Compilation de réseaux de Petri: modèles haut niveau et symétries de processus
Lukasz Fronc

To cite this version:

HAL Id: tel-01096725
https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01096725
Submitted on 18 Dec 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L’archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.
THÈSE DE DOCTORAT DE
L’UNIVERSITÉ D’ÉVRY-VAL D’ESSONNE

Spécialité
Informatique

École doctorale Sciences et Ingénierie (ED511)

Présentée par

Lukasz FRONC

Pour obtenir le grade de DOCTEUR

Compilation de réseaux de Petri
modèles haut niveau et symétries de processus

Soutenue le 28 novembre 2013

Devant le jury composé de :

Directeurs : Mme. Hanna KLAUDEL
M. Franck POMMEREAU

Rapporteurs : M. Jean-François PRADAT-PEYRE
M. Olivier H. ROUX

Examineurs : Mme. Laure PETRUCCI
M. Denis POITRENAUD
Sommaire

1 Introduction 3

2 Notions préliminaires et état de l’art 7
  2.1 Domaine de couleurs abstrait 9
  2.2 Réseaux de haut niveau 9
  2.3 État de l’art sur l’exploration des espaces d’états 12
  2.4 Problématique de certification de model checkers 18
  2.5 Autres notions 19
  2.6 Conclusion 20

3 Compilation de réseaux de Petri 23
  3.1 Approche par compilation 24
  3.2 Structure de la bibliothèque 25
  3.3 Optimisations dirigées par la structure du modèle 29
  3.4 Exemple 33
  3.5 Réduction du contrôle de flot 35
  3.6 Conclusion 38

4 Compilation vers un langage de bas niveau 39
  4.1 LLVM et LLVM-IR 40
  4.2 Modèles traités 42
  4.3 Implémentation de l’exploration d’espaces d’états 43
  4.4 Réalisation des algorithmes 44
  4.5 Sémantique formelle de LLVM 46
  4.6 Interfaces formelles 54
  4.7 Résultats théoriques 58
  4.8 Réalisation des optimisations 60
  4.9 Conclusion 62

5 Preuves sur la sémantique 63
  5.1 Preuve du théorème d’extensionnalité 63
  5.2 Correction des fonctions fire_t 68
  5.3 Correction des fonctions succ_t 74
  5.4 Correction des optimisations 84

6 Symétries et création dynamique de processus 91
  6.1 Réseaux de Petri avec processus 92
## Sommaire

<table>
<thead>
<tr>
<th>Section</th>
<th>Page</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td><strong>6.2 Pid-trees</strong></td>
<td>95</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>6.3 Pid-trees et symétries</strong></td>
<td>99</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>6.4 Algorithme de construction de pid-trees</strong></td>
<td>104</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>6.5 Rédaction, normalisation, et comportements infinis</strong></td>
<td>109</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>6.6 Algorithmes pour détecter les symétries</strong></td>
<td>110</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>6.7 Récupération de contre-exemples</strong></td>
<td>112</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>6.8 Preuves des théorèmes</strong></td>
<td>115</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>6.9 Conclusion</strong></td>
<td>118</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>7 Neco : implémentation et études de cas</strong></td>
<td>119</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>7.1 Architecture et utilisation de Neco</strong></td>
<td>120</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>7.2 Interface entre Neco et Spot</strong></td>
<td>125</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>7.3 Comparaisons et études de cas</strong></td>
<td>125</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>7.4 Modèles</strong></td>
<td>127</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>7.5 Résultats expérimentaux</strong></td>
<td>133</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>7.6 Conclusion</strong></td>
<td>144</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>8 Conclusion</strong></td>
<td>145</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>9 Références</strong></td>
<td>149</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>9.1 Références de la thèse</strong></td>
<td>149</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>9.2 Autres références</strong></td>
<td>150</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>A LLVM</strong></td>
<td>161</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>A.1 Implantation des Marquages</strong></td>
<td>161</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>B Preuves du chapitre 6</strong></td>
<td>171</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>B.1 Preuves des résultats auxiliaires (section 6.3)</strong></td>
<td>171</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>B.2 Preuves de l’algorithme de construction (section 6.4)</strong></td>
<td>172</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>B.3 Preuves des algorithmes (section 6.6)</strong></td>
<td>173</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>C Évaluation des performances de Neco</strong></td>
<td>175</td>
</tr>
</tbody>
</table>
La science informatique est en plein essor depuis ces 50 dernières années. Cette thèse concerne une de ses branches majeures, la vérification [37]. L'objectif de la vérification est d'aider au développement de systèmes informatiques ou automatisables de manière fiable. Cela correspond à garantir diverses propriétés sur ces systèmes comme des propriétés de sûreté ou de sécurité. Il peut par exemple s'agir de vérifier qu'un train automatisé n'ouvrira pas ses portes en plein trajet, ou bien que nos identifiants bancaires ne peuvent pas nous être volés lorsqu'on accède à notre compte via une interface web. Plus généralement, toutes les applications ou systèmes critiques devraient être vérifiés, en amont de leur réalisation pratique. Malheureusement cela n'est pas toujours possible car les systèmes qu'on souhaite réaliser sont toujours plus grands et toujours plus complexes ce qui rend la tâche difficile.

Pour mettre en œuvre la vérification, on réalise tout d'abord un modèle du système. C'est-à-dire une représentation mathématique sur laquelle on raisonne et vérifie des propriétés qui nous intéressent. Il faut garder à l'esprit qu'un modèle est une abstraction d'un système, il capture ses aspects importants mais ne lui sera jamais complètement fidèle. Un tel modèle est réalisé avec un formalisme de modélisation, par exemple des réseaux de Petri ou des automates. Le choix de ce formalisme est important puisqu'il influe souvent sur les techniques de vérification utilisées par la suite. L'expressivité de ce formalisme a de plus un fort impact sur la qualité du modèle, au niveau de la mise en œuvre, mais aussi sur la possibilité de le vérifier par la suite. L'utilisation d'un formalisme expressif peut grandement aider à la modélisation mais peut être bloquante pour l’étape de vérification en elle-même.

Par la suite, les propriétés qu'on souhaite vérifier sur ces modèles sont exprimées, par exemple, en logiques temporelles, ou plus généralement modales. Un ensemble de telles propriétés correspond à une spécification que doit satisfaire le système. Ici aussi, ces propriétés sont sous une représentation mathématique et donc sujettes à des erreurs de spécification de l’ingénieur ou du chercheur les réalisant, tout comme le modèle.

Une fois le modèle et sa spécification réalisés, on procède à une analyse pour savoir si le modèle satisfait la spécification. Cela peut être fait avec différentes techniques comme des assistants de preuve ou du model checking. Des approches hybrides comme la méthode B [12], aident à réaliser le modèle et la spécification conjointement, puis à appliquer dessus des techniques de preuves...
et de model checking.

Cette phase d’analyse permet de garantir les propriétés sur le modèle, cependant cela ne garantit pas une propriété sur le système, puisqu’on l’a vérifiée sur une abstraction de celui-ci. Si le modèle n’était pas assez précis alors la propriété peut ne pas être vraie sur le système, de même si la propriété a été mal spécifiée. La réalisation d’un modèle et de sa spécification est donc une étape non triviale qui peut demander un considérable degré d’expertise sur le système et sur les méthodes mises en œuvre.

Ces différentes approches de vérification ne sont pas parfaites et chacune possède ses limites et son lot de difficultés. Avec un assistant de preuve la spécification est définie sous forme de théorèmes qui doivent être prouvés individuellement et sont non triviaux en général. Ces preuves demandent une grande expertise de l’assistant de preuve et du modèle. De plus elles sont réalisées manuellement dans la majorité des cas. En pratique il existe des méthodes automatiques pour réaliser des preuves mais elles sont limitées, par exemple des équations et inéquations dans l’arithmétique de Presburger. L’avantage cependant est qu’on réalise une certification du modèle, c’est-à-dire que nous avons une preuve mathématique qu’il vérifie sa spécification.

Avec le model checking, nous sommes essentiellement limités par les capacités de calcul. Il s’agit d’une méthode complètement automatisée qui consiste à considérer toutes les exécutions possibles du modèle, et donc les exécutions simplifiées du système, puis à observer qu’elles ne violent pas la spécification. L’avantage principal est la non nécessité d’expertise dans les techniques de vérification, un ingénieur peut aisément utiliser ce type de techniques. De plus lorsque certaines techniques de model checking sont utilisées, si une propriété n’est pas satisfaite, alors on peut avoir accès à un contre-exemple qui correspond à un scénario qui mène à l’erreur. Cela est très intéressant d’un point de vue d’ingénierie puisqu’on peut aisément corriger l’erreur. Cependant, les modèles ont tendance à être grands et considérer toutes leurs exécutions peut être impossible. En général, on a un nombre exponentiellement plus grand d’exécutions par rapport à la taille du modèle. Dans ce cas on parle du problème d’explosion combinatoire qui est un des freins de ces approches exhaustives. Pour pallier ce problème des techniques de réduction sont nécessaires.

Plus généralement toutes les méthodes de vérification sont limitées par :

– la décidabilité qui concerne directement la faisabilité de l’approche, des propriétés non décidables telles que la terminaison ne peuvent pas être garanties dans le cadre général ;
– les complexités en temps et en espace qui sont des freins à l’efficacité, les systèmes sont en général de grande taille leur calcul doit donc être efficace en temps mais aussi en mémoire ;
– l’expressivité des formalismes de modélisation qui marquent les limites entre la facilité de mise en œuvre et l’efficacité ou la faisabilité, un langage très expressif est difficilement efficace en temps de calculs et réciproquement un langage bas niveau rend la modélisation difficile ;
– les techniques de model checking utilisées qui influencent sur la qualité des résultats obtenus mais aussi limitent les degrés de libertés qu’on a sur les leviers ci-dessus, l’utilisation de model checking symbolique limite l’expressivité du modèle mais le model checking explicite est limité par la taille des modèles ;
- la certification qui est en lien direct avec la confiance qu’on peut avoir en l’outil de vérification et son résultat.

Cette thèse attaque les questions d’un compromis entre les différents aspects abordés ci-dessus.

1. Pour aborder la décidabilité on utilise une approche optimiste :
   a) On considère des modèles qui embarquent un langage Turing complet, c’est-à-dire qu’on est semi-décidable. Cela implique que c’est à l’utilisateur, ou au programmeur, de faire attention à son modèle. Il s’agit de la même démarche que lors du débogage d’un programme informatique, par exemple, la présence d’une boucle infinie sera détectée à l’exécution puis corrigée.
   b) On considère des domaines infinis ce qui rend aussi notre approche semi-décidable. Ici aussi c’est à l’utilisateur de détecter les erreurs, par exemple, un compteur dans le modèle qui serait incrémenté à l’infini.

Cette approche optimiste permet de faciliter la modélisation : on ne limite pas l’utilisateur qui dans le cadre de notre approche utilise un sous-ensemble efficace du langage mis à sa disposition, tout en permettant d’utiliser des constructions plus complexes du langage, ou du modèle, au besoin. Ainsi un utilisateur n’est que rarement au contact des problèmes de semi-décidabilité du langage utilisé.

2. Un de nos objectifs dans ce manuscrit est de concilier l’expressivité et l’efficacité en temps. Pour cela on utilise des réseaux de Petri de haut niveau annotés par un langage de programmation standard et une approche de compilation qui est une transformation du réseau en programme informatique permettant de calculer tous ses états plus rapidement. Les réseaux de Petri sont un formalisme qui a l’avantage d’avoir une représentation graphique intuitive et facile à appréhender et donc à utiliser. Un langage standard permet une compilation efficace des annotation du réseau grâce à un compilateur classique. Cependant, ce choix de privilégier l’expressivité des modèles nous oblige à l’utilisation de méthodes de model checking explicites : les états et les changements d’états du modèle sont considérés individuellement. En effet, les méthodes de model checking symbolique, qui considèrent des opérations sur des ensembles d’états, peuvent le faire essentiellement car le langage d’annotations utilisé est limité et exhibe des propriétés qui le permettent. Les modèles qu’on utilise sont abordés avec un état de l’art dans le chapitre 2, la compilation est présentée dans le chapitre 3.

3. La problématique de certification et de la confiance dans l’outil est aussi traitée. Dans les chapitres 4 et 5, on s’intéresse à montrer comment on peut prouver le model checker, c’est-à-dire garantir qu’on engendre des programmes corrects. Il faut remarquer qu’il ne s’agit pas d’une certification totale, on prouve que les algorithmes générés sont corrects, pas que le compilateur engendre effectivement ces algorithmes. Ce serait réalisable mais hors du cadre de cette thèse.

4. La complexité en espace est abordée dans le cadre de réductions par symétries. Les réductions par symétries ont été abondamment étudiées,
1. Introduction

On s’intéresse donc à une extension particulière où de multiples processus exécutant le réseau sont mis en œuvre avec la possibilité de créer de nouveaux processus à l’exécution. Dans ce cadre on propose une méthode nouvelle de réduction d’espaces d’états qui élimine des exécutions redondantes (équivalentes). Cela est traité dans le chapitre 6.

5. Finalement dans le chapitre 7, on présente l’outil Neco qui a été réalisé dans le cadre de cette thèse et implémente les approches ci-dessus. Avec cette implémentation on présente des études de cas pour chacune des approches développées. On conclue le manuscrit en donnant quelques perspectives. Une annexe est aussi présente et contient des résultats auxiliaires.
Notions préliminaires et état de l’art

Les réseaux de Petri sont des modèles mathématiques introduits en 1962 par Carl Adam Petri lors de sa thèse de doctorat [141]. Ces modèles permettent de représenter des systèmes automatisables (informatiques, industriels, . . .), puis par diverses techniques (*model checking*, invariants, . . .) des propriétés sur ces systèmes peuvent être vérifiées [37]. Les domaines d’application sont nombreux et couvrent un large panorama, on retrouve les réseaux de Petri par exemple dans la vérification de circuits intégrés [143], de protocoles de sécurité [13], de problèmes à caractère social [41], et bien d’autres.

Un réseau de Petri est représenté comme un graphe avec deux types de nouds : les *places* et les *transitions*. Les places contiennent les données appelées *jetons*, et les transitions indiquent les calculs à réaliser avec les jetons. Le tirage d’une transition (une étape de calcul) correspond à la consommation et production de jetons des places. Les places sont connectées aux transitions avec des arcs entrants (*inputs*) indiquant les jetons qui doivent être consommés, et des arcs sortants (*outputs*) indiquant les jetons qui doivent être produits dans la place. L’état du réseau est représenté par le contenu des places. Un exemple de réseau de Petri est donné en figure 2.1, ce réseau modélise une porte et on y retrouve ses deux états possibles : ouverte ou fermée. Le tirage de la transition “*ferme porte*” permet de passer de l’état fermé à l’état ouvert en consommant le jeton de la place “*ouverte*” et en produisant un jeton dans la place “*fermée*”.

On appelle les réseaux de Petri décrits ci-dessus *réseaux bas niveau* ou *réseaux place-transition*. Ce modèle a été étendu de nombreuses manières pour aider à la vérification mais aussi modéliser des systèmes de manière plus fidèle, ou plus simple et naturelle en gagnant de l’expressivité. Il s’agit souvent d’extensions pour des domaines spécifiques d’application. En effet, un modèle reste une abstraction de la réalité et son expressivité doit être limitée (sous la barre de la décidabilité, ou dans des complexités raisonnables) si on souhaite pouvoir l’analyser. Parmi les extensions largement répandues, on retrouve par exemple :

1. Les *réseaux colorés* [102, 104, 103, 106] où chaque jeton a une couleur représentant la nature de la donnée stockée. Cette couleur a un rôle similaire au type d’une variable dans un programme informatique. Un réseau bas niveau peut être vu comme un réseau coloré avec un seul type de jetons : le jeton noir •.
2. Notions préliminaires et état de l’art

2. Les réseaux hiérarchiques où les éléments du réseau sont eux-mêmes des réseaux de Petri [103, 95]. Selon la nature de l’extension il peut s’agir, par exemple, de noeuds (places ou transitions) qui sont substitués par des réseaux de Petri [95] ou encore de jetons qui sont des réseaux de Petri [14]. La motivation derrière ce type d’extension est l’observation que les systèmes de grande taille ont besoin d’être manipulés à plusieurs niveaux d’abstraction, la hiérarchisation est un mécanisme qui le permet [95]. Le second type de hiérarchisation mentionné ci-dessus, peut aussi être détourné comme dans [14] où le jeton qui est un réseau de Petri est modifié de manière dynamique.

3. Les réseaux étendus par des contraintes de temps qui sont des réseaux de Petri paramétrés par des horloges, ce qui permet de modéliser des contraintes temporelles en divers points de l’exécution [146]. On peut citer deux tendances par exemple les *Time Petri nets* [128] et les *Timed Petri nets* [147]. Dans les premiers, deux temps sont associés à chaque transition et délimitent le laps de temps où la transition est tirable, hors de cet intervalle la transition ne peut être tirée. Dans les seconds chaque transition est associée à une durée qui est le temps nécessaire pour effectuer le tir. De cette manière le tirage de transitions soumis à des horloges permet de garantir des propriétés sur les temps de réponse [128] ou l’évaluation de performances [147, 152].

4. Les réseaux stochastiques où des probabilités dans le temps ont été introduites pour paramétrer le tirage de transitions. Si une seule transition est tirable, elle le sera nécessairement, mais si plusieurs le sont, surtout en cas de conflit, alors la probabilité permet de choisir laquelle tirer d’abord. Ainsi le tirage d’une transition est soumis à une loi de probabilité et donc un état du réseau n’est atteignable que sous une certaine probabilité [130].

(a) La porte est ouverte

(b) La porte est fermée

**Figure 2.1** – Une porte modélisée avec un réseau de Petri.

Dans ce manuscrit, nous nous intéresserons à des réseaux de *haut niveau*, qui peuvent être vus comme des réseaux colorés. Ils impliquent donc un domaine de couleurs. On restera détaché d’un domaine de couleur en particulier pour rester dans le cadre le plus général possible, sauf mention contraire. Les *domaines de couleur* des réseaux haut niveau fournissent des valeurs pour les données, des variables, une syntaxe pour les expressions, des règles de typage, etc. En général un domaine de couleur élaboré est utilisé pour faciliter la modélisation ; par exemple, un langage fonctionnel peut être considéré [103, 148], ou le fragment
fonctionnel (expressions) d’un langage impératif [58, 144]. Ici, on ne s’attache pas spécifiquement à un domaine de couleurs, un domaine de couleurs concret peut être considéré comme implémentation d’un domaine de couleurs abstrait.

### 2.1. Domaine de couleurs abstrait

Le domaine de couleurs abstrait utilisé dans ce manuscrit est composé de :
- un ensemble de valeurs de données $D$ contenant les valeurs booléennes $true$ et $false$;
- un ensemble de variables $V$ disjoint de $D$;
- un ensemble d’expressions $E$ tel que $D \cup V \subseteq E$, i.e., les données et variables sont donc considérées comme expressions.

On note par $vars(e)$ l’ensemble des variables d’une expression $e \in E$. On ne fait aucune supposition sur le typage ou la syntaxe des expressions. Cependant, on suppose que chaque expression bien formée peut être évaluée de manière déterministe comme une valeur de $D$, et qu’une expression mal formée est évaluée à la valeur $\bot \not\in E$ (valeur non définie). Pour évaluer les expressions nous devons assigner des valeurs aux variables, on définit par $\beta(v)$ la valeur d’une variable $v$ par l’application de la valuation $\beta : V \rightarrow D$ (fonction partielle). On étend naturellement cette notation aux expressions en étendant l’ensemble image des valuations à la valeur $\bot \not\in D$. On note par $\beta(e)$ l’évaluation de l’expression $e \in E$ par $\beta : vars(e) \rightarrow D \cup \{\bot\}$. On se place dans un cadre optimiste en supposant que toute expression mal formée s’évalue à $\bot$, cela vaut pour les opérations non définies telles que $\not\in$ ou syntaxiquement incorrectes.

Un multiensemble sur un ensemble $X$ est une application $m : X \rightarrow \mathbb{N}$ qui à chaque élément de $X$ associe le nombre d’occurrences de cet élément dans le multiensemble. On note les multiensembles comme des ensembles avec répétition d’éléments, par exemple le multiensemble sur $\mathbb{N}$ défini par $\{23 \mapsto 3, 42 \mapsto 2\}$ est noté $\{23, 23, 23, 23, 42\}$ (l’ordre des éléments n’étant pas important). Chaque ensemble est un multiensemble particulier où chaque nombre d’occurrences non nul est égal à 1. On utilise donc la notation ensemble vide $\emptyset$ pour noter un multiensemble vide.

Étant donné deux multiensembles $m$ et $m'$ sur l’ensemble $X$, on définit les opérations suivantes :
- la somme $+$ définie par $\forall x \in X, (m + m')(x) = m(x) + m'(x)$;
- la différence $-$ définie par $\forall x \in X, (m - m')(x) = \max(m(x) - m'(x), 0)$.

### 2.2. Réseaux de haut niveau

Un réseau de Petri est composé de deux parties : une partie statique et une partie dynamique. La partie statique définit la structure du réseau de Petri : où les données sont stockées et comment les données interagissent entre elles. La partie dynamique définit quel est l’état initial du système. En effet, un même réseau de Petri n’aura pas le même comportement selon son état initial, il est donc important de séparer les deux concepts. De plus, on verra plus tard dans ce manuscrit que la partie statique étant fixée une fois pour toutes pour
le réseau de Petri, on essayera de s’en détacher le plus possible en encodant toutes les informations nécessaires directement dans les algorithmes ; c’est le coeur du travail réalisé par l’étape de compilation.

**Définition 2.1.** Un réseau de Petri haut niveau est un tuple \((S, T, \ell)\) où \(S\) est un ensemble fini de places, \(T\) (disjoint de \(S\)) un ensemble fini de transitions, et \(\ell\) est une fonction d’étiquetage sur \(S \cup T \cup (S \times T) \cup (T \times S)\) telle que :

- pour tout \(s \in S\), \(\ell(s) \subseteq \mathbb{D}\) est le type de \(s\), i.e., l’ensemble des valeurs que \(s\) peut contenir ;
- pour tout \(t \in T\), \(\ell(t) \in \mathbb{E}\) est la garde de \(t\), i.e., une condition pour son exécution ;
- pour tout \((x,y) \in (S \times T) \cup (T \times S)\), \(\ell(x,y)\) est un multiensemble sur \(\mathbb{E}\) et défini l’arc de \(x\) vers \(y\).

Lorsqu’on manipule un réseau de Petri \((S, T, \ell)\), il est utile d’identifier les nœuds (places ou transitions) adjacents les uns aux autres par rapport aux arcs. Pour chaque nœud \(x \in S \cup T\) on définit son **preset** par \(\bullet x \overset{df}{=} \{ y \in S \cup T \mid \ell(y, x) \neq \emptyset \}\) et son **poset** par \(x^* \overset{df}{=} \{ y \in S \cup T \mid \ell(x, y) \neq \emptyset \}\).

Dans ce manuscrit on suppose que tout arc en entrée d’une transition est étiqueté par un multiensemble de variables. On suppose aussi que chaque expression sur un arc sortant d’une transition n’a pas de variables libres. Ce sont des restrictions importantes dans deux sens : ça limite ce qu’on peut faire (pas de transitions non déterministes par exemple), ça facilite grandement les algorithmes (pas d’unification ou résolution d’expressions).

**Supposition 2.1.** Soit \((S, T, \ell)\) un réseau de Petri. Pour tout \(t \in T\) :

- pour tout \(s \in \bullet t\), on a \(\ell(s, t)\) un multiensemble sur \(\mathbb{V}\) ;
- pour tout \(s \in t^*\), pour tout \(e \in \ell(t, s)\) on a \(\text{vars}(e) \subseteq \bigcup_{s' \in t} \ell(t, s')\).

L’état d’un réseau de Petri est caractérisé par son **marquage**, c’est-à-dire une assignation de jetons aux places.

**Définition 2.2.** Un **marquage** d’un réseau de Petri \(N \overset{df}{=} (S, T, \ell)\) est une application qui associe à chaque place \(s \in S\) un multiensemble dans \(\ell(s)\). L’ensemble de tous les marquages de \(N\) est \(\mathbb{M}_N\), ou simplement \(\mathbb{M}\) en l’absence d’ambiguïté.

Le passage d’un état du réseau de Petri à un autre est réalisé par une opération de **tir** de transition. Cette opération est locale à une transition et n’est réalisée que sous certaines conditions. Si ces conditions sont satisfaites alors un nouveau marquage du réseau peut être produit en consommant et produisant des jetons.

**Définition 2.3.** À partir d’un marquage \(M\) d’un réseau de Petri \((S, T, \ell)\), une transition \(t \in T\) peut être tirée en utilisant une valuation \(\beta\) et produire un nouveau marquage \(M’\), ce qu’on note \(M[t, \beta]M’\), si et seulement si :

- il y a assez de jetons dans les places en entrée de la transition : pour tout \(s \in S\), \(M(s) \geq \beta(\ell(s, t))\) ;
- la garde est satisfaite : \(\beta(\ell(t)) = \text{true}\)
- le type des places est respecté : pour tout \(s \in S\), \(\beta(\ell(t, s))\) est un multiensemble sur \(\ell(s)\) ;

10
2.2. Réseaux de haut niveau

- $M'$ est obtenu à partir de $M$ en consommant et en produisant les jetons selon les arcs : pour tout $s \in S$, $M'(s) = M(s) - \beta(\ell(s, t)) + \beta(\ell(t, s))$.

Une valuation qui respecte les conditions ci-dessus est appelée mode de la transition $t$ dans le marquage $M$. ♦

Un réseau de Petri peut être représenté sous forme de graphe avec les places dessinées sous forme de noeuds circulaires et les transitions sous forme de noeuds rectangulaires. Les arcs entre les noeuds sont étiquetés par les valeur de la fonction d’étiquetage leur correspondantes. Les jetons d’un marquage, quant à eux, sont dessinés dans les places. Un exemple est donné en figure 2.2.

\begin{figure}
\centering
\begin{tikzpicture}
  \node[place] (p0) {$x = \text{false}$} ;
  \node[place] (p1) {$x$} ;
  \node[place] (p2) {$x = \text{true}$} ;
  \node[transition] (t) [right of=p1] {$\text{état : } \emptyset$} ;
  \draw[->, thick] (p0) edge[bend left] node[above] {$true$} (p1);
  \draw[->, thick] (p1) edge[bend left] node[above] {$false$} (p2);
  \draw[->, thick] (p0) edge[bend right] node[below] {$true$} (p2);
\end{tikzpicture}
\caption{Exemple de réseau de Petri de haut niveau $(S, T, \ell)$ avec son marquage $M_0$, sous sa forme graphique et textuelle.}
\end{figure}

L’espace d’états d’un réseau de Petri est l’ensemble des états accessibles à partir du marquage initial. Cet ensemble est le plus petit ensemble de marquages contenant le marquage initial et clos par l’opération de tir de transition. Il est utilisé pour tester de propriétés d’accessibilité, par exemple lors de la vérification d’un protocole de sécurité on pourrait chercher un état dans lequel un espion connaît des données confidentielles.

**Définition 2.4.** Soit $N \equiv (S, T, \ell)$ un réseau de Petri et $M$ son marquage initial. L’ensemble des états de $N$ accessibles à partir de $M$ est le plus petit ensemble $\text{states}(N, M)$ tel que :
- $M \in \text{states}(N, M) ;$
- s’il existe une transition $t \in T$, une valuation $\beta$ et un marquage $M' \in \text{states}(N, M)$ tels que $M[t, \beta]M'$ alors $M' \in \text{states}(N, M)$.

On citera souvent le terme de place n-bornée, cela veut dire que la place en question contient au plus $n$ jetons dans tout les états de l’espace d’états. Par exemple, une place 1-bornée ne peut contenir qu’un seul jeton ou aucun.

Souvent, il est aussi intéressant de considérer le graphe d’accessibilité d’un réseau de Petri. Les noeuds de ce graphe sont les marquages accessibles et les arcs sont étiquetés par les transitions qui permettent de passer d’un état à l’autre. Dans certains cas, il est aussi pertinent d’étiqueter les arcs avec les
2. Notions préliminaires et état de l’art

modes des transitions en plus. Le graphe d’accessibilité du réseau de la figure 2.2 est donné en figure 2.3, son espace d’états est l’ensemble de noeuds de ce graphe.

**Définition 2.5.** Soit \((S, T, \ell)\) un réseau de Petri et \(M\) son marquage initial. Le graphe d’accessibilité \(G = (V, A)\), où \(V \subseteq \mathbb{M}\) et \(A \subseteq \mathbb{M} \times T \times \mathbb{M}\), est le plus petit graphe tel que :
- \(M \in V\)
- \(M' \in V\) et \((M, t, M') \in A\) s’il existe \(M \in V\), une transition \(t \in T\) et \(\beta\) un de ses modes tels que \(M[t, \beta]M'\).

\[
\text{Figure 2.3 – Graphe d’accessibilité du Réseau de Petri de la figure 2.2.}
\]

2.3 État de l’art sur l’exploration des espaces d’états

Lors de la vérification, l’espace d’états calculé a une taille exponentielle par rapport à la taille du modèle, son calcul peut alors être long et consommer beaucoup de mémoire. Il est donc important d’optimiser ces deux aspects. Ainsi, les notions de base étant définies, nous allons dresser un état de l’art des techniques d’accélération.

Pour calculer les espaces d’états des réseaux de Petri, il y a essentiellement deux approches : l’approche explicite qui stocke et calcule les états individuellement et l’approche symbolique qui stocke et calcule les états par lots. Pour cela l’approche symbolique stocke les états dans des structures de données avancées tels que les diagrammes de décision [29, 32, 33] ainsi que leurs dérivés [45, 79, 30].

L’approche symbolique permet de calculer des espaces d’états de taille bien plus grande que l’approche explicite, cependant elle est aussi limitée. L’expressivité des modèles acceptés est directement liée aux structures de données utilisées (BDD, OBDD, DDD, etc.) et leurs extensions sont non triviales. Souvent l’utilisation d’un langage de couleurs riche introduit de l’inefficacité à la détection d’équivalences dans la structure de données et rend difficile le partage qui est la force des diagrammes de décision. C’est pourquoi en général les couleurs acceptées restent proches des réseaux algébriques [158, 50, 112, 113].

Lors de la vérification de formules de logique l’extraction de contre-exemples est difficile. On sait vérifier qu’une formule de logique est satisfaite ou non par un model checker symbolique cependant il est beaucoup plus difficile d’obtenir un contre-exemple, c’est-à-dire un scénario qui rend la formule fausse, il y a cependant des travaux qui adressent ce problème [83, 38, 134, 124]. Un enjeu majeur est de fournir un contre-exemple minimal et intuitif permettant à un ingénieur de le rejouer pour comprendre et corriger les erreurs.
2.3. État de l’art sur l’exploration des espaces d’états

L’approche explicite a aussi des défauts, elle est naturellement plus lente que l’approche symbolique parce qu’elle traite tous les états individuellement de plus elle est beaucoup plus sujette au problème d’explosion d’espaces d’états. La récupération de contre-exemples lors de vérification de formules logiques est quant à elle triviale en général. Enfin, les contre-exemples sont intuitifs pour les ingénieurs non spécialistes en model checking et permettent de facilement déboguer des modèles ou programmes en général. De plus, un langage de couleurs riche est moins problématique qu’en model checking symbolique.

Dans ce manuscrit on s’intéresse au model checking explicite de par le souhait d’utiliser un langage de couleur très expressif. L’utilisation de langages riches permet de modéliser des systèmes plus aisément mais aussi de réduire la taille des espaces d’états [103]. En effet chaque état aura tendance à occuper plus de mémoire mais le nombre des états accessibles sera moindre. L’utilisation de couleurs riches interdit aussi l’utilisation en général toute transformation vers les réseaux bas niveau en raison d’une explosion exponentielle du nombre de places et de transitions [24]. Il faut donc les traiter directement tels quels avec des algorithmes et des techniques appropriés.

2.3.1 Compilation de réseaux de Petri

La compilation de réseaux de Petri est utilisée dans le cadre du model checking explicite pour accélérer le tirage de transitions. Elle est utilisée dans les outils efficaces tels que Helena [57], Spin [87] ou encore Maria [132].

Cette approche peut être appliqué aussi bien aux réseaux de Petri bas niveau qu’aux réseaux de haut niveau. Dans [42] où les auteurs s’attaquent à l’implémentation de réseaux de Petri bas niveau, l’approche proposée n’est pas de la compilation cependant les idées restent très proches. Il s’agit de proposer une implémentation de réseaux bas niveau presque 1-bornées, les transitions sont supposées 1-tirables dans tous les cas, i.e., exactement un seul jeton en entrée est nécessaire pour tirer une transition. Une implémentation de réseaux haut niveau est aussi considérée mais non utilisable en pratique puisqu’elle correspond en une expansion vers un réseau de Petri de bas niveau.

L’étape de compilation consiste à produire un moteur d’exploration du réseau de Petri qui lui est spécifique. C’est-à-dire que le programme qu’on utilise sur le modèle du réseau de Petri n’est pas le model checker mais un compilateur qui produit un model checker en sortie. Cette approche est souvent mal comprise car confondue avec des réductions statiques qui transforment le modèle en un modèle plus simple suffisant pour vérifier le but recherché.

L’utilisation d’une étape de compilation est importante pour des modèles colorés à cause des annotations riches apparaissant sur les arcs. Sans compilation, un évaluateur d’expressions est utilisé lors du tir de transitions, cet évaluateur est écrit dans un langage efficace mais le calcul de l’expression est lent puisque interprété. La compilation a pour but d’encoder ces expressions de manière native pour permettre un tirage beaucoup plus rapide. Le gain de performances par compilation d’annotations a d’ores et déjà été montré dans le cadre du model checker Maria [126, 132] et aussi appliquée dans le model checker Helena [57, 58]. Dans Helena d’autres optimisations sont utilisés lors de l’exploration pour accélérer le tirage des transitions [56].

Dans ce manuscrit (chap. 3) on développe une approche par compilation en s’attaquant en plus à la structure du réseau. C’est-à-dire qu’en plus de compiler
les annotations d’arc on compile la fonction de transition pour éliminer toute requête à une représentation quelconque du réseau de Petri, seule la structure de marquage reste utilisée.

2.3.2 Réductions d’ordres partiels

Les réductions d’ordre partiels ont pour but de réduire le non déterminisme du tir de transitions. Pour cela, certaines transitions vont être privilégiées et tirées avant toutes les autres, ou, selon le point de vue, le tir de certaines transitions sera retardé. On peut ainsi parler, par exemple, de transitions prioritaires qui doivent être tirées avant toutes les autres [161]. On pourrait critiquer le fait qu’il s’agit d’une réduction réalisée sur la structure du modèle qui nécessite une bonne connaissance du système modélisé et non pas une approche générale. Elle peut donc cacher des comportements non désirés à cause d’une erreur de choix dans les priorités sur le modèle. Cependant, dans certaines classes de modèles, comme par exemple les protocoles de sécurité le choix des priorités des transitions peut être fait automatiquement [65].

Une autre famille de réductions d’ordre partiels [70, 72, 162, 138, 139] similaires aux stubborn sets [153, 154, 156], est basée sur l’observation que des transitions concurrentes sont indépendantes de l’ordre dans lequel elles sont tirées, tous les entrelacements ne sont pas toujours pertinents, des exécutions peuvent donc être omises. Pour la détection de deadlocks (état avec aucune transition tirable) par exemple, on peut retarder les transitions le plus long-temps possible sans entraver la correction du résultat de l’analyse.

Initialement, le calcul des stubborn sets d’un réseau de Petri de haut niveau nécessite un dépliage en réseau de bas niveau [154], de plus le calcul le calcul d’un bon stubborn set peut être aussi coûteux que le dépliage du réseau complet [117]. Une approche sans dépliage a été donc proposée mais pour une sous classe de réseaux de Petri colorés (Process-Partitioned CP-Nets) qui produisent un bon stubborn set sans énumération explicite de modes [117] (i.e., sans dépliage explicite ou implicite). Un second algorithme symbolique de calcul de stubborn sets (i.e., sans énumération des modes) a été proposé [62] dans le cadre du model checker Helena [57] pour une autre sous classe de réseaux de Petri colorés. Cependant, à cause du résultat de complexité du calcul des stubborn sets, une approche efficace ne pourra jamais traiter qu’une sous classe de réseaux. Une autre remarque importante est que certaines de ces techniques de réduction ne sont pas compatibles avec tous les algorithmes d’exploration d’espaces d’états [92].

Un ajout intéressant au techniques de réduction par ordres partiels [139] est de pouvoir les appliquer à la volée, c’est-à-dire lors de la vérification d’une formule logique [80]. L’avantage est de pouvoir ignorer une partie de l’espace d’états non pertinente du point de vue de la propriété vérifiée et ainsi avoir une réduction plus importante. Typiquement les approches à la volée ne sont pas applicables aux méthodes symboliques qui doivent d’abord calculer l’ensemble des états accessibles.

Les approches présentées dans ce manuscrit sont compatibles avec les techniques d’ordres partiels : les ordres statiques sur les transitions sont très faciles à mettre en œuvre, les techniques dynamiques quant à elles sont moins évidentes à mettre en place. La raison de cette difficulté est notre langage de couleur qui est riche et comme cité ci-dessus des techniques comme les stubborn sets sont
2.3. État de l’art sur l’exploration des espaces d’états

difficiles à appliquer sans déplier le réseau. Il est cependant possible de les appliquer de manière symbolique mais avec des contraintes sur les couleurs utilisées, ce qui sort du cadre de cette thèse.

2.3.3 Occupation mémoire


Une approche pour stocker l’espace d’états sous forme de graphe (GETS : Graphe Encoded Tuple Sets) a été proposée dans [76], elle présentait cependant des résultats similaires à l’expérience avec les OBBD : une compression importante de l’espace d’états mais un surcoût important en temps de calcul. En 1999, une autre tentative de stocker les espaces d’états sous forme de graphe a été réalisée [93]. Cette fois le point de vue était différent : le graphe en question était un automate fini déterministe (DFA) minimal responsable de reconnaître les états présents dans l’espace d’états. Les performances en temps et espace étaient comparables à GETS, mais lorsque la technique était alliée à Collapse, la consommation mémoire pouvait être encore réduite (ce n’était pas le cas en général).

Des tests de ces différentes techniques ont été réalisés dans le cadre du model checker Spin. Sur une moyenne de 14 applications [93], on peut observer que si on utilise la technique Collapse la consommation de mémoire est divisée par 3 alors que les temps d’exécution ne sont multipliés que par 1,3 ; lors de l’utilisation de DFA avec Collapse la consommation mémoire était divisée par 5,5 mais les temps d’exécution multipliés par 6,2 ; lors de l’utilisation de DFA seule l’utilisation de DFA était divisée par 7,2 et les temps d’exécution multipliés par 4,9 ; lors d’utilisation de GETS l’utilisation mémoire était réduite de 7,5 et les temps d’exécution multipliés par 5,2. Les OBBD n’ont pas été comparées pendant ces tests parce qu’ils était plus lents d’un ordre de gran-
deur. On peut donc voir que même si des approches de type symbolique pour le stockage d’espaces d’états ont été testées c’est l’approche purement explicite qui s’en sort le mieux (Collapse).

Une autre approche semi-explicite appelée Δ-marquages [61] a été introduite dans le cadre du model checker Helena. Elle consiste à ne stocker qu’une seule partie de l’espace d’états et à reconstruire certains états au besoin, ces autres états sont donc stockés de manière symbolique. Ils sont appelés Δ-marquages, et possèdent une référence vers leur prédécesseur et une instance de la transition tirée (plus précisément une transition et son mode). Ainsi le marquage pourra être reconstruit en tirant la séquence de transitions sur les arcs depuis le premier prédécesseur explicite. Cette technique est compatible avec Collapse et des résultats expérimentaux sont présentés dans [61, 58], on y remarque que les Δ-marquages permettent de diviser jusqu’à 6,5 fois l’occupation mémoire de Collapse tout en gardant des temps d’exécution raisonnables. De plus ces deux techniques sont compatibles avec les réductions par symétries et réductions d’ordres partiels.

D’autres techniques comme celles du model checker MARIA [127, 132] se focalisent sur les représentations de multiensembles et des marquages, pour les représenter de manière compacte en exploitant la taille des domaines des types de jetons. Cependant cette approche ne réussit pas à traiter efficacement les espaces d’états avec des jetons de domaines de couleur riches [57].

Certaines approches peuvent aussi être vues comme des optimisations de mémoire. Le *bit state hashing* utilisé dans le model checker Spin [85, 89], consiste à ne stocker qu’un bit par marquage, plus précisément allouer un segment mémoire d’une grande taille, puis pour chaque marquage $M$ découvert calculer son hachage et marquer le bit de valeur de ce hachage modulo la taille du segment. Il s’agit d’un filtre de Bloom qui supprime les doublons en se basant sur la valeur de hachage. Cette approche n’est pas complète, certains marquages peuvent être omis, typiquement on considère un marquage déjà visité lorsque le bit correspondant à son hachage est marqué. Ce genre d’approximation peut être pertinent dans la perspective de détection d’erreurs mais ne peut pas garantir leur absence. Dans ce cadre, des techniques pour réduire la probabilité de collisions ont aussi été considérées [16, 89].

On peut aussi parler des techniques qui se basent sur l’observation que les espaces d’états peuvent être explorés sans stocker tous les états en mémoire [86, 100]. Le nombre d’états nécessaires en mémoire est celui du plus long chemin acyclique dans l’espace d’états. Une amélioration de cette approche consiste à garder une cache d’états visités en mémoire afin de détecter des cycles entre différentes traces et éviter des calculs redondants, cette stratégie s’appelle *state space caching* [84]. Elle fut par la suite améliorée [71] en exploitant des techniques d’ordres partiels [70, 73] notamment les *sleep sets* qui permettent de ne pas tirer certaines transitions tout en préservant les propriétés d’accessibilité. Des techniques similaires ont été proposées par la suite tels que la méthode *sweep-line* qui utilise un *garbage collector* pour supprimer des états de la mémoire lorsqu’ils ne sont plus nécessaires [36]. Une approche similaire au *sweep-line* a été utilisée pour réaliser du model checking CTL parallèle de protocoles de sécurité [66] en exploitant les propriétés spécifiques à ces modèles, on remarque que certaines états n’ont pas besoin d’être partagés, de plus une fois certaines transitions tirées tous les états précédents peuvent être oubliés et donc supprimés de la mémoire.
2.3. État de l’art sur l’exploration des espaces d’états

Ces différentes techniques explicites de réduction d’occupation mémoire sont compatibles avec les techniques d’exploration et de réduction de ce manuscrit. En effet, on n’a que peu de contraintes sur les représentations d’états et on pourrait aisément les implémenter.

2.3.4 Réductions par symétries

Les réductions par symétries ont été largement étudiées [108]. Ce type de réductions s’applique aussi bien aux réseaux place/transition [150, 151, 109, 108] qu’aux réseaux de haut niveau [97, 96, 105, 107, 108]. Intuitivement il s’agit de détecter des comportements équivalents dans le système qui ne diffèrent que par une permutation de places, de transitions ou encore de données. Le but est de ne stocker qu’un état par classe d’équivalence d’états (i.e., états symétriques), mais évidemment sans construire l’espace d’états complet. C’est réalisé en définissant un groupe sur le système considéré dont l’action sur l’espace d’états sera de produire des symétries [108]. Les réductions par symétries sont activement étudiées car elles peuvent offrir une réduction exponentielle de la taille de l’espace d’états [54]. Tester si deux états sont dans la relation d’équivalence induite par le groupe est généralement coûteux, il s’agit du problème d’orbite qui est prouvé être au moins aussi difficile que le problème d’isomorphisme de graphes [40], cependant on ne sait pas s’il est NP-complet. Pour que l’approche soit utilisable, il est courant de rechercher des représentants canoniques de chaque classe d’équivalence en utilisant des heuristiques [27, 26, 25], même si la réduction produite n’est pas maximale, lorsque l’exécution du test est suffisamment rapide alors on peut gagner à la fois en espace mais aussi en temps d’exécution.

De manière classique les réductions par symétries considèrent des automorphismes internes à l’espace d’états qui préservent la relation de transition [39, 53]. Cependant, l’usage d’automorphismes n’est pas suffisant pour détecter des symétries dans des systèmes avec un aspect de calcul dynamique caractérisé avec création de nouveaux objets [99], il peut s’agir de nouveaux composantes qui sont infiniment souvent créées le long d’un chemin d’exécution tels que la création de nouveaux processus ou objets. Si un seul groupe de permutations est considéré comme le groupe d’automorphismes du système alors on ne pourra pas détecter les symétries entre des successeurs qui créent de nouveaux composants [99, 98]. Pour traiter ce genre de systèmes il faut considérer une famille de groupes et les choisir de manière dynamique selon le nombre de composants dans l’état du système. Une approche de ce type est donnée dans [99] pour traiter les symétries de tas et de processus dans le cadre de vérification de programmes.

Dans ce manuscrit, on s’attaque à un problème plus général que les symétries de processus en y ajoutant la question de la préservation de relations entre processus. En effet, dans [99] on suppose qu’il n’y a pas de références entre les processus. Une série de travaux a été réalisée sur ce sujet [114, 115, 116] en fournissant une base théorique pour la détection de symétries de ce type. Cependant aucun algorithme efficace de test d’orbite n’a été proposé. L’algorithme proposé consiste en une transformation de marquage en graphe puis un test d’isomorphisme entre ce graphe et les graphes correspondants à tous les états précédemment visités. Le problème principal qui empêche l’algorithme d’être efficace en pratique est cette comparaison avec tous les états précédemment
visités, ce qui ne peut pas être accéléré par des techniques de tables de hachage utilisés habituellement en model checking. De plus le calcul d’isomorphisme de graphe est un problème difficile. Il a cependant été montré sur des études de cas [116] que le temps de calcul d’isomorphisme pour ce type de graphe demeure raisonnable.

Dans le chapitre 6 on propose une nouvelle méthode complète de détection de symétries ne souffrant pas de ce problème, de plus on propose aussi une seconde méthode optimiste suffisante dans certains cas.

2.3.5 Autres techniques de réduction

D’autres techniques de réduction existent, telles que les réductions statiques. Ces réductions sont réalisées avant l’exploration de l’espace d’états pendant une étape de pré-traitement. Il s’agit essentiellement de réductions sur les domaines des variables ou des données du modèle, ou de fusions de transitions. On peut par exemple citer les agglomération de transitions qui fusionnent plusieurs transitions en une transitions atomiques [59, 77, 60, 78, 18, 19]. Certaines des réductions statiques peuvent cependant être vues comme des implémentation de réductions d’ordre partiels [87].

Ces techniques peuvent aisément être appliquées à notre approche par compilation, il suffit de les appliquer avant de compiler le réseau. Cependant dans certains cas il faudrait restreindre le langage de couleurs.

2.4 Problématique de certification de model checkers

Une question complémentaire à celle de l’efficacité du model checking est celle de sa correction. En effet, on peut se demander quelle confiance avoir en un model checker ? En pratique, dans le domaine il est rare de prouver la correction d’un model checker, la correction est souvent déterminée par comparaison avec d’autres outils [KLB+12, KLB+13]. Ce qui a d’ailleurs provoqué un problème lors d’évaluation de formules CTL dans [KLB+13] puisqu’on ne pouvait pas déterminer quel outil fournissait les bons résultats lorsque tous les outils étaient en désaccord. L’évaluation a donc porté sur le temps de réponse aux problèmes, la quantité de réponses, et non la correction des résultats fournis.

Cette discussion n’est pas nouvelle. Lorsqu’on fournit un nouvel algorithme de model checking, il est de pratique courante de fournir une preuve de correction de celui-ci, mais aussi d’en montrer l’efficacité pratique. Cependant il est rare de voir une preuve quelconque de l’étape d’implantation dans un outil, de plus les étapes expérimentales sont aussi souvent remises en question [90].

Dans [16] il est argumenté que les outils de vérification n’ont pas besoin d’être vérifiés car même s’ils le sont on n’aura jamais une garantie qu’ils sont totalement corrects, essentiellement à cause de l’intégration de ces outils dans un environnement qui lui n’est pas certifié correct. Cependant, des preuves même partielles ne sont pas à proscrire, en effet elles permettent de nous persuader que nos hypothèses sont correctes et ainsi avoir confiance en nos algorithmes et leur impact. De plus, si la certification de l’outil entrave ses performances, son utilisation ne sera pas pertinente en pratique. Il est donc conseillé de privilégier les tests.
2.5. Autres notions

La certification est utile dans le cas de non réfutation de propriétés lors du model checking. En effet, lorsqu’on teste une propriété qui est fausse sur un modèle alors on obtient une trace d’exécution qui mène à sa réfutation. Cette trace peut être rejouée pour vérifier si la formule est effectivement fausse. Lorsqu’une formule est vraie alors le model checker ne fournit pas de trace, il répond juste que la formule est satisfaite. On ne peut pas vérifier si l’outil se trompe ou pas, c’est le type de cas où une certification apportera une certaine garantie. Dans la même lignée de pensée que [16], ne pas certifier un model checker peut avoir des avantages notamment pour les performances. Pour ne pas les entraver et avoir une garantie dans le cas de formules vraies, [133] propose de produire un certificat de validité de formule lors du model checking. L’avantage d’un certificat produit par l’outil est que l’outil n’a pas besoin d’être lui même certifié. Le certificat peut être traité par un assistant de preuves pour tester sa véracité. Cependant la création d’un tel certificat peut être coûteuse et sa vérification encore plus. Ce type d’approche est souvent utilisé dans les assistants de preuves tels que coq [10] pour accélérer la recherche automatique de preuves. Ces méthodes appelées réflexives [20, 75] se basent sur un noyau externe non certifié et un théorème de validité dans le prouveur qui permet d’interpréter le résultat de ce noyau, c’est-à-dire un programme qui va réaliser une phase de recherche de preuve puis renvoyer un résultat (une preuve) qui va être vérifié par le prouveur.

Il ne faut pas oublier que la certification formelle est une tâche difficile qui prend beaucoup de temps. Certifier un model checker efficace peut s’avérer impossible à cause de diverses optimisations, sans compter les optimisations réalisées par le compilateur. Ce qui est plus abordable c’est montrer la correction des techniques qui sont utilisées. Par exemple, dans [35] on prouve la correction (partielle) d’une réduction par ordre partiel en utilisant l’assistant de preuves HOL [11], cette preuve à elle seule prend presque 7 500 lignes de code. Sachant qu’un model checker est un logiciel beaucoup plus grand on peut se demander s’il est abordable de le prouver, d’autant plus que tout changement dans le programme invalide la preuve en général et souvent de manière drastique.

Dans ce manuscrit on s’intéresse à la problématique de certification au niveau de la correction des algorithmes générés. C’est-à-dire qu’on montre comment prouver que les programmes qu’on génère lors de la compilation sont corrects. Pour une certification complète, il faudrait prouver la correction du compilateur, ce qui est réalisable mais sort du cadre de la thèse.

2.5.1 Formalismes de modélisation structurés

Dans ce manuscrit on citera souvent des formalismes de modélisation structurés, par cela on entend essentiellement les formalismes comme les algèbres de réseaux de Petri [22] et leur dérivés [21, 23, 31, 48]. Il s’agit d’algèbres de processus [129, 82] à sémantiques dans les réseaux de Petri [157, 74, 131]. Cette famille d’algèbres a essentiellement les opérateurs suivants :

- la séquence $E_1; E_2$ : l’exécution de $E_1$ suivie de $E_2$ ;
2. Notions préliminaires et état de l’art

– le choix $E_1\cap E_2$ : l’exécution de $E_1$ ou bien de $E_2$ ;
– la composition parallèle $E_1||E_2$ : $E_1$ et $E_2$ sont exécutés de manière concurrente ;
– l’itération $E_1 \odot E_2$ : $E_1$ est exécuté un nombre arbitraire de fois (possiblement nul) suivi d’une fois $E_2$.
– d’autres opérateurs selon la variante utilisée.

Chacun de ces opérateurs opère sur des réseaux de Petri avec comme brique de base une transition, ainsi si $E = t$ le réseau correspondant sera $t$ avec une unique place en entrée et une unique place en sortie de type jeton-noir.

L’application d’un opérateur sur deux réseaux de Petri produira un réseau plus grand en composant les deux, le tout réalisé par une opération de substitution de transitions ou des réseaux opérateurs [49, 22].

L’avantage de ce type de formalisation du point de vue d’implémentation est que les réseaux ainsi obtenus exhibent des propriétés intéressantes par construction qui peuvent être utilisées pour compiler le réseau de manière plus efficace. Par exemple, ils introduisent un contrôle de flot qui est 1-borne et formé d’ensembles de places exclusives, dans le chapitre 3 on propose une optimisation qui exploite cette propriété. Ces propriétés sont obtenues par existence d’invariants dans le réseau [46, 47, 22].

2.5.2 Propriétés d’accessibilités et logiques temporelles

On citera des propriétés d’accessibilité qui peuvent être vérifiées lors du model checking, il s’agit essentiellement de savoir si un état est accessible ou bien si un état tel qu’une certaine propriété est vraie est accessible. On pourra par exemple se demander s’il existe un état tel qu’une transition est tirable ou non, ou si un état est un deadlock (aucune transition tirable) ou plus généralement s’il existe un état avec un marquage particulier.

On parlera aussi de logiques temporelles mais on ne traitera jamais celles-ci directement ; ce n’est pas notre objectif. On citera essentiellement la logique LTL [142, 69, 80, 65] qui est utilisé par la bibliothèque Spot [52, 51]. Ces logiques sont appelées modales de par l’ajout de modalités permettant de spécifier des conditions sur le temps. Ainsi, la vérité d’une propriété dépendra des événements considérés dans d’une exécution d’un système et non à un instant particulier.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu les notions de base sur les réseaux de Petri et en particulier les variantes qui seront utilisées par la suite. Ensuite, on a vu un panorama des techniques utilisées pour le model checking explicite avec quelques liens vers le model checking symbolique. Parmi toutes ces techniques nous allons nous intéresser essentiellement à la compilation et aux réductions par symétries. Cependant, il est intéressant de voir les diverses techniques pour comprendre comment elles peuvent interagir entre elles. Ainsi, les techniques présentées dans ce manuscrit, sont compatibles avec les techniques existantes même si cela n’est pas explicité. Les techniques présentées dans les chapitres 3 et 6, en majorité, sont compatibles avec les différentes techniques d’ordres partiels,
2.6. Conclusion

les techniques de réduction de mémoire, et autres réductions par symétries. En particulier les techniques de réduction de mémoire et techniques d’ordres partiels sont compatibles avec les techniques du chapitre 6 car la méthode de détection de symétries présentée n’influe pas sur la représentation des marquages. Pour l’approche présentée dans le chapitre 3 une adaptation des algorithmes doit être réalisée mais les primitives présentées ne subiraient que peu de changements. Ces approches sont aussi compatibles avec la vérification de propriétés d’accessibilité et propriétés temporelles.
Lors de l’exploration explicite d’espaces d’états deux principaux obstacles se dressent devant nous :
- la vitesse d’exploration qui est liée au tirage de transitions, aux comparaisons entre états, et aux structures de données ;
- le nombre d’états qui reflète l’occupation mémoire utilisée.
Dans ce chapitre on aborde le premier problème dans le cadre de réseaux de Petri de haut niveau.
Dans l’approche classique du calcul explicite des espaces d’états de réseaux de Petri, le modèle est représenté sous la forme d’une structure de données que l’outil d’exploration manipule constamment. Cette structure de données est interrogée afin de réaliser les calculs nécessaires au tir. À chaque tirage de transition, on requête cette structure pour récupérer les places d’entrée et de sortie, les annotations d’arcs, etc., tous ces calculs sont redondants puisque réalisés à chaque fois que la transition est tirée. Ces données sont aussi utilisées pour récupérer les jetons du marquage, lui aussi représenté d’une manière générique. La conséquence immédiate de ce type d’exploration est donc l’encapsulation des expressions (ou plus généralement des annotations) dans des structures de données. Ainsi, cette approche peut être vue comme une interprétation du modèle. Son principal avantage est la réalisation d’un moteur d’exploration qui est générique, c’est-à-dire une implémentation unique pour tous les modèles, ce qui est plus facile à réaliser et maintenir. L’inconvénient est le temps d’exécution, nous devons requêter les structures de données, évaluer les expressions, interpréter une structure de marquage générique, etc.
Dans ce chapitre on propose une approche par compilation qui évite les différentes étapes d’interprétation dans l’objectif d’accélérer le calcul des espaces d’états. Les questions relatives à la correction de l’approche sont traitées dans le chapitre 4 dans le cadre d’une implémentation spécifique.
Ce chapitre est structuré comme suit : en premier on présente l’approche par compilation ; ensuite, on décrit l’objet produit et sa réalisation ; on présente des optimisations simples qui en découlent ; on donne un exemple ; finalement on présente une optimisation applicable sur des modèles définis avec des formalismes structurés.

Ce chapitre est basé sur [FP11a], la section 3.5 n’a pas été publiée.
3. Compilation de réseaux de Petri

3.1 Approche par compilation

La compilation de modèles est une étape qui permet d’accélérer le model checking explicite de réseaux de Petri. Son objectif n’est pas de réaliser le calcul de l’espace d’états mais de générer un moteur d’exploration spécifique au réseau de Petri. Par la suite, ce moteur est utilisé pour effectivement calculer l’espace d’états. L’aspect spécifique de ce moteur est important puisqu’il s’agit de spécialiser les structures de données et les algorithmes en se basant sur la structure du modèle. Ainsi, on n’a plus un moteur d’exploration général, comme dans le cas classique, mais un moteur d’exploration optimisé pour le modèle traité.

L’approche par compilation est déjà utilisée dans les meilleurs outils. L’outil Helena [58, 136] compile vers le langage C pour exécuter rapidement les annotations du réseau et représenter efficacement les états ; une approche similaire est aussi utilisée dans le model checker Spin [94]. Il a d’ores et déjà été montré que l’approche par compilation permet de grandement accélérer le calcul d’espaces d’états grâce à la production d’un moteur d’exploration performant [126] ; cette analyse a été faite dans le cadre du model checker Maria [132], lui aussi utilisant la compilation de modèles pour accélérer l’évaluation des annotations du réseau. Il faut noter que l’étape de compilation introduit un surcoût en amont de l’exploration, cependant si l’espace d’états est suffisamment grand alors ce surcoût est négligeable.

Le moteur d’exploration généré est une bibliothèque logicielle qui contient un ensemble de primitives permettant le calcul de l’espace d’états. Cette bibliothèque ne manipule pas le réseau de Petri, contrairement à l’approche classique, mais l’encode dans sa structure. Cela découle de l’observation que le réseau de Petri est non mutable, c’est-à-dire qu’il ne change pas durant tout le calcul de l’espace d’états, et donc qu’on peut distribuer ses données dans le code source du moteur d’exploration. Ainsi, l’utilisation d’un ensemble de primitives qui ne manipulent que la structure de marquage est cohérent.

On observe que lorsqu’on souhaite tirer une transition, on doit récupérer les jetons de ses places d’entrée. Or, cet ensemble de places est connu à l’avance de manière statique. Il en est de même pour les places de sortie nécessaires à la production de jetons, on peut donc déterminer quelles places extraire du marquage à l’avance sans interroger le modèle. Les expressions qui annotent le réseau, telles que les gardes de transitions et les arcs sont aussi connues, on peut les exploiter sans devoir requérir le réseau de Petri. Plus important, on peut encoder ces expressions de manière native dans le langage cible et ainsi exploiter toute son efficacité. Au final, à aucun moment nous n’avons besoin d’accéder à la structure du réseau de Petri, on n’accède qu’à la structure de marquage et on peut déterminer à l’avance quelles opérations réaliser en nous basant seulement sur la structure du réseau et son marquage initial.

Cette approche peut encore être améliorée. En effet, en exploitant les particularités des modèles : on peut optimiser le code généré. Dans la section 3.3, on verra par exemple que les places 1-bornées peuvent être exploitées à la fois pour réduire le coût mémoire mais aussi accélérer le tir. Le point intéressant dans ces particularités est que si on utilise des techniques adéquates pour la modélisation [144], alors elles peuvent être obtenues par construction. Ainsi,
on évite une analyse potentiellement coûteuse du réseau avant son exploration. Par exemple, la connaissance de bornes de certaines places peut nécessiter le calcul de tout l’espace d’états.

3.2 Structure de la bibliothèque

La traduction efficace d’un réseau de Petri vers une bibliothèque logicielle nécessite des suppositions à propos des annotations du réseau. On suppose tout d’abord qu’on considère des réseaux de Petri dont les arcs en entrée des transitions sont étiquetés par une seule variable (multiensembles singletons contenant une seule variable). Cette supposition permet de simplifier la formalisation, et une extension aux multiensembles de variables demeure simple : il suffit de s’assurer qu’on ne consomme pas deux fois le même jeton d’une place.

**Supposition 3.1.** Soit \((S, T, \ell)\) un réseau de Petri. Pour tout \(t \in T\) et pour tout \(s \in \bullet t\) on a \(\ell(s, t) = \{x\}\) avec \(x \in \mathbb{V}\).

