



HAL
open science

Une approche mathématique pour la forme architecturale

Ahmed Elshafei

► **To cite this version:**

Ahmed Elshafei. Une approche mathématique pour la forme architecturale. Architecture, aménagement de l'espace. Université Paris-Est, 2014. Français. NNT : 2014PEST1019 . tel-01061095

HAL Id: tel-01061095

<https://theses.hal.science/tel-01061095>

Submitted on 5 Sep 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris-Est
L'école doctorale VTT: ville, transport et territoires

L'école nationale supérieure d'architecture Paris-Malaquais
Laboratoire GSA: géométrie, structure et architecture

Thèse de doctorat

UNE APPROCHE MATHÉMATIQUE POUR LA FORME ARCHITECTURALE

Doctorant: Ahmed ELSHAFEI
Directeur de thèse de doctorat: Maurizio BROCATO

Pour ceux qui ne connaissent pas les mathématiques, il est difficile d'avoir un réel sentiment pour la beauté, la plus profonde beauté, de la nature ... Si vous voulez en apprendre davantage sur la nature, pour apprécier la nature, il est nécessaire de comprendre la langue qu'elle parle.

R. Feynman

Résumé

Au cours des deux dernières décennies avec la montée des ordinateurs et des logiciels de CAO dans l'architecture, il a été une fois de plus un intérêt croissant pour les mathématiques. Toutefois, cet intérêt a de nombreuses conséquences paradoxales. C'est parce qu'au cours des deux derniers siècles ces deux disciplines ont augmenté dans des directions presque opposées sur la compréhension de l'espace et des objets en elle. Cette recherche examine ces conséquences paradoxales, il part de l'hypothèse que les mathématiques modernes peuvent une fois de plus être la base de la compréhension de l'espace dans l'architecture. Cela signifie que toutes les constructions abstraites de la géométrie moderne serait l'outil pour comprendre, concevoir et manipuler l'espace architectural et les objets qu'elle contient. En prenant cette position de nombreuses questions se posent. Questions de technicité en termes de connaissances mathématiques à acquérir et questions de nature philosophique en termes de ce que cela signifie pour l'architecture de comprendre l'espace mathématiquement. Cette recherche examine ces deux dimensions de cette position, à savoir que d'une part il y a une construction mathématique complète des espaces et des objets en elle, couplés avec des réflexions philosophiques sur le sens de ces constructions dans l'architecture. À côté du formalisme mathématique, ces constructions sont également traduits en une série de programmes courts qui alors peuvent effectivement être utilisés comme outils de calcul et de visualisation. La recherche tente d'assembler divers fragments de différentes branches mathématiques en un seul corps du savoir mathématique qui est pertinente d'un point de vue de la conception architecturale, comprise dans huit chapitres. Le premier chapitre traite principalement les conséquences philosophiques de cette prise de position entre l'architecture et les mathématiques; expliquant le contexte de leur relation et éclairer la nature esthétique de la recherche. Dans le chapitre deux, nous essayons de préparer la fondation pour les constructions mathématiques, à savoir examiner la relation entre la géométrie et de la perception. Nous expliquons aussi la différence entre les espaces formels et physiques, et nous définissons formellement les notions de base de la spatialité en utilisant la topologie et enfin nous construisons le principal objet géométrique de la recherche, qui est la variété différentiable (en particulier à deux dimensions à savoir la surface). La logique de structuration des constructions mathématiques dans la recherche provient essentiellement de l'approche intuitive de la conception architecturale de définir d'abord une forme de base, puis appliquer des modifications. Par conséquent, nous avons deux parties générales des constructions mathématiques la première est la définition des formes et la deuxième partie est les opérations sur les formes. Dans le chapitre trois, nous donnons une explication de la différence entre nos deux types principaux de définitions de formes à savoir la définition paramétrique et la définition algébrique. Dans le chapitre quatre, nous donnons une explication sur les deux principales techniques de définitions de forme utilisés par les logiciels de CAO à savoir les meshes et les splines (en particulier les NURBS). Ceci est couplé avec une réflexion philosophique sur l'utilisation de logiciels de CAO et de sa relation à la connaissance géométrique, et sur une perspective plus large, la relation entre cette recherche et l'architecture numérique. Dans les trois chapitres suivants, nous définissons trois types d'opérations différentes qui peuvent être appliquées à des formes que nous avons définies, à savoir les opérations algébriques, analytiques et algorithmiques. Comme il ressort de leurs noms, ces opérations correspondent aux différentes branches de la géométrie: la géométrie affine (en particulier euclidienne) et la géométrie projective, puis la géométrie différentielle et enfin la géométrie combinatoire et computationnelle. Dans le chapitre cinq, l'accent est sur les opérations algébriques, nous commençons par expliquer les différents espaces en question et de passer ensuite la notion de la symétrie par lesquels ces différents types de géométrie sont constitués une dans l'autre (cf. programme d'Erlangen). Dans le chapitre six, nous nous concentrons sur la géométrie différentielle (en particulier des courbes et surfaces), avec une variété de résultats analytiques qui permet un large éventail d'outils et techniques de conception. Tous ces résultats sont couplés avec des exemples des conceptions architecturales élaborées à l'aide de ces calculs. Dans le chapitre sept nous déplaçons vers des opérations algorithmiques, qui sont divisés en deux parties: la première partie traite de géométrie combinatoire et computationnelle et la seconde porte sur les méthodes d'optimisation tels que les algorithmes génétiques. Nous concluons finalement la recherche au chapitre huit, dans lequel nous revenons une fois de plus à nos réflexions philosophiques. Nous prenons trois grandes idéologies en architecture à savoir, le fonctionnalisme, la sémiotique et la phénoménologie et essayer de voir comment cette recherche se rapporte aux leurs points de vue.

Table des matières

1. Introduction

- 1.1. Objectif**
- 1.2. Objectif et sa double nature**
- 1.3. Changement de paradigme dans l'esthétique**
- 1.4. Changement de paradigme en mathématiques**
- 1.5. Disciplinarité, indisciplinarité et interdisciplinarité**
- 1.6. Références**

2. Géométrie et espace

- 2.1. Géométrie, la perception et l'expérience**
- 2.2. Les espaces formels et variétés**
 - 2.2.1 Notions topologiques de base
 - 2.2.2. Construction d'une variété
- 2.3. Références**

3. Définition de la forme

- 3.1. Définition paramétrique de courbes et de surfaces**
- 3.2. Familles de surfaces**
- 3.3. Définition algébrique (non paramétriques) des courbes et des surfaces**
 - 3.3.1. Paramétrage de la surface algébrique
- 3.5. Références**

4. L'ordinateur et la conception

- 4.1. Bref historique de la conception assistée par ordinateur**
- 4.2. Modélisation de maillage polygonal**
 - 4.2.1. «Box modeling» et «winged edge data structure»
 - 4.2.2. Conception en utilisant «box modeling»
 - 4.2.3. La conception et la manipulation de la structure de données
- 4.3. Modélisation par interpolation**
 - 4.3.1. Interpolation polynomiale
 - 4.3.2. Splines cubique et bicubique
 - 4.3.3. Bézier et NURBS
 - 4.3.4. Concevoir utilisant NURBS
- 4.4. Critique de la conception assistée par ordinateur**
- 4.5. Concernant l'architecture numérique**
- 4.6. Références**

5. Opérations algébriques

5.1. Construction des espaces vectoriel et affine

5.2. Symétrie et géométrie

5.3. La géométrie euclidienne vs l'arithmétique pythagoricienne en architecture

5.4. Géométrie affine et euclidienne

5.4.1. Définition du groupe

5.4.2. Transformations affines isométriques (i.e. transformation euclidienne)

5.4.3. Transformation affine non-isométrique

5.4.4. Projections orthogonales

5.4.5 Conception en utilisant la géométrie affine

5.5. Géométrie projective

5.5.1. Espace projectif et groupe projectif

5.5.2. Bref historique de la perspective

5.5.3. Points à l'infini

5.5.4. Construction de la perspective

5.6. Conception utilisant la géométrie affine et la géométrie projective

5.7. Références

6. Opérations analytiques

6.1. Bases de calcul différentiel

6.2. Géométrie différentielle des courbes

6.2.1. Définition d'une courbe régulière

6.2.2. Analyse d'une courbe régulière

6.2.3. Conception en utilisant l'analyse d'une courbe régulière

6.2.4. Tubes le long des courbes

6.2.5. Conception utilisant des tubes

6.3. Géométrie différentielle des surfaces

6.3.1. Calcul vectoriel

6.3.2. Définition d'une surface régulière

6.3.3. Analyse d'une surface régulière

6.3.3.1. Champs de vecteurs

6.3.3.2. Conception en utilisant des champs de vecteurs

6.3.3.3. Courbes intégrales et systèmes dynamiques

6.3.3.4. Conception en utilisant des courbes intégrales

6.3.3.5. Métrique riemannienne sur une surface régulière

6.3.3.6. Conception en utilisant la métrique riemannienne

6.3.3.7. Volume contenu par une surface régulière

6.3.3.8. Courbure d'une surface régulière

6.3.3.9. Conception en utilisant la courbure

6.3.3.10. Asymptotes dans une surface régulière

6.3.3.12. Courbes géodésiques dans une surface régulière

6.3.3.13. Courbes d'intersection entre les surfaces régulières

6.3.3.14. Conception en utilisant l'intersection entre les surfaces régulières

6.3.4. Surfaces spéciales

6.3.4.1. Surfaces non orientables

6.3.4.2. Conception en utilisant des surfaces non orientables

6.3.4.3. Surfaces réglées et développables

6.3.4.4. Conception en utilisant les surfaces réglées

6.3.4.5. Surfaces de révolution

6.3.4.6. Surfaces à courbure constante

6.3.4.7. Surfaces minimales

6.4. Références

7. Opérations algorithmiques

7.1. Dessin automatisé

7.1.1. Organisation interne

7.1.1.1. Circulation verticale

7.1.1.2. Séparation et la division de l'espace

7.1.1.3. Renflement et transition douce

7.1.2. Tâches répétitives

7.1.2.1. Opération géométrique répétée

7.1.2.2. Élément architectural répété

7.1.2.3. Génération des variants

7.1.3. Géométrie computationnelle

7.1.3.1. Problèmes de géométrie computationnelle (le paire la plus proche)

7.1.3.2. Motif computationnelle

7.1.4. Problèmes de géométrie combinatoire (pavage)

7.1.4.1. Pavage et l'architecture

7.1.4.2. Groupes ponctuels discrets et groupes de «wallpaper»

7.1.4.3. Conception en utilisant le groupe de «wallpaper»

7.2. Optimisation (méthode de recherche)

7.2.1. Problème d'optimisation

7.2.2. Conception et la science

7.2.3. Notions de base de la biologie évolutive

7.2.4. Optimisation en utilisant un algorithme génétique

7.2.5. Optimisation en utilisant la méthode de Monte-Carlo

7.3. Références

8. Qu'est-ce que l'architecture

8.1. Architecture

8.2. Idéologies architecturales dominantes

8.2.1. L'architecture comme fonction

8.2.2. L'architecture comme communication

8.2.3. L'architecture comme une expérience vécue

8.3. Références

1.Introduction

1.1. Objectif

Tout au long de l'histoire, l'architecture et les mathématiques ont été profondément liées, et même dans certaines périodes les deux disciplines étaient indiscernables, à savoir les architectes étaient aussi des mathématiciens et vice-versa. Cela était dû au fait que l'architecture offrait les mathématiques (qui, dans le monde antique était plein de symbolisme et de mysticisme) un moyen d'exprimer, visualiser et de manifester ces relations divines dans la pierre. Ceci peut être vu dans le monde antique de l'Égypte, la Grèce et Rome, les cathédrales médiévales de l'Europe et les grandes mosquées du monde islamique et tout le chemin à la Renaissance italienne. Tout au long de toutes ces périodes une relation intime entre la spiritualité et les mathématiques a été exprimé dans la relation entre la beauté et de l'architecture. Nous trouvons dans la Grèce antique, la philosophie pythagoricienne dont les adeptes (les pythagoriciens) comprenaient les mathématiques comme la base de toutes les choses physiques et métaphysiques, avec les nombres en son cœur. Au moyen âge, nous pouvons voir dans l'architecture de la cathédrale comment les mathématiques a été écrit dans la pierre; symbolisme provenant de relations géométriques divines sont dans presque tous les aspects de sa conception. Le nombre de piliers, la proportion de l'aménagement de la façade, jusqu'aux détails de la division de la rosace, tous expriment les relations géométriques divines avec d'importantes signification métaphysique que la personne médiévale comprise et appréciée. Dans la renaissance de la relation de l'architecture aux mathématiques a atteint son apogée avec la montée de l'humanisme et de la figure de l'homme de la Renaissance, hommes comme Léonard de Vinci et Albrecht Durer, qui a donné des représentations détaillées du corps humain et de sa relation à des proportions géométriques, en particulier le nombre d'or. D'autres, comme le maître de la Renaissance Andrea Palladio qui a proposé l'utilisation de séquences dans les dimensions des pièces dans ses célèbres *Les Quatre Livres de l'architecture*, et le polymathe Leon Battista Alberti qui considérait les mathématiques comme un fondement commun de l'art et de la science. Cependant, avec la montée du modernisme dans la culture occidentale à la fin du XVIIIe siècle, un changement de paradigme commençait un changement fondamental dans la pensée occidentale dans la philosophie, l'art et la science; à tel point que, pour comprendre toute discipline contemporaine nous devons extrapoler revenir à ce changement de paradigme [1]. En ce qui concerne la relation entre l'architecture et les mathématiques qui est au cœur de cette recherche, nous trouvons deux aspects importants de ce changement de paradigme est nécessaire de comprendre. Le premier est le changement de paradigme dans l'esthétique qui a conduit à une esthétique plus kantienne qui a porté sur l'œuvre d'art elle-même à la place de l'esthétique classique qui a été porté sur la nature. Le deuxième est le changement de paradigme en mathématiques qui a conduit à l'interprétation moderne de la géométrie avec l'accent uniquement sur le formel-logique à la place de l'ancienne interprétation de la géométrie qui nécessitait une connaissance a priori de ses objets (tels que des points, des lignes et des surfaces). Avec ce bref aperçu du contexte dans lequel nous nous trouvons aujourd'hui concernant l'architecture et les mathématiques, nous allons formuler l'objectif de la recherche montrant sa double nature et ses limites.

L'objectif de cette recherche:

Application de la géométrie moderne en architecture dans le sens de fournir une approche mathématique formelle pour la conception de formes architecturales et à la compréhension de l'espace.

Avec ce dit, nous allons maintenant montrer quelques points importants concernant la nature de cet objectif, ses limites et les difficultés qu'elle implique, après que nous nous concentrerons sur le contexte dans lequel nous nous trouvons lorsque vous faites une telle recherche. Cette idée contextuelle serait donné par faire la lumière sur la relation entre l'architecture contemporaine et les mathématiques, une relation qui a été défini principalement par le changement de paradigmes dans l'esthétique et les mathématiques.

1.2. Objectif et sa double nature

Cet objectif a par définition une nature double et presque paradoxal: d'un côté, il est tout à fait pratique d'apporter une base mathématique à la génération de forme dans l'architecture, ce qui permettra un meilleur contrôle et une compréhension des formes, pour ne pas mentionner un terrain commun mieux adapté pour la correspondance avec les ingénieurs et les conseillers techniques. D'autre part la géométrie moderne est assez loin dans son abstraction et son formalisme de la géométrie descriptive traditionnelle que les architectes connaissent, avec des notions comme des variétés, et la topologie qu'il serait presque absurde du point de vue de l'architecture d'avoir un tel niveau d'abstraction qui n'est pas nécessaire; ici nous rencontrons l'autre côté fondamental de la recherche qui est le côté esthétique. En un mot, l'objectif de la recherche du début à la fin contient deux motivations adverses: une motivation pratique et une esthétique. Avec ce dit, nous nous trouvons dans une position particulière en soulevant de nouveau la question de l'architecture et les mathématiques dans nos temps modernes. Cette particularité vient du fait que, même si l'intérêt de l'architecture en mathématiques reste encore tout à fait clair, il n'y a pas de cadre contextuel approprié pour héberger une telle question de manière scientifique; ceci est l'une des premières limites de la recherche. Il n'est pas un corps important des recherches en combinant les deux disciplines à partir de laquelle nous pouvons avoir assez de ressources ou de points de départ, les deux disciplines ont été assez séparés depuis au moins deux siècles. Il existe bien sûr de la recherche en architecture orientée vers la géométrie mais l'objectif principal est la génération de forme et beaucoup moins concentrer sur la construction formelle abstraite, et il y a la recherche en mathématiques qui ne se rapporte pas beaucoup aux disciplines artistiques comme l'architecture. Ainsi, afin de surmonter cette limitation, nous devons aller et extraire les constructions formelles issus des mathématiques et puis essayer de les assembler de la manière la plus cohérente possible du point de vue de l'architecture. Ceci peut être vu dans la structure de la recherche qui est divisé en définitions des formes, puis les opérations (algébriques, analytiques et algorithmique) sur ces formes, cette logique ne vient pas de mathématiques, mais plus de l'architecture; car, dans l'architecture, nous commençons naturellement par une forme de base, puis nous modifions et développons avec le processus de conception. Une autre limitation qui nous avons rencontré dans cette recherche est que les notions géométriques qui sont d'intérêt contemporain dans la conception architecturale, à savoir les sujets concernant courbure, géodésiques entre autres, sont assez intuitive du point de vue de l'architecture architectural; mais ils sont des sujets assez avancés dans la géométrie moderne. Cela signifie que leur construction formelle nécessiterait un niveau avancé de connaissances mathématiques et un nombre important de constructions mathématiques qui y mènent. Encore une fois cette limitation a été surmontée par l'extraction de ces concepts et toutes leurs constructions issus des mathématiques et de les assembler de manière cohérente qui peut être pédagogique du point de vue architectural; mais cela est venu au coût que le niveau mathématique de la recherche a également été soulevée. Ces deux limitations et en particulier la première nous offre un aperçu du contexte problématique de la recherche et nous montre que cette recherche combinant géométrie et l'architecture ne peut jamais être simplement une recherche scientifique dans le sens de l'ingénierie ou les sciences naturelles, car une grande partie de sa motivation est l'appréciation esthétique. Cela conduit à la conclusion que faire une telle recherche est un acte esthétique, le mot esthétique est ici essentiel et nous expliquer son importance plus tard. Le produit final est donc un objet esthétique sur trois niveaux différents d'appréciation esthétique. Nous avons d'abord l'esthétique austère des constructions mathématiques formelles; deuxièmement les conceptions architecturales avec leur esthétique plus accessible et enfin l'acte de utiliser ces constructions mathématiques dans la conception architecturale avec sa dimension poétique. En plus des constructions mathématiques formelles, il y a le codage numérique de ces constructions qui nous permettent de calculer et d'analyser des informations sur les formes; ce qui donne la recherche sa dimension intrinsèquement pratique. Cette dualité entre la motivation esthétique et une pratique est une caractéristique fondamentale non seulement de cette recherche, mais de la discipline architecturale en général. Maintenant que nous avons mentionné l'importance de cette dualité entre l'esthétique et la pratique dans cette recherche, nous avons besoin de comprendre précisément ce que nous entendons par un objet esthétique; et ce qui fait que l'utilisation des construction mathématiques dans la conception architecturale avoir une dimension poétique. Donc, nous allons donner deux brefs récits sur ces changements de paradigme, ce qui nous permettra d'expliquer la dimension poétique de travailler entre disciplines.

1.3. Changement de paradigme dans l'esthétique

Bien sûr, nous n'allons pas donner un exposé complet sur l'esthétique moderne qui pourraient faire l'objet d'une recherche complète par elle-même, à la place, nous allons nous concentrer ici sur quelques idées clés de l'esthétique moderne qui pourraient être utiles pour nous plus tard, quand nous parlons de la poétique de la connaissance. En résumé, l'esthétique moderne commence autour du XVIIIe siècle avec les travaux de penseurs allemands et britanniques qui ont souligné la beauté comme l'élément clé de l'art et celui de l'expérience esthétique et vu l'art comme nécessairement visant à la beauté absolue. Le premier à utiliser le terme «esthétique» dans son sens moderne était le philosophe allemand A.G. Baumgarten pour qui, l'esthétique est la science de l'expérience des sens, plus proche de la logique et de la beauté est donc la forme la plus parfaite de la connaissance que l'expérience de sens peut avoir. Un des récits les plus cruciales et les plus influents sur l'esthétique est celle de Kant dans son livre *Critique du jugement*, à savoir sa formulation du jugement esthétique et sa conception du sublime; qui, selon Jean-François Lyotard est essentiel pour l'art moderne. Kant se trouve en plein milieu d'un changement historique complet dans le point central de l'esthétique; avant Kant, l'esthétique a pris ses principaux exemples de la beauté et de la sublimité de la nature, après Kant l'accent est porté sur l'œuvre d'art elle-même. Ceci est crucial pour nous, car c'est précisément à partir de ce point que les mathématiques et l'art démarrer leurs trajectoires divergentes modernes; qui donne toute tentative de les réunir une position presque paria. Avec le déplacement de la valeur esthétique d'une œuvre d'art de la nature (comme la manifestation de l'harmonie divine) à l'œuvre elle-même, les artistes ont perdu leur intérêt pour les mathématiques qui a toujours été considéré comme la langue dans laquelle le divin a créé la nature. Et ils se sont concentrés davantage sur leur propre vision du monde, leur psychologie et perceptions; menant vers l'art contemporain, où il n'y a absolument pas de cadre de référence objectif pour juger la valeur du travail. Malgré cette position apparemment non universel en ce qui concerne la valeur esthétique d'une œuvre, Kant considère l'expérience esthétique de la beauté comme un jugement de la vérité subjective, mais encore universel; puisque tous les gens devraient convenir qu'un certain rose est belle mais la beauté ne peut pas être réduit à un ensemble de base des caractéristiques de cette rose. Cette notion de «subjective pourtant universel» est également essentielle, car elle nous sauve de l'attitude réductrice de dire «tout est permis» et nous donne une compréhension de la notion kantienne du jugement esthétique. Dans le cadre de cette recherche, nous avons deux motivations pour comprendre le compte de Kant du jugement esthétique, Tout d'abord, le jugement esthétique est au cœur du processus de conception architecturale, même lorsque les architectes utilisent un raisonnement pratique derrière leur préférence d'une certaine forme sur une autre, il reste dans le domaine du jugement esthétique. La deuxième motivation vient de la nature de indisciplinaire de cette recherche (indisciplinaire ici est dans le sens du concept de Jacques Rancière de la poétique de la connaissance), qui repose principalement sur le compte kantienne du jugement esthétique. Maintenant, nous allons donner une brève explication du jugement esthétique de Kant. Dans la *Critique du jugement*, Kant définit jugement comme la subsomption d'un particulier sous un universel. Si l'universel est la faculté de comprendre, qui fournissent des concepts. et la raison est celle qui tire des conclusions, alors le jugement sert d'intermédiaire entre l'entendement et la raison en permettant des actes individuels de subsomption. Cela conduit à une distinction entre les jugements déterminés et réflexifs. Cependant, dans les jugements réflexifs, le jugement doit procéder sans concept, parfois dans le but de former un nouveau concept; Kant met le jugement esthétique dans la catégorie de jugement réflexifs [2]. Ici, nous pouvons voir clairement que l'opposition entre les arts et les mathématiques ne sont pas simplement une distinction entre les jugements universels et particuliers. Mais plutôt, que dans l'art les concepts universels ne peuvent pas déterminer un jugement sur le cas particulier d'une manière directe comme ils le font dans les mathématiques et les sciences en général. Bien sûr, cela est dû au déplacement de la valeur de l'art de la nature à l'œuvre elle-même. L'architecture a une place particulière dans cette distinction des jugements déterminés et réflexifs, car dans certains domaines, l'architecture peut fonctionner en utilisant un jugement déterminant, par exemple sur les aspects techniques. Néanmoins, le jugement global en architecture est réflexive, car il ne peut pas être obtenue directement à partir de concepts universels. Que notre contexte est artistique ou scientifique, presque immédiatement une question se pose sujet de la convenance de la nature au notre jugement, Kant soutient ce principe de convenance et il l'appelle la finalité ou la détermination de la nature au notre jugement. Il ajoute que sans ce principe, la science ne serait pas possible, comme toutes les sciences doivent assumer la disponibilité de ses objets pour notre juge-

ment. De même, sans un tel principe nos jugements sur la beauté ne serait pas exposer la communicabilité, ou la tendance à l'universalité même en l'absence d'un concept, ce qu'ils font. Le problème de le jugement est d'une grande importance, puisque, pour Kant, le jugement sert d'intermédiaire entre deux branches de la philosophie, la philosophie théorique mettant l'accent sur la connaissance de la nature sensible et la philosophie pratique mettant l'accent sur la possibilité d'une action morale et sur la nature sensible. Kant constate un problème dans notre faculté de raisonner contre elle-même, puisque dans son emploi théorique, la raison exige absolument la soumission de tous les objets à la loi, mais dans son utilisation pratique, raison exige également la possibilité de la liberté. Kant résout ce problème en utilisant l'idéalisme, à savoir chaque objet doit être conçu de manière double: d'abord comme une apparition, sous réserve de la compétence nécessaire de certains concepts de base et les formes de l'espace et le temps, d'autre part, comme une chose en lui-même, dont plus rien ne peut être dit. Nous allons utiliser cet idéalisme kantien dans cette recherche quand nous allons décrire les objets géométriques. À savoir qu'il y a effectivement deux façons de concevoir une forme géométrique, son apparence physique que ce soit représentée graphiquement ou construit comme un objet du monde physique et sa description mathématique qui nous allons considérer que l'objet en lui-même. Nous allons traiter cette question dans le chapitre suivant sur l'espace et la géométrie, pour l'instant nous revenons à la définition de Kant du jugement esthétique, et montrer comment la position de cette recherche se rapporte à elle. Kant affirme que les jugements esthétiques (ou jugements de goût) doivent avoir quatre principales caractéristiques distinctives. D'abord, ils sont désintéressés, ce qui signifie que nous prenons plaisir à quelque chose parce que nous jugeons que c'est beau, plutôt que de juger que c'est beau, parce que nous trouvons agréable. Deuxièmement, ils sont universels, ce qui signifie en gros que c'est une partie intrinsèque de l'activité d'un tel jugement d'attendre que les autres sont d'accord avec nous. Troisièmement, elles sont nécessaires, la beauté se comporte comme si elle était une propriété réelle d'un objet, comme son poids ou sa composition chimique. Enfin, de beaux objets semblent être utile sans but (parfois traduit comme définitive sans fin) [3]. Nous expliquons maintenant que ces quatre caractéristiques du jugement esthétique de Kant pourrait être trouvée dans la position de cette recherche; tout d'abord il est désintéressé, car il prend plaisir à l'emploi des constructions mathématiques dans la conception simplement parce qu'il juge que c'est beau, et pas dans l'autre sens. Deuxièmement, il prend une position universelle de la beauté de cet emploi, et ne dit pas qu'il est seulement belle personnellement. Troisièmement, il a un caractère nécessaire, et enfin le résultat final de cette recherche ne semble utile sans but. Après avoir défini les quatre critères de du jugement esthétique, Kant porte à décrire l'expérience esthétique. Il affirme que, comme l'expérience naturelle, l'expérience esthétique qui conduit à un jugement déterminant est explicable que à l'aide d'une dimension intuitive et conceptuelle qui signifie que la beauté est cognitive. Le deuxième type de base de l'expérience esthétique de Kant est le sublime, le sublime décrit des expériences qui nous accablent et nous donnent le sentiment que nous ne pouvons pas les saisir pleinement. Le deuxième type de base de l'expérience esthétique pour Kant est le sublime, le sublime décrit des expériences qui nous accablent et nous donnent le sentiment que nous ne pouvons pas nous saisir pleinement. Le sublime est un concept essentiel dans la compréhension de l'art moderne où il y a eu un changement clair de la beauté au sens classique de la beauté qui a vient de l'effet écrasant. La plupart de l'art contemporain, vise à assurer sous une forme ou une autre un sentiment être bouleversé par le travail au lieu de pleased par sa beauté harmonieuse. Ce sentiment d'être bouleversé par le travail est la caractéristique récurrent dans presque tout l'art contemporain, son but est de choquer l'observateur. La question de savoir si c'est légitime ou pas est un autre débat. Nous nous intéressons ici au compte de Kant sur le sublime, puisque l'architecture contemporaine tombe ainsi dans cette tendance pour le choquant et l'écrasante. Ceci peut être vu en particulier dans le nouveau mouvement de l'architecture numérique et son appétit croissant pour les conceptions de plus en plus choquantes. Kant divise le sublime en deux types: la mathématique et de la dynamique. Si notre capacité de l'intuition est accablé par taille, comme un immense bâtiment, ce serait une expérience sublime mathématique et si notre capacité de vouloir ou de résister est accablé par la force, comme une énorme tempête, ce serait une expérience sublime dynamique. Kant soutient que ce qui est sublime n'est pas du tout l'objet, mais nos idées de la raison: à savoir les idées de la totalité absolue dans le sublime mathématique et la liberté absolue dans le sublime dynamique. Toutefois énorme est le bâtiment, ou puissante est la tempête, ils ne sont rien par rapport à la totalité absolue et la liberté absolue, le sentiment sublime est donc une alternance rapide entre la crainte de l'écrasante et le plaisir particulier de voir ce écrasante accablé [4]. Maintenant, nous allons diriger notre attention vers une autre notion kantienne

important que l'idée esthétique; ce qui est crucial pour nous dans cette recherche en raison de sa position entre l'art et la science et la dualité de l'esthétique et le pratique. Après avoir défini l'esthétique et la sublime Kant se tourne vers la définition de l'art et sa relation avec ses concepts de l'idée esthétique et le génie. Kant croit que le cognition part à l'évaluation des beaux-arts est similaire à la cognition part à l'évaluation beauté naturelle et que ce qui donne âme aux beaux-arts est l'idée esthétique et que le talent du génie est de produire des idées esthétiques. Une idée esthétique est une contrepartie à l'idée rationnelle: si celui-ci est un concept qui ne pourrait jamais être exposé de manière adéquate sensiblement, le premier est un ensemble de présentations sensibles à laquelle aucun concept est suffisante [5]. Ainsi l'art pour Kant se réfère à l'activité de fabrication selon une notion qui précède, si je fais une chaise, je dois savoir à l'avance ce une chaise est, qui le rend différent de la nature; étant donné qu'une ouverture de la fleur se passe sans notion préalable de l'ouverture par la fleur. Il différencie aussi l'art de la science, l'art est une compétence distingué d'une connaissance de type, une capacité pratique irréductible à des concepts déterminés, qui se distingue d'une simple compréhension de quelque chose. La science peut être enseignée, tandis que l'art bien que soumis à la formation, il s'appuie sur le talent natif. Ainsi, pour Kant, il n'y a aucune telle chose comme un génie scientifique, parce qu'un esprit scientifique ne peut jamais être radicalement originale, c'est-à-dire que les icônes scientifiques comme Isaac Newton et Albert Einstein sont des génies artistiques dans le domaine de la physique. Nous pouvons accord ou en désaccord avec l'affirmation de Kant, mais ce qui est important de comprendre ici, c'est le sentiment qu'il vise, à savoir qu'il essaie de montrer que l'esthétique n'est pas seulement limitée aux disciplines de l'art comme dans le sens classique du terme. Mais il s'agit plutôt d'un concept plus large et générale plus liée à l'originalité et la créativité dans notre pensée quelle que soit notre domaine de travail. Ceci est encore pertinente dans le contexte de cette recherche puisque, par définition, nous essayons de faire des objets esthétiques en utilisant le langage de la science à savoir les mathématiques; et nous n'avons pas à notre disposition la dimension mystique harmonieux global unifiant art et la science comme à l'époque classique. Kant ici est en quelque sorte rassurant pour nous une valeur esthétique à l'œuvre sur la base de son concept de l'idée esthétique à la place de l'esthétique classique. Cette esthétique kantienne et le rapport de l'art à la science marque le début du changement de paradigme moderniste de l'esthétique (de la nature à l'œuvre d'art elle-même). Qui d'une part signale la disparition des figures des polymathes de la Renaissance et le divorce entre l'art et la science, mais d'autre part ouvre une nouvelle façon de penser entre les disciplines, notamment scientifiques et des disciplines artistiques. Le passage de l'esthétique antique et médiévale où l'harmonie des proportions et la symétrie sont fondamentales et où les mathématiques avec ses pouvoirs mystiques ont trouvé une maison naturelle en architecture à l'esthétique moderne kantienne, signifiait que le rapprochement de l'art et de la science aurait besoin d'un nouveau cadre de travail conceptuel : *indisciplinarité*. Ce concept n'est pas un concept kantien par défaut, mais un concept développé par le philosophe français Jacques Rancière, qui sera essentiel pour nous de comprendre davantage l'esthétique de la position de la recherche entre l'art et la science. Nous allons faire face à cette situation lorsque nous allons expliquer la poétique du travail entre disciplines, à savoir, dans ce contexte les mathématiques et l'architecture. Pour le moment, après avoir décrit le changement de paradigme dans l'esthétique de la perspective kantienne, nous allons décrire un également important changement de paradigme, c'est le changement de paradigme en mathématiques.

1.4. Changement de paradigme en mathématiques

Il semble maintenant que ce sont les artistes qui ont perdu l'intérêt pour les mathématiques avec le changement de la valeur esthétique de la nature à l'œuvre d'art elle-même, mais ce n'est qu'un côté de l'histoire. Il y a eu une perte égale mutuelle d'intérêt de la part des scientifiques et surtout les mathématiciens en métaphysique ou plus précisément l'ontologie de la science. On peut dire que la science moderne et les mathématiques modernes comme nous les connaissons ont commencé aussi à ce moment-là, où le sens et le symbolisme ont été purgés de leurs domaines, ne laissant que la logique formelle et les expériences positivistes que leurs seuls sujets. Cela permettra également de jouer un rôle également crucial que le changement de l'esthétique dans l'histoire de l'art et de la science, et par conséquent toute tentative moderne de les réunir. Après avoir discuté le changement de paradigme dans l'esthétique, nous allons maintenant discuter du changement de paradigme en mathématiques à savoir l'interprétation ancienne et moderne de la géométrie. Avant d'entrer dans les détails de cette ancienne et moderne distinction, nous allons montrer intuitivement quel est le problème et comment il se rapporte à l'architecture. Quand on pense à des mathématiques en architecture immédiatement on pense à des applications pratiques, par exemple, des calculs de structure, qui est tout à fait justifié mais ce n'est pas la principale contribution des mathématiques à l'architecture ou de l'intellect humain en général pour cette question. Ce que se passe avec les mathématiques est quelque chose de vraiment remarquable d'un point de vue philosophique, à savoir, que c'est seulement par l'utilisation d'un système de symboles et de relations logiques que nous sommes en mesure de créer des représentations de phénomènes physiques. Cela semble tout à fait naturel pour nous, car nous sommes habitués au fait que les mathématiques peuvent décrire le monde physique, mais si nous prenons un peu de recul et de penser, ce n'est pas du tout évident que ces deux mondes des phénomènes et l'esprit humain peuvent être liés si étroitement. Dans les temps pré-modernes, il a été tout simplement compris que les mathématiques avaient une signification mystique et par le savoir nous se rapprochent de la divine. Cela a fonctionné parfaitement pour l'art et l'architecture depuis les mathématiques et la géométrie en particulier leur a donné la langue par laquelle l'artiste pourrait manifester l'esthétique classiques basés sur la nature. Mais avec la modernité, cette harmonie globale est détruite et comme nous avons décrit dans le changement de paradigme dans l'esthétique, l'art et les mathématiques n'étaient plus compatibles. Cela a laissé la question de savoir comment les mathématiques décrits si parfaitement le monde physique grande ouverte. En fait, ce problème est tout à fait un vieux problème et il ne se limite pas à l'architecture, mais à la physique et les sciences exactes et naturelles en général; cette question sur la géométrie et l'expérience a été soulevée par Albert Einstein dans sa conférence devant l'Académie des sciences de Prusse en 1921. Ce problème est bien sûr un problème métaphysique car du point de vue scientifique moderne, la question de savoir pourquoi les mathématiques décrit la réalité est moins important que comment nous pouvons utiliser les mathématiques pour décrire la réalité. Ayant fait ce constat, nous n'allons pas tenter de répondre à cette question, qui peut faire l'objet d'une thèse par lui-même. Mais nous allons diriger notre attention sur comment en soulevant cette question Albert Einstein montre l'évolution des mathématiques de l'ancienne à la nouvelle interprétation de la géométrie. C'est en quelque sorte encore plus important dans notre contexte que la question elle-même, puisque dans plusieurs façons l'un des principaux obstacles entre l'architecture et les mathématiques aujourd'hui est due à la différence entre l'ancienne et la nouvelle interprétation de la géométrie. Einstein a demandé comment se pourrait-il que les mathématiques, étant après tout un produit de la pensée humaine qui est indépendante de l'expérience, est admirablement adapté aux objets de la réalité? Est la raison humaine, alors, sans expérience, simplement en prenant la pensée, capable de sonder les propriétés des choses réelles? Sa réponse a été très bref: En ce qui concerne les propositions des mathématiques se réfèrent à la réalité, ils ne sont pas certains, et dans la mesure où elles sont certaines, elles ne se réfèrent pas à la réalité [6]. Einstein a ensuite continué à clarifier sa réponse en faisant référence à la montée de l'axiomatique comme une branche des mathématiques, ses progrès dans la séparation de la logique formelle de mathématiques de son contenu intuitif ou objectif. Cela a été en parallèle avec l'essor de la science positiviste qui est venu à être compris comme la seule interprétation légitime de la réalité, éliminant tout besoin pour la métaphysique et de provoquer le divorce entre la foi et la raison et par conséquent l'art et la science. Les mathématiques qui a été considéré par les anciens philosophes jusqu'à ce que les polymathes de la Renaissance comme Alberti la base pour les arts et les sciences ont dû subir une transformation fondamentale. Une transformation à faire être capable d'être le langage de la science positiviste

moderne, elle devait être purgée de tout symbolisme métaphysique, devenant ainsi une discipline purement formelle dépourvue de sens mystique. Comme précisé Einstein, selon axiomatique, que la logique formelle constitue l'objet des mathématiques, qui n'est pas concerné par l'intuitif ou tout autre contenu non associé. Cette nouvelle interprétation des mathématiques et de l'émergence de la géométrie moderne ont eu un impact fondamental sur l'architecture et sa relation avec le reste des beaux-arts. Alberto Perez Gomez explique dans son livre *Architecture et la crise de la science moderne* que la purge des mathématiques de tous les sens externe ou valeur a forcé l'architecture à une situation difficile, une existence de scission entre le couple science et l'art moderne, récemment divorcé. C'était parce que la géométrie, qui est l'outil fondamental pour la conception architecturale, a dû abandonner son "caractère sacré" et tout le bagage symbolique, il portait avec lui, afin d'évoluer dans une discipline scientifique moderne appropriée. Cette géométrie moderne purgée de toute signification est précisément la géométrie que nous allons utiliser dans cette recherche; construit à partir de la logique purement formelle sans nécessairement de rapport avec les mondes physiques ou symboliques. Nous allons montrer en détail plus loin comment cette constructions formelles de l'objet géométrique et de les utiliser dans des conceptions architecturales a une dimension poétique, ce qui n'est pas basée sur le symbolisme mystique comme ce fut le cas dans les périodes pré-modernes. Mais nous devons d'abord revenir à l'explication d'Albert Einstein de l'ancienne et la nouvelle interprétation de la géométrie. Albert Einstein a expliqué la différence entre l'interprétation ancienne et moderne de la géométrie en donnant un exemple de l'axiome: par deux points dans l'espace, il passe toujours un et un seul ligne droite. Dans l'ancienne interprétation cela sera considéré comme vrai en raison de son évidence, ce qui signifie qu'il fait partie d'une connaissance a priori ce qui est une ligne et ce qui est un point. Dans l'interprétation moderne, que la validité de l'axiome est supposé sans avoir besoin d'une connaissance a priori sur les objets: la ligne et les points (i.e. axiomes sont considérés comme des définitions implicites, Schlick: épistémologie). Cependant la géométrie est née de la nécessité d'étudier le comportement d'objets réels et cela ne peut être fait en utilisant uniquement le système de la géométrie axiomatique, comme il ne peut pas faire des affirmations sur le comportement des corps réels. Pour être capable de faire cela, nous devons ajouter la proposition: les corps solides sont liés par rapport leurs dispositions possibles, de même que les organismes dans la géométrie euclidienne à trois dimensions. Einstein appelle cela: la géométrie pratique complété par opposition à la géométrie purement axiomatique et il ajoute que toutes les mesures de longueur en physique, y compris les mesures de longueur géodésiques et astronomiques constituent la géométrie pratique en ce sens, si l'on utilise la loi empirique que la lumière se propage en ligne droite, et même en ligne droite dans le sens de la géométrie pratique [6]. Il est clair que tandis que les physiciens et les ingénieurs ont adopté l'interprétation moderne de la géométrie purement axiomatique, qui est ensuite complété dans la géométrie pratique. Les architectes s'approprient l'ancienne interprétation de la géométrie, ce qui a donc conduit à une compréhension des formes basées sur nos sens et de la perception. Dans un sens, cela est tout à fait compréhensible puisque, après tout pourquoi un architecte va passer du temps sur la compréhension des espaces abstraits qui sont dans la plupart des cas pas possible de visualiser, tandis que le seul espace qui est en fait un intérêt architectural est l'espace euclidien à trois dimensions. Et cet espace euclidien et sa géométrie euclidienne peuvent être totalement compris en utilisant l'ancienne interprétation de la géométrie, à savoir que tous les objets sont comprises aussi comme des objets physiques qui peuvent être soit dessinés ou construits. Cependant il y avait un prix, l'architecture a dû payer pour s'en tenir à la simplicité de l'ancienne interprétation, à savoir que l'écart entre l'architecture et les mathématiques a augmenté au point les architectes d'aujourd'hui ont près de zéro idées de ce que la géométrie moderne est. Encore une fois ce ne serait pas du tout un problème si les architectes ont juste rester avec leur ambition de conception dans la tradition euclidienne, ce qui n'est pas le cas. Si quoi que ce soit il y a un appétit toujours croissante dans l'architecture contemporaine pour les constructions géométriques complexes, et pour des concepts abstraits qui ont développé au cours des trois cents ans en mathématiques. Et dont l'architecture n'a pas de n'importe quelle manière exhaustive intégrée dans son discours, qui est resté fondamentalement fidèle à l'ancienne interprétation de la géométrie. Dans cette recherche, nous allons tenter une nouvelle fois de mettre à jour l'architecture avec la géométrie moderne, à savoir d'accueillir ces constructions provenant des mathématiques modernes dans la conception architecturale. Et d'une façon essayer de voir quelles pourraient être les possibilités pour l'interprétation moderne de la géométrie dans l'architecture.

1.5. Disciplinarité, indisciplinarité et interdisciplinarité

Nous verrons par la suite que, pour comprendre cette dimension poétique nous nous appuyerons sur le compte de Kant sur l'esthétique que nous avons mentionné ci-dessus. Pour cela, nous allons maintenant remettre en question la distinction entre la disciplinaire, indisciplinaire et interdisciplinaire, à travers le travail de Rancière sur la poétique de la connaissance. Cette recherche envisage les possibilités et les conséquences de l'adoption de l'interprétation moderne de la géométrie dans la conception architecturale comme un acte esthétique; il demande quel est-il de concevoir l'aide de la connaissance de l'espace tel qu'il est compris par les mathématiques modernes? Quel type d'un objet esthétique peut sortir de cet acte? Le mot esthétique est ici crucial, car le produit n'est pas une conception architecturale, ni un article mathématique ou philosophique, il n'est pas non plus simplement une boîte à outils d'ingénierie ni un aperçu historique sur l'architecture et la géométrie, et pourtant il touche l'ensemble de ces territoires, d'où son caractère esthétique. Cette attouchements entre ces différents territoires, n'est pas simplement de les mélanger dans une sorte de mélange interdisciplinaire, mais cette recherche pourrait être considérée comme une famille de ponts (pour utiliser la métaphore de Rancière) qui relie ces territoires distincts ensemble. Il est important de comprendre que ce travail ne vise pas en tout cas de créer une discipline hybride entre l'architecture et les mathématiques, ou à déterritorialiser des concepts géométriques dans l'architecture et de leur donner une nouvelle signification. En fait cet acte de déterritorialisation des concepts est l'une des principales critiques que nous avons contre l'architecture numérique, sur lequel nous aurons une analyse plus approfondie plus loin dans la recherche. Au contraire, nous insistons sur la présentation des concepts mathématiques en utilisant leur langage propre à aucune tentative pour abus de langage; avec certains schémas et textes pour les expliquer au lecteur non mathématiquement qualifié. En d'autres termes cette recherche peut être considérée comme ce que le philosophe français Jacques Rancière appelle un travail indisciplinaire, une esthétique de connaissances résultant de la pensée entre les disciplines. Selon Rancière de parler d'une dimension esthétique de la connaissance est de parler d'une dimension de l'ignorance qui divise l'idée et la pratique de la connaissance eux-mêmes [7]. Rancière affirme que la multiplicité est essentielle pour la construction de ces ponts entre les disciplines. Cette notion d'ignorance est aussi d'une grande importance dans ce contexte, car au contraire de ce que nous pensons intuitivement que la maîtrise de deux disciplines mène à la maîtrise de leur somme, la réalité est plus subtile; à savoir en allant plus profondément dans deux territoires déconnectés le résultat est la maîtrise d'aucun d'eux. C'est parce que d'une certaine manière en creusant dans le nouveau territoire une certaine ignorance de l'autre territoire grandit avec elle, en d'autres termes, si l'on peut être bien formés dans deux disciplines, on a aussi deux ignorances sur ces deux disciplines qui viennent avec cette formation. Dans la partie qui suit, nous allons montrer comment Rancière explique cette notion d'ignorance et les ponts entre les disciplines. Selon Rancière les disciplines forment une orthodoxie d'un côté de l'eau sans avoir à ouvrir la possibilité pour d'autres connaissances de l'autre côté, néanmoins, quand on est le pont, on touche les deux côtés sans appartenir à l'un d'eux. Il ajoute que, avec ce pont, les deux parties deviennent égaux et peuvent être atteints et que indisciplinarité est l'espace signifiant textuel dans lequel le pont d'un mythe à l'autre est visible et pensable, contrairement à l'interdisciplinarité, qui est tout simplement intensifie d'une discipline pour un autre. La valeur esthétique d'une œuvre indisciplinarité n'est pas simplement la somme des valeurs de chacune des disciplines comme c'est le cas de l'interdisciplinarité, mais plutôt l'esthétique de la création d'un pont entre les disciplines. Cette valeur esthétique est créé par la double négation que le travail n'est pas limitée dans le territoire de l'une des disciplines, d'où il évite les orthodoxes dogmatiques, les frontières que les disciplines tentent de défendre. Dans la Critique du jugement, Kant explique que la double négation constitue l'expérience esthétique l'aide d'un certain déconnexion des conditions habituelles de l'expérience sensible [7]. Ainsi, dans un sens kantien, cette recherche est présentée comme un objet d'appréhension esthétique qui est caractérisée comme ce qui n'est ni un objet de connaissance, ni un objet de désir et apprécié comme une forme sans concept. Tout cela semble un peu abstrait, mais au fond il est une idée simple, à savoir que l'architecture et les mathématiques comme toute autre discipline forment une certaine défense contre les autres à l'aide de l'orthodoxie pour protéger son mythe. Ce mythe n'est pas visible de l'intérieur de la discipline, il n'est visible que lorsque l'on s'engage entièrement dans une autre discipline, en gagnant un point de vue depuis le pont entre les disciplines qui est essentiellement poétique, car il expose ces mythes. En mythe ici on n'entend pas faux, mais ce que les gens dans une certaine discipline, se soucient profondément. Ce serait la même si cette sphère a été construit à

partir d'acier ou de béton, serait d'une grande importance pour l'architecte et presque pas d'importance pour le mathématicien, même si dans les deux exemples les deux ont travaillé sur la même forme géométrique: la sphère. Cela peut nous donner une meilleure compréhension de ce que nous entendons par le mythe créé par une discipline, et que lorsque nous sortons de la discipline sommes nous capable d'apprécier la dimension poétique de soins mathématicien de la construction abstraite et l'architecte se soucier de la construction matériel. Ce cours entre les disciplines a une double négation qui est liée à l'expérience esthétique kantienne que nous l'avons mentionné plus tôt, parce qu'il regarde la forme seule, sans les frontières sociales. Cette double négation n'est pas seulement définie par les nouvelles conditions d'appréciation des œuvres d'art, elle définit également un certain suspension des conditions normales d'expériences sociales. Voilà ce que Kant illustre avec l'exemple du palais, dont le jugement esthétique isole la forme seulement pour être esthétiquement apprécié, désintéressé à savoir si le palais sert la vanité des riches oisifs et pour qui la sueur des travailleurs a été passé afin de construire. Il est important de clarifier cette nature esthétique de la recherche afin d'éviter toute confusion, une confusion qui est caractéristique de toute recherche effectuée dans la discipline de l'architecture; c'est parce que contrairement à ce qu'il semble être, l'architecture est l'une des disciplines moins clairement défini. C'est pourquoi, lorsque l'on fait la recherche en architecture on se retrouve immédiatement dans le territoire d'une autre discipline que ce soit les mathématiques, l'ingénierie, de la philosophie, de la sociologie ou de l'histoire, d'où l'importance de indisciplinarité et l'esthétique de la connaissance. Cela soulève naturellement des questions sur le sens de la connaissance et de sa relation à l'ignorance, la manifestation la plus simple de cette sensibilité, est comment certains mots comme «espace» ont une existence et une structure complète dans des disciplines différentes. Maintenant, chaque discipline voit «l'espace», selon sa propre structure qui ne s'oppose pas à celle des autres disciplines, mais plutôt ignorer. C'est-à-dire que chaque connaissance vient avec une forme d'ignorance qui lui est intrinsèque. Cela va contre l'idée générale commun de connaissances (détenus par des sociologues comme Pierre Bourdieu) qui est tout simplement: il existe la vraie connaissance qui est conscient et libère et fausse connaissance qui ignore et opprime. Maintenant, la neutralisation esthétique de la connaissance suggère qu'il n'y a pas une seule connaissance, mais que la connaissance est toujours double: il est l'ensemble des connaissances (le savoir-faire) et une distribution organisée de positions et que chacun de ces connaissances a ignorance comme son inverse. Par conséquent, il est aussi des connaissances qui réprime et l'ignorance qui libère [7]. Nous pouvons voir que dans l'exemple des pratiquants des disciplines utilisant le concept «espace»; chacun d'eux a une double connaissance, le savoir faire en fonction de chaque discipline et la connaissance de leur état disciplinaire sociale. Par exemple, comme un architecte ou un mathématicien, vous êtes censé regarder l'espace de la manière dictée par votre discipline et pas en d'autres façons provenant d'autres disciplines, ce qui est une forme d'ignorance. Nous pouvons voir que encore dans l'exemple de Kant du palais: les constructeurs de possession du palais connaissances techniques et de leur condition de travailleurs qui ne possèdent le palais. Chacune de ces deux savoirs a une ignorance comme son inverse: ceux qui savent comment travailler avec leurs mains sont censés être ignorants en ce qui concerne l'appréciation de l'adéquation de leur travail à une fin supérieure. Platon dit que c'est suffisant pour eux d'agir sur une base quotidienne, comme si c'était le cas: il suffit que leur jugement font leur savoir-faire accord avec leur connaissance de leur état. Il dit que c'est une question de croyance qui déterminent le rapport des deux savoirs et les deux ignorances. Un autre exemple parallèle à celle des travailleurs du palais est que la présence des ingénieurs et mathématiciens dans des cabinets d'architectes pour la résolution des problèmes structurels et géométriques; à cause de leur capacité technique, ils sont censés être ignorant de la motivation artistique de l'œuvre. Qui vient précisément de leur connaissance de leur état disciplinaire sociale, à savoir en tant que professionnel technique, vous êtes présumé ignorants des significations artistiques. Le même pour les architectes, avoir la connaissance de comment concevoir et de créer est livré avec une connaissance de leur condition sociale d'être artistique, qui suppose qu'ils soient ignorants des connaissances techniques géométrique impliqué. Cette recherche prend la position de Rancière et Kant, à savoir une position indisciplinaire esthétiquement neutre, où les conditions sociales disciplinaires sont simplement suspendus ou ignorées toutes ensemble permettant une appréciation désintéressée. Rancière suit Kant dans faisant valoir que les travailleurs sont en mesure de prendre une position désintéressée et apprécier la beauté du palais sans tenir compte de leur position sociale comme les travailleurs, tandis que les sociologues font valoir que cela est réservé uniquement pour ceux qui ne sont ni les propriétaires ou les travailleurs de la palais. L'expérience esthétique dérègle cette disposition, il est donc bien plus qu'une façon d'apprécier

des œuvres d'art, il neutralise la relation circulaire entre la connaissance que le savoir faire et les connaissances que la distribution des rôles. Ceci explique l'importance de l'expérience esthétique dans cette recherche car elle nous permet d'échapper à la répartition sensée des rôles: architecte, mathématicien, ingénieur et philosophe et leurs compétences et d'apprécier le résultat d'une position neutre désintéressé. Maintenant que nous avons montré l'importance de l'esthétique de Kant dans la compréhension des concepts de Rancière sur la poétique de la connaissance et de travail entre les deux disciplines, ce qui est essentiel pour la compréhension de la dimension esthétique de cette recherche, nous allons maintenant analyser plus en détail la notion de "discipline ". Selon Rancière une discipline n'est pas simplement la définition d'un ensemble de méthodes appropriées pour un certain domaine ou un certain type d'objet, mais c'est la constitution même de cet objet comme un objet de pensée, une certaine idée de la relation entre la connaissance et une distribution de positions. En d'autres termes, une discipline est une manifestation d'une idée de la connaissance, où une idée de la connaissance doit être comprise comme le rapport entre les deux savoirs et deux ignorances. C'est toujours plus qu'un ensemble de procédures qui permettent la pensée d'un territoire donné d'objets, c'est la constitution de ce territoire lui-même et donc la création d'une certaine répartition du pensable. En tant que tel, il suppose une coupure dans le tissu commun de manifestations de la pensée et de la langue. Pensée disciplinaire dit: nous avons notre territoire, nos objets et nos méthodes qui leur correspondent. Disciplines sont donc en guerre avec la allodoxie de jugement, mais ce qu'ils appellent allodoxie est en fait dissensus esthétique, la déhiscence entre le corps et ce qu'il sait dans le double sens de la connaissance, la pensée indisciplinaire est donc une pensée qui rappelle le contexte de la guerre. Pour ce faire, il doit pratiquer une certaine ignorance, il faut ignorer les frontières disciplinaires pour restaurer ainsi leur statut comme des armes dans un conflit [7]. C'est exactement ce que nous essayons de faire dans cette recherche, de l'idée de base de l'application de la géométrie moderne dans la conception architecturale tout au long dans les moindres détails; notions fondamentales de mathématiques, les sciences et la philosophie mettre dans le contexte, comme s'ils pouvaient être utilisés comme outils de conception architecturale. Cette mise de concepts d'une discipline dans leur forme brute et les mettre dans un nouveau contexte d'une autre discipline avec toutes leurs structures rigoureuses intactes, c'est ce que révèle cette confrontation violente des orthodoxies de disciplines. Par exemple, les notions mathématiques sont effectuées sur le territoire de la conception architecturale avec tout leur bagage mathématique structurale sans les privant de leur contenu ou les vulgariser afin d'être adapté dans le nouveau contexte. Cela montre les deux savoirs et les deux ignorances en jeu; la connaissance du savoir-faire permet l'écriture de ces notions, alors que la connaissance du rôle d'un mathématicien ignore les valeurs de ces notions pour la conception architecturale. Dans le même temps la connaissance de la conception architecturale permet l'utilisation créative de ces notions mathématiques tandis que la connaissance du rôle de l'architecte ne tient pas compte de la valeur d'acquisition de ces connaissances techniques. Cela, réinvente efficacement la relation entre une situation donnée et les formes de visibilité et les capacités de la pensée qui y sont attachés; la pensée indisciplinaire créer le texte et l'espace signifiant dans lequel cette relation du mythe au mythe est visible et pensable. Ceci est un rôle important de indisciplinarité en général et dans cette recherche en particulier, il est un rappel constant que la fondation de la fondation est une histoire, un mythe, un beau mensonge qui est la réalité de la vie pour la majorité des gens. Cela ne veut pas dire de toute façon que ces histoires sont nulle ou sans effet, cela signifie simplement que ce sont des armes dans une guerre, ils ne sont pas les armes qui facilitent simplement l'examen d'un territoire, mais des armes qui servent à établir les limites incertaines. Il n'y a pas de limite assurée entre les disciplines, et de retracer ce limites est de tracer la frontière entre ceux qui ont pensé à cette question et ceux qui n'ont pas. La poétique de la connaissance ainsi, ne prétendent pas que les disciplines sont fausses connaissances, mais plutôt les moyens d'intervenir dans la guerre entre les raisons de l'égalité et ceux de l'inégalité. Avec cela, nous terminons notre explication de la dimension esthétique de cette recherche et dans la partie qui suit, nous allons commencer la préparation pour la construction de l'espace formel.

