Laboratoire Jacques-Louis Lions, UMR 7598
Université Pierre et Marie Curie – Paris 6 & CNRS

Mémoire

présenté en vue de l'obtention du diplôme d'

Habilitation à Diriger des Recherches

en Mathématiques

par

Yannick PRIVAT

Optimisation de forme et application à l'observation et au contrôle d'équations aux dérivées partielles

Soutenance publique le 19 novembre 2014

Rapporteurs :	Grégoire Allaire	Professeur, École Polytechnique
	Giuseppe Buttazzo	Professeur, Université de Pise
	Yves Capdeboscq	Professeur, Université d'Oxford

Composition du jury

Fatiha Alabau	Professeur, Université de Lorraine
Grégoire Allaire	Professeur, École Polytechnique
Dorin Bucur	Professeur, Université de Savoie
Yves Capdeboscq	Professeur, Université d'Oxford
Jean-Michel Coron	Professeur, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6
Simon Masnou	Professeur, Université Claude Bernard, Lyon 1
Emmanuel Trélat	Professeur, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6
Marius Tucsnak	Professeur, Université de Lorraine

Table des matières

Préambule **1**

I. Optimisation de forme en mécanique des fluides **5**
I.1) Sur l'optimisation de la forme de l'arbre bronchique 5
I.1.1) Quel modèle pour l'arbre bronchique ? *6*
I.1.2) Écoulement de Poiseuille *7*
I.1.3) Écoulement de Stokes ou Navier-Stokes stationnaire *11*
I.2) Design optimal pour les échangeurs de chaleur 13
I.2.1) La forme optimale des ailettes *15*
I.2.2) Retour à l'étude du problème général *20*

II. Sur l'observabilité et la contrôlabilité optimales de systèmes physiques **23**
II.1) Un bref état de l'art 23
II.2) Modélisation du problème par randomisation 25
II.3) Relaxation et approximations modales 30
II.4) Résolution du problème (II.16) 36
II.4.1) Équation des ondes *36*
II.4.2) Équation de la chaleur *40*
II.5) Conclusion 43

III. Conclusion et perspectives de recherche **47**

Bibliographie **53**

Préambule

Introduction

Ce manuscrit contient le résumé d'une partie de mon activité de recherche depuis mon arrivée à l'institut de mathématiques de Rennes en 2009. J'ai choisi de présenter deux séries de travaux présentant une unité thématique, et que j'estime significatifs de mon activité. Le manuscrit est organisé en trois chapitres :

Chapitre I. Il s'agit de divers problèmes d'optimisation de forme appliquée à la mécanique des fluides ;

Chapitre II. Il s'agit de problèmes de design optimal pour le contrôle et l'observation de systèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles.

Chapitre III. Dans ce chapitre beaucoup plus court que les précédents, des travaux débutés récemment et inspirés par les chapitres précédents sont décrits et de nouvelles pistes de recherche sont évoquées.

J'ai choisi de passer volontairement sous silence une partie des articles écrits entre 2009 et 2014, soit parce qu'ils sont thématiquement isolés, soit parce qu'ils correspondent à des travaux récents ou en cours nécessitant d'être encore mûris.

Publications

Prépublications

- *How to estimate observability constants of one-dimensional wave equations ? Propagation versus Spectral methods*, A. Haraux, T. Liard and Y. Privat.
- *Optimal shape and location of sensors for parabolic equations with random initial data*, Y. Privat, E. Trélat and E. Zuazua.

Publications dans des revues internationales à comité de lecture

(i) *On the controllability of quantum transport in an electronic nanostructure*, F. Méhats, Y. Privat and M. Sigalotti. To appear in SIAM J. Appl. Math.

(ii) *Optimal observability of the multi-dimensional wave and Schrödinger equations in quantum ergodic domains*, Y. Privat, E. Trélat and E. Zuazua. To appear in J. Eur. Math. Soc.

(iii) *Control and stabilization of steady-states in a finite-length ferromagnetic nanowire*, Y. Privat and E. Trélat. To appear in ESAIM Control Optim. Calc. Var.

(iv) *Complexity and regularity of maximal energy domains for the wave equation with fixed initial data*, Y. Privat, E. Trélat and E. Zuazua. To appear in Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A.

(v) *What is the optimal shape of a fin for one dimensional heat conduction ?*, G. Marck, G. Nadin and Y. Privat. SIAM J. Appl. Math. **74** (2014), no. 4, 1194–1218

(vi) *An optimal control problem in photoacoustic tomography*, M. Bergounioux, X. Bonnefond, T. Haberkorn and Y. Privat. Math. Models Methods Applied Sci, **10** (2014), no. 24.

(vii) *Optimal observation of the one-dimensional wave equation*, Y. Privat, E. Trélat and E. Zuazua. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **30** (2013), no. 6, 1097–1126.

(viii) *Optimal location of controllers for the one-dimensional wave equation*, Y. Privat, E. Trélat and E. Zuazua. J. Fourier Anal. Appl. **19** (2013), no. 3, 514–544.

(ix) *A simple and unified algorithm to solve fluid phase equilibria using either the gamma-phi or the phi-phi approach for binary and ternary mixtures*, R. Privat, J.-N. Jaubert and Y. Privat. Computers & Chemical Engineering **50** (2013), no. 5, 139–151.

(x) *Shape optimization with Stokes constraints over the set of axisymmetric domains*, M. Bergounioux and Y. Privat. SIAM J. Control Optim. **51** (2013), no. 1, 599–628.

(xi) *Stability properties of steady-states for a network of ferromagnetic nanowires*, S. Labbé, Y. Privat and E. Trélat. J. Differential Equations **154** (2012), no. 3, 1709–1728.

(xii) *Some inverse problems around the Tokamak Tore Supra*, Yannick Fischer, B. Marteau, and Y. Privat. Commun. Pure Appl. Anal. **11** (2012), no. 6, 2327–2349.

(xiii) *On a Bernoulli problem with geometric constraints*, A. Laurain and Y. Privat. ESAIM Control Optim. Calc. Var. **18** (2012), no. 1, 157–180.

(xiv) *Shape minimization of the dissipated energy in dyadic trees*, X. Dubois De La Sablonière, B. Mauroy and Y. Privat. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **16** (2011), no. 3, 767–799.

(xv) *The squares of the Laplacian-Dirichlet eigenfunctions are generically linearly independent*, Y. Privat and M. Sigalotti, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **16** (2010), no. 3, 794–805.

(xvi) *What is the optimal shape of a pipe ?*, A. Henrot and Y. Privat, Arch. Ration. Mech. Anal. **196** (2010), no. 1, 281–302.

(xvii) *The optimal shape of a dendrite sealed at both ends*, Y. Privat, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **26** (2009), no. 6, 2317–2333 .

(xviii) *Can cubic equations of state be recast in the virial form ?*, R. Privat, Y. Privat and J.N. Jaubert, *Fluid Phase Equilibria* **282** (2009), no. 1, 38–50.

(xix) *Une conduite cylindrique n'est pas optimale pour minimiser l'énergie dissipée par un fluide*, A. Henrot and Y. Privat, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **346** (2008), no. 19-20, 1057–1061.

(xx) *Shape minimization of dendritic attenuation*, A. Henrot and Y. Privat, *Appl. Math. Optim.* **57** (2008), no. 1, 1–16.

(xxi) *A free boundary problem for the Laplacian with constant Bernoulli-type boundary condition*, E. Lindgren and Y. Privat, *Nonlinear Anal.* **67** (2007), no. 8, 2497–2505.

Articles de vulgarisation

- *La forme optimale des neurones*, Y. Privat, *Les dossiers de la recherche*, no. 5, juillet 2013, pages 18-20. (republication de l'article de 2007).
- *La forme optimale des neurones*, Y. Privat, *La recherche*, novembre 2007, pages 82-83.

Livre

- *Mathématiques de l'Ingénieur*, M. Chossat et Y. Privat.
  Éditions Dunod, 328 pages.

Actes de conférences

- *On some shape and topology optimization problems in conductive and convective heat transfers*, G. Marck and Y. Privat. OPTI 2014. Kos Island, Greece, 4-6, June 2014.

- *Optimal design of boundary observers for the wave equation*, P. Jounieaux, Y. Privat and E. Trélat. Proceedings SMAI 2013.
- *Optimal shape and location of sensors or actuators in PDE models*, Y. Privat, E. Trélat and E. Zuazua. Proceedings of the 2014 American Control Conference, Portland, Oregon, USA.
- *Shape dependent controllability of a quantum transistor*, F. Méhats, Y. Privat and M. Sigalotti. Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control, Florence, Italy, 2013, pp. 1366-1371.
- *Optimal sensor location for wave and Schrödinger equations*, Proceedings of the 14th International Conference on Hyperbolic Problems (Padova). Y. Privat, E. Trélat and E. Zuazua
- *On the best observation of wave and Schrödinger equations in quantum ergodic billiards*, Proceedings of the 39th "Days on PDEs" (Biarritz). Y. Privat, E. Trélat and E. Zuazua.
- *Looking for the optimal shape of an axon*, A. Henrot and Y. Privat, *Actes de la conférence NeuroComp 2006*, pages 175-178. Pont-à-Mousson. Octobre 2006.

I.

Optimisation de forme en mécanique des fluides

Ce chapitre est dédié à la présentation de divers travaux traitant de problèmes d'optimisation de forme pour des systèmes physiques dans lesquels intervient un écoulement fluide. Ils ont des motivations différentes et ont été traités sous un angle théorique et/ou numérique. Ils s'articulent autour de deux thématiques.

Dans la continuité de mes travaux de thèse, j'ai d'abord poursuivi quelques études en lien avec la modélisation de l'arbre bronchique, reposant sur l'idée qu'un principe d'optimalité régit les mécanisme de la nature, ce principe s'expliquant par exemple à l'aide de la théorie de l'évolution. On recherche alors une fonctionnelle permettant de décrire ce principe d'optimalité et on confronte le modèle déterminé (i.e. la forme optimale obtenue théoriquement ou numériquement) à la réalité. C'est le principe de la « *modélisation inverse* ». L'idée est de fournir quelques pistes dans l'explication et la justification des formes du vivant. Il s'agit de travaux en collaboration avec Maïtine Bergounioux (univ. d'Orléans), Antoine Henrot (École des Mines de Nancy) et Benjamin Mauroy (CNRS).

Par ailleurs, depuis mon arrivée au Laboratoire Jacques-Louis Lions, je m'intéresse à des problèmes d'optimisation de forme et de calcul des variations survenant dans un contexte industriel et constituant un enjeu pour l'amélioration de certains procédés. Avec Gilles Marck (LJLL) et Grégoire Nadin (CNRS), nous cherchons à déterminer la forme optimale du composant utilisé dans les échangeurs de chaleur. C'est l'exemple des ailettes qui sera développé dans la deuxième partie de ce chapitre.

Les difficultés inhérentes à ce type de problème résident dans la modélisation qui doit prendre en compte des phénomènes complexes mais rester mathématiquement abordable, et l'exploitation théorique et numérique des conditions d'optimalité lorsque l'équation aux dérivées partielles utilisée est celle de Stokes ou de Navier-Stokes, pour des raisons évidentes.

I.1) Sur l'optimisation de la forme de l'arbre bronchique

Les travaux réalisés au cours de ma thèse sont résumés dans la première partie de la section I.1.3). Ces travaux reposent sur le postulat biologique que la forme actuelle de l'arbre bronchique résulte, en un certain sens d'une optimisation, par exemple via un processus de sélection naturelle rendant cet organe le mieux adapté à son milieu.

L'idée est alors la suivante :

(i) On imagine un critère que la nature pourrait chercher à optimiser, susceptible d'expliquer la forme actuelle de l'arbre bronchique ;

(ii) Deux pistes sont alors développées :

(a) On postule que ce critère est le bon et que la solution du problème d'optimisation de forme résultant sera très proche de la forme de l'arbre bronchique, et dans ce cas, on cherche à établir des propriétés qualitatives de l'arbre bronchique.

(b) On cherche à tester la validité d'un tel critère et on résout numériquement le problème d'optimisation de forme associé afin de comparer la forme théorique obtenue avec la forme réelle pour enfin conclure sur la pertinence du critère.

De façon plus générale, ces travaux ont pour but de développer des approches permettant de traiter théoriquement et/ou numériquement des problèmes d'optimisation de forme intervenant dans le contexte de la mécanique des fluides.

Dans la section I.1.2), un modèle très simplifié de fluide est étudié et permet une discussion sur le choix des conditions frontières, donc de la modélisation. Dans la section I.1.3), on considère un problème d'optimisation de forme pour un écoulement de Stokes ou Navier-Stokes, et on s'intéresse à la question de l'existence d'une forme optimale, à l'analyse des conditions d'optimalité et finalement à l'implémentation numérique d'un tel problème.

I.1.1) Quel modèle pour l'arbre bronchique ?

Les vitesses de l'air à l'intérieur du poumon sont très différentes selon que l'on considère l'entrée de la trachée, dont le diamètre est l'ordre de quelques centimètres carrés, ou les 2^{17} extrémités (entrées des acini). À l'entrée de la trachée, la vitesse de l'air est de l'ordre de 1 m.s^{-1} au repos, tandis qu'au niveau des acini, elle est quasi nulle. On a choisit de s'intéresser dans ces travaux aux premières générations de l'arbre bronchique. En raison de la différence d'ordres de grandeur des vitesses de l'air entre l'entrée et les extrémités de l'arbre bronchique, il n'est pas possible d'utiliser le même modèle pour toutes les générations.

Si l'on souhaite modéliser l'écoulement de l'air au sein des premières générations de l'arbre bronchique, il est nécessaire de tenir compte des effets inertiels. On utilise donc les équations de Navier-Stokes stationnaires incompressibles. Dans ce qui suit, Ω désignera l'ouvert délimité par l'arbre bronchique, $\boldsymbol{u}$ la vitesse du fluide, p la pression, μ la viscosité du fluide et ρ sa densité.

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent (formellement pour l'instant, c'est-à-dire sans préciser en quel sens elles doivent être comprises)

$$\begin{array}{ll} -\nabla\cdot\sigma(\boldsymbol{u},p)+\rho\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=0 & \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 & \boldsymbol{x}\in\Omega, \end{array} \tag{I.1}$$

où $\sigma(\boldsymbol{u},p) = -pI_3 + 2\mu\varepsilon(\boldsymbol{u})$ désigne le *tenseur des contraintes* avec $\varepsilon(\boldsymbol{u})$ et $\varepsilon(\boldsymbol{u})$ le *tenseur des déformations* de $\boldsymbol{u}$ défini par

$$\varepsilon(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^T) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)_{1\le i,j\le 3}.$$

Par ailleurs, rappelons que dans le cas du poumon $\mu \simeq 1{,}785.10^{-5}$ kg.m^{-1}.s^{-1}, $\rho \simeq 1{,}18$ kg.m^{-3}, la vitesse moyenne de l'air dans la trachée est de l'ordre de 1 m.s^{-1} et la longueur caractéristique de la trachée de quelques centimètres [1].

Pour de telles valeurs, on obtient un ordre de grandeur du nombre de Reynolds de 10^3. On peut considérer le régime d'écoulement turbulent, bien que cette qualification dépende également de la géométrie du conduit et des conditions frontières sur le fluide.

Précisons les conditions au bord sur le système de Navier-Stokes. On considérera un choix de modèle en accord avec la littérature existante en biologie et mathématiques appliquées (voir par exemple les références [BGM10, GMS08, GMM06, MFWS04, Mau04, Mau05, MMSV05, SFR02, MMSV05]).

- **Entrée du conduit, notée E :** à l'entrée, on supposera que le flux entrant est connu, en imposant un profil de Poiseuille (voir la section suivante pour des précisions). Par exemple, dans le cas de la dimension 3, un profil de Poiseuille à l'entrée d'un cylindre de rayon $R>0$ a pour expression dans un repère adapté à la section :

$$\boldsymbol{u_0}(x_1,x_2,x_3) = v_{\max}\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1-\frac{x_1^2+x_2^2}{R^2}\end{pmatrix},$$

  où $v_{\max}$ désigne la vitesse maximale du fluide à l'entrée E ;
- **Paroi latérale du conduit, notée Γ :** sur ces frontières, une hypothèse très classique en Mécanique des fluides consiste à supposer que la vitesse du fluide est nulle sur le bord du conduit (condition de non glissement) ;

1. En effet que le diamètre D de la trachée est de l'ordre de grandeur de 2 cm, et on peut considérer que sa longueur L vaut environ $L \simeq 3D$.

- **Sortie du conduit, notée S :** on impose une condition simulant des muscles qui dépenseraient exactement la même énergie pour pomper l'air dans les poumons ([MMSV05]) et s'écrivant
$$\sigma(\boldsymbol{u},p).\boldsymbol{n} = -p_0\boldsymbol{n},$$
où $\boldsymbol{n}$ désigne la normale extérieure au bord. On peut noter que dans le chapitre 5 de l'ouvrage de F. Boyer et P. Fabrie [BF06], les auteurs introduisent des conditions aux limites de la forme $\sigma(\boldsymbol{u},p) = F(\boldsymbol{u})$, et discutent du meilleur choix de la fonction F pour que ces conditions soient faiblement réfléchissantes en aval de l'écoulement, c'est-à-dire qui ne contribuent pas à augmenter l'énergie du système. Les articles [BF94], [BF96] traitent également de conditions similaires en sortie.

I.1.2) Écoulement de Poiseuille

Écoulement de Poiseuille. On considère un fluide visqueux incompressible dont la vitesse est supposée faible. Son écoulement dans un cylindre est dit de Poiseuille lorsque le profil des vitesses est parabolique, selon l'axe (Ox_3) du cylindre.

Cette loi est dérivée de Navier-Stokes à partir du constat suivant : si la viscosité μ du fluide est suffisamment grande et si Ω désigne un cylindre de rayon R et longueur L d'équation cartésienne $\left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2 \text{ et } 0 \leq x_3 \leq L\right\}$, alors l'unique solution régulière $(\boldsymbol{u},p)$ du système de Navier-Stokes où la pression à l'entrée (resp. la sortie) du cylindre vaut p_0 (resp. p_1) et la vitesse est nulle sur la paroi latérale est donnée par

$$\boldsymbol{u}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{p_1-p_0}{4\mu L}(x_1^2+x_2^2-R^2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p(x_1,x_2,x_3) = \frac{p_1-p_0}{L}x_3 + p_0,$$

pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

La relation dite de Poiseuille découle directement de l'expression de la solution ci-dessus. Cette relation lie le flux le long d'une section du cylindre à la différence de pression $p_1 - p_0$. Ainsi, le flux Φ le long d'une section est donné par

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^R \left[\frac{p_1-p_0}{4\mu L}(r^2-R^2)\right] r\,dr\,d\theta = -\frac{(p_1-p_0)\pi R^4}{8\mu L}.$$

La relation de Poiseuille s'écrit alors :

$$\boxed{p_0 - p_1 = \frac{8\mu L}{\pi R^4}\Phi.}$$

On appelle résistance de la branche (cylindrique), le terme $r = \frac{8\mu L}{\pi R^4}$.

Décrivons à présent l'étude du modèle simplifié d'arbre optimal réalisée dans [dLSMP11]. En conservant les notations précédentes, on considère un fluide régi par la loi d'écoulement de Poiseuille circulant dans un arbre dyadique (une branche mère donne naissance à deux branches filles) de $N+1$ générations, avec $N \in \mathbb{N}^*$. On parlera de nouvelle génération dans cet arbre lorsqu'une bifurcation est créée. La branche souche est appelée génération 1 et par conséquent, un arbre de $N+1$ générations possède 2^N sorties et $2^{N+1}-1$ branches. On introduit les notations suivantes afin de décrire l'écoulement et la géométrie de l'arbre dyadique :

- on appelle $\Phi > 0$ le flux à l'entrée de l'arbre. Le fluide étant incompressible, le flux est conservé à travers une branche et aux bifurcations.
- l'ensemble $\mathcal{B}_{N,i}$ des couples d'indices permettant de numéroter les sorties de la $i+1$-ème génération ($i \in [\![1,N]\!]$), donné par
$$\mathcal{B}_{N,i} = \left\{(i,j) \mid j \in [\![1,2^i]\!]\right\}. \tag{I.2}$$
Ici, j est la position de la sortie à la génération $i+1$. Ainsi, l'ensemble de tous les indices est $\mathcal{B}_N = \bigcup_{i\in[\![1,N]\!]} \mathcal{B}_{N,i}$.

- la branche souche est décrite par son rayon $R_0 > 0$, sa longueur $L_0 > 0$, la pression $p_0 > 0$ à l'entrée de l'arbre et la pression $p_1 > 0$ à la sortie de cette branche. Ainsi, la résistance hydrodynamique [2] de cette branche est $r_0 = \frac{8\mu L_0}{\pi R_0^4}$.
- la branche localisée en $(i,j) \in \mathcal{B}_N$ est décrite par son rayon $R_{i,j} > 0$, sa longueur $L_{i,j} > 0$, de sorte que sa résistance hydrodynamique est $r_{i,j} = \frac{8\mu L_{i,j}}{\pi R_{i,j}^4}$. On appelle respectivement $q_{i,j}$ et $p_{i,j} > 0$ le flux dans la branche (i,j) et à la sortie de la branche (i,j).
- la géométrie de l'arbre (très simplement décrite à l'aide du rayon et de la longueur de chaque branche) est définie à l'aide des facteurs de réduction des résistances hydrodynamiques $x_{i+1,2j}$ et $x_{i+1,2j+1}$ représentant les changements de géométrie entre les générations $i+1$ et $i+2$ et définis par

$$\begin{aligned} x_{i+1,2j-1} &= \frac{r_{i,j}}{r_{i+1,2j-1}} = \frac{L_{i,j}}{L_{i+1,2j-1}} \left(\frac{R_{i+1,2j-1}}{R_{i,j}} \right)^4 \\ \text{et } x_{i+1,2j} &= \frac{r_{i,j}}{r_{i+1,2j}} = \frac{L_{i,j}}{L_{i+1,2j}} \left(\frac{R_{i+1,2j}}{R_{i,j}} \right)^4. \end{aligned}$$

  Par commodité, on supposera que la longueur et le rayon de chaque branche ont un facteur de réduction identique, si bien que

$$x_{i+1,2j-1} = \left(\frac{R_{i+1,2j-1}}{R_{i,j}} \right)^3 \text{ and } x_{i+1,2j} = \left(\frac{R_{i+1,2j}}{R_{i,j}} \right)^3. \tag{I.3}$$

- Le chemin $\Pi_{0\to(i,j)}$ (avec $(i,j) \in \mathcal{B}_N$) représentant l'ensemble des couples d'indices des i branches par lesquelles le fluide passe pour joindre la branche souche à la branche d'indice (i,j) de l'arbre.
- Pour $(i,j) \in \mathcal{B}_N$, $s \in [\![0,i]\!]$ et un chemin $\Pi_{0\to(i,j)}$, on introduit le sous-chemin $\Pi_{0\to(i,j)}(s)$ comme l'ensemble des couples d'indices des m branches utiles pour joindre la branche souche à la branche d'indice s en suivant le chemin $\Pi_{0\to(i,j)}$.

Un exemple d'arbre dichotomique est représenté sur la figure I.1 dans le cas particulier $N = 2$.

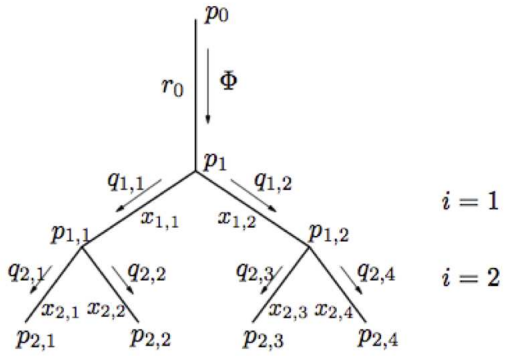


FIGURE I.1 : *Un exemple d'arbre dyadique à trois générations ($N = 2$).*

Pour écrire le problème d'optimisation, il est plus commode de ne pas décrire la géométrie de l'arbre à l'aide des variables $\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathcal{B}_N}$, mais de façon équivalente à l'aide des variables $\xi_{i,j}$ définies par

$$\forall (i,j) \in \mathcal{B}_N,\ \xi_{i,j} = \prod_{(k,l)\in\Pi_{0\to(i,j)}} x_{k,l}.$$

2. Notons que d'après la loi de Poiseuille, $p_0 - p_1 = r_0\Phi$.

Par exemple, on peut montrer que le volume total de l'arbre, obtenu en sommant le volume de chaque branche est donné par

$$\text{Volume} = \pi R_0^2 L_0 \left(1 + \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}_N} \xi_{i,j}\right).$$

Nous sommes à présent en mesure de formuler le problème d'optimisation que l'on souhaite résoudre.

Précisons l'ensemble des contraintes. Il est raisonnable de supposer que les rayons et longueurs décroissent au long des générations, ce qui s'écrit

$$\forall (i,j) \in \bigcup_{i\in[\![1,N-1]\!]} \mathcal{B}_{N,i},\ \max(\xi_{i+1,2j-1},\xi_{i+1,2j}) \leq \xi_{i,j}. \tag{I.4}$$

On se donne le volume V de l'arbre, ce qui s'écrit

$$1 + \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}_N} \xi_{i,j} = \Lambda \tag{I.5}$$

avec $\Lambda = \frac{V}{\pi R_0^2 L_0} > 1$.

L'ensemble des géométries admissibles est alors

$$\mathcal{A}_\Lambda = \left\{ \boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}_+^*)^{(2^{N+1}-2)\times 1} \mid \boldsymbol{\xi} \text{ vérifie les conditions (I.4) et (I.5)} \right\}. \tag{I.6}$$

Afin de préciser le critère que l'on souhaite minimiser, il est nécessaire de décrire matriciellement l'écoulement du fluide. À cette fin, définissons

- le vecteur $\boldsymbol{p}$ des pressions à la sortie de l'arbre, *i.e.*

$$\boldsymbol{p} = (p_{N,j})_{j\in[\![1,2^N]\!]}^\top \in (\mathbb{R}_+^*)^{2^N\times 1},$$

- le vecteur $\boldsymbol{q}$ des flux aux sorties de l'arbre, tree, *i.e.*

$$\boldsymbol{q} = (q_{N,j})_{j\in[\![1,2^N]\!]}^\top \in \mathbb{R}^{2^N\times 1},$$

- le vecteur $\boldsymbol{\xi}$ décrivant la géométrie de l'arbre, *i.e.*

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_{1,1},\xi_{1,2},\dots,\xi_{N,1},\dots,\xi_{N,2^N})^\top \in (\mathbb{R}_+^*)^{(2^{N+1}-2)\times 1}.$$

On peut alors montrer le résultat technique suivant.