Notre seconde supposition concerne l’identité de ces variables, on supposera qu’elles sont toutes distinctes. L’utilisation d’une même variable sur un arc en entrée permet de réaliser de la détection de motifs (pattern matching) sur les jetons. En effet si deux arcs en entrée d’une transition sont étiquetés par \(x\) alors les 2 jetons correspondants doivent être égaux. Cette supposition n’enlève rien à l’expressivité du modèle, en effet on peut aisément simuler ce comportement en ajoutant un test d’égalité sur les variables dans la garde de la transition. Un exemple est donné en figure 3.1.

**Supposition 3.2.** Soit \((S, T, \ell)\) un réseau de Petri. Pour tout \(t \in T\) et pour tout \(s, s' \in \bullet t\), si \(s \neq s'\) alors \(\ell(s, t) \neq \ell(s', t)\).

Il faut noter cependant, que l’outil présenté dans le chapitre 7 n’a pas ces restrictions et implémente leurs généralisations.

\[\begin{align*}
\text{(a) sans la supposition 3.2.} & \quad \text{(b) avec la supposition 3.2.} \\
\begin{array}{c}
\text{p1 : bool} \\
p2 : \text{bool}\end{array} & \quad \begin{array}{c}
\text{p1 : bool} \\
p2 : \text{bool} \\
p3 : \text{bool}\end{array}
\end{align*}\]

\[\begin{align*}
& x \\
& \text{t} \\
x &
\end{align*}\]

\[\begin{align*}
& x = y \\
& \text{t} \\
x &
\end{align*}\]

**Figure 3.1** – Exemple de pattern-matching de jeton sans et avec la supposition 3.2.

Parce que le réseau de Petri est compilé vers un langage de programmation cible, on doit aussi supposer que les annotations du réseau sont compatibles avec ce langage. Pour cela, il faut que le langage définit la notion de type (de manière dynamique ou statique) et la notion de fonction (avec arguments).

25
3. Compilation de réseaux de Petri

Definition 3.1. Un réseau de Petri $(S,T,\ell)$ est compatible avec un langage cible si et seulement si :

- pour toute place $s \in S$, $\ell(s)$ est un type du langage cible, et implémente un sous-ensemble de $\mathbb{D}$ ;
- pour toute transition $t \in T$, $\ell(t)$ est un appel de fonction booléenne dont les arguments sont des éléments de $\text{vars}(t)$ ;
- pour tout $s \in t^\bullet$, $\ell(t,s)$ peut être remplacée par une fonction $f_{t,s}$ du langage dont les argument sont des éléments de $\text{vars}(t)$ et qui renvoie un multiensemble sur $\ell(s)$, i.e., est équivalent à une simple instruction "renvoyer $\ell(t,s)$" ;
- toutes les fonctions qui annotent le réseau terminent. ♦

La définition 3.1 généralise les concepts habituels. Par exemple, la garde est une expression booléenne dont les variables libres correspondent à des jetons sur les places d’entrée, elle peut aisément être remplacée par une fonction dont les arguments sont ces variables libres. Il en est de même pour les expressions sur les arcs sortants.

Notre objectif est de calculer l’ensemble des états accessibles à partir de l’état initial du modèle. Pour cela, on compile le réseau de Petri en une bibliothèque logicielle. Ce procédé de compilation vise à supprimer toute interaction avec une structure de données représentant le réseau de Petri pendant les calculs de nouveaux états. Dans notre cas pour atteindre cet objectif, on fournit des primitives de calcul qui ne manipulent qu’une structure de marquage représentant un état du réseau.

La bibliothèque, une fois générée, sera utilisée par un programme client pour calculer l’espace d’états. Ce programme client peut être, par exemple, un model checker ou un simulateur. Pour garantir une interopérabilité avec ces outils, elle doit respecter une API (Application Programming Interface) stricte qui garanti un interfacing correct. De plus, cette bibliothèque repose sur un ensemble de primitives préexistantes (telles que des implémentations d’ensembles et de multiensembles) mais aussi du code extrait directement du modèle, par exemple les gardes de transitions. Cela est présenté sur la figure 3.2.

Cette bibliothèque est formée de deux parties principales, des structures de données (une structure de marquage et des structure auxiliaires), et des fonctions pour l’exploration d’espaces d’états. La structure de marquage est générée de manière efficace soit en réutilisant des composants génériques, soit en réalisant ces composants directement à la compilation. Pour que la réutilisation soit possible, on a défini un ensemble d’interfaces pour les composants de manière à ce qu’ils s’ajustent facilement. Les fonctions générées sont essentiellement :

- une fonction de tirage par transition, elle renvoie le marquage résultant du tir d’une transition à partir d’un marquage donné et d’un mode ;
- une fonction successeur par transition, elle renvoie tous les successeurs d’un marquage donné par une transition spécifique ;
- une fonction successeur globale qui renvoie l’ensemble des successeurs d’un marquage ;
- une fonction qui renvoie le marquage initial.

La fonction de marquage initial est triviale à réaliser et donc non présentée. Cependant on donne un exemple d’implémentation dans un cas particulier en section 3.4.
3.2.1 Tirage des transitions

Pour chaque transition $t \in T$ du réseau de Petri, on réalise une fonction de tirage de transition $fire_t$ qui lui est spécifique. De cette manière on peut spécialiser le tirage et le réaliser plus efficacement.

Soit $t \in T$ une transition telle que $t = \{s_1, \ldots, s_n\}$ et $t^* = \{s'_1, \ldots, s'_m\}$. Dans ce contexte, la fonction $fire_t$ peut être réalisée comme présenté sur l'algorithme 3.1. Cette fonction crée une copie $M'$ du marquage $M$, supprime les jetons consommés $(x_{s_1, t}, \ldots, x_{s_n, t})$ et ajoute les jetons produits en évaluant les annotations sur les arcs (de manière native), finalement cette fonction renvoie le marquage $M'$. Le point important de cette fonction est l’absence de parcours des places du réseau de Petri, au lieu de ces requêtes on réalise directement une séquence de modifications sur la structure de marquage. En effet, ceci est plus efficace et le code qui en résulte est plus facile à produire. Le second point important est l’absence de structure de données pour les modes. Pour chaque transition on utilise un ordre fixe sur les variables $x_{s_1, t}, \ldots, x_{s_n, t}$ apparaissant sur les arcs en entrée.

3.2.2 Calcul des successeurs

Le calcul des successeur est réalisé avec deux fonctions. Une fonction successeur réalisée de manière spécifique aux transitions et une fonction successeur qui renvoie l’ensemble des successeurs par toutes les transitions.

La fonction spécifique à une transition $t \in T$ énumère les modes de cette transition, et si la garde de celle-ci est satisfaite, calcule le nouvel état grâce à la fonction $fire_t$ correspondante. Finalement le nouvel état est ajouté à un ensemble d’états. Cette fonction est donnée en algorithme 3.2. Le point pertinent est la manière dont sont énumérés les modes, c’est une imbriication de boucles qui est constituée à la compilation pour récupérer les jetons du marquage des places en entrée de la transition. De cette manière on évite de manipuler le réseau de Petri, les opérations sont réalisées directement sur la structure de marquage sans requêter le réseau pour connaître les places nécessaires. De plus,
3. Compilation de réseaux de Petri

\[ \text{entrée : } M \in M, \; x_{s_1,t} \in \ell(s_1), \ldots, x_{s_n,t} \in \ell(s_n) \]

\[ \text{sortie : } M' \text{ successeur du marquage } M \text{ par la transition } t \]

\[ \text{// copier } M \]

\[ M' \leftarrow \text{copy}(M); \]

\[ \text{// consommer les jetons} \]

\[ M'(s_1) \leftarrow M(s_1) - \{x_{s_1,t}\}; \]

\[ \ldots \]

\[ M'(s_n) \leftarrow M(s_n) - \{x_{s_n,t}\}; \]

\[ \text{// produire les jetons} \]

\[ M'(s'_1) \leftarrow M(s_1) + f_{t,s'_1}(x_{s_1,t}, \ldots, x_{s_n,t}); \]

\[ \ldots \]

\[ M'(s'_m) \leftarrow M(s_m) + f_{t,s'_m}(x_{s_1,t}, \ldots, x_{s_n,t}); \]

\[ \text{renvoyer } M'; \]

\[ \text{// renvoyer le successeur} \]

**Algorithme 3.1:** Tir de transition spécifique à une transition \( t \).

Le mode étant défini avec les variables du langage cible, celles-ci vont être compilées efficacement et aucune allocation mémoire n'est nécessaire pour stocker le mode. Ce n'est pas le cas par exemple chez Helena [57, 58] où les modes sont stockés dans une structure spécifique. Remarquons que cette approche directe n'est possible que parce qu'on génère une fonction par transition (Helena fait de même mais n'exploite pas cette possibilité complètement).

La fonction générale de calcul des successeurs prend un marquage en entrée et renvoie l'ensemble de ses marquages successeurs. Pour cela, un ensemble de marquages vide est créé puis chacune des fonctions successeur spécifiques aux transitions est appelée. Ces fonctions spécifiques vont ajouter les états successeurs par chacune des transitions et ainsi l'ensemble d'états contiendra tous les successeurs du marquage. Elle est présentée en algorithme 3.3.

\[ \text{entrée : } M \in M, \; \text{next} \in 2^M \]

\[ \text{sortie : } \text{next} \in 2^M \]

\[ \text{pour } x_n \text{ in } M(s_n) : \]

\[ \ldots \]

\[ \text{pour } x_1 \text{ in } M(s_1) : \]

\[ \text{si } g_t(x_{s_1,t}, \ldots, x_{s_n,t}) \text{ alors} \]

\[ \text{next} \leftarrow \text{next} \cup \{\text{fire}_t(M, x_{s_1,t}, \ldots, x_{s_n,t})\}; \]

\[ \text{fin si} \]

\[ \text{fin pour} \]

\[ \text{/next a été enrichi de nouveaux successeurs} \]

**Algorithme 3.2:** Fonction successeurs spécifique à une transition \( t \).
3.3. Optimisations dirigées par la structure du modèle

Dans cette section, on présente diverses optimisations qui peuvent être réalisées lors de la génération du code source. Un exemple les utilisant est donné dans la section suivante (sec. 3.4).

3.3.1 Typage des jetons et expressions

La première optimisation concerne directement le langage cible et est liée à la traduction réalisée. La majorité des langages de programmation fournissent un système de types pour les valeurs qu’ils manipulent. En général un sous-ensemble de ces types appelé types primitifs existe. Un type primitif a l’avantage de pouvoir être manipulé plus efficacement, et souvent de manière native. Dans le cadre d’un langage compilé cela signifie que ces valeurs peuvent être manipulées directement par le processeur de la machine cible.

L’optimisation consiste à utiliser le plus de ces types pour représenter les jetons du réseau de Petri. Pour cela, il faut que les types du formalisme de modélisation d’entrée puissent être aisément traduits. En général c’est le cas pour des types comme les entiers relatifs bornés, les booléens, les chaînes de caractère, etc. Les annotations de type des places du réseau permettent de rapidement décider de l’encodage du jeton et de la place. De plus, les modes étant représentés par des variables qui stockent un jeton de la place (ou un pointeur sur le jeton), elles peuvent aussi être typées en utilisant ces informations.

Les fonctions étiquetant les arcs de sortie des transitions, quant à elles, sont plus délicates à gérer. Si on suppose ces fonctions bien typées, alors chacune d’elles renvoie forcément une valeur de type de la place qui est connectée à l’arc correspondant. Si on n’a pas cette garantie, il faut s’assurer que le type de retour de la fonction convient, dans le cas contraire la transition ne devrait pas être tirée. Selon la sémantique du formalisme, l’absence de garantie de type des expression peut être une caractéristique recherchée.

Dans le chapitre 7 on décrit l’implémentation de l’outil Neco en mettant l’accent sur la non trivialité de cette optimisation dans notre cas.
3.3.2 Calcul des modes

Chaque fonction succ\(_i\) énumère les jetons des places en entrée de sa transition. L’ordre dans lequel se font ces énumérations est arbitraire. En effet, la sémantique usuelle des réseaux de Petri ne définit pas d’ordre sur les arcs en entrée, et donc cela n’a aucune incidence sur la correction de l’approche. Cependant, si on change l’ordre dans lequel ces énumérations sont réalisées, le calcul des successeurs peut être fait de manière beaucoup plus rapide [56]. Par exemple, étant donné un réseau de Petri \((S, T, \ell)\), une transition \(t \in T\) et deux places \(s_1, s_2 \in \bullet t\). Si on sait que \(s_1\) est 1-bornée mais non \(s_2\), alors il est plus efficace d’énumérer \(s_1\) avant \(s_2\), parce que si \(s_1\) est vide alors \(s_2\) ne sera pas énumérée. Plus généralement, l’ordre des arcs en entrée de la transition peut être choisi en privilégiant d’abord les places dont la borne est la plus petite, puis les places dont le type a un plus petit domaine. L’optimisation présentée dans [56] est plus générale et repose sur les variables qui sont valorisées sur les arcs, ce qui n’est pas applicable à notre cas vu les restrictions sur les expressions étiquetant les arcs et les gardes de transitions.

En général, les bornes des places de réseaux de Petri arbitraires ne sont connues qu’en calculant l’espace d’états complet du modèle ou bien des invariants de places [68, 101]. Cependant, ce genre de propriétés peut être connu en utilisant des techniques de modélisation adéquates : en particulier, les places de contrôle de flot dans les algèbres de réseaux de Petri colorés [144] peuvent être garanties comme 1-bornées.

On peut pousser l’optimisation plus loin en utilisant les places 1-bornées. En effet, par définition ce type de place ne peut avoir qu’un jeton au plus et donc l’utilisation d’une boucle devient inutile. Ainsi une boucle peut être remplacée par un “si” pour chaque place 1-bornée, ce qui revient à tester si la place est vide ou non. Pour un maximum d’efficacité ces tests doivent être réalisés avant les boucles pour n’être exécutés qu’une seule fois. Tout cela s’applique aussi pour les places à types singletons tels que les jetons noirs.

3.3.3 Encodage des places

Ce type d’optimisation consiste à choisir l’encodage de chaque place de manière pertinente. C’est une conséquence du typage des places, en effet grâce au type des places on peut choisir l’encodage de celle-ci pour un maximum d’efficacité, c’est un des avantages principaux de la passe de compilation. Cependant en exploitant les propriétés du modèle nous pouvons aller plus loin.

L’implémentation d’une structure de marquage peut être vue comme un vecteur de bits. Ce vecteur est segmenté en places qui peuvent soit être des pointeurs vers des structures de données complexes, soit être des valeurs qui sont interprétées comme un certain marquage de la place.

Si on considère les types finis, par exemple des types énumérés alors on sait quel est le nombre de bits maximal nécessaire pour les représenter ; si \(n\) est le nombre de valeurs qu’accepte ce type alors le nombre de bits nécessaires est \(k = \lceil \log_2(n) \rceil\). On peut alors utiliser un vecteur de \(k\) bits pour représenter chaque valeur.

Pour les places 1-bornées de type quelconque, ce procédé peut-être poussé à encore plus loin en réservant l’espace à l’avance dans la structure de marquage. Il faut cependant faire attention à la représentation des places vides.
3.3. Optimisations dirigées par la structure du modèle

Si la place 1-bornée est vide, alors il faut réserver un bit dans la structure de marquage qui l’indique. Une autre approche est d’utiliser un pointeur dans la structure de marquage sur l’unique valeur et stocker un pointeur nul si la place est vide. Cette seconde approche est moins efficace que la première à cause de l’espace utilisé, des déréférencements pour accéder aux données et de l’allocation mémoire nécessaire pour l’unique jeton. Les allocations dynamiques de mémoire doivent en général être réduites au minimum pour un gain de performances maximal, il est toujours plus efficace d’allouer un bloc de mémoire en une seule fois plutôt que de le segmenter avec de petites allocations. Un exemple de l’optimisation est donné en algorithme 3.4.

\begin{algorithm}
\begin{verbatim}
entrée : $M \in \mathbb{M}$, next $\in 2^\mathbb{M}$
sortie : next $\in 2^\mathbb{M}$
\textbf{pour} $x_{s_1,t}$ in $M(s_1)$ :
\hspace{1em}...\
\hspace{1em}\textbf{pour} $x_{s_{i-1},t}$ in $M(s_{i-1})$ :
\hspace{2em}si $M(\text{flag}_{s_i})$ alors \text{/* teste si la place est marquée*/}
\hspace{3em}$x_i \leftarrow M(s_i)$; \text{/* récupère l’unique jeton*/}
\hspace{2em}else:\n\hspace{3em}\textbf{pour} $x_{s_i,t}$ in $M(s_{i+1})$ :
\hspace{4em}...\
\hspace{4em}\textbf{pour} $x_{s_n,t}$ in $M(s_n)$ :
\hspace{5em}si $g_t(x_{s_1,t}, \ldots, x_{s_n,t})$ alors
\hspace{6em}$\text{next} \leftarrow \text{next} \cup \{\text{fire}_t(M, x_{s_1,t}, \ldots, x_{s_n,t})\}$;
\hspace{5em}\text{fin si}\
\hspace{5em}\text{fin pour}\
\hspace{4em}\text{fin si}\
\hspace{4em}\text{fin pour}\
\hspace{3em}\text{fin pour}\
\hspace{2em}\text{fin pour}\
\hspace{1em}\text{fin pour}\
\end{verbatim}
\caption{Énumération d’une place 1-bornée.}
\end{algorithm}

Dans un réseau de Petri de haut niveau, on manipule des jetons de divers types. Selon le type de jeton, il existe souvent des implémentations plus efficaces qui peuvent être utilisées. Par exemple, pour représenter un multiensemble de valeurs booléennes on pourrait utiliser l’approche ci-dessus en utilisant un bit par jeton, l’implémentation serait donc un vecteur de bits plus la taille de ce vecteur. Cependant si la place contient un grand nombre de jetons alors elle peut être représentées avec deux compteurs, un compteur pour les jetons true et un compteur pour les jetons false. Ce deuxième encodage sera plus efficace en temps de calcul puisque l’énumération de la place peut se traduire en un branchement conditionnel comme présenté sur l’algorithme 3.5.

De manière similaire une place de type jeton-noir peut être représentée par un compteur qui indique le nombre de jetons. Ainsi l’énumération de cette place revient à tester si la place est vide ou non. Puisque toutes les instances du type jeton-noir sont équivalentes, la consommation ou la production d’un
3. Compilation de réseaux de Petri

entrée : $M \in \mathcal{M}$, $next \in 2^\mathcal{M}$
sortie : $next \in 2^\mathcal{M}$
pour $x_{s_1,t}$ in $M(s_1)$ :

\[
\ldots
\]
pour $x_{s_{i-1},t}$ in $M(s_{i-1})$ :

// énumération de la place en deux cas:
// 1. cas 'true'
si $M(s_i)(true) > 0$ alors
\[
\begin{align*}
x_i &\leftarrow true; \quad \text{// compteur 'true' non nul} \\
pour x_{s_{i+1},t}$ in $M(s_{i+1})$ :
\ldots
\end{align*}
\]

pour $x_{s_n,t}$ in $M(s_n)$ :

\[
\begin{align*}
si &\ g_i(x_{s_1,t}, \ldots, x_{s_n,t}) \text{ alors} \\
next &\leftarrow next \cup \{fire_i(M, x_{s_1,t}, \ldots, x_{s_n,t})\}; \\
\text{fin si}
\end{align*}
\]

fin pour

fin pour

// 2. cas 'false'

si $M(s_i)(false) > 0$ alors
\[
\begin{align*}
x_i &\leftarrow false; \quad \text{// compteur 'false' non nul} \\
pour x_{s_{i+1},t}$ in $M(s_{i+1})$ :
\ldots
\end{align*}
\]

pour $x_{s_n,t}$ in $M(s_n)$ :

\[
\begin{align*}
si &\ g_i(x_{s_1,t}, \ldots, x_{s_n,t}) \text{ alors} \\
next &\leftarrow next \cup \{fire_i(M, x_{s_1,t}, \ldots, x_{s_n,t})\}; \\
\text{fin si}
\end{align*}
\]

fin pour

fin pour

fin si

fin pour

fin pour

Algorithme 3.5: Énumération d’une place de type bool.
3.4. Exemple

tel jeton n’est pas influencée par sa valeur mais juste sa présence. Si en plus elle est 1-bornée, alors 1 seul bit est suffisant pour la représenter.

De manière générale une optimisation similaire peut être appliquée à tout type de place pour un maximum d’efficacité.

3.4 Exemple

Dans cette section nous allons compiler le réseau de Petri donné en figure 3.3. Les places sont de trois types : les jetons noirs (•), les booléens (bool) et les entiers 32 bits (int). On suppose qu’on sait par construction que la place $s_3$ est 1-bornée. La place $s_3$ étant 1-bornée, $s_4$ l’est forcément. Le réseau ne possède qu’une seule transition que nous allons compiler. On s’intéresse aux fonctions $\text{succ}_t$, $\text{fire}_t$ et $\text{init}_t$ correspondantes.

![Figure 3.3 – Exemple de réseau de Petri, la place $s_3$ est supposée 1-bornée.](image)

La fonction $\text{succ}$ spécifique à la transition $t$ est donnée en algorithme 3.6. L’ordre des énumérations des places correspond à l’optimisation décrite dans la section précédente : on énumère les place les plus bornées et de plus petit domaine en premier. On commence donc par la place $s_3$ de type jeton-noir. En utilisant une implémentation adéquate nous pouvons la représenter par un seul bit sachant qu’elle est 1-bornée, on exploite donc cette information pour remplacer l’énumération par un simple test qui vérifie si la place est marquée ou non. En deuxième on énumère la place de type bool en utilisant la décomposition en deux compteurs, ainsi on a deux blocs indépendants créés : l’un pour une instance du jeton true, l’autre pour l’instance du jeton false. Ensuite on énumère les places de type int, comme on n’a pas d’informations sur ces places, on les énumère de manière classique. Cependant ces énumérations ne sont réalisées que si les places $s_3$ et $s_5$ ne sont pas vides ce qui est détecté très rapidement.

La fonction $\text{fire}$ spécifique à la transition $t$ est donné en algorithme 3.7. Elle consiste à copier le marquage, consommer les jetons en utilisant les valeurs
3. Compilation de réseaux de Petri

Entrée : $M \in \mathcal{M}$, $\text{next} \in 2^\mathcal{M}$

sortie : $\text{next} \in 2^\mathcal{M}$

si $M(s_3)$ alors

//on n’utilise pas la variable $x_3$ parce que c’est •

si $M(s_3)(\text{true}) > 0$ alors

$x_5 \leftarrow \text{true}$

pour $x_1$ in $M(s_1)$ :

pour $x_2$ in $M(s_2)$ :

si $g(x_1, x_2, x_5)$ alors

$\text{next} \leftarrow \text{next} \cup \{\text{fire}_t(M, x_1, x_2, x_5)\}$;

fin si

fin pour

fin pour

fin si

si $M(s_3)(\text{false}) > 0$ alors

$x_5 \leftarrow \text{false}$

pour $x_1$ in $M(s_1)$ :

pour $x_2$ in $M(s_2)$ :

si $g(x_1, x_2, x_5)$ alors

$\text{next} \leftarrow \text{next} \cup \{\text{fire}_t(M, x_1, x_2, x_5)\}$;

fin si

fin pour

fin pour

fin si

fin si

Algorithm 3.6: Exemple de calcul de sucesseurs de la transition $t$ de la figure 3.3.

Entrée : $M \in \mathcal{M}$, $x_{s_1, t} \in \ell(s_1)$, $\ldots$, $x_{s_n, t} \in \ell(s_n)$

sortie : $M'$ successeur du marquage $M$ par la transition $t$

//copy marking $M$

$M' \leftarrow \text{copy}(M)$;

//consommer les jetons

$M'(s_3) \leftarrow 0$; //on sait que $s_3$ est 1-bornée

$M'(s_3)(x_3) \leftarrow M(s_3)(x_3) - 1$; //on consomme le booléen

$M'(s_1) \leftarrow M(s_1) - \{x_1\}$; //on consomme l’entier $x_1$

$M'(s_2) \leftarrow M(s_2) - \{x_2\}$; //on consomme l’entier $x_2$

//produire les jetons

$M'(s_4) \leftarrow 1$; //on sait que $s_4$ est 1-bornée et $x_3$ est •

$M'(s_3)(\neg x_5) \leftarrow M(s_3)(\neg x_5) + 1$; //rélisé par une fonction

$M'(s_5) \leftarrow M(s_2) + \{x_1 + x_2\}$; //production de la somme

rendoyer $M'$; //marquage successeur

Algorithm 3.7: Exemple de tirage de la transition $t$ de la figure 3.3.
3.5. Réduction du contrôle de flot

des arguments, puis utiliser les annotations d’arcs pour produire les nouveaux jetons.

La dernière fonction est celle du marquage initial et est donnée en figure 3.8. Elle consiste simplement à allouer un nouveau marquage et y ajouter les jetons nécessaires.

$$\textbf{entrée : vide}$$

$$\textbf{sortie : } M \text{ marquage initial du réseau de Petri}$$

$$M \leftarrow \text{cons\textmu\textit{rk}}(); \quad \text{// allouer le marquage}$$

$$\text{//ajouter les jetons}$$

$$M(s_1) \leftarrow \{2, 4\};$$

$$M(s_2) \leftarrow \{3\};$$

$$M(s_3) \leftarrow 1; \quad \text{// on sait que } s_3 \text{ est 1-bornée de type •}$$

$$M(s_5)(\text{true}) \leftarrow 1; \quad \text{// un jeton vrai dans } s_5$$

$$M(s_5)(\text{false}) \leftarrow 0; \quad \text{// aucun jeton faux dans } s_5$$

$$\text{renvoyer } M;$$

**Algorithm 3.8** : Exemple de fonction de marquage initial pour le réseau de la figure 3.3.

3.5 Réduction du contrôle de flot

Lorsqu’on utilise des formalismes de modélisation structurés dérivés des algèbres de réseaux de Petri [22], on compose différents processus. L’application de la composition séquentielle, du choix, ou de l’itération sur deux processus séquentiels produisent un processus séquentiel.

Les processus séquentiels des algèbres de réseaux de Petri ont la bonne propriété de produire un contrôle de flot 1-borné de places de type jeton noir : c’est un ensemble de places de type jeton noir 1-bornées et exclusives. Plus formellement cela signifie que ces places forment un invariant de valeur 1 et donc exactement une seule place est marquée. La composition parallèle de deux processus séquentiels produit un réseau formé de deux processus concurrents, dont l’ensemble des places de contrôle de flot n’est plus exclusif, cependant on peut toujours aisément identifier deux sous ensembles de places exclusives et qui correspondent au contrôle de flot de chacun des processus. Ainsi par la suite, si on compose des réseaux contenant des processus concurrents avec des processus séquentiels ou d’autres processus concurrents, on peut toujours identifier le contrôle de flot de chacun des processus du réseau résultant.

L’optimisation présentée dans cette section s’applique aux place de contrôle de flot mais peut être généralisée à tout sous-ensemble de place 1-bornées exclusives de type jeton noir.

Soit $S_T$ un ensemble de places 1-bornées exclusives de type jeton noir. Puisque les places sont exclusives, si une transition possède deux places de $S_T$ en entrée alors elle ne sera jamais tirable. De même, une transition qui possède deux places de $S_T$ en sortie ne sera pas tirable puisque ça violerait l’hypothèse d’exclusivité. On peut donc les supprimer ce type de transitions.
3. Compilation de réseaux de Petri

sans modifier l'ensemble des états accessibles. On suppose donc que ce type de transition n’existe pas dans le réseau.

Pour chaque place \( s \) de \( S_f \) on peut identifier un ensemble de transitions exclusives \( T_s \), défini par \( T_s \triangleq \{ t \in T \mid s \in \bullet t \} \), on notera aussi \( T_f \triangleq \bigcup s \in S_f T_s \). On sait que si la place \( s \) n’est pas marquée alors les transitions de \( T_s \) ne sont pas tirables. Réciproquement, si \( s \) est marquée alors quel que soit \( s' \in S_f \) telle que \( s' \neq s \) on sait que les transitions de \( T_{s'} \) ne sont pas tirables car \( s \) et \( s' \) sont exclusives. On peut donc dire que chaque place de \( S_f \) identifie un ensemble de transitions potentiellement tirables. Ces transitions ne sont tirables que si la place correspondante est marquée, il s’agit donc d’une condition nécessaire à leur tir.

Si on a \( n \) places dans \( S_f \) alors on peut les encoder avec \( \lceil \log_2(n) \rceil \) bits, il suffit d’identifier la place marquée par une valeur entre 0 et \( \lceil \log_2(n) \rceil - 1 \). L’optimisation peut alors correspondre à fusionner ces places de contrôle de flot en une seule place.

Un exemple est donné en figure 3.4. Les places de contrôle de flot sont \( \{ s_{f_0}, s_{f_1}, s_{f_2}, s_{f_3} \} \) on les identifie par une valeur de 0 à 3. Elles sont toutes encodées avec la place \( s_f \) dans le réseau réduit. Ainsi, dans le réseau réduit à l’état initial on a \( M_0(s_f) = 0 \) ce qui correspond à la place \( s_{f_0} \) marquée. On peut tirer la transition \( t_1 \) seulement si \( s_{f_0} \) est marqué, ce qui est représenter de manière équivalente dans le réseau réduit avec la garde \( x = 0 \). On procède de la même manière pour les deux autres transitions. On remarque que les deux autres transitions ont la même garde \( x = 1 \), c’est cohérent puisqu’elles sont potentiellement tirables que si la place \( s_{f_1} \) est marquée. Les places en entrée et sortie des transitions correspondent au contrôle de flot, ainsi si la place \( s_{f_0} \) était marquée et qu’on tire la transition \( t_1 \), on obtient un état où la place \( s_{f_1} \) est marquée, ce qui correspond à la création du jeton 1 pour la place \( s_f \) dans le réseau réduit.

![Diagramme de réseaux de Petri](image)

**Figure 3.4 – Exemple fusion de contrôle de flot.**

En regardant le réseau de la figure 3.4 on a l’impression de n’avoir rien gagné à part \( n - \lceil \log_2(n) \rceil \) bits dans la structure de marquage. De plus, on a l’impression de perdre à cause de l’évaluation de gardes qui a été introduite. Cependant lorsqu’on réfléchit en termes de compilation on peut gagner beaucoup
plus en évitant de manipuler cette place autant que possible.

En effet, selon la valeur du jeton dans la place $s_f$ on peut directement sélectionner les transitions tirables et écarter toutes les autres. L'algorithme 3.9 présente cette étape de sélection. On remarque que les fonctions correspondantes aux autres transitions ne sont pas appelées : on a épuré l’ensemble des transitions potentiellement tirables. Les fonctions successeur et tir doivent être adaptées en conséquence, maintenant on n’effectue plus l’énumeration de la place $s_f$ dans les fonctions successeurs et on met à jour le contrôle de flot dans la fonction de tir. On donne l’implémentation de la transition $t_2$ de la figure 3.4 aux algorithmes 3.10 et 3.11.

Cette optimisation permet donc de rapidement éliminer les transitions non tirables et donc accélérer l’exploration d’espaces d’états.

\begin{algorithm}
\textbf{entrée} : $M \in \mathbb{M}$, $next \in 2^\mathbb{M}$
\textbf{sortie} : $next \in 2^\mathbb{M}$
\textbf{selon} $M(s_f)$ faire
\begin{itemize}
  \item [cas 0] $succ_{t_1}(M, next)$
  \item [fin]
  \item [cas 1] $succ_{t_2}(M, next)$
  $succ_{t_3}(M, next)$
  \item [fin]
  \item [autres cas] $skip$
  \item [fin]
\end{itemize}
\textbf{fin}
\end{algorithm}

**ALGORITHME 3.9** : Fonction successeur pour les transitions exclusives de la figure 3.4.

\begin{algorithm}
\textbf{entrée} : $M \in \mathbb{M}$, $next \in 2^\mathbb{M}$
\textbf{sortie} : $next \in 2^\mathbb{M}$
\textbf{pour} $y$ in $M(s_{data})$ :
\begin{itemize}
  \item [next] $\leftarrow next \cup \{\text{fire}_t(M, y)\}$
\end{itemize}
\textbf{fin pour}
\textbf{renvoyer} $next$ ; \hspace{1em} //renvoyer l’ensemble des successeurs
\end{algorithm}

**ALGORITHME 3.10** : Fonction successeur spécifique à la transition $t_2$ de la figure 3.4.
3. Compilation de réseaux de Petri

entrée : \( M \in M, x_s, t \in \ell(s_1), \ldots, x_s, t \in \ell(s_n) \)
sortie : \( M' \) successeur du marquage \( M \) par la transition \( t \)

\[
M' \leftarrow \text{copy}(M);
M'(s_f) \leftarrow \{3\}; \quad \text{//place de contrôle suivante}
M'(s_{data}) \leftarrow M(s_{data}) - 1; \quad \text{//place encodée avec un entier}
\text{renvoyer } M'; \quad \text{//renvoyer le successeur}
\]

Algorithme 3.11: Fonction de tir spécifique à la transition \( t_2 \) de la figure 3.4.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté une approche de compilation pour les réseaux de Petri de haut niveau. La bibliothèque générée fournit des primitives d’exploration pour les espaces d’états basées sur des algorithmes simples. Ces algorithmes ne manipulent pas la structure du réseau de Petri qui est maintenant encodée dans les calculs, les diverses opérations sont essentiellement réalisées sur la structure de marquage. De cette manière on évite les étapes d’interprétation qui sont nécessaires en général. On a aussi présenté différentes optimisations qui exploitent les particularités des modèles pour réduire l’occupation mémoire et accélérer l’exploration. Ainsi, le cœur de la contribution est la définition de l’approche par compilation dans un cadre général et indépendant du langage cible, mais aussi les optimisations basées sur les propriétés structurelles des modèles.

Dans le chapitre suivant on continue à adresser la compilation mais cette fois du point de vue de l’implémentation dans un langage de bas niveau. Dans ce cadre on réalisera un travail de certification en fournissant des preuves de correction de l’approche. Les résultat expérimentaux quant à eux sont présentés dans le chapitre 7.
Compilation vers un langage de bas niveau

Le procédé de compilation d’un réseau de Petri peut cibler différents langages de programmation. Dans ce chapitre on s’intéresse à la compilation vers un langage de bas niveau : LLVM. Comme on l’a vu dans le chapitre précédent, la compilation d’un réseau de Petri supprime les structures de données qui l’encodent et les remplace par un ensemble de fonctions pour l’exploration. Par conséquent, il faut s’assurer que cette transformation préserve la sémantique du réseau de Petri original puisqu’il n’est plus utilisé.

La contribution présentée ici, est d’une part de mener la démarche de compilation au bout sur un langage réel, et d’autre part de prouver la correction de l’approche. Le langage cible choisi est LLVM qui fait partie de la suite d’outils LLVM : Low Level Virtual Machine. Notre choix pour ce langage résulte des constats suivants :

- ce langage proche de l’assembleur possède des instructions de haut niveau suffisamment expressives pour décrire nos algorithmes de manière raisonnable ;
- ce langage est assez bas niveau pour être équipé d’une sémantique formelle pour prouver la correction de programmes.

Pour arriver à nos fins on choisit un fragment de LLVM suffisant pour réaliser notre bibliothèque d’exploration, ensuite on définit une sémantique opérationnelle de celui-ci pour prouver des propriétés sur les programmes produits par notre compilateur. Au moment de la publication de ce travail [FP11c], il s’agissait de la première sémantique formelle pour le langage LLVM. De plus, même si les model checkers sont des outils largement répandus, il y a peu de tentatives pour les prouver au niveau de l’implémentation [159], contrairement au domaine des assistants de preuves [43, 137] pour lesquels il est courant de prouver la correction de l’outil.

*Ce chapitre est basé sur [FP11c] et [FP11b].*
4. Compilation vers un langage de bas niveau

4.1 LLVM et LLVM-IR

Le projet LLVM (Low Level Virtual Machine) [120] est une boîte à outils moderne et modulaire pour le développement de compilateurs. Elle est largement utilisée par divers projets commerciaux, open source, ou encore académiques [121, 122].

Le langage LLVM, ou plus précisément LLVM-IR (LLVM Itermediate Representation) [119], fait partie du projet LLVM. Il s’agit d’un langage de représentation intermédiaire qui est bas niveau et multiplateforme. Tout programme écrit dans ce langage peut être exécuté dans une machine virtuelle ou compilé en code natif pour toutes les plateformes compatibles avec le projet LLVM. Ces programmes vont être optimisés par le compilateur LLVM qui exécute une large variété de passes d’optimisation sur cette représentation. Tout cela nous permet de générer du code simple sachant qu’il sera optimisé par la suite.

4.1.1 Syntaxe et sémantique intuitive

Dans ce chapitre nous présentons d’abord le langage LLVM-IR de manière formelle afin de pouvoir lui donner une sémantique par la suite. Une description informelle du langage (mais suffisamment précise) peut être trouvée dans la documentation du projet [120].

Un programme LLVM est composé d’un ensemble de blocs (i.e., séquences d’instructions) identifiés par des étiquettes. Le passage d’un bloc à un autre est toujours explicite avec : une instruction de branchement (conditionnelle ou non), un appel de sous-programme ou une instruction de retour de sous-programme.

Pour définir la syntaxe de ce langage, on considère les ensembles deux à deux disjoints suivants :

– un ensemble de pointeurs $\mathbb{P}$ ;

– un ensemble de types LLVM $\mathbb{T}$, défini inductivement comme le plus petit ensemble contenant l’ensemble de types primitifs $T_0 \equiv \{\text{int, bool, . . .}\}$ (entières, booléennes, et autres types qu’on n’utilisera pas ici) et tel que si $t_0, . . . , t_n \in \mathbb{T}$ alors struct$(t_0, . . . , t_n) \in \mathbb{T}$, ce qui représente une structure de données avec $n + 1$ champs de types $t_0, . . . , t_n$, de plus pour tout type $t \in \mathbb{T}$ on a aussi un type $\text{ptr}(t) \in \mathbb{T}$ qui correspond au type pointeur sur une valeur de type $t$ ;

– un ensemble d’étiquettes $\mathbb{L}$ contenant des identifiants arbitraires mais aussi des étiquettes particulières notées $f\{a_1, . . . , a_n\}$, où $a_i \in \mathbb{V}$ pour $1 \leq i \leq n$ et qui correspondent aux entrées de sous-programmes (avec les arguments formels $a_1, . . . , a_n$). On définit l’ensemble $L_\bot \equiv \ell \cup \{\bot\}$ où $\bot \notin \mathbb{L}$ dénote l’étiquette “non définie”.

Ces définitions ne sont valables que pour ce chapitre et le chapitre suivant, les symboles utilisés ici pourront être réutilisés dans les autres chapitres pour d’autres objets.

Un programme LLVM est représenté comme une fonction partielle $P$ de $\mathbb{L}$ vers l’ensemble de blocs, i.e., il associe à chaque étiquette de son domaine une séquence d’instructions (définies par la suite).
Dans notre cas, on s’intéresse à un fragment de LLVM présenté sous forme de grammaire en figure 4.1. Ce fragment est composé de trois classes syntaxiques : les séquences `seq`, les commandes `cmd` (i.e., instructions) et expressions `expr`. Une exception existe cependant pour les séquences. Une séquence est une liste de commandes qui peut se terminer par une expression, et dans ce cas la séquence est considérée elle-même comme expression (ce qui n’est pas mis en évidence sur la figure 4.1). On suppose que nos programmes sont *syntaxiquement corrects et bien typés*, ce qui permet de simplifier la syntaxe en omettant les annotations de types dans le code source LLVM ce qui donne cette syntaxe simplifié.

**Figure 4.1 – Syntaxe de notre fragment de LLVM, avec label ∈ L, rvalue ∈ D∪P∪V, var ∈ V, type ∈ T, nat ∈ N et op ∈ {<, ≤, =, ≠, ≥, >}.

**Supposition 4.1. Les programmes sont syntaxiquement corrects et bien typés.

Pour écrire les séquences sur une seule ligne, on introduit l’opérateur de séquencement “;” qui correspond aux fins de lignes en LLVM. On introduit aussi la commande `skip` qui dénote la séquence vide. On peut remarquer que les instructions `pcall` (appel de procédure) et `fcall` (appel de fonction) n’existent pas en LLVM mais sont deux instances de l’instruction `call`. Cette différenciation peut être facilement réalisée en LLVM parce que l’instruction `call` contient le type de retour du sous-programme (fonction ou procédure) que nous avons omis dans notre variante syntaxique. Nous détaillerons les instructions à mesure que ce sera utile ; en première approche il suffit de noter que :
4. Compilation vers un langage de bas niveau

– l'instruction store (resp. load) est l’action d’écrire (resp. lire) des données dans (resp. de) la mémoire en utilisant un pointeur ;
– l'instruction icmp compare deux entiers ;
– l'instruction phi est utilisée pour accéder à des variables assignés dans d’autres blocs (variable rvalue, du bloc label), par exemple, phi (i, a), (i, b) vaut i si on vient du bloc a et j si on vient du bloc b ;
– l’instruction gep correspond à l’arithmétique de pointeurs, on fixe le second argument de celle-ci à 0, ce qui permet d’accéder aux attributs d’une structure en utilisant indice du champ demandé.

L'instruction phi est très importante. En effet LLVM est en forme SSA (static single assignment) qui est une contrainte syntaxique sur les variables apparaissant dans le programme. Chaque variable ne peut être assignée qu’à un seul emplacement dans le code source et la portée d’une variable est limitée au bloc de sa déclaration. Ainsi si on souhaite l’utiliser dans plusieurs blocs, lors de la réalisation d’une boucle par exemple, nous ne pouvons pas le faire directement. Pour cela, il faut utiliser l’instruction phi et affecter une nouvelle variable.

4.2 Modèles traités

Les modèles qu’on compile sont des réseaux de Petri supposés compatibles avec LLVM qui est notre langage de couleurs (Définition 3.1). Pour cela, on suppose que chaque réseau de Petri \((S, T, \ell)\) est défini dans le contexte d’un programme \(P\), et qu’on a :

– pour toute place \(s \in S\), \(\ell(s)\) dénote un type du langage LLVM dans \(T\), interprété comme un sous-ensemble de \(\mathbb{D}\);
– pour toute transition \(t \in T\), \(\ell(t)\) est un appel à une fonction booléenne dans \(P\) dont les paramètres sont dans \(\text{vars}(t)\);
– pour tout \(s \in t\star\), \(\ell(t, s)\) est un multiensemble singleton dont l’unique élément est un appel à une fonction dans \(P\) avec comme arguments formels des éléments de \(\text{vars}(t)\) et comme type de retour \(\ell(s)\).

On a donc concrétisé les types des places avec des types LLVM et chaque expression est maintenant implémentée par une fonction LLVM appelée à partir de l’annotation correspondante. Comme dans le chapitre 3, pour simplifier la présentation, on restreint aussi les arcs sortants des transitions à être des multiensembles singletons, mais ceci peut être facilement généralisé. De plus, on suppose toujours que les annotations (arcs et gardent) terminent (cf. Définition 3.1).

On étend la notion de valuation et mode de transition à LLVM, on les nomme \(LLVM\)-valuations et \(LLVM\)-modes. Une \(LLVM\)-valuation est une fonction partielle \(\beta : V \rightarrow \mathbb{D} \cup \mathbb{P}\) qui assigne à chaque variable de son domaine un pointeur ou une valeur, de plus on étend son domaine à \(\mathbb{D} \cup \mathbb{V}\) par la fonction identité. On pose \(\mathbb{B}\) l’ensemble des \(LLVM\)-valuations. Un \(LLVM\)-mode est donc une \(LLVM\)-valuation qui rend tirable une transition d’un réseau de Petri annoté par le langage LLVM.

Dans la suite de ce chapitre et le chapitre suivant, on appellera par valuations les \(LLVM\)-valuations et par modes les \(LLVM\)-modes.

42
4.3. Implémentation de l’exploration d’espaces d’états

Étant donné un marquage initial $M_0$, l’espace d’états qu’on souhaite calculer est donné par l’ensemble $R$ des marquages accessibles, i.e., le plus petit ensemble $R$ tel que $M_0 \in R$ et, si $M \in R$ et $M[t, \beta]M'$ (pour une transition $t$ et une valuation $\beta$) alors $M' \in R$. La correction et la terminaison de l’implémentation présentée dans cette section est discutée dans la section 4.7.

Nos algorithmes sont implémentés sur la base de structures de données prédéfinies, telles que les multiensembles, les marquages, et les ensembles de marquages, qui doivent respecter certaines interfaces. Une interface est un ensemble de procédures ou fonctions qui manipulent une structure de données à travers un pointeur ; il s’agit d’interfaces à la C.

Pour chacune des fonctions, ou procédures, de ces interfaces on donne une spécification formelle de comportement. Elle se base sur une interprétation explicite de la structure de données pointée avant et après l’appel du sous-programme (la fonction ou procédure). La manière de décrire ce genre de spécifications est donnée dans la section 4.5, une fois la sémantique formelle de LLVM définie. L’ensemble des interfaces est donné dans la section 4.6.

Parmi les interfaces qu’on suppose, on a tout d’abord les multiensembles. Un multiensemble stocke des valeurs d’un type $d \in T$. En particulier, on suppose que l’interface du multiensemble contient :

- une fonction $\text{cons}_\text{mset}()$ qui renvoie un nouveau multiensemble vide ;
- une procédure $\text{add}_\text{mset}(\text{p}_\text{mset}, \text{elt})$ qui ajoute un élément $\text{elt}$ dans le multiensemble pointé par le pointeur $\text{p}_\text{mset}$ ;
- une procédure $\text{rem}_\text{mset}(\text{p}_\text{mset}, \text{elt})$ qui supprime un élément $\text{elt}$ du multiensemble pointé par le pointeur $\text{p}_\text{mset}$ ;
- une fonction $\text{size}_\text{mset}(\text{p}_\text{mset})$ qui renvoie la taille du domaine du multiensemble ;
- une fonction $\text{nth}_\text{mset}(\text{p}_\text{mset})$ qui renvoie le n-ième élément du domaine du multiensemble (on considère un ordre arbitraire fixé pour les valeurs dans un multiensemble) ;
- une fonction $\text{copy}_\text{mset}(\text{p}_\text{mset}, \text{p}'_\text{mset})$ qui copie le contenu du multiensemble pointé par $\text{p}_\text{mset}$ dans le multiensemble pointé par $\text{p}'_\text{mset}$ ;
- $\text{clear}_\text{mset}(\text{p}_\text{mset})$ qui supprime tous les éléments du multiensemble pointé par $\text{p}_\text{mset}$ ;
- une fonction $\text{notempty}_\text{mset}(\text{p}_\text{mset})$ qui renvoie $\text{true}$ si le multiensemble pointé par $\text{p}_\text{mset}$ est vide et $\text{false}$ sinon.

Chaque place est un conteneur de jetons qui est un multiensemble. L’interface d’une place est donc exactement celle d’un multiensemble mais n’est pas nécessairement réalisée avec la même structure de données que celui-ci. Nous verrons plus tard des implémentations spécifiques guidées par les optimisations (sec. 4.8).

On pourrait aussi ajouter une fonction qui renvoie le nombre d’occurrences d’un élément dans un multiensemble. Cela peut être utile pour lever la restriction sur les arcs d’entrée de transitions, supposés ensembles singletons de variables. Par exemple, pendant l’énumération d’une place pour récupérer deux jetons, si les indices de ces jetons sont égaux alors il faudrait vérifier que le nombre d’occurrences est supérieur à deux.
4. Compilation vers un langage de bas niveau

Pour différencier les réalisations des places de la réalisation d’un multien-
semble, on reprend la même interface avec les fonctions et procédures annotées
par le nom de la place, c’est-à-dire qu’au lieu de l’annotation \textit{mset} on utilisera
l’annotation \textit{s}, si la place est \textit{s}. Par exemple, \textit{add}_s est la fonction d’ajout de
jeton dans la place \textit{s}.

On suppose aussi une interface pour les marquages, elle contient :
– pour chaque place \textit{s}, une fonction \textit{get}_s(\textit{pmark}) qui renvoie un pointeur sur
la place correspondante ;
– une fonction \textit{copy}_\textit{mark}(\textit{pmark}) qui copie le marquage pointé par \textit{pmark}.

Finalement, la dernière interface est celle des ensembles de marquages et
contient :
– une fonction \textit{cons}_\textit{set}() qui construit un nouvel ensemble de marquages
vide ;
– une procédure \textit{add}(\textit{pset}, \textit{elt}) qui ajoute le marquage \textit{elt} à l’ensemble
pointé par \textit{pset} ;
– une fonction \textit{contains}(\textit{pset}, \textit{elt}) qui teste si le marquage \textit{elt} appartient à
l’ensemble pointé par \textit{pset}.

La fonction \textit{contains} n’est pas directement utilisée dans la bibliothèque générée
cependant, elle est nécessaire si on veut construire les espaces d’états par la
suite.

4.4 Réalisation des algorithmes

Dans cette section on présente la réalisation des fonctions nécessaires à
l’exploration : \textit{init}, \textit{succ}, \textit{fire}, et \textit{succ}.

4.4.1 Fonctions \textit{init} et \textit{succ}

La fonction \textit{init} renvoie le marquage initial du réseau de Petri compilé. Elle
crée un nouveau marquage puis ajoute des jetons afin d’obtenir le marquage
initial du réseau. On se limitera à un exemple de l’implémentation de cette
fonction car elle est triviale.

On considère une structure de marquage à deux places \textit{s}_1, \textit{s}_2 et le mar-
quage initial \(M = \{s_1 \mapsto \{1, 2\}, s_2 \mapsto \emptyset\}\). La fonction \textit{init} correspondante est
présentée sur la figure 4.2. Une version plus efficace consisterait à calculer la
représentation mémoire du marquage initial à la compilation et ne faire qu’une
copie d’un vecteur de bits, cependant cette approche sort de la sémantique
présentée ici. De plus, cette fonction n’est appelée qu’une seule fois au début
de l’exploration, l’optimisation n’aurait donc pas d’impact notable.

La fonction \textit{succ} renvoie l’ensemble de tous les marquages successeurs d’un
marquage. Intuitivement elle appelle toutes les fonctions \textit{succ}_t en agrégant
les marquages découverts dans un même ensemble. L’algorithme général de la
fonction \textit{succ} pour un réseau à \textit{n} transitions \(t_1, \ldots, t_n\) est présenté sur la figure
4.3. Le passage de l’algorithme 3.3 au code LLVM est évident.
4.4. Réalisation des algorithmes

\[ P(\text{init}) \equiv \left\{ \begin{array}{l}
// marquage vide\\
x_{mrk} = \text{fcall cons}_{mrk}()\\
// ajout des jeton 1 et 2 à \text{s}_1\\
x_{s_1} = \text{fcall get}_{s_1}(x_{mrk})\\
p\text{call add}_{s_1}(x_{s_1}, 1)\\
p\text{call add}_{s_1}(x_{s_1}, 2)\\
// renvoi du marquage produit\\
\text{ret } x_{mrk}
\end{array} \right. \]

Figure 4.2 – Un exemple de fonction init.

\[ P(\text{succ}) \equiv \left\{ \begin{array}{l}
x_{next} = \text{fcall cons}_{set}()\\
p\text{call succ}_{t_1}(x_{mrk}; x_{next})\\
p\text{call succ}_{t_2}(x_{mrk}; x_{next})\\
\ldots\\
p\text{call succ}_{t_n}(x_{mrk}; x_{next})\\
\text{ret } x_{next}
\end{array} \right. \]

Figure 4.3 – Calcul de tous les successeurs d’un marquage donc la structure est pointé par \( x_{mrk} \).

4.4.2 Tirage de transitions

Le tirage de transitions est réalisé en produisant une fonction de tir par transition. Soit \( t \in T \) une transition telle que \( ^*t = \{s_1, \ldots, s_n\} \) et \( t^* = \{s'_1, \ldots, s'_m\} \). La fonction \( \text{fire}_t \) calcule, pour un marquage \( M \) et un mode de la transition \( t \), le marquage successeur \( M' \) résultant du tir de \( t \). Le schéma général de cette fonction est présenté en figure 4.4 et est une traduction de l’algorithme 3.1. Cette fonction crée une copie \( M' \) du marquage \( M \), consomme les jetons des arcs en entrée correspondants aux variables \( x_1, \ldots, x_n \) et produit les jetons en utilisant les arcs sortants des transitions à l’aide des annotations \( f_{t,s_1'}, \ldots, f_{t,s'_m} \).

4.4.3 Calcul des Successeurs

La découverte de tous les modes d’une transition \( t \) est réalisée à l’aide d’une fonction \( \text{succ}_t \) spécifique à la transition \( t \). L’algorithme réalise une énumération de toutes les combinaisons de jetons possibles pour les places en entrée puis, si la garde de la transition est satisfaite, appelle une fonction \( \text{fire}_t \) spécifique à la transition qui va réaliser le tir effectif. Le marquage obtenu par le tir de la transition est ensuite ajouté à un ensemble de marquages. Ceci est réalisé par l’algorithme 3.2 et sa réalisation en LLVM est présentée en figure 4.5.

Remarquons que la garde \( g_t \) est réalisée dans le langage cible cela évite une interprétation de l’expression correspondante et permet de l’exécuter de
Figure 4.4 – Implémentation en LLVM de l'algorithme du tir de transition. Chaque variable $x_i$ est $ℓ(\ell_i, t)$ pour $1 ≤ i ≤ n$ et chaque $f_{t, s'j}$ est la fonction $ℓ(t, s'j)$ pour $1 ≤ j ≤ m$. Les accolades à droite indiquent des séquences produites plusieurs fois pour différentes valeurs de $i$ ou $j$.

Sémantique formelle de LLVM

Dans cette section on définit une sémantique formelle du fragment LLVM qu'on utilise. Pour cela on définit un modèle mémoire, puis un ensemble de règles d’inférences décrivant la sémantique opérationnelle, finalement on définit la notion d’interprétation des objets LLVM en termes de réseaux de Petri, ce qui est nécessaire pour les spécifications des interfaces et des algorithmes.

4.5.1 Modèle mémoire

Avant de donner une sémantique formelle à notre fragment LLVM, nous devons nous munir d’un modèle mémoire, cela inclut : des tas pour stocker les données allouées de manière dynamique (accessibles par les pointeurs), des piles pour stocker les variables locales et arguments de sous-programmes.
4.5. Sémantique formelle de LLVM

<table>
<thead>
<tr>
<th>Case</th>
<th>Definition</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1.</td>
<td>[ P(\text{succ}(x_{\text{mrk}}, x_{\text{next}})) ] = { br header_{t,n} ]</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>[ x_{sk} = \text{fcall get}<em>{sk}(x</em>{\text{mrk}}) ]</td>
</tr>
<tr>
<td>3.</td>
<td>[ s_{sk} = \text{fcall size}<em>{sk}(x</em>{sk}) ]</td>
</tr>
</tbody>
</table>
| 4.   | \[ P(\text{header}_{t,k}) \] = \{ \]
| 5.   | \[ i_{sk} = \phi(i_{sk}, \text{header}_{t,k}), (i'_{sk}, \text{footer}_{t,k}) \] |
| 6.   | \[ c_{sk} = \text{icmp}> (i_{sk}, 0) \] |
| 7.   | \[ P(\text{loop}_{t,k}) \] = \{ \]
| 8.   | \[ x_{sk} = \text{fcall nth}_{sk}(x_{sk}, i_{sk}) \] |
| 9.   | \[ c_{sk} = \text{body}_{t,k}, \text{footer}_{t,k+1} \] |
| 10.  | \[ P(\text{body}_{t,k}) \] = \{ \]
| 11.  | \[ i'_{sk} = \text{add} (i_{sk}, 1) \] |
| 12.  | \[ P(\text{body}_{t,0}) \] = \{ \]
| 13.  | \[ x'_{\text{mrk}} = \text{fcall fire}_{t}(x_{\text{mrk}}, x_{1}, \ldots, x_{n}) \] |
| 14.  | \[ \text{pcall add set}(x_{\text{next}}, x'_{\text{mrk}}) \] |
| 15.  | \[ \text{br} \] |
| 16.  | \[ P(\text{footer}_{t,0}) \] = \{ \]
| 17.  | \[ \text{ret} \] |
| 18.  | \[ P(\text{footer}_{t,n+1}) \] = \{ \]

**Figure 4.5 – Fonction successeur spécifique à une transition \( t \), pour \( 1 \leq k \leq n \).**

**Définition 4.1.** Un tas est une fonction partielle \( H : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{T} \times (\mathbb{D} \cup \mathbb{P} \cup \{\perp\})^* \) avec domaine fini. Chaque tas assigne à chaque pointeur dans son domaine un type et un tuple de valeurs ou pointeurs. L’ensemble de tous les tas est \( \mathbb{H} \). ◊

**Définition 4.2.** Un tas \( H \) est bien formé pour un couple \( (t, p) \) si la valeur \( p \) est consistante avec \( t \) dans \( H \), plus précisément :

- \( H \) est bien formé pour \( (t, p) \) tels que \( t \in \mathbb{T}_0 \) si \( p = \perp \) ou une valeur de type \( t \), par exemple si \( t \) est int alors \( p \) est un entier ou non défini ;
- \( H \) est bien formé pour \( (\text{struct}(t_0, \ldots, t_n), d) \) si \( d \) est un tuple \( (p_0, \ldots, p_n) \) et \( H \) est bien formé pour chaque \( (t_i, p_i) \) avec \( 0 \leq i \leq n \);
- \( H \) est bien formé pour \( (\text{ptr}(t), p) \) tels que \( t \in \mathbb{T} \) si \( p = \perp \) ou \( H(p) = (t, p') \) et \( H \) est bien formé pour \( (t, p') \);

Un tas \( H \) est bien formé si \( H \) est bien formé pour tout couple \( (t, p) \) de son domaine image. ◊

Remarquons que de part notre définition inductive de types (section 4.1.1) un tas bien formé n’a pas de pointeurs cycliques, et par conséquent les types récursifs sont interdits.
4. Compilation vers un langage de bas niveau

Définition 4.3. L’ensemble de tous les pointeurs accessibles à partir d’un pointeur $p$ dans un tas $H$ est dénoté par $p\downarrow H$ et défini pour tout $p$ dans $P$ par :

\[
\begin{align*}
p\downarrow H & \equiv \{\} & \text{si } p \notin \text{dom}(H) \\
p\downarrow H & \equiv \{p\} & \text{si } H(p) = (t, v) \text{ et } t \in T_0 \\
p\downarrow H & \equiv \{p\} \cup p_0\downarrow H & \text{si } H(p) = (\text{ptr}(t), p_0) \\
p\downarrow H & \equiv \{p\} \cup p_0\downarrow H \cup \cdots \cup p_n\downarrow H & \text{si } H(p) = (\text{struct}(t_0, \ldots, t_n), (p_0, \ldots, p_n))
\end{align*}
\]

On peut montrer que si un tas $H$ est bien formé alors $p\downarrow H \subseteq \text{dom}(H)$ pour tout $p \in \text{dom}(H)$, et plus généralement que $\text{dom}(H) = \bigcup_{p \in P} p\downarrow H$.

Proposition 4.1. Soit $H$ un tas bien formé. Si $p \in \text{dom}(H)$ alors $p\downarrow H \subseteq \text{dom}(H)$

Pour parcourir, ajouter et mettre à jour des données dans un tas, on définit une famille de fonctions de parcours et d’écriture.

Définition 4.4. Pour chaque tas $H$, on a une fonction de parcours $\vdash_H$. Chaque fonction $\vdash_H$ est une fonction partielle $\vdash_H : P \times T \rightarrow P \cup \emptyset$ définie par :

\[
p[i]_H = \begin{cases} 
p_i & \text{si } H(p) = (\text{struct}(t_0, \ldots, t_n), (p_0, \ldots, p_n)) \text{ et } 0 \leq i \leq n \\
\text{non défini sinon} & \end{cases}
\]

Définition 4.5. L’écriture (ou écrasement) de données dans le tas est réalisé avec la fonction $\oplus : H \times \mathbb{B} \rightarrow H$. L’objet calculé est un tas défini pour tout $p \in P$ par :

\[
(H \oplus H')(p) = \begin{cases} 
H'(p) & \text{si } p \in \text{dom}(H') \\
H(p) & \text{si } p \notin \text{dom}(H') \land p \in \text{dom}(H) \\
\text{non défini sinon} & \end{cases}
\]

Proposition 4.2. L’opération d’écrasement $\oplus$ est associative.

Remarquons que cette opération est clairement non commutative comme la notation $\oplus$ pourrait le suggérer.

Pour comparer les tas, une équivalence structurelle est définie. Cette relation permet de vérifier que deux tas contiennent les mêmes données, accessibles par différents pointeurs mais avec la même organisation. Plus précisément, pour deux tas $H, H'$ et deux pointeurs $p, p'$, on note $(H, p) \equivst (H', p')$ si $H(p)$ et $H'(p')$ sont structurellement équivalents.

