$ de chaque chaos (Base Fourier/Base constante par morceaux)

Dans le cas de la base de Fourier les résultats sont semblables aux cas temporel : l'importance des chaos suit la relation d'ordre précédemment défini : les chaos d'ordre faible sont plus importants que les autres et à ordre égal ce qui sont les fréquences portant sur les premières fréquences.

La cas de la base constante par morceaux est quant à lui plus intéressant, avec la base constante par morceau, il n'est plus question de fréquence mais plutôt de partitionnement de l'espace, les chaos les plus important vont être ceux dont le support rencontre la zone où le grand gradient se forme.

FIGURE 2.40 – solution u_α / second membre associé au chaos 0100

Les deux chaos les plus importants sont ici les chaos correspondant aux intervalles $[0.25, 0.5]$ et $[0.5, 0.75]$, ce qui correspond aux intervalles autour de la cassure se formant avec l'équation de Burgers en $x=0.5$ (cf graphe 2.2). On remarque d'ailleurs que l'importance de ces deux chaos à travers le temps est parfaitement identique, c'est également le cas pour les deux chaos dont le support est $[0, 0.25]$ et $[0.75, 1]$ ce qui s'explique par la symétrie de la solution.

En inversant la condition initiale, ce gros gradient sera situé en $x=0$ ($x=1$ par périodicité) et les chaos importants seront ceux correspondant au bord du domaine. Cela laisse entrevoir la possibilité d'améliorer la méthode en utilisant un maillage en chaos plus fin au niveau de la difficulté et un maillage plus grossier en dehors.

Concernant l'importance de l'ensemble des chaos d'un ordre donné, les résultats sont parfaitement semblables à ceux obtenus dans le cas temporel (graphe 2.36) et également toujours indépendants de la base considérée. La seule différence est que, pour un même niveau de bruit ($\varepsilon = 0.05$) dans le cas spatial, la condition initiale (chaos d'ordre 0) perd un peu plus en importance, tandis que les chaos d'ordre supérieur gagne un peu plus que dans le cas temporel.

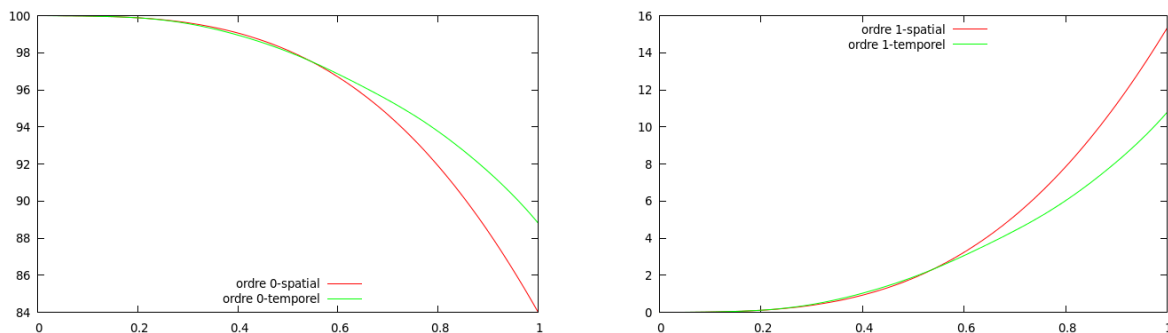


FIGURE 2.41 – Évolution de l'importance des chaos d'ordre 0 (gauche) et 1 (droite) en fonction du type de bruit

Avec un même niveau de bruit ($\varepsilon = 0.05$), le bruit a plus d'effet dans le cas spatial que dans le cas temporel, ce qui explique le niveau d'erreur et la variance plus élevée du cas spatial.

Bruit blanc spatio-temporel

Nous sommes ici dans la première situation où la méthode va posséder trois paramètres : le nombre de fréquence en espace (NBx) le nombre de fréquence en temps (NBt) et l'ordre des chaos. Cela va être très rapidement problématique en terme de temps de calcul (voir 2.30). Nous nous limiterons ici à des chaos carrés de taille deux ou trois.

NBx $\times$ NBt / ordre	1	2	3	4
2×2	9.59032e-06	1.37607e-05	1.09515e-05	1.04724e-05
3×3	8.83025e-06	4.99903e-06	2.1747e-06	1.35757-06

FIGURE 2.42 – err_1 en fonction de la taille de l'ordre des chaos. $\varepsilon_1 = 0.05$, base Fourier

L'augmentation de la taille des chaos offre bien une amélioration des résultats, nous avons une erreur de l'ordre 10^{-5} avec des chaos de taille 2×2 , 10^{-6} avec des chaos de taille 3×3 . Ce sont les niveaux d'erreurs que l'on constate si l'on compare les résultats obtenus à l'aide de la méthode de Monte-Carlo et ceux obtenus avec cette même méthode mais avec comme partie stochastique un bruit blanc que l'on tronque aux fréquences correspondant à la taille des chaos. Nous parlerons à partir de maintenant de "Monte-Carlo complet" pour celui opérant avec un vrai bruit blanc et de "Monte-Carlo basses fréquences" quand il opère avec un bruit blanc tronqué.

Si l'on compare maintenant les résultats du Monte-Carlo basse fréquence et ceux obtenus avec des chaos de tailles correspondantes, on constate que les chaos approchent avec une erreur de 10^{-7} le Monte-Carlo basses fréquences, soit l'ordre de grandeur de précision des Monte-Carlo basses fréquences.

NBx $\times$ NBt / ordre	1	2	3	4
2×2	1.31205e-06	2.99659e-07	1.74765e-07	1.74089e-07
3×3	2.74484e-06	7.40843e-07	3.66022e-07	1.97821e-07

FIGURE 2.43 – Erreur sur la moyenne entre les chaos et le Monte-Carlo limité aux mêmes fréquences.

L'importance de l'ensemble des chaos d'un ordre donné est comme dans les deux cas précédents semblable au cas temporel (graphe 2.36) il y a juste un changement d'échelle, toujours avec le même niveau de bruit, la condition initiale s'efface plus face au bruit que dans le cas d'un bruit ayant une seule dépendance.

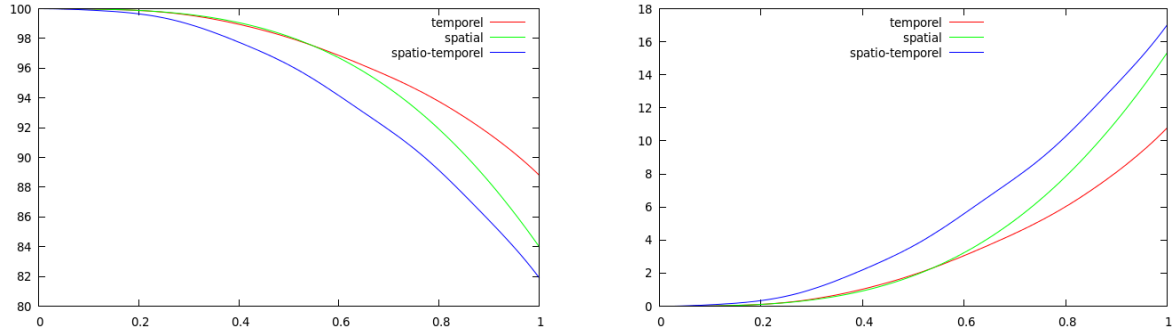


FIGURE 2.44 – Évolution de l'importance des chaos d'ordre 0 (gauche) et 1 (droite) en fonction du type de bruit

bruit blanc multiplicatif temporel

NBt / ordre	1	2	3
1	1.8466e-08	1.84633e-08	1.84633e-08
2	6.54767e-09	6.5669e-09	6.5669e-09
3	1.44381e-10	1.49306e-10	1.49306e-10
4	3.32687e-12	1.57423e-12	1.57423e-12

FIGURE 2.45 – err_1 en fonction de la taille de l'ordre des chaos. $\varepsilon_1 = 0.1$, base Fourier

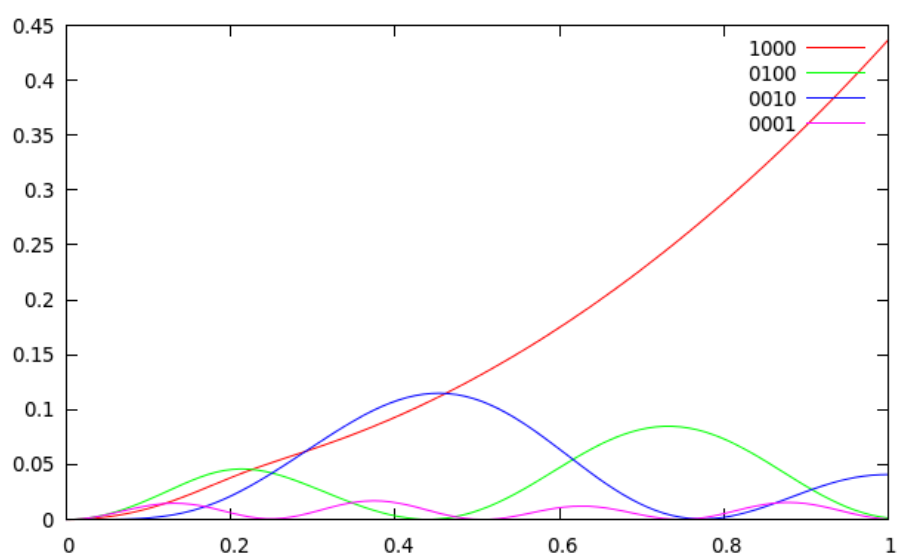


FIGURE 2.46 – évolution de l'importance relative (en %) de la norme $\mathbb{L}_2$ de chaque chaos

Nous avons bien une amélioration des résultats avec l'augmentation de la taille des chaos. L'ordre a par contre peu d'effet, ceci s'explique par la multiplication en cascade par ε des seconds membres des EDP associées aux chaos d'ordre élevé.

Quand on regarde l'évolution de l'importance des chaos d'un ordre donné (2.47), on voit que malgré le niveau de bruit, deux fois supérieur à celui utilisé précédemment pour ce type de graphe, que le chaos d'ordre 0, porteur de la condition initiale perd très peu en importance (0.5% de perte), ce qui explique pourquoi les résultats sont très bons même pour des chaos de petite taille. Le bruit a très peu d'effet, la solution est déjà très proche de la solution déterministe. Cela peut s'expliquer par le fait qu'avec un bruit blanc multiplicatif, le bruit injecté à chaque pas de temps est multiplié par la solution du pas de temps précédent, solution qui dans le cas considéré (2.2) est d'intégrale nulle en espace. Ainsi, à chaque pas de temps, le bruit injecté sera d'intégrale nulle en espace. L'ajout d'énergie dans le système sera donc nul. Concernant l'évolution de l'importance des chaos d'un ordre donné, l'évolution est, à échelle près, toujours identique à celle du cas additif temporel (2.36).

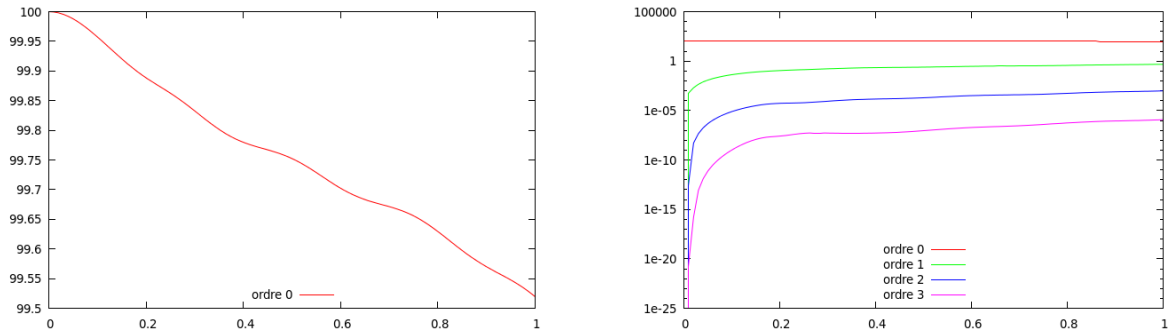


FIGURE 2.47 – Évolution de l'importance relative (en %) de la norme $\mathbb{L}_2$ de l'ensemble des chaos d'un ordre donné (échelle log à droite)

bruit blanc multiplicatif spatial

NBt / ordre	1	2	3
1	0.000126484	0.00012648	0.00012648
2	0.000126016	0.000126014	0.000126014
3	1.20536e-05	1.53576e-05	1.47931e-05
4	1.23237e-05	1.56312e-05	1.50708e-05
5	5.55799e-06	4.1984e-06	3.60785e-06

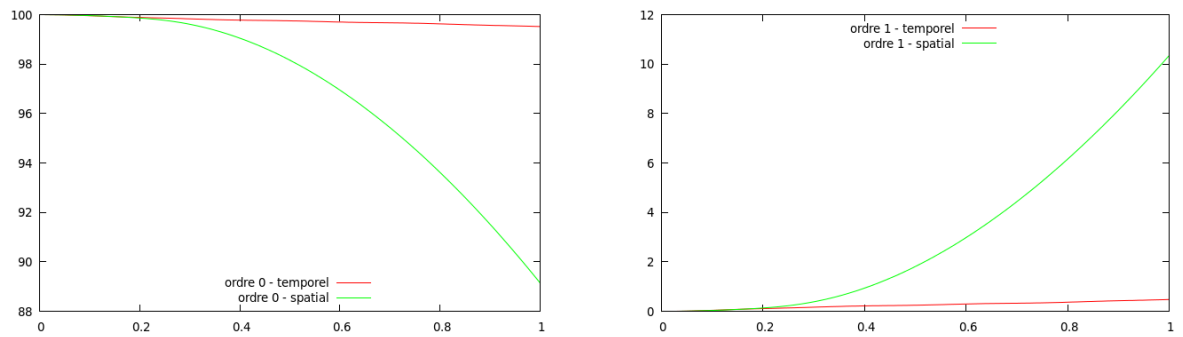
FIGURE 2.48 – err_1 en fonction de la taille de l'ordre des chaos. , $\varepsilon_1 = 0.1$, base Fourier

FIGURE 2.49 – Évolution de l'importance des chaos d'ordre 0 (gauche) et 1 (droite) en fonction du type de bruit

Dans le cas d'un bruit multiplicatif spatial, le résultat est différent. Le bruit ici à véritablement beaucoup plus d'impact (graphe 2.6.3). Le bruit n'étant pas constant en espace, le fait de le multiplier pour une solution qui n'annule pas son effet, les résultats sont donc moins bon que dans le cas temporel, mais nous avons bien une convergence de la méthode en chaos.

bruit blanc multiplicatif $u_x dW$

Nous allons ici étudier le cas où la vitesse de la solution est bruitée. Contrairement aux cas précédent, nous allons travailler avec la solution initiale "kink" (voir 2.3), condition initiale donnant une solution où la vitesse a un sens particulier.

NBt / ordre	1	2	3
1	1.01297e-05	1.16451e-05	9.98233e-06
2	7.52499e-06	8.65652e-06	7.08810e-06
3	2.71265e-06	2.16816e-06	9.78017e-07
4	2.65293e-06	1.91783e-06	7.81609e-07
5	2.75408e-06	1.35563e-06	3.51109e-07

FIGURE 2.50 – err_1 en fonction de la taille de l'ordre des chaos. $\varepsilon_1 = 0.05$, base Fourier

Comme dans l'ensemble des cas précédemment traités, on observe bien une convergence de la méthode. Avec des chaos de petite taille, l'ordre améliore peu les résultats. Les bénéfices de cette augmentation se font sentir de plus en plus avec l'augmentation de la taille.

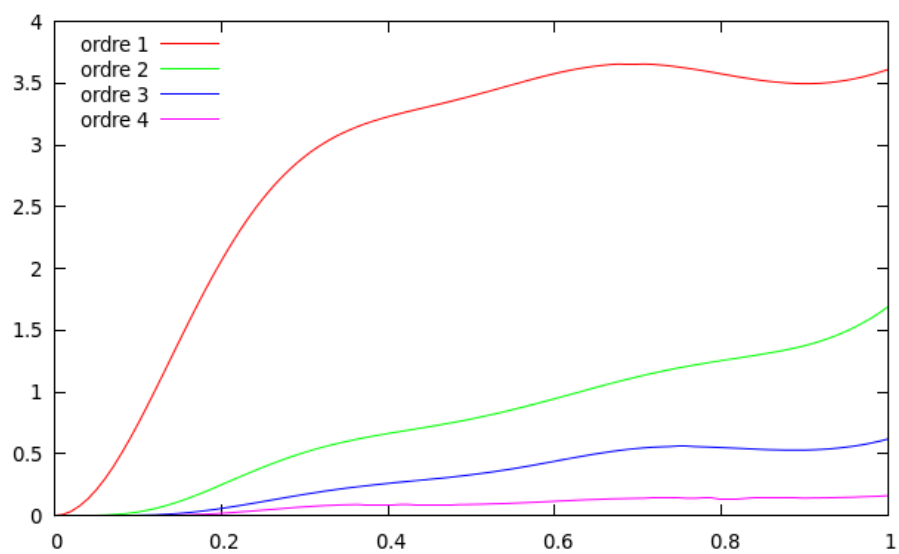


FIGURE 2.51 – Évolution de l'importance de l'ensemble des chaos d'un ordre donné.

L'importance des chaos en fonction de leur ordre, nous avons ici un résultat différent. La décroissance est beaucoup plus faible que dans les cas précédents. Le graphe 2.51 est en échelle classique, échelle avec laquelle nous ne voyons que 2 courbes dans le cas additif ou multiplicatif simple.