1.6. Références

- [1] *Sacred, profane and geometrical symbolism in architecture*, Antonio Caperna, 2007
- [2] Internet encyclopedia of philosophy / Kant's aesthetics / The central problems of the critique of judgment
- [3] Internet encyclopedia of philosophy / Kant's aesthetics / The judgment of the beautiful
- [4] Internet encyclopedia of philosophy / Kant's aesthetics / The sublime
- [5] Internet encyclopedia of philosophy / Kant's aesthetics / Fine art and genius
- [6] *Geometry and experience*, Albert Einstein, Springer, Berlin 1921
- [7] *Thinking between disciplines: an aesthetics of knowledge*, Jacques Rancière, Parrhesia, Paris 2006

2. Géométrie et espace

2.1. Géométrie, la perception et l'expérience

Dans le chapitre dernier nous nous sommes concentrés sur le contexte général de cette recherche, portant principalement sur sa position entre les deux disciplines de l'architecture et les mathématiques. Nous avons également mis l'accent sur affichant la double nature de la recherche motivée par des raisons esthétiques et pratiques, et puis nous avons donné un bref compte rendu de l'esthétique de Kant qui a servi dans la compréhension de la dimension esthétique de l'œuvre. Enfin, nous avons utilisé le concept de Jacques Rancière pour montrer la dimension poétique de travail entre disciplines. Dans ce chapitre, nous allons laisser la situation générale et commencer à se concentrer sur l'objet de la recherche à savoir l'utilisation de la géométrie moderne en architecture. Bien sûr, cela nécessite une certaine préparation avant de plonger dans les formules et les constructions abstraites, cette préparation est essentiellement de comprendre quelques différences fondamentales importantes entre la vision de l'espace et de la géométrie des architectes et des mathématiciens. We have already hinted at this distinction when we explained the paradigm shift in mathematics resulting in the old and new interpretation of geometry. Cependant, maintenant nous allons lier cette distinction à deux points dominants de vue de l'espace dans l'architecture: les cartésiennes et phénoménologiques, avec plus d'emphase sur le point de vue phénoménologique dans les dernières décennies. Nous allons de nouveau utiliser certaines notions de l'ontologie Kant quand nous expliquons cette distinction. Le thème de l'espace et de la géométrie est un vaste sujet dans la philosophie et en particulier l'ontologie de l'espace et du temps; dans cette recherche, nous allons mettre l'accent sur certaines notions spécifiques qui sont pertinentes à notre contexte. Des notions telles que la distinction entre l'espace formel et l'espace physique, qui sont liés à l'ancienne et la nouvelle interprétation de la géométrie. Autres notions importantes sont liées à la perception et la compréhension espace à travers nos sens et d'autres notions phénoménologiques tels que l'expérience corporelle. Cela nous aidera à obtenir une meilleure compréhension de la relation entre l'espace, la géométrie et de notre perception. Il y a eu un grand nombre d'ouvrages philosophiques consacrés à l'étude de l'espace et de la perception, surtout depuis le début de la phénoménologie comme un mouvement philosophique et jusqu'à mouvements ultérieurs comme l'existentialisme, le structuralisme et le post-structuralisme qui ont été très influencés par cette ligne de pensée. Ces travaux ont eu une influence considérable pour l'appréhension de l'espace dans l'architecture, ce qui contribue d'une certaine manière à la problématique de l'application de la géométrie moderne à la conception architecturale en particulier et au divorce entre la science et l'art moderne en général. L'idée de base de la problématique est dans l'opposition entre deux points de vue fondamentaux: l'ontologie cartésienne sur la base du cogito et l'ontologie phénoménologique par exemple, que des corps-sujet de Merleau-Ponty. Il y a beaucoup de comptes ontologiques phénoménologiques anti-cartésiens, mais nous tenons à mentionner en particulier celle de Merleau-Ponty en raison de son attitude douteuse explicite en ce qui concerne les connaissances scientifiques comme le vrai compte de la réalité. Merleau-Ponty utilise référence à la technique anti-perspective de Cézanne à la peinture, la considérant comme une manière plus profonde pour capturer l'expérience humaine de l'espace [1]. Ce point de vue ne pouvait pas être plus loin du point de vue de la renaissance où la perspective était censé être un moyen de capturer l'espace réaliste humaniste. Nous pouvons déjà voir l'hostilité entre l'ontologie cartésienne adoptée largement par la science et les mathématiques modernes avec leur compréhension abstraite de l'espace et l'ontologie phénoménologique qui met l'accent sur l'expérience. Cela donne plus d'explications pourquoi les mathématiques jouent un rôle important dans les arts de la Renaissance, alors qu'elle est totalement absente si pas en position opposée aux arts dans les temps modernes. Merleau-Ponty poursuit en expliquant cette opposition entre les mathématiques modernes et la science en général et l'art moderne. Selon Merleau-Ponty, la science est à l'opposé de l'art, où l'art de capturer la perception individuelle, la science est fondamentalement anti-individualiste, à savoir positiviste. Dans son livre (la phénoménologie de la perception) Merleau-Ponty décrit la science comme une abstraction ex post facto, et qu'il néglige la profondeur des phénomènes qu'il cherche à expliquer [2]. En d'autres termes, cette géométrie moderne (également de la géométrie pratique complétée de la physique) avec toute sa rigueur, en quelque sorte ne peut pas saisir pleinement la profondeur du phénomène de l'expérience des objets réels. La position de Merleau-Ponty en ce qui concerne la compréh

sion de l'espace et des objets dedans, est la position générale d'architectes que ce soit par conviction ou simplement en suivant la convention de la discipline. Nous n'allons pas ici plaider en faveur ou contre cette position, nous mentionnons simplement comme partie de notre préparation du terrain pour la construction de l'espace formel. Principalement pour donner une idée du contexte actuel de la compréhension de l'espace en architecture avant de commencer à importer la compréhension de l'espace des mathématiques dans ce territoire. Nous pouvons être d'accord ou en désaccord avec la position de Merleau-Ponty, le fait est qu'il est vrai que les formules ne peuvent pas saisir pleinement l'expérience humaine, mais ce n'est pas ce qu'ils sont faits pour. Cependant, ils capturent certain type de connaissances sur l'objet réel qui n'est pas accessible aux sens. Pour rendre cette idée plus claire, nous prenons un exemple concret de représentant une forme connue, par exemple le cercle. Il s'agit d'une forme que nous connaissons tous, parce que nous avons vécu dans la réalité, par exemple en regardant la pleine lune. Alors, où un cercle tracé à la main plutôt déformé par un artiste représente mieux la perception individuelle du cercle, il ne parvient pas à nous dire ses propriétés intrinsèques, quelque chose que l'équation du cercle peut dire avec beaucoup de détails. Cela peut sembler une observation triviale mais c'est précisément la position problématique de l'architecture depuis un côté, nous devons être capables de dire des informations précises sur les formes que nous concevons, tout en exprimant une vision individuelle artistique d'eux. Ce problème n'existerait pas dans l'ingénierie puisque ce qui est important est l'information intrinsèque, et il n'apparaît pas dans la peinture ou la sculpture parce que c'est la vision individuelle est ce qui compte. Au 18ème siècle, le mathématicien français Gaspard Monge a développé une méthode de représentation intermédiaire: la géométrie descriptive, portant le processus rigoureux de construction mathématique en utilisant le dessin au lieu de formules. Géométrie descriptive a été très adapté à l'architecture et le dessin technique, qu'il est resté jusqu'au l'essor de dessin à l'ordinateur et des logiciels de CAO, la dominante et parfois la seule géométrie enseignée dans les écoles d'architecture. Cependant, malgré les fondements mathématiques de la géométrie descriptive, son processus est entièrement phénoménologique à savoir que les constructions sont basées sur notre vision. Pour cette raison, nous ne pouvons pas considérer son application en architecture d'une application de la géométrie moderne et son espace n'est pas un espace formel. Contrairement aux dessin à la main ou à l'aide de la géométrie descriptive, l'écriture d'une équation pour le cercle crée un saut que le dessin ne peut pas faire, c'est parce que, après tout, le dessin est une tentative de recréer l'expérience de voir le contour (par exemple de la pleine lune) en utilisant une autre expérience qui, est de voir le cercle graphique dessinée. Maintenant ce que nous obtenons avec une équation en termes de perception n'a rien à voir avec le cercle puisque visuellement tout ce que nous voyons sont des symboles mathématiques, donc le lien à la forme du cercle n'est pas un visuel, mais un lien mental. C'est comme donner le cercle une double existence, l'un comme une forme phénoménologique et l'autre comme une relation logique entre les symboles, c'est remarquable, car il est équivalent à avoir un autre moyen de comprendre et d'apprécier les formes uniquement à travers nos esprits. Toutes les informations sur la forme peut être comprise de cette manière, par exemple, où elle se courbe ou où il n'est pas lisse, et puis peuvent être observés phénoménologiquement et ont trouvé être parfaitement assorti. Cela nous amène au problème d'Einstein du chapitre précédent lorsque nous avons soulevé la question de savoir comment les mathématiques décrivent le monde physique avec une précision étonnante. Cette distinction entre les propriétés d'un objet qui peut être compris que par l'esprit et ceux observés par les sens, peut être retracée aux *idées et formes* de Platon, mais mises de l'avant dans les temps modernes par Emmanuel Kant dans son livre *Critique de la pure raison* comme noumène et phénomènes. Cette distinction pourrait être compris comme des choses en soi et les choses comme elles apparaissent. Ces notions sont des notions importantes de la philosophie transcendantale de Kant qui ont besoin profonde étude de la philosophie de Kant à comprendre pleinement. Dans le cadre de cette recherche, nous allons tenter d'interpréter ces concepts afin de les intégrer dans notre discours sur l'ancienne et la nouvelle interprétation de la géométrie, ce qui est important pour nous, en montrant la différence entre l'espace du point de vue de l'architecture et du point de vue des mathématiques modernes. Nous allons mener cette tentative en utilisant à nouveau l'exemple de la représentation du cercle par le dessin et par l'équation mathématique. Simplement, en considérant la représentation mathématique comme noumène et la représentation graphique dessiné comme phénomène, tant représenté sur la figure ci-dessous.

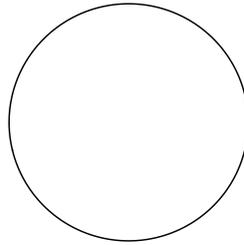
Noumena (la chose en soi)

Un objet posé ou de l'événement, qui est connu sans l'utilisation des sens

$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, ici f représente une propriété intrinsèque du cercle comme noumène à savoir que chaque point sur le cercle vérifie cette relation.

Phénomènes (la chose telle qu'elle apparaît)

Un objet posé ou de l'événement, qui apparaît aux sens



Représentation du cercle ici comme un phénomène visible (un cercle de rayon = 1).

Le point de vue de Kant est la suivante: lorsque nous utilisons un concept de décrire ou de classer noumènes nous sommes en fait en employant des méthodes pour décrire ses manifestations ou des phénomènes observables [3]. Il continue de classer les méthodes par lesquelles les humains tentent de comprendre le monde tel qu'il est, qu'il a appelé, catégories de l'entendement: l'esthétique transcendantale, analytique transcendantale, la logique transcendantale, et déduction transcendantale. Selon Kant, afin de transcender une observation directe ou une expérience, les humains utilisent la raison et classifications, pour corréliser entre les interrelations entre les phénomènes que l'on observe, cependant, ils ne peuvent jamais connaître les choses en elles-mêmes directement. Plutôt, nous devons déduire la mesure dans laquelle les pensées correspondent avec les choses en elles-mêmes par nos observations des manifestations de ces choses qui peuvent être détectés, c'est des phénomènes [3]. Aussi abstrait que cela puisse paraître, nous pouvons voir des éléments de cette théorie en mathématiques et en géométrie, en particulier, à savoir que par l'usage de formules, nous sommes en mesure de puiser dans certaines informations sur la forme (par exemple le cercle), mais ces informations comme la courbure en un point, peuvent être observés seulement si la forme est dessinée ou trouvé dans un objet physique, mais ce qui est le cercle en soi est inconnaissable. Ces idées de la distinction kantienne entre noumène et phénomènes sont très importants dans notre contexte, car ils peuvent nous montrer les origines de la suite à venir: ontologie phénoménologique de l'espace. Cela commence par le travail d'Edmund Husserl père de la phénoménologie transcendantale et mathématicien qui a pris les idées de Kant et les a développé davantage. Dans ce qui suit nous allons continuer plus loin, en mettant l'accent sur les notions d'espaces physiques et formelles et la perception, à travers de brefs comptes rendus des travaux de Husserl, Rudolf Carnap et Martin Heidegger. Husserl était préoccupé par les phénomènes de notre perception de l'espace. Il se demandait en quoi consistent la spatialité de notre perception, en d'autres termes comment pouvons-nous appréhender l'espace et comment pouvons-nous décrire. Dans son livre (*Idées I*), il définit le concept de épochè comme processus impliqués dans le blocage des préjugés et des hypothèses pour expliquer un phénomène en termes de son propre système inhérent de signification. Et *bracketing* comme un processus de mise systématiquement sur le côté, nos diverses hypothèses et nos croyances sur un phénomène, afin d'examiner comment le phénomène se présente dans le monde du participant. *Bracketing* implique donc mettre de côté la question de l'existence réelle d'un objet envisagé, ainsi que toutes les autres questions sur la nature physique ou objectif de l'objet; ces questions sont laissées aux sciences naturelles [4]. Par exemple, le fait de voir un cheval est considéré comme une expérience mentale, que l'on voit le cheval en personne, dans un rêve, ou dans une hallucination. *Bracketing* le cheval suspend tout jugement sur le cheval comme noumène et à la place, analyse le phénomène du cheval dans le mental humain. Cela signifie que pour Husserl perception est notre principale forme de savoir et n'existe pas en dehors de l'a priori de la structure de l'organisme et de son

engagement dans le monde. Dans ces exemples, nous pouvons voir déjà la distinction entre les notions d'espace formel et physique, et la première formulation de Husserl de la compréhension phénoménologique de l'espace qui cherche à devenir sans présupposés au moyen de la réduction phénoménologique. Husserl, étant un mathématicien naturellement favorisé une version transcendantale de la phénoménologie où l'accent de notre compréhension de l'espace et des objets dedans, se fonde sur notre perception ignorant leur existence physique, laissant cette question aux sciences naturelles. Nous verrons tout à fait un point de vue phénoménologique différente plus tard avec Heidegger, où l'accent est mis beaucoup plus sur la présupposition que nous avons sur le monde, conditionné par le fait que la personne est jeté dans le monde. Nous verrons plus loin, un point de vue phénoménologique tout à fait différente avec Heidegger, où l'accent est mis beaucoup plus sur la présupposition que nous avons sur le monde, conditionné par le fait que la personne est jeté dans le monde. En *Logique formelle et transcendantale* Husserl tente de géométriser la perception. À savoir, qu'il corrèle les concepts géométriques avec le sens phénoménologique pure et il donne une utilisation intradéscriptive aux outils de la géométrie; traitant ainsi les concepts et les outils opérationnellement et non objectivement. Il décrit le corps comme le lieu de toutes les formulations sur le monde; non seulement il occupe l'espace et le temps mais comporte également de la spatialité et la temporalité, et il a une dimension [5]. Ce que Husserl appelle la géométrie de l'expérience pourrait être comprise comme les significations que nous recevons quand nos corps se déplacent dans l'espace polarisant la réalité extérieure. Pour lui la conception architecturale est une extension de cette géométrie de l'expérience au-delà du corps [6]. Husserl conçoit la constitution de ce qu'on appelle l'espace objectif à la fois des aspects statiques / dynamiques et mono / inter-subjectives. D'un côté, il constitue un espace objectif comme le corrélat de la transformation intentionnelle mono-subjective de la variété de champs dits sensuels que nous faisons lors de notre activité mobile corporels. De l'autre côté comme le corrélat de la transformation intentionnelle inter-subjective de structures d'espaces ressentis subjectivement, (c'est à dire empathie transcendantale) au sein de notre communauté de sujets transcendants qui communiquent entre eux. Le travail de Husserl a influencé de nombreux philosophes, logiciens et mathématiciens, l'un d'eux était le philosophe allemand Rudolf Carnap, qui était membre du cercle de Vienne et un protagoniste du positivisme logique. Le travail de Rudolf Carnap couvre de nombreux domaines, en se concentrant principalement sur les fondements de disciplines, telles que la logique, les mathématiques et la physique, comme un élève de Husserl, il utilise certaines de ses idées, mais il les pousse d'une manière tout à fait différente. Carnap comme nous l'avons mentionné est un positiviste logique, et ainsi sa position est beaucoup plus anti métaphysique, mais nous devons donner un bref compte rendu des idées de Rudolf sur les espaces formels et physiques dans le cadre de notre préparation générale pour les constructions formelles qui suit. Rudolf Carnap a développé sa théorie philosophique de l'espace dans son ouvrage sur les fondements de la géométrie, il distingue trois types d'espace: formels, physiques et perceptives. Selon Carnap, les espaces formels sont les espaces mathématiques, limitée seulement par ne pas être contradictoire en soi d'un point de vue logico-déductif, tandis que l'étude des inter-relations entre les objets déterminés de manière empirique constitue espaces physiques. Enfin, les espaces perceptuels sont le domaine d'expériences sensorielles immédiates aussi connu comme *Anschauungen* (ou espace visuel). La distinction de Carnap des trois espaces est assez directe et claire par rapport à la phénoménologie transcendantale de Husserl, où le formel et le perceptif sont plus liés; dans le cadre de cette recherche lorsque nous utilisons le terme: espace formel, nous serions alors parlons de des espaces mathématiques de Carnap. Qui sont évidemment basée ce que Einstein distingue comme la nouvelle interprétation de la géométrie, sous la seule réserve formelle et indépendante de toute présupposition a priori sur ses objets ou de toute existence physique logique. Cette position a une saveur beaucoup plus scientifique qui est sûr, naturel pour le cercle de Vienne avec leur rejet de la métaphysique; cette position dans la compréhension d'espace, est la position classique de l'ingénierie et des sciences naturelles, mais l'architecture ne partage pas cette position. Compréhension architecturale de l'espace est plus liée à l'autre école de pensée engendré par la phénoménologie transcendantale de Husserl, mais a pris une direction philosophique plus continental avec l'influence de Heidegger, par opposition à la direction philosophique analytique de Carnap et la logique positiviste. Martin Heidegger qui a également été influencé par Husserl, néanmoins développé une position philosophique très différentes de celles de Husserl et Carnap. Heidegger est aussi un philosophe très influent avec un grand corps de travail, mais nous allons nous concentrer ici uniquement sur son travail concernant l'espace. Nous allons remarquer immédiatement la différence de la langue et de la pensée de Heidegger par rapport à ce que nous avons vu jusqu'à présent chez Husserl et

Carnap dans le sens où Heidegger en revanche à Husserl et Carnap n'est pas orienté vers les mathématiques et sa version de la phénoménologie est fondée dans les présupposés que les humains ont de l'espace. Ces présupposés que Husserl essayait de *bracket*, Heidegger creuse profond en eux et développe son concept d'être jeté dans le monde, aussi sa langue est beaucoup plus orienté vers les conditions de vie de tous les jours avec l'humeur et l'anxiété. Sa position concernant la science est naturellement opposé aux philosophes analytiques et positivistes logiques, qui considèrent les connaissances scientifiques pour être le plus proche de la réalité, en revanche Heidegger trouve autant de vérité dans la poésie et les arts sur la réalité comme dans les enquêtes scientifiques. Cela nous donnerait une idée de pourquoi la phénoménologie de Heidegger était beaucoup plus répandue en architecture, qui, vers le 20ème siècle est devenu de moins en moins liée aux mathématiques. Dans ce qui suit, nous allons présenter le concept de Heidegger de ce que nous appelions jusqu'ici espace formel ou de l'espace mathématique, et comment il contraste avec la notion de lieu, on remarque immédiatement la différence de la langue et de l'intérêt par rapport à la langue sèche de Carnap, qui se concentre uniquement sur les constructions formelles et logiques. Pour la première fois, nous rencontrons une compréhension différente de l'espace qui est fondamentalement liée à la perception, mais pas de la manière anti-présuppositionnelle comme chez Husserl, mais bien au contraire en se concentrant sur le sens de la place de l'homme. Heidegger, il est très clair que l'espace dans la tradition mathématique cartésienne où le calcul peut être fait à propos de ses fonctions, n'a rien à voir avec la place qui est l'environnement dans lequel nous vivons. Heidegger est très clair que l'espace dans la tradition mathématique cartésienne où le calcul peut être fait à propos de ses fonctions, n'a rien à voir avec la place qui est l'environnement dans lequel nous vivons. Dans son essai (bâtiment, le logement, la pensée), Heidegger explique espace phénoménologique, par les notions de distance ou de *spatium* en latin et l'extension ou *extensio*. Il continue alors de définir d'abord, la distance de la manière suivante: une distance est un espace intermédiaire ou un intervalle, donc la proximité ou l'éloignement entre les hommes et les choses peuvent devenir de simples intervalles d'espaces intermédiaires. Il ajoute ensuite que dans un espace qui est représenté à titre purement *spatium*, toute entité apparaît comme une simple chose à une position qui peut être occupé à tout moment par quelque chose d'autre, ou remplacé par un simple marqueur. Ce qui est plus, les simples dimensions de la hauteur, la largeur et la profondeur peuvent être extraites de l'espace sous forme d'intervalles. Ce qui est si abstraite, nous représentons comme une variété pure de trois dimensions [7]. Cette définition de la distance est essentiellement la définition de la distance dans la tradition cartésienne où les entités sont représentées par des coordonnées en trois dimensions d'espace homogène, mais Heidegger explique que cette distance peut être prélevée encore plus loin pour devenir une extension. Il raconte ce à la construction de variétés qui sont en quelque sorte, une nouvelle abstraction de l'espace cartésien euclidienne. Il explique ensuite qu'une pièce fait par cette variété est également plus déterminée par la distance, il n'est plus un *spatium*, mais maintenant pas plus que *extensio*, encore plus, il y a même encore un autre niveau d'abstraction de l'espace comme *extensio* qui sont: variétés purement mathématiques. Il leur explique comme des constructions purement mathématiques de dimensions arbitraires prises que par des relations algébriques abstraites analytiques. L'espace prévu pour cette manière mathématique peut être appelé l'espace, une espace en tant que tel, mais dans ce sens l'espace contient pas de lieux [7]. Ici, il fait clairement la distinction entre l'espace et le lieu qui d'une manière subtile est différente de la distinction formelle et physique de l'espace de Carnap et de la vieille et la nouvelle interprétation de la géométrie d'Einstein. Cette distinction heideggerienne est le plus proche pour expliquer la différence entre l'espace compris en architecture et l'espace compris par les mathématiques et la science, ce n'est pas seulement que les architectes comprennent l'espace à travers la vieille interprétation de la géométrie et de l'espace physique, ils comprennent l'espace surtout que le lieu. Par contraste aux scientifiques en particulier des physiciens et ingénieurs qui sont, par définition, concernés par l'espace physique avec la géométrie pratique complété d'Einstein; leur espace physique contient également pas de lieux. En bref, ce qui fait l'espace en architecture n'est pas seulement sa construction formelle comme en mathématiques, ni ses propriétés matérielles comme en physique, ni la façon dont il est perçu psychologiquement par nos sens, mais qu'il est toujours fondamentalement constituée d'endroits. Heidegger manifeste alors de sa position poétique concernant la réalité de l'espace, en disant que l'espace formel avec sa géométrie formelle ne peut jamais saisir la profondeur de ce que un lieu est. Il dit que *spatium* et *extensio* permettre à tout moment la possibilité de mesurer les choses en termes de distances, portées et les directions, et de calculer ces grandeur. Mais le fait qu'ils sont universellement applicables à tout ce qui a une extension, ne peut en aucun cas faire les grandeurs numériques la base de la nature des lieux et

des espaces qui sont mesurables à l'aide des mathématiques [7]. La phénoménologie de Heidegger était très influent à l'intérieur et à l'extérieur de la philosophie, en particulier dans la théorie architecturale, fournissant un moyen de comprendre l'espace non pas comme un espace neutre abstraite (espace mathématique formelle), mais plutôt comme l'espace d'expériences vécues. Les phénoménologues essaient de récupérer une dimension ontologique à l'environnement bâti, une dimension qu'ils croient a été érodée progressivement depuis l'invention de la perspective linéaire, il y a eu une tendance à percevoir l'espace comme de plus en plus abstraite et éloignée du corps et ses sensations. Ils prétendent que les sens doivent être traitées, et l'espace doit être perçu avec toutes les associations phénoménologiques autant que ce soit par des moyens visuels de représentation, par exemple la visualisation de formules mathématiques. Puisque cette recherche est centrée autour de l'application de la géométrie moderne dans la conception architecturale, à savoir le traitement de l'espace dans sa forme la plus abstraite, nous sommes enclins à penser qu'il s'agit d'une approche anti-phénoménologique, cependant, ce ne serait pas un jugement tout à fait correcte. C'est parce que, malgré le fait que tous les espaces et les formes qui vont être définis ici sont purement formelles, sans aucun lien avec des expériences monde physique, ils ne sont pas considérés comme une architecture au sens plein, nous pourrions les considérer comme des candidats virtuels ou proto-architecture qui pourraient être développées davantage en objets architecturaux. Avec ces brefs comptes rendus, nous avons une idée du contexte dans lequel nous nous trouvons en tentant d'apporter l'espace formel et la géométrie moderne dans la conception architecturale; avec cela, nous procédons maintenant à nos constructions mathématiques.

2.2. Les espaces formels et variétés

2.2.1 Notions topologiques de base

Puisque la majorité des travaux dans cette recherche utilisent la géométrie moderne et l'espace formel, nous devons comprendre quelques concepts fondamentaux qui sont essentiels à sa construction, le premier d'entre eux sera la topologie. La topologie est l'étude mathématique concerné avec les propriétés qualitatives les plus élémentaires de formes et d'espaces, tels que la connectivité, de la continuité et de la limite, les propriétés qui sont conservées sous déformations continues, y compris étirement et de flexion, mais pas déchirer ou collage. Topologie a de nombreux sous-champs: la topologie générale, qui établit les aspects fondamentaux de la topologie et examine les concepts inhérents aux espaces topologiques (exemples incluent la compacité et la connectivité). Topologie algébrique, qui tente de mesurer le degré de connectivité en utilisant des constructions algébriques tels que les groupes d'homotopie et homologie, et la topologie différentielle principalement des études de variétés différentiables et leurs plongements dans d'autres variétés.

Espace topologique [11]

Soit X un ensemble, $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de parties de X ,

$\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ alors \mathcal{T} est une topologie si $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$

\mathcal{T} est stable par intersections finies : $A_i \in \mathcal{T}, \forall i \in \{1, \dots, n\} \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}$

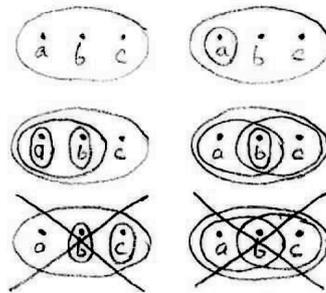
\mathcal{T} est stable par réunions quelconques : $A_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I \implies \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

\implies le couple (X, \mathcal{T}) s'appelle espace topologique

U est un sous ensemble de X inclus dans \mathcal{T} , U est un ouvert de X

\mathcal{T} est une topologie séparée $\iff \forall x, y \in X$ distincts, $\exists U, V \in \mathcal{T} \mid x \in U, y \in V$ and $U \cap V = \emptyset$

Le diagramme suivant explique la topologie d'un ensemble $X = \{a, b, c\}$



Le bas à gauche n'est pas une topologie parce que la réunion $\{b\} \cup \{c\} = \{b, c\} \notin \mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

En bas à droite n'est pas une topologie car l'intersection $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}$

La relation de la topologie à la conception architecturale n'est pas tout à fait claire, compte tenu de la nature abstraite de la topologie, par contraste à la relation de la géométrie à l'architecture qui est un peu évident. D'un point de vue quantitatif c'est vrai; la géométrie a beaucoup plus à offrir, mais il y a un parallèle fondamental sous-jacent entre la topologie et l'architecture, à savoir l'analyse qualitative des formes et des espaces. L'architecture n'est pas seulement concerné par la nature quantitative des formes mais aussi leurs propriétés qualitatives par exemple compacité et la connectivité. Des termes comme voisinage, ouvert, fermé, intérieur, extérieur, frontière, densité entre autres apparaissent simultanément entre l'architecture et la topologie, mais il n'a jamais été une recherche importante sur la corrélation entre ces analogies. Cette recherche porte sur l'application de la géométrie moderne à l'architecture, ce qui signifie que les questions de la topologie seraient naturellement adressées puisque la géométrie moderne est intrinsèquement liée à la topologie, mais ces questions topologiques ne constituent pas l'objet principal du travail.

Espace métrique [8]

$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$, d s'appelle une métrique sur l'espace topologique X , if $\forall x, y, z \in X$

séparabilité : $d(x, y) = 0 \iff x = y$

positivité : $d(x, y) \geq 0$

inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

\implies le couple (X, d) s'appelle un espace métrique

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

d_2 est la distance euclidienne et (\mathbb{R}^n, d_2) est l'espace euclidien de dimension n

Le premier de ces concepts sera le voisinage. Le voisinage est l'un des concepts fondamentaux de la topologie et donc fondamentale pour la géométrie en particulier la géométrie différentielle, intuitivement un voisinage d'un point dans un espace topologique est un ensemble contenant ce point, où l'on peut déplacer ce point une certaine quantité sans quitter l'ensemble. Le voisinage est étroitement liée à la notion d'un ouvert et de l'intérieur.

Voisinage et ouvert [8]

(X, \mathcal{T}) est un espace topologique, $p \in X$ et $V \in \mathcal{P}(X)$

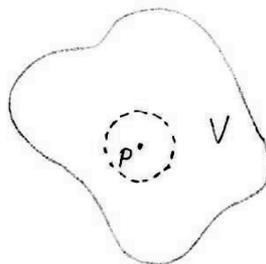
V est un voisinage de $p \iff \exists U \in \mathcal{T} \mid p \in U \subset V$, nous notons \mathcal{V}_p l'ensemble des voisinages de p

(X, d) est un espace métrique, $p \in X$ et $V \in \mathcal{P}(X)$ et $B(p, r) = \{y \in X \mid d(p, y) < r\}$ est une boule ouverte

V est un voisinage de $p \iff B(p, r) \subset V$

(X, \mathcal{T}) est un espace topologique, $U \subset X$ est un ouvert $\iff \forall x \in U, U \in \mathcal{V}_x$

(X, d) est un espace métrique, $U \subset X$ est un ouvert si $\forall p \in U \exists \epsilon > 0 \mid \forall x \in X, d(x, p) < \epsilon \implies x \in U$



Représentation de V comme un voisinage de p , $V \supset U$ un ouvert

Après avoir défini le voisinage, nous allons maintenant définir l'intérieur d'un espace, son extérieur et sa limite. Intuitivement, l'intérieur d'un sous ensemble A d'un espace topologique X est l'ensemble des points de A qui n'appartiennent pas à sa limite, et, naturellement, à l'extérieur de A est à l'intérieur de son complémentaire ou en d'autres termes le complément de son adhérence. La frontière de A est naturellement l'ensemble des points de l'adhérence de A qui ne sont pas à l'intérieur de A , et l'adhérence de A est sa frontière plus son intérieur.

Intérieur [8]

(X, \mathcal{T}) est un espace topologique, $S \in \mathcal{P}(X)$, $x \in X$ est un point intérieur de $S \iff S \in \mathcal{V}_x$

$S^\circ = \{x \in X \mid x \text{ point intérieur de } S\}$ s'appelle l'intérieur de S (le plus grand ouvert contenant S)

(X, d) est un espace métrique, $x \in S^\circ \iff \exists r > 0 \mid B(x, r) \subset S$

Adhérence [8]

(X, \mathcal{T}) est un espace topologique, $S \in \mathcal{P}(X)$, $x \in X$ est un point adhérent à $S \iff \forall V \in \mathcal{V}_x, V \cap S \neq \emptyset$

$\bar{S} = \{x \in X \mid x \text{ point adhérent à } S\}$ \bar{S} s'appelle l'adhérence de S (le plus petit fermé contenant S)

S^c est le complémentaire de $S \implies (\bar{S})^c = (S^c)^\circ$ et ∂S est la frontière de $S \implies \partial S = \bar{S} \setminus S^\circ$

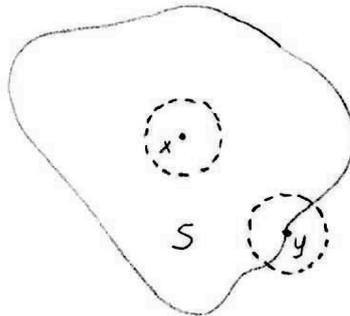
S est un fermé $\iff S^c$ est ouvert et S est dense dans $X \iff \bar{S} = X$

S est un fermé si $S = \bar{S}$ (i.e. $\forall x \in S \implies x$ est un point de accumulation ou un point isolé)

$x \in X$ un point de accumulation de S si $\forall V \in \mathcal{V}_x, V \cap S \setminus \{x\} \neq \emptyset$

$x \in X$ un point isolé de $S \iff \exists V \in \mathcal{V}_x, V \cap S \setminus \{x\} = \emptyset$

(X, d) est un espace métrique, $x \in \bar{S} \iff \forall r > 0 \mid B(x, r) \cap S \neq \emptyset$



Représentation de x comme un point intérieur de S et y comme un point d'adhérence (de la frontière) de S

En outre, nous allons définir la compacité et la connexité d'un espace, mais avant, nous devons définir une propriété fondamentale de la topologie, à savoir la continuité d'une application entre deux espaces topologiques (ie les transformations continues). Intuitivement une application continue est une application pour laquelle petits changements dans l'entrée provoquent de petits changements dans la sortie.

Continuité (topologique) [8]

$(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ sont des espaces topologiques

$f : X \rightarrow Y$, est continue en $x \iff \forall V \in \mathcal{V}_y \exists U \in \mathcal{V}_x \mid f(U) \subset V$

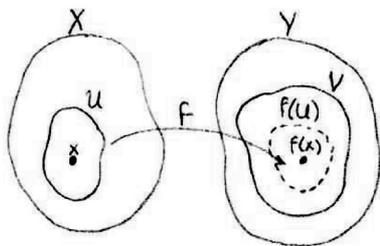
f est une application continue $\iff f$ est continue en tout $x \in X$

Continuité (métrique) [8]

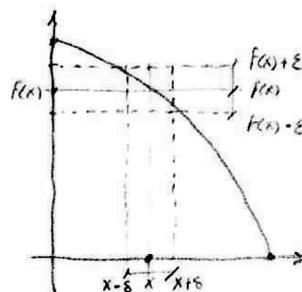
$(X, d_X), (Y, d_Y)$ sont des espaces métriques, $x, x' \in X$

$f : X \rightarrow Y$, est continue en $x \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$

et f est k -Lipschitz continue $\iff d_Y(f(x), f(x')) \leq k d_X(x, x')$



continuité (topologique)



continuité (métrique)

Avec la définition de la continuité, nous allons définir la notion de homéomorphisme, ce qui est essentiel dans l'étude de la topologie; essentiellement un homéomorphisme est une application continue entre deux espaces topologiques qui a une application inverse continue. Deux espaces avec un homéomorphisme entre eux sont appelés homéomorphe, et si ces espaces sont des espaces métriques alors ce homéomorphisme s'appelle un isomorphisme. Ces notions sont importantes pour comprendre la catégorisation des familles de formes qui vont être mis en place plus tard dans la recherche. Dans les figures ci-dessous, nous pouvons voir comment cette compréhension topologique des homéomorphismes d'objets et d'espaces peut être d'une grande utilité dans le processus de conception, par exemple ici, nous allons concevoir une maison flottante qui est homéomorphe à tore T^2 . Toutes les transformations utilisées dans l'élaboration de la conception sont continue et réversible, à savoir qu'ils sont des transformations topologiques; ne conservant que les informations topologiques sur la forme. Dans ce qui suit nous allons donner des explications précises sur ce que sont ces informations topologiques, par exemple compacité et la connectivité.

Homéomorphisme [8]

$(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ sont des espaces topologiques

$f : X \rightarrow Y$, est un homéomorphisme $\iff f$ est continue, bijective et son inverse f^{-1} est continue

Isomorphisme [8]

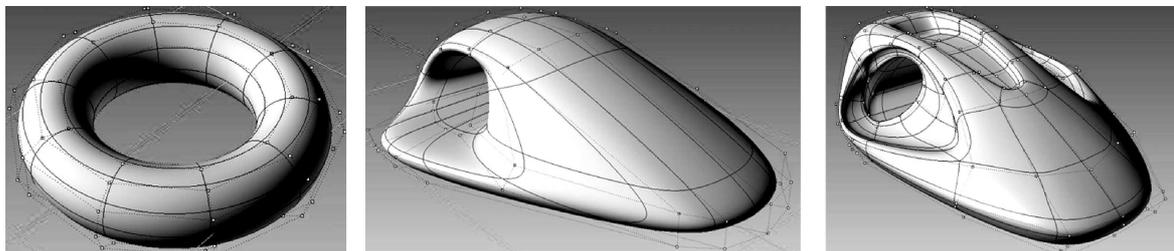
$(X, d_X), (Y, d_Y)$ sont des espaces métriques, $x, x' \in X$

$f : X \rightarrow Y$, est un isomorphisme $\iff d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$

Homotopie [9]

$(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ sont des espaces topologiques, $f, g : X \rightarrow Y$ continue

$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y \mid \forall x \in X, H(x, 0) = f(x) \text{ et } H(x, 1) = g(x) \implies H$ est une homotopie entre f, g



Représentation des transformations homéomorphiques dans un processus de conception architecturale

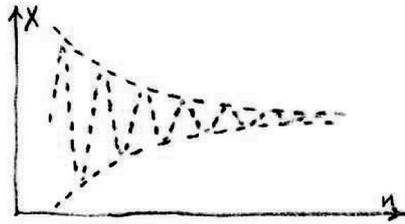
Maintenant nous arrivons à la caractérisation des espaces topologiques et métriques, en d'autres termes les propriétés qualitatives de ces espaces, les propriétés comme la compacité et la connectivité. Chacune de ces propriétés est intuitivement connu pour les architectes car ils pourraient être comprises phénoménologiquement sur les objets de l'espace physique tridimensionnel, mais depuis notre travail est dans l'espace mathématique formelle, nous allons fournir une description formelle de ces propriétés. Intuitivement un espace complet est un espace métrique sans points manquants, par exemple l'espace euclidien de nombres réels avec la métrique de distance habituelle est un espace complet. La compacité est plus intuitive du point de vue architectural, puisque la plupart des conceptions architecturales impliquent un enclos de quelque sorte; géométriquement ces enclos sont sous-ensembles compacts de l'espace euclidien, ce qui en soi n'est pas compact, car il n'est pas borné. Semblable à la compacité, la connexité est assez intuitive, un espace topologique connexe ne peut être représentée comme étant l'union d'ouverts non vides disjoints; une notion plus forte, qui est plus proche de notre notion de connexité dans le monde physique est celui de connexité par arc. Un espace connexe par arc, est un espace dans lequel deux points quelconques peuvent être reliés par un chemin continu, par exemple l'espace euclidien est connexe et connexe par arc mais pas compact.

Espace complet [8]

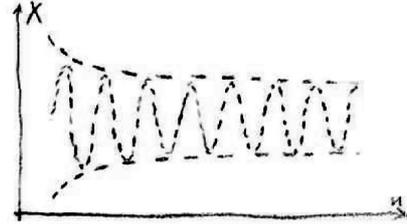
(X, d) est un espace métrique, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de X

x_n est une suite de Cauchy $\iff \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \mid \forall p, q \in \mathbb{N}$ avec $p, q \geq n$, $d(x_p, x_q) < \epsilon$

(X, d) est complet $\iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy X , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergent



(X, d) est complet



(X, d) n'est pas complet

Espace compact [8]

(X, \mathcal{T}) espace topologique, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de recouvrements ouverts de $X \iff X = \bigcup_{i \in I} A_i$

si $J \subset I$ et $X = \bigcup_{i \in J} A_i \implies (A_i)_{i \in J}$ est une famille finie de recouvrements (la propriété de Borel – Lebègue)

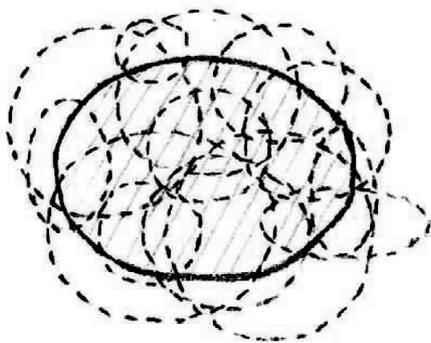
(X, \mathcal{T}) est séparé et vérifie la propriété de Borel – Lebègue $\implies (X, \mathcal{T})$ compact

(X, d) espace métrique, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de X

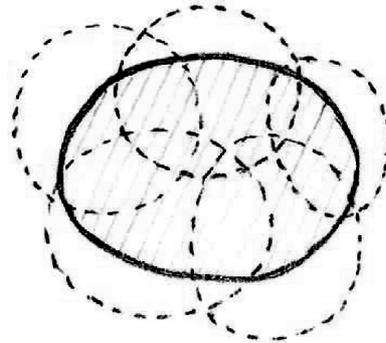
x est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff \forall r > 0, \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N \mid d(x, x_n) < r$

(X, d) est compact si toute suite de X contient au moins une valeur d'adhérence

(X, d) est compact s'il est fermé et borné



$X = \bigcup_{i \in I} A_i$ famille de recouvrements ouverts



$X = \bigcup_{i \in J} A_i$ famille finie de recouvrements

Espace connexe [8]

(X, \mathcal{T}) espace topologique, O_1, O_2 ouverts de X et F_1, F_2 fermés de X

(X, \mathcal{T}) est connexe \iff les seules parties de X qui sont à la fois ouvertes et fermées sont \emptyset et X

(X, \mathcal{T}) est connexe \iff si $X = F_1 \cup F_2$ avec $F_1 \cap F_2 = \emptyset \implies$ soit F_1 ou $F_2 = \emptyset$

(X, \mathcal{T}) est connexe \iff si $X = O_1 \cup O_2$ with $O_1 \cap O_2 = \emptyset \implies$ soit O_1 ou $O_2 = \emptyset$

(X, \mathcal{T}) est connexe \iff si $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ continue $\implies f$ constante

Connexité par arc [8]

(X, d) espace métrique, $x, y \in X$

$f : [a, b] \rightarrow X$ continue, f est un chemin de x à y , si $f(a) = x$ et $f(b) = y$

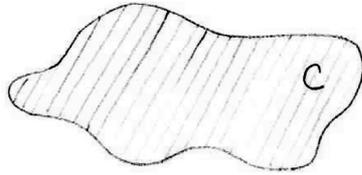
(X, d) est connexe par arc $\iff \forall x, y \in X \exists f \in C([a, b], X)$ chemin de x à y

Composante connexe [8]

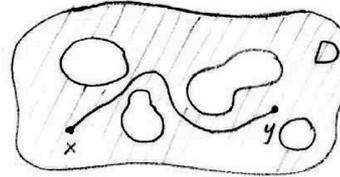
(X, d) espace métrique, $x \in X$, $\mathcal{A}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ est connexe, } x \in A\}$

$C_x = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_x} A$ est la composante connexe de x (la plus grande partie connexe de X contenant x)

$D_x = \{y \in X \mid \exists f \in C([a, b], X) \text{ chemin de } x \text{ à } y\}$ est la composante connexe par arc de x
 si $x, y \in X \mid x \neq y \implies C_x = C_y$ or $C_x \cap C_y = \emptyset$ et $D_x \subset C_x$



C est simplement connexe



D est connexe par arc

Poursuivant dans nos définitions d'espaces, nous arrivons à la définition de l'espace vectoriel normé, c'est un type fondamental de l'espace, puisque l'espace euclidien du monde physique appartient à cette catégorie. Fondamentalement, un espace vectoriel normé est un espace vectoriel accompagnée d'une norme; plus tard, nous allons donner une définition détaillée de l'espace vectoriel lorsque nous aurons affaire à des opérations algébriques. Pour le moment, nous allons donner une définition générale des espaces vectoriels normés du point de vue de la topologie, pour cela, nous aurons besoin de définir la notion de norme et des applications linéaires.

Espace vectoriel normé [8]

E est un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C})

$N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, N est une norme sur E qui vérifie, $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

séparabilité : $N(x) = 0 \iff x = 0_E$ (vecteur nul)

homogénéité positif : $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

inégalité triangulaire : $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

$\implies (E, N)$ est un espace vectoriel normé

si $E = \mathbb{R}^n$ et $N = \|\cdot\| \implies (E, N) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ est l'espace euclidien

un espace vectoriel normé complet est appelé un

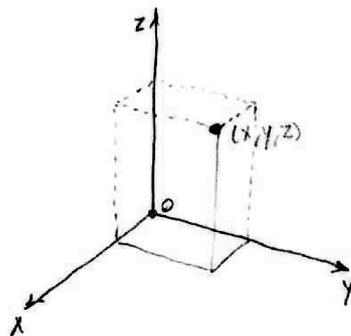
espace de Banach \implies l'espace euclidien est un espace de Banach

Applications linéaires (caractérisation topologique) [8]

$(E, N_E), (F, N_F)$ espaces vectoriels normés, $x \in E$, et $f : E \rightarrow F$ linéaire, alors f est continue

$\iff f$ est continue en 0_E , Lipschitz continue (i.e. $\exists k > 0 \mid N_F(f(x)) \leq k N_E(x)$)

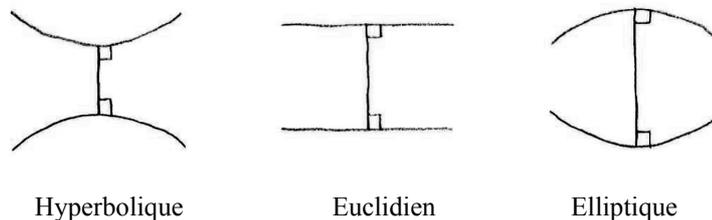
$\iff f$ est bornée : un ouvert O de E , $B_E(0, 1), \bar{B}_E(0, 1)$ et $\partial \bar{B}_E(0, 1)$



Représentation de l'espace euclidien de dimension 3 comme $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|)$

2.2.2. Construction d'une variété

Avec ces constructions précédentes, nous sommes maintenant en mesure de définir la variété. Intuitivement, variétés en particulier de une et deux dimensions peuvent être considérées comme des généralisations des notions de courbes et de surfaces, qui sont les deux objets mathématiques de base pour la conception architecturale. Ainsi, afin d'étudier la conception architecturale du point de vue de la géométrie moderne, il faut comprendre des courbes et des surfaces non comme des objets physiques, mais comme des cas particuliers de leurs généralisations abstraites, nommément des variétés des une et deux dimensions. Les variétés sont des objets essentiels des mathématiques modernes, en plus de leur généralisation des notions de courbes et de surfaces, elles utilisent les idées de l'algèbre linéaire, la topologie et l'analyse, en outre, certaines catégories spéciales de variétés ont également une structure algébrique, ils peuvent se comporter comme des groupes, ils sont appelés groupes de Lie. Historiquement, la notion de variété est liée à la découverte de ce qu'on appelle géométries non euclidiennes, les enquêtes sur ce sujet ont commencé presque immédiatement après Euclide a écrit son livre *Les éléments*, interrogeant précisément le cinquième postulat également connu sous le postulat des parallèles. Le cinquième postulat dit que si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits. Beaucoup de mathématiciens ont essayé de trouver une contradiction à ce postulat, à partir des mathématiciens musulmans de the 11th, 12e et 13e siècles comme Ibn Al-Haytham, Omar Al-Khayam et Nasr El-Din al-Tusi, jusqu'à les mathématiciens européens du 18e siècle comme Giovanni Saccheri et Johann Lambert. Mais il n'était pas jusqu'au 19ème siècle avec les travaux des mathématiciens: Janos Bolyai, Nikolai Lobatchevski, Carl Friedrich Gauss et Bernhard Riemann que les premiers traités de géométries hyperboliques et elliptiques ont été écrites, et il était Gauss qui a inventé le terme de géométrie non-euclidienne. Dans la théorie moderne, ces deux notions d'espaces elliptiques et hyperboliques correspondent aux variétés de courbure constante positive et négative; plus loin dans cette recherche, nous allons définir ces notions formellement.



Une variété est un espace topologique que près de chaque point ressemble à l'espace euclidien. Plus précisément, chaque point d'une variété à n dimensions a un voisinage qui est homéomorphe à l'espace euclidien à n dimensions; dans cette recherche, nous allons nous concentrer uniquement sur variété différentiable. Variétés différentiables sont également variétés topologiques, mais avec une structure différentiable globale supplémentaire et qu'ils sont localement difféomorphe à l'espace euclidien. Nous allons définir la notion de difféomorphismes locaux / mondiaux avec la notion générale de différentiabilité plus tard, lorsque nous commençons la définition des opérations différentielles sur nos formes et espaces; pour le moment, nous allons donner des définitions générales des courbes et des surfaces comme variétés. Afin de définir des courbes et des surfaces les collecteurs, nous aurons besoin de définir la notion de sous-variétés en particulier, les sous-variétés de l'espace euclidien. Cette définition de nos courbes et surfaces en tant que sous variétés peut être effectué par divers façons; dans cette recherche, nous allons nous concentrer principalement sur deux façons: la submersion et l'immersion ou en d'autres termes des équations algébriques et paramétriques. Ensuite, nous allons montrer que ces sous-variétés de l'espace euclidien sont en eux-mêmes variétés, en choisissant des atlas dont les cartes sont des restrictions de la forme normale. Nous verrons aussi que l'immersion ou la définition paramétrique de nos formes est beaucoup plus pratique, du point de vue de la conception architecturale. Afin de définir la submersion et l'immersion nous aurons besoin de deux théorèmes importants de calcul différentiel: la théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites (ces deux théorèmes seront définies avec la notion de différentiabilité plus loin dans la recherche).

Submersion [10]

$f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ C^k submersion if $\forall x \in U$, $f'(x)$ est surjective

Immersion [10]

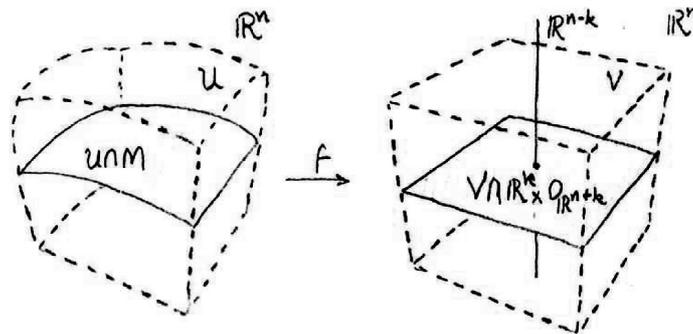
$f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ C^k immersion if $\forall x \in U$, $f'(x)$ est injective

Sous-variétés de \mathbb{R}^n [13]

$M \subset \mathbb{R}^n$, si $\forall x \in M \exists U \in \mathcal{V}_x$ et $V \in \mathcal{V}_{0_{\mathbb{R}^n}}$ voisinages ouverts et une forme normale f

$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n \mid f(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\}$

$\Rightarrow M$ est une sous - variété de \mathbb{R}^n de k dimensions



Représentation de la construction d'une sous-variété de \mathbb{R}^n de k dimensions

Variété topologique [10]

M est une variété topologique de n dimensions si M est un espace topologique séparé telle que

$\forall x \in M \exists U \subset M$ ouvert, $x \in U$ et $V \subset \mathbb{R}^n \mid h : U \rightarrow V$ est un homéomorphisme

Maintenant que nous avons défini la sous-variété nous allons maintenant définir formellement la variété différentiable, et pour ce faire, nous devons définir quelques notions importantes: celle d'une carte, d'un atlas et celle de l'application de changement des cartes. Ce vocabulaire est assez familier à tout le monde, c'est tout simplement parce que les cartes et les atlas du globe sont des bons exemples de ce que nous essayons de faire.

Carte d'une variété [10]

M est une variété topologique, le couple (U, φ) est une carte de M

si $U \subset M$ ouvert (est appelé le domaine de φ) et $\varphi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme

$(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ deux cartes de M , alors si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$

et si l'application de changement des cartes

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \text{ } C^k \text{ est un difféomorphisme}$$

$\Rightarrow (U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ sont compatibles

Atlas d'une variété [10]

M est une variété topologique, $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ une famille de cartes dont les domaines $(U_i)_{i \in I}$ recouvrent M

$\Rightarrow \mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ est un atlas de M

\mathcal{A} est de classe C^k si $\forall i, j \in I$, les cartes $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ sont compatibles

\mathcal{A} est maximale si elle contient toutes les cartes compatibles avec ses propres cartes

\Rightarrow un atlas maximal \mathcal{A} de classe C^k est appelé une structure différentielle de classe C^k

\Rightarrow une variété différentiable de classe C^k est une

variété topologique avec une structure différentielle de classe C^k

\Rightarrow une variété lisse est une variété différentiable de classe C^∞ (le seul type que nous allons utiliser)

Les courbes et les surfaces en tant que sous variétés de l'espace euclidien sont en eux-mêmes variétés en choisissant des atlas dont les cartes sont des restrictions de forme normale, à partir de maintenant, les termes courbe et la surface se réfèrent à variétés différentiables des une et deux dimensions.

Sous-variété comme une variété [10]

$S \subset \mathbb{R}^n$ est une sous – variété de l'espace euclidien \mathbb{R}^n

$\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n \mid \varphi(U \cap S) = V \cap \mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\}$ est une forme normale

la restriction de φ à $S \implies (U, \varphi|_S)$ est une carte de S

$\implies \mathcal{A} = (U_i, \varphi_i|_S)_{i \in I}$ est un atlas maximal de S dont les cartes (formes normales restreintes) sont compatibles

$\implies S$ est une variété différentiable dont l'atlas (structure différentielle) est \mathcal{A}

Sous-variété S (défini par des équations) [10]

$S \subset \mathbb{R}^n$, si $\forall x \in S \exists U \subset \mathbb{R}^n, x \in U$ et une submersion f

$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \mid U \cap S = f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\}) \implies S$ est une sous – variété de \mathbb{R}^n de k dimensions

pour $n = 3 \implies$ si $k = 1$, S est une courbe, et si $k = 2$, S est une surface (hypersurface et si $n - k = 1$)

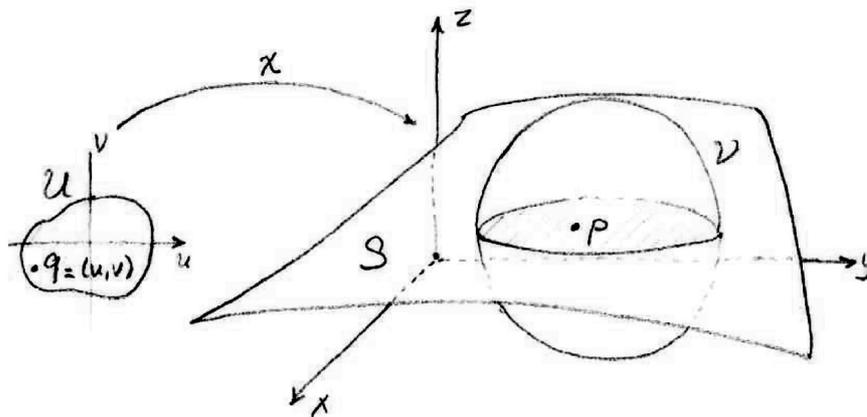
Sous-variété S (défini par le paramétrage local) [10]

$S \subset \mathbb{R}^n$, si $\forall p \in S \exists V \subset \mathbb{R}^n, p \in V$ et $\exists U \subset \mathbb{R}^k, 0_{\mathbb{R}^k} \in U$ et une immersion

$\chi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \chi(U) = V \cap S$ homéomorphisme

$\implies S$ est une sous – variété de \mathbb{R}^n de k dimensions

pour $n = 3 \implies$ si $k = 1$, S est une courbe, et si $k = 2$, S est une surface (hypersurface et si $n - k = 1$)



Représentation de la définition paramétrique de la surface S dans \mathbb{R}^3

Ces constructions sont les bases fondamentales dont nous avons besoin avant de commencer toute opération de géométrie différentielle sur la variété, même si ces constructions d'espaces formels (ou variétés) semblent tout à fait abstrait, Intuitivement, tous tournent autour d'une idée simple. Qui est: une variété cependant courbée ou de forme complexe, il est traité localement comme espace vectoriel plat, ce "traité" localement signifie qu'il est diffeomorphe à un espace vectoriel plat qui est tout à fait familier et où nous pouvons faire toutes nos opérations de l'algèbre et l'analyse. Nous allons étudier cela en détail, lorsque nous allons travailler sur les opérations analytiques, et là nous allons montrer une famille de techniques pour extraire des informations à partir d'une variété en les amenant localement dans les cartes à un espace vectoriel plat. En fait, quand les architectes ont une surface courbe, ils l'appellent un objet en trois dimensions, alors qu'en fait, il est un objet de deux dimensions plongé ou immergé (selon la surface) dans l'espace euclidien habituel de trois dimensions.

2.3. Références

- [1] *Cézanne's doubt*, Maurice Merleau-Ponty, 1945
- [2] *Phenomenology of perception*, Maurice Merleau-Ponty, 1945
- [3] *Critique of pure reason*, Immanuel Kant, 1781
- [4] *Ideas I*, Edmund Husserl, 1913
- [5] *Formal and transcendental logic*, Edmund Husserl, 1929
- [6] *Architecture and the crisis of modern science*, Alberto Perez-Gomez, MIT press, Cambridge, Massachusetts, 1985
- [7] *Building, dwelling, thinking*, Martin Heidegger, trans. A.Hofstadter, New York, 1971
- [8] *Cours de Topologie generale*, Sylvain Durand, Université Paris Descartes, Paris, 2011
- [9] *Cours de Topologie algébrique*, Julien Marché, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2012
- [10] *Cours de Géométrie Différentielle*, Laurent Charles, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2012

3. Définition de la forme

3.1. Définition paramétrique de courbes et de surfaces

Jusqu'à ce point, nous étions occupés à préparer le terrain pour la constructions mathématiques qui formeront l'essentiel de cette recherche; ces constructions mathématiques peuvent être considérés comme de deux familles: les définitions de la forme et des opérations sur la forme, et maintenant nous allons commencer avec la première famille: la définition de la forme. La distinction entre les définitions et des opérations n'est pas une distinction mathématique, mais elle découle de la vision de cette recherche du processus de la conception. À savoir, nous commençons par définir une forme initiale, puis appliquer des opérations à elle afin de la rapprocher de la forme finale souhaitée. Dans ce qui suit, nous allons montrer deux types principaux de la définition de la forme mathématiquement, à savoir paramétriquement et algébriquement venant de la définition des variétés par paramétrisation locale et par une équation algébrique. Toutefois, le but est d'amener toutes les définitions à une définition paramétrique qui est la forme la plus adéquate pour les opérations telles qu'elles sont définies dans cette recherche. Avant de passer à notre premier type de définitions: la définition paramétrique de courbes et de surfaces, il convient de mentionner que même si le mot paramétrique nous rappelle immédiatement à l'expression: l'architecture paramétrique; il faut distinguer la définition paramétrique de formes architecturales (courbes et surfaces) du terme: l'architecture paramétrique. Bien entendu, la définition paramétrique des courbes et des surfaces est comprise dans la notion générale de l'architecture paramétrique, mais ce n'est pas la seule interprétation de celui-ci. Le terme: l'architecture paramétrique est sans doute le mot plus abusé dans l'architecture contemporaine, et, naturellement, il est très difficile de trouver une définition unifiée pour elle. Le terme: l'architecture paramétrique est sans doute l'expression la plus abusé dans l'architecture contemporaine, et, naturellement, il est très difficile de trouver une définition unifiée pour. Le terme est aussi synonyme à d'autres termes tels que: conception numérique, conception computationnelle, de modélisation associative et la fabrication numérique, il existe un grand nombre d'œuvres de la théorie architecturale développées autour de ce terme, chacun essayant de le définir et de le transformer en une forme ou d'une autre. En tout cas, cette recherche ne cherche pas à faire la même chose, au lieu de l'utilisation du mot: paramétrique ici est strictement dans son sens mathématique. Avec ce dit que nous commençons par montrer les bases de définitions paramétriques de formes, à savoir quel est un paramètre et quels sont ses avantages et ses inconvénients. Dans une fonction mathématique, par exemple $f(x) = ax^2 + bx + c$, f est définie par la variable x et les constantes a, b, c où la variable x est dans la liste des arguments, alors que les constantes a, b, c ne soient pas, mais leur présence définit toute une famille de fonctions une pour chaque ensemble de valeurs de ces constantes. Ces constantes sont appelés paramètres mais dans la définition paramétrique de courbes et surface, nous renvoyons également aux variables indépendantes comme paramètres, qui découle de la notion de l'équation paramétrique d'une courbe ou d'une surface. La définition paramétrique des courbes et des surfaces est l'une des plus directe et facile à manipuler; ceci lui fait une des définitions les plus adaptés pour l'utilisation dans la production de la forme architecturale. La définition paramétrique est une méthode de définition d'une relation à l'aide des paramètres, pour l'essentiel, il définit la relation comme un ensemble d'équations; par conséquent, il est défini plus précisément comme une représentation paramétrique. Cette façon d'exprimer des courbes et des surfaces est pratique ainsi que l'efficacité, par exemple, on peut intégrer et dériver les courbes et surfaces terme à terme, en outre, la représentation paramétrique de courbes, a tendance à être inappropriés à l'utilisation dans des applications de CAO. Et il n'est pas de s'adapter facilement aux transformations géométriques, comme des rotations, des translations et mise à l'échelle. En outre, la représentation implicite est gênant pour produire des points sur une courbe ou sur une surface, parce que les valeurs de x peuvent être choisis de telle manière que le point ne se trouve pas sur la courbe ou de la surface. Ces problèmes sont éliminés par la réécriture des équations sous forme paramétrique, pour ces raisons, les opérations définies plus tard sont adaptées aux définitions paramétriques de courbes et de surface, le seul problème est que les définitions paramétriques a ses limites.