Définition 4.6 (équivalence structurelle). Soit $H$ et $H'$ deux tas bien formés, $v$ et $v'$ deux valeurs ou pointeurs. On a $(H, v) \equivst (H', v')$ si $v \notin \text{dom}(H)$, $v' \notin \text{dom}(H')$ et $v = v'$ ; ou bien si :

- $H(v) = (\text{struct}(t_0, \ldots, t_n), (p_0, \ldots, p_n))$ ;
- $H'(v') = (\text{struct}(t_0, \ldots, t_n), (p_0', \ldots, p_n'))$ ;
- $(H, p_i) = (H', p'_i)$ pour $0 \leq i \leq n$.

4.5. Sémantique formelle de LLVM

Proposition 4.3. $\equiv_{st}$ est une relation d’équivalence.

On définit aussi une opération d’allocation mémoire sur les tas. Dans notre cas, on se place d’un point de vue fonctionnel qui consiste à renvoyer un nouveau tas à chaque allocation mémoire. On appelle cette fonction new, elle prend en argument un tas et un type puis renvoie un nouveau tas contenant la donnée allouée et un pointeur sur celle-ci.

Définition 4.7. La fonction new : $\mathbb{H} \times T \rightarrow \mathbb{H} \times \mathbb{P}$ est définie par :

\[
\text{new}(H, t) \overset{df}{=} (H \cup \{p \mapsto (t, \bot)\}, p) \\
\text{pour } t \in T_0 \text{ et } p \text{ un pointeur “frais”}
\]

\[
\text{new}(H, \text{ptr}(t)) \overset{df}{=} (H \cup \{p \mapsto (\text{ptr}(t), \bot)\}, p) \\
\text{pour } t \in T \text{ et } p \text{ un pointeur “frais”}
\]

\[
\text{new}(H, \text{struct}(t_0, \ldots, t_n)) \overset{df}{=} (H \cup \{p \mapsto (\text{struct}(t_0, \ldots, t_n), (\bot, \ldots, \bot))\}, p) \\
\text{pour } t_0, \ldots, t_n \in T \text{ et } p \text{ un pointeur “frais”}
\]

On peut montrer que new renvoie toujours un tas bien formé, et que appeler new de la même manière avec deux tas équivalents produit deux tas équivalents.

Proposition 4.4. Soit $H$ un tas bien formé, et $t$ un type. Si on a $(H', p) = \text{new}(H, t)$ alors $H'$ est un tas bien formé.

Proposition 4.5. Soient $H_1$, $H_2$ deux tas et $t$ un type. Dans ce contexte, on a $\text{new}(H_1, t) =_{st} \text{new}(H_2, t)$

Pour définir les appels aux sous-programmes, notre modèle mémoire a aussi besoin de définir des piles qui contiennent des frames qui seront empilés et dépilés de manière implicite par des règles d’inférence dans la sémantique.

Définition 4.8. Un frame est un tuple $F \in \mathbb{F} \overset{df}{=} L_\bot \times L \times \mathbb{B}$. Pour chaque frame $(l_{p,F}, l_{c,F}, \beta_F)$ on a :

- la première composante $l_{c,F}$ est l’étiquette du bloc dont on vient, elle est non définie au début du programme ;
- la seconde composante $l_{c,F}$ est l’étiquette du bloc courant, le bloc qu’on exécute actuellement ;
- finalement, la dernière composante $\beta_F$ est une LLVM-valuation correspondante au contexte courant d’évaluation.

On élargit la notation fonctionnelle des valuations aux frames pour noter $F(x)$ l’application de $x$ à la valuation $\beta_F$, c’est-à-dire $\beta_F(x)$.

Pour alléger les notations on va toujours noter pour un frame $F : l_{p,F}$ sa première composante, $l_{c,F}$ sa deuxième composante et $\beta_F$ sa troisième composante.

De la même manière que pour les tas nous avons besoin de lire la pile et mettre à jour les frames. On réutilise donc l’opérateur $\oplus$ pour cette opération puisqu’elle est similaire à la mise à jour des tas.

Définition 4.9. L’écriture (ou écrasement) pour les valuations est réalisée par la fonction $\oplus : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$, la même opération mais pour les frames est
réalisée par la fonction $\oplus : \mathbb{F} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{F}$. Ces deux fonctions sont définies par :

$$
(\beta \oplus \beta')(p) \equiv \begin{cases} 
\beta'(p) & \text{si } p \in \text{dom}(\beta') \\
\beta(p) & \text{si } p \notin \text{dom}(\beta') \land p \in \text{dom}(\beta) \\
\text{non défini sinon}
\end{cases}
$$

$$
(l, l', \beta) \oplus \beta' \equiv (l, l', \beta \oplus \beta')
$$

L'équivalence structurelle (def. 4.6) peut être étendue aux paires de tas et frames, on note cette relation par $(H, F) =_{st} (H', F')$ pour deux tas $H, H'$ et deux frames $F, F'$. Intuitivement, on vérifie que toutes les données accessibles depuis les valuations des frames sont structurellement équivalentes. Cela doit aussi être vrai pour les valeurs stockées directement dans les valuations qui ne sont pas des pointeurs, puisque l'équivalence structurelle de tas correspond à l'égalité sur $\mathbb{D}$.

**Définition 4.10.** Soient $H, H'$ deux tas et soient $F, F'$ deux frames. On a $(H, F) =_{st} (H', F')$ si et seulement si :

- pour tout $x \in \text{dom}(\beta_F)$, on a $x \in \text{dom}(\beta_{F'})$ et $(H, x) =_{st} (H', x)$;
- pour tout $x' \in \text{dom}(\beta_{F'})$, on a $x' \in \text{dom}(\beta_F)$ et $(H, x') =_{st} (H', x')$.

**Proposition 4.6.** La relation $=_{st}$ avec frames est une relation d'équivalence.

4.5.2 Règles d’inférence

La sémantique opérationnelle est définie pour un programme $P$ fixé et immuable. Cela veut dire que aucune fonction, ni bloc ne peuvent être créés ou modifiés pendant l'exécution. On dénote le résultat d’un calcul par $\Rightarrow$, par exemple $2 + 3$ est 5. Les objets le plus manipulés dans notre système de règles d'inférences sont des configurations qui représentent un état du programme pendant son exécution.

**Définition 4.11.** Une configuration est un tuple $(\text{seq}, H, F)$, qu’on note par $(\text{seq})_{H,F}$, où seq est une séquence d'instruction, $H$ un tas et $F$ un frame.

Les règles d'inférence pour les expressions sont présentées à la figure 4.6 et sont évaluées comme des valeurs dans le contexte d’un frame. Les règles d’inférence pour les séquences et les commandes sont données sur la figure 4.7, les séquences et les commandes sont évaluées vers d'autres séquences et commandes dans le contexte d’un tas et d’un frame.

On peut remarquer comment les frames sont empilés sur la pile dans les règles $pcall$ et $fcall$, un nouveau frame $F_0$ remplace le frame courant $F$ dans les prémisses de ces règles. Ce nouveau frame est utilisé pour exécuter le corps du sous-programme appelé. La sémantique mélange les réductions à petit- et grand-pas. En effet, la plupart des règles sont définies avec des réductions à petit-pas sauf les règles $pcall$ et $fcall$ où l’appel du sous-programme est directement lié au résultat du calcul de son corps, ce qui est réalisé par une séquence de réduction dans la prémisses de la règle.
4.5. Sémantique formelle de LLVM

\[
F(x) = p \quad H(p) = (t, v) \quad \text{load} \quad F(x) = p \quad p[i]_H \text{ défini} \quad \text{gep}_0
\]

\[
F(x_1) + F(x_2) = v \quad \text{add} \quad (H', p) = \text{new}(H, t) \quad \text{alloc}
\]

\[
F(x) \quad \text{add} \quad F(x_1) \quad \text{op} \quad \text{add} \quad \text{icmp}
\]

\[
\phi(x_1, t_1), \ldots, (x_n, t_n) \quad \text{phi}
\]

\[
f(a_1, \ldots, a_n) \in \text{dom}(P) \quad F_0 = (\perp, f(a_1, \ldots, a_n), \{a_1 \mapsto F(r_1), \ldots, a_n \mapsto F(r_n)\}) \quad \text{fcall}
\]

\[
\text{pcall}(F(r_1), \ldots, r_n) \quad \text{pcall}
\]

\[
\text{assign}
\]

\[
F(r_n) = p \quad H(p) = (t, d) \quad H' = \{p \mapsto (t, F(r_{\text{new}}))\} \quad \text{store}
\]

Figure 4.6 – Règles pour les expressions.

Figure 4.7 – Règles pour les séquences et les commandes.
Exemple d’utilisation de la sémantique

Pour mettre en pratique les règles d’inférence de la sémantique on considère le programme suivant.

\[
P(f\{x_1\}) \overset{\triangleq}{=} \begin{cases} 
x_2 = icmp \ <, \ x_1, \ 2 \\
\text{ret} \ x_2 
\end{cases} \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \cdot
la compare avec 2 (on rappelle que la valuation d’un frame est l’identité pour les constantes).

\[
\begin{align*}
F(x_1) < F(2) &= \text{false} \\
( \text{icmp} <, x_1, 2 )_\emptyset, F_0 \leadsto ( \text{false } )_\emptyset \\
( x_2 = \text{icmp} <, x_1, 2 )_\emptyset, F_0 \leadsto ( \text{skip } )_\emptyset, F_0 \oplus \{ x_2 \mapsto \text{false} \} \\
( x_2 = \text{icmp} <, x_1, 2; \text{ret } x_2 )_\emptyset, F_0 \leadsto ( \text{ret } x_2 )_\emptyset, F_0 \oplus \{ x_2 \mapsto \text{false} \}
\end{align*}
\]

Pour finir la réduction on applique les règles \textit{skip} et \textit{ret} sur le redex du sous-programme.

\[
\begin{align*}
( \text{skip; ret } x_2 )_\emptyset, F_0 \oplus \{ x_2 \mapsto \text{false} \} \leadsto ( \text{ret } x_2 )_\emptyset, F_0 \oplus \{ x_2 \mapsto \text{false} \}
\end{align*}
\]

Finalement, on arrive à la valeur \text{false} dans le contexte d’un tas vide : l’utilisation de la règle \textit{fcall} ci-dessus était légal.

4.5.3 Interprétation des structures de données

Le lien entre le réseau de Petri et son implémentation en LLVM est formalisé avec une famille de fonctions d’interprétation pour toutes les structures de données. Cela permet d’une part de faire un lien entre les deux mondes, nécessaire aux preuves de correction, et d’autre part de formaliser les prérequis comportementaux des interfaces présentées dans la section 4.6.

Définition 4.12. Une interprétation est une fonction partielle qui associe une paire formée d’un tas et d’un pointeur à un objet de l’univers des réseaux de Petri : un marquage, un ensemble de marquages, un multiensemble de jetons, un jeton. Les interprétations sont notées $\llbracket H, p \rrbracket^*$, où $H \in \mathbb{H}$, $p \in \mathbb{P} \cup \mathbb{D}$ et * est une annotation qui décrit l’objet interprété. De plus chaque fonction d’interprétation doit respecter les deux prérequis 4.1 et 4.2.

Prérequis 4.1. Soit $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket^*$ une fonction d’interprétation, $H$ un tas, et $p$ un pointeur. Le résultat de l’interprétation $\llbracket H, p \rrbracket^*$ dépend seulement des données accessibles à partir de $p$, i.e., $p_{=H}$.

Prérequis 4.2. Soit $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket^*$ une fonction d’interprétation, $H, H'$ deux tas, et $p, p'$ deux pointeurs ou valeurs. Si $(H, p) =_{st} (H', p')$ alors $\llbracket H, p \rrbracket^* = \llbracket H', p' \rrbracket^*$.

Il faut retenir de la définition 4.12 que le résultat d’une fonction d’interprétation dépend du contexte dans lequel elle est utilisée. Par exemple, si on utilise l’annotation $\textit{mset}(t)$ à la place de * alors l’interprétation $\llbracket H, p \rrbracket^{\textit{mset}(t)}$ renvoie un multiensemble d’objets de type $t$, pour un pointeur $p$ et un tas $H$. Pour cela il faut évidemment que le pointeur $p$ pointe un multiensemble d’objets de type $t$ dans le tas $H$.

Comme présenté dans la section 4.4, on utilise des structures de données et des fonctions comme blocs de base pour construire nos algorithmes. Ils sont
soit prédéfinis soit produits par le processus de compilation. Chacune de ces fonctions et structures de données est spécifiée (plus précisément, axiomatisée) par une interface formelle. En particulier, cela permet de rester indépendant et modulaire vis-à-vis des composants à la fois sur le plan formel mais aussi par rapport à l’implémentation. Spécifier une interface mène à la définition d’un ensemble de primitives qui respectent des dérivations et des interprétations dans notre sémantique. Par exemple, si $H$ est un tas et $F$ un frame, tels que $F(x_{mset}) = p_{mset}$ est un pointeur sur une structure de multiensemble qui stocke des éléments de type $t$, alors la procédure $add_{mset}$ est spécifiée par :

$$
\begin{align*}
(\ pcall \ add_{mset}(x_{mset},x) \ )_{H,F} & \leadsto (\ skip \ )_{H \oplus H',F} \\
\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') & \subseteq p_{mset} \downarrow H
\end{align*}
$$

$[H \oplus H',p_{mset}]^{mset}(t) = [H,p_{mset}]^{mset}(t) + \{[H,F(x)]\}^t$.

La première condition décrit le résultat de la réduction de l’appel à la procédure, la deuxième condition est une restriction sur les modifications du tas limitant les effets de bord, et la troisième condition interprète le calcul en termes d’objets de l’univers des réseaux de Petri.

Les différentes implémentations des structures de marquage quant à elles doivent respecter les deux prérequis 4.3 et 4.4.

**Prérequis 4.3 (cohérence).** Soient $H,H'$ deux tas bien formés, $F,F'$ deux frames, $p_{mark} \in \text{dom}(H)$ un pointeur vers une structure de marquage et $p_s$ un pointeur sur une place accessible à partir de $p_{mark}$ (i.e., $p_s \in p_{mark} \downarrow H$). Si $[H,p_{mark}]^{mark}(s) = [H,p_s]^s$, $(\ seq \ )_{H,F} \leadsto (\ seq' \ )_{H \oplus H',F}$, et $p_{mark} \notin \text{dom}(H')$ alors $$[H \oplus H',p_{mark}]^{mark}(s) = [H \oplus H',p_s]^s$$

**Prérequis 4.4 (séparation).** Soit $p_{mark}$ un pointeur sur une structure de marquage dans un tas $H$ bien formé. Si $p_s$ et $p'_s$ sont des pointeurs sur des places distinctes dans cette structure alors on a $p_s \downarrow H \cap p'_s \downarrow H = \emptyset$.

Le prérequis 4.3 assure que chacune des modifications d’une place $s$ à travers un pointeur $p_s$ renvoyé par $get_s$ sera reflétée sur la structure de marquage (et non une copie). Le prérequis 4.4 assure que les places dans une structure de marquage ne partagent pas de mémoire, par conséquent la modification d’une place ne modifiera aucune autre place de cette structure. Ce dernier prérequis permet donc de contrôler les effets de bord sur les modifications de places. L’ensemble des spécifications est donné dans la section 4.6. Une réalisation complète d’une structure de marquage est donné en annexe A.1.

### Interfaces formelles

Cette section détaille l’ensemble des interfaces utilisées ainsi que leur axiomatisation. On aborde les multiensembles, les places, les marquages et les ensembles de marquages. Dans l’ensemble de la section on pose $F$ un frame et
4.6. Interfaces formelles

Un tas. Toutes les spécifications sont données dans des contextes minimaux. Elles pourront être généralisées par la suite grâce au théorème d’extensionnalité présenté dans la section 4.7.

4.6.1 Interface des multiensembles

On suppose qu’on dispose d’une implémentation correcte de multiensembles pour tout type de données $t$ d’interprétation $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$. Chaque structure de multiensemble définie pour le type $t$ a pour type $\text{mset}(t)$ et la fonction d’interprétation de cette structure sera notée $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket^{\text{mset}(t)}$. Soit $x_{\text{mset}}$ une variable, $p_{\text{mset}}$ un pointeur sur une structure de multiensemble de type $\text{mset}(t)$ et $x$ une variable ou une valeur telles que $F(x_{\text{mset}}) = p_{\text{mset}}$ et $F(x)$ soit de type $t$. Chacune des fonctions de l’interface est spécifiée comme suit :

1. La fonction $\text{cons}_{\text{mset}}$ construit un multiensemble vide :

   $$\text{fcall cons}_{\text{mset}}() \llbracket H, p_{\text{mset}} \rrbracket^{\text{mset}(t)} = \emptyset$$

2. La procédure $\text{add}_{\text{mset}}$ ajoute un élément au multiensemble :

   $$\text{pcall add}_{\text{mset}}(x_{\text{mset}}, x) \llbracket H, F \rrbracket^{\text{mset}(t)} = \llbracket H \oplus H', F \rrbracket$$

   $$\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') \subseteq p_{\text{mset}} \downarrow H$$

   $$\llbracket H \oplus H', p_{\text{mset}} \rrbracket^{\text{mset}(t)} = \llbracket H, p_{\text{mset}} \rrbracket^{\text{mset}(t)} + \{\llbracket H, F(x) \rrbracket\}$$

La deuxième équation décrit le comportement de la fonction sur le tas, tous les pointeurs sur les données modifiées sont localisés dans $p_{\text{mset}} \downarrow H$, et donc seule la structure de multiensemble a donc été modifiée, le reste du tas demeure inchangé.

3. La procédure $\text{rem}_{\text{mset}}$ supprime un élément du multiensemble :

   $$\text{pcall rem}_{\text{mset}}(x_{\text{mset}}, x) \llbracket H, F \rrbracket^{\text{mset}(t)} = \llbracket H \oplus H', F \rrbracket$$

   $$\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') \subseteq p_{\text{mset}} \downarrow H$$

   $$\llbracket H \oplus H', p_{\text{mset}} \rrbracket^{\text{mset}(t)} = \llbracket H, p_{\text{mset}} \rrbracket^{\text{mset}(t)} - \{\llbracket H, F(x) \rrbracket\}$$

4. La fonction $\text{size}_{\text{mset}}$ renvoie la taille du domaine du multiensemble :

   $$\text{fcall size}_{\text{mset}}(x_{\text{mset}}) \llbracket H, F \rrbracket = \text{card}(\text{dom}(\llbracket H, p_{\text{mset}} \rrbracket^{\text{mset}(t)}))$$

5. La fonction $\text{nth}_{\text{mset}}$ renvoie le $i$-ème élément du domaine du multiensemble ou, selon l’implémentation choisie, un pointeur sur cet élément (pour l’ordre arbitraire préalablement fixé) :

   $$\text{fcall nth}_{\text{mset}}(x_{\text{mset}}, i) \llbracket H, F \rrbracket = (p_i)$$

   $$\llbracket H, p_{\text{mset}} \rrbracket^{\text{mset}(t)} = \{x_1 \mapsto k_1, \ldots, x_n \mapsto k_n\}$$

   $$\llbracket H, p_i \rrbracket = x_i$$
4. Compilation vers un langage de bas niveau

6. La procédure $\text{copy}_{\text{mset}}$ copie le contenu d'un premier multisétenant dans un second multisétenant, pour $x_{\text{mset}}$ une variable, $p'_{\text{mset}}$ un pointeur sur une structure de multisétenant de type $\text{mset}(t)$ et $F(x'_{\text{mset}}) = p'_{\text{mset}}$ :

$$\begin{align*}
(p \text{call } \text{copy}_{\text{mset}}(x_{\text{mset}}, x'_{\text{mset}}))_{H,F} &\rightsquigarrow (\text{skip})_{H \oplus H', F} \\
\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') &\subseteq p'_{\text{mset}} \downarrow H \\
[H, p_{\text{mset}}]_{\text{mset}(t)}^t &\equiv [H \oplus H', p_{\text{mset}}]_{\text{mset}(t)}^t
\end{align*}$$

7. La procédure $\text{clear}_{\text{mset}}$ prend en argument un pointeur sur une structure de multisétenant et vide ce multisétenant :

$$\begin{align*}
(p \text{call } \text{clear}_{\text{mset}}(x_{\text{mset}}))_{H,F} &\rightsquigarrow (\text{skip})_{H \oplus H', F} \\
\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') &\subseteq p_{\text{mset}} \downarrow H \\
[H \oplus H', p_{\text{mset}}]_{\text{mset}(t)}^t &\equiv \emptyset
\end{align*}$$

8. La fonction $\text{notempty}_{\text{mset}}$ renvoie true si le multisétenant n’est pas vide et false sinon :

$$\begin{align*}
(f \text{call } \text{notempty}_{\text{mset}}(x_{\text{mset}}))_{H,F} &\rightsquigarrow (\text{card}(\text{dom}([H, p_{\text{mset}}]_{\text{mset}(t)}^t)) \neq \emptyset)_{H}
\end{align*}$$

4.6.2 Interface des places

Comme précisé dans la section 4.5, une place est un multisétenant de jetons et s’occupe de la façon dont ils sont stockés. On peut donc l’implémenter par un multisétenant et garder la même spécification. Pour différencier les places des multisènants on annote l’interprétation d’une place $s$ par son nom. La fonction d’interprétation de la place est donc $[\cdot, \cdot]_s$. On note $[\cdot, \cdot]^{t(s)}_s$ l’interprétation de la structure qui encode un jeton contenu dans cette place, il s’agit de la même fonction que $[\cdot, \cdot]^{t}$ dans la sous-section précédente.

Remarquons que dans certains cas il est beaucoup plus intéressant de ne pas utiliser l’implémentation par défaut de multisènants mais de fournir une implémentation spécifique, il s’agit d’une optimisation réalisée au moment de la compilation.

4.6.3 Interface des marquages

Chaque structure de marquage est un conteneur de places, son rôle est de les stocker et de permettre d’y accéder. Dans notre approche la structure de marquage délégue le stockage des jetons aux places.

Soit $x_{\text{mark}}$ une variable et $p_{\text{mark}}$ un pointeur sur une instance de la structure de marquage tels que $F(x_{\text{mark}}) = p_{\text{mark}}$ et sa fonction d’interprétation soit $[\cdot, \cdot]_{\text{mark}}$. Dans ce contexte, pour un tas $H$ on dira que $p_s$ est un pointeur sur une place de cette structure, s’il existe une place $s$ d’interprétation $[\cdot, \cdot]_s$, telle que $[H, p_{\text{mark}}]_{\text{mark}}(s) = [H, p_s]_s$ et $p_s \in p_{\text{mark}} \downarrow H$.

On dira qu’une structure de marquage est bien définie si elle fournit les éléments suivants et satisfait leur spécification.
4.6. Interfaces formelles

1. Elle fournit une famille de fonctions $\text{get}_s$ définie pour chaque place $s$ du marquage, telles que

$$
(\text{fcall get}_s(x_{\text{mrk}}))_{H,F} \rightarrow (p_s)_H
$$

$$p_s \downarrow_{H} p_{\text{mrk}} \downarrow_{H}
$$

$$[H,p_{\text{mrk}}]_{\text{mrk}}(s) = [H, p_s]^s
$$

Intuitivement, chaque fonction $\text{get}_s$ renvoie un pointeur sur la place $s$ de la structure de marquage ;

2. Une fonction $\text{copy}_{\text{mrk}}$ qui copie un marquage et renvoie le pointeur correspondant, telle que

$$
(\text{fcall copy}_{\text{mrk}}(x_{\text{mrk}}))_{H,F} \rightarrow (p'_{\text{mrk}})_{H \oplus H'}
$$

$$\text{dom}(H') \cap \text{dom}(H) = \emptyset
$$

$$p'_{\text{mrk}} \in \text{dom}(H')
$$

$$[H,p_{\text{mrk}}]_{\text{mrk}} = [H \oplus H',p_{\text{mrk}}]_{\text{mrk}} = [H \oplus H',p'_{\text{mrk}}]_{\text{mrk}}
$$

3. Une fonction $\text{cons}_{\text{mrk}}$ qui renvoie une structure de marquage vide, telle que

$$
(\text{fcall cons}_{\text{mrk}}())_{\emptyset,F} \rightarrow (p_{\text{mrk}})_{H}
$$

$$[H,p_{\text{mrk}}]_{\text{mrk}} = \emptyset
$$

De plus chaque structure de marquage doit vérifier les deux propriétés mentionnées dans la section 4.5.3 :

- la propriété de cohérence qui assure que lorsqu’on fait des modifications sur une place à l’aide d’un pointeur retourné par $\text{get}_s$ alors ces changements sont reflétés sur le marquage ;

- la propriété de séparation qui assure que lorsqu’on modifie une place du marquage ces modifications n’ont pas d’effet de bord sur les autres places, ce qui est garanti par l’absence de partage de mémoire entre places.

Un marquage simple peut être implémenté avec une structure qui contient des pointeurs sur des places. Le type de cette structure est $\text{struct}(t_{s_0}, \ldots, t_{s_n})$ où $t_{s_i}$ est le type de la $i$-ième place (la place $s_i$). Cette implémentation ainsi que les preuves de validité sont données dans l’annexe A.1.

4.6.4 Interface des ensembles de marquages

Une structure pour contenir des marquages est nécessaire afin de calculer les espaces d’états. Cette structure a pour type $\text{set}(\text{mrk})$ où $\text{mrk}$ est le type du marquage. Comme on n’a qu’un seul type de structure de marquage dans un programme l’argument $\text{mrk}$ est omis. L’interface que doit respecter la spécification qui suit. Elle doit fournir :

1. Une fonction $\text{cons}_{\text{set}}$ qui crée un nouvel ensemble vide de marquages et renvoie le pointeur correspondant, telle que

$$
(\text{fcall cons}_{\text{set}}())_{\emptyset,F} \rightarrow (p_{\text{set}})_{H}
$$

$$[H,p_{\text{set}}]_{\text{set}} = \emptyset
$$
2. Une procédure $\text{add}_\text{set}$ telle que si $p_{\text{mrk}}$ est un pointeur sur une structure de marquage et $p_{\text{set}}$ un pointeur sur un ensemble de marquages alors

\[
\begin{align*}
(p\text{call } \text{add}_\text{set}(\text{set}, p_{\text{mrk}}))_{H,F} & \leadsto \text{skip }_{H\oplus H',F} \\
\text{dom}(H') \cap \text{dom}(H) & \subseteq \text{set}_H \\
[H \oplus H', \text{set}]^\text{set} & = [H', \text{set}]^\text{set} = [H, \text{set}]^\text{set} \cup \{[H, p_{\text{mrk}}]^{\text{mrk}}\}
\end{align*}
\]

Intuitivement, cette fonction ajoute le marquage pointé par $p_{\text{mrk}}$ à l'ensemble pointé par $p_{\text{set}}$.

4.7 Résultats théoriques

Dans cette section, on présente les résultats principaux sur la sémantique. Le théorème de correction des fonctions $\text{fire}_t$, le théorème de correction des fonctions $\text{succ}_t$, ainsi que les théorèmes de correction des fonctions $\text{init}$ et $\text{succ}$.

4.7.1 Théorème d'extensionnalité

Le théorème d'extensionnalité permet de considérer les différentes séquences de réductions dans des contextes minimaux, puis les généraliser à des contextes plus riches. L'énoncé du théorème est long parce que nous devons adresser les expressions et les commandes simultanément.

**Théorème 4.7 (extensionnalité).** Soient $\text{seq}, \text{seq}'$ des séquence d'instructions, $v'$ une valeur, $H, H'$ des tas et $F, F'$ des frames. Dans ce contexte, si

\[
\begin{align*}
(\text{seq})_{H,F} & \leadsto^* (v')_{H\oplus H'} \quad \text{ou, resp.,} \\
(\text{seq})_{H,F} & \leadsto^* (\text{seq}')_{H\oplus H',F'}
\end{align*}
\]

et si pour tout tas $H_0$ et toute valuation $\beta_0$ telle que

(i) $\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H_0) = \emptyset$

(ii) $\text{dom}(\beta_F) \cap \text{dom}(\beta_0) = \emptyset$

(iii) toute variable assignée dans $\text{seq}$ (ou un de ses redex) n'est pas dans $\text{dom}(\beta_0)$

alors on peut réaliser la même réduction dans un environnement élargi par le tas $H_0$ et le frame $\beta_0$, i.e. :

\[
\begin{align*}
(\text{seq})_{H_0\oplus H,F_0\oplus \beta_0} & \leadsto^* (v'')_{H_0\oplus H''} \\
\text{ou, resp.,} & \\
(\text{seq})_{H_0\oplus H,F_0\oplus \beta_0} & \leadsto^* (\text{seq}')_{H_0\oplus H',F'_0\oplus \beta_0}
\end{align*}
\]

avec $v''$ une valeur, $H''$ un tas et $F''$ un frame tels que :

\[
\text{dom}(H_0) \cap \text{dom}(H'') = \emptyset
\]

(4.1)
4.7. Résultats théoriques

\[ \forall p \in \text{dom}(H), \quad (H', p) =_{st} (H'', p) \]  
\[ (H \oplus H', v') =_{st} (H \oplus H'', v'') \]  
ou, respectivement, (4.1), (4.2) et  
\[ (F', H') =_{st} (F'', H'') \]  
\[ \text{dom}(\beta_0) \cap \text{dom}(\beta_{F''}) = \emptyset \]  
\[ \text{dom}(\beta_{F'}) = \text{dom}(\beta_{F''}) \]

Intuitivement, l’équation (4.1) garantit qu’on ne modifie pas le tas \( H_0 \), c’est-à-dire que l’évaluation de la séquence n’a pas d’effets de bords. L’équation (4.2) garantit que les modifications sur \( H' \) et \( H'' \) ont été réalisées de la même manière durant les réductions, c’est-à-dire que chaque structure accessible depuis \( H \) a subit les mêmes modifications dans les deux tas. Les équations (4.3) et (4.4) garantissent que les réductions produisent le même calcul. L’équation (4.5) garantit que l’on n’écrase pas les variables dans le frame, LLVM étant en forme SSA (Single Static Assignment) qui implique que chaque assignation introduit une nouvelle variable. L’équation (4.6) garantit que les variables ajoutées dans les frames sont les mêmes. La preuve de ce théorème est donnée en section 5.1.

La correction de la fonction \( \text{init} \) est donnée par le théorème 4.8, celle de la fonction \( \text{succ} \) par le théorème 4.9.

**Théorème 4.8.** La fonction \( \text{init} \) est correcte et termine, i.e., Si \( M \) est le marquage initial, \( F \) un frame alors  
\[ (\text{fcall init}()) \circ_{F} \rightsquigarrow (p_{\text{mrk}})_{H} \quad \text{et} \quad [H, p_{\text{mrk}}]^{\text{mrk}} = M \]

\( \square \)

**Théorème 4.9.** La fonction \( \text{succ} \) est correcte et termine, i.e., Si \( M \) est un marquage et set l’ensemble de tous les marquages successeurs, alors pour un tas \( H \), un frame \( F \), \( x_{\text{mrk}} \) une variable et \( p_{\text{mrk}} \) un pointeur sur une structure de marquage tels que \( F(x_{\text{mrk}}) = p_{\text{mrk}} \) et \([H, p_{\text{mrk}}]^{\text{mrk}} = M \) on a :  
\[ (\text{fcall succ}(x_{\text{mrk}}))_{H, F} \rightsquigarrow (p_{\text{set}})_{H \oplus H'} \]
\[ \text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') = \emptyset \]
\[ [H \oplus H', p_{\text{set}}]^{\text{set}} = \text{set} \]

\( \square \)
4. Compilation vers un langage de bas niveau

4.7.2 Correction des fonctions d’exploration

La correction de la fonction de tir d’une transition $t$ est donnée par le Théorème 4.10. Ce théorème est prouvé en utilisant deux lemmes montrant respectivement la correction de l’étape de consommation de jetons et la correction de l’étape de production de jetons. Les deux sont prouvés par induction sur le nombre de places dans la structure de marquage. Ces lemmes et les preuves sont données dans la section 5.2. Le corollaire 4.11 donne la terminaison de cette fonction.

**Théorème 4.10.** Soient $M$ un marquage, $H$ un tas et $p_{mrk}$ un pointeur sur une structure de marquage telle que $\text{dom}(H) = p_{mrk} \downarrow H$ et $[H, p_{mrk}]^{mrk} = M$. Soit $\beta \equiv \{ x_1 \mapsto v_1, \ldots, x_n \mapsto v_n \}$ un mode de la transition $t$, ce qui implique que chaque $v_i$ est une valeur ou un pointeur qui encode un jeton d’une place $s_i$ (i.e., $[H, v_i]_{t(s_i)} \in M(s_i)$). Soit $F$ un frame tel que $\beta_F \equiv \beta \oplus \{ x_{mrk} \mapsto p_{mrk} \}$

Si $M[t, \beta] M'$ et $(\text{fcall} \: \text{fire}_t(x_{mrk}, x_1, \ldots, x_n))_{H,F} \rightsquigarrow (p'_{mrk})_{H \oplus H'}$ alors $[H \oplus H', p'_{mrk}]^{mrk} = M'$ et $\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') = \emptyset$

**Corollaire 4.11.** Sous les mêmes hypothèses, l’appel à $\text{fire}_t$ termine. □

Le dernier théorème présenté ici est le théorème 4.12 qui donne la correction de la fonction successeur spécifique aux transitions. La preuve de ce théorème est réalisée par double inclusion en analysant les interfaces formelles des fonctions appelées. Le détail est donné dans la section 5.3. Le corollaire 4.13 donne la terminaison de cette fonction.

**Théorème 4.12.** Soient $F$ un frame et $p_{mrk}$ un pointeur sur le tas $H$ tel que $p_{mrk} \downarrow H = \text{dom}(H)$, $[H, p_{mrk}]^{mrk} = M$, $\beta_F(x_{mrk}) = p_{mrk}$ et $\beta_F(x_{next}) = p_{next}$. Si

$(\text{fcall} \: \text{succ}_t(x_{mrk}, x_{next}))_{H,F} \rightsquigarrow^* (p_{next})_{H \oplus H'}$ et $[H, p_{next}]^{set} = E$

où $E$ est un ensemble de marquages, alors

$\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') = \emptyset$

$[H \oplus H', p_{next}]^{set} = E \cup \{ M' | \exists \beta, M[t, \beta] M' \}$

**Corollaire 4.13.** Sous les mêmes hypothèses, l’appel à $\text{succ}_t$ termine. □

4.8 Réalisation des optimisations

Cette section reprend les optimisations de la section 3.3. Pour chacune d’elles on propose une réalisation en LLVM. Ce travail a été réalisé essentiellement pour mettre en avant l’aspect flexible du cadre LLVM qu’on a défini dans ce chapitre. Dans les trois cas, on s’intéresse aux places 1-bornées qui ont la propriété de contenir au plus un seul jeton dans tous les marquages accessibles depuis le marquage initial. Les preuves de ces optimisations sont données dans la section 5.4.
4.8. Réalisation des optimisations

4.8.1 Optimisation de calcul de modes

Pour un marquage $M$, et une transition $t$ telle que $s_1, \ldots, s_n$ sont ses places en entrée, c’est-à-dire $\ell(s_i, t) = x_i$, pour $1 \leq i \leq n$. Supposons que la place $s_k$ est 1-bornee, avec $1 \leq k \leq n$, alors on peut remplacer la $k$-ème boucle de l’algorithme du calcul des marquages successeurs par un simple test. Cela a été présenté en section 3.3.

Les changements au niveau de l’implémentation LLVM de cette optimisation sont minimes, en effet, il suffit de remplacer par les quatre blocs présentés sur la figure 4.8, les blocs correspondants de l’algorithme 4.5. Bien évidemment, puisqu’on change l’algorithme du calcul des marquages successeurs d’une transition, il faut de nouveau prouver le théorème 4.12, ce qui est fait dans la section 5.4.1.

\[
\begin{align*}
P(\text{header}_k) & \equiv \{ x_{pq_k} = \text{fcall get}_{q_k}(x_{pM}) \} \\
& \quad \{ \text{br loop}_k \}
\end{align*}
\]

\[
\begin{align*}
P(\text{loop}_k) & \equiv \{ c_{q_k} = \text{fcall notempty}(x_{pq_k}) \} \\
& \quad \{ \text{br c}_{q_k}, \text{body}_k, \text{footer}_{k+1} \}
\end{align*}
\]

\[
\begin{align*}
P(\text{body}_k) & \equiv \{ x_k = \text{fcall nth}_{q_k}(x_{pq_k}, 1) \} \\
& \quad \{ \text{br header}_{k-1} \}
\end{align*}
\]

\[
\begin{align*}
P(\text{footer}_k) & \equiv \{ \text{br footer}_{k+1} \}
\end{align*}
\]

Figure 4.8 – Nouveaux blocs de succi spécifiques à une place $s_k$ 1-bornee.

4.8.2 Optimisation d’ordre des énumérations

Lorsqu’on a réalisé la fonction $\text{succ}$, on a considéré un ordre arbitraire sur les variables afin de les énumérer. L’ordre des boucles n’a donc pas d’incidence sur la correction de l’algorithme. Cependant, considérer certaines places avant d’autres permet de gagner en performances [56]. L’optimisation consiste à définir un ordre particulier afin d’énumérer en priorité les places 1-bornees, puis celles dont les types comportent peu d’éléments, et enfin les autres. Comme l’ordre était initialement arbitraire, ce choix n’a pas besoin d’être prouvé et les gains seront mis en évidence pendant les tests de performances.

4.8.3 Optimisation d’une structure de données

Ici on s’intéresse à remplacer une structure de données par une autre. La clef de voûte de cette optimisation est le respect des interfaces, car alors, les algorithmes qu’on a prouvés corrects sont préservés. En effet, ils ne font aucune supposition à propos des structures de données autre que le respect des interfaces (et de leur axiomatisation).

La réalisation de cette optimisation n’est visible qu’au niveau LLVM, et consiste à remplacer la structure qui encode une place $s$ 1-bornee de type jeton-noir. L’implémentation de la nouvelle structure de données pour la place
4. Compilation vers un langage de bas niveau

$s$ est présentée sur la figure 4.9 et consiste à stocker un booléen indiquant si la place est marquée ou pas. La fonction d’interprétation de cette structure est :

\[
[H, p_s] = \emptyset \quad \text{si} \quad H(p_s) = (\text{bool}, \text{false})
\]

\[
[H, p_s] = \{\bullet\} \quad \text{si} \quad H(p_s) = (\text{bool}, \text{true})
\]

La fonction d’interprétation de l’encodage des jetons est définie par :

\[
[H, v]^{(s)} = \bullet \quad \text{si} \quad v \in \{\text{true}, \text{false}\}
\]

Il faut remarquer que l’interprétation de jetons donne le même résultat pour les deux valeurs parce qu’elle n’est utilisée que dans le cas d’une place non vide.

**Proposition 4.14.** L’implémentation, 1-bornée de type jeton noir, respecte l’interface d’une structure de place. □

\[
P(\text{add}, \{x_s, x\}) \overset{\text{df}}{=} \text{store true, } x_s
\]

\[
P(\text{rem}, \{x_s, x\}) \overset{\text{df}}{=} \text{store false, } x_s
\]

\[
P(\text{copy}, \{x_s, x'\}) \overset{\text{df}}{=} \text{store } x, x'
\]

\[
P(\text{notempty}, \{x_s\}) \overset{\text{df}}{=} \text{load } x_s
\]

\[
P(\text{cons}, \{\}) \overset{\text{df}}{=} \text{store false, } x_s
\]

\[
P(\text{size}, \{x_s\}) \overset{\text{df}}{=} \text{load } x_s
\]

\[
P(\text{nth}, \{x_s, i\}) \overset{\text{df}}{=} \text{store true, } x_s
\]

\[
P(\text{clear}, \{x_s\}) \overset{\text{df}}{=} \text{store false, } x_s
\]

\[
P(\text{br}, x, l_1, l_2) \overset{\text{df}}{=} \text{ret 1}
\]

\[
P(\text{ret}) \overset{\text{df}}{=} \text{ret 0}
\]

**Figure 4.9 – Implémentation d’une place 1-bornée de type jeton noir.**

**Conclusion**

Dans ce chapitre on a vu l’application de l’approche par compilation du chapitre 3. Un fragment du langage LLVM-IR a été utilisé pour la réalisation des algorithmes et des optimisations. Ce fragment a été muni d’une sémantique opérationnelle pour réaliser des preuves de correction et de terminaison.

La sémantique formelle est présentée sous forme d’un ensemble de règles d’inférence qui manipulent des tas et des piles de manière explicite. L’ensemble des règles est à petits pas à l’exception des appels de sous-programmes. Cette sémantique a donné un théorème important, le théorème d’extensionnalité, qui permet d’obtenir des preuves plus simples car réalisés dans des contextes minimaux puis généralisées à tout contexte, comme nous le verrons dans le chapitre 5.

Il faut cependant noter les limites de ce qu’on prouve. On ne prouve pas une implémentation, mais la correction des primitives dans le langage cible. Le calcul est correct si le générateur crée effectivement les algorithmes et structures données ici, ces primitives sont correctes et réalisent effectivement les interfaces.
5 Preuves sur la sémantique

Ce chapitre regroupe les preuves des résultats du chapitre 4, ainsi que des résultats intermédiaires. Il s'agit donc d'un chapitre technique qui peut aisément être passé en première lecture. On donne tout d'abord la preuve du théorème d'extensionnalité, puis la correction des fonctions fire et succ, finalement on donne les preuves des optimisations.

5.1 Preuve du théorème d'extensionnalité

La preuve est réalisée par induction sur les arbres de dérivation. On utilise un ordre lexicographique sur les deux quantités suivantes :

1. La hauteur maximale des arbres de dérivation durant la réduction.
2. Le nombre de pas de calcul nécessaires à la réduction.

5.1.1 Cas de base : nombre de pas nul

On a la réduction

\[(\text{seq}) \mapsto^* (\text{seq}'')_{H',F'}\]

on souhaite obtenir

\[(\text{seq})_{H\oplus H_0, F\oplus F_0} \mapsto^* (\text{seq}'')_{H\oplus H_0, H''\oplus F''\oplus F_0}\]

parce que le nombre de pas est nul on a \(seq = seq', H' = H'' = \emptyset\) et \(F = F''\). L'équivalence structurelle et les égalités sur les domaines sont triviales.

5.1.2 Cas inductifs :

Dans les cas inductifs on considère le premier pas durant la séquence de réduction. En effet, si on prouve que la propriété est vraie pour le premier pas alors on peut conclure par l'hypothèse d'induction puisque le nombre de pas a été décrémenté de 1. La hauteur maximale de l'arbre de dérivation restera quant à elle plus petite ou égale à la hauteur actuelle.

La majorité des cas inductifs sont triviaux, une simple application de l'hypothèse d'induction ou l'application de la dérivation suffit pour conclure. Le cas difficile est assign à cause de l'introduction d'une nouvelle variable.
5. Preuves sur la sémantique

Cas seq :
Le premier pas est une application de la règle seq :

\[
\frac{(\text{cmd} \ I_{H,F} \rightsquigarrow (\text{seq}' \ I_{H',F'})}{(\text{cmd} ; \text{seq} \ I_{H,F} \rightsquigarrow (\text{seq}' ; \text{seq} \ I_{H',F'})}}{\text{seq}}
\]

On applique l'hypothèse d'inductions sur la prémisse de la règle, on obtient :

\[
\frac{(\text{cmd} \ I_{H_0,F_0 \oplus \beta_0} \rightsquigarrow (\text{seq}' \ I_{H_0 \oplus H'',F_0' \oplus \beta_0})}{\text{seq}}
\]

où le tas \(H''\) et le frame \(F''\) sont tels que :

\[
dom(H_0) \cap \dom(H'') = \emptyset \quad (5.1)
\]

\[
\forall p \in \dom(H), \quad (H',p) =_{st} (H'',p) \quad (5.2)
\]

\[
\dom(\beta_0) \cap \dom(\beta_{F''}) = \emptyset \quad (5.3)
\]

\[
\dom(\beta_{F'}) = \dom(\beta_{F''}) \quad (5.4)
\]

\[
(F',H') =_{st} (F'',H'') \quad (5.5)
\]

On réinjecte dans la règle pour le résultat souhaité :

\[
\frac{(\text{cmd} ; \text{seq} \ I_{H_0,F_0 \oplus \beta_0} \rightsquigarrow (\text{seq}' ; \text{seq} \ I_{H_0 \oplus H'',F_0' \oplus \beta_0})}{\text{seq}}
\]

Cas seqskip :

similaire au cas de base.

Cas branch\(_1\) et branch\(_2\) :

\[
\frac{(\text{br l} \ I_{(l_p,l_c,\beta)} \rightsquigarrow (P(l) \ I_{H,F,(l_c,l,\beta)})}{\text{branch}_1}
\]

où \(H' = \emptyset\). On a

\[
\frac{(\text{br l} \ I_{H_0,(l_p,l_c,\beta) \oplus \beta_0} \rightsquigarrow (P(l) \ I_{H_0 \oplus H'',(l_c,l,\beta) \oplus \beta_0})}{\text{branch}_1}
\]

où \(H'' = \emptyset\), car la règle ne dépend pas du tas ni des frames

\[
(l_p,l_c,\beta) \oplus \beta_0 = (l_p,l_c,\beta \oplus \beta_0)
\]

\[
(l_c,l,\beta) \oplus \beta_0 = (l_c,l,\beta \oplus \beta_0)
\]

Le cas branch\(_2\) est similaire.
5.1. Preuve du théorème d'extensionnalité

Cas `pcall` :
Le premier pas de réduction est `pcall`. On sait que
\[
f(a_1, \ldots, a_n) \in \text{dom}(P)
\]
\[
F_0 = (\bot, f(a_1, \ldots, a_n), \{a_1 \mapsto F(r_1), \ldots, a_n \mapsto F(r_n)\})
\]
\[
( P(f(a_1, \ldots, a_n)) )_{H,F_0} \Rightarrow^* \text{ ( ret )}_{H \oplus H', F_i}
\]
\[
( \text{pcall } f(r_1, \ldots, r_n) )_{H,F} \Rightarrow^* \text{ (skip )}_{H \oplus H', F}
\]

où `H' = ∅`. On reconstruit la conclusion de la règle en appliquant l’hypothèse d’induction sur la prémisse avec le tas enrichi par `H_0` et le frame `F_0` laissé intact (arbre de dérivation plus petit).

\[
f(a_1, \ldots, a_n) \in \text{dom}(P)
\]
\[
F_0 = (\bot, f(a_1, \ldots, a_n), \{a_1 \mapsto F(r_1), \ldots, a_n \mapsto F(r_n)\})
\]
\[
( P(f(a_1, \ldots, a_n)) )_{H \oplus H_0, F \oplus \emptyset} \Rightarrow^* \text{ ( ret )}_{H \oplus H_0 \oplus H', F \oplus \emptyset}
\]
\[
( \text{pcall } f(r_1, \ldots, r_n) )_{H \oplus H_0} \Rightarrow^* \text{ (skip )}_{H \oplus H_0 \oplus H', F \oplus \emptyset}
\]

L’utilisation de la même frame `F_0` est correcte : `(F \oplus \beta_0)(a_i) = F(a_i) (0 \leq i \leq n)` car `dom(\beta_F) \cap dom(\beta_0) = \emptyset`.

Le cas `fcall` est similaire, l’hypothèse d’induction fournit les conclusions recherchées pour les expressions.

Cas `assign` :
Le premier pas de réduction est `assign`, on sait que
\[
\left( \text{expr } \right)_{H,F} \Rightarrow^* \left( v' \right)_{H \oplus H'}
\]
\[
\left( x = \text{expr } \right)_{H,F} \Rightarrow^* \left( \text{skip } \right)_{H \oplus H', F \oplus \{x \rightarrow v'\}}
\]

On applique l’hypothèse d’induction sur la prémisse (arbre de dérivation plus petit)
\[
\left( \text{expr } \right)_{H \oplus H_0, F \oplus \emptyset} \Rightarrow^* \left( v'' \right)_{H \oplus H_0 \oplus H''}
\]

où `H''` est un tas tel que :
\[
dom(H_0) \cap \dom(H'') = \emptyset \quad (5.6)
\]
\[
\forall p \in H, \quad (H', p) =_{st} (H'', p) \quad (5.7)
\]
\[
(H', v') =_{st} (H'', v'') \quad (5.8)
\]

On réinjecte dans la règle et on obtient :
\[
\left( x = \text{expr } \right)_{H \oplus H_0, F \oplus \emptyset} \Rightarrow^* \left( \text{skip } \right)_{H \oplus H_0 \oplus H'', F \oplus \emptyset \{x \rightarrow v''\}}
\]

On montre les conséquences du théorème :
- les conséquences (4.1) et (4.2) sont satisfaites par le conséquence de l’hypothèse d’induction (5.6) et (5.7) ;
5. Preuves sur la sémantique

- la variable $x$ n’est pas une variable assignée donc elle n’est pas dans $\text{dom}(\beta_0)$, par hypothèse du théorème. On a donc $\beta_0$ et $\{x \mapsto v''\}$ qui commutent, par conséquent $F \odot \beta_0 \odot \{x \mapsto v''\} = F \odot \{x \mapsto v''\} \odot \beta_0$ et $\text{dom}(F \odot \{x \mapsto v''\}) \cap \text{dom}(\beta_0) = \emptyset$ ce qui nous donne la conséquence (4.5);

- la conséquence (4.6) est triviale parce que $\text{dom}(\beta') = \text{dom}(\beta'') = \{x\}$.

- Il reste à montrer que $(F', H \oplus H') =_{st} (F'', H \oplus H'')$ (4.4), i.e. $(F \odot \{x \mapsto v''\}, H \oplus H'') =_{st} (F \odot \{x \mapsto v''\}, H \oplus H'')$, on est suffisant de montrer que $(\{x \mapsto v''\}, H') =_{st} (\{x \mapsto v''\}, H'')$ car (5.7) implique le résultat pour $F$. Finalement on a bien $(\{x \mapsto v''\}, H'') =_{st} (\{x \mapsto v''\}, H'')$ par (5.8).

Cas \textit{store} :

Le premier pas de la réduction est

$$ F(r_p) = p \quad \text{H}(p) = (t, d) \quad H' = \{p \mapsto t, F(r_{new})\} $$

avec $F = F'$, on construit la conclusion en prenant un tas $H_0$ et une valuation $\beta_0$ comme dans l'énoncé du théorème :

$$ (F \odot \beta_0)(r_p) = F(r_p) = p \quad (H \odot H_0)(p) = H(p) = (t, d) \quad H'' = \{p \mapsto t, F(r_{new})\} $$

$$ (\text{store } r_{new}, r_p)_{H \oplus H_0, F \odot \beta_0} \leadsto (\text{skip })_{H \oplus H', F'' \odot \beta_0} $$

Puisque $H' = H''$ et $F = F' = F''$, les conséquences sont triviales.

Cas \textit{load} :

Le premier pas de calcul est \textit{load}

$$ F(x) = p \quad \text{H}(p) = (t, v) $$

où $H' = \emptyset$, le résultat est immédiat

$$ (F \odot \beta_0)(x) = F(x) = p \quad (H \odot H_0)(p) = H(p) = (t, v) $$

$$ (\text{load } x)_{H \oplus H_0, F \odot \beta_0} \leadsto (v)_{H \oplus H' \odot H''} $$

avec $H'' = \emptyset$, car $\text{dom}(F) \cap \text{dom}(\beta_0) = \emptyset$ et $\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H_0) = \emptyset$.

Cas \textit{gup}:

le premier pas de calcul est \textit{gup}

$$ F(x) = p \quad p[i]_H \text{ défini} $$

$$ (\text{gup } x, 0, i)_{H \oplus H'} \leadsto (p[i]_H)_{H \oplus H'} $$

où $H' = \emptyset$. Puisque $p[i]_H$ est bien défini, on a $p, p[i]_H \in H$, on conchue avec

$$ (F \odot \beta_0)(x) = F(x) = p \quad p[i]_H \odot H_0 = p[i]_H \text{ defined} $$

$$ (\text{gup } x, 0, i)_{H \oplus H_0, F \odot \beta_0} \leadsto (p[i]_H \odot H_0)_{H \oplus H_0 \oplus H''} $$

où $H'' = \emptyset$, parce que $\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H_0) = \emptyset$. 66
5.1. Preuve du théorème d’extensionnalité

Cas icmp et add :
Le premier pas de réduction est icmp.
\[
F(x_1) \ op \ F(x_2) = v \quad \text{op} \in \{=, \neq, <, \leq\} \\
(\text{icmp op, } x_1, x_2)_{H,F} \rightsquigarrow (v)_{H \oplus H'}
\]
où \( H' = \emptyset \), on conclue immédiatement
\[
(F \oplus \beta_0)(x_1) \ op (F \oplus \beta_0)(x_2) = v \quad \text{op} \in \{=, \neq, <, \leq\} \\
(\text{icmp op, } x_1, x_2)_{H \oplus H_0, F \oplus \beta_0} \rightsquigarrow (v)_{H \oplus H_0 \oplus H''}
\]
où \( H'' = \emptyset \) car \( (F \oplus \beta_0)(x_1) = F(x_1) \) et \( (F \oplus \beta_0)(x_2) = F(x_2) \). Les égalités structurelles et contraintes des domaines sont triviales.
Le cas add case est similaire.

Cas phi :
Le premier pas de réduction est phi
\[
1 \leq i \leq n \\
(\text{phi } (x_1, l_1), \ldots, (x_n, l_n))_{H, (l_1, \ldots, l_n)} \rightsquigarrow (\beta(x_i))_{H \oplus H'}
\]
avec \( H' = \emptyset \), on a
\[
1 \leq i \leq n \\
(\text{phi } (x_1, l_1), \ldots, (x_n, l_n))_{H \oplus H_0, (l_1, \ldots, l_n) \oplus \beta_0} \rightsquigarrow (\beta \oplus \beta_0)(x_i))_{H \oplus H_0 \oplus H''}
\]
où \( H'' = \emptyset \). Par hypothèse du théorème on a \( \text{dom}(\beta) \cap \text{dom}(\beta_0) = \emptyset \), ce qui implique \( (\beta \oplus \beta_0)(x_i) = \beta(x_i) \), donc le calcul produit bien le même résultat dans les deux cas (4.3). De plus \( H' = H'' = \emptyset \) donc (4.1) et (4.2) sont triviales.

Cas alloc :
Le premier pas de calcul est alloc
\[
(H', p') = \text{new}(H, t) \\
(\text{alloc } t)_{H,F} \rightsquigarrow (p')_{H \oplus H'}
\]
On construit la conclusion souhaitée
\[
(H'', p'') = \text{new}(H \oplus H_0, t) \\
(\text{alloc } t)_{H \oplus H_0, F} \rightsquigarrow (p'')_{H \oplus H_0 \oplus H''}
\]
par définition de new (définition 4.7) et la propriété 4.5, on a \( (H', p') =_{st} (H'', p'') \), de plus \( \text{dom}(H'') \cap \text{dom}(H \oplus H_0) = \emptyset \), et donc \( \text{dom}(H'') \cap \text{dom}(H_0) = \emptyset \). (4.1), (4.2) et (4.3) sont vraies.

Cas ret et rvalue :
Triviaux parce que \( (\beta \oplus \beta_0)(r) = \beta(r) \).

Tous les cas ont été traités ce qui conclue la preuve. \( \square \)
La preuve de correction de la fonction $\text{fire}_t$ est réalisée en trois étapes. Les deux premières sont deux lemmes portant respectivement, sur la consommation de jetons dans la fonction, et sur la production de jetons. La troisième étape est le théorème de correction de la fonction $\text{fire}_t$ qui consiste essentiellement à utiliser le théorème d'extensionnalité afin d'appliquer les deux lemmes.

Pour aider à la lisibilité de cette section les noms de variables dans les lemmes ont été choisis de façon à correspondre aux variables du théorème. Dans la suite de cette section on se placera sous les hypothèses suivantes:

(i) $M$ est un marquage du réseau;
(ii) $t$ est une transition du réseau;
(iii) $s_1, \ldots, s_n, s'_1, \ldots, s'_m$ sont des places du réseau telles que $s_1, \ldots, s_n \in ^*t$ et $s'_1, \ldots, s'_m \in ^*t$.

5.2.1 Premier lemme

Lemme 5.1. Soit $H$ un tas et $p'_\text{mrk}$ un pointeur sur une structure de marquage tels que $\text{dom}(H) = p'_\text{mrk} \downarrow H$ et $[H, p'_\text{mrk}]^\text{mrk} = M$. Soit $F$ un frame tel que $\beta_F \overset{df}{=} \{x'_\text{mrk} \mapsto p'_\text{mrk}, x_1 \mapsto v_1, \ldots, x_n \mapsto v_n\}$ où tous les $v_i$ sont des pointeurs ou des valeurs du type des jetons des places $s_i$ et $[H, v_i]^{(s_i)} \in M(s_i)$ (pour $1 \leq i \leq n$). On considère la séquence $\text{seq}$ d'instructions qui correspond à la consommation de jetons dans la fonction $\text{fire}_t$:

$$
\text{seq} \overset{df}{=} \begin{cases}
  x_{s_1} = \text{fcall get}_{s_1}(x'_\text{mrk}) \\
  \text{pcall rem}_{s_1}(x_{s_1}, x_1) \\
  \ldots \\
  x_{s_n} = \text{fcall get}_{s_n}(x'_\text{mrk}) \\
  \text{pcall rem}_{s_n}(x_{s_n}, x_n)
\end{cases}
$$

Si on réduit totalement la séquence, i.e., si

$$
(\text{seq})_{H,F} \xrightarrow{\ast} (\text{skip})_{H \oplus H', F \oplus \beta}
$$

alors

$$
\beta \overset{df}{=} \{x_{s_1} \mapsto p_{s_1}, \ldots, x_{s_n} \mapsto p_{s_n}\} \quad (5.9)
$$

$$
\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') \subseteq p_{s_1} \downarrow H \cup \cdots \cup p_{s_n} \downarrow H \quad (5.10)
$$

$$
[H \oplus H', p'_\text{mrk}]^\text{mrk} (s_i) = M(s_i) - \{[H, v_i]^{(s_i)}\} \text{ pour } i \in \{1, \ldots, n\} \quad (5.11)
$$

Intuitivement, le résultat (5.9) est la valuation produite pendant l’exécution. Le résultat (5.10) permet de localiser les modifications sur le tas pendant la réduction. Le résultat (5.11) assure qu’on obtient le marquage souhaité, c’est-à-dire qu’on supprime bien les jetons du marquage.
5.2. Correction des fonctions fire₁

Preuve

On montre les trois conséquences simultanément par induction sur $n$.

Pour le cas de base, $n = 0$ : la séquence est vide, i.e. skip, les conséquences sont triviales : $(5.9)$ est vrai car $\beta = \emptyset$, $(5.10)$ est vrai car $H' = \emptyset$ et $(5.11)$ est vrai car $i \in \emptyset$.