Pour comparer les résultats, nous avons utilisé la méthode en chaos pour les trois types de bruit (dW , udW et $u_x dW$), avec des chaos de même taille et un même niveau de bruit effectif (ie : un niveau de bruit provoquant la même décroissance du chaos d'ordre 0). Le tableau 2.52 (2.53 en version renormalisée, graphe 2.6.2) donne l'importance des chaos en fonction de l'ordre et du type de bruit.

ordre / bruit	dW	udW	$u_x dW$
0	93.9238	93.447	93.8819
1	5.94577	6.23467	3.62437
2	0.114217	0.290759	1.73463
3	0.0130735	0.0207051	0.620951
4	0.00313393	0.00690529	0.13814

FIGURE 2.52 – Importance des chaos en fonction de l'ordre et du type de bruit à $T=1$

ordre / bruit	dW	udW	$u_x dW$
0	1	1	1
1	6.33041e-02	6.67187e-02	3.86056e-02
2	1.21606e-03	3.11148e-03	1.84767e-02
3	1.39193e-04	2.21571e-04	6.61417e-03
4	3.33672e-05	7.38950e-05	1.47142e-03

FIGURE 2.53 – Importance des chaos en fonction de l'ordre et du type de bruit (re-normalisée)

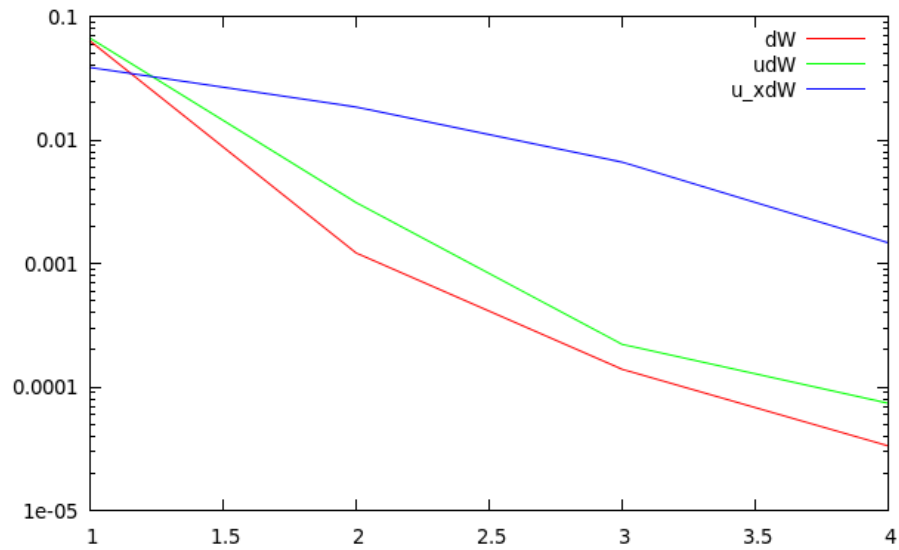


FIGURE 2.54 – Évolution de l'importance de l'ensemble des chaos d'un ordre donné. (échelle log)

On voit un classement net entre les trois bruits. L'interprétation que l'on en fait est la suivante : dans le cas d'un bruit additif, les chaos d'ordre 1 sont les seuls à avoir un second membre leur procurant de l'énergie ainsi les chaos d'ordre supérieur sont alimenté uniquement par la non linéarité liant l'ensemble des EDP. Dans le cas multiplicatif simple, l'ensemble des chaos possède un second membre, source d'énergie qui viens s'ajouter à la non linéarité. Enfin, dans le cas d'un bruit en $u_x dW$, les chaos d'ordre n sont alimentés par les dérivés des chaos d'ordre $n-1$, grâce à cette dérivation, un chaos peut donc potentiellement fournir plus d'énergie à ses successeurs qu'il n'en possède lui même.

2.6.3 Équation de Korteweg-de Vries stochastique

$$(2.6.3) \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^3} + \sum_{\beta, \gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_\beta u_\gamma}{2} \right) \mathbb{E}[\xi^\beta \xi^\gamma \xi^\alpha] = \varepsilon_1 \delta_{|\alpha|=1} m_{j(\alpha)} e_{i(\alpha)}$$

bruit blanc temporel

Pour l'équation de Korteweg-de Vries bruitée par un bruit blanc temporel, une solution formelle est connue. Elle a été exposée en 1983 par Wadati [49], ainsi ici nous ne résoudrons pas l'équation via la méthode de Monte-Carlo afin d'avoir une solution de référence, nous utiliserons la solution formelle donnée par Wadati.

NBt / ordre	1	2	3	4
1	3.09943e-05	3.95445e-05	3.89463e-05	3.97739e-05
2	9.67928e-06	7.8667e-06	2.19312e-06	2.4058e-06
3	1.21087e-05	8.20484e-06	6.4178e-07	5.1495e-07
4	1.35455e-05	8.88325e-06	4.97746e-07	2.20428e-07
5	1.42556e-05	9.27987e-06	5.07832e-07	1.59834e-07

FIGURE 2.55 – err_1 en fonction de la taille de l'ordre des chaos. , $\varepsilon_1 = 0.05$

NBt / ordre	1	2	3	4
1	3.09943e-05	3.95445e-05	3.89463e-05	3.97739e-05
2	2.79589e-05	3.58446e-05	3.55501e-05	3.6453e-05
3	7.28653e-06	7.5083e-06	3.19333e-06	3.69967e-06
4	7.26023e-06	7.45618e-06	3.13016e-06	3.63484e-06
5	9.1567e-06	7.16324e-06	1.06637e-06	9.28721e-07

FIGURE 2.56 – err_1 en fonction de la taille de l'ordre des chaos. , $\varepsilon_1 = 0.05$

On observe bien une amélioration significative des résultats lorsque l'ordre et la taille des chaos augmente. Une autre observation est que pour des chaos de petite taille, l'augmentation de l'ordre des chaos a peu ou pas d'effet positif. Ceci s'explique de la même manière que pour l'équation de Burgers : l'augmentation de la taille des chaos diminue l'erreur due à l'excès de corrélation du bruit traité pour les chaos, ce qui rend visible les améliorations provoquées par l'ordre des chaos.

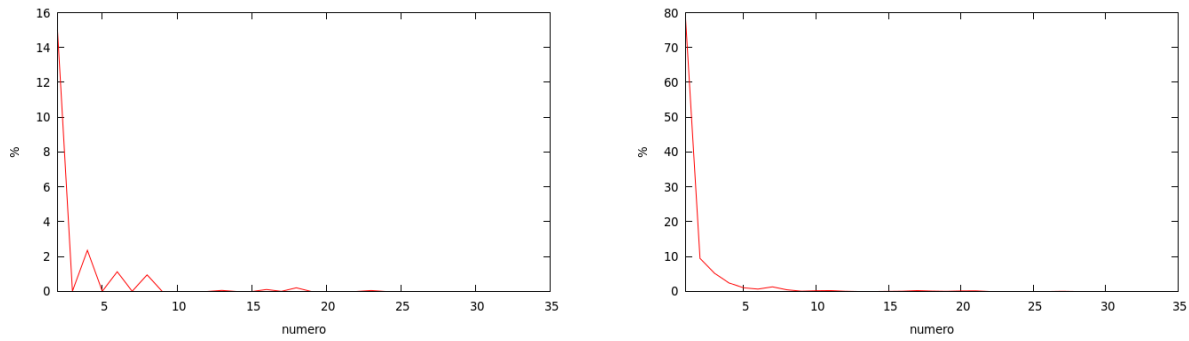


FIGURE 2.57 – Importance relative (en %) de la norme $\mathbb{L}_2$ de chaque chaos à $t=1$ (Fourier/Constant par morceaux)

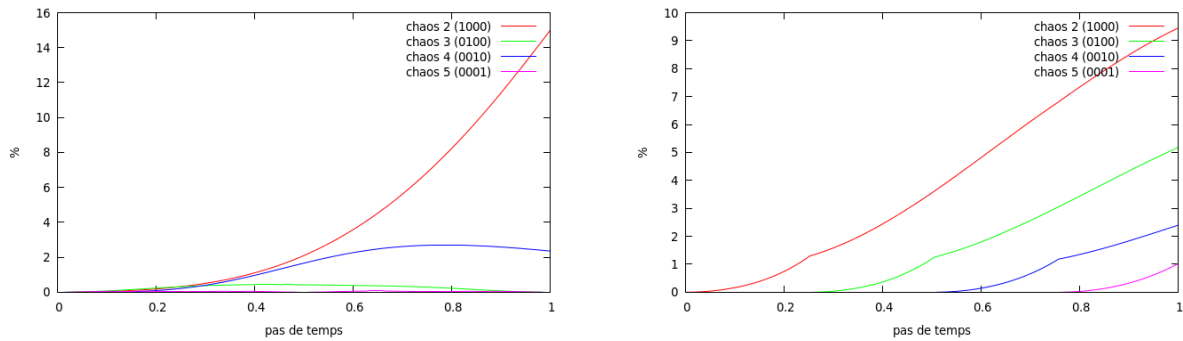


FIGURE 2.58 – Évolution de l'importance relative (en %) de la norme $\mathbb{L}_2$ de chaque chaos (Fourier/Constant par morceaux)

Comme pour l'équation de Burgers avec bruit temporel, on retrouve le même classement des chaos. Les chaos les plus importants sont ceux ayant un ordre faible et à ordre égal, ce sont ceux qui sont portés par les premières fréquences.

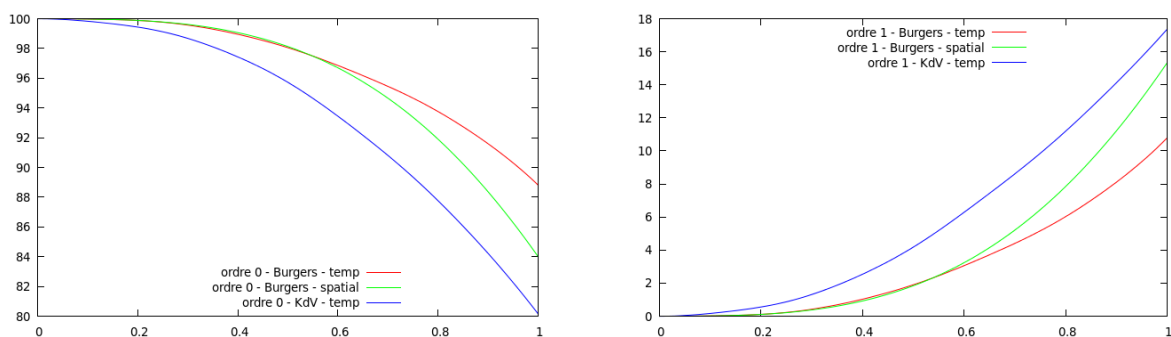


FIGURE 2.59 – Évolution de l'importance des chaos d'ordre 0 (gauche) et 1 (droite), $\varepsilon = 0.05$

L'évolution de l'importance de l'ensemble des chaos d'un même ordre donne des graphiques parfaitement analogue à ceux obtenus précédemment 2.36, si ce n'est une augmentation de l'influence du bruit. Les graphes 2.59 illustrent cela, alors que le niveau de bruit est identique, on voit que l'effet du bruit est plus important dans le cadre de l'équation de Korteweg-de Vries avec bruit temporel que dans le cas de Burgers spatial (où l'importance étant déjà plus importante que dans le cas de Burgers temporel). Cela est cohérent avec le fait d'avoir de moins bon résultat avec KdV qu'avec Burgers pour un niveau de bruit et des chaos identiques.

bruit blanc spatial

NBx / ordre	1	2	3	4
1	0.000249926	0.000282315	0.000279616	0.000281654
2	6.84281e-05	8.94374e-05	3.38529e-05	3.176e-05
3	5.78075e-05	9.00571e-05	2.62258e-05	2.30044e-05
4	7.5924e-05	0.000108293	2.02645e-05	1.38492e-05
5	8.52328e-05	0.000106801	1.31872e-05	5.89235e-06

FIGURE 2.60 – err_1 en fonction de la taille de l'ordre des chaos. , $\varepsilon_1 = 0.05$, base fourier

NBx / ordre	1	2	3	4
1	0.000249926	0.000282315	0.000279616	0.000281654
2	0.000219079	0.000253777	0.000254334	0.000257544
3	7.30189e-05	8.48433e-05	2.40965e-05	1.99071e-05
4	7.09799e-05	8.6255e-05	4.02295e-05	3.90083e-05
5	5.45717e-05	8.92446e-05	3.1378e-05	2.90956e-05

FIGURE 2.61 – err_1 en fonction de la taille de l'ordre des chaos. , $\varepsilon_1 = 0.05$, base const

Comme dans le cas temporel, nous avons bien une amélioration des résultats avec l'augmentation de l'ordre et du nombre de fréquence.

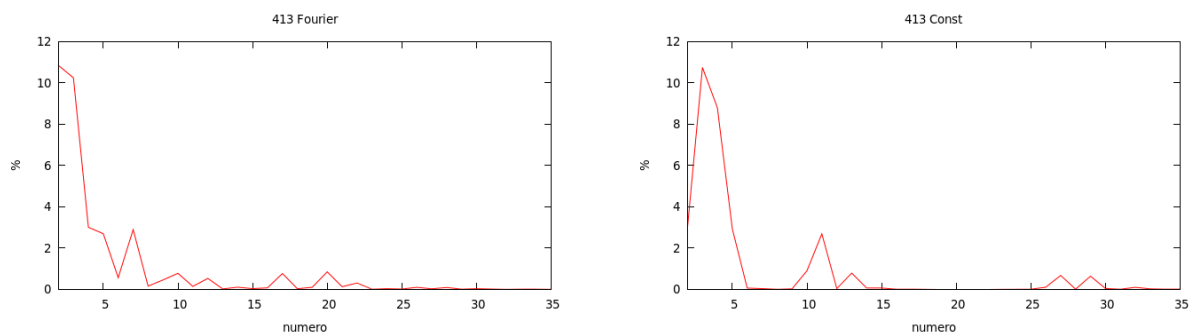


FIGURE 2.62 – Évolution de l'importance relative (en %) de la norme $\mathbb{L}_2$ de chaque chaos

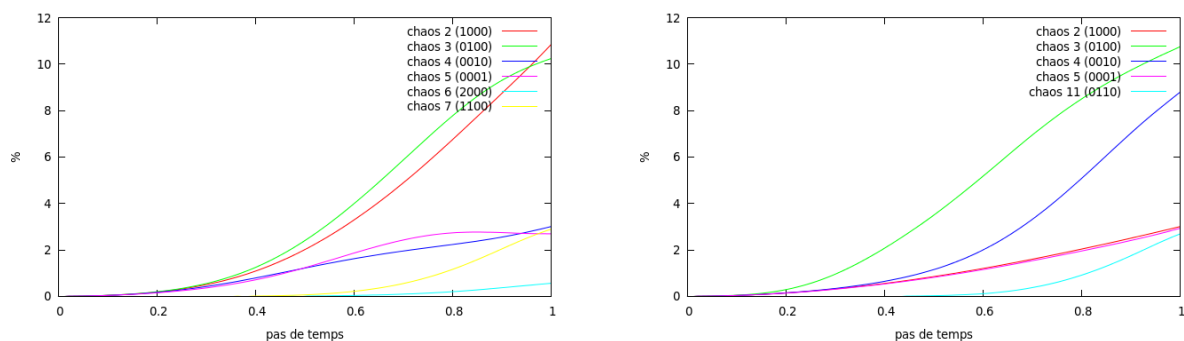


FIGURE 2.63 – évolution de l'importance relative (en %) de la norme $\mathbb{L}_2$ de chaque chaos (Fourier/Constante)

Concernant l'importance de chaque chaos, le comportement est différent selon la base. Dans la base de Fourier, on observe que globalement l'ordre défini précédemment (2.6.2) est respecté : les chaos les plus importants sont les chaos d'ordre faible et à ordre égal, ce sont ceux portant sur les basses fréquences qui sont les plus importants.

Avec la base constante par morceau, il n'est plus question de fréquence, mais d'un partitionnement de l'espace. Les chaos les plus importants vont être ceux dont le support rencontre le plus le soliton.

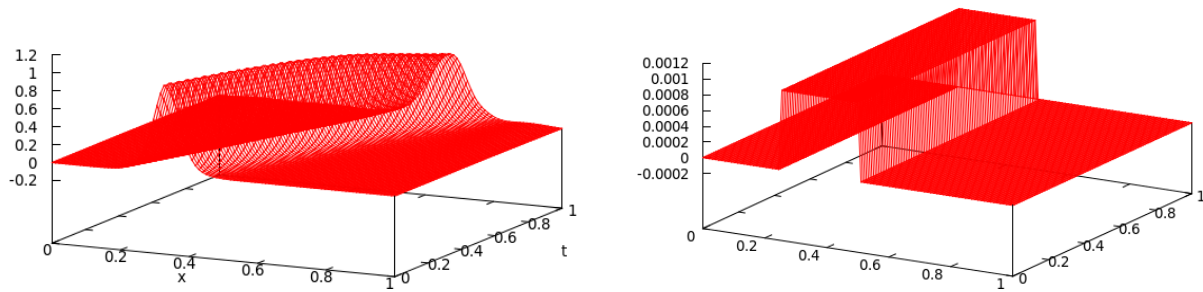


FIGURE 2.64 – solution / second membre associé au chaos 0100

Les deux chaos les plus importants sont ici les chaos correspondant aux intervalles $[0.25, 0.5]$ et $[0.5, 0.75]$, ce qui correspond au support du soliton. Ceci laisse entrevoir la possibilité d'améliorer la méthode en utilisant un maillage en chaos plus fin au niveau du soliton et plus grossier en dehors de ce dernier.