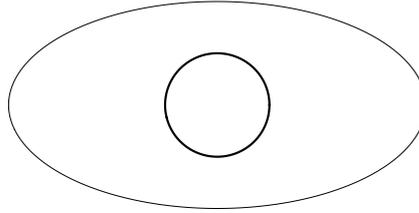
Exemple de base de la variation de forme basée sur le changement des paramètres

Le cercle unité est définie par $\alpha : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$

L'ellipse est définie par $\beta : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \beta(t) = (4 \cos(t), 2 \sin(t))$

Il est clair que l'équation du cercle est une forme spécifique de l'équation de l'ellipse où les fonctions coordonnées (x, y) sont $(1 \cos(t), 1 \sin(t))$ au lieu de $(4 \cos(t), 2 \sin(t))$. Là, nous définissons une équation générale où 2 et 4 ne sont pas fixes mais les valeurs sont des paramètres a, b et aboutissant à l'équation:

$f : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t)(a, b) = (a \cos(t), b \sin(t))$



Représentation de la génération d'un cercle et d'une ellipse en changeant les paramètres

La même analogie peut être faite avec des surfaces qui peuvent être vues comme une généralisation des courbes à savoir une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (une définition plus élaborée de courbes et de surfaces paramétrées sera montré plus tard). Cette idée semble si simple, est très important dans cette recherche, il montre simplement comment les variations de la forme peuvent être produites. Variation qui sont utilisés pour tester le potentiel de la forme en termes d'esthétique, de la structure, etc. Avant de montrer la puissance et l'étendue de cette méthode pour générer des formes architecturales, nous allons d'abord sur les définitions formelles de courbes et surfaces paramétriques, ces définitions nécessite certaines notions importantes que nous allons définir plus tard dans la section des opérations analytiques. Donc, pour le moment, nous allons donner une formalisation générale pour une courbe régulière et pour une surface régulière.

Courbe régulière [1]

$\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (x(t), y(t))$ est une courbe régulière ($\|\gamma'(t)\| \neq 0$) et différentiable par morceaux

$\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe régulière if $\forall t \in (a, b), \alpha$ est différentiable et $\|\alpha'(t)\| \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)}$

si $\forall t \in (a, b), \|\alpha'(t)\| = 1$ alors α a une vitesse unité

Surface régulière [1]

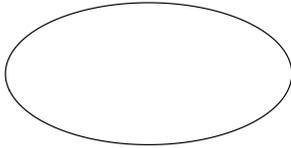
$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ open, $q \in \mathcal{U}$ and $p = \chi(q)$

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ is a regular injective patch (a regular surface)

Il est vrai que ce n'est pas intuitif concevoir en utilisant des formules. Cela découle de notre notion de dessin à la main qui se sent comme interpolation travers des points invisibles. C'est pour cela que l'interpolation est la méthode la plus populaire pour le dessin parmi les architectes et il n'est pas surprenant que tous les logiciels de CAO est basé sur une forme ou une autre de points l'interpolation, que ce soit splines cubiques ou nurbs. Nous allons montrer prochain, que la conception en utilisant des formules peut être intuitif après un certain temps et très manipulatrice comme les interpolations. Le point de départ naturel pour une telle tâche est d'examiner certaines des courbes et des surfaces classiques en \mathbb{R}^3 , comprendre comment elles fonctionnent et ensuite commencer à construire de nouvelles formules sur elles. Il existe des exemples fondamentaux, que les comprendre constitue la base de la création de formules pour de nouvelles courbes et des surfaces. Les exemples suivants de courbes sont très utiles dans la conception, en particulier l'épicycloïde qui est la plus élaborée.

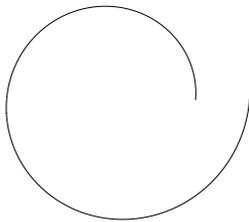
Quelques courbes de base [1]

Nous allons maintenant donner les formules de base pour les paramétrages de quelques courbes classiques, l'idée est simplement que par la compréhension de la façon dont leurs traces se rapportent à leur paramétrage, nous serons en mesure de construire nos propres courbes d'une certaine forme conçue.



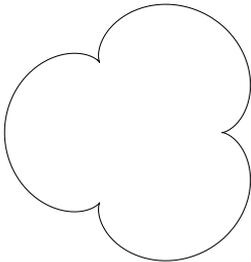
L'ellipse

$$\gamma : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t)), \text{ avec } U \text{ ouvert}$$



La spirale d'or

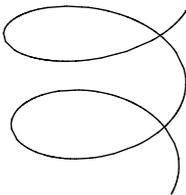
$$\gamma : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (a e^{bt} \cos(t), a e^{bt} \sin(t)), \text{ avec } U \text{ ouvert}$$



L'épicycloïde

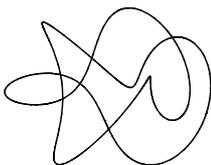
$$\gamma : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \text{ avec } U \text{ ouvert}$$

$$\gamma(t) = (a(b+1)\cos(t) - a\cos((b+1)t), a(b+1)\sin(t) - a\sin((b+1)t))$$



L'hélice

$$\alpha : U \subset [0, 4\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt), \text{ avec } U \text{ ouvert}$$



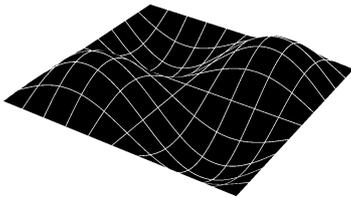
Le noeud de tore

$$\alpha : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \text{ avec } U \text{ ouvert}$$

$$\alpha(t) = ((8 + 3 \cos(5t)) \cos(2t), (8 + 3 \cos(5t)) \sin(2t), 5 \sin(5t))$$

Quelques surfaces de base [1]

Même que nous n'avons pour les courbes, nous allons faire pour les surfaces, les surfaces montrent ci-dessous seront les traces d'une des surfaces locales injectives régulières, en d'autres termes chacun d'eux est paramétrée par une seule carte, et $\mathcal{M} = \chi(\mathcal{U})$ une surface régulière. Encore une fois l'idée est simplement que par la compréhension de la façon dont ces traces se rapportent à leur paramétrage, nous serons en mesure de construire nos propres surfaces d'une certaine forme conçue.



Le plan \mathbb{R}^2 (i.e. Graphe d'une fonction h)

$h : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonction réelle différentiable de deux variables

$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi]^2 \rightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ est une surface locale régulière, où \mathcal{U} ouvert

$$h(u, v) = \sin(u) \sin(v)$$

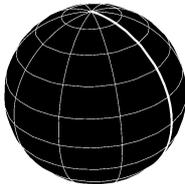
$$\chi(u, v) = (u, v, a h(u, v))$$



Le cylindre ($S^1 \times \mathbb{R}$)

$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi]^2 \rightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ est une surface locale régulière, où \mathcal{U} ouvert

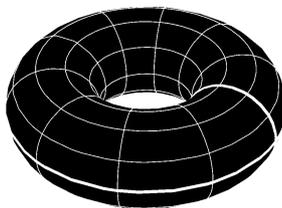
$$\chi(u, v) = (a \cos(u), b \sin(u), c v)$$



La sphère S^2

$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi]^2 \rightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ est une surface locale régulière, où \mathcal{U} ouvert

$$\chi(u, v) = \left(a \cos(u) \sin\left(\frac{v}{2}\right), b \sin(u) \sin\left(\frac{v}{2}\right), c \cos\left(\frac{v}{2}\right) \right)$$



Le tore T^2

$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi]^2 \rightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ est une surface locale régulière, où \mathcal{U} ouvert

$$\chi(u, v) = (\cos(u) (a + b \cos(v)), \sin(u) (a + b \cos(v)), c \sin(v))$$

Modification d'une courbe standard

Ces courbes et surfaces classiques peuvent être utilisés comme base pour les construction de formules décrivant les formes souhaitées. Ceci est fait par des adaptations de ces courbes et des surfaces classiques, ces adaptations peuvent être modification de leurs formules ou par des combinaisons de différents types. Premier exemple de ces adaptation serait que de passer de l'hélice spirale à une courbe horizontale allongée. Ceci peut également être considéré comme une fusion entre la spirale et l'hélice. Un autre exemple plus élaboré est l'adaptation de l'épicycloïde (avec une cuspidé i.e. cardioïde) à une courbe en forme de coeur. Ici, la modification de la formule est plus fondamental, mais l'esprit de l'épicycle reste présent dans la courbe en forme de coeur.

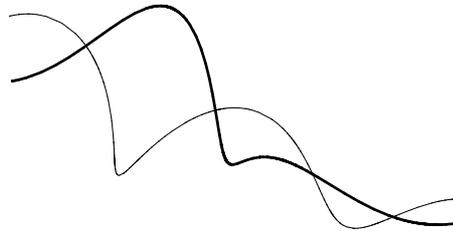
Spiral hélice à la courbe en spirale allongée

L'équation de l'hélice spirale est donnée par

$$\beta : U \subset [0, 4\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = \left(t, 2 e^{\frac{-2}{25}t} \sin(t), 2 e^{\frac{-2}{25}t} \cos(t) \right)$$

et est ensuite modifié pour

$$\varphi : U \subset [0, 4\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(t) = \left(t + \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{100} \sin(t), \sin\left(\frac{t}{2}\right), 1 - \cos(t) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right)$$



Représentation de la modification de l'hélice spirale

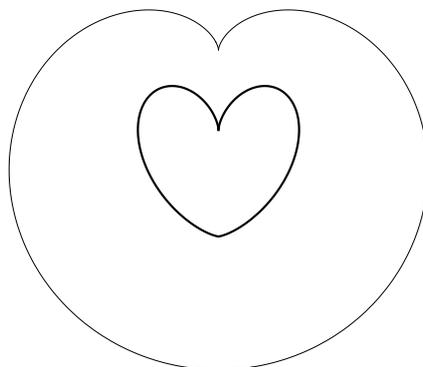
Épicycloïde (avec une cuspidé i.e. cardioïde) à une courbe en forme de coeur

L'équation de l'épicycloïde est donnée par

$$\beta : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (2 \sin(t) - \sin(2t), 2 \cos(t) - \cos(2t))$$

et est ensuite modifiée pour l'équation de la courbe en forme de coeur

$$\alpha : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = \left(\sin(t)^3, \left(\frac{5}{3} + \cos(t) \right) (\cos(t) (1 - \cos(t))) \right)$$



Représentation de la modification de cardioïde

Modification d'une surface standard

La même maintenant peut être fait pour les surfaces, nous pouvons commencer à partir d'une forme générale classique d'un ellipsoïde et l'adapter à une surface en forme de coeur.

Sphère à une surface en forme de coeur

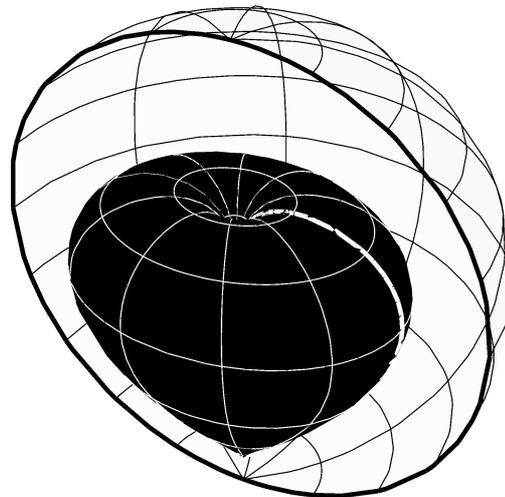
L'équation de la sphère est donnée par

$$\beta : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \beta(u, v) = \left(\sin\left(\frac{v}{2}\right) \cos(u), \sin\left(\frac{v}{2}\right) \sin(u), \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)\right) \right)$$

et est ensuite modifiée pour l'équation de la surface en forme de coeur

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\chi(u, v) = \left(\frac{2}{3} \cos(u) \sin\left(\frac{v}{2}\right)^5, \frac{1}{2} \sin(u) \sin\left(\frac{v}{2}\right)^5, \frac{2}{3} \left(\frac{5}{3} + \cos\left(\frac{v}{2}\right) \right) \cos\left(\frac{v}{2}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)\right) + 1 \right)$$



Représentation de la modification de la sphère

Ces exemples donnent une idée de la façon dont certaines formes en général peuvent être dérivées des formes géométriques classiques (comme l'ellipse et l'ellipsoïde), mais dans le but de prendre ce au niveau de la conception architecturale, nous avons besoin d'une technique beaucoup plus manipulable. Nous allons montrer que les formes que nous allons concevoir, sont des variantes de la sphère S^2 , le tore T^2 , le cylindre $(S^1 \times \mathbb{R})$ et le plan \mathbb{R}^2 . Si nous sommes en mesure de contrôler la révolution d'une certaine courbe de profil, nous pouvons parvenir à une assez grande variété de formes précisément conçus. Dans la sphère S^2 , la courbe de profil est un demi-cercle et la courbe de révolution est un cercle. Dans le tore T^2 , la courbe de profil et la courbe de révolution sont tous les deux cercles. Dans le cylindre $(S^1 \times \mathbb{R})$, la courbe de profil est une ligne et la courbe de révolution est un cercle. Dans le plan \mathbb{R}^2 , les deux courbes de paramétrage sont des lignes. L'ensemble des exemples suivant montrent comment nous pouvons être très élaboré dans le travail sur les deux courbes de paramétrage dans les directions u et v , et arriver à des formes qui peuvent facilement être utiles dans l'architecture. Les quatre familles de surfaces que nous serons concernés par sont: la sphère S^2 , le tore T^2 , le cylindre $(S^1 \times \mathbb{R})$ et le plan \mathbb{R}^2 , les deux premiers sont compact, le cylindre et le plan \mathbb{R}^2 sont non-compact. Il est important de savoir que nous pouvons construire des surfaces continues paramétrés par une seule carte seulement jusqu'au degré 1 (du genre topologique). Pour la construction de formes qui ont deux ou plusieurs trous, soit nous utilisons plusieurs surfaces paramétriques locales ou de définir la forme algébriquement à savoir comme un ensemble de zéros d'une fonction de trois variables.

3.2. Familles de surfaces

Afin que nous construisons une recherche concluante, nous devons nous limiter à quelques familles de surfaces qui couvrent une grande variété de types de bâtiments architecturaux et alors nous pouvons bien les modifier et de les analyser. Pour cette tâche, nous allons limiter nous-mêmes sur des surfaces qui peuvent être paramétrées par une seule surface locale.

Homéomorphe au plan \mathbb{R}^2 (graphe $h(u, v)$)

Ce type de surfaces est très utile pour la conception de bâtiments de faible hauteur, couvrant d'une parcelle rectangulaire. La surface n'est que le graphique de la fonction $h : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, il est relativement facile à comprendre que les autres types et il est adapté pour des conceptions architecturales des grands espaces comme des ateliers, des salles de sport et de petites usines. Ici, les deux courbes de paramétrage sont des courbes ouvertes.

nous commençons par construire l'équation h

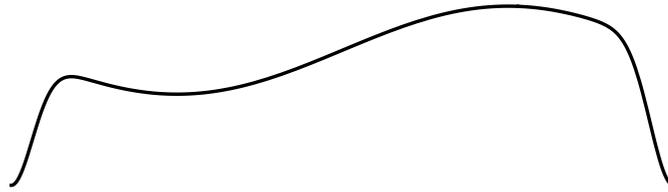
$$h : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$h(u, v) = \left(1 - \frac{1}{2} \sin(u) \sin(v) - \sin\left(\frac{v}{2}\right)^{45} + \cos(v)^2\right) \left(1 - \cos\left(\frac{u}{2}\right)^{90}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)^{90}\right)$$

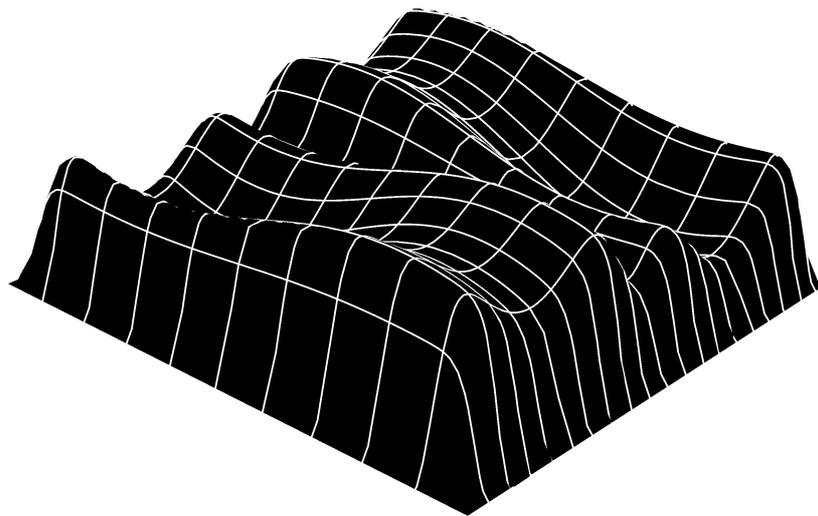
puis nous mettrons h dans l'équation finale de la surface

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = (u, v, h(u, v))$$

$$\chi(u, v) = \left(u, v, \left(1 - \frac{1}{2} \sin(u) \sin(v) - \sin\left(\frac{v}{2}\right)^{45} + \cos(v)^2\right) \left(1 - \cos\left(\frac{u}{2}\right)^{90}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)^{90}\right)\right)$$



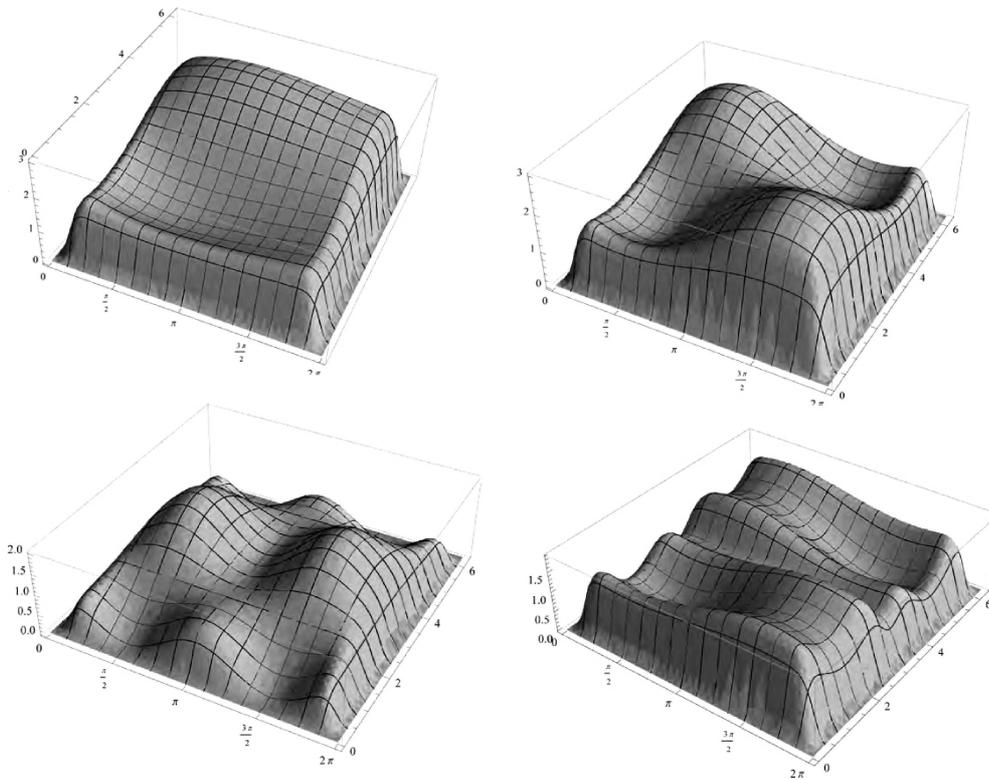
Représentation d'une courbe de paramétrage dans la direction u



Représentation de la famille de surfaces homéomorphes au plan \mathbb{R}^2 (graphe $h(u, v)$)

Application architecturale

Maintenant que nous avons défini cette famille de surfaces, nous allons montrer un exemple concret de la façon dont cette surface peut être utilisée comme forme architecturale. Dans cet exemple, une fois que nous fixons les famille de surfaces, nous commençons à rechercher des variations en faisant simplement varier les paramètres de l'équation de base ci-dessus jusqu'à ce que nous allons faire un choix de la surface qui va être l'enveloppe du bâtiment en fonction de certains critères.



Représentation de l'exploration de différentes surfaces de cette famille



Représentation d'une conception architecturale choisie de cette famille de surfaces

Homéomorphe au plan \mathbb{R}^2 (non graphe)

Ce type de surfaces est également très utile pour la conception de bâtiments de faible hauteur, couvrant d'une parcelle non rectangulaire. Bien que cette famille de surfaces est également homéomorphes au plan \mathbb{R}^2 ce n'est pas un graphe $h(u, v)$ cela signifie que le terrain que nous couvrons peut également prendre diverses formes.

on commence par la construction de l'équation de la courbe u

$$f_0 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_0(u) = u + \frac{4}{5} \sin(u)$$

$$f_1 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(u) = 2 + \cos\left(\frac{3}{2}u + \pi\right)$$

$$f_2 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(u) = 1 + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{\frac{3}{2}u + \pi}{2}\right)^{20}$$

$$f_3 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(u) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{u}{2}\right)^{20}\right)$$

$$f : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(u) = (f_0(u), f_1(u) f_2(u) f_3(u))$$

puis nous construisons la courbe v

$$g_0 : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g_0(u, v) = (2 + \cos(nu + \pi)) \left((v - \pi) + \frac{1}{10} \sin(2v) \right)$$

$$g_1 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_1(v) = 2 - \cos(2v)$$

$$g_2 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_2(v) = 1 + \frac{1}{10} \cos\left(2\frac{v}{2}\right)^{20}$$

$$g_3 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_3(v) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)^{20}\right)$$

$$g : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(u, v) = (g_0(u, v), g_1(v) g_2(v) g_3(v))$$

et enfin nous composons les deux applications dans l'équation finale de la surface

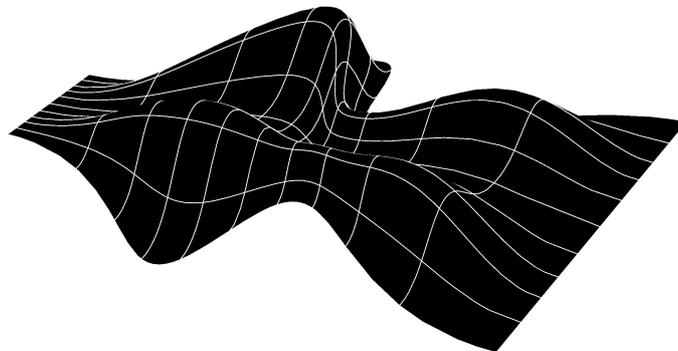
$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = \left(f_0(u), \frac{1}{4} g_0(u, v), \frac{1}{2} g_1(v) g_2(v) g_3(v) f_1(u) f_2(u) f_3(u) \right)$$

$$\chi(u, v) = \left(u + \frac{4\sin(u)}{5}, \frac{1}{4} \left(2 - \cos\left(\frac{3u}{2}\right)\right) \left((v - \pi) + \frac{1}{10} \sin(2v) \right), \right.$$

$$\left. \frac{1}{8} \left(1 - \cos\left(\frac{u}{2}\right)^{20}\right) \left(2 - \cos\left(\frac{3u}{2}\right)\right) \left(1 + \frac{\cos(v)^{20}}{10}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)^{20}\right) \left(2 - \cos(2v)\right) \left(1 + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{1}{2} \left(\pi + \frac{3u}{2}\right)\right)^{20}\right) \right)$$



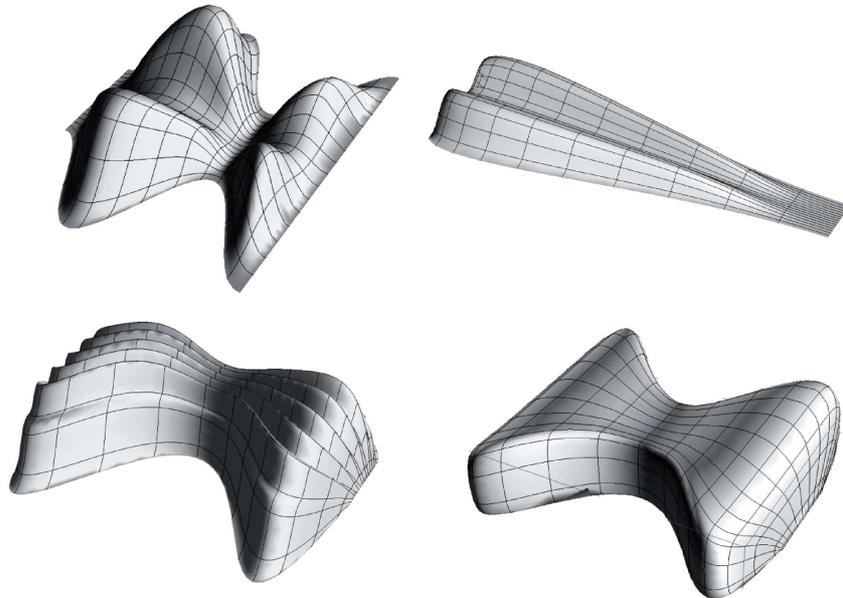
Représentation de la courbe u



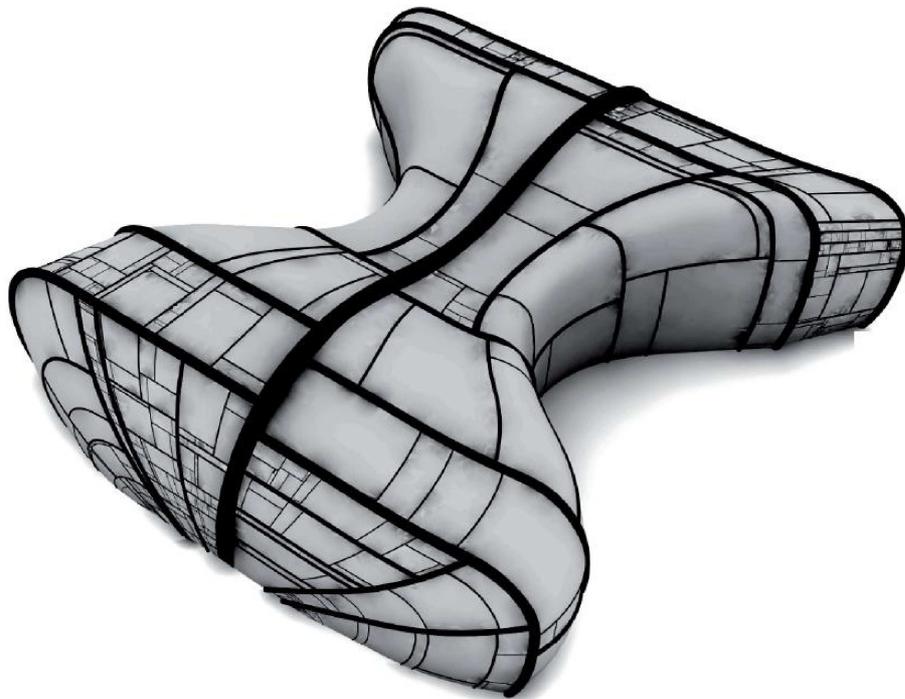
Représentation de la famille de surfaces homéomorphes au plan \mathbb{R}^2 (non graph)

Application architecturale

Comme dans l'exemple précédent, nous allons fixer une famille de surfaces et commencer alors à rechercher les variations de la surface de base de cette famille qui seraient appropriées pour la conception de l'enveloppe du bâtiment. Il ressort clairement de ces variantes sélectionnées de la surface que l'espace de recherche de surfaces de la même famille peut être très grande, ce qui permet une grande quantité d'options à choisir et adapté à de nombreuses applications architecturales.



Représentation de l'exploration de différentes surfaces de cette famille



Représentation d'une conception architecturale en utilisant cette famille de surfaces

Homéomorphe au cylindre ($S^1 \times \mathbb{R}$)

Ce type de surfaces construction est très utile pour la conception des tours, intuitivement la peau de tours et immeubles de grande hauteur sont homéomorphes au cylindre ($S^1 \times \mathbb{R}$). La même méthode de la courbe de révolution u et la courbe de profil v est utilisé ici, mais avec plus de précisions sur la courbe de révolution u . On peut voir cette courbe comme la base du plan de l'étage à un niveau donné, et en changeant le niveau, la forme de la courbe de révolution (i.e. de plan de l'étage) seront également changer. Comme nous le savons le niveau est rien que la valeur de la courbe de profil v à une v fixée. En d'autres termes, nous pouvons voir la courbe de la révolution en termes de (u, v) au lieu de seulement u . L'exemple suivant illustre cette construction.

on commence par la construction de l'équation de la courbe de révolution u

$$f_1 : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_1(u, v) = \cos(u) \left(1 - \frac{\left(\frac{9}{10}v - \pi\right)}{\pi} \sin(2u)^4 \right)$$

$$f_2 : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_2(u, v) = \sin(u) \left(1 - \frac{\left(\frac{9}{10}v - \pi\right)}{\pi} \sin(2u)^4 \right)$$

$$f : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$$

puis nous construisons la courbe de profil v

$$g_1 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_1(v) = 1 + \sin(v)^2$$

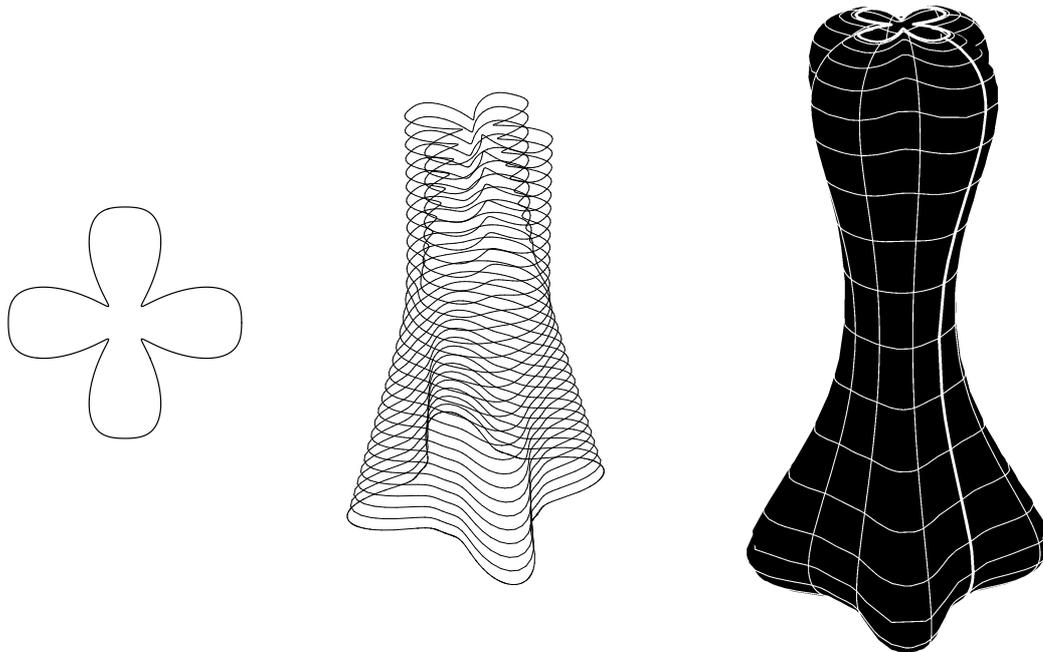
$$g_2 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_2(v) = 2(v - \sin(v))$$

$$g : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g(v) = (g_1(v), g_2(v))$$

et enfin nous composons les deux applications dans l'équation finale de la surface

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = (f_1(u, v)g_1(v), f_2(u, v)g_1(v), g_2(v))$$

$$\chi(u, v) = \left(\cos(u) \left(1 - \frac{\left(\frac{9}{10}v - \pi\right) \sin(2u)^4}{\pi} \right) (1 + \sin(v)^2), \sin(u) \left(1 - \frac{\left(\frac{9}{10}v - \pi\right) \sin(2u)^4}{\pi} \right) (1 + \sin(v)^2), 2(v - \sin(v)) \right)$$



Représentation de la courbe de profil et les famille de surfaces homéomorphes au cylindre ($S^1 \times \mathbb{R}$)

Homéomorphe au disque unité (D^1)

Ce type de surfaces appartient à la famille surface homéomorphe au disque unité (D^1), ils peuvent être considérés comme graphes sur des domaines non rectangulaires. Ils sont utiles dans la conception de bâtiments de faible hauteur, on distingue deux cas: homéomorphes au disque unité et homéomorphes à une Couronne.

on commence par la construction de l'équation de la courbe de révolution u

$$f_1 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(u) = \left(1 + \left(\frac{1}{2} \sin(2u)^3\right)\right) \left(\frac{13}{10} + \cos(u)^5\right) \cos(u)$$

$$f_2 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(u) = \left(1 + \left(\frac{1}{2} \sin(2u)^3\right)\right) \left(\frac{13}{10} + \cos(u)^5\right) \sin(u)$$

$$f : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(u) = (f_1(u), f_2(u))$$

puis nous construisons la courbe de profil v

$$g_1 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_1(v) = v$$

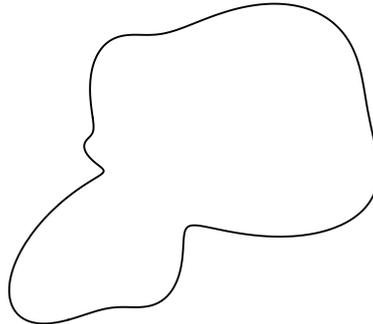
$$g_2 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_2(v) = 3 \sin\left(\frac{v}{2}\right)$$

$$g : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g(v) = (g_1(v), g_2(v))$$

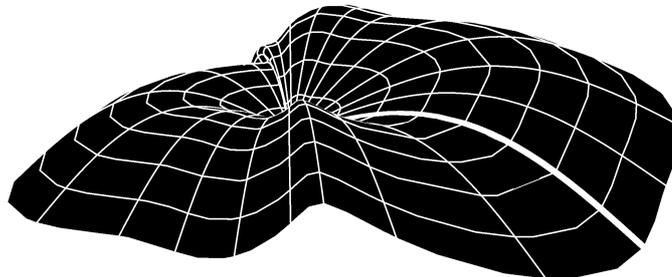
et enfin nous composons les deux applications dans l'équation finale de la surface

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = (f_1(u) g_1(v), f_2(u) g_1(v), g_2(v))$$

$$\chi(u, v) = \left(v \cos(u) \left(\frac{13}{10} + \cos(u)^5\right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin(2u)^3\right), v \sin(u) \left(\frac{13}{10} + \cos(u)^5\right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin(2u)^3\right), 3 \sin\left(\frac{v}{2}\right)\right)$$



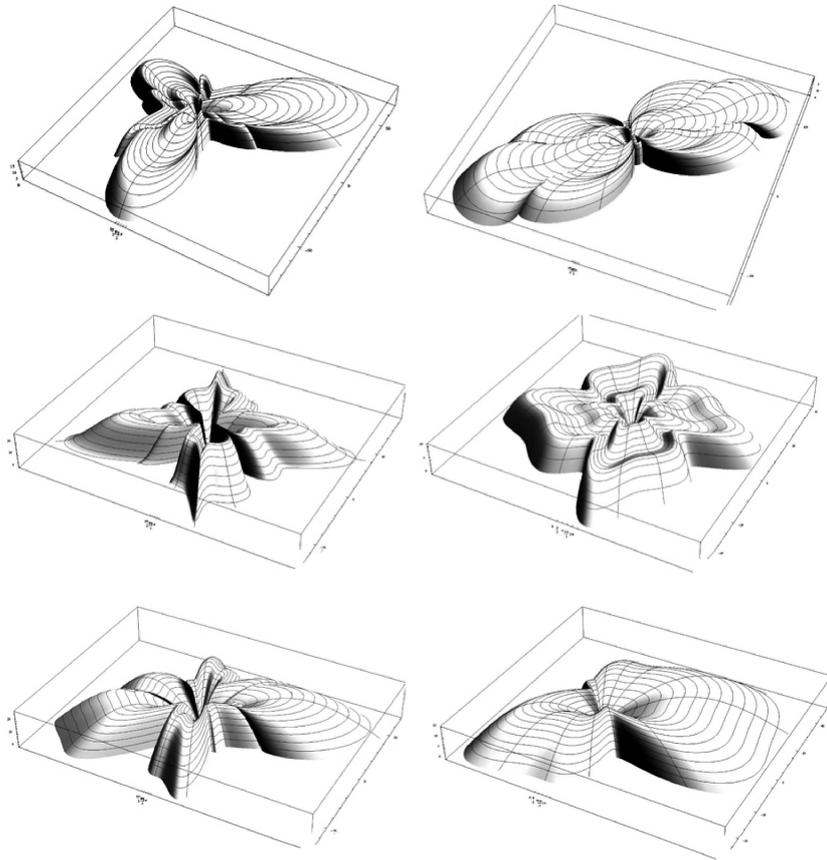
Représentation de la courbe u



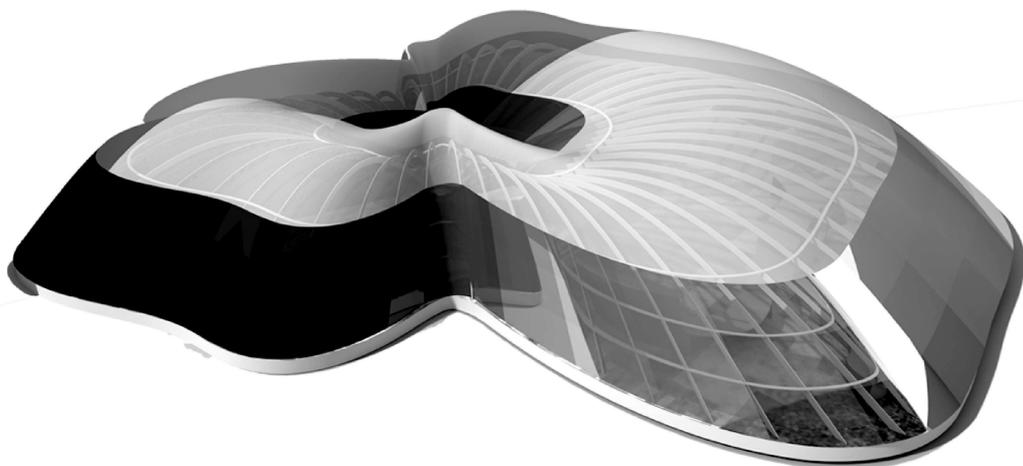
Représentation de la famille de surfaces homéomorphes au disque unité (D^1)

Application architecturale

Encore une fois le même procédé est appliqué, à savoir une famille de surfaces est fixe et ensuite une recherche de variantes est réglée en modifiant les paramètres de l'équation de base de la paramétrisation, et à nouveau comme dans les exemples précédents l'espace des variations est assez grande, ce qui permettra une riche variété de choix. Ces sélections peuvent être simplement basés sur les choix esthétiques ou comme nous allons voir plus tard dans la recherche basée sur des modèles de recherche algorithmiques.



Représentation de l'exploration de différentes surfaces de cette famille



Représentation d'une conception architecturale en utilisant cette famille de surfaces

Homéomorphe à la sphère (S^2)

Ce type de surface est tout à fait utile pour la conception de l'enveloppe du bâtiment continu (i.e. la façade continuant sur le toit). Cette famille de formes est devenu très populaire dans l'architecture dans les deux dernières décennies en raison de l'intérêt des architectes dans la «continuité» comme caractéristique de la forme. Pour cette raison, la construction des équations qui génère des formes qui sont homéomorphe à la sphère S^2 est très utile du point de vue de la conception architecturale contemporaine.

on commence par la construction de l'équation de la courbe de révolution u

$$f_1 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(u) = \cos(u) + \frac{5}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right)^8$$

$$f_2 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(u) = 2 \sin(u)$$

$$f : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(u) = (f_1(u), f_2(u))$$

puis nous construisons la courbe de profil v

$$g_1 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_1(v) = \frac{3}{2} \left(2 + \frac{35}{100} \cos\left(\frac{v}{2}\right)\right) \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)^6 + \sin\left(\frac{v}{2}\right)\right)$$

$$g_2 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_2(v) = v - \sin(v)$$

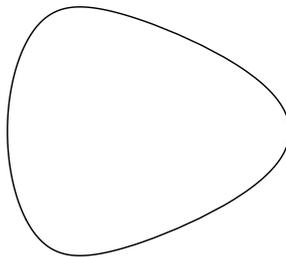
$$g : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g(v) = (g_1(v), g_2(v))$$

et enfin nous composons les deux applications dans l'équation finale de la surface

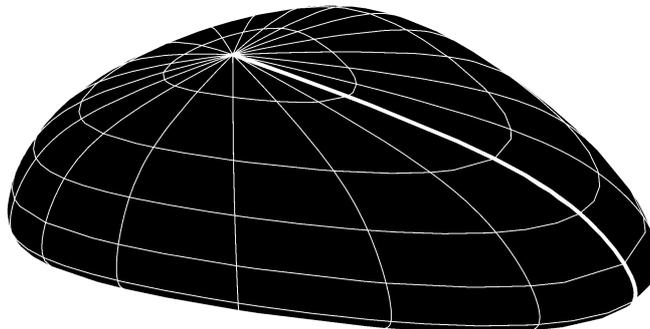
$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = (f_1(u) g_1(v), f_2(u) g_1(v), g_2(v))$$

$$\chi(u, v) = \left(\frac{3}{2} \left(\cos(u) + \frac{5}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right)^8\right) \left(2 + \frac{35}{100} \cos\left(\frac{v}{2}\right)\right) \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)^6 + \sin\left(\frac{v}{2}\right)\right),\right.$$

$$\left. 3 \sin(u) \left(2 + \frac{35}{100} \cos\left(\frac{v}{2}\right)\right) \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)^6 + \sin\left(\frac{v}{2}\right)\right), v - \sin(v)\right)$$



Représentation de la courbe u



Représentation de la famille de surfaces homéomorphes à la sphère S^2

Homéomorphe au tore (T^2)

Ce type de surfaces est très utile pour la conception de bâtiments de faible hauteur, qui a un atrium ou d'une cour. Dans cette construction, on définit des équations pour les surfaces avec une courbe de révolution u fermé.

on commence par la construction de l'équation de la courbe de révolution u

$$f_1 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(u) = \left(3 \cos(u) - \frac{1}{5} \cos(3u)\right) \left(1 + \frac{7}{10} \sin\left(\frac{3}{2}u\right)^3\right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin\left(u - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$$

$$f_2 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(u) = \frac{3}{2} \left(3 \sin(u) - \frac{1}{5} \sin(3u)\right) \left(1 + \frac{7}{10} \sin\left(\frac{3}{2}u\right)^3\right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin\left(u - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$$

$$f : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(u) = (f_1(u), f_2(u))$$

puis nous construisons la courbe de profil v

$$g_1 : U \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g_1(u, v) = \frac{3}{2} + \cos(v)$$

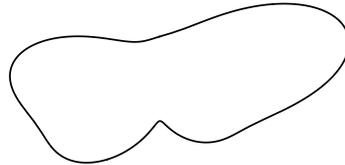
$$g_2 : U \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g_2(u, v) = 2 \sin(v) \left(1 + \frac{6}{5} \sin\left(\frac{3}{2}u\right)^2\right)$$

$$g : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v))$$

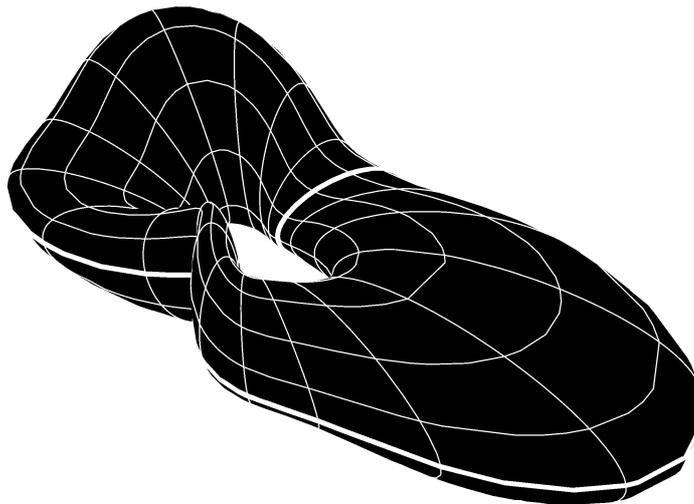
et enfin nous composons les deux applications dans l'équation finale de la surface

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = (f_1(u) g_1(u, v), f_2(u) g_1(u, v), g_2(u, v))$$

$$\chi(u, v) = \left(\left(3 \cos(u) - \frac{1}{5} \cos(3u)\right) \left(\frac{3}{2} + \cos(v)\right) \left(1 + \frac{7}{10} \sin\left(\frac{3}{2}u\right)^3\right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin\left(u - \frac{\pi}{4}\right)^2\right), \right. \\ \left. \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + \cos(v)\right) \left(3 \sin(u) - \frac{1}{5} \sin(3u)\right) \left(1 + \frac{7}{10} \sin\left(\frac{3}{2}u\right)^3\right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin\left(u - \frac{\pi}{4}\right)^2\right), \right. \\ \left. 2 \sin(v) \left(1 + \frac{6}{5} \sin\left(\frac{3}{2}u\right)^2\right) \right)$$



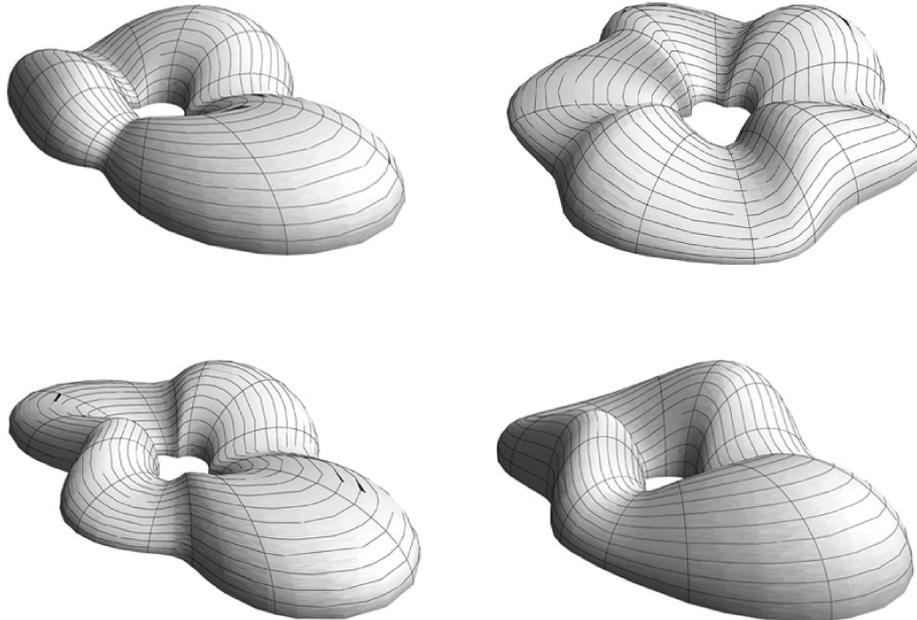
Représentation de la courbe u



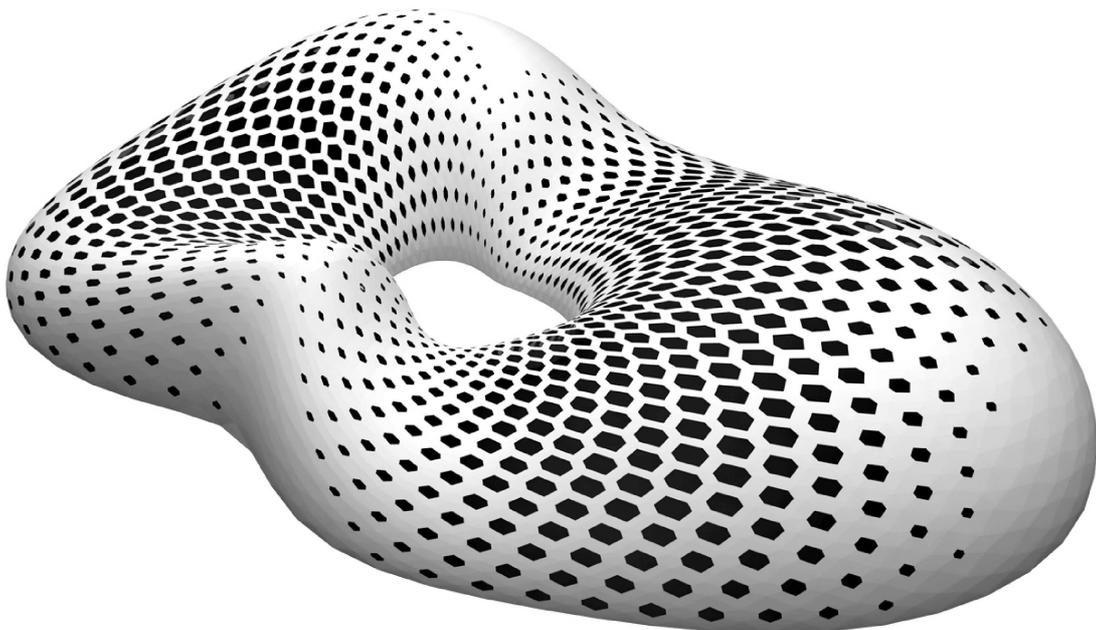
Représentation de la famille de surfaces homéomorphe au tore T^2

Application architecturale

Dans ce dernier exemple, on voit à nouveau le même processus de génération de variations basées sur la modification des paramètres de l'équation de paramétrisation de base, suivie d'une sélection d'une variante qui va être utilisée comme l'enveloppe du bâtiment. Cependant, nous voyons dans cet exemple, le panneautage de la surface choisie par un composant architectural, ce processus, nous allons expliquer en détail plus tard avec les opérations algorithmiques.



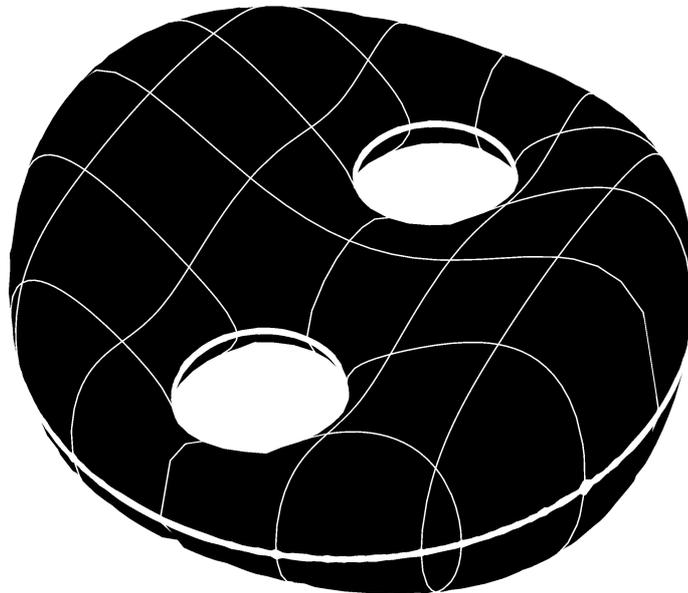
Représentation de l'exploration de différentes surfaces de cette famille



Représentation d'une conception architecturale en utilisant cette famille de surfaces

3.3. Définition algébrique (non paramétriques) des courbes et des surfaces

Maintenant que nous avons défini nos familles de surfaces paramétriquement, nous allons maintenant explorer la définition des courbes et des surfaces par des équations polynomiales, nous avons déjà vu cette définition quand nous avons défini les variétés par des équations. Comme nous l'avons mentionné avant la définition algébrique des courbes et des surfaces n'est pas aussi simple que la définition paramétrique, mais il peut s'avérer plus efficace dans la conception des formes plus complexes. Il s'agit d'une définition beaucoup plus généralisée des courbes et des surfaces et avec elle, nous sommes capables d'atteindre des formes plus complexes et élaboré, le problème est qu'il est théoriquement plus complexe et moins pratique en termes de manipulations par des opérations. Cependant, il est important de donner une idée de définitions algébriques, car dans la conception architecturale bien sûr nous devons explorer les conceptions de l'enveloppe des bâtiments qui vont au-delà d'un seul paramétrage d'une surface locale. Par exemple, les formes qui ont plus d'un trou, comme le tore à n-trous, qui pourrait être utile dans la conception des bâtiments à plusieurs cours, ici il est clair que nous aurons besoin de plus qu'une seule surface locale pour couvrir cette surface. Dans ces cas, la stratégie est de trouver une équation polynomiale, puis de décrire la surface comme l'ensemble des zéros de cette équation, puis de trouver des surfaces locales (traités comme des graphes) sur ces surfaces en utilisant les théorème des fonctions implicites. Avec cette technique, nous pouvons appliquer toutes les opérations algébriques, analytiques et algorithmiques nécessaires afin de manipuler et de transformer la forme selon la conception désirée. Avant de commencer, nous aurons besoin de quelques notion importante de la géométrie algébrique, la première serait l'hyper-plan et ensuite l'hyper-surface, puis nous allons commencer par définir les plus élémentaires de définitions algébriques de courbes et de surfaces à savoir les coniques et les quadriques. Après cela, nous allons explorer certaines des surfaces algébriques plus complexes et belles et essayer de trouver des paramétrages pour eux.



Représentation de la surface de genre avec deux trous (paramétrage en deux surfaces locales)

Hyper plan de \mathbb{R}^n [2]

$L \in (\mathbb{R}^n)^*$ l'espace dual de \mathbb{R}^n

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, L(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_0, \exists i \in \{1, \dots, n\} \mid a_i \neq 0$$

$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid L(x_1, \dots, x_n) = 0\} = \ker L$ est un hyper plan

Hyper surface de \mathbb{R}^n [2]

$P \in Q_k(\mathbb{R})$ est un polynôme de degré k à n variables

$\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid P(x_1, \dots, x_n) = 0\} = \ker P$ est une hyper surface

Les formes non linéaires les plus simples seraient ceux du degré 2, dans le cas des courbes, elle est appelée coniques et dans le cas des surfaces, elle est appelée quadriques

Quadriques de \mathbb{R}^n [2]

$P \in Q_2(\mathbb{R})$ est un polynôme de degré 2 en n variables

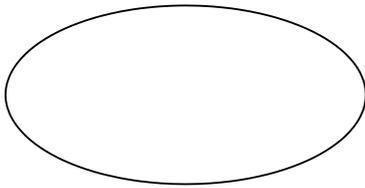
$$\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j + c = A^t x + x B^t x + c = 0\},$$

avec $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$

$n = 2 \implies \Gamma$ est une conique et $n = 3 \implies \Gamma$ est une quadrique

Les coniques de \mathbb{R}^3 [2]

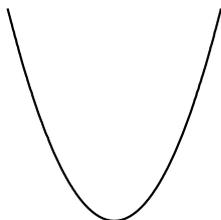
Les plus basiques des courbes algébriques sont les coniques, leur importance dans l'architecture est très significatif, à savoir ils sont largement utilisés en raison de leurs capacités structurelles. Nous avons déjà paramétrages de ces courbes, maintenant, nous allons donner leurs définitions implicites.



L'ellipse

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

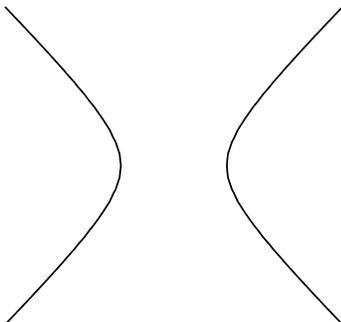
$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} = \ker f$$



La parabole

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = y - a x^2$$

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} = \ker f$$



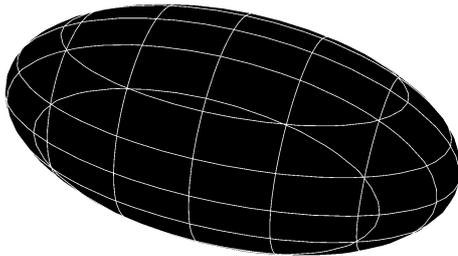
L'hyperbole

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$$

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} = \ker f$$

Les quadriques de \mathbb{R}^3 [2]

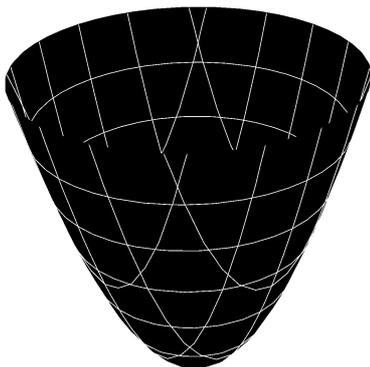
Après avoir défini les coniques nous allons maintenant définir leurs équivalents en deux dimensions à savoir les surfaces quadriques, leur nom, bien sûr vient du fait que leurs polynômes sont tous de second degré (équation quadratique).e all of second degree (quadratic equation). Tout comme les coniques nous avons des paramétrisations de ces quadriques, mais nous allons maintenant les définir comme l'ensemble des zéros de leurs polynômes. Dans la suite, nous allons présenter quelques exemples classiques importants de quadriques non dégénérée / dégénérés de \mathbb{R}^3 .



L' ellipsoid

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

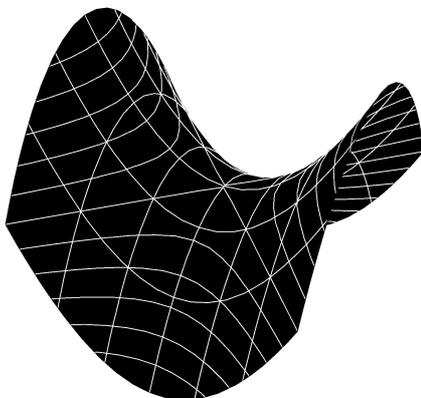
$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\} = \ker f$$



Le parabolöide elliptique

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z$$

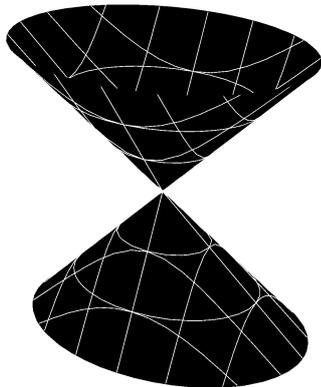
$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\} = \ker f$$



Le parabolöide hyperbolique

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z$$

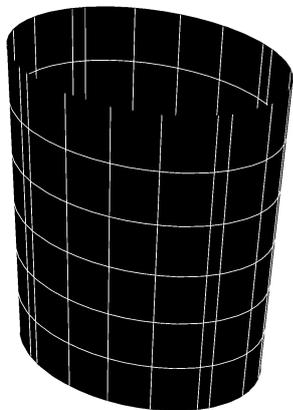
$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\} = \ker f$$



Le cône elliptique

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\} = \ker f$$



Le cylindre elliptique

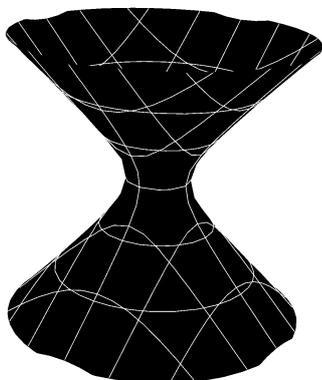
$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\} = \ker f$$

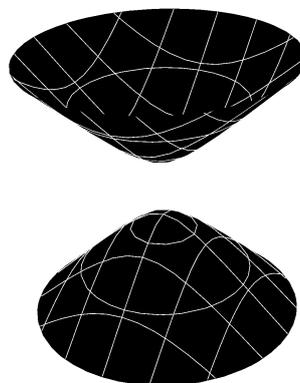
L'hyperboloïde

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1, \quad \Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\} = \ker f \quad (\text{une nappe})$$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1, \quad \Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\} = \ker f \quad (\text{deux nappes})$$



Hyperboloïde une nappe



Hyperboloïde deux nappes

3.3.1. Paramétrage de la surface algébrique

Maintenant on va prendre quelques exemples de surfaces ne pouvant pas être paramétrées en utilisant une seule surface locale et essayer de les paramétrer en utilisant plusieurs cartes, comme nous l'avons mentionné plus tôt que cela est possible en utilisant le théorème des fonctions implicites. L'idée est de trouver des voisinages ouverts $V \subset \mathbb{R}^3$, $W \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction $h : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 de telle sorte que chaque point $(x, y, z) \in V$ avec $f(x, y, z) = 0$ (i.e. se trouvant sur la surface) si et seulement si la coordonnée z peut être exprimée comme la fonction réelle $h(x, y) = z$, où les coordonnées $(x, y) \in W$ et $\partial_z f(x, y, z)$ est inversible. Cette méthode peut être vu dans les exemples suivants où la paramétrisation est donnée par les surfaces locales (graphes) sous la forme $\chi(x, y) = f(x, y, h(x, y))$. Dans cet exemple nous avons une surface définie par un polynôme de degré six, qui sont capables de paramétrer l'aide de deux cartes (surfaces locales).