Proposition. *[dLSMP11, Proposition 1] Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a*

$$p_0 \boldsymbol{u_N} - \boldsymbol{p} = A_N(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{q}, \tag{I.7}$$

où

- *on a noté $\boldsymbol{u_N} = (1,\dots,1)^\top \in \mathbb{R}^{2^N\times 1}$;*
- *la matrice symétrique (et inversible) $A_N(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^{2^N\times 2^N}$ est appelée matrice de résistance de l'arbre et est définie par*

$$A_N(\boldsymbol{\xi}) = (a_{i,j}^N)_{1\leq i,j\leq 2^N},\ a_{i,j}^N = \begin{cases} r_0 + \displaystyle\sum_{(k,l)\in\Pi_{0\to(N,i)}(N-\nu_{i-1,j-1})} \frac{r_0}{\xi_{k,l}} & \text{si } \nu_{i-1,j-1} > 0 \\ r_0 & \text{si } \nu_{i-1,j-1} = 0 \end{cases} \tag{I.8}$$

avec

$$\nu_{i,j} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \alpha_l = \beta_l, \forall l \geq k\},$$

entier défini à partir des expressions de i et j en numération binaire, soit

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k 2^k,\ j = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k 2^k \text{ with } (\alpha_k,\beta_k) \in \{0,1\}^2,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Le critère que l'on souhaite minimiser est l'énergie dissipée par le fluide définie par

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{q},\xi) = \boldsymbol{q}^\top A_N(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{q} \tag{I.9}$$

La dernière étape permettant d'écrire explicitement le problème d'optimisation consiste à définir les conditions frontières (à l'entrée et la sortie de l'arbre) que l'on souhaite imposer. En s'inspirant du modèle décrit dans la section I.1.1), on choisit d'imposer le flux Φ à l'entrée de l'arbre et le vecteur de pression $\boldsymbol{p}$ à la sortie de l'arbre. On peut alors montrer que le problème direct est bien posé.

Proposition. *[dLSMP11, Proposition 3] Soit $\boldsymbol{p} \in (\mathbb{R}_+^*)^{2^N\times 1}$ (on suppose connues les pressions aux sorties de l'arbre) et $\Phi > 0$ (le flux dans la branche souche est supposé connu). Alors, le vecteur $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{2^N\times 1}$ des flux à la sortie de l'arbre est l'unique solution du système linéaire*

$$M_N(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b_N} \tag{I.10}$$

où

$$M_N(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} (A_N(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{v_1})^\top \\ \vdots \\ (A_N(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{v_{2^N-1}})^\top \\ \boldsymbol{u_N}^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2^N\times 2^N},\ \boldsymbol{b_N} = \begin{pmatrix} -\langle \boldsymbol{p},\boldsymbol{v_1}\rangle \\ \vdots \\ -\langle \boldsymbol{p},\boldsymbol{v_{2^N-1}}\rangle \\ \Phi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2^N\times 1} \tag{I.11}$$

et pour tout $i \in [\![1,2^N-1]\!]$, $\boldsymbol{v_i} = (0,\dots,0,1,-1,0,\dots,0)^\top \in \mathbb{R}^{2^N\times 1}$, avec 1 à la i-ème position et -1 à la $(i+1)$-ème position.

Le problème d'optimisation de forme simplifié consiste à rechercher la géométrie de l'arbre minimisant l'énergie dissipée par le fluide dans la classe $\mathcal{A}_\Lambda$ définie par (I.6). Il s'écrit :

$$\inf_{(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi})\in\mathcal{U}_\Lambda} \mathcal{E}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}). \tag{I.12}$$

avec

$$\mathcal{U}_\Lambda = \left\{(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}) \mid \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{A}_\Lambda \text{ et } \boldsymbol{q} = (M_N(\boldsymbol{\xi}))^{-1}\boldsymbol{b_N}\right\}.$$

Les théorèmes qui suivent prouvent que, génériquement par rapport au choix de la donnée $\boldsymbol{p}$, ce problème n'admet pas de solution.

Théorème. *[dLSMP11, Theorem 2] Le problème (I.12) a une solution si, et seulement s'il existe $\pi^* \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\boldsymbol{p} = \pi^*\boldsymbol{u_N},$$

avec $\boldsymbol{u_N} = (1,\dots,1)^T \in \mathbb{R}^{2^N\times 1}$. De plus,

$$\inf_{(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi})\in\mathcal{U}_\Lambda} \mathcal{E}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\xi}) = r_0\Phi^2\left(1+\frac{N^2}{\Lambda-1}\right).$$

De plus, dans le cas où deux coordonnées de $\boldsymbol{p}$ diffèrent, la suite $(\boldsymbol{\xi}^p,\boldsymbol{q}^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\begin{cases} \xi^p_{i,j} = \frac{\Lambda-1}{N} - \left(\frac{2^{N+1}-2}{N}-1\right)\frac{1}{p} & \forall (i,j) \in \Pi_{0\to(N,1)}, \\ \xi^p_{i,j} = \frac{1}{p} & \forall (i,j) \in \mathcal{B}_N\backslash\Pi_{0\to(N,1)}, \\ \boldsymbol{q}^p = M_N(\boldsymbol{\xi}^p)^{-1}\boldsymbol{b_N}, \end{cases} \tag{I.13}$$

est minimisante pour le problème (I.12). De plus, la suite $(\boldsymbol{q}^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $(\Phi,0,\dots,0)^\top$.

Ce résultat montre que la solution optimale a tendance à fermer toutes les branches de l'arbre sauf une pour vouloir devenir un tuyau. Ce ne serait pas le cas par exemple si l'on avait considéré une condition de flux à la sortie. Pour modéliser l'arbre bronchique à l'aide de cette approche, il serait probablement nécessaire d'enrichir le modèle à l'aide d'une autre contrainte tenant compte du fait que l'oxygène doit être diffusé de la façon la plus homogène possible par toutes les extrémités de l'arbre.

I.1.3) Écoulement de Stokes ou Navier-Stokes stationnaire

Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus en collaboration avec Antoine Henrot (École des Mines de Nancy) au cours de ma thèse. Ils visaient à essayer de comprendre en adoptant la démarche décrite au début de la section I.1) pourquoi la forme de la trachée chez les être vivants n'est pas un cylindre.

On se place dans un repère orthonormé et on introduit :

- la surface E d'équation cartésienne $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 \text{ et } x_3 = 0\}$;
- la surface S d'équation cartésienne $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 \text{ et } x_3 = L\}$.
- Π_0, le plan d'équation $x_3 = 0$;
- Π_L, le plan d'équation $x_3 = L$.

Soit Ω, un domaine de bord Lipschitz dont la frontière contient E et S, tel que

$$\Pi_0 \cap \overline{\Omega} = E, \qquad \text{et} \qquad \Pi_L \cap \overline{\Omega} = S. \tag{I.14}$$

On notera Γ, la frontière latérale de Ω définie par $\Gamma = \partial\Omega \backslash (E \cup S)$.

On désigne par $\boldsymbol{u} = (u_1,u_2,u_3)$, le champ des vitesses et par p, la pression. L'écoulement est modélisé par le système d'équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} -\mu\triangle\boldsymbol{u} + \nabla p + \nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = 0 & \boldsymbol{x} \in \Omega,\ i \in \{1,2,3\} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_0} & \boldsymbol{x} \in E \\ \boldsymbol{u} = 0 & \boldsymbol{x} \in \Gamma \\ \sigma(\boldsymbol{u},p)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{h} & \boldsymbol{x} \in S, \end{cases} \tag{I.15}$$

où $\boldsymbol{h} = (h_1,h_2,h_3)$ et $\boldsymbol{u}_0$ sont choisis de sorte que le fluide soit soumis à une loi de Poiseuille (profil de vitesse parabolique) lorsque le domaine Ω est un cylindre, autrement dit

$$\boldsymbol{h} = \left(\frac{p_1 - p_0}{2L}x_1, \frac{p_1 - p_0}{2L}x_2, -p_1\right) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{u_0} = \left(0,0,\frac{p_1 - p_0}{4\mu L}(x_1^2 + x_2^2 - R^2)\right).$$

Physiquement, il convient de choisir dans ce modèle $p_1 < p_0$. Posons $c = \frac{p_1 - p_0}{4\mu L}$.

Notons que l'on a un classique résultat d'existence et d'unicité d'une solution $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$ pour le problème (I.15) écrit sous forme variationnelle, sous réserve que la viscosité μ soit suffisamment grande (d'après [BF06, Tem01]).

On cherche à minimiser par rapport au domaine l'*énergie de viscosité* $J(\Omega)$ du fluide, définie par

$$J(\Omega) = 2\mu \int_\Omega |\varepsilon(\boldsymbol{u})|^2\, dx, \tag{I.16}$$

où $\boldsymbol{u}$ désigne la solution du système de Navier-Stokes (I.15) et $|\varepsilon(\boldsymbol{u})|^2$ le double produit contracté de $\varepsilon(\boldsymbol{u})$ par lui-même, soit

$$|\varepsilon(\boldsymbol{u})|^2 = \varepsilon(\boldsymbol{u}) : \varepsilon(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2.$$

On définit l'ensemble des domaines admissibles par

$$\mathcal{O}_{\text{ad}} = \left\{\Omega \text{ ouvert simpl. connexe Lipschitz de } \mathbb{R}^3 \mid \text{mes } (\Omega) = \pi R^2 L \text{ et } \partial\Omega \text{ vérifie (I.14)}\right\}.$$

On s'intéresse au problème d'optimisation de forme :

$$\inf_{\Omega\in\mathcal{O}_{\text{ad}}} J(\Omega). \tag{I.17}$$

La question de l'existence de solutions pour un tel problème est ardue. On peut néanmoins donner un résultat partiel en recherchant les solution parmi les domaines Ω de $\mathcal{O}_{\text{ad}}$ vérifiant une propriété de cône uniforme[3]. La figure I.2 illustre cette propriété.

3. Rappelons ce que l'on entend par propriété de ε-cône. Soit $\boldsymbol{y}$, un point de $\mathbb{R}^N$, ξ, un vecteur unitaire

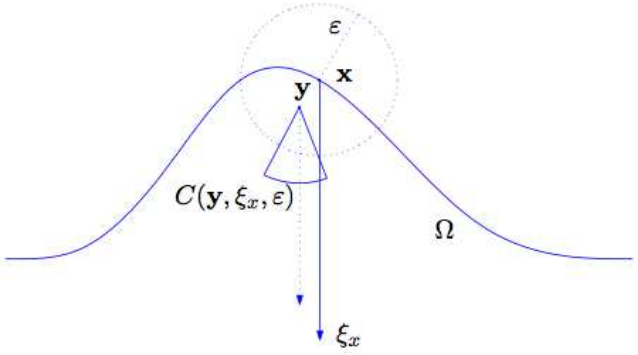


FIGURE I.2 : *Illustration de la propriété de ε-cône*

Ainsi, on introduit la sous-classe $\mathcal{O}_{\mathrm{ad},\varepsilon}$ de $\mathcal{O}_{\mathrm{ad}}$ définie par

$$\mathcal{O}_{\mathrm{ad},\varepsilon} = \{\Omega \in \mathcal{O}_{\mathrm{ad}} \text{ tel que } \Omega \text{ vérifie la propriété du } \varepsilon\text{-cône.}\}\,.$$

On peut montrer en particulier que la classe $\mathcal{O}_{\mathrm{ad},\varepsilon}$ est fermée pour la topologie associée à la convergence de Hausdorff ([HP10, Lemma 1]). Elle possède de plus de bonnes propriétés de compacité (voir par exemple [Che75, HP05, BB02]). On peut alors montrer le résultat d'existence suivant.

Théorème. *[HP10, Theorem 2] Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\mu_0 > 0$ tel que si $\mu > \mu_0$, alors, le problème d'optimisation*

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{O}_{\mathrm{ad},\varepsilon}} J(\Omega).$$

possède une solution.

Le résultat qui suit est un peu surprenant. Il est naturel de s'attendre à ce que le cylindre soit solution du problème (I.17). Pourtant, ça n'est pas le cas et des simulations ont permis d'exhiber un domaine admissible dont l'énergie dissipée est plus basse que celle du cylindre.

Théorème. *[HP10, Theorem 4] Le cylindre n'est pas solution du problème* (I.17).

La preuve de ce théorème repose sur une étude très fine des conditions d'optimalité de ce problème, et en particulier sur l'analyse de l'état adjoint associé s'écrivant comme une équation de Navier-Stokes linéarisée.

Remarque 1. Avec Maïtine Bergounioux (univ. Orléans), nous avons considéré dans [BP13] un problème d'optimisation de forme simplifié pour le système de Stokes. On recherche ainsi des formes axisymétriques et décrites par le graphe d'une fonction $a(\cdot)$ en coordonnées cylindriques. Plus précisément, nous nous sommes placés dans le cas où l'ensemble des formes admissibles s'écrit

$$\mathcal{O}^p_{\mathrm{cyl}} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z), \exists a \in \mathcal{U}_p, 0 \leq r < a(z), \theta \in \mathbb{S}^1,\ 0 < z < L\},$$

---

et ε, un réel strictement positif donné.

(i) On appelle **cône épointé de sommet $\boldsymbol{y}$, de direction ξ et de dimension** ε, le cône noté $C(\boldsymbol{y},\xi,\varepsilon)$ privé de son sommet, défini par :

$$C(\boldsymbol{y},\xi,\varepsilon) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^N : \langle \boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}, \xi\rangle_{\mathbb{R}^N} \geq \cos\varepsilon \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^N} \text{ et } 0 < \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^N} < \varepsilon\},$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^N}$ désigne le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^N$ et $\|.\|_{\mathbb{R}^N}$, la norme induite par ce produit scalaire.

(ii) On dit qu'un ouvert Ω a la propriété du ε-cône si pour tout élément $\boldsymbol{x} \in \Omega$, il existe ξ_x, un vecteur unitaire tel que :

$$\forall \boldsymbol{y} \in \overline{\Omega} \cap \mathcal{B}_o(\boldsymbol{x},\varepsilon),\ C(\boldsymbol{y},\xi,\varepsilon) \subset \Omega,$$

$\mathcal{B}_o(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ désignant bien sûr la boule ouverte (pour la norme euclidienne) de centre $\boldsymbol{x}$ et de rayon ε.

avec

$$\mathcal{U}_p = \{a \in \mathcal{A}_p \mid \|a'\|_{L^p} \leq M, h_0(a(0)) = h_L(a(L)) = 0\}, \tag{I.18}$$

$$\text{et } \mathcal{A}_p = \left\{a \in W^{1,p}(0,L) \mid a_0 \leq a(z) \leq a_1 \text{ p.p. } z \in (0,L)\right\}, \tag{I.19}$$

où h_0 et h_L sont choisies pour être compatibles avec la contrainte ponctuelle satisfaite par tout élément de $\mathcal{A}_p$. Nous avons obtenu un résultat d'existence de forme optimale pour l'énergie dissipée pour tout $p \geq 2$. Nous avons également réalisé une étude qualitative de l'optimum pour certains choix de paramètres et étendu le résultat de non-optimalité du cylindre à ce cadre.

Pour finir, je mentionne des problèmes ouverts intéressants mais probablement très difficiles dans la continuité de ces travaux :

(i) Existence de solutions pour le problème (I.17). Dans le cas où l'on considère le problème de Stokes et l'énergie, il est possible d'utiliser le fait que l'énergie dissipée s'écrit comme le minimum d'une fonctionnelle d'énergie. En effet, on a

$$J(\Omega) = 2\mu \inf_{\substack{\mathbf{u}\in[H^1(\Omega)]^3,\ \nabla\cdot\mathbf{u}=0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u_0} \text{ sur } E \\ \mathbf{u}=0 \text{ sur } \Sigma}} \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 \, dx.$$

Cela permet d'obtenir un résultat d'existence pour ce problème, mais parmi des ensembles potentiellement très peu réguliers (des quasi-ouverts). L'étude de la régularité des solutions de ce problème est alors naturelle, mais probablement très ardue. Notons que cette approche n'est plus possible lorsque l'on considère le système de Navier-Stokes, en raison de la présence du terme non-linéaire.

(ii) Symétrie des solutions. Il serait intéressant de réfléchir à des techniques de symétrisation pour des champs de vecteurs à divergence nulle. L'équation de divergence n'est pas préservée par symétrisation, et les techniques de réarrangement apparaissent difficiles à mettre en œuvre.

La figure I.3 constitue une illustration en dimension 3 des problèmes présentés dans cette section. On cherche à résoudre le même problème lorsque l'entrée du fluide est un disque et que la sortie est l'union de deux disques. On s'attend à obtenir des structures arborescentes proches des premières générations de l'arbre bronchique. Ces simulations ont été réalisées avec Benjamin Mauroy (CNRS).

I.2) Design optimal pour les échangeurs de chaleur

Cette section est dédiée à la présentation d'une série de travaux en cours, en collaboration avec Gilles Marck (univ. Paris 6) et Grégoire Nadin (CNRS). La problématique a été apportée par Gilles Marck, physicien de formation, dont la thèse a été consacrée à des problèmes d'optimisation de forme de parcours fluides le long desquels se produisent des échanges conducto-convectifs. Nous cherchons à proposer un cadre mathématique rigoureux et à analyser les problèmes inhérents, à la fois théoriquement et numériquement.

De façon non orthodoxe et avant de détailler le contenu de nos premières contributions, je présente de prime abord le problème auquel nous souhaitons nous atteler dans les mois et années à venir. Il constitue la finalité de cette série de travaux.

Le problème général. L'optimisation topologique de systèmes sujets à un écoulement fluide présente un potentiel important pour la conception de structures optimales et innovantes. Soit Ω, un ouvert connexe, borné en dimension 2 ou 3, de classe C^1. On appelle ω le domaine occupé par le fluide, de sorte que $\Omega\backslash\omega$ représente le domaine occupé par le solide. On désigne par $\boldsymbol{u}$ la vitesse du fluide, par p sa pression, et par T la température à l'intérieur du fluide. Le triplet $(\boldsymbol{u},p,T)$ est

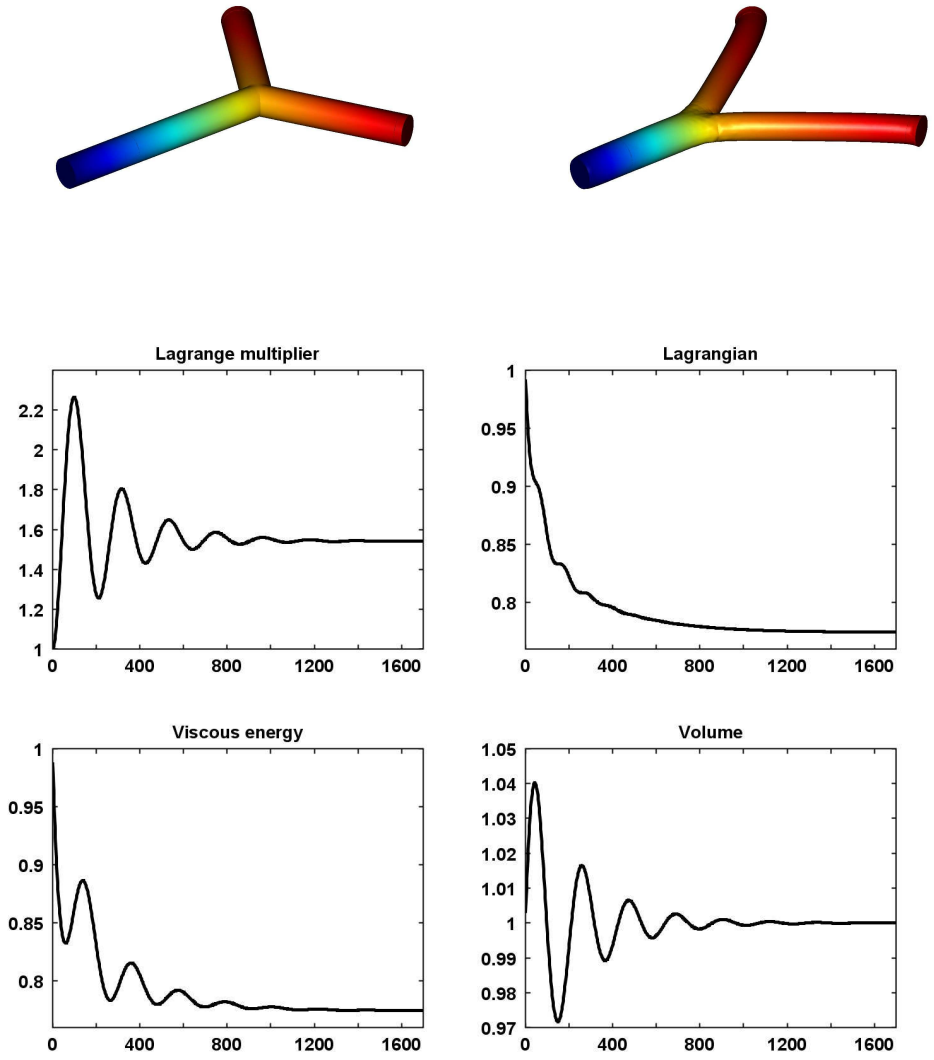


FIGURE I.3 : *En haut : forme initiale (à gauche) et finale (à droite) ; en bas : courbes de convergence*

solution du système d'équations couplées

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{dans } \Omega \tag{I.20}$$

$$\rho(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \alpha(\chi_\omega)\boldsymbol{u} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} \qquad \text{dans } \Omega \tag{I.21}$$

$$\rho C_p(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)T = \nabla \cdot (k(\chi_\omega)\nabla T) \qquad \text{dans } \Omega \tag{I.22}$$

où χ_ω représente la fonction caractéristique de ω.

Le terme additionnel $\alpha \boldsymbol{u}$ de l'éq. (I.21) s'inspire de la modélisation des écoulements en milieu poreux et simule les domaines solides quand $\alpha(0) \to +\infty$ ou fluides quand $\alpha(1) \to 0$ (voir par exemple [ABF99, Evg05]). De même, la conductivité thermique k est fonction de χ_ω et varie entre k_f et k_s. On s'intéresse au problème consistant à déterminer la meilleure répartition de ω dans Ω en vue d'obtenir le "meilleur" transfert de chaleur possible à l'aide du fluide, entre une entrée et une sortie de la géométrie Ω. Il est alors naturel de considérer le problème multi-objectif suivant :

$$\inf_{\chi_\omega \in \mathcal{A}_{\overline{\varphi}}} J(\chi_\omega)$$

où l'ensemble $\mathcal{A}_{\overline{\varphi}}$ des domaines admissibles est défini par

$$\mathcal{A}_{\overline{\varphi}} = \{\chi_\omega \in L^\infty(\Omega,\{0,1\}),\ |\omega| = \overline{\varphi}|\Omega|\},$$

avec $\overline{\varphi}$, un paramètre réel entre 0 et 1, et J désigne une combinaison convexe des fonctions J_d et J_e définies par

$$J_d(\chi_\omega) = \int_{\partial\Omega} -\left(P + \frac{1}{2}\rho\,|\boldsymbol{u}|^2\right)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} \tag{I.23}$$

$$J_e(\chi_\omega) = \int_{\partial\Omega} -(\rho\,C_p\,T)\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} \tag{I.24}$$

La fonction J_d est relative à la minimisation de l'énergie mécanique dissipée par l'écoulement, tandis que J_e traduit la maximisation de l'énergie thermique qui lui est transférée.

Nous étudions actuellement une formulation homogénéisée de ce problème, à la fois d'un point de vue théorique et numérique. Des premières pistes seront fournies dans la section I.2.2).

En raison de l'évidente complexité de ce problème, nous avons choisi d'utiliser de prime abord un modèle simplifié, mais d'intérêt physique certain en nous intéressant à la question de la forme optimale d'une ailette.

I.2.1) La forme optimale des ailettes

Une ailette est un dispositif thermique solide visant à accroître la surface de contact avec un fluide extérieur dans le but d'augmenter les échanges convectifs, et donc les transferts de chaleur.

L'ailette est généralement en contact avec le corps chaud et le flux de chaleur s'y propage par conduction. Elle est ensuite refroidie par convection par le fluide environnant. Les ailettes sont largement utilisées pour refroidir les composants électroniques tels que les microprocesseurs ou dans les échangeurs thermiques des dispositifs embarqués (avionique ou automobile par exemple).

Dans notre étude, nous avons considéré une ailette Ω_a à symétrie cylindrique, de longueur $\ell > 0$ et rayon $a(x)$ à l'abscisse x (voir figure I.4), définie dans un système de coordonnées approprié par

$$\Omega_a = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, x) \mid r \in [0,a(x)),\ \theta \in \mathbb{S}^1,\ x \in (0,\ell)\}.$$

Les hypothèses suivantes sur le rayon $a(\cdot)$ rendent le modèle de conduction thermique cohérent :

- (H_1) $a \in W^{1,\infty}(0,\ell)$ de sorte que l'élément de surface est défini presque partout ;
- (H_2) il existe $a_0 > 0$ tel que $a(x) \geq a_0$ pour tout $x \in [0,\ell]$ afin d'empêcher un phénomène singulier.

On introduit la fonction positive $h(\cdot)$ (resp. le nombre réel $h_r > 0$), le coefficient de convection modélisant les échanges de chaleur entre la surface de l'ailette et le fluide (resp. l'extrémité de l'ailette et le fluide). On appelle $k > 0$, la conductivité thermique de l'ailette.

Nous renvoyons à [BILD11, WWWR10] pour la dérivation du modèle physique de conduction que nous introduisons à présent.

Nous nous plaçons dans un régime d'écoulement et de conduction stationnaire. La température T le long de l'ailette vérifie alors l'équation différentielle

$$\begin{aligned} &(a^2(x)T'(x))' = \beta(x)a(x)\sqrt{1+a'(x)^2}(T(x)-T_\infty) \quad x \in (0,\ell)\\ &T(0) = T_d\\ &T'(\ell) = -\beta_r(T(\ell)-T_\infty), \end{aligned} \tag{I.25}$$

où T_d est la température à l'entrée de l'ailette, T_∞ est la température du fluide telles que $T_d > T_\infty$ (l'ailette est utilisée pour refroidir le solide), $\beta(\cdot) = 2h(\cdot)/k$ et $\beta_r = h_r/k$. De plus, il est physiquement pertinent de supposer que β est continue et qu'il existe $\beta_0 > 0$ tel que

$$\beta(x) \geq \beta_0 > 0 \tag{I.26}$$

pour tout $x \in [0,\ell]$ de sorte que la surface de l'ailette n'est pas thermiquement isolée.