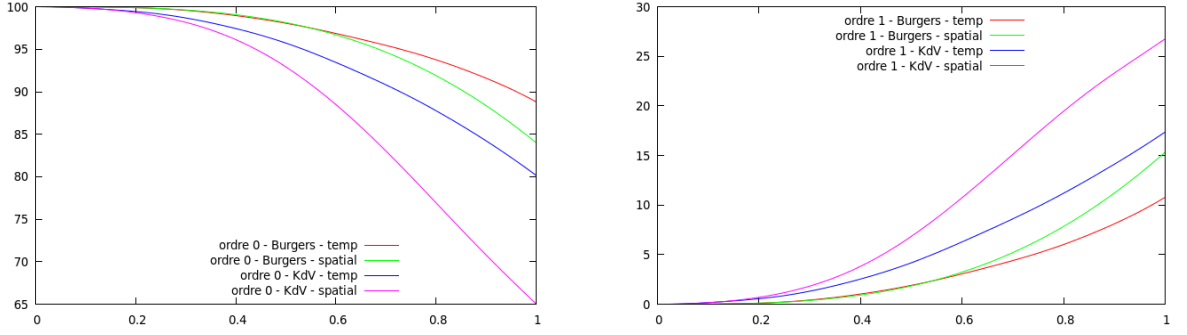


FIGURE 2.65 – Évolution de l'importance des chaos d'ordre 0 (gauche) et 1 (droite), $\varepsilon = 0.05$

Encore une fois, tracer ici un graphe en fonction de l'ordre des chaos aurait bien peu de sens, il serait parfaitement identique au précédent 2.36, la dynamique et le classement en fonction de l'ordre est parfaitement identique. Comme précédemment, ce qui change, c'est le niveau d'influence du bruit. Sur les graphes 2.65, nous voyons toujours le même niveau de bruit $\varepsilon = 0.05$, la condition initiale (chaos 0) est encore plus atténuée que dans les cas précédents et les chaos de bruit (ordre 1 et +) sont plus importants que dans le cas temporel ou qu'avec l'équation de Burgers.

Bruit blanc spatio-temporel

Avec un bruit spatio-temporel comme dans le cas de l'équation de Burgers, la non linéarité limite très fortement l'utilisation de la méthode en chaos. Les chaos doivent ici nécessairement porter un certain nombres de fréquences en temps (NBt) et un certain nombres de fréquences en espace (NBx). Comme pour l'équation de Burgers, l'augmentation du temps de calcul en fonction de l'ordre des chaos (cf : 2.30) est d'autant plus important si les chaos sont de grande taille. Ici nous allons donc nous restreindre à l'utilisation de chaos de 2x2 et 3x3.

NBx $\times$ NBt / ordre	1	2	3
2 $\times$ 2	0.00182191	0.00304682	0.00216334
3 $\times$ 3	0.00127002	0.00384771	0.00157605

FIGURE 2.66 – err_1 en fonction de la taille de l'ordre des chaos. , $\varepsilon_1 = 0.05$, base Fourier

Les résultats sont assez éloignés de la vraie solution, ce niveau d'erreur peut s'expliquer de deux manière différentes : taille des chaos insuffisante ou ordre des chaos insuffisant. Afin de savoir si l'ordre des chaos utilisé est suffisant pour capter le bruit, comme avec Burgers nous allons comparer les résultats obtenus en chaos avec ceux obtenus avec un Monte Carlo basses fréquences portant sur les mêmes fréquences que les chaos considérés.

NBx $\times$ NBt / ordre	1	2	3	4
2×2	0.000568715	0.000694465	4.5428e-05	5.49903e-06
3×3	0.00107511	0.00190974	0.000224483	2.5331e-05

FIGURE 2.67 – Erreur sur la moyenne entre les chaos et le Monte-Carlo limité aux mêmes fréquences.

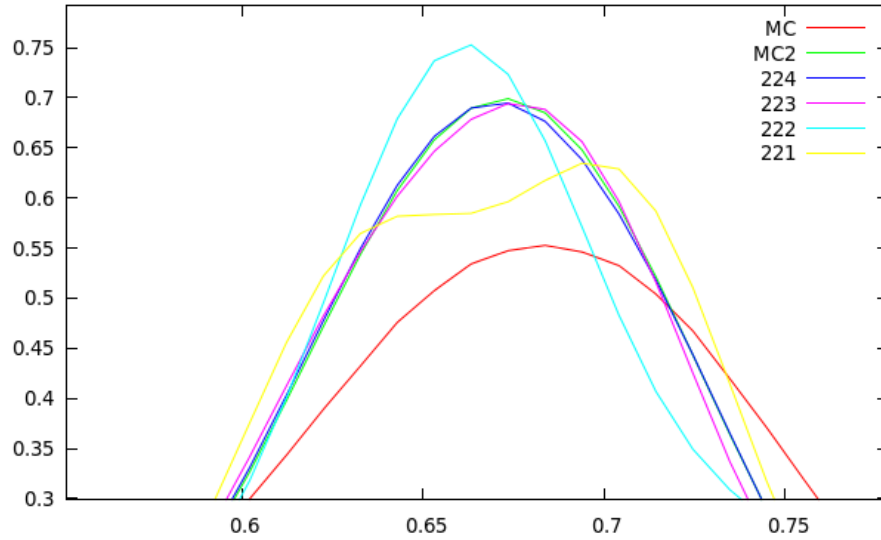


FIGURE 2.68 – Estimateurs de $\mathbb{E}[u]$, MC2 correspond au Monte-Carlo tronqué à 2×2 fréquences

En augmentant l'ordre des chaos, on converge bien vers les résultats obtenus avec le Monte-Carlo limité aux fréquences correspondantes aux chaos considérés. Cela signifie que les chaos arrivent à capter ces fréquences à partir d'un certain ordre. La différence avec les résultats obtenus avec un bruit complet est donc provoquée par l'utilisation de chaos considérant trop peu de fréquences, nombre sur lequel nous sommes très limités en terme de temps de calcul.

L'importance de l'ensemble des chaos d'un ordre donné suit une évolution toujours semblable à celles précédemment observés (graphe 2.36) et comme pour l'équation de Burgers, avec le même niveau de bruit $\varepsilon = 0.05$, on observe que le bruit a bien plus d'influence que dans le cas d'un bruit avec une seule dépendance.

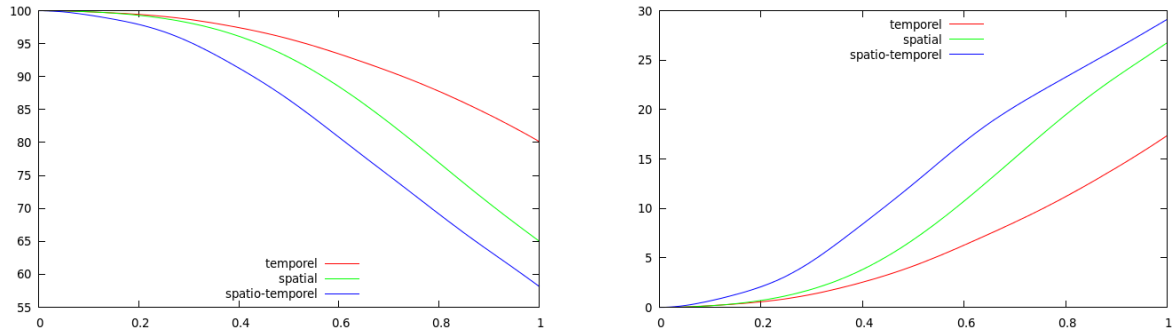


FIGURE 2.69 – Évolution de l'importance des chaos d'ordre 0 (gauche) et 1 (droite) en fonction du type de bruit

bruit blanc multiplicatif temporel

Comme précédemment, nous avons bien une convergence de la méthode vers les résultats obtenus avec Monte-Carlo (2.70).

De façon identique à l'équation de Burgers, l'équation de Korteweg-de Vries ne donne pas de résultat significativement différent en terme d'évolution de l'importance des chaos en fonction de l'ordre, si ce n'est un changement d'échelle.

NBx / ordre	1	2	3
1	2.51918e-07	2.50349e-07	2.50591e-07
2	2.32434e-07	2.31271e-07	2.31546e-07
3	3.12245e-08	3.06412e-08	3.08892e-08
4	2.99963e-08	2.83219e-08	2.85739e-08
5	1.2033e-08	1.13103e-08	1.04935e-08

FIGURE 2.70 – err_1 en fonction de la taille de l'ordre des chaos. , $\varepsilon_1 = 0.025$, base Fourier

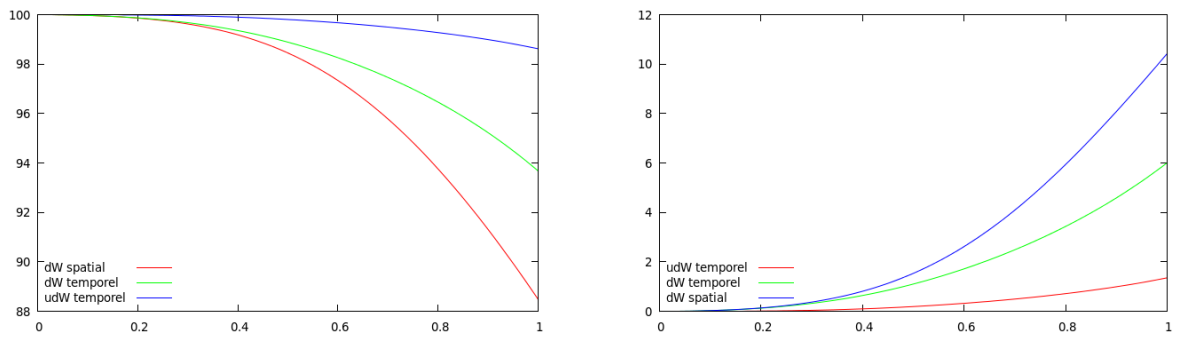


FIGURE 2.71 – Évolution de l'importance des chaos d'ordre 0 (gauche) et 1 (droite) en fonction du type de bruit

Ici, pour un même niveau de bruit, le cas multiplicatif provoque une décroissance du chaos d'ordre nul moins importante que dans le cas additif. Le résultat était inversé dans le cas de Burgers. Ceci s'explique par le support du soliton, dans le cas de KdV, une bonne partie du bruit se retrouve annulée car n'étant pas dans le support du soliton, ce qui n'arrivait pas avec Burgers, le support de la solution étant l'espace tout entier.

bruit blanc multiplicatif spatial

NBx / ordre	1	2	3
1	6.82863e-06	6.81572e-06	6.81679e-06
2	1.97662e-06	1.97841e-06	1.9805e-06
3	1.41559e-06	1.42285e-06	1.39371e-06
4	9.4319e-07	9.44225e-07	9.34088e-07
5	4.72095e-07	4.57522e-07	4.49078e-07

FIGURE 2.72 – err_1 en fonction de la taille de l'ordre des chaos. , $\varepsilon_1 = 0.025$, base Fourier

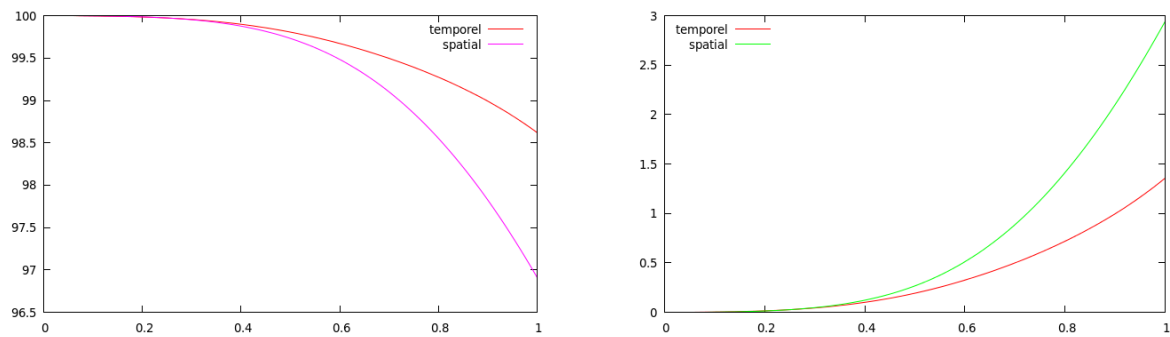


FIGURE 2.73 – Évolution de l'importance des chaos d'ordre 0 (gauche) et 1 (droite) en fonction du type de bruit

Comme dans le cas additif, on observe que pour un même niveau de bruit, l'influence est plus grande dans le cas d'un bruit spatial.

bruit blanc multiplicatif $u_x dW$

NBt / ordre	1	2	3
1	7.61871e-06	6.67878e-06	6.56047e-06
2	5.67818e-06	4.8493e-06	4.74213e-06
3	9.09603e-07	5.53943e-07	5.2383e-07
4	7.49247e-07	4.28903e-07	4.043e-07
5	3.10984e-07	1.27147e-07	1.20738e-07
6	2.70707e-07	1.02694e-07	9.87176e-08
7	1.5559e-07	4.88232e-08	3.37213e-08

FIGURE 2.74 – err_1 en fonction de la taille de l'ordre des chaos. $\varepsilon_1 = 0.01$, base Fourier

Comme précédemment on observe bien une convergence de la méthode vers le niveau de précision du Monte-Carlo de référence.

Comme dans l'étude de l'équation de Burgers avec le même type de bruit, nous avons utilisé la méthode en chaos pour les trois types de bruit (dW , udW et $u_x dW$), avec des chaos de même taille et un même niveau de bruit provoquant la même décroissance du chaos d'ordre 0. Le tableau 2.75 (2.76 en version renormalisée, graphe 2.77) donne l'importance des chaos en fonction de l'ordre et du type de bruit.

ordre / bruit	dW	udW	$u_x dW$
0	96.5266	96.629	96.3195
1	3.37442	3.23858	3.50543
2	0.0958955	0.127428	0.167261
3	0.00303763	0.00487231	0.00751853
4	0.0000903002	0.000169058	0.000319511

FIGURE 2.75 – Importance des chaos en fonction de l'ordre et du type de bruit à T=1

ordre / bruit	dW	udW	$u_x dW$
0	1	1	1
1	0,034958447	0,033515611	0,036393773
2	0,000993462	0,001318735	0,001736523
3	0,000031469	0,000050423	0,000078058
4	0,000000935	0,00000175	0,000003317

FIGURE 2.76 – Importance des chaos en fonction de l'ordre et du type de bruit à T=1 (renormalisé)

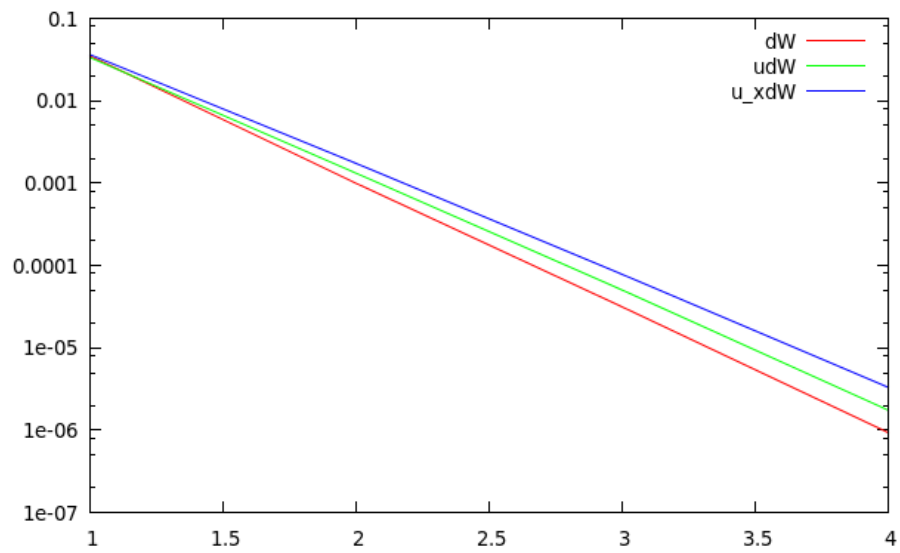


FIGURE 2.77 – Évolution de l'importance de l'ensemble des chaos d'un ordre donné.
(échelle log)

On observe le même classement qu'avec l'équation de Burgers, mais ici les différences sont beaucoup plus limitées. On observe également une décroissance linéaire de l'importance des chaos en fonction de l'ordre, ce que nous n'avions pas avec Burgers.

Bruit localisé

Dans cette section, nous exposerons les résultats obtenus avec un bruit qui, contrairement aux cas précédents, sera limité à un sous ensemble du domaine. Le but étant de tester la méthode en chaos avec un tel bruit, ce qui revient à travailler sur un ensemble de chaos restreint (voir 2.5.2 à la fin de la section 2.5.2).

Cette étude sera limitée à l'équation de Korteweg-de Vries avec un bruit additif et une localisation en espace. Cela correspond physiquement au cas où le soliton est perturbé uniquement sur une zone en espace. On peut penser par exemple à une vague rencontrant une zone avec une forte irrégularité des fonds marins.