Le Distel [3]

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 3000(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)(y^2 + z^2) - 3,$$

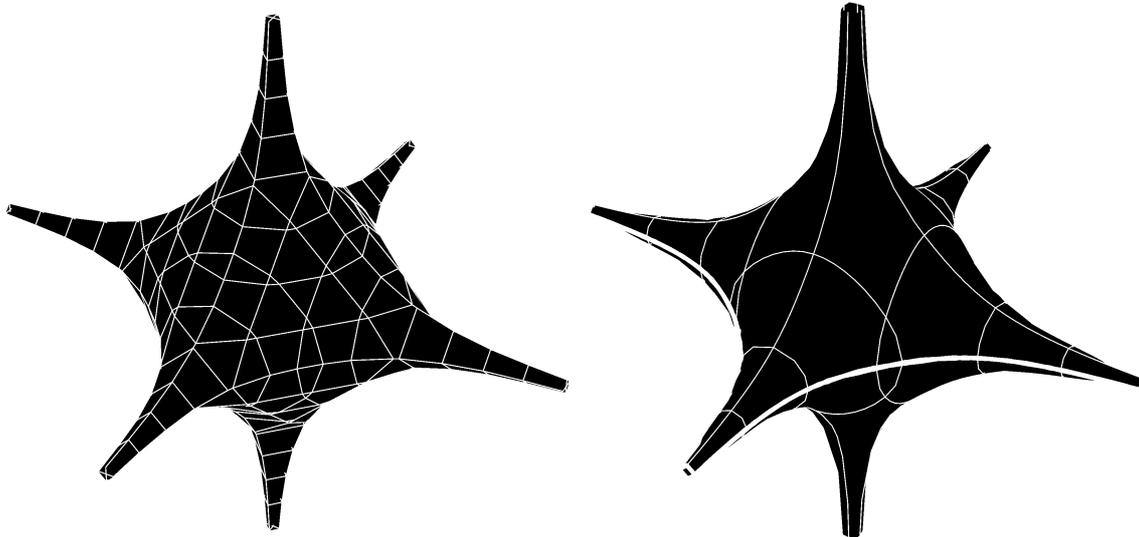
$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\} = \ker f$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = f(x, y, h(x, y)) \mid h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) = z$$

la surface peut être paramétré par deux carte (surfaces locales)

$$\chi(u, v) =$$

$$\left(u, v, \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{6000(x^2+y^2)} - \frac{x^4}{2(x^2+y^2)} - \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} - \frac{y^4}{2(x^2+y^2)} + \frac{1}{6000(x^2+y^2)} \left(\sqrt{1 + 36\,000 x^2 - 6000 x^4 + 9\,000\,000 x^8 + 36\,000 y^2 - 12\,000 x^2 y^2 - 6000 y^4 - 18\,000\,000 x^4 y^4 + 9\,000\,000 y^8} \right) \right)} \right)$$



Représentation de la surface donnée par ses ensemble de zéros et par paramétrage par deux surfaces locales

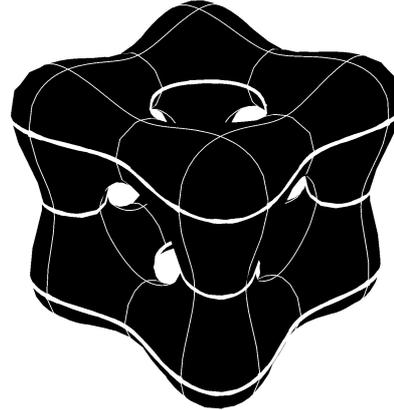
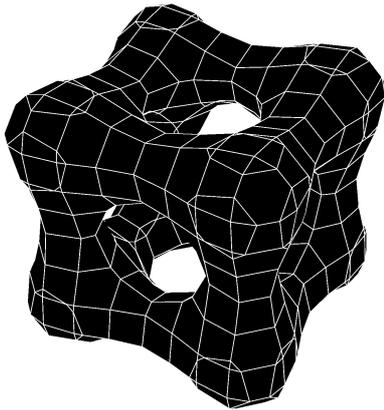
Plus d'exemples de paramétrisation des surfaces algébriques [3]

Les Chubs

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^4 - x^2 + y^4 - y^2 + z^4 - z^2 + \frac{2}{5}, \quad \Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\} = \ker f$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = f(x, y, h(x, y)) \mid h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) = z \Rightarrow \chi(u, v) = (u, v, h(u, v))$$

la surface peut être paramétré par quatre cartes $\chi(u, v) = \left(u, v, \pm \frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{5} \sqrt{-3+20x^2-20x^4+20y^2-20y^4}}}{\sqrt{10}} \right)$



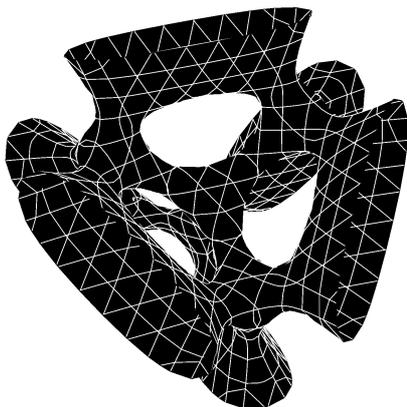
Représentation de la surface donnée par ses ensemble de zéros et par paramétrage par quatre surfaces locales

La Q1

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = (x^4 + y^4 + z^4) - 4(x^2 + y^2 z^2 + y^2 + z^2 x^2 + z^2 + x^2 y^2) + 21xyz + \frac{3}{2},$$

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\} = \ker f$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = f(x, y, h(x, y)) \mid h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) = z \Rightarrow \chi(u, v) = (u, v, h(u, v))$$



Représentation de la surface donnée par ses ensemble de zéros et par paramétrage par quatre surfaces locales

3.5. Références

- [1] *Modern differential geometry of curves and surfaces*, Alfred Gray, CRC Press, 1993
- [2] *Cours d'Algèbre géométrique*, Daniel Bertrand, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2012
- [3] *Gallery of Algebraic surfaces*, <http://www-sop.inria.fr/galaad/surface/>

4. L'ordinateur et la conception

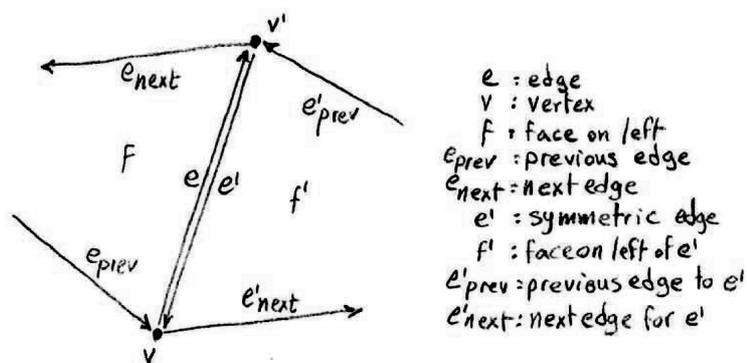
4.1. Bref historique de la conception assistée par ordinateur

L'introduction des ordinateurs dans les domaines de la conception «action-centrée» comme l'architecture n'était pas simplement une transition en douceur naturelle à partir de la planche à dessin à l'ordinateur, cela est dû au fait que les ordinateurs sont essentiellement des machines rationnelles qui suivent des algorithmes et la conception architecturale est fondamentalement intuitive. Contrairement à cela, nous constatons que dans la conception «raison-centrée» comme l'ingénierie, l'introduction des ordinateurs étaient un plus naturel et ils sont devenus intrinsèque à la conception de l'ingénierie moderne. Le problème pour la conception architecturale est qu'il s'appuie sur le jugement esthétique qui est au sens kantien un jugement réflexif, à savoir qu'il ne vient pas comme une simple détermination partir du concept universelle à une instance particulière par la raison. En d'autres termes, il n'existe pas de formule universelle ou étapes prédéterminées, qui peuvent être suivies pour produire une conception qui peut être jugé comme ayant une cohérence interne. En conséquence, peu d'approches différentes ont été prises dans l'introduction de l'informatique dans la processus de conception architecturale, mais surtout il y a deux tendances fondamentales. Le premier était de simplement considérer la conception architecturale comme une conception «raison-centrée» semblable à la conception technique, l'autre était d'utiliser déductivement l'ordinateur comme une planche à dessin électronique, en d'autres termes pas de processus de calcul, que le dessin en utilisant l'ordinateur. Cette seconde approche est également connu comme conception assistée par ordinateur ou CAO (et notamment à la conception architecturale: modélisation 3d). CAO est essentiellement l'utilisation de systèmes informatiques pour aider à la création, la modification, l'analyse ou l'optimisation d'une conception, il décrit essentiellement le processus de création d'un dessin technique en utilisant l'ordinateur. CAO a également été la force motrice majeure pour la recherche en géométrie algorithmique, infographie et la géométrie différentielle discrète; la conception de modèles géométriques des objets, en particulier, est parfois appelé conception géométrique assistée par ordinateur. Le terme CAO, a été inventé par l'informaticien Douglas T. Ross, qui a été inspiré par les opérateurs de radar de début des années 50. Les concepteurs de ces tout premiers ordinateurs ont découvert qu'ils pouvaient créer des symboles électroniques et des figures géométriques à être utilisé pour créer les schémas de circuit et les organigrammes. Ils ont réalisé que l'objet une fois établi, il pourrait être reproduit à volonté, son orientation, ses liens et son ampleur, mais il a fallu dix ans avant le précurseur de logiciels de CAO: Sketchpad a été développé par l'informaticien Ivan Sutherland dans les années 60. Sketchpad a permis au concepteur d'interagir avec son ordinateur graphique, cela signifie que la conception a été alimenté dans l'ordinateur, en s'appuyant sur un écran cathodique avec un crayon optique. D'autres travaux importants qui ont influencé le développement de logiciels de CAO, ont été les travaux sur les courbes et les surfaces polynomiales par les ingénieurs Pierre Bézier et Paul de Casteljau à savoir le développement de courbes splines. Ensemble avec les développement de la 3D dans les années 70, la modélisation solide dans les années 80 et les noyaux de la modélisation solides B-rep dans les années 90; une application plus souple et pratiquement omniprésent de l'ordinateur dans la conception architecturale a été créé. Une caractéristique fondamentale et importante d'un système de CAO est la modélisation 3D, qui est le processus d'élaboration d'une représentation mathématique d'une surface d'un objet en trois dimensions, le produit est appelé un modèle 3D et est divisé en deux catégories: les modèles volumiques et surfaciques. Les modèles solides définissent le volume de l'objet qu'ils représentent (comme une pierre), ces modèles sont principalement utilisés pour la simulation non visuels tels que la simulation médicale et de l'ingénierie. Les modèles surfaciques représentent la limite de l'objet, elles sont utilisées dans presque tous les modèles visuels des objets à partir jeux vidéo jusqu'aux domaines du design. Il y a deux façon populaire pour représenter un modèle 3D: modélisation polygonale en utilisant des maillages polygonaux reliant les points dans l'espace 3D, et modélisation Nurbs de courbes et de surfaces en utilisant l'interpolation de points dans l'espace. Modélisation polygonale est une approche pour la modélisation des objets en représentant ou en rapprochant leurs surfaces en utilisant des maillages polygonaux.

4.2. Modélisation de maillage polygonal

4.2.1. «Box modeling» et «winged edge data structure»

Une des méthodes les plus populaires et les plus simples de constructions de maille, est «box modeling», où on commence par une primitive comme un cube pour faire la forme de base et de là on sculpte la forme finale à l'aide à plusieurs reprises deux outils simples: extrusion et subdivision. L'outil d'extrusion est appliquée à une face, il crée nouvelle face identique et déplacée, et puis relier chacun de ses bords à des bords existants par une face. L'outil de subdivision sépare les faces et les arêtes en petits morceaux en ajoutant de nouveaux sommets, par exemple une face carrée serait subdivisé en ajoutant un sommet au centre et un au chaque côté, créant quatre nouvelles faces carrés plus petites. Un des éléments les plus importants dans construction de maillage est sa structure de données, un maillage polygonal est constitué d'un ensemble de sommets, arêtes et faces avec leurs relations topologiques. En général, il y a deux grandes tendances dans les structures de données de maillage: basés sur les faces et basés sur les arêtes. Les structures de données basées sur les faces, enregistre pour chaque face, des pointeurs vers ses sommets et ses faces voisines, ce qui permet de naviguer autour de chaque sommet et visiter ses faces voisines. Néanmoins, un traitement spécial est nécessaire, lorsque la navigation passe au-dessus des éléments avec valence variable (par exemple mailles qui combine des quadrilatères et des triangles). Les structures de données basés sur les arêtes, enregistre pour chaque bord, des pointeurs vers les sommets et les bords voisins, et puisque les bords ont toujours la même structure topologique, il est possible de manipuler des polygones avec des valences variables dans un seul maillage. Un exemple important de la structure de données basés sur les arêtes est «winged edge data structure», qui enregistre pour chaque bord références à ses sommets, à les deux polygones partageant cette arête, et les quatre les bords voisins (ou ailes). Traversant le voisinage nécessite un distinction de cas par étape, car un bord ne code pas pour son orientation explicitement; la «half edge data structure» résout ce problème en divisant chaque bord en deux moitiés, où chaque demi bord est pointé vers son demi bord opposé, un sommet incident, un polygone incident [1].



Représentation de «winged edge data structure»

L'algorithme suivant crée un maillage par une succession d'extrusions «box modeling», puis crée une structure de données «winged edge data structure» du maillage résultant, les extrusions sont atteints par une combinaison de trois simples opérations algébriques: translation, homothétie et de rotation. Cette combinaison se retrouve dans la plupart des systèmes de logiciels de modélisation CAO avec «box modeling», car il est assez intuitive permettant au concepteur de sculpter la forme désirée facilement. La structure de données doit être capable de s'adapter aux différentes topologies à savoir lors de la création de trous dans le maillage en supprimant et souder ensemble des faces, mais dans l'algorithme suivant, nous restons dans le même genre topologique: 0 de la sphère (i.e. sans trous). L'extrusion est que la première partie de la modélisation de la boîte, la deuxième outil essentiel serait le lissage de maillage au moyen la subdivision, de nombreux algorithmes sont peuvent être utilisés dans cette opérations comme la subdivision de Catmull-Clark.

Le code pour la création d'une modélisation «box modeling» avec la structure «winged edge data structure»

```

σi_ := {{{(4 (i+1) + 1, 4 (i+1) + 2), (4 (i+1) + 2, 4 (i+1) + 1)}, {{4 (i+1) + 2, 4 (i+1) + 3}, {4 (i+1) + 3, 4 (i+1) + 2}},
        {{4 (i+1) + 3, 4 (i+1) + 4}, {4 (i+1) + 4, 4 (i+1) + 3}},
        {{4 (i+1) + 4, 4 (i+1) + 1}, {4 (i+1) + 1, 4 (i+1) + 4}}};

Eσi_ [AA_] := {σi_ [[1]], σi_ [[2]], σi_ [[3]], σi_ [[4]],
              {σi_ [[1, 1]], AA [[1]], {AA [[1]], σi_ [[1, 1]]}},
              {σi_ [[2, 1]], AA [[2]], {AA [[2]], σi_ [[2, 1]]}},
              {σi_ [[3, 1]], AA [[3]], {AA [[3]], σi_ [[3, 1]]}},
              {σi_ [[4, 1]], AA [[4]], {AA [[4]], σi_ [[4, 1]]}}};

Tri[A_] := {A [[1]], A [[2]], A [[3]], {A [[1]], A [[3]], A [[4]]}};
Par[A_] [u_, v_] := A [[1]] + u (A [[2]] - A [[1]]) + v (A [[4]] + u (A [[3]] - A [[4]]) - (A [[1]] + u (A [[2]] - A [[1]])));
deru[x_] [u_, v_] := ∂uu x [uu, vv] /. {uu → u, vv → v};
derv[x_] [u_, v_] := ∂uv x [uu, vv] /. {uu → u, vv → v};
χNor[x_] [u_, v_] :=
  Cross[deru[x] [u, v], derv[x] [u, v]] / √ (Cross[deru[x] [u, v], derv[x] [u, v]].Cross[deru[x] [u, v], derv[x] [u, v]]);

cen[A_] := Par[A] [0.5, 0.5];
fN[A_] := χNor[Par[A]] [0.5, 0.5];
fNln[A_] := {cen[A], cen[A] + 0.3 fN[A]};
Ori[A_] := {A [[1]] - cen[A], A [[2]] - cen[A], A [[3]] - cen[A], A [[4]] - cen[A]};
Ext[A_] [λ_] := {A [[1]] + λ fN[A], A [[2]] + λ fN[A], A [[3]] + λ fN[A], A [[4]] + λ fN[A]};

MSR[φ_, θ_, ψ_, λ1_, λ2_, λ3_, λ_] [A_] :=
  {
    {
      {
        Cos[φ] Cos[ψ] - Cos[φ] Sin[ψ] + Sin[φ] Sin[θ] Cos[ψ]   Sin[φ] Sin[ψ] + Cos[φ] Sin[θ] Cos[ψ]
        Cos[φ] Sin[ψ]   Cos[φ] Cos[ψ] + Sin[φ] Sin[θ] Sin[ψ]   -Sin[φ] Cos[ψ] + Cos[φ] Sin[θ] Sin[ψ]
        -Sin[θ]           Sin[φ] Cos[θ]                       Cos[φ] Cos[θ]
      } . {
        λ1 0 0
        0 λ2 0
        0 0 λ3
      } . Ori[Ext[A] [λ]] [[1]] +
      cen[Ext[A] [λ]],
    },
    {
      {
        Cos[φ] Cos[ψ] - Cos[φ] Sin[ψ] + Sin[φ] Sin[θ] Cos[ψ]   Sin[φ] Sin[ψ] + Cos[φ] Sin[θ] Cos[ψ]
        Cos[φ] Sin[ψ]   Cos[φ] Cos[ψ] + Sin[φ] Sin[θ] Sin[ψ]   -Sin[φ] Cos[ψ] + Cos[φ] Sin[θ] Sin[ψ]
        -Sin[θ]           Sin[φ] Cos[θ]                       Cos[φ] Cos[θ]
      } . {
        λ1 0 0
        0 λ2 0
        0 0 λ3
      } . Ori[Ext[A] [λ]] [[2]] +
      cen[Ext[A] [λ]],
    },
    {
      {
        Cos[φ] Cos[ψ] - Cos[φ] Sin[ψ] + Sin[φ] Sin[θ] Cos[ψ]   Sin[φ] Sin[ψ] + Cos[φ] Sin[θ] Cos[ψ]
        Cos[φ] Sin[ψ]   Cos[φ] Cos[ψ] + Sin[φ] Sin[θ] Sin[ψ]   -Sin[φ] Cos[ψ] + Cos[φ] Sin[θ] Sin[ψ]
        -Sin[θ]           Sin[φ] Cos[θ]                       Cos[φ] Cos[θ]
      } . {
        λ1 0 0
        0 λ2 0
        0 0 λ3
      } . Ori[Ext[A] [λ]] [[3]] +
      cen[Ext[A] [λ]],
    },
    {
      {
        Cos[φ] Cos[ψ] - Cos[φ] Sin[ψ] + Sin[φ] Sin[θ] Cos[ψ]   Sin[φ] Sin[ψ] + Cos[φ] Sin[θ] Cos[ψ]
        Cos[φ] Sin[ψ]   Cos[φ] Cos[ψ] + Sin[φ] Sin[θ] Sin[ψ]   -Sin[φ] Cos[ψ] + Cos[φ] Sin[θ] Sin[ψ]
        -Sin[θ]           Sin[φ] Cos[θ]                       Cos[φ] Cos[θ]
      } . {
        λ1 0 0
        0 λ2 0
        0 0 λ3
      } . Ori[Ext[A] [λ]] [[4]] +
      cen[Ext[A] [λ]];
    }
  };

v1 = {0, 0, 0}; v2 = {1, 0, 0}; v3 = {1, 1, 0}; v4 = {0, 1, 0};
v5 = {0, 0, 1}; v6 = {1, 0, 1}; v7 = {1, 1, 1}; v8 = {0, 1, 1};
Vr = {v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7, v8};
ve = {{9, 1, 4}, {10, 2, 1}, {11, 3, 2}, {12, 4, 3}, {8, 5, 9}, {5, 6, 10}, {6, 7, 11}, {7, 8, 12}};
ev = {{{1, 2}, {2, 1}}, {{2, 3}, {3, 2}}, {{3, 4}, {4, 3}}, {{4, 1}, {1, 4}}, {{5, 6}, {6, 5}}, {{6, 7}, {7, 6}},
      {{7, 8}, {8, 7}}, {{8, 5}, {5, 8}}, {{5, 1}, {1, 5}}, {{6, 2}, {2, 6}}, {{7, 3}, {3, 7}}, {{8, 4}, {4, 8}}};
ef = {{1, 6}, {2, 6}, {3, 6}, {4, 6}, {5, 1}, {5, 2}, {5, 3}, {5, 4}, {1, 4}, {2, 1}, {3, 2}, {4, 3}};
ee = {
  {9, {5, 1}}, {10, {2, 6}}, {2, {3, 2}}, {4, {1, 4}},
  {10, {6, 2}}, {11, {3, 7}}, {3, {4, 3}}, {1, {2, 1}},
  {11, {7, 3}}, {12, {4, 8}}, {4, {1, 4}}, {2, {3, 2}},
  {12, {8, 4}}, {9, {1, 5}}, {1, {2, 1}}, {3, {4, 3}},
  {8, {8, 5}}, {6, {6, 7}}, {10, {2, 6}}, {9, {5, 1}},
  {5, {5, 6}}, {7, {7, 8}}, {11, {3, 7}}, {10, {6, 2}},
  {6, {6, 7}}, {8, {8, 5}}, {12, {4, 8}}, {11, {7, 3}},
  {7, {7, 8}}, {5, {5, 6}}, {9, {1, 5}}, {12, {8, 4}},
  {5, {6, 5}}, {1, {1, 2}}, {4, {4, 1}}, {8, {5, 8}},
  {6, {7, 6}}, {2, {2, 3}}, {1, {1, 2}}, {5, {6, 5}},
  {7, {8, 7}}, {3, {3, 4}}, {2, {2, 3}}, {6, {7, 6}},
  {8, {5, 8}}, {4, {4, 1}}, {3, {3, 4}}, {7, {8, 7}}};
Fv = {{Vr [[1]], Vr [[2]], Vr [[6]], Vr [[5]], {Vr [[2]], Vr [[3]], Vr [[7]], Vr [[6]], {Vr [[3]], Vr [[4]], Vr [[8]], Vr [[7]]},
      {Vr [[4]], Vr [[1]], Vr [[5]], Vr [[8]], {Vr [[5]], Vr [[6]], Vr [[7]], Vr [[8]], {Vr [[1]], Vr [[4]], Vr [[3]], Vr [[2]]}}};
fv = {{1, 2, 6, 5}, {2, 3, 7, 6}, {3, 4, 8, 7}, {4, 1, 5, 8}, {5, 6, 7, 8}, {1, 4, 3, 2}};
Fe = {{ev [[1, 1]], ev [[10, 2]], ev [[5, 2]], ev [[9, 1]], {ev [[2, 1]], ev [[11, 2]], ev [[6, 2]], ev [[10, 1]]},
      {ev [[3, 1]], ev [[12, 2]], ev [[7, 2]], ev [[11, 1]], {ev [[4, 1]], ev [[9, 2]], ev [[8, 2]], ev [[12, 1]]},
      {ev [[5, 1]], ev [[6, 1]], ev [[7, 1]], ev [[8, 1]], {ev [[4, 2]], ev [[3, 2]], ev [[2, 2]], ev [[1, 2]]}}};
fe = {{1, 10, 5, 9}, {2, 11, 6, 10}, {3, 12, 7, 11}, {4, 9, 8, 12}, {5, 6, 7, 8}, {4, 3, 2, 1}};

```

```

ndV = 8; ndF = 6; ndE = 12;
Do[
  i = RandomInteger[{1, ndF}];
  A = Fv[[i]]; AA = fv[[i]]; B = Fe[[i]]; BB = fe[[i]];
   $\phi = 0 \frac{\pi}{16}$ ;  $\theta = 0 \frac{\pi}{16}$ ;  $\psi = 0 \frac{\pi}{16}$ ;  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ;  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ ;  $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ ;
   $\lambda = \text{RandomReal}[\{0.3, 2\}]$ ;
  Vr = Flatten[{Vr, MSR[ $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda$ ][A], 1];
  ndV = Length[Vr];
  Fv[[i]] = {Vr[[ndV-3]], Vr[[ndV-2]], Vr[[ndV-1]], Vr[[ndV]]};
  fv[[i]] = {ndV-3, ndV-2, ndV-1, ndV};
  EFv = {{A[[1]], A[[2]], Vr[[ndV-2]], Vr[[ndV-3]], {A[[2]], A[[3]], Vr[[ndV-1]], Vr[[ndV-2]]},
    {A[[3]], A[[4]], Vr[[ndV]], Vr[[ndV-1]], {A[[4]], A[[1]], Vr[[ndV-3]], Vr[[ndV]]}};
  Efv = {{AA[[1]], AA[[2]], ndV-2, ndV-3}, {AA[[2]], AA[[3]], ndV-1, ndV-2},
    {AA[[3]], AA[[4]], ndV, ndV-1}, {AA[[4]], AA[[1]], ndV-3, ndV}};

  Fv = Flatten[{Fv, EFv}, 1];
  fv = Flatten[{fv, Efv}, 1];
  ndF = Length[Fv];
  ev = Flatten[{ev, Eσ[k][AA]}, 1];
  ndE = Length[ev];
  ve[AA[[1]]] = Flatten[{ve[AA[[1]]], ndE-3}, 1];
  ve[AA[[2]]] = Flatten[{ve[AA[[2]]], ndE-2}, 1];
  ve[AA[[3]]] = Flatten[{ve[AA[[3]]], ndE-1}, 1];
  ve[AA[[4]]] = Flatten[{ve[AA[[4]]], ndE}, 1];
  Eve = {ndE-4, ndE-7, ndE-3}, {ndE-7, ndE-6, ndE-2}, {ndE-6, ndE-5, ndE-1}, {ndE-5, ndE-4, ndE};
  ve = Flatten[{ve, Eve}, 1];
  V = Table[{Vr[[i]], ve[[i]]}, {i, 1, ndV};
  Fe[[i]] = {ev[[ndE-7, 1]], ev[[ndE-6, 1]], ev[[ndE-5, 1]], ev[[ndE-4, 1]]};
  fe[[i]] = {ndE-7, ndE-6, ndE-5, ndE-4};

  EFe = {{B[[1]], ev[[ndE-2, 2]], ev[[ndE-7, 2]], ev[[ndE-3, 1]]},
    {B[[2]], ev[[ndE-1, 2]], ev[[ndE-6, 2]], ev[[ndE-2, 1]]},
    {B[[3]], ev[[ndE, 2]], ev[[ndE-5, 2]], ev[[ndE-1, 1]]},
    {B[[4]], ev[[ndE-3, 2]], ev[[ndE-4, 2]], ev[[ndE, 1]]};
  Efe = {{BB[[1]], ndE-2, ndE-7, ndE-3},
    {BB[[2]], ndE-1, ndE-6, ndE-2},
    {BB[[3]], ndE, ndE-5, ndE-1},
    {BB[[4]], ndE-3, ndE-4, ndE}};

  Fe = Flatten[{Fe, EFe}, 1];
  fe = Flatten[{fe, Efe}, 1];

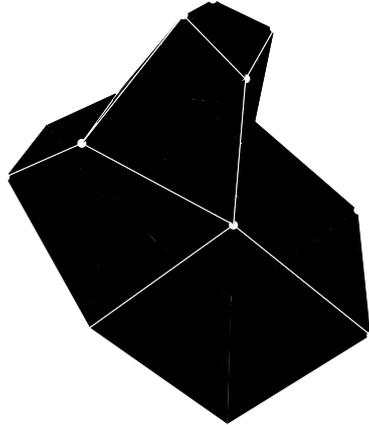
  If[MemberQ[BB, ee[BB[[1]]][[1, 1]]],
    ee[BB[[1]]] = {ndE-3, ndV-3, AA[[1]]}, {ndE-2, AA[[2]], ndV-2}, ee[BB[[1]]][[3]], ee[BB[[1]]][[4]];
    ef[BB[[1]]] = {ndF-3, ef[BB[[1]]][[2]],
    ee[BB[[1]]] = {ee[BB[[1]]][[1]], ee[BB[[1]]][[2]], {ndE-3, ndV-3, AA[[1]]}, {ndE-2, AA[[2]], ndV-2}};
    ef[BB[[1]]] = {ef[BB[[1]]][[1]], ndF-3};
  If[MemberQ[BB, ee[BB[[2]]][[1, 1]]],
    ee[BB[[2]]] = {ndE-2, ndV-2, AA[[2]]}, {ndE-1, AA[[3]], ndV-1}, ee[BB[[2]]][[3]], ee[BB[[2]]][[4]];
    ef[BB[[2]]] = {ndF-2, ef[BB[[2]]][[2]],
    ee[BB[[2]]] = {ee[BB[[2]]][[1]], ee[BB[[2]]][[2]], {ndE-2, ndV-2, AA[[2]]}, {ndE-1, AA[[3]], ndV-1}};
    ef[BB[[2]]] = {ef[BB[[2]]][[1]], ndF-2};
  If[MemberQ[BB, ee[BB[[3]]][[1, 1]]],
    ee[BB[[3]]] = {ndE-1, ndV-1, AA[[3]]}, {ndE, AA[[4]], ndV}, ee[BB[[3]]][[3]], ee[BB[[3]]][[4]];
    ef[BB[[3]]] = {ndF-1, ef[BB[[3]]][[2]],
    ee[BB[[3]]] = {ee[BB[[3]]][[1]], ee[BB[[3]]][[2]], {ndE-1, ndV-1, AA[[3]]}, {ndE, AA[[4]], ndV}};
    ef[BB[[3]]] = {ef[BB[[3]]][[1]], ndF-1};
  If[MemberQ[BB, ee[BB[[4]]][[1, 1]]],
    ee[BB[[4]]] = {ndE, ndV, AA[[4]]}, {ndE-3, AA[[1]], ndV-3}, ee[BB[[4]]][[3]], ee[BB[[4]]][[4]];
    ef[BB[[4]]] = {ndF, ef[BB[[4]]][[2]],
    ee[BB[[4]]] = {ee[BB[[4]]][[1]], ee[BB[[4]]][[2]], {ndE, ndV, AA[[4]]}, {ndE-3, AA[[1]], ndV-3}};
    ef[BB[[4]]] = {ef[BB[[4]]][[1]], ndF};

  Eee = {{ndE-4, ndV, ndV-3}, {ndE-6, ndV-2, ndV-1}, {ndE-2, AA[[2]], ndV-2}, {ndE-3, ndV-3, AA[[1]]},
    {ndE-7, ndV-3, ndV-2}, {ndE-5, ndV-1, ndV}, {ndE-1, AA[[3]], ndV-1}, {ndE-2, ndV-2, AA[[2]]},
    {ndE-6, ndV-2, ndV-1}, {ndE-4, ndV, ndV-3}, {ndE, AA[[4]], ndV}, {ndE-1, ndV-1, AA[[3]]},
    {ndE-5, ndV-1, ndV}, {ndE-7, ndV-3, ndV-2}, {ndE-3, AA[[1]], ndV-3}, {ndE, ndV, AA[[4]]},
    {ndE-7, ndV-2, ndV-3}, {BB[[1]], AA[[1]], AA[[2]]}, {BB[[4]], AA[[4]], AA[[1]]}, {ndE-4, ndV-3, ndV},
    {ndE-6, ndV-1, ndV-2}, {BB[[2]], AA[[2]], AA[[3]]}, {BB[[1]], AA[[1]], AA[[2]]}, {ndE-7, ndV-2, ndV-3},
    {ndE-5, ndV, ndV-1}, {BB[[3]], AA[[3]], AA[[4]]}, {BB[[2]], AA[[2]], AA[[3]]}, {ndE-6, ndV-1, ndV-2},
    {ndE-4, ndV-3, ndV}, {BB[[4]], AA[[4]], AA[[1]]}, {BB[[3]], AA[[3]], AA[[4]]}, {ndE-5, ndV, ndV-1}};

  Eef = {{i, ndF-3}, {i, ndF-2}, {i, ndF-1}, {i, ndF}, {ndF-3, ndF}, {ndF-2, ndF-3}, {ndF-1, ndF-2}, {ndF, ndF-1}};
  ee = Flatten[{ee, Eee}, 1];
  ef = Flatten[{ef, Eef}, 1];
  , {k, 1, 20}];
edge[i_] := {Vr[[ev[[i, 1, 1]]]], Vr[[ev[[i, 1, 2]]]]};
Ver = Table[{Vr[[i]], ve[[i]]}, {i, 1, ndV};
Fac = Table[{fv[[i]], fe[[i]]}, {i, 1, ndF};
Edb = Table[{ev[[i]], ef[[i]], ee[[i]]}, {i, 1, ndE};

```

La «winged edge data structure» pour le maillage polygonal extrudé deux fois à partir faces 4, puis 8 [1]



Représentation du maillage polygonal extrudé deux fois

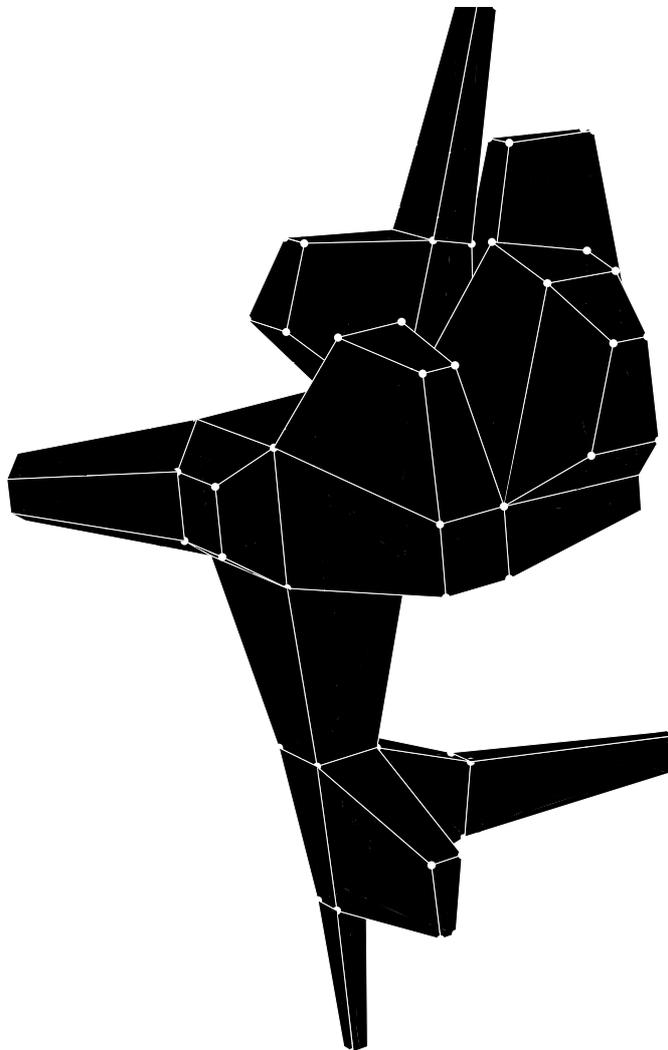
Face	by vertices	by edges
1	1, 2, 6, 5	1, 10, 5, 9
2	2, 3, 7, 6	2, 11, 6, 10
3	3, 4, 8, 7	3, 12, 7, 11
4	9, 10, 11, 12	13, 14, 15, 16
5	5, 6, 7, 8	5, 6, 7, 8
6	1, 4, 3, 2	4, 3, 2, 1
7	4, 1, 10, 9	4, 18, 13, 17
8	13, 14, 15, 16	21, 22, 23, 24
9	5, 8, 12, 11	8, 20, 15, 19
10	8, 4, 9, 12	12, 17, 16, 20
11	1, 5, 14, 13	9, 26, 21, 25
12	5, 11, 15, 14	19, 27, 22, 26
13	11, 10, 16, 15	14, 28, 23, 27
14	10, 1, 13, 16	18, 25, 24, 28

Vertices	cartesian coordinates	edges connected
1	0, 0, 0	9, 1, 4, 18, 25
2	1, 0, 0	10, 2, 1
3	1, 1, 0	11, 3, 2
4	0, 1, 0	12, 4, 3, 17
5	0, 0, 1	8, 5, 9, 19, 26
6	1, 0, 1	5, 6, 10
7	1, 1, 1	6, 7, 11
8	0, 1, 1	7, 8, 12, 20
9	-0.794935, 0.780844, 0.30735	16, 13, 17
10	-0.717928, 0.296162, 0.21168	13, 14, 18, 28
11	-0.605065, 0.219156, 0.69265	14, 15, 19, 27
12	-0.682072, 0.703838, 0.78832	15, 16, 20
13	-0.468568, -0.517789, 0.187873	24, 21, 25
14	-0.355705, -0.594795, 0.668843	21, 22, 26
15	-0.698288, -0.522794, 0.601005	22, 23, 27
16	-0.812786, -0.45923, 0.388049	23, 24, 28

Edges	by vertices	symetric	face left	face right	prev edg	direction	next edg	direction	prev sym	direction	next sym	direction
1	1, 2	2, 1	1	6	9	5, 1	10	2, 6	2	3, 2	4	1, 4
2	2, 3	3, 2	2	6	10	6, 2	11	3, 7	3	4, 3	1	2, 1
3	3, 4	4, 3	3	6	11	7, 3	12	4, 8	4	1, 4	2	3, 2
4	4, 1	1, 4	7	6	17	9, 4	18	1, 10	1	2, 1	3	4, 3
5	5, 6	6, 5	5	1	8	8, 5	6	6, 7	10	2, 6	9	5, 1
6	6, 7	7, 6	5	2	5	5, 6	7	7, 8	11	3, 7	10	6, 2
7	7, 8	8, 7	5	3	6	6, 7	8	8, 5	12	4, 8	11	7, 3
8	8, 5	5, 8	5	9	7	7, 8	5	5, 6	19	11, 5	20	8, 12
9	5, 1	1, 5	1	11	5	6, 5	1	1, 2	25	13, 1	26	5, 14
10	6, 2	2, 6	2	1	6	7, 6	2	2, 3	1	1, 2	5	6, 5
11	7, 3	3, 7	3	2	7	8, 7	3	3, 4	2	2, 3	6	7, 6
12	8, 4	4, 8	10	3	20	12, 8	17	4, 9	3	3, 4	7	8, 7
13	9, 10	10, 9	4	7	16	12, 9	14	10, 11	18	1, 10	17	9, 4
14	10, 11	11, 10	4	13	13	9, 10	15	11, 12	27	15, 11	28	10, 16
15	11, 12	12, 11	4	9	14	10, 11	16	12, 9	20	8, 12	19	11, 5
16	12, 9	9, 12	4	10	15	11, 12	13	9, 10	17	4, 9	20	12, 8
17	9, 4	4, 9	7	10	13	10, 9	4	4, 1	12	8, 4	16	9, 12
18	10, 1	1, 10	14	7	28	16, 10	25	1, 13	4	4, 1	13	10, 9
19	11, 5	5, 11	9	12	15	12, 11	8	5, 8	26	14, 5	27	11, 15
20	12, 8	8, 12	10	9	16	9, 12	12	8, 4	8	5, 8	15	12, 11
21	13, 14	14, 13	8	11	24	16, 13	22	14, 15	26	5, 14	25	13, 1
22	14, 15	15, 14	8	12	21	13, 14	23	15, 16	27	11, 15	26	14, 5
23	15, 16	16, 15	8	13	22	14, 15	24	16, 13	28	10, 16	27	15, 11
24	16, 13	13, 16	8	14	23	15, 16	21	13, 14	25	1, 13	28	16, 10
25	13, 1	1, 13	11	14	21	14, 13	9	1, 5	18	10, 1	24	13, 16
26	14, 5	5, 14	12	11	22	15, 14	19	5, 11	9	1, 5	21	14, 13
27	15, 11	11, 15	13	12	23	16, 15	14	11, 10	19	5, 11	22	15, 14
28	16, 10	10, 16	14	13	24	13, 16	18	10, 1	14	11, 10	23	16, 15

Créer une forme extrudée

Maintenant, nous allons utiliser l'algorithme afin de générer un maillage polygonal sculptural de 20 extrusions de faces choisies au hasard avec des distances de translation aléatoires, nous pouvons voir immédiatement le potentiel architectural de ce type de modélisation, mais lorsque les extrusions sont faits au hasard, nous devons les diriger précisément, afin de ne pas avoir d'auto intersection dans la maille. Une fois que le modèle est prêt, un algorithme de subdivision est appliquée à la maillage afin de parvenir à un maillage lisse. Dans la partie suivante, nous allons voir les différentes applications architecturales de cette technique de modélisation, nous allons montrer exemples de modèles architecturaux faites à l'aide de différents logiciels de CAO qui utilise la modélisation «box modeling». Nous allons également montrer un exemple où cette modélisation se fait en utilisant des algorithmes qui permettent beaucoup plus l'exploration de formes plus complexes, qui sont difficiles à modéliser manuellement en utilisant d'extrusions successives.



Représentation d'un maillage polygonal créé par «box modeling»

4.2.2. Conception en utilisant «box modeling»

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, que cette méthode de modélisation 3D est assez répandue parmi les cabinets d'architectes en particulier ceux intéressés par les formes curvilignes, c'est parce que cette méthode est très intuitive et facile à manipuler. Cette méthode simule le processus de pâte à modeler et de la sculpture, à savoir à partir d'un morceau d'argile, le former et l'étendant à une forme désirée. Cette extension et de déformation est créée numériquement par l'extrusion des faces et l'application de transformations affines, suivie enfin par le lissage du maillage obtenu en utilisant l'algorithme de subdivision tel que l'algorithme Catmul-Clark. Maintenant que nous avons expliqué la méthode de modélisation «box modeling» présente dans la plupart des systèmes logiciels de CAO, nous allons montrer quelques formes architecturales générés en utilisant cette technique avec l'aide d'un système de CAO.



Représentation du maillage polygonal faites par «box modeling» à l'aide un logiciel de CAO

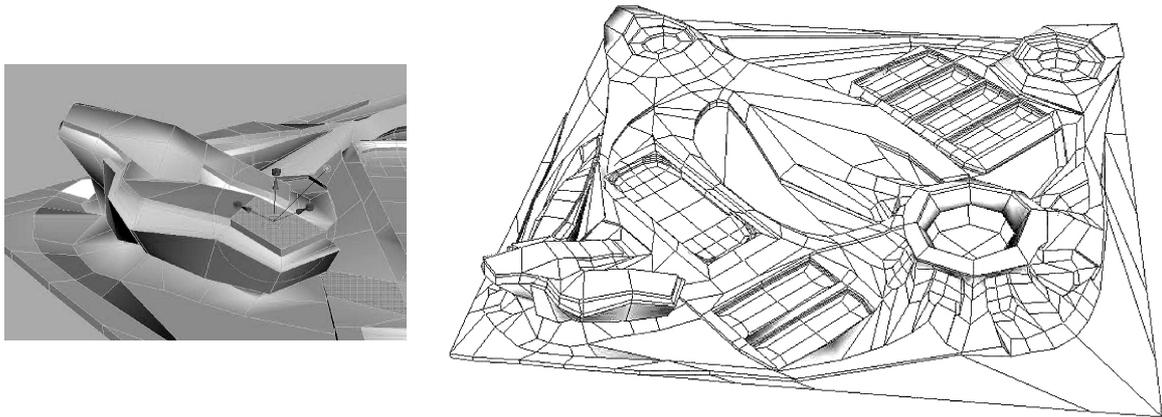
Maintenant, nous allons montrer un exemple d'une conception architecturale où la «box modeling» a été utilisée afin de générer la forme.



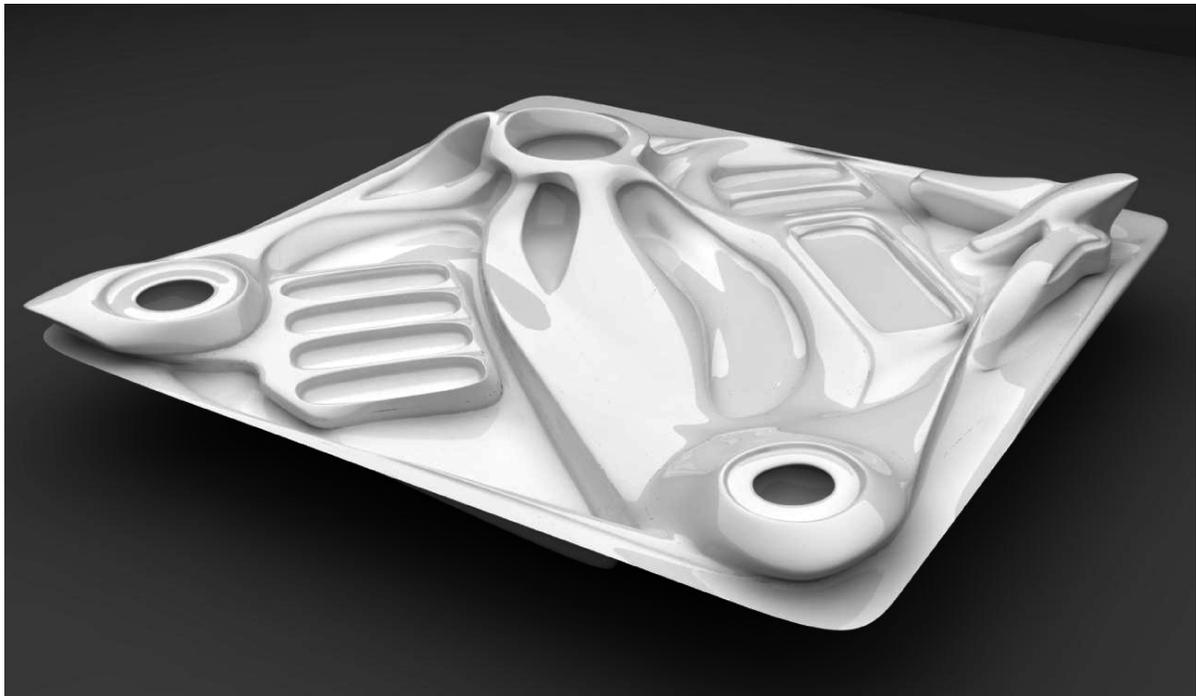
Représentation d'une conception architecturale en utilisant la «box modeling»

Plus de conception en utilisant la «box modeling»

Dans l'exemple précédent, nous avons montré comment la modélisation «box modeling», pourrait être appliquée pour générer une forme maillée fermée (homéomorphe à la sphère), mais la même technique pourrait être appliquée à n'importe quel maillage initial. Dans cet exemple, nous allons commencer avec un maillage plan ouvert contrairement à une primitive fermée (le cube) comme dans l'exemple précédent. Ensuite, en appliquant le même procédé d'extrusion des faces et transformations affines, nous sommes en mesure d'atteindre des formes plus complexes, et pourtant la topologie resterait le même (i.e. homéomorphe au plan).



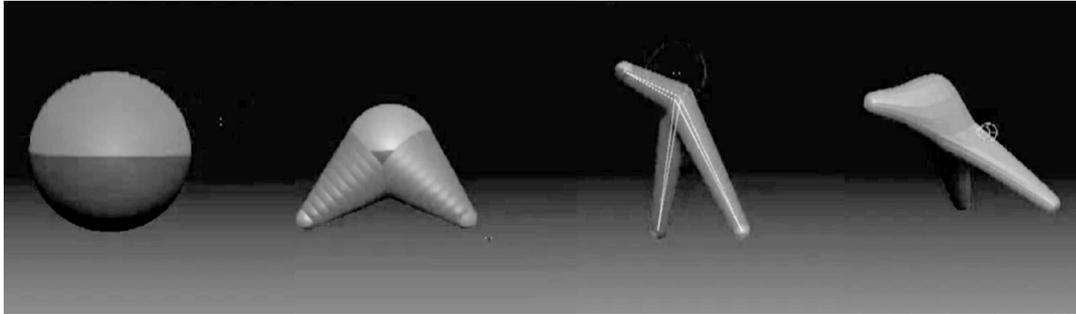
Représentation de l'application de la «box modeling» au maillage planar ouvert forme comme initiale



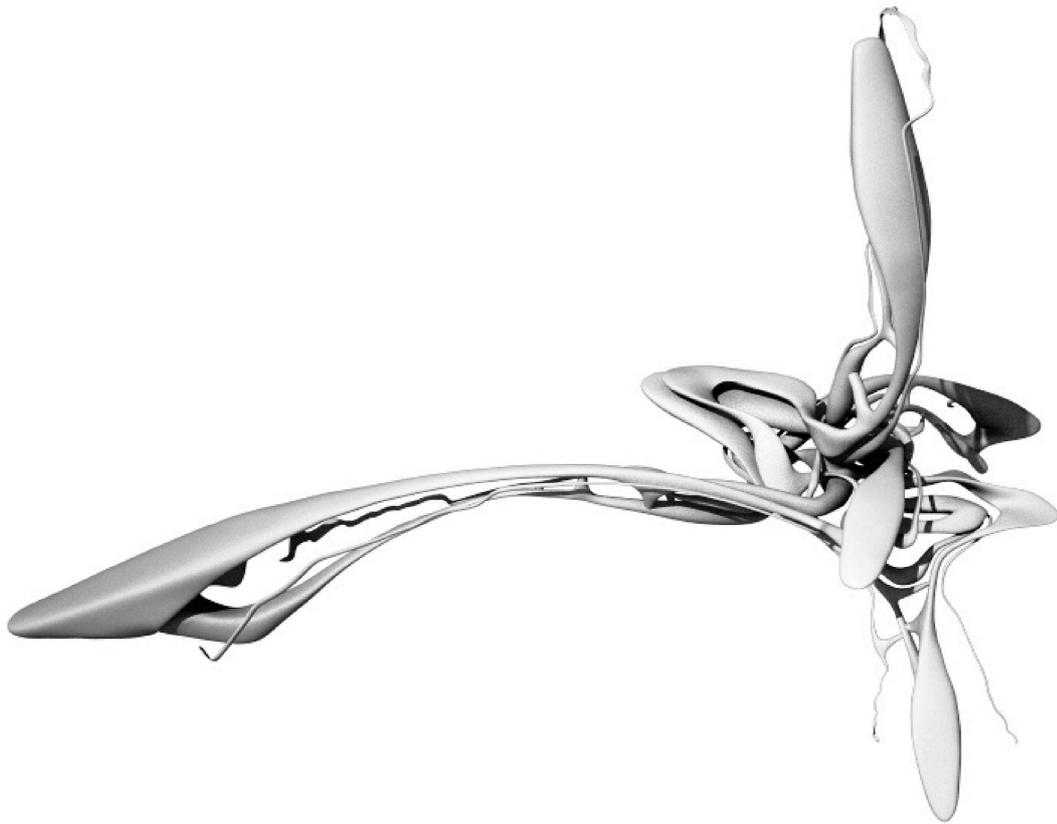
Représentation de la conception architecturale résultantde l'application de «box modeling» au maillage planar

Sculpture numérique

Cette méthode de la modélisation «box modeling» est également utilisée dans le logiciel de CAO orienté vers la sculpture numérique, nous allons maintenant montrer un exemple de sculpture numérique à l'aide du logiciel de CAO. Les logiciels de sculpture numérique ne sont pas largement utilisés dans l'architecture autant que dans les animations, puisque leur flexibilité dans la génération de formes est couplée avec un manque de rigueur concernant le contrôle géométrique sur la forme. L'image suivante montre la forme résultant d'un processus de sculpture par une succession d'extrusions et des transformations affines comme homothétie et rotation.



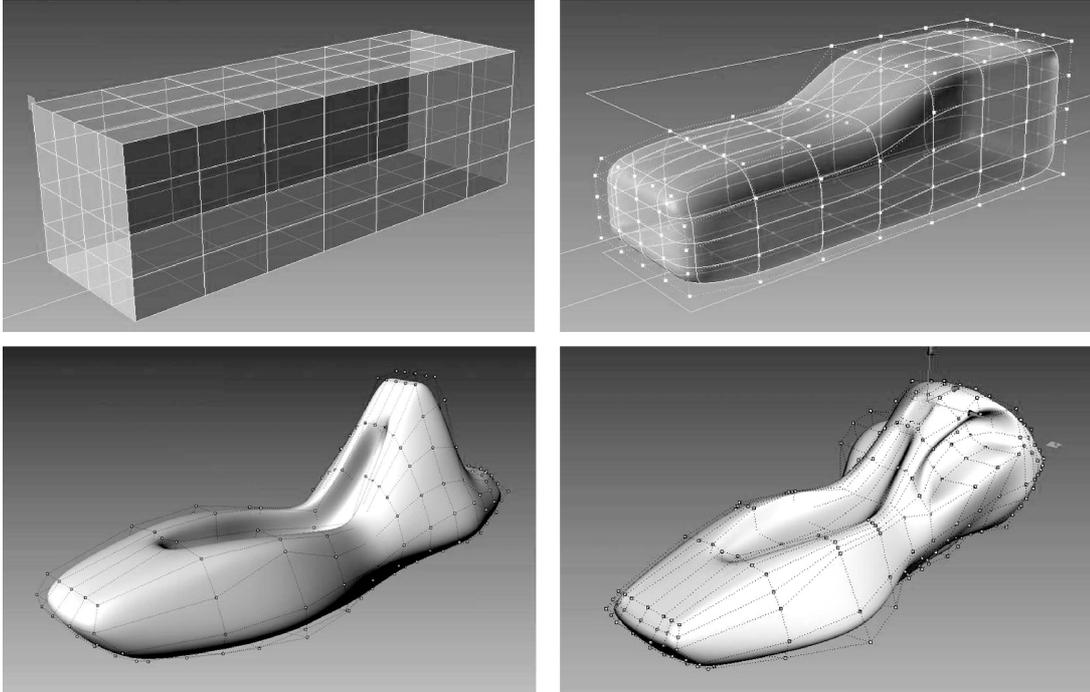
Représentation du processus de génération de forme architecturale utilisant un logiciel de sculpture numérique



Représentation d'une sculpture architecturale en utilisant la modélisation «box modeling»

Plus d'exemples de modélisation «box modeling»

Maintenant, nous montrons un autre exemple de sculpture numérique orientée davantage vers des objets fonctionnels, par exemple une maison-bateau flottant.



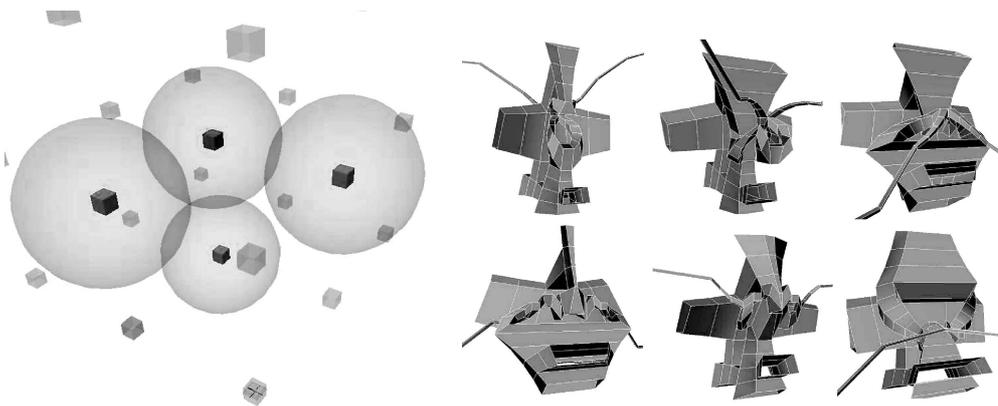
Représentation du processus de génération de forme architecturale à l'aide sculpture numérique



Représentation d'une forme architecturale générée à l'aide de «box modeling»

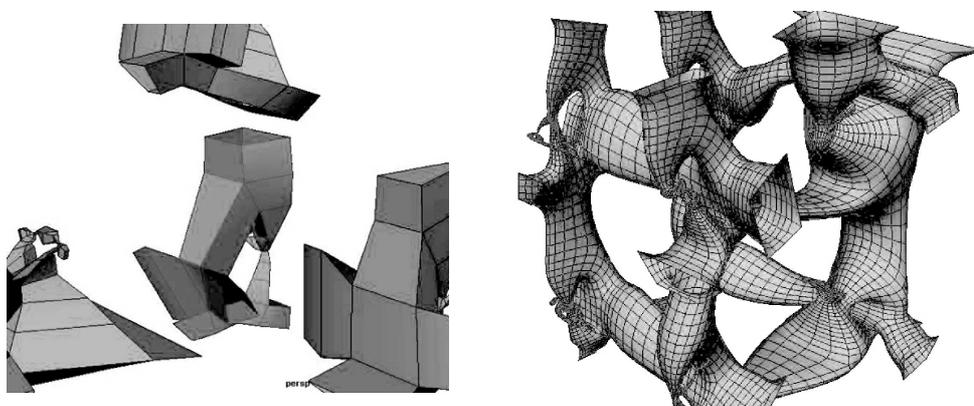
4.2.3. La conception et la manipulation de la structure de données

Les exemples précédents de sculpture numérique et de conception architecturale crée essentiellement des formes qui resteront toujours homéomorphe à la sphère (ou la boîte), à savoir que, pendant le processus de conception d'extrusions et transformation affine pas de trous ont été ajoutés à la forme. Cela signifie que seulement le nombre d'arêtes, les sommets et les faces augmenté, mais il n'y avait pas de suppression et de collage au cours du processus, car cela nécessiterait une plus grande complexité dans le traitement de la structure de données. La structure de données «winged edge data structure» que nous avons défini précédemment sont capables de calculer l'information topologique des arêtes, faces et les sommets seulement dans la plage d'extrusions que nous avons indiqués ci-dessus. Néanmoins, les logiciels de CAO sont capables d'avoir une structure de données qui permettra de calculer la topologie des formes où la suppression et le collage ont eu lieu. Cela peut être utile du point de vue de la conception architecturale, puisque nous sommes en mesure de créer des formes plus élaborées, par exemple en travaillant sur une partie différente en utilisant le procédé d'extrusion, puis coller ces pièces ensemble pour produire un maillage continu. Dans l'exemple suivant, nous allons montrer une autre sculpture numérique dans lequel le processus consiste à travailler sur des composants distincts, puis nous allons les coller ensemble pour produire une forme continue qui serait lissée après. On commence par appliquer les extrusions et les transformations affines sur les différentes primitives initiales distinctes (cubes), résultant en une famille de formes extrudées en modifiant les valeurs pour lesextrusion et les transformations affines.