Pour le cas inductif, supposons le lemme vrai pour $n - 1$. On sait que :

$$
\begin{pmatrix}
  x_{s_1} = \text{fcall} \text{get}_{s_1}(x'_{\text{mark}}) \\
  \text{pcall} \text{rem}_{s_1}(x_{s_1}, v_1) \\
  \vdots \\
  x_{s_{n-1}} = \text{fcall} \text{get}_{s_{n-1}}(x'_{\text{mark}}) \\
  \text{pcall} \text{rem}_{s_{n-1}}(x_{s_{n-1}}, x_{n-1}) \\
  x_{s_n} = \text{fcall} \text{get}_{s_n}(x'_{\text{mark}}) \\
  \text{pcall} \text{rem}_{s_n}(x_{s_n}, v_n)
\end{pmatrix}
\sim^* \begin{pmatrix}
  (\text{skip})_{H,H_0, F} \\
  \ominus \ominus \ominus \ominus \ominus
\end{pmatrix}
$$

avec comme conséquences :

$$
\beta_0 \overset{H}{=} \{ x_{s_1} \mapsto p_{s_1}, \ldots, x_{s_{n-1}} \mapsto p_{s_{n-1}} \} \quad (5.12)
$$

$$
dom(H) \cap dom(H') \subseteq p_{s_1} \downarrow H \cup \cdots \cup p_{s_{n-1}} \downarrow H \quad (5.13)
$$

Pour le cas inductif, supposons le lemme vrai pour $n - 1$. On sait que :

$$
\begin{pmatrix}
  x_{s_1} = \text{fcall} \text{get}_{s_1}(x'_{\text{mark}}) \\
  \text{pcall} \text{rem}_{s_1}(x_{s_1}, v_1) \\
  \vdots \\
  x_{s_{n-1}} = \text{fcall} \text{get}_{s_{n-1}}(x'_{\text{mark}}) \\
  \text{pcall} \text{rem}_{s_{n-1}}(x_{s_{n-1}}, v_{n-1}) \\
  x_{s_n} = \text{fcall} \text{get}_{s_n}(x'_{\text{mark}}) \\
  \text{pcall} \text{rem}_{s_n}(x_{s_n}, v_n)
\end{pmatrix}
\sim^* \begin{pmatrix}
  (\text{skip})_{H,H_0, F} \\
  \ominus \ominus \ominus \ominus \ominus
\end{pmatrix}
$$

On va montrer que le lemme est vrai pour $n$, pour cela on va réaliser une séquence de réductions et vérifier que les conséquences sont vraies. Par hypothèse d’induction on peut réaliser la séquence de réductions suivante :

$$
\begin{pmatrix}
  x_{s_1} = \text{fcall} \text{get}_{s_1}(x'_{\text{mark}}) \\
  \text{pcall} \text{rem}_{s_1}(x_{s_1}, v_1) \\
  \vdots \\
  x_{s_{n-1}} = \text{fcall} \text{get}_{s_{n-1}}(x'_{\text{mark}}) \\
  \text{pcall} \text{rem}_{s_{n-1}}(x_{s_{n-1}}, v_{n-1}) \\
  x_{s_n} = \text{fcall} \text{get}_{s_n}(x'_{\text{mark}}) \\
  \text{pcall} \text{rem}_{s_n}(x_{s_n}, v_n)
\end{pmatrix}
\sim^* \begin{pmatrix}
  x_{s_n} = \text{fcall} \text{get}_{s_n}(x'_{\text{mark}}) \\
  \text{pcall} \text{rem}_{s_n}(x_{s_n}, v_n)
\end{pmatrix}
\overset{H,H_0, F}{=} \{ x_{s_n} \rightarrow p_{s_n} \}
$$

avec les conséquences $(5.12)$ à $(5.14)$ ci-dessus. On remarque que le résultat $(5.13)$ implique qu’on n’a pas modifié la place $s_n$. On continue à réduire en utilisant les règles de la sémantique et les spécifications des fonctions get$_{s_n}$ et rem$_{s_n}$ :

$$
\begin{pmatrix}
  x_{s_n} = \text{fcall} \text{get}_{s_n}(x'_{\text{mark}}) \\
  \text{pcall} \text{rem}_{s_n}(x_{s_n}, v_n)
\end{pmatrix}
\overset{H,H_0, F}{=} \{ x_{s_n} \rightarrow p_{s_n} \}
$$

69
On a alors :

\[ [H \oplus H_0 \oplus p_{s_n}]^{s_n} = [H \oplus H_0 \oplus p_{s_n}]^{s_n} - \{[H, v_n]^{t(s_n)}\} \]
\[ = [H, p_{s_n}]^{s_n} - \{[H, v_n]^{t(s_n)}\} \]
\[ \text{car on n'a pas modifié la place } s_n \] (5.13)
\[ = M(s_n) - \{[H, v_n]^{t(s_n)}\} \]

(5.15)

\[ \text{dom}(H \oplus H_0) \cap \text{dom}(H_1) \subseteq p_{s_n} \downarrow H \] (5.16)

Et donc
\[ \beta = \beta_0 \oplus \{x_{s_n} \mapsto p_{s_n}\} = \{x_1 \mapsto p_{s_1}, \ldots, x_n \mapsto p_{s_n}\} \]
car tous les \( x_i \) sont différents (LLVM est en forme SSA). La conséquence (5.9) est donc vérifiée. Les trois conséquences étant vraies, le lemme est vrai pour tout \( n \).

5.2.2 Second lemme

**Lemme 5.2.** Soit \( H \) un tas et \( p'_{\text{mark}} \) un pointeur sur une structure de marquage tels que \( \text{dom}(H) = p'_{\text{mark}} \downarrow H \) et \( [H, p'_{\text{mark}}]^{\text{mark}} = M \). Soit \( F \) un frame tel que \( \beta_F \triangleq \{x'_{\text{mark}} \mapsto p'_{\text{mark}}, x_1 \mapsto v_1, \ldots, x_n \mapsto v_n\} \) où tous les \( v_i \) sont des pointeurs ou des valeurs du type des jetons des places \( s_i \) (pour \( 1 \leq i \leq n \)). On considère
5.2. Correction des fonctions fireₜ

la séquence seq d’instructions qui correspond à la production de jetons dans la fonction fireₜ :

\[
\begin{align*}
\text{seq} &\equiv \begin{cases}
  x'_{s'_1} &= \text{fcall} \text{get}_{s'_1}(x'_{mrk}) \\
o'_{s'_1} &= \text{fcall} \text{f}_{s'_1}(x_1, \ldots, x_n) \\
  \text{pcall} \text{add}_{s'_1}(x'_{s'_1}, o'_{s'_1}) \\
  \ldots
  x'_{s'_m} &= \text{fcall} \text{get}_{s'_m}(x'_{mrk}) \\
o'_{s'_m} &= \text{fcall} \text{f}_{s'_m}(x_1, \ldots, x_n) \\
  \text{pcall} \text{add}_{s'_m}(x'_{s'_m}, o'_{s'_m})
\end{cases}
\end{align*}
\]

Si on exécute totalement la séquence, i.e., si

\[
(\text{seq })_{H,F} \rightsquigarrow^* (\text{skip })_{H \oplus H'},
\]

alors

\[
\beta \equiv \begin{cases}
  x'_{s'_1} \mapsto p'_{s'_1} , & o'_{s'_1} \mapsto f'_{s'_1}(v_1, \ldots, v_n), \\
  \ldots \\
  x'_{s'_m} \mapsto p'_{s'_m}, & o'_{s'_m} \mapsto f'_{s'_m}(v_1, \ldots, v_n)
\end{cases}
\]

\[
\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') \subseteq p'_{s'_1} \downarrow_H \cup \ldots \cup p'_{s'_m} \downarrow_H 
\]

\[
[H \oplus H', p'_{mrk}]_{\text{mark}}(s'_i) = M(s'_i) + \left\{ [H \oplus H', f'_{s'_1}(v_1, \ldots, v_n)]^{t(s'_i)} \right\} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m
\]

Preuve

La preuve est similaire à celle du lemme 5.1, il faut cependant utiliser les propriétés des fonctions étiquetant les arcs sortants de la transition t. □

5.2.3 Théorème de correction de la fonction fireₜ

On rappelle l’énoncé du théorème 4.10.

Soit H un tas et pₘrk un pointeur sur une structure de marquage tel que \text{dom}(H) = pₘrk \downarrow_H et \text{dom}(H') = M. Soit \beta \equiv \{ x_1 \mapsto v_1, \ldots, x_n \mapsto v_n \} un mode LLVM de la transition t, ce qui implique que les \(v_i\) sont des valeurs ou des pointeurs de type des jetons des places \(s_i\) et \(H, v_i \) \(\in M(s_i)\). Soit F un frame tel que \(\beta_F \equiv \beta \oplus \{ x_{mrk} \mapsto p_{mrk} \} \).

Si

\[
M[t, \beta]M'
\]

\[
(\text{fcall} \text{fire}_t(x_{mrk}, x_1, \ldots, x_n))_{H,F} \rightsquigarrow (p'_{mrk})_{H \oplus H'},
\]

alors

\[[(H \oplus H')(p'_{mrk})]^{\text{mark}} = M' \]

\[
\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') = \emptyset
\]
5. Preuves sur la sémantique

Preuve

Il suffira de montrer (5.20), car (5.21) sera une conséquence immédiate de l’application du théorème d’extensionnalité pendant la preuve. Par définition de la règle fcall, il nous suffit de montrer que

\[
\begin{pmatrix}
P(fire_t(x_{mark}, x_1, \ldots, x_n)) \\
P(fire_t + 1)
\end{pmatrix}_{H,F_0} \leadsto \begin{pmatrix}
x'_{mark} \leftarrow fcall \(copy_{mark}(x_{mark})
\end{pmatrix}_{H,F_0}
\]

avec \(F_0 \triangleq (\bot, fire_t(x_{mark}, x_1, \ldots, x_n), \beta \oplus \{x_{mark} \mapsto p_{mark}\}), H'_0\) un tas et \(F'_0\) un frame tels que \([H'_0, F'_0(x'_{mark})]_{mark}^{mark} = M'\).

Pour plus de lisibilité on introduit la notation \(P(fire_t + i)\) qui dénote la séquence d’instructions de la fonction \(fire_t\) à partir de la \(i\)-ème instruction en comptant à partir de zéro : \(P(fire_t + 0) = P(fire_t)\) et \(P(fire_t + 1)\) est le corps de la fonction \(fire_t\) en omettant la première instruction.

D’après la spécification de \(copy_{mark}\) on peut effectuer la réduction :

\[
\begin{pmatrix}
x'_{mark} = fcall \(copy_{mark}(x_{mark})
\end{pmatrix}_{H,F_0} \leadsto^* \begin{pmatrix}
P(fire_t + 1)
\end{pmatrix}_{H,F_0, F_0 \oplus \beta_0}
\]

avec \(\beta_0 \triangleq \{x'_{mark} \mapsto p'_{mark}\}\) et d’en déduire :

\[
dom(H) \cap \dom(H_0) = \emptyset \tag{5.22}
\]

\[
p'_{mark} \downarrow H_0 = \dom(H_0) \tag{5.23}
\]

\[
[H, p_{mark}]^{mark} = [H_0, p'_{mark}]^{mark} = [H \oplus H_0, p_{mark}]^{mark} \tag{5.24}
\]

À partir de maintenant on travaille dans un tas et un frame isolés. On utilise le frame \(F_1 \triangleq (F_0 \oplus \beta_0) \setminus \{x_{mark} \mapsto p_{mark}\}\) et le tas \(H_0\). Une fois nos réductions réalisées on appliquera le théorème d’extensionnalité pour conclure.

On est exactement dans les conditions du lemme (5.1), on l’applique et obtient la séquence de réductions suivante :

\[
\begin{pmatrix}
x_{s_1} = fcall \(get_{s_1}(x'_{mark})
\end{pmatrix}_{H_0, F_1} \ldots \begin{pmatrix}
x_{s_n} = fcall \(get_{s_n}(x'_{mark})
\end{pmatrix}_{H_0, F_1} \leadsto^* \begin{pmatrix}
P(fire_t + 2n + 1)
\end{pmatrix}_{H_0 \oplus H_1, F_2}
\]

avec comme conséquences :

\[
F_2 = F_1 \oplus \{x_{s_1} \mapsto p_{s_1}, \ldots, x_{s_n} \mapsto p_{s_n}\}
\]

\[
\dom(H_0) \cap \dom(H_1) \subseteq p_{s_1} \downarrow H_0 \cup \cdots \cup p_{s_n} \downarrow H_0
\]

\[
\forall i \in \{1, \ldots, n\}, [H_0 \oplus H_1, p'_{mark}]^{(s_i)} = M(s_i) - \{[H_0, v_i]^{(s_i)}\}
\]

72
5.2. Correction des fonctions \( \text{fire}_i \)

On pose \( H_2 = H_0 \oplus H_1 \) et on continue à réduire de la même manière avec le lemme 5.2 :

\[
\begin{align*}
\begin{cases}
  x'_{s_1} = \text{fcall get}_{s_1}(x_{p'}) \\
  o'_{s_1} = \text{fcall f}_{s_1}(v_1, \ldots, v_n) \\
  \text{pcall add}_{s_1}(x'_{s_1}, o'_{s_1}) \\
  \vdots \\
  x'_{s_m} = \text{fcall get}_{s_m}(x_{p'}) \\
  o'_{s_m} = \text{fcall f}_{s_m}(v_1, \ldots, v_n) \\
  \text{pcall add}_{s_m}(x'_{s_m}, o'_{s_m}) \\
  \text{ret } x_{p'}
\end{cases}
\end{align*}
\]

à l'hexad \( F_5 \), avec comme conséquences :

\[
F'_5 \in \left\{ \begin{array}{l}
  x'_{s_1} \mapsto p'_{s_1}, \ldots, x'_{s_m} \mapsto p'_{s_m}, \\
  o'_{s_1} \mapsto f'_{s_1}(v_1, \ldots, v_n), \\
  \vdots \\
  o'_{s_m} \mapsto f'_{s_m}(v_1, \ldots, v_n)
\end{array} \right\}
\]

\[
\text{dom}(H_2) \cap \text{dom}(H_3) \subseteq p_{s_1} \downarrow H_2 \cup \cdots \cup p_{s_m} \downarrow H_2 \subseteq p \downarrow H_2
\]

\( \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \)

\[
[H_4, p'_{\text{mark}}]^{\text{mark}} (s'_i) = [H_2, p'_{\text{mark}}]^{\text{mark}} (s'_i) + \left\{ \left[ H_4, f'_{s'_i}(v_1, \ldots, v_n) \right] \right\}^{t(s'_i)}
\]

Comme \( \text{dom}(H) \cap \text{dom}(H_0) = \emptyset \) (5.22) et \( x_{\text{mark}} \notin \beta_{F_1} \) on peut appliquer le théorème d'extensionnalité. On préserve les résultats obtenus grâce aux conséquences du théorème d'extensionnalité et on a \( \text{dom}(H) \cap \text{dom}(H_0 \oplus H_1 \oplus H_2) = \emptyset \) qui est exactement la conséquence (5.21) de ce théorème.

On vérifie maintenant qu'on a bien obtenu le marquage \( M' \). Soit \( s \) une place du réseau

1. Si \( s \notin \{s_1, \ldots, s_n\} \) et \( s \notin \{s'_1, \ldots, s'_n\} \) alors on n’a pas modifié les données, on a bien :

\[
[H_2 \oplus H_3, p'_{\text{mark}}]^{\text{mark}} (s) = [H, p_{\text{mark}}]^{\text{mark}} (s) = M(s) = M'(s)
\]

2. Si \( s = s_i, s_i \in \{s_1, \ldots, s_n\} \) et \( s \notin \{s'_1, \ldots, s'_n\} \) alors on a consommé un jeton :

\[
[H_2 \oplus H_3, p'_{\text{mark}}]^{\text{mark}} (s_i) = [H, p_{\text{mark}}]^{\text{mark}} (s_i) - \left\{ [H, v_i]^{t(s_i)} \right\} \\
= M(s_i) - \left\{ [H, v_i]^{t(s_i)} \right\} \\
= M'(s_i)
\]

3. Si \( s = s'_j, s \notin \{s_1, \ldots, s_n\} \) et \( s'_j \in \{s'_1, \ldots, s'_n\} \) alors on a ajouté un jeton :

\[
[H_4, p'_{\text{mark}}]^{\text{mark}} (s'_j) = [H, p_{\text{mark}}]^{\text{mark}} (s'_j) + \left\{ [H_4, f'_{s'_j}(x_1, \ldots, x_n)]^{t(s'_j)} \right\} \\
= M(s'_j) + \left\{ [H_4, f'_{s'_j}(x_1, \ldots, x_n)]^{t(s'_j)} \right\} \\
= M'(s'_j)
\]

73
5. **Preuves sur la sémantique**

4. Si $s = s_i = s'_j$, $s_i \in \{s_1, \ldots, s_n\}$ et $s'_j \in \{s'_1, \ldots, s'_n\}$ alors on a consommé un jeton puis ajouté nouveau un jeton :

$$\begin{align*}
[H_4, p_{mrk}]^\text{mark} (s) &= [H, p_{mrk}]^\text{mark} (s) - \{[H, v_i]^t(s_i)\} \\
&\quad + \{[H_4, fs_j(x_1, \ldots, x_n)]^t(s'_j)\} \\
&= M(s) - \{[H, v_i]^t(s_i)\} \\
&\quad + \{[H_4, fs_j(x_1, \ldots, x_n)]^t(s'_j)\} \\
&= M'(s)
\end{align*}$$

On a bien $[H \oplus (H_0 \oplus H_1), p_{mrk}]^\text{mark} = [H_2 \oplus H_3, p'_{mrk}]^\text{mark} = M'$, c'est-à-dire que la conséquence (5.20) est vérifiée. Ce qui conclue la preuve. \(\Box\)

5.2.4 **Terminaison de la fonction fire_t**

**Corollaire 5.3.** *Dans les mêmes conditions que le théorème 4.10, l’appel de la fonction fire_t termine.*

**Preuve**

Conséquence immédiate du lemme précédent car il correspond exactement à l’appel de la fonction. \(\Box\)

5.3 **Correction des fonctions succ_t**

On souhaite que la fonction $\text{succ}_t$, où $t$ est une transition, renvoie l’ensemble des marquages successeurs d’un marquage $M$ par le tir de cette transition. C’est-à-dire tous les marquages tels qu’il existe un mode permettant de tirer la transition $t$ à partir du marquage $M$.

Les énoncés qui suivent sont définis dans le contexte où $M$ est un marquage, $t$ une transition à $n$ places en entrée, $p_{mrk}$ et $p_{set}$ sont deux pointeurs, $x_{mrk}$ et $x_{set}$ sont deux variables.

Pour réaliser la preuve de correction on aura besoin d’un invariant qu’on propagera pendant les réductions, on l’appelle la propriété $P$.

**Définition 5.1** (La propriété $P$). *Dans cette section, on dira qu’un couple $(H, F)$, avec $H$ un tas et $F$ un frame, vérifie la propriété $P$ si les quatre conditions suivantes sont vraies :

- $p_{mrk} \in \text{dom}(H)$ et $[H, p_{mrk}]^\text{mark} = M$ ;
- $p_{set} \in \text{dom}(H)$ et $[H, p_{set}]^\text{set}$ est un ensemble de marquages ;
- $F(x_{mrk}) = p_{mrk}$ ;
- $F(x_{set}) = p_{set}$.* \(\Diamond\)

La correction de la fonction $\text{succ}_t$ est prouvée en se basant sur deux lemmes. Le premier pour de montrer que l’évaluation un bloc $\text{header}_{t,k}$, dans un contexte particulier qui nous convient, aboutit forcément au bloc $\text{footer}_{t,k+1}$ sans passer par les blocs d’indice plus grand que $k$, toujours avec un contexte qui nous convient.

74
5.3. Correction des fonctions $\text{succ}_t$

5.3.1 Première lemme

**Lemme 5.4.** Quel que soit le nombre $n$ de places en entrée de la transition $t$ et pour tout tas $H$ et tout frame $F$ tels que $(H, F)$ vérifie la propriété $P$, on a :

$$( P(\text{header}_{t,n}) \ )_{H,F} \overset{*}{\leadsto} ( P(\text{footer}_{t,n+1}) \ )_{H',F'}$$

avec $(H', F')$ qui a vérifié la propriété $P$ et sans être passé par les blocs d'indice supérieur à $n$, i.e.,

$$( P(\text{header}_{t,n}) \ )_{H,F} \overset{*}{\leadsto} ( P(\text{block}_{t,i}) \ )_{H'',F''}$$

pour $i > n$ et $\text{block} \in \{ \text{header}, \text{loop}, \text{body}, \text{footer} \}$ n'est pas un préfixe strict de la réduction ci-dessus.

**Preuve**

La preuve se fait par induction sur $n$, avec une deuxième induction sur le nombre de jetons qu'il nous reste à traiter dans la $n$-ième place au niveau du cas inductif.

1. Cas de base : il suffit de réaliser toutes les réductions possibles, on remarque qu'on traite forcément l'instruction “br $\text{footer}_{t,1}$”. Les couples $(H, F)$ vérifient la propriété $P$, la condition pour les tas découle des spécifications des fonctions appelées car on ne fait pas de modifications explicites sur le tas et la condition pour les frames vient du fait que LLVM est en forme SSA. On peut s’en assurer en réduisant les blocs concernés :

$$P(\text{header}_{t,0}) \overset{\Delta}{=} \left\{ \begin{array}{l}
  c_g = \text{fcall } g_t(x_1, \ldots, x_n) \\
  \text{br } c_g, \ \text{body}_{t,0}, \ \text{footer}_{t,1}
\end{array} \right.$$  

$$P(\text{body}_{t,0}) \overset{\Delta}{=} \left\{ \begin{array}{l}
  x_{mrk} = \text{fcall } \text{fire}_t(x_{mrk}, x_1, \ldots, x_n) \\
  \text{pcall } \text{addset}(x_{set}, x_{mrk}) \\
  \text{br } \text{footer}_{t,1}
\end{array} \right.$$  

2. Cas inductif : on suppose que pour tout tas $H$ et tout frame $F$ tels que $(H, F)$ vérifie la propriété $P$, on a :

$$( P(\text{header}_{t,n-1}) \ )_{H,F} \overset{*}{\leadsto} ( P(\text{footer}_{t,n}) \ )_{H',F'} \quad (5.25)$$

et $(H', F')$ vérifie la propriété $P$.

Pour prouver ce cas, on va réduire en partant du bloc $\text{header}_{t,n}$ avec un couple $(H, F)$ qui vérifie la propriété $P$. Une fois arrivé à une certaine position dans le bloc $\text{loop}_{t,n}$ on fera une deuxième preuve par induction afin de montrer qu’on arrive à la configuration souhaitée.

Soit $(H_0, F_0)$ un couple qui vérifie la propriété $P$, avec $H_0$ un tas et $F_0 \overset{\Delta}{=} (l_{p,F_0}, \ \text{header}_{t,n}, \ \beta_{F_0})$ un frame où $l_{p,F_0}$ est une étiquette quelconque. On déroule la définition de $P(\text{header}_{t,n})$ :

$$P(\text{header}_{t,n}) \overset{\Delta}{=} \left\{ \begin{array}{l}
  x_{sk} = \text{fcall } g_{sk}(x_{mrk}) \\
  s_{sk} = \text{fcall } \text{size}_{sk}(x_{sk}) \\
  \text{br } \text{loop}_{t,k}
\end{array} \right.$$
5. Preuves sur la sémantique

On commence les réductions :

\[
\left( P(\text{header}_{t,n}) \right)_{H_0,F_0} \overset{*}{\leadsto} \left( P(\text{loop}_{t,n}) \right)_{H_0,F_1}
\]

où \( F_1 = (\text{header}_{t,n}, \text{loop}_{t,n}, \beta_{F} \oplus \{ x_{s_n} \mapsto p_{s_n}, \tilde{s}_n \mapsto \text{card}(M(s_n)) \}) \). La propriété \( P \) étant vérifiée, il faut remarquer que \( p_{\text{mark}} \) est un pointeur sur une structure de marquage, \( p_{s_n} \) est le pointeur sur la place \( s_n \) de cette structure, et donc les deux appels de fonction sont légitimes.

De même on déroule la définition de \( P(\text{loop}_{t,n}) \) :

\[
P(\text{loop}_{t,n}) \overset{\Delta}{=} \begin{cases} 
  i_{s_n} = \phi_i(s_{s_n}, \text{header}_{t,n}), (i'_{s_n}, \text{footer}_{t,n}) \\
  c_{s_n} = \text{icmp} \gg, i_{s_n}, 0 \\
  \text{br } c_{s_n}, \text{body}_{t,n}, \text{footer}_{t,n+1} 
\end{cases}
\]

et on continue à réduire :

\[
\left( \begin{array}{l}
  i_{s_n} = \phi_i(s_{s_n}, \text{header}_{t,n}), (i'_{s_n}, \text{footer}_{t,n}) \\
  c_{s_n} = \text{icmp} \gg, i_{s_n}, 0 \\
  \text{br } c_{s_n}, \text{body}_{t,n}, \text{footer}_{t,n+1} 
\end{array} \right)_{H_0,F_1} \overset{*}{\leadsto} \left( \begin{array}{l}
  c_{s_n} = \text{icmp} \gg, i_{s_n}, 0 \\
  \text{br } c_{s_n}, \text{body}_{t,n}, \text{footer}_{t,n+1} 
\end{array} \right)_{H_0,F_2}
\]

où \( F_2 = F_1 \oplus \{ i_{s_n} \mapsto \text{card}(M(s_n)) \} \). À partir de maintenant on va montrer que cette configuration se réduit à \( \text{footer}_{t,n+1} \) par induction sur la valeur de \( i_{s_n} \) dans la valuation courante. Plus précisément on montre que pour tout tas \( H \) et tout frame \( F \), tels que \( (H,F) \) vérifie la propriété \( P \) et \( l_{c,F} \overset{\Delta}{=} \text{loop}_{t,n} \), on a :

\[
\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left( \begin{array}{l}
  c_{s_n} = \text{icmp} \gg, i_{s_n}, 0 \\
  \text{br } c_{s_n}, \text{body}_{t,n}, \text{footer}_{t,n+1} 
\end{array} \right)_{H,F[k]} \overset{*}{\leadsto} \left( P(\text{footer}_{t,n+1}) \right)_{H',F'}
\]

avec \( (H',F') \) qui vérifie la propriété \( P \).

Ce résultat nous suffit car la configuration à laquelle on est arrivé (5.26) est un cas particulier de (5.27).

a) cas de base : soit \( H_0 \) un tas et \( F_0 \) un frame tels que décrits dans l’énoncé. On a \( F_0(i_{s_n}) = 0 \), il suffit de réduire :

\[
\left( \begin{array}{l}
  c_{s_n} = \text{icmp} \gg, i_{s_n}, 0 \\
  \text{br } c_{s_n}, \text{body}_{t,n}, \text{footer}_{t,n+1} 
\end{array} \right)_{H_0,F_0} \overset{*}{\leadsto} \left( \begin{array}{l}
  \text{br } c_{s_n}, \text{body}_{t,n}, \text{footer}_{t,n+1} 
\end{array} \right)_{H_0,F_1} \overset{*}{\leadsto} \left( P(\text{footer}_{t,n+1}) \right)_{H_1,F_2}
\]

où

\[
F_1 \overset{\Delta}{=} F_0 \oplus \{ c_{s_n} \mapsto \text{false} \}
\]

\[F_2 = (\text{loop}_{t,n+1}, \text{footer}_{t,n+1}, \beta_{F_1})\]

On arrive bien au bloc \( \text{footer}_{t,n+1} \) avec \( H_0 = H_1 \) et

\[\beta_{F_2} = \beta_{F_1} = F_0 \oplus \{ i_{s_n} \mapsto k \} \oplus \{ c_{s_n} \mapsto \text{false} \}\]

on a \( (H_1,F_2) \) qui vérifie la propriété \( P \).
b) cas inductif : soit \( H_0 \) un tas et \( F_0 \) un frame tels que décrits dans l’énoncé. On a \( F_1(i_{s_n}) = k \), on commence les réductions :

\[
\begin{align*}
    \left( c_{s_n} = \text{icmp} >, i_{s_n}, 0 \right) & \quad \text{br} \quad \left( c_{s_n}, \text{body}_{t,n}, \text{footer}_{t,n+1} \right) \quad \text{\( H_0,F_1 \)} \\
    \leadsto^* \left( \text{br} \quad c_{s_n}, \text{body}_{t,n}, \text{footer}_{t,n+1} \right) \quad \text{\( H_0,F_2 \)} \\
    \leadsto^* \left( P(\text{body}_{t,n}) \right) \quad \text{\( H_0,F_3 \)}
\end{align*}
\]

où

\[
F_2 \overset{\text{df}}{=} F_1 \oplus \{ c_{s_n} \mapsto \text{true} \}
\]

\[
F_3 \overset{\text{df}}{=} (\text{loop}_{t,n}, \text{body}_{t,n}, \beta_{F_2})
\]

On continue les réductions :

\[
\begin{align*}
    P(\text{body}_{t,k}) & \overset{\text{df}}{=} \left\{ x_k = \text{fcall nth}_{s_k}(x_{s_k}, i_{s_k}) \right\} \\
    \left( P(\text{body}_{t,n}) \right)_{H_0,F_3} & \leadsto^* \left( P(\text{header}_{t,n-1}) \right)_{H_0,F_4}
\end{align*}
\]

où

\[
F_4 \overset{\text{df}}{=} (\text{body}_{t,n}, \text{header}_{t,n-1}, \beta_{F_3} \oplus \{ x_k \mapsto v \})
\]

Par hypothèse d’induction (5.25) on sait que :

\[
\left( P(\text{header}_{t,n-1}) \right)_{H_0,F_4} \leadsto^* \left( P(\text{footer}_{t,n}) \right)_{H_1,F_5}
\]

et \((H_1,F_5)\) vérifie la propriété \( P \). On continue de réduire :

\[
\left( i'_{s_n} = \text{add} \quad i_{s_n}, -1 \right) \quad \text{\( H_1,F_5 \)} \quad \leadsto^* \left( P(\text{loop}_{t,n}) \right) \quad \text{\( H_1,F_6 \)}
\]

où

\[
F_6 \overset{\text{df}}{=} (l_{c,F_4}, \text{loop}_{t,n}, \beta_{F_4} \oplus \{ i'_{s_n} \mapsto k - 1 \})
\]

car \( F_5(i_{s_n}) = k \). Cette valeur n’a pas pu être modifiée car on n’est pas repassé dans le bloc \text{loop}_{t,n} (LLVM est en forme SSA). On arrive donc à

\[
P(\text{body}_{t,k}) \overset{\text{df}}{=} \left\{ i_{s_n} = \text{phi} (s_{s_n}, \text{header}_{t,n}), (i'_{s_n}, \text{footer}_{t,n}) \right\}
\]

\[
\begin{align*}
    \left( c_{s_n} = \text{icmp} >, i_{s_n}, 0 \right) & \quad \text{br} \quad c_{s_n}, \text{body}_{t,n}, \text{footer}_{t,n+1} \\
    \left( c_{s_n} = \text{icmp} >, i_{s_n}, 0 \right) & \quad \text{br} \quad c_{s_n}, \text{body}_{t,n}, \text{footer}_{t,n+1} \\
    \leadsto^* \left( c_{s_n} = \text{icmp} >, i_{s_n}, 0 \right) & \quad \text{br} \quad c_{s_n}, \text{body}_{t,n}, \text{footer}_{t,n+1}
\end{align*}
\]

où

\[
F_7 = F_6 \oplus \{ i_{s_n} \mapsto k - 1 \}
\]

On conclue par l’hypothèse d’induction (5.27) car la valeur de \( i_{s_n} \) a été décrémentée de 1 et \((H_1,F_7)\) vérifie la propriété \( P \).

Ceci conclut l’induction et la preuve du lemme. \( \square \)
5.3.2 Terminaison de la fonction \textit{succ}$_t$

Avec le lemme précédent on peut d'ores et déjà prouver la terminaison de l'a fonction \textit{succ}$_t$.

\textbf{Corollaire 5.5.} \textit{Dans les mêmes conditions que le lemme 5.4, l'appel de la fonction \textit{succ}$_t$ termine.}

\textbf{Preuve}

C'est une conséquence immédiate du lemme précédent, car l'évaluation du bloc d'étiquette \textit{succ}$_t$(\textit{x}_mark) conduit au bloc \textit{header}$_n$ et donc par le lemme précédent au bloc \textit{footer}$_{n+1}$. \hfill \Box

5.3.3 Second lemme

Le second lemme sert à montrer qu'on énumère toutes les combinaisons possibles de jetons des places en entrée de la transition \textit{t}. En particulier on l'utilise pour montrer qu'on énumère tous les modes de la transition \textit{t}.

\textbf{Lemme 5.6.} \textit{Soit \textit{H} un tas et \textit{F} un frame tels que \((\textit{H, F})\) vérifie la propriété \textit{P}. Soit \(\beta = \{x_n \mapsto v_n, \ldots, x_1 \mapsto v_1\}\) une valuation LLVM telle que \([\textit{H, v}_i]^{t(s)} \in M(s_i)\) pour \(1 \leq i \leq n\). Si

\[
\left( P(\text{header}_{t,n}) \right)_{\textit{H,F}} \rightsquigarrow^* \left( P(\text{header}_{t,0}) \right)_{\textit{H',F'}}
\]

alors \(\beta \subseteq \beta_{F'}\) et \((\textit{H'}, F')\) vérifie la propriété \textit{P}. De plus on s'assure de n'être pas passé par aucun bloc indexé par \(i\) tel que \(i > n\), i.e.,

\[
\left( P(\text{header}_{t,n}) \right)_{\textit{H,F}} \rightsquigarrow^* \left( P(\text{block}_{t,i}) \right)_{\textit{H''',F''}}
\]

pour \(i > n\) et bloc \(\in \{\text{header, loop, body, footer}\}\) n'est pas un préfixe strict de la réduction ci-dessus.}

\textbf{Preuve}

La preuve est faite par induction sur \(n\). De même que dans le lemme précédent on fera une deuxième induction au niveau du cas inductif sur le nombre de jetons de la place \(s_n\) qu'il nous reste à traiter.

1. Cas de base, \(n = 0\) : trivial

\[
\left( P(\text{header}_{t,0}) \right)_{\textit{H,F}} \rightsquigarrow^* \left( P(\text{header}_{t,0}) \right)_{\textit{H',F'}}
\]

avec \(H = H', F = F'\) et \(\beta = \emptyset \subseteq \beta_{F'}\).

2. Cas inductif. On suppose que pour tout couple \((\textit{H, F})\) qui vérifie la propriété \textit{P} on a :

\[
\left( P(\text{header}_{t,n-1}) \right)_{\textit{H,F}} \rightsquigarrow^* \left( P(\text{header}_{t,0}) \right)_{\textit{H',F'}}
\]

avec \(\{x_{n-1} \mapsto v_{n-1}, \ldots, x_1 \mapsto v_1\} \subseteq \beta_{F'}\) et \((\textit{H'}, F')\) qui vérifie la propriété \textit{P}. De plus on sait qu'on n’est pas passé par aucun bloc d’indice \(i \geq n\).
Soit $H_0$ un tas et $F_0$ un frame tels que décrits dans l’énoncé. On commence à réduire le cas inductif :

$$P(\text{header}_{t,n}) \equiv \begin{cases} x_{s_n} = \text{fcall get}_{s_n}(x_{\text{mrk}}) \\ s_{s_n} = \text{fcall size}_{s_n}(x_{s_n}) \\ \text{br loop}_{t,n} \end{cases}$$

$$\left( P(\text{header}_{t,n}) \right)_{H_0,F_0} \xrightarrow{*} \left( P(\text{loop}_{t,n}) \right)_{H_0,F_i}$$

où $F_1 \overset{df}{=} (\{c,F_0\} \text{ loop}_{t,n}, \beta_{F_0} \oplus \{x_{s_n} \mapsto p_{s_n}, s_{s_n} \mapsto \text{card}(\text{dom}(M(s_n)))\})$

avec $[H,F_{s_n}]^{s_n} = [H,F_{mrk}]^{s_n}_{x_{s_n}}(s_n) = M(s_n)$.

On continue les réductions :

$$P(\text{loop}_{t,n}) \equiv \begin{cases} i_{s_n} = \text{phi}(s_{s_n}, \text{header}_{t,n}), (i'_{s_n}, \text{footer}_{t,n}) \\ c_{s_n} = \text{icmp} \geq \, i_{s_n}, 0 \\ \text{br} c_{s_n}, \text{body}_{t,n}, \text{footer}_{t,n-1} \end{cases}$$

$$\left( P(\text{loop}_{t,n}) \right)_{H_0,F_1} \xrightarrow{*} \left( c_{s_n} = \text{icmp} \geq \, i_{s_n}, 0 \\ \text{br} c_{s_n}, \text{body}_{t,n}, \text{footer}_{t,n-1} \right)_{H_0,F_2}$$

où $F_2 \overset{df}{=} F_1 \oplus \{i_{s_n} \mapsto k\}$ avec $k = \text{card}(M(s_n))$.

Ici on commence la deuxième induction, on montre que cette configuration se réduit à la configuration souhaitée par induction sur $k$. Plus précisément on va prouver que :

Pour tout tas $H$ et tout frame $F$ tels que $(H,F)$ vérifie la propriété $P$ et $F(i_{s_n}) = k$ on a :

$$\left( c_{s_n} = \text{icmp} \geq \, i_{s_n}, 0 \\ \text{br} c_{s_n}, \text{body}_{t,n}, \text{footer}_{t,n-1} \right)_{H,F} \xrightarrow{\ast} \left( P(\text{header}_{t,0}) \right)_{H',F'}$$

avec $\{x_n \mapsto v_n, \ldots, x_1 \mapsto v_1\} \subseteq \beta_F$ et $(H',F')$ qui vérifie la propriété $P$. De plus on s’assurera qu’on ne passe par aucun bloc d’indice $i$ tel que $i > n$.

a) cas de base $k = 0$ : trivialement vrai car il est impossible que

$$\llbracket H,F_{s_n} \rrbracket^{s_n} = M(s_n)$$

soit vide par hypothèse du lemme.

b) cas inductif : on suppose que pour tout tas $H$ et tout frame $F$ tels que $(H,F)$ vérifie la propriété $P$ et $F(i_{s_n}) = k - 1$, on a :

$$\left( c_{s_n} = \text{icmp} \geq \, i_{s_n}, 0 \\ \text{br} c_{s_n}, \text{body}_{t,n}, \text{footer}_{t,n-1} \right)_{H,F} \xrightarrow{\ast} \left( P(\text{header}_{t,0}) \right)_{H',F'}$$

avec $\{x_n \mapsto v_n, \ldots, x_1 \mapsto v_1\} \subseteq \beta_F$ et $(H',F')$ qui vérifie la propriété $P$. De plus on sait que cette réduction ne passe par aucun bloc d’indice $i$ tel que $i > n$.  

79
5. Preuves sur la sémantique

On commence le cas inductif en effectuant la séquence de réductions suivante

\[
\begin{align*}
&\vdash c_{s_n} = \text{icmp} \; i_{s_n};
\quad i_{s_n}, 0 \\
&\quad \text{br} \; c_{s_n}, \; \text{body}_{t,n}, \; \text{footer}_{t,n+1} \; \quad H_0, F_2 \\
&\quad \rightharpoonup^* \quad \left( \text{br} \; c_{s_n}, \; \text{body}_{t,n}, \; \text{footer}_{t,n+1} \right) \; H_0, F_3 \\
&\quad \rightharpoonup^* \quad \left( x_n = \text{fcall nth}_s(x_{s_n}, i_{s_n}) \right) \; H_0, F_4 \\
&\quad \rightharpoonup^* \quad \left( \text{br} \; \text{header}_{t,n-1} \right) \; H_0, F_5 \\
\end{align*}
\]

avec les frames :

\[
\begin{align*}
&F_3 \overset{\text{df}}{=} F_2 \oplus \{ c_{s_n} \mapsto \text{true} \} \\
&F_4 \overset{\text{df}}{=} (l_c, F_5, \; \text{body}_{t,n}, \; \beta_{F_5}) \\
&F_5 \overset{\text{df}}{=} (\text{loop}_{t,n}, \; \text{body}_{t,n}, \; \beta_{F_5} \oplus \{ c_{s_n} \mapsto \text{true}, x_n \mapsto v_n \})
\end{align*}
\]

On a deux cas :

i. \((x_n, v_n) \in \beta\) : comme \((H_0, F_5)\) vérifie la propriété \(P\) on applique l’hypothèse d’induction (5.28).

\[
\left( P(\text{header}_{t,n-1}) \right)_{H_0, F_5} \rightharpoonup^* \left( P(\text{header}_{t,0}) \right)_{H_1, F_6}
\]

avec \(\{ x_{n-1} \mapsto v_{n-1}, \ldots, x_1 \mapsto v_1 \} \subseteq \beta_{F_6}\) et \((H_1, F_6)\) qui vérifie la propriété \(P\). Mais comme \(\{ x_n \mapsto v_n \} \subseteq \beta_{F_5}\) et qu’on n’est pas repassé par le bloc \(\text{loop}_{t,n}\) on a aussi \(\{ x_n \mapsto v_n \} \subseteq \beta_{F_6}\) puisque LLVM respecte la forme SSA. On a donc bien \(\{ x_n \mapsto v_n, \ldots, x_1 \mapsto v_1 \} \subseteq \beta_{F_6}\).

ii. \((x_n, v_n) \notin \beta\) : dans ce cas, on applique le lemme 5.4 et on arrive dans le bloc \(\text{footer}_{t,n}\) avec un tas \(H_1\) et un frame \(F_6\) tels que \((H_1, F_6)\) vérifie la propriété \(P\).

\[
\left( P(\text{footer}_{t,n}) \right)_{H_0, F_5} \rightharpoonup^* \left( P(\text{footer}_{t,n}) \right)_{H_1, F_6}
\]

De plus on sait que cette réduction ne passe par aucun bloc d’indice \(i\) tel que \(i \geq n\). On déroule la définition du bloc \(\text{footer}_{t,n}\) :

\[
P(\text{footer}_{t,n}) \overset{\text{df}}{=} \left\{ \begin{array}{ll}
& i'_n = \text{add} \; i_{s_n}, \; -1 \\
& \text{br} \; \text{loop}_{t,n}
\end{array} \right.
\]

On effectue les réductions suivantes :

\[
\left( P(\text{footer}_{t,n}) \right)_{H_1, F_6} \rightharpoonup^* \left( P(\text{loop}_{t,n}) \right)_{H_1, F_7}
\]

avec \(F_7 \overset{\text{df}}{=} (l_c, F_6, \; \text{loop}_{t,n}, \; \beta_{F_6} \oplus \{ i'_{s_n} \mapsto k - 1 \})\) car la valeur de \(i_{s_n}\) n’a pas pu être modifiée (on n’est pas repassé par le bloc \(\text{loop}_{t,n}\)). On continue les réductions :

\[
\begin{align*}
&i_{s_n} = \text{phi} \; (s_{s_n}, \; \text{header}_{t,n}), (i'_{s_n}, \; \text{footer}_{t,n}) \\
&c_{s_n} = \text{icmp} \; >, \; i_{s_n}, \; 0 \\
&\quad \text{br} \; c_{s_n}, \; \text{body}_{t,n}, \; \text{footer}_{t,n-1} \; \quad H_1, F_7 \\
&\quad \rightharpoonup^* \quad \left( c_{s_n} = \text{icmp} \; >, \; i_{s_n}, \; 0 \\
&\quad \quad \text{br} \; c_{s_n}, \; \text{body}_{t,n}, \; \text{footer}_{t,n-1} \right) \; H_1, F_8
\end{align*}
\]
5.3. Correction des fonctions $\text{succ}_t$

avec $F_S \triangleq F_t \oplus \{i_{s_n} \mapsto k - 1\}$. On conclue en appliquant l’hypothèse d’induction (5.29) car $(H_1, F_S)$ vérifie la propriété $P$ et la valeur de $i_{s_n}$ a été décrémentée de 1.

Ce qui conclue la preuve. $\square$

5.3.4 Correction de $\text{succ}_t$

Pour prouver la correction des fonctions $\text{succ}_t$ on rappelle le théorème 4.12 du chapitre 4 correspondant.

Soient $F$ un frame et $p_{mrk}$ un pointeur d’un tas $H$ tels que $p_{mrk} \downarrow H = \text{dom}(H)$, $[H, p_{mrk}]^{x_{mrk}} = M$ et $\beta_F(x_{mrk}) = p_{mrk}$. Si

\[
\left( \text{fcall succ}(x_{mrk}) \right)_{H,F} \rightsquigarrow^* \left( p_{set} \right)_{H \oplus H'}
\]

alors

\[
\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') = \emptyset \quad (5.30)
\]

\[
[H \oplus H', p_{set}]^{\text{set}} = \{M' | \exists \beta, M[t, \beta]M'\} \quad (5.31)
\]

Preuve

D’après la règle $\text{fcall}$ il nous suffit de montrer que

\[
\left( P(\text{succ}_t(x_{mrk})) \right)_{H,F} \rightsquigarrow^* \left( p_{set} \right)_{H \oplus H'}
\]

où $F \equiv (\bot, \text{succ}_t\{x_{mrk}\}, \{x_{mrk} \mapsto p_{mrk}\})$ avec les conséquences (5.30) et (5.31). On commence par montrer la conséquence (5.30) de ce théorème. On remarque qu’on ne manipule ni les pointeurs ni les données du tas $H$ explicitement, ils sont manipulés et éventuellement modifiés à travers des appels de fonction. On vérifie que ces fonctions ne peuvent modifier le tas $H$ :

- les fonctions $\text{get}_k$, $\text{size}_k$ et $\text{nth}_k$ pour $1 \leq k \leq n$ : ne modifient pas le tas d’après leur spécification ;
- la garde $g_t$, n’a pas d’effets de bord visibles du point de vue de notre programme, elle ne modifie pas $H$ ;
- la fonction $\text{fire}_t$, ne modifie pas $H$ d’après son théorème de correction (théorème 4.10) ;
- les autres fonctions peuvent être exécutés dans un tas séparé de $H$ donc d’après le théorème d’extensionnalité (4.7), elles ne modifient pas le tas $H$.

La conséquence (5.30) est bien vérifiée.

On montre la conséquence (5.31) en deux étapes. La première étape consiste à montrer que tous les marquages successeurs sont contenus dans l’ensemble retourné par la fonction, c’est-à-dire que :

\[
\{M' \mid \exists \beta, M[t, \beta]M'\} \subseteq [H \oplus H', p_{set}]^{\text{set}}
\]

La seconde étape consiste à montrer que les seuls marquages qu’on ajoute à $[H \oplus H', p_{set}]^{\text{set}}$ sont les marquages successeurs ce qui donne l’inclusion dans l’autre sens.
5. Preuves sur la sémantique

(\(\subseteq\)) Soit \(\beta = \{x_n \mapsto v_n, \ldots, x_1 \mapsto v_1\}\) un mode tel que \(M[t, \beta]M'\). Il suffit de montrer que le marquage \(M'\) est ajouté dans l’ensemble produit ; en effet, la fonction \(add_{set}\) est la seule qui manipule le pointeur \(p_{set}\), les autres fonctions pouvant être exécutées en extensionnalité, elles ne peuvent pas modifier la structure pointée par \(p_{set}\) (d’après le théorème d’extensionnalité 4.7 et les spécifications des fonctions).

Soit \(H_0\) un tas et \(p_{mrk}\) un pointeur de \(H_0\) tels que décrits dans l’énoncé. Soit \(F_0 \overset{df}{=} (\bot, succ_t(x_{mrk}), \{x_{mrk} \mapsto p_{mrk}\})\). On commence les réductions :

\[
P(succ_t(x_{mrk})) \overset{df}{=} \begin{cases} x_{set} = fcall alloc_{set}() & \text{br header}_{t,n} \\
( P(succ_t(x_{mrk})) )_{H_0,F_0} \rightsquigarrow^* ( P(header_{t,n}) )_{H_0 \oplus H_1,F_1}
\end{cases}
\]

avec

\[
F_1 \overset{df}{=} (\text{succ}_t, \text{header}_{t,n}, \beta_F \oplus \{x_{set} \mapsto p_{set}\})
\]

\[
[ H_0 \oplus H_1, p_{set} ]_{set} = \emptyset
\]

On peut appliquer le lemme 5.6 avec la valuation \(\beta\) car \((H_0 \oplus H_1, F_1)\) vérifie la propriété \(P\). Il en résulte :

\[
( P(header_{t,n}) )_{H_0 \oplus H_1,F_1} \rightsquigarrow^* ( P(header_{t,0}) )_{H_2,F_2}
\]

avec \((H_2, F_2)\) qui vérifie la propriété \(P\) et \(\beta \in \beta_F\). Par définition :

\[
P(header_{t,0}) \overset{df}{=} \begin{cases} c_g = fcall g_t(x_1, \ldots, x_n) & \\
\text{br } c_g, \text{ body}_{t,0}, \text{ footer}_{t,1}
\end{cases}
\]

Comme \(\beta\) est un mode valide on a la réduction suivante :

\[
( P(header_{t,0}) )_{H_2,F_2} \rightsquigarrow^* ( P(body_{t,0}) )_{H_2 \oplus H_3,F_3}
\]

avec

\[
F_3 = (\text{header}_{t,0}, \text{body}_{t,0}, \beta_{F_2} \oplus \{c_g \mapsto \text{true}\})
\]

On continue à réduire avec la définition de la règle \(\text{assign}\) et de la spécification de la fonction \(\text{fire}\) :

\[
P(header_{t,0}) \overset{df}{=} \begin{cases} x'_{mrk} = fcall \text{fire}_t(x_{mrk}, x_1, \ldots, x_n) & \text{pcall } add_{set}(x_{set}, x'_{mrk}) & \text{br } footer_{t,1} \\
(H_3 \oplus H_4,F_4) \rightsquigarrow^* ( \text{pcall } add_{set}(x_{set}, x'_{mrk}) )_{H_3 \oplus H_4,F_4}
\end{cases}
\]

De plus on obtient :

\[
F_4 \overset{df}{=} F_3 \oplus \{x_{mrk} \mapsto p'_{mrk}\}
\]

\[
[H_4, p'_{mrk}]_{mrk} = M'
\]

On pose \(H_5 \overset{df}{=} H_2 \oplus H_3 \oplus H_4\) et on conclue avec la dernière réduction :

\[
( \text{pcall } add_{set}(x_{set}, x'_{mrk}) )_{H_5,F_4} \rightsquigarrow^* ( \text{br } footer_{t,1} )_{H_5 \oplus H_6,F_4}
\]

avec par la spécification de la fonction \(add_{set}\)

\[
[H_4 \oplus H_5, p_{set}]_{set} = [H_4, p_{set}]_{set} \cup \{M'\}
\]

On ajoute bien le marquage \(M'\) à l’ensemble.
On remarque que les seules opérations effectuées sur \( p_{set} \) et donc sur \( \llbracket H \oplus H', p_{set} \rrbracket \) sont les ajouts de marquages car la fonction \( \text{fire}_t \) renvoie un marquage successeur par un mode \( \beta \) (voir théorème de correction 4.10). Il en résulte que si un marquage appartient à \( \llbracket H \oplus H', p_{set} \rrbracket \) alors il a été ajouté dans le bloc \( \text{body}_{t,0} \) par l'instruction

\[
\text{pcall add}_{set}(x'_{mrk}, x_1, \ldots, x_n)
\]  

Les blocs sur lesquels on va raisonner sont :

\[
P(\text{header}_{t,0}) \equiv \begin{cases}
  c_g = \text{fcall } g_t(x_1, \ldots, x_n) \\
  \text{br } c_g, \text{ body}_{t,0}, \text{ footer}_{t,1}
\end{cases}
\]

\[
P(\text{body}_{t,0}) \equiv \begin{cases}
  x'_{mrk} = \text{fcall fire}_t(x_{mrk}, x_1, \ldots, x_n) \\
  \text{pcall set}_{set}(x_{set}, x'_{mrk}) \\
  \text{br } \text{footer}_{t,1}
\end{cases}
\]

On va montrer que si on est arrivé à l'instruction (5.32) alors on effectue bien un ajout de marquage successeur. Supposons qu’on est dans l’état suivant :

\[
\begin{pmatrix}
  \text{pcall add}_{set}(x_{pset}, x_{pmrk}) \\
  \ldots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
  H \oplus H_0 \\
  F \oplus \beta_0
\end{pmatrix}
\]  

Il faut montrer que \( \llbracket H \oplus H_0, (F \oplus \beta_0)(x_{pmrk}) \rrbracket \) est bien un marquage successeur. Si on est arrivé en (5.33), alors on vient de :

\[
\begin{pmatrix}
  x_{pmrk} = \text{fcall fire}_t(x_{pmrk}, x_1, \ldots, x_n) \\
  \text{pcall add}_{set}(x_{pset}, x_{pmrk}) \\
  \ldots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
  H \oplus H_1 \\
  F \oplus \beta_1
\end{pmatrix}
\]

Il en suit que \( \beta_0 = \beta_1 \oplus \{x_{pmrk} \mapsto p_{pmrk}\} \). Par le théorème de correction de la fonction \( \text{fire}_t \), \( \llbracket H \oplus H_0, p_{pmrk} \rrbracket \) est un marquage successeur si :

\[
\{x_1 \mapsto (F \oplus \beta_1)(x_1), \ldots, x_n \mapsto (F \oplus \beta_1)(x_n)\}
\]  

est un mode valide. Il nous reste à montrer que c’est bien un mode valide.

On continue notre raisonnement, si on est en (5.34) alors on vient du bloc \( \text{header}_{t,0} \), et plus précisément de la configuration :

\[
\begin{pmatrix}
  \text{br } c_g, \text{ body}_{t,0}, \text{ footer}_{t,n} \\
  \text{H} \oplus H_1,
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
  F \oplus \beta_1
\end{pmatrix}
\]  

comme on a fait le branchement en \( \text{body}_{t,0} \), \( (F \oplus \beta_1)(c_g) = \text{true} \). Si on est en (5.36) alors on vient de :

\[
\begin{pmatrix}
  c_g = \text{fcall } g_t(x_1, \ldots, x_n) \\
  \text{br } c_g, \text{ body}_{t,0}, \text{ footer}_{t,n} \\
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
  \text{H} \oplus H_2 \\
  F \oplus \beta_2
\end{pmatrix}
\]

et \( \beta_1 = \beta_2 \oplus \{c_g \mapsto \text{true}\} \). D’après la sémantique de la règle \( \text{assign}_{expr} \) on a \( (F \oplus \beta_1)(c_g) = \text{true} \) seulement si :

\[
\begin{pmatrix}
  \text{fcall } g_t(x_1, \ldots, x_n) \\
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
  \text{H} \oplus H_2 \\
  F \oplus \beta_2
\end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix}
  \text{true}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
  \text{H} \oplus H_1
\end{pmatrix}
\]  

83
La réduction (5.38) est possible seulement si
\[ \{x_1 \mapsto (F \oplus \beta_2)(x_1), \ldots, x_n \mapsto (F \oplus \beta_2)(x_n)\} \]
est un mode valide. Il suffit de remarquer que
\[ F \oplus \beta_1 = F \oplus \beta_2 \oplus \{c_g \mapsto \text{true}\} \oplus \{x_{\text{pmark}} \mapsto p_{\text{pmark}}\} \]
et donc \( \{x_1 \mapsto (F \oplus \beta_1)(x_1), \ldots, x_n \mapsto (F \oplus \beta_1)(x_n)\} \) est un mode valide (5.35).
On a bien prouvé que si on ajoute un marquage alors c’est bien un marquage successeur car il correspond à un mode valide.
Par induction sur \( n \), on peut ensuite prouver que les jetons proviennent bien des places en entrée de la transition \( t \), ce qui permet de conclure. \( \square \)

5.4 Correction des optimisations

Dans cette section, on réalise les preuves des optimisations de la section 4.8.

5.4.1 Optimisation du calcul des modes : la fonction \( \text{succ}_t \) 1-borneé

Afin de prouver la correction de cette optimisation, on reprend les preuves de la section 5.3 et on les adapte au nouvel algorithme. Rappelons respectivement, les blocs initiaux et les blocs optimisés sur la figure 5.1 et la figure 5.2.

On reprend les mêmes hypothèses que dans la section 5.3. Les énoncés qui suivent sont définis dans le contexte où \( M \) est un marquage, \( t \) une transition à \( n \) places en entrée, \( p_{\text{mark}} \) et \( p_{\text{set}} \) sont deux pointeur, \( x_{\text{mark}} \) et \( x_{\text{set}} \) sont deux variables. De la même manière on considère la propriété \( P \) (définition 5.1, page 74).

\[
\begin{align*}
P(\text{header}_{t,k}) & \equiv \begin{cases} 
  x_{sk} = \text{fcall } \text{get}_{sk}(x_{\text{mark}}) \\
  s_{sk} = \text{fcall } \text{size}_{sk}(x_{sk}) \\
  \text{br } \text{loop}_{t,k}
\end{cases} \\
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
P(\text{loop}_{t,k}) & \equiv \begin{cases} 
  i_{sk} = \phi(i_{sk}, \text{header}_{t,k}, (i'_{sk}, \text{footer}_{t,k})) \\
  c_{sk} = \text{icmp } >, i_{sk}, 0 \\
  \text{br } c_{sk}, \text{body}_{t,k}, \text{footer}_{t,k+1}
\end{cases} \\
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
P(\text{body}_{t,k}) & \equiv \begin{cases} 
  x_k = \text{fcall } \text{nth}_{sk}(x_{sk}, i_{sk}) \\
  \text{br } \text{header}_{t,k-1}
\end{cases} \\
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
P(\text{footer}_{t,k}) & \equiv \begin{cases} 
  i'_{sk} = \text{add } i_{sk}, -1 \\
  \text{br } \text{loop}_{t,k}
\end{cases} \\
\end{align*}
\]

Figure 5.1 – Les blocs initiaux de la fonction \( \text{succ}_t \) spécifiques à la place \( s_k \).
5.4. Correction des optimisations

\begin{align*}
P(\text{header}_{t,k}) & \triangleq \begin{cases} 
  x_{p_{q_k}} = \text{fcall get}_{q_k}(x_{p_{q_k}}) \\
  \text{br loop}_{t,k}
\end{cases} \\

P(\text{loop}_{t,k}) & \triangleq \begin{cases} 
  c_{q_k} = \text{fcall notempty}(x_{p_{q_k}}) \\
  \text{br} c_{q_k}, \text{body}_{t,k}, \text{footer}_{t,k+1}
\end{cases} \\

P(\text{body}_{t,k}) & \triangleq \begin{cases} 
  x_k = \text{fcall nth}_{q_k}(x_{p_{q_k}}, 0) \\
  \text{br header}_{t,k-1}
\end{cases} \\

P(\text{footer}_{t,k}) & \triangleq \begin{cases} 
  \text{br} \text{footer}_{t,k+1}
\end{cases}
\end{align*}

Figure 5.2 – Les blocs optimisés de la fonction succ spécifique à la place \( s_k \).

**Lemme 5.7.** Quel que soit le nombre \( n \) de places en entrée de la transition \( t \) et pour tout tas \( H \) et tout frame \( F \) tels que \((H, F)\) vérifie la propriété \( P \), on a :

\[
\begin{align*}
( P(\text{header}_{t,n}) )_{H,F} \rightsquigarrow^* ( P(\text{footer}_{t,n+1}) )_{H',F'},
\end{align*}
\]

avec \((H', F')\) qui vérifie la propriété \( P \) et sans être passé par les blocs d’indice supérieur à \( n \), i.e.,

\[
\begin{align*}
( P(\text{header}_{t,n}) )_{H,F} \rightsquigarrow^* ( P(\text{block}_{t,i}) )_{H'',F''}
\end{align*}
\]

pour \( i > n \) et \( \text{block} \in \{ \text{header}, \text{loop}, \text{body}, \text{footer} \} \) n’est pas un préfixe strict de la réduction ci-dessus.

**Preuve** On reprend la preuve du lemme 5.4 de la section 5.3. Dans le cas inductif, on a deux sous-cas à traiter :

1. La place \( n \) utilise les blocs initiaux : dans ce cas on a la même preuve.
2. La place \( n \) utilise les blocs optimisés : on reprends le même schéma de preuve que pour les blocs initiaux en plus simple : après le bloc \( \text{footer}_k \), on atteint le bloc \( \text{footer}_{k+1} \).

\( \Box \)

**Lemme 5.8.** Soit \( H \) un tas et \( F \) un frame tels que \((H, F)\) vérifie la propriété \( P \). Soit \( \beta = \{ x_n \mapsto v_n, \ldots, x_1 \mapsto v_1 \} \) une valuation LLVM telle que \([H, v_i]^t(s_i) \in M(s_i)\) pour \( 1 \leq i \leq n \). Si

\[
\begin{align*}
( P(\text{header}_{t,n}) )_{H,F} \rightsquigarrow^* ( P(\text{header}_{t,0}) )_{H',F''}
\end{align*}
\]

alors \( \beta \subseteq \beta_{F'} \) et \((H', F'')\) vérifie la propriété \( P \). De plus on s’assure de n’être passé par aucun bloc indexé par \( i \) tel que \( i > n \), i.e.,

\[
\begin{align*}
( P(\text{header}_{t,n}) )_{H,F} \rightsquigarrow^* ( P(\text{block}_{t,i}) )_{H'',F''}
\end{align*}
\]

pour \( i > n \) et \( \text{block} \in \{ \text{header}, \text{loop}, \text{body}, \text{footer} \} \) n’est pas un préfixe strict de la réduction ci-dessus.

85
5. Preuves sur la sémantique

Preuve  On reprends la preuve du lemme 5.6 de la section 5.3. Dans le cas inductif, il faut traiter les deux cas suivants :

1. La place \( n \) utilise les blocs initiaux : dans ce cas on a la même preuve.
2. La place \( n \) utilise les blocs optimisés : la place ne peut pas être vide sinon on contredit les hypothèses (on a un mode et donc on a un jeton qui nous convient). Comme la place ne peut contenir que le jeton •, la réduction conduit au bloc header \( n-1 \), on conclue par l’hypothèse d’induction.  

\[ \square \]

Théorème 5.9. Soient \( F \equiv (\bot, \text{succ}, \{x_{\text{mrk}} \mapsto p_{\text{mrk}}\}) \) un frame et \( p_{\text{mrk}} \) un pointeur d’un tas \( H \) tels que \( p_{\text{mrk}} \downarrow H = H \) et \( [H, p_{\text{mrk}}]_{\text{mrk}} = M \). Si

\[ \left( P(\text{succ} \langle x_{\text{mrk}} \rangle) \right)_{H,F} \rightsquigarrow^* \left( p_{\text{set}} \right)_{H@H'} \]

alors

\[ \text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') = \emptyset \] (5.39)

\[ [H @ H', p_{\text{set}}][\text{set}] = \{ M' | \exists \beta, M[t, \beta] M' \} \] (5.40)

Preuve  Exactement la même preuve que le théorème 4.12 réalisée en section 5.3 mais avec les lemmes 5.7 et 5.8 qu’on vient de prouver.  

\[ \square \]

5.4.2 Place jeton noir 1-bornée

Rappelons l’implantation de la place 1-bornée jeton noir sur la figure 5.3 et les fonctions d’interprétation utilisées. La fonction d’interprétation de la structure des places :

\[ [H, p_s] = \emptyset \text{ si } H(p_s) = (\text{bool, false}) \]
\[ [H, p_s] = \{•\} \text{ si } H(p_s) = (\text{bool, true}) \]

La fonction d’interprétation de l’encodage des jetons :

\[ [[H, v]](s) = • \text{ si } v \in \{\text{true, false}\} \]

On ne prouve pas la propriété de validité de la fonction d’interprétation car elle est triviale dans ce cas.