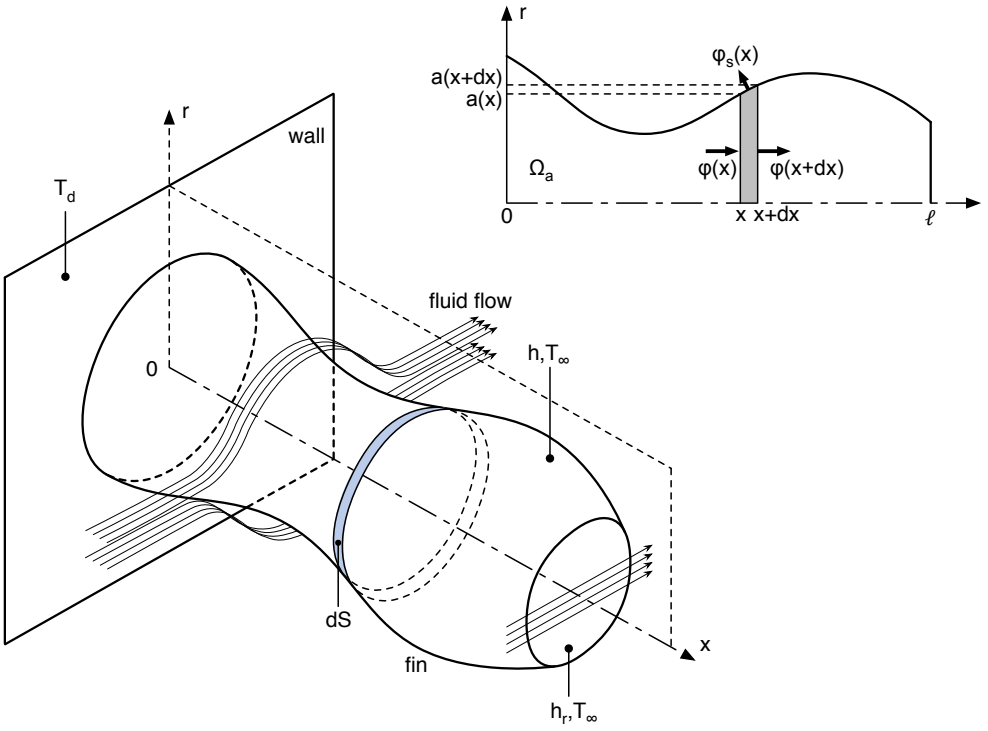


FIGURE I.4 : *Schéma d'une ailette axisymétrique*

On peut alors facilement se convaincre que si la fonction $a(\cdot)$ satisfait les hypothèses (H_1) et (H_2), l'équation (I.25) possède une solution unique, qui est de surcroît strictement décroissante et telle que

$$T_\infty \leq T(x) \leq T_d$$

pour tout $x \in [0,\ell]$.

Formulons à présent les problèmes d'optimisation que l'on souhaite résoudre. Il est pertinent de chercher à maximiser le flux de chaleur à l'entrée de l'ailette, défini par

$$F(a) = -k\pi a(0)^2 T'(0), \tag{I.27}$$

où $T(\cdot)$ désigne la solution de (I.25).

Il est pertinent d'examiner deux types de contraintes géométriques sur l'ailette, en imposant une borne sur le volume ou la surface latérale de l'ailette.

Problème d'optimisation de la forme de l'ailette. *Soient a_0 et ℓ, deux nombres réels positifs. On se donne $V_0 > \ell a_0^2$ et $S_0 > \ell a_0$. On s'intéresse aux problèmes suivants :*

(i) ***(Contrainte de volume)***

$$\sup_{a \in \mathcal{V}_{a_0,\ell,V_0}} F(a), \tag{I.28}$$

où $\mathcal{V}_{a_0,\ell,V_0} = \left\{a \in W^{1,\infty}(0,\ell),\ a \geq a_0 \text{ p.p. dans } [0,\ell] \text{ et } \pi\,\mathrm{vol}(a) \leq \pi V_0\right\}$.

(ii) ***(Contrainte de surface latérale)***

$$\sup_{a \in \mathcal{S}_{a_0,\ell,S_0}} F(a), \tag{I.29}$$

où $\mathcal{S}_{a_0,\ell,S_0} = \left\{a \in W^{1,\infty}(0,\ell),\ a \geq a_0 \text{ p.p. dans } [0,\ell] \text{ et } 2\pi\,\mathrm{surf}(a) \leq 2\pi S_0\right\}$.

Le théorème suivant constitue le principal résultat sur ce problème.

Théorème. *[MNP, Theorems 3.2, 3.3 and 4.1] On considère a_0, β_0, ℓ, V_0 et S_0 comme ci-dessus.*

(i) On a

$$\sup_{a\in\mathcal{V}_{a_0,\ell,V_0}} F(a) = +\infty.$$

(ii) On suppose que $\beta \in C^0([0,\ell])$ vérifie (I.26) et que

$$\max_{x\in[0,\ell]} \beta(x) = \beta(0). \tag{I.30}$$

Alors, le problème (I.29) n'a pas de solution et

$$\begin{aligned}\sup_{a\in\mathcal{S}_{a_0,\ell,S_0}} \tilde{F}(a) \quad &= \quad k\pi a_0 \int_0^\ell \beta(x)(\tilde{T}-T_\infty)\,dx \\ &\quad +k\pi(S-a_0\ell)\beta(0)(T_d-T_\infty) + k\beta_r a_0^2(\tilde{T}(\ell)-T_\infty),\end{aligned}$$

où $\tilde{T}$ est l'unique solution du système (I.25) avec $a(\cdot)=a_0$. De plus, toute suite $(a_n)_{n\in I\!N}$ d'éléments de $\mathcal{S}_{a_0,\ell,S_0}$ telle que $(a_n)_{n\in I\!N}$ converge fortement dans L^∞ vers a_0 et $(a_n\sqrt{1+a_n'^2})_{n\in I\!N}$ converge au sens des mesures vers $a_0+(S-a_0\ell)\delta_0$, où δ_0 désigne la mesure de Dirac en $x=0$, est une suite maximisante pour le problème (I.29).

Un élément de la suite maximisante décrite ci-dessus est représenté sur la figure I.5.

Remarque 2. L'hypothèse (I.30) est pertinente d'un point de vue physique et s'avère essentielle pour la preuve. Des investigations numériques laissent d'ailleurs penser que le problème (I.29) pourrait admettre une solution si cette hypothèse n'est pas vérifiée.

Remarque 3. Dans le cas particulier où β est constante, on montre que

$$\sup_{a\in\mathcal{S}_{a_0,\ell,S_0}} F(a) = k\pi\beta(T_d-T_\infty)\left(\frac{a_0^{3/2}\gamma}{\sqrt{\beta}}+(S-a_0\ell)\right),$$

où γ désigne le nombre positif

$$\gamma = \frac{\sqrt{\frac{\beta}{a_0}}\sinh\left(\sqrt{\frac{\beta}{a_0}}\ell\right)+\beta_r\cosh\left(\sqrt{\frac{\beta}{a_0}}\ell\right)}{\sqrt{\frac{\beta}{a_0}}\cosh\left(\sqrt{\frac{\beta}{a_0}}\ell\right)+\beta_r\sinh\left(\sqrt{\frac{\beta}{a_0}}\ell\right)}.$$

Dans [MNP], on construit également une suite maximisante pour le problème (I.28). Cependant, les formes obtenues ne sont pas aisément manufacturables et c'est pourquoi nous avons plutôt considéré une contrainte sur la surface latérale.

L'idée de la preuve repose sur deux arguments. D'une part, nous avons étudié la continuité du critère F pour une topologie adaptée, associée à ce que nous avons appelé la τ-convergence.

Appelons $\mathcal{M}(0,\ell)$ l'espace des mesures de Radon sur $(0,\ell)$ et introduisons la classe

$$\mathcal{A}_{a_0,\ell} = \left\{a\in W^{1,\infty}(0,\ell),\ a\geq a_0 \text{ p.p. dans } (0,\ell)\right\},$$

et l'espace produit $\widehat{\mathcal{A}}_{a_0,\ell}$ défini par

$$\widehat{\mathcal{A}}_{a_0,\ell} = \left\{(a,b),\ a\in\mathcal{A}_{a_0,\ell} \text{ et } b=a\sqrt{1+a'^2}\right\}.$$

On dit qu'une suite $(a_n,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\widehat{\mathcal{A}}_{a_0,\ell}$ τ-converge vers $(a,b)\in C^0([0,\ell])\times\mathcal{M}(0,\ell)$ si

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, localement uniformément dans $(0,\ell]$;
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b au sens des mesures.

On munit $\widehat{\mathcal{A}}_{a_0,\ell}$ de la topologie associée à la τ-convergence. Alors, on a le résultat de continuité suivant sur la fonctionnelle F.

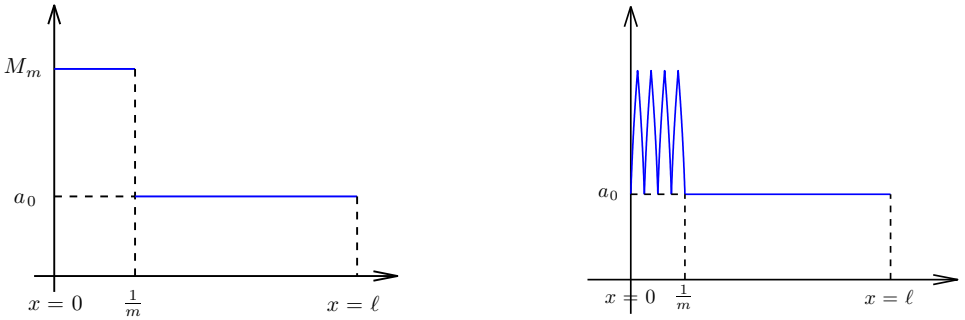


FIGURE I.5 : *Gauche : graphe de* $b_m = a_m\sqrt{1+a_m'^2}$. *Droite : graphe of* a_m.

Proposition. *Soit* $(a_n,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\widehat{\mathcal{A}}_{a_0,\ell}$ *qui* τ*-converge vers* $(a,b) \in C^0([0,\ell])\times \mathcal{M}(0,\ell)$. *Alors, la suite* $(F(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\widehat{F}(a,b)$ *défini par*

$$\widehat{F}(a,b) = k\pi\langle b,\beta(T-T_\infty)\rangle_{\mathcal{M}(0,\ell),C^0([0,\ell])} + k\pi\beta_r a(\ell)^2(T(\ell)-T_\infty), \tag{I.31}$$

où $T = \tilde{T} + T_d$, *et* $\tilde{T}$ *est l'unique solution de l'équation s'écrivant sous forme variationnelle : trouver* $\tilde{T} \in H^1(0,\ell)$ *satisfaisant* $\tilde{T}(0) = 0$ *tel que pour toute fonction test* $\varphi \in H^1(0,\ell)$ *satisfaisant* $\varphi(0) = 0$, *on a*

$$\int_0^\ell a(x)^2\tilde{T}'(x)\varphi'(x)\,dx + \langle b,\beta(\tilde{T}+T_d-T_\infty)\varphi\rangle_{\mathcal{M}(0,\ell),C^0([0,\ell])} + \beta_r a(\ell)^2(\tilde{T}(\ell)+T_d-T_\infty)\varphi(\ell) = 0. \tag{I.32}$$

L'autre argument clef ayant permis d'exploiter complètement les conditions d'optimalité a consisté à introduire et utiliser des perturbations particulières. En se donnant $a \in \mathcal{S}_{a_0,\ell,S_0}$, ces perturbations sont construites à partir de la fonction $b = a\sqrt{1+a'^2}$, d'un réel $x_0 \in (0,\ell)$ et sont définies par

$$b_\varepsilon = b + c(\chi_{[0,\varepsilon]} - \chi_{[x_0-\varepsilon/2,x_0+\varepsilon+2]}),$$

où $c > 0$ et $\varepsilon > 0$ sont choisis de sorte que $b_\varepsilon > a_0$ presque partout dans $(0,\ell)$. On peut alors démontrer l'existence d'un antécédent a_ε tel que $a_\varepsilon \in \mathcal{S}_{a_0,\ell,S_0}$, $a_\varepsilon\sqrt{1+a_\varepsilon'^2} = b_\varepsilon$ presque partout, et

$$\|a_\varepsilon - a\|_{L^\infty(0,\ell)} = \mathrm{O}(\varepsilon^2).$$

La figure I.6 illustre la construction de a_ε.

Perspectives proches. Nous envisageons plusieurs pistes pour poursuivre ces études.

Les auteurs de [BHM12] ont considéré un modèle instationnaire très simplifié en négligeant le terme de convection. Nous sommes convaincus que ce terme joue un rôle important et avons initié une étude dans laquelle celui-ci est pris en compte. L'équation aux dérivées partielles sur la température est alors

$$\begin{array}{ll}
a(x)^2\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c}\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)^2\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{h}{\rho c}a(x)\sqrt{1+a'(x)^2}(T-T_\infty) & t>0,\ x\in(0,\ell)\\
cM_0\frac{\partial T}{\partial t}(0,t) = ka(0)^2\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) & t>0\\
\frac{\partial T}{\partial x}(\ell,t) = 0 & t>0\\
T(x,0) = T_d(x) & x\in(0,\ell)
\end{array}$$

en conservant les mêmes notations que précédemment.

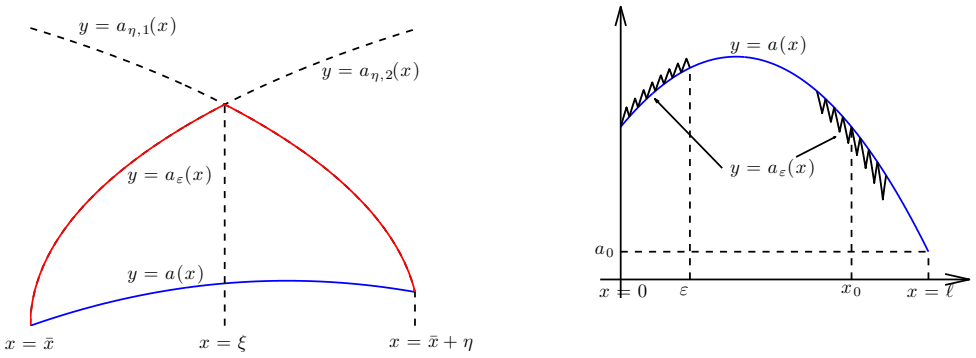


FIGURE I.6 : *Gauche : Zoom sur une oscillation de a_ε. Droite : la perturbation a_ε*

Une séparation des variables standard conduit à écrire

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x),$$

où la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ correspond aux fonctions propres associées à ce problème, solutions de

$$\begin{array}{ll} -\frac{k}{\rho c}(a(x)^2\varphi_n')' + \frac{h}{\rho c}a(x)\sqrt{1+a'(x)^2}\varphi_n = \lambda_n a(x)^2\varphi_n & t>0,\ x\in(0,\ell) \\ ka(0)^2\varphi_n'(0) + cM_0\lambda_n\varphi_n(0) = 0 & t>0 \\ \varphi_n'(\ell) = 0 & t>0 \end{array}$$

D'après le principe du min-max de Courant-Fisher, on a

$$\lambda_n(a) = \max_{\substack{E \text{ s.e.v. de } H^1(0,\ell) \\ \text{de dim n}}} \min_{\substack{\varphi\in E \\ \varphi\neq 0}} \frac{\frac{k}{\rho c}\int_0^\ell a(x)^2\varphi'(x)^2\,dx + \frac{h}{\rho c}\int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'(x)^2}\varphi(x)^2\,dx}{\int_0^\ell a(x)^2\varphi(x)^2\,dx + \frac{cM_0}{k}\varphi(0)^2}.$$

On montre alors que pour tout $x>0$,

$$T(t,x) - T_\infty = \sum_{n=1}^{+\infty}\langle T_d - T_\infty,\varphi_n\rangle_a e^{-\lambda_n(a)t}\varphi_n(x)$$

et par conséquent,

$$T(t,\cdot) - T_\infty \underset{t\to+\infty}{\sim} \langle T_d - T_\infty,\varphi_1\rangle_a e^{-\lambda_1(a)t}\varphi_1.$$

Il est alors naturel de penser que la meilleure ailette est celle pour laquelle la température de l'objet à refroidir sera le plus rapidement proche de T_∞, la température du fluide. On s'intéresse donc au problème d'optimal design

$$\sup_{a\in\mathcal{S}_{a_0,\ell,S_0}} \lambda_1(a).$$

Des premiers résultats encourageants ont été obtenus en collaboration avec Grégoire Nadin (CNRS) et cette étude devrait être achevée dans les mois à venir.

Nous envisageons également de nous pencher sur le problème général, en dimension trois d'espace. L'ailette sera alors représentée par un domaine Ω borné et simplement connexe de $\mathbb{R}^3$. Appelons Γ_i l'entrée de l'ailette, Γ_{lat} sa surface latérale et Γ_o son extrémité, de sorte que $\partial\Omega = \Gamma_i\cup\Gamma_{lat}\cup\Gamma_o$. Un modèle de température possible est donné par

$$\begin{array}{ll} \triangle T = 0 & \text{dans } \Omega \\ -k\frac{\partial T}{\partial\nu} = h(T-T_\infty) & \text{sur } \Gamma_{lat} \\ T = T_d & \text{sur } \Gamma_i \\ -k\frac{\partial T}{\partial\nu} = h_r(T-T_\infty) & \text{sur } \Gamma_o \end{array} \qquad \text{(I.33)}$$

où $\frac{\partial}{\partial \nu}$ désigne la dérivée normale extérieure sur la frontière $\partial\Omega$.

Comme précédemment, on cherchera à maximiser le flux à l'entrée de l'ailette, soit

$$F(\Omega) = -k \int_{\Gamma_i} \frac{\partial T}{\partial \nu}\, d\sigma, \tag{I.34}$$

parmi un ensemble de formes admissibles, typiquement les domaines Ω dont l'entrée Γ_i et l'extrémité Γ_o sont fixées, et dont le volume ou la surface latérale est prescrit.

Ces problèmes pourront également être abordés d'un point de vue numérique.

I.2.2) Retour à l'étude du problème général

Nous concluons ce chapitre en décrivant brièvement un travail en cours sur le problème général décrit dans l'introduction de cette section. Il s'agit d'une collaboration avec Gilles Marck (univ. Paris 6). Nous nous intéressons au problème suivant :

Soit $L \in (0,1)$ et $t \in [0,1]$. On cherche à minimiser la fonctionnelle

$$J(\chi_\omega) = tJ_d(\chi_\omega) - (1-t)J_e(\chi_\omega), \tag{I.35}$$

dans l'ensemble $\mathcal{A}_{\overline{\varphi}}$, où J_d et J_e sont définies au début de cette section.

Nous avons considéré une version simplifiée du problème, dans laquelle $\alpha(\chi_\omega) = \alpha_s(1-\chi_\omega) + \alpha_f\chi_\omega$, $k(\chi_\omega) = k_s(1-\chi_\omega) + k_f\chi_\omega$, et $q(\chi_\omega) = q_s(1-\chi_\omega) + q_f\chi_\omega$ où

- α_s (resp. α_f), est la perméabilité pseudo inverse du solide (resp. du fluide),
- k_s (resp. k_f), est la conductivité thermique du solide (resp. du fluide),
- q_s (resp. q_f), le taux de génération de chaleur du solide (resp. du fluide).

En vue d'investigations numériques, nous avons calculé la différentielle de J par rapport au domaine.

Théorème. *On suppose que la frontière de Ω est $\mathcal{C}^2$ et que μ est suffisamment grand. Alors, pour tout $\chi_\omega \in \mathcal{A}_{\overline{\varphi}}$ et tout h élément du cône des perturbations admissibles, la différentielle de J par rapport à h s'écrit*

$$\begin{aligned}\langle dJ(\chi_\omega), h\rangle = \int_\Omega h(x)\big((\alpha_f-\alpha_s)t|\boldsymbol{u}|^2 - (\alpha_f-\alpha_s)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \\ +(1-t)(k_f-k_s)\nabla w\cdot\nabla T - (1-t)(q_f-q_s)w\big)\, dx\end{aligned} \tag{I.36}$$

où $(\boldsymbol{v},q,w)$ est solution du système adjoint

$$\begin{array}{lll}
-\mu\Delta\boldsymbol{v} + \alpha(\chi_\omega)\boldsymbol{v} + \rho(\boldsymbol{v}\cdot(\nabla)^\top)\boldsymbol{u} - \rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \nabla q = -\mu t\Delta\boldsymbol{u} + t\alpha(\chi_\omega)\boldsymbol{u} & & \\
\qquad\qquad +(1-t)\rho C_p w\nabla T & \text{dans } \Omega \\
\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 & \text{dans } \Omega \\
\nabla\cdot(k(\chi_\omega)\nabla w) + \rho C_p\boldsymbol{u}\cdot\nabla w = 0 & \text{dans } \Omega \\
\boldsymbol{v} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\
w = 0 & \text{sur } \Gamma_i\cup\Gamma_\ell \\
\frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_a \\
k(\chi_\omega)\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}} + \rho C_p(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})w = \rho C_p(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}) & \text{sur } \Gamma_o.
\end{array} \tag{I.37}$$

Nous présentons à présent les premières simulations réalisées sur ce problème, en mettant en œuvre une méthode de gradient à pas variable (méthode des asymptotes mobiles).

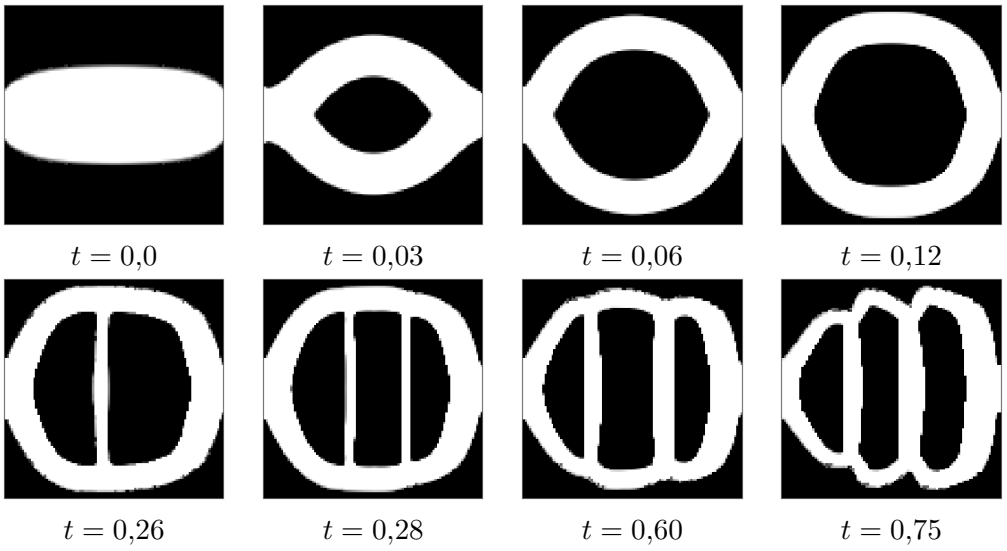


FIGURE I.7 : *Représentation des formes optimales en fonction du poids t*

Sur la figure I.8, chaque point représente un optimum pour une valeur donnée du poids t.

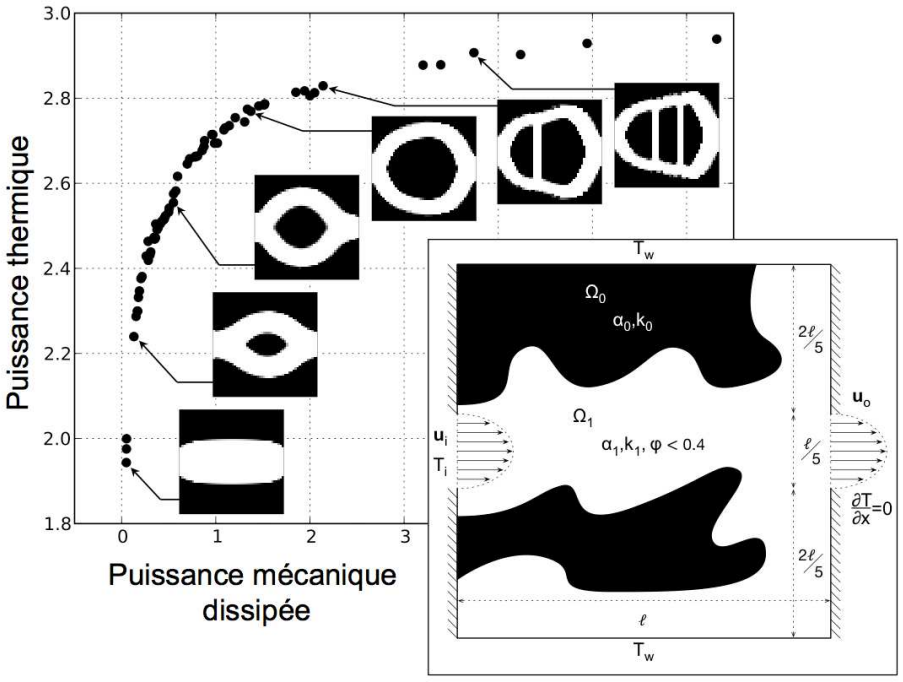


FIGURE I.8 : *Front de pareto associé au problème* (II.15)

Nous suspectons un phénomène d'homogénéisation (au moins pour de grandes valeurs de t) et réfléchissons actuellement à une approche théorique permettant de le mettre en évidence.

II.

Sur l'observabilité et la contrôlabilité optimales de systèmes physiques

Ca chapitre est consacré à la présentation d'une série de travaux réalisés en collaboration avec Emmanuel Trélat (Univ. Pierre et Marie Curie, Paris 6) et Enrique Zuazua (BCAM, Bilbao) sur l'optimisation de la forme et de la position de zones d'observation pour divers systèmes physiques.

Ayant à l'esprit des problèmes inverses pratiques dans lesquels on souhaite reconstruire des données, on considère une situation où l'on est amené à répartir des capteurs dans une cavité afin d'effectuer des mesures des signaux s'y propageant (ondes, température) sur un horizon de temps fixé.

Dans ce manuscrit, on se contentera de présenter quelques cas simples dans un souci de clarté. Les généralisations seront évoquées à la fin de ce chapitre.

Considérons donc un sous-domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ ouvert, connexe et borné, représentant par exemple la cavité dans laquelle on souhaite répartir des capteurs. Afin de conserver, au moins dans un premier temps, un nombre maximal de degrés de liberté, on supposera que l'on peut non seulement choisir la position, mais également la forme des capteurs.