Représentation des cubes initiaux avec leurs plages d'extrusion et la famille de formes extrudées

Maintenant que nous avons ces pièces extrudées, chacun dans sa position correcte par rapport à son voisin, nous pouvons voir que les faces externes (haut, bas, droite, gauche, avant et arrière) de chaque forme extrudée sont supprimés, pour se préparer au processus de connexion pour obtenir un maillage continu.



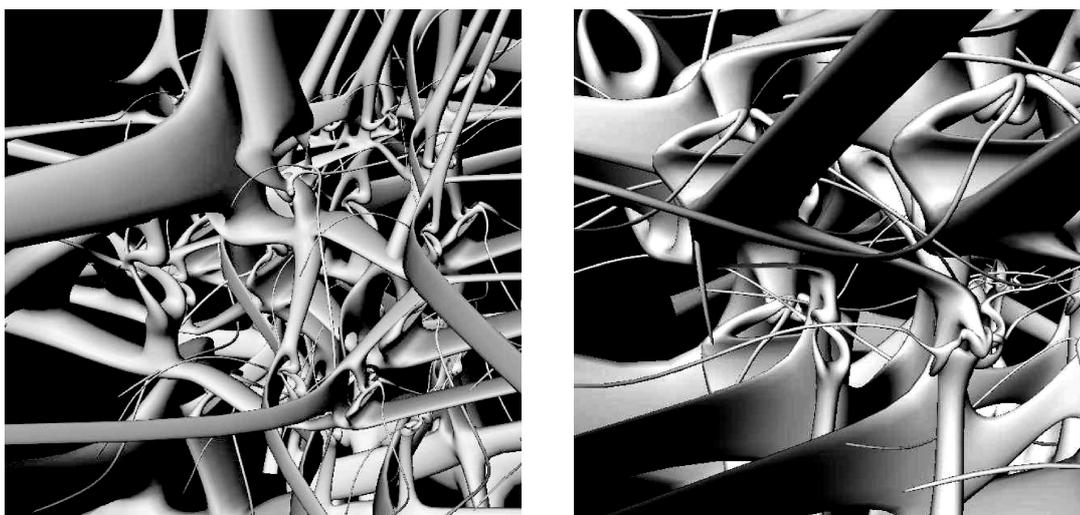
Représentation du recollement des différents éléments extrudés en un forme continue

Algorithme pour créer des formes extrudées connectés

Maintenant, nous aimerions faire des variations sur les extrusions qui donneront lieu à une forme beaucoup plus déformée. La difficulté dans le processus d'automatisation est que, avec la suppression et le collage, la structure de données dans le logiciel de CAO va recalculer les indices des bords, les faces et les sommets qui signifie que nous aurions besoin d'un algorithme qui fait deux tâches principales. La première consiste à créer les formes extrudées avec les variations désirées, la seconde est d'être capable de faire correspondre correctement les sommets indexés afin d'être jointes ensemble pour n'importe quel matrice de formes extrudées en trois dimensions (i.e. $(i \times j \times k)$ nombre de formes extrudées le long des directions x , y et z). En d'autres termes, étant en mesure de prédire l'index d'un sommet (à joindre) sur la base du système d'indexage de la structure de données intégrée dans le logiciel, lors de la création d'une famille de formes extrudées à assembler.



Représentation de la forme connecté obtenu avec de grandes variations dans les formes extrudées



Représentation d'autres modifications de la forme connectée

Le code pour créer la forme connectée

```
//Animal +

//
//Initial Population
//description: This is the definition of the size of the matrix (Cx,Ax,Gx), the fractal order (Lx), the scale of the geometry (Sx)
//
//
Lx=1;Cx=3;Ax=3;Gx=3;Sx=1;
int $Gcode[];float $base[];
for ($r=0;$r<($Cx*$Ax*$Gx);$r+=1)
{ int $rng=rand(0,6); $Gcode[$r]=$rng; } //alternative:$Gcode[$r]=$rng;$r%6
//print $Gcode;print "\n";
//description: The Loop generates an individual genetic identifier for each cell in the matrix then put them
//all in one array $Gcode[]

for ($r=0;$r<($Cx*$Ax*$Gx);$r+=1)
{ float $rnd=rand(1,0,7,0);$base[$r]=$rnd; } //alternative:$base[$r]=$rnd;
//print $base; print "\n";
//description: The Loop generates an individual size identifier for each cell in the matrix then put them
//all in one array $base[]

//
//Cell Base
//description: Fundamental Vectors | Base Cell creation
//
//
string $cell_c, $cell[], $cellvector[];
int $v1,$v2,$v3;
float $vx[],$vy[],$vz[],$vxc,$vxp,$vyc,$vyp,$vzc,$vzp,$sc[],$b[];
for($k=0;$k<$Gx;$k+=1)
{$e3= $k*($Cx)*($Ax);
if($k==0){ $v3=0; } if($k>0){ $v3=1; }
//description: $e3 is counter increases with k | The two conditions $k=0 & $k>0 activate the unit Vector $v3

for($j=0;$j<$Ax;$j+=1)
{$e2=$j*($Cx);
if($j==0){ $v2=0; } if($j>0){ $v2=1; }
//description: $e2 is counter increases with j | The two conditions $j=0 & $j>0 activate the unit Vector $v2

for($i=0;$i<$Cx;$i+=1)
{$e1=$i; $e=$e1+$e2+$e3;
if($i==0){ $v1=0; } if($i>0){ $v1=1; }
//description: $e1 is counter increases with i & $e is the cell number | The two conditions $i=0 & $i>0 activate the unit Vector $v1

$sc[$e]=$base[$e]*$Sx*20; $b[$e]=$sc[$e]*12;
$cell_c="COP"+($e); $cell[$e]="COP"+($e);
polyCube -n $cell_c -w $sc[$e] -d $sc[$e] -h $sc[$e];
//description:$sc[$e] is the size assigned to each cell and it is equal to the (base number).(General scale).(Zoom constant)
//$b is the size of the bubble around each base cell
//$cell[$e] is filling the array $cell[] with {Cop0, Cop1,.....CopN}
//polyCube is the creation of the base Cell, naming it $cell_c & assigning it the size of $sc[$e] to its width, depth & height
//print("cell"+"$e"+"B: "+"$b[$e]+"\n");

if($i==0){ $vyc=$b[$e]; $vyp=0; } if($i>0){ $vyc=$b[$e-1]+$b[$e]; }
if($j==0){ $vxc=$b[$e]; $vxp=0; } if($j>0){ $vxc=$b[$e-$Cx]+$b[$e]; }
if($k==0){ $vzc=$b[$e]; $vzp=0; } if($k>0){ $vzc=$b[$e-($Cx*$Ax)]+$b[$e]; }
$vy[$e]=$v1*($vyc+$vyp);
$vx[$e]=$v2*($vxc+$vxp);
$vz[$e]=$v3*($vzc+$vzp);
//description:The condition assign the value of V_current either as ($b[$e]) or as ($b[$e] + $b[of the proper previous cell])
//Each vector is a product of its unit vector and the sum of V_current and V_previous

//$cellvector[$e]="+int($vx[$e])+","+int($vy[$e])+","+int($vz[$e])+"";
//print ("Cell"+"$e"+"="+$cellvector[$e]+"\n");
//print ("vxp: "+"$vxp+" vxc: "+"$vxc+" vx: "+"$vx[$e]+"\n");
//print ("vyp: "+"$vyp+" vyc: "+"$vyc+" vy: "+"$vy[$e]+"\n");
//print ("vzp: "+"$vzp+" vzc: "+"$vzc+" vz: "+"$vz[$e]+"\n");

if($i>0){ $vyp=$vy[$e]; }
if($j>0){ $vxp=$vx[$e-$Cx+1]; }
if($k>0){ $vzp=$vz[$e-($Cx*$Ax)+1]; }
//description:Here we cast the value V_previous to be ready for the next round of the loop
move -r $vx[$e] $vy[$e] $vz[$e];
//description:This moves each cell to its 3 dimensional vector namely its ($vx[$e],$vy[$e],$vz[$e])
}
}
}
```

```

//
//Cell Development
//description: Extrusion Sequence | Fractal Growth
//
int $zd[],$sad[];
int $h[$d[],$su[],$sf[],$sb[],$srf[],$sif[],$sdf[],$suf[];
int $dad[],$sdl[],$sdlf[],$sedl[];
int $U1,$U2,$U3,$F1,$F2;
float $Hx,$Hy,$Hz,$Hsx,$Hsy,$Hsz;
float $Hax,$Hay,$Haz,$Harx,$Hary,$Harz,$Haxs,$Hasy,$Hasz;
float $LDx,$LDy,$LDz1,$LDz2,$LDz3,$LDz4,$LDrx,$LDry,$LDrz,$LDsx,$LDsy,$LDsz;
float $LUx,$LUy,$LUz1,$LUz2,$LUz3,$LURx,$LURy,$LURz,$LUSx,$LUSy,$LUSz;
float $LFX,$LFY,$LFz1,$LFz2,$LFz3,$LFRx,$LFRy,$LFRz,$LFSx,$LFSy,$LFSz;
float $LbX,$LbY,$LbZ1,$LbZ2,$LbBrx,$LbBry,$LbBrz,$LbBsx,$LbBsy,$LbBsz;
float $LDdx,$LDdy,$LDdz,$LDdrx,$LDdry,$LDdrz,$LDdsx,$LDdsy,$LDdsz;
float $LDux,$LDuy,$LDdux,$LDdury,$LDdurz,$LDdusx,$LDdusy,$LDdusz;
float $LRx,$LRy,$LRz1,$LRz2,$LRrx,$LRry,$LRrz,$LRsx,$LRsy,$LRsz;
float $LLx,$LLy,$LLz1,$LLz2,$LLrx,$LLry,$LLrz,$LLsx,$LLsy,$LLsz;
float $ARx,$ARy,$ARz,$ARrx,$ARry,$ARrz,$ARsx,$ARsy,$ARsz;
float $ALx,$ALy,$ALrx,$ALry,$ALrz,$ALsx,$ALsy,$ALsz;
for($k=0;$k<$Gx;$k+=1)
{$e3=$k*(($Cx)*($Ax));
for($j=0;$j<$Ax;$j+=1)
{$e2=$j*(($Cx);
for($i=0;$i<$Cx;$i+=1)
{$e1=$i; $e=$e1+$e2+$e3;
$g=$Gcode[$e]; float $s=$Sc[$e];
//description:Casting the $g number from the $Gcode[$e] and the $s from the $Sc[$e] | the $g numbers is the
//face number from which we start the extrusion sequences

//The Fractal
for($l=0;$l<$Lx;$l+=1)
{
if($l==0){
$zd[$l]=1; $h[$l]=$g+1; $sf[$l]=118; $sb[$l]=119; $srf[$l]=159; $sif[$l]=160; $sdf[$l]=140; $suf[$l]=130;
if($g==0){ $d[$l]=110; $u[$l]=105; }
if($g==1){ $d[$l]=109; $u[$l]=110; }
if($g==2){ $d[$l]=111; $u[$l]=107; }
if($g==3){ $d[$l]=107; $u[$l]=109; }
if($g==4){ $d[$l]=110; $u[$l]=106; }
if($g==5){ $d[$l]=104; $u[$l]=108; }
}

$Hx=1; $Hy=1; $Hz=1; $Hsx=$Hsy=$Hsz=1.3;
if(($g==4)||($g==5)){ $Hax=1; $Hay=1; $Haz=1; $Haxs=$Hasy=$Hasz=0.8; $Harx=-10 ;$Hary=0;$Harz=0; }
else { $Hax=1; $Hay=1; $Haz=1; $Haxs=$Hasy=$Hasz=0.8; $Harx=-10 ;$Hary=10;$Harz=0; }
//description:Head Antena controllers

if($i==0) {
$LDx=0;$LDy=0; $LDz1=10;$LDz2=10;$LDz3=10;$LDz4=60;
$LDrx=5; $LDry=10; $LDrz=0;
if(($g==2)||($g==3)){ $LDsx=0.8; $LDsy=1.2;$LDsz=1.2; }else { $LDsx=$LDsy=$LDsz= 1.2 ; }
}else {
$LDx=0;$LDy=0; $LDz1=$LDz2=$LDz3=$LDz4=2;
$LDrx=5; $LDry=0; $LDrz=0; // $LDrx=5; $LDry=0; $LDrz=0;
if(($g==2)||($g==3)){ $LDsx=0.8; $LDsy=1.2;$LDsz=1.2; }else { $LDsx= 1.2 ; $LDsy= 1.2 ;$LDsz= 1.2 ; }
}
//description:Down body controllers

if($i==($Cx-1) {
$LUx=0;$LUy=-1;$LUz1=10;$LUz2=10;$LUz3=60;
$LURx=-5; $LURy=-10; $LURz=0;
if($g==5){ $LUSx=0.8;$LUSy=1;$LUSz=1.5; }else { $LUSx=1.5;$LUSy=1.1;$LUSz=1.5; }
}else {
$LUx=0;$LUy=-1; $LUz1=$LUz2=$LUz3=3;
$LURx=-5; $LURy=0; $LURz=0; // $LURx=-5; $LURy=0; $LURz=0;
if($g==5){ $LUSx=0.8;$LUSy=1;$LUSz=1.5; }else { $LUSx=1.5;$LUSy=1.1;$LUSz=1.5; }
}
//description:Upper body controllers

if($k==($Gx-1){
$LFRx=5;$LFRy=0;$LFRz=0; $LFz1=10;$LFz2=10;$LFz3=60;
if(($g==2)||($g==3)){ $LFSx=0.8; $LFSy=1.2;$LFSz=1.2; }else { $LFSx=1.2; $LFSy=1.2;$LFSz=1.2; }
}else {
$LFRx=0;$LFRy=0; if($g==5){ $LFz1=$LFz2=$LFz3= 5; }else { $LFz1=$LFz2=$LFz3=2; }
$LFRx=5;$LFRy=0;$LFRz=0;
if(($g==2)||($g==3)){ $LFSx=0.8; $LFSy=1.2;$LFSz=1.2; }else { $LFSx=1.2; $LFSy=1.2;$LFSz=1.2; }
}
//description:Front body controllers

```

```

if($k==0){
$LBx=0;$LBy=0;$LBz1=10;$LBz2=60;
$LBrx=-5;$LBry=0;$LBz=0;
if(($g==2)||($g==3)){ $LBsx=0.8; $LBsy=1.2;$LBsz=1.2;}else {$LBsx=$LBsy=$LBsz=1.2;}
}else {
$LBx=0;$LBy=0; $LBz1=$LBz2=2;
$LBrx=-5;$LBry=0;$LBz=0;
if(($g==2)||($g==3)){ $LBsx=0.8; $LBsy=1.2;$LBsz=1.2;}else {$LBsx=$LBsy=$LBsz=1.2;}
}
//description:Back body controllers

$LDdx=0;$LDdy=0;$LDdz=4; $LDdsx=$LDdsy=$LDdsz=0.9; $LDdtx=-5;$LDdry=0;$LDdtr=0;
//description:D-U connection D part controllers
$LDux=0;$LDuy=0;$LDuz=4; $LDusx=$LDusy=$LDusz= 0.9 ; $LDurx=20;$LDury=0;$LDurz=0;
//description:D-U connection U part controllers

if($j==0){
$LRx=0;$LRy=0; $LRz1=20;$LRz2=100;
$LRrx=5;$LRry=30;$LRrz=5; // $LRrx=0;$LRry=0;$LRrz=0;
$LRsx=0.8; $LRsy=0.5;$LRsz=0.8;
}else {
$LRx=0;$LRy=0; $LRz1=$LRz2=4;
$LRrx=5;$LRry=0;$LRrz=5; // $LRrx=0;$LRry=0;$LRrz=0;
$LRsx=0.8; $LRsy=0.6;$LRsz=0.8;
}
//description:Right body controllers

if($j==$Ax-1){
$LLx=0;$LLy=0; $LLz1=20;$LLz2=100;
$LLrx=-5;$LLry=-30;$LLrz=-5; // $LLrx=0;$LLry=0;$LLrz=0;
$LLsx=0.8; $LLsy=0.5;$LLsz=0.8;
}else {
$LLx=0;$LLy=0; $LLz1=$LLz2=4;
$LLrx=-5;$LLry=0;$LLrz=-5; // $LLrx=0;$LLry=0;$LLrz=0;
$LLsx=0.8; $LLsy=0.6;$LLsz=0.8;
}
//description:Left body controllers

$ARx=0;$ARy=0;$ARz=10;$ARSx=$ARSy=$ARSz=1; $ARrx=-20;$ARry=-20;$ARrz=0;
//description:Tail Right controllers
$ALx=0;$ALy=0;$ALz=10;$ALSx=$ALSy=$ALSz=1; $ALrx=20;$ALry=20;$ALrz=0;
//description:Tail Left controllers

//description:Setting the prerequisites for the extrusion
// $zd[] is the magnification factor | $h[] is the face number for the head extrusion
// $d[] is the face number for the downward extrusion | $u[] is the face number for the upward extrusion
// $df[] is the down face number for the d-u connection | $uf[] is the up face number for the d-u connection
// $rf[] is the face number for the right extrusion | $lf[] is the face number for the left extrusion

// _____
//if($l==1){
//int$zp=$zd[$l-1];
// $zd[$l]=($zp*50);
// $ad[$l]=264; $h[$l]=$h[$l-1]+123;

//if($g==0){ $d[$l]=375; $u[$l]=369; $sd[$l]=368;}
//if($g==1){ $d[$l]=375; $u[$l]=371; $sd[$l]=368;}
//if($g==2){ $d[$l]=370; $u[$l]=371; $sd[$l]=368;}

// $dad[$l]=1; $d[$l]=($dad[$l]*8)-1;
// $ed[$l]=$sd[$l]+$d[$l];
//};
//if($l>1){
//int$zp=$zd[$l-1]; int$zap=$ad[$l-1];
// $zd[$l]=($zp*50); $ad[$l]=($zap*2);
// $h[$l]=$h[$l-1]+$ad[$l-1]; $d[$l]=$d[$l-1]+$ad[$l]; $u[$l]=$u[$l-1]+$ad[$l];

//int$dap=$dad[$l-1];
// $dad[$l]=($dap*2)+1; $d[$l]=($dad[$l]*8)-1;
// $sd[$l]=($d[$l]-7); $ed[$l]=$sd[$l]+$d[$l];
//};
//print "\n";//not in Animal+
//print ("zd="+$zd[$l]+" h="+$h[$l]+" d="+$d[$l]+" u="+$u[$l]+"n");//not in Animal+
//print ("dad="+$dad[$l]+" dl="+$d[$l]+" sd="+$sd[$l]+" ed="+$ed[$l]+"n");//not in Animal+
// _____

polyExtrudeFacet -kft true -lt (($S*$zd[$l]*$Hax) ($S*$zd[$l]*$Hay) ($S*$zd[$l]*$Hsz) -ls $Hsx $Hsy $Hsz -lr $Hrx $Hry $Harz ( $cell[$e]+"f["+($h[$l-1])+"]");
polyExtrudeFacet -kft true -lt (($S*$zd[$l]*$Hax) ($S*$zd[$l]*$Hay) ($S*$zd[$l]*$Hsz) -ls $Hsx $Hsy $Hsz -lr $Hrx $Hry $Harz ( $cell[$e]+"f["+($h[$l-1])+"]");
polyExtrudeFacet -kft true -lt (($S*$zd[$l]*$Hax) ($S*$zd[$l]*$Hay) ($S*$zd[$l]*$Hsz) -ls $Hsx $Hsy $Hsz -lr $Hrx $Hry $Harz ( $cell[$e]+"f["+($h[$l-1])+"]");

```

```

polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$Hx) (S*$zd[$l]*$Hay) (S*$zd[$l]*$Hsz) -ls $Hsx $Hsy $Hsz -lr $Hrx $Hry $Hrz (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]-1)+"]);

polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$Hx) (S*$zd[$l]*$Hy) (S*$zd[$l]*$Hz) -ls $Hsx $Hsy $Hsz -lr -20 -40 0 (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]+1)+"]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$Hx) (S*$zd[$l]*$Hy) (S*$zd[$l]*$Hz) -ls $Hsx $Hsy $Hsz -lr -20 -40 0 (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]+1)+"]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$Hx) (S*$zd[$l]*$Hy) (S*$zd[$l]*$Hz) -ls $Hsx $Hsy $Hsz -lr -20 -40 0 (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]+1)+"]);
select -cl; select -r (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]+1)+"]); Delete (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]+1)+"]);

polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$Hx) (S*$zd[$l]*$Hy) (S*$zd[$l]*$Hz) -ls $Hsx $Hsy $Hsz -lr -10 -20 0 (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]+1)+"]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$Hx) (S*$zd[$l]*$Hy) (S*$zd[$l]*$Hz) -ls $Hsx $Hsy $Hsz -lr -10 -20 0 (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]+1)+"]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$Hx) (S*$zd[$l]*$Hy) (S*$zd[$l]*$Hz) -ls $Hsx $Hsy $Hsz -lr -10 -20 0 (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]+1)+"]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$Hx) (S*$zd[$l]*$Hy) (S*$zd[$l]*$Hz) -ls $Hsx $Hsy $Hsz -lr -10 -20 0 (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]+1)+"]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$Hx) (S*$zd[$l]*$Hy) (S*$zd[$l]*$Hz) -ls $Hsx $Hsy $Hsz -lr -10 -20 0 (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]+1)+"]);
select -cl; select -r (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]+1)+"]); Delete (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]+1)+"]);
//description:PolyExtrudeFacet is the growth command, for each facet we need to specify the LT (translation), LS(scaling), LR(rotation)

select -cl; select -r Scell[Se]; polyMirrorFace -ws 1 -direction 1 -mergeMode 2 -ch 1 Scell[Se]; select -cl;
//description:Selecting the Cell so far and mirroring it to produce the head

//
//if($!>0){/select -r (Scell[Se]++.$f[+$(d[$l]+1)+$d[$l]+1)+$d[$l]+1]); Delete;
//if($g==0){ select -r (Scell[Se]++.$f[+$(d[$l]+1)+$d[$l]+1)+$d[$l]+1]);Delete; select -r (Scell[Se]++.$f[+$(d[$l]-3)+1]); Delete; }
//if($g>0){ select -r (Scell[Se]++.$f[+$(d[$l]+1)+$d[$l]+1)+$d[$l]+1]); Delete; }
//
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LDx) (S*$zd[$l]*$LDy) (S*$zd[$l]*$LDz) -ls $LDsx $LDsy $LDsz -lr $LDrx $LDry $LDrz (Scell[Se]++.$f[+$(d[$l]+1)+]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LDx) (S*$zd[$l]*$LDy) (S*$zd[$l]*$LDz) -ls $LDsx $LDsy $LDsz -lr $LDrx $LDry $LDrz (Scell[Se]++.$f[+$(d[$l]+1)+]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LDx) (S*$zd[$l]*$LDy) (S*$zd[$l]*$LDz) -ls $LDsx $LDsy $LDsz -lr $LDrx $LDry $LDrz (Scell[Se]++.$f[+$(d[$l]+1)+]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LDx) (S*$zd[$l]*$LDy) (S*$zd[$l]*$LDz) -ls $LDsx $LDsy $LDsz -lr $LDrx $LDry $LDrz (Scell[Se]++.$f[+$(d[$l]+1)+]);
select -cl; select -r (Scell[Se]++.$f[+$(d[$l]+1)+]); Delete (Scell[Se]++.$f[+$(d[$l]+1)+]);
//description:The part of the sequence generate the lower body

polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LUx) (S*$zd[$l]*$LUy) (S*$zd[$l]*$LUz) -ls $LUsx $LUsy $LUsz -lr $LURx $LURy $LURz (Scell[Se]++.$f[+$(u[$l]+1)+]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LUx) (S*$zd[$l]*$LUy) (S*$zd[$l]*$LUz) -ls $LUsx $LUsy $LUsz -lr $LURx $LURy $LURz (Scell[Se]++.$f[+$(u[$l]+1)+]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LUx) (S*$zd[$l]*$LUy) (S*$zd[$l]*$LUz) -ls $LUsx $LUsy $LUsz -lr $LURx $LURy $LURz (Scell[Se]++.$f[+$(u[$l]+1)+]);
select -cl; select -r (Scell[Se]++.$f[+$(u[$l]+1)+]); Delete (Scell[Se]++.$f[+$(u[$l]+1)+]);
//description:The part of the sequence generate the upper body

polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LFx) (S*$zd[$l]*$LFy) (S*$zd[$l]*$LFz) -ls $LFsx $LFsy $LFsz -lr $LFRx $LFry $LFRz (Scell[Se]++.$f[+$(f[$l]+1)+]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LFx) (S*$zd[$l]*$LFy) (S*$zd[$l]*$LFz) -ls $LFsx $LFsy $LFsz -lr $LFRx $LFry $LFRz (Scell[Se]++.$f[+$(f[$l]+1)+]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LFx) (S*$zd[$l]*$LFy) (S*$zd[$l]*$LFz) -ls $LFsx $LFsy $LFsz -lr $LFRx $LFry $LFRz (Scell[Se]++.$f[+$(f[$l]+1)+]);
select -cl; select -r (Scell[Se]++.$f[+$(f[$l]+1)+]); Delete (Scell[Se]++.$f[+$(f[$l]+1)+]);
//description:The part of the sequence generate the front body

polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LBx) (S*$zd[$l]*$LBy) (S*$zd[$l]*$LBz) -ls $LBsx $LBsy $LBsz -lr $LBrx $LBry $LBz (Scell[Se]++.$f[+$(b[$l]+1)+]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LBx) (S*$zd[$l]*$LBy) (S*$zd[$l]*$LBz) -ls $LBsx $LBsy $LBsz -lr $LBrx $LBry $LBz (Scell[Se]++.$f[+$(b[$l]+1)+]);
select -cl; select -r (Scell[Se]++.$f[+$(b[$l]+1)+]); Delete (Scell[Se]++.$f[+$(b[$l]+1)+]);
//description:The part of the sequence generate the back body

polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LDdx) (S*$zd[$l]*$LDdy) (S*$zd[$l]*$LDdz) -ls $LDdsx $LDdsy $LDdsz -lr $LDdrx $LDdry $LDdzz (Scell[Se]++.$f[+$(d[$l]+1)+]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LDdx) (S*$zd[$l]*$LDdy) (S*$zd[$l]*$LDdz) -ls $LDdsx $LDdsy $LDdsz -lr $LDdrx $LDdry $LDdzz (Scell[Se]++.$f[+$(d[$l]+1)+]);
select -cl; select -r (Scell[Se]++.$f[+$(d[$l]+1)+]); Delete (Scell[Se]++.$f[+$(d[$l]+1)+]);
//description:The part of the sequence generate the down part of the d-u connection

polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LDux) (S*$zd[$l]*$LDuy) (S*$zd[$l]*$LDuz) -ls $LDdusx $LDdusy $LDdusz -lr $LDdurx $LDdury $LDdurz (Scell[Se]++.$f[+$(u[$l]+1)+]);
select -cl; select -r (Scell[Se]++.$f[+$(u[$l]+1)+]); Delete (Scell[Se]++.$f[+$(u[$l]+1)+]);
//description:The part of the sequence generate the up part of the d-u connection

polyMergeVertex -d 0.01 -am 1 -ch 1 (Scell[Se]++.$f[+$(vtx[164])]) (Scell[Se]++.$f[+$(vtx[168])]);
polyMergeVertex -d 0.01 -am 1 -ch 1 (Scell[Se]++.$f[+$(vtx[165])]) (Scell[Se]++.$f[+$(vtx[168])]);
polyMergeVertex -d 0.01 -am 1 -ch 1 (Scell[Se]++.$f[+$(vtx[167])]) (Scell[Se]++.$f[+$(vtx[168])]);
polyMergeVertex -d 0.01 -am 1 -ch 1 (Scell[Se]++.$f[+$(vtx[166])]) (Scell[Se]++.$f[+$(vtx[168])]);
//description:*first use topological unification | PolyMergeVertex is used to mesh unification

polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LRx) (S*$zd[$l]*$LRy) (S*$zd[$l]*$LRz) -ls $LRsx $LRsy $LRsz -lr $LRrx $LRry $LRrz (Scell[Se]++.$f[+$(r[$l]+1)+]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LRx) (S*$zd[$l]*$LRy) (S*$zd[$l]*$LRz) -ls $LRsx $LRsy $LRsz -lr $LRrx $LRry $LRrz (Scell[Se]++.$f[+$(r[$l]+1)+]);
select -cl; select -r (Scell[Se]++.$f[+$(r[$l]+1)+]); Delete (Scell[Se]++.$f[+$(r[$l]+1)+]);
//description:The part of the sequence generate the right body

polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LLx) (S*$zd[$l]*$LLy) (S*$zd[$l]*$LLz) -ls $LLsx $LLsy $LLsz -lr $LLrx $LLry $LLrz (Scell[Se]++.$f[+$(l[$l]+1)+]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$LLx) (S*$zd[$l]*$LLy) (S*$zd[$l]*$LLz) -ls $LLsx $LLsy $LLsz -lr $LLrx $LLry $LLrz (Scell[Se]++.$f[+$(l[$l]+1)+]);
select -cl; select -r (Scell[Se]++.$f[+$(l[$l]+1)+]); Delete (Scell[Se]++.$f[+$(l[$l]+1)+]);
//description:The part of the sequence generate the left body

polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$SARx) (S*$zd[$l]*$SARy) (S*$zd[$l]*$SARz) -ls $SARsx $SARsy $SARsz -lr $SARrx $SARry $SARrz (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]-1)+]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$SARx) (S*$zd[$l]*$SARy) (S*$zd[$l]*$SARz) -ls $SARsx $SARsy $SARsz -lr $SARrx $SARry $SARrz (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]-1)+]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$SARx) (S*$zd[$l]*$SARy) (S*$zd[$l]*$SARz) -ls $SARsx $SARsy $SARsz -lr $SARrx $SARry $SARrz (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]-1)+]);
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$SARx) (S*$zd[$l]*$SARy) (S*$zd[$l]*$SARz) -ls $SARsx $SARsy $SARsz -lr $SARrx $SARry $SARrz (Scell[Se]++.$f[+$(h[$l]-1)+]);

```

```

polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$ARx) (S*$zd[$l]*$ARy) (S*$zd[$l]*$ARz) -ls $ARsx $ARsy $ARsz -lr $ARrx $ARry $ARrz (Scell[Se]+".f["+($h[$l]-1)+"]");

polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$ALx) (S*$zd[$l]*$ALy) (S*$zd[$l]*$ALz) -ls $ALsx $ALsy $ALsz -lr $ALrx $ALry $ALrz (Scell[Se]+".f["+($h[$l]-1+52)+"]");
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$ALx) (S*$zd[$l]*$ALy) (S*$zd[$l]*$ALz) -ls $ALsx $ALsy $ALsz -lr $ALrx $ALry $ALrz (Scell[Se]+".f["+($h[$l]-1+52)+"]");
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$ALx) (S*$zd[$l]*$ALy) (S*$zd[$l]*$ALz) -ls $ALsx $ALsy $ALsz -lr $ALrx $ALry $ALrz (Scell[Se]+".f["+($h[$l]-1+52)+"]");
polyExtrudeFacet -kft true -lt ((S*$zd[$l]*$ALx) (S*$zd[$l]*$ALy) (S*$zd[$l]*$ALz) -ls $ALsx $ALsy $ALsz -lr $ALrx $ALry $ALrz (Scell[Se]+".f["+($h[$l]-1+52)+"]");
//description:The part of the sequence is additional | namely it doesnt change the topology. Only the $vtotal has to increase if new extrusions are made
}
//select -r Scell[$l];//not in Animal+
//move -r (S*(-3000)*$Sx); select -cl;//not in Animal+
}
}
}

select -r Scell; $animal_c="AOP"+(0); polyUnite -ch 1 -n $animal_c;
//description:Selecting the array Scell and putting it in one element $animal_current

//
//Topological unification
// description: equations that describe the numbers of the vertices for the merging

//
int $ni,$nj,$nk,$vttotal;
int $idu,$iduc,$jdu,$jduc,$kdu,$kduc,$c,$ck,$Nsmall,$Nbig;
int $BNstart,$BNstart_p,$Nino,$Ninc,$Ninc_start,$Nino_p,$Nin[];
int $BGstart,$BGstart_p,$Gigo,$Ginc,$Ginc_start,$GincUnit;
int $BTstart,$BTstart_p,$Tito,$Tinc,$Tinc_start,$TIT,$TIT_p,$TITinc,$IA,$TITunit,$TITunit_p,$TIT_p,$TITit[];

$vttotal=224;
$ni=127+((1)*$vttotal); $nj=172+($Cx*$vttotal-($Cx-1)*4); $nk=156+((($Cx*$Ax)*$vttotal)-((($Cx-1)*$Ax*4)-($Ax-1)*$Cx*4));
//print ("ni:"+$ni+" nj:"+$nj+" nk:"+$nk+"\n");
// description: This part calculates the ni,nj,nk (the equations)
//-----
-

if($Cx<$Ax) { $Nsmall=$Cx;$Nbig=$Ax;$GincUnit=$Cx*4; } else { $Nsmall=$Ax;$Nbig=$Cx;$GincUnit=($Ax+1)*4; }
if($Nsmall>2){for($i=0;$i<$Nsmall-2;$i+=1) {
if($i==0) { $Ninc=3;$BNstart_p=0;$Ginc=24;$BGstart_p=24;if($Cx<$Ax) { $Tinc=12;$BTstart_p=32; }else { $Tinc=12;$BTstart_p=24; } }
$BNstart=$BNstart_p+$Ninc; $BNstart_p=$BNstart;
$BGstart=$BGstart_p+$Ginc; $BGstart_p=$BGstart;
$BTstart=$BTstart_p+$Tinc; $BTstart_p=$BTstart;
$Ninc=$Ninc+2; $Ginc=$Ginc+8; $Tinc=$Tinc; } } else { $BNstart=0;$BGstart=24; if($Cx<$Ax) { $BTstart=32; }else { $BTstart=24; } }

$Nino=$BNstart+((Nsmall-1)*($Nbig-$Nsmall)); $Gigo=$BGstart+((GincUnit)*($Nbig-$Nsmall));
if($Cx<$Ax) { $Tito=$BTstart+(8*($Nbig-$Nsmall-1)); }else { $Tito=$BTstart+(4*($Nbig-$Nsmall)); }
//print ("Nino:"+$Nino+"\n");print ("Gigo:"+$Gigo+"\n"); print ("Tito:"+$Tito+"\n");
// description:This part calculates the starting numbers $BNstart->$Nino,$BGstart->$Gigo,$BTstart->$Tito | which special numbers needed for the unification equations
// These numbers are complex to predict so a graph was made to mapp these numbers through trial and error

if($Nsmall>2){for($i=0;$i<$Nsmall-2;$i+=1) { if($i==0) { if($Cx<$Ax) { $TITinc=3;$TIT_p=-2; }else { $TITinc=2;$TIT_p=-2; } }
$TIT=$TIT_p+$TITinc; $TIT_p=$TIT; if($Cx<$Ax) { $TITinc=$TITinc+2; }else { $TITinc=$TITinc+2; } } }else { $TIT=2; } //print("TIT"+$TIT+"\n");
// description:This part calculates the initial incrementing unit for each base of Tito:IT

if($Nsmall<3) { if($Cx<$Ax) { $TITunit=-2;
} }else {for($i=0;$i<=$Nbig-$Nsmall;$i+=1) { if($i==0) { $TITunit_p=$TIT;$IA=0; } $TITunit=$TITunit_p-$IA; $TITunit_p=$TITunit;$IA=$Nsmall-1; } } $TITunit=-1*$TITunit;
} }else { if($Cx<$Ax) { for($i=0;$i<=$Nbig-$Nsmall;$i+=1) { if($i==0) { $TITunit_p=$TIT;$IA=0; } $TITunit=$TITunit_p+$IA; $TITunit_p=$TITunit;$IA=$Nsmall-2; }
} }else { for($i=0;$i<=$Nbig-$Nsmall;$i+=1) { if($i==0) { $TITunit_p=$TIT;$IA=0; } $TITunit=$TITunit_p+$IA; $TITunit_p=$TITunit;$IA=$Nsmall-1; } } }
$TITunit=$TITunit*4;
//print("TITunit"+$TITunit+"\n");
// description:This part calculates the incrementing unit for each entry (Cx . Ax) of Tito:ITunit

for($k=0;$k<$Gx;$k+=1)
{
if($k==0) { $Nino_p=$Nino;$TITit[$k]=0; } $Nin[$k]=$Nino_p+$Nino; $Nino_p=$Nin[$k];
if($k==1) { $TITit[$k]=$Tito;$TIT_p=$TITit[$k]; }
if($k>1) { $TITit[$k]=$TIT_p-$TITunit;$TIT_p=$TITit[$k]; }
//print ("Nin["+($k)+"]:"+$Nin[$k]+\n");//print ("TIT["+($k)+"]:"+$TITit[$k]+\n");
}
// description:This part calculates the propagation(k) the incrementing unit for Tito->TIT[k] $Nino->$Nin[k]
//-----
-

for($k=0;$k<$Gx;$k+=1)
{ $e3= $k*(($Cx)*($Ax));
for($j=0;$j<$Ax;$j+=1)
{ $e2=$j*(($Cx); $e=$j+($k*$Ax);
for($i=0;$i<$Cx;$i+=1)
{ $e1=$i; $e=$e1+$e2+$e3;

```

```

Sidu=(Se-Sc)*4; Siduc=(Se-Sc)*4;
if($i!=$Cx-1){
polyMergeVertex -d 0.01 -am 1 -ch 1 ($animal_c+.vtx["+(136+(Se*$vtotal)-($idu))+"]) ($animal_c+.vtx["+(($ni)+(Se*$vtotal)-($iduc))+"]);
polyMergeVertex -d 0.01 -am 1 -ch 1 ($animal_c+.vtx["+(137+(Se*$vtotal)-($idu))+"]) ($animal_c+.vtx["+(($ni-1)+(Se*$vtotal)-($iduc))+"]);
polyMergeVertex -d 0.01 -am 1 -ch 1 ($animal_c+.vtx["+(138+(Se*$vtotal)-($idu))+"]) ($animal_c+.vtx["+(($ni-2)+(Se*$vtotal)-($iduc))+"]);
polyMergeVertex -d 0.01 -am 1 -ch 1 ($animal_c+.vtx["+(139+(Se*$vtotal)-($idu))+"]) ($animal_c+.vtx["+(($ni-3)+(Se*$vtotal)-($iduc))+"]);
}
}
}
}
// description:This part Unifies in the i-direction (connecting the cells up and down) | The idu & iduc equations describe the number of vertices lost in every connection act

for($k=0;$k<$Gx;$k+=1)
{$e3= $k*($Cx)*($Ax);
for($j=0;$j<$Ax;$j+=1)
{$e2=$j*($Cx); $c=$j+($k*$Ax);
for($i=0;$i<$Cx;$i+=1)
{$e1=$i; $e=$e1+$e2+$e3;

$jd=(e*8)-((c+($Cx-1))*4)-($k*($Cx*4));
$jd=(e*8)-($c*4)-($k*($Cx*4));

if($j==0){ $jd=(e*4)+($k*$Nino*4); }

if($j!=$Ax-1){
polyMergeVertex -d 0.01 -am 1 -ch 1 ($animal_c+.vtx["+(180+(Se*$vtotal)-($jdu))+"]) ($animal_c+.vtx["+(($nj+(Se*$vtotal)-($jd))"+"]);
polyMergeVertex -d 0.01 -am 1 -ch 1 ($animal_c+.vtx["+(181+(Se*$vtotal)-($jdu))+"]) ($animal_c+.vtx["+(($nj+(Se*$vtotal)-($jd))"+"]);
polyMergeVertex -d 0.01 -am 1 -ch 1 ($animal_c+.vtx["+(183+(Se*$vtotal)-($jdu))+"]) ($animal_c+.vtx["+(($nj+(Se*$vtotal)-($jd))"+"]);
polyMergeVertex -d 0.01 -am 1 -ch 1 ($animal_c+.vtx["+(182+(Se*$vtotal)-($jdu))+"]) ($animal_c+.vtx["+(($nj+(Se*$vtotal)-($jd))"+"]);
}
//print ("e:"+$e+" c:"+$c);
//print (" jdu:"+$jdu+" jd:"+$jd+"n");
//print ("Vside_giv:"+(164+(Se*168)-($jdu))+ "Vside_rec:"+(($nj+(Se*168)-($jd))+"n");
}
}
}
// description:This part Unifies in the j-direction (connecting the cells right and left) | The jdu & jdud equations describe the number of vertices lost in every connection act and the irregularities
described by $Nino

for($k=0;$k<$Gx;$k+=1)
{$e3= $k*($Cx)*($Ax); //print ("Tit["+$k+"].:"+$Tit[$k]+"n"); //print ("Nin["+$k+"].:"+$Nin[$k]+"n");
for($j=0;$j<$Ax;$j+=1)
{$e2=$j*($Cx); $c=$j+($k*$Ax);
for($i=0;$i<$Cx;$i+=1)
{$e1=$i; $e=$e1+$e2+$e3;

$kd=(e*12)-($c*4)-($k*($Cx*4))-($Gigo);
$kd=(e*12)-($c*4)-($k*($Cx*4))-($Cx*4);

if($j==0){ $kd=(e*12)-((Se-Sc)*4)-$Tit[$k]; $kd=(e*12)-((Se-$Nin[$k])*4); }
if($k==0){ $kd=(e*12)-($c*4)-($Cx*4); if($j==0){ $kd=(e*12)/3; $kd=(e*12)-($c*4); } }

if($k!=$Gx-1){
polyMergeVertex -d 0.01 -am 1 -ch 1 ($animal_c+.vtx["+(148+(Se*$vtotal)-($kdu))+"]) ($animal_c+.vtx["+(($nk+(Se*$vtotal)-($kd))"+"]);
polyMergeVertex -d 0.01 -am 1 -ch 1 ($animal_c+.vtx["+(149+(Se*$vtotal)-($kdu))+"]) ($animal_c+.vtx["+(($nk+(Se*$vtotal)-($kd))"+"]);
polyMergeVertex -d 0.01 -am 1 -ch 1 ($animal_c+.vtx["+(151+(Se*$vtotal)-($kdu))+"]) ($animal_c+.vtx["+(($nk+(Se*$vtotal)-($kd))"+"]);
polyMergeVertex -d 0.01 -am 1 -ch 1 ($animal_c+.vtx["+(150+(Se*$vtotal)-($kdu))+"]) ($animal_c+.vtx["+(($nk+(Se*$vtotal)-($kd))"+"]);
}
//print ("e:"+$e+" c:"+$c);
//print (" kdu:"+$kdu+" kd:"+$kd+"n");
//print ("Vfront_giv:"+(164+(Se*168)-($jdu))+ "Vfront_rec:"+(($nj+(Se*168)-($jd))+"n");
}
}
}
// description:This part Unifies in the k-direction (connecting the cells front and back)
// The kdu & kdud equations describe the number of vertices lost in every connection act and the irregularities described by $Gigo, $Tit[k], $Nin[k]

```

4.3. Modélisation par interpolation

4.3.1. Interpolation polynomiale

La seconde technique de modélisation majeur qui est de loin le plus utilisé dans la conception architecturale est l'interpolation à travers des points discrets, l'interpolation est largement répandu dans le contexte de l'ingénierie, en raison de sa capacité à rapprocher solution de problèmes pour lesquels nous n'avons pas une formule explicite. Malgré la propagation de la modélisation par interpolation en architecture, il n'y a pas beaucoup d'architectes qui construisent ou sont conscients de la construction mathématique de la méthode d'interpolation qu'ils utilisent. Dans cette recherche, nous nous concentrons à donner des formules explicites pour les formes que nous concevons, mais dans certains cas où la forme est souhaitable de passer par des points discrets spécifiques, il est beaucoup plus facile de construire une interpolation polynomiale. Nous allons voir un exemple de ce cas plus tard, quand nous construisons une surface passant par des points discrets recueillies à partir d'une mesure externe, nous donnerons également la construction mathématique des courbes et surfaces de Bézier et NURBS, qui sont les interpolations les plus largement utilisés dans les systèmes de CAO aujourd'hui. Un système de modélisation CAO typique peut être considéré comme constitué de l'interaction entre une interface graphique d'utilisateur (GUI) avec une géométrie: NURBS et /ou de représentation de limite de données (B-rep) par l'intermédiaire d'un noyau de modélisation géométrique. «Non uniform rational basis spline» (ou NURBS) est un modèle mathématique pour générer et représenter des courbes et des surfaces avec une grande souplesse et précision. La représentation de limite (B-rep) est une méthode pour représenter des formes à l'aide des limites; un solide est représenté comme un ensemble d'éléments de surface reliés, la limite entre solide et non solide. Nous trouvons que la majorité des logiciels de CAO d'aujourd'hui qui sont couramment utilisés dans la conception architecturale repose sur cette définition de NURBS de courbes et de surfaces. Pour cette raison, et puisque dans cette recherche, nous nous intéressons à la géométrie moderne et l'espace formel, nous allons expliquer la définition mathématique formelle de NURBS. Afin de comprendre les NURBS, nous devons commencer par la notion de base de l'interpolation des courbes ou des surfaces à travers un ensemble de points discrets, qui nous conduira à des méthodes d'interpolation plus complexes tels que splines (bi)cubiques, Bézier et finalement NURBS. L'interpolation est un procédé de construction de nouveaux points de données à l'intérieur de la plage d'un ensemble discret de points de données connus. Une des méthodes d'interpolation les plus simples est l'interpolation linéaire (Lerp), une interpolation linéaire est simplement la ligne droite entre deux points donnés dans l'ensemble discret. Naturellement, dans une interpolation polynomiale, l'interpolant est un polynôme qui passe exactement à travers d'un ensemble donné de points, et, dans une interpolation spline, l'interpolant est un type particulier: polynomiale par morceaux appelée spline.

Fonction polynomiale [2]

est une fonction qui peut être définie par l'évaluation d'un polynôme

une fonction f à un argument est appelé une fonction polynomiale si elle satisfait

$$f(x) = a_0 x^0 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

Anneau de polynômes $\mathbb{K}[X]$ [2]

l'ensemble de tous les polynômes avec des coefficients dans le corps \mathbb{K} (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C})

$\mathbb{K}_n[X]$ espace vectoriel des polynômes de degré n et $\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif,

le symbole X est couramment appelé la variable

$P, Q \in \mathbb{K}_n[X], R \in \mathbb{K}_m[X], p_i, q_i, r_i \in \mathbb{K}$ pour $i = 0, \dots, n$ et $j = 0, \dots, m$

$$P(X) = \sum_{i=0}^n p_i X^i, Q(X) = \sum_{i=0}^n q_i X^i \text{ et } R(X) = \sum_{j=0}^m r_j X^j$$

$$P(X) + Q(X) = (P + Q)(X) = \sum_{i=0}^n (p_i + q_i) X^i \text{ et } P(X)R(X) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} p_i r_j \right) X^k$$

le corps \mathbb{K} peut être remplacé par n importe quel anneau commutatif comme \mathbb{R} ,

donnant lieu à l'anneau de polynômes sur \mathbb{R} qui est notée $\mathbb{R}[X]$

Avant de commencer à construire les polynômes d'interpolation plus élaborés que nous allons utiliser dans la conception architecturale, nous devons d'abord commencer par les bases de l'interpolation polynomiale, pour cela, nous allons montrer la matrice de Vandermonde. Le problème de cette méthode est que le degré du polynôme va augmenter avec l'augmentation du nombre de points qui donnent lieu à un polynôme moins stable avec un grand nombre d'oscillations. Nous allons résoudre ce problème lorsque nous allons construire les splines cubiques et bi-cubiques, où la courbe est faite à partir de segments, chacun est un polynôme de degré trois.

Interpolation polynomiale [2]

est l'interpolation d'un ensemble de points donné

par un polynôme qui passe exactement à travers de ces points

$p_i \in \mathbb{R}^2$, pour $i = 0, \dots, n$ (un ensemble de $n + 1$ points de données) | $\forall i, j \in \{0, \dots, n\}, x_i = x_j \iff i = j$

$\forall i \in \{0, \dots, n\}, P(x_i) = y_i$, P est l'unique interpolation polynomiale $\deg(P) \leq n$

pour $n + 1$ points (x_i) , $P : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}_n[X]$ est une bijection linéaire,

$\forall i \in \{0, \dots, n\}, P(x_i) = \sum_{k=0}^n a_k x_i^k = a_0 x_i^0 + \dots + a_n x_i^n = y_i$

pour trouver les coefficients a_k pour $k = 0, \dots, n$ de l'interpolant P nous résolvons le système

$$M A = B \implies A = M^{-1} B, \text{ où } M \text{ est la matrice de Vandermonde } \begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Interpolant P avec $\deg(P) = 3$

$\Gamma = \{p_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, \text{ for } i = 0, \dots, 3\}$ est un ensemble de quatre points distincts

$p_0 = (-1, \frac{1}{2}), p_1 = (0, 0), p_2 = (1, -\frac{1}{2})$ et $p_3 = (2, 0)$

$P \in \mathbb{K}_3[X]$ est un polynôme d'interpolation de degré =

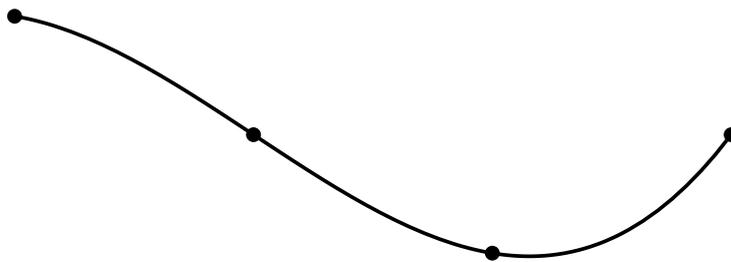
3 | $P(x_i) = \sum_{k=0}^3 a_k x_i^k = a_0 x_i^0 + a_1 x_i^1 + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 = y_i$

$B = (y_0, \dots, y_3) = (2, 0, -2, 0)$ est le vecteur connu

$A = (a_0, \dots, a_3)$ est le vecteur des coefficients de P et M est la matrice de Vandermonde

$$M A = B \implies \begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \implies A = M^{-1} B \implies \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\implies P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) = (0)x^0 + (-\frac{2}{3})x^1 + (0)x^2 + (-\frac{1}{6})x^3 = -\frac{2x}{3} + \frac{x^3}{6}$$



Représentation d'un polynôme d'interpolation de degré 3 à travers 4 points

4.3.2. Splines cubique et bicubique

Avec la définition du polynôme d'interpolation clarifié nous allons définir maintenant le spline cubique et bicubique. Une spline est une fonction polynomiale suffisamment lisse par morceaux polynôme; les types les plus courants sont: B-spline cubique et cubique splines de Bézier. Une courbe cubique peut avoir qu'un seul point d'inflexion, de faire une courbe avec trois points d'inflexion, nous devons ajouter des points de contrôle supplémentaires et utilisant un polynôme de degré supérieur (degré ≥ 3). Néanmoins, ces polynômes de degré supérieur sont sensibles à la position des points et ne font pas toujours des formes lisses. De construire un polynôme par morceaux est de laisser chaque paire de points de contrôle représenter un segment (polynôme cubique) de la courbe.