Dans la suite de cette section, on se placera sous les hypothèses suivantes : \( H \) est un tas, \( F \) est un frame, \( x \) et \( x_s \) sont deux variables, \( v \) est un booléen et \( p_s \) est un pointeur sur une place \( s \), 1-bornée jeton noir, tels que \([H, p_s] = \emptyset\), \( F(x_s) = p_s \) et \( F(x) = v \).

Dans les preuves qui suivent on utilise le fait que la place \( s \) est 1-bornée, c’est à dire que certaines opérations ne sont pas définies si la place est vide ou bien pleine.

Fonctions \( \text{add}_s, \text{rem}_s \) et \( \text{clear}_s \)

Pour la fonction \( \text{add}_s \) on a défini implantation suivante :

\[ P(\text{add}_s \langle x_s, x \rangle) \equiv \]
\[ \text{store true, } x_s \]
\[ \text{ret} \]
5.4. Correction des optimisations

Rappelons la spécification à vérifier :

\[
\left( \text{pcall add}_s(x, x) \right)_{H,F} \leadsto \left( \text{skip} \right)_{H@H',F} \tag{5.1}
\]

\[
\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') \subseteq p_s \downarrow_H \tag{5.2}
\]

\[
[H \otimes H', p_s]^s = [H, p_s]^s + \{[H, v]^t(s)\} \tag{5.3}
\]

**Observation :** La place étant 1-bornée, si on appelle la fonction \( \text{add}_s \) alors la place est initialement vide.

On prouve que cette spécification est correcte en la prouvant pour un tas \( H \) et un frame \( F \) restreints tels que \( H = \{p_s \mapsto (\text{bool, false})\} \) et \( \beta_F = \{x_s \mapsto p_s, x \mapsto v\} \). La valeur du booléen dans le tas est connue car la place est initialement vide. On ne montrera pas la conséquence (5.2) car ce sera une conséquence immédiate d’une application du théorème d’extensionnalité (théorème 4.7) afin de revenir à l’enoncé initial. On sait que

\[
\left( \text{pcall add}_s(x, x) \right)_{H,F} \leadsto \left( \text{skip} \right)_{H@H',F}
\]

seulement si

\[
\left( \begin{array}{l}
\text{store true, } x_s \\
\text{ret}
\end{array} \right)_{H,F_0} \leadsto \left( \begin{array}{l}
\text{ret}
\end{array} \right)_{H@H',F'}
\]

avec \( F_0 = (\bot, \text{add}_s([x, x], \{x_s \mapsto p_s, x \mapsto v\})) \). Or, on a

\[
\left( \begin{array}{l}
\text{store true, } x_s \\
\text{ret}
\end{array} \right)_{H_0,F_0} \leadsto \left( \begin{array}{l}
\text{ret}
\end{array} \right)_{H_0@H_1}
\]

avec \( H_1 = \{p_s \mapsto (\text{bool, true})\} \). On a bien le résultat (5.1). Le résultat (5.3) est vrai car \( [H \otimes H_1, p_s]^s = \{•\} = [H, p_s]^s + \{[H, v]^t(s)\} \).

\[
\begin{array}{l}
P(\text{add}_s([x, x])) \overset{df}{=} \text{store true, } x_s \\
\text{ret}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
P(\text{rem}_s([x, x])) \overset{df}{=} \text{store false, } x_s \\
\text{ret}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
P(\text{copy}_s([x, x'])) \overset{df}{=} x = \text{load } x_s \\
\text{store } x, x_s' \\
\text{ret}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
P(\text{notempty}_s([x])) \overset{df}{=} x = \text{load } x_s \\
\text{ret}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
P(\text{cons}_s([])) \overset{df}{=} \text{store false, } x_s \\
\text{ret}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
P(\text{size}_s([x])) \overset{df}{=} x = \text{load } x_s \\
\text{br } x, l_1, l_2
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
P(\text{nth}_s([x, i])) \overset{df}{=} \text{ret true} \\
\text{store false, } x_s \\
\text{ret}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
P(\text{clear}_s([x])) \overset{df}{=} x = \text{load } x_s \\
\text{ret 1}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
P(l_1) \overset{df}{=} \text{ret 1} \\
P(l_2) \overset{df}{=} \text{ret 0}
\end{array}
\]

**Figure 5.3 – Implantation d’une place 1-bornée de type jeton noir.**

87
5. Preuves sur la sémantique

**Observation :** La place étant 1-bornee, si on appelle la fonction \( \text{rem}_s \) alors la place est initialement marquée.

On utilise la même approche pour la fonction \( \text{rem}_s \) en supposant cette fois la place marquée, c'est-à-dire \([H, p_s]^s = \{\bullet\} \). Quant à la fonction \( \text{clear}_s \), on obtient le résultat souhaité par définition de la fonction d'interprétation.

**Fonction \( \text{size}_s \)**

Pour la fonction \( \text{size}_s \), on a :

\[
P(\text{size}_s(x_s)) \overset{df}{=} \begin{cases} 
  x = \text{load} x_s \\
  \text{br} x, l_1, l_2
\end{cases}
\]

\[
P(l_1) \overset{df}{=} \text{ret } 1 \quad P(l_2) \overset{df}{=} \text{ret } 0
\]

La spécification souhaitée est :

\[
( \text{fcall size}_mset(p_mset) )_{H,F} \leadsto \left( \text{card}(\text{dom}([H, p_mset]^{mset(t)})) \right)_H
\]

On donne l’intuition de la preuve sans la faire en détails, on a deux cas possibles :

1. Si la place est vide alors on aura \( H(p_s) = (\text{bool}, \text{false}) \), le saut conditionnel nous enverra à l’étiquette \( l_2 \) et on renverra alors la valeur 0 (domaine vide).

2. Si la place est pleine alors on aura \( H(p_s) = (\text{bool}, \text{true}) \), le saut conditionnel nous enverra à l’étiquette \( l_1 \) et on renverra alors la valeur 1 (un seul élément dans le domaine).

**Fonction \( \text{notempty}_s \)**

On veut que la fonction

\[
P(\text{notempty}_s(x_s)) \overset{df}{=} \begin{cases} 
  x = \text{load} x_s \\
  \text{ret } x
\end{cases}
\]

vérifie sa spécification

\[
( \text{fcall notempty}_s(p_s) )_{H,S} \leadsto \left( \text{card}(\text{dom}([H, p_s]^{mset(t)})) \neq \emptyset \right)_H
\]

Par définition de la structure de données, si la place est vide alors \( H(p_s) = (\text{bool}, \text{false}) \) et donc l'instruction \( \text{load} x_s \) se réduira en \( \text{false} \), on aura bien le résultat attendu car \( \emptyset \neq \emptyset \) est faux. En revanche, si la place est marquée alors \( H(p_s) = (\text{bool}, \text{true}) \) et donc l'instruction \( \text{load} x_s \) se réduira en \( \text{true} \), on aura le bon résultat.
5.4. Correction des optimisations

Fonction \textit{nth}\_s

On a l’implantation suivante :

\[
P(nth\_s(p_s, i)) \overset{df}{=} \text{ret true}
\]

La spécification qu’elle doit vérifier est la suivante :

\[
\begin{aligned}
\text{Fcall nth\_s}(p_s, i) & \rightarrow (p_i)_{H} \\
[H, p_s]^{\text{map}(t)} &= \{x_1 \mapsto k_1, \ldots, x_n \mapsto k_n\} \\
[H, p_i]' &= x_i
\end{aligned}
\]

L’implantation vérifie trivialement la spécification car :

- Si la place est vide alors appeler la fonction est illégal et donc le comportement est indéfini (la valeur renvoyée importe peu).
- Si la place est marquée alors on ne peut renvoyer qu’un seul jeton : le jeton noir. Le jeton noir étant encodé par un booléen quelconque la valeur \text{true} convient.

Fonction \textit{copy}\_s

Sous les mêmes hypothèses, soit \(p'_s\) un pointeur sur la place \(s\) d’une autre instance de la structure de marquage et \(x'_s\) une variable telle que \(F(x'_s) = p'_s\).

Dans ces conditions la fonction \textit{copy}\_s est définie par :

\[
P(copy\_s(x_s, x'_s)) \overset{df}{=} \\
x = \text{load } x_s \\
\text{store } x, x'_s \\
\text{ret}
\]

La spécification demandée par l’interface des places est :

\[
\begin{aligned}
\text{pcall copy\_s}(x_s, x'_s) & \rightarrow \text{skip } (H \oplus H', F) \\
\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') & \subseteq x'_s \downarrow H \\
[H, p_s]^s = [H \oplus H', p_s]^s = [H \oplus H', p'_s]^s
\end{aligned}
\]

(5.4)

De la même manière que pour la fonction \textit{add}\_s on va restreindre le tas \(H\) de façon à conclure en utilisant le théorème d’extensionnalité (théorème 4.7). Soit \(H_0 \overset{df}{=} \{p_s \mapsto (\text{bool}, v), p'_s \mapsto (\text{bool}, v')\}\) un tas, et \(F_0\) un frame tel que \(\beta_{F_0} = \{x_s \mapsto p_s, x'_s \mapsto p'_s\}\). La conséquence (5.4) sera une conséquence immédiate de l’application du théorème d’extensionnalité. On sait que :

\[
\begin{aligned}
\text{pcall copy\_s}(x_s, x'_s) & \rightarrow \text{skip } (H_0 \oplus H', F_0) \\
\text{si } (x = \text{load } x_s \\
& \text{store } x, x'_s \\
& \text{ret})_{H_0, F_0} \rightarrow (\text{ret })_{H_0 \oplus H', F_0}
\end{aligned}
\]

89
avec \( F_1 = (\bot, \text{\texttt{copy}}_{s}(x, x'), \beta_{F_0}) \). On commence à réduire :
\[
\begin{align*}
\left( \begin{array}{c}
x = \text{\texttt{load}}_{s} x_{s} \\
\text{store } x, x'_{s} \\
\text{ret } x_{s}
\end{array} \right)_{H_0,F_1} & \leadsto \left( \begin{array}{c}
\text{store } x, x'_{s} \\
\text{ret } x_{s}
\end{array} \right)_{H_0,F_2}
\end{align*}
\]
où \( F_2 = F_1 \oplus \{ x \mapsto v \} \) car \( H(x_s) = (\text{\texttt{bool}}, v) \). On continue les réductions :
\[
\begin{align*}
\left( \begin{array}{c}
\text{store } x, x'_{s} \\
\text{ret } x_{s}
\end{array} \right)_{H_0,F_2} & \leadsto \left( \text{ret } x_{s} \right)_{H_0 \oplus H_1,F_2}
\end{align*}
\]
où \( H_1 = \{ p_s' \mapsto v \} \).
On a bien \( \llbracket H_0, p_s \rrbracket^s = \llbracket H_0 \oplus H_1, p_s \rrbracket^s = \llbracket H_0 \oplus H_1, p'_s \rrbracket^s \) et on conclue par le théorème d'extensionnalité.

**Fonction \( \text{\texttt{cons}}_{s} \)**

La fonction \( \text{\texttt{cons}}_{s} \) est définie par :
\[
P(\text{\texttt{cons}}_{s}(\langle \rangle)) \triangleq \\
\begin{align*}
x & = \text{\texttt{alloc}} \text{\texttt{bool}} \\
\text{store } \text{\texttt{false}}, x \\
\text{ret } x
\end{align*}
\]

Et doit respecter la spécification :
\[
( \text{\texttt{fcall}} \text{\texttt{cons}}_{s}(\langle \rangle) )_{\emptyset,F} \leadsto ( p_s )_H
\]

pour \( F = (l, l', \emptyset) \). On reprend toujours la même approche, on a
\[
( \text{\texttt{fcall}} \text{\texttt{cons}}_{s}(\langle \rangle) )_{\emptyset,F} \leadsto ( p_s )_H
\]

seulement si
\[
\begin{align*}
\left( \begin{array}{c}
x = \text{\texttt{alloc}} \text{\texttt{bool}} \\
\text{store } \text{\texttt{false}}, x \\
\text{ret } x
\end{array} \right)_{\emptyset,F_0} & \leadsto ( p_s )_H
\end{align*}
\]

avec \( F_0 = (\bot, \text{\texttt{cons}}(\langle \rangle), \emptyset) \). On commence les réductions :
\[
\begin{align*}
\left( \begin{array}{c}
x_s = \text{\texttt{alloc}} \text{\texttt{bool}} \\
\text{store } \text{\texttt{false}}, x_s \\
\text{ret } x_s
\end{array} \right)_{\emptyset,F_0} & \leadsto \left( \begin{array}{c}
\text{store } \text{\texttt{false}}, x_s \\
\text{ret } x_s
\end{array} \right)_{H_0,F_1}
\end{align*}
\]
où \( H_0 = \{ p_s \mapsto (\text{\texttt{bool}}, \bot) \} \) et \( F_1 = F_0 \oplus \{ x_s \mapsto p_s \} \). On continue de réduire :
\[
\begin{align*}
\left( \begin{array}{c}
\text{store } \text{\texttt{false}}, x_s \\
\text{ret } x_s
\end{array} \right)_{H_0,F_1} & \leadsto \left( \text{ret } x_s \right)_{H_1,F_1}
\end{align*}
\]
où \( H_1 = \{ p_s \mapsto (\text{\texttt{bool}}, \text{\texttt{false}}) \} \). On finalise avec la dernière réduction :
\[
( \text{ret } x_s )_{H_1,F_1} \leadsto ( p_s )_{H_1}
\]

On a bien \( \llbracket H, p_s \rrbracket^s = \emptyset \) par définition de la fonction d'interprétation. \( \square \)
L'exploration d’espaces d’états explicite stocke tous les états individuellement en mémoire, de par le problème d’explosion combinatoire, stocker tous ces états est souvent impossible. Il est aussi souvent impraticable de les calculer à cause du temps que ça prendrait. Une manière pour pallier ce problème est de mettre en œuvre des techniques de réduction d’espaces d’états. Pour être intéressantes, ces réductions doivent préserver des propriétés pertinentes de manière à être complètes pour un but recherché (préervation de deadlocks, préervation de tirage de transitions, etc.). Dans notre cas on s’intéresse aux réductions par symétries qui préserveront les données des places, le tirage de transitions et leurs modes (modulo données symétriques).

Les réductions par symétries pour les réseaux place-transition et les réseaux colorés ont été largement étudiées [108]. Dans ce chapitre on s’intéresse à une version étendue qui met en œuvre des processus concurrents qui peuvent être créés dynamiquement pendant l’évolution du système étudié. Ce type de réductions n’a été que peu adressé dans la littérature.

On s’intéresse à des systèmes qui manipulent de multiples processus (ou threads) de manière explicite. Dans les réseaux de bas niveau différents processus sont représentés par des copies d’un sous-réseau dans le modèle, ainsi on simule le comportement de plusieurs instances d’un même processus [110, 118]. Avec les réseaux de haut niveau, on peut représenter l’identité d’un processus par une valeur, ce qui permet d’avoir plusieurs processus qui exécutent la même partie du réseau. Les deux approches sont équivalentes mais la seconde produit un réseau de Petri plus petit en structure, il est plus riche en jetons cependant. La coexistence de plusieurs processus au sein d’un système conduit immédiatement à une explosion combinatoire due aux entrelacements des opérations qu’ils réalisent. Il s’en suit, une augmentation exponentielle de la taille de l’espace d’états du système par rapport à la taille du réseau; si l’espace d’état reste fini il peut être traité avec les mêmes techniques qu’habituellement. Cependant, pour être traités plus rapidement et avec moins de mémoire les techniques de réduction sont nécessaires.

En plus de la cohabitation de plusieurs processus, on souhaite ajouter une notion de création dynamique à l’exécution. La coexistence de plusieurs processus dans un système est rencontrée souvent, cependant la création dyna-
6. Symétries et création dynamique de processus

mique de ceux-ci l’est beaucoup moins [115, 116, 114]. La première raison de cette tendance est l’accentuation de l’explosion combinatoire due à l’ajout de non-déterminisme dans l’ordre de création des processus ainsi que leurs agencements, tout cela augmente la combinatoire dans le système. D’autre part, il est courant de faire mourir et recréer des processus durant l’exécution du système à l’infini, ce qui peut se traduire en la création de nouveaux processus qui n’avaient pas existé avant et qui peuvent être considérés comme nouvelles données du système. Cela peut conduire à des espaces d’états infinis, ce qui rend les techniques de réduction indispensables. Dans ce chapitre on va s’attaquer essentiellement à deux points :

- traiter ce genre de systèmes à comportements potentiellement infinis ;
- réduire leurs espaces d’états.

Des travaux ont déjà été réalisé pour proposer une base théorique pour adresser ce type de systèmes [115, 116, 114], cependant les méthodes de réduction associées n’étaient pas utilisables en pratique à cause de leur complexité.

Ici on revisite complètement la théorie présentée dans ces travaux et on propose une méthode nouvelle et utilisable en pratique.

Le contenu de ce chapitre n’a pas encore été publié. Cependant, un travail préliminaire a été publié dans [Fro12a]

6.1 Réseaux de Petri avec processus

Les systèmes qu’on manipule ont de multiples processus (ou threads) anonymes qui exécutent différentes parties du modèle. On suppose que le comportement du système ne peut pas être influencé par l’identité d’un processus mais seulement par les relations entre processus. Ici on s’intéresse à la relation parent, i.e., étant donné deux processus $a$ et $b$ on peut savoir si $a$ et un parent ou ancêtre de $b$ et vice versa. Dans [115, 116, 114] une relation frère a aussi été considérée et adressée de manière optimiste dans [Fro12a].

6.1.1 Identifiants de processus

Chaque processus dans le système est identifié par un identifiant de processus (pid), en général dénoté par $\pi$, qui est un tuple d’entiers positifs. L’ensemble des pids est $\mathbb{P}$ et l’ensemble des préfixes d’un pid dénote ses ancêtres.

Par exemple, pour le pid $(1, 2, 3)$, son parent est $(1, 2)$ dont le parent est $(1)$. Cette relation de parent (immédiat) est notée avec l’opérateur $\prec_1$ et sa clôture transitive (relation ancêtre) est notée $\prec$. On a donc $(1)\prec_1(1, 2)$ et $(1)\prec(1, 2, 3)$, mais on n’a pas $(1)\prec_1(1, 2, 3)$. Un pid est construit en utilisant une opération de concaténation sur des fragments de pids, $(1, 2, 3) = (1)\cdot(2)\cdot(3) = (1, 2)\cdot(3) = (1)\cdot(2, 3)$. Finalement on introduit le pid vide $(\emptyset)$ pour simplifier les notations, cependant il faut garder à l’esprit que ce pid ne peut pas représenter un processus dans un modèle.

**Définition 6.1 (identifiants de processus).** Les identifiants de processus (pids) sont des éléments de $\mathbb{P} := (\mathbb{N}^+)\star$, l’ensemble des tuples sur des nombres naturels positifs. $\mathbb{P}$ équipé avec l’opération de concaténation de tuples et son élément identité, le tuple vide $(\emptyset)$, est un monoïde.
Pour simplifier les notations, on omet la notation de tuples et on utilise la concaténation à la place. Ainsi le pid \((a_1, a_2, \ldots, a_n)\) est noté \(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n\).

Comme donné en définition, on omet la notation de tuples. Le pid \((1, 2, 3)\) est donc noté \(1 \cdot 2 \cdot 3\). Aussi, pour différencier les pids singletons des entiers, on les prêfère de l’opérateur de concaténation, par exemple, \((1)\) est noté \(1\).

Maintenant, on définit les opérations utilisées pour comparer des identifiants de processus dans un modèle. Le test d’égalité et les opérations qui suivent sont les seules pouvant être utilisées dans les gardes de transitions et sur les arcs, donc, partout dans le réseau, pour comparer de identifiants de processus.

**Définition 6.2. (opérations sur identifiants de processus)** Deux pids \(\pi, \pi' \in \mathbb{P}\) peuvent être comparés en utilisant l’égalité et les opérations \(<_1\) et \(<\) définies par :

- \(\pi <_1 \pi'\) ssi \(\exists a \in \mathbb{N}^+\) tel que \(\pi \cdot a = \pi'\);
- \(\pi < \pi'\) ssi \(\exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^+\) tels que \(\pi \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = \pi', n \neq 1\).

### 6.1.2 Restrictions sur les modèles

On impose des restrictions sur les réseaux de Petri adressés dans ce chapitre, ces restrictions sont nécessaires pour réaliser correctement le mécanisme de création dynamique de processus. Ainsi on suppose que \(\mathbb{P} \subseteq \mathbb{D}\), i.e., les pids sont des valeurs, et on note \(\mathbb{D}_v = \mathbb{D} \setminus \mathbb{P}\). On suppose aussi que les éléments de \(\mathbb{D}_v\) sont comparables entre eux, c’est-à-dire qu’on a un ordre total sur \(\mathbb{D}_v\). Ceci n’est pas une restriction car cet ordre peut être arbitraire.

**Supposition 6.1.** Soit \((S, T, \ell)\) un réseau de Petri. On suppose que :

- pour tout \(s \in S\), le type de \(s\), \(\ell(s)\) est un produit cartésien \(X_1 \times \cdots \times X_k\) \((k \geq 1)\) avec \(X_i = \mathbb{P}\) ou \(X_i \subseteq \mathbb{D}_v\);
- on a une place \(s_0 \in S\) de type \(\ell(s_0) = \mathbb{P} \times \mathbb{P}\), appelée place génératrice ;
- si \(M\) est un marquage et \((\pi_1, \pi_2), (\pi'_1, \pi'_2) \in M(s_0)\) alors \(\pi_1 \neq \pi'_1\).

Pour implémenter la création dynamique de processus le réseau possède une place génératrice \(s_0\) de type \(\mathbb{P} \times \mathbb{P}\). Intuitivement, cette place stocke des paires \(\langle \pi, \pi \cdot \langle i \rangle \rangle\) qui mémorisent le fait que le processus de pid \(\pi\) a créé \(i\) enfants, et que son prochain fils sera \(\pi \cdot \langle i \rangle\). On utilise cette place pour créer de nouveaux processus et on n’autorise pas la réutilisation d’identifiants de processus. Lorsque un processus est créé on termine, cette place devra être mise à jour de manière adéquate. Étant donné un marquage \(M\), on note par \(\text{pid}_M\) l’ensemble de ses pids. De plus, on note \(\mathcal{M}_\pi\) l’ensemble de marquages tels que chaque jeton possède \(\pi\) en première position, c’est-à-dire que chaque jeton est de la forme \(\langle \pi, v_2, \ldots, v_n \rangle\) avec \(n \geq 1\) et \(v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{D}_v \cup \mathbb{P}\).

De plus nous devons supposer qu’aucune valeur de pid n’apparaît dans une expression, c’est-à-dire que les pids ne peuvent être comparés que de manière littérale. Par exemple, nous pouvons avoir l’expression \(\pi < \pi'\) dans une garde où \(\pi\) et \(\pi'\) correspondaient à des jetons en entrée de la transition, mais nous ne pouvons pas avoir \(\pi = 1 \cdot 1\). La même restriction doit s’appliquer à toute formule que nous souhaitons vérifier sur le modèle.

**Supposition 6.2.** Dans un réseau de Petri, on suppose que les pids sont comparés de manière littérale et qu’aucune valeur de pid n’apparaît dans une expression.
Une relation d’équivalence sur les marquage de ce type de réseaux a été définie dans [115, 116, 114]. Cette relation identifie les processus équivalents avec une bijection sur les pids qui préserve la relation parent (et une relation frère qu’on omet ici). Deux processus dans cette relation doivent être associés aux mêmes données dans le réseau, intuitivement, deux processus équivalents doivent être dans le même état. Nous simplifions cette relation d’équivalence en introduisant la notion de marquage *pid-cohérent*. Un marquage pid-cohérent garanti la cohérence entre la place génératrice et les pids des autres places.

**Définition 6.3 (marquage pid-cohérent).** Un marquage $M$ d’un réseau de Petri est *pid-cohérent* ssi pour tout $(\pi, \pi \cdot (k)) \in M(s_0)$ et pour tout $\pi \in \text{pid}_M \setminus \{\pi \cdot (k)\}$ tel que $\pi \overset{\text{df}}{=} \pi \cdot \{i, a_1, \ldots, a_n\}$ ($n \geq 0$) on a $i < k$.

Cela veut dire que si on a un jeton $(\pi, \pi \cdot (k))$ dans la place génératrice alors il n’y a aucun autre jeton dans le réseau dont le préfixe est $\pi$ et son suffixé est supérieur ou égal à $(k)$ dans l’ordre lexicographique. Par exemple si on a $(1,1,1,1)$ dans la place génératrice alors les jetons $1,1,1,2$, $1,1,1,1$, etc. ne peuvent pas apparaître dans le réseau. En revanche, les pids $1,2,1,2,1$, etc. peuvent apparaître dans le réseau s’ils sont cohérents avec la place génératrice, i.e., le jeton $(1,1 \cdot (k'))$ est dans la place génératrice et $k'$ est supérieur à 2 ou bien aucun jeton de la forme $(1, \pi)$ n’est présent dans la place génératrice.

**Définition 6.4 (équivalence de marquages).** Deux marquages *pid-cohérents* $M$ et $M'$ sont $h$-équivalents s’il existe une bijection $h : \text{pid}_M \rightarrow \text{pid}_{M'}$ telle que :

- $\forall \pi, \pi' \in \text{pid}_M : \pi \prec \pi' \text{ ssi } h(\pi) \prec h(\pi')$ pour $\prec$ dans $\{<, \leq\}$ ;
- $M'$ est $M$ après remplacement de chaque pid $\pi$ par $h(\pi)$.

On note cela par $M \sim_h M'$, ou simplement $M \sim M'$.

Des contraintes structurelles sur les modèles ont été utilisées dans les travaux précédents [115, 116, 114, Fro12a], elles impliquent la pid-cohérence pour les marquages accessibles. On suppose donc que tous les marquages accessibles sont pid-cohérents. Il est inutile de donner cette supposition sous forme de contrainte structurelle puisqu’elles existent déjà et peuvent être réutilisées. De plus, cela permet aussi d’être plus général.

**Supposition 6.3.** Tous les marquages accessibles d’un réseau de Petri sont *pid-cohérents*.

Une première contribution présentée dans ce chapitre est le théorème 6.1 qui capture une notion forte de similarité entre marquages. Si deux marquages sont $h$-équivalents alors leur successeurs sont aussi équivalents. Un théorème similaire a été donné dans [114] mais était centré seulement sur les marquages accessibles, ici on relâche cette hypothèse d’accessibilité en la remplacement par une hypothèse de pid-cohérence. Cela sera essentiel dans notre cas, puisqu’on va considérer des états potentiellement non accessibles mais qui sont équivalents à des états accessibles du système.

**Théorème 6.1.** Soient $M$ et $M'$ deux marquages $h$-équivalents et pid-cohérents d’un réseau de Petri $(S,T,\ell)$, soit $t \in T$ une transition et $\beta$ une valuation telles que $M[t,\beta]\overleftarrow{M}$. Alors $M'[t, h \circ \beta]\overleftarrow{M'}$ et $M \sim M'$.
Comme écrit dans [114], la relation $\sim_h$ se comporte comme une relation de bisimulation forte et peut être vue comme suffisante pour une réduction d’espaces d’états pour la détection de deadlocks. De plus, parce que l’équivalence préserve le tirage de transitions et les modes (modulo valeurs symétriques), c’est aussi suffisant pour travailler avec des propriétés sur les séquences d’états, et donc compatible avec la vérification de propriétés temporelles.

6.2. Pid-trees

Les Pid-trees ont été introduits dans [Fro12a] comme représentations pour marquages. Intuitivement, il s’agit d’une structure de données qui représente une hiérarchie de pids qui apparaissent dans un marquage. Ces pids sont associés à des données en utilisant une notion d’appartenance. La racine de l’arbre contient les données qui sont partagées entre tous les processus et les autres nœuds contiennent les données appartenant à un processus spécifique. Le chemin de la racine à un nœud correspond à l’identité du processus (pid) qui est le propriétaire des données du nœud.

Cette intuition reste centrale cependant toute la formalisation de pid-trees a été retravaillée depuis. Les pid-trees sont maintenant utilisés comme primitives de normalisation de marquages et non comme leur représentations dans les espaces d’états. La nouvelle formalisation possède de plus fortes implications et est dirigée par la syntaxe. Les arbres sont représentés avec des tuples et notés avec une flèche comme décrit dans la définition qui suit.

**Définition 6.5 (pid-trees).** Pour chaque $\pi \in \mathcal{P}$ on définit l’ensemble $\Xi_\pi$ par induction comme le plus petit ensemble tel que :

1. pour tout $M_\pi \in (M_\pi \cup \{\bot\})$ on a :
   $$\langle M_\pi, \emptyset \rangle \in \Xi_\pi \text{ noté } M_\pi$$

2. pour tout $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{P}$ et $t_1 \in \Xi_{a_1}, \ldots, t_n \in \Xi_{a_n}$ tels que $a_1, \ldots, a_n$ sont tous distincts, et pour $M_\pi \in (M_\pi \cup \{\bot\})$ on a :
   $$\langle M_\pi, \langle (a_1, t_1), \ldots, (a_n, t_n) \rangle \rangle \in \Xi_\pi \text{ noté } M_\pi - a_1,\ldots,a_n \rightarrow (t_1, \ldots, t_n)$$

En utilisant les ensembles définis ci-dessus, l’ensemble des pid-trees $\Xi$ est $\Xi(\emptyset)$.

Dans la définition ci-dessus chaque $M_\pi$ est un marquage ou $\bot$. Dans le cas où c’est un marquage, chaque jeton qu’il contient est de la forme $(\pi, v_2, \ldots, v_m)$ $(m \geq 1)$ où $\pi \in \mathcal{P}, v_2, \ldots, v_m \in \mathcal{D}$, i.e., chaque jeton est un tuple avec $\pi$ en première composante, les autres composantes sont soit des pids soit des valeurs. La seule exception est la racine, puisque $(\emptyset)$ n’est pas un pid valide, $M_{\emptyset}$ contient des jetons de la forme $(v_1, \ldots, v_m)$ $(m \geq 1)$ où $v_1 \in D_\pi$ et $v_2, \ldots, v_m \in \mathcal{D}$. $\bot$ est une valeur particulière dénotant un marquage vide qui sert de marqueur pour des pids inactifs, i.e., pids qui n’apparaissent pas dans le marquage. La notation “flèche” permet d’écrire les pid-trees de manière moins verbeuse, par exemple le pid-tree.
6. Symétries et création dynamique de processus

\[ (⊥, (1, (M_1, (11, (M_{111}, (((1, (\emptyset, (\emptyset)))))), (2, (\emptyset, (\emptyset)))))),) \]

où \( M_1 \in \mathcal{M}_1 \) et \( M_{111} \in \mathcal{M}_{111} \) est noté par

\[ \begin{align*}
& \downarrow \xrightarrow{1} M_1 \xrightarrow{11, 2} (M_{111} \xrightarrow{1} \emptyset, \downarrow) \\
& \end{align*} \]

Les pid-trees sont aussi représentés graphiquement, un exemple du pid-tree ci-dessus est donné en figure 6.1 où les fragments de pids sont utilisé comme annotations d’arcs et les marquages comme annotations de noeuds.

![Figure 6.1 - Pid-tree](image)

**Figure 6.1 – Pid-tree \( \emptyset \xrightarrow{1} M_1 \xrightarrow{11, 2} (M_{111} \xrightarrow{1} \emptyset, \downarrow) \) où \( M_1 \in \mathcal{M}_1 \) et \( M_{111} \in \mathcal{M}_{111} \)**

**Définition 6.6 (sous-pid-trees).** Soit \( t \) un pid-tree, l’ensemble \( \text{sub}(t) \) des sous-pid-trees de \( t \) est défini inductivement par :

- pour tout \( \langle M_π, (\emptyset) \rangle \in \Xi_π \), \( \text{sub}(\langle M_π, (\emptyset) \rangle) = \{ \langle M_π, (\emptyset) \rangle \} \);
- pour tout \( t \xrightarrow{a_1, \ldots, a_n} (t_1, \ldots, t_n) \in \Xi \), \( \text{sub}(t) = \{ t \} \cup \bigcup_{0 < i < n} \text{sub}(t_i) \).

On note \( \Xi_π \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\pi \in \mathcal{P}} \Xi_π \) l’ensemble de tous les sous-pid-trees.

Par définition 6.5 on peut voir que chaque sous-arbre peut être identifié par un pid obtenu par la concaténation de tous les fragments de pids sur le chemin de la racine au sous-arbre. Par exemple, le sous-arbre \( t \xrightarrow{a_1, \ldots, a_n} (t_1, \ldots, t_n) \) dans la figure 6.1 est identifié par le pid \( 1 \cdot 1 \cdot 1 \) qui est la concaténation de \( 1 \) et \( 1 \cdot 1 \). De plus, on doit avoir \( t \in \Xi_{111} \) et donc tous les jetons dans \( M_{111} \) sont des tuples dont la première composante est \( 1 \cdot 1 \cdot 1 \). Parce qu’on a cette propriété par construction, on va souvent l’exploiter pour désigner un noeud par son pid et vice versa.

On fournit aussi une fonction pour construire un marquage à partir d’un pid-tree, donc chaque pid-tree correspond à un marquage, mais comme on le verra plus tard un marquage peut correspondre à un nombre infini de pid-trees.

**Définition 6.7.** Soit \( t \in \Xi_π \) un sous-pid-tree et \( M_π \in \mathcal{M}_π \) un marquage. La fonction \( \text{mrk} \) est définie inductivement par :

\[
\begin{align*}
\text{mrk}(\langle \emptyset, (\emptyset) \rangle) & \overset{\text{def}}{=} \emptyset \\
\text{mrk}(\langle M_π, (\emptyset) \rangle) & \overset{\text{def}}{=} M_π \\
\text{mrk}(\downarrow a_1, \ldots, a_n \rightarrow (t_1, \ldots, t_n)) & \overset{\text{def}}{=} \text{mrk}(t_1) \cup \cdots \cup \text{mrk}(t_n) \\
\text{mrk}(M_π a_1, \ldots, a_n \rightarrow (t_1, \ldots, t_n)) & \overset{\text{def}}{=} M_π \cup \text{mrk}(t_1) \cup \cdots \cup \text{mrk}(t_n) \\
\end{align*}
\]
De même que pour les marquages, si $t$ est un pid-tree, alors on note par $\text{pid}_t$ l'ensemble des pids dans l'arbre, i.e., l'ensemble de tous les chemins de la racine à chaque noeud dans l'arbre. En plus, cela veut dire que $\text{pid}_{\text{mrk}(t)} \subseteq \text{pid}_t$ parce que l'arbre peut contenir des noeuds vides ($\emptyset$ ou $\perp$) et donc des pids en plus. Maintenant, grâce à toutes les définitions précédentes on peut définir les pid-trees qui nous intéressent : les pid-trees bien formés.

**Définition 6.8 (pid-trees clos et bien formés)**. Un sous-pid-tree $t_0 = M_\pi \xrightarrow{a_1,\ldots,a_n} \langle t_1,\ldots,t_n \rangle \in \Xi_\pi$ est clos par rapport à un pid-tree $t \in \Xi$ (ou $t$-clos) ssi :

1. Si $n = 0$ alors $M_\pi = \perp \Leftrightarrow \langle \pi',\pi \rangle \in \text{mrk}(s_\eta)$.
2. Quel que soit $s \in S \setminus \{s_\eta\}$ pour tout jeton $\langle v_1,\ldots,v_n \rangle \in M_\pi(s)$, on a $v_i \in \mathcal{P}$ si et seulement s'il y a un sous-pid-tree $M_\pi \xrightarrow{b_1,\ldots,b_m} \langle t'_1,\ldots,t'_m \rangle \in \Xi_\pi$ dans $t$ tel que $M_{v_i} \neq \perp$.
3. $t_1,\ldots,t_n$ sont $t$-clos.

On dit qu'un pid-tree $t \in \Xi$ est bien formé ssi il est $t$-clos (clos par lui même). ♦

Dans la définition 6.8 on exprime les conditions qui doivent être satisfaites pour chaque sous-arbre. Cependant, chacune de ces conditions a besoin d'être considérée dans le contexte d'un arbre complet. C'est pour quoi on utilise le terme de sous-pid-tree $t$-clos où $t$ est un pid-tree. Le premier point, assure que les feuilles de l'arbre ne peuvent être annotées par $\perp$ que si ce sont des pids à créer dans le futur (i.e., ils sont référencés par la place génératrice). Le second point, garantit que si un pid $\pi$ apparaît dans le marquage d'un noeud, alors il y a un noeud identifié par $\pi$ dans l'arbre et le marquage correspondant n'est pas $\perp$, et réciproquement si un noeud a un marquage qui n'est pas $\perp$ alors il correspond à un pid dans le marquage. Cela veut dire que si un pid apparaît dans $\text{mrk}(t)$ alors il y a un sous-arbre $t_0$ de $t$ dans $\Xi_\pi$ tel que $t_0 \xrightarrow{a_1,\ldots,a_n} \langle t_1,\ldots,t_n \rangle \in \Xi_\pi$ tel que $M_{t_0} \not\equiv \perp$ mais aussi que si un noeud interne est $\perp$ alors il n'est pas référencé dans le marquage. Finalement, le dernier point, garantit que c'est aussi vrai pour les sous-arbres.

Si on se base sur cette définition alors le plus petit pid-tree bien formé est $\emptyset \equiv \langle \emptyset,\emptyset \rangle$. Il faut noter que $\perp \equiv \langle \perp,\perp \rangle$ n'est pas bien formé parce qu'une feuille ne peut être $\perp$ que si elle dénote un pid à créer. Cependant, du point de vue du marquage les noeuds $\perp$ et $\emptyset$ représentent la même information mais ont des rôles complémentaires dans les pid-trees : les noeuds $\emptyset$ correspondent aux pids qui apparaissent dans le marquage mais ne possèdent pas de jetons, tandis que $\perp$ correspond aux pids qui sont référencés dans la place génératrice et dénotent les pids à être créés mais aussi les pids qui n'apparaissent pas dans le marquage mais apparaissent dans l'arbre. Par exemple, les pid-tree en figure 6.2 représentent tous le même marquage, mais seulement les pid-trees 6.2a et 6.2b sont bien formés. En effet, dans le pid-tree en figure 6.2c, le marquage au pid 1-1 ne peut pas être vide car ce pid n’est pas référencé, il doit forcément être $\perp$. Le pid-tree en figure 6.2d quand a lui ne possède pas de feuille $\perp$ correspondant au jeton $\langle 1,1,2 \rangle$ de la place génératrice.
6. Symétries et création dynamique de processus

(a) \[ \emptyset \]
(b) \[ \emptyset \]
(c) \[ \emptyset \]
(d) \[ \emptyset \]

Figure 6.2 – Exemple de pid-trees dont le marquage est \( \{ s_\eta \mapsto \{ \langle 1, d' \rangle \} \}, s_1 \mapsto \{ \langle 1 \cdot 1 \cdot d, \langle 1, d \rangle \} \} \) (pour \( d \in D_v \)).

6.2.1 Normalisation de pid-trees

Une amélioration notable dans cette nouvelle formalisation est l’introduction de la normalisation de pid-trees qui permet de remplacer l’équivalence de pid-trees définie dans [Fro12a] par un simple test d’égalité. Pour cela, on définit d’abord une bijection sur les pids qui préserve les relations parent et ancêtre, puis on l’applique récursivement sur l’arbre en transformant les pids sur les arcs et ceux des marquages annotant les noeuds.

Définition 6.9. Soit \( t \overset{df}{=} M \overset{a_1 \ldots a_n}{\longrightarrow} \langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in \Xi \) un pid-tree. Sa bijection de normalisation \( h_t^N : P \rightarrow P \) est définie par :

\[
h_t^N = \begin{cases} \{ a_1 \mapsto \langle 1 \rangle, \ldots, a_n \mapsto \langle n \rangle \} \cup h_{t_1}^{N,\langle t \rangle} \cup \ldots \cup h_{t_n}^{N,\langle n \rangle} \end{cases}
\]

avec pour chaque \( t_i = M' \overset{b_1 \ldots b_m}{\longrightarrow} \langle t'_1, \ldots, t'_m \rangle \in \Xi_x \)

\[
h_{t_i}^{N,\langle t \rangle} = \begin{cases} \{ \pi \cdot b_1 \mapsto \pi' \cdot b'_1, \ldots, \pi \cdot b_m \mapsto \pi' \cdot b'_m \} \cup h_{t_1}^{N,\langle t'_1 \rangle} \cup \ldots \cup h_{t_m}^{N,\langle t'_m \rangle} \end{cases}
\]

avec \( b'_i = \begin{cases} \langle i \rangle & \text{si } b_i = \langle k \rangle \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{)} \\ (i, 1) & \text{sinon} \end{cases} \).

Définition 6.10. Soit \( t \in \Xi \) un pid-tree. La forme normalisée de \( t \) est \( \mathcal{N}(t) \overset{df}{=} h_t^N(t) \), où \( h_t^N(t) \) est l’application de la bijection de normalisation \( h_t^N \) à chaque marquage et fragment de pid dans le pid-tree.

En pratique, l’application de la bijection correspond à un renommage des pids apparaissant dans l’arbre. Chaque \( a_i \) associé avec un fils est remplacé par \( i \) si le pid a une longueur de 1, ce qui est suffisant pour préserver la relation
parent, et par \((i, 1)\) si la taille du pid est supérieure à 2, ce qui est suffisant pour préserver la relation ancêtre sans perturber la relation parent. Donc, chaque sous-pid-tree \(M \xrightarrow{a_1, \ldots, a_n} \langle t_1, \ldots, t_n \rangle\) est transformé en \(M \xrightarrow{b_1, \ldots, b_n} \langle t'_1, \ldots, t'_n \rangle\) où chaque \(b_i\) est \((i)\) si \(a_i = (k)\) \((k \in \mathbb{N})\) et \((i, 1)\) sinon.

Lorsqu’on manipule la racine on peut remplacer chaque \(a_i\) par \((i)\) parce qu’il n’y a pas de noeuds au dessus et donc aucun ancêtre valide. Un exemple de normalisation est donné en figure 6.3, le pid-tree 6.3c est la forme normalisée du pid-tree 6.3b.

![Figure 6.3 – Deux représentations en pid-tree 6.3a et 6.3b, d’un marquage \(M \overset{def}{=} m_0 \cup m_1 \cup m_2\) avec \(d \in D\), et un pid-tree normalisé 6.3c à partir du pid-tree 6.3b. Le pid-tree 6.3c est une représentation du marquage \(M' \overset{def}{=} m'_0 \cup m'_1 \cup m'_2\).](image)

6.3. Pid-trees et symétries

Dans cette section, on définit les représentations de marquages sous forme de pid-trees qui sont essentielles dans notre boîte à outils théorique afin de détecter les symétries. D’abord on caractérise ces représentations, puis on propose deux étapes de raffinement.

**Définition 6.11.** Soient \((S, T, \ell)\) un réseau de Petri et \(M\) de ses marquages pid-cohérents. \(\mathcal{R}(M)\) est l’ensemble des pid-trees tel que \(t \in \mathcal{R}(M)\) ssi :

1. \(t\) est bien formé ;
2. \(\text{mrk}(t) = M\) ;
3. pour tout \((\pi, \pi \cdot (k)) \in M(s_t)\) il y a un sous-pid-tree \(t_{\pi}\) de \(t\) tel que

\[t_{\pi} \overset{at}{=} M_{\pi} \xrightarrow{a_1, \ldots, a_n, (k)} \langle a_1, \ldots, a_n, \bot \rangle\]
La bijection de normalisation d’un pid-tree appliquée à un pid-tree qui est la représentation d’un marquage a la bonne propriété de produire un pid-tree équivalent, et donc est adéquate pour les tests d’équivalence de marquages. Chaque marquage accessible peut être transformé en pid-tree puis normalisé, ce qui donne un marquage équivalent. Il faut cependant remarquer qu’un marquage normalisé peut être non accessible mais restera pid-cohérent ce qui est suffisant si on considère le théorème 6.1.

**Proposition 6.2.** Soit $M$ un marquage pid-cohérent d’un réseau de Petri. Si $t \in \mathcal{R}(M)$ est une représentation de $M$, alors

1. $\text{mrk}(N(t))$ est pid-cohérent ;
2. $M$ et $\text{mrk}(N(t))$ sont $h_N^t$ équivalents, i.e., $M \sim \text{mrk}(N(t))$.

**6.3.1 Pid-trees réduits.**

Les pid-trees réduits (stripped pid-trees) sont des arbres où tous les noeuds correspondants au pids inactifs ont été supprimés, c’est-à-dire tous les noeuds internes étiquetés par $\bot$ dans le cas de pid-trees bien formés. Ces arbres sont caractérisés par la définition suivante.

**Définition 6.12.** Soit $M$ un marquage pid-cohérent d’un réseau de Petri et $\mathcal{R}(M)$ l’ensemble de ses représentations sous forme de pid-tree. Alors l’ensemble des représentations réduites de $M$ est :

$$\mathcal{R}_s(M) = \{ t \in \mathcal{R}(M) \mid \text{pid}_t = \text{pid}_M \}$$

L’avantage principal des pid-trees réduits par rapport aux pid-trees est que l’ensemble de ces représentations est fini et peut être énuméré à partir de chacun de ses éléments. Cela veut dire que si on fournit une fonction de réduction arbitraire pour un marquage alors l’ensemble de ses représentations réduites peut être énuméré.

**Définition 6.13.** Soit $t$ et $t'$ deux sous-pid-trees. Alors $t'$ est une permutation de $t$ ssi :

$$t = M \xrightarrow{a_1, \ldots, a_n} (t_1, \ldots, t_n) \quad \text{et} \quad t' = M \xrightarrow{a'_1, \ldots, a'_n} (t'_1, \ldots, t'_n)$$

avec $(a'_1, \ldots, a'_n)$ une permutation de $(a_1, \ldots, a_n)$ telle que pour chaque $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ si $a_i = a'_j$ alors $t'_j$ est une permutation de $t_i$.

**Proposition 6.3.** Soit $M$ un marquage pid-cohérent d’un réseau de Petri. Si $t, t' \in \mathcal{R}_s(M)$ alors $t'$ est une permutation de $t$.

**Corollaire 6.4.** Soit $M$ un marquage pid-cohérent d’un réseau de Petri. Alors $\mathcal{R}_s(M)$ est fini et peut être énuméré à partir de chacun de ses éléments.
Chacune des représentations réduites d’un marquage est une permutation d’une représentation réduite unique. Cet ensemble étant fini et énumérable à partir d’un de ses éléments, on peut donc énumérer toutes représentations réduites. Cependant, on ne peut pas utiliser des permutations arbitraires pour cela, essentiellement parce que nous devons conserver la pid-cohérence. Heureusement, notre définition de représentation sous forme de pid-tree oblige les futurs pids à être les fils les plus à droite et être étiquetés par ⊥. Donc, il suffit que les permutations ne modifient pas la position d’un fils le plus à droite d’un sous-arbre si celui-ci est étiqueté par ⊥. Puisqu’on applique la normalisation sur nos arbres, les fils les plus à droite vont avoir les pids les plus grands et donc on garantit que nous n’allons pas recréer de pids qui existent déjà.

Maintenant, on peut voir que cet ensemble fini de représentations peut être utilisé pour détecter des symétries grâce au théorème 6.5

**Théorème 6.5.** Soit $M$ et $M'$ deux marquages pid-cohérents d’un réseau de Petri. Alors :

$$M \sim M' \iff \forall t \in R_+(M), \exists t' \in R_+(M'), N(t) = N(t')$$

Il est important de remarquer que maintenant on a une méthode complète pour détecter les symétries qui est calculable. Pour chaque nouvel état on construit une représentation réduite de celui-ci, puis on énumère toutes ses permutations. Pour chaque permutation de ce pid-tree, on construit un marquage normalisé et on teste si ce marquage est dans l’espace d’états. Si tous les tests échouent le marquage correspond à un nouvel état et on l’ajoute à l’espace d’états. À ce stade, on voit qu’on peut réaliser un grand nombre de permutations. Par exemple, en figure 6.4 on a les 6 permutations d’un pid-tree réduit, or on remarque que certains arbres sont clairement non isomorphes entre eux et donc la normalisation produira forcément des arbres différents. L’étape suivante de notre approche est de raffiner le résultat obtenu en utilisant une heuristique pour réduire le nombre de permutations en ne considérant que des arbres potentiellement isomorphes. Intuitivement, le pid-tree 6.4a est potentiellement isomorphe au pid-tree 6.4d, le pid-tree 6.4b au pid-tree 6.4e et le pid-tree 6.4c au pid-tree 6.4f.

### 6.3.2 Réduire le nombre de permutations

Réaliser toutes les permutations de pid-trees réduits n’est pas toujours nécessaire. Certaines permutations produisent des pid-trees qui vont clairement produire des marquages qui ne sont pas équivalents. Intuitivement, deux pid-trees produisent des marquages équivalents seulement si les arbres ont la même structure, et contiennent des marquages avec les mêmes données. Ils ne peuvent différer seulement par les pids mais par rien d’autre. Donc si on a deux pid-trees qui produisent des marquages équivalents alors l’application de la même permutation sur les deux produira des pid-trees dont les marquages sont équivalents. L’ordre des enfants n’est pas très important pour la correction puisqu’on peut toujours les permuter à l’exception des pids à créer. L’idée de l’approche présentée dans cette sous-section est de forcer les arbres à respecter un certain ordre de sous-arbres afin de réduire le nombre de permutations.

Pour réduire le nombre de permutations on introduit un ordre appelé *pid-free* sur les pid-trees qui oblige à utiliser des arbres ayant la même structure.
6. Symétries et création dynamique de processus

Figure 6.4 – Les permutations d’un pid-tree réduit.

**Définition 6.14.** Soit $M$ un marquage d’un réseau de Petri. La fonction $\text{pidfree}$ est définie par :

$$\text{pidfree}(M) \overset{df}{=} \{(s, \text{pidfree}(v)) \mid (s, v) \in M\}$$

$$\text{pidfree}(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) \overset{df}{=} \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$$

où $v_i \overset{df}{=} x_i$ si $x_i \in \mathbb{D}$ et $v_i \overset{df}{=} \emptyset$ sinon.

Intuitivement, la fonction $\text{pidfree}$ efface les pids des marquages leur permettant d’être totalement comparables (à cette étape on considère tous pids égaux entre eux). Maintenant, on étend la définition aux pid-trees. Dans les définitions qui suivent les sous-pid-trees $t$ et $t'$ sont définis pour $n, m \in \mathbb{N}$ par :

$$t \overset{df}{=} M_{\pi} \xrightarrow{a_1 \ldots a_n} \langle t_1, \ldots, t_n \rangle \text{ et } t' \overset{df}{=} M_{\pi'} \xrightarrow{a'_1 \ldots a'_m} \langle t'_1, \ldots, t'_m \rangle$$

**Définition 6.15.** Soit $t, t' \in \Xi_{\pi}$ deux sous-pid-trees. Les pid-trees $t$ et $t'$ sont $\text{pid-free équivalents}$, noté $t \equiv t'$, ssi

$$\text{pidfree}(M_t) = \text{pidfree}(M_{t'})$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $t_i \equiv t'_i$, pour $1 \leq i \leq n$
6.3. Pid-trees et symétries

**Définition 6.16.** Soit \( t, t' \in \Xi_\pi \) deux sous-pid-trees. On a \( t \preceq t' \) ssi
- \( \text{pidfree}(M_\pi) < \text{pidfree}(M_{\pi'}) \) ou
- \( \text{pidfree}(M_\pi) = \text{pidfree}(M_{\pi'}) \) et
- \( n < m \) ou
- \( n = m \) et \( \exists j \in \mathbb{N}, j \leq n, \forall i \in \mathbb{N}, i < j, t_i \equiv t'_i \land t_j \preceq t'_j \).

Dans la définition ci-dessus, l'ordre \( < \) est un ordre total sur les marquages de notre réseau de Petri. On définit d'abord un ordre total sur les places, \( S \) étant fini cette étape est triviale. Ensuite on utilise un ordre total sur les multiensemblles pour comparer les places, on peut le faire parce qu'on a supposé que les éléments de \( D_v \) sont totalement ordonnés.

Le dernier point de la définition 6.16 est une définition récursive usuelle d'un ordre, si les marquages sont égaux alors soit \( n < m \) (t a moins de fils que \( t' \)) ou \( n = m \) et il y a une paire \( (t_j, t'_j) \in \{(t_1, t'_1), \ldots, (t_n, t'_n)\} \) telle que pour toute les paires \( (t_i, t'_i) \in \{(t_1, t'_1), \ldots, (t_{j-1}, t'_{j-1})\} \) on a \( t_i \) équivalent à \( t'_i \) et \( t_j \preceq t'_j \).

**Définition 6.17.** Un sous-pid-tree \( t \in \Xi_\pi \) est pid-free ordonné ssi ses sous-arbres sont pid-free ordonnés, i.e., pour \( i, j \in \{1, \ldots, n\}, t_i \preceq t_j \) si \( i < j \).

Puisqu'on sait comparer les pid-trees, on peut définir un ensemble de pid-trees réduits et ordonnés. Ces arbres sont des pid-trees réduits et ordonnés en utilisant l'ordre pid-free. De plus, on peut caractériser l'ensemble de ces représentations en utilisant la relation \( \equiv \) sur les pid-trees réduits, puis les énumérer d'une manière similaire à précédemment.

**Définition 6.18.** Soit \( M \) un marquage pid-cohérent d'un réseau de Petri. L'ensemble de pid-tree réduits et pid-free ordonnés \( R_{so}(M) \) est défini par :

\[
R_{so}(M) = \{ t \in R_s(M) \mid t \text{ est pid-free ordonné} \}
\]

**Proposition 6.6.** Soit \( t \in R_{so}(M) \) un pid-tree, alors pour tout \( t' \in R_s(M) \) on a :

\[
t \equiv t' \Leftrightarrow t' \in R_{so}(M)
\]

**Corollaire 6.7.** Soit \( M \) un marquage pid-cohérent d'un réseau de Petri. Alors l'ensemble \( R_{so}(M) \) est fini et peut être énuméré à partir de chacun de ses éléments.

Comme décrit dans le corollaire 6.7, le sous-ensemble ordonné des pid-trees réduits peut être énuméré à partir d'un élément quelconque de ce même ensemble. Pour réaliser cette énumération, il faut considérer les permutations de pid-trees mais ne permuter que les sous-arbres équivalents (par rapport à la relation \( \equiv \)). Cependant, dans le pire des cas on devra réaliser toutes les permutations. Finalement le Théorème 6.8 présente que cet sous-ensemble pour être utilisé pour détecter les symétries.

**Théorème 6.8.** Soit \( M \) et \( M' \) deux marquages pid-cohérents d'un réseau de Petri. Alors :

\[
M \sim M' \Leftrightarrow \forall t \in R_{so}(M), \exists t' \in R_{so}(M'), \mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(t')
\]
Maintenant, si on reprend les pid-trees de la figure 6.4, et si on suppose \( s_0 < s_1 \) (ordre arbitraire) alors les seules permutations de pid-trees autorisées sont les pid-trees 6.4a et 6.4b. En effet, les autres pid-trees ne respectent pas notre ordre. Dans cet exemple nous avons éliminé 4 des 6 permutations possibles, mais bien sûr un pire cas est toujours possible.

6.4

Algorithm de construction de pid-trees

6.4.1 Définitions

Dans cette section on fournit une construction complète de représentation de marquages en termes de pid-trees réduits. Pour cela on suppose qu’on est dans le contexte d’un réseau de Petri \((S, T, \ell)\). Premièrement, on définit deux fonctions d’extension qui étendent les branches dans un pid-tree, puis on définit une fonction de mise à jour qui modifie les marquages dans les noeuds.

Définition 6.19. La fonction d’extension gauche \( \mathcal{E}_l : \Xi_p \times \mathbb{P} \rightarrow \Xi_p \) et la fonction d’extension droite \( \mathcal{E}_r : \Xi_p \times \mathbb{P} \rightarrow \Xi_p \) sont utilisées pour ajouter des branches dans les pid-trees, et sont définies par

\[
\mathcal{E}_l(M \xrightarrow{a_1, \ldots, a_n} \langle t_1, \ldots, t_n \rangle, \pi) =
\begin{cases}
M' \xrightarrow{a_1, \ldots, a_n} \langle t_1, \ldots, t_n \rangle & \text{où } M' = \begin{cases}
M & \text{si } M \neq \bot \\
\emptyset & \text{sinon}
\end{cases} \text{ si } \pi = \langle \rangle \\
M \xrightarrow{(k), a_1, \ldots, a_n} \langle \mathcal{E}_l(\bot, \pi'), t_1, \ldots, t_n \rangle & \text{si } \pi = a_1, \pi'
\end{cases}
\]

\[
\mathcal{E}_r(M \xrightarrow{a_1, \ldots, a_n} \langle t_1, \ldots, t_n \rangle, \pi) =
\begin{cases}
M \xrightarrow{a_1, \ldots, a_n} \langle t_1, \ldots, t_n \rangle & \text{si } \pi = \langle \rangle \\
M \xrightarrow{(k), a_1, \ldots, a_n} \langle \mathcal{E}_r(\bot, \pi'), t_1, \ldots, t_n \rangle & \text{si } \pi = a_1, \pi'
\end{cases}
\]

On utilise deux fonctions d’extension parce que la place générateur doit être manipulée de manière particulière, les futurs pids doivent être les fils les plus à droite d’un noeud d’où le nom d’extension droite. L’extension gauche ajoute toujours un fils à gauche d’un noeud, tandis que l’extension droite ajoute les noeuds internes à gauche et les feuilles à droite (avec le marqueur \( \bot \)).

Définition 6.20. La fonction de mise à jour \( \mathcal{U} : \Xi_p \times S \times \ell(S) \times \mathbb{P} \rightarrow \Xi_p \) modifie les marquages dans les noeuds, et est définie par :

\[
\mathcal{U}(M \xrightarrow{a_1, \ldots, a_n} \langle t_1, \ldots, t_n \rangle, s, v, \pi) =
\begin{cases}
M' \xrightarrow{a_1, \ldots, a_n} \langle t_1, \ldots, t_n \rangle & \text{si } \pi = \langle \rangle \\
M \xrightarrow{a_1, \ldots, a_n} \langle t_1, \ldots, t_{i-1}, \mathcal{U}(t_i, s, v, \pi'), t_{i+1}, \ldots, t_n \rangle & \text{si } \pi = a_i, \pi'
\end{cases}
\]

où \( \forall s' \in \mathbb{P}, M'(s') =
\begin{cases}
M(s) \cup \{v\} & \text{si } s = s' \\
M(s') & \text{sinon}
\end{cases}
\]

\[\lozenge\]

104
Maintenant, avec la fonction de mise à jour on peut modifier les marquages dans les noeuds en ajoutant des jetons, mais le noeud doit exister. Ces trois fonctions définies, on construit la représentation du marquage en utilisant l'algorithme 6.1.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Entrée : marquage $M$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Sortie : pid-tree $t$ correspondant</td>
</tr>
<tr>
<td>$t \leftarrow \emptyset$;</td>
</tr>
<tr>
<td>//pour toutes les places sauf la place génératrice</td>
</tr>
<tr>
<td>$s \in S \setminus {s_\eta}$ :</td>
</tr>
<tr>
<td>pour $\langle v_0, \ldots, v_n \rangle \in M(s)$ :</td>
</tr>
<tr>
<td>pour $v_i \in v_0, \ldots, v_n$ :</td>
</tr>
<tr>
<td>si $v_i \in \mathbb{P}$ alors</td>
</tr>
<tr>
<td>$t \leftarrow E_l(t, v_i)$ ; //extension gauche</td>
</tr>
<tr>
<td>fin si</td>
</tr>
<tr>
<td>fin pour</td>
</tr>
<tr>
<td>fin pour</td>
</tr>
<tr>
<td>fin pour</td>
</tr>
<tr>
<td>//pour la place génératrice</td>
</tr>
<tr>
<td>$\langle v_0, v_1 \rangle \in M(s_\eta)$ :</td>
</tr>
<tr>
<td>$t \leftarrow E_l(t, v_0)$ ; //extension gauche</td>
</tr>
<tr>
<td>$t \leftarrow E_r(t, v_1)$ ; //extension droite</td>
</tr>
<tr>
<td>fin pour</td>
</tr>
<tr>
<td>//insérer les jetons</td>
</tr>
<tr>
<td>$s \in S \setminus {s_\eta}$ :</td>
</tr>
<tr>
<td>pour $\langle v_0, \ldots, v_n \rangle \in M(s)$ :</td>
</tr>
<tr>
<td>si $v_0 \in \mathbb{P}$ alors</td>
</tr>
<tr>
<td>$t \leftarrow U(t, s, \langle v_0, \ldots, v_n \rangle, v_0) ; //mettre à jour le noeud</td>
</tr>
<tr>
<td>$v_0$</td>
</tr>
<tr>
<td>sinon</td>
</tr>
<tr>
<td>$t \leftarrow U(t, s, \langle v_0, \ldots, v_n \rangle, \langle \rangle) ; //ajouter à la racine</td>
</tr>
<tr>
<td>fin si</td>
</tr>
<tr>
<td>fin pour</td>
</tr>
<tr>
<td>fin pour</td>
</tr>
<tr>
<td>renvoyer $t$ ;</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Algorithm 6.1:** Algorithme de construction de la représentation en pid-tree.