Dans toute la suite, on notera ω le sous-domaine de Ω occupé par les capteurs, et on se demandera comment le déterminer afin de reconstruire "au mieux" les données initiales du système dynamique considéré. Cette formulation est pour l'instant volontairement vague afin d'expliquer le contexte de cette étude de façon qualitative. Des précisions sur le choix des critères utilisés seront apportées dans la section II.2). En quelques mots, le critère choisi est lié à la notion *d'observabilité d'une équation aux dérivées partielles*, traduisant précisément le fait qu'une mesure effectuée pendant une certaine durée T permette la reconstruction des données initiales.

Nous avons donc apporté des éléments de réponses à la question :

Quel est le domaine ω garantissant la meilleure observation du système physique considéré ?

On considèrera deux systèmes physiques dans ce manuscrit :

- ♠ l'équation des ondes

$$\partial_{tt} y(t,x) = \triangle y(t,x), \qquad (t,x) \in (0,T) \times \Omega \tag{II.1}$$

avec des conditions de Dirichlet au bord,

- ♠ l'équation de la chaleur

$$\partial_t y - \triangle y = 0, \qquad (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \tag{II.2}$$

avec des conditions de Dirichlet au bord.

II.1) Un bref état de l'art

En raison de leur pertinence dans les applications à l'ingénierie, les problèmes d'optimisation du nombre, du positionnement et de la forme de capteurs pour des systèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles ont fait l'objet d'un grand nombre d'articles. Les difficultés intrinsèques

de ce type de problèmes résident bien sûr dans la prise en compte des contraintes d'équations aux dérivées partielles, mais également du fait que les solutions (les formes) sont cherchées dans un espace de dimension infinie. Par ailleurs, il n'est en général pas aisé de trouver un cadre fonctionnel adapté, pour lequel par exemple la classe des éléments admissibles est fermée. Cela conduit en général à introduire une formulation relaxée, ce qui nécessite ensuite d'établir des liens précis entre les solutions des problèmes initial et relaxé.

De nombreux articles publiés dans des revues d'ingénierie ou de physique ne tiennent pas compte de ces aspects et s'intéressent davantage à un problème d'optimisation en dimension finie obtenu par discrétisation du problème continu. Mentionnons par exemple [AC01, EFDC08] pour les problèmes de positionnement de capteurs dans le contexte des procédés de réaction-diffusion et transport. Un inconvénient de cette approche vient du fait que certains phénomènes d'instabilité numérique peuvent survenir en substituant à la version continue une version discrète. De tels phénomènes sont intrinsèquement liés à la dimension du problème. On évoquera par exemple le phénomène de *spillover* dans la suite de ce manuscrit, illustrant cette remarque.

Dans un certain nombre d'articles, l'ensemble des formes admissibles est remplacé par un ensemble de dimension finie possédant (*de facto*) de bonnes propriétés de compacité. Typiquement, en dimension un, on peut chercher à positionner un nombre fini d'intervalles ou en dimension supérieure chercher l'optimum parmi un nombre fini de formes prédéfinies, par exemple des boules dont le rayon est fixé et dont on souhaite positionner le centre. C'est notamment le point de vue adopté dans [AD06, HMW80, Mor11, VWPPR00].

Le point de vue adopté dans l'étude présentée dans ce chapitre est tout autre : nous n'effectuons pas d'hypothèse restrictive sur la classe des formes admissibles de capteurs, puisque nous supposerons uniquement que les ensembles considérés sont Lebesgue-mesurables.

D'un point de vue mathématique, plusieurs articles ont étudié une version relaxée du problème d'optimisation de forme. Dans [MP11], les auteurs étudient une version homogénéisée d'un problème d'optimal design d'actionneurs pour l'équation de la chaleur avec une donnée initiale fixée. Dans [AMP10], les auteurs considèrent un problème similaire et étudient le comportement asymptotique des solutions lorsque le temps de contrôle T tend vers $+\infty$. Ils prouvent en particulier que les solutions du problème relaxé convergent vers la solution d'un problème d'homogénéisation à deux phases pour l'équation de la chaleur stationnaire. Mentionnons également [MP14, MZ10] où le problème de design optimal d'actionneurs à données initiales fixées est étudié d'un point de vue numérique.

Les travaux présentés dans ce manuscrit s'inscrivent dans la continuité de travaux amorcés par Pascal Hébrard et Antoine Henrot dans [HH03, HH05], portant sur l'optimisation du support d'un terme d'atténuation pour l'équation des ondes en vue de l'obtention de bonnes propriétés de stabilisation.

En effet, comme les auteurs de ces articles, nous nous sommes attachés à modéliser le problème d'observation optimale et de positionnement optimal de capteur sans *a-priori* sur les données initiales à reconstruire. À la différence des travaux susmentionnés où les questions abordées correspondent à un autre contexte physique, les problèmes d'optimal design présentés dans ce chapitre ne dépendent pas des données initiales des équations d'évolution considérées. Voici en quelques mots un résumé très condensé de nos contributions :

- dans [PTZa] nous montrons que, le problème d'optimisation de la forme de capteurs à données initiales fixées peut admettre des solutions très complexes (par exemple des Cantor), même lorsque les données initiales sont supposées très régulières.
- dans [PTZ13b] nous étudions le problème d'observabilité optimale pour l'équation des ondes en dimension un d'espace. Nous établissons des propriétés des solutions destinées à mettre en évidence le phénomène de *spillover*, comme cela avait été initié dans [HH05]. La généralisation de ce problème aux dimensions supérieures et le lien avec les propriétés d'ergodicité de la membrane sont analysées dans [PTZb].
- dans [PTZc], nous étudions le problème d'optimisation de la forme et de la position de capteurs de température (i.e. pour l'équation de la chaleur) en dimension quelconque.

II.2) Modélisation du problème par randomisation

Cette section est dédiée à l'introduction et la justification du problème d'optimisation de forme qui sera résolu par la suite. Nous désignerons par $T > 0$ le temps d'observabilité, c'est-à-dire la durée des mesures effectuées.

Précisons de prime abord l'ensemble des domaines admissibles que nous considérerons. Remarquons que si l'on souhaite optimiser l'observation d'un système, la meilleure solution consiste sans aucun doute à choisir $\omega = \Omega$, autrement dit à observer le signal sur le domaine complet Ω. Bien sûr, une telle solution n'est pas pertinente d'un point de vue pratique où il est nécessaire de prendre par exemple en compte le coût de fabrication et d'utilisation des capteurs. C'est pourquoi nous supposerons dans la suite que la mesure du domaine ω occupé par les capteurs est limitée. Plus précisément, nous restreindrons notre recherche à celle d'un sous-domaine ω de Ω, Lebesgue-mesurable et de mesure de Lebesgue $|\omega| = L|\Omega|$, où $L \in (0,1)$ est un nombre réel fixé. On définit donc l'ensemble $\mathcal{U}_L$ des domaines ω admissibles par

$$\mathcal{U}_L = \{\chi_\omega \mid \omega \text{ is a measurable subset of } \Omega \text{ of Lebesgue measure } |\omega| = L|\Omega|\}. \tag{II.3}$$

Le sous-ensemble ω représente donc les capteurs positionnés dans Ω, et nous supposerons qu'il est possible de mesurer les restrictions des solutions de (II.1) ou (II.2) à ω durant un certain temps T.

Nous allons à présent introduire les problèmes d'optimisation de forme modélisant la question que nous nous posons, à savoir la détermination des formes et positionnements de capteurs garantissant la *meilleure observation* possible. Pour une meilleure lisibilité, nous allons détailler l'argument dans le cas de l'équation des ondes, et expliquerons brièvement comment l'adapter à l'équation de la chaleur.

Modélisation pour l'équation des ondes. Nous allons détailler dans ce paragraphe quelle fonctionnelle de forme nous avons choisie afin de modéliser la notion de *meilleure observation* pour l'équation des ondes.

Rappelons quelques faits bien connus sur l'observabilité de l'équation des ondes. Quel que soit $(y^0,y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, l'équation des ondes (II.1) possède une unique solution $y \in C^0(0,T;L^2(\Omega)) \cap C^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ telle que $y(0,\cdot) = y^0(\cdot)$ and $\partial_t y(0,\cdot) = y^1(\cdot)$. On dit que l'équation (II.1) est observable en temps T sur ω s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C\|(y^0,y^1)\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{C})\times H^{-1}(\Omega,\mathbb{C})} \leq \int_0^T \int_\omega |y(t,x)|^2 \, dx \, dt, \tag{II.4}$$

pour tout $(y^0,y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Cette inégalité est appelée *inégalité d'observabilité* et joue un rôle essentiel lorsque l'on souhaite établir le caractère *bien posé* du problème inverse de la reconstruction des données initiales à partir de mesures de la solution sur ω sur un horizon de temps T. Il est bien connu que si la frontière de Ω est $\mathcal{C}^\infty$, cette inégalité est vraie si, et seulement si la paire (ω,T) vérifie la *Condition de Contrôle Géométrique (GCC)* dans Ω (voir [BLR92]), selon laquelle tout rayon se propageant dans la cavité Ω en obéissant aux lois de l'optique géométrique et en étant réfléchi sur la frontière de Ω intersecte ω au bout d'un temps inférieur ou égal à T. On appellera alors *constante d'observabilité* et on notera $C_T^{(W)}(\chi_\omega)$ la meilleure constante C dans l'inégalité (II.4), autrement dit

$$C_T^{(W)}(\chi_\omega) = \inf \left\{ \frac{\int_0^T \int_\Omega \chi_\omega(x)|y(t,x)|^2 \, dx \, dt}{\|(y^0,y^1)\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}} \;\middle|\; (y^0,y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \setminus \{(0,0)\} \right\}. \tag{II.5}$$

A priori, il pourrait sembler assez naturel de modéliser le problème de l'observabilité optimale comme celui de maximiser la fonctionnelle $\chi_\omega \mapsto C_T^{(W)}(\chi_\omega)$ sur l'ensemble $\mathcal{U}_L$.

Cependant, nous n'avons pas retenu ce choix car il présente deux inconvénients : d'une part, il conduit à un problème mathématique très ardu, puisqu'on ne sait pas évaluer la constante $C_T^{(W)}(\chi_\omega)$, y compris pour des choix très simples de domaines ω et Ω. D'autre part, ce modèle n'est pas si pertinent d'un point de vue pratique.

Afin de mieux comprendre ces difficultés, nous allons utiliser une décomposition spectrale des solutions de l'équation (II.1). Cette décomposition montre l'émergence de termes croisés dans la constante d'observabilité qui sont très difficiles à prendre en compte. En effet, soit $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ constituée des fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Dirichlet sur Ω, associée aux valeurs propres negatives $(-\lambda_j^2)_{j\in\mathbb{N}^*}$.

Toute solution y de (II.1) peut donc s'écrire

$$y(t,x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(a_j e^{i\lambda_j t} + b_j e^{-i\lambda_j t}\right) \phi_j(x), \tag{II.6}$$

où les coefficients a_j and b_j s'expriment en fonction des données initiales.

Il s'ensuit

$$C_T^{(W)}(\chi_\omega) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{(a_j),(b_j)\in\ell^2(\mathbb{C}) \\ \sum_{j=1}^{+\infty}(|a_j|^2+|b_j|^2)=1}} \int_0^T \int_\omega \left| \sum_{j=1}^{+\infty} \left(a_j e^{i\lambda_j t} + b_j e^{-i\lambda_j t}\right) \phi_j(x) \right|^2 dx\, dt, \tag{II.7}$$

et ainsi, maximiser cette fonctionnelle sur $\mathcal{U}_L$ se révèle très complexe notamment en raison de la présence des termes croisés $\int_\omega \phi_j\phi_k\, dx$ mesurant les interactions de deux fonctions propres distinctes sur le sous-domaine ω. C'est d'ailleurs le même type de difficulté que l'on retrouve lorsque l'on cherche à estimer les constantes optimales dans l'inégalité d'Ingham [1], une inégalité classique d'analyse non-harmonique souvent utilisée pour démontrer des inégalités d'observabilité. La recherche de constantes optimales, notamment en utilisant la méthode introduite par A.E. Ingham dans [Ing36], a été évoquée et discutée dans divers travaux (par exemple [JM01, JTZ97, Kah62, KL05]). Cependant, ce problème demeure à ma connaissance ouvert.

La seconde difficulté à laquelle on serait confronté en considérant ce modèle provient de son manque de pertinence en pratique. En effet, la constante d'observabilité définie par (II.5) est déterministe et fournit la pire valeur du quotient $\frac{\int_0^T \int_\Omega \chi_\omega(x)|y(t,x)|^2\, dx\, dt}{\|(y^0,y^1)\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}}$. Pour cette raison, cette constante est pessimiste et ne correspond pas à un cas pratique, où un ingénieur est amené à réaliser un grand nombre de mesures et, espérant que ce pire cas ne survient pas trop souvent, cherche un domaine d'observation optimal pour la plupart des expériences réalisées. Cela conduit à considérer plutôt une version moyennée de l'inégalité d'observabilité, en effectuant une sélection aléatoire des données initiales.

Cette sélection est opérée à l'aide d'un procédé de *randomisation des EDP*, un concept introduit dans les travaux de N. Burq et N. Tzvetkov sur certaines équations aux dérivées partielles non-linéaires avec des données initiales aléatoires (voir [Bur11, BT08, BT14]), eux-mêmes inspirés des méthodes développées dans un article de Paley et Zygmund (voir [PZ32]).

Décrivons à présent le procédé de randomisation. On va utiliser l'expression de la constante $C_T^{(W)}(\chi_\omega)$ développée dans la base hilbertienne des $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ donnée par (II.7).

On randomise les coefficients (de Fourier) a_j, b_j représentant les conditions initiales en multipliant chacun d'eux par une variable aléatoire suivant une loi bien choisie. Cette sélection aléatoire de données initiales pour l'équation des ondes (II.1) consiste à remplacer $C_T^{(W)}(\chi_\omega)$ par la version

1. L'inégalité d'Ingham, introduite dans [Ing36], affirme que pour tout nombre réel strictement positif γ et tout $T > \frac{2\pi}{\gamma}$, il existe deux constantes strictement positives $C_1(T,\gamma)$ et $C_2(T,\gamma)$ telle que, pour toute suite de nombres réels $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant l'hypothèse de gap uniforme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \geq \gamma,$$

l'inégalité

$$C_1(T,\gamma) \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq C_2(T,\gamma) \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n|^2,$$

est satisfaite pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2(\mathbb{C})$.

randomisée

$$C^{(W)}_{T,\mathrm{rand}}(\chi_\omega) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{(a_j),(b_j)\in\ell^2(\mathbb{C}) \\ \sum_{j=1}^{+\infty}(|a_j|^2+|b_j|^2)=1}} \mathbb{E}\left(\int_0^T \int_\omega \left| \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\beta^\nu_{1,j} a_j e^{i\lambda_j t} - \beta^\nu_{2,j} b_j e^{-i\lambda_j t}\right) \phi_j(x) \right|^2 dx\, dt \right), \tag{II.8}$$

où $(\beta^\nu_{1,j})_{j\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta^\nu_{2,j})_{j\in\mathbb{N}^*}$ désignent deux suites de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli sur un espace probabilisé $(\mathcal{X},\mathcal{A},\mathbb{P})$, telles que

$$\mathbb{P}(\beta^\nu_{1,j} = \pm 1) = \mathbb{P}(\beta^\nu_{2,j} = \pm 1) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(\beta^\nu_{1,j}\beta^\nu_{2,k}) = 0,$$

pour tous j et k dans $\mathbb{N}^*$ et tout aléa $\nu \in \mathcal{X}$. Ici, la notation $\mathbb{E}$ désigne l'espérance sur l'espace $\mathcal{X}$ par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$. En d'autres termes, au lieu de considérer l'inégalité d'observabilité déterministe (II.4) pour l'équation des ondes (II.1), nous considérons *l'inégalité d'observabilité randomisée*

$$C^{(W)}_{T,\mathrm{rand}}(\chi_\omega)\|(y^0,y^1)\|^2_{L^2\times H^{-1}} \le \mathbb{E}\left(\int_0^T \int_\omega |y_\nu(t,x)|^2\, dx\, dt \right), \tag{II.9}$$

pour tout $(y^0,y^1) \in L^2(\Omega,\mathbb{C}) \times H^{-1}(\Omega,\mathbb{C})$, où y_ν désigne la solution de l'équation des ondes avec données initiales $y^0_\nu(\cdot)$ et $y^1_\nu(\cdot)$ déterminées par les coefficients de Fourier $a^\nu_j = \beta^\nu_{1,j} a_j$ et $b^\nu_j = \beta^\nu_{2,j} b_j$, autrement dit

$$y_\nu(t,x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\beta^\nu_{1,j} a_j e^{i\lambda_j t} + \beta^\nu_{2,j} b_j e^{-i\lambda_j t}\right) \phi_j(x). \tag{II.10}$$

Cette nouvelle constante $C^{(W)}_{T,\mathrm{rand}}(\chi_\omega)$ est appelée *constante d'observabilité randomisée*. Le théorème qui suit fournit une expression simple de cette constante.

Théorème. *[PTZb, Theorem 4] Pour tout sous-ensemble Lebesgue mesurable ω de Ω, on a*

$$C^{(W)}_{T,\mathrm{rand}}(\chi_\omega) = \frac{T}{2} \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \int_\omega \phi_j(x)^2\, dx. \tag{II.11}$$

Remarque 4. Commentons ce résultat.

- Il est aisé de se convaincre que $C^{(W)}_T(\chi_\omega) \le C^{(W)}_{T,\mathrm{rand}}(\chi_\omega)$, et que cette inégalité devient stricte dans les cas suivants
  - ↪ en dimension un, avec $\Omega = (0,\pi)$ lorsque T n'est pas un multiple de π ;
  - ↪ en multi-D, avec Ω en forme de stade (enveloppe convexe de deux boules non nécessairement tangentes), lorsque ω contient un voisinage ouvert des ailes, et dans ce cas, $C^{(W)}_T(\chi_\omega) = 0$.
- Le membre de droite dans (II.11) est une mesure de la concentration des fonctions propres sur le domaine ω. On peut également l'interpréter comme une constante d'observabilité spectrale, c'est-à-dire mode par mode.
- Il existe une autre interprétation du membre de droite dans (II.11). En effet, si les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Dirichlet sont toutes simples (ce qui est une propriété générique par rapport à Ω), alors cette quantité est également la meilleure constante de l'inégalité d'observabilité asymptotique

  $$C\|(y^0,y^1)\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \le \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_\omega |y(t,x)|^2\, dx\, dt,$$

  valable pour tout $(y^0,y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Ce résultat est établi dans [PTZb, Theorem 5 and Corollary 1].

Remarque 5. Nous apportons ici quelques précisions supplémentaires sur le procédé de randomisation utilisé précédemment. On peut aisément vérifier que la conclusion du théorème précédent

(Theorem [PTZb, Theorem 4]), fournissant une expression explicite de la constante d'observabilité randomisée $C^{(W)}_{T,\mathrm{rand}}(\chi_\omega)$, reste vraie lorsque l'on considère dans la procédure de randomisation des variables aléatoires plus générales qui sont indépendantes, d'espérance nulle, de variance 1 et ayant une décroissance super-exponentielle [2]. Davantage de précisions sur les procédures de randomisation peuvent être trouvées dans [Bur11, BT08]. Les familles de variables aléatoires de Bernoulli et gaussiennes identiquement distribuées d'espérance nulle et de variance 1 vérifient les hypothèses nécessaires à la mise en œuvre du procédé de randomisation utilisé précédemment. Attardons-nous un peu sur les propriétés de chacun de ces procédés de randomisation. On désigne par θ la fonction de distribution associée à la famille de variables aléatoires considérée et, pour $(y^0,y^1) \in L^2(\Omega,\mathbb{C}) \times H^{-1}(\Omega,\mathbb{C})$ donnés, on introduit la mesure de probabilité

$$\mu_{(y^0,y^1)} : A \subset L^2(\Omega,\mathbb{C}) \times H^{-1}(\Omega,\mathbb{C}) \longmapsto \mathbb{P}(\nu \in \mathcal{X} \ \mid \ (y^0_\nu,y^1_\nu) \in A).$$

sur l'espace $L^2(\Omega,\mathbb{C}) \times H^{-1}(\Omega,\mathbb{C})$.

- *Randomisation de Bernoulli.* Dans ce cas $d\theta(x) = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$. Pour toute donnée initiale $(y^0,y^1) \in L^2(\Omega,\mathbb{C}) \times H^{-1}(\Omega,\mathbb{C})$, la randomisation de Bernoulli conserve la norme $L^2 \times H^{-1}$.
- *Randomisation Gaussienne.* Dans ce cas $d\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$. La randomisation gaussienne génère un sous-ensemble dense (et même bien mieux que cela, elle génère un ensemble de mesure pleine) de $L^2(\Omega,\mathbb{C}) \times H^{-1}(\Omega,\mathbb{C})$ à travers l'application $R_{(y^0,y^1)} : \nu \in \mathcal{X} \mapsto (y^0_\nu,y^1_\nu)$ pour un grand nombre de données initiales $(y^0,y^1) \in L^2(\Omega,\mathbb{C}) \times H^{-1}(\Omega,\mathbb{C})$. Plus précisément, on peut montrer si les coefficients de Fourier de (y^0,y^1) sont tous non nuls, en utilisant le fait que la mesure θ charge tous les ouverts de $\mathbb{R}$, que le support de la mesure $\mu_{(y^0,y^1)}$ est précisément $L^2(\Omega,\mathbb{C}) \times H^{-1}(\Omega,\mathbb{C})$. En particulier, l'intersection de tout ensemble de $\mu_{(y^0,y^1)}$-mesure 1 avec toute boule non triviale de $L^2(\Omega,\mathbb{C}) \times H^{-1}(\Omega,\mathbb{C})$ est non vide.

Enfin, évoquons les propriétés de régularisation du procédé de randomisation. Avec la convention que $L^2(\Omega,\mathbb{C}) = H^0(\Omega,\mathbb{C})$, on peut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, si $(y^0,y^1) \notin H^\varepsilon(\Omega,\mathbb{C}) \times H^{-1+\varepsilon}(\Omega,\mathbb{C})$, alors pour presque tout $\nu \in \mathcal{X}$, $(y^0_\nu,y^1_\nu) \notin H^\varepsilon(\Omega,\mathbb{C}) \times H^{-1+\varepsilon}(\Omega,\mathbb{C})$. Autrement dit, le procédé de randomisation ne régularise pas dans les espaces de Sobolev. En revanche, le procédé de randomisation régularise dans les espaces L^p. En effet, si $y_0 \in L^2(\Omega,\mathbb{C})$, alors pour presque tout $\nu \in \mathcal{X}$, $y^0_\nu \in L^p(\Omega,\mathbb{C})$ pour tout $p < +\infty$.

Des explications plus détaillées figurent dans [BT14].

En supposant que l'on se soit placé dans une situation pratique dans laquelle il est possible de réaliser un grand nombre de mesures, nous proposons de modéliser le problème d'observabilité optimale comme le problème consistant à maximiser la fonctionnelle

$$J(\chi_\omega) = \frac{1}{2} \inf_{j \in \mathbb{N}^*} \int_\omega \phi_j(x)^2 \, dx \tag{II.12}$$

dans l'ensemble $\mathcal{U}_L$.

Modélisation pour l'équation de la chaleur. Nous allons à présent mener une analyse très similaire au cas de l'équation des ondes afin de modéliser un problème pertinent d'observabilité optimale dans ce cadre.

Rappelons que pour toute donnée initiale $y^0 \in D(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact sur Ω), l'équation (II.2) admet une unique solution $y \in C^0(0,T;D(\Omega)) \cap C^1(0,T;L^2(\Omega))$ telle que $y(0,\cdot) = y^0(\cdot)$. De plus, pour tout sous-ensemble Lebesgue mesurable ω de Ω, l'équation de la chaleur (II.2) est dite *observable* sur ω en temps T s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C \int_\Omega y(T,x)^2 \, dx \leq \int_0^T \int_\omega y(t,x)^2 \, dx \, dt, \tag{II.13}$$

2. On dit qu'une famille de variables aléatoires $(\beta^\nu_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ a une décroissance super-exponentielle s'il existe deux constantes $C > 0$ et $\delta > 0$ telles que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{E}(e^{\alpha|\beta^\nu_j|}) \leq C e^{\delta \alpha^2}.$$

C'est typiquement le cas de familles de variables aléatoires ayant un support compact fixe ou de familles de variables aléatoires gaussiennes de même loi.

pour toute solution de (II.2) telle que $y(0,\cdot) \in \mathcal{D}(\Omega)$. De plus, si la frontière de Ω est $\mathcal{C}^2$, alors cette inégalité d'observabilité est satisfaite (voir [FCGBGP06, FI96, LR95, TW09]). Ce résultat a d'ailleurs été récemment généralisé au cas des ensembles Ω bornés à frontière Lipschitz et localement étoilés dans [AEWZ14].

La constante d'observabilité $C_T^{(H)}(\chi_\omega)$ est définie comme la plus grande constante $C > 0$ telle que l'inégalité (II.13) est satisfaite. D'un point de vue quantitatif, cette constante peut être interprétée comme une mesure du caractère bien-posé du problème inverse consistant à reconstruire la solution de l'équation de la chaleur au temps T à partir de mesures de la solution sur ω pendant un intervalle de temps T (voir par exemple le livre [Cho09] sur de tels problèmes inverses). Plus la constante $C_T^{(H)}(\chi_\omega)$ est grande et meilleure est la stabilité du problème inverse associé.

Comme pour l'équation des ondes, il serait naturel de modéliser le problème d'observation optimale de (II.2) comme le problème consistant à maximiser la fonctionnelle $C_T(\chi_\omega)$ sur l'ensemble $\mathcal{U}_L$. Cependant, pour les mêmes raisons que celles qui ont été évoquées dans le cas de l'équation des ondes (difficulté mathématique et manque de pertinence en pratique car la constante est pessimiste), et dans le cas où un grand nombre de mesures est autorisé, il semble plus pertinent d'introduire une version moyennée de la constante d'observabilité. Comme précédemment, nous allons utiliser pour cela la randomisation de l'équation de la chaleur, qui correspond à une sélection aléatoire des données initiales.