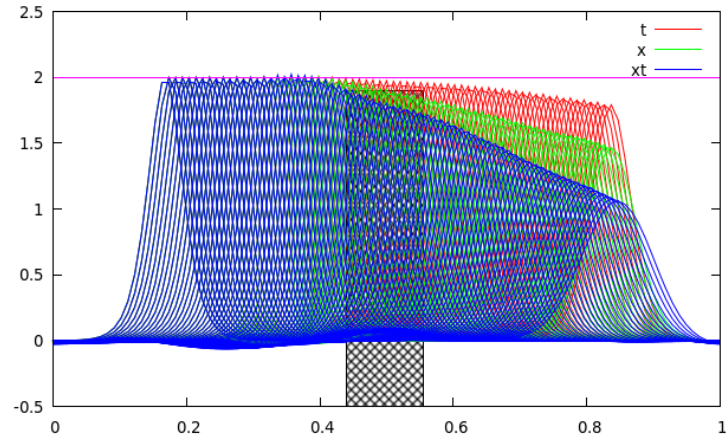
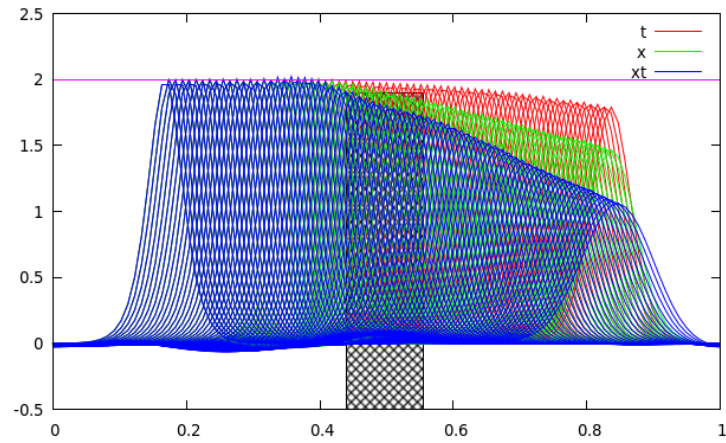
Afin de ne pas être trop redondant, nous exposerons ici uniquement les particularités des résultats dans le cas d'un bruit localisé en espace. Nous n'exposerons pas par exemple les tableaux d'erreurs en fonction de l'ensemble des chaos qui seraient parfaitement semblables à ceux présentés dans le cas d'un bruit non localisé.

$$(2.6.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \mathbf{1}_{x \in [a,b]} \dot{\xi}(x, t)$$

Nous avons vu précédemment que le bruit, qu'il soit temporel, spatial, ou spatio-temporel provoque une décroissance en moyenne du soliton. Une question légitime dans le cas d'un bruit localisé en espace porte sur le comportement du soliton après cette zone de difficulté.

Le graphe 2.6.3 représente l'espérance de u pour chaque type de bruit, la surface hachurée représente le support du bruit considéré.

Première constatation, comme dans le cas d'un bruit dont le support est complet, nous

FIGURE 2.78 – $E[u]$ en fonction du type de bruit ($\varepsilon = 0.1$)FIGURE 2.79 – $E[u]$ en fonction du type de bruit à $T=1$ ($\varepsilon = 0.1$)

avons le même classement des différents type de bruit : pour un même niveau de bruit, un bruit temporel provoque moins de décroissance du soliton qu'un bruit blanc spatial, qui lui même provoque moins de décroissance qu'un bruit ayant les deux dépendances. Deuxièmement, on constate que la décroissance commence une fois que le soliton rentre en contact avec la zone bruitée et qu'elle continue après cette zone. L'interprétation que nous avons de cela est la suivante : le soliton est une solution très particulière de l'équation de Korteweg-de Vries, pour obtenir numériquement un soliton, il faut que la condition initiale soit parfaitement calibrée en fonction des paramètres de l'équation. Nous l'avons vu, le bruit provoque une diffusion du soliton créant une décroissance de ce dernier en moyenne, après cette zone de bruit, le soliton n'a plus un profil parfaitement calibré pour l'équation lui permettant de se déplacer sans déformation, ce n'est plus un soliton, le profil va donc continuer à décroître. N'étant pas stable, il va avoir tendance à se scinder comme c'est le cas des profils étudiés par Zabusky et Kruskal ([54]).

Enfin, on constate la formation d'une queue de diffusion, principalement visible dans le cas spatio-temporel sur le graphe 2.6.3. Mais le phénomène existe également dans les deux autres cas, il est juste caché par l'échelle du graphe.

2.6.4 Fonctionnelles non polynomiales

Jusqu'à maintenant dans cette section, nous nous sommes intéressé uniquement aux trois premiers moments de la solution. Ici nous allons exposer rapidement quelques résultats numériques avec des fonctionnelles non polynomiales en utilisant la méthode décrite à la fin de la section 2.5.2, qui consiste à simuler des trajectoires à partir des solutions u_α précédemment calculées avec la méthode en chaos. On rappelle les deux équations décrivant la méthode :

$$u_i = \sum_{\alpha \in A} u_\alpha \xi_i^\alpha$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n f(u_i)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(u)]$$

Nous nous intéresserons ici à $\mathbb{E}[\sin(u)]$ pour u solution de l'équation de KDV dans le cas d'un bruit additif temporel ou spatial.

NBx / ordre	1	2	3
1	0.000235342	0.000290153	0.000258076
2	0.000211479	0.000251754	0.000236616
3	5.35085e-05	4.25979e-05	2.58709e-05
4	5.68537e-05	4.28906e-05	7.4623e-06
5	5.87887e-05	2.5144e-05	9.08606e-06

FIGURE 2.80 – erreur en fonction de la taille de l'ordre des chaos. , $\varepsilon_1 = 0.025$, bruit temporel

NBx / ordre	1	2	3
1	0.00179068	0.00187999	0.00181964
2	0.000593839	0.000425034	0.000296673
3	0.000462523	0.000346808	0.000188326
4	0.000443085	0.000271537	0.000109486
5	0.000396879	0.00021384	6.60687e-05

FIGURE 2.81 – erreur en fonction de la taille de l'ordre des chaos. , $\varepsilon_1 = 0.025$, bruit spatial

En utilisant le même schéma déterministe (même pas de temps, même spline, même pas en espace), 100 000 itérations de la méthode de Monte-Carlo pour le calcul d'un estimateur de $\mathbb{E}[\sin(u)]$ prend sur la même machine environ 55h. Notons que le temps de calcul est totalement indépendant du type de bruit (additif, multiplicatif), du fait que le bruit soit temporel, spatial ou spatio-temporel et du niveau de bruits, les deux

NB / ordre	1	2	3
1	57sec	63sec	68sec
2	60sec	76sec	99sec
3	66sec	100sec	156sec
4	72sec	126sec	237sec
5	80sec	158sec	356sec

FIGURE 2.82 – temps de calcul pour 100000 itérations de la méthode. Configuration 2 (voir 4.4)

formules régissant la méthode ont une complexité ne dépendant que de la taille de l'ensemble des chaos A et du nombre d'itérations de la méthode.

Chapitre 3

Réduction de la variance de Monte-Carlo à l'aide des Chaos de Wiener

La méthode de Monte-Carlo a l'avantage d'être facile à mettre en œuvre, il suffit en effet d'avoir un code pour la résolution du cas déterministe de l'équation et de pouvoir réaliser des simulations du bruit ξ . Néanmoins, cette méthode peut s'avérer être relativement lente à cause de sa variance. Nous allons exposer ici une méthode utilisant les chaos de Wiener permettant de réduire la variance de l'algorithme de Monte-Carlo.

3.1 Variance de l'algorithme de Monte-Carlo

La première constatation que l'on peut faire est que la variance dépend du type du bruit. En particulier une dépendance spatiale du bruit augmente de façon importante la variance.

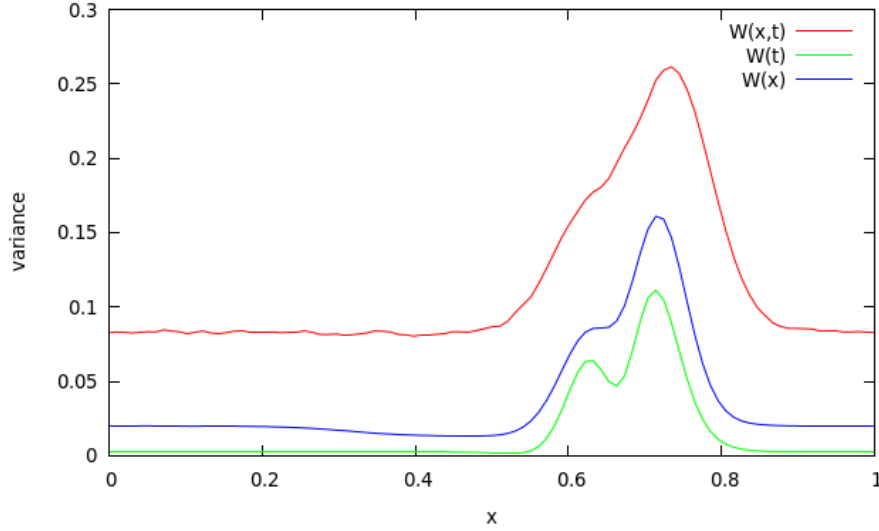


FIGURE 3.1 – Variances empiriques de la méthode de Monte-Carlo, KDV

Précédemment, lorsque nous faisons du Monte-Carlo, nous simulons les bruits blancs "complet" en simulant des gaussiennes en chaque point de notre maillage. Désormais, nous allons nous intéresser aux différentes fréquences du bruit.

$$W_i(t) = \left(\int_0^T e_i(t) W(t) dt \right) e_i(t)$$

$$W_j(t) = \left(\int_0^X m_x(x) W(x) dx \right) m_j(x)$$

$\{e_i\}_{i>0}$ et $\{m_j\}_{j>0}$ respectivement des bases Hilbertiennes de $L^2[0, T]$ et $L^2[0, X]$.

Intéressons nous à l'importance de ces fréquences, importance en terme de solution. Pour cela, utilisons la méthode de Monte-Carlo, mais au lieu d'utiliser un bruit blanc

"complet" comme précédemment, l'équation sera bruitée uniquement avec un certain nombre de fréquence. On notera :

$$W^n(t) = \sum_{i=0}^n W_i(t)$$

$$W^n(x) = \sum_{j=0}^n W_j(x)$$

$$W^{-n}(t) = W(t) - W^n(t)$$

$$W^{-n}(x) = W(x) - W^n(x)$$

Les exposants positifs représenteront ainsi les basses fréquences (inférieures à n), tandis que les exposants négatifs signifieront que l'on bruit avec les hautes fréquences.

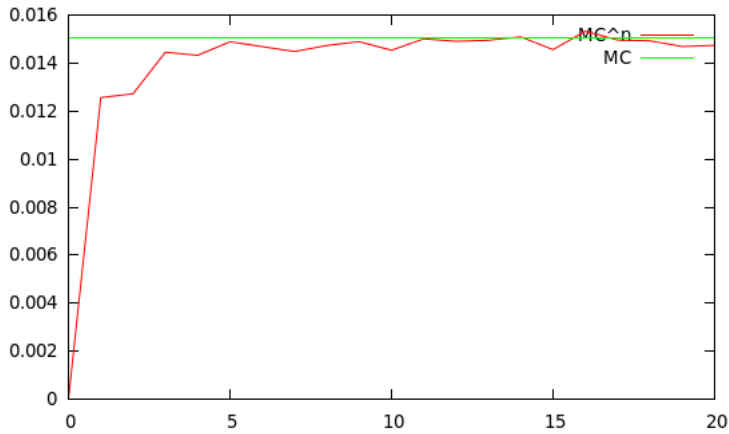


FIGURE 3.2 – Variance empirique en fonction du nombre de fréquences (bruit temporel)

Dans le cas d'un bruit temporel, on observe qu'assez rapidement l'ajout de fréquences n'apporte plus de variance. Avec peu de fréquence, on obtient la variance que

l'on a avec le bruit complet. Ceci est cohérent avec ce que l'on obtenait précédemment, la diminution de l'erreur en fonction de la taille des chaos était assez rapide, avec peu de fréquence on obtient de bonne estimation des premiers moments de la solution. La variance étant fonction des deux premiers moments, il était prévisible que la variance du Monte-Carlo basse fréquence rejoigne rapidement celle du Monte-Carlo complet. La variance étant elle même combinaison des deux premiers moments, qui sont assez rapidement bien approchés comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent.

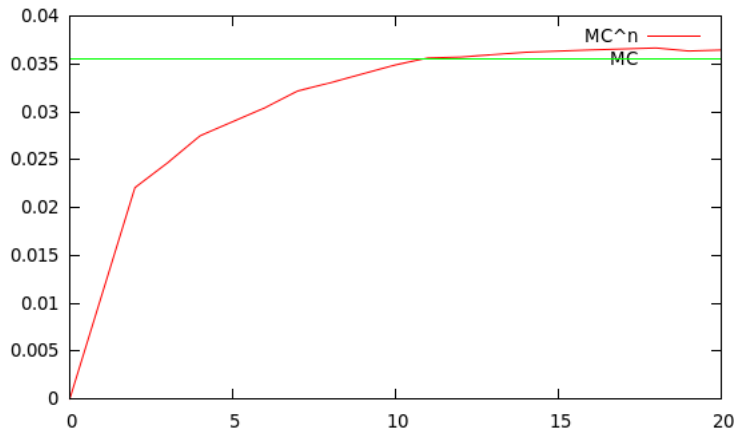


FIGURE 3.3 – Variance empirique en fonction du nombre de fréquences (bruit spatiale)

Comme nous pouvions nous en douter, le cas spatial nous donne des résultats différents mais toujours en accord avec ceux que nous avons avec uniquement des chaos. On observe qu'il faut beaucoup de plus de fréquences avant d'arriver à des résultats proches de ceux obtenus avec un bruit blanc complet.

3.2 Utilisation des Chaos de Wiener

L'idée principale de la technique va être de traiter, à l'aide des Chaos de Wiener, les basses fréquences qui sont la principale source de variance et d'utiliser un l'algorithme de Monte-Carlo pour traiter les hautes fréquences du bruit blanc. Nous exposerons en parallèle l'utilisation des chaos dans le cas d'un bruit à une seule dépendance, les deux situations étant parfaitement analogues.

3.2.1 Bruit blanc temporel et bruit blanc spatial

Soit $F \in \mathbb{N}$ la fréquence à partir de laquelle le bruit est traité avec la méthode de Monte-Carlo. On définit dans le cas d'un bruit temporel/spatial les processus suivants :

$$W_1(t) = W^F(t) \quad W_2(t) = W^{-F}(t)$$

$$W_1(x) = W^F(x) \quad W_2(x) = W^{-F}(x)$$

Nous allons ensuite étudier les équations suivantes :

$$(3.2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma(\dot{W}_1(t) + \dot{W}_2(t)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$(3.2.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma(\dot{W}_1(x) + \dot{W}_2(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

Pour estimer $\mathbb{E}[f(u)]$ nous allons utiliser le fait que $\mathbb{E}[f(u)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(u)|W_2]]$. Soit w_2 une réalisation du processus W_2 . Nous allons étudier :

$$(3.2.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma(\dot{W}_1(t) + \dot{w}_2(t)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$(3.2.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma(\dot{W}_1(x) + \dot{w}_2(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

Que nous allons alors projeter sur la base ξ^α précédemment définie. Dans le cas temporel, nous prendrons des α multi-indice colonne de taille F, multi-indice ligne de taille F dans le cas spatial.

$$(3.2.5) \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^3} + \sum_{\beta, \gamma} \frac{\partial(u_\beta u_\gamma)}{\partial x} \mathbb{E}[\xi^\gamma \xi^\beta \xi^\alpha] = \gamma \mathbb{E}[(\dot{W}_1(t) + \dot{w}_2(t)) \xi^\alpha], \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$(3.2.6) \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^3} + \sum_{\beta, \gamma} \frac{\partial(u_\beta u_\gamma)}{\partial x} \mathbb{E}[\xi^\gamma \xi^\beta \xi^\alpha] = \gamma \mathbb{E}[(\dot{W}_1(x) + \dot{w}_2(x)) \xi^\alpha], \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

Le terme $\sum_{\beta, \gamma} \frac{\partial(u_\beta u_\gamma)}{\partial x} \mathbb{E}[\xi^\gamma \xi^\beta \xi^\alpha]$ n'est pas affecté par l'ajout de w_2 et son traitement a déjà été traité précédemment.

Le second membre devient quant à lui :

$$(3.2.7) \quad \mathbb{E}[(\dot{W}_1(t) + \dot{w}_2(t)) \xi^\alpha] = \begin{cases} w_2(t) & \text{si } \alpha = 0 \\ e_i(t) & \text{si } |\alpha| = 1 \\ 0 & \text{si } |\alpha| > 1 \end{cases}$$

$$(3.2.8) \quad \mathbb{E}[(\dot{W}_1(x) + \dot{w}_2(x)) \xi^\alpha] = \begin{cases} w_2(x) & \text{si } \alpha = 0 \\ m_i(x) & \text{si } |\alpha| = 1 \\ 0 & \text{si } |\alpha| > 1 \end{cases}$$

Numériquement, il suffit donc de bruiteur la racine de l'arbre de Chaos avec une simulation de w_2 du processus W_2 pour obtenir $\mathbb{E}[f(u)|W_2]$. (voir chapitre 2 pour l'obtention). Il suffit ensuite d'appliquer l'algorithme de Monte-Carlo pour obtenir $\mathbb{E}[f(u)]$

Soit $\{w_{2,i}\}_{i>0}$ une famille de trajectoires indépendantes de loi W_2 et soit $\{\mathbb{E}_{w_{2,i}}[f(u)]\}_{i>0}$ la famille des solutions de $\mathbb{E}[f(u)|W_2]$ associée à la trajectoire $w_{2,i}$

$$(3.2.9) \quad \sum_{i=0}^n \mathbb{E}_{w_{2,i}}[f(u)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(u)]$$

3.3 Résultats numériques

Cette méthode couplant les chaos des Wiener et la méthode de Monte-Carlo nous demande de fixer les trois paramètres suivants :

- Le nombre de fréquences traitées en chaos : ce paramètre déterminera à quel point la variance sera réduite.
- L'ordre des chaos utilisés qui déterminera la précision de l'estimation des basses fréquences en chaos.
- Le nombre d'itérés de la méthode pour son aspect Monte-Carlo.