**Proposition 6.9.** L’algorithme 6.1 construit une représentation sous forme de pid-tree d’un marquage pid-cohérent. □

Une représentation d’un marquage en pid-tree n’étant pas suffisante pour déetecter les symétries, on a besoin de réduire cette représentation.
6. Symétries et création dynamique de processus

Définition 6.21. La fonction de réduction $S : \Xi \rightarrow \Xi$ est définie par

\[
S(M \xrightarrow{a_1, \ldots, a_n} \{t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_n\}) =
\begin{cases}
S(M \xrightarrow{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i b_1, a_i b_2, \ldots, a_i b_m, a_{i+1}, \ldots, a_n} \{t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i', t_m, t_{i+1}, \ldots, t_n\}) & \text{si } t_i = (\perp \xrightarrow{b_1, \ldots, b_m} \{t'_1, \ldots, t'_m\}) \\
M \xrightarrow{a_1, \ldots, a_n} \{S(t_1), \ldots, S(t_n)\} & \text{sinon}
\end{cases}
\]

La fonction de réduction ci-dessus peut être vue comme une réécriture de graphe réalisant la transformation présentée en figure 6.5. Elle supprime tous les nœuds internes étiquetés par $\perp$, donc les seuls nœuds restants étiquetés par $\perp$ sont les feuilles qui correspondent à des futurs pids. Il faut remarquer qu’on force la racine à être $\emptyset$ ce qui est nécessaire pour satisfaire la définition 6.8.

Proposition 6.10. La fonction de réduction $S$ transforme une représentation d’un marquage en une représentation réduite du même marquage. $\square$

\[\begin{array}{c}
\begin{tikzpicture}
\node (M) {$M_\pi$} ;
\node (M1) [below left=of M] {$M_{\pi ab_1}$} ;
\node (M2) [below right=of M] {$M_{\pi ab_n}$} ;
\draw[->] (M) -- (M1) node[midway, above] {$\downarrow$} ;
\draw[->] (M) -- (M2) node[midway, above] {$\downarrow$} ;
\node (M3) [above left=of M1] {$a$} ;
\node (M4) [above right=of M2] {$a \cdot b_1$} ;
\node (M5) [above right=of M2] {$a \cdot b_n$} ;
\end{tikzpicture}
\end{array}\]

Figure 6.5 – Règle de réécriture de réduction.

La dernière étape est de normaliser l’arbre. On construit la bijection de normalisation récursivement, puis on utilise cette fonction pour rééquilibrer les arcs et modifier les marquages.

Définition 6.22. La bijection de normalisation est construite avec la fonction $N_{\text{map}} : \Xi \times P \times P \rightarrow (P \rightarrow P)$ qui est définie par

\[
N_{\text{map}}(M \xrightarrow{a_1, \ldots, a_n} \{t_1, \ldots, t_n\}, \pi, \pi') \overset{\text{def}}{=} \{ \pi \mapsto \pi' \} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq n} N_{\text{map}}(t_i, \pi \cdot a_i, \pi' \cdot b_i)
\]

où $b_i = \langle i \rangle$ si $a_i = \langle k \rangle$ ($k \in \mathbb{N}$) et $b_i = \langle 1 \rangle$ sinon. La fonction de normalisation $N : \Xi \times (P \rightarrow P) \rightarrow \Xi$ est définie par

\[
N(M \xrightarrow{a_1, \ldots, a_n} \{t_1, \ldots, t_n\}, f) \overset{\text{def}}{=} f(M) \xrightarrow{b_1, \ldots, b_m} \{N(t_1, f), \ldots, N(t_n, f)\}
\]

où $b_i = \langle i \rangle$ si $a_i = \langle k \rangle$ ($k \in \mathbb{N}$) et $b_i = \langle 1 \rangle$ sinon, et $f(M)$ représente l’application de $f$ sur chaque pid dans $M$. $\diamond$

Proposition 6.11. L’application de la fonction de normalisation $N$ sur un pid-tree produit un pid-tree normalisé. $\square$

De par la définition de représentations de marquages en pid-trees, on sait que les pids à créer sont les fils les plus à droite marqués par $\perp$. Donc, pour calculer les permutations des pid-trees, on calcule les permutations de tous les fils sauf ceux marqués par $\perp$. 

106
Dans cette section on a montré comment construire un élément de $\mathcal{R}_s(M)$ étant donné le marquage $M$. Pour obtenir un élément de $\mathcal{R}_s(M)$, on doit aussi ordonner l’arbre ce qui revient à comparer les marquages récursivement en ignorant les pids.

### 6.4.2 Exemple

Soit le marquage $M = \{s_1 \mapsto \{1\cdot2\cdot3, a\}, s_2 \mapsto \{(1, 1\cdot4), (1\cdot23, 1\cdot231)\}\}$ d’un réseau de Petri $(S, T, \ell)$ tel que $s_1 \in S$. D’abord, on construit une représentation de $M$ en pid-tree. On utilise les fonctions d’extension sur toutes les places sauf la place génératrice.

\[ E(t_1, 1) = \begin{cases} 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 0, \emptyset \end{cases} \]

Maintenant, on traite les jetons de la place génératrice en utilisant l’extension à gauche pour la première composante, et l’extension à droite pour la seconde (les futurs pids).

\[ E(t_1, 1) = \begin{cases} 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 0, \emptyset \end{cases} \]

La structure de l’arbre est complète, maintenant on ajoute les jetons. On ajoute le jeton $\langle 1\cdot2\cdot3, a \rangle$ de la place $s_1$.

\[ U(t_5, s_1, \langle 1\cdot2\cdot3, a \rangle, 1\cdot2\cdot3) = \begin{cases} 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 0, \emptyset \mapsto 1, \emptyset, s_1, \langle 1\cdot2\cdot3, a \rangle, 2\cdot3 \end{cases} \]
On note \( M_{123} \equiv \{ s_1 \mapsto \{(1 \cdot 2 \cdot 3, a)\} \} \) et on ajoute le jeton \( (1, 1 \cdot 4) \) de la place \( s_n \).

\[
U(t_6, s_n, (1, 1 \cdot 4), 1) = \emptyset \rightarrow U(\emptyset \rightarrow \{\bot \rightarrow M_{123} \rightarrow \bot \}, (1, 1 \cdot 4), \emptyset) = \emptyset \rightarrow \{ s_n \mapsto \{(1, 1 \cdot 4)\}\} \rightarrow 2 \cdot 4 \rightarrow \{\bot \rightarrow M_{123} \rightarrow \bot \} \equiv t_7
\]

On note \( v \) le jeton \( \{(1 \cdot 2 \cdot 3, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \) et \( M_i \) le marquage \( \{ s_n \mapsto \{\{(1, 1 \cdot 4)\}\} \) \). On ajoute le jeton \( v \) de la place \( s_n \).

\[
U(t_7, s_n, v, 1 \cdot 2 \cdot 3) = \emptyset \rightarrow U(M_1 \rightarrow 2 \cdot 4 \rightarrow \{\bot \rightarrow M_{123} \rightarrow \bot \}, s_n, v, 2 \cdot 3) = \emptyset \rightarrow M_1 \rightarrow 2 \cdot 4 \rightarrow \{ U(\bot \rightarrow M_{123} \rightarrow \bot, s_n, v, 3), \bot \} = \emptyset \rightarrow M_1 \rightarrow 2 \cdot 4 \rightarrow \{ \bot \rightarrow U(M_{123} \rightarrow \bot, s_n, v), \bot \} = \emptyset \rightarrow M_1 \rightarrow 2 \cdot 4 \rightarrow \{ (M_{123} \cup \{ s_n \mapsto v \}) \rightarrow 1 \rightarrow \bot, \bot \} \equiv t_8
\]

Maintenant on réduit l’arbre. On note \( M’_{123} \) le marquage \( M_{123} \cup \{ s_n \mapsto v \} = \{ s_1 \mapsto \{(1 \cdot 2 \cdot 3, a)\}, s_n \mapsto \{(1 \cdot 2 \cdot 3, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)\} \) et on contine.

\[
S(t_7) = \emptyset \rightarrow 1 \rightarrow S(M_1 \rightarrow 2 \cdot 4 \rightarrow \{\bot \rightarrow M_{123} \rightarrow \bot \}, \bot)) = \emptyset \rightarrow 1 \rightarrow S(M_1 \rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 4 \rightarrow \{M_{123} \rightarrow \bot \}, \bot)) = \emptyset \rightarrow 1 \rightarrow M_1 \rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 4 \rightarrow \{S(M’_{123} \rightarrow 1 \rightarrow \bot) \} = \emptyset \rightarrow 1 \rightarrow M_1 \rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 4 \rightarrow \{S(1 \rightarrow \bot) \} = \emptyset \rightarrow 1 \rightarrow M_1 \rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 4 \rightarrow \{ \bot \rightarrow \bot \} \\ \equiv t_9
\]

Une représentation réduite de \( M \) est

\[
\emptyset \rightarrow 1 \rightarrow M_1 \rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 4 \rightarrow \{ M’_{123} \rightarrow 1 \rightarrow \bot \}
\]

La dernière étape est de normaliser l’arbre. Pour cela, on calcule la bijection de normalisation en utilisant la fonction \( N_{\text{map}} \) puis on normalise l’arbre avec la fonction \( N \).

\[
N_{\text{map}}(t_9, \cdot, \cdot) = \{ \cdot \mapsto \cdot \} \cup N_{\text{map}}(M_1 \rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 4 \rightarrow \{M_{123} \rightarrow 1 \rightarrow \bot \}, 1, 1, 1) = \{ \cdot \mapsto \cdot, 1 \rightarrow 1, 1 \cdot 2 \cdot 3 \rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 1, 1 \cdot 4 \rightarrow 1 \cdot 2 \} \cup N_{\text{map}}(\bot \rightarrow 4, 1, 1 \cdot 1 \cdot 1) = \{ \cdot \mapsto \cdot, 1 \rightarrow 1, 1 \cdot 2 \cdot 3 \rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 1, 1 \cdot 4 \rightarrow 1 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 3 \rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 1 \} \equiv f
\]

Il faut remarquer qu’on associe \( 1 \cdot 2 \cdot 3 \rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 1 \) parce que la taille de \( 2 \cdot 3 \) est supérieure à 1, et donc on utilise \( 1 \cdot 1 \) (cas \( \langle i, 1 \rangle \) dans la définition). En utilisant le fonction de normalisation \( f \) on peut normaliser l’arbre.

\[
N(t_9, f) = \emptyset \rightarrow 1 \rightarrow N(M_1 \rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 4 \rightarrow \{M’_{123} \rightarrow 1 \rightarrow \bot \}, f) = \emptyset \rightarrow 1 \rightarrow M_1 \rightarrow 1 \cdot 4 \cdot 2 \rightarrow \{N(M’_{123} \rightarrow 1 \rightarrow f), N(1, f)\) = \emptyset \rightarrow 1 \rightarrow M_1 \rightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 1, 1 \cdot 4 \rightarrow 1 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 3 \rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 1 \} \equiv f
\]

108
6.5. Rédaction, normalisation, et comportements infinis

où $M_1' = f(M_1) = \{s_1 \mapsto \{(1, 1, 2)\}\}$ et $M_{111} = f(M_{123}) = \{s_1 \mapsto \{(1 \cdot 1 \cdot 1, a)\}, s_\\eta \mapsto \{(1 \cdot 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1)\}\}$. Finalement, la représentation normalisée et réduite de $M$ est

\[
\emptyset \xrightarrow{1} M_1 \xrightarrow{1 \cdot 1, 2} M_{111} \xrightarrow{1} \bot, \bot
\]

Ce pid-tree est le même que celui donné en figure 6.1.

### Réduction, normalisation, et comportements infinis

Dans cette section on montre pourquoi la réduction et la normalisation de pid-trees sont essentielles pour capturer les comportements infinis. Considérons le réseau de Petri donné en figure 6.6a, son comportement est similaire à de la récursion terminale. Il y a une place $s$ contenant un pid, une place génératrice avec des données adéquates, et une transition $t$. Chaque fois que la transition $t$ est tirée, le processus $\pi$ crée un fils et meurt.

Le marquage initial est $\{s \mapsto \{1\}, s_\\eta \mapsto \{(1, 1)\}\}$. À partir de l’état initial, l’espace d’état construit en utilisant un algorithme d’exploration classique est donné en figure 6.6b et est infini.

![Figure 6.6 - Exemple de réseau de Petri marqué (a), et son espace d'états infini (b)](image)

Si on construit les représentations en pid-tree de chacun des marquages dans l'espace d'états, on observe que ces arbres deviennent de plus en plus grands parce que de nouveaux pids sont créés. Lorsqu’on réduit les arbres on observe que les arbres ont toujours le même nombre de noeuds mais les marquages et annotations sur les arcs grossissent toujours. Pour résoudre ce problème on normalise l’arbre et on remplace les pids ce qui mène à une unique représentation en pid-tree pour chaque état de l’espace d’états. Parce qu’on a une unique représentation en pid-tree normalisé, on a aussi une unique classe d’équivalence d’états et donc un espace d’états fini et réduit à un unique état. Les pid-trees et l’espace d’états réduit sont donnés en figures 6.7 et 6.8.

Un autre exemple intéressant à considérer est le même réseau de Petri où l’état initial est $\{s \mapsto \{1 \cdot 1\}, s_\\eta \mapsto \{(1 \cdot 1 \mapsto 1 \cdot 2), (1 \cdot 1 \mapsto 1 \cdot 1 \cdot 1)\}\}$. Cette fois on aura deux classes d’équivalence, une où deux processus sont dans la relation parent et une autre où les deux processus sont dans la relation ancêtre.
équation initial

\[
\begin{array}{c}
\text{pid-trees} \\
\emptyset \quad \emptyset \quad \emptyset \\
\cdot 1 \quad \cdot 1 \quad \cdot 1 \\
M_1 \quad M_{11} \quad M_{111} \\
\perp \quad \perp \quad \perp \\
\end{array}
\]

\[
\begin{array}{c}
\text{réduits} \\
\emptyset \quad \emptyset \quad \emptyset \\
\cdot 1 \quad 1 \cdot 1 \quad 1 \cdot 1 \\
M_1 \quad M_{11} \quad M_{111} \\
\perp \quad \perp \quad \perp \\
\end{array}
\]

\[
\begin{array}{c}
\text{réduits et normalisés} \\
\emptyset \quad \emptyset \quad \emptyset \\
\cdot 1 \quad \cdot 1 \quad \cdot 1 \\
M_1 \quad M_{11} \quad M_{111} \\
\perp \quad \perp \quad \perp \\
\end{array}
\]

Figure 6.7 – Les pid-trees correspondants à l’espace d’états du réseau de Petri en figure 6.6a où \( M_{\pi} = \{ s \mapsto \{ \pi \}, s_n \mapsto \{ (\pi, \pi \cdot 1) \} \} \).

Figure 6.8 – Espace d’états réduit du réseau de Petri en figure 6.6a.

6.6

Algorithmes pour détecter les symétries

6.6.1 Algorithme général

L’algorithme général de détection de symétries dans les réseaux de Petri de haut niveau est basé sur le théorème 6.8. L’idée est de ne stocker que les marquages correspondant à des pid-trees normalisés. C’est correct après la proposition 6.2 et le théorème 6.1. Pour cela, pour chaque nouveau marquage on construit un pid-tree, on le réduit, on l’ordonne et on énumère tous les pid-trees équivalents. Pour chacun de ces pid-trees on construit un marquage normalisé et on teste si ce marquage est dans l’espace d’états. Si une permutation satisfait ce test, l’état peut être ignoré, i.e., on vient juste trouver un état qui est équivalent.
6.6. Algorithmes pour détecter les symétries

à un état déjà découvert. Sinon, on ajoute un marquage normalisé dans l'espace d'états. Parce qu'on ne garde qu'un état par classe d'équivalence, et parce qu'on a la possibilité de raffiner l'ensemble potentiel d'états symétriques, on peut proposer un algorithme qui énumère un nombre de pid-trees bien moindre. L'algorithme 6.2 décrit cette approche.

Entrée : marquage $M$, ensemble de marquages $States$

Sortie : ensemble de marquages contenant un représentant pour $M$

$t \leftarrow$ pid-tree à partir de $M$ ;
$t \leftarrow$ réduire le pid-tree $t$ ;
$t \leftarrow$ ordonner le pid-tree $t$ ;  
    //avec l'ordre pid-free

pour toute permutation pid-free ordonnée $tp$ de $t$ :

    $tp \leftarrow N(tp)$;  //normaliser l'arbre, changer les pids
    $M' \leftarrow$ mrk($tp$);  //construire le marquage normalisé
    si $M' \in States$ alors
        renvoyer $States$;  //état trouvé
    fin si
fin pour

//nouvel état, on met à jour l'ensemble d'états
//on ajoute une représentation normalisée
$t \leftarrow N(t)$;  //valeurs minimales pour pids
$M' \leftarrow$ mrk($t$);  //marquage équivalent à $M$
renvoyer $States$ $\cup$ { $M'$ };

Algorithm 6.2: Algorithme général de détection de symétries.


Cet algorithme a deux avantages par rapport à ceux proposés dans [114, 115, 116]. En effet, le problème principal avec les algorithmes précédents était que chaque état devait être transformé en graphe puis comparé avec tous les autres états de l'espace d'états par une opération d'isomorphisme de graphes. Cela a deux défauts : on doit réaliser des isomorphismes de graphes et on doit le réaliser avec tous les états de l'espace d'états.

Maintenant la complexité de l'approche a été transposée à l'énumération des pid-tree réduits et ordonnées, c'est-à-dire qu'on ne dépend plus de la taille de l'espace d'états et de la taille du marquage, comme c'était le cas pour les isomorphismes, mais juste de la taille du marquage. Plus précisément, la complexité de l'approche dépend du nombre de pids dans le marquage (ce qui était évidemment aussi le cas pour le calcul d'isomorphisme de graphe). Il faut mettre en avant le fait que maintenant le test d'appartenance $M' \in States$ peut être réalisé en temps constant (en général), en utilisant des tables de hashage, tandis que dans [114, 115, 116] il fallait tester tous les états de l'espace d'états en temps linéaire et réaliser un calcul d'isomorphisme de graphe pour chaque état. De plus, l'ordonnancement des pid-trees permet de filtrer les permutations nécessaires des autres, ce qui réduit en général le nombre de permutations, mais ne permet pas bien sûr d'éviter un pire cas.
6.6.2 Algorithme optimiste

Une approche optimiste qui évite l’énumération des permutations est possible, cependant elle ne fournit pas une réduction maximale de l’espace d’états, i.e., elle peut ne pas détecter toutes les symétries. Une telle approche, pour être utilisable en pratique doit fournir un espace d’états fini. C’est le cas ici, en effet, même si on ne détecte pas toutes les symétries on a la garantie que l’espace d’états que l’on construit est fini si le nombre de classes d’équivalence d’états est fini, i.e., s’il est possible d’obtenir une représentation finie de l’espace d’états en utilisant un représentant par classe d’équivalence. Cette approche est donnée en algorithme 6.3 et consiste à construire l’espace d’états en agrégeant les formes normalisées des marquages découverts (une fois réduits et ordonnés). Ajouter les formes normalisées au lieu des marquages rencontrés est correct parce qu’ils sont équivalents. Dans le pire des cas l’algorithme ajoute un marquage par élément de \( R_{so}(M) \) à l’espace d’états pour chaque marquage \( M \) découvert, mais \( R_{so}(M) \) étant fini l’algorithme termine.

\[
\begin{align*}
\text{Entrée : } & \text{marquage } M, \text{ ensemble de marquages } States \\
\text{Sortie : } & \text{ensemble de marquages contenant un représentant pour } M \\
& t \leftarrow \text{pid-tree à partir de } M \\
& t \leftarrow \text{réduire le pid-tree } t \\
& t \leftarrow \text{ordonner le pid-tree } t \quad // \text{avec l’ordre pid-free} \\
& t \leftarrow N(t); \quad // \text{valeurs minimales pour pids} \\
& M' \leftarrow \text{mrk}(t); \quad // \text{un marquage équivalent à } M \\
\text{renvoyer } States \cup \{M'\};
\end{align*}
\]

**ALGORITHME 6.3:** Algorithme optimiste de détection de symétries.

**PROPOSITION 6.13.** L’algorithme 6.3 est correct et termine. □

Une observation intéressante sur l’algorithme optimiste est qu’il est aussi complet pour une sous classe de modèles. En effet si les jetons ne possèdent des pids qu’en première position alors toutes les symétries sont capturées.

**THÉORÈME 6.14.** Soit \((S,T,ℓ)\) un réseau de Petri tel que pour toute place \( s \in S, ℓ(s) = P \times X_1 \times \cdots \times X_n \) et \( X_i \subseteq D_v \) (\( n \geq 0 \)), i.e., les pids n’apparaissent qu’en première position. Alors, l’algorithme optimiste est complet, i.e., capture toutes les symétries. □

6.7 Récupération de contre-exemples

La vérification de propriétés logiques avec du model checking explicite fournit des contre-exemples lorsque la formule testée n’est pas satisfaite. Il s’agit d’une trace d’exécution qui retrace tout le scénario qui a mené à l’erreur. Ce contre-exemple est très utile pour déboguer le modèle puisqu’il on sait exactement comment l’erreur est survenue.
Dès lors qu’on fait des réductions avec équivalences où l’état stocké n’est pas atteignable cette étape de vérification s’avère plus compliquée. Le contre-exemple qu’on construit lors de l’exploration de l’espace d’états est une suite d’états équivalents aux états atteignables. Une telle suite d’états devient très vite difficile à observer dans le modèle car la transformation vers un état de l’espace d’états non réduit peut s’avérer non triviale. On peut alors se poser la question si on peut vraiment arriver à cette situation dans le modèle, ou si c’est une erreur dans le model checker lui-même. Il est donc important de reconstruire une trace d’exécution existante dans l’espace d’états non réduit. Évidemment il faut que cette reconstruction n’ait pas besoin de tout l’espace d’états, sinon la méthode de réduction ne serait pas pertinente.

Dans cette section on propose une méthode pour reconstruire une trace d’exécution concrète (trace dans l’espace d’états complet du système) à partir d’une trace d’exécution abstraite (trace dans l’espace d’états réduit).

Remarquons qu’une telle discussion n’avait pas lieu d’être dans [114, 115, 116] puisque l’espace d’états réduit était composé d’états accessibles, ce qui n’est pas notre cas à cause de la fonction de normalisation (on ne stocke que les marquages normalisés).

Une méthode naïve en utilisant le théorème 6.1 peut devenir rapidement coûteuse. Elle consisterait à calculer des marquages de proche en proche de manière à aboutir à une trace concrète. Pour cela, il faudrait donc à chaque fois inverser la bijection de normalisation utilisée et l’appliquer sur le mode utilisé pour calculer le successeur dans la trace. Lors du calcul du contre-exemple concret, il y a beaucoup de bijections intermédiaires qui n’ont pas pu être calculés auparavant, il faut donc les calculer puis les inverser. On peut donc voir que l’opération est quadratique en nombre d’états de la trace abstraite avec comme opérations de base : le calcul de bijection de normalisation de proche en proche, l’inversion de bijection et le tir des successeurs. Cependant il y a deux problèmes : les marquages intermédiaires ne sont pas forcément normalisés, il faut donc calculer les formes normales de tous les marquages intermédiaires et les utiliser pour le calcul de bijections, et les états intermédiaires ne sont pas accessibles pour autant, donc dans un pire cas le calcul avec cet algorithme peut être plus coûteux que le calcul de l’espace d’états complet. Un exemple est donné en figure 6.9, on remarque le grand nombre d’inversions réalisées sur les états intermédiaires. Sachant que ces états doivent être calculés et sont potentiellement inaccessibles l’ensemble du calcul de la trace peut être plus coûteux que l’exploration de l’espace d’états complet.

Une meilleure approche est basée sur l’observation suivante : les marquages de la trace concrète et les marquages de la trace dans l’espace d’états réduit sont équivalents. On peut donc directement utiliser les pid-trees pour calculer la bijection de normalisation qui permet de passer de la trace concrète à la trace abstraite. L’algorithme de calcul de la trace complète est illustré sur la figure 6.10 et est basé sur la démarche suivante :

1. À partir du marquage initial on tire une à une les transitions de la trace abstraite.
2. Pour chaque état successeur concret calculé, on teste s’il est équivalent au successeur de la trace abstraite.
3. S’il est équivalent alors on a notre successeur concret, maintenant on continue les tirs à partir de cet état.
De cette manière le calcul de la trace concrète devient linéaire (si le nombre d’états successeurs est borné par une constante) avec comme opération de base
le tir des successeurs et le test d’équivalence avec un état abstrait qui correspond au test réalisé dans l’algorithme général 6.2.

6.8 Preuves des théorèmes

Cette section regroupe les preuves des théorèmes présentés dans ce chapitre, les preuves des résultats auxiliaires peuvent être trouvées dans l’annexe B. Toutes les preuves sont faites dans le contexte d’un réseau de Petri \(N = (S, T, \ell)\).

### 6.8.1 Preuve du théorème 6.1

Soient \(M\) et \(M'\) deux marquages \(h\)-équivalents et \(pid\)-cohérents d’un réseau de Petri \((S, T, \ell)\), et soient \(t \in T\) une transition et \(\beta\) une valuation telles que \(M[t, \beta]M\). Alors \(M'[t, h \circ \beta]M'\) et \(M \sim M'\).

Cette preuve est similaire à la preuve du théorème 3 de [116], la connaissance de ces travaux est donc nécessaire à sa compréhension. Cependant, parce qu’on a changé la définition de la place générateur, introduit la \(pid\)-cohérence et adapté la relation d’équivalence, nous avons besoin de garantir que ceux ci sont bien définis.

Pour chaque marquage \(M\) on définit l’état correspondant \(q_M \overset{df}{=} (\sigma_M, \eta_M)\) donné par :

\[
\sigma_M \overset{df}{=} \{ (s, M(s)) \mid s \in S \} \\
\eta_M \overset{df}{=} \{ \pi \mapsto k \mid \langle \pi, \pi \cdot \langle k \rangle \rangle \in M(s_\eta) \}
\]

Soit \(M\) un marquage, alors la thread configuration correspondante générée est \(ctc_M \overset{df}{=} (G, H)\), où \(H = \eta_M\) et \(G\) est un ensemble de tous les pids qui apparaissent au marquage \(M\) à l’exception des pids à créer, i.e., pour chaque jeton \(\langle \pi, \pi' \rangle \in M(s_\eta)\) seulement \(\pi\) est dans \(G\). De cette manière la configuration résultante est exactement la même que dans [116].

**Définition 6.23.** Un état \(q_M\) génère une thread-consistent configuration (ou \(ct\)-configuration), si \((G, H)\), comme défini ci-dessus, satisfait :

- \(\text{dom}(H) \subseteq G\), i.e., chaque pid actif est présent dans l’état ; et
- pour tout \(\pi \in \text{dom}(H)\) et \(\pi' \in G\), si \(\pi \cdot \langle k \rangle\) est un préfixe de \(\pi'\) alors \(k \leq \eta_q(\pi)\), i.e., les pids présents dans \(q\) ne peuvent être recréés.

L’étape suivante est de montrer qu’un marquage \(pid\)-cohérent produit une \(ct\)-configuration.

**Proposition 6.15.** Un marquage \(M\) est \(pid\)-cohérent si et seulement si \(ctc_M\) est une \(ct\)-configuration.

**Preuve.** Soit \(ctc_M\) une configuration \((H, G)\) défini comme ci-dessus.

\((\Rightarrow)\) On suppose que \(M\) est \(pid\)-cohérent. On vérifie que \(ctc_M\) est une \(ct\)-configuration.

- d’abord on doit prouver que \(H \subseteq G\) : c’est trivial parce que \(H\) est construit avec la place générateur donc chaque pid dans \(H\) est dans \(G\).
maintenant, montrons que pour tout \( \pi \in \text{dom}(H) \) et \( \pi' \in G \), si \( \pi \cdot k \) est un préfixe de \( \pi' \) alors \( k \leq \eta_M(\pi) \), i.e., pids dans \( M \) ne peuvent pas être recréés encore ; ceci est immédiat par la définition de la pid-cohérence.

\( (\Leftarrow) \) On suppose que \( \text{ctc}_M \) est une ct-configuration. On vérifie que \( M \) est pid-cohérent. C’est immédiat par définition des ct-configurations et de pid-cohérence.

\[ \square \]

Avant d’aller plus loin, on doit vérifier que la définition de l’équivalence de marquages en définition 6.4 est équivalente à l’équivalence d’états dans [116].

**Proposition 6.16.** Soient \( M, M' \) deux marquages pid-cohérents, et \( q, q' \) leurs états correspondants. Alors \( M \sim M' \) si et seulement si \( q \sim q' \).

**Preuve.**

\( (\Rightarrow) \) On montre que \( M \sim M' \Rightarrow q \sim q' \).

Soit \( h \) la bijection qui satisfait l’équivalence de marquages, alors \( h \) peut être utilisé comme candidat pour l’équivalence d’états car \( \text{dom}(h) = \text{pid}_q \cup \text{nextpid}_q \) (pour tout \( \pi \in \text{dom}(\eta_q) \),nextpid\(_q\)(\( \pi \)) est maintenant dans la place générateur), même argument pour \( \text{dom}(h^{-1}) \) en utilisant \( q' \). Maintenant on montre que \( h \) satisfait l’équivalence de [116].

1. \( h(\text{dom}(\eta_q)) = \text{dom}(\eta_q') \), parce que \( M' \) est \( M \) après remplacement de chaque pid \( \pi_0 \) dans \( M \) par \( h(\pi_0) \) et \( h \) est une bijection de \( \text{pid}_M \) vers \( \text{pid}_{M'} \).
2. \( \forall \pi \in \text{dom}(\eta_q) \), \( h(\text{next}_q(\pi)) = \text{next}_{q'}(h(\pi)) \).

Soit \( \pi \in \text{dom}(\eta_q) \) un pid, alors par définition de \( \eta_q \), \( \langle \pi, \text{next}_q(\pi) \rangle \in M(s_q) \). De plus, parce que \( h \) préserve la relation \( \prec \) et \( M' \) est \( M \) après remplacement de chaque pid \( \pi_0 \) dans \( M \) par \( h(\pi_0) \), on sait que \( \langle h(\pi), h(\text{next}_q(\pi)) \rangle \in M'(s_q) \) et donc par définition de \( \eta_{q'} \),

\[ h(\text{next}_q(\pi)) = \text{next}_{q'}(h(\pi)) \].

3. \( \forall \pi, \pi' \in \text{pid}_q : \pi \prec \pi' \text{ssi } h(\pi) \prec h(\pi') \text{ avec } \prec \in \{\prec_1, \prec_2\} : \text{immédiat} \)

4. \( \sigma_{q'} \) est \( \sigma_q \) après remplacement de chaque pid \( \pi \) par \( h(\pi) \), immédiat parce que \( M' \) est \( M \) après remplacement de chaque pid \( \pi \) dans \( M \) par \( h(\pi) \)

Toutes les conditions sont satisfaites.

\( (\Leftarrow) q \sim q' \Rightarrow M \sim M' \)

Similaire à ci-dessus, avec \( h \) la bijection qui satisfait l’équivalence d’états.

\[ \square \]

Il est prouvé dans [116] que le tir de transition préserve les ct-configurations, i.e., si \( \text{ctc}_M \) est une ct-configuration et \( M[\beta, t]M' \), alors \( \text{ctc}_{M'} \) est une ct-configuration. Ceci est donné dans la preuve du théorème 2 de [116] qui décrit que les états accessibles correspondent à des ct-configurations.

Donc, de par la proposition 6.15 chaque marquage accessible à partir d’un état pid-cohérent correspond à une ct-configuration. À partir de maintenant la preuve du théorème 6.1 est fait de la même manière que la preuve du théorème 3 dans [116].

\[ \square \]
6.8. Preuves des théorèmes

6.8.2 Preuve du théorème 6.5

Soit $M$ et $M'$ deux marquages pid-cohérents d’un réseau de Petri. Alors :

$$M \sim M' \iff \forall t \in \mathcal{R}_s(M), \exists t' \in \mathcal{R}_s(M'), \mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(t')$$

Preuve.

$(\Rightarrow)$ Supposons que $M \sim_h M'$, et soit $t \in \mathcal{R}_s(M)$ une représentation réduite du marquage $M$. Par définition de $h$, $h$ préserve les relations $\lessdot_1$ et $\lessdot$. Notons $t'$ l’arbre $h(t)$. $t'$ est un pid-tree avec la même structure que $t$, on a donc $\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(t')$. On doit juste montrer que $t'$ est une représentation sous forme de pid-tree de $M'$ (définition 6.11 page 99) :

1. $t'$ est bien formé (définition 6.8 page 97) : pour chaque sous-pid-tree
   
   $t_0 = M_{h(\pi)} \xrightarrow{a_1 \cdots a_n}(t_1, \ldots, t_n) \in \Xi_{h(\pi)}$ de $t'$ tel que :
   
   - si $n = 0$ et $M_{h(\pi)} = \bot$ alors $\pi$ est un futur-pid dans $M$, donc $M_{h(\pi)} = \bot$ et parce que $h$ préserve la relation parent, $h(\pi)$ est aussi un futur-pid dans $M'$.
   
   - le second point est trivial parce que $h$ préserve la relation parent.
   
   - parce qu’on utilise des pid-trees réduits il n’y a pas de noeud $\bot$ dans $t$ à l’exception de futur-pids, ceci est aussi vrai pour $t'$.

2. $\text{mrk}(t') = M'$ par définition de $h$.

3. parce que $h$ préserve la relation parent, il assigne les futur-pids de $t$ à de futur-pids de $t'$ donc les futur pids dans $t$ sont aussi les fils les plus à droite (nouveaux $\bot$).

$(\Leftarrow)$ On suppose que $\exists t \in \mathcal{R}_s(M)$ et $\exists t' \in \mathcal{R}_s(M')$ tels que $\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(t')$. On pose $A \overset{df}{=} \text{mrk}(\mathcal{N}(t))$. De par la proposition 6.2, il y a deux bijections $h_1$, $h_2$ telles que $\text{mrk}(t) = M \sim_{h_1} A$ et $A \sim_{h_2} M' = \text{mrk}(t')$. On conclut que $M \sim_{h_1 \circ h_2} M'$.


6.8.3 Preuve du théorème 6.8

Soit $M$ et $M'$ deux marquages pid-cohérents d’un réseau de Petri. Alors :

$$M \sim M' \iff \forall t \in \mathcal{R}_{so}(M), \exists t' \in \mathcal{R}_{so}(M'), \mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(t')$$

Preuve. Étant donné deux pid-trees réduits qui satisfont le théorème 6.5, on peut les ordonner ce qui donne les égalités recherchées.

6.8.4 Preuve du théorème 6.14

Soit $(S, T, \ell)$ un réseau de Petri tel que pour toute place $s \in S$, $\ell(s) = P \times X_1 \times \cdots \times X_n$ et $X_i \subseteq D_v (n \geq 0)$, i.e., les pids n’apparaissent qu’en première position. Alors, l’algorithme optimiste est complet, i.e., capture toutes les symétries.
Preuve. (schéma) Il faut montrer que toutes les représentation de $R_{so}$ d’un marquage, tel que dans l’énoncé, ont la même forme normalisée. On sait déjà que tous les pid-trees ont la même structure parce qu’on utilise l’ordre pid-free. Les formes normales ne peuvent différer que par les pid or puisqu’on a les pids qu’en première position la normalisation ne peut produire que des pids égaux.

6.9 Conclusion

Dans ce chapitre on a vu une manière de détecter des symétries dans les systèmes à création dynamique de processus. Cette approche est décidable et réalisable en pratique. Des résultats expérimentaux sont présentés dans le chapitre 7.

Cette approche est basée sur une structure de données arborescente permettant de facilement détecter les symétries grâce à des formes canoniques. Deux algorithmes ont été proposés un algorithme général qui vise à détecter toutes les symétries, et un algorithme optimiste moins coûteux. Ces deux algorithmes ont un avantage important par rapport aux approches existantes : ils peuvent être utilisés simultanément avec des techniques de hachage pour réaliser des tests rapides de l’existence d’un état dans l’espace déjà exploré.

De plus l’approche présentée dans ce chapitre est économe en mémoire, on stocke des marquages et non des représentations de marquages. C’est un aspect important parce que les model checkers, et les bibliothèques produites par la compilation comme celles présentées dans le chapitre 3, sont optimisés pour stocker des marquages et non des structures exotiques. La réduction n’a donc pas d’impact sur cette représentation.

On a aussi montré que lors de la vérification de propriétés logiques, il est aisé de reconstruire une trace concrète d’exécution. Le prix de cette reconstruction est en général linéaire en la taille de la trace abstraite et donc cette reconstruction est facilement applicable.
7 Neco : implémentation et études de cas

Le framework Neco a débuté en tant que compilateur de réseaux de Petri haut niveau, dans notre cas cela signifie un outil qui prend en entrée un réseau de Petri et produit une bibliothèque logicielle permettant de calculer son espace d’états. Maintenant, Neco est devenu une boîte à outils permettant non seulement de calculer des espaces d’états mais aussi de réaliser du model checking LTL explicite. Ce framework comprend au total : un compilateur pour les réseaux de Petri, un outil de construction d’espaces d’états, un second compilateur pour les formules de logique LTL et un model checker LTL.

Les modèles acceptés par Neco sont une variante très générale des réseaux de Petri haut niveau basée sur le langage Python, i.e., les valeurs, les expressions etc., annotant le réseau sont exprimés en Python. De plus, diverses extensions sont présentes telles que les arcs inhibiteurs (inhibitor-arcs), les arcs de lecture (read-arcs) et les arcs flush (whole-place-arcs). On peut assimiler ces modèles à des réseaux de Petri colorés [103] mais annotés avec le langage Python au lieu d’un dialecte de ML comme c’est traditionnellement le cas. Neco peut être vu comme une implantation des méthodes du chapitre 3 sur cette variante de réseaux de Petri, mais supporte aussi les réductions par symétries présentées dans le chapitre 6.

En particulier, Neco peut exploiter diverses propriétés des réseaux de Petri pour optimiser la représentation du marquage et les algorithmes de tir de transitions, pour améliorer les temps d’exécution mais aussi l’occupation mémoire.

Finalement Neco est capable de typer la majorité du code Python embarqué dans le réseau de Petri grâce aux informations de typage sur les places. Ceci permet de générer du code C++ efficace grâce au langage Cython sans pénalité sur l’interprétation du code Python en général.

L’ensemble des optimisations crée une accélération notable du tirage des transitions et par conséquent de l’exploration d’espaces d’états [FP11a] et donc du model checking explicite. Ceci a aussi été confirmé lors de la participation de Neco au Model Checking Contest (événement satellite de la conférence Petri Nets 2012 et 2013), ce qui a montré que Neco est capable d’être compétitif avec les outils concurrents [KLB+12, KLB+13].

Dans ce chapitre on introduit les concepts principaux de l’architecture de Neco, on présente son utilisation, ainsi que l’évaluation de ses performances sur
7. Neco : implémentation et études de cas

Neco est un logiciel libre distribué sous la licence GNU LGPL et peut être obtenu à l’adresse http://code.google.com/p/neco-net-compiler où une documentation est aussi disponible. La documentation inclut un tutoriel, une référence de l’API des bibliothèques générés par Neco et des exemples concrets.

Ce chapitre est basé sur [FP13] et [FDL13]. Les résultats de performances présentés ont été réalisés spécialement pour ce manuscrit.

7.1 Architecture et utilisation de Neco

Neco est une collection de deux compilateurs, un outil d’exploration et un model checker :
- **neco-compile** est le compilateur principal qui produit un moteur d’exploration d’un réseau de Petri sous forme de bibliothèque logicielle ;
- **neco-explore** est un outil d’exploration minimaliste qui calcule l’espace d’états d’un réseau de Petri grâce au moteur d’exploration produit par **neco-compile**;
- **neco-check** est un compilateur de formules LTL qui produit une bibliothèque nécessaire pour les manipuler ;
- **neco-spot** est un model checker LTL qui utilise un moteur d’exploration construit par **neco-compile** et un adaptateur LTL créé par **neco-check**, mais aussi la bibliothèque Spot pour les algorithmes de model checking LTL [52].

En tant que compilateur, Neco propose deux backends :
- le backend **Python** qui produit un module Python ;
- le backend **Cython** qui permet de générer une variante de code Python annotée par des informations de types, ce code peut par la suite être compilé en C++ efficace. Cela donne un module utilisable depuis Python mais aussi depuis C ou C++.

Un backend LLVM a aussi existé mais n’est plus maintenu, la raison principale de l’abandon est que les performances étaient comparables aux résultats obtenus avec le backend Cython, mais le temps de développement beaucoup plus important. Il devenait alors difficile de développer et tester rapidement des idées d’optimisations. Dans la phase d’expérimentation, le backend Python est le plus utile, lorsqu’on obtient des résultats intéressants, ils peuvent être portés dans le backend Cython. À l’avenir, lorsque Neco sera stabilisé, le backend LLVM pourra être réintroduit pour permettre la preuve des outils comme on l’a vu au chapitre 4.

Cette implémentation utilisait la bibliothèque LLVM-py [125], un binding de la bibliothèque LLVM en Python qui permet de générer du code source LLVM de manière programmatique sans manipuler directement d’arbres de syntaxe abstraite. Des résultats expérimentaux avec une comparaison au model checker Helena [135, 55] sont donnés dans [FP11a].

Un backend **Java** existe aussi mais ne fait pas encore partie de la branche principale de Neco. Il a été réalisé dans le cadre d’un stage de Master, ce qui a permis de mettre en avant l’extensibilité de notre outil et l’indépendance du langage cible. Cette implémentation a pour but de permettre le calcul parallèle.
7.1. Architecture et utilisation de Neco

multi-coeur ce qui n’est pas possible en Python à cause d’un verrou global sur l’interpréteur. Les algorithmes de calcul des successeurs restent très similaires, mais utilisent des structures de données partagées.

Chaque outils composant Neco est dédié à une tâche spécifique, gardant à l’esprit la philosophie unix : faire une seule tâche par outil et la faire aussi bien que possible [63]. Le workflow détaillé d’utilisation de Neco est donné en figure 7.1. Dans cette section on suppose qu’on ne considère que le backend Cython qui est le plus efficace. Cependant la majorité des explications s’appliquent aussi au backend Python. On présente tout d’abord comment est construit le moteur d’exploration et comment l’utiliser pour calculer les espaces d’états. Par la suite, on présente comment réaliser du model checking LTL avec Neco, qui est actuellement une partie non supportée par le backend Python. Cependant le backend Python possède aussi des caractéristiques qui ne sont pas encore disponibles en Cython, comme les réductions par symétries présentés dans le chapitre 6 [Fro12a].

7.1.1 Moteur d’exploration et calcul d’espaces d’états

La première étape lorsqu’on utilise Neco est de créer une bibliothèque net.so avec l’outil neco-compile. Cette bibliothèque fournit des primitives d’exploration : une structure de marquage, des fonctions successeurs spécifiques aux transitions, et une fonction successeur globale qui appelle les fonctions successeurs spécifiques (chap. 3). Un schéma d’un telle bibliothèque est rappelé en figure 7.2. Ce moteur d’exploration peut être utilisé par un programme client (e.g., un model checker ou un simulateur) pour l’aider à accomplir sa tâche. La bibliothèque générée embarque directement le code du modèle (i.e., les annotations du réseau de Petri en Python) mais se base aussi sur des structures de données préexistantes (en particulier, les ensembles et multiensembles) formant les bibliothèques noyau. L’accès à ces bibliothèques se fait par des interfaces normalisées, intuitivement similaires à celles discutées dans les chapitres 3 et 4. Le code source fourni par l’utilisateur annotant le modèle quant à lui a très peu de contraintes et peut utiliser d’autres bibliothèques si nécessaire.

Ce module est construit en utilisant la commande neco-compile. Pour cela, Neco prend en entrée un modèle qui peut être :

- soit fourni programmatiquement en tant que module Python avec la bibliothèque SNAKES [145] ;
- soit spécifié en utilisant le formalisme ABCD [144] qui est une algèbre de réseaux de Petri ;
- soit spécifié en utilisant le standard PNML [81].

Une fois le modèle chargé, certains types peuvent être inférés permettant par la suite de typer le code Python, cette étape est importante parce que le langage Cython peut produire du code C++ optimisé à partir du code Python annoté [17] (principalement en exploitant ces informations de types). D’autres informations peuvent être extraites du modèle, comme par exemple les bornes de certaines places dans le cas de ABCD.

Cependant, parce qu’on autorise un grand degré d’expressivité, tout le code source Python ne peut pas être typé. Dans ce genre de cas Neco va recourir à l’interpréteur Python qui permet de toujours exécuter le code en sacrifiant de l’efficacité. Intuitivement, si le réseau contient des jetons noirs, des entiers, des booléens, des chaînes de caractères statiques, ou des collections Python
7. **Neco : implémentation et études de cas**

**Figure 7.1** – *Flot de compilation est d’exploration des outils Neco (backend Cython).*

122
7.1. Architecture et utilisation de Neco

classiques (tuples, listes, ensembles, dictionnaires) de ces types, alors on peut produire du code C++ efficace. Mais la possibilité d’utiliser des types plus riches est aussi offerte ce qui permet de jouer sur un compromis entre l’efficacité et l’expressivité, permettant à une partie du réseau d’être efficace et une autre plus lente mais plus expressive. Cette possibilité de compromis est un point fort de Neco.

Cette expressivité a cependant un coût en temps de développement. Neco est réalisé de manière hybride avec plusieurs langages de programmation. Les outils sont réalisés en Python, les compilateurs génèrent du code Python ou Cython mais peuvent réutiliser des blocs préalablement écrits à la main. Ces blocs sont, selon le cas, réalisés soit en Python, soit en Cython, soit en C++. Le choix de Python pour le développement des outils résulte du constat que le compilateur n’a pas besoin d’être optimisé puisque la compilation a un coût négligeable par rapport à la construction d’espaces d’états en général.

L’étape suivante est de produire une structure de marquage pour représenter les états du réseau de Petri. Cette structure de données est optimisée grâce aux types précédemment découverts. Cela permet d’utiliser des types natifs ou encore d’utiliser des implémentations spécifiques à chaque place. Par la suite, on peut générer les fonctions d’explorations spécifiques au modèle (principalement une fonction qui renvoie le marquage initial et des fonctions successeurs) qui permettent de calculer les espaces d’états efficacement comme vu au chapitre 3.

Une étape supplémentaire est de produire une trace de compilation qui contient des informations à propos de la structure du marquage et du modèle. C’est un ensemble de métadonnées essentielles pour préserver la cohérence avec les autres outils, de plus cela évite à l’utilisateur d’appeler les outils de la chaîne avec tout le temps les mêmes options de qui est propice à l’erreur.

L’étape finale est de compiler le code généré et de produire un module Python natif qui est une bibliothèque logicielle. Dans notre cas cette bibliothèque peut être utilisée depuis le C++ comme une bibliothèque classique ou depuis Python comme un module. Cette étape est réalisée avec le compilateur Cython et un compilateur C++.

Figure 7.2 – Le moteur d’exploration (boite ligne continue) et son contexte (boites lignes discontinues). [FP11a]
Par la suite, l’outil **neco-explore** permet de réaliser l’exploration de l’espace d’états. Cet outil construit l’ensemble des états accessibles ou le graphe d’accessibilité en utilisant un simple algorithme d’exploration qui agrège les états découverts par appel des fonctions successeur. La réalisation de cet outil reste simple.

### 7.1.2 Model checking LTL

Le model checking LTL est réalisé en utilisant la bibliothèque Spot [52] qui est une bibliothèque générale d’algorithmes de vérification de formules LTL. De part sa généralité, cette bibliothèque n’est pas liée à un formalisme donné et donc ne s’adresse pas de base aux réseaux de Petri ou autre formalisme.

Par conséquent, Spot ne peut pas gérer directement les propositions atomiques apparaissant dans les formules LTL qui sont spécifiques au formalisme utilisé. De plus, puisque nos structures de marquages sont spécifiques aux modèles, on a aussi besoin de produire une manière de vérifier les propositions atomiques pour chaque modèle compilé. C’est le travail du second compilateur **neco-check**.

Cet outil a besoin de deux entrées, une formule LTL dans un format approprié pour Neco [Fro12b], et les métadonnées extraites d’un moteur d’exploration précédemment compilé avec **neco-compile**.

La première étape consiste en une décomposition de la formule : extraire les propositions atomiques et les associer à des identifiants uniques ("association id-atome" sur la figure 7.1). Une formule simplifiée où chaque proposition atomique a été remplacée par ces identifiants est stockée dans un fichier. De cette manière, on peut proposer une interface simple avec un module de vérification. Intuitivement, l’interface publique est une seule fonction `check` qui prend en argument un état du réseau de Petri et l’identifiant d’une proposition atomique, puis renvoie la valeur de vérité de cette proposition atomique dans cet état.

Les propositions atomiques prises en charge sont les comparaisons de multiensembles (tels que les marquages de places ou des multiensembles constants qui peuvent être définis avec du code Python arbitraire), les comparaisons d’expressions entières (opérations arithmétiques, bornes de places, constantes), les tests de tirabilité de transitions et les deadlocks. Ces propositions atomiques peuvent être liées pour former des formules grâce aux opérateurs temporels (*A*, *E*, *G*, *F*, *X*, *U*, *W*) et les opérateurs logiques (*¬*, ∧, ∨, ⇒, ⇔, ⊕*).

L’étape suivante est de générer une fonction check pour chaque proposition atomique en plus de la fonction check générale publique. Pendant cette étape, utiliser la trace de compilation est essentiel parce qu’on a besoin de générer des fonctions qui sont compatibles avec la structure de marquage optimisée, et donc il faut connaître son organisation en mémoire et les types utilisés. On aurait pu fournir des fonctions génériques mais dans ce cas il faudrait transformer la structure de marquage en une structure générique et on perdrait les avantages de la compilation. Finalement le code généré est compilé en utilisant le compilateur Cython et un compilateur C++.

Le module checker.so finalisé, il peut être utilisé avec le fichier de formule par **neco-spot** qui donnera une contre-exemple s’il en existe un, i.e., si la formule n’est pas satisfaite.
Dans cette section on explicite comment l’outil *Neco-Spot* a été réalisé en combinant le moteur d’exploration généré par Neco et la bibliothèque d’algorithmes de model checking Spot [52].

Spot manipule des automates de Büchi généralisés avec transitions d’acceptation (TGBA). Les TGBA permettent une représentation plus compacte des propriétés LTL [51], et peuvent être utilisés de manière efficace pour réaliser les tests de vacuité [44]. Le TGBA est aussi une classe abstraite, *tgba*, en C++ dans la bibliothèque Spot avec une interface permettant l’exploration à la volée. Les structures de Kripke sont vues comme des sous-classes de *tgba* sans ensembles d’acceptation.

L’approche théorique spécifique aux automates est implémentée dans l’outil *neco-spot* par :

1. Une encapsulation de *net.so* et *checker.so* qui présente le graphe d’accessibilité du modèle comme une sous-classe de la classe *Kripke* de Spot. Cette interface peut être réduite à trois fonctions essentielles :
   - *get_init_state()* qui renvoie l’état initial du modèle ;
   - *succ_iter(s)* qui renvoie un itérateur sur les successeurs d’un état *s* ;
   - *state_condition(s)* qui renvoie la valeur de vérité des propositions atomiques.

   Notons que l’interface permet une exploration à la volée de l’espace d’états, et calcule les résultats de *succ_iter(s)* et *state_condition(s)* à la demande, c’est réalisé simplement en appelant les fonctions adéquates dans *net.so* et *checker.so*.

2. La formule LTL est simplifiée puis convertie en TGBA qui est à son tour simplifié. Toutes ces opérations sont des fonctions fournies par Spot [51].

3. Les deux automates ci-dessus sont alors synchronisés en utilisant la classe *tgba_product* de Spot (une autre sous classe de *tgba*). Ce produit synchronisé est construit en temps constant et les calculs sont différés au besoin (durant l’exploration).

4. Le produit synchronisé est utilisé pour le test de vacuité en utilisant, au choix, un des algorithmes proposés par Spot [52]. Durant ce test de vacuité on va déclencher le calcul à la volée du produit synchronisé, qui va à son tour construire la partie du graphe d’accessibilité qui doit être explorée.

5. Si le produit est vide, un contre exemple est calculé et affiché.

La partie la plus importante du travail d’interfaçage entre Neco et Spot consiste donc surtout à implémenter l’interface pour la classe *Kripke* de Spot ; le reste est juste une suite d’appels à divers algorithmes fournis par Spot.

### 7.3 Comparaisons et études de cas

Les comparaisons et les études de cas présentées dans cette section servent à évaluer les performances des approches présentées dans les chapitres précédents.
On utilise les backends Python et Cython selon les cas. Tout d’abord on présente les modèles traités, puis on montre les résultats avant de les analyser.


Les cas présentés ont été choisis de manière à éliminer les temps d’exécutions trop petits : la majorité des exécutions en dessous de 1s a été retirée. De même pour les instances trop grandes : un time out de 25 minutes de calcul a été mis en place. Ce time out affecte les temps de compilation et les temps d’exploration de manière distincte, ainsi dans le pire des cas un exemple pourra s’exécuter en au plus 50 minutes. Évidemment, si la compilation a dépassé le délai de 25 minutes, l’exploration n’est pas exécutée.

On essaie de se positionner d’un point de vue similaire à celui présenté dans [90]. En effet le but ici n’est pas de prouver que l’outil présenté est meilleur que les autres mais plutôt montrer que les approches employées sont pertinentes et efficaces. Pour une comparaison avec d’autres outils on peut se référer à [FP11a, KLB+12, KLB+13].

Un autre point de comparaison est donné en annexe C. Il s’agit de comparer les performances du backend Python en utilisant la compilation à la volée. Pour cela on utilise PyPy [149], une implémentation alternative du langage Python. PyPy est un interpréteur qui compile à la volée le code source Python en utilisant des techniques just-in-time pour de meilleures performances. Ce point de comparaison sert essentiellement à vérifier que le travail investi dans le backend Cython est pertinent. Le constat est indéniable, le backend reste beaucoup plus rapide mais PyPy permet d’obtenir de meilleures performances que Python.

### 7.3.1 Statistiques

L’ensemble de tests est composé de 18 modèles. La majorité des modèles est paramétrable ce qui permet de varier la taille de l’espace d’états associé. L’ensemble de tous les paramétrages choisis donne 97 différents modèles. Chaque case peut supporter différentes configurations parmi les suivantes :

- **SIMPLE**: sans optimisations
- **OPT**: optimisations générales (ordonnancements des transitions, utilisation de types spécifiques pour places) ;
- **PACK**: optimisations avec packing (opérations de bas niveau pour Cython nécessitant un encodage au bit près, il s’agit essentiellement des optimisations du chapitre 3 qui jouent sur l’encodage minimal en bits des places) ;
- **FLOW**: optimisation de contrôle de flot ;
- **SYM**: réductions par symétries ;
- **SYM_NO**: réductions par symétries optimistes.

Certaines optimisations sont dépendantes entre elles, ainsi :

- **PACK** inclut **OPT** ;
- **FLOW** inclut **PACK** et donc **OPT** ;
- **SYM** et **SYM_NO** incluent **PACK** et donc **OPT** ;
Remarquons que la configuration PACK ne diffère pas de OPT en Python, en effet il s’agit d’opérations bas niveau qui ne sont accessibles qu’en Cython. De plus, puisque les réductions par symétries ne sont disponibles qu’en Python actuellement inclure PACK revient à inclure OPT pour ces réductions. Les 97 cas supportent les configurations suivantes
- 97 supportent les configurations SIMPLE, OPT, PACK ;
- 20 supportent la configuration FLOW ;
- 40 supportent les réductions par symétries SYM et SYM_NO.
Pour ces configurations, 82 cas supportent l’exécution en Python et 57 cas supportent l’exécution en Cython. Le tout totalisant 531 exécutions. Pour une meilleure fiabilité des résultats chaque cas a été exécuté 5 fois ce qui nous donne un total de 2655 exécutions réalisés en 106 heures et 44 minutes de calcul.
Des statistiques supplémentaires sur les tailles des fichiers produits sont aussi présentées en annexe C. On remarque essentiellement que les optimisations ont pour effet de produire des fichiers plus petits, notamment l’optimisation de réduction de contrôle de flot qui a un effet drastique en Cython.
La machine utilisée est un noeud d’une grappe de calculs. Ce noeud possède 8Go de mémoire, un processeur quad-core (virtualisé) cadencé à 2.67 Ghz. Cependant Neco ne tire pas avantage d’architectures parallèles, un seul core est donc utilisé, le reste est laissé aux autres processus et au système d’exploitation. Ce noeud a été isolé pour des performances homogènes et est équipé d’un système GNU/Linux Ubuntu 12.1 en version 32bits, par conséquent seulement 4Go de mémoire peuvent être utilisés.

7.3.2 Notations pour création dynamique de processus

Pour décrire nos exemples nous allons alléger les notations. Lorsqu’un réseau de Petri avec création dynamique de processus est présenté graphiquement, on omet la place générateur et les arcs qui y sont connectés. À la place, on utilise la notation \( \nu(\pi) \) pour la création d’un fils du processus \( \pi \) et la notation \( \chi(\pi) \) pour la terminaison du processus \( \pi \). Un exemple est donné en figure 7.3. Remarquons que lorsque le processus \( \pi \) crée un fils à la transition \( t \), son successeur dans la place générateur \( s_{o} \) est mis à jour et le jeton \( (\pi \cdot \langle i \rangle, \pi \cdot \langle i \rangle \cdot \langle 1 \rangle) \) est produit car \( \pi \cdot \langle i \rangle \cdot \langle 1 \rangle \) est le premier fils que \( \pi \cdot \langle i \rangle \) peut créer.

7.4 Modèles

Les philosophes (Philosophers) Le modèle des philosophes est commun dans la littérature depuis longtemps [123] et est souvent utilisé en model checking en tant que modèle académique. On fait varier la taille du modèle en augmentant le nombre de philosophes dans le système. Un exemple de système avec deux philosophes est donné en figure 7.4. On remarquera qu’on assimile l’état de réflexion du philosophe à l’action de ne pas manger. Ce modèle est 1-borné c’est-à-dire que dans chaque état accessible, une place ne peut contenir qu’au plus un seul jeton.

Un modèle de passage à niveau (Railroad) Ce modèle généralise le modèle présenté dans [144] à un nombre arbitraire de voies. Il comprend un
7. Neco : implémentation et études de cas

Figure 7.3 – Exemple de réseau de Petri avec création dynamique de processus : à gauche avec notations simplifiées, à droite avec notations explicites.

Figure 7.4 – Un dîner de philosophes avec 2 philosophes.
7.4. Modèles

passage à niveau, un ensemble de voies équipées de feux de signalisation et un contrôleur pour compter les trains et commander le passage. Pour $n$ voies, ce réseau de Petri comprend :

- $5n + 11$ places de type jeton noir qui sont 1-bornées (places de contrôle de flot ou drapeaux) ;
- 2 places de type entier 1-bornées (compteur de trains et état du passage) ;
- 3 places de type entier (les feux sur les voies) ;
- 1 place n-bornée de type jeton-noir (pour les signaux des voies vers le contrôleur).

Un protocole de sécurité *(Needham Schroeder)* Ce modèle est un cas du protocole cryptographique à clé publique Needham-Schroeder provenant de [64]. Il embarque environ 350 lignes de Python pour implémenter l'algorithme d’apprentissage d’un attaquant Dolev-Yao. Le modèle comprend 17 places :

- 11 places sont de type jeton-noir et sont 1-bornées pour implémenter le contrôle de flot des agents ;
- 6 places sont colorées par le type object *(i.e., toute donnée)* et sont 1-bornées pour stocker les connaissances des agents ;
- 1 place est colorée par le type object et n’est pas bornée pour stocker les connaissances de l’attaquant.

Les jetons colorés dans ce modèle sont des tuples d’objets Python arbitraires. Une telle structure est typique pour les modèles de protocoles cryptographiques comme ceux considérés dans [64].