Construction générale de splines cubiques (forme non paramétrique) [2]

$p_i \in \mathbb{R}^2$, pour $i = 0, \dots, n$ (un ensemble de $n + 1$ points de données) | $\forall i, j \in \{0, \dots, n\}$, $x_i = x_j \iff i = j$

$$P_i(x_i) = \sum_{k=0}^3 a_{k,i} x_i^k = a_{0,i} x_i^0 + a_{1,i} x_i^1 + a_{2,i} x_i^2 + a_{3,i} x_i^3 = y_i \quad (\text{le segment entre } p_i \text{ \& } p_{i+1})$$

les dérivés des segments

$$P_i'(x_{i+1}) = a_{1,i} + 2 a_{2,i} (x_{i+1}) + 3 a_{3,i} (x_{i+1})^2 \quad \text{et} \quad P_{i+1}'(x_{i+1}) = a_{1,i+1} + 2 a_{2,i+1} (x_{i+1}) + 3 a_{3,i+1} (x_{i+1})^2$$

$$P_i''(x_{i+1}) = 2 a_{2,i} + 6 a_{3,i} (x_{i+1}) \quad \text{et} \quad P_{i+1}''(x_{i+1}) = 2 a_{2,i+1} + 6 a_{3,i+1} (x_{i+1})$$

les conditions qui construisent le système

$$P_i(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad P_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad (C^0 \text{ continuité}) \quad \text{et} \quad P_i'(x_{i+1}) = P_{i+1}'(x_{i+1}) \quad (C^1 \text{ continuité})$$

$$P_i''(x_{i+1}) = P_{i+1}''(x_{i+1}) \quad (C^2 \text{ continuité}),$$

$$P_0'(x_0) = s_0 \quad \text{et} \quad P_{n-1}'(x_n) = s_n \quad (\text{Pentes aux points des extrémités})$$

les équations du système

$$a_{1,0} + 2 a_{2,0} (x_0) + 3 a_{3,0} (x_0)^2 = s_0$$

$$a_{0,i} x_i^0 + a_{1,i} x_i^1 + a_{2,i} x_i^2 + a_{3,i} x_i^3 = y_i$$

$$a_{0,i} x_{i+1}^0 + a_{1,i} x_{i+1}^1 + a_{2,i} x_{i+1}^2 + a_{3,i} x_{i+1}^3 = y_{i+1}$$

$$a_{1,i} + 2 a_{2,i} (x_{i+1}) + 3 a_{3,i} (x_{i+1})^2 - a_{1,i+1} - 2 a_{2,i+1} (x_{i+1}) - 3 a_{3,i+1} (x_{i+1})^2 = 0$$

$$2 a_{2,i} + 6 a_{3,i} (x_{i+1}) - 2 a_{2,i+1} - 6 a_{3,i+1} (x_{i+1}) = 0$$

$$a_{1,n-1} + 2 a_{2,n-1} (x_n) + 3 a_{3,n-1} (x_n)^2 = s_n$$

pour $n + 1$ points que nous avons besoin de n segments $\implies 4 n$ équations

\implies le système pour $n = 4$ (i.e. 5 points de données)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2x_0^1 & 3x_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x_1^1 & 3x_1^2 & 0 & -1 & -2x_1^1 & -3x_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_1^1 & 0 & 0 & -2 & -6x_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x_2^1 & 3x_2^2 & 0 & -1 & -2x_2^1 & -3x_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x_2^1 & 0 & 0 & -2 & -6x_2^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x_3^1 & 3x_3^2 & 0 & -1 & -2x_3^1 & -3x_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x_3^1 & 0 & 0 & -2 & -6x_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4^1 & x_4^2 & x_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x_4^1 & 3x_4^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0,0} \\ a_{1,0} \\ a_{2,0} \\ a_{3,0} \\ a_{0,1} \\ a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ a_{0,2} \\ a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \\ a_{0,3} \\ a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 \\ y_0 \\ y_1 \\ 0 \\ 0 \\ y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \\ s_4 \end{pmatrix}$$

Splines cubique à travers 5 points de données (forme non paramétrique)

$\Gamma = \{p_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, \text{ pour } i = 0, \dots, 4\}$ est un ensemble de 5 points de données distincts

$p_0 = (0, 1), p_1 = (2, 3), p_2 = (4, -1),$

$p_3 = (6, 1)$ et $p_4 = (8, 0)$ et la pente de début $s_0 = -1$ et la pente du bout $s_4 = 2$

$P_i \in \mathbb{K}_3[X]$ est un polynôme d'interpolation de degré =

$$3 \mid P_i(x_i) = \sum_{k=0}^3 a_{k,i} x_i^k = a_{0,i} x_i^0 + a_{1,i} x_i^1 + a_{2,i} x_i^2 + a_{3,i} x_i^3 = y_i$$

$B = (s_0, y_0, y_1, 0, 0, y_1, y_2, 0, 0, y_2, y_3, 0, 0, y_3, y_4, s_4)$ est le vecteur connu

$A = (a_{0,0}, a_{1,0}, a_{2,0}, a_{3,0}, a_{0,1}, a_{1,1}, a_{2,1}, a_{3,1}, a_{0,2}, a_{1,2}, a_{2,2}, a_{3,2}, a_{0,3}, a_{1,3}, a_{2,3}, a_{3,3}, a_{0,4}, a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,4})$

A est le vecteur des coefficients de l'interpolant P

et M est le système de matrice d'équations $MA = B$

$$\Rightarrow A = M^{-1} B$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{0,0} \\ a_{1,0} \\ a_{2,0} \\ a_{3,0} \\ a_{0,1} \\ a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ a_{0,2} \\ a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \\ a_{0,3} \\ a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 0 & -1 & -4 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 0 & 0 & -2 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 16 & 64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 48 & 0 & -1 & -8 & -48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 24 & 0 & 0 & -2 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 16 & 64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 36 & 216 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 108 & 0 & -1 & -12 & -108 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 36 & 0 & 0 & -2 & -36 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 36 & 216 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 64 & 512 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 16 & 192 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

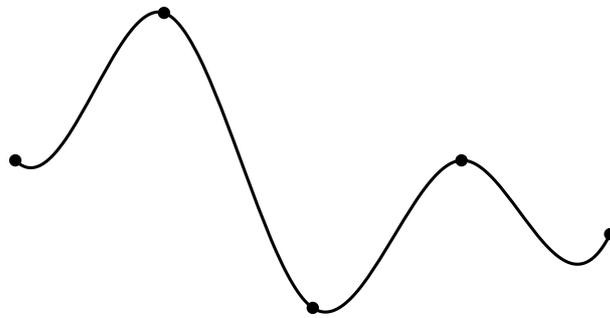
l'interpolant $P(x)$ est égal à

$$\text{si } x_0 \leq x < x_1 = P_0(x) = 1 - x + \frac{597x^2}{224} - \frac{373x^3}{448}$$

$$\text{si } x_1 \leq x < x_2 = P_1(x) = -\frac{163}{14} + \frac{503x}{28} - \frac{1527x^2}{224} + \frac{335x^3}{448}$$

$$\text{si } x_2 \leq x < x_3 = P_2(x) = \frac{1097}{14} - \frac{1387x}{28} + \frac{2253x^2}{224} - \frac{295x^3}{448}$$

$$\text{si } x_3 \leq x < x_4 = P_3(x) = -\frac{1598}{7} + \frac{1453x}{14} - \frac{3471x^2}{224} + \frac{341x^3}{448}$$



Représentation d'une spline cubique à travers 5 points de données (forme non paramétrique)

Construction générale de splines cubiques (forme paramétrique)

Il s'agissait de la forme générale de la spline cubique mais ce qui est plus intéressant du point de vue de la conception architecturale est la paramétrisation de cette forme, comme cela, nous sommes en mesure de libérer la variable x à aller en avant et en arrière si nous sommes dans \mathbb{R}^2 et que nous pouvons commencer à dessiner des courbes dans \mathbb{R}^3 . Ces courbes dans \mathbb{R}^3 sont largement utilisés dans le logiciel de CAO et ils sont également la base pour la construction des surfaces qui les relient; cependant l'utilisateur du système de CAO n'a pas accès à aux fonctions d'interpolation polynomiales de ces courbes, elles sont la plupart du temps caché dans la bibliothèque du logiciel. Cependant, dans cette recherche, puisque nous construisons ces fonctions nous-mêmes, nous avons accès à leur structure, et nous pouvons choisir entre les différentes techniques d'interpolation, en fonction de nos besoins, ce qui sera montré plus tard, quand nous allons utiliser ces fonctions d'interpolation dans notre processus de conception. Nous allons maintenant définir une forme paramétrique de la spline cubique

Construction générale de splines cubiques (forme paramétrique) [2]

$p_i \in \mathbb{R}^3$, pour $i = 0, \dots, n$ (un ensemble de $n + 1$ points de données) | $\forall i, j \in \{0, \dots, n\}, x_i = x_j \iff i = j$

maintenant le paramètre ne sera pas la variable x ,

mais u sur n intervalles $I_i = [c_i, d_i]$ pour $i = 0, \dots, n$ et pour $\lambda \in \{x, y, z\}$

$$t_i = f_i(u) \mid f_i(c_i) = 0 \text{ et } f_i(d_i) = 1 \text{ et } \frac{d t_i}{d u} = \frac{d f_i}{d u} = 1$$

I' équation de la courbe cubique paramétrique

$$P_{\lambda_i}(t_i) = P_{\lambda_i}(f_i(u)) = \sum_{k=0}^3 a_{\lambda_k,i} f_i(u)^k = a_{\lambda_0,i} f_i(u)^0 + a_{\lambda_1,i} f_i(u)^1 + a_{\lambda_2,i} f_i(u)^2 + a_{\lambda_3,i} f_i(u)^3 = \lambda_i$$

$$P_{\lambda_i}(t_i) = a_{\lambda_0,i} t_i^0 + a_{\lambda_1,i} t_i^1 + a_{\lambda_2,i} t_i^2 + a_{\lambda_3,i} t_i^3 = \lambda_i \quad (\text{le composant } \lambda \text{ pour le segment entre } p_i \text{ \& } p_{i+1})$$

dérivés par rapport à t (*i.e.* f) et par rapport à u

$$D_{f_i} [P_{\lambda_i}(f_i(u))] = \frac{d P_{\lambda_i}}{d f_i} = a_{\lambda_1,i} + 2 a_{\lambda_2,i} (f_i(u)) + 3 a_{\lambda_3,i} (f_i(u))^2$$

$$D_{f_i}^2 [P_{\lambda_i}(f_i(u))] = \frac{d^2 P_{\lambda_i}}{d f_i^2} = 2 a_{\lambda_2,i} + 6 a_{\lambda_3,i} (f_i(u))$$

$$D_u [P_{\lambda_i}(f_i(u))] = \frac{d P_{\lambda_i}}{d f_i} \frac{d f_i}{d u} = D_{f_i} [P_{\lambda_i}(f_i(u))] = P_{\lambda_i}'(f_i(u))$$

$$D_u^2 [P_{\lambda_i}(f_i(u))] = \left(\frac{d P_{\lambda_i}'}{d f_i} \frac{d f_i}{d u} \right) \frac{d f_i}{d u} = D_{f_i}^2 [P_{\lambda_i}(f_i(u))] = P_{\lambda_i}''(f_i(u))$$

les conditions qui construisent le système

$$P_{\lambda_i}(f_i(c_i)) = \lambda_i \text{ et } P_{\lambda_i}(f_i(d_i)) = \lambda_{i+1} \quad (C^0 \text{ continuité}) \text{ et } P_{\lambda_i}'(f_i(d_i)) = P_{\lambda_{i+1}}'(f_{i+1}(c_{i+1})) \quad (C^1 \text{ continuité})$$

$$P_{\lambda_i}''(f_i(d_i)) = P_{\lambda_{i+1}}''(f_{i+1}(c_{i+1})) \quad (C^2 \text{ continuité}),$$

$$P_{\lambda_0}'(f_0(c_0)) = s_0 \text{ et } P_{\lambda_{n-1}}'(f_{n-1}(d_{n-1})) = s_n \quad (\text{Pentes aux points des extrémités})$$

les équations du système

$$P_{\lambda_0}'(f_0(c_0)) = a_{\lambda_1,0} + 2 a_{\lambda_2,0} (f_0(c_0)) + 3 a_{\lambda_3,0} (f_0(c_0))^2 = s_0 \implies a_{\lambda_1,0} = s_0 \dots (1)$$

$$P_{\lambda_i}(f_i(c_i)) = a_{\lambda_0,i} f_i(c_i)^0 + a_{\lambda_1,i} f_i(c_i)^1 + a_{\lambda_2,i} f_i(c_i)^2 + a_{\lambda_3,i} f_i(c_i)^3 = \lambda_i \implies a_{\lambda_0,i} = \lambda_i \dots (2)$$

$$P_{\lambda_i}(f_i(d_i)) = a_{\lambda_0,i} f_i(d_i)^0 + a_{\lambda_1,i} f_i(d_i)^1 + a_{\lambda_2,i} f_i(d_i)^2 + a_{\lambda_3,i} f_i(d_i)^3 = \lambda_{i+1}$$

$$\implies a_{\lambda_0,i} + a_{\lambda_1,i} + a_{\lambda_2,i} + a_{\lambda_3,i} = \lambda_{i+1} \dots (3)$$

$$P_{\lambda_i}'(f_i(d_i)) = P_{\lambda_{i+1}}'(f_{i+1}(c_{i+1}))$$

$$\implies a_{\lambda_1,i} + 2 a_{\lambda_2,i} (f_i(d_i)) + 3 a_{\lambda_3,i} (f_i(d_i))^2 = a_{\lambda_1,i+1} + 2 a_{\lambda_2,i+1} (f_{i+1}(c_{i+1})) + 3 a_{\lambda_3,i+1} (f_{i+1}(c_{i+1}))^2$$

$$\implies a_{\lambda_1,i} + 2 a_{\lambda_2,i} + 3 a_{\lambda_3,i} - a_{\lambda_1,i+1} = 0 \dots (4)$$

$$P_{\lambda_i}''(f_i(d_i)) = P_{\lambda_{i+1}}''(f_{i+1}(c_{i+1}))$$

$$\implies 2 a_{\lambda_2,i} + 6 a_{\lambda_3,i} (f_i(d_i)) = 2 a_{\lambda_2,i+1} + 6 a_{\lambda_3,i+1} (f_{i+1}(c_{i+1})) \implies 2 a_{\lambda_2,i} + 6 a_{\lambda_3,i} - 2 a_{\lambda_2,i+1} = 0 \dots (5)$$

$$P_{\lambda_{n-1}}'(f_{n-1}(d_{n-1})) = a_{\lambda_1,n-1} + 2 a_{\lambda_2,n-1} (f_{n-1}(d_{n-1})) + 3 a_{\lambda_3,n-1} (f_{n-1}(d_{n-1}))^2 = s_n$$

$$\implies a_{\lambda_1,n-1} + 2 a_{\lambda_2,n-1} + 3 a_{\lambda_3,n-1} = s_n \dots (6)$$

pour $n + 1$ points que nous avons besoin de n segments $\implies 4n$ équations \implies le système pour $n = 4$ (i.e. 5 points de données)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax_{0,0} & ay_{0,0} & az_{0,0} \\ ax_{1,0} & ay_{1,0} & az_{1,0} \\ ax_{2,0} & ay_{2,0} & az_{2,0} \\ ax_{3,0} & ay_{3,0} & az_{3,0} \\ ax_{0,1} & ay_{0,1} & az_{0,1} \\ ax_{1,1} & ay_{1,1} & az_{1,1} \\ ax_{2,1} & ay_{2,1} & az_{2,1} \\ ax_{3,1} & ay_{3,1} & az_{3,1} \\ ax_{0,2} & ay_{0,2} & az_{0,2} \\ ax_{1,2} & ay_{1,2} & az_{1,2} \\ ax_{2,2} & ay_{2,2} & az_{2,2} \\ ax_{3,2} & ay_{3,2} & az_{3,2} \\ ax_{0,3} & ay_{0,3} & az_{0,3} \\ ax_{1,3} & ay_{1,3} & az_{1,3} \\ ax_{2,3} & ay_{2,3} & az_{2,3} \\ ax_{3,3} & ay_{3,3} & az_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx_0 & sy_0 & sz_0 \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ sx_4 & sy_4 & sz_4 \end{pmatrix}$$

Splines cubique à travers 5 points de données (forme paramétrique)

$\Gamma = \{p_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3, \text{ pour } i = 0, \dots, 4\}$ est un ensemble de 5 points de données distincts

$p_0 = (2, 0, 0), p_1 = (1, 0, 2), p_2 = (1, 1, 1), p_3 = (-1, 2, 1)$ et $p_4 = (3, 3, 5)$

les pentes au début $s_0 = (s_{0x}, s_{0y}, s_{0z}) = (-1, -1, -1)$ et les pentes au bout $s_4 = (s_{4x}, s_{4y}, s_{4z}) = (2, -2, -2)$

$t_i = f_i(u) = u - i \mid f_i(c_i) = 0$ et $f_i(d_i) = 1$ et $\frac{dt_i}{du} = \frac{df_i}{du} = 1$

pour $u \in I_i = [c_i, d_i]$ pour $i = 0, \dots, n$ et pour $\lambda \in \{x, y, z\}$

$P_{\lambda i} \in \mathbb{K}_3[X]$ est un polynôme d' interpolation de degré = 3 tel que

$$P_{\lambda i}(t_i) = \sum_{k=0}^3 a_{k,i} t_i^k = a\lambda_{0,i} t_i^0 + a\lambda_{1,i} t_i^1 + a\lambda_{2,i} t_i^2 + a\lambda_{3,i} t_i^3 = \lambda_i$$

$B_\lambda = (s_{0\lambda}, \lambda_0, \lambda_1, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2, 0, 0, \lambda_2, \lambda_3, 0, 0, \lambda_3, \lambda_4, s_{4\lambda})$ est le vecteur connu

$A_\lambda = (a_{0,0}, a_{1,0}, a_{2,0}, a_{3,0}, a_{0,1}, a_{1,1}, a_{2,1}, a_{3,1}, a_{0,2}, a_{1,2}, a_{2,2}, a_{3,2}, a_{0,3}, a_{1,3}, a_{2,3}, a_{3,3}, a_{0,4}, a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,4})$

est le vecteur des coefficients de l'interpolant P_λ

et M est le système de matrice d' équations matrix $M A_\lambda = B_\lambda$ où $A = (A_x \ A_y \ A_z)$ et $B = (B_x \ B_y \ B_z)$

$$A = M^{-1} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

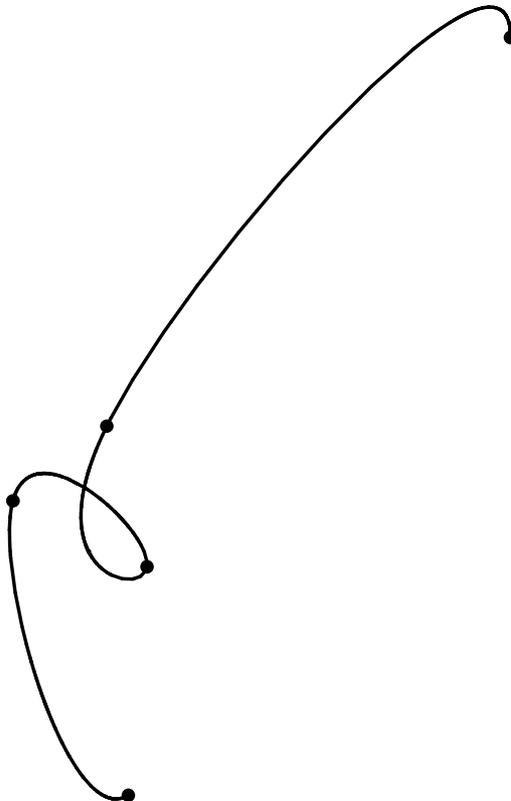
l'interpolant $P(f(u)) = (P_x(f(u)), P_y(f(u)), P_z(f(u)))$ est égal à

$$\text{si } 0 \leq u < 1, P(f(u)) = \begin{pmatrix} P_{x0}(f_0(u)) \\ P_{y0}(f_0(u)) \\ P_{z0}(f_0(u)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - u - \frac{27u^2}{28} + \frac{27u^3}{28} \\ -u + \frac{17u^2}{14} - \frac{3u^3}{14} \\ -u + \frac{181u^2}{28} - \frac{97u^3}{28} \end{pmatrix}$$

$$\text{si } 1 \leq u < 2, P(f(u)) = \begin{pmatrix} P_{x1}(f_1(u)) \\ P_{y1}(f_1(u)) \\ P_{z1}(f_1(u)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1-u}{28} + \frac{27}{14}(-1+u)^2 - \frac{53}{28}(-1+u)^3 \\ \frac{11}{14}(-1+u) + \frac{4}{7}(-1+u)^2 - \frac{5}{14}(-1+u)^3 \\ 2 + \frac{43}{28}(-1+u) - \frac{55}{14}(-1+u)^2 + \frac{39}{28}(-1+u)^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{si } 2 \leq u < 3, P(f(u)) = \begin{pmatrix} P_{x2}(f_2(u)) \\ P_{y2}(f_2(u)) \\ P_{z2}(f_2(u)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{13}{7}(-2+u) - \frac{15}{4}(-2+u)^2 + \frac{101}{28}(-2+u)^3 \\ 1 + \frac{6}{7}(-2+u) - \frac{1}{2}(-2+u)^2 + \frac{9}{14}(-2+u)^3 \\ 1 - \frac{15}{7}(-2+u) + \frac{1}{4}(-2+u)^2 + \frac{53}{28}(-2+u)^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{si } 3 \leq u < 4, P(f(u)) = \begin{pmatrix} P_{x3}(f_3(u)) \\ P_{y3}(f_3(u)) \\ P_{z3}(f_3(u)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{41}{28}(-3+u) + \frac{99}{14}(-3+u)^2 - \frac{127}{28}(-3+u)^3 \\ 2 + \frac{25}{14}(-3+u) + \frac{10}{7}(-3+u)^2 - \frac{31}{14}(-3+u)^3 \\ 1 + \frac{113}{28}(-3+u) + \frac{83}{14}(-3+u)^2 - \frac{167}{28}(-3+u)^3 \end{pmatrix}$$



Représentation d'une spline cubique (forme paramétrique)

Méthode itérative

La méthode précédente est très simple pour dessiner la spline cubique, le seul problème est que le nombre de points détermine le nombre d'équations à résoudre donc la matrice M devra être réglée si nous ajoutons ou supprimons des points dans le processus de conception, qui n'est pas très efficace. Alors maintenant, nous allons limiter la taille de la matrice à 4×4 et utiliser une boucle itérative pour calculer les coefficients des polynômes à travers les segments. Nous allons définir trois types importants de splines cubiques: l'Hermite cubique, Catmull Rom et la spline Cardinal, qui peuvent être utilisés dans l'itération.

Méthode itérative pour dessiner la spline cubique [2]

$p_i \in \mathbb{R}^3$, $\tau_i \in \mathbb{R}^3$, pour $i = 0, \dots, n$ (un ensemble de $n + 1$ points de données)

$$P_{\lambda_i}(t_i) = \sum_{k=0}^3 a_{k,i} t_i^k = a\lambda_{0,i} t_i^0 + a\lambda_{1,i} t_i^1 + a\lambda_{2,i} t_i^2 + a\lambda_{3,i} t_i^3 = \lambda_i$$

(le composant λ pour le segment entre p_i & p_{i+1})

$$t_i = f_i(u) = u - i \mid f_i(c_i) = 0 \text{ et } f_i(d_i) = 1 \text{ et } \frac{dt_i}{du} = \frac{df_i}{du} = 1 \text{ pour } u \in I_i = [c_i, d_i] \text{ pour } i = 0, \dots,$$

n et pour $\lambda \in \{x, y, z\}$

$$P_i(t_i) =$$

$$P_i(f_i(u)) = \begin{pmatrix} P_{x_i}(t_i) \\ P_{y_i}(t_i) \\ P_{z_i}(t_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_{0,i} t_i^0 + ax_{1,i} t_i^1 + ax_{2,i} t_i^2 + ax_{3,i} t_i^3 \\ ay_{0,i} t_i^0 + ay_{1,i} t_i^1 + ay_{2,i} t_i^2 + ay_{3,i} t_i^3 \\ az_{0,i} t_i^0 + az_{1,i} t_i^1 + az_{2,i} t_i^2 + az_{3,i} t_i^3 \end{pmatrix} \text{ et } P_i'(t_i) = \begin{pmatrix} ax_{1,i} + 2 ax_{2,i} t_i + 3 ax_{3,i} t_i^2 \\ ay_{1,i} + 2 ay_{2,i} t_i + 3 ay_{3,i} t_i^2 \\ az_{1,i} + 2 az_{2,i} t_i + 3 az_{3,i} t_i^2 \end{pmatrix}$$

$$\tau_i = \begin{pmatrix} \tau_{i,x} \\ \tau_{i,y} \\ \tau_{i,z} \end{pmatrix} \text{ est la tangente donnée en } p_i \text{ et } m_i = \begin{pmatrix} m_{i,x} = \frac{\tau_{i,x}}{x_{i+1} - x_i} \\ m_{i,y} = \frac{\tau_{i,y}}{y_{i+1} - y_i} \\ m_{i,z} = \frac{\tau_{i,z}}{z_{i+1} - z_i} \end{pmatrix} \text{ est la tangente mise à l'échelle en } p_i$$

les conditions qui construisent le système

$$P_i(0) = p_i, P_i(1) = p_{i+1}, P_i'(0) = m_i \text{ et } P_i'(1) = m_{i+1}$$

le système pour le segment entre (x_i, y_i, z_i) et $(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax_{0,i} & ay_{0,i} & az_{0,i} \\ ax_{1,i} & ay_{1,i} & az_{1,i} \\ ax_{2,i} & ay_{2,i} & az_{2,i} \\ ax_{3,i} & ay_{3,i} & az_{3,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} & z_{i+1} \\ m_{i,x} & m_{i,y} & m_{i,z} \\ m_{i+1,x} & m_{i+1,y} & m_{i+1,z} \end{pmatrix}$$

dans le cas d' Hermite cubique spline $\tau_i = \begin{pmatrix} \tau_{i,x} \\ \tau_{i,y} \\ \tau_{i,z} \end{pmatrix}$ est donnée à chaque p_i

$$\text{dans le cas de Catmull Rom spline } \tau_i = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2} = \begin{pmatrix} \tau_{i,x} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} \\ \tau_{i,y} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2} \\ \tau_{i,z} = \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{dans le cas de la spline Cardinal } \tau_i = \frac{(1-c)(p_{i+1} - p_{i-1})}{2} = \begin{pmatrix} \tau_{i,x} = \frac{(1-c)(x_{i+1} - x_{i-1})}{2} \\ \tau_{i,y} = \frac{(1-c)(y_{i+1} - y_{i-1})}{2} \\ \tau_{i,z} = \frac{(1-c)(z_{i+1} - z_{i-1})}{2} \end{pmatrix}$$

(i.e. un paramètre de forme c est ajouté pour contrôler la courbure autour de p_i)

Maintenant, nous allons montrer une spline cubique construit en utilisant une itération, en passant par les points à interpoler, comme nous l'avons mentionné il y a quelques méthodes pour créer cette interpolation.

Iteration through n points using the Catmul Rom spline

$\Gamma = \{p_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3, \text{ pour } i = 1, \dots, n\}$ est un ensemble de n points de données distincts

la spline ne passe pas par p_1 et p_n ils ne sont utilisés que pour donner la tangence aux extrémités de la spline pour $n = 8$ la spline interpole 6 points \implies nous aurons un système de 24 équations, lieu de cela nous allons créer une itération

$$p_1 = (0, 0, 0), p_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), p_3 = (2, 0, 1), p_4 = (4, 0, 4),$$

$$p_5 = (4, 3, 2), p_6 = (3, 4, 4), p_7 = (5, 5, 5) \text{ et } p_8 = (6, 6, 6)$$

$n = \text{Card}(\Gamma) = 8$ et $c = 1$ (une valeur de comptage initiale)

nous itérons pour $i = 2, \dots, n - 2$

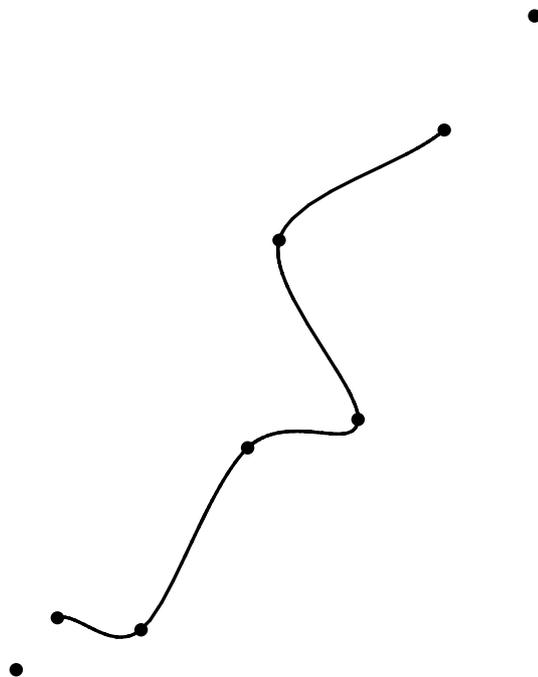
$$m_1 = \left(\frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2}\right), m_2 = \left(\frac{p_{i+2} - p_{i-2}}{2}\right), \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_i \\ p_{i+1} \\ m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

$$P_c(u) = a_0 + a_1(u - (c - 1)) + a_2(u - (c - 1))^2 + a_3(u - (c - 1))^3$$

$$c = c + 1$$

l'interpolant $P(u)$ est égal à

si $0 \leq u < 1$, $P(u) = P_1(u)$, si $1 \leq u < 2$, $P(u) = P_2(u)$, si $2 \leq u < 3$, $P(u) = P_3(u)$
 si $3 \leq u < 4$, $P(u) = P_4(u)$, si $4 \leq u < 5$, $P(u) = P_5(u)$, si $5 \leq u < 6$, $P(u) = P_6(u)$



Représentation d'une itération à travers 8 points en utilisant la spline de Catmull Rom

Spline bicubique

Maintenant que nous avons construit la spline cubique, il est naturel de construire son analogue sur une grille bidimensionnelle de points, à savoir une spline bicubique qui est une surface paramétrique qui passe par ces points de grille. La spline bicubique est la première des trois types d'interpolation à deux dimensions que nous allons construire dans le cadre de cette recherche, la deuxième serait la surface de Bézier et la troisième sera la surface NURBS. Maintenant, nous allons définir l'interpolation bicubique qui est une extension de l'interpolation cubique destiné à interpoler des points de données sur une grille régulière à deux dimensions, il est souvent choisie de préférence à l'interpolation bilinéaire et la méthode du plus proche voisin dans le rééchantillonnage d'image.

Spline bicubique [3]

$\Gamma = \{p_{i,j} \in \mathbb{R}^3, i = 0, \dots, m \text{ et } j = 0, \dots, n\}$ est un ensemble de $(m + 1) \times (n + 1)$ points de données et $\tau_i \in \mathbb{R}^3$

$$P_{\lambda_{i,j}}(t_i, s_j) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 a_{\lambda_{k,l,i,j}} t_i^k s_j^l = \lambda_{i,j} \text{ (le composant } \lambda \text{ pour le carré entre } p_{i,j}, p_{i+1,j}, p_{i+1,j+1}, p_{i,j+1})$$

$$\begin{aligned} P_{\lambda_{i,j}}(t_i, s_j) &= a_{\lambda_{0,0,i,j}} t_i^0 s_j^0 + a_{\lambda_{0,1,i,j}} t_i^0 s_j^1 + a_{\lambda_{0,2,i,j}} t_i^0 s_j^2 + a_{\lambda_{0,3,i,j}} t_i^0 s_j^3 \\ &+ a_{\lambda_{1,0,i,j}} t_i^1 s_j^0 + a_{\lambda_{1,1,i,j}} t_i^1 s_j^1 + a_{\lambda_{1,2,i,j}} t_i^1 s_j^2 + a_{\lambda_{1,3,i,j}} t_i^1 s_j^3 \\ &+ a_{\lambda_{2,0,i,j}} t_i^2 s_j^0 + a_{\lambda_{2,1,i,j}} t_i^2 s_j^1 + a_{\lambda_{2,2,i,j}} t_i^2 s_j^2 + a_{\lambda_{2,3,i,j}} t_i^2 s_j^3 \\ &+ a_{\lambda_{3,0,i,j}} t_i^3 s_j^0 + a_{\lambda_{3,1,i,j}} t_i^3 s_j^1 + a_{\lambda_{3,2,i,j}} t_i^3 s_j^2 + a_{\lambda_{3,3,i,j}} t_i^3 s_j^3 = \lambda_{i,j} \end{aligned}$$

la surface interpolée sur un carré $(p_{i,j}, p_{i+1,j}, p_{i+1,j+1}, p_{i,j+1})$ est donnée par

$$P_{i,j}(u, v) = \begin{pmatrix} P_{x_{i,j}}(t_i, s_j) = P_{x_{i,j}}(f_i(u), g_j(v)) \\ P_{y_{i,j}}(t_i, s_j) = P_{y_{i,j}}(f_i(u), g_j(v)) \\ P_{z_{i,j}}(t_i, s_j) = P_{z_{i,j}}(f_i(u), g_j(v)) \end{pmatrix}$$

$$t_i = f_i(u) = u - i \text{ et } s_j = g_j(v) = v - j \mid f_i(c_i) = 0, f_i(d_i) = 1, g_j(e_j) = 0, g_j(h_j) = 1$$

$$\frac{dt_i}{du} = \frac{df_i}{du} = \frac{ds_j}{dv} = \frac{dg_j}{dv} = 1 \text{ pour } u, v \in I_{i,j} = [c_i, d_i] \times [e_j, h_j] \text{ pour } i = 0, \dots, m \text{ et } j = 0, \dots, n \text{ et pour } \lambda \in \{x, y, z\}$$

les dérivés dans les directions u, v et $u v$

$$P_{u \lambda_{i,j}}(t_i, s_j) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 k a_{\lambda_{k,l,i,j}} t_i^{k-1} s_j^l$$

$$\begin{aligned} P_{u \lambda_{i,j}}(t_i, s_j) &= a_{\lambda_{1,0,i,j}} t_i^0 s_j^0 + a_{\lambda_{1,1,i,j}} t_i^0 s_j^1 + a_{\lambda_{1,2,i,j}} t_i^0 s_j^2 + a_{\lambda_{1,3,i,j}} t_i^0 s_j^3 + 2 a_{\lambda_{2,0,i,j}} t_i^1 s_j^0 \\ &+ 2 a_{\lambda_{2,1,i,j}} t_i^1 s_j^1 + 2 a_{\lambda_{2,2,i,j}} t_i^1 s_j^2 + 2 a_{\lambda_{2,3,i,j}} t_i^1 s_j^3 \\ &+ 3 a_{\lambda_{3,0,i,j}} t_i^2 s_j^0 + 3 a_{\lambda_{3,1,i,j}} t_i^2 s_j^1 + 3 a_{\lambda_{3,2,i,j}} t_i^2 s_j^2 + 3 a_{\lambda_{3,3,i,j}} t_i^2 s_j^3 \end{aligned}$$

$$P_{v \lambda_{i,j}}(t_i, s_j) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 l a_{\lambda_{k,l,i,j}} t_i^k s_j^{l-1}$$

$$\begin{aligned} P_{v \lambda_{i,j}}(t_i, s_j) &= a_{\lambda_{0,1,i,j}} t_i^0 s_j^0 + 2 a_{\lambda_{0,2,i,j}} t_i^0 s_j^1 + 3 a_{\lambda_{0,3,i,j}} t_i^0 s_j^2 \\ &+ a_{\lambda_{1,1,i,j}} t_i^1 s_j^0 + 2 a_{\lambda_{1,2,i,j}} t_i^1 s_j^1 + 3 a_{\lambda_{1,3,i,j}} t_i^1 s_j^2 \\ &+ a_{\lambda_{2,1,i,j}} t_i^2 s_j^0 + 2 a_{\lambda_{2,2,i,j}} t_i^2 s_j^1 + 3 a_{\lambda_{2,3,i,j}} t_i^2 s_j^2 \\ &+ a_{\lambda_{3,1,i,j}} t_i^3 s_j^0 + 2 a_{\lambda_{3,2,i,j}} t_i^3 s_j^1 + 3 a_{\lambda_{3,3,i,j}} t_i^3 s_j^2 \end{aligned}$$

$$P_{u v \lambda_{i,j}}(t_i, s_j) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 k l a_{\lambda_{k,l,i,j}} t_i^{k-1} s_j^{l-1}$$

$$\begin{aligned} P_{u v \lambda_{i,j}}(t_i, s_j) &= a_{\lambda_{1,1,i,j}} t_i^0 s_j^0 + 2 a_{\lambda_{1,2,i,j}} t_i^0 s_j^1 + 3 a_{\lambda_{1,3,i,j}} t_i^0 s_j^2 \\ &+ 2 a_{\lambda_{2,1,i,j}} t_i^1 s_j^0 + 4 a_{\lambda_{2,2,i,j}} t_i^1 s_j^1 + 6 a_{\lambda_{2,3,i,j}} t_i^1 s_j^2 \\ &+ 3 a_{\lambda_{3,1,i,j}} t_i^2 s_j^0 + 6 a_{\lambda_{3,2,i,j}} t_i^2 s_j^1 + 9 a_{\lambda_{3,3,i,j}} t_i^2 s_j^2 \end{aligned}$$

Maintenant, nous allons montrer le premier exemple concret de la construction d'une surface interpolée travers des points discrets, comme nous l'avons mentionné ci-dessus, il y aura deux autres types de surfaces d'interpolation: les surfaces de Bézier et les surfaces NURBS. La spline bicubique ne se propage pas dans les pratiques architecturales autant que les Bézier et les NURBS, mais dans cette recherche, nous allons l'utiliser en raison de sa bonne précision.

Itération à travers 4×4 points en utilisant la spline bicubique

$$\Gamma = \{p_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}) \in \mathbb{R}^3, \text{ pour } i = 1, \dots, m \text{ et } j = 1, \dots, n\}$$

est un ensemble de $m \times n$ points de données distincts

$$\begin{aligned} p_{1,1} &= (0, 0, 0), p_{1,2} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), p_{1,3} = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{4}\right), p_{1,4} = \left(0, 3, \frac{1}{4}\right), \\ p_{2,1} &= \left(1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), p_{2,2} = (1, 1, 0), p_{2,3} = \left(1, 2, -\frac{1}{4}\right), p_{2,4} = \left(1, \frac{5}{2}, 0\right) \\ p_{3,1} &= (2, 0, 0), p_{3,2} = \left(2, 1, \frac{1}{2}\right), p_{3,3} = (2, 2, 0), p_{3,4} = \left(2, 3, \frac{1}{4}\right), \\ p_{4,1} &= \left(3, 0, \frac{1}{4}\right), p_{4,2} = \left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{4}\right), p_{4,3} = \left(3, 2, \frac{1}{2}\right) \text{ et } p_{4,4} = \left(3, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

les tangentes aux extrémités

$$S_u = (1, 0, 0), S_v = (0, 1, 0), S_{uv} = (1, 1, 0), E_u = (1, 0, 0), E_v = (0, 1, 0) \text{ et } E_{uv} = (1, 1, 0)$$

facteur d'échelle $t_\rho = \frac{1}{2}$

$$a_{k,l,i,j} = (a_{x_{k,l,i,j}}, a_{y_{k,l,i,j}}, a_{z_{k,l,i,j}}), P_{i,j}(t_i, s_j) = (P_{x_{i,j}}(t_i, s_j), P_{y_{i,j}}(t_i, s_j), P_{z_{i,j}}(t_i, s_j))$$

$$P_{u_{i,j}}(t_i, s_j) = (P_{u_{x_{i,j}}}(t_i, s_j), P_{u_{y_{i,j}}}(t_i, s_j), P_{u_{z_{i,j}}}(t_i, s_j))$$

$$P_{v_{i,j}}(t_i, s_j) = (P_{v_{x_{i,j}}}(t_i, s_j), P_{v_{y_{i,j}}}(t_i, s_j), P_{v_{z_{i,j}}}(t_i, s_j))$$

$$P_{uv_{i,j}}(t_i, s_j) = (P_{uv_{x_{i,j}}}(t_i, s_j), P_{uv_{y_{i,j}}}(t_i, s_j), P_{uv_{z_{i,j}}}(t_i, s_j))$$

$m = 4$ et $n = 4$

nous itérons pour $i = 1, \dots, m - 1$ et $j = 1, \dots, n - 1$

Conditions pour les tangentes

$$\text{si } i = 1, P_{u_{i,j}}(0, 0) = t_\rho S_u \text{ sinon } P_{u_{i,j}}(0, 0) = t_\rho(p_{i+1,j} - p_{i-1,j})$$

$$\text{et } P_{u_{i,j}}(0, 1) = t_\rho S_u \text{ sinon } P_{u_{i,j}}(0, 1) = t_\rho(p_{i+1,j+1} - p_{i-1,j+1})$$

$$\text{si } i = m - 1, P_{u_{i,j}}(1, 0) = t_\rho E_u \text{ sinon } P_{u_{i,j}}(1, 0) = t_\rho(p_{i+2,j} - p_{i,j})$$

$$\text{et } P_{u_{i,j}}(1, 1) = t_\rho E_u \text{ sinon } P_{u_{i,j}}(1, 1) = t_\rho(p_{i+2,j+1} - p_{i,j+1})$$

$$\text{si } j = 1, P_{v_{i,j}}(0, 0) = t_\rho S_v \text{ sinon } P_{v_{i,j}}(0, 0) = t_\rho(p_{i,j+1} - p_{i,j-1})$$

$$\text{et } P_{v_{i,j}}(1, 0) = t_\rho S_v \text{ sinon } P_{v_{i,j}}(1, 0) = t_\rho(p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j-1})$$

$$\text{si } j = n - 1, P_{v_{i,j}}(0, 1) = t_\rho E_v \text{ sinon } P_{v_{i,j}}(0, 1) = t_\rho(p_{i,j+2} - p_{i,j})$$

$$\text{et } P_{v_{i,j}}(1, 1) = t_\rho E_v \text{ sinon } P_{v_{i,j}}(1, 1) = t_\rho(p_{i+1,j+2} - p_{i+1,j})$$

$$\text{si } i = 1 \vee j = 1, P_{uv_{i,j}}(0, 0) = t_\rho S_{uv} \text{ sinon } P_{uv_{i,j}}(0, 0) = t_\rho(p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j-1} - p_{i-1,j+1} - p_{i-1,j-1})$$

$$\text{si } i = m - 1 \vee j = 1, P_{uv_{i,j}}(1, 0) = t_\rho S_{uv} \text{ sinon } P_{uv_{i,j}}(1, 0) = t_\rho(p_{i+2,j+1} - p_{i+2,j-1} - p_{i,j+1} - p_{i,j-1})$$

$$\text{si } i = 1 \vee j = n - 1, P_{uv_{i,j}}(0, 1) = t_\rho S_{uv} \text{ sinon } P_{uv_{i,j}}(0, 1) = t_\rho(p_{i+1,j+2} - p_{i+1,j} - p_{i-1,j+2} - p_{i-1,j})$$

$$\text{si } i = m - 1 \vee j = n - 1, P_{uv_{i,j}}(1, 1) = t_\rho E_{uv} \text{ sinon } P_{uv_{i,j}}(1, 1) = t_\rho(p_{i+2,j+2} - p_{i+2,j} - p_{i,j+2} - p_{i,j})$$

Le système est donnée par

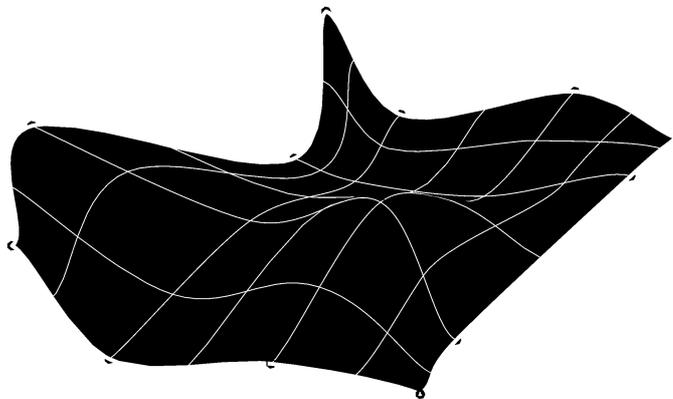
$$\begin{pmatrix} ax_{0,0,i,j} & ay_{0,0,i,j} & az_{0,0,i,j} \\ ax_{0,1,i,j} & ay_{0,1,i,j} & az_{0,1,i,j} \\ ax_{0,2,i,j} & ay_{0,2,i,j} & az_{0,2,i,j} \\ ax_{0,3,i,j} & ay_{0,3,i,j} & az_{0,3,i,j} \\ ax_{1,0,i,j} & ay_{1,0,i,j} & az_{1,0,i,j} \\ ax_{1,1,i,j} & ay_{1,1,i,j} & az_{1,1,i,j} \\ ax_{1,2,i,j} & ay_{1,2,i,j} & az_{1,2,i,j} \\ ax_{1,3,i,j} & ay_{1,3,i,j} & az_{1,3,i,j} \\ ax_{2,0,i,j} & ay_{2,0,i,j} & az_{2,0,i,j} \\ ax_{2,1,i,j} & ay_{2,1,i,j} & az_{2,1,i,j} \\ ax_{2,2,i,j} & ay_{2,2,i,j} & az_{2,2,i,j} \\ ax_{2,3,i,j} & ay_{2,3,i,j} & az_{2,3,i,j} \\ ax_{3,0,i,j} & ay_{3,0,i,j} & az_{3,0,i,j} \\ ax_{3,1,i,j} & ay_{3,1,i,j} & az_{3,1,i,j} \\ ax_{3,2,i,j} & ay_{3,2,i,j} & az_{3,2,i,j} \\ ax_{3,3,i,j} & ay_{3,3,i,j} & az_{3,3,i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 3 & 6 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_{x_{i,j}}(0,0) & P_{y_{i,j}}(0,0) & P_{z_{i,j}}(0,0) \\ P_{x_{i,j}}(1,0) & P_{y_{i,j}}(1,0) & P_{z_{i,j}}(1,0) \\ P_{x_{i,j}}(0,1) & P_{y_{i,j}}(0,1) & P_{z_{i,j}}(0,1) \\ P_{x_{i,j}}(1,1) & P_{y_{i,j}}(1,1) & P_{z_{i,j}}(1,1) \\ P_{u_{x_{i,j}}}(0,0) & P_{u_{y_{i,j}}}(0,0) & P_{u_{z_{i,j}}}(0,0) \\ P_{u_{x_{i,j}}}(1,0) & P_{u_{y_{i,j}}}(1,0) & P_{u_{z_{i,j}}}(1,0) \\ P_{u_{x_{i,j}}}(0,1) & P_{u_{y_{i,j}}}(0,1) & P_{u_{z_{i,j}}}(0,1) \\ P_{u_{x_{i,j}}}(1,1) & P_{u_{y_{i,j}}}(1,1) & P_{u_{z_{i,j}}}(1,1) \\ P_{v_{x_{i,j}}}(0,0) & P_{v_{y_{i,j}}}(0,0) & P_{v_{z_{i,j}}}(0,0) \\ P_{v_{x_{i,j}}}(1,0) & P_{v_{y_{i,j}}}(1,0) & P_{v_{z_{i,j}}}(1,0) \\ P_{v_{x_{i,j}}}(0,1) & P_{v_{y_{i,j}}}(0,1) & P_{v_{z_{i,j}}}(0,1) \\ P_{v_{x_{i,j}}}(1,1) & P_{v_{y_{i,j}}}(1,1) & P_{v_{z_{i,j}}}(1,1) \\ P_{uv_{x_{i,j}}}(0,0) & P_{uv_{y_{i,j}}}(0,0) & P_{uv_{z_{i,j}}}(0,0) \\ P_{uv_{x_{i,j}}}(1,0) & P_{uv_{y_{i,j}}}(1,0) & P_{uv_{z_{i,j}}}(1,0) \\ P_{uv_{x_{i,j}}}(0,1) & P_{uv_{y_{i,j}}}(0,1) & P_{uv_{z_{i,j}}}(0,1) \\ P_{uv_{x_{i,j}}}(1,1) & P_{uv_{y_{i,j}}}(1,1) & P_{uv_{z_{i,j}}}(1,1) \end{pmatrix}$$

$t_i = f_i(u) = u - (i - 1)$ et $s_j = g_j(v) = v - (j - 1)$, $P_{i,j}(u, v) = (P_{x_{i,j}}(u, v), P_{y_{i,j}}(u, v), P_{z_{i,j}}(u, v))$ où $P_{\lambda_{i,j}}(u, v) =$

$$\begin{aligned}
 & a\lambda_{0,0,i,j} + a\lambda_{0,1,i,j}(v - (j - 1)) + a\lambda_{0,2,i,j}(v - (j - 1))^2 + a\lambda_{0,3,i,j}(v - (j - 1))^3 + a\lambda_{1,0,i,j}(u - (i - 1)) + \\
 & a\lambda_{1,1,i,j}(u - (i - 1))(v - (j - 1)) + a\lambda_{1,2,i,j}(u - (i - 1))(v - (j - 1))^2 + a\lambda_{1,3,i,j}(u - (i - 1))(v - (j - 1))^3 + \\
 & a\lambda_{2,0,i,j}(u - (i - 1))^2 + a\lambda_{2,1,i,j}(u - (i - 1))^2(v - (j - 1)) + \\
 & a\lambda_{2,2,i,j}(u - (i - 1))^2(v - (j - 1))^2 + a\lambda_{2,3,i,j}(u - (i - 1))^2(v - (j - 1))^3 + \\
 & a\lambda_{3,0,i,j}(u - (i - 1))^3 + a\lambda_{3,1,i,j}(u - (i - 1))^3(v - (j - 1)) + \\
 & a\lambda_{3,2,i,j}(u - (i - 1))^3(v - (j - 1))^2 + a\lambda_{3,3,i,j}(u - (i - 1))^3(v - (j - 1))^3
 \end{aligned}$$

l' interpolant $P(u, v)$ est égal à

si $0 \leq u < 1 \wedge 0 \leq v < 1$, $P(u, v) = P_{1,1}(u, v)$, si $0 \leq u < 1 \wedge 1 \leq v < 2$,
 $P(u, v) = P_{1,2}(u, v)$, si $0 \leq u < 1 \wedge 2 \leq v \leq 3$, $P(u, v) = P_{1,3}(u, v)$
si $1 \leq u < 2 \wedge 0 \leq v < 1$, $P(u, v) = P_{2,1}(u, v)$, si $1 \leq u < 2 \wedge 1 \leq v < 2$,
 $P(u, v) = P_{2,2}(u, v)$, si $1 \leq u < 2 \wedge 2 \leq v \leq 3$, $P(u, v) = P_{2,3}(u, v)$
si $2 \leq u \leq 3 \wedge 0 \leq v < 1$, $P(u, v) = P_{3,1}(u, v)$, si $2 \leq u \leq 3 \wedge 1 \leq v < 2$,
 $P(u, v) = P_{3,2}(u, v)$, si $2 \leq u \leq 3 \wedge 2 \leq v \leq 3$, $P(u, v) = P_{3,3}(u, v)$



Représentation d'une itération à travers 4x4 points en utilisant la spline bicubique

Construire une surface à partir de données collectées

Maintenant que nous avons expliqué comment construire une surface bicubique à partir d'un ensemble de points donnés, nous allons montrer comment il pourrait être très utile pour le processus de conception architecturale, à savoir la création d'un modèle mathématique d'un certain contexte.

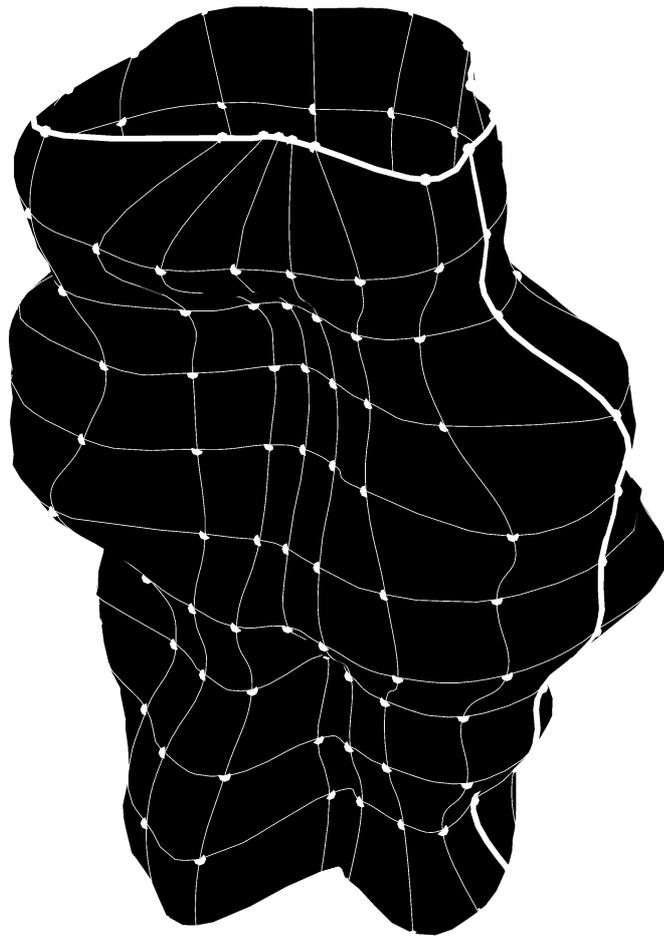


Collecte des points de données de la surface de la statue

L'ensemble des 17x11 points de données

```
pts = [{"x": 7.4, "y": 0, "z": 0}, {"x": 5.9, "y": 0, "z": 3.45575}, {"x": 8.65, "y": 0, "z": 6.9115}, {"x": 9.25, "y": 0, "z": 10.3673}, {"x": 11.65, "y": 0, "z": 13.823}, {"x": 11.95, "y": 0, "z": 17.2788}, {"x": 12.65, "y": 0, "z": 20.7345}, {"x": 12.65, "y": 0, "z": 24.1903}, {"x": 7.95, "y": 0, "z": 27.646}, {"x": 7.6, "y": 0, "z": 31.1018}, {"x": 7.1, "y": 0, "z": 34.5575}, {"x": 6.59937, "y": 2.73355, "z": 0}, {"x": 6.6376, "y": 2.74938, "z": 3.45575}, {"x": 7.99156, "y": 3.31021, "z": 6.9115}, {"x": 8.03165, "y": 3.32682, "z": 10.3673}, {"x": 12.2664, "y": 5.08089, "z": 13.823}, {"x": 11.7128, "y": 4.85161, "z": 17.2788}, {"x": 10.5399, "y": 4.36578, "z": 20.7345}, {"x": 11.0146, "y": 4.5624, "z": 24.1903}, {"x": 7.42396, "y": 3.0751, "z": 27.646}, {"x": 7.21927, "y": 2.99032, "z": 31.1018}, {"x": 6.91556, "y": 2.86452, "z": 34.5575}, {"x": 4.98519, "y": 4.98519, "z": 0}, {"x": 4.87878, "y": 4.87878, "z": 3.45575}, {"x": 4.52606, "y": 4.52606, "z": 6.9115}, {"x": 5.05635, "y": 5.05635, "z": 10.3673}, {"x": 5.76382, "y": 5.76382, "z": 13.823}, {"x": 6.25869, "y": 6.25869, "z": 17.2788}, {"x": 5.41066, "y": 5.41066, "z": 20.7345}, {"x": 5.87011, "y": 5.87011, "z": 24.1903}, {"x": 5.26807, "y": 5.26807, "z": 27.646}, {"x": 5.4447, "y": 5.4447, "z": 31.1018}, {"x": 5.02046, "y": 5.02046, "z": 34.5575}, {"x": 2.41091, "y": 5.82044, "z": 0}, {"x": 2.31523, "y": 5.58947, "z": 3.45575}, {"x": 1.68381, "y": 4.06507, "z": 6.9115}, {"x": 1.16718, "y": 2.81783, "z": 10.3673}, {"x": 1.07151, "y": 2.58686, "z": 13.823}, {"x": 2.31523, "y": 5.58947, "z": 17.2788}, {"x": 2.71705, "y": 6.55954, "z": 20.7345}, {"x": 2.87013, "y": 6.9291, "z": 24.1903}, {"x": 2.9658, "y": 7.16007, "z": 27.646}, {"x": 3.138, "y": 7.57581, "z": 31.1018}, {"x": 3.46329, "y": 8.36111, "z": 34.5575}, {"x": 0, "y": 6.05, "z": 0}, {"x": 0, "y": 5.2, "z": 3.45575}, {"x": 0, "y": 3.4, "z": 6.9115}, {"x": 0, "y": 2.05, "z": 10.3673}, {"x": 0, "y": 1.8, "z": 13.823}, {"x": 0, "y": 3.25, "z": 17.2788}, {"x": 0, "y": 6.05, "z": 20.7345}, {"x": 0, "y": 5.85, "z": 24.1903}, {"x": 0, "y": 7.75, "z": 27.646}, {"x": 0, "y": 8.35, "z": 31.1018}, {"x": 0, "y": 10.75, "z": 34.5575}, {"x": -1.16718, "y": 2.81783, "z": 0}, {"x": -1.39679, "y": 3.37216, "z": 3.45575}, {"x": -1.10978, "y": 2.67925, "z": 6.9115}, {"x": -0.650562, "y": 1.5706, "z": 10.3673}, {"x": -0.593159, "y": 1.43201, "z": 13.823}, {"x": -1.24372, "y": 3.00261, "z": 17.2788}, {"x": -2.41091, "y": 5.82044, "z": 20.7345}, {"x": -2.1813, "y": 5.26611, "z": 24.1903}, {"x": -2.58311, "y": 6.23619, "z": 27.646}, {"x": -3.17627, "y": 7.6682, "z": 31.1018}, {"x": -4.13298, "y": 9.9779, "z": 34.5575}, {"x": -2.80312, "y": 2.20312, "z": 0}, {"x": -2.22028, "y": 1.02028, "z": 3.45575}, {"x": -2.94454, "y": 2.34454, "z": 6.9115}, {"x": -2.09602, "y": 1.09602, "z": 10.3673}, {"x": -3.27279, "y": 2.27279, "z": 13.823}, {"x": -3.50018, "y": 3.50018, "z": 17.2788}, {"x": -7.17713, "y": 7.17713, "z": 20.7345}, {"x": -5.26795, "y": 5.26795, "z": 24.1903}, {"x": -5.51543, "y": 5.51543, "z": 27.646}, {"x": -7.03571, "y": 7.03571, "z": 31.1018}, {"x": -8.3085, "y": 8.3085, "z": 34.5575}, {"x": -7.52962, "y": 3.11887, "z": 0}, {"x": -4.98634, "y": 1.32277, "z": 3.45575}, {"x": -8.82305, "y": 3.65463, "z": 6.9115}, {"x": -3.70918, "y": 1.30796, "z": 10.3673}, {"x": -6.28238, "y": 2.60225, "z": 13.823}, {"x": -6.8829, "y": 2.85099, "z": 17.2788}, {"x": -11.2251, "y": 4.6496, "z": 20.7345}, {"x": -9.28499, "y": 3.84597, "z": 24.1903}, {"x": -9.05402, "y": 3.7503, "z": 27.646}, {"x": -10.3013, "y": 4.26692, "z": 31.1018}, {"x": -9.00783, "y": 3.73116, "z": 34.5575}, {"x": -9.05, "y": 0, "z": 0}, {"x": -9.55, "y": 0, "z": 3.45575}, {"x": -11.3, "y": 0, "z": 6.9115}, {"x": -11.55, "y": 0, "z": 10.3673}, {"x": -11.05, "y": 0, "z": 13.823}, {"x": -13.45, "y": 0, "z": 17.2788}, {"x": -14.35, "y": 0, "z": 20.7345}, {"x": -13.55, "y": 0, "z": 24.1903}, {"x": -10.2, "y": 0, "z": 27.646}, {"x": -12.05, "y": 0, "z": 31.1018}, {"x": -9.85, "y": 0, "z": 34.5575}, {"x": -9.05402, "y": -3.7503, "z": 0}, {"x": -8.82305, "y": -3.65463, "z": 3.45575}, {"x": -7.76059, "y": -3.21454, "z": 6.9115}, {"x": -6.28238, "y": -2.60225, "z": 10.3673}, {"x": -7.06768, "y": -2.92753, "z": 13.823}, {"x": -10.3013, "y": -4.26692, "z": 17.2788}, {"x": -8.82305, "y": -3.65463, "z": 20.7345}, {"x": -7.6682, "y": -3.17627, "z": 24.1903}, {"x": -8.82305, "y": -3.65463, "z": 27.646}, {"x": -9.65454, "y": -3.99904, "z": 31.1018}, {"x": -8.73066, "y": -3.61636, "z": 34.5575}, {"x": -6.47003, "y": -6.47003, "z": 0}, {"x": -6.39932, "y": -6.39932, "z": 3.45575}, {"x": -5.58614, "y": -5.58614, "z": 6.9115}, {"x": -4.10122, "y": -4.10122, "z": 10.3673}, {"x": -4.20729, "y": -4.20729, "z": 13.823}, {"x": -3.6416, "y": -3.6416, "z": 17.2788}, {"x": -4.09602, "y": -2.79602, "z": 20.7345}, {"x": -4.06569, "y": -2.56569, "z": 24.1903}, {"x": -3.51127, "y": -3.51127, "z": 27.646}, {"x": -5.69221, "y": -5.69221, "z": 31.1018}, {"x": -2.01525, "y": -2.01525, "z": 34.5575}, {"x": -3.40588, "y": -8.22253, "z": 0}, {"x": -3.17627, "y": -7.6682, "z": 3.45575}, {"x": -2.50658, "y": -6.05141, "z": 6.9115}, {"x": -1.79861, "y": -4.34223, "z": 10.3673}, {"x": -1.97082, "y": -4.75798, "z": 13.823}, {"x": -1.35853, "y": -3.27977, "z": 17.2788}, {"x": -1.49749, "y": -1.50104, "z": 20.7345}, {"x": -1.24874, "y": -1.00052, "z": 24.1903}, {"x": -1.24623, "y": -2.20157, "z": 27.646}, {"x": -2.64052, "y": -6.37477, "z": 31.1018}, {"x": -0.593159, "y": -1.43201, "z": 34.5575}, {"x": 0, "y": -3.15, "z": 0}, {"x": 0, "y": -1.8, "z": 3.45575}, {"x": 0, "y": -2.4, "z": 6.9115}, {"x": 0, "y": -0.95, "z": 10.3673}, {"x": 0, "y": -4.05, "z": 13.823}, {"x": 0, "y": -3.45, "z": 17.2788}, {"x": 0, "y": -1.35, "z": 20.7345}, {"x": 0, "y": -0.65, "z": 24.1903}, {"x": 0, "y": -1.75, "z": 27.646}, {"x": 0, "y": -5.45, "z": 31.1018}, {"x": 0, "y": -1.35, "z": 34.5575}, {"x": 1.35853, "y": -3.27977, "z": 0}, {"x": 1.5271, "y": -1.75537, "z": 3.45575}, {"x": 1.51844, "y": -2.41731, "z": 6.9115}, {"x": 1.58268, "y": -2.02388, "z": 10.3673}, {"x": 1.93255, "y": -4.66559, "z": 13.823}, {"x": 1.74121, "y": -4.20365, "z": 17.2788}, {"x": 1.63143, "y": -2.0244, "z": 20.7345}, {"x": 1.58701, "y": -1.39291, "z": 24.1903}, {"x": 1.5271, "y": -2.25537, "z": 27.646}, {"x": 2.08562, "y": -5.03514, "z": 31.1018}, {"x": 0.593159, "y": -1.43201, "z": 34.5575}, {"x": 5.33862, "y": -5.33862, "z": 0}, {"x": 3.80399, "y": -2.50399, "z": 3.45575}, {"x": 3.55894, "y": -3.0894, "z": 6.9115}, {"x": 3.68841, "y": -3.08841, "z": 10.3673}, {"x": 5.58711, "y": -5.58711, "z": 13.823}, {"x": 4.98637, "y": -4.98637, "z": 17.2788}, {"x": 3.5712, "y": -3.2712, "z": 20.7345}, {"x": 3.51011, "y": -2.31011, "z": 24.1903}, {"x": 3.55876, "y": -3.05876, "z": 27.646}, {"x": 4.7025, "y": -4.7025, "z": 31.1018}, {"x": 1.62758, "y": -1.62758, "z": 34.5575}, {"x": 7.35095, "y": -3.04486, "z": 0}, {"x": 5.49045, "y": -2.27422, "z": 3.45575}, {"x": 7.04219, "y": -2.91697, "z": 6.9115}, {"x": 7.04272, "y": -2.91719, "z": 10.3673}, {"x": 4.9738, "y": -3.93394, "z": 13.823}, {"x": 9.14163, "y": -3.78659, "z": 17.2788}, {"x": 10.1048, "y": -4.18555, "z": 20.7345}, {"x": 6.9007, "y": -2.85836, "z": 24.1903}, {"x": 5.84168, "y": -2.4197, "z": 27.646}, {"x": 6.98193, "y": -2.89201, "z": 31.1018}, {"x": 6.5991, "y": -2.73344, "z": 34.5575}, {"x": 7.4, "y": 0, "z": 0}, {"x": 5.9, "y": 0, "z": 3.45575}, {"x": 8.65, "y": 0, "z": 6.9115}, {"x": 9.25, "y": 0, "z": 10.3673}, {"x": 11.65, "y": 0, "z": 13.823}, {"x": 11.95, "y": 0, "z": 17.2788}, {"x": 12.65, "y": 0, "z": 20.7345}, {"x": 12.65, "y": 0, "z": 24.1903}, {"x": 7.95, "y": 0, "z": 27.646}, {"x": 7.6, "y": 0, "z": 31.1018}, {"x": 7.1, "y": 0, "z": 34.5575}],
```

Or, ces points peuvent être utilisés par la spline bicubique pour générer la surface d'interpolation suivante. Par exemple, pour créer une structure de robe autour d'une statue (ou un corps humain) qui est précisément adapté à ce corps, nous aurons besoin de définir une représentation de la surface de ce corps, mais nous pouvons recueillir que des points discrets de nombre fini de la surface (normalement effectué à l'aide d'un scanner 3D). Ici, la spline bicubique nous offre un moyen pour interpoler ces points discrets et en nous fournissant une surface paramétrique continue, qui peut s'approcher de plus en plus la surface de la statue en recueillant plus de points de données. Dans l'exemple suivant, nous allons utiliser un nombre relativement faible de points collectés de la surface de la statue, afin de créer une surface d'interpolation spline bicubique, qui en elle-même va être utile plus tard pour l'adaptation de la conception.



Représentation d'une l'interpolation de points de données en utilisant la spline bicubique

Cet exemple est cruciale, car elle nous permet de créer une surface paramétrique à partir des points discrets par interpolation, ce qui signifie que nous pouvons commencer à relier nos constructions géométriques qui sont continu aux données du monde physique qui sont toujours discrètes. Et avec cette surface d'approximation à notre disposition, nous montrerons comment l'adapter à une autre surface, en utilisant par exemple des transformations homotopes, tout cela est possible parce que nous avons transformé les points discrets à une surface continue. Après cela, nous allons créer des éléments architecturaux reliant ces deux surfaces, des éléments qui pourraient être utilisés pour les attacher ensemble d'une manière structurelle.