La non linéarité de l'équation du Korteweg-De Vries ou de celle de Burgers fait que l'on va très rapidement être limité en nombre de fréquence. Le temps de calcul augmentant très vite (voir 2.30). Afin de pouvoir illustrer l'effet du nombre de fréquences traitées en chaos, nous appliquerons la méthode à l'équation de la chaleur stochastique des bruits spatiaux et spatio-temporels.

3.3.1 Approximation des basses Fréquences

Chaleur : Bruit blanc spatial

Dans le cas de l'équation de la Chaleur nous n'avons qu'un seul paramètre : le nombre de fréquences. La solution u_α pour $|\alpha| > 1$ étant nuls, nous sommes ainsi limité au chaos d'ordre 1. La question va donc être : est-ce que la méthode en chaos simule correctement les bases fréquences ?

Nombre de fréquences	err_1	err_2	err_3
2	1.61362e-06	8.42029e-07	2.21391e-07
3	8.5741e-07	1.38627e-06	4.39105e-07
4	2.69104e-07	1.36864e-06	2.48656e-07
5	5.72089e-07	1.53921e-06	3.12805e-07
6	6.91235e-07	2.27583e-06	4.29386e-07
7	4.03351e-07	3.01302e-06	6.64336e-07
8	1.43311e-06	2.7435e-06	3.16105e-07
9	4.98549e-07	3.87736e-06	1.0671e-06
20	2.35609e-07	3.33813e-06	6.30029e-07

TABLE 3.1 – Erreur sur les trois premiers moments ($\varepsilon = 0.1$)

Quel que soit le nombre de fréquences et malgré un niveau de bruit élevé, les erreurs obtenues sur les 3 premiers moments de la solution sont tout à fait correctes avec une erreur de 10^{-7} , soit le niveau de précision du Monte-Carlo de référence.

Chaleur : Bruit blanc spatio-temporel

Dans le cas d'un bruit blanc spatio-temporel, nous avons deux paramètres : le nombre de fréquences traitées en temps et celui en espace. Comme précédemment,

l'ordre des chaos utilisés n'est pas un paramètre, il est naturellement fixé à 1. Ces deux paramètres n'ont à priori aucune raison d'être égaux. La méthode permet parfaitement de traiter un nombre différent de fréquences en temps et en espace. Néanmoins, nous donnerons ici uniquement les résultats pour des chaos carrés afin de pouvoir tout mettre dans un seul tableau.

Nombre de fréquences	err_2	err_3
2	2.42271e-07	2.35433e-08
3	2.25796e-07	3.51334e-08
4	9.30879e-07	1.7621e-07

TABLE 3.2 – Erreur sur les trois premiers moments ($\varepsilon = 0.1$)

Exactement comme dans le cas où le bruit n'avait qu'une dépendance spatiale, on voit que la méthode approche de façon précise les résultats obtenus avec la méthode de Monte-Carlo.

KDV : Bruit blanc temporel

Nous allons, dans cette section, pour chaque type de bruit, réaliser des Monte-Carlo avec 100000 itérations, avec un second membre contenant uniquement les basses fréquences (2, 3 ou 4 premières fréquences) afin d'obtenir une solution de référence pour l'équation et comparer cette solution avec celles obtenues avec la méthode en chaos, afin de déterminer quel est l'ordre des chaos à prendre pour correctement estimer les basses fréquences. L'erreur commise sur les basses fréquences ne peut pas être rattrapée par le Monte-Carlo réalisé, car ce dernier ne porte que sur les hautes fréquences.

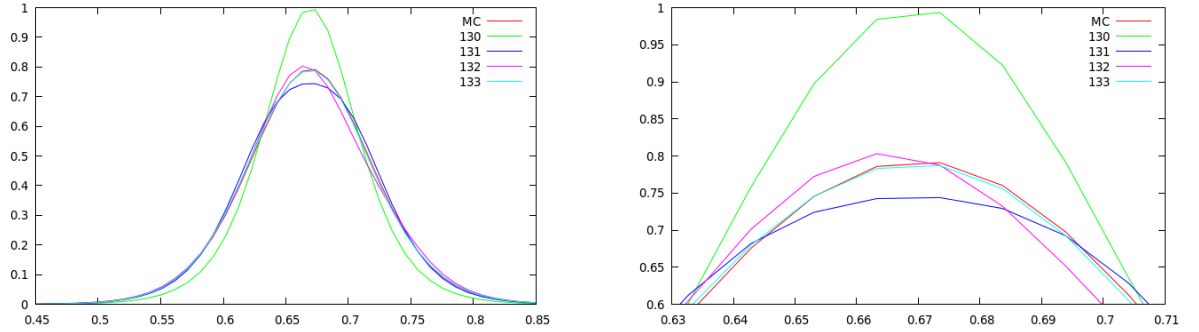


FIGURE 3.4 – Comparaison entre MC sur 3 fréquences temporelles et chaos de taille 3

Le graphe 3.4 compare les résultats obtenus avec Monte-Carlo et ceux avec la méthode en Chaos pour un bruit composé des trois premières fréquences ($\varepsilon_{\text{bruit}} = 0.05$). Les graphiques correspondants aux comparaisons pour deux et quatre fréquences sont visuellement identiques à celui-ci, indiquant ainsi une fois de plus une domination des basses fréquences, l'ajout de fréquences ayant peu d'influence.

Ordre des chaos	2 fréquences	3 fréquences	4 fréquences
0	0.00194431	0.00193266	0.00202124
1	9.68053e-05	9.90962e-05	0.00011832
2	0.000102501	8.78181e-05	0.000109488
3	6.82608e-06	3.05452e-06	4.63011e-06
4	2.26751e-06	1.94674e-07	4.35228e-07
5	1.7794e-06	4.15532e-07	2.81686e-07

TABLE 3.3 – $\|\mathbb{E}[u_{\text{chaos}}(x, 1)] - \mathbb{E}[u_{\text{MC}}(x, 1)]\|_{\mathbb{L}^2}^2$

On observe ainsi qu'il faut prendre des chaos d'ordre 3 pour avoir une erreur de l'ordre de 10^{-6} sur les premières fréquences.

En augmentant le niveau de bruit en prenant $\varepsilon_{\text{bruit}} = 0.1$, le résultat est diffère.

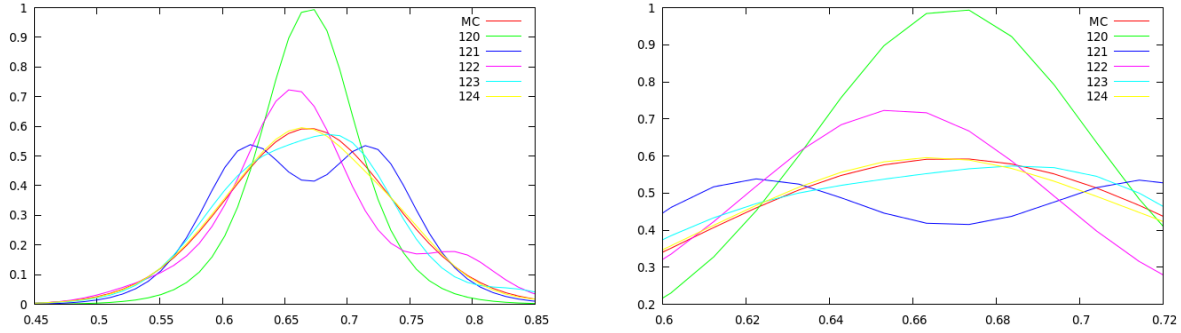


FIGURE 3.5 – Comparaison entre MC sur 2 fréquences temporelles et chaos de taille 2

Ordre des chaos	2 fréquences	3 fréquences	4 fréquences
0	0.00867161	0.010358	0.0103603
1	0.00195648	0.00265099	0.00264485
2	0.00213995	0.00314787	0.00314225
3	0.000205277	0.000424742	0.000424918
4	2.67358e-05	8.85358e-05	8.90469e-05

TABLE 3.4 – Erreur sur la moyenne

On observe dans ce cas que l'ordre des chaos nécessaire à l'obtention d'une concordance entre les résultats en chaos et ceux du monte-carlo basses fréquences est plus élevé. Par contre, comme dans le cas précédent, les résultats avec 2, 3 ou 4 sont sensiblement les mêmes. Le but étant de répéter cet algorithme un grand nombre de fois afin de traiter les hautes fréquences via la méthode de Monte-Carlo, le traitement de ce niveau de bruit ($\varepsilon_{\text{bruit}} = 0.1$) n'est pas envisageable à cause du temps de calcul de la méthode en chaos, l'ordre 4 nous donnant un temps de calcul de 53 sec sur deux

fréquences et 8min20 sur quatre (voir 2.30).

En réduisant le niveau de bruit à $\varepsilon_{\text{bruit}} = 0.025$, un niveau d'erreur de 10^{-6} est atteint dès les chaos d'ordre un.

Ordre des chaos	1 fréquences	2 fréquences	3 fréquences
0	0.0004575	0.0005132	0.0005878
1	3.80163e-07	5.40153e-07	1.02597e-06
2	8.94676e-08	9.47525e-08	1.00003e-07
3	9.61294e-08	1.15703e-072	1.5122e-08

TABLE 3.5 – Erreur sur la moyenne (0.025)

KDV : Bruit blanc spatial

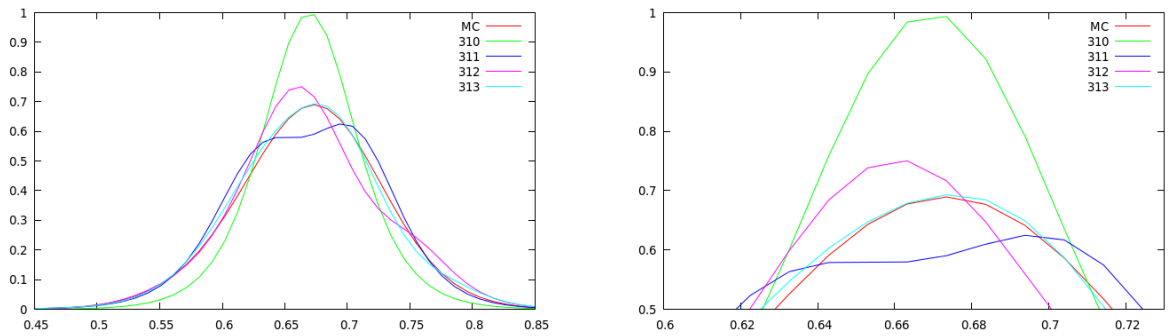


FIGURE 3.6 – Comparaison entre MC sur 3 fréquences spatiale et chaos de taille 3

Ordre des chaos	3 fréquences	4 fréquences	5 fréquences
0	0.00453013	0.00477966	0.00476256
1	0.000588018	0.000693684	0.000839806
2	0.000740649	0.00112593	0.00117272
3	5.26419e-05	9.71479e-05	0.000108269
4	7.71216e-06	2.53026e-05	2.5497e-05
5	1.8158e-06	5.82318e-06	3.4362e-06

TABLE 3.6 – Erreur sur la moyenne, $\varepsilon_{\text{bruit}} = 0.05$

Avec un bruit spatial de 0.05, nous retrouvons ici un niveau d'erreur semble à celui obtenu précédemment pour un niveau de bruit deux fois supérieur dans le cas temporel. Ainsi, comme dans le cas précédent, il n'est pas envisageable de traiter en Monte-Carlo + Chaos avec un tel niveau de bruit. L'ordre de chaos nécessaire à l'estimation correcte des basses fréquences étant trop élevé pour qu'une itération se fasse en un temps raisonnable. Nous allons diviser le niveau de bruit par deux afin d'obtenir des temps de calcul compatibles avec notre but. Encore une fois cela montre que le bruit spatial est plus difficile à capturer qu'un bruit temporel.

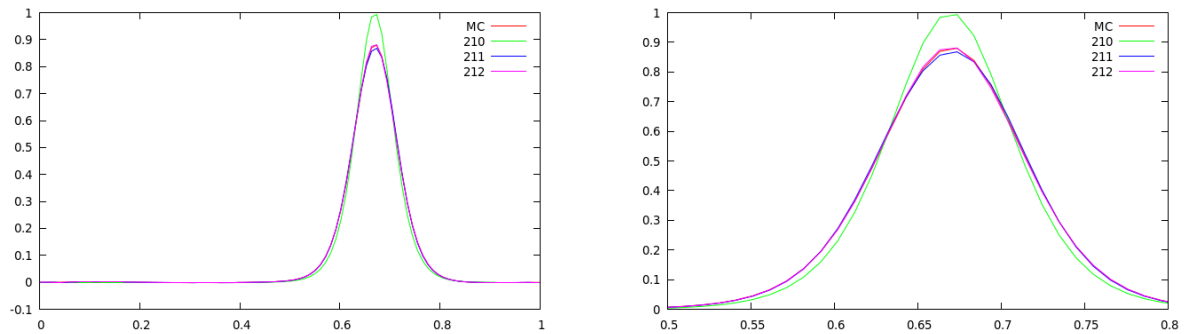


FIGURE 3.7 – Comparaison entre MC sur 2 fréquences spatiales et chaos de taille 2

Ordre des chaos	2 fréquences	3 fréquences	4 fréquences
0	0.000588704	0.000566125	0.000634921
1	7.23854e-06	8.79358e-06	1.12806e-05
2	2.60387e-06	1.76428e-06	2.69983e-06
3	5.59133e-07	1.22394e-07	3.10883e-07
4	7.45091e-07	3.1776e-07	7.1657e-07

TABLE 3.7 – Erreur sur la moyenne, $\varepsilon_{\text{bruit}} = 0.025$

Avec un niveau de bruit de 0.025, nous avons maintenant un besoin plus faible en ordre de chaos afin de bien approximer les basses fréquences et ainsi des temps de calcul beaucoup plus faible.

ordre	err_1	err_2	err_3
0	0.000256547	0.000158802	7.07489e-06
1	4.83481e-06	6.30716e-06	1.92092e-06
2	5.09816e-06	4.02613e-06	3.5166e-07
3	3.71651e-06	2.81371e-06	7.32215e-08
4	3.78461e-06	2.86021e-06	5.01197e-08

TABLE 3.8 – Erreurs entre le MC basse fréquence et la méthode en Chaos, $\varepsilon = 0.01$

3.3.2 Réduction de variance

Les deux méthodes : Monte-Carlo et MCC nous donnent des estimateurs de fonctionnelles de la solution (voir 2.5.2). Ici, nous allons comparer uniquement les variances

des estimateurs du moment d'ordre 1 que nous donne chaque méthode et également le temps de calcul, la comparaison des variances ne suffisant pas pour comparer de façon fiable les estimateurs. En effet, notons v_{MC}/v_{MCC} le nombre d'itérations réalisables en une heure avec chaque méthode et $\sigma_{MC}^2/\sigma_{MCC}^2$ leur variance respective. La précision des résultats obtenus en une heure va être respectivement de $\frac{\sigma_{MC}}{\sqrt{v_{MC}}}$ et $\frac{\sigma_{MCC}}{\sqrt{v_{MCC}}}$. Ainsi, c'est ce rapport que nous devons comparer car il est néfaste de diviser la variance par 4 si cela nous demande 5 fois plus de temps par itération.

Chaleur : bruit blanc spatial

Avant de regarder la réduction de variance, nous devons d'abord vérifier que l'on obtient le résultat attendu. Nous allons donc comparer les résultats obtenus avec la méthode de Monte-Carlo (MC), ceux obtenus avec des chaos (C) et ceux de la méthode mixte (Monte Carlo + chaos)

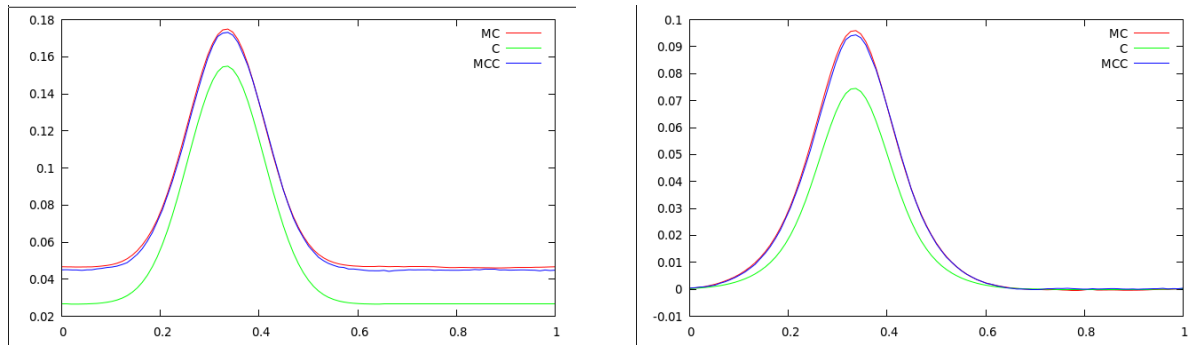


FIGURE 3.8 – Comparaison entre MC/C/MCC pour des chaos de taille 3, moment d'ordre 2 et 3

	C	MCC
err_2	0.00039369	2.48189e-06
err_3	8.71839e-04	5.30583e-07

TABLE 3.9 – Erreur sur les moments d'ordre 2 et 3, 3 fréquences traitées en chaos

Ces résultats ont été obtenu avec des chaos de taille 3. Nous voyons que les résultats obtenus en pur chaos (C) sont assez éloignés du résultat attendu. Nous avons déjà vu cela dans la section 2.6.1 : la méthode en pure chaos nécessitant des chaos de plus grande taille afin d'obtenir de bon résultats. L'ajout des hautes fréquences via du Monte-Carlo Haute fréquence nous permet d'obtenir des résultats beaucoup plus précis.