Sur ce type de modèle on voit clairement l’utilité de notre niveau d’expressivité. La réalisation d’un algorithmes d’apprentissage au niveau du modèle est difficile, et beaucoup plus aisée dans un langage de haut niveau tel que Python. Une version de ce protocole a été modélisé pour Helena [28], lors d’une comparaison des temps d’exécution d’une exploration exhaustive entre SNAKES et Helena, on observe des temps équivalents. C’est à cause d’une part de l’exploration des espaces d’états qui est beaucoup plus rapide avec Helena mais qui nécessite des temps de compilation longs, SNAKES quant à lui ne compile pas. D’autre part, Helena prend en charge un nombre limité de structures de données. Ici, les connaissances de l’attaquant et les algorithmes d’apprentissage ont utilisé des listes chaînées et des tableaux, donc des structures séquentielles, ce qui a entraîné de mauvaises complexités. En Python, on a utilisé des dictionnaires et des ensembles, donc des tables de hachage munies d’algorithmes efficaces pour des opérations ensemblistes. La complexité est donc bien moindre et globalement plus optimisé.

Dans le cas de Neco on observe que les temps de compilation sont bons essentiellement parce que les annotations sont des expressions Python qui peuvent être directement embarqués dans le code généré, tandis que Helena a besoin de traduire les annotations du réseau de Petri en code C.

Un premier modèle pour le contrôle de flot *(Linear A)* Pour observer l’impact du contrôle de flot, un modèle spécifique a été réalisé. Il est formé de $n$ processus concurrents instanciés par duplication de sous-réseau. Chacun de ces processus est formé de 51 transitions exécutées en séquence. Le but de ce cas
est de regarder l’impact de la réduction sur des processus possédant un grand nombre de place de contrôle de flot. Un tel processus est donné en figure 7.5b.

Un second modèle pour le contrôle de flot (Choice) Il est important d’essayer de trouver le pire cas d’application pour notre optimisation. Pour cela on a réalisé un modèle similaire au précédent avec \( n \) processus concurrents instanciés par duplication de sous-réseau, mais cette fois chaque processus réalise un choix non déterministe parmi les 51 transitions, de cette manière on est obligé de tirer toutes les transitions à partir du même état malgré notre optimisation. Au total un processus contient 101 transitions, un exemple est donné en figure 7.5a.

Un troisième modèle pour le contrôle de flot (Linear B) Un second pire cas a été réalisé pour tester l’algorithme en situation avec un plus grand nombre \( n \) de processus. Chacun de ces processus possède une séquence de deux transitions qui ne sont tirables qu’une seule fois. Un tel processus est donné en figure 7.5c.

![Diagramme du modèle Choice](image-choice)

![Diagramme du modèle Linear A](image-linear-a)

![Diagramme du modèle Linear B](image-linear-b)

**Figure 7.5** – Réseaux des processus apparaissant dans les modèles Choice, Linear A et Linear B.

Un système client-serveur (Client Server) Ce modèle est un système client-serveur où plusieurs clients communiquent avec un serveur, par exemple
7.4. Modèles
des clients web requêtant une page d’un serveur web. Le réseau de Petri de ce
texte est présenté en figure 7.6 et été coupé en deux parties :
– la partie client où différents processus envoient des requêtes ;
– la partie serveur où un serveur qui gère ces requêtes.

Dans ce modèle, chaque client est un processus qui envoie une requête au
serveur en déposant un jeton dans la place $s_{in}$. Les requêtes sont présentées
comme les pids des clients, de cette manière on peut facilement identifier le
client faisant la requête. Une fois la requête envoyée, les clients attendent un
jeton dans la place $c_{out}$ correspondant à la réponse du serveur, de plus ce jeton
doit être égal au pid du client. Utiliser les identifiants des processus pour mar-
quer l’appartenance de jetons permet de marquer les jetons qui appartiennent
à chaque processus. Cela revient à utiliser les pids comme adresse du client.
Le serveur pioche les requêtes dans la place $s_{in}$, pour chacune d’elles, il crée
un thread qui va gérer la requête et place l’identifiant du client qui la soumise
dans l’espace local au thread. Cet espace local est modélisé avec la place $s_{tid}
dont les jetons sont des paires d’identifiants de threads et d’identifiants de
clients, en utilisant notre politique de modélisation, le thread est propriétaire
du jeton. Le reste des opérations est réalisé par le nouveau thread créé. Le
traitement de la requête est modélisé par des transitions $t_{4,0}, \ldots, t_{4,n}$ sur la
figure 7.6, $n$ est le paramètre qu’on va varier en plus du nombre de clients,
plus il est grand plus l’espace d’états est grand. Finalement le thread envoie
la réponse au client en utilisant la transition $t_{5}$ et termine. De plus, si on a
plusieurs serveurs (plusieurs jetons dans la place $s$), on peut tester si le serveur
est le parent du thread en utilisant la relation parent dans la garde de la
transition $t_{5}$.

Les graphes de contrôle de flot (CFG) L’exemple présenté dans cette
section montre que l’approche présentée dans le chapitre 6 peut être appliqué
à divers domaines. Par exemple les graphes de contrôle de flot (CFGs) [15] qui peuvent être représentés avec des réseaux de Petri en utilisant différents pids pour identifier des threads concurrents. Le but est de différencier les threads et pas seulement la présence de deux threads dans deux blocs de base, sinon on pourrait utiliser un simple réseau place/transITION. Les CFGs qu'on utilise ont des blocs de base spéciaux appelées barrières qui sont des primitives de synchronisation. Lorsqu'un thread rencontre une barrière il attend que tous les autres threads atteignent cette barrière avant de continuer. C'est utilisé sur des architectures comme les processeurs graphiques (GPU) où les exécutions qui divergent produisent de mauvaises performances, ainsi le placement de barrières pour synchroniser des threads est meilleur que les laisser diverger.

Le modèle présenté ici a un nombre de threads fixe et ne crée pas de nouveaux threads à l'exécution. Donc les pid-trees résultants ne vont pas grandir en hauteur et avoir une largeur fixe. Le nombre de threads est donc directement lié au nombre de permutations dont on a besoin par état, notre paramètre de mise à échelle sera donc le nombre de threads. De plus le modèle n'incorpore pas de données et donc le filtrage par ordonnancement est réduit à un ordre statique sur les places marquées qui est peu discriminant comme critère.

Le réseau de Petri qu'on considère est une composition séquentielle des sous réseaux présentés en figure 7.7. On crée $n$ instances de ce sous réseau en variant $i$ de 1 à $n$ et joignant les places $s_{i,7}$ et $s_{(i+1),1}$. Il faut mettre en avant que chaque transition $t_{i,8}$ est une barrière, et donc ne peut être franchie que si tous les threads sont dans la place $s_{i,6}$. Le marquage initial du système assigne un multiensemble de $n$ identifiants de processus $\{1 \cdot 1, \ldots, 1 \cdot n, \}$ à la place $s_{1,1}$.

Les autres modèles Les autres modèles considérés sont tirés de l'événement Model Checking Contest, satellite des conférences Petri Nets 2012 et 2013. Les modèles sont : CSRepetitions, Dekker, Kanban, LamportFastMutEx, Mapk, NeoElection, RessAllocation, RwMutx, SharedMemory, SimpleLoadBal et TokenRing. Leur description peut être trouvée dans [KLB+13]. Il s'agit de réseaux de Petri place-transition. On ne présente pas les résultats pour ces modèles en Python ici, car les résultats avec et sans optimisations sont identiques (la table de résultats correspondante peut cependant être trouvée en annexe C.1). En effet, dans le backend Python, les

\[
\begin{align*}
&\text{Figure 7.7 – Sous-réseau utilisé pour le cas de contrôle de flot, où } X_n = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}.
\end{align*}
\]
7.5. Résultats expérimentaux

optimisations n’ont pas d’effet sur ce type de réseaux car l’implémentation utilisée par défaut est la même que l’implémentation optimisée.

7.4.1 Bilan du model checking contest


Pour cette épreuve Neco était le seul model checker LTL explicite mais aussi le seul model checker LTL à fournir un résultat dans un temps raisonnable. Les autres outils n’ont pas donné de résultats, ce qui a valu à Neco la première place pour le model checking LTL.

L’épreuve de construction d’espaces d’états a aussi montré que Neco pouvait être compétitif. En effet, le score obtenu était de moitié celui des meilleurs outils qui sont des outils symboliques. Cependant il n’était pas le dernier du concours. Ce qui montre que même si Neco est un outil relativement jeune, il peut être compétitif avec les outils du domaine.

Au final, l’offre d’outils est assez pauvre, malgré une pléthore apparente, et Neco tient une place non négligeable avec un créneau large. Le Model Checking Contest montre la très grande difficulté à comparer les outils. Une des difficulté est le format d’entrée des outils dès qu’on sort du monde des réseaux place/transition. C’est d’ailleurs la raison pour laquelle Neco n’a participé que sur les modèles bas niveau à l’édition 2013 de la compétition. Une seconde difficulté était la vérification de formules logiques, en effet lorsque les outils sont en désaccord, on ne possède aucune implémentation de référence pour déterminer quel outil a raison. C’est directement lié à la problématique de certification des model checkers pour assurer de leur correction. Finalement, une comparaison sérieuse entre les outils est actuellement difficile et correspond à un grand effort en temps et de modélisation.

7.5 Résultats expérimentaux

7.5.1 Résultats pour les optimisations et les réductions de contrôle de flot

Les résultats pour le backend Python La première série de résultats pour les optimisations et réductions de contrôle de flot est présentée en table 7.1, les accélérations ne prennent pas en compte les temps de compilation. Les modèles de cette table sont des réseaux colorés. L’utilisation des optimisations présentées dans le chapitre 3 produit une accélération jusqu’à ×12 en temps d’exploration tout en réduisant les temps de compilation (la bibliothèque produite est plus simple). On observe aussi une faible accélération sur le modèle NEEDHAM SCHROEDER, ceci est essentiellement à dû à l’utilisation de jetons très riches (objets Python) pour représenter l’espion et son algorithme d’apprentissage. Ce code Python ne peut pas être optimisé par notre approche, il s’agit d’une problématique de compilation de Python et non compilation de réseaux de Petri.
Les réductions de contrôle de flot ont un effet drastique sur certains modèles, en effet on peut voir une accélération de ×200 sur le modèle Choice 2, il s’agit pourtant de notre modèle “pire cas” cependant après analyse on se rend compte que la décomposition du contrôle de flot élimine les le test de présence de jeton dans l’unique place en entrée de toutes les transitions, d’où cette accélération. L’optimisation est donc très efficace sur le cas qu’on prévoyait le pire, et qui au final est le meilleur. On remarque que plus le nombre de processus concurrents augmente plus cette accélération est importante par comparaison avec OPT. Une accélération est aussi observée pour notre second “pire cas” Choice Bis et notre “meilleur cas” Linear, certes moins impressionnante dans le cas Choice Bis mais non négligeable pour autant. L’approche se comporte donc bien en général, et on n’a pas réussi à cerner la situation lorsque l’optimisation est néfastes, on observe cependant une perte de performances pour le modèle Needham Schroeder. Après analyse par profiling sur ce modèle, on remarque qu’il s’agit d’un problème de fonction hachage, qui se comporte moins bien sur la version avec réduction de contrôle de flot de ce modèle.

Les résultats pour le backend Cython Pour ce backend les résultats pour les modèles haut niveau sont présentés sur la table 7.2. On remarque une accélération avec utilisation d’optimisations (OPT) qui est encore plus importante lorsqu’on utilise des encodages bas niveau (PACK). On peut voir que pour l’ensemble des modèles l’utilisation d’optimisations de bas niveau est essentielle pour bénéficier des meilleures performances.

Lors de l’utilisation des réductions de contrôle de flot, on observe aussi une accélération, moins marquante que dans le cas du backend Python car les opérations de base sont moins coûteuses mais non négligeables pour autant. Le plus important étant l’absence de décélération lors du calcul d’espaces d’états, ce qui indique que l’optimisation peut toujours être activée sans entraver les performances.

Pour les réseaux de bas niveau, tables 7.3 et 7.4, on remarque un impact nul des optimisations OPT. En effet dans ces réseaux toutes les places sont bas niveau, il est donc difficile de définir une stratégie efficace d’encodage et d’exploration sans travailler avec des opérations de bas niveau. Les performances avec la configuration PACK sont meilleures en général. Cependant sur certains modèles comme Mapk par exemple, les résultats avec optimisations sont similaires aux performances sans optimisations : c’est essentiellement dû au fait que les optimisations ne s’appliquent pas sur ce modèle.

On peut remarquer que lorsqu’on utilise des langages comme Cython et C++ les temps de compilation sont plus importants qu’avec Python. Dans certains cas comme par exemple RwMutex w0010w0500 on a un facteur de ×1654 entre en temps de compilation et le temps d’exploration. On a un temps d’exploration très petit et un temps de compilation très long. On peut donc voir que le surcoût de compilation peut être importants si le modèle a un petit espace d’états. La compilation du même modèle en Python (présenté en annexe C.1) prend 106s et son exploration 12s ce qui est plus efficace alors que Python est un langage qui s’exécute beaucoup plus lentement que Cython et C++.
### Table 7.1 - Résultats d'optimisations pour des réseaux haut niveau avec Python.

<table>
<thead>
<tr>
<th>PYTHON</th>
<th>TEMPS COMILATION (s)</th>
<th>TEMPS EXPLORATION (s)</th>
<th>ACCÉLÉRATION</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td></td>
<td>SIMPLE</td>
<td>OPT</td>
<td>FLOW</td>
</tr>
<tr>
<td>Choice 2</td>
<td>1.744</td>
<td>1.355</td>
<td>0.245</td>
</tr>
<tr>
<td>Choice 3</td>
<td>3.856</td>
<td>2.849</td>
<td>0.383</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear A</td>
<td>0.885</td>
<td>0.686</td>
<td>0.147</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear A</td>
<td>1.957</td>
<td>1.425</td>
<td>0.181</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear A</td>
<td>3.480</td>
<td>2.547</td>
<td>0.299</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear B</td>
<td>0.081</td>
<td>0.074</td>
<td>0.044</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear B</td>
<td>0.092</td>
<td>0.083</td>
<td>0.048</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear B</td>
<td>0.104</td>
<td>0.094</td>
<td>0.053</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear B</td>
<td>0.117</td>
<td>0.105</td>
<td>0.058</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad</td>
<td>0.167</td>
<td>0.159</td>
<td>0.121</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad</td>
<td>0.164</td>
<td>0.153</td>
<td>0.105</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad</td>
<td>0.191</td>
<td>0.176</td>
<td>0.119</td>
</tr>
<tr>
<td>Need.-Sch.</td>
<td>0.040</td>
<td>0.048</td>
<td>0.039</td>
</tr>
<tr>
<td>Cython</td>
<td>Temps compilation (s)</td>
<td>Temps exploration (s)</td>
<td>Opt par rapport à Simple</td>
</tr>
<tr>
<td>-----------------</td>
<td>_______________________</td>
<td>______________________</td>
<td>_________________________</td>
</tr>
<tr>
<td>Choice 2</td>
<td>21.777</td>
<td>21.747</td>
<td>8.176</td>
</tr>
<tr>
<td>Choice 3</td>
<td>44.302</td>
<td>44.287</td>
<td>14.464</td>
</tr>
<tr>
<td>Choice 4</td>
<td>74.671</td>
<td>74.694</td>
<td>21.554</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear A 2</td>
<td>13.276</td>
<td>13.227</td>
<td>5.210</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear A 3</td>
<td>26.459</td>
<td>26.378</td>
<td>8.654</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear A 4</td>
<td>44.058</td>
<td>44.225</td>
<td>12.688</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear B 11</td>
<td>2.884</td>
<td>2.886</td>
<td>2.068</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear B 12</td>
<td>3.078</td>
<td>3.078</td>
<td>2.134</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear B 13</td>
<td>3.298</td>
<td>3.291</td>
<td>2.234</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear B 14</td>
<td>3.518</td>
<td>3.511</td>
<td>2.337</td>
</tr>
<tr>
<td>Need.-Sch.</td>
<td>2.686</td>
<td>2.702</td>
<td>2.519</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 5</td>
<td>4.038</td>
<td>3.883</td>
<td>2.836</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 6</td>
<td>4.429</td>
<td>4.261</td>
<td>3.032</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 7</td>
<td>4.862</td>
<td>4.791</td>
<td>3.218</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 8</td>
<td>5.362</td>
<td>5.208</td>
<td>3.374</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 9</td>
<td>5.859</td>
<td>5.677</td>
<td>3.580</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 10</td>
<td>6.452</td>
<td>6.247</td>
<td>3.782</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 11</td>
<td>6.989</td>
<td>6.838</td>
<td>4.003</td>
</tr>
</tbody>
</table>
7.5. Résultats expérimentaux

<table>
<thead>
<tr>
<th>CYTHON</th>
<th>TEMPS COMILATION (s)</th>
<th>TEMPS EXPLORATION (s)</th>
<th>ACCELERATION</th>
<th>NOMBRE D'ETATS</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td></td>
<td>SIMPLE</td>
<td>OPT</td>
<td>PACK</td>
<td>SIMPLE</td>
</tr>
<tr>
<td>CSRepetitions PT 02</td>
<td>2.674</td>
<td>2.670</td>
<td>2.093</td>
<td>0.004</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 010</td>
<td>9.156</td>
<td>9.131</td>
<td>5.465</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 015</td>
<td>22.337</td>
<td>22.344</td>
<td>11.214</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 020</td>
<td>44.814</td>
<td>44.639</td>
<td>20.066</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>Kanban PT 0005</td>
<td>2.077</td>
<td>2.076</td>
<td>2.077</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutEx PT 010</td>
<td>9.309</td>
<td>9.289</td>
<td>4.660</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutEx PT 015</td>
<td>22.337</td>
<td>22.344</td>
<td>11.214</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutEx PT 020</td>
<td>44.814</td>
<td>44.639</td>
<td>20.066</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>Kanban PT 0005</td>
<td>2.077</td>
<td>2.076</td>
<td>2.077</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutEx PT 010</td>
<td>9.309</td>
<td>9.289</td>
<td>4.660</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutEx PT 015</td>
<td>22.337</td>
<td>22.344</td>
<td>11.214</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutEx PT 020</td>
<td>44.814</td>
<td>44.639</td>
<td>20.066</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R003C010</td>
<td>5.239</td>
<td>5.242</td>
<td>5.235</td>
<td>4.652</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R005C002</td>
<td>2.131</td>
<td>2.132</td>
<td>2.124</td>
<td>0.000</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R010C002</td>
<td>3.278</td>
<td>3.284</td>
<td>3.279</td>
<td>0.012</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R015C002</td>
<td>4.791</td>
<td>4.781</td>
<td>4.765</td>
<td>0.854</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R020C002</td>
<td>6.672</td>
<td>6.660</td>
<td>6.656</td>
<td>65.97</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Tableau 7.3 – Résultats d’optimisations pour réseaux bas-niveau avec Cython (suite 1).
### Résultats d’optimisations pour réseaux bas-niveau avec Cython

<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>RwMutex PT 0010</td>
<td>4.774</td>
<td>4.755</td>
<td>3.097</td>
<td>0.005</td>
<td>0.005</td>
<td>0.004</td>
<td>x0.999</td>
<td>x1.392</td>
<td>1.034</td>
<td>1.034</td>
<td>1.034</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>RwMutex PT 0010</td>
<td>7.578</td>
<td>7.529</td>
<td>4.200</td>
<td>0.006</td>
<td>0.006</td>
<td>0.004</td>
<td>x0.998</td>
<td>x1.570</td>
<td>1.044</td>
<td>1.044</td>
<td>1.044</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>RwMutex PT 0010</td>
<td>20.240</td>
<td>20.148</td>
<td>8.634</td>
<td>0.011</td>
<td>0.011</td>
<td>0.006</td>
<td>x0.998</td>
<td>x1.701</td>
<td>1.074</td>
<td>1.074</td>
<td>1.074</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>RwMutex PT 0010</td>
<td>56.137</td>
<td>55.966</td>
<td>18.789</td>
<td>0.023</td>
<td>0.023</td>
<td>0.012</td>
<td>x1.004</td>
<td>x1.945</td>
<td>1.124</td>
<td>1.124</td>
<td>1.124</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>RwMutex PT 0010</td>
<td>218.354</td>
<td>218.354</td>
<td>8.313</td>
<td>0.011</td>
<td>0.011</td>
<td>0.006</td>
<td>x1.004</td>
<td>x1.945</td>
<td>1.124</td>
<td>1.124</td>
<td>1.124</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>SharedMemory PT</td>
<td>4.685</td>
<td>4.671</td>
<td>2.992</td>
<td>0.007</td>
<td>0.006</td>
<td>0.005</td>
<td>x1.013</td>
<td>x1.364</td>
<td>1.863</td>
<td>1.863</td>
<td>1.863</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>SharedMemory PT</td>
<td>28.676</td>
<td>28.377</td>
<td>10.435</td>
<td>31.882</td>
<td>30.829</td>
<td>21.379</td>
<td>x1.034</td>
<td>x1.491</td>
<td>1.830,519</td>
<td>1.830,519</td>
<td>1.830,519</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>SimpleLoadBal PT</td>
<td>3.849</td>
<td>3.830</td>
<td>2.703</td>
<td>0.002</td>
<td>0.002</td>
<td>0.001</td>
<td>x1.012</td>
<td>x1.179</td>
<td>832</td>
<td>832</td>
<td>832</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>SimpleLoadBal PT</td>
<td>119.497</td>
<td>119.598</td>
<td>45.127</td>
<td>5.700</td>
<td>5.670</td>
<td>4.231</td>
<td>x1.005</td>
<td>x1.347</td>
<td>58,905</td>
<td>58,905</td>
<td>58,905</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

| Table 7.4 | Résultats d’optimisations pour réseaux bas-niveau avec Cython |
7.5. Résultats expérimentaux

7.5.2 Résultats pour les réductions par symétries

Pour tester l’approche présentée dans le Chapitre 6, une implémentation a été réalisée dans Neco. Dans nos études de cas on se focalise sur les calculs en utilisant une approche par force brute et les deux réductions précédemment présentées : l’approche complète avec permutations de sous arbres, et l’approche optimiste sans permutations. À notre connaissance ce type de réductions n’est supporté par aucun outil existant, par conséquent aucune comparaison directe n’a été réalisée. Ceci est principalement dû au fait qu’il existe très peu de travaux sur la création dynamique de processus et encore moins d’outils, mais aussi à l’aggravation du problème d’explosion d’états causée par la création de nouveaux processus à l’exécution et donc l’absence de techniques de réduction efficaces. Cependant de nombreuses techniques existantes sont compatibles avec nos réductions et donc n’ont pas à la concurrencer. Par ailleurs, puisque l’implémentation actuelle de la technique a été réalisée en Python une comparaison ne serait pas équitable.

Remarquons que dans le cas des CFG on aurait pu utiliser des symétries classiques et se comparer à un outil existant. Il y a des chances que ce serait moins bon car les arbres se justifient que lorsqu’on a de la création dynamique et des relations entre pids, et comme ils ne sont pas gratuits, on devrait perdre par rapport à une autre approche plus simple.

L’implémentation utilisée est basée sur le module itertools de Python pour générer les permutations de pid-trees. À chaque fois qu’un itérateur est construit, toutes les permutations sont créées pour être itérées par la suite. Cette approche n’est pas optimale, puisqu’il serait plus efficace d’itérer sur les permutations à la volée et s’arrêter lorsqu’un marquage adéquat est trouvé. Nos expérimentations permettent donc d’évaluer les réductions qu’on peut espérer de notre approche et non ses performances.

Les résultats pour le modèle client-serveur Les résultats pour le modèle client-serveur sont présentées en table 7.5. On a exécuté différentes configurations sur ce modèle en faisant varier le nombre de clients \(c\) et le nombre \(n\) d’opérations par thread. Ainsi, le nom d’une instance Client Server c3n4 signifie que le modèle contient 3 clients et 4 opérations par thread.

On observe une réduction importante des espaces d’états avec un facteur de réduction qui augmente avec la taille des instances, ce qui signifie qu’on a gagné un ordre de grandeur. On voit que pour la plus grande instance calculable sans réductions sur notre machine de tests (Client Server c5n3) on a une réduction de facteur \(\times1133\) et une réduction en temps de calcul d’un facteur \(\times12,69\). La réduction du temps de calcul résulte du calcul d’un espace d’états plus petit, on a moins d’états à traiter. L’évolution des temps de calcul pour le modèle avec 5 clients est montrée en figure 7.8a et l’évolution des tailles des espaces d’états en figure 7.8b.

Les modèles de contrôle de flots (CFG) Les résultats pour les graphes de contrôle de flot ont été séparés en deux parties pour différencier les deux paramètres de mise à échelle. En table 7.6 on présente les résultats pour 10 instances du sous réseau en faisant varier le nombre de threads qui exécutent le réseau résultant. La figure 7.9a présente les temps d’exploration pour les
7. Neco : implémentation et études de cas

Python

<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th>TEMPS COMILATION (s)</th>
<th>TEMPS EXPLORATION (s)</th>
<th>ACCÉLÉRATION PAR RAPPORT À OPT</th>
<th>NOMBRE D'ÉTATS</th>
<th>RÉDUCTION PAR RAPPORT À OPT</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td></td>
<td>SIMPLE</td>
<td>OPT</td>
<td>SYM NO</td>
<td>SIMPLE</td>
<td>OPT</td>
</tr>
<tr>
<td>c3n4</td>
<td>0.037</td>
<td>0.037</td>
<td>0.047</td>
<td>1.488</td>
<td>1.391</td>
</tr>
<tr>
<td>c3n5</td>
<td>0.040</td>
<td>0.040</td>
<td>0.050</td>
<td>2.243</td>
<td>2.298</td>
</tr>
<tr>
<td>c4n1</td>
<td>0.029</td>
<td>0.029</td>
<td>0.037</td>
<td>5.069</td>
<td>4.664</td>
</tr>
<tr>
<td>c4n2</td>
<td>0.031</td>
<td>0.031</td>
<td>0.041</td>
<td>13.312</td>
<td>13.81</td>
</tr>
<tr>
<td>c4n3</td>
<td>0.035</td>
<td>0.035</td>
<td>0.044</td>
<td>30.06</td>
<td>31.302</td>
</tr>
<tr>
<td>c4n4</td>
<td>0.037</td>
<td>0.037</td>
<td>0.047</td>
<td>61.946</td>
<td>56.691</td>
</tr>
<tr>
<td>c4n5</td>
<td>0.040</td>
<td>0.040</td>
<td>0.051</td>
<td>111.301</td>
<td>101.23</td>
</tr>
<tr>
<td>c5n1</td>
<td>0.029</td>
<td>0.029</td>
<td>0.038</td>
<td>117.856</td>
<td>116.57</td>
</tr>
<tr>
<td>c5n2</td>
<td>0.033</td>
<td>0.033</td>
<td>0.041</td>
<td>430.248</td>
<td>382.754</td>
</tr>
<tr>
<td>c5n3</td>
<td>0.035</td>
<td>0.035</td>
<td>0.044</td>
<td>1 174.19</td>
<td>1 202.50</td>
</tr>
<tr>
<td>c5n4</td>
<td>0.038</td>
<td>0.038</td>
<td>0.048</td>
<td>MEM</td>
<td>MEM</td>
</tr>
<tr>
<td>c5n5</td>
<td>0.041</td>
<td>0.041</td>
<td>0.051</td>
<td>MEM</td>
<td>MEM</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Tableau 7.5 – Résultats des réductions par symétries pour le modèle Client-Server (Python).
7.6. Conclusion

(a) Temps d’exploration.

(b) Taille des espaces d’états.

Figure 7.8 – Résultats pour le modèle Client Server c5 pour un nombre variable de clients (axe horizontal).

différentes instances testées, on observe que les trois approches ont une croissance exponentielle. Cependant si on regarde le même graphique avec une échelle logarithmique (figure 7.9b) on observe que cette croissance est moindre pour les méthodes avec réductions par symétries : on est passé à un autre ordre de grandeur.

La réduction de la taille des espaces d’états est importante comme on peut le voir sur la figure 7.10a. On réduit les espaces d’états de manière efficace. Il est intéressant d’observer que les deux approches de réduction produisent des espaces d’états de même taille. En effet, ces réseaux de Petri appartiennent à une sous-classe pour laquelle l’approche optimiste est complète. En général, pour tout réseau ou les jetons contiennent au plus un identifiant de processus, l’approche optimiste sera complète. Ici aussi si on observe ces mêmes résultats que précédemment avec une échelle logarithmique (fig. 7.10b) : un gain exponentiel.

La seconde comparaison est réalisée sur le nombre d’instance du sous réseau en fixant le nombre de threads. Les résultats sont présentés dans la table 7.7. Ici, on peut remarquer qu’on obtient toujours la même réduction. Cela est dû à la structure du modèle, en effet on réplique un sous réseau dont le comportement n’est pas influencé par les autres sous réseaux : les threads ne peuvent pas diverger au delà d’une barrière.

Dans ce chapitre nous avons présenté la boîte à outils Neco. Il s’agit d’un ensemble d’outils de compilation de réseaux de Petri et model checking LTL. Ils produisent des bibliothèques dynamiques performantes pouvant être utilisées depuis Python ou de manière native depuis le C ou C++.

Neco implémente les approches décrites dans ce manuscrit et a été utilisé pour réaliser des études de cas pour les valider. Ces études de cas ont montré l’effet non négligeable de ces approches pour la construction d’espaces d’états.
<table>
<thead>
<tr>
<th>CFG</th>
<th>TEMPS COMILATION (s)</th>
<th>TEMPS EXPLORATION (s)</th>
<th>ACCÉLÉRATION PAR RAPPORT À</th>
<th>NOMBRE D'ÉTATS</th>
<th>RÉDUCTION PAR RAPPORT</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td></td>
<td>SIMPLE</td>
<td>OPT</td>
<td>SYM</td>
<td>SYM NO</td>
<td>SIMPLE</td>
</tr>
<tr>
<td>10 1</td>
<td>0.411</td>
<td>0.410</td>
<td>0.496</td>
<td>0.465</td>
<td>0.042</td>
</tr>
<tr>
<td>10 2</td>
<td>0.413</td>
<td>0.412</td>
<td>0.461</td>
<td>0.467</td>
<td>0.473</td>
</tr>
<tr>
<td>10 3</td>
<td>0.408</td>
<td>0.418</td>
<td>0.465</td>
<td>0.467</td>
<td>3.989</td>
</tr>
<tr>
<td>10 4</td>
<td>0.415</td>
<td>0.414</td>
<td>0.464</td>
<td>0.465</td>
<td>31964</td>
</tr>
<tr>
<td>10 5</td>
<td>0.411</td>
<td>0.411</td>
<td>0.489</td>
<td>0.467</td>
<td>247419</td>
</tr>
<tr>
<td>10 6</td>
<td>0.420</td>
<td>0.412</td>
<td>0.467</td>
<td>0.466</td>
<td>MEM</td>
</tr>
<tr>
<td>10 7</td>
<td>0.414</td>
<td>0.419</td>
<td>0.466</td>
<td>0.467</td>
<td>MEM</td>
</tr>
<tr>
<td>10 8</td>
<td>0.412</td>
<td>0.413</td>
<td>0.466</td>
<td>0.462</td>
<td>MEM</td>
</tr>
<tr>
<td>10 9</td>
<td>0.415</td>
<td>0.413</td>
<td>0.464</td>
<td>0.465</td>
<td>MEM</td>
</tr>
</tbody>
</table>
Tableau 7.7 : Résultats des réductions par symétries pour le modèle SIMPLe OPT SYM SYM NO SIMPLE OPT SYM SYM NO

| CFG 1 5 | 0.023 | 0.023 | 0.029 | 0.029 | 4.412 | 4.405 | 1.010 | 0.684 | x4.363 | x6.438 | 7.777 | 7.777 | 253 | 253 | x131 | x131 |
| CFG 2 5 | 0.044 | 0.044 | 0.056 | 0.055 | 12.983 | 13.013 | 2.948 | 2.941 | x4.414 | x6.376 | 15.553 | 15.553 | 505 | 505 | x131 | x131 |
| CFG 3 5 | 0.070 | 0.075 | 0.086 | 0.086 | 25.899 | 25.928 | 5.720 | 3.950 | x4.533 | x6.564 | 23.329 | 23.329 | 757 | 757 | x131 | x131 |
| CFG 4 5 | 0.101 | 0.102 | 0.123 | 0.122 | 43.647 | 43.911 | 9.128 | 6.481 | x7.675 | x6.711 | 31.105 | 31.105 | 1.009 | 1.009 | x131 | x131 |
| CFG 5 5 | 0.138 | 0.138 | 0.166 | 0.166 | 65.189 | 65.941 | 13.744 | 9.801 | x7.675 | x6.682 | 38.881 | 38.881 | 1.261 | 1.261 | x131 | x131 |
| CFG 6 5 | 0.190 | 0.191 | 0.223 | 0.223 | 91.225 | 91.076 | 19.046 | 13.512 | x7.777 | x7.777 | 47.75 | 47.75 | x131 | x131 |
| CFG 7 5 | 0.238 | 0.238 | 0.273 | 0.274 | 122.981 | 121.993 | 25.137 | 18.182 | x8.853 | x6.710 | 54.433 | 54.433 | 1.765 | 1.765 | x131 | x131 |
| CFG 8 5 | 0.290 | 0.292 | 0.332 | 0.332 | 155.750 | 157.270 | 32.542 | 22.896 | x8.833 | x6.869 | 62.209 | 62.209 | 2.017 | 2.017 | x131 | x131 |
| CFG 9 5 | 0.349 | 0.350 | 0.396 | 0.396 | 197.493 | 196.618 | 40.282 | 28.670 | x8.881 | x6.858 | 69.985 | 69.985 | 2.289 | 2.289 | x131 | x131 |
| CFG 10 5 | 0.413 | 0.413 | 0.466 | 0.465 | 239.278 | 239.967 | 49.307 | 35.736 | x8.867 | x6.715 | 77.761 | 77.761 | 2.521 | 2.521 | x131 | x131 |
| CFG 11 5 | 0.484 | 0.483 | 0.571 | 0.572 | 287.062 | 287.295 | 58.690 | 42.325 | x8.895 | x6.753 | 85.537 | 85.537 | 2.773 | 2.773 | x131 | x131 |
| CFG 12 5 | 0.587 | 0.589 | 0.650 | 0.652 | 340.130 | 340.189 | 68.556 | 49.861 | x9.962 | x6.823 | 93.313 | 93.313 | 3.025 | 3.025 | x131 | x131 |
| CFG 13 5 | 0.670 | 0.668 | 0.733 | 0.734 | 392.320 | 391.388 | 80.707 | 57.940 | x9.849 | x6.755 | 101.089 | 101.089 | 3.277 | 3.277 | x131 | x131 |
| CFG 14 5 | 0.752 | 0.756 | 0.828 | 0.827 | 450.100 | 449.457 | 93.973 | 66.713 | x9.783 | x6.737 | 108.865 | 108.865 | 3.529 | 3.529 | x131 | x131 |
| CFG 15 5 | 0.896 | 0.897 | 0.971 | 0.976 | 513.933 | 515.911 | 108.754 | 78.604 | x9.741 | x6.559 | 116.641 | 116.641 | 3.781 | 3.781 | x131 | x131 |
| CFG 16 5 | 0.989 | 0.989 | 1.075 | 1.074 | 581.960 | 579.245 | 124.182 | 89.156 | x9.664 | x6.497 | 124.417 | 124.417 | 4.033 | 4.033 | x131 | x131 |
| CFG 18 5 | 1.269 | 1.269 | 1.368 | 1.369 | 736.298 | 733.120 | 156.846 | 112.287 | x9.674 | x6.529 | 139.969 | 139.969 | 4.537 | 4.537 | x131 | x131 |
| CFG 19 5 | 1.380 | 1.380 | 1.485 | 1.485 | 816.246 | 813.213 | 174.171 | 126.527 | x9.669 | x6.427 | 147.745 | 147.745 | 4.789 | 4.789 | x131 | x131 |
| CFG 20 5 | 1.492 | 1.496 | 1.722 | 1.730 | 908.406 | 905.724 | 194.253 | 141.770 | x9.663 | x6.389 | 155.521 | 155.521 | 5.041 | 5.041 | x131 | x131 |

7.6. Conclusion
7. Neco : implémentation et études de cas

(a) Avec échelle linéaire.  
(b) Avec échelle logarithmique.

Figure 7.9 – Temps d’exploration pour le modèle CFG 10 x pour un nombre variable de threads (axe horizontal).

(a) Avec échelle linéaire.  
(b) Avec échelle logarithmique.

Figure 7.10 – Taille des espaces d’états pour le modèle CFG 10 x pour un nombre variable de threads (axe horizontal).

La réalisation de cet outil représente un investissement important en temps cependant les résultats sont prometteurs et montrent que Neco est compétitif avec les autres model checkers. De plus les résultats des réductions par symétries offrant des réductions notables en temps et espace.

Neco a d’ores et déjà des utilisateurs, notamment pour la vérification de protocoles peer-to-peer pour la réplication de fichiers [34] et une implémentation en réseaux de Petri de pi-graphes\(^1\) [140]. Le choix de Neco dans ces deux cas a été rendu plus facile grâce à l’expressivité très riche des langages d’entrée, dans le premier cas la modélisation était réalisée en ABCD, et dans le second cas directement en Python grâce à la bibliothèque SNAKES.

\(^1\) Travail actuellement en cours au laboratoire IBISC.
Conclusion

Dans cette thèse nous nous sommes focalisés sur l’approche par compilation du calcul des espaces d’États des réseaux de Petri, et les réductions d’espaces d’États dans les systèmes à création dynamique de processus. Plusieurs contributions sur les plans théoriques et pratiques ont été présentées au fil des chapitres.

Nous avons défini un cadre général pour la compilation de réseaux de Petri. Ce cadre est indépendant du langage cible et est modulaire de par l’utilisation d’interfaces pour divers modules utilisés dans les algorithmes. Nous avons aussi vu une famille d’optimisations dérivées de la structure du réseau de Petri qui accélèrent grandement l’exploration d’espaces d’États et la compilation.

Cette approche de compilation a été appliquée dans le cadre d’un langage de bas niveau, LLVM. Ce langage est suffisamment expressif pour permettre une transcription aisée des algorithmes, mais aussi assez bas niveau pour être équipé d’une sémantique formelle, ce qui nous a permis de réaliser des preuves de correction et terminaison des algorithmes dans cette représentation.

Pour adresser les réductions d’espaces d’États dans les systèmes à création dynamique de processus, un nouveau cadre théorique pour les réductions par symétries a été défini. Cela a mené à la réalisation d’algorithmes effectifs et efficaces. La technique de réduction se base sur une structure arborescente qui est une représentation d’un État du modèle. Une étape de normalisation de ces arbres permet de calculer une représentation canonique d’une classe d’États ce qui permet les réductions. Par la suite, on a aussi vu dans les études de cas que ces réductions peuvent avoir un impact exponentiel sur les tailles des espaces d’États.

Finalement on a présenté la boîte à outils Neco, développée pendant la thèse comme application des résultats sur le calcul des espaces d’États et permettant le model checking LTL. On a présenté les 4 outils qui la composent en nous focalisant sur les deux compilateurs, l’un pour les réseaux de Petri, l’autre pour les formules LTL sur un modèle compilé. Les différentes approches présentées dans ce manuscrit y ont été implémentées et des études de cas ont été réalisées. Neco a aussi participé au Model Checking Contest 2012 et 2013, ce qui a montré qu’il est compétitif avec les outils du domaine.

Les perspectives à court terme sont d’abord l’extension des techniques de réduction présentées ici à la relation frère. Il s’agit essentiellement d’adapter la normalisation pour prendre en compte cette relation, puis prouver la correction.
de cette extension. Sur le plan pratique il s’agit aussi d’implémenter l’approche actuelle en Cython pour avoir des études de cas qui adressent de plus grands modèles puis implémenter l’extension décrite ci-dessus.

Sur le plan de la compilation il s’agit de continuer à chercher des optimisations en se focalisant sur les formalismes de modélisation structurés. En effet il est difficile de réaliser des optimisations efficaces sur toute la famille des réseaux de Petri. En revanche, dès qu’on ajoute des contraintes sur les modèles on peut trouver des optimisations efficaces comme on l’a vu pour les réductions de contrôle de flot.

Sur le moyen terme, il s’agit essentiellement de stabiliser Neco et d’ajouter des techniques de réduction d’occupation mémoire. Actuellement, le stockage de marquages est réalisé de manière simple et des techniques existantes efficaces pourraient être implémentées. Puis éventuellement, le backend LLVM pourra être réintroduit. Cela permettrait aussi de retravailler le théorème d’extensionnalité pour permettre le partage de mémoire, ce qui n’est pas possible actuellement.

Sur le long terme, il s’agit de s’orienter encore plus vers les réductions par symétries d’espaces d’états. En travaillant sur des formalismes structurées qui aident à la réduction. On a remarqué que l’approche optimiste peut être complétée si le modèle a une forme particulière. En analysant les modèles on observe que les permutations des pid-trees ne sont nécessaires que si certains jetons possèdent plus d’un pid, or un jeton avec plus d’un pid peut être vu comme une primitive de communication entre deux processus. Le travail de recherche est donc de trouver un moyen pour les processus de communiquer tout en minimisant le surcoût de cette communication car elle introduit des permutations dans les pid-trees.

Finalement, dans cette thèse nous avons vu qu’un compromis entre la facilité de modélisation et l’efficacité de vérification est possible. Cette thèse montre que nous pouvons être efficaces tout en proposant une grande expressivité, au sens facilité de modélisation, mais aussi décidabilité : les réseaux de Petri qu’on propose sont annotés par un langage Turing complet. En pratique, on reporte donc sur l’utilisateur la responsabilité des problèmes liés à la non-décidabilité de ce langage. Des restrictions syntaxiques et des conseils de mise en œuvre peuvent aider mais l’utilisateur pourra généralement les contourner s’il n’est pas suffisamment attentif aux risques, ou s’il le souhaite. Ceci n’est pas fondamentallement différent de ce qui arrive lorsqu’on programme, les precautions à prendre et la démarche à suivre en cas d’erreur sont donc essentiellement les mêmes. En contrepartie de cet inconvénient, l’avantage de proposer un langage existant, complet, et répandu est qu’on transmet aussi une grande partie de la décision concernant l’efficacité entre les mains de l’utilisateur : s’il désire passer peu de temps, avoir rapidement des simulations, ou des résultats sur de petits modèles, il peut le faire grâce à un langage de couleurs très haut niveau ; dans Neco, il s’agit de Python. Mais s’il veut progresser ensuite vers l’efficacité, il peut de manière incrémentale améliorer son modèle, spécialiser les types des places et implémenter des structures efficaces en C/C++/Cython ou tout langage qui s’interface avec Python (donc presque tout langage en pratique). Il en résulte que la démarche de modélisation se rapproche du développement traditionnel en cela que les outils proposés ressemblent à ceux que l’utilisateur connaît. De son point de vue, on lui propose un “vrai” langage de programmation, étendu par des constructions issues des réseaux de Petri qui facilitent l’expression de la
concurrence, des communications et d’autres aspects généralement difficiles à programmer. Ceci est complété par des possibilités de simulation automatique ou interactive et un outil de diagnostique (le model checker) proposant des traces facilement exploitables. Au final, la modélisation devient une activité familière dont il est facile de comprendre les rouages car la technique reste cachée (de même qu’un programmeur n’a pas besoin de comprendre ce que fait vraiment son compilateur). Ainsi facilitée, on peut espérer que la démarche de modélisation, et vérification, pourra être plus largement utilisée de façon plus pertinente.
Références

9.1 Références de la thèse


9. Références


9.2 Autres références


9.2. Autres références


9. Références


9.2. Autres références


9. Références


9.2. Autres références


9. Références


9.2. Autres références


9. Références


9.2. Autres références


159
9. Références


9.2. Autres références


Dans cette section on décrit la réalisation d’une structure de marquage. Un marquage simple peut être implémenté avec une structure qui contient des pointeurs sur des places. Le type de cette structure est $\text{struct}(t_{s_0}, \ldots, t_{s_n})$ où $t_{s_i}$ est le type de la $i$-ième place (la place $s_i$ en énumérant les places à partir de 0). La seule chose qu’on suppose est que les structures qui encodent les places ne partagent pas de mémoire.

A.1.1 Interprétation et les propriétés

On définit l’interprétation récursivement sur la structure. Si $p_{\text{mrk}}$ est un pointeur sur la structure de marquage dans un tas $H$ bien formé, alors par définition on a

$$H(p_{\text{mrk}}) = (\text{struct}(t_{s_0}, \ldots, t_{s_n}), (p_{s_0}, \ldots, p_{s_n}))$$

On définit l’interprétation dans ces conditions par :

$$[H, p_{\text{mrk}}]_{\text{mrk}} = \{s_0 \mapsto [H, p_{s_0}]^{s_0}, \ldots, s_n \mapsto [H, p_{s_n}]^{s_n}\}$$

On vérifie que la fonction d’interprétation est valide (supposition 4.2 page 53).

\[\text{Soient } H, H' \text{ deux tas et } p, p' \text{ deux pointeurs sur des structures de marquages tels que } p \in \text{dom}(H) \text{ et } p' \in \text{dom}(H'). \text{ Si } (H, p) =_{st} (H', p') \text{ alors } [H, p]_{\text{mrk}} = [H', p']_{\text{mrk}}.\]

\[\text{Preuve. Par définition de la fonction d’interprétation et de la structure car les fonctions d’interprétation des places vérifient la propriété de validité.}\]

On vérifie maintenant la propriété de cohérence pour cette structure de données (préréquis 4.3 page 54).

Soient $H$, $H'$ deux tas, $F$, $F'$ deux frames, $p_{\text{mrk}}$ un pointeur de $H$ sur une structure de marquage, et $p_s$ un pointeur sur une place de cette structure. Si
p_s \in p_{mark} \downarrow_H, \llbracket H, p_{mark} \rrbracket^{mark} (s) = \llbracket H, p_s \rrbracket^{s}, \text{ ( seq } \text{ ) }_{H,F} \leadsto ( \text{ seq }' \text{ ) }_{H \oplus H', F'} \text{ et } p_{mark} \notin \text{ dom}(H'), \text{ alors \llbracket H \oplus H', p_{mark} \rrbracket^{mark} (s) = \llbracket H \oplus H', p_s \rrbracket^{s})

Preuve. Immédiat par définition de [·, ·]_{mark} car

\((H \oplus H')(p_{mark}) = H(p_{mark}) = (\text{struct}(t_{s_0}, \ldots, t_{s_n}), (p_{s_0}, \ldots, p_{s_n}))\)

[153x707]A. LLVM

La propriété de séparation quant à elle est triviale dans cette structure car les places sont séparées (préréquis 4.4 page 54).

Soit \(p_{mark}\) un pointeur sur une structure de marquage dans un tas \(H\). Si \(p_s\) et \(p_s'\) sont deux pointeurs sur deux places distinctes de cette structure alors on a \(p_s \downarrow_H \cap p_s' \downarrow_H = \emptyset\).

Preuve. Par définition de la structure.

A.1.2 Les fonctions \textit{get}

Si \(s_i\) est la \(i\)-ème place du marquage alors on définit la fonction \textit{get}_{s_i} de la structure de marquage par :

\[ P(get_{s_i}(\llbracket x_{mark} \rrbracket)) = \begin{cases} x_{s_i} = \text{gep } x_{mark}, 0, i \\ \text{ret } x_{s_i} \end{cases} \]

On vérifie que cette fonction implémente l’interface demandée.

**PROPOSITION A.1.** \textit{La fonction get}_{s_i} vériﬁe bien sa spéciﬁcation (cf. 1 page 57), i.e., Si \((f call \text{ get}_{s_i}(p_{mark}) \text{ ) }_H, F \leadsto (p_s)_{H}\) alors \(p_s \downarrow_H \subset p_{mark} \downarrow_H\) et \(\llbracket H, p_{mark} \rrbracket^{mark} (s_i) = \llbracket H, p_s \rrbracket^{s}\).

Preuve. Immédiat par définition de la structure et de [·, ·]_{mark}.

A.1.3 La fonction \textit{copy}

On définit la fonction \textit{copy}_{mark} de la structure de marquage par :

\[ P(copy_{mark}(\llbracket x_{mark} \rrbracket)) = \begin{cases} x'_{mark} = \text{alloc struct}(t_{s_0}, \ldots, t_{s_n}) \\ x_{s_i} = \text{fcall get}_{s_i}(x_{mark}) \\ x'_{s_i} = \text{fcall get}_{s_i}(x'_{mark}) \\ \text{pcall copy}_{s_i}(x_{s_i}, x'_{s_i}) \end{cases} \text{ pour } 0 \leq i \leq n \]

\[ \text{ret } x'_{mark} \]

Remarquons que dans le cadre d’une sémantique copy-on-write, on ne ferait pas de copie en profondeur mais juste une copie de pointeurs. La copie des
places serait réalisée à la première écriture ce qui permettraient de gagner en performances.

Pour vérifier que cette fonction implémentée bien l’interface demandée, on va passer par deux lemmes prouvant respectivement le cœur de la fonction et la spécification du point de vue du corps de la fonction. Le résultat attendu sera une conséquence immédiate du second lemme.

Pour un marquage \( M \), un tas \( H \), un frame \( F \) et \( x_{\text{mrk}} \) une variable et \( p_{\text{mrk}} \) un pointeur tels que \( F(x_{\text{mrk}}) = p_{\text{mrk}} \) et \([H,p_{\text{mrk}}]_{\text{mrk}} = M\). La spécification demandée de la fonction \( \text{copy}_{\text{mrk}} \) est la suivante :

\[
( \text{fcall copy}_{\text{mrk}}(x_{\text{mrk}}) )_{H,F} \rightarrow ( p'_{\text{mrk}} )_{H\oplus H'}
\]

\[
\text{dom}(H') \cap \text{dom}(H) = \emptyset
\]

\[
p'_{\text{mrk}} \downarrow H \oplus H' \subseteq \text{dom}(H')
\]

\[
[H,p_{\text{mrk}}]_{\text{mrk}} = [H \oplus H',p'_{\text{mrk}}]_{\text{mrk}} = [H \oplus H',p'_{\text{mrk}}]_{\text{mrk}}
\]

Lemme A.2. Soit \( M \) un marquage, \( H \) un tas bien formé, \( p_{\text{mrk}} \) et \( p'_{\text{mrk}} \) deux pointeurs de \( H \) sur des instances distinctes de la structure de marquage tels que \( p_{\text{mrk}} \downarrow H \cup p'_{\text{mrk}} \downarrow H = \text{dom}(H) \) et \([H,p_{\text{mrk}}]_{\text{mrk}} = M\). Soit \( F \) un frame, \( x_{\text{mrk}} \) et \( x'_{\text{mrk}} \) deux variables tels que \( F(x_{\text{mrk}}) = p_{\text{mrk}} \) et \( F(x'_{\text{mrk}}) = p'_{\text{mrk}} \). Soit\( \text{seq} \) la séquence d’instructions suivante qui correspond au cœur de la fonction \( \text{copy}_{\text{mrk}} \) :

\[
\text{seq} = \left\{ \begin{array}{l}
 x_{s_0} = \text{fcall get}_{s_0}(x_{\text{mrk}}) \\
 x'_{s_0} = \text{fcall get}_{s_0}(x'_{\text{mrk}}) \\
 \text{pcall copy}_{s_0}(x_{s_0}, x'_{s_0}) \\
 \vdots \\
 x_{s_n} = \text{fcall get}_{s_n}(x_{\text{mrk}}) \\
 x'_{s_n} = \text{fcall get}_{s_n}(x'_{\text{mrk}}) \\
 \text{pcall copy}_{s_n}(x_{s_n}, x'_{s_n}) \\
 \end{array} \right.
\]

Si on réduit toute la séquence, i.e., si

\[
( \text{seq} )_{H,F} \rightarrow^* ( \text{skip} )_{H\oplus H',F\oplus \beta}
\]

alors

\[
\beta = \left\{ \begin{array}{l}
 x_{s_0} \mapsto p_{s_0}, \ldots , x_{s_n} \mapsto p_{s_n} , \\
 x'_{s_0} \mapsto p'_{s_0}, \ldots , x'_{s_n} \mapsto p'_{s_n} \\
 \end{array} \right\}
\]

(A.1)

\[
\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') \subseteq p'_{s_0} \downarrow H \cup \cdots \cup p'_{s_n} \downarrow H \subseteq p'_{\text{mrk}} \downarrow H
\]

(A.2)

\[
[H,p_{\text{mrk}}]_{\text{mrk}}(s_i) = [H,p_{s_i}]_{\text{mrk}} = [H \oplus H',p_{s_i}]_{\text{mrk}} = [H \oplus H',p'_{s_i}]_{\text{mrk}}
\]

pour \( 0 \leq i \leq n \) (A.3)

Le résultat (A.1) est le résultat de toutes les affectations exécutées. Le résultat (A.2) assure que seuls les pointeurs de la structure de marquage pointée par \( p'_{\text{mrk}} \) sont dans le domaine de \( H' \), plus précisément les pointeurs accessibles à partir des places \( s_0, \ldots , s_n \), et donc c’est la seule partie du tas susceptible d’être modifiée. Cette conséquence aidera à argumenter les conditions sur les domaines de la spécification. Le dernier résultat (A.3) assure qu’on copie bien le contenu des places.
A. LLVM

\textit{Preuve.} On fait la preuve par induction sur \( n \).
Pour le cas de base, \( n = 0 \) : On sait que \( \text{seq} \) est de la forme suivante

\[
\text{seq} \triangleq \begin{cases} 
  x_{s_0} = \text{fcall get}_{s_0}(x_{\text{mrk}}) \\
  x'_{s_0} = \text{fcall get}_{s_0}(x'_{\text{mrk}}) \\
  \text{pcall copy}_{s_0}(x_{s_0}, x'_{s_0}) 
\end{cases}
\]

Soit \( H \) un tas, et \( F \) un frame tels que décrits dans l’énoncé. On va réduire la séquence et propager les résultats.

\[
(\text{seq})_{H,F} \leadsto^* (x'_{s_0} = \text{fcall get}_{s_0}(x'_{\text{mrk}}) \\
\text{pcall copy}_{s_0}(x_{s_0}, x'_{s_0}))_{H,F_0}
\]

avec \( F_0 \triangleq F \oplus \beta_0 \). Par définition de la spécification de la fonction \( \text{get}_{s_0} \) on a :

\[
\beta_0 \triangleq \{ x_{s_0} \mapsto p_{s_0} \}
\]

\[
p_{s_0} \downarrow H \subseteq p_{\text{mrk}} \downarrow H
\]

\[
[H, p_{s_0}]_{s_0}^\beta = [H, p_{\text{mrk}}]^\text{mark} (s_0)
\]

On continue à réduire la séquence :

\[
( x'_{s_0} = \text{fcall get}_{s_0}(x'_{\text{mrk}}) \\
\text{pcall copy}_{s_0}(x_{s_0}, x'_{s_0}))_{H,F_0} \leadsto^* ( \text{pcall copy}_{s_0}(x_{s_0}, x'_{s_0}))_{H,F_1}
\]

avec \( F_1 \triangleq F_0 \oplus \beta_1 \). De même, par définition de la spécification de la fonction \( \text{get}_{s_0} \) on a :

\[
\beta_1 \triangleq \{ x'_{s_0} \mapsto p'_{s_0} \}
\]

\[
p'_{s_0} \downarrow H \subseteq p'_{\text{mrk}} \downarrow H
\]

\[
[H, p'_{s_0}]_{s_0}^\beta = [H, p'_{\text{mrk}}]^\text{mark} (s_0)
\]

On effectue la dernière réduction :

\[
( \text{pcall copy}_{s_0}(x_{s_0}, x'_{s_0}))_{H,F_1} \leadsto^* ( \text{skip})_{H \oplus H_0, F_1}
\]

Et par définition de la procédure \( \text{copy}_{s_0} \), on a :

\[
dom(H) \cap \dom(H_0) \subseteq p'_{s_0} \downarrow H
\]

\[
[H, p_{s_0}]_{s_0}^\beta = [H \oplus H_0, p_{s_0}]_{s_0}^\beta = [H \oplus H_0, p'_{s_0}]_{s_0}^\beta
\]

On a bien le résultat souhaité :

\[
\beta \triangleq \beta_0 \oplus \beta_1 \triangleq \{ x_{s_0} \mapsto p_{s_0}, x'_{s_0} \mapsto p'_{s_0} \}
\]

\[
dom(H) \cap \dom(H_0) \subseteq p'_{s_0} \downarrow H \subseteq p_{\text{mrk}} \downarrow H
\]

\[
[H, p_{\text{mrk}}]^\text{mark} (s_0) = [H, p_{s_0}]_{s_0}^\beta = [H \oplus H_0, p_{s_0}]_{s_0}^\beta = [H \oplus H_0, p'_{s_0}]_{s_0}^\beta
\]
Pour le cas inductif, on suppose le lemme est vrai pour $n - 1$, c'est-à-dire que :

\[
\begin{pmatrix}
x_s = \text{call get}_s(x_{\text{mark}}) \\
x'_s = \text{call get}_s(x'_{\text{mark}}) \\
\text{pcall copy}_s(x_s, x'_s) \\
\vdots \\
x_{s_{n-1}} = \text{call get}_{s_{n-1}}(x_{\text{mark}}) \\
x'_{s_{n-1}} = \text{call get}_{s_{n-1}}(x'_{\text{mark}}) \\
\text{pcall copy}_{s_{n-1}}(x_{s_{n-1}}, x'_{s_{n-1}})
\end{pmatrix} \overset{\sim}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}
\text{skip } \end{pmatrix}_{H \oplus H_0, F \oplus F_0}
\]

avec comme conséquences :

\[
\beta_0 \equiv \left\{ \begin{array}{l}
x_s \mapsto p_s, \ldots, x_{s_{n-1}} \mapsto p_{s_{n-1}}, \\
x'_s \mapsto p'_s, \ldots, x'_{s_{n-1}} \mapsto p'_{s_{n-1}} \end{array} \right\}
\quad \text{(A.4)}
\]

\[
dom(H) \cap \dom(H_0) \subseteq p'_{s_0} \downarrow H \cup \cdots \cup p'_{s_{n-1}} \downarrow H \subseteq p'_{\text{mark}} \downarrow H \quad \text{(A.5)}
\]

\[
[H, p_{\text{mark}}]^{\text{mark}}(s_i) = [H, p_s]^{s_i} = [H \oplus H_0, p_s]^{s_i} = [H \oplus H_0, p'_{s_i}]^{s_i}
\text{ pour } 0 \leq i \leq n - 1 \quad \text{(A.6)}
\]

Maintenant on va prouver que le lemme est vrai pour $n$. On applique l'hypothèse d'induction sur notre but initial, et on obtient :

\[
\begin{pmatrix}
x_s = \text{call get}_s(x_{\text{mark}}) \\
x'_s = \text{call get}_s(x'_{\text{mark}}) \\
\text{pcall copy}_s(x_s, x'_s) \\
\vdots \\
x_{s_{n-1}} = \text{call get}_{s_{n-1}}(x_{\text{mark}}) \\
x'_{s_{n-1}} = \text{call get}_{s_{n-1}}(x'_{\text{mark}}) \\
\text{pcall copy}_{s_{n-1}}(x_{s_{n-1}}, x'_{s_{n-1}})
\end{pmatrix} \overset{\sim}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}
x_s = \text{call get}_s(x_{\text{mark}}) \\
x'_s = \text{call get}_s(x'_{\text{mark}}) \\
\text{pcall copy}_s(x_s, x'_s)
\end{pmatrix}_{H \oplus H_0, F \oplus F_0}
\]

avec $F_0 \overset{\text{at}}{=} F \oplus \beta_0$ et les conséquences (A.4), (A.5), (A.6) ci-dessus. On continue à réduire de la même manière que dans le cas de base.

\[
\begin{pmatrix}
x_s = \text{call get}_s(x_{\text{mark}}) \\
x'_s = \text{call get}_s(x'_{\text{mark}}) \\
\text{pcall copy}_s(x_s, x'_s)
\end{pmatrix} \overset{\sim}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}
\text{pcall copy}_s(x_s, x'_s)
\end{pmatrix}_{H \oplus H_0, F \oplus F_0}
\]

avec $F_1 = F_0 \oplus \beta_1$ et

\[
\beta_1 \overset{\text{at}}{=} \{ x_s \mapsto p_{s_n}, x'_{s_n} \mapsto p'_{s_n} \}
\]

\[
[p_{s_n} \downarrow H \subseteq p_{\text{mark}} \downarrow H]
\]

\[
[p'_{s_n} \downarrow H \subseteq p'_{\text{mark}} \downarrow H]
\]

\[
[H \oplus H_0, p_{s_n}]^{s_n} = [H \oplus H_0, p_{\text{mark}}]^{\text{mark}}(s_n)
\]

167
A. LLVM

\[ [H \oplus H_0, p_{s_n}^]'^s_n = [H \oplus H_0, p_{mark}^s] (s_n) \]

Or comme les places sont disjointes, on a

\[ dom(H_0) \cap p_{s_n} \downarrow_H = dom(H_0) \cap p_{s_n}'_{s_n} \downarrow_H = \emptyset \]

Les conclusions (A.5) et (A.6) sont préservées, car on n’a pas modifié le tas.