Définissons donc une *version moyennée* de l'inegalité d'observabilité, utilisant la randomisation des coefficients de Fourier des données initiales. Introduisons pour cela une base hilbertienne $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(\Omega)$ constituée de fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Dirichlet associées aux valeurs propres négatives $(-\lambda_j^2)_{j\in\mathbb{N}^*}$, avec $\lambda_1^2 \leq \cdots \leq \lambda_j^2 \to +\infty$. Toute solution de (II.2) s'écrit alors

$$y(t,x) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j e^{-\lambda_j^2 t}\phi_j(x),$$

On randomise les solutions (ou plus précisément les données initiales associées) en considérant

$$y_\nu(t,x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j^\nu a_j e^{-\lambda_j^2 t}\phi_j(x),$$

pour tout événement $\nu \in \mathcal{X}$, où $(\beta_j^\nu)_{j\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de Bernoulli sur un espace probabilisé $(\mathcal{X},\mathcal{A},\mathbb{P})$ telles que

$$\mathbb{P}(\beta_{1,j}^\nu = \pm 1) = \mathbb{P}(\beta_{2,j}^\nu = \pm 1) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(\beta_{1,j}^\nu \beta_{2,k}^\nu) = 0,$$

pour tous j et k dans $\mathbb{N}^*$ et tout aléa $\nu \in \mathcal{X}$. La version randomisée de l'inégalité d'observabilité (II.13) est définie par

$$C_{T,\mathrm{rand}}^{(H)}(\chi_\omega) \int_\Omega y(T,x)^2\,dx \;\leq\; \mathbb{E}\int_0^T \int_\omega y_\nu(t,x)^2\,dx\,dt,$$

où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance sur l'espace $\mathcal{X}$ par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$. La constante $C_{T,\mathrm{rand}}^{(H)}(\chi_\omega)$ est définie comme la plus grande constante possible telle que l'inégalité d'obsevabilité randomisée soit satisfaite et est appelée *constante d'observabilité randomisée*.

Proposition. *[PTZc, Proposition 1] On a*

$$C_{T,\mathrm{rand}}^{(H)}(\chi_\omega) = \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{2\lambda_j^2 T}-1}{2\lambda_j^2}\int_\omega \phi_j(x)^2\,dx, \tag{II.14}$$

pour tout sous-ensemble Lebesgue mesurable ω de Ω.

Par ailleurs, on a $0 \leq C_{T,\mathrm{rand}}^{(H)}(\chi_\omega) \leq C_T^{(H)}(\chi_\omega)$ et comme pour le cas de l'équation des ondes, la seconde inégalité peut être stricte.

Conclusion : le problème d'optimisation de forme. Le critère que nous allons chercher à optimiser dans chaque cas est donc la constante d'observabilité randomisée (au coefficient multiplicateur T près). On introduit donc la fonctionnelle $J(\chi_\omega)$ définie pour tout sous-ensemble ω de Ω par

$$J(\chi_\omega) = \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \gamma_j(T) \int_\omega \phi_j(x)^2\,dx, \tag{II.15}$$

avec

$$\gamma_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pour l'équation des ondes} \\ \frac{e^{2\lambda_j^2 T}-1}{2\lambda_j^2} & \text{pour l'équation de la chaleur.} \end{cases}$$

On s'intéresse alors à la maximisation de la fonctionnelle J sur l'ensemble $\mathcal{U}_L$ defini par (II.3). Ce problème s'écrit

$$\boxed{\sup_{\chi_\omega\in\mathcal{U}_L} J(\chi_\omega) = \sup_{\chi_\omega\in\mathcal{U}_L} \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \gamma_j(T) \int_\omega \phi_j(x)^2\,dx.} \tag{II.16}$$

Rappelons que, d'après la discussion précédente, ce problème d'optimisation vise à déterminer les position et forme optimales de capteurs mesurant le déplacement d'une membrane dans le cas de l'équation des ondes, et une température dans le cas de l'équation de la chaleur.

La fonctionnelle J définie par (II.15) correspond à une mesure de concentration d'énergie pour les fonctions propres.

II.3) Relaxation et approximations modales

Cette section est consacrée à la résolution de versions simplifiées du problème (II.16), dans laquelle (i) soit la recherche d'un maximiseur est étendue à un plus grand ensemble (problème relaxé ou convexifié), (ii) soit le critère est lui-même modifié et un nombre fini de modes est considéré (approximation modale ou spectrale). En sus de son intérêt intrinsèque, l'étude de ces problèmes fournira de précieuses informations en vue de la résolution du problème (II.16).

Résolution d'un problème relaxé. Étant donné que l'ensemble $\mathcal{U}_L$ ne possède pas de bonnes propriétés de compacité [3] assurant l'existence d'une solution pour le problème (II.16), nous allons considérer l'adhérence de $\mathcal{U}_L$ pour la topologie $*$-faible de L^∞,

$$\overline{\mathcal{U}}_L = \left\{ a\in L^\infty(\Omega,[0,1]) \;\middle|\; \int_\Omega a(x)\,dx = L|\Omega| \right\}. \tag{II.17}$$

Introduisons alors l'extension de la fonctionnelle J, que nous noterons encore J de façon abusive, définie par

$$J(a) = \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \int_\Omega a(x)\phi_j(x)^2\,dx, \tag{II.18}$$

pour tout $a\in\overline{\mathcal{U}}_L$.

Le formulation relaxée/convexifiée du problème (II.16) s'écrit alors

$$\boxed{\sup_{a\in\overline{\mathcal{U}}_L} J(a) = \sup_{a\in\overline{\mathcal{U}}_L} \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \gamma_j(T) \int_\Omega a(x)\phi_j(x)^2\,dx.} \tag{II.19}$$

3. Dans cette étude, nous considérons des ensembles Lebesgue mesurables ω de Ω, et nous munissons l'ensemble $L^\infty(\Omega,\{0,1\})$ des fonctions caractéristiques de sous-ensembles mesurables de la topologie $*$-faible. D'autres topologies, telles que la topologie associée à la convergence de Hausdorff sont souvent utilisées dans l'étude des problèmes d'optimisation de forme. Dans le cadre de cette étude, bien que la topologie de Hausdorff ait de bonnes propriétés de compacité, elle ne peut cependant pas être utilisée en raison de la contrainte de mesure imposée aux ensembles ω. En effet, la convergence de Hausdorff ne préserve pas la mesure, et la classe des domaines admissibles n'est pas fermée pour cette topologie. La topologie associée à la convergence au sens des fonctions caractéristiques (convergence forte dans L^1) ou au sens des compacts (voir par exemple [HP05, Chapter 2]) ne permet pas de garantir aisément la compacité des suites minimisantes de domaines, à moins d'imposer par exemple une propriété de régularité uniforme, typiquement une propriété de type ε-cône.

Un tel procédé de convexification est standard dans l'étude des problèmes d'optimisation de forme où il est fréquent qu'il n'existe pas de solution (voir par exemple [BB02]).

Avant d'étudier les liens entre le problème d'optimisation de forme (II.16) et sa version convexifiée (II.19), mentionnons un résultat facile d'existence. En effet, $J(a)$ s'écrivant comme l'infimum de fonctionnelles linéaires et continues pour la topologie $*$-faible de L^∞, il s'ensuit que $a \mapsto J(a)$ est semi-continue supérieurement pour cette topologie. Puisque l'ensemble $\overline{\mathcal{U}}_L$ est compact pour cette topologie, on en déduit le résultat suivant.

Lemme. *Le problème (II.19) possède (au moins) une solution.*

Remarque 6 (Unicité des solution du problème (II.19))**.** De façon générale, le problème (II.19) ne possède pas une unique solution. Par exemple, en dimension un avec $\Omega = (0,\pi)$ et $\gamma_j = \frac{1}{2}$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ (cas de l'équation des ondes), on montre en utilisant une analyse de Fourier que les solution de (II.19) sont toutes les fonctions de $\overline{\mathcal{U}}_L$ dont le développement en série de Fourier s'écrit

$$a(x) = L + \sum_{j=1}^{+\infty} (a_j \cos(2jx) + b_j \sin(2jx)),$$

avec $a_j \leq 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

Dans le cas de l'équation des ondes (autrement dit, lorsque $\gamma_j = \frac{1}{2}$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$), on peut même préciser ce résultat indépendamment de la dimension.

Proposition. *[PTZb, Lemma 1] On a*

$$\max_{a \in \overline{\mathcal{U}}_L} \inf_{j \in \mathbb{N}^*} \int_\Omega a(x)\phi_j(x)^2 \, dx = L, \tag{II.20}$$

et la fonction constante définie par $a(\cdot) = L$ sur Ω est un maximiseur du problème (II.19).

La preuve de cette proposition établit un lien entre le problème relaxé et le problème où les fonction $\phi_j(\cdot)^2$ ont été remplacées par leurs moyennes de Césaro. On utilise alors des propriétés d'ergodicité quantique des moyennes de Césaro [4], ce qui permet de conclure.

L'étude du problème (II.16) consiste principalement à comparer la valeur optimale de ce problème avec celle du problème convexifié/relaxé (II.19) puis à en déduire une caractérisation de l'ensemble optimal (régularité, symétrie, complexité, ...) lorsqu'il existe.

Bien évidemment, on peut écrire que

$$\sup_{\chi_\omega \in \mathcal{U}_L} \inf_{j \in \mathbb{N}^*} \int_\Omega \chi_\omega(x)\phi_j(x)^2 \, dx \;\leq\; \sup_{a \in \overline{\mathcal{U}}_L} \inf_{j \in \mathbb{N}^*} \int_\Omega a(x)\phi_j(x)^2 \, dx = L. \tag{II.21}$$

Cependant, la fonctionnelle $\overline{\mathcal{U}}_L \ni a \mapsto J(a)$ est semi-continue supérieurement pour la topologie $*$-faible de L^∞, mais pas semi-continue inférieurement comme nous allons le voir. Pour cette raison, il n'est pas du tout évident que l'inégalité réciproque de (II.21) soit vraie. De plus, ce défaut de continuité montre que l'on ne peut pas s'attendre à une propriété de type Γ-convergence dans ce cas.

Pour s'en convaincre, considérons le cas de la dimension un pour l'équation des ondes (autrement dit, lorsque $\gamma_j = \frac{1}{2}$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$). Puisque $\phi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(jx)$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$J(a) = \frac{2}{\pi} \inf_{j \in \mathbb{N}^*} \int_0^\pi a(x) \sin^2(jx) \, dx,$$

pour tout $a \in \overline{\mathcal{U}}_L$. Puisque les fonctions $x \mapsto \sin^2(jx)$ convergent faiblement vers $1/2$, il s'ensuit que $J(a) \leq L$ pour tout $a \in \overline{\mathcal{U}}_L$. Par conséquent, $\sup_{a \in \overline{\mathcal{U}}_L} J(a) = L$, et le supremum est atteint par

4. En effet, d'après [Hör07, Theorem 17.5.7 and Corollary 17.5.8.], la suite $(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \phi_j^2)_{N \in \mathbb{N}^*}$ des moyennes de Césaro converge vers la constante $\frac{1}{|\Omega|}$, uniformément sur tout compact inclus dans l'ouvert Ω pour la topologie forte de C^0 et donc faiblement dans $L^1(\Omega)$.

la fonction constante $a(\cdot) = L$ et on retrouve le résultat de [PTZb, Lemma 1] mentionné dans la proposition précédente. Considérons la suite de sous-ensembles $(\omega_N)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $(0,\pi)$ de mesure $L\pi$ définie par

$$\omega_N = \bigcup_{k=1}^{N} \left(\frac{k\pi}{N+1} - \frac{L\pi}{2N}, \frac{k\pi}{N+1} + \frac{L\pi}{2N} \right),$$

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Bien sûr, la suite $(\chi_{\omega_N})_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction constante $a(\cdot) = L$ pour la topologie $*$-faible de L^∞, mais cependant, on montre que

$$\int_{\omega_N} \sin^2(jx)\,dx = \begin{cases} \frac{L\pi}{2} - \frac{N}{2j}\sin\left(\frac{jL\pi}{N}\right) & \text{if } \ (N+1) \mid j, \\ \frac{L\pi}{2} + \frac{1}{2j}\sin\left(\frac{jL\pi}{N}\right) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

et ainsi,

$$\limsup_{N\to+\infty} \frac{2}{\pi} \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \int_{\omega_N} \sin^2(jx)\,dx < L.$$

Cet exemple simple illustre la difficulté de capter le comportement à l'infini de la fonctionnelle J, en raison du manque de semi-continuité inférieure, ce qui rend possible l'émergence d'un gap entre les valeurs optimales, dans le procédé de relaxation.

Dans les sections II.4.1) et II.4.2), nous allons démontrer pour les choix de suite $(\gamma_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ correspondant respectivement aux problèmes d'optimisation de forme associés à l'équation des ondes et de la chaleur qu'il n'y a pas de gap entre la valeur optimale du problème (II.16) et celle de sa version relaxée (II.19).

Approximation modale du problème (II.16). Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé. On introduit alors la fonctionnelle $J_N(\chi_\omega)$, correspondant à une troncature spectrale du critère J, définie par

$$J_N(\chi_\omega) = \min_{1\le j\le N} \gamma_j(T) \int_\omega \phi_j(x)^2\,dx, \tag{II.22}$$

pour tout sous-ensemble Lebesgue mesurable ω de Ω.

Le problème d'optimisation de forme correspondant s'interprête comme une approximation du problème (II.16) et s'écrit

$$\boxed{\sup_{\chi_\omega\in\mathcal{U}_L} J_N(\chi_\omega) = \sup_{\chi_\omega\in\mathcal{U}_L} \min_{1\le j\le N} \gamma_j(T) \int_\omega \phi_j(x)^2\,dx.} \tag{II.23}$$

De même que dans le paragraphe précédent, on peut étendre la fonctionnelle J_N à l'ensemble $\overline{\mathcal{U}}_L$ en écrivant

$$J_N(a) = \min_{1\le j\le N} \gamma_j(T) \int_\Omega a(x)\phi_j(x)^2\,dx,$$

pour tout $a \in \overline{\mathcal{U}}_L$.

On a alors le théorème suivant, établissant l'existence, l'unicité d'une solution pour le problème (II.23), ainsi qu'une propriété de Γ-convergence de la famille de fonctionnelles J_N.

Théorème. *([PTZb, Theorem 8] et [PTZc, Proposition 2])*

(i) Pour tout sous-ensemble Lebesgue mesurable ω de Ω, la suite $(J_N(\chi_\omega))_{N\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers $J(\chi_\omega)$.

(ii) On a

$$\lim_{N\to+\infty} \max_{a\in\overline{\mathcal{U}}_L} J_N(a) = \max_{a\in\overline{\mathcal{U}}_L} J(a).$$

De plus, si $(a^N)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de maximiseurs de J_N dans $\overline{\mathcal{U}}_L$, alors quitte à extraire cette suite converge $*$-faible dans L^∞ vers un maximiseur de J dans $\overline{\mathcal{U}}_L$.

(iii) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, le problème (II.23) possède une unique[5] *solution $\chi_{\omega^N} \in \mathcal{U}_L$. De plus, ω^N est semi-analytique*[6] *et possède donc un nombre fini de composantes connexes.*

La preuve de ce théorème utilise de façon essentielle une réécriture convexifiée de la fonctionnelle J_N, plus précisément que

$$\min_{1\leq j\leq N} \gamma_j(T) \int_\Omega a(x)\phi_j(x)^2\,dx = \min_{\alpha\in\mathcal{A}_N} \int_\Omega a(x) \sum_{j=1}^N \gamma_j(T)\alpha_j\phi_j(x)^2\,dx,$$

pour tout $a \in \overline{\mathcal{U}}_L$, où $\mathcal{A}_N$ désigne le simplexe de $\mathbb{R}^N$

$$\mathcal{A}_N = \left\{ \alpha = (\alpha_j)_{1\leq j\leq N} \mid \alpha_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \right\}.$$

L'existence et l'unicité s'obtiennent alors en appliquant le théorème de Sion afin de lever la difficulté apparente de non-différentiabilité du critère J_N (voir [Sio58]), en exploitant les conditions d'optimalité au premier ordre, puis en utilisant l'hypoelliptiocité analytique du Laplacien-Dirichlet (voir [Nel59]). Cela fournit par la même occasion la propriété de régularité de l'ensemble optimal.

De plus, le troisième item de ce théorème est une généralisation de [HH05, Theorem 3.1].

Remarque 7 (Cas de l'équation des ondes en dimension un)**.** Dans le cas de l'équation des ondes en dimension un (autrement dit, $\Omega = (0,\pi)$ avec $\gamma_j = \frac{1}{2}$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$), nous avons montré un résultat d'instabilité assez surprenant : lorsque le paramètre de la contrainte L est suffisamment petit, l'ensemble optimal ω_N maximisant J_N est l'union de N intervalles concentrés autour de points équidistants et tels que ω_N est en fait le pire sous-ensemble possible pour le problème consistant à maximiser J_{N+1} dans $\mathcal{U}_L$. Ce phénomène s'appelle le *phénomène de spillover*. Il a été observé et démontré dans [HH03] puis [PTZ13b]. De façon plus précise, ce résultat est une conséquence directe du théorème suivant.

Théorème. *([HH05, Theorem 3.2] et [PTZ13b, Theorem 2]) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et soit χ_{ω^N} la solution du problème*

$$\max_{\chi_\omega\in\mathcal{U}_L} \min_{1\leq j\leq N} \int_0^\pi \chi_\omega(x)\sin(jx)^2\,dx.$$

Alors ω^N est la réunion d'au plus N intervalles, est symétrique par rapport à l'axe $x = \pi/2$. De plus, il existe $L_N \in (0,1]$ tel que, pour tout $L \in (0,L_N]$, l'ensemble optimal ω^N satisfait

$$\int_{\omega^N} \sin^2 x\,dx = \int_{\omega^N} \sin^2(2x)\,dx = \cdots = \int_{\omega^N} \sin^2(Nx)\,dx. \tag{II.24}$$

Les égalités (II.24) constituent l'ingrédient principal permettant de caractériser l'ensemble optimal ω^N lorsque la contrainte L est choisie suffisamment petite (au sens précisé dans le théorème ci-dessus). On peut alors aisément prouver que le domaine optimal ω^N se concentre autour des points $\frac{k\pi}{N+1}$, $k = 1,\dots,N$. Puisque ces points coïncident avec les zéros de la fonction $x \mapsto \sin((N+1)x)^2$, cela explique le *phénomène de spillover*, selon lequel le domaine optimal ω^N (pour les N premiers modes) est le pire domaine pour le problème où l'on a considéré les $N+1$ premiers modes.

5. Ici, il faut comprendre que l'ensemble optimal ω^* est unique dans la classe de tous les sous-ensembles mesurables de Ω quotientée par l'ensemble de tous les sous-ensembles mesurables de Ω de mesure nulle.

6. Un sous-ensemble ω d'une variété de dimension finie réelle analytique M est dit *semi-analytique* s'il peut être écrit en termes d'égalités et d'inégalités de fonctions réelles analytiques, autrement dit si pour tout $x \in \omega$, il existe un voisinage U de x dans M ainsi que $2pq$ fonctions analytiques g_{ij}, h_{ij} (avec $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$) telles que

$$\omega \cap U = \bigcup_{i=1}^p \{y \in U \mid g_{ij}(y) = 0 \text{ et } h_{ij}(y) > 0,\ j = 1,\dots,q\}.$$

Ce phénomène constitue plutôt une mauvaise nouvelle en vue d'applications pratiques. Notons de plus que la solution optimale χ_{ω^N} de (II.23) converge pour la topologie $*$-faible de L^∞ vers une fonction $a(\cdot) \in L^\infty([0,\pi],[0,1])$ telle que $\int_0^\pi a(x)dx = L\pi$. Cette fonction $a(\cdot)$ est d'ailleurs une solution du problème relaxé

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}}_L} \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \int_0^\pi a(x)\sin(jx)^2\,dx.$$

Nous illustrons à présent ces résultats à l'aide de quelques simulations numériques représentant les solutions ω^N du problème (II.23) (optimisation de forme du critère d'approximation modale J_N). Rappelons que la suite $(\chi_{\omega^N})_{N\in\mathbb{N}^*}$ constitue une suite maximisante pour le problème relaxé (II.19).

Cas du carré $\Omega = (0,\pi)^2$. On choisit comme base de fonctions propres du Laplacien-Dirichlet

$$\phi_{j,k}(x_1,x_2) = \frac{2}{\pi}\sin(jx_1)\sin(kx_2),$$

pour tout $(x_1,x_2) \in (0,\pi)^2$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On utilise alors une méthode de points intérieurs pour résoudre le problème d'approximation spectrale $\sup_{\chi_\omega\in\mathcal{U}_L} J_N(\chi_\omega)$, où

$$J_N(\chi_\omega) = \min_{1\le j,k\le N} \int_0^\pi\int_0^\pi \chi_\omega(x_1,x_2)\phi_{j,k}(x_1,x_2)^2\,dx_1\,dx_2.$$

Les résultats sont représentés sur la figure II.1 dans le cas de l'équation des ondes (autrement dit, $\gamma_{j,k} = \frac{1}{2}$ pour tout $(j,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$) et sur la figure II.2 dans le cas de l'équation de la chaleur (autrement dit $\gamma_{j,k} = \frac{e^{2T(j^2+k^2)}-1}{2(j^2+k^2)}$). Un phénomène particulier semble se produire dans le cas de l'équation de la chaleur. En effet, le domaine optimal ne semble plus varier à partir de $N = 4$. Ce phénomène dit *de stationnarisation* sera expliqué dans la section suivante.

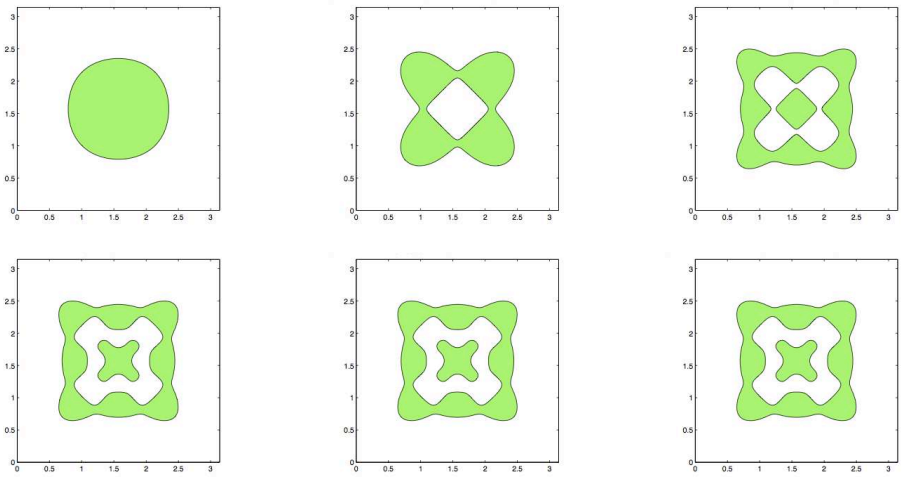


FIGURE II.2 : *Equation de la chaleur, $\Omega = (0,\pi)^2$, $L = 0.2$, $T = 0.05$, avec conditions au bord de Dirichlet. Ligne 1, de gauche à droite : $N = 1, 2, 3$ (resp. 1, 4, 9 modes propres). Ligne 2, de gauche à droite : $N = 4, 5, 6$ (resp. 16, 25, 36 modes propres).*

Cas du disque unité de $\mathbb{R}^2$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$. On choisit comme base de fonctions propres du Laplacien-Dirichlet

$$\phi_{j,k,m}(r,\theta) = \begin{cases} R_{0,k}(r)/\sqrt{2\pi} & \text{si } j = 0, \\ R_{j,k}(r)Y_{j,m}(\theta) & \text{si } j \ge 1, \end{cases} \tag{II.25}$$

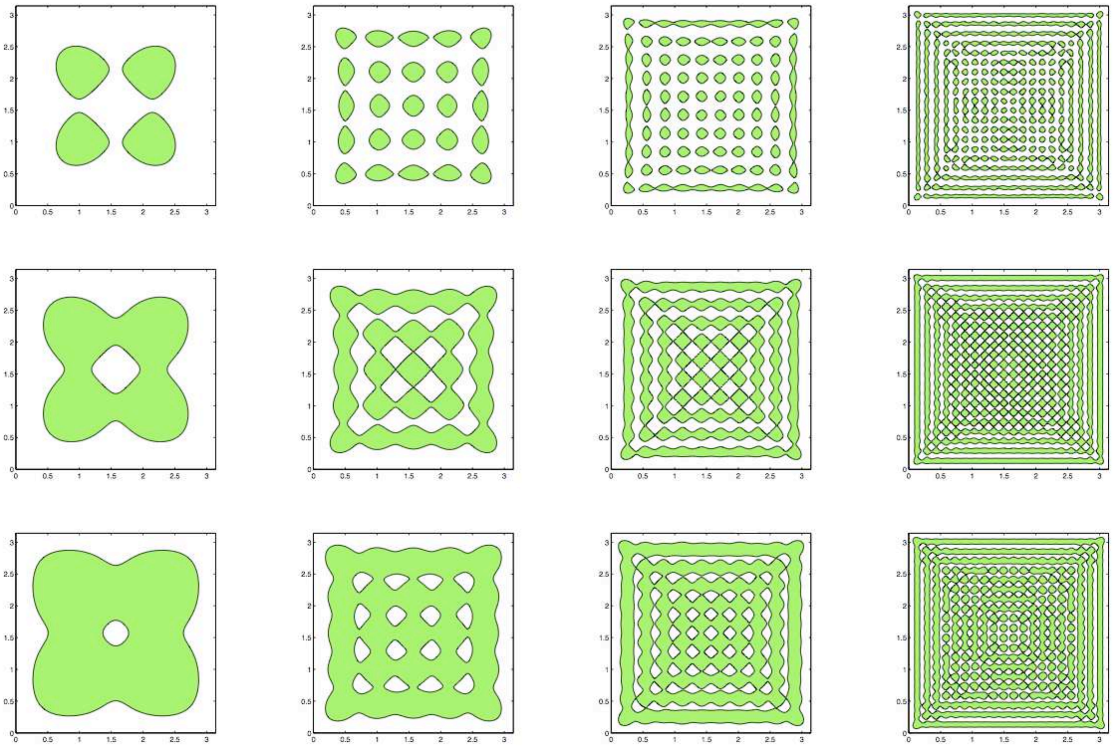


FIGURE II.1 : *Equation des ondes, $\Omega = (0,\pi)^2$, avec conditions au bord de Dirichlet. Ligne 1 : $L = 0.2$; ligne 2 : $L = 0.4$; ligne 3 : $L = 0.6$. De gauche à droite : $N = 2$ (4 modes propres), $N = 5$ (25 modes propres), $N = 10$ (100 modes propres), $N = 20$ (400 modes propres).*

pour $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $m = 1,2$, où (r,θ) désignent les coordonnées polaires. Les fonctions $Y_{j,m}(\theta)$ sont définies par $Y_{j,1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(j\theta)$ et $Y_{j,2}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(j\theta)$, et les fonctions $R_{j,k}$ sont définies par

$$R_{j,k}(r) = \sqrt{2}\,\frac{J_j(z_{j,k}r)}{|J_j'(z_{j,k})|} = \frac{J_j(z_{j,k}r)}{\sqrt{\int_0^1 J_j(z_{j,k}r)^2 r\,dr}}, \tag{II.26}$$

où J_j désigne la fonction de Bessel de première espèce d'ordre j, et $z_{j,k} > 0$ est le $k^{\text{ème}}$ zéro strictement positif de J_j. Les valeurs propres correspondantes forment une suite doublement indexée $(-\lambda_{j,k})_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}^*}$, où $\lambda_{j,k} = z_{j,k}^{2\alpha}$ est de multiplicité 1 si $j = 0$, et 2 sinon.