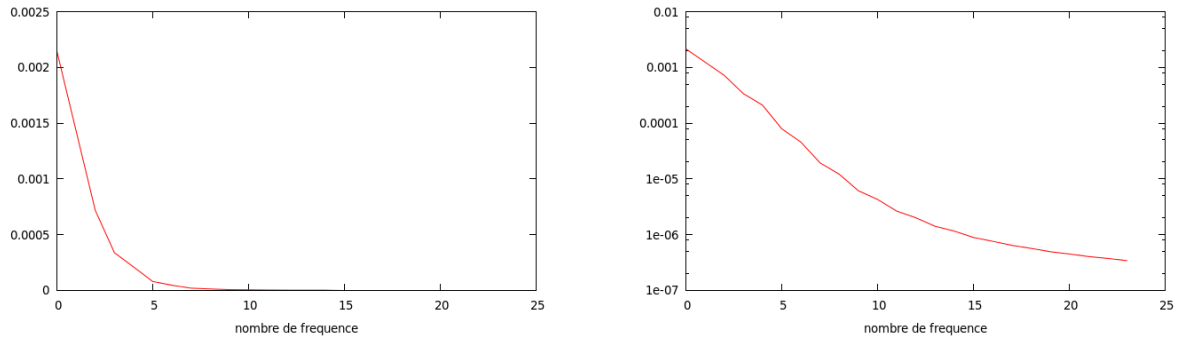


FIGURE 3.9 – Variance de la méthode MCC en fonction du nombre de fréquences traitées en Chaos, échelle logarithmique à droite

La décroissance de la variance est exponentielle avec le nombre de fréquences traitées en chaos, ce qui est extrêmement intéressant. Dans le cas de l'équation de la chaleur, l'algorithme en chaos à une complexité linéaire par rapport à la taille des chaos. Des chaos de taille n vont nous donner à résoudre $n+1$ EDP indépendantes. Pour un coût linéaire, nous avons une décroissance exponentielle de la variance.

Fréquences	temps
2	1062 sec
3	1250 sec
4	1446 sec
5	1662 sec
6	1740 sec

TABLE 3.10 – Temps d’exécution de 5000 itérations de MCC en fonction du nombre de fréquences en chaos.

Notez ici, que contrairement à ce que l’on pourrait attendre, l’augmentation du temps de calcul n’est pas linéaire. Cette augmentation est bien plus faible, cela vient du fait que le code est multi-threadé, l’augmentation du nombre de fréquences augmentant l’efficacité de la parallélisation du programme, avec uniquement deux fréquences traitées en chaos nous avons trois EDP à résoudre. Ainsi, sur une machine ayant plus de trois cores, cela provoque le non travail d’un ou plusieurs cores.

Chaleur : bruit blanc spatio-temporel

Dans le cas d’une méthode MCC avec un bruit spatio-temporel, nous avons deux paramètres correspondant à la taille des chaos utilisés : le nombre de fréquences spatiales et le nombre de fréquences temporelles.

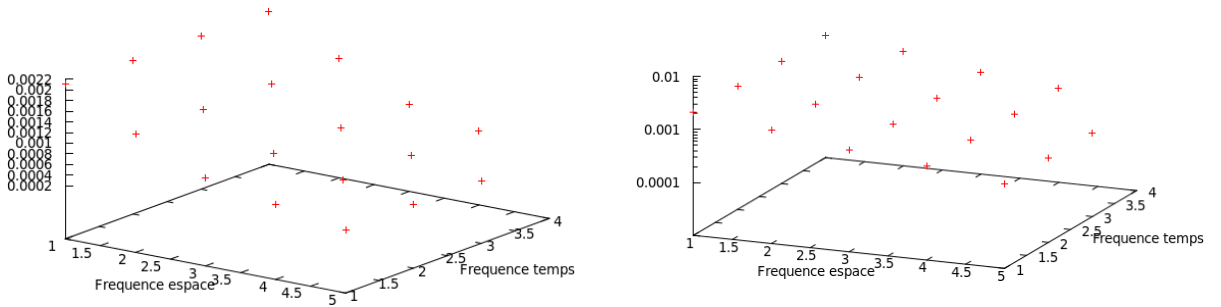


FIGURE 3.10 – Variance à $t=T$ de la méthode MCC en fonction du nombre de fréquence traitées en Chaos, échelle logarithmique à droite $\varepsilon = 0.1$

On observe que l'augmentation de la taille des chaos en terme du nombre de fréquences temporelles n'a pas d'influence sur la variance à $t=T$. Par contre, comme dans le cas précédemment traité, la variance de la méthode décroît de façon exponentielle avec le nombre de fréquences spatiales traitées à l'aide des chaos.

Ceci est intéressant, cela nous indique qu'il est préférable d'utiliser des chaos avec peu de fréquences en temps et beaucoup de fréquences en espace plutôt que d'utiliser des chaos carrés, dans le cadre d'une étude se limitant aux résultats au temps final.

Dans le cas de l'équation de la Chaleur, l'utilisation de chaos carrés ne serait pas catastrophique en terme de complexité par rapport au gain en variance : comme expliqué précédemment, de part la linéarité de l'équation de la chaleur, la complexité de la méthode MCC est directement proportionnelle avec le nombre de chaos. Dans le cas de chaos carré de taille n , nous aurons $n^2 + 1$ chaos et ainsi autant d'équations à résoudre. Cette complexité, bien que quadratique reste bien inférieure à la réduction de variance exponentielle qu'offre la méthode.

Korteweg-de Vries : bruit blanc temporel

Avec l'équation de Korteweg-de Vries, nous n'allons pas pouvoir effectuer l'algorithme MCC sur de nombreuses fréquences. La non linéarité peut selon le niveau de

bruit, nous imposer l'utilisation des chaos d'ordre supérieur à 1 afin d'estimer de façon correcte les basses fréquences (3.3.1) ce qui va malheureusement entraîner une augmentation très rapide du temps de calcul de l'algorithme en chaos en fonction du nombre de fréquences (2.30). Nous allons devoir nous limiter aux premières fréquences. Comme dans le cas précédent, nous allons comparer l'estimateur que nous donne la méthode de Monte-Carlo et celui via la méthode hybride. En particulier, nous allons regarder le gain qu'offre en terme de variance la méthode hybride, ainsi que le temps de calcul de chaque méthode.

Méthode Var	$\mathbb{E}[Var[u(., t)]]$	$\frac{\mathbb{E}[Var_{MC}[u(., t)]]}{\mathbb{E}[Var[u(., t)]]}$	temps
MC	0.0147549	1	1
MCC2	0.00258401	5.7	31.15
MCC3	0.00090494	16.3	84.5

TABLE 3.11 – Bruit blanc temporel, $\varepsilon = 0.05$, chaos d'ordre 3

La méthode offre bien une grande réduction de variance, ce résultat était attendu, nous avons déjà vu précédemment (voir 3.2) que dans le cas d'un bruit blanc temporel, la variance était avant tout portée par les basses fréquences. Néanmoins, le gain n'est pas suffisant pour compenser l'augmentation de la complexité de chaque itération. Nous allons donc réduire le niveau de bruit afin de pouvoir employer des chaos d'ordre moins important et ainsi diminuer le coût de chaque itération.

Méthode Var	$\mathbb{E}[Var[u(., t)]]$	$\frac{\mathbb{E}[Var_{MC}[u(., t)]]}{\mathbb{E}[Var[u(., t)]]}$	temps
MC	0.00467636	1	1
MCC2	0.000879029	5.3	6.7
MCC3	0.000345466	13.5	8.6

TABLE 3.12 – Bruit blanc temporel, $\varepsilon = 0.025$, chaos d'ordre 1

Avec un niveau de bruit inférieur $\varepsilon = 0.025$, nécessitant uniquement l'utilisation de chaos d'ordre 1 dans le traitement des basses fréquences, on réduit fortement le temps de calcul de la méthode MCC et également la croissance de ce dernier en fonction de la taille des chaos (cf : 2.30). Par contre, la réduction de variance reste quant à elle la même. Avec un tel niveau de bruit et des chaos d'ordre 1, la réduction de variance est supérieure à la perte de temps provoquée par la méthode. La méthode est donc intéressante.

Korteweg-de Vries : bruit blanc spatial

Méthode Var	$\mathbb{E}[Var[u(., t)]]$	$\frac{\mathbb{E}[Var_{MC}[u(., t)]]}{\mathbb{E}[Var[u(., t)]]}$	temps
MC	0.0355411	1	1
MCC2	0.0105675	3.3	32.4
MCC3	0.00784869	4.5	87.2

TABLE 3.13 – Bruit blanc spatial, $\varepsilon = 0.025$, chaos d'ordre 3

Comme pouvait le laisser présager les résultats précédents, la réduction de variance est dans le cas spatial beaucoup plus limitée, les temps de calcul étant quant à eux comparables à ceux du cas temporel. La méthode est ainsi encore moins efficace.

Méthode Var	$\mathbb{E}[Var[u(., t)]]$	$\frac{\mathbb{E}[Var_{MC}[u(., t)]]}{\mathbb{E}[Var[u(., t)]]}$	temps
MC	0.0110435	1	1
MCC2	0.00333554	3.3	6.38
MCC3	0.002689149	4.1	8.32
MCC4	0.00191074	5.7	10.00
MCC5	0.00147463	7.4	11.52

TABLE 3.14 – Bruit blanc spatial, $\varepsilon = 0.01$, chaos d'ordre 1

En réduisant le niveau de bruit afin de pouvoir utiliser des chaos d'ordre 1 pour le traitement des basses fréquences, comme dans le cas temporel, le temps de calcul est fortement réduit. Néanmoins, l'augmentation de la durée de chaque itération est toujours supérieure au gain en terme de variance. La méthode est donc néfaste même en utilisant des chaos d'ordre 1, tout du moins avec notre implémentation de la méthode.

Chapitre 4

Problématique d'implémentation

L'intégralité du programme a été codé en C++, en dehors des bibliothèques standards, l'unique bibliothèque utilisée est OpenMP (<http://openmp.org/>) qui est utilisée pour paralléliser différentes boucles dans le code.

4.1 Produit de Chaos

u_α est la solution de l'équation suivante :

$$(4.1.1) \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^3} + \sum_{\beta, \gamma} \frac{\partial(u_\beta u_\gamma)}{\partial x} \mathbb{E}[\xi^\beta \xi^\gamma \xi^\alpha] = \mathbb{E}[\dot{\xi}_i(x, t) \xi^\alpha]$$

Le code naturel pour résoudre cette famille d'équations est le suivant :

```

for(n=0;n<N;n++)
  for( $\alpha \in A$ )
    for( $\beta \in A$ )
      for( $\gamma \in A$ )
         $f_\alpha = f_\alpha + \frac{\partial(u_\beta^n u_\gamma^n)}{\partial x} \mathbb{E}[\xi^\beta \xi^\gamma \xi^\alpha]$ 
      end
    end
  end
end
for( $\alpha \in A$ )
   $u_\alpha^{n+1} = EDP(u_\alpha^n, n, \Delta t, \alpha, f_\alpha)$ 
end
end

```

Si nous travaillons sur un ensemble de chaos A , la non linéarité de cette question introduit une complexité en $O((\#A)^3)$ à travers le terme $\sum_{\beta, \gamma}$. En étudiant $\mathbb{E}[\xi^\beta \xi^\gamma \xi^\alpha]$ nous allons voir qu'il est possible de réduire de façon non négligeable cette complexité.

Prenons un exemple simple

$$\begin{aligned}
\beta = \gamma &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\xi^\beta = \xi^\gamma &= \begin{pmatrix} H_0 & H_1 \\ H_0 & H_0 \end{pmatrix} \\
\xi^\beta \xi^\gamma &= \begin{pmatrix} H_0 & H_1^2 \\ H_0 & H_0 \end{pmatrix} \\
\xi^\beta \xi^\gamma &= \begin{pmatrix} H_0 & H_2 + H_0 \\ H_0 & H_0 \end{pmatrix} \\
\xi^\beta \xi^\gamma &= \begin{pmatrix} H_0 & H_0 \\ H_0 & H_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_0 & H_2 \\ H_0 & H_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{E}[\xi^\beta \xi^\gamma \xi^\alpha] \neq 0$ ssi $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathbb{E}[\xi^\beta \xi^\gamma \xi^\alpha]$ est un cube extrêmement creux. Nous pouvons donc gagner un ordre de complexité en codant de la façon suivante :

```

for(n=0;n<N;n++)
  for( $\beta \in A$ )
    for( $\gamma \in A$ )
       $V = \beta * \gamma$ 
      for( $\alpha \in V$ )
         $f_\alpha = f_\alpha + \frac{\partial(u_\beta^n u_\gamma^n)}{\partial x} \mathbb{E}[\xi^\beta \xi^\gamma \xi^\alpha]$ 
      end
    end
  end
  for( $\alpha \in A$ )
     $u_\alpha^{n+1} = EDP(u_\alpha^n, n, \Delta t, \alpha, f_\alpha)$ 
  end
end

```

Il est alors essentiel de pouvoir identifier l'ensemble des chaos α apparaissant dans le produit $V = \beta * \gamma$ sans pour autant tester pour chaque $\alpha \in A$ son appartenance au produit V , car ceci reviendrait alors à une complexité cubique.

L'algorithme suivant permet une décomposition rapide du produit $\beta * \gamma$.

```

produit = ∅
for 1 ≤ i < Mi, 1 ≤ j < Mj
    C[i, j, k] = (Hβ(i,j)Hγ(i,j), Hk)
    C'[i, j, k, 0] = min{k > C'[i, j, k - 1], C[i, j, k] ≠ 0}
    C'[i, j, k, 1] = C[i, j, C'[i, j, k]]
    last[i, j] = max{k, C'[i, j, k] ≠ (0, 0)}
    actuel[i, j] = 0
end
for ( actuel ≠ last )
    chaos alpha
    C=0
    for 1 ≤ i < Mi, 1 ≤ j < Mj
        alpha[i, j] = C'[i, j, actuel[i, j], 0]
        Coef = Coef * alpha[i, j] = C'[i, j, actuel[i, j], 1]
    end
    produit = produit ∩ (alpha, coef)
    actuel++
end
return produit

```

L'instruction "actuel++" étant l'incrément de la matrice "actuel" pour la relation d'ordre correspondant à l'ordre lexicographique.

4.2 Structure de données utilisée

Autre conséquence de la non linéarité de l'équation de Korteweg-de Vries, nous avons très souvent besoin d'obtenir u_α pour un chaos α donné. Il est donc important que cette accès puisse être le plus rapide possible.

Afin de stocker les chaos et les différentes données liées à chacun d'entre eux, nous proposons ici une structure d'arbre, dont la racine sera le chaos nul et la relation R entre les sommets sera définie par :

$$\alpha R \beta \Leftrightarrow \exists ! i, \exists ! j \text{ tels que } \alpha(i, j) \neq \beta(i, j) \text{ et } |\alpha(i, j) - \beta(i, j)| = 1$$

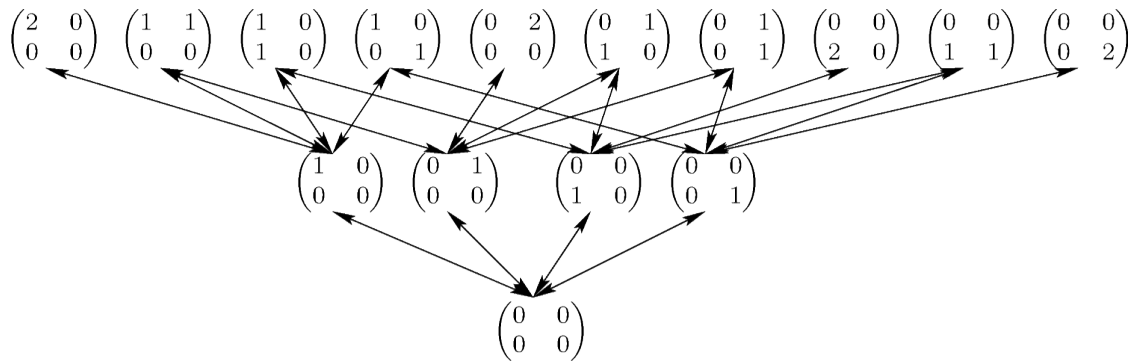


FIGURE 4.1 – Arbre de chaos α 2x2 tronqué à hauteur 2

Chaque sommet de l'arbre contient (entre autres) les informations suivantes :

- α : le multi-indice.
- u_α : une matrice de taille Nbx x Nbt.
- f_α : un vecteur stockant le second membre dû à la non linéarité.
- V_α : ensemble des couples (β, γ) tels que $\alpha \in \beta * \gamma$.
- Succ : une matrice de pointeurs vers les successeurs de α .
- Pred : une matrice de pointeurs vers les prédécesseurs de α .
- Lock : un sémaphore permettant de bloquer la modification des données de ce sommet.

Concrètement, pour des chaos de taille 2x2 nous aurons en mémoire un tableau de ce type :

adresse	α	u_α	f_α	Successeurs	Prédécesseurs
1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$u_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$	$f_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ Null & Null \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Null & Null \\ Null & Null \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$u_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$	$f_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix} Null & 3 \\ Null & Null \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & Null \\ Null & Null \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$u_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$	$f_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix} Null & Null \\ Null & Null \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ Null & Null \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$u_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$	$f_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix} 3 & Null \\ Null & Null \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Null & 1 \\ Null & Null \end{pmatrix}$
...	...	...	...	...	...

L'énorme avantage qu'offre cette structure de données en arborescence est un temps d'accès très rapide aux données. En effet il suffit d'une unique lecture de α afin d'accéder aux données liées au chaos α en suivant $|\alpha|$ pointeur.