Les \( x_{s_i} \) sont tous différents pour \( 0 \leq i \leq n \) (SSA), donc

\[ \beta_0 \oplus \beta_1 = \{ x_{s_0} \mapsto p_{s_0}, \ldots, x_{s_i} \mapsto p_{s_i} \} \]

De plus, on a :

\[ [H, p_{s_n}]^s_n = [H, p_{mark}]^{mark} (s_n) = [H \oplus H_0, p_{s_n}]^s_n \]

\[ [H, p_{s_n}']^s_n = [H, p'_{mark}]^{mark} (s_n) = [H \oplus H_0, p'_{s_n}]^s_n \]

Car la réduction de l’hypothèse d’induction n’a pas pu modifier les places pointées par \( p_{s_n} \) et \( p'_{s_n} \) (elles n’appartiennent pas au domaine des modifications (A.5)). On finalise les réductions :

\[ ( pcall \ copy_{s_n} (x_{s_n}, x_{s_n}') ) \downarrow_{H_0 \oplus H_1} \mapsto^* ( \ skip ) \downarrow_{H_0 \oplus H_1} \]

Par la spécification de la procédure \( \copy_{s_n} \), on obtient :

\[ dom(H_0) \cap dom(H_1) \subseteq p_{s_n}' \downarrow_H \]

\[ [H, p_{s_n}]^s_n = [H \oplus H_0 \oplus H_1, p_{s_n}]^s_n = [H \oplus H_0 \oplus H_1, p'_{s_n}]^s_n \]

Au final on obtient le résultat souhaité car la condition sur les domaines nous assure qu’on n’a pas modifié les places \( s_0, \ldots, s_{n-1} \) (donc on préserve les interprétations) et l’opération \( \oplus \) est associative.

\[ \beta = \beta_0 \oplus \beta_1 = \{ x_{s_0} \mapsto p_{s_0}, \ldots, x_{s_n} \mapsto p_{s_n} \} \]

\[ dom(H) \cap dom(H_0 \oplus H_1) \subseteq p_{s_n}' \downarrow_H \cup \cdots \cup p'_{s_n} \downarrow_H \subseteq p'_{mark} \downarrow_H \]

\[ [H, p_{mark}]^{mark} (s_i) = [H, p_{s_i}]^{s_i} = [H \oplus H_0 \oplus H_1, p_{s_i}]^{s_i} = [H \oplus H_0 \oplus H_1, p'_{s_i}]^{s_i} \]

pour \( 0 \leq i \leq n \)

\[ \square \]

Le lemme qui suit vérifie que le corps de la fonction \( \copy_{mark} \) se comporte bien. Une fois qu’on l’a prouvé, le résultat qu’on cherche sera immédiat.

**Lemme A.3.** Soit \( M \) un marquage, \( H \) un tas bien formé, \( F \) un frame, \( x_{mark} \) une variable et \( p_{mark} \) un pointeur de \( H \) sur une structure de marquage tels que \( p_{mark} \downarrow_H = dom(H) \), \( F(x_{mark}) = p_{mark} \) et \( [H, p_{mark}]^{mark} = M \). Si on réduit le corps de la fonction \( \copy_{mark} \), i.e., si

\[ ( P(\copy_{mark}(\|x_{mark}\|)) )_{H,F} \mapsto^* ( p'_{mark} )_{H \oplus H} \]

168
alors
\[
\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H') = \emptyset
\] (A.7)
\[
p'_{\text{mark}} \downarrow_{H \oplus H'} \subseteq \text{dom}(H')
\] (A.8)
\[
[H, p_{\text{mark}}]^\text{mark} = [H \oplus H', p_{\text{mark}}]'^\text{mark} = [H \oplus H', p'_{\text{mark}}]^\text{mark}
\] (A.9)

Le résultat (A.7) nous assure qu’on alloue un nouveau tas. Le résultat (A.8) nous assure que le nouveau marquage pointé par \(p'_{\text{mark}}\) ne partage pas de mémoire avec le marquage pointé par \(p_{\text{mark}}\). Et le dernier résultat (A.9) assure qu’on copie bien la structure de marquage.

**Preuve.** On fait cette preuve en réduisant la séquence \(P(\text{copy}_{\text{mark}}(x_{\text{mark}}))\). Par définition :

\[
P(\text{copy}_{\text{mark}}(x_{\text{mark}})) = \begin{cases} 
  x'_{\text{mark}} = \text{alloc struct}(t_{s_0}, \ldots, t_{s_n}) \\
  x_{s_i} = \text{fcall get}_{s_i}(x_{\text{mark}}) \\
  x'_{s_i} = \text{fcall get}_{s_i}(x'_{\text{mark}}) \\
  \text{pcall copy}_{s_i}(x_{s_i}, x'_{s_i}) \\
  \text{ret } x'_{\text{mark}}
\end{cases}
\]

pour \(0 \leq i \leq n\).

Soit \(H\) un tas et \(F\) un frame tels que décrit dans l’énoncé. On commence à réduire :

\[
\begin{pmatrix}
  x_{s_0} = \text{fcall get}_{s_0}(x_{\text{mark}}) \\
  x'_{s_0} = \text{fcall get}_{s_0}(x'_{\text{mark}}) \\
  \text{pcall copy}_{s_0}(x_{s_0}, x'_{s_0}) \\
  \cdots \\
  x_{s_n} = \text{fcall get}_{s_n}(x_{\text{mark}}) \\
  x'_{s_n} = \text{fcall get}_{s_n}(x'_{\text{mark}}) \\
  \text{pcall copy}_{s_n}(x_{s_n}, x'_{s_n}) \\
  \text{ret } x'_{\text{mark}}
\end{pmatrix}_{H,F \rightarrow^* H \oplus H_0,F_0}
\]

où \(F_0 \equiv F \oplus \beta_0\) et \(\beta_0 \equiv \{x'_{\text{mark}} \mapsto p'_{\text{mark}}\}\). Par la définition de l’instruction \textit{alloc} et la fonction \textit{new} on a :

\[
\text{dom}(H) \cap \text{dom}(H_0) = \emptyset
\] (A.10)
\[
p'_{\text{mark}} \downarrow_{H \oplus H_0} = \text{dom}(H_0)
\] (A.11)

et on sait que \(H_0\) est bien formé. On applique le lemme A.2, les hypothèses nécessaires étant respectées :

\[
p_{\text{mark}} \downarrow_{H \oplus H_0} \cup p'_{\text{mark}} \downarrow_{H \oplus H_0} = \text{dom}(H \oplus H_0)
\]
\[
[H \oplus H_0, p_{\text{mark}}]^\text{mark} = M
\]
\[
\beta_{F_0} = \{x_{\text{mark}} \mapsto p_{\text{mark}}, x'_{\text{mark}} \mapsto p'_{\text{mark}}\}
\]

169
Après l’application du lemme, on obtient :

\[
\begin{align*}
& x_{s_0} = \text{fcall get}_{s_0}(x_{\text{mark}}) \\
& x'_{s_0} = \text{fcall get}_{s_0}(x'_{\text{mark}}) \\
& \text{pcall copy}_{s_0}(x_{s_0}, x'_{s_0}) \\
& \ldots \\
& x_{s_n} = \text{fcall get}_{s_n}(x_{\text{mark}}) \\
& x'_{s_n} = \text{fcall get}_{s_n}(x'_{\text{mark}}) \\
& \text{pcall copy}_{s_n}(x_{s_n}, x'_{s_n}) \\
& \text{ret } x'_{\text{mark}} & \text{dom } H @ H_0, F_1
\end{align*}
\]

où \( F_1 \equiv F_0 \oplus \beta_1 \) avec

\[
\beta_1 \equiv \left\{ x_{s_0} \mapsto p_{s_0}, \ldots, x_{s_n} \mapsto p_{s_n}, \right\} \quad (A.12)
\]

\[
dom(H @ H_0) \cap \dom(H_1) \subseteq p'_{s_0} \downarrow H @ H_0 \cup \cdots \cup p'_{s_n} \downarrow H @ H_0 \subseteq p'_{\text{mark}} \downarrow H @ H_0 \quad (A.13)
\]

\[
[H @ H_0, p_{\text{mark}}]_{\text{mark}}(s_i) = [H @ H_0, p_{s_i}]^s_{\text{mark}} = [H @ H_0 \oplus H_1, p_{s_i}]^s_{\text{mark}} = [H @ H_0 \oplus H_1, p'_{s_i}]^s_{\text{mark}}
\quad \text{pour } 0 \leq i \leq n \quad (A.14)
\]

On fait la dernière réduction :

\[
(\text{ret } x'_{\text{mark}} )_{H @ H_0 @ H_1, F_1} \leadsto (p'_{\text{mark}} )_{H @ H_0 @ H_1, F_1}
\]

Le résultat (A.13) implique que

\[
dom(H @ H_0) \cap \dom(H_1) \subseteq \dom(H_0)
\]

car \( p'_{\text{mark}} \downarrow H @ H_0 \subseteq \dom(H_0) \). On obtient donc les deux premières conséquences du lemme car l’opération \( \oplus \) est associative :

\[
dom(H) \cap \dom(H_0 @ H_1) = \dom(H) \cap \dom(H_0) = \emptyset
\]

\[
p_{\text{mark}} \downarrow H @ H_0 @ H_1 = p'_{\text{mark}} \downarrow H_0 @ H_1 \subseteq \dom(H_0 @ H_1)
\]

La troisième conséquence

\[
[H, p_{\text{mark}}]_{\text{mark}} = [H @ H_0 @ H_1, p_{\text{mark}}]_{\text{mark}} = [H @ H_0 \oplus H_1, p'_{\text{mark}}]_{\text{mark}}
\]

est vraie par la propriété de cohérence de la structure de marquage en utilisant le résultat (A.14).

\[\square\]

**Proposition A.4.** La fonction \( \text{copy}_{\text{mark}} \) vérifie bien sa spécification, i.e., pour un marquage \( M \), un tas \( H \), un frame \( F \), \( x_{\text{mark}} \) une variable et \( p_{\text{mark}} \) un pointeur tels que \( F(x_{\text{mark}}) = p_{\text{mark}} \) et \([H, p_{\text{mark}}]_{\text{mark}} = M \), on a :

\[
(\text{fcall copy}_{\text{mark}}(x_{\text{mark}}))_{H, F} \leadsto (p'_{\text{mark}})_{H @ H'}
\]

\[
dom(H') \cap \dom(H) = \emptyset
\]

\[
p'_{\text{mark}} \downarrow H @ H' \subseteq \dom(H')
\]

\[
[H, p_{\text{mark}}]_{\text{mark}} = [H @ H', p_{\text{mark}}]_{\text{mark}} = [H @ H', p'_{\text{mark}}]_{\text{mark}}
\]

170
A.1. Implantation des Marquages

Preuve. Ceci est une conséquence immédiate du lemme A.3, en utilisant la règle de réduction de l'instruction `fcall`.

A.1.4 La fonction `cons

L'implantation de la fonction `cons` est définie par

$$P(cons(\emptyset)) \overset{df}{=} \left\{ \begin{array}{l} x_{\text{mrk}} = \text{alloc struct}(t_0, \ldots, t_n) \\
x_{s_1} = \text{fcall}_{s_1}(x_{\text{mrk}}) \\
p\text{call clear}_{s_1}(x_{s_1}) \\
\ldots \\
x_{s_n} = \text{fcall}_{s_n}(x_{\text{mrk}}) \\
p\text{call clear}_{s_n}(x_{s_n}) \end{array} \right\}$$

Pour prouver la correction de cette fonction, on se base sur un lemme qui montre que la séquence des fonctions `get` et `clear` "nettoie" bien le marquage. Une fois ce lemme prouvé il nous suffira de montrer qu'on alloue un nouveau marquage d'interprétation quelconque puis on le "nettoie".

**Lemme A.5.** La séquence des fonctions `get` et `clear` "nettoie" bien la structure de marquage, i.e., si $H$ est un tas, $F$ est un frame, $x_{\text{mset}}$ est une variable et $p_{\text{mrk}}$ est un pointeur sur une structure de marquage, tels que $\text{dom}(H) = p_{\text{mrk}} \downarrow H$ et $F(x_{\text{mrk}}) = p_{\text{mrk}}$, alors

$$\left( \begin{array}{l} x_{s_0} = \text{fcall}_{s_0}(x_{\text{mrk}}) \\
p\text{call clear}_{s_0}(x_{s_0}) \\
\ldots \\
x_{s_n} = \text{fcall}_{s_n}(x_{\text{mrk}}) \\
p\text{call clear}_{s_n}(x_{s_n}) \end{array} \right) \overset{\rightarrow}{H,F} \left( \begin{array}{l} \text{skip} \end{array} \right)_{H \oplus H', F' \oplus \beta}$$

et

$$\beta = \{x_{s_0} \mapsto p_{s_0}, \ldots, x_{s_n} \mapsto p_{s_n}\}$$

$$[H \oplus H', p_{\text{mrk}}]^{\text{mark}}(s_i) = [H \oplus H', p_{s_i}]^{s_i} = \emptyset$$

pour $0 \leq i \leq n$.

Preuve. La preuve se fait par induction sur $n$. Pour le cas de base, on a :

$$\left( \begin{array}{l} x_{s_0} = \text{fcall}_{s_0}(x_{\text{mrk}}) \\
p\text{call clear}_{s_0}(x_{s_0}) \end{array} \right)_{H,F} \overset{\rightarrow}{H,F} \left( \begin{array}{l} \text{pcall clear}_{s_0}(x_{s_0}) \end{array} \right)_{H,F_0}$$

avec $F_0 = F \oplus \{x_{s_0} \mapsto p_{s_0}\}$ et $[H, p_{\text{mrk}}]^{\text{mark}}(s_0) = [H, p_{s_0}]^{s_0}$. On continue en réduisant grâce à la spécification de la fonction `clear_{s_0}` :

$$\left( \begin{array}{l} \text{pcall clear}_{s_0}(x_{s_0}) \end{array} \right)_{H,F_0} \overset{\rightarrow}{H,F_0} \left( \begin{array}{l} \text{skip} \end{array} \right)_{H \oplus H_0, F_0}$$

avec $[H \oplus H_0, p_{s_0}]^{s_0} = \emptyset$. On conclue par la propriété de cohérence de la structure de marquage.
Pour le cas inductif, on commence par appliquer l’hypothèse d’induction pour réduire les \( n - 1 \) premières paires d’instructions.

\[
\begin{align*}
\begin{pmatrix}
  x_{s_0} &= \text{fcall get}_{s_0}(x_{\text{mrk}}) \\
  \text{pcall clear}_{s_0}(x_{s_0})
\end{pmatrix} & \Rightarrow \begin{pmatrix}
  x_{s_n} &= \text{fcall get}_{s_n}(x_{\text{mrk}}) \\
  \text{pcall clear}_{s_n}(x_{s_n})
\end{pmatrix} \quad H,F
\end{align*}
\]

avec

\[
F_0 = F \oplus \{ x_{s_0} \mapsto p_{s_0}, \ldots, x_{s_{n-1}} \mapsto p_{s_{n-1}} \} \quad (A.15)
\]

\[
[H \oplus H_0, p_{\text{mrk}}]_{\text{mrk}}^{s_i}(s_i) = [H \oplus H_0, p_{s_i}]^{s_i} = \emptyset \quad \text{pour} \ 0 \leq i \leq n - 1 \quad (A.16)
\]

On réduit la dernière paire d’instructions de la même manière que dans le cas de base :

\[
\begin{align*}
\begin{pmatrix}
  x_{s_n} &= \text{fcall get}_{s_n}(x_{\text{mrk}}) \\
  \text{pcall clear}_{s_n}(x_{s_n})
\end{pmatrix} & \Rightarrow ( \begin{pmatrix}
  \text{skip}
\end{pmatrix} )_{H \oplus H_0, F_0} \\
& \Rightarrow ( \begin{pmatrix}
  \text{skip}
\end{pmatrix} )_{H \oplus H_0 \oplus H_1, F_1}
\end{align*}
\]

avec \( F_1 = F_0 \oplus \{ x_{s_n} \mapsto p_{s_n} \} \) et

\[
[H \oplus H_0 \oplus H_1, p_{\text{mrk}}]_{\text{mrk}}^{s_n} = [H \oplus H_0 \oplus H_1, p_{s_n}]^{s_n} = \emptyset
\]

de plus par la propriété de séparation les places sont disjointes et donc les résultats (A.15) et (A.16) sont préservés pour le tas \( H \oplus H_0 \oplus H_1 \). On conclut par la propriété de cohérence.

\[\Box\]

**Proposition A.6.** La fonction \( \text{cons}_{\text{mrk}} \) vérifie bien sa spécification, i.e.,

\[
\begin{align*}
\left( \begin{pmatrix}
  \text{fcall cons}_{\text{mrk}}() \\
  p_{\text{mrk}}
\end{pmatrix} \right)_{H,F} & \Rightarrow \left( \begin{pmatrix}
  p_{\text{mrk}}
\end{pmatrix} \right)_{H} \\
[H, p_{\text{mrk}}]_{\text{mrk}}^{s_n} & = \emptyset
\end{align*}
\]

Preuve. Conséquence du lemme précédent en utilisant la définition de la règle alloc.

\[\Box\]
B Preuves du chapitre 6

Toutes les preuves sont faites dans le contexte d’un réseau de Petri $N = (S, T, \ell)$ avec les suppositions du chapitre 6.

B.1 Preuves des résultats auxiliaires (section 6.3)

\textbf{B.1.1 Proposition 6.2}

Soit $M$ un marquage pid-cohérent d’un réseau de Petri. Si $t \in R(M)$ est une représentation de $M$, alors

1. mrk($N(t)$) est pid-cohérent ;
2. $M$ et mrk($N(t)$) sont $h^*_N$ équivalents, i.e., $M \sim mrk(N(t))$. \hfill \Box

\textbf{Preuve.}

1. Parce que, pour chaque paire $(\pi, \pi_n) \in M(s_n)$ le noeud dans $t$ à la position $\pi_n$ est le fils le plus à droite du noeud à la position $\pi$ (définition 6.11), on a $h^*_N(\pi_n)$ le plus grand pid qui satisfait $h^*_N(\pi) \preceq h^*_N(\pi_n)$ et donc mrk($N(t)$) est pid-cohérent.

2. $h^*_N$ est une bijection qui assigne aux pids de $pid_t$ les pids dans $pid_{N(t)}$. Cette bijection préserve les relations $\preceq_1$ et $\preceq$ parce qu’elle ne change que les noms de pids et non leur relations, par conséquent les condition de la définition 6.4 sont satisfaites. \hfill \Box

\textbf{B.1.2 Proposition 6.3}

Soit $M$ un marquage pid-cohérent d’un réseau de Petri. Si $t, t' \in R_s(M)$ alors $t'$ est une permutation de $t$. \hfill \Box

\textbf{Preuve.} Par définition $R_s(M) \subseteq R(M)$, on sait que

\begin{equation}
\text{pid}_t = \text{pid}_{t'} = \text{pid}_M \tag{B.1}
\end{equation}

\begin{equation}
\text{mrk}(t) = \text{mrk}(t') = M \tag{B.2}
\end{equation}
si $t$ et $t'$ diffèrent en nombre de branches, ou diffèrent en la longueur de leur branches (longueur minimale car pid-trees réduits) alors (B.1) est violée. S’ils diffèrent en leurs marquages alors (B.2) est violée. Donc les pid-trees $t$ et $t'$ ne peuvent différer que par l’ordonnancement de leurs enfants.

Le corollaire 6.4 est immédiat.

### B.1.3 Proposition 6.6

Soit $t \in R_{so}(M)$ un pid-tree, alors pour tout $t' \in R_{so}(M)$ on a :

$$t \equiv t' \iff t' \in R_{so}(M)$$

**Preuve.**

$(\Rightarrow)$ $t \equiv t'$, $t'$ est réduit et pid-free ordonné donc il est dans $R_{so}(M)$.

$(\Leftarrow)$ $t' \in R_{so}$, donc $t'$ est réduit et pid-free ordonné, $t$ et $t'$ ne peuvent différer qu’en des noeuds équivalents, sinon $t'$ ne serait pas dans $R_{so}(M)$, par conséquent $t \equiv t'$.

$\square$

### B.2 Preuves de l’algorithme de construction (section 6.4)

#### B.2.1 Proposition 6.9

L’algorithme 6.1 construit une représentation sous forme de pid-tree d’un marquage pid-cohérent.

(schéma). On considère un marquage pid-cohérent $M$. L’algorithme démarre avec l’ pid-tree $\langle \emptyset, \emptyset \rangle$.

Si le marquage $M$ est vide alors aucune modification n’est fait, on renvoie ce pid-tree. C’est le plus petit pid-tree bien formé, qui est une représentation de $M$.

Sinon, s’il y a des jetons dans les places différentes de $s_\eta$ on les ajoute à gauche, les fils les plus à droite ne sont donc pas modifiés (s’ils existent). Le pid-tree reste bien formé et une représentation de $M$ puisqu’on ajoute les jetons dans l’arbre.

Pour chaque futur-pid, on ajoute un sous arbre à gauche d’un noeud. Parce que le marquage est pid-cohérent, il ne peut y avoir qu’un seul fils de ce type par noeud. De plus le placer en tant que fils le plus à droite force la troisième condition de la définition 6.11 à être vraie. Le jeton correspondant de la place $s_\eta$ est aussi ajouté à l’arbre, il est donc bien formé et une représentation de $M$.

$\square$

#### B.2.2 Proposition 6.10

La fonction de réduction $S$ transforme une représentation d’un marquage en une représentation réduite du même marquage.

$\square$


**B.3. Preuves des algorithmes (section 6.6)**

*Preuve.* Pour respecter la définition des pid-tree bien formés, on ne supprime que les noeuds correspondants aux pids non référencés, par conséquent l’arbre résultant sera bien formé. Le marquage reste le même parce que les noeuds $\bot$ se comportent comme des marquages vides. De plus, la transformation ne peut modifier les noeuds $\bot$ correspondants aux futur-pids car il s’agit de feuilles. L’arbre résultant ne possède plus de noeuds internes étiquetés par $\bot$ et donc pas de pids non référencés, il s’agit d’un arbre réduit. 

**B.2.3 Proposition 6.11**

L’application de la fonction de normalisation $N$ sur un pid-tree produit un pid-tree normalisé.

*Preuve.* Immédiat de part l’implémentation qui est basée directement sur la définition de la normalisation de pid-trees. 

**L’algorithme 6.2 est correct et termine.**

*(schéma).* On vérifie juste que cette fonction renvoie un espace d’états minimal contenant un marquage équivalent à $M$.

On construit un pid-tree réduit et ordonné du marquage $M$. On énumère toutes les représentations réduites du marquage $M$ (corollaire 6.7), on normalise chacune de ces représentations et construit le marquage resultant. Si un de ces marquages correspond à un marquage dans l’espace d’états, alors on a déjà un état équivalent (théorème 6.8). Sinon, on ajoute une des représentations à l’espace d’états, ce qui est aussi correct de par le théorème 6.8.

L’espace d’états est minimal car sinon on aurait trouvé un état équivalent dans l’ensemble d’états.

La terminaison est triviale car l’ensemble des représentations réduites et ordonnées des pid-trees est fini.

**L’algorithme 6.3 est correct et termine.**

*Preuve.* Trivial car on ajoute toujours un marquage équivalent à $M$ (proposition 6.2).

De plus l’espace d’états est fini car chaque marquage possède un nombre fini de représentations sous forme de pid-trees réduits, et donc un nombre fini de représentations réduites et ordonnées.
Évaluation des performances de Neco

Dans cette annexe on présente les résultats des études de cas du chapitre 7 qui ont été omis. De plus on réalise une autre série d’exécutions avec l’interpréteur PyPy [149] pour évaluer l’intérêt du backend Cython. En effet, PyPy est une implémentation alternative du langage Python qui réalise de la compilation à la volée pour de meilleures performances en temps d’exécution et en mémoire.

Les résultats omis du chapitre 7 La table C.1 présente les résultats du backend Python sur les modèles bas niveau. Les exécutions avec PyPy Les tests présentés ici ont été réalisés avec PyPy pour l’exploration d’espaces d’états mais l’étape de compilation a été réalisée avec Python pour des raisons de compatibilité avec la bibliothèque SNAKES.


On observe les mêmes tendances qu’avec Python pour les optimisations, cependant les temps de calculs sont plus rapides avec PyPy mais restent bien supérieurs aux temps atteints avec Cython.

Les fichiers produits par Neco La compilation produit différents fichiers selon le backend utilisé. Le backend Python produit un fichier net.py qui est un module python correspondant au moteur d’exploration. Selon le modèle, la taille de ce fichier varie, comme on peut le voir sur les figures C.7, C.8, C.9, C.10, C.11, C.12. On remarque qu’en général on obtient des fichiers de même taille pour les configurations SIMPLE, OPT et OPTPACK, en revanche lorsqu’on utilise l’élimination de contrôle de flot (FLOW) alors le fichier produit est beaucoup plus petit.

Le backend Cython produit plusieurs fichiers. Tout d’abord deux fichiers Cython, net.pyx et net.pxd, ils sont produits directement par Neco, puis compilés par le compilateur Cython pour produire deux fichiers net.h et net.cpp.
### Évaluation des performances de Neco

<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th>Temps compilation (s)</th>
<th>Temps exploration (s)</th>
<th>Accélération OPT par rapport à SIMPLE</th>
<th>Nombre d'états</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td><strong>Python</strong></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>SIMPLE</td>
<td>OPT</td>
<td>SIMPLE</td>
<td>OPT</td>
<td>SIMPLE</td>
</tr>
<tr>
<td>CSRepetitions PT 02</td>
<td>0.098</td>
<td>0.099</td>
<td>0.146</td>
<td>0.147</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 010</td>
<td>0.607</td>
<td>0.609</td>
<td>6.651</td>
<td>6.594</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 015</td>
<td>1.667</td>
<td>1.663</td>
<td>921.498</td>
<td>923.739</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutex PT 2</td>
<td>0.521</td>
<td>0.523</td>
<td>0.047</td>
<td>0.047</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutex PT 3</td>
<td>1.064</td>
<td>1.059</td>
<td>5.035</td>
<td>5.030</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutex PT 4</td>
<td>2.092</td>
<td>2.089</td>
<td>1 045.760</td>
<td>1 038.740</td>
</tr>
<tr>
<td>NeoElection PT 2</td>
<td>0.521</td>
<td>0.523</td>
<td>0.047</td>
<td>0.047</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 010</td>
<td>1.667</td>
<td>1.663</td>
<td>921.498</td>
<td>923.739</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 015</td>
<td>1.667</td>
<td>1.663</td>
<td>921.498</td>
<td>923.739</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 015</td>
<td>1.667</td>
<td>1.663</td>
<td>921.498</td>
<td>923.739</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutex PT 4</td>
<td>2.092</td>
<td>2.089</td>
<td>1 045.760</td>
<td>1 038.740</td>
</tr>
<tr>
<td>NeoElection PT 2</td>
<td>0.521</td>
<td>0.523</td>
<td>0.047</td>
<td>0.047</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 010</td>
<td>1.667</td>
<td>1.663</td>
<td>921.498</td>
<td>923.739</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 015</td>
<td>1.667</td>
<td>1.663</td>
<td>921.498</td>
<td>923.739</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 015</td>
<td>1.667</td>
<td>1.663</td>
<td>921.498</td>
<td>923.739</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutex PT 4</td>
<td>2.092</td>
<td>2.089</td>
<td>1 045.760</td>
<td>1 038.740</td>
</tr>
<tr>
<td>NeoElection PT 2</td>
<td>0.521</td>
<td>0.523</td>
<td>0.047</td>
<td>0.047</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 010</td>
<td>1.667</td>
<td>1.663</td>
<td>921.498</td>
<td>923.739</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 015</td>
<td>1.667</td>
<td>1.663</td>
<td>921.498</td>
<td>923.739</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 015</td>
<td>1.667</td>
<td>1.663</td>
<td>921.498</td>
<td>923.739</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutex PT 4</td>
<td>2.092</td>
<td>2.089</td>
<td>1 045.760</td>
<td>1 038.740</td>
</tr>
<tr>
<td>NeoElection PT 2</td>
<td>0.521</td>
<td>0.523</td>
<td>0.047</td>
<td>0.047</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 010</td>
<td>1.667</td>
<td>1.663</td>
<td>921.498</td>
<td>923.739</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 015</td>
<td>1.667</td>
<td>1.663</td>
<td>921.498</td>
<td>923.739</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 015</td>
<td>1.667</td>
<td>1.663</td>
<td>921.498</td>
<td>923.739</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutex PT 4</td>
<td>2.092</td>
<td>2.089</td>
<td>1 045.760</td>
<td>1 038.740</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Table C.1 – Résultats des réductions par symétries pour le modèle CFG (back-end : Python, variable : instances de sous réseau).
<table>
<thead>
<tr>
<th>Table C.2 – Résultats d’optimisations pour réseaux bas niveau avec PyPy.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td><strong>PYPY</strong></td>
</tr>
<tr>
<td>-----------</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>CSRepetitions PT 02</strong></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>Dekker PT 01</strong></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>Dekker PT 015</strong></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>LamportFastMutEx PT 2</strong></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>LamportFastMutEx PT 3</strong></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>LamportFastMutEx PT 4</strong></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>NeoElection PT 2</strong></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>Philosophers 20</strong></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>Philosophers 25</strong></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>Philosophers 30</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RessAllocation PT R002C002</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RessAllocation PT R003C002</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RessAllocation PT R003C003</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RessAllocation PT R003C005</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RessAllocation PT R003C010</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RessAllocation PT R005C002</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RessAllocation PT R010C002</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RessAllocation PT R015C002</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RessAllocation PT R020C002</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RessAllocation PT R030C002</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RessAllocation PT R030C005</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RessAllocation PT R030C010</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RessAllocation PT R035C002</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RessAllocation PT R101C002</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RwMutex PT r0010w0010</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RwMutex PT r0010w0020</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RwMutex PT r0010w0050</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RwMutex PT r0010w0100</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RwMutex PT r0010w0500</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RwMutex PT r0020w0010</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RwMutex PT r0020w0050</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RwMutex PT r0050w0010</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>RwMutex PT r0050w0050</strong></td>
</tr>
<tr>
<td>SIMPLE</td>
</tr>
<tr>
<td>--------</td>
</tr>
<tr>
<td>1.741</td>
</tr>
<tr>
<td>3.892</td>
</tr>
<tr>
<td>0.887</td>
</tr>
<tr>
<td>1.959</td>
</tr>
<tr>
<td>3.485</td>
</tr>
<tr>
<td>0.086</td>
</tr>
<tr>
<td>0.096</td>
</tr>
<tr>
<td>0.108</td>
</tr>
<tr>
<td>0.120</td>
</tr>
<tr>
<td>0.171</td>
</tr>
<tr>
<td>0.169</td>
</tr>
<tr>
<td>0.196</td>
</tr>
<tr>
<td>0.053</td>
</tr>
</tbody>
</table>
TABLE C.4 – Résultats des réductions par symétries pour le modèle Client-Server avec PyPy.

<table>
<thead>
<tr>
<th>PYPY</th>
<th>TEMPS COMILATION (s)</th>
<th>TEMPS EXPLORATION (s)</th>
<th>ACCÉLÉRATION PAR RAPPORT À OPT</th>
<th>NOMBRE D’ÉTATS</th>
<th>RÉDUCTION PAR RAPPORT À OPT</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td></td>
<td>SIMPLE</td>
<td>OPT</td>
<td>SYM</td>
<td>SYM NO</td>
<td>SIMPLE</td>
</tr>
<tr>
<td>c3n4</td>
<td>0.117</td>
<td>0.117</td>
<td>0.260</td>
<td>0.261</td>
<td>1.781</td>
</tr>
<tr>
<td>c3n5</td>
<td>0.148</td>
<td>0.148</td>
<td>0.176</td>
<td>0.175</td>
<td>2.359</td>
</tr>
<tr>
<td>c4n1</td>
<td>0.064</td>
<td>0.065</td>
<td>0.159</td>
<td>0.159</td>
<td>3.270</td>
</tr>
<tr>
<td>c4n2</td>
<td>0.126</td>
<td>0.126</td>
<td>0.147</td>
<td>0.147</td>
<td>6.058</td>
</tr>
<tr>
<td>c4n3</td>
<td>0.118</td>
<td>0.119</td>
<td>0.171</td>
<td>0.171</td>
<td>11.757</td>
</tr>
<tr>
<td>c4n4</td>
<td>0.129</td>
<td>0.129</td>
<td>0.214</td>
<td>0.215</td>
<td>19.814</td>
</tr>
<tr>
<td>c4n5</td>
<td>0.153</td>
<td>0.150</td>
<td>0.177</td>
<td>0.177</td>
<td>33.550</td>
</tr>
<tr>
<td>c5n1</td>
<td>0.066</td>
<td>0.066</td>
<td>0.160</td>
<td>0.160</td>
<td>34.299</td>
</tr>
<tr>
<td>c5n2</td>
<td>0.128</td>
<td>0.128</td>
<td>0.148</td>
<td>0.148</td>
<td>124.992</td>
</tr>
<tr>
<td>c5n3</td>
<td>0.120</td>
<td>0.120</td>
<td>0.171</td>
<td>0.172</td>
<td>348.077</td>
</tr>
<tr>
<td>c5n4</td>
<td>0.132</td>
<td>0.132</td>
<td>0.218</td>
<td>0.267</td>
<td>58.486</td>
</tr>
<tr>
<td>c5n5</td>
<td>0.150</td>
<td>0.155</td>
<td>0.179</td>
<td>0.183</td>
<td>58.486</td>
</tr>
</tbody>
</table>
### Table C.5 – Résultats des réductions par symétries pour le modèle CFG avec PyPy

<table>
<thead>
<tr>
<th>CFG</th>
<th>SIMPLE</th>
<th>OPT</th>
<th>TIME COMPILE (s)</th>
<th>TIME EXPLORATION (s)</th>
<th>REDUCTION PAR SYMÉTRIES</th>
<th>ACCELERATION PAR RAPPORT À OPT</th>
<th>SIMPLE</th>
<th>OPT</th>
<th>SYM</th>
<th>NO</th>
<th>SYM</th>
<th>NO</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>0.048</td>
<td>0.072</td>
<td>3.989</td>
<td>4.005</td>
<td>0.067</td>
<td>1.22</td>
<td>1.354</td>
<td>1.222</td>
<td>1.777</td>
<td>2.53</td>
<td>2.049</td>
<td>3.277</td>
</tr>
<tr>
<td>1.5</td>
<td>0.071</td>
<td>0.128</td>
<td>4.005</td>
<td>4.005</td>
<td>0.067</td>
<td>1.22</td>
<td>1.354</td>
<td>1.222</td>
<td>1.777</td>
<td>2.53</td>
<td>2.049</td>
<td>3.277</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>0.163</td>
<td>0.281</td>
<td>4.905</td>
<td>5.074</td>
<td>0.067</td>
<td>1.22</td>
<td>1.354</td>
<td>1.222</td>
<td>1.777</td>
<td>2.53</td>
<td>2.049</td>
<td>3.277</td>
</tr>
<tr>
<td>2.5</td>
<td>0.271</td>
<td>0.425</td>
<td>5.074</td>
<td>5.074</td>
<td>0.067</td>
<td>1.22</td>
<td>1.354</td>
<td>1.222</td>
<td>1.777</td>
<td>2.53</td>
<td>2.049</td>
<td>3.277</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>0.374</td>
<td>0.51</td>
<td>5.974</td>
<td>6.145</td>
<td>0.067</td>
<td>1.22</td>
<td>1.354</td>
<td>1.222</td>
<td>1.777</td>
<td>2.53</td>
<td>2.049</td>
<td>3.277</td>
</tr>
<tr>
<td>3.5</td>
<td>0.510</td>
<td>0.668</td>
<td>6.645</td>
<td>6.819</td>
<td>0.067</td>
<td>1.22</td>
<td>1.354</td>
<td>1.222</td>
<td>1.777</td>
<td>2.53</td>
<td>2.049</td>
<td>3.277</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>0.652</td>
<td>0.821</td>
<td>7.545</td>
<td>7.721</td>
<td>0.067</td>
<td>1.22</td>
<td>1.354</td>
<td>1.222</td>
<td>1.777</td>
<td>2.53</td>
<td>2.049</td>
<td>3.277</td>
</tr>
<tr>
<td>4.5</td>
<td>0.794</td>
<td>1.002</td>
<td>8.431</td>
<td>8.607</td>
<td>0.067</td>
<td>1.22</td>
<td>1.354</td>
<td>1.222</td>
<td>1.777</td>
<td>2.53</td>
<td>2.049</td>
<td>3.277</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>0.946</td>
<td>1.181</td>
<td>9.321</td>
<td>9.485</td>
<td>0.067</td>
<td>1.22</td>
<td>1.354</td>
<td>1.222</td>
<td>1.777</td>
<td>2.53</td>
<td>2.049</td>
<td>3.277</td>
</tr>
<tr>
<td>5.5</td>
<td>1.098</td>
<td>1.367</td>
<td>10.211</td>
<td>10.373</td>
<td>0.067</td>
<td>1.22</td>
<td>1.354</td>
<td>1.222</td>
<td>1.777</td>
<td>2.53</td>
<td>2.049</td>
<td>3.277</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>1.273</td>
<td>1.563</td>
<td>11.106</td>
<td>11.268</td>
<td>0.067</td>
<td>1.22</td>
<td>1.354</td>
<td>1.222</td>
<td>1.777</td>
<td>2.53</td>
<td>2.049</td>
<td>3.277</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Les résultats sont exprimés en secondes (s) et reflètent l’efficacité des réductions par symétries obtenues avec PyPy pour les modèles CFG.
<table>
<thead>
<tr>
<th>CFG 10 1</th>
<th>SIMPLE</th>
<th>OPT</th>
<th>SYM</th>
<th>SYM NO</th>
<th>SIMPLE</th>
<th>OPT</th>
<th>SYM</th>
<th>SYM NO</th>
<th>SYM</th>
<th>SYM NO</th>
<th>SIMPLE</th>
<th>OPT</th>
<th>SYM</th>
<th>SYM NO</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0.905</td>
<td>0.907</td>
<td>1.265</td>
<td>1.234</td>
<td>0.099</td>
<td>0.097</td>
<td>0.188</td>
<td>0.146</td>
<td>x0.517</td>
<td>x0.666</td>
<td>x0.700</td>
<td>x0.543</td>
<td>x0.700</td>
<td>x1</td>
<td>x1</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 10 2</td>
<td>0.996</td>
<td>0.997</td>
<td>1.236</td>
<td>1.240</td>
<td>0.410</td>
<td>0.411</td>
<td>0.757</td>
<td>0.588</td>
<td>x1.027</td>
<td>x1.342</td>
<td>2.161</td>
<td>2.161</td>
<td>561</td>
<td>561</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 10 3</td>
<td>0.994</td>
<td>0.996</td>
<td>1.240</td>
<td>1.239</td>
<td>2.919</td>
<td>2.980</td>
<td>2.901</td>
<td>2.220</td>
<td>x2.331</td>
<td>x3.715</td>
<td>12.961</td>
<td>12.961</td>
<td>1.261</td>
<td>1.261</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 10 4</td>
<td>0.911</td>
<td>0.908</td>
<td>1.236</td>
<td>1.237</td>
<td>23.145</td>
<td>229.74</td>
<td>9.856</td>
<td>6.384</td>
<td>x6.105</td>
<td>x10.389</td>
<td>77.761</td>
<td>77.761</td>
<td>2.521</td>
<td>2.521</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 10 5</td>
<td>0.907</td>
<td>0.911</td>
<td>1.238</td>
<td>1.239</td>
<td>1275</td>
<td>1274</td>
<td>79.249</td>
<td>38.734</td>
<td>-</td>
<td>-</td>
<td>466.561</td>
<td>466.561</td>
<td>4.621</td>
<td>4.621</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 10 6</td>
<td>0.909</td>
<td>0.909</td>
<td>1.237</td>
<td>1.239</td>
<td>TIME</td>
<td>TIME</td>
<td>233.327</td>
<td>84.407</td>
<td>-</td>
<td>-</td>
<td>TIME</td>
<td>TIME</td>
<td>7.921</td>
<td>7.921</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 10 7</td>
<td>0.908</td>
<td>0.909</td>
<td>1.233</td>
<td>1.235</td>
<td>MEM</td>
<td>MEM</td>
<td>904.098</td>
<td>170.957</td>
<td>-</td>
<td>-</td>
<td>MEM</td>
<td>MEM</td>
<td>12.871</td>
<td>12.871</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 10 8</td>
<td>0.909</td>
<td>0.909</td>
<td>1.240</td>
<td>1.234</td>
<td>MEM</td>
<td>MEM</td>
<td>TIME</td>
<td>341.238</td>
<td>-</td>
<td>-</td>
<td>MEM</td>
<td>MEM</td>
<td>TIME</td>
<td>20.021</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Table C.6 – Résultats des réductions par symétries pour le modèle CFG avec PyPy.
qui vont servir à produire le module natif correspondant au moteur d’exploration. Ainsi, on peut voir que ici aussi selon le modèle la taille de ces fichiers varie, ceci est présenté en figures C.13, C.14, C.15 et C.16. On remarque que l’utilisation de la configuration OPT PACK réduit la taille des fichiers produit, mais l’utilisation des réductions de contrôle de flot a un impact beaucoup plus important.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Python</th>
<th>SIMPLE net.py</th>
<th>OPT net.py</th>
<th>OPT PACK net.py</th>
<th>FLOW net.py</th>
<th>DPS NO net.py</th>
<th>DPS net.py</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>CFG 10 1</td>
<td>6 287</td>
<td>6 287</td>
<td>6 287</td>
<td>n/a</td>
<td>6 892</td>
<td>6 892</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 10 2</td>
<td>6 288</td>
<td>6 288</td>
<td>6 288</td>
<td>n/a</td>
<td>6 893</td>
<td>6 893</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 10 3</td>
<td>6 289</td>
<td>6 289</td>
<td>6 289</td>
<td>n/a</td>
<td>6 894</td>
<td>6 894</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 10 4</td>
<td>6 290</td>
<td>6 290</td>
<td>6 290</td>
<td>n/a</td>
<td>6 895</td>
<td>6 895</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 10 5</td>
<td>6 291</td>
<td>6 291</td>
<td>6 291</td>
<td>n/a</td>
<td>6 896</td>
<td>6 896</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 10 6</td>
<td>6 292</td>
<td>6 292</td>
<td>6 292</td>
<td>n/a</td>
<td>6 897</td>
<td>6 897</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 10 7</td>
<td>6 293</td>
<td>6 293</td>
<td>6 293</td>
<td>n/a</td>
<td>6 898</td>
<td>6 898</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 10 8</td>
<td>6 294</td>
<td>6 294</td>
<td>6 294</td>
<td>n/a</td>
<td>6 899</td>
<td>6 899</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 10 9</td>
<td>6 295</td>
<td>6 295</td>
<td>6 295</td>
<td>n/a</td>
<td>6 900</td>
<td>6 900</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 11 5</td>
<td>7 422</td>
<td>7 422</td>
<td>7 422</td>
<td>n/a</td>
<td>8 085</td>
<td>8 085</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 12 5</td>
<td>8 649</td>
<td>8 649</td>
<td>8 649</td>
<td>n/a</td>
<td>9 370</td>
<td>9 370</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 13 5</td>
<td>9 972</td>
<td>9 972</td>
<td>9 972</td>
<td>n/a</td>
<td>10 751</td>
<td>10 751</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 14 5</td>
<td>11 391</td>
<td>11 391</td>
<td>11 391</td>
<td>n/a</td>
<td>12 228</td>
<td>12 228</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 15 5</td>
<td>12 906</td>
<td>12 906</td>
<td>12 906</td>
<td>n/a</td>
<td>13 801</td>
<td>13 801</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 16 5</td>
<td>14 517</td>
<td>14 517</td>
<td>14 517</td>
<td>n/a</td>
<td>15 470</td>
<td>15 470</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 17 5</td>
<td>16 224</td>
<td>16 224</td>
<td>16 224</td>
<td>n/a</td>
<td>17 235</td>
<td>17 235</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 18 5</td>
<td>18 027</td>
<td>18 027</td>
<td>18 027</td>
<td>n/a</td>
<td>19 096</td>
<td>19 096</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 19 5</td>
<td>19 926</td>
<td>19 926</td>
<td>19 926</td>
<td>n/a</td>
<td>21 053</td>
<td>21 053</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 20 5</td>
<td>21 921</td>
<td>21 921</td>
<td>21 921</td>
<td>n/a</td>
<td>23 106</td>
<td>23 106</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Table C.7 – Nombre de lignes des fichiers produits par le backend Python. (modèles CFG)
<table>
<thead>
<tr>
<th>Python</th>
<th>SIMPLE NET.PY</th>
<th>OPT NET.PY</th>
<th>OPT PACK NET.PY</th>
<th>FLOW NET.PY</th>
<th>DPS NO NET.PY</th>
<th>DPS NET.PY</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>CFG 1 5</td>
<td>432</td>
<td>432</td>
<td>432</td>
<td>N/A</td>
<td>515</td>
<td>515</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 2 5</td>
<td>699</td>
<td>699</td>
<td>699</td>
<td>N/A</td>
<td>840</td>
<td>840</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 3 5</td>
<td>1 062</td>
<td>1 062</td>
<td>1 062</td>
<td>N/A</td>
<td>1 261</td>
<td>1 261</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 4 5</td>
<td>1 521</td>
<td>1 521</td>
<td>1 521</td>
<td>N/A</td>
<td>1 778</td>
<td>1 778</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 5 5</td>
<td>2 076</td>
<td>2 076</td>
<td>2 076</td>
<td>N/A</td>
<td>2 391</td>
<td>2 391</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 6 5</td>
<td>2 727</td>
<td>2 727</td>
<td>2 727</td>
<td>N/A</td>
<td>3 100</td>
<td>3 100</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 7 5</td>
<td>3 474</td>
<td>3 474</td>
<td>3 474</td>
<td>N/A</td>
<td>3 905</td>
<td>3 905</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 8 5</td>
<td>4 317</td>
<td>4 317</td>
<td>4 317</td>
<td>N/A</td>
<td>4 806</td>
<td>4 806</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 9 5</td>
<td>5 256</td>
<td>5 256</td>
<td>5 256</td>
<td>N/A</td>
<td>5 803</td>
<td>5 803</td>
</tr>
<tr>
<td>CFG 10 5</td>
<td>6 291</td>
<td>6 291</td>
<td>6 291</td>
<td>N/A</td>
<td>6 896</td>
<td>6 896</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Table C.8 – Nombre de lignes des fichiers produits par le backend Python. (modèles CFG)
## Évaluation des performances de Neco Python

<table>
<thead>
<tr>
<th>Python</th>
<th>SIMPLE net.py</th>
<th>OPT net.py</th>
<th>OPT PACK net.py</th>
<th>FLOW net.py</th>
<th>DPS NO net.py</th>
<th>DPS net.py</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Choice 1</td>
<td>6 775</td>
<td>6 876</td>
<td>1 222</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Choice 2</td>
<td>23 805</td>
<td>24 007</td>
<td>2 397</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Choice 3</td>
<td>51 339</td>
<td>51 642</td>
<td>3 774</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear 2</td>
<td>12 505</td>
<td>12 607</td>
<td>1 497</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear 3</td>
<td>26 589</td>
<td>26 742</td>
<td>2 274</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear 4</td>
<td>45 977</td>
<td>46 181</td>
<td>3 153</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Need.-Sch.</td>
<td>668</td>
<td>677</td>
<td>558</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 5</td>
<td>1 999</td>
<td>2 101</td>
<td>1 416</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 6</td>
<td>2 344</td>
<td>2 458</td>
<td>1 606</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 7</td>
<td>2 719</td>
<td>2 845</td>
<td>1 808</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Table C.10 – Nombre de lignes des fichiers produits par le backend Python. (modèles colorés)

<table>
<thead>
<tr>
<th>Python</th>
<th>SIMPLE net.py</th>
<th>OPT net.py</th>
<th>OPT PACK net.py</th>
<th>FLOW net.py</th>
<th>DPS NO net.py</th>
<th>DPS net.py</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>CSRepetitions PT 02</td>
<td>1 416</td>
<td>1 416</td>
<td>1 416</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>CSRepetitions PT 03</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 010</td>
<td>8 978</td>
<td>8 978</td>
<td>8 978</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 015</td>
<td>25 118</td>
<td>25 118</td>
<td>25 118</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 020</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Kanban PT 0005</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutEx PT 2</td>
<td>8 741</td>
<td>8 741</td>
<td>8 741</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutEx PT 3</td>
<td>18 820</td>
<td>18 820</td>
<td>18 820</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutEx PT 4</td>
<td>35 613</td>
<td>35 613</td>
<td>35 613</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>MAPK PT 008</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>NeoElection PT 2</td>
<td>165 974</td>
<td>165 974</td>
<td>165 974</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>NeoElection PT 3</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Philosophers 20</td>
<td>2 628</td>
<td>2 628</td>
<td>2 628</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Philosophers 25</td>
<td>3 723</td>
<td>3 723</td>
<td>3 723</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Philosophers 30</td>
<td>5 018</td>
<td>5 018</td>
<td>5 018</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>Philosophers 35</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Table C.11 – Nombre de lignes des fichiers produits par le backend Python. (modèles bas niveau)

186
<table>
<thead>
<tr>
<th>Python</th>
<th>SIMPLE NET.PY</th>
<th>OPT NET.PY</th>
<th>OPT PACK NET.PY</th>
<th>FLOW NET.PY</th>
<th>DPS NO NET.PY</th>
<th>DPS NET.PY</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>RessAllocation PT R002C002</td>
<td>432</td>
<td>432</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R003C002</td>
<td>542</td>
<td>542</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R003C003</td>
<td>767</td>
<td>767</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R003C005</td>
<td>1 361</td>
<td>1 361</td>
<td>1 361</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R003C010</td>
<td>3 686</td>
<td>3 686</td>
<td>3 686</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R005C002</td>
<td>810</td>
<td>810</td>
<td>810</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R010C002</td>
<td>1 760</td>
<td>1 760</td>
<td>1 760</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R015C002</td>
<td>767</td>
<td>767</td>
<td>767</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>RwMutex PT r0010w0010</td>
<td>3 468</td>
<td>3 468</td>
<td>3 468</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>RwMutex PT r0010w0020</td>
<td>6 418</td>
<td>6 418</td>
<td>6 418</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>RwMutex PT r0010w0050</td>
<td>20 068</td>
<td>20 068</td>
<td>20 068</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>RwMutex PT r0010w0100</td>
<td>58 818</td>
<td>58 818</td>
<td>58 818</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>RwMutex PT r0020w0010</td>
<td>1 088 818</td>
<td>1 088 818</td>
<td>1 088 818</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>SharedMemory PT 000005</td>
<td>3 531</td>
<td>3 531</td>
<td>3 531</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>SimpleLoadBal PT 02</td>
<td>3 531</td>
<td>3 531</td>
<td>3 531</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
<tr>
<td>SimpleLoadBal PT 05</td>
<td>14 617</td>
<td>14 617</td>
<td>14 617</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
<td>N/A</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Table C.12 – Nombre de lignes des fichiers produits par le backend Python.
(modèles bas niveau)

<table>
<thead>
<tr>
<th>CYTHON</th>
<th>SIMPLE NET.PY</th>
<th>OPT NET.PY</th>
<th>OPT PACK NET.PY</th>
<th>OPT PACK NET.PY</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Choice 1</td>
<td>7 102</td>
<td>62</td>
<td>215</td>
<td>74 852</td>
</tr>
<tr>
<td>Choice 2</td>
<td>24 540</td>
<td>114</td>
<td>368</td>
<td>249 388</td>
</tr>
<tr>
<td>Choice 3</td>
<td>52 482</td>
<td>166</td>
<td>521</td>
<td>528 964</td>
</tr>
<tr>
<td>Choice 4</td>
<td>90 928</td>
<td>218</td>
<td>674</td>
<td>913 580</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear 2</td>
<td>12 940</td>
<td>114</td>
<td>268</td>
<td>135 188</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear 3</td>
<td>27 282</td>
<td>166</td>
<td>371</td>
<td>279 664</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear 4</td>
<td>46 928</td>
<td>218</td>
<td>474</td>
<td>477 180</td>
</tr>
<tr>
<td>Need.-Sch.</td>
<td>716</td>
<td>27</td>
<td>88</td>
<td>12 795</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 5</td>
<td>2 322</td>
<td>53</td>
<td>130</td>
<td>27 306</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 6</td>
<td>2 712</td>
<td>58</td>
<td>138</td>
<td>31 224</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 7</td>
<td>3 132</td>
<td>63</td>
<td>146</td>
<td>35 440</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 8</td>
<td>3 582</td>
<td>68</td>
<td>154</td>
<td>39 956</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 9</td>
<td>4 062</td>
<td>73</td>
<td>162</td>
<td>44 770</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 10</td>
<td>4 572</td>
<td>78</td>
<td>170</td>
<td>49 886</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 11</td>
<td>5 112</td>
<td>83</td>
<td>178</td>
<td>55 304</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Table C.13 – Nombre de lignes des fichiers produits par le backend Cython.
(modèles colorés)
C. Évaluation des performances de Neco

<table>
<thead>
<tr>
<th>CYTHON</th>
<th>OPT</th>
<th>FLOW</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td></td>
<td>NET.PYX</td>
<td>NET.PXD</td>
</tr>
<tr>
<td>Choice 1</td>
<td>7 102</td>
<td>62</td>
</tr>
<tr>
<td>Choice 2</td>
<td>24 540</td>
<td>114</td>
</tr>
<tr>
<td>Choice 3</td>
<td>52 482</td>
<td>166</td>
</tr>
<tr>
<td>Choice 4</td>
<td>90 928</td>
<td>218</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear 2</td>
<td>12 940</td>
<td>114</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear 3</td>
<td>27 282</td>
<td>166</td>
</tr>
<tr>
<td>Linear 4</td>
<td>46 928</td>
<td>218</td>
</tr>
<tr>
<td>Need.-Sch.</td>
<td>716</td>
<td>27</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 5</td>
<td>2 390</td>
<td>55</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 6</td>
<td>2 786</td>
<td>60</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 7</td>
<td>3 212</td>
<td>65</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 8</td>
<td>3 668</td>
<td>70</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 9</td>
<td>4 154</td>
<td>75</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 10</td>
<td>4 670</td>
<td>80</td>
</tr>
<tr>
<td>Railroad 11</td>
<td>5 216</td>
<td>85</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Table C.14** – Nombre de lignes des fichiers produits par le backend Cython. (modèles colorés)
### CYTHON

<table>
<thead>
<tr>
<th>Modèle</th>
<th>SIMPLE</th>
<th>OPT PACK</th>
<th>OPT</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td></td>
<td>net.pyx net.pxd net.h net.cpp</td>
<td>net.pyx net.pxd net.h net.cpp</td>
<td>net.pyx net.pxd net.h net.cpp</td>
</tr>
<tr>
<td>CSRRepetitions PT 02</td>
<td>1 480 33 113 18 254</td>
<td>760 11 91 10 544</td>
<td>1 480 33 113 18 254</td>
</tr>
<tr>
<td>CSRRepetitions PT 03</td>
<td>6 745 68 201 70 076</td>
<td>2 295 11 144 23 883</td>
<td>6 745 68 201 70 076</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 010</td>
<td>9 837 60 232 93 294</td>
<td>4 333 11 183 37 060</td>
<td>9 837 60 232 93 294</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 015</td>
<td>27 047 85 392 253 164</td>
<td>9 952 11 318 79 658</td>
<td>27 047 85 392 253 164</td>
</tr>
<tr>
<td>Dekker PT 020</td>
<td>57 507 110 602 540 284</td>
<td>18 531 11 503 145 496</td>
<td>57 507 110 602 540 284</td>
</tr>
<tr>
<td>Kanban PT 0005</td>
<td>823 26 94 12 028</td>
<td>823 26 94 12 028</td>
<td>823 26 94 12 028</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutEpyx PT 02</td>
<td>9 206 79 227 93 531</td>
<td>2 966 11 293 78 015</td>
<td>9 206 79 227 93 531</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutEpyx PT 03</td>
<td>19 611 110 318 195 616</td>
<td>5 343 11 219 49 244</td>
<td>19 611 110 318 195 616</td>
</tr>
<tr>
<td>LamportFastMutEpyx PT 04</td>
<td>36 802 145 427 364 939</td>
<td>8 718 11 293 78 015</td>
<td>36 802 145 427 364 939</td>
</tr>
<tr>
<td>MAPK PT 008</td>
<td>1 537 32 114 18 828</td>
<td>1 537 32 114 18 828</td>
<td>1 537 32 114 18 828</td>
</tr>
<tr>
<td>NeoElection PT 02</td>
<td>168 779 448 857 1 682 496</td>
<td>28 984 11 420 256 994</td>
<td>168 779 448 857 1 682 496</td>
</tr>
<tr>
<td>NeoElection PT 03</td>
<td>1 020 619 982 1 682 496</td>
<td>150 219 11 1 079 1 327 157</td>
<td>1 020 619 982 1 682 496</td>
</tr>
<tr>
<td>Philosophers 20</td>
<td>2 767 50 142 31 484</td>
<td>1 087 11 103 13 728</td>
<td>2 767 50 142 31 484</td>
</tr>
<tr>
<td>Philosophers 25</td>
<td>3 917 60 162 43 029</td>
<td>1 423 11 113 16 795</td>
<td>3 917 60 162 43 029</td>
</tr>
<tr>
<td>Philosophers 30</td>
<td>5 267 70 182 56 574</td>
<td>1 731 11 123 19 601</td>
<td>5 267 70 182 56 574</td>
</tr>
<tr>
<td>Philosophers 35</td>
<td>6 817 80 202 72 119</td>
<td>2 059 11 133 22 587</td>
<td>6 817 80 202 72 119</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R002C002</td>
<td>391 18 76 7 616</td>
<td>391 18 76 7 616</td>
<td>391 18 76 7 616</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R003C002</td>
<td>521 22 82 8 941</td>
<td>521 22 82 8 941</td>
<td>521 22 82 8 941</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R003C003</td>
<td>779 28 92 11 526</td>
<td>779 28 92 11 526</td>
<td>779 28 92 11 526</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R003C005</td>
<td>1 439 40 112 18 136</td>
<td>1 439 40 112 18 136</td>
<td>1 439 40 112 18 136</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R003C010</td>
<td>3 929 70 162 43 061</td>
<td>3 929 70 162 43 061</td>
<td>3 929 70 162 43 061</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R005C002</td>
<td>829 30 94 12 071</td>
<td>829 30 94 12 071</td>
<td>829 30 94 12 071</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R010C002</td>
<td>1 879 50 124 22 696</td>
<td>1 879 50 124 22 696</td>
<td>1 879 50 124 22 696</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R015C002</td>
<td>3 329 70 154 37 321</td>
<td>3 329 70 154 37 321</td>
<td>3 329 70 154 37 321</td>
</tr>
<tr>
<td>RessAllocation PT R020C002</td>
<td>5 179 90 184 55 946</td>
<td>5 179 90 184 55 946</td>
<td>5 179 90 184 55 946</td>
</tr>
</tbody>
</table>
### Table C.16 - Nombre de lignes des fichiers produits par le backend Cython.

<table>
<thead>
<tr>
<th>CYTHON</th>
<th>SIMPLE</th>
<th>OPT PACK</th>
<th>OPT</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td></td>
<td>NET.PYX</td>
<td>NET.PXD</td>
<td>NET.H</td>
</tr>
<tr>
<td>RwMutepyX PT r0010w0010</td>
<td>3 817</td>
<td>60</td>
<td>152</td>
</tr>
<tr>
<td>RwMutepyX PT r0010w0020</td>
<td>7 057</td>
<td>80</td>
<td>192</td>
</tr>
<tr>
<td>RwMutepyX PT r0010w0050</td>
<td>21 577</td>
<td>140</td>
<td>312</td>
</tr>
<tr>
<td>RwMutepyX PT r0010w0100</td>
<td>61 777</td>
<td>240</td>
<td>512</td>
</tr>
<tr>
<td>RwMutepyX PT r0010w0500</td>
<td>1 103 377</td>
<td>1 040</td>
<td>TIME</td>
</tr>
<tr>
<td>RwMutepyX PT r0020w0010</td>
<td>7 827</td>
<td>90</td>
<td>202</td>
</tr>
<tr>
<td>SharedMemory PT 000005</td>
<td>3 743</td>
<td>51</td>
<td>158</td>
</tr>
<tr>
<td>SharedMemory PT 000010</td>
<td>32 558</td>
<td>141</td>
<td>403</td>
</tr>
<tr>
<td>SimpleLoadBal PT 02</td>
<td>2 925</td>
<td>42</td>
<td>139</td>
</tr>
<tr>
<td>SimpleLoadBal PT 05</td>
<td>15 822</td>
<td>69</td>
<td>301</td>
</tr>
<tr>
<td>TokenRing PT 005</td>
<td>8 927</td>
<td>46</td>
<td>254</td>
</tr>
<tr>
<td>TokenRing PT 010</td>
<td>155 707</td>
<td>131</td>
<td>1 294</td>
</tr>
</tbody>
</table>