Les résultats sont représentés sur la figure II.3 dans le cas de l'équation des ondes, et sur la figure II.4 dans le cas de l'équation de la chaleur. On peut observer que les domaines optimaux sont radiaux. Il s'agit là d'une conséquence directe de l'unicité d'un maximiseur pour le problème d'approximation modale et du fait que Ω est lui même radial.

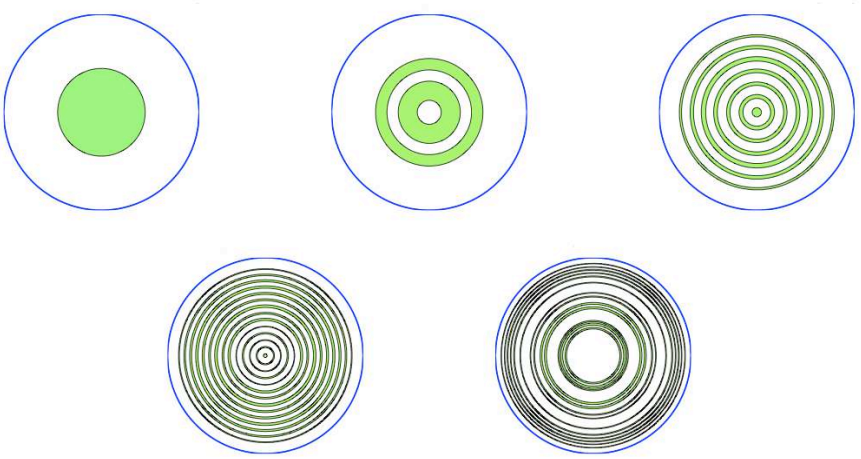


FIGURE II.3 : *Équation des ondes, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$, avec des conditions au bord de Dirichlet, et $L = 0.2$. De haut en bas et de gauche à droite : $N = 1$ (1 mode propre), $N = 2$ (4 modes propres), $N = 5$ (25 modes propres), $N = 10$ (100 modes propres) et $N = 20$ (400 modes propres).*

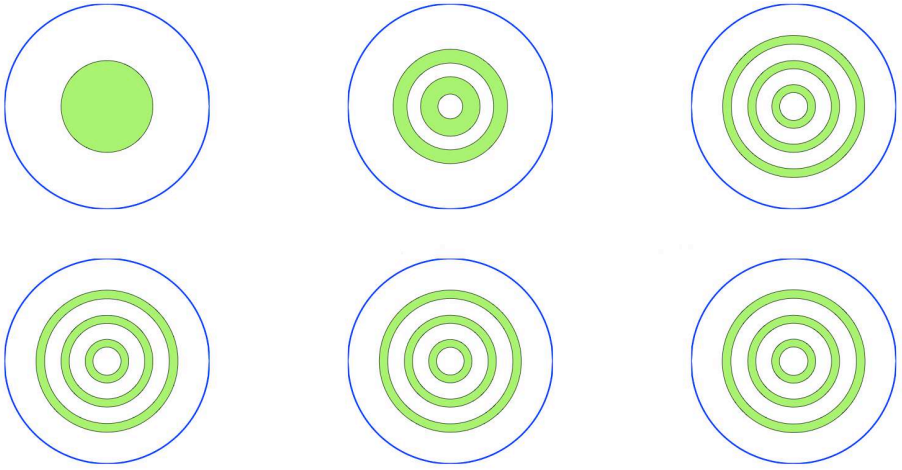


FIGURE II.4 : *Équation de la chaleur, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$, $L = 0.2$, $T = 0.05$, avec conditions au bord de Dirichlet. De haut en bas et de gauche à droite : $N = 1$ (1 mode propre), $N = 2$ (4 modes propres), $N = 3$ (9 modes propres), $N = 4$ (16 modes propres), $N = 5$ (25 modes propres) et $N = 6$ (36 modes propres).*

II.4) Résolution du problème (II.16)

II.4.1) Équation des ondes

Rappelons que le problème d'optimisation de forme s'écrit dans ce cas (à un coefficient multiplicateur près)

$$\sup_{\chi_\omega \in \mathcal{U}_L} J(\chi_\omega) = \sup_{\chi_\omega \in \mathcal{U}_L} \inf_{j \in \mathbb{N}^*} \int_\omega \phi_j(x)^2 \, dx.$$

Dans le cas de l'équation des ondes, la difficulté consiste à déduire des informations sur le problème d'optimisation de forme (II.16) à partir de la connaissance de la valeur optimale du problème

convexifié/relaxé (II.19). Rappelons que d'après (II.21) (voir [PTZb, Lemma 1]), on a

$$\sup_{\chi_\omega \in \mathcal{U}_L} \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \int_\Omega \chi_\omega(x)\phi_j(x)^2\,dx \ \leq L.$$

Il est alors pertinent de se demander si l'inégalité ci-dessus est une égalité. La réponse n'est pas évidente en raison du manque de continuité de la fonctionnelle J mis en évidence dans la section II.3). Le théorème qui suit établit l'égalité lorsque l'ouvert Ω satisfait des hypothèses géométriques d'ergodicité quantique.

Théorème. *(Théorème de no-gap, [PTZb, Theorem 6]) On se place dans le cas particulier où $\gamma_j = \frac{1}{2}$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la suite de mesures de probabilité $\mu_j = \phi_j^2(x)\,dx$ converge vaguement vers la mesure uniforme $\frac{1}{|\Omega|}\,dx$ (hypothèse "QUE", Quantum Unique Ergodicity), et qu'il existe $p \in (1,+\infty]$ tel que la suite des fonctions propres $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément bornée dans $L^p(\Omega)$. Alors*

$$\sup_{\chi_\omega\in\mathcal{U}_L} J(\chi_\omega) = \max_{a\in\overline{\mathcal{U}}_L} J(a) = L,$$

pour tout $L \in (0,1)$. En d'autres termes, il n'y a pas de gap entre le problème (II.16) et sa version convexifiée (II.19).

Ce théorème prouve donc que, sous des hypothèses d'ergodicité quantique, la valeur maximale de la constante d'observabilité randomisée $C^{(W)}_{T,\mathrm{rand}}(\chi_\omega)$ (dans l'ensemble $\mathcal{U}_L$) est égale à $TL/2$.

Commentons à présent les hypothèses d'ergodicité quantique utilisées dans le théorème de no-gap.

- Les hypothèses du théorème de no-gap sont vérifiées en dimension un. En effet, lorsque $\Omega = (0,\pi)$, les fonctions propres du Laplacien-Dirichlet sont données par $\phi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(jx)$, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. L'hypothèse "QUE" est alors simplement fournie par le théorème de Riemann-Lebesgue, établissant la convergence $*$-faible dans L^∞ de la suite de fonctions $(\phi_j^2)_{j\in\mathbb{N}^*}$ vers $1/\pi$.
- Pour des dimensions supérieures à 1, la situation est beaucoup moins claire. En effet, les hypothèses utilisées dans le théorème de no-gap sont liées à des propriétés d'ergodicité de Ω. Rappelons la définition d'un ouvert vérifiant la propriété d'ergodicité quantique "QE".

  > ***Propriété "QE" (Quantum Ergodicity).*** *Il existe une sous-suite de la suite de mesures de probabilité $\mu_j = \phi_j^2\,dx$ de densité un*[7] *convergeant vaguement vers la mesure uniforme $\frac{1}{|\Omega|}dx$.*

  Il est bien connu que, si le domaine Ω (vu comme un billard où le flot géodesique se déplace à vitesse un et rebondit sur la frontière en suivant les lois de l'optique géométrique) est ergodique, alors la propriété "QE" est satisfaite. Cette propriété est l'objet du théorème de Shnirelman, prouvé dans [CdV85, GL93, Šni74, ZZ96] dans des contextes variés (variétés avec ou sans bord, ayant une certaine régularité).
  En réalité, les résultats prouvés dans ces références sont plus forts, pour deux raisons. D'une part, ils sont valides dans toute base hilbertienne de fonctions propres de $\triangle$, tandis que, dans le théorème de no-gap, l'hypothèse d'ergodicité est supposée vraie dans la base hilbertienne des $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$, fixée dès le début de cette étude. D'autre part, ils établissent une version microlocale plus forte que la propriété "QE" ci-dessus, dans l'espace cotangent $S^*\Omega$ de Ω (espace des phases), et pas seulement dans l'espace des configurations Ω.
- La convergence vague des mesures μ_j est plus faible que la convergence faible dans $L^1(\Omega)$ des fonctions ϕ_j^2. Puisque Ω est borné, la propriété de convergence vague dans le théorème de Schnirelman revient à dire que, pour une sous-suite de densité un, $\int_\omega \phi_j(x)^2\,dx$ converge vers $|\omega|/|\Omega|$ pour tout sous-ensemble borélien ω de Ω tel que $|\partial\omega| = 0$ (c'est une conséquence

7. Cela signifie qu'il existe $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}^*$ tel que la quantité $\#\{j \in \mathcal{I} \mid j \leq N\}/N$ converge vers 1 quand N tend vers $+\infty$.

du théorème du porte-manteau [8]). À l'inverse, la propriété de convergence faible dans $L^1(\Omega)$ revient à dire que, pour une sous-suite de densité un, $\int_\omega \phi_j(x)^2\,dx$ converge vers $|\omega|/|\Omega|$ pour tout sous-ensemble mesurable ω de Ω. Sous l'hypothèse que les fonctions propres sont uniformément bornées dans $L^\infty(\Omega)$, ces deux notions sont équivalentes.
À notre connaissance, rien ne semble être connu sur la propriété de bornitude uniforme des fonctions propres dans $L^p(\Omega)$.
Comme précédemment, en utilisant le théorème du porte-manteau, on montre qu'en supposant la bornitude de la suite de fonctions propres $(\phi_j^2)_{j\in\mathbb{N}^*}$ dans $L^p(\Omega)$ (avec $p>1$), la propriété "QUE" implique la convergence faible dans $L^1(\Omega)$ de la suite de fonctions propres $(\phi_j^2)_{j\in\mathbb{N}^*}$.

- Le théorème de Shnirelman laisse possible l'émergence d'une sous-suite exceptionnelle convergeant vaguement vers une autre mesure. Par exemple, il pourrait arriver qu'une sous-suite de densité nulle converge vers une mesure invariante portée par des géodésiques fermées (typiquement des *cicatrices*, voir [FNDB03]).
  L'hypothèse "QUE" consiste à supposer que toute la suite $\mu_j = \phi_j^2\,dx$ converge vaguement vers la mesure uniforme. Cette hypothèse interdit les phénomènes de concentration évoqués précédemment.
  Cette question a été particulièrement étudiée dans le domaine de la physique quantique et mathématique. En effet, la quantité $\int_\omega \phi_j^2(x)\,dx$ s'interprète comme la probabilité de trouver l'état quantique d'énergie λ_j^2 dans ω.
  Insistons sur le fait que, dans notre étude, nous avons besoin d'une version afaiblie de l'hypothèse "QUE" (dans l'espace des configurations et pas dans l'espace des phases d'une part, et pour la base particulière de fonctions propres $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ d'autre part).
  L'hypothèse "QUE" est vraie en dimension un (conséquence du théorème de Riemann-Lebesgue) mais n'est cependant plus vérifiée dans un hypercube en dimension supérieure. Dans des cadres plus généraux, seuls des résultats partiels existent. La question de la détermination de toutes les limites faibles possibles des μ_j (mesures semi-classiques, ou mesures quantiques) reste en effet largement ouverte.
  À l'exception de résultats récents sur la validité de l'hypothèse "QE" dans des billards polygonaux rationnels (i.e. un polygone simplement connexe dont les angles sont des multiples rationnels de π, voir [MR12]) ou dans un tore plat (voir [Riv13]) et malgré les avancées récentes sur l'exploration de l'hypothèse "QUE" (voir par exemple l'article de survol [Sar11]),à notre connaissance, aucun exemple de domaine vérifiant l'hypothèse "QUE" n'est connu à partir de la dimension 2.
- L'existence d'un exemple de domaine Ω pour lequel il existe un gap entre les valeurs optimales du problème convexifié/relaxé (II.19) et du problème original (II.16) est une question ouverte. Nous pensons d'ailleurs que, si un tel exemple existe, alors le flot géodésique associé devrait présenter de fortes propriétés de concentration (typiquement les *cicatrices* mentionnées précédemment).
- Nos résultats montrent de fortes connexions entre le problème d'optimisation de forme considéré et des propriétés d'ergodicité du domaine Ω. Dans l'article [CFNS91], les auteurs ont analysé la décroissance exponentielle des solutions de l'équation des ondes avec un terme d'amortissement et ils ont observé que les effets quantiques des "whispering galleries" (chuchotements perçus à grande distance, par exemple une aiguille qui tombe entendue à l'autre bout d'un édifice ou la perception d'un quai de métro à l'autre) jouaient un rôle important dans la perte de la propriété de décroissance exponentielle dans le disque. Ils conjecturaient d'ailleurs que ce type de considération est essentiel pour traiter le problème de placement optimal de capteurs ou d'actionneurs.

8. Ce théorème, utilisé particulièrement en probabilités s'énonce ainsi : Soit μ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des mesure et suite de mesures finies sur un espace topologique X muni de la tribu des boréliens. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vaguement vers μ (i.e. $\mu_n(f) = \int_X f\,d\mu_n$ converge vers $\mu(f) = \int_X f\,d\mu$ pour toute fonction f continue à support compact) ;

(ii) $\mu_n(B)$ converge vers $\mu(B)$ pour tout borélien B tel que $\mu(\partial B) = 0$.

Non-existence d'un domaine optimal et remèdes. Comme nous l'avons vu précédemment, le maximum de J dans l'ensemble $\overline{\mathcal{U}}_L$ est toujours atteint (dans le cas des ondes comme dans celui de la chaleur). Par ailleurs, le nombre de maximiseurs est potentiellement infini, comme le montre l'exemple de la dimension un. La proposition sui suit caractérise d'ailleurs explicitement les maximiseurs en dimension un.

Proposition. *[PTZ13b, Proposition 1] Supposons que $\Omega = (0,\pi)$. Alors, le problème convexifié/-relaxé (II.19) possède une infinité de solutions, et*

$$\sup_{a\in\overline{\mathcal{U}}_L} \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \int_0^\pi a(x)\sin^2(jx)\,dx = \frac{L\pi}{2}.$$

De plus, toutes les solutions du problème (II.19) sont données par les fonctions de $\overline{\mathcal{U}}_L$ dont le développement en série de Fourier est de la forme

$$a(x) = L + \sum_{j=1}^{+\infty}(a_j\cos(2jx) + b_j\sin(2jx)),$$

avec des coefficients $a_j \leq 0$.

Une question naturelle est alors celle de l'existence de maximiseurs de J dans l'ensemble $\mathcal{U}_L$, autrement dit, l'existence d'un ensemble optimal dont la fontion caractéristique serait solution du problème (II.16). Cette question s'est avérée être ardue. Nous l'avons étudiée partiellement dans quelques cas particuliers où il était possible d'utiliser des outils d'analyse harmonique.

Dans le cas de la dimension un, on peut donner une réponse complète à cette question.

Théorème. *([HH03, Lemma 3.1] et [PTZ13b, Theorem 1]) Pour tout $L \in (0,1)$, on a*

$$\sup_{\chi_\omega\in\mathcal{U}_L} \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \int_\omega \sin^2(jx)\,dx = \frac{L\pi}{2}, \tag{II.27}$$

et le supremum est atteint si, et seulement si $L = 1/2$. De plus, lorsque $L = 1/2$ le problème (II.16) possède une infinité de solutions, qui les sont fonctions caractéristiques de tous les sous-ensembles mesurables $\omega \subset [0,\pi]$ de mesure $\pi/2$ tels que ω et l'ensemble symétrique $\omega' = \pi - \omega$ sont presque partout disjoints et complémentaires dans $[0,\pi]$.

En dimension supérieure, la question est complètement ouverte, et nous conjecturons que, pour des domaines Ω génériques et des valeurs génériques de L, le supremum n'est pas atteint, et il n'existe ainsi pas d'ensemble optimal.

Par exemple, dans le cas du carré en dimension deux, nous avons montré qu'en restreignant notre recherche aux fonctions caractéristiques d'ensembles s'écrivant comme le produit cartésien d'ensembles de dimension un, le supremum est atteint si, et seulement si $L \in \{1/4,1/2,3/4\}$, ce qui est en adéquation avec la conjecture formulée ci-dessus.

On peut alors se demander comment remédier au problème de non-existence (prouvé en dimension un, et conjecturé en dimensions supérieures). Une possibilité assez naturelle consiste à considérer un critère tronqué en fréquences, comme cela a été fait dans la section II.3). Malheureusement, en raison du phénomène de *spillover* traduisant un phénomène d'instabilité des maximiseurs, cette solution ne semble pas raisonnable. Cette instabilité peut en quelque sorte être imputée au fait que, dans la définition du critère J, tous les modes ont le même poids et cette critique peut être étendue à la définition de l'inégalité d'observabilité.

D'un point de vue pratique, et en raison par exemple de la difficulté des capteurs traditionnels à mesurer les hautes fréquences, on peut considérer que les basses fréquences doivent être davantage prises en compte que les hautes.

Cela nous a conduit à l'introduction d'un critère pénalisé à l'aide de poids renforçant l'importance des basses fréquences. L'inégalité d'observabilité pour l'équation des ondes avec condition de Dirichlet est naturellement obtenue en comparant la norme L^2 de l'observation à la norme $L^2\times H^{-1}$

des données initiales. Pour donner davantage d'importance aux basses fréquences, nous avons considéré une version équivalente de l'inégalité d'observabilité dans laquelle la norme $L^2 \times H^{-1}$ des données initiales a été remplacée par une norme équivalente produisant l'effet escompté.

Nous avons donc considéré l'inégalité d'observabilité

$$C_{T,\sigma}^{(W)}(\chi_\omega)\left(\|(y^0,y^1)\|_{L^2\times H^{-1}}^2+\sigma\|y^0\|_{H^{-1}}^2\right)\leq\int_0^T\int_\omega|y(t,x)|^2\,dx\,dt,$$

où $\sigma \geq 0$ désigne le poids utilisé. On a alors $C_{T,\sigma}^{(W)}(\chi_\omega) \leq C_T^{(W)}(\chi_\omega)$, et en considérant comme précédemment une version moyennisée de cette inégalité à l'aide d'une sélection aléatoire des données initiales (randomisation), on obtient $C_{T,\sigma,\mathrm{rand}}^{(W)}(\chi_\omega) = \frac{T}{2}J_\sigma(\chi_\omega)$, où la fonctionnelle J_σ est définie par

$$J_\sigma(\chi_\omega)=\inf_{j\in\mathbb{N}^*}\sigma_j\int_\omega\phi_j(x)^2\,dx,$$

avec $\sigma_j = \lambda_j^2/(\sigma+\lambda_j^2)$ (suite croissante de réels convergeant vers 1). On définit alors comme précédemment une version tronquée en modes de ce critère, notée $J_{\sigma,N}$ et obtenue en ne conservant que les N premiers modes dans l'infimum.

Nous avons obtenu un résultat de nature différente des précédents.

Théorème. *(Critère spectral avec poids, [PTZb, Theorem 9]) Supposons que la suite de mesures de probabilité $\mu_j = \phi_j^2(x)\,dx$ converge vaguement vers la mesure uniforme $\frac{1}{|\Omega|}\,dx$ (hypothèse Quantum Unique Ergodicity), et que la suite de fonctions propres ϕ_j est uniformément bornée dans $L^\infty(\Omega)$. Alors, pour tout $L \in (\sigma_1,1)$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$\max_{\chi_\omega\in\mathcal{U}_L}J_\sigma(\chi_\omega)=\max_{\chi_\omega\in\mathcal{U}_L}J_{\sigma,N}(\chi_\omega)\leq\sigma_1<L,$$

pour tout $N \geq N_0$. En particulier, le problème de maximisation de J_σ dans $\mathcal{U}_L$ possède une solution unique $\chi_{\omega^{N_0}}$, et l'ensemble ω^{N_0} a un nombre fini de composantes connexes.

Ce théorème établit que, si le poids σ est choisi suffisamment grand, la suite des ensembles optimaux ω^N est stationnaire lorsque L est suffisamment grand, et ω^{N_0} est alors l'unique ensemble optimal.

L'hypothèse d'ergodicité quantique (L^∞-QUE) est une hypothèse forte, valide par exemple en dimension un. Cependant, cette hypothèse n'est pas optimale puisqu'il est possible de démontrer que la conclusion du théorème ci-dessus reste vraie dans un hyperbube n-dimensionnel (avec conditions de Dirichlet), en utilisant la base hilbertienne usuelle construite à l'aide de produit de fonctions sinus.

Cette version avec poids du critère spectral peut être vue comme une façon d'éviter le phénomène de *spillover* puisque l'on observe un phénomène de stationnarisation de l'ensemble optimal, à l'opposé des oscillations des ensembles optimaux pour le problème tronqué caractéristique du phénomène de *spillover*.

Mentionnons enfin qu'un autre moyen d'éviter le phénomène de *spillover* consisterait à modifier non plus la fonctionnelle de coût, mais l'ensemble des formes admissibles, en imposant par exemple une contrainte de périmètre, une contrainte BV ou de type ε-cône.

II.4.2) Équation de la chaleur

Rappelons que le problème d'optimisation de forme s'écrit dans ce cas

$$\sup_{\chi_\omega\in\mathcal{U}_L}J(\chi_\omega)=\sup_{\chi_\omega\in\mathcal{U}_L}\inf_{j\in\mathbb{N}^*}\frac{e^{2\lambda_j^2T}-1}{2\lambda_j^2}\int_\omega\phi_j(x)^2\,dx.$$

Une différence de taille avec le problème d'optimisation de forme pour l'équation des ondes résulte de la forte dissipativité de l'équation des ondes. En effet, les hautes fréquences sont très fortement pénalisées dans le critère spectral, à l'aide d'un poids exponentiel. On comprend mieux pourquoi dans ce cas, les résultats établissent que seules les basses fréquences vont compter dans le procédé d'optimisation et que l'on n'observera pas de phénomène d'instabilité de type *spillover*. Le théorème qui suit formalise ces remarques.

Théorème. *Soit $T > 0$. On suppose $\partial\Omega$ de classe C^1 par morceaux. Il existe un unique*[9] *ensemble mesurable d'observation optimal ω^*, solution du problème (II.16). De plus :*

- $C_T(\chi_{\omega^*}) < C_{T,rand}(\chi_{\omega^*})$.
- *L'ensemble optimal ω^* est ouvert et semi-analytique (voir la note de bas de page 6). En particulier, ω^* a un nombre fini de composantes connexes et $|\partial\omega^*| = 0$.*
- *L'ensemble optimal ω^* est complètement caractérisé à partir des solutions optimales pour le problème tronqué (II.23) (en conservant seulement un nombre fini de modes). Plus précisément, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique ensemble mesurable ω^N tel que $\chi_{\omega^N} \in \mathcal{U}_L$ maximise la fonctionelle*

$$\chi_\omega \longmapsto \inf_{1\leq j\leq N} \frac{e^{2\lambda_j T}-1}{2\lambda_j} \int_\omega \phi_j(x)^2\,dx$$

dans $\mathcal{U}_L$. De plus, la suite des ensembles optimaux ω^N est stationnaire, i.e. il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega^N = \omega^*$ pour tout $N \geq N_0$. L'entier N_0 est une fonction décroissante de T et converge vers 1 quand $T \to +\infty$. Dans ce cas, l'ensemble optimal est un ensemble de niveau de la première fonction propre.

Ce résultat a en réalité été établi dans un cadre beaucoup plus général pour un large classe d'opérateurs paraboliques.

Dans le cas de l'équation de la chaleur, la preuve repose en particulier sur une minoration fine de la quantité $\inf_{j\geq 1} \int_\Omega a^*(x)\phi_j(x)^2\,dx$ où a^* désigne une solution du problème relaxé (II.19) obtenue à l'aide d'une généralisation de l'inégalité de Lebeau-Robbiano établie dans [AEWZ14], et valide pour des ensembles mesurables ω de mesure donnée.

Comme pour le cas de l'équation des ondes, ce résultat d'existence et d'unicité est valide dans toute base hilbertienne de fonctions propres du Laplacien-Dirichlet mais l'ensemble optimal dépend *a priori* du choix de la base.

Revenons sur les différences de nature des problèmes d'optimisation pour l'équation des ondes et de la chaleur. Dans le cas de l'équation des ondes, nous avons montré que :

- en considérant le même problème pour des données initiales fixées (i.e. minimisation par rapport à ω de mesure fixée du membre de droite dans l'inégalité d'observabilité pour une solution de l'équation des ondes dont on a fixé les données initiales), nous avons montré qu'il existe toujours un ensemble optimal et que pour certains choix de données initiales (même $\mathcal{C}^\infty$), l'ensemble optimal peut être très irrégulier, par exemple un Cantor (voir [PTZa]).
- comme nous l'avons vu précédemment, en raison du caractère conservatif de l'opérateur des ondes, toutes les fréquences propres jouent le même rôle dans le critère

$$\inf_{j\in\mathbb{N}^*} \int_\omega \phi_j(x)^2\,dx,$$

et c'est pour cette raison que se produit le phénomène d'instabilité des ensembles optimaux dit de *spillover* (voir [HH05, PTZ13b]). Plus précisément, l'ensemble optimal ω^N pour N modes est le pire possible lorsque l'on considère $N+1$ modes.
La raison est que le problème d'optimisation de forme n'a pas de solution, mais les suites maximisantes tendent à équirépartir le domaine d'observation (voir [PTZb]).

Comme le stipule le théorème précédent, un tel phénomène d'instabilité ne survient pas lorsque l'on considère l'équation de la chaleur. Au contraire, on observe un phénomène de stationnarisation de l'ensemble optimal en approchant le problème avec tous les modes par une famille de problèmes tronqués.

Cas des diffusions anormales. Une généralisation du problème de positionnement optimal de capteurs de température consiste à remplacer l'équation habituelle de la chaleur par l'équation de diffusion anormale

$$\partial_t y + (-\triangle)^\alpha y = 0, \tag{II.28}$$

9. Voir la note de bas de page 5

considérée sur un domaine Ω, où $(-\triangle)^\alpha$ désigne une puissance positive du Laplacien-Dirichlet.