Structure de données	coût de l'accès aux données
Tableau	$ A $ comparaisons de multi-indice
Tableau trié/Map	$\log_2(A)$ comparaisons de multi-indice
Table de hachage	empreinte de α + comparaisons (si collision)
Arbre	Une unique lecture de α et suivi de $ \alpha $ pointeurs

TABLE 4.1 – coût de l'accès aux données en fonction du type de structure

De plus, dans les cas de bruit multiplicatif, le second membre des EDP est du type $\sum_{i,j} \sqrt{\alpha_{i,j}} m_j u_{\alpha(i,j)} e_i$, où $\alpha(i,j)$ désigne le prédécesseur du chaos α en (i,j) . La mise en place de pointeurs descendants a été motivée par ce type de bruit pour avoir un accès direct lors de la construction du second membre.

4.3 Parallélisation

Les problèmes de parallélisation du code sont directement liés à la non linéarité de l'équation. En effet dans le cas linéaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = dW$$

On obtient après projection sur $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ la famille d'EDP indépendantes suivante :

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} = \delta_{|\alpha|=1} m_{j(\alpha)} e_{i(\alpha)}$$

Il suffit alors, pour paralléliser le code sur N_{cpu} processeurs, de choisir une partition de A : $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $\#A_i \simeq \frac{\#A}{N_{cpu}}$

En ayant à notre disposition une fonction EDP pour résoudre ce type d'équation, le i -ème processeur se chargera alors du code suivant :

```
for(n=0 ; n<N ; n++)
  for( $\alpha \in A_i$ )
     $u_\alpha^{n+1} = EDP(u_\alpha^n, n, \Delta t, \alpha, )$ 
  end
end
```

Chaque processeur s'occupant d'équations indépendantes, il n'y a pas de problèmes de collisions mémoires, le fait que $\#A_i \simeq \frac{\#A}{N_{cpu}}$ permet d'assurer une charge équilibrée entre les processeurs.

Dans le cas non linéaire des problèmes de collisions et de charge. En effet l'équation suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = dW$$

Nous donne après projection :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \left(\sum_{\beta, \gamma} u_{\gamma} u_{\beta} \xi^{\beta} \xi^{\gamma} \right)}{\partial x} = dW$$

$$\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x^2} + \sum_{\beta, \gamma} \frac{\partial (u_{\beta} u_{\gamma})}{\partial x} \mathbb{E}[\xi^{\beta} \xi^{\gamma} \xi^{\alpha}] = \delta_{|\alpha|=1} m_{j(\alpha)} e_{i(\alpha)}$$

Nous avons ainsi à construire les seconds membres f_{α} dûs à la non linéarité de l'équation :

```

for( $\beta \in A$ )
  for( $\gamma \in A$ )
     $V = \beta * \gamma$ 
    for( $\alpha \in V$ )
       $f_{\alpha} = f_{\alpha} + \frac{\partial (u_{\beta}^n u_{\gamma}^n)}{\partial x} \mathbb{E}[\xi^{\beta} \xi^{\gamma} \xi^{\alpha}]$ 
    end
  end
end
end

```

Cette opération est la plus lourde (voir 2.6.2), il est donc essentiel de la paralléliser si l'on souhaite accélérer la résolution. Néanmoins, cela s'avère plus délicat que dans le cas linéaire.

Supposons que nous ayons deux CPU et $A = A_1 \cup A_2$

Si on remplace la boucle : $\text{for}(\beta \in A)$ par 2 boucles : $\text{for}(\beta \in A_i)$

La situation suivante peut arriver :

CPU	1	2
β	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
γ	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
V	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, les deux processeurs peuvent être amenés à écrire en même temps dans la zone mémoire du chaos $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, la non linéarité nous oblige à utiliser des sémaphores afin de rendre exclusif l'accès mémoire aux données de chaque chaos.

Le code devient alors :

```

for( $\beta \in A$ )
  for( $\gamma \in A$ )
     $V_{\beta,\gamma} = \beta * \gamma$ 
    for( $\alpha \in V_{\beta,\gamma}$ )
      lock( $\alpha$ )
       $f_\alpha = f_\alpha + \frac{\partial(u_\beta^n u_\gamma^n)}{\partial x} \mathbb{E}[\xi^\beta \xi^\gamma \xi^\alpha]$ 
      unlock( $\alpha$ )
    end
  end
end
end

```

La non linéarité pose également un problème pour l'équilibrage de la charge processeur, si on parallélise à partir d'une partition de A telle que $\forall i, j \# A_i \simeq \# A_j$ nous pouvons avoir de gros déséquilibres. On note C_α (resp : C_B) le coût d'un chaos dans cette procédure (resp d'un sous ensemble $B \in A$), qui correspond au nombre d'exécutions de l'instruction centrale.

$$C_\alpha = \sum_{\beta \in A} \#V_{\alpha,\beta}$$

$$C_B = \sum_{\alpha \in B} C_\alpha$$

A=224		A= 444	
α	$\#C_\alpha$	α	$\#C_\alpha$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	70	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	969
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	65	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	197
$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	27		
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	100		

Certains chaos ont donc un coût bien plus élevé que d'autre. Ainsi, afin de ne pas perdre de puissance de calcul, l'idéal est d'avoir une partition : $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ avec $\forall i, j$ $C_{A_i} \simeq C_{A_j}$

4.4 Machines Utilisées

Afin de donner un sens aux différents temps de calculs exposés dans ce manuscrit, voici la description des 3 configurations utilisées pour les différentes simulations :

Nom	CPU	RAM
Config 1	4 x Intel Xeon E5-4620(2.2 Ghz,8 cores,16 thread)	32 Gio
Config 2	Intel Core i7-3930k(3.5Ghz,6 cores, 12 thread)	16 Gio
Config 3	Intel Core i7-2600(3.4 Ghz,4 cores, 8 thread)	8 Gio

TABLE 4.2 – Configurations utilisées pour les simulations

4.5 Équations Utilisées lors des tests numériques

En raison du grand nombre de paramètres caractérisant les tests numériques, il est assez lourds de rappeler ces derniers systématiquement. Nous listons ici les différentes configurations courantes utilisées lors des tests.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon_{dx} \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_{d^2x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon_{d^3x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \varepsilon_{x^2} u \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_w \dot{W}_1(x, t) + \varepsilon_{uw} u \dot{W}_2(x, t), \quad x \in [0, X], t \in [0, T]$$

Nom	ε_{d^2x}	ε_{d^3x}	ε_{x^2}	A	K	$u(x, 0)$
Chaleur	0.005	0	0	0.5	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{3\varepsilon_{d^3x}}}$	$A \operatorname{sech}^2(K(x - 0.5))$
KDV	0	2.10^{-4}	1	0.5	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{3\varepsilon_{d^3x}}}$	$A \operatorname{sech}^2(K(x - 0.5))$
Burger	0.01	0	1	-	-	$-\sin(2\pi(x - 0.5))$
Burger "Kink"	0.01	0	1	-	-	$c(1 + \tanh\left(-c \frac{2 * (x - 0.5)}{\varepsilon_{d^2x}}\right))$

TABLE 4.3 – Configurations typiques

4.6 Opérateurs d'affectation composé

Le C++, comme de nombreux langages, possède des opérateurs d'affectation composé ($=+$, $=*$, $=-$, $=/$) qui a première vue ne sont que des raccourcis d'écriture dans le code, au même titre que l'opérateur unaire $++$ qui est un raccourci beaucoup plus connu que les opérateurs précédents et qui permet de raccourcir " $x=x+1$ " en " $x++$ ". Néanmoins, leur utilisation et une bonne implémentation de ces opérateurs peut avoir d'énormes conséquences sur la rapidité du programme, ce fait peut paraître assez trivial pour un lecteur averti en programmation, mais au vu du gain que cette petite astuce a apporté en terme de vitesse (parmi les améliorations les plus significatives) il nous semblait important d'aborder rapidement ce point.

Pour illustrer en quoi cette utilisation peut être extrêmement bénéfique, nous allons nous étudier l'exécution de la ligne de code suivante :

$$f_{\alpha} = f_{\alpha} * \varepsilon * \Delta t * 2$$

Cette ligne va en fait s'exécuter de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Temp1} &= f_{\alpha} * \varepsilon \\ \text{Temp2} &= \text{Temp1} * \Delta t \\ \text{Temp3} &= \text{Temp2} * 2 \\ f_{\alpha} &= \text{Temp3} \end{aligned}$$

Si f_{α} est un vecteur réel de taille n , cette exécution va coûter $3n$ multiplications de réels, la réservation mémoire pour les 3 vecteurs temporaires et une recopie de vecteur.

En utilisant l'opérateur $*=$ cette ligne devient :

$$f_{\alpha} *= \varepsilon * \Delta t * 2$$

Qui en absence de surcharge de l'opérateur est équivalent à :

$$f_{\alpha} = f_{\alpha} * (\varepsilon * \Delta t * 2)$$

$$\begin{aligned} \text{Temp1} &= \varepsilon * \Delta t * 2 \\ \text{Temp2} &= f_{\alpha} * \text{Temp1} \\ f_{\alpha} &= \text{Temp2} \end{aligned}$$

Cette exécution est déjà plus intéressante, la première ligne ne coûte que 3 multiplication, n multiplications et une réservation mémoire pour la deuxième et une recopie de vecteur pour la dernière.

La C++ permet d'implémenter nous même l'opérateur *= (on parle alors de surcharge, car l'opérateur a déjà une implémentation par défaut) il est possible de ne pas utiliser de vecteur temporaire en forçant le programme à utiliser la zone mémoire de f_{α} et ainsi avoir l'exécution suivante :

$$\begin{aligned} \text{Temp1} &= \varepsilon * \Delta t * 2 \\ f_{\alpha} &= f_{\alpha} * \text{Temp1} \end{aligned}$$

4.7 Code adaptatif : Élagage automatique de l'Arbre

Comme nous l'avons vu précédemment, une grande partie du temps de calcul est provoquée par le calcul de la non linéarité, calcul dont le temps est directement lié au nombre de chaos considérés. Définir une bonne troncature de l'arbre n'est pas quelques choses d'aisé. Une idée serait une méthode d'élagage numérique de l'arbre en appliquant à la fin de chaque itéré en temps le code suivant :

```

for(  $\alpha \in A$ )
  if (test( $u_\alpha^n$ ))
     $A = A - \alpha$ 
  end
end

```

Nous pourrions imaginer différentes méthodes.

- Élimination en dessous d'un certain seuil : $test(u_\alpha^n) \Leftrightarrow \|u_\alpha^n\|_{\mathbb{L}^2} < \epsilon$
- Élimination du dernier chaos : $test(u_\alpha^n) \Leftrightarrow \alpha = \arg \min_{\alpha \in A} \|u_\alpha^n\|_{\mathbb{L}^2}$

Pour pouvoir envisager cette méthode il faut nécessairement une certaine constance dans l'importance des chaos. Sans cela, cette méthode pourrait être amenée à supprimer des "petits" chaos qui allaient devenir important avec le temps. Cette méthode n'a par exemple pas de sens dans le cas d'un bruit temporel avec une base constante par morceaux car de nombreux chaos garderont une norme $\mathbb{L}_2$ nulle tant que la variable de temps n'aura pas atteint leur support.

De façon générale, pour observer cette stabilité, nous définissons à un instant t donné la relation d'ordre suivante :

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \|u_\alpha(., t)\|_{\mathbb{L}_2} < \|u_\beta(., t)\|_{\mathbb{L}_2}$$

A partir de cette relation d'ordre et à chaque instant t on attribue le numéro $N_t(\alpha)$ au chaos α (numérotation partant de 0).

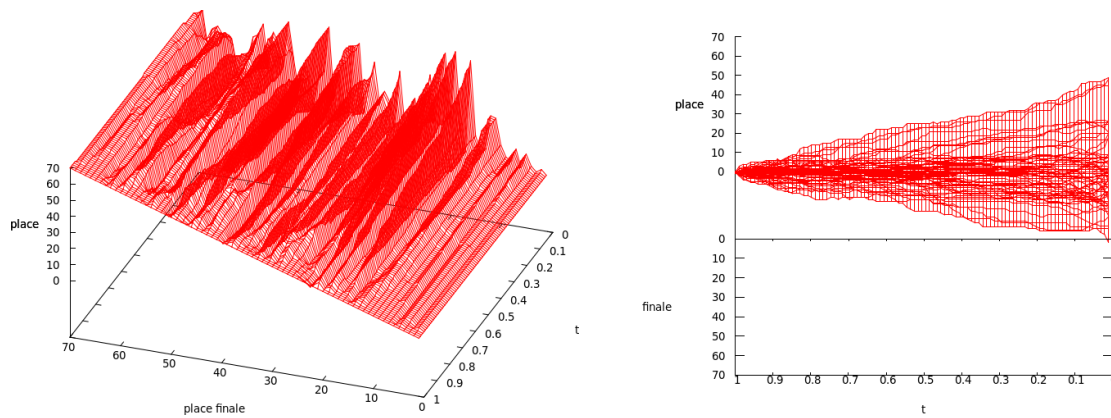


FIGURE 4.2 – Évolution de la place de chaque chaos en fonction du temps. KDV chaos 414, base fourier

Pour qu'un élagage automatique ne soit pas néfaste en terme de résultat, l'idéal serait d'avoir un plan ou tout du moins une courbe tendant assez rapidement vers un plan. Mais comme nous pouvons le constater, ce n'est malheureusement pas le cas. Certains chaos restent "petits" longtemps avant de gagner en importance. Par exemple dans le cas de l'équation de Korteweg-de Vries avec un bruit blanc additif spatial, nous avons l'évolution suivante des chaos :

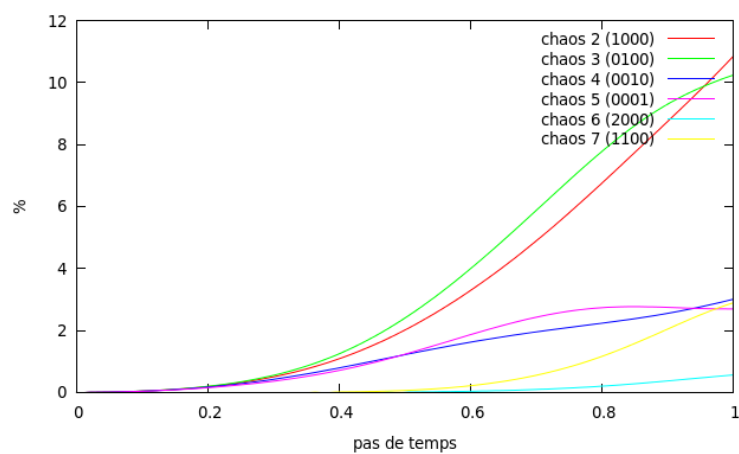


FIGURE 4.3 – Évolution de la place de chaque chaos en fonction du temps. KDV chaos 414, base fourier

Le Chaos 7, chaos d'ordre 2 possède jusqu'à $t=0.5$ une norme extrêmement faible alors qu'il fini par être plus important que certain chaos d'ordre 1, qui pourtant d'une façon générale sont les chaos les importants en terme de masse.

4.8 Prédiction polynomiale

À chaque nouveau pas de temps n et pour chaque chaos α , nous devons initialiser notre point fixe avec un vecteur que l'on notera $u_{\alpha,0}^n$. Dans le cas du schéma de Crank Nicholson, on cherche à initialiser le point fixe pour le demi pas de temps suivant $u_{\alpha,0}^{n+\frac{1}{2}}$. La méthode est rigoureusement la même mais afin de simplifier un peu les notations nous décrivons ici la méthode sur l'équation de burger qui ne nécessite pas l'utilisation du schéma de Crank Nicholson.

La technique de base consiste à initialiser notre point fixe avec la solution obtenue au pas de temps précédent, c'est à dire prendre

$$\forall \alpha \in A \quad u_{\alpha,0}^n = u_{\alpha}^{n-1}$$

Un moyen d'améliorer cette initialisation du point fixe est faire une prédication polynomiale à partir des précédentes solutions.

La première étape consiste à trouver le polynôme d'ordre E $P_{\alpha,k}^n$ solution de :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, E\} \quad P_{\alpha,k}^n((n-i)\Delta t) = u_{\alpha}^{n-i}(k)$$

On cherche ainsi les coefficients $(a_0, a_1, \dots, a_{E-1})$ solutions du système d'équations suivant :

$$a_{E-1}((n-1)\Delta t)^{E-1} + \dots + a_1(n-1)\Delta t + a_0 = u_{\alpha}^{n-1}(k)$$

...

$$a_{E-1}((n-E)\Delta t)^{E-1} + \dots + a_1(n-E)\Delta t + a_0 = u_{\alpha}^{n-E}(k)$$

La résolution de ce système revient à inverser la Matrice de Vandermonde définie par $M_{i,j} = ((n-i)\Delta t)^{j-1}$

La méthode consiste ensuite à prendre :

$$\forall \alpha \in A \quad u_{\alpha,0}^n(k) = P_{\alpha,k}^n(n\Delta t)$$

L'efficacité de cette méthode dépend de la base en temps choisie pour générer le bruit associé au chaos.

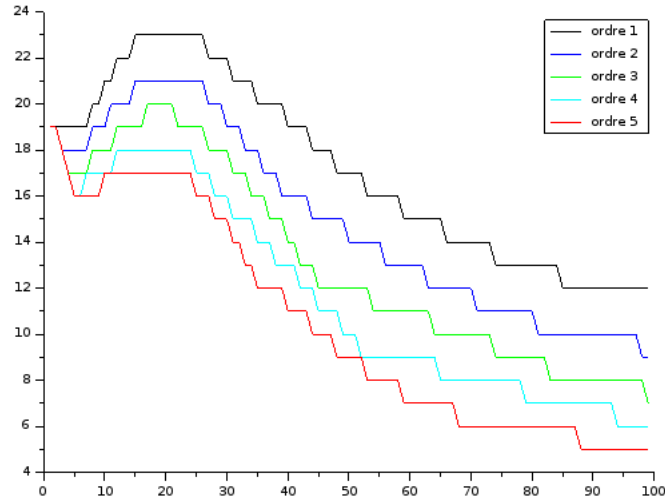


FIGURE 4.4 – Nombre de point fixe nécessaire pour chaque pas de temps en fonction de l'ordre d'approximation

Dans le cas de la base de Fourier, on observe une nette diminution du nombre de points fixes nécessaires afin d'obtenir l'erreur souhaitée. Cette opération de prédiction

a un coût très faible comparé celles que l'on fait durant chaque point fixe, ce qui rend cette méthode de prédiction intéressante en terme de calculs.