4.3.3. Bézier et NURBS

Après avoir défini les splines cubiques et bicubiques nous allons maintenant définir la courbe de Bézier et la surface de Bézier qui sont un type important de méthodes d'approximation. Les courbes et surfaces de Bézier sont fréquemment utilisés dans l'infographie et dans autres domaines similaires beaucoup plus que les splines cubiques et bicubiques en particulier dans les systèmes de logiciels de CAO. Courbes et surfaces de Bézier, sont entièrement contenues dans l'enveloppe convexe de ses points de contrôle. Pour définir la fonction de Bézier, nous devons définir le polynôme de Bernstein qui est une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein de base, puis nous définissons la courbe et surface de Bézier et leurs versions rationnelles. Les versions rationnelles, ajoute simplement des poids réglables pour fournir des approximations plus proches de formes arbitraires.

Polynôme de Bernstein [4]

un binôme est un polynôme à deux termes (la somme de deux monômes) avec le cas particulier donné par

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k$$

binôme élevé à la $n - i$ ème puissance est donnée par $(x + y)^n =$

$$\binom{n}{0} x^n y^0 + \dots + \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \dots + \binom{n}{n} x^0 y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \text{ où le coefficient } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$B(x) = \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) \beta_k$, où β_k sont les coefficients de Bernstein et $b_{k,n}$ sont les $n +$

1 polynômes de Bernstein de base de degré n

où $b_{k,n}(x) = \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} x^k$, pour $k = 0, \dots, n$

Courbe de Bézier (rationnelle) [4]

$\Gamma = \{p_i \in \mathbb{R}^p, i = 0, \dots, n\}$ est un ensemble de $n + 1$ points de données

$B(t) = \sum_{i=0}^n b_{i,n}(t) p_i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i p_i$ est la courbe de Bézier pour Γ

$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i p_i w_i}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i w_i}$ est la courbe de Bézier rationnelle pour Γ et w_i sont les poids

Surface de Bézier (rationnelle) [4]

$\Gamma = \{p_{i,j} \in \mathbb{R}^p, i = 0, \dots, m \text{ et } j = 0, \dots, n\}$ est un ensemble de $(m + 1) \times (n + 1)$ points de données

$B(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i,m}(u) b_{j,n}(v) p_{i,j} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{i} (1-u)^{m-i} u^i \binom{n}{j} (1-v)^{n-j} v^j p_{i,j}$

est la surface de Bézier pour Γ

$$B(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{i} (1-u)^{m-i} u^i \binom{n}{j} (1-v)^{n-j} v^j p_{i,j} w_{i,j}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{i} (1-u)^{m-i} u^i \binom{n}{j} (1-v)^{n-j} v^j p_{i,j} w_{i,j}}$$

est la surface de Bézier rationnelle pour Γ et $w_{i,j}$ sont les poids

en fixant le paramètre u ou v (i.e. $u = u_0$ ou $v = v_0$) la surface

de Bézier se réduit à une courbe de Bézier (courbes isoparamétriques)

$B(u, v_0) = \sum_{i=0}^m c_i b_{i,m}(u)$, $c_i = \sum_{j=0}^n b_{j,n}(v_0) p_{i,j}$ et $B(u_0, v) = \sum_{j=0}^n c_j b_{j,n}(v)$, $c_j = \sum_{i=0}^m b_{i,m}(u_0) p_{i,j}$

Approximation à travers 4 points en utilisant la courbe de Bézier (rationnelle)

$\Gamma = \{p_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}) \in \mathbb{R}^3, \text{ pour } i = 1, \dots, n\}$ est un ensemble de n points de données distincts

$$p_1 = (0, 0, 0), p_2 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), p_3 = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{4}\right) \text{ et } p_4 = \left(0, 3, \frac{1}{4}\right)$$

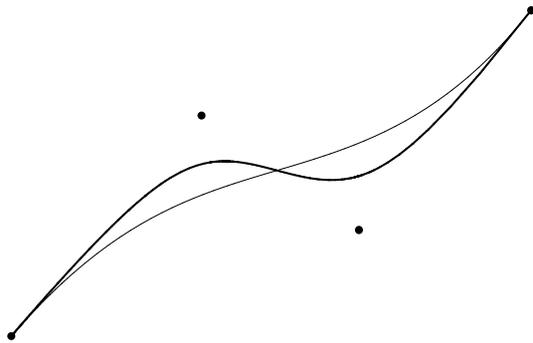
et les poids sont $w_1 = 1, w_2 = 3, w_3 = 3$ et $w_4 = 1$

la courbe de Bézier pour Γ

$$B(t) = 3(1-t)^2 t + 6(1-t)t^2 + 3t^3, 6(1-t)^2 t + 3(1-t)t^2 + 2t^3, t^3$$

la courbe de Bézier rationnelle pour Γ

$$B(t) = \frac{9(1-t)^2 t + 6(1-t)t^2 + 3t^3}{(1-t)^3 + 9(1-t)^2 t + 3(1-t)t^2 + t^3}, \frac{18(1-t)^2 t + 3(1-t)t^2 + 2t^3}{(1-t)^3 + 9(1-t)^2 t + 3(1-t)t^2 + t^3}, \frac{t^3}{(1-t)^3 + 9(1-t)^2 t + 3(1-t)t^2 + t^3}$$



Représentation d'une approximation à travers 4 points en utilisant une courbe de Bézier (rationnelle)

Approximation à travers 4x4 points utilisant les surface de Bézier (rationnelle)

$\Gamma = \{p_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}) \in \mathbb{R}^3, \text{ pour } i = 1, \dots, m \text{ et } j = 1, \dots, n\}$

est un ensemble de $m \times n$ points de données distincts

$$p_{1,1} = (0, 0, 0), p_{1,2} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), p_{1,3} = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{4}\right), p_{1,4} = \left(0, 3, \frac{1}{4}\right),$$

$$p_{2,1} = \left(1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), p_{2,2} = (1, 1, 0), p_{2,3} = \left(1, 2, -\frac{1}{4}\right), p_{2,4} = \left(1, \frac{5}{2}, 0\right)$$

$$p_{3,1} = (2, 0, 0), p_{3,2} = \left(2, 1, \frac{1}{2}\right), p_{3,3} = (2, 2, 0), p_{3,4} = \left(2, 3, \frac{1}{4}\right),$$

$$p_{4,1} = \left(3, 0, \frac{1}{4}\right), p_{4,2} = \left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{4}\right), p_{4,3} = \left(3, 2, \frac{1}{2}\right) \text{ et } p_{4,4} = \left(3, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

les poids sont

$$w_{1,1} = 1, w_{1,2} = 1, w_{1,3} = 1, w_{1,4} = 1, w_{2,1} = 1, w_{2,2} = 1, w_{2,3} = 1, w_{2,4} = 1$$

$$w_{3,1} = 1, w_{3,2} = 10, w_{3,3} = 1, w_{3,4} = 1, w_{4,1} = 1, w_{4,2} = 1, w_{4,3} = 1 \text{ et } w_{4,4} = 1$$

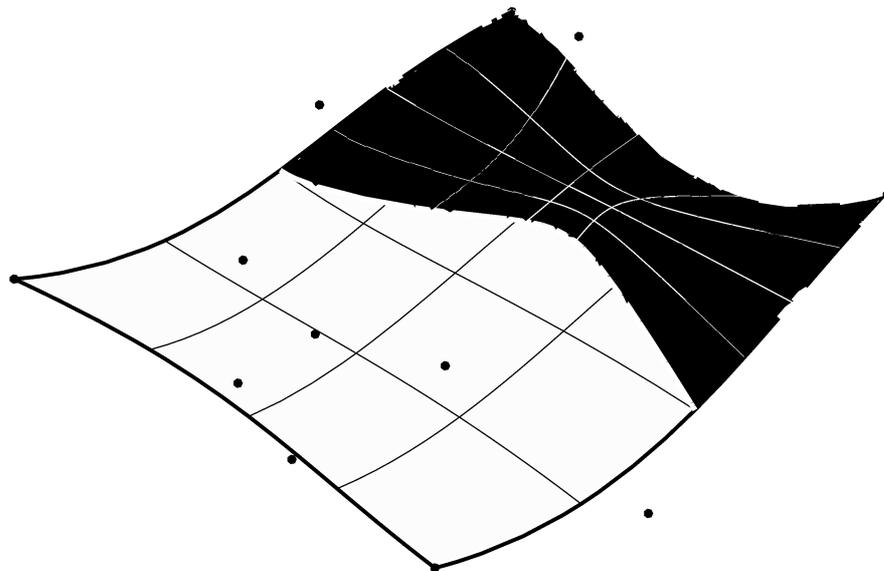
la surface de Bézier approximant Γ

$$\begin{aligned} B(u, v) = & 3(1-u)^2 u(1-v)^3 + 6(1-u)u^2(1-v)^3 + 3u^3(1-v)^3 - \frac{3}{4}(1-u)^3(1-v)^2 v + \\ & 9(1-u)^2 u(1-v)^2 v + 18(1-u)u^2(1-v)^2 v + \frac{15}{2}u^3(1-v)^2 v + \frac{3}{2}(1-u)^3(1-v)v^2 + \\ & 9(1-u)^2 u(1-v)v^2 + 18(1-u)u^2(1-v)v^2 + 9u^3(1-v)v^2 + 3(1-u)^2 uv^3 + 6(1-u)u^2 v^3 + 3u^3 v^3, \\ & -\frac{3}{4}(1-u)^2 u(1-v)^3 + \frac{3}{2}(1-u)^3(1-v)^2 v + 9(1-u)^2 u(1-v)^2 v + 9(1-u)u^2(1-v)^2 v + \\ & 3u^3(1-v)^2 v + 6(1-u)^3(1-v)v^2 + 18(1-u)^2 u(1-v)v^2 + 18(1-u)u^2(1-v)v^2 + \\ & 6u^3(1-v)v^2 + 3(1-u)^3 v^3 + \frac{15}{2}(1-u)^2 uv^3 + 9(1-u)u^2 v^3 + \frac{5u^3 v^3}{2}, \\ & -\frac{3}{4}(1-u)^2 u(1-v)^3 + \frac{1}{4}u^3(1-v)^3 + \frac{3}{2}(1-u)^3(1-v)^2 v + \frac{9}{2}(1-u)u^2(1-v)^2 v - \frac{3}{4}u^3(1-v)^2 v - \\ & \frac{3}{4}(1-u)^3(1-v)v^2 - \frac{9}{4}(1-u)^2 u(1-v)v^2 + \frac{3}{2}u^3(1-v)v^2 + \frac{1}{4}(1-u)^3 v^3 + \frac{3}{4}(1-u)u^2 v^3 + \frac{u^3 v^3}{2} \end{aligned}$$

la surface de Bézier rationnelle approximant Γ

$B(u, v) =$

$$\begin{aligned} & \left((3(1-u)^2 u(1-v)^3 + 6(1-u)u^2(1-v)^3 + 3u^3(1-v)^3 - \frac{3}{4}(1-u)^3(1-v)^2 v + 9(1-u)^2 u(1-v)^2 v + \right. \\ & \quad 180(1-u)u^2(1-v)^2 v + \frac{15}{2}u^3(1-v)^2 v + \frac{3}{2}(1-u)^3(1-v)v^2 + 9(1-u)^2 u(1-v)v^2 + \\ & \quad \left. 18(1-u)u^2(1-v)v^2 + 9u^3(1-v)v^2 + 3(1-u)^2 u v^3 + 6(1-u)u^2 v^3 + 3u^3 v^3 \right) / \\ & \left((1-u)^3(1-v)^3 + 3(1-u)^2 u(1-v)^3 + 3(1-u)u^2(1-v)^3 + u^3(1-v)^3 + \right. \\ & \quad 3(1-u)^3(1-v)^2 v + 9(1-u)^2 u(1-v)^2 v + 90(1-u)u^2(1-v)^2 v + \\ & \quad 3u^3(1-v)^2 v + 3(1-u)^3(1-v)v^2 + 9(1-u)^2 u(1-v)v^2 + 9(1-u)u^2(1-v)v^2 + \\ & \quad \left. 3u^3(1-v)v^2 + (1-u)^3 v^3 + 3(1-u)^2 u v^3 + 3(1-u)u^2 v^3 + u^3 v^3 \right), \\ & \left(-\frac{3}{4}(1-u)^2 u(1-v)^3 + \frac{3}{2}(1-u)^3(1-v)^2 v + 9(1-u)^2 u(1-v)^2 v + 90(1-u)u^2(1-v)^2 v + \right. \\ & \quad 3u^3(1-v)^2 v + 6(1-u)^3(1-v)v^2 + 18(1-u)^2 u(1-v)v^2 + 18(1-u)u^2(1-v)v^2 + \\ & \quad \left. 6u^3(1-v)v^2 + 3(1-u)^3 v^3 + \frac{15}{2}(1-u)^2 u v^3 + 9(1-u)u^2 v^3 + \frac{5u^3 v^3}{2} \right) / \\ & \left((1-u)^3(1-v)^3 + 3(1-u)^2 u(1-v)^3 + 3(1-u)u^2(1-v)^3 + u^3(1-v)^3 + \right. \\ & \quad 3(1-u)^3(1-v)^2 v + 9(1-u)^2 u(1-v)^2 v + 90(1-u)u^2(1-v)^2 v + \\ & \quad 3u^3(1-v)^2 v + 3(1-u)^3(1-v)v^2 + 9(1-u)^2 u(1-v)v^2 + 9(1-u)u^2(1-v)v^2 + \\ & \quad \left. 3u^3(1-v)v^2 + (1-u)^3 v^3 + 3(1-u)^2 u v^3 + 3(1-u)u^2 v^3 + u^3 v^3 \right), \\ & \left(-\frac{3}{4}(1-u)^2 u(1-v)^3 + \frac{1}{4}u^3(1-v)^3 + \frac{3}{2}(1-u)^3(1-v)^2 v + 45(1-u)u^2(1-v)^2 v - \right. \\ & \quad \frac{3}{4}u^3(1-v)^2 v - \frac{3}{4}(1-u)^3(1-v)v^2 - \frac{9}{4}(1-u)^2 u(1-v)v^2 + \\ & \quad \left. \frac{3}{2}u^3(1-v)v^2 + \frac{1}{4}(1-u)^3 v^3 + \frac{3}{4}(1-u)u^2 v^3 + \frac{u^3 v^3}{2} \right) / \\ & \left((1-u)^3(1-v)^3 + 3(1-u)^2 u(1-v)^3 + 3(1-u)u^2(1-v)^3 + u^3(1-v)^3 + \right. \\ & \quad 3(1-u)^3(1-v)^2 v + 9(1-u)^2 u(1-v)^2 v + 90(1-u)u^2(1-v)^2 v + \\ & \quad 3u^3(1-v)^2 v + 3(1-u)^3(1-v)v^2 + 9(1-u)^2 u(1-v)v^2 + 9(1-u)u^2(1-v)v^2 + \\ & \quad \left. 3u^3(1-v)v^2 + (1-u)^3 v^3 + 3(1-u)^2 u v^3 + 3(1-u)u^2 v^3 + u^3 v^3 \right) \end{aligned}$$



Représentation d'une approximation à travers 4x4 points en utilisant une surface de Bézier (rationnelle)

NURBS

Après avoir défini les courbes et surfaces de Bézier nous allons maintenant définir le plus populaire des méthodes d'approximation utilisées dans les logiciels de CAO aujourd'hui, à savoir les NURBS (non uniform rational B-spline) courbes et surfaces. NURBS sont une généralisation des courbes et surfaces de Bézier (i.e. la représentation de Bézier est un simple cas de B-splines lorsque le nombre de points de contrôle = l'ordre de k). Pour définir la NURBS, nous devons définir la fonction B-spline et le vecteur de nœud.

Courbes et surfaces NURBS [5]

$\Gamma = \{p_i \in \mathbb{R}^p, i = 0, \dots, n\}$ est un ensemble de $n + 1$ points de données

$T = \{t_0, \dots, t_m\} \mid t_0 \leq \dots \leq t_m$ est le vecteur de nœud

la même valeur t_i ne doit pas apparaître plus d'une fois où k

$k = l'$ ordre de la B – spline (i.e. le degré = l' ordre – 1)

la courbe NURBS de base est donnée par $N(t) = \sum_{i=0}^n \eta_{i,k}(t) p_i$ où

$\eta_{i,k}(t)$ est la fonction B – spline de degré $(k - 1)$ associé au vecteur de nœud T

pour $k = 1$, $\eta_{i,1}(t) = 1$ si $t \in [t_i, t_{i+1}]$ et 0 sinon et pour $k > 1$, $\eta_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} \eta_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} \eta_{i+1,k-1}(t)$

$t_i \leq t \leq t_{i+k} \implies \eta_{i,k}(t) > 0$,

$t_0 \leq t \leq t_i$ et $t_{i+k} \leq t \leq t_{n+k} \implies \eta_{i,k}(t) = 0$ et $t_{k-1} \leq t \leq t_{n+1} \implies \sum_{i=0}^n \eta_{i,k}(t) = 1$ (propriété de normalisation)

nœuds = # points de contrôle + l' ordre de la courbe (degré + 1) $\implies (m + 1) = (n + 1) + k \implies m = n + k$

(pour 5 points de contrôle i.e. $n = 4$)

vecteur de nœud uniforme (périodique) $\implies t_i - t_{i-1} = \text{constant}$

$\implies T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ avec une plage de paramètres : $(k - 1) \leq t \leq (n + 1)$

vecteur de nœud non périodique $\implies k$ valeurs répétées à la fin $\implies T = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3\}$

vecteur de nœud non – uniforme $\implies k$ valeurs répétées à la fin $\implies T = \{0, 0, 0, 1.5, 2.3, 3, 3, 3\}$

avec une plage de paramètres $0 \leq t \leq (n - k + 2)$

$N(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \eta_{i,k}(t) w_i p_i}{\sum_{i=0}^n \eta_{i,k}(t) w_i}$ est la courbe NURBS avec w_i sont les poids

$\Gamma = \{p_{i,j} \in \mathbb{R}^3, i = 0, \dots, m \text{ et } j = 0, \dots, n\}$ est un ensemble de $(m + 1) \times (n + 1)$ points de données

$U = \{u_0, \dots, u_p\} \mid u_0 \leq \dots \leq u_p$ vecteur de nœud dans la direction u

$V = \{v_0, \dots, v_q\} \mid v_0 \leq \dots \leq v_q$ vecteur de nœud dans la direction v

la même valeur u_i (resp. v_i) ne doit pas apparaître plus que k (resp. l) fois où

$k = l'$ ordre de la B – spline dans la direction u (resp. l dans la direction v)

la surface de NURBS de base est donnée par $N(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \eta_{i,k}(u) \eta_{j,l}(v) p_{i,j}$

où $\eta_{i,k}(u)$ et $\eta_{j,l}(v)$ sont des fonctions B – splines de degré $(k - 1)$ et $(l - 1)$

associé aux vecteurs de nœud U et V

nœuds = # points de contrôle + l' ordre de la courbe (degré + 1)

$\implies (p + 1) = (m + 1) + k \implies p = m + k$ et $(q + 1) = (n + 1) + l \implies q = n + l$

$N(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \eta_{i,k}(u) \eta_{j,l}(v) w_{i,j} p_{i,j}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \eta_{i,k}(u) \eta_{j,l}(v) w_{i,j}}$ est la surface NURBS rationnelle avec $w_{i,j}$ sont les poids

Approximation à travers 9 points utilisant la courbe NURBS d'ordre 3 avec un vecteur de nœud non périodique

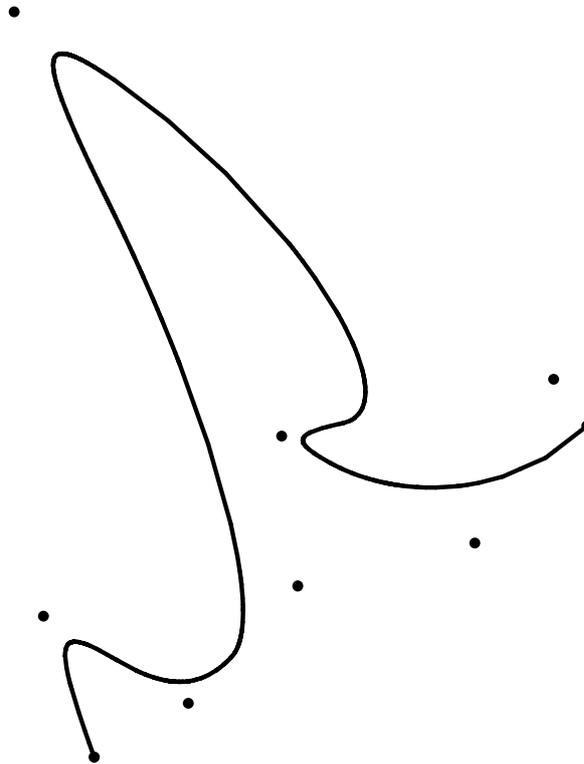
$\Gamma = \{p_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}) \in \mathbb{R}^3, \text{ pour } i = 1, \dots, n\}$ est un ensemble de n points de données distincts

$p_1 = (1, 2, 0), p_2 = (2, 4, 1), p_3 = (3, 2, 0), p_4 = (4, 1, 2), p_5 = (4, 7, 9),$

$p_6 = (5, -2, 6), p_7 = (6, 3, 3), p_8 = (7, 0, 2)$ et $p_9 = (8, -1, 4)$

les poids sont $w_1 = 1, w_2 = 3, w_3 = 3, w_4 = 2, w_5 = 4, w_6 = 1, w_7 = 3, w_8 = 1$ et $w_9 = 1$

le vecteur de nœud non périodique est donnée par $\{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 7\}$



Représentation d'une approximation à travers 9 points utilisant la courbe NURBS d'ordre 3

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, l'interpolation (approximation) NURBS serait la troisième méthode d'interpolation, nous allons définir dans cette recherche. Modélisation NURBS a gagné grande popularité ces derniers temps dans les logiciels de CAO destinés à conception architecturale et ils sont à la base de ces systèmes. Il était important pour nous dans le cadre de cette recherche de donner une construction mathématique des courbes et des surfaces NURBS, car il y a certaines parties des conceptions architecturales créés ici faites en utilisant des logiciels de CAO basé sur NURBS. De cette façon, nous pouvons procéder dans la conception de ces formes à l'aide ces systèmes logiciels mais avec la compréhension mathématique de la façon dont ces outils de conception sont construits. Cela signifie restant en conformité avec le discours initial de la recherche, à savoir fonder le processus de conception sur une compréhension mathématique complète des méthodes géométriques impliqués. Les courbes et les surfaces de NURBS sont largement utilisés dans la conception de des formes qui nécessitent des lignes de courant et de continuité qui est le cas dans la conception automobile et la conception aéronautique. Dans notre contexte architectural nous allons montrer des conceptions de formes qui partagent certaines de ces caractéristiques, de cette manière, nous sommes en mesure de montrer la capacité et l'intérêt pour l'utilisation et la construction de ces outils de modélisation.

Approximation à travers 5×5 points en utilisant la surface NURBS d'ordre 3

$$\Gamma = \{p_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}) \in \mathbb{R}^3, \text{ pour } i = 1, \dots, m \text{ et } j = 1, \dots, n\}$$

est un ensemble de $m \times n$ points de données distincts

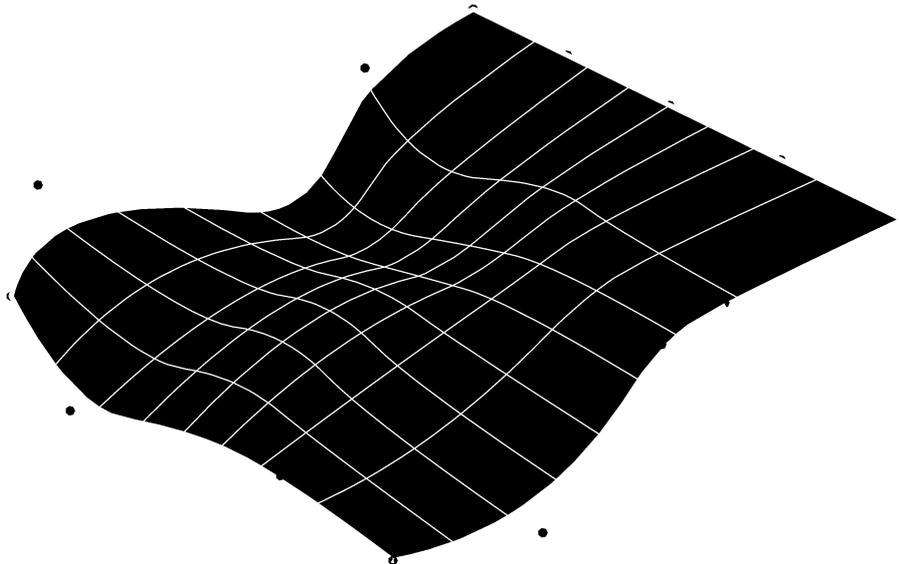
$$\begin{aligned} p_{1,1} &= (0, 0, 0), p_{1,2} = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), p_{1,3} = (\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{4}), p_{1,4} = (0, 3, \frac{1}{4}), p_{1,5} = (0, 4, \frac{1}{4}), \\ p_{2,1} &= (1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}), p_{2,2} = (1, 1, 0), p_{2,3} = (1, 2, -\frac{1}{4}), p_{2,4} = (1, \frac{5}{2}, 0), p_{2,5} = (1, 4, \frac{1}{4}), \\ p_{3,1} &= (2, 0, 0), p_{3,2} = (2, 1, \frac{1}{2}), p_{3,3} = (2, 2, 0), p_{3,4} = (2, 3, \frac{1}{4}), p_{3,5} = (2, 4, \frac{1}{4}), \\ p_{4,1} &= (3, 0, \frac{1}{4}), p_{4,2} = (\frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{4}), p_{4,3} = (3, 2, \frac{1}{2}), p_{4,4} = (3, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}), p_{4,5} = (3, 4, \frac{1}{4}), \\ p_{5,1} &= (4, 0, \frac{1}{4}), p_{5,2} = (4, 1, -\frac{1}{4}), p_{5,3} = (4, 2, \frac{1}{2}), p_{5,4} = (4, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}) \text{ et } p_{5,5} = (4, 4, \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

les poids sont

$$\begin{aligned} w_{1,1} &= 1, w_{1,2} = 1, w_{1,3} = 1, w_{1,4} = 1, w_{2,1} = 1, w_{2,2} = 1, w_{2,3} = 1, w_{2,4} = 1 \\ w_{3,1} &= 1, w_{3,2} = 1, w_{3,3} = 1, w_{3,4} = 1, w_{4,1} = 1, w_{4,2} = 1, w_{4,3} = 1 \text{ et } w_{4,4} = 1 \end{aligned}$$

le vecteur de nœud non périodique dans la direction u est donnée par $\{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3\}$

le vecteur de nœud non périodique dans la direction v est donnée par $\{0, 0, 0, 3, 4, 5, 5, 5\}$

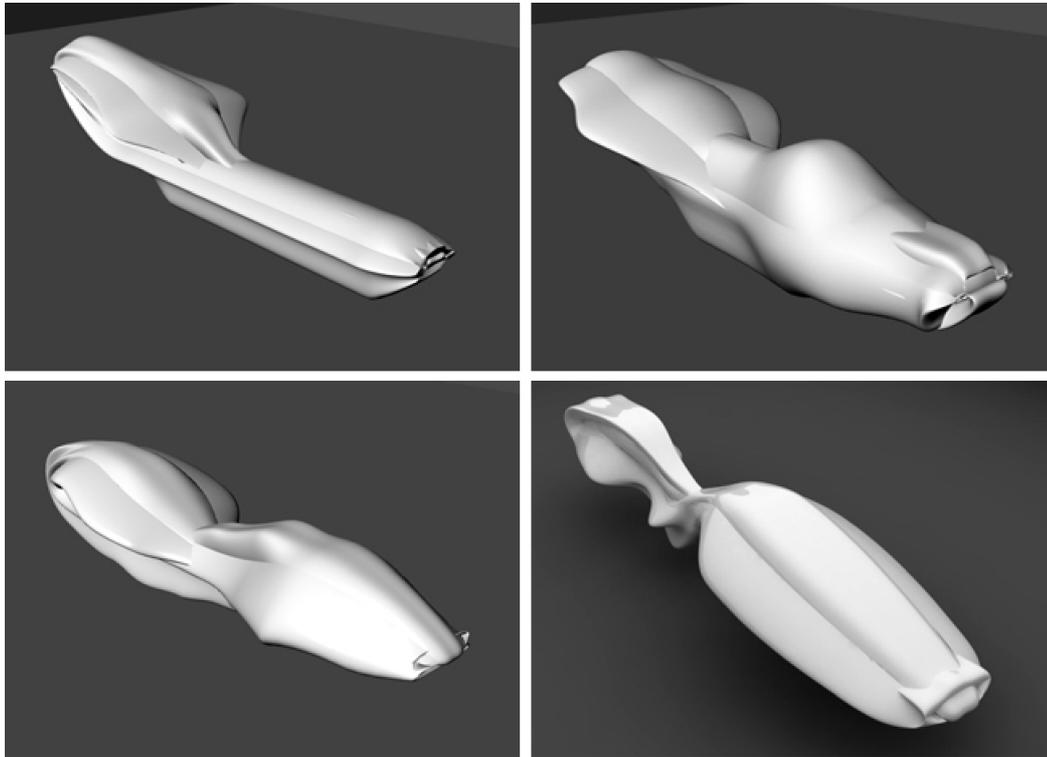


Representation of an approximation à travers 5×5 points en utilisant la surface NURBS d'ordre 3

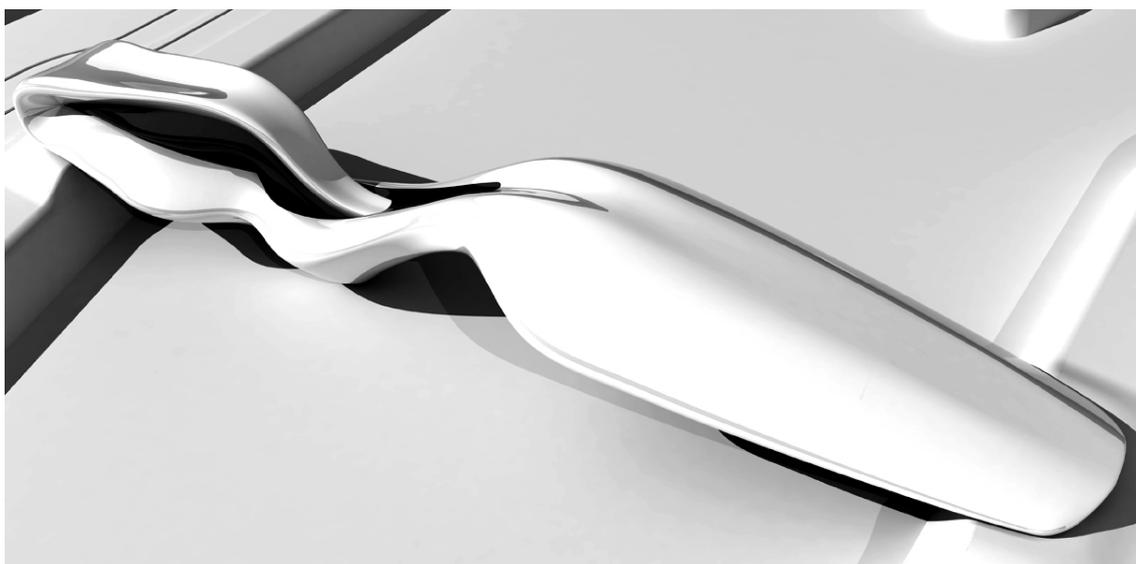
Avec cet exemple, nous terminons la construction mathématique des courbes et des surfaces NURBS, qui à son tour termine les constructions de l'interpolation polynomiale, que nous avons l'intention de faire dans cette recherche. Dans la partie suivante, nous allons montrer quelques exemples de conceptions architecturales, faites en utilisant la modélisation NURBS avec l'aide d'un système de logiciels de CAO. Après ces exemples, nous aimerions réfléchir sur la vague actuelle de l'intérêt de l'architecture dans ces outils de modélisation, de leur application de base comme outil de dessin utilisant une interface utilisateur graphique, aux applications plus sophistiquées utilisant des scripts et des simulations. Cette vague a développé au cours des deux dernières décennies, possédant des noms différents et des convictions différentes, dans cette recherche, nous allons choisir le terme: architecture numérique, de se référer à cette vague dans le sens le plus large.

4.3.4. Concevoir utilisant NURBS

Maintenant que nous avons à notre disposition la construction mathématique des courbes et surfaces NURBS nous allons montrer une certaine génération de forme en utilisant la modélisation NURBS avec l'aide d'un système de CAO. Nous allons définir une surface NURBS définie par une série de courbes NURBS planes, dont chacune est située dans un plan perpendiculaire à une courbe de base.



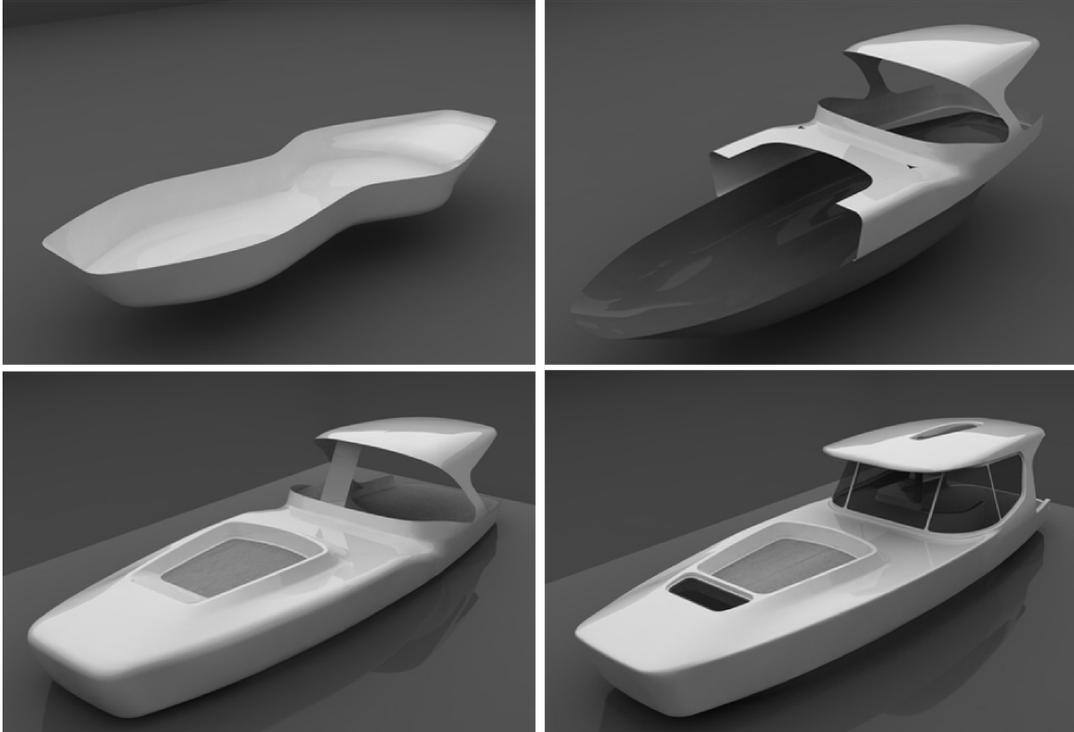
Représentation du processus de génération de la forme architecturale utilisant Nurbs



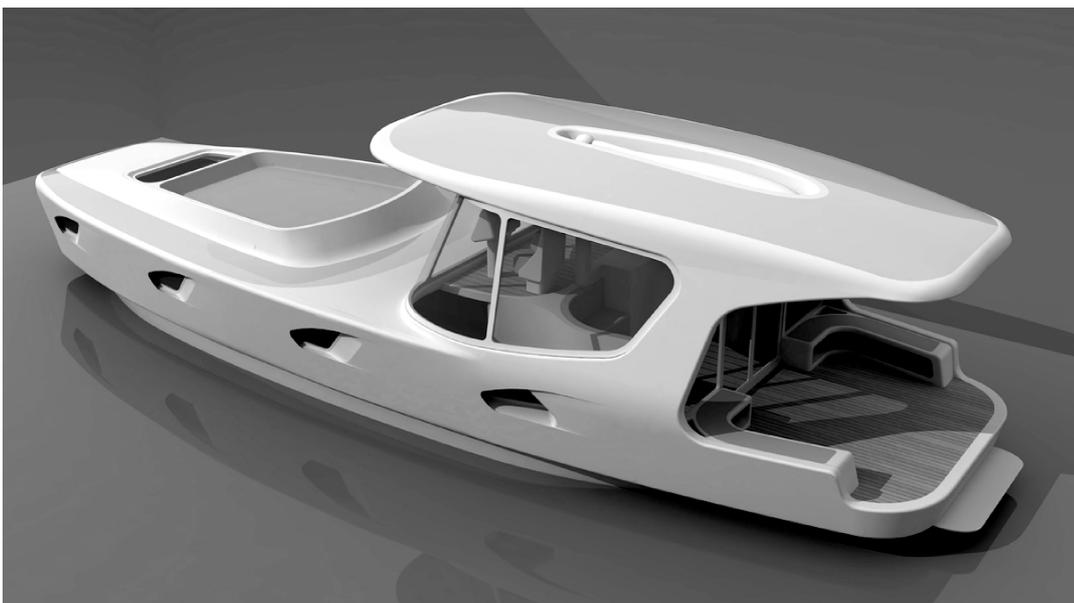
Représentation des courbes et des surfaces NURBS faites en utilisant un système de logiciel de CAO

Plus d'exemples de conception utilisant NURBS

Maintenant, nous allons montrer un exemple de génération de forme à l'aide d'une modélisation Nurbs pour la conception d'une maison-bateau, ces exemples montrent la capacité des NURBS pour gérer conception de surfaces courbes telles que celles dans les coques de bateaux et des conceptions d'automobiles.



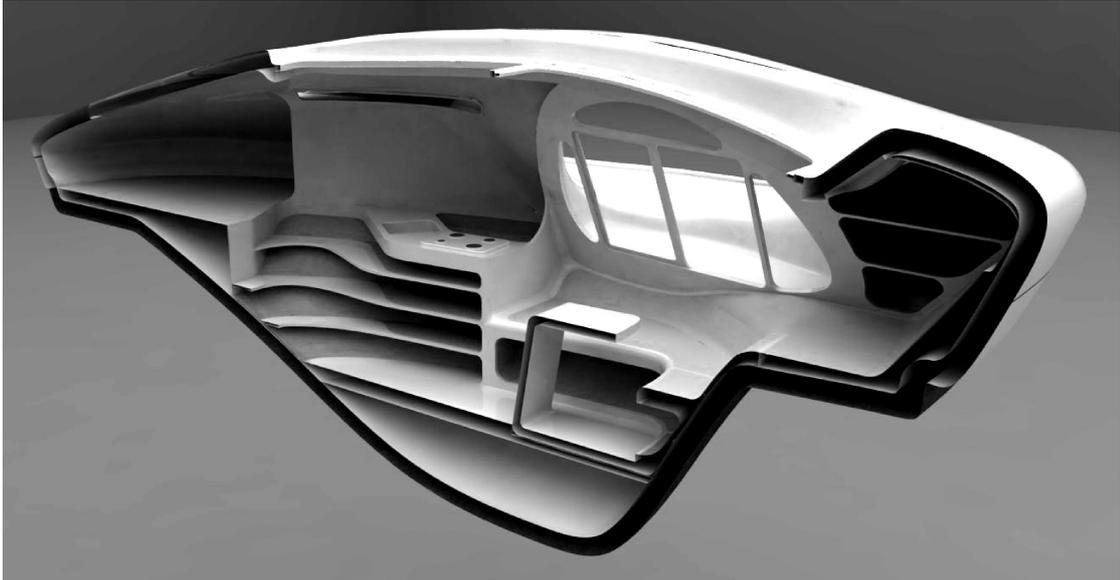
Représentation du processus de génération de forme en utilisant des courbes et des surfaces NURBS



Représentation d'un dessin fait en utilisant les NURBS dans un système de logiciel de CAO

Exemple de conception en utilisant NURBS en combinaison avec la «box modeling»

Jusqu'à présent, nous avons montré des conceptions en utilisant soit la modélisation «box modeling» ou l'interpolation utilisant des surfaces NURBS, dans cette partie, nous allons montrer que nous pouvons combiner les deux méthodes à savoir que la peau externe pourrait être conçue utilisant la modélisation «box modeling» et l'intérieur pourrait être élaboré en utilisant la surfaces NURBS.



Représentation de l'intérieur d'une maison-bateau conçu en utilisant des surfaces NURBS



Représentation de la conception extérieure de la peau en utilisant la «box modeling»

Plus d'exemples de conception utilisant NURBS en combinaison avec «box modeling»

C'est un exemple de plus d'avoir la peau extérieure conçue en utilisant la «box modeling» tandis que l'intérieur est travaillé à l'aide de surfaces de NURBS. Il est important de présenter ces exemples qui sont établis utilisant de logiciels de CAO, car ils montrent l'étendue de la liberté et aussi la limitation de l'utilisation des interpolations méthodes (NURBS) dans la conception architecturale.



Représentation de l'intérieur d'une forme que nous avons développée en utilisant la «box modeling»



Représentation d'une autre partie intérieure de la même forme architecturale

4.4. Critique de la conception assistée par ordinateur

Dans les deux premiers chapitres, nous étions occupés des questions relatives à la position de cette recherche entre les deux disciplines de l'architecture et les mathématiques (chapitre 1) et la préparation pour la construction de l'espace formel: variétés (chapitre 2). Dans le troisième chapitre, nous avons construit l'espace comme une variété et nous avons donné les définitions formelles de des formes comme des sous-variétés de l'espace euclidien utilisant submersion (définition algébrique) et l'immersion (dans la plupart des cas un plongement - définition paramétrique). Dans ce chapitre, nous avons donné des approximations de formes continue en les définissant utilisant des maillages polygonaux et des interpolations polynomiales, qui, comme nous l'avons mentionné sont le type le plus utilisé de la définition de la forme dans la conception architecturale en raison de leur utilisation dans les systèmes de logiciels de CAO. Malgré leur large diffusion, peu de architectes ont connaissance de leurs constructions mathématiques, cela dit, nous aimerions à ce point avant de commencer les définitions des opérations sur les des formes, de prendre un certain recul et de réfléchir sur ces méthodes de conception utilisant CAO. Nous aimerions comprendre la raison de leur succès et de quelle manière ils diffèrent des méthodes traditionnelles de dessin architectural en utilisant la géométrie descriptive. En cela, nous ferions une fois de plus l'utilisation des noumènes et les phénomènes de Kant pour comprendre sur le plan ontologique l'expérience de simulation de dessin. En plus de Kant, nous apporter quelques concepts de la théorie critique, en particulier de philosophes: Jean Baudrillard et Gilles Deleuze pour nous aider à comprendre le contexte global de la réussite de ces technologies numériques. Nous allons enfin réfléchir davantage ponctuellement sur les mouvements architecturaux réunis sous le parapluie de l'architecture dite numérique. Le succès de la conception utilisant de logiciels de CAO, c'est parce qu'elle est fondée sur l'idée intuitive de l'interpolation de points qui sont donnés par l'entrée du créateur à travers l'interface graphique (la souris) sans la nécessité d'avoir des connaissances mathématiques sur la fonction d'interpolation. C'est en substance rend l'ensemble du processus de dessiner en utilisant l'ordinateur rappelle le processus de dessiner utilisant le crayon et de la planche à dessin, car il n'y avait pas de transcendance de l'expérience au sens kantien a été impliqué. Ceci, certainement augmenté la vitesse de production et la précision des dessins, mais il n'y avait pas de changement de perspective. Les architectes ont pensé et ont dessiné de la même manière que précédemment, seulement maintenant en utilisant l'ordinateur, dans d'autres terme, ils ont simulé l'expérience du dessin, mais ce qui est plus problématique est la simulation de la connaissance qui se pose avec le logiciel de CAO, qui dans le cas de la conception architecturale est la simulation de la connaissance en géométrie. Nous sommes capables de voir le problème dans un exemple simple: si l'on prend la tâche de dessiner deux lignes perpendiculaires, d'abord à la main et ensuite par l'ordinateur: dans le premier cas, nous sommes confrontés à un problème classique des mathématiques qui est celui de la construction et afin de réaliser la tâche, nous appliquons les méthodes de la géométrie descriptive. Néanmoins, dans le deuxième cas à savoir, en utilisant un interface graphique du logiciel de CAO, nous allons chercher les icônes dans le menu du programme qui correspondent au dessin d'une ligne et qui correspond à trouver la perpendiculaire à cette ligne. Maintenant, la connaissance mathématique nécessaire pour effectuer cette tâche est entièrement caché de l'utilisateur dans la bibliothèque du programme; ce qui est perceptible au concepteur est la connaissance de la façon de gérer l'interface. Cette situation est problématique, non pas parce que d'une idée romantique que l'expérience de dessin est plus authentique, mais il est problématique parce que la simulation créée par le logiciel de CAO donne au concepteur l'illusion d'avoir la connaissance géométrique nécessaire pour effectuer la tâche. C'est-à-dire que le logiciel de CAO modifie la nature du problème d'un problème de géométrie à un problème d'interface, et dans ce saut il existe une perte importante de connaissances qui n'est pas nécessairement remarqué et qui va devenir de moins en moins remarqué que les interfaces de logiciels de CAO deviendront de plus en plus intuitive. Ce problème de la simulation n'est en aucun cas limité à la conception architecturale, En fait, il s'agit de la version architecturale d'un problème plus large de la société, un problème qui a été prévu par le théoricien critique Guy Debord dans son livre *La société du spectacle* et a été au centre du travail de philosophe Jean Baudrillard dans de son traité philosophique *Simulacres et simulation*. Justement, en appliquant la géométrie moderne dans la conception architecturale, nous soulignons le problème en créant une turbulence dans la simulation de la connaissance que les systèmes logiciels de CAO établissent, pour comprendre cette turbulence nous devons d'abord comprendre comment l'architecture contemporaine se rapporte à la société du spectacle de Debord. L'idée de Debord tourne autour de la dégradation de la société moderne dans

laquelle la vie sociale authentique a été remplacé par sa représentation à savoir que les expériences humaines qui étaient autrefois vécu sont devenu simples représentations, la dégradation selon Debord se passe par le déclin d'être à avoir à apparaître [6]. Le compte de Baudrillard sur la société est tout à fait similaire de nombreux égards, comme il le prétend que notre société actuelle a remplacé toute la réalité et la signification par des symboles et des signes et que l'expérience humaine est une simulation de la réalité. Donc, à partir Alberti et Desargues (deux architectes et mathématiciens) ayant une connaissance approfondie de la géométrie comme la langue de la conception architecturale, aux architectes dits paramétriques maîtrisant leur dernier logiciel de CAO, on peut voir clairement cette dégradation de la connaissance aux apparences. Quand les architectes paramétriques utilisent des termes comme géométrie complexe ce qu'ils signifient réellement: sont des formes qui apparaissent complexe à savoir par leur nature courbée, alors que le processus de leur création contient peu de connaissance de la géométrie. Il s'agit d'un abus de langage assez fréquent, qui est toujours négligé en raison de la confusion entre la connaissance et la simulation de la connaissance, l'utilisation du terme: simulation ici ne signifie pas simplement faire semblant. Baudrillard dans *Simulacres et simulation*, définit la dissimulation, comme le semblant de ne pas avoir ce que l'on a, et la simulation est feindre d'avoir ce que l'on n'a pas. Il explique que la simulation est plus complexe que feindre ou faire semblant, en donnant l'exemple de simuler la maladie; il explique que, pour prétendre qu'on est malade, on reste tout simplement dans le lit et faire croire aux autres on est malade. Alors que si l'on simuler la maladie, on produit en soi certains des symptômes. La différence fondamentale ici est clair, faire semblant conserve la réalité intacte, tandis que la simulation menace la différence entre le vrai et le faux. Quelque chose de cette nature peut être vu quand les architectes utilisent des logiciels de CAO pour représenter et résoudre certains des problèmes géométriques de leur conception; la vraie connaissance n'est pas simplement remplacée par semblant (à savoir l'architecte est conscient de l'ignorance) mais cette connaissance est simulé à l'aide symptômes (i.e. gestion de l'interface), laissant l'architecte ignorant de la différence entre le vrai et le faux. Le deuxième concept important dans le livre de Baudrillard est: simulacres, il définit simulacre, non comme cacher la vérité, mais comme la vérité qui cache qu'il n'y en a pas. Simulacres sont des copies qui représente des choses qui soit n'avaient pas une réalité pour commencer, ou N'ayant plus un original, tandis que la simulation est l'imitation des opérations d'un processus du monde réel par la production de certains de ses symptômes [7]. La progression actuelle, et la vitesse de développement de logiciels de CAO de plus en plus complexe, capable de faire la stimulation visuelle de plus en plus avancé: l'architecture paramétrique, est un exemple de simulacre, où le mot paramétrique a perdu son sens mathématique original et est devenu une référence sans un référent. Baudrillard décompose la relation entre l'image et la réalité en quatre étapes qu'il relie plus tard à des périodes historiques. La première étape est une relation fidèle, entre l'image et la copie, où le signe est le reflet d'une réalité profonde, il associe ce stade avec la période pré-moderne où la représentation est clairement un portelieu artificiel pour la vraie chose. La deuxième étape est la perversion de la réalité, nous croyons que le signe est copie infidèle, qui masque et dénature la réalité comme une apparence, Baudrillard associe ce stade avec la modernité et la révolution industrielle où la distinction entre la représentation et la réalité a été rompu en raison de la prolifération des copies produites en masse d'articles, qui les transforme en produits de base. La troisième étape, masque l'absence d'une réalité profonde, où simulacre prétend être une copie fidèle, mais c'est une copie sans originale; Baudrillard associé ce stade avec la postmodernité et le capitalisme tardif où simulacre précède l'original. La quatrième étape est la simulation pure, dans laquelle le simulacre n'a pas de relation, à aucune réalité que ce soit. Ici, les produits culturels ne seraient même pas besoin de faire semblant d'être vrai au sens naïf car les expériences de vie des consommateurs sont essentiellement artificielles, il a utilisé le terme: l'hyper-réalité pour décrire cette réalité qui est de plus en plus notre vie quotidienne [7]. On peut voir une corrélation entre les étapes de Baudrillard de la relation entre l'image et la réalité et le développement de la relation entre l'architecture et les mathématiques. Les périodes médiévales et la Renaissance représentent la première étape de la relation image-réalité, où la connaissance de la géométrie visant à l'utiliser pour représenter une réalité profonde d'un univers harmonieux de divines proportions et géométrie sacrée. L'expression parfaite de cette étape, était dans l'invention de la perspective linéaire par les polymathes: Alberti, Brunelleschi et Desargues, ici on peut voir presque une tentative littérale d'utiliser l'image comme un reflet fidèle de la réalité, à savoir la peinture basée sur la perspective. Avec l'arrivée de la modernité et de la domination du cogito cartésien de la science positiviste et la révolution industrielle, la deuxième étape est claire, il y a une méfiance dans les apparences et la perception comme l'accès à la réalité. Ici, l'image

est une copie infidèle qui dénature la réalité, l'architecture et l'art ne sont plus des représentations de profondes réalités harmonieuses, l'esthétique kantienne avec l'accent mis sur l'objet d'art lui-même remplacé l'esthétique classique ouvrant la voie à l'art moderne. L'intérêt en mathématiques pour représenter fidèlement la réalité a diminué hors de la faveur, cela peut être vu dans les mouvements de la peinture moderne de l'impressionnisme au cubisme et leurs équivalents architecturaux, de l'art nouveau au Bauhaus et le style international où la géométrie est enfin détaché de l'architecture. Au même temps, la science est devenue excessivement positiviste, rejetant la métaphysique et les apparences comme trompeuses et ne comptant que sur la raison humaine comme le seul accès à la réalité objective des choses qui est obscurcie par nos sens, cela peut être vu dans l'interprétation moderne de la géométrie et en physique des particules. La période post-moderne capitaliste tardive est caractérisée par la troisième phase de la relation image-réalité, c'est l'ère de la communication de masse, la mondialisation et la consommation où l'image ne représente plus un original et même masque l'absence de réalité profonde. Mouvements postmodernes dans l'art et l'architecture expriment clairement cette propriété, ce qui peut être vu, de l'essor du pop art à l'ajout de motifs classiques de l'architecture postmoderne; clairement la position de la géométrie dans l'architecture a atteint son point le plus bas. Ce qui est plus intéressant, c'est ce qui se passe aujourd'hui, qui commence à la fin du postmodernisme, et que nous pouvons identifier comme la quatrième étape de la relation image réalité, à savoir la simulation pure ou le stade hyper-réalité. Dans l'art et en particulier dans l'architecture il y a une augmentation de ce qu'on appelle l'art numérique, et au sein de la communauté architecturale: l'architecture paramétrique; on peut déjà voir dans le nom, les premiers symptômes d'une juxtaposition problématique. Numérique, étant synonyme de données informatisée numériques, qui est le monde des mathématiques discrètes de calcul, couplés avec l'art, le monde que depuis plus de deux siècles a rejeté les mathématiques. Ce couplage semble à première vue être un renouveau de l'utopie prémoderne de la renaissance mais cela ne pouvait pas être plus loin de la vérité. En fait, il est un symptôme parfait de la quatrième étape de Baudrillard de la relation image-réalité où le simulacre n'a plus aucun rapport avec la réalité et les signes se réfèrent seulement à d'autres signes [7]. Un bon exemple de cette propriété peut être vu dans l'intérêt retourné en géométrie dans l'architecture paramétrique, ce retour est fondamentalement et purement simulée sans lien véritable avec l'étude moderne de la géométrie. Cette simulation est réalisée par la création d'un mythe, à savoir inventer de nouveaux termes, expressions, un système de signes référant seulement à d'autres signes sans réalités originale ou, dans certains cas avait une réalité originale qui n'est plus là. Par exemple, des mots comme: paramétrique, continue, morphogenèse et topologie, sont coupés de leurs origines mathématiques et donné une nouvelle vie dans le système simulé. Même termes fondamentaux, comme la «géométrie» lui-même ne se réfèrent plus à son sens mathématique universelle, mais cela signifie tout simplement la forme. Le problème ici, n'est pas simplement un problème de vulgarisation des termes scientifiques comme c'est le cas dans de nombreuses œuvres philosophiques et littéraires, il est beaucoup plus problématique. Il est compréhensible de faire des actes individuels de vulgarisation pour exprimer certains concepts philosophiques, il a toujours été fait par les philosophes et des artistes, mais ici ce qui se passe n'est rien de moins que d'une tentative pour une fausse universalité. À savoir, que, par exemple, quand un mot comme "géométrie" (ou "paramétrique") est utilisé dans son sens hyper-réel simulé, il est entendu par tout le monde, et créant ainsi un mythe à propager. Le long de la même ligne de Simulacres et simulation, nous rencontrons un autre phénomène important du capitalisme tardif, à savoir le passage de discipline au contrôle, ce concept a été élaboré par le philosophe français Gilles Deleuze, dans un de ses derniers essais intitulé *Post-scriptum sur les sociétés de contrôle*. Dans ce post-scriptum, nous trouvons un ton beaucoup plus politique par rapport aux écrits précédents de Deleuze, en substance Deleuze exprimer une préoccupation envers la technologie et en particulier ce qu'il appelle les machines de troisième génération: ordinateurs; une position qui rappelle la position de Heidegger envers la technologie. Il élabore des thèmes soulevés par le philosophe français Michel Foucault sur les sociétés disciplinaires; Deleuze explique que ces sociétés disciplinaires ont évolué vers des sociétés de contrôle. Foucault situé les sociétés disciplinaires dans le 18ème et 19ème siècles, elles ont atteint leur hauteur au début de la 20ème. Elles initient l'organisation de vastes espaces d'enclos; l'individu ne cesse passer d'un milieu fermé à un autre, chacun ayant ses propres lois: d'abord, la famille, puis l'école, puis la caserne, puis l'usine, parfois l'hôpital ou même la prison, l'instance prééminent d'enclos. Le projet idéal de ces milieux de enclos, est de distribuer dans l'espace, et d'ordonner dans le temps; de composer une force productive dans la dimension de l'espace-temps dont l'effet sera plus grand que la somme de ses forces composantes [8]. Deleuze affirme que nous ne sommes plus dans ces

sociétés disciplinaires, nous sommes dans une crise généralisée par rapport à tout l'environnement d'enclos: famille, école, usine, hôpital, prison. Les administrations en charge ne cesse d'annoncer des réformes nécessaires; de réformer les écoles, de réformer les hôpitaux, de réformer les prisons, alors que tout le monde sait que ces institutions sont finis, quelle que soit la longueur de leurs périodes d'expiration. Les sociétés de contrôle, sont maintenant dans le processus de remplacement de ces sociétés disciplinaires, le contrôle est le nom du nouveau monstre, qui Deleuze et Foucault reconnaissent comme notre avenir immédiat. Deleuze exprime sa préoccupation en ce qu'il considère comme un passage de l'analogique au numérique (ou digital). Il dit que dans les sociétés disciplinaires, les différents espaces de enclos à travers laquelle l'individu passe, sont des variables indépendantes avec un langage commun analogique, en les reliant. Alors que, dans les sociétés de contrôle, on obtient à la place de différents espaces de enclos, des mécanismes de contrôle différents qui sont des variations inséparables avec un langage commun numérique. Les enclos sont des moules, des moulages distincts, mais les contrôles sont une modulation, comme un moulage auto-déformant qui continue changer d'un moment à l'autre, ce qui peut être vu dans la différence entre l'usine et la corporation; l'usine était un corps qui a tenu ses forces internes à un niveau d'équilibre, mais la corporation, qui l'a remplacé, est un esprit ou un gaz. Comme la corporation a remplacé l'usine, la formation perpétuelle tend à remplacer l'école, et le contrôle continu l'examen, ce qui est le plus sûr moyen de livrer de l'école à la corporation. Dans les sociétés disciplinaires, on a commencé toujours à nouveau; de l'école à la caserne à l'usine, tandis que dans les sociétés de contrôle, on n'est jamais fini avec quoi que ce soit, la corporation, le système éducatif, les services armés, sont tous des états métastables coexistent dans un et la même modulation, comme un système universel de déformation [8]. C'est tout à fait clair, dans la façon dont les écoles d'architecture d'aujourd'hui sont liés à des agences des architectes qui sont à la fois les enseignants et les patrons. Et comment la dynamique des studios de design et des cabinets d'architectes se ressemblent de plus en plus, devenant variations de la même chose, donc un étudiant en architecture qui a suivi une certaine doctrine d'un certain architecte peut commencer sa vie professionnelle dans le bureau de cet architecte sans jamais se sentir la transition. Alors que, dans le passé, la transition de la vie étudiante à la vie professionnelle a été très clair, ou comme le dit Deleuze: l'étudiant repartir de zéro en passant d'un enclos à l'autre i.e. de l'école au bureau. Dans les sociétés disciplinaires, l'individu a été désigné par une signature et a été indiqué dans les masses par un numéro; dans les sociétés de contrôle ce qui est important n'est pas la signature ou le nombre, mais un code: le code est un mot de passe, qui marque l'accès à informations ou la rejette. Nous nous trouvons plus, face à la paire: masse / individu, les individus sont devenus dividuals, et les masses des échantillons, des données, des marchés ou des banques. L'homme disciplinaire était un produit d'énergie discontinu, mais l'homme de la société de contrôle est ondulatoire, en orbite, dans un réseau continu, partout, le surf a déjà remplacé les sports anciens. Sociétés disciplinaires se équipés de machines portant sur l'énergie, avec le un danger passif de l'entropie et le danger actif du sabotage, les sociétés de contrôle fonctionnent avec les machines du troisième type, les ordinateurs, dont passive un danger est le brouillage et dont un danger actif est le piratage et l'introduction des virus. C'est le capitalisme de production d'ordre supérieur. Il n'achète plus des matières premières et ne vend plus les produits finis: il achète des produits finis et assemble parties, ce qu'il veut vendre est un service et ce qu'il veut acheter est des stocks [8]. La conception d'un mécanisme de contrôle, donnant la position d'un élément dans un environnement à un instant donné, est devenu une réalité avec le «smart phone». La ville imaginée par psychanalyste français Félix Guatari, où on serait en mesure de quitter son appartement, sa rue, son quartier, grâce à de une carte électronique individu qui soulève un barier donné ou être rejetée sur un jour donné ou à certaines heures, est en grande partie réaliser. Ce qui compte n'est pas la barrière, mais l'ordinateur qui permet de suivre la position de chaque personne licites ou illicites et effectue une modulation universelle [8]. On peut facilement le voir, dans le nombre écrasant des réseaux sociaux, les blogs et les plates-formes numériques pour l'échange d'informations, sur nos activités et nos emplacements, qui prolifère en permanence chaque partie de nos vies. Dans l'architecture c'est tout à fait tangible dans l'explosion des blogs et des communautés numériques favorisant l'architecture paramétrique, ce qui est l'architecture de contrôle par excellence, l'idéologie favorise l'efficacité et le contrôle sur la conception et la production de la forme architecturale. Cependant, nous devons être très vigilants ici, parce que même si il semble une motivation raisonnable pour un architecte d'être en contrôle de la conception de la forme, il est bien loin d'un type de contrôle technique qui vient de la formation disciplinaire. Dans les sociétés disciplinaires contrôle est livré avec des connaissances disciplinaires, à savoir l'architecte devrait recevoir la

formation adéquate, par exemple, dans l'analyse structurelle et à partir de là un contrôle en termes de connaissances disciplinaires est atteint. Alors que la plupart des logiciels de CAO aujourd'hui essaient indéfiniment à fournir aux architectes avec de plus en plus d'informations sur l'objet conçu; informations qui dépassent la connaissance de l'architecte et même son intérêt; informations qui sont en quelque sorte inutile, c'est comme si l'objectif de contrôle est le contrôle lui-même. C'est tout à fait comparable à ces heures interminables de vidéos de caméras de sécurité, pour fournir des quantités infinies d'informations, dans l'espoir que certaines d'entre elles pourrait se révéler utile si certains attaque se produirait pour traquer les attaquants. La question de savoir si nous avons besoin de ce montant de la surveillance est un autre débat, mais ce qui est clair, c'est le lien entre leur informations superflues et les informations superflues du logiciel de CAO, à savoir que soutend les deux, n'est pas une question de l'utilité comme au sens disciplinaire mais plutôt l'idéologie de contrôle. Il est devenu aujourd'hui un avantage pour un architecte d'avoir un logiciel qui permet de calculer la pression du vent sur l'objet, sans que l'architecte ait la moindre idée de ce que cela signifie du point de vue de la science de l'ingénierie structurelle. Autant il est devenu important pour un téléphone portable, d'indiquer le taux de battre cardiaque de son utilisateur sans que l'utilisateur ait la moindre idée de ce que cela signifie du point de vue médical. Nous pouvons voir dans ces exemples ce que Deleuze tentait de souligner avec sa préoccupation au sujet de la prolifération des ordinateurs dans notre vie humaine, ils alignent simplement tout dans un seul plan à l'aide d'un code numérique.