Cette équation est utilisée dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques (plasma avec diffusion lente ou rapide, cristaux apériodiques, spins, etc), en biomathématiques, en économie, ou encore en image (voir par exemple [MK04, Mil06, SKB02]).

On adopte le même point de vue que précédemment, en modélisant le problème d'observation optimale à l'aide du procédé de randomisation. Le problème s'écrit alors

$$\sup_{\chi_\omega \in \mathcal{U}_L} J(\chi_\omega) = \sup_{\chi_\omega \in \mathcal{U}_L} \inf_{j \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{2\lambda_j^{2\alpha} T} - 1}{2\lambda_j^{2\alpha}} \int_\omega \phi_j(x)^2 \, dx. \tag{II.29}$$

En s'inspirant de la démonstration du théorème précédent, nous avons montré que si $T > 0$ est donné, si $\partial\Omega$ est de classe C^1 par morceaux et si $\alpha > 1/2$ (ou si $\alpha = 1/2$ et T est suffisamment grand), alors il existe un unique ensemble optimal d'observation.

De plus, en nous intéressant aux cas particuliers où Ω est un carré ou un disque, nous avons établi des résultats assez surprenants, démontrant notamment que divers phénomènes peuvent survenir :

- dans le carré $\Omega = (0,\pi)^2$, on considère la base hilbertienne usuelle donnée par

$$\phi_{j_1,\dots,j_n}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \prod_{k=1}^{n} \sin(j_k x_k), \tag{II.30}$$

pour tout $(j_1,\dots,j_n) \in \mathbb{N}^{*n}$, dont les valeurs propres correspondantes sont données par $\lambda_{(j_1,\dots,j_n)} = \left(\sum_{k=1}^n j_k^2\right)^\alpha$. On montre alors dans ce cas que le problème (II.29) possède une solution unique qui est un ouvert semi-analytique ayant donc un nombre fini de composantes connexes, et ceci quelle que soit la valeur de $\alpha > 0$. Le résultat complet est énoncé dans [PTZc, Theorem 4].
Le lemme suivant constitue un ingrédient clef dans la preuve de ce résultat.
Lemme. *Soit $\rho \in L^\infty((0,\pi)^n)$ une fonction positive telle que $\int_{(0,\pi)^n} \rho(x)\,dx > 0$. On a*

$$\inf_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N}^{*n}} \int_{(0,\pi)^n} \rho(x)\phi_{j_1,\dots,j_n}(x)^2 \, dx \geq F^{[n]}\left(\int_{(0,\pi)^n} \rho(x)\,dx\right) > 0,$$

où F désigne la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $F(s) = \frac{1}{\pi}(s - \sin s)$, et $F^{[n]}$ est la composée de F avec elle-même, n fois.

- dans le disque unité $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$, on considère la base hilbertienne usuelle définie à l'aide des fonctions de Bessel :

$$\phi_{j,k,m}(r,\theta) = \begin{cases} R_{0,k}(r)/\sqrt{2\pi} & \text{si } j = 0, \\ R_{j,k}(r)Y_{j,m}(\theta) & \text{si } j \geq 1, \end{cases} \tag{II.31}$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $m = 1,2$, où (r,θ) sont les coordonnées polaires. Les fonctions $Y_{j,m}(\theta)$ sont définies par $Y_{j,1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(j\theta)$ et $Y_{j,2}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(j\theta)$, et les fonctions $R_{j,k}$ sont définies par

$$R_{j,k}(r) = \sqrt{2}\,\frac{J_j(z_{j,k}r)}{|J_j'(z_{j,k})|} = \frac{J_j(z_{j,k}r)}{\sqrt{\int_0^1 J_j(z_{j,k}r)^2 r\,dr}}, \tag{II.32}$$

où J_j est la $j^{\text{ème}}$ fonction de Bessel du premier ordre, et $z_{j,k} > 0$ est lae $k^{\text{ème}}$ zéro strictement positif de J_j. Les valeurs propres correspondantes sont données par $\lambda_{j,k} = z_{j,k}^{2\alpha}$ et $\lambda_{j,k}$ est de multiplicité 1 si $j = 0$, et 2 si $j \geq 1$.
On montre alors que, quelle que soit la valeur de $\alpha > 0$, il existe un unique ensemble optimal ω^* qui de plus est un ouvert radial. De plus :
— si $\alpha > 1/2$ alors ω^* est constitué d'un nombre fini d'anneaux concentriques et sa distance au bord du disque est strictement positive ;

— si $\alpha < 1/2$ (ou si $\alpha = 1/2$ et T est suffisamment petit) alors ω^* est constitué d'un nombre infini d'anneaux concentriques s'accumulant sur le bord du disque (!).

Ce résultat surprenant prouve que la complexité de l'ensemble optimal dépend non seulement de l'opérateur, mais également de la géométrie du domaine Ω. L'énoncé complet est fourni dans [PTZc, Theorem 5].

Le preuve consiste à appliquer une version précisée du théorème du minimax de Sion se trouvant dans [Har82]. Elle permet d'écrire des conditions d'optimalité nécessaires et suffisantes s'exprimant à l'aide d'une fonction de switch, dont il faut prouver qu'elle ne peut pas rester constante sur un ensemble de mesure strictement positive.

On montre alors à l'aide d'estimations fines sur les fonctions de Bessel que cette fonction est analytique.

II.5) Conclusion

Dans un souci de clarté et de simplicité de la présentation, ce manuscrit s'articule autour de l'étude des équations des ondes et de la chaleur. En réalité, les études présentées dans [PTZb, PTZc] s'appliquent à des classes de systèmes plus larges. Nous renvoyons à ces articles pour un énoncé précis des résultats qu'ils contiennent mais évoquons brièvement ci-dessous le cadre général abordé.

♠ Systèmes conservatifs.

L'étude du problème d'optimisation de forme (II.16) abordée dans la section II.4.1) s'étend en réalité à l'équation de Schrödinger sur des variétés riemanniennes sans bord, ou avec un bord avec des conditions frontières de la forme $By = 0$ sur $(0,T) \times \partial\Omega$, où l'opérateur B désigne

— l'opérateur de trace de Dirichlet, $By = y_{|\partial\Omega}$,
— ou Neumann, $By = \frac{\partial y}{\partial n}_{|\partial\Omega}$, où $\frac{\partial}{\partial n}$ désigne la dérivée normale extérieure sur la frontière $\partial\Omega$,
— ou mixte Dirichlet-Neumann, $By = \chi_{\Gamma_0} y_{|\partial\Omega} + \chi_{\Gamma_1} \frac{\partial y}{\partial n}_{|\partial\Omega}$, où $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ avec $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, et χ_{Γ_i} est la fonction caractéristique de Γ_i, $i = 0,1$,
— ou Robin, $By = \frac{\partial y}{\partial n}_{|\partial\Omega} + \beta y_{|\partial\Omega}$, où β est une fonction positive mesurable définie sur $\partial\Omega$, telle que $\int_{\partial\Omega} \beta > 0$.

L'opérateur Laplacien est alors remplacé par l'opérateur de Laplace-Beltrami et l'inégalité d'observabilité est alors modifiée. Ces remarques se formalisent aisément à l'aide d'un cadre abstrait. En effet, appelons X l'espace $L^2(\Omega,\mathbb{C})$ dans les cas Dirichlet, mixte Dirichlet-Neumann et Robin, et $L^2_0(\Omega,\mathbb{C})$ dans le cas Neumann ou sans bord, avec

$$L^2_0(\Omega,\mathbb{C}) = \{y \in L^2(\Omega,\mathbb{C}) \mid \int_\Omega y(x)\,dx = 0\}.$$

On note $A = -\triangle_g$ le Laplacien-Beltrami sur la variété M munie d'une métrique riemannienne g, sont le domaine de définition est $D(A) = \{y \in X \mid Ay \in X \text{ and } By = 0\}$ où B définit une condition au bord comme ci-dessus (avec la convention que $B = 0$ dans le cas où Ω est sans bord).
Pour tout $(y^0,y^1) \in D(A^{1/2}) \times X$, il existe une unique solution y de l'équation des ondes $\partial_{tt} y = \triangle_g y$ sur la variété M qui appartient à l'espace $C^0(0,T;D(A^{1/2})) \cap C^1(0,T;X)$ telle que $y(0,\cdot) = y^0(\cdot)$ and $\partial_t y(0,\cdot) = y^1(\cdot)$.
Soit ω un sous-ensemble mesurable de Ω de mesure strictement positive.
L'équation des ondes est alors dite *observable* sur ω en temps T s'il existe $C_T^{(W)}(\chi_\omega) > 0$ tel que

$$C_T^{(W)}(\chi_\omega)\|(y^0,y^1)\|^2_{D(A^{1/2})\times X} \leq \int_0^T \int_\omega |\partial_t y(t,x)|^2\,dV_g\,dt, \tag{II.33}$$

pour tout $(y^0,y^1) \in D(A^{1/2}) \times X$.
Pour l'équation de Schrödinger $i\partial_t y = \triangle_g y$, pour tout $y^0 \in D(A)$, il existe une unique solution y appartenant à l'espace $C^0(0,T;D(A))$ telle que $y(0,\cdot) = y^0(\cdot)$. Cette équation est

alors dite *observable* sur ω en temps T s'il existe $C_T^{(S)}(\chi_\omega) > 0$ tel que

$$C_T^{(S)}(\chi_\omega)\|y^0\|^2_{D(A)} \leq \int_0^T \int_\omega |\partial_t y(t,x)|^2 \, dV_g \, dt, \tag{II.34}$$

pour tout $y^0 \in D(A)$.

♠ Systèmes paraboliques.

Voici le cadre général dans lequel les résultats de l'article [PTZc] sont valides et dont les résultats de la section II.4.2) peuvent être vus comme un cas particulier. L'ouvert Ω est un sous-ensemble connexe et borné de $\mathbb{R}^n$. L'opérateur $A_0 : D(A_0) \to L^2(\Omega,\mathbb{C})$ génère un semi-groupe fortement continu sur $L^2(\Omega,\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe une base hilbertienne $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ of $L^2(\Omega,\mathbb{C})$ constituée de fonctions propres à valeurs complexes de A_0, associées aux valeurs propres $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ telles que $\Re e(\lambda_1) \leq \cdots \leq \Re e(\lambda_j) \leq \cdots$, et telles que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H_1) (*Propriété d'indépendance conique*) S'il existe un sous-ensemble E de Ω de mesure de Lebesgue strictement positive, un entier $N \in \mathbb{N}^*$, un N-uplet $(\alpha_j)_{1\leq j\leq N} \in (\mathbb{R}_+)^N$, et $C \geq 0$ tels que si $\sum_{j=1}^N \alpha_j |\phi_j(x)|^2 = C$ presque partout sur E, alors nécessairement $C = 0$ et $\alpha_j = 0$ pour tout $j \in \{1,\cdots,N\}$.

(H_2) Pour tout $a \in L^\infty(\Omega;[0,1])$ tel que $\int_\Omega a(x)\,dx = L|\Omega|$, on a

$$\liminf_{j\to+\infty} \ \gamma_j(T) \int_\Omega a(x)|\phi_j(x)|^2 \, dx > \gamma_1(T);$$

(H_3) Les fonctions propres ϕ_j sont analytiques dans Ω.

Cette approche abstraite a permis de dériver résultats sur l'optimisation de la forme et position de capteurs dans le cas d'un écoulement fluide, modélisé par un système de Stokes, ou encore pour des systèmes soumis à des phénomènes de diffusion anormale, qui ont été évoqués dans le corps de ce manuscrit.

Plusieurs pistes d'étude restent encore inexplorées et feront l'objet d'études dans les mois et les années à venir.

- la question du positionnement optimal d'actionneurs ou de contrôleurs est une problématique très liée à celle que des capteurs. Il s'agit de déterminer le support d'un contrôle agissant sur une partie de la frontière ou sur un sous-domaine de Ω. Il paraît alors raisonnable de déterminer les forme et position du support de façon à minimiser l'énergie dépensée pour contrôler le système. Par exemple, dans le cas de l'équation des ondes, le problème de contrôle à zéro consiste à déterminer une fonction h_ω dont le support est $[0,T] \times \omega$ avec ω un ensemble mesurable de Ω, tel que

$$y(T,\cdot) = \partial_t y(T,\cdot) = 0. \tag{II.35}$$

où y est la solution de l'équation des ondes

$$\begin{array}{ll} \partial_{tt} y(t,x) - \triangle y(t,x) = h_\omega(t,x), & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ y(t,0) = y(t,\pi) = 0, & t \in [0,T], \\ y(0,x) = y^0(x), \ \partial_t y(0,x) = y^1(x) & x \in \Omega, \end{array} \tag{II.36}$$

avec $(y^0,y^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. La résolution du problème de contrôle est bien connue, à l'aide de la méthode HUM (voir par exemple [Lio88]). Appelons Γ_ω l'opérateur de contrôle

défini par

$$\begin{array}{rccc} \Gamma_\omega : & H_0^1(\Omega) \times L^2(0,\pi) & \longrightarrow & L^2((0,T)\times\Omega) \\ & (y^0,y^1) & \longmapsto & h_\omega. \end{array}$$

Il est alors pertinent de déterminer le sous-domaine $\omega \subset \Omega$ minimisant la norme de l'opérateur Γ_ω parmi les domaines mesurables de mesure fixée. Il est également raisonnable de s'intéresser à une version randomisée de ce critère. Ce problème a été résolu dans le cas monodimensionnel dans l'article [PTZ13a].
Le pendant de ce problème dans le cas parabolique est actuellement en cours d'étude. L'adaptation des approches exposées dans ce chapitre nécessite d'aborder des questions intéressantes et non triviales sur la commutation de l'opérateur de contrôle avec l'opérateur de randomisation des données initiales.

- Les mêmes questions que celles évoquées dans ce chapitre se posent pour déterminer les forme et position de capteurs ou actionneurs répartis sur le bord d'un domaine ouvert connexe borné Ω. C'est l'objet de la thèse de Pierre Jounieaux (Univ. Paris 6) que je co-encadre actuellement avec Emmanuel Trélat. Ce travail est également motivé par des applications plus concrètes à l'imagerie médicale (la tomographie thermo-acoustique). On est alors conduit en modélisant le problème à l'aide du procédé de randomisation à étudier des quantités spectrales définies sur le bord du domaine. Par exemple, dans le cas de l'équation des ondes avec conditions au bord de Dirichlet, lorsque le bord de Ω est C^2, on est conduit à s'intéresser au problème suivant :

$$\sup_{\substack{\Sigma\subset\partial\Omega \\ \mathcal{H}^{n-1}(\Sigma)=L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}} \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\lambda_j} \int_\Sigma \left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1},$$

avec $\mathcal{H}^{n-1}$ la mesure de Hausdorff $n-1$-dimensionnelle et $L \in (0,1)$.

- L'analyse numérique de ce problème d'optimisation de forme est une question très naturelle en vue des applications concrètes. Qu'il s'agisse de problèmes d'optimisation de forme pour l'équation des ondes ou de la chaleur, à données initiales fixées ou uniforme vis-à-vis des données initiales, on peut en général montrer facilement que le problème discrétisé associé possède une solution (la forme est alors un ensemble de points par exemple) et se demander si l'on peut espérer une convergence, en un sens à préciser, de la forme optimale discrète vers la solution du problème continu, et si ça n'est pas le cas, comment modifier les approximations numériques dans ce but.

III.

Conclusion et perspectives de recherche

Dans les chapitres précédents, j'ai mentionné divers projets de recherche en cours ou à venir s'inscrivant dans la continuité directe des travaux décrits dans ce manuscrit. En guise de conclusion, je présente dans cette partie quelques sujets de recherche en cours ou à venir possédant un lien moins immédiat avec les thématiques abordées dans ce manuscrit.

Problèmes de généricité par rapport au domaine. Avec M. Sigalotti (INRIA, Saclay), nous nous sommes intéressé à une propriété géométrique très proche de l'hypothèse (H_1) énoncée dans la section II.5) et s'énonçant ainsi :

(H) "les carrés des n premières fonctions propres de l'opérateur Laplacien-Dirichlet sur Ω forment une famille libre".

En sus de son intérêt intrinsèque, cette propriété présente un intérêt pour le contrôle approché de l'équation de Schrödinger (voir ci-dessous).

Nous avons ainsi démontré dans [PS10b, PS10a] que l'ensemble des $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ connexes (avec $d \geq 2$ fixé) dont la frontière est de classe $\mathcal{C}^m$ (avec $m \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ fixé) et vérifiant la propriété (H) est ouvert et dense dans l'ensemble des Ω connexes éléments de $\mathbb{R}^d$ dont la frontière est de classe $\mathcal{C}^m$. On dit alors que la propriété précédente est *génériquement*[1] *vraie* par rapport au domaine Ω.

On peut noter que la propriété (H) n'est probablement pas vraie en toute généralité : en effet, Mahar et Willner ont établi dans [MW80] que les carrés des fonctions propres d'un opérateur de type Sturm-Liouville ne sont pas indépendants.

Nous avons utilisé ce résultat de généricité pour démontrer que, génériquement par rapport aux domaines Ω de classe $\mathcal{C}^m$, l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} i\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,x) = (-\Delta + u(t)W(x))\psi(t,x), & (t,x) \in (0,+\infty) \times \Omega \\ \psi(t,x) = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ \psi(0,x) = \psi_0(x) & x \in \Omega, \end{cases} \tag{III.1}$$

avec $W \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ est approximativement contrôlable à l'aide de commandes $u \in L^\infty([0,+\infty),\mathbb{R})$.

Avec Mario Sigalotti (INRIA Saclay) et Florian Méhats (Univ. Rennes 1), nous venons d'achever un travail concernant une propriété de contrôlabilité générique de systèmes quantiques plus complexes (transport quantique dans une structure électronique).

En adoptant les notations de la figure III.1, nous avons considéré le système contrôlé suivant :

1. Plus précisément, si on se donne un espace de Baire X, un ensemble résiduel (i.e. l'intersection dénombrables d'une famille d'ouverts denses) est dense dans X. Une fonction booléenne $\mathcal{P} : X \to \{0,1\}$ est dite *generic* dans X s'il existe un ensemble résiduel Y tel que tout x dans Y satisfasse la propriété $\mathcal{P}$, autrement dit $\mathcal{P}(x) = 1$.

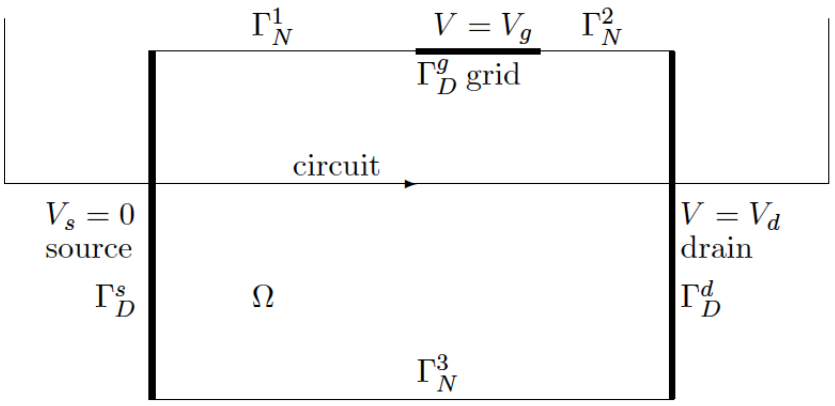


FIGURE III.1 : *Représentation du transistor*

$$\begin{cases} i\partial_t\psi(t,x) = -\Delta\psi(t,x) + V(t,x)\psi(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ -\Delta V(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \psi(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \\ V(t,x) = \chi(x)V_g(t), & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma_D^g, \\ V(t,x) = V_s = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma_D^s, \\ V(t,x) = V_d = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma_D^d, \\ \dfrac{\partial V}{\partial \nu}(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma_N, \end{cases} \tag{III.2}$$

où le facteur χ est une approximation régulière (pour des raisons techniques) de la fonction constante $1_{Q(\Gamma_D^g)}$ modélisant des inhomogénéités spatiales.

Nous nous sommes intéressés au problème consistant à contrôler de façon approchée le système (III.2) dans $L^2(\Omega,\mathbb{C})$ à l'aide de la commande $V_g \in L^\infty([0,T],[0,\delta])$. Nous avons prouvé la contrôlabilité approchée générique de ce système par rapport à la longueur et la position de la grille, et également par rapport à la forme du domaine Ω.

Concentration des fonctions propres dans le carré ou le disque. La question de la concentration des fonctions propres dans un domaine (par exemple certains hauts modes des fonctions propres du disque se concentrant sur le bord du domaine) et de la localisation des fonctions propres est très liée aux propriétés d'ergodicité utilisées dans la section II.4.1).

Dans le très didactique article de survol [GN13] sur les fonctions propres du Laplacien, il est conjecturé (voir la section 7.7.3) que les fonctions propres du carré unité ne se concentrent pas, au sens suivant :

$$\inf_{\phi\in\mathcal{E}} \int_V \phi(x)^2\,dx > 0,$$

pour tout sous-ensemble mesurable V du carré unité, où $\mathcal{E}$ est l'ensemble de toutes les fonctions propres du carré unité normalisées dans $L^2([0,1]^2)$.

Afin d'apporter une réponse précise à cette question, j'étudie actuellement avec Emmanuel TRÉLAT le problème d'optimal design s'écrivant en utilisant les mêmes notations que ci-dessus

$$\inf_{\substack{V\subset[0,1]^2 \\ |V|=L}} \inf_{\phi\in\mathcal{E}} \int_V \phi(x)^2\,dx,$$

avec $L \in (0,1)$.

Le même type de question se pose également dans le cas du disque et de l'ellipse, où il est possible de mener explicitement des calculs. Bien sûr, on sait d'ores et déjà que certaines sous-suites de fonctions propres se concentrent sur le bord. La connaissance précise des limites quantiques des fonctions propres dans le disque permet de mieux comprendre ces phénomènes de concentration. Avec Luc Hillairet (univ. Orléans) et Emmanuel Trélat, nous avons récemment répondu à cette question dans le cas du disque.

Théorème. *Soit $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction $R_{j,k}$ par*

$$R_{j,k}(r) = \sqrt{2}\,\frac{J_j(z_{j,k}r)}{|J_j'(z_{j,k})|} = \frac{J_j(z_{j,k}r)}{\sqrt{\int_0^1 J_j(z_{j,k}r)^2 r\,dr}}, \tag{III.3}$$

où J_j est la j-ème fonction de Bessel du premier ordre, et $z_{j,k} > 0$ est le k-ème zéro de J_j.

L'ensemble des valeurs d'adhérence pour la topologie faible de $L^1(0,1)$ des fonctions $r \in [0,1] \mapsto R_{j,k}(r)^2 r$ quand $j + k \to +\infty$ est l'ensemble des fonctions $(f_s)_{0\le s<1}$, où f_s est défini par

$$f_s : (r,\theta) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,\frac{r}{\sqrt{r^2-s^2}}\,\chi_{[s,1]}(r), \tag{III.4}$$

pour tout $s \in [0,1)$.

Nous sommes actuellement en train de réfléchir au même problème dans le cas de l'ellipse.

Enfin, dans le cadre de la thèse de Thibault Liard (univ. Paris 6), motivés par des applications en contrôle et stabilisation de l'équation des ondes, nous étudions avec Pierre Lissy (univ. Paris Dauphine) un problème similaire survenant pour des opérateurs de Sturm-Liouville. Ce problème s'écrit

$$\inf_{a\in\mathcal{A}_M} \inf_{\substack{\omega\subset(0,L)\\ \text{t.q. } |\omega|=\alpha L}} \inf_{j\ge 1} \int_\omega e_{a,j}(x)^2\,dx, \tag{III.5}$$

où $e_{j,a}$ est la j-ème fonction propre du problème

$$\begin{aligned} &-e_{a,j}''(x) + a(x)e_{a,j}(x) = \lambda_{a,j}^2 e_{a,j}(x) \quad x \in (0,L)\\ &e_{a,j}(0) = e_{a,j}(L) = 0. \end{aligned} \tag{III.6}$$

et où $\mathcal{A}_M$ désigne une classe de potentiels définie pour $M > 0$ par

$$\mathcal{A}_M = \{a \in L^\infty(0,L) \mid 0 \le a \le M \text{ p.p. dans } (0,L)\}, \tag{III.7}$$

Positionnement de capteurs en tomographie thermo-acoustique. Avec Maïtine Bergounioux (univ. d'Orléans), Pierre Jounieaux étudiant en thèse sous ma direction et celle d'Emmanuel Trélat à l'univ. Paris 6 et Antoine Laurain (univ. Berlin), nous nous intéressons à un problème de positionnement optimal de capteurs dans le cadre de la tomographie thermo acoustique, une nouvelle technique d'imagerie non invasive de détection du cancer du sein. Le principe en est simple : les tissus à imager sont illuminés par une impulsion électromagnétique radiofréquence ; en absorbant cette énergie les tissus se réchauffent et subissent une expansion non uniforme générant une onde de pression acoustique, recueillie autour du corps par des détecteurs appropriés. La méthode repose sur la possibilité de distinguer les différents types de tissus présents dans le corps humain en identifiant leur capacité à absorber l'impulsion électromagnétique originale. Du fait de la relative jeunesse du procédé et du manque d'expérience clinique, il n'existe pas à proprement parler un modèle de la tomographie thermo acoustique. Par ailleurs, les différences entre les modèles existants résident principalement dans le degré de simplification des phénomènes générant l'onde acoustique et dans le dispositif de mesure privilégié. Un modèle possible, obtenu grâce à un grand nombre d'approximations (homogénéité de l'illumination, homogénéité du corps, viscosité du milieu, ...), permet d'obtenir $p(t,x)$, la pression acoustique mesurée sur une surface entourant le corps. Nous supposons que l'objet à scanner est assimilable à un fluide non visqueux, isotrope et homogène, ce qui pour des applications cliniques telles que la détection des tumeurs

dans des tissus souples, représente une approximation sensée puisqu'une grande partie du corps humain est composée d'eau. p est alors solution de l'équation des ondes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(t,x) - \Delta p(t,x) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ p(0,x) = p_0(x) = \frac{\mu_{\text{abs}}(x)\beta(x)J(x)v_s}{c_p(x)} & x \in \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial t}(0,x) = p_1(x) = 0 & x \in \Omega, \end{cases} \tag{III.8}$$

où Ω désigne la surface entourant le corps à scanner sur laquelle sont effectuées les mesures, $\mu_{\text{abs}}(x)$ est le coefficient d'absorption, $\beta(x)$ le coefficient d'expansion isobare, v_s la vitesse du son dans l'eau, $J(x)$ la distribution spatiale de l'intensité de la radiation électromagnétique et $c_p(x)$ la capacité thermique spécifique. On ferme alors ce système en ajoutant des conditions au bord ad hoc pour que l'équation soit bien posée. L'approche standard en tomographie thermo acoustique consiste à mesurer l'onde de pression acoustique à l'aide de capteurs piézoélectriques disposés sur une surface entourant le corps. Bien évidemment en pratique on ne peut placer qu'un nombre fini de détecteurs autour du corps, et la plupart du temps il est impossible d'en disposer tout autour de la personne. Supposons que l'on cherche à reconstruire l'application p_0 à support dans la boule unité $B(0,1)$. Soit Ω, un ouvert borné contenant $B(0,1)$. Notons $\mathcal{S}$ un sous-ensemble (strict en pratique) de $\partial\Omega$. Le problème inverse de la tomographie thermo acoustique dans ce cadre consiste à reconstruire $p_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(B(0,1))$ à partir de la connaissance de $\{p(t,x) \mid t > 0,\ x \in \mathcal{S}\}$, où p est solution de (III.8). Il s'agit donc d'un problème de reconstruction d'une condition initiale à partir d'observations restreintes à une surface. L'étude de ce problème inverse a été (notamment) menée dans [AGJN13, BRUZ11, BU10].