Ordre de Prédiction	Temps
1	22.07s
2	20.25s
3	18.77s
4	16.77s
5	15.76s
6	15.88s

TABLE 4.4 – Temps d'exécution burger additif A=132ff

Par contre, dans le cas de la base constante par morceau, le résultat est assez différent.

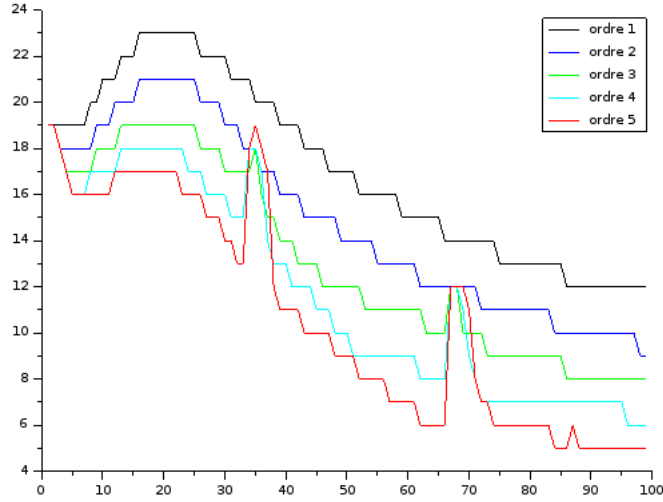


FIGURE 4.5 – Nombre de points fixes nécessaires pour chaque pas de temps en fonction de l'ordre d'approximation

Ce test a été réalisé avec des chaos de taille 3, on observe tous les 33 pas de temps une brusque augmentation du nombre de pas de temps nécessaires à atteindre l'objectif rendant ainsi le gain de la prédiction quasiment nul. Ceci s'explique par un phénomène de "réveil" progressif des chaos.

On définit le niveau temporel $N(\alpha)$ d'un chaos α

$$N(\alpha) = \max(i, \exists j \alpha(j, i) \neq 0)$$

$N(\alpha)$ correspond à l'indice de la dernière colonne non nulle dans le multi indice du chaos.

Pour un chaos α différent du chaos nul on a la propriété suivante :

$$t < \frac{T * N(\alpha)}{Mi} \implies u_\alpha(x, t) = 0$$

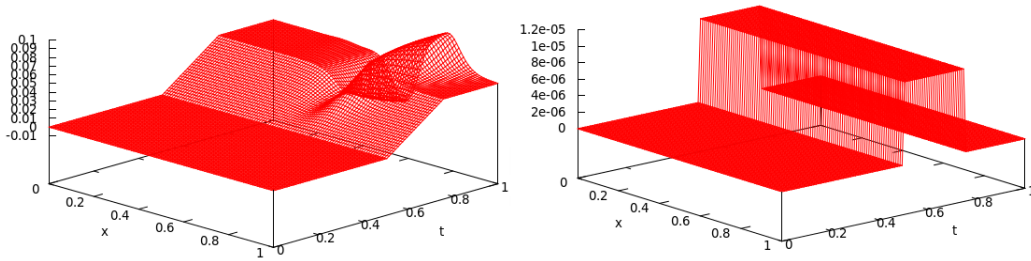


FIGURE 4.6 – Solution u_α et bruit additif associé au chaos $\alpha = (0, 0, 1, 0)$

On observe sur cet exemple que $u_\alpha(x, t)$ est nul jusqu'au "réveil" du chaos en $t=0.5$, ainsi en $t=0.5$ la prédiction polynomiale sera basée sur E valeurs nulles, le polynôme le sera également tout comme la prédiction obtenue, ainsi on retombe sur la valeur initiale que l'on aurait prise en prenant la solution précédente.

Conclusion

Au cours de ce manuscrit nous avons montré comment la décomposition de processus stochastiques en chaos polynomiaux pouvait être utilisée dans l'étude numérique d'EDPS. Deux méthodes ont été présentées, une méthode utilisant uniquement la décomposition en chaos et une méthode couplant chaos et méthode de Monte-Carlo, cette méthode hybride pouvant être vue comme une méthode de réduction de variance de l'algorithme de Monte-Carlo. Nous avons vu que la méthode en chaos pouvait être appliquée à de nombreuses EDPS, le cas linéaire a été traité à travers l'exemple de l'équation de la chaleur, le cas non linéaire a été traité avec celles de Korteweg-de Vries et de Burgers. Les cas étudiés différaient également par leur bruit : type (additif ou multiplicatif), par la/les dépendances (spatial/temporel/spatio-temporel), bruit localisé ou non.

La méthode en chaos possède deux paramètres : la taille et l'ordre des chaos utilisés. Le principal problème rencontré est un problème de complexité. Là où la méthode de Monte-Carlo possède une complexité en $O(n)$ avec n le nombre d'itérations réalisées, la méthode en chaos demande la résolution de $\frac{(n+O)!}{n!O!}$ EDP pour des chaos de taille n et d'ordre O . De plus dans le cas d'équation non linéaire, ces dernières sont liées entre elles par un terme issu de cette non linéarité augmentant également le temps de résolution de chacune de ces EDP, la construction de ce terme étant très rapidement la partie prenant numériquement le plus de temps (voir 2.6.2).

Néanmoins malgré cette complexité, nous avons vu que la méthode s'avérait très efficace dans de nombreuses situations. Dans le cas d'équation linéaire, l'absence du terme liant de façon globale l'ensemble des équations réduit grandement la complexité de la méthode. Dans le cas non linéaire nous avons vu une corrélation entre l'intensité du bruit de l'EDPS traitée et l'ordre des chaos nécessaire à l'obtention de résultats précis. La méthode reste ainsi intéressante si le niveau de bruit ne réclame pas l'utilisation de chaos d'ordre élevé, paramètre faisant très vite augmenter les temps de calcul. Une deuxième constatation concerne l'autre paramètre de la méthode : la taille des chaos. On constate en effet que dans le cas d'un bruit ayant une dépendance spatiale, la taille des chaos nécessaire à l'obtention de bons résultats était plus élevée que dans le cas d'un bruit temporel, cela rendant malheureusement néfaste (avec l'implémentation actuelle), la méthode de réduction de variance présentée dans le chapitre 3 pour un tel type de bruit.

Les choix d'implémentation ont donc une importance capitale. Les diverses améliorations exposées dans le chapitre 4, telles que la gestion des chaos en arborescence, une programmation astucieuse de l'assemblage du terme non linéaire en chaos ou encore une bonne répartition de la charge entre les unités de calcul disponibles, sont autant d'éléments qui ont permis de repousser le niveau de bruit à partir duquel la méthode devient trop coûteuse en temps. De futures améliorations pourraient très bien à terme rendre la méthode de réduction de variance valable même dans le cas d'un bruit spatial.

De nombreuses situations n'ont pas été présentées dans ce manuscrit, en particulier il est tout à fait possible d'étudier numériquement une équation bruitée par deux types de bruit, un additif et un multiplicatif par exemple, la méthode le permet tout à fait. Bien qu'il ne soit pas envisageable (sauf révolution concernant la complexité de la méthode) de traiter les deux bruits en chaos, il est tout à fait envisageable de traiter un bruit en chaos et l'autre à l'aide de la méthode de Monte-Carlo. L'application de la méthode à des équations où la non linéarité est définie avec un produit de Wick, peut

donner des résultats très intéressants, ce type de produit issu de la physique simplifiant énormément la construction du terme non linéaire et ainsi l'efficacité de la méthode en chaos. La méthode en chaos peut également être appliquée à la situation où le bruit n'est pas un terme de force mais où il est/affecte la condition initiale de l'équation.

Bibliographie

- [1] M. A. ABLOWITZ AND P. A. CLARKSON, Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, no. 149 in London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [2] I. BABUSKA, R. TEMPONE, AND G. ZOURARIS, Galerkin Finite Element Approximations of Stochastic Elliptic Partial Differential Equations, SIAM J. Numer. Anal., 42 (2004), pp. 800–825.
- [3] I. BABUŠKA, B. ANDERSSON, P. J. SMITH, AND K. LEVIN, Damage analysis of fiber composites Part I : Statistical analysis on fiber scale, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 172 (1999), pp. 27–77.
- [4] F. E. BENTH AND J. GJERDE, Convergence Rates for Finite Element Approximations of Stochastic Partial Differential Equations, Stochastics and Stochastics Rep., 63 (1998), pp. 313–326.
- [5] J. L. BONA, V. A. DOUGALIS, O. A. KARAKASHIAN, AND W. R. MCKINNEY, Conservative, High-Order Numerical Schemes for the Generalized Korteweg-de Vries Equation, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 351 (1995), pp. 107–164.
- [6] J. L. BONA AND R. SMITH, The Initial-Value Problem for the Korteweg-De Vries Equation, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 278 (1975), pp. 555–601.
- [7] J. BOURGAIN, Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. Part II : The KDV-equation, Geom. Funct. Anal., 3 (1993), pp. 209–262.

- [8] J. BOUSSINESQ, Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire, Comptes Rendus à l'Académie des Sciences, 72 (1871), pp. 755–759.
- [9] J. M. BURGERS, Mathematical Examples Illustrating Relations Occurring in the Theory of Turbulent Fluid Motion, in Selected Papers of J. M. Burgers, F. T. M. Nieuwstadt and J. A. Steketee, eds., Springer Netherlands, 1995, pp. 281–334.
- [10] R. H. CAMERON AND W. T. MARTIN, The Orthogonal Development of Non-Linear Functionals in Series of Fourier-Hermite Functionals, Ann. Math., 48 (1947), pp. 385–392.
- [11] D. H. CHAMBERS, R. J. ADRIAN, P. MOIN, D. S. STEWART, AND H. J. SUNG, Karhunen–Loève expansion of Burgers' model of turbulence, Phys. Fluids, 31 (1988), pp. 2573–2582.
- [12] H.-Y. CHANG, C. LIEN, S. SUKARTO, S. RAYCHAUDHURI, J. HILL, E. K. TSIKIS, AND K. E. LONNGREN, Propagation of ion-acoustic solitons in a non-quiescent plasma, Plasma Phys. Control. Fusion, 28 (1986), p. 675.
- [13] J. COLE, On a quasi-linear parabolic equation occuring in hydrodynamics, Quart. Appl. Math., 9 (1951), pp. 225–236.
- [14] G. DA PRATO, A. DEBUSSCHE, AND R. TEMAM, Stochastic Burgers' equation, NoDEA, 1 (1994), pp. 389–402.
- [15] G. DA PRATO AND J. ZABCZYK, Stochastic Equations in Infinite Dimension, no. 152 in Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, UK, second ed., 2014.
- [16] A. DE BOUARD AND A. DEBUSSCHE, On the Stochastic Korteweg–de Vries Equation, J. Funct. Anal., 154 (1998), pp. 215–251.
- [17] A. DE BOUARD AND A. DEBUSSCHE, The Korteweg-de Vries Equation with Multiplicative Homogeneous Noise, in Stochastic Differential Equations : Theory and Applications, vol. 2 of Interdisciplinary Mathematical Sciences, WORLD SCIENTIFIC, Apr. 2007, pp. 113–133.

- [18] —, Soliton dynamics for the Korteweg-de Vries equation with multiplicative homogeneous noise, *Electronic Journal of Probability*, 14 (2009).
- [19] A. DE BOUARD, A. DEBUSSCHE, AND Y. TSUTSUMI, White Noise Driven Korteweg-de Vries Equation, *J. Funct. Anal.*, 169 (1999), pp. 532–558.
- [20] M. K. DEB, I. M. BABUŠKA, AND J. T. ODEN, Solution of stochastic partial differential equations using Galerkin finite element techniques, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190 (2001), pp. 6359–6372.
- [21] P. G. DRAZIN, Solitons, no. 85 in London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [22] J. FOURIER, Theorie analytique de la chaleur, par M. Fourier, Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.
- [23] C. S. GARDNER, J. M. GREENE, M. D. KRUSKAL, AND R. M. MIURA, Method for Solving the Korteweg-deVries Equation, *Phys. Rev. Lett.*, 19 (1967), pp. 1095–1097.
- [24] R. G. GHANEM AND P. D. SPANOS, Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach, Springer-Verlag New York, 1991.
- [25] J. GINIBRE AND Y. TSUTSUMI, Uniqueness of Solutions for the Generalized Korteweg-de Vries Equation, *SIAM J. Math. Anal.*, 20 (1989), pp. 1388–1425.
- [26] I. C. GOHBERG AND M. G. KREIN, Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space, no. 18 in Translation of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, R.I, Dec. 1969.
- [27] E. HOPF, The partial differential equation $ut + uux = uxx$, *Comm. Pure Appl. Math.*, 3 (1950), pp. 201–230.
- [28] T. Y. HOU, W. LUO, BORIS ROZOVSKII, AND H.-M. ZHOU, Wiener Chaos expansions and numerical solutions of randomly forced equations of fluid mechanics, *J. Comput. Phys.*, 216 (2006).
- [29] K. ITO, Multiple Wiener Integral, *J. Math. Soc. Japan*, 3 (1951), pp. 157–169.

- [30] J. L. JENSEN, L. W. LAKE, P. W. M. CORBETT, AND D. J. GOGGIN, Statistics for Petroleum Engineers and Geoscientists, Prentice-Hall, New Jersey, 1997.
- [31] T. KATO, On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation, in Studies in Applied Mathematics, no. 8 in Adv. Math. Suppl. Stud., Academic Press, New York, 1983, pp. 93–128.
- [32] C. KENIG, G. PONCE, AND L. VEGA, A bilinear estimate with applications to the KdV equation, J. Amer. Math. Soc., 9 (1996), pp. 573–603.
- [33] C. E. KENIG, G. PONCE, AND L. VEGA, Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation, J. Amer. Math. Soc., 4 (1991), pp. 323–347.
- [34] D. J. KORTEWEG AND G. DE VRIES, On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and a new type of long stationary wave, Phil. Mag., 39 (1895), pp. 422–443.
- [35] G. LIN, L. GRINBERG, AND G. E. KARNIADAKIS, Numerical studies of the stochastic Korteweg-de Vries equation, J. Comput. Phys., 213 (2006), pp. 676–703.
- [36] S. LOTOTSKY, R. MIKULEVICIUS, AND B. ROZOVSKII, Nonlinear Filtering Revisited : A Spectral Approach, SIAM J. Control Optim., 35 (1997), pp. 435–461.
- [37] R. MIKULEVICIUS AND B. ROZOVSKII, Linear Parabolic Stochastic PDE and Wiener Chaos, SIAM J. Math. Anal., 29 (1998), pp. 452–480.
- [38] —, Stochastic Navier–Stokes Equations for Turbulent Flows, SIAM J. Math. Anal., 35 (2004), pp. 1250–1310.
- [39] R. M. MIURA, Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. II. Existence of Conservation Laws and Constants of Motion, J. Math. Phys., 9 (1968), p. 1204.
- [40] J. NEVEU, Processus aléatoires gaussiens, no. 34 in Séminaire de Mathématiques Supérieures, Les Presses de l’Université de Montréal, Montréal, Québec, 1968.

- [41] D. NUALART, The Malliavin Calculus and Related Topics, Probability and Its Applications, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, second ed., 2006.
- [42] —, Malliavin Calculus and Its Applications, no. 110 in CBMS Regional Conference Series in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, R.I, 2009.
- [43] J. PRINTEMPS, The Stochastic Korteweg–de Vries Equation in $L^2(R)$, J. Differ. Equations, 153 (1999), pp. 338–373.
- [44] J. B. ROBERTS AND P. D. SPANOS, Random Vibration and Statistical Linearization, John Wiley & Sons, Inc., Chichester, England, 1990.
- [45] J. S. RUSSEL, Report on Waves, in Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, London, 1845, John Murray, pp. pp. 310–390.
- [46] J. C. SAUT AND R. TEMAM, Remarks on the Korteweg-de Vries equation, Israel J. Math., 24 (1976), pp. 78–87.
- [47] D. W. STROOCK, Homogeneous chaos revisited, in Séminaire de Probabilités XXI, J. Azéma, M. Yor, and P. A. Meyer, eds., vol. 1247, Springer Berlin Heidelberg, 1987, pp. 1–7.
- [48] R. TEMAM, Sur un problème non linéaire, J. Math. Pures Appl., 48 (1969), pp. 159–172.
- [49] M. WADATI, Stochastic Korteweg-de Vries equation, J. Phys. Soc. Japan, 52 (1983), pp. 2642–2648.
- [50] J. B. WALSH, An introduction to stochastic partial differential equations, in École d’Été de Probabilités de Saint Flour XIV - 1984, P. L. Hennequin, ed., no. 1180 in Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 1986, pp. 265–439.
- [51] G. B. WHITHAM, Linear and Nonlinear Waves, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974.
- [52] N. WIENER, The Homogeneous Chaos, Am. J. Math., 60 (1938), pp. 897–936.

- [53] W. A. WOYCZYŃSKI, Burgers-KPZ Turbulence, no. 1700 in Lectures Notes in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 1998.
- [54] N. J. ZABUSKY AND M. D. KRUSKAL, Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, Phys. Rev. Lett., 15 (1965), pp. 240–243.