4.5. Concernant l'architecture numérique

L'influence de la montée des ordinateurs sur l'architecture est vraiment remarquable, en dehors de l'influence évidente, en termes de productivité efficace rendue possible par les logiciels de CAO (et modélisation 3D), l'influence est idéologique et assez problématique. Cette problématique vient du fait que, même si les ordinateurs rendent les choses plus faciles, plus rapides et plus efficaces, il y a un coût indirect; que ce soit hyper-réalité de Baudrillard, la société de spectacle de Debord ou la société de Deleuze de contrôle. Malgré le fait que l'architecture numérique dans n'importe quelle saveur il arrive, est informé, efficace et visuellement complexe; dans de nombreux aspects pourrait être considérée comme supérieure aux mouvements architecturaux antérieurs, c'est l'architecture de l'hyper-réalité par excellence. C'est précisément dans ce passage de l'analogie aux outils numériques, nous pouvons voir la prédiction de Deleuze de l'aplatissement de tout dans un seul plan du code numérique, et où les disciplines sont toutes des variations dans ce plan, ce qui explique l'inondation des concepts scientifiques à l'architecture numérique avec une facilité absolue. La relation de l'architecture aux disciplines scientifiques a toujours existé, mais elle a exigé un grand effort de transgression disciplinaire des architectes; résultant dans le fait que l'utilisation de concepts scientifiques dans l'architecture est restée dans une large mesure métaphorique. Et si l'utilisation d'un concept scientifique n'allait pas être métaphorique alors ce concept n'était pas d'une complexité scientifique de haut niveau; cette modestie disparaît avec l'architecture numérique en raison de l'ordinateur. L'architecture numérique utilise des concepts scientifiques de la plus haute complexité et actualités: de la topologie à la théorie du chaos, les architectes pour la première fois ont la possibilité d'utiliser ces concepts non métaphoriquement sans avoir à passer à travers les difficultés de transgression disciplinaire. Tout cela rendu possible parce que l'ordinateur était capable de simuler les connaissances nécessaires pour utiliser et manipuler ces concepts scientifiques sous la forme d'une interface conviviale du logiciel de CAO. De ce point de vue, on peut voir que, même si il est vrai qu'il y a un changement dans la pensée scientifique vers des concepts de complexité, il est tout à fait exagéré de penser que l'architecture numérique a son fondement dans cette nouvelle tendance scientifique. Ceci est simplement dû au fait que la science moderne et en particulier la physique et les mathématiques se concentre uniquement sur la logique formelle et l'expérimentation positiviste sans aucune attention à l'ontologie, tandis que l'architecture (numérique ou non) restera toujours ontologiquement comprise. En d'autres termes la science moderne a atteint un niveau auquel il est fortement déconnectée de l'existence quotidienne intuitive, que la façon dont les individus moyens comprennent les faits scientifiques est similaire à la façon dont les individus antérieurs ont compris leurs mythes de la création. Par exemple, tout individu aujourd'hui connaît les concepts scientifiques de l'ADN ou de la physique quantique, et serait en mesure de dire à peu près certains de leurs mécanismes. Ce qui manque toutefois, c'est une compréhension ontologique, en d'autres termes, comment la compréhension de l'individu de son existence quotidienne est différente avec la connaissance de ces concepts scientifiques; qui sont dans bien des cas tout à fait contre-intuitive. Un architecte numérique a la même position que l'individu moyen, car même si les logiciels CAO peuvent simuler certains concepts scientifiques comme l'évolution ou les systèmes dynamiques non linéaires, l'architecte qui l'utilise, n'a aucune compréhension formelle ou expérimentale de ces concepts. Ce qui signifie que l'architecte ne peut pas être pleinement conscient de l'évolution de la pensée scientifique, plus que l'individu moyen, en d'autres termes, pour que l'architecture numérique fasse partie de ce changement scientifique, les architectes ont besoin de transgresser l'architecture vers les disciplines scientifiques et non seulement les simuler. Mais même si cela arrive et que les architectes reçoivent la connaissance scientifique disciplinaire appropriée, ils sont maintenant confrontés au problème de l'ontologie: comment rendre ces concepts scientifiques formelles significatives pour l'existence humaine quotidienne. Aujourd'hui, nous assistons de plus en plus dans les écoles d'architecture des programmes éducatifs orientés vers une approche scientifique, ce qui signifie que les architectes qui sortent de ces programmes auraient en quelque sorte une compréhension plus profonde des sciences en question de l'individu moyen. Cependant, nous voyons que l'ensemble de ces connaissances scientifiques est médiée par l'ordinateur, puisque tous ces programmes éducatifs sont fondés sur la compréhension numérique des concepts scientifiques, et non sur les cours disciplinaires réguliers qui bien sûr serait prendre beaucoup plus de temps et d'efforts à saisir. Le fait est que, malgré la forte progression de l'architecture numérique, elle a encore un long chemin avant de donner une véritable nouvelle architecture; c'est parce qu'elle doit surmonter deux difficultés. Tout d'abord, elle a besoin de travailler durement pour correspondre à ses ambitions scien-

tifiques et, deuxièmement, elle doit travailler encore plus dur pour fournir l'ontologie appropriée pour elle-même, et que, tout en étant informée par la science moderne, elle n'a pas perdu son sens artistique et poétique et se réduite à un problème d'optimisation. Une autre question fondamentale qui semble être souvent négligé est pourquoi ce grand intérêt pour la science qui caractérise l'architecture numérique. Il est vrai que la relation entre l'architecture et la science a une longue histoire, d'un côté des raisons pratiques de l'ingénierie du bâtiment, et de l'autre côté, les analogies entre les méthodes de conception et des phénomènes naturels, mais l'architecture numérique se rapporte à la science dans une manière totalement nouvelle dépassant à la fois la pratique et le raisonnement analogique. Malgré l'apparence extérieure de fonctionnalité que l'architecture numérique donne à son intérêt pour la science, la vérité est que la science entre dans l'architecture numérique comme un obscur objet du désir, un objet de fascination pure. Ceci peut être vu dans le très grand nombre de publications, des cours théoriques et pratiques, tous dédiés sous une forme ou une autre d'utiliser des phénomènes scientifiques en tant que donateur de la forme architecturale, au point que l'on s'interroge sur le sens de ces conceptions. En dépit de leur force visuelle, ces conceptions clairement n'abordent pas les questions architecturales, comme l'espace, la circulation, etc. Et s'ils le font, il est fait d'une manière assez réductrice, comme si ces questions étaient des problèmes quantitatifs simplement positivistes (paramètres), ils n'abordent pas non plus des questions scientifiques ou techniques, après tout une enquête scientifique exige des connaissances disciplinaires et pas seulement du logiciel de CAO. Ainsi, la question de l'intérêt de l'architecture numérique dans la science n'a rien à voir avec la relation historique entre l'architecture et la science, mais une fois de plus, il fait partie d'un plus grand problème social contemporain qui se manifeste dans l'architecture à travers le couvert de l'architecture numérique. Le problème a à voir avec la position de la science moderne dans la société contemporaine en général, et comment elle a changé dans l'ère numérique. Il ne fait aucun doute, que la science a toujours été motivée par la fascination, à savoir la fascination du scientifique avec un certain phénomène et son envie de le démystifier, cela signifiait que la science (au moins depuis le siècle des Lumières) traite de fascinations sans être un objet de fascination en soi. Maintenant, avec l'ordinateur, la science devient l'objet de fascination en soi, ce qui peut être vu dans la montée de ce qu'on appelle les "geeks" (à ne pas confondre avec les informaticiens). La différence est la suivante: compte tenu n'importe quel phénomène physique, un scientifique serait fasciné par ce phénomène lui-même, tandis que les geeks plupart du temps dépourvus des connaissances disciplinaires, seraient intéressés par la simulation offerte par l'ordinateur pour étudier ce phénomène. Par exemple, les geeks qui peuvent montrer tout l'aspect d'un logiciel pour enregistrer, analyser et manipuler le son, sans aucune connaissance ou un intérêt dans la physique des ondes sonores. Cela signifie que dans notre société d'ordinateurs, des réseaux sociaux et des smartphones, la science acquiert un important nouvelles caractéristiques: le «scientific look», ce qui est au cœur de la façon dont il est entendu par l'individu moyen. Dans notre société de l'hyperréalité de Baudrillard, il ne suffit pas de simplement faire de la science telle qu'elle se fait traditionnellement en utilisant les connaissances disciplinaires, la science plus que tout doit avoir le «scientific look», pour qu'elle soit acceptée par la société dans la science. Ce «scientific look» est ce qui fait de la science un objet de désir dans les yeux de la personne moyenne contemporain, il est ce qui est fait des ordinateurs et smartphones se vendent très bien, parce que lors de l'utilisation d'un logiciel ou d'une application, il semble que si l'on fait la science. Maintenant, l'architecture numérique traite la science le long de ces mêmes lignes, un logiciel de CAO contemporain serait capable de modéliser des formes géométriques complexes de certains phénomènes physiques et un geeks serait capable de la maîtriser sans intérêt ou des connaissances dans la science elle-même. Le logiciel de CAO donne l'ingrédient magique pour le travail, notamment son «scientific look». L'ironie est que si un travail d'architecture aurait eu une étude scientifique sérieuse derrière lui, mais il n'est pas fait à l'aide d'un logiciel de CAO, il serait perçu comme moins scientifique qu'un travail fait en utilisant le logiciel de CAO, mais sans science derrière. Cela nous amène à la conclusion que l'architecture numérique n'est pas intéressé à faire entrer la science dans le travail, mais simplement le «scientific look»; qui est ensuite complété par l'utilisation abusive des termes scientifiques d'une grande complexité. On ne peut pas commencer à compter le nombre de publications de l'architecture numérique qui utilisent constamment des termes tels que la topologie, fractale, paramétrique, code génétique pour n'en nommer que quelques-uns.

4.6. Références

- [1] *Winged edge data structure*, Hanan Samet, University of Maryland, 1998
- [2] *Lecture notes on Cubic spline*, Donald H.House, Clemeson University, 2011
- [3] http://en.wikipedia.org/wiki/Bicubic_interpolation
- [4] *Bezier curves and surfaces*, Andres Iglesias, University of Cantabria, 2001
- [5] *B-splines and NURBS curves and surfaces*, Andres Iglesias, University of Cantabria, 2001
- [6] *The Society of the spectacle*, Guy Debord , Buchet-Chastel, 1967
- [7] *Simulacra and simulation*, Jean Baudrillard , Éditions Galilée, 1981
- [8] *Postscript on the society of control*, Gilles Deleuze, Jstor, 1992

5. Opérations algébriques

5.1. Construction des espaces vectoriel et affine

A ce stade, nous arrivons à la fin de la première partie des constructions mathématiques à savoir les définitions de formes; dans cette partie, nous avons vu les définitions paramétriques et algébriques de courbes et de surfaces, en plus nous avons vu les techniques d'approximations de formes en utilisant des mailles et interpolations qui sont à la base des systèmes de logiciels de CAO. Ici, la qualité de la définition des formes mathématiquement va commencer à montrer son potentiel, à savoir lorsque nous sommes en mesure d'utiliser les formules pour extraire des informations sur la forme et les utiliser pour générer d'autres formes. En d'autres termes, dans la partie qui suit, nous allons nous concentrer sur la façon de modifier ces formes que nous avons définies en utilisant des opérations mathématiques. Ces modifications sont une partie essentielle de la conception depuis tant qu'architectes nous commençons toujours par une forme de base qui se fait adaptée au long du processus de conception pour des raisons différentes esthétiques et pratiques. Ces opérations mathématiques que nous allons utiliser pour modifier les formes sont classés en trois types: les opérations algébriques, analytiques et algorithmiques. Cette catégorisation est très claire, à savoir que dans les opérations algébriques nous allons utiliser des applications linéaire, affine et projectives, ce qui signifie que les géométries concernées ici sont des géométries affine, euclidienne et projectives. La façon dont nous allons construire les opérations algébriques: linéaire, affines et projectives, serait entre des espaces vectoriels en utilisant des matrices de transformation, ce sont des opérations familières comme les translations, les rotations, mise à l'échelle et la projection. Dans la partie analytique, nous allons utiliser les opérations de calcul différentiel et intégral, ce qui signifie que la géométrie de cette partie est la géométrie différentielle, nous devrions utiliser ces opérations pour calculer des informations cruciales sur la forme à savoir les dérivés, courbures, des longueurs d'arc, les zones et volumes, etc. Ensuite, utilisez ces informations pour générer des variantes de la forme de champs de vecteurs, par exemple les surfaces minimales, trouver géodésiques sur la surface, sont tous des outils de conception utiles et intéressants. Enfin dans la partie algorithmique, nous utiliserons des algorithmes et traitons des éléments géométriques discrets qui signifie que les géométries concernées ici sont des géométries computationnelle et combinatoires. Dans cette dernière famille d'opérations; différentes méthodes numériques computationnelle vont être utilisés, par exemple des algorithmes d'optimisation et des algorithmes de recherche (comme la méthode de Monte Carlo) et des formes générées de manière itérative, modèle computationnelle. Maintenant que nous avons une idée générale des trois types d'opérations différentes, nous allons commencer par le premier type: les opérations algébriques. Les opérations algébriques sont les bases sur lesquelles tout repose, il y a beaucoup de notions que nous connaissons intuitivement dans l'architecture comme un espace tridimensionnel euclidien, la distance, la projection et beaucoup d'autres, mais nous ne connaissons pas leur formulation mathématique. Dans cette recherche comme mentionné plus tôt, nous essayons de combler l'écart entre l'abstrait et l'intuitive, de sorte qu'une approche mathématique appropriée pour la conception peut fonctionner. Nous commençons par expliquer le monde où nous faisons toutes ces formes à savoir l'espace euclidien à trois dimensions, il est aussi l'espace dans lequel nos variétés sont soit immergées ou submergées et où nous allons appliquer nos opérations. Il est tout d'abord un \mathbb{R} -espace vectoriel normé avec une norme appelée la norme euclidienne. Afin de bien définir un espace euclidien nous avons besoin de quelques autres notions qui nous aideront à comprendre sa construction mathématique, le premier de ces serait la notion fondamentale d'un groupe et comment nous pouvons aller de groupe à l'autre en utilisant des applications linéaires (morphismes).

Groupe et morphisme de groupe [1]

est une structure algébrique constituée d'un ensemble non vide G , muni d'une loi interne associative \diamond , admettant un élément neutre, et tel que tout $x \in G$, x possède un inverse

si $x \diamond y = y \diamond x \implies G$ est appelé un groupe abélien ou commutatif

Nous disons que G est un groupe si et seulement si

\diamond associative : $\forall a, x, y \in G, (a \diamond x) \diamond y = a \diamond (x \diamond y)$

$\exists e$ est l'élément neutre : $\forall a \in G, e \diamond a = a \diamond e = a$

$\exists a'$ est l'inverse de a : $\forall a \in G, a \diamond a' = a' \diamond a = e$

$H \subset G$ est un sous-groupe de G si $\forall x, y \in H, x' \diamond y \in H$

$Z(G) = \{z \in G \mid \forall g \in H, z \diamond g = g \diamond z\}$ est le centre du groupe G

$H_1, H_2 \subset G$ sous groupes conjugués de G si $\forall h_1 \in H_1, \exists g \in G$ et $h_2 \in H_2 \mid h_1 = g^{-1} h_2 g$

(G, \diamond) et $(G', *)$, deux groupes et $f : G \rightarrow G'$,

f est un homomorphisme $\iff \forall x, y \in G, f(x \diamond y) = f(x) * f(y)$

f est un isomorphisme si bijective et f est un endomorphisme si $(G, \diamond) = (G', *)$

Action de groupe [1]

G un groupe, X un ensemble alors l'action de G sur X est donnée par

$G \times X \rightarrow X, (g, x) \rightarrow g.x$ vérifiant que

$\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X, g_1.(g_2.x) = (g_1 g_2).x$ et $1_G.x = x$ (où 1_G = élément neutre de G)

si $\forall x, y \in X, \exists g \in G \mid y = g.x$ l'action est transitive

si $\forall x \in X, g.x = x \iff g = 1_G$ l'action est libre

$x, y \in X, \sim$ est une relation d'équivalence si et seulement si il est

réflexive : $x \sim x$, symétrique : $x \sim y \implies y \sim x$ et transitive : $x \sim y$ et $y \sim z \implies x \sim z$

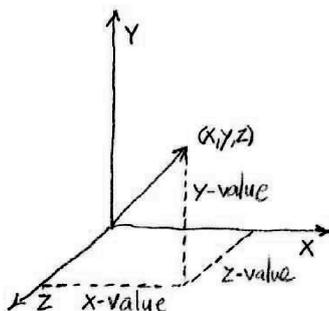
X/G est l'ensemble quotient de la relation d'équivalence $y \sim x$ si $y = g.x$

$\pi : X \rightarrow X/G, x \mapsto \bar{x}$ est la projection canonique

$\bar{x} = G.x = \{y \in X \mid y = g.x, \forall g \in G\} = \{y \in X \mid y \sim x\}$

L'espace vectoriel

Après avoir défini le groupe, nous pouvons passer à la définition de l'espace vectoriel sur un corps de scalaires, le corps de scalaires est tout simplement l'ensemble où les coordonnées d'un vecteur viennent. Tout vecteur est un tuple de cette forme (v_1, \dots, v_n) où les v_i pour $i=1, \dots, n$ sont des nombres réels (mais ils peuvent aussi être des nombres complexes ou des éléments de n'importe quel corps). Nous verrons ci-dessous que un espace vectoriel est un ensemble E d'éléments appelés vecteurs (c. coordonnées des points) avec une loi interne de l'addition de vecteurs et une loi externe de la multiplication par les scalaires (éléments du corps K) où l'ensemble E muni de la loi d'addition est un groupe abélien. Cela semble un peu abstrait, mais il est assez intuitive, par exemple, lorsque nous additionnons deux vecteurs (points) dans l'espace euclidien nous obtenons encore un vecteur dans le même espace euclidien et si l'on divise ce résultat par deux on obtient le point milieu entre ces deux points initiales.



Représentation d'un espace vectoriel de dimension trois

Espace vectoriel [2]

\mathbb{K} un corps de scalaires ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C})

E un ensemble dont les éléments sont appelés vecteurs,

E a deux lois

une loi interne « + » : $E^2 \rightarrow E$, appelée loi d'addition ou somme vectorielle, $(E, +)$ est un groupe abélien

une loi extérieure à la gauche « • » : $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$, appelé multiplication par un scalaire

$\forall u, v \in E$, et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$u + v = v + u$ et $u + (v + w) = (u + v) + w$, (i.e. commutative et associative)

$\exists 0_E$ élément neutre | $0_E + v = v$

$\forall u \in E$ a opposé un, noté $-u$ | $u + (-u) = 0_E$

$\lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$, (i.e. distributive sur la gauche par rapport à la loi « + » de E)

$(\lambda + \mu) \cdot u = (\lambda \cdot u) + (\mu \cdot u)$, (i.e. distributive sur la droite par rapport à l'addition du corps \mathbb{K})

$(\lambda\mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$, (i.e. associatives sur la droite par rapport à la multiplication dans \mathbb{K})

$1 \cdot u = u$,

(i.e. l'élément neutre multiplicatif du corps \mathbb{K} , noté 1 est neutre sur la gauche pour la loi externe « • »)

$\lambda \cdot 0_E = 0_E$, (i.e. 0_E est absorbant à droite pour la loi « • »)

$0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$, (i.e. le produit de tout vecteur de E par un scalaire)

$-1 \cdot u = -u$, (i.e. $-v$ (l'opposé de v) est le produit de v par le scalaire -1)

Base de l'espace vectoriel [2]

$\epsilon = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs linéairement indépendants

$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \implies \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = 0$

$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$

$\implies \epsilon = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E

Il est tout à fait naturel après avoir défini l'espace vectoriel; de définir le sous-espace vectoriel, par exemple un sous-espace vectoriel de l'espace euclidien à trois dimensions, est le plan euclidien qui contient les vecteurs qui ont coordonnée z nulle.

Sous-espace vectoriel [2]

$F \subset E, F \neq \emptyset$

stable pour l'addition vectorielle et la multiplication par un scalaire (combinaison linéaire)

$\forall u, v \in F$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$\lambda u + \mu v \in F$

ce sous ensemble F contient l'opposé de chacun de ses vecteurs

$\forall u \in F \exists v \in F \mid u + v = 0_E$ (i.e. $v = -u$)

F est le sous – groupe de $(E, +)$

F_1 et F_2 sont des sous – espaces de E sont en somme directe $F_1 \oplus F_2 \iff F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$

F_1 et F_2 sont des sous – espaces de E sont complémentaires $\iff F_1 \oplus F_2 = E$

F_1, \dots, F_n sont des sous – espaces de E , alors $\sum_{i=1}^n F_i = \{x \in E \mid \exists (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, x = x_1 + \dots + x_n\}$

La norme

Venons-en maintenant à la définition de la norme euclidienne qui conduit à la définition de l'espace euclidien. Pour ce faire, nous définissons de quelques notions importantes à savoir la forme bilinéaire symétrique et sa forme quadratique et la signature de cette forme quadratique.

Norme euclidienne [3]

$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\|\cdot\|$ norme euclidienne sur E qui vérifie, $\forall x \in E$

séparabilité : $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$ vecteur nul

positivité : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

inégalité triangulaire : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, $x \in E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$

Forme bilinéaire symétrique [3]

E est un \mathbb{R} – espace vectoriel,

$\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique si $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ and $\forall x, y, u, v \in E$

$\varphi(\lambda x + \mu u, y) = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(u, y)$ and $\varphi(x, \lambda y + \mu v) = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(x, v)$

Forme quadratique [3]

E est un \mathbb{R} – espace vectoriel, $\dim E = n$,

φ est une forme bilinéaire symétrique et $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ quadratic form

$q(x) = \varphi(x, x)$ and $q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$

$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$,

$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (x_i y_j + x_j y_i)$

après la réduction de Gauss et de la signature $\exists n$ formes linéairement indépendantes : v_1, \dots, v_n

$q = \alpha_i [v_i]^2$, $\alpha_i \in \{1, 0, -1\}$, $\text{Sign}(q) = \{\#\{i : \alpha_i = 1\}, \#\{i : \alpha_i = -1\}\}$

q est définie positive si sa signature est $(n, 0) = (\dim E, 0)$, à savoir $\forall x \in E$, $q(x) = \varphi(x, x) > 0$

Enfin, nous définissons le produit scalaire qui est l'ingrédient principal pour fabriquer l'espace euclidien. Il s'agit essentiellement de la règle selon laquelle on mesure la distance entre deux points x, y dans l'espace. En d'autres termes la longueur de leur vecteur $\vec{xy} = v = y - x$ which is $\sqrt{\langle v, v \rangle}$

Produit scalaire [3]

est une forme bilinéaire symétrique définie positive, $\|\cdot\|$ la norme associée

$\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $\forall x, y \in E$, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2$

inégalité triangulaire : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

inégalité de Cauchy Schwarz : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

$\forall x, y \in E$, θ angle entre x, y où $\theta \in [0, \pi]$, $\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \iff -1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1$

Maintenant, avec les définitions précédentes, nous sommes en mesure de définir l'espace euclidien comme suit

Espace euclidien [3]

est un \mathbb{R} – espace vectoriel muni d'un produit scalaire, $\dim E = n$

L'espace euclidien

L'espace euclidien de dimension trois est un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, $\dim E = 3$ avec la base canonique (e_1, e_2, e_3) comme sa base où e_1 est le vecteur colonne $(1,0,0)$, e_2 est le vecteur colonne $(0,1,0)$ et e_3 est le vecteur colonne $(0,0,1)$. Maintenant que nous avons défini l'espace euclidien \mathbb{R}^3 nous pouvons commencer par définir la transformation qui nous permettra de générer de nouvelles formes à partir des initiales, nous allons nous concentrer principalement sur les transformations linéaires, affines et projectives, nous devons aussi voir les définitions de formes dans la base canonique. On a vu à cette définition du cylindre $\chi(u, v) = (a \cos(u), b \sin(u), c v)$, cette définition peut aussi s'écrire plus explicitement comme une combinaison linéaire des vecteurs de base canoniques (e_1, e_2, e_3) , à savoir dans cette forme $\chi(u, v) = (a \cos(u)) e_1 + (b \sin(u)) e_2 + (c v) e_3$. Dans cette forme, nous pouvons voir clairement que l'application $\chi(u, v)$ est rien d'autre qu'une application à valeurs dans \mathbb{R}^3 , ce qui signifie que l'évaluation de $\chi(u, v)|_{(u,v)}$ va donner un vecteur qui est une combinaison linéaire de (e_1, e_2, e_3) . Cela signifie que pour le même équation écrite dans une autre base va donner une version déformée du cylindre.

Définition de la forme dans une base de l'espace euclidien \mathbb{R}^3

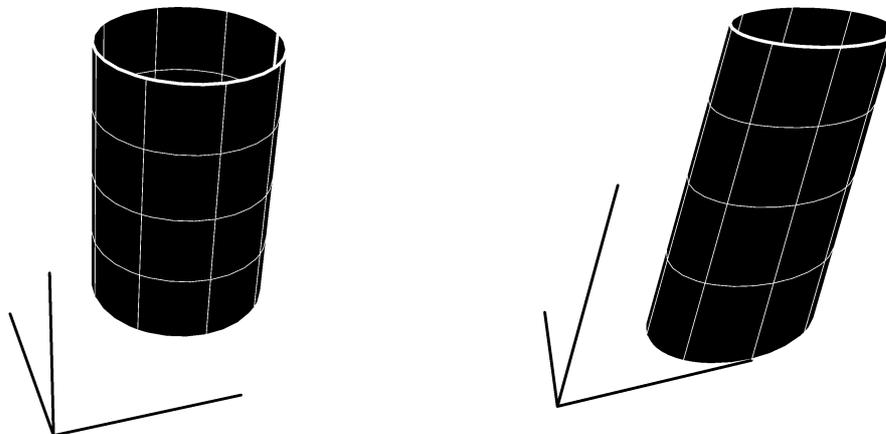
(e_1, e_2, e_3) est la base canonique, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\chi(u, v) = (1, 1, 0) + \frac{1}{2} \cos(u) e_1 + \frac{1}{2} \sin(u) e_2 + \frac{v}{4} e_3$$

Maintenant, si nous prenons la même équation et l'écrire est une autre base de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 (b_1, b_2, b_3) où il n'est pas une base orthonormée, nous pouvons voir dans la figure ci-dessous la déformation de la forme (cylindre). Cependant, dans cette recherche, nous considérerons toujours la base canonique la base de notre espace euclidien \mathbb{R}^3

(b_1, b_2, b_3) est la base canonique, $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\chi(u, v) = \chi(u, v) = (1, 1, 0) + \frac{1}{2} \cos(u) b_1 + \frac{1}{2} \sin(u) b_2 + \frac{v}{4} b_3$$



Représentation d'un cylindre dans la base canonique et d'une base non orthonormée de l'espace euclidien \mathbb{R}^3

Applications entre espaces vectoriels

Premièrement, nous allons considérer la transformation linéaire à savoir de transformation qui sont produites en multipliant le vecteur par une matrice nommée matrice de transformation. La translation n'est pas une transformation linéaire mais une transformation affine dont la partie linéaire est la matrice d'identité. Nous allons montrer plus en détail comment les transformations affines fonctionnent et comment elles sont utiles dans la conception architecturale, en fait, toute transformation affine est un produit semi-direct de traduction et une transformation linéaire. Alors d'abord, nous définissons une application linéaire, à savoir une application qui prend des vecteurs comme ses variables et c'est la façon dont nous nous déplaçons entre différents espaces vectoriels ou dans le même espace vectoriel. Dans cette recherche, nous allons nous concentrer principalement sur les applications linéaires qui envoient un espace vectoriel dans lui-même à savoir endomorphismes c'est parce que la plupart de nos objets sont définis dans \mathbb{R}^3 et les images de leurs transformations sont également dans \mathbb{R}^3 .

Application linéaire (homomorphisme de \mathbb{K} -espaces vectoriels) [3]

E, F sont des \mathbb{K} – espaces vectoriels, f est une application $f : E \rightarrow F$ telle que $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $\forall x, y \in E$

$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$, f est additif et homogène

si f est bijective $\implies f$ est un isomorphisme, si $E = F \implies f$ est un endomorphisme,

si f is bijective et $E = F \implies f$ est un automorphisme

$L(E, F)$ est l' espace vectoriel des applications linéaires de E à F ,

$\text{Isom}(E, F)$ est l' ensemble des isomorphismes de E à F

$L(E)$ est l' espace vectoriel des endomorphismes de E , $GL(E)$ est le groupe des automorphismes de E

les applications linéaires peuvent être représentés dans une base donnée par une matrice

Théorème du rang [3]

$\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ est le noyau de f

$\text{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\} = f(E)$ est l' image de f

$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$

Matrice de transformation [4]

E est un \mathbb{K} – espace vectoriel, $T : E \rightarrow E$, $T(x) = Ax$,

transformation linéaire, $\epsilon = (e_1, \dots, e_n)$ base canonique de E

$\implies A = \text{mat}_\epsilon(T) = (T(e_1) \dots T(e_n))$

par exemple, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $T(x) = \lambda x \implies A = \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$

En deux dimensions, les transformations linéaires peuvent être représentés en utilisant une matrice 2×2

Endomorphisme d'un espace vectoriel [3]

\mathbb{R}^n est un espace vectoriel de $\dim = n$, $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est un endomorphisme

$A = \text{mat}_\epsilon(u)$ est la représentation matricielle de u dans la base ϵ ,

A est un inversible (non singulier) application linéaire

A préserve l' orientation si $\det(A) > 0$ et A renverse l' orientation si $\det(A) < 0$

Orthogonal endomorphism [3]

u est un endomorphisme orthogonal (A est une transformation orthogonale) si

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|u(x)\|^2 = \|Ax\|^2 = \|x\|^2 = {}^t x x = \langle x, x \rangle$

$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = {}^t x {}^t A A y = {}^t x y = \langle x, y \rangle$

une rotation de \mathbb{R}^n est une transformation orthogonale qui préserve l' orientation

L'espace affine

Une autre notion importante est l'espace affine. Par exemple, si nous voulons faire pivoter un objet en réalité, nous le faisons en choisissant une origine et un axe autour duquel il sera tourné. Ce choix de l'origine peut être considérée comme une translation ou d'un déplacement de l'espace vectoriel à partir de l'origine canonique à la nouvelle origine, cette copie déplacé est un espace affine.

Espace affine [5]

E est ensemble non vide, muni d'un action de groupe libre et transitif de l'espace vectoriel $(\vec{E}, +)$ sur E

$(\vec{E}, +) \times E \rightarrow E, (\vec{v}, p) \rightarrow \vec{v}.p = p + \vec{v}$ vérifiant que

$\forall p, q \in E, \exists \vec{v} \in \vec{E} \mid q = p + \vec{v}$ (i.e. $\vec{v} = \overrightarrow{pq}$) and if $p + \vec{v} = p \implies \vec{v} = 0_{\vec{E}}$, or $\dim E = \dim \vec{E}$

Sous-espace affine [5]

Soit $O \in E, \forall F \subset E, F = O + \vec{F}$ est le sous – espace affine avec un sous – espace vectoriel directeur $\vec{F} \subset \vec{E}$

Coordonnées barycentriques et cartésiennes [5]

$S = \{p_0, p_1, \dots, p_k\} \subset E \implies F = \langle S \rangle$ est le plus petit sous – espace affine contenant S

les p_i sont affinement inependant si $\forall i,$

les vecteurs $\{\overrightarrow{p_i p_j}, j = 0, \dots, k \text{ and } i \neq j\}$ sont linéairement indépendants

$\implies \dim \langle S \rangle = k$ et $\forall p \in \langle S \rangle, \exists ! (\lambda_0, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^{k+1}, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ et $\forall o \in E, \overrightarrow{op} = \sum_{i=0}^k \lambda_i \overrightarrow{op_i}$

$(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$ sont les coordonnées barycentriques par rapport à $S,$

et nous pouvons écrire : $p = \lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_k p_k$

soit $p_0 = o \implies \overrightarrow{op} = \lambda_1 \overrightarrow{op_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{op_k}$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ sont les coordonnées cartésiennes

de p par rapport à l'origine o et la base et $\{\overrightarrow{op_1}, \dots, \overrightarrow{op_k}\}$ de \vec{F}

Vectorialization de l'espace affine E à l'espace vectoriel \mathbb{R}^n (non – canonique) [5]

E espace affine, \vec{E} son espace vectoriel directeur avec $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ comme sa base canonique

soit $o \in E$ sera appelé l'origine, $\theta_o : E \rightarrow \vec{E}, \theta_o(p) = \overrightarrow{op}$ est une bijection avec $\theta_o^{-1}(\vec{u}) = o + \vec{u}$

\implies nous pouvons ajouter à E une structure d'un espace vectoriel E_o appelé le vectorialization de E en o

par les formules $p + q = r \mid \overrightarrow{op} + \overrightarrow{oq} = \overrightarrow{or}, \lambda.p = \lambda \overrightarrow{op}$ et son élément neutre $0_{E_o} = o$

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow E, f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = P = o + \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$ est un isomorphisme de \mathbb{R}^n à E_o

$\implies (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les coordonnées cartésiennes of p relative to the origin o and the canonical base

L'extension vectorielle de l'espace affine (canonique) [5]

E espace affine, \vec{E} son espace vectoriel directeur

\hat{E} est l'extension vectorielle de $E \mid E$ hyperplan affine, \vec{E} hyperplan vectoriel

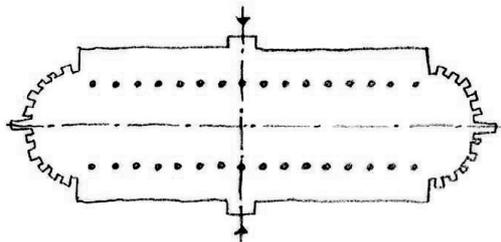
$\hat{E} = \vec{E} \cup \{\lambda x \mid x \in E, \lambda \in \mathbb{K}^*\}$ avec $1x = x$

$h : \hat{E} \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire $\mid h(\hat{v}) = 0$ si $\hat{v} \in \vec{E}$ et $h(\hat{v}) = \lambda$ si $\hat{v} = \lambda x$

$\vec{E} = \ker h$ et $E = h^{-1}(1)$

5.2. Symétrie et géométrie

L'intérêt dans les opérations algébriques a été intrinsèque dans la conception architecturale à travers toute son histoire, cela est dû à l'importance de la notion de symétrie dans l'architecture. Depuis la conception architecturale est largement basée sur la composition, elle repose sur la symétrie dans de nombreuses façons pour générer des formes et des motifs, de la conception des plans d'étage aux façades et toitures. En effet, les opérations algébriques comme la translation, l'homothétie et la rotation ont formé la palette générale de transformation dans la conception architecturale pour la plupart de son histoire. Que très tard, que les architectes ont commencé à avoir un intérêt dans d'autres types de transformation, à savoir infinitésimal au lieu de algébrique. Jusqu'au milieu du XXe siècle, les transformations d'éléments architecturaux en rapport à une surface de base (par exemple des ouvertures sur la façade) ont été confinés à des surfaces planes. Mais, avec l'intérêt croissant pour les surfaces courbes un autre type de transformation sera définie, à savoir celle qui utilise un champ de vecteurs comme une direction variable au lieu d'un seul vecteur. Ce type de transformation est considéré dans la section des opérations d'analyse de cette recherche où les notions de champs de vecteurs et courbes intégrales sont considérés.



Représentation d'un plan d'étage de basilique romaine

Nous allons maintenant définir la symétrie du point de vue de la théorie des groupes, à savoir la définition du groupe de symétrie d'un objet. Le groupe de symétrie d'un objet est le groupe de toutes les isométries sous lequel l'objet est invariant, avec la composition comme la loi du groupe, c'est un sous groupe du groupe d'isométrie de l'espace concerné. Le principal groupe de symétrie sur lequel nous allons nous concentrer dans cette recherche est le groupe de symétrie de l'espace euclidien connu comme le groupe euclidien qui est un sous groupe du groupe affine. Le groupe de symétrie est parfois appelé le groupe de symétrie complète afin de souligner ce qu'il comprend les isométries qui renversent l'orientation (comme la réflexion), sous lequel la forme est invariante. Le sous groupe des isométries qui préservent l'orientation (comme translations et rotations) qui laisse l'objet invariant est appelé le groupe de symétrie propre. Tout groupe de symétrie dont les éléments ont un point fixe commun, ce qui est vrai pour tous les groupes de symétrie finis et les groupes de symétrie des figures bornées sont représentés comme un sous groupe du groupe orthogonal en choisissant l'origine pour être le point fixe. Le groupe de symétrie propre est un sous groupe du groupe spécial orthogonal aussi connu comme le groupe de rotation. Les groupes de symétrie peuvent être soit des groupes de symétrie discrètes ou continues. Le groupe de symétrie discrète vient dans trois types: les groupes de ponctuels finis, y compris seulement des réflexions, des rotations, des inversions et roto-inversions, les groupes de réseau infini, y compris que des translations et le groupe d'espace infini qui combine des éléments des deux types. Le groupe de symétrie continue, qui contient de rotation d'angles arbitrairement petits et de translations de distances arbitrairement petites, ces groupes de symétrie sont étudiés comme des groupes de Lie. Deux figures géométriques sont considérées comme étant du même type de symétrie si leurs groupes de symétrie sont des sous groupes conjugués du groupe euclidien.

Groupe de symétrie [6]

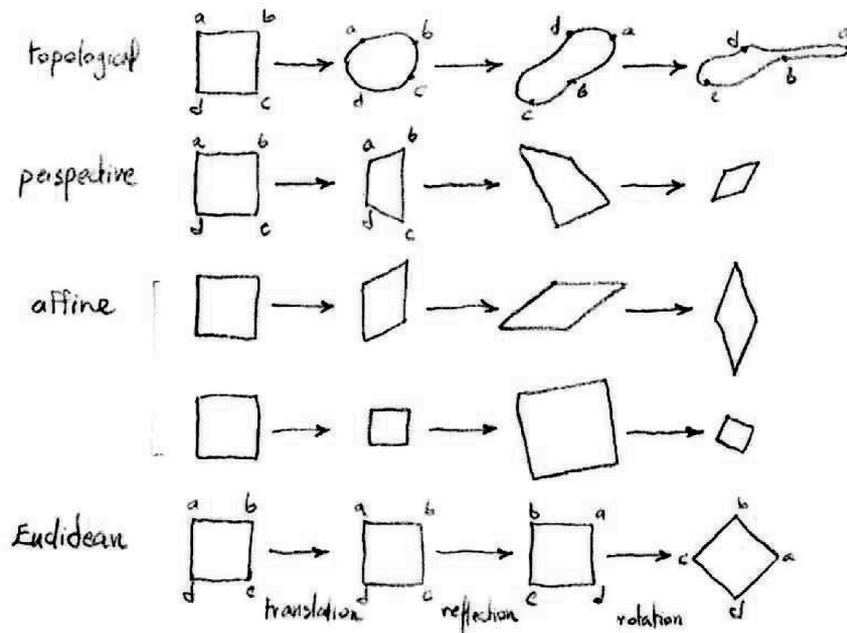
X est un ensemble, G est un groupe et $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \rightarrow g.x$ est une action de groupe de G sur X

$g.x = y \implies y$ est symétrique à x

$S = \{g \in G \mid g.x = x\} \subset G$ est le groupe de symétrie des objets dans X

Les groupes de symétrie d'une forme

Afin de clarifier cette notion de symétrie, nous allons donner un tableau des différents types de groupes de symétrie principalement celles de l'espace affine, l'espace euclidien et l'espace projectif (i.e. les groupes de transformations affines, euclidien et projectives) et leurs géométries respectives. En plus des transformations topologiques continues qui ne conserve que des notions topologiques (comme l'ouverture, la fermeture, la compacité, la connexité, etc) qui est liée plus à la géométrie différentielle. L'idée générale est illustrée dans l'image ci-dessous, qui montre toutes les façons dont un carré peut être transformée. La transformation dans la rangée 1 est la dispersion, la seule propriété qui est préservée dans ce cas est que chaque point correspond à un point. La transformation de la ligne 1 est: dispersion, la seule propriété qui est préservée dans ce cas est que chaque point correspond à un point. La transformation dans la rangée 2 est continue et de préserver également la séquence de points résultant en une figure topologiquement fermé. Sous la transformation de perspective dans la rangée 3, la propriété: ligne droite, est également conservé. La transformation affine, dans la rangée 4 conserve tout ce qui a précédé et aussi le parallélisme, d'ailleurs quand le vrai angle est conservé, la forme peut encore être transformé par mettre à l'échelle, les formes restent les mêmes comme dans la rangée 5. Enfin à la ligne 6, la taille réelle est également conservée, ce qui signifie que la forme conserve toutes ses propriétés, mais peut encore être transformé par la translation et deux opérations de symétrie: réflexion et de rotation. Les deux niveaux inférieurs sont liés à la géométrie métrique descendu de l'antiquité grecque, le troisième niveau concerne la géométrie affine, le quatrième niveau de la géométrie projective, et le cinquième niveau de la topologie. En géométrie métrique (euclidienne), le carré est toujours représenté par un carré dans le sens habituel, alors que dans la géométrie affine tout parallélogramme y compris le carré métrique représente un carré; qui illustre le fait que la géométrie (euclidienne) métrique est comprise par la géométrie affine: la dernière est plus grand, plus riche et plus abstrait, et dans ce sens plus complexe que la précédente. La géométrie Affine est à son tour comprise par la géométrie projective, où tout quadrilatère peut représenter un carré donc un nouveau niveau de complexité est atteint, et par cette logique, un niveau encore plus élevé de complexité est atteint avec la topologie, depuis le carré peut maintenant être représentée par toute forme fermée. Cela nous donne une idée intuitive du programme d'Erlangen de Félix Klein où chaque géométrie est considérée comme un cas particulier de son prédécesseur plus abstrait; du début intuitive nous allons maintenant formaliser ces notions en donnant leur description mathématique en utilisant le langage de la théorie des groupes.



Représentation des groupes de symétrie d'une forme carrée

5.3. La géométrie euclidienne vs l'arithmétique pythagoricienne en architecture

Avec les définitions formelles des différentes géométries comme les différents groupes de symétrie, nous voudrions donner une certaine attention à la plus pertinente de ces groupes à l'architecture à savoir le groupe euclidien et sa géométrie: la géométrie euclidienne. Sa présence en architecture a été et est toujours le plus important de tous les autres géométries, mais il est moins connu que la géométrie euclidienne n'était pas la seule présence des mathématiques en architecture, il a eu le système arithmétique pythagoricienne de proportions comme son principal rival. En montrant ce bref historique, nous allons compter sur un article publié dans Nexus Journal en 2001 par le professeur Michele Sbacchi de l'université de Palerme intitulé: *Euclidism et la théorie de l'architecture* [7]. La géométrie euclidienne est l'une des branches fondamentales de géométrie, elle est restée presque inchangée, nous l'utilisons encore aujourd'hui comme elle a été codifiée par Euclide d'Alexandrie en treize livres appelé *les éléments*. Ce livre très influent traité géométrie planaire et contient les définitions de base des éléments géométriques tels que les célèbres point, ligne et surface, un point, c'est ce qui n'a pas de part, une ligne a une longueur sans largeur et une surface est celle qui a longueur et la largeur. En plus de toute une série de propositions où les caractéristiques des figures géométriques plus complexes sont définis. Euclide fournit également des procédures pour générer des formes et des solides planes et à résoudre des problèmes géométriques. Il est assez impressionnant que jusqu'au 17ème siècle, la géométrie euclidienne a été tout simplement la géométrie tout court, car ce n'est qu'à partir de la seconde moitié de ce siècle que d'autres branches de géométrie ont été développés, notamment la géométrie analytique et projective et beaucoup tard la topologie. Ces disciplines plutôt que de contester la validité de la géométrie euclidienne, elles ont ouvert des compréhensions complémentaires; confirmant ainsi l'efficacité de la géométrie euclidienne, mais certains sujets euclidiennes subi des attaques violentes et encouragés d'immenses débats, par exemple le 5ème postulat (le postulat des parallèles). Euclide n'était guère un génie isolé; historiens ont précisé qu'il a attiré d'autres sources essentiellement Theatetus et Eudoxs, donc plutôt que d'inventer il a surtout systématisé un corpus de connaissances qui ont circulé autour de savants dans des formes un peu rugueuses. *Les éléments*, représentait un grand pas en avant en particulier par rapport à la façon fragmentaire dans lequel la géométrie a été connu et transmis, il est vite devenu un livre extrêmement utile pour tous les domaines où la géométrie a été appliquée. Optique, mensuration, l'arpentage, la navigation, l'astronomie et l'architecture, tous bénéficié en diverses manières de ce nouvel ensemble complet de règles capables de surmonter les problèmes géométriques. Suite au destin de la plupart des textes scientifiques grecs, il fut bientôt traduit en arabe et a été connu à travers cette langue pendant près de quinze siècles, une traduction latine bien connue a été faite par Adelard de Bath dans le 12ème siècle mais c'était traduction en latin de Campano de 1482, le premier à être publié. La première traduction anglaise est due à Henry Billingsley en 1570. Non moins important sont les commentaires sur les éléments, si ce n'est que parce qu'ils ont été témoins des débats continus que les érudits ont eu sur le texte. L'architecture, la discipline concernée avec la fabrication de formes, peut-être le plus profité de cette connaissance, il est tout à fait évident, la relation entre l'architecture et la géométrie euclidienne; de Vitruve et jusqu'à l'architecture moderne. Il est vrai que d'autres branches de géométrie qui ont résulté de la 17ème siècle, ont affecté l'architecture comme la géométrie projective et la topologie mais cela reste loin d'être comparable à l'utilisation écrasante de la géométrie euclidienne dans la conception architecturale à travers l'histoire. La pertinence des méthodes euclidiennes pour la réalisation de l'architecture a été soulignée par de nombreux spécialistes, et parmi les maçons et les charpentiers les procédures euclidiennes étaient répandues beaucoup plus qu'on ne le pensait jusqu'ici. Nous pouvons croire que pendant le moyen âge, pour faire de l'architecture, la lignes euclidiennes, facilement établis et visualisées, étaient le plus souvent une bonne alternative à des calculs numérolologiques plus complexes. Par conséquent, nous pouvons supposer qu'une culture euclidienne associée à l'architecture existait depuis longtemps et qu'il a été prééminente parmi les masses et les travailleurs, mais parmi les cercles raffinés de clients et des architectes la tradition assez différente de Vitruve était également en vigueur. Cette tradition a été fondée sur l'idée platonique de Pythagore que les proportions et les rapports numériques réglémentés l'harmonie du monde, toute la théorie, dont le domaine est bien sûr beaucoup plus large que la simple application d'architecture a été construit autour de la notion de proportion, comme Platon compris dans le *Timée*. Il a été fondé sur l'analogie entre les rapports musicaux et visuels établis par Pythagore: il a soutenu que des rapports numériques existaient entre les hauteurs de sons, obtenus avec une certaine musique et l'architecture. En architecture, les numéros utilisés à des fins différentes: la

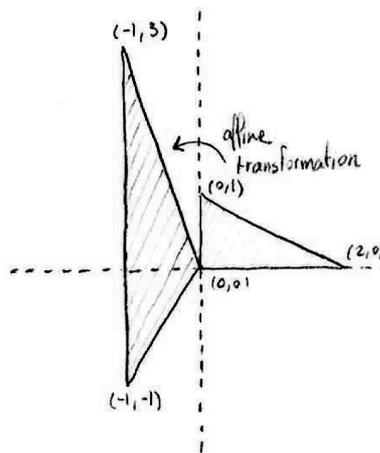
détermination des proportions globales dans les bâtiments et la construction modulaire des ordres architecturaux, le premier considéré les dimensions réciproques de l'hauteur, la largeur et la longueur dans les chambres ainsi que dans le bâtiment dans son ensemble. Le second était un module mis en place généralement à partir de la moitié du diamètre de la colonne à partir de laquelle toutes les dimensions des ordres pourraient être dérivés. L'ordre déterminé le système numérique à adopter, et donc chaque élément de l'ordre architectural a été déterminée par un rapport au module. En effet, il était possible d'exprimer l'architecture par un algorithme, simplement en mentionnant le style une formule numérique a été impliqué et les dimensions de l'ordre pourrait être construit. Si l'on compare maintenant à nouveau ces procédures avec celles euclidiennes, il semble que la différence entre les deux systèmes est significative. Selon Vitruve, multiplications et divisions de nombres réglementées les formes et dimensions architecturales, mais en adoptant des constructions euclidiennes, l'architecture et ses éléments ont été faite de lignes à l'aide d'un compas et une règle. La théorie pythagoricienne des nombres et la géométrie euclidienne des lignes établies ainsi une polarité au sein de la théorie de l'architecture, la dichotomie était une plus générale, étant donné que chaque forme peut être déterminée soit par le traçage d'une ligne ou par calcul numérique. Pendant le moyen âge, la procédure euclidienne et la procédure de Vitruve empiriquement coexistaient dans la pratique de la construction, pendant la Renaissance l'avènement d'une théorie de l'architecture établi basé sur le texte de Vitruve, promus l'aspect de la numérologie néo-pythagoricienne de l'architecture. Leon Battista Alberti, le plus important théoricien de l'architecture de la Renaissance, était bien conscient de la géométrie euclidienne mais il était dans la tradition orthodoxe de Pythagore-Vitruve de rapports numériques. Pour Alberti, le nombre était encore la source la plus fondamentale. Il n'était pas jusqu'à ce que Francesco di Giorgio Martini que les définitions euclidiennes de point, ligne et surface ont fait leur première apparition dans un traité d'architecture, mais plutôt d'une manière non systématique. Serlio va ensuite plus loin, y compris dans son livre des définitions et des constructions euclidiennes, principalement comme motif pour la perspective que pour l'architecture. Dans le 17ème siècle, la situation subissait un changement important; avec le travail de Guarino Guarini, la géométrie euclidienne fait son apparition ouvert dans un traité. Cela est dû à plusieurs raisons, d'abord il était un mathématicien qui lui a fait obligés de considérer la géométrie euclidienne, et il a enseigné les mathématiques à Messine, où des érudits Cela est dû à plusieurs raisons, d'abord il était un mathématicien qui lui a fait obligés de considérer la géométrie euclidienne, et il a enseigné les mathématiques à Messine, où des érudits euclidiennes distingués enseignaient. Pourtant, il est probable que son intérêt pour la géométrie euclidienne élargi, car il y rencontra un milieu scientifique animé et en particulier le mathématicien François Millet de Chales, qui l'a influencé profondément. Guarini dans son traité *Architectura Civile* déclare ses intérêts géométriques en disant que, depuis l'architecture en tant que discipline utilise des mesures dans chacune de ses activités, elle dépend de la géométrie, et au moins veut savoir ses éléments primaires, et donc il s'est mis ces principes géométriques qui sont les plus nécessaires. Le traité contient neuf définitions de point, ligne, surface, angle, angle droit, angle aigu et des lignes parallèles; avec des chapitres consacrés à des surfaces, formes rectilignes et des formes circulaires. Le tout premier traité continue essentiellement de cette manière avec les postulats, d'autres principes et plusieurs transformations euclidiennes typiques, par exemple instructions géométriques comme la façon de tracer une ligne d'un point afin de toucher le cercle. Le cinquième traité porte sur la discipline euclidienne de géodésie: la manière de diviser et de transformer des formes planes en équivalents, certains d'entre eux sont peu développées dans la lumière de leur application architecturale. La position de Guarini est clairement géométrique, par opposition à la tradition arithmétique de Vitruve; dans *Architectura Civile* le cœur de la numérologie de Vitruve est éclipsé par l'approche géométrique alternative. Remarquablement la procédure modulaire, enracinée en nombres, est remplacé par un système mixte où la dimension des éléments architecturaux sont déterminés par des constructions géométriques et seulement dans certains cas, par des opérations numériques. Guarini n'était pas le seul à faire revivre cette culture euclidienne dans la théorie architecturale, le traité de l'architecte milanais Carlo Osio également intitulé *Architectura Civile*, présente un système pour les ordres qui est, encore plus géométrique que celui de Guarini. Avec Guarini et Osio la tradition euclidienne est consciemment reconnu dans le domaine de la théorie savant et non plus appartenue à une culture orale et empirique; avec la particularité des leurs traités où les géomètres Euclide et Chales sont préconisés comme autorités architectural, même dans les pièces les plus typiquement architecturales. En *Architectura Civile* les éléments de géométrie assez souvent deviennent simplement les éléments de l'architecture, par exemple un mur est une surface et un dôme est une demi-sphère, par conséquent, la conception

architecturale semble le plus souvent être identifiées avec le dessin architectural. Comme un véritable géomètre Guarini décrit la production du projet plutôt que la production du bâtiment, sans tenir compte de l'aspect constructif de l'architecture en faveur des descriptions détaillées techniques de dessin, à cet égard, il est assez curieux que des outils de dessin sont en fait regroupés sous le titre : instruments architectural. Le problème pour lui n'était pas la façon de construire mais comment dessiner, donc la géométrie euclidienne est devenu une partie de la théorie architecturale, mais elle a aussi entraîné avec lui son essence linéaire. Nous tenons également à mentionner que la raison pour laquelle la géométrie euclidienne était capable de passer de la reconnaissance timide de Martini et Serlio à la grande inclusion de Guarini dans l'architecture est due aux travaux de savants tels que Francesco Barozzi.

5.4. Géométrie affine et euclidienne

5.4.1. Définition du groupe

Nous allons maintenant donner une catégorisation générale de ces opérations de transformations affines à savoir les éléments du groupe affine qui est une extension du groupe linéaire. Un important sous-groupe du groupe affine est le groupe euclidien aussi connu comme le groupe de symétrie de l'espace euclidien (ie le groupe des isométries de l'espace euclidien); ce groupe de symétrie est cruciale pour la conception architecturale et l'utilisation historique en architecture est tout à fait évidente. De ce point de vue (Programme d'Erlangen de Félix Klein), nous lisons la géométrie euclidienne, la géométrie du groupe de symétries euclidien comme une spécialisation de la géométrie affine. Tous les théorèmes affines s'appliquent avec le facteur supplémentaire de la distance euclidienne, dont l'angle peut être déduite. Nous commençons par définir les groupes linéaires et affines, puis nous allons définir la notion de symétrie qui nous permettra de définir le groupe de symétrie de l'espace euclidien.



Représentation d'une transformation affine dans \mathbb{R}^2 d'un triangle à l'autre

Groupes linéaire et affine [5]

$G_L(\vec{E}) = \{f : \vec{E} \rightarrow \vec{E} \mid \text{bijection}\}$ est le groupe linéaire (si $\vec{E} = \mathbb{K}^n \implies G_L(\vec{E}) = GL_n(\mathbb{K})$)

$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ est inversible (i.e. } \det A \neq 0)\}$

$SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid \det A = 1\}$ est le groupe spécial linéaire

$G_A(E) = \{f : E \rightarrow E \mid \text{bijection}\}$ est le groupe affine

$\pi : G_A(E) \rightarrow G_L(\vec{E}), \pi(f) = \vec{f}$ est la projection canonique

$T(E) = \text{Ker } \pi = \{f \in G_A(E) \mid \vec{f} = \text{id}_{\vec{E}}\}$ est le groupe de translation, $T(E)$ sous groupe de $G_A(E)$

le groupe quotient $G_A(E)/T(E)$ est isomorphe à $G_L(\vec{E})$

le groupe de translation $T(E)$ est isomorphe à $(\vec{E}, +)$ (i.e. l'espace vectoriel)

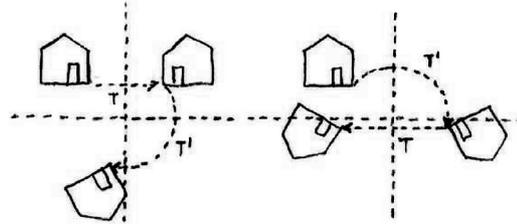
$G_A(E) = (\vec{E}, +) \times G_L(\vec{E})$ produit semi directe

(i.e. $f \in G_A(E)$,

f peut être considéré comme un produit semi direct d'un vecteur de translation et une application linéaire)

Le groupe euclidien

Comme nous