Une question naturelle concerne alors la forme et le positionnement optimal des capteurs à disperser sur la surface (une variété à bord par exemple) entourant l'objet en vue de reconstruire la fonction p_0 "au mieux".

Il n'est cependant pas possible d'utiliser l'approche adoptée dans la section II.16 car il ne s'agit pas d'une situation d'observabilité, notamment en raison des faibles temps d'acquisition des mesures. Nous réfléchissons actuellement à un modélisation de ce problème en utilisant une approche de contrôle optimal, et à l'implémentation numérique de ce problème.

Asymptotique de la constante d'observabilité pour l'équation des ondes. Soit (Ω,h) une variété riemannienne compacte de dimension n. On considère l'équation des ondes dans Ω

$$\partial_{tt} y = \triangle y, \tag{III.9}$$

Soit ω un sous-ensemble de Ω de mesure de Lebesgue strictement positive, et soit $T > 0$. On note χ_ω la fonction caractéristique de ω.

Rappelons que l'équation (III.9) est dite *observable* sur ω en temps T s'il existe $C > 0$ telle que

$$C\|(y^0,y^1)\|^2_{L^2\times H^{-1}} \leq \int_0^T \int_\omega |y(t,x)|^2 \, dx\, dt, \tag{III.10}$$

pour tout $(y^0,y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ où l'on désigne par dx l'élément de volume associé à la métrique riemannienne h.
Introduisons la meilleure constante dans l'inégalité (III.10), donnée par

$$C_T(\chi_\omega) = \inf \left\{ \frac{\int_0^T \int_\omega |y(t,x)|^2 \, dx\, dt}{\|(y^0,y^1)\|^2_{L^2\times H^{-1}}} \mid (y^0,y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \setminus \{(0,0)\} \right\}. \tag{III.11}$$

On l'appelle la *constante d'observabilité* en temps T. Il est bien connu que $C_T(\chi_\omega) > 0$ si, et seulement si (ω,T) satisfait la condition de contrôle géométrique (voir [BLR92]).
Avec Emmanuel Humbert (univ. Tours) et Emmanuel Trélat (univ. Paris 6), nous cherchons à déterminer (si elle existe) la limite

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{C_T(\chi_\omega)}{T}.$$

Nous avons bon espoir de conclure cette étude dans les mois à venir. Comme dans l'article [BLR92], cette limite devrait faire intervenir la quantité spectrale

$$g_1(\omega) = \inf_{\phi\in\mathcal{E}} \int_\omega \phi^2\, dx$$

où $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions propres du Laplacien normalisées dans $L^2(\Omega)$. ainsi que la quantité géométrique

$$g_2(\omega) = \lim_{T\to+\infty} \inf_\gamma m_T(\gamma)$$

où l'infimum porte sur l'ensemble de toutes les géodésiques γ de Ω, et

$$m_T(\gamma) = \frac{1}{T}\int_0^T \chi_\omega(\gamma(t))dt$$

représente la moyenne de temps passée par la géodésique γ dans ω.

Notons qu'en dimension un, il est aisé d'établir (voir par exemple [PTZ13b]) que pour toute fonction caractéristique χ_ω d'un ensemble mesurable ω, on a

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{C_T(\chi_\omega)}{T} = \frac{1}{\pi} \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \int_\omega \sin^2(jx)\, dx.$$

Inégalités de Faber-Krahn et Korn en mécanique des fluides. Les inégalités de type Faber-Krahn sur les valeurs propres d'opérateurs elliptiques ont fait l'objet de beaucoup d'études (voir par exemple l'ouvrage [Hen06] pour un survol sur ces questions). Dans le cadre de la mécanique des fluides, ces questions ont été peu étudiées. Il s'agit (par exemple) de considérer la minimisation de la première valeur propre $\lambda_1(\Omega)$ de l'opérateur de Stokes avec conditions de Dirichlet parmi les domaines Ω connexes bornés de $\mathbb{R}^n$ de mesure $|\Omega| = V_0$, avec $V_0 > 0$ fixé. Ce problème s'écrit

$$\inf_{\substack{\Omega\subset\mathbb{R}^n\\ |\Omega|=V_0}} \lambda_1(\Omega)$$

où $\lambda_1(\Omega)$ désigne la plus petite valeur propre associée au problème aux valeurs propres

$$\begin{array}{ll} -\mu\Delta \boldsymbol{u}^j + \nabla p^j = \lambda_j(\Omega)\boldsymbol{u}^j & x\in\Omega \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}^j = 0 & x\in\Omega \\ \boldsymbol{u}^j = 0 & x\in\partial\Omega. \end{array}$$

Un problème proche est celui de déterminer la constante optimale dans l'inégalité de Korn, bien connue en mécanique des fluides. Ce problème s'écrit

$$\inf_{|\Omega|=V_0} \inf_{\substack{\boldsymbol{v}\in\setminus[H^1(\Omega)]^3\{0\}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0}} \frac{\int_\Omega |\varepsilon(\boldsymbol{v})|^2\, dx}{\|\boldsymbol{v}\|_{[H^1(\Omega)]^3}}.$$

Avec Antoine Henrot (École des Mines de Nancy), nous nous intéressons à l'optimalité de la boule pour ce type de problème.

Optimisation de forme en mécanique des fluides. Avec Pascal Frey (univ. Paris 6), nous souhaitons développer un certain nombre d'outils permettant d'aborder l'optimisation d'un inhalateur à poudre sèche, tel que celui présenté sur la figure III.2 (appelé DPI : Dry Powder Inhaler). Cette optimisation poursuit deux objectifs distincts : l'optimisation de la dispersion particulaire en entrée de trachée et l'optimisation des interactions particule-particule et particule-paroi, décrites ci-après.

Il sera de prime abord nécessaire de modéliser le problème direct puis d'optimisation de forme de façon pertinente.

Nous envisageons d'utiliser le modèle décrit dans [BDGM09], couplant les équations de Navier-Stokes et de Vlasov pour décrire le modèle d'interaction entre les particules du spray, décrites par

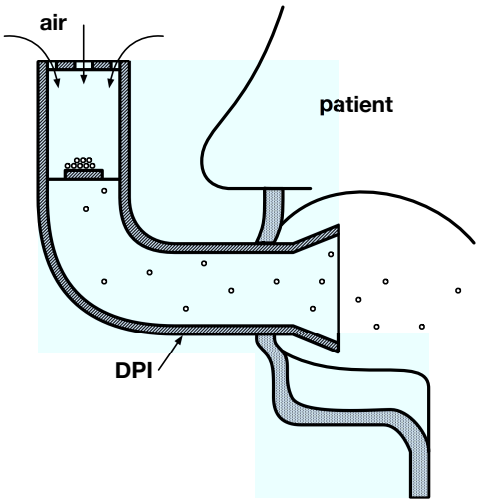


FIGURE III.2 : *Fonctionnement schématique d'un inhalateur à poudre sèche. La dose médicamenteuse située à proximité des injection d'air est transportée par envol particulaire jusque dans la trachée du patient.*

une fonction de densité, et le fluide. Le couplage est alors réalisé à travers une force de traînée qui est linéaire en la vitesse relative du fluide et des particules.

On recherchera alors la forme d'inhalateur répondant aux deux critères décrits ci-dessous notamment en implémentant une méthode numérique, par exemple la méthode des lignes de niveau.

Optimisation de la dispersion particulaire en entrée de trachée. L'hypothèse suivante est faite : la dispersion des particules est maximale au sein de l'arbre bronchique si celles-ci sont réparties de façon homogène à l'entrée de la trachée. Dans ces conditions, le problème est réduit à la recherche de la forme optimale de l'inhalateur, c'est-à-dire de la forme assurant la meilleure dispersion des particules dans la trachée à partir de leur point d'injection. Les degrés de liberté sur la géométrie de l'inhalateur sont :

— la position et la forme des points d'injection de l'air,
— la position et la forme du ou des points d'injection de la dose médicamenteuse,
— le profil du DPI, tant au niveau longitudinal qu'au niveau du bec de sortie.

Plusieurs études comparant les performances de différentes géométries ont été réalisées par des physiciens. Néanmoins, celles-ci sont principalement axées sur la comparaison de designs pré-établis qui ne sont pas *stricto sensu* issus de techniques d'optimisation de forme. Il ne fait aucun doute que de meilleures géométries sont atteignables en utilisant des algorithmes bien choisis.

D'un point de vue théorique, nous nous pencherons sur l'existence de solution pour le problème d'optimisation de forme.

Optimisation des interactions particule-particule et particule-paroi. L'autre objectif a trait à la maximisation du nombre de collisions entre les différentes particules, mais également avec les parois du DPI. Chaque collision est une opportunité de fragmenter les différents agrégats particulaires, de sorte que ceux-ci soient les plus fins possibles. Le but final est de minimiser la gêne produite par l'intrusion de corps étrangers dans le système pulmonaire du patient. Nous utiliserons pour cela plusieurs modèles d'interaction et de fragmentation particulaire pour caractériser le comportement de la poudre sèche au sein du DPI.

Bibliographie

[ABF99] Philippe Angot, Charles-Henri Bruneau, and Pierre Fabrie, *A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows*, Numer. Math. **81** (1999), no. 4, 497–520. MR 1675200 (2000f :76094)

[AC01] C. Antoniades and P.D. Christofides, *Integrating nonlinear output feedback control and optimal actuator/sensor placement for transport-reaction processes*, Chem. Eng. Sci. **56** (2001), no. 15, 4517–4535.

[AD06] A. Armaoua and M.A. Demetriou, *Optimal actuator/sensor placement for linear parabolic pdes using spatial h^2 norm*, Chem. Eng. Sci. **61** (2006), 7351–7367.

[AEWZ14] J. Apraiz, L. Escauriaza, G. Wang, and C. Zhang, *Observability inequalities and measurable sets*, to appear in J. Europ. Math. Soc. (JEMS) (2014).

[AGJN13] Habib Ammari, Josselin Garnier, Wenjia Jing, and Loc Hoang Nguyen, *Quantitative thermo-acoustic imaging : an exact reconstruction formula*, J. Differential Equations **254** (2013), no. 3, 1375–1395. MR 2997376

[AMP10] Grégoire Allaire, Arnaud Münch, and Francisco Periago, *Long time behavior of a two-phase optimal design for the heat equation*, SIAM J. Control Optim. **48** (2010), no. 8, 5333–5356. MR 2745777 (2011m :49012)

[BB02] Dorin Bucur and Giuseppe Buttazzo, *Variational methods in some shape optimization problems*, Appunti dei Corsi Tenuti da Docenti della Scuola. [Notes of Courses Given by Teachers at the School], Scuola Normale Superiore, Pisa, 2002. MR 2011473 (2004h :49001)

[BDGM09] Laurent Boudin, Laurent Desvillettes, Céline Grandmont, and Ayman Moussa, *Global existence of solutions for the coupled vlasov and navier-stokes equations*, Differential and Integral Equations **22** (2009), no. 11–12, 1247–1271.

[BF94] C.-H. Bruneau and P. Fabrie, *Effective downstream boundary conditions for incompressible navier-stokes equations*, Int. J. for Num. Methods in Fluids **19** (1994), no. 8, 693–705.

[BF96] ———, *New efficient boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations : a well-posedness result*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **30** (1996), no. 7, 815–840. MR MR1423081 (98f :35114)

[BF06] Franck Boyer and Pierre Fabrie, *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 2006. MR MR2248409

[BGM10] Leonardo Baffico, Céline Grandmont, and Bertrand Maury, *Multiscale modeling of the respiratory tract*, Math. Models Methods Appl. Sci. **20** (2010), no. 1, 59–93. MR 2606244 (2011a :92032)

[BHM12] Boris P. Belinskiy, James W. Hiestand, and Maeve L. McCarthy, *Optimal design of a bar with an attached mass for maximizing the heat transfer*, Electron. J. Differential Equations (2012), No. 181, 13. MR 2991415

[BILD11] T.L. Bergman, F.P. Incropera, A.S. Lavine, and D.P. DeWitt, *Fundamentals of heat and mass transfer*, 7th edition, John Wiley & Sons, 2011.

[BLR92] Claude Bardos, Gilles Lebeau, and Jeffrey Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control Optim. **30** (1992), no. 5, 1024–1065. MR 1178650 (94b :93067)

[BP13] Maitine Bergounioux and Yannick Privat, *Shape optimization with Stokes constraints over the set of axisymmetric domains*, SIAM J. Control Optim. **51** (2013), no. 1, 599–628. MR 3032888

[BRUZ11] Guillaume Bal, Kui Ren, Gunther Uhlmann, and Ting Zhou, *Quantitative thermo-acoustics and related problems*, Inverse Problems **27** (2011), no. 5, 055007, 15. MR 2793826

[BT08] Nicolas Burq and Nikolay Tzvetkov, *Random data Cauchy theory for supercritical wave equations. I. Local theory*, Invent. Math. **173** (2008), no. 3, 449–475. MR 2425133 (2009k :58057)

[BT14] ———, *Probabilistic well-posedness for the cubic wave equation*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **16** (2014), no. 1, 1–30. MR 3141727

[BU10] Guillaume Bal and Gunther Uhlmann, *Inverse diffusion theory of photoacoustics*, Inverse Problems **26** (2010), no. 8, 085010, 20. MR 2658827

[Bur11] Nicolas Burq, *Large-time dynamics for the one-dimensional Schrödinger equation*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **141** (2011), no. 2, 227–251. MR 2786680 (2012f :35499)

[CdV85] Y. Colin de Verdière, *Ergodicité et fonctions propres du laplacien*, Comm. Math. Phys. **102** (1985), no. 3, 497–502. MR 818831 (87d :58145)

[CFNS91] G. Chen, S. A. Fulling, F. J. Narcowich, and S. Sun, *Exponential decay of energy of evolution equations with locally distributed damping*, SIAM J. Appl. Math. **51** (1991), no. 1, 266–301. MR 1089141 (91k :35037)

[Che75] Denise Chenais, *On the existence of a solution in a domain identification problem*, J. Math. Anal. Appl. **52** (1975), no. 2, 189–219. MR MR0385666 (52 #6526)

[Cho09] Mourad Choulli, *Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques*, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], vol. 65, Springer-Verlag, Berlin, 2009. MR 2554831 (2010m :35003)

[dLSMP11] Xavier Dubois de La Sablonière, Benjamin Mauroy, and Yannick Privat, *Shape minimization of the dissipated energy in dyadic trees*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **16** (2011), no. 3, 767–799. MR 2806322 (2012j :49108)

[EFDC08] N.H. El-Farra, M.A. Demetriou, and P.D. Christofides, *Actuator and controller scheduling in nonlinear transport-reaction processes*, Chem. Eng. Sci. **63** (2008), 3537–3550.

[Evg05] Anton Evgrafov, *The limits of porous materials in the topology optimization of Stokes flows*, Appl. Math. Optim. **52** (2005), no. 3, 263–277. MR 2174015 (2006j :49008)

[FCGBGP06] Enrique Fernández-Cara, Manuel González-Burgos, Sergio Guerrero, and Jean-Pierre Puel, *Null controllability of the heat equation with boundary Fourier conditions : the linear case*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **12** (2006), no. 3, 442–465 (electronic). MR 2224822 (2007b :93020)

[FI96] A. V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes Series, vol. 34, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1996. MR 1406566 (97g :93002)

[FNDB03] Frédéric Faure, Stéphane Nonnenmacher, and Stephan De Bièvre, *Scarred eigenstates for quantum cat maps of minimal periods*, Comm. Math. Phys. **239** (2003), no. 3, 449–492. MR 2000926 (2005a :81076)

[GL93] Patrick Gérard and Éric Leichtnam, *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem*, Duke Math. J. **71** (1993), no. 2, 559–607. MR 1233448 (94i :35146)

[GMM06] Céline Grandmont, Bertrand Maury, and Nicolas Meunier, *A viscoelastic model with non-local damping application to the human lungs*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **40** (2006), no. 1, 201–224. MR 2223510 (2007g :74083)

[GMS08] C. Grandmont, B. Maury, and A. Soualah, *Multiscale modelling of the respiratory track : a theoretical framework*, Mathematical and numerical modelling of the human lung, ESAIM Proc., vol. 23, EDP Sci., Les Ulis, 2008, pp. 10–29. MR 2509203 (2010g :76142)

[GN13] D. S. Grebenkov and B.-T. Nguyen, *Geometrical structure of Laplacian eigenfunctions*, SIAM Rev. **55** (2013), no. 4, 601–667. MR 3124880

[Har82] Joachim Hartung, *An extension of Sion's minimax theorem with an application to a method for constrained games*, Pacific J. Math. **103** (1982), no. 2, 401–408. MR 705239 (84k :90101)

[Hen06] Antoine Henrot, *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006. MR MR2251558 (2007h :35242)

[HH03] Pascal Hébrard and Antoine Henrot, *Optimal shape and position of the actuators for the stabilization of a string*, Systems Control Lett. **48** (2003), no. 3-4, 199–209, Optimization and control of distributed systems. MR MR2020637 (2004i :93155)

[HH05] ———, *A spillover phenomenon in the optimal location of actuators*, SIAM J. Control Optim. **44** (2005), no. 1, 349–366 (electronic). MR MR2177160 (2006g :49010)

[HMW80] T.J. Harris, J.F. Macgregor, and J.D. Wright, *Optimal sensor location with an application to a packed bed tubular reactor*, AIChE Journal **26** (1980), no. 6, 910–916.

[Hör07] Lars Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. III*, Classics in Mathematics, Springer, Berlin, 2007, Pseudo-differential operators, Reprint of the 1994 edition. MR 2304165 (2007k :35006)

[HP05] Antoine Henrot and Michel Pierre, *Variation et optimisation de formes*, Mathématiques et Applications, vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[HP10] Antoine Henrot and Yannick Privat, *What is the optimal shape of a pipe ?*, Arch. Ration. Mech. Anal. **196** (2010), no. 1, 281–302. MR 2601075 (2011g :76065)

[Ing36] A. E. Ingham, *Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series*, Math. Z. **41** (1936), no. 1, 367–379. MR 1545625

[JM01] Stéphane Jaffard and Sorin Micu, *Estimates of the constants in generalized Ingham's inequality and applications to the control of the wave equation*, Asymptot. Anal. **28** (2001), no. 3-4, 181–214. MR 1878794 (2002j :93047)

[JTZ97] Stéphane Jaffard, Marius Tucsnak, and Enrique Zuazua, *On a theorem of Ingham*, J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997), no. 5, 577–582, Dedicated to the memory of Richard J. Duffin. MR 1491935 (2000e :42004)

[Kah62] Jean-Pierre Kahane, *Pseudo-périodicité et séries de Fourier lacunaires*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **79** (1962), 93–150. MR 0154060 (27 #4019)

[KL05] Vilmos Komornik and Paola Loreti, *Fourier series in control theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2005. MR 2114325 (2006a :93001)

[Lio88] J.-L. Lions, *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*, SIAM Rev. **30** (1988), no. 1, 1–68. MR 931277 (89e :93019)

[LR95] G. Lebeau and L. Robbiano, *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, Comm. Partial Differential Equations **20** (1995), no. 1-2, 335–356. MR 1312710 (95m :93045)

[Mau04] Benjamin Mauroy, *Hydrodynamique dans le poumon, relations entre flux et géométries*, Thèse de doctorat, ENS Cachan, 2004.

[Mau05] B. Mauroy, *3d hydronamics in the upper human bronchial tree : interplay between geometry and flow distribution*, Fractals in Biology and Medicine **IV** (2005).

[MFWS04] B. Mauroy, M. Filoche, E. R. Weibel, and B. Sapoval, *An optimal bronchial tree may be dangerous*, Nature **427** (2004), 633–636.

[Mil06] Luc Miller, *On the controllability of anomalous diffusions generated by the fractional Laplacian*, Math. Control Signals Systems **18** (2006), no. 3, 260–271. MR 2272076 (2007j :93015)

[MK04] R. Metzler and J. Klafter, *The restaurant at the end of the random walk : recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics*, J. Phys. A **37** (2004), no. 31, 161–208.

[MMSV05] B. Maury, N. Meunier, A. Soualah, and L. Vial, *Outlet dissipative conditions for air flow in the bronchial tree*, CEMRACS 2004—mathematics and applications to biology and medicine, ESAIM Proc., vol. 14, EDP Sci., Les Ulis, 2005, pp. 201–212 (electronic). MR MR2226810 (2006m :92034)

[MNP] Gilles Marck, Grégoire Nadin, and Yannick Privat, *What is the optimal shape of a fin for one dimensional heat conduction ?*

[Mor11] K. Morris, *Linear-quadratic optimal actuator location*, IEEE Trans. Automat. Control **56** (2011), no. 1, 113–124.

[MP11] Arnaud Münch and Francisco Periago, *Optimal distribution of the internal null control for the one-dimensional heat equation*, J. Differential Equations **250** (2011), no. 1, 95–111. MR 2737836 (2012b :93077)

[MP14] Arnaud Münch and Pablo Pedregal, *Numerical null controllability of the heat equation through a least squares and variational approach*, European J. Appl. Math. **25** (2014), no. 3, 277–306. MR 3197994

[MR12] Jens Marklof and Zeév Rudnick, *Almost all eigenfunctions of a rational polygon are uniformly distributed*, J. Spectr. Theory **2** (2012), no. 1, 107–113. MR 2879311

[MW80] T. J. Mahar and B. E. Willner, *Sturm-Liouville eigenvalue problems in which the squares of the eigenfunctions are linearly dependent*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), no. 4, 567–578. MR MR575738 (81h :34029)

[MZ10] Arnaud Münch and Enrique Zuazua, *Numerical approximation of null controls for the heat equation : ill-posedness and remedies*, Inverse Problems **26** (2010), no. 8, 085018, 39. MR 2661697 (2011j :65201)

[Nel59] Edward Nelson, *Analytic vectors*, Ann. of Math. (2) **70** (1959), 572–615. MR 0107176 (21 #5901)

[PS10a] Yannick Privat and Mario Sigalotti, *Erratum of "The squares of the Laplacian-Dirichlet eigenfunctions are generically linearly independent" [mr2674637]*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **16** (2010), no. 3, 806–807. MR 2674638 (2011i :93014)

[PS10b] ———, *The squares of the Laplacian-Dirichlet eigenfunctions are generically linearly independent*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **16** (2010), no. 3, 794–805. MR 2674637 (2011h :93009)

[PTZa] Yannick Privat, Emmanuel Trélat, and Enrique Zuazua, *Complexity and regularity of maximal energy domains for the wave equation with fixed initial data*, To appear in Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A.

[PTZb] ———, *Optimal observability of the multi-dimensional wave and schrödinger equations in quantum ergodic domains*, To appear in J. Eur. Math. Soc. (JEMS).

[PTZc] ———, *Optimal shape and location of sensors for parabolic equations with random initial data*, Preprint HAL (2014).

[PTZ13a] ———, *Optimal location of controllers for the one-dimensional wave equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **30** (2013), no. 6, 1097–1126. MR 3132418

[PTZ13b] ———, *Optimal observation of the one-dimensional wave equation*, J. Fourier Anal. Appl. **19** (2013), no. 3, 514–544. MR 3048589

[PZ32] R.E.A.C. Paley and A. Zygmund, *On some series of functions (1) (2) (3)*, Proc. Camb. Phil. Soc. **26, 26, 28** (1930, 1930, 1932), 337–357, 458–474, 190–205.

[Riv13] Gabriel Rivière, *Remarks on quantum ergodicity*, J. Mod. Dyn. **7** (2013), no. 1, 119–133. MR 3071468

[Sar11] Peter Sarnak, *Recent progress on the quantum unique ergodicity conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **48** (2011), no. 2, 211–228. MR 2774090 (2012e :58062)

[SFR02] B. Sapoval, M. Filoche, and Weibel E. R., *Smaller is better but not too small : A physical scale for the design of the mammalian pulmonary acinus*, PNAS **99** (2002), no. 16, 10411–10416.

[Sio58] Maurice Sion, *On general minimax theorems*, Pacific J. Math. **8** (1958), 171–176. MR 0097026 (20 #3506)

[SKB02] I. Sokolov, J. Klafter, and A. Blumen, *Fractional kinetics*, Physics Today **55** (2002), 48–54.

[Šni74] A. I. Šnirel′man, *Ergodic properties of eigenfunctions*, Uspehi Mat. Nauk **29** (1974), no. 6(180), 181–182. MR 0402834 (53 #6648)

[Tem01] Roger Temam, *Navier-Stokes equations*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001, Theory and numerical analysis, Reprint of the 1984 edition. MR MR1846644 (2002j :76001)

[TW09] Marius Tucsnak and George Weiss, *Observation and control for operator semigroups*, Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks], Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. MR 2502023 (2010d :93001)

[VWPPR00] A. Vande Wouwer, N. Point, S. Porteman, and M. Remy, *An approach to the selection of optimal sensor locations in distributed parameter systems*, Journal Process Cont. **10** (2000), 291–300.

[WWWR10] J.R. Welty, C.E. Wicks, R.E. Wilson, and L.G. Rorrer, *Fundamentals of momentum, heat, and mass transfer*, 5th edition, John Wiley & Sons, 2010.

[ZZ96] Steven Zelditch and Maciej Zworski, *Ergodicity of eigenfunctions for ergodic billiards*, Comm. Math. Phys. **175** (1996), no. 3, 673–682. MR 1372814 (97a :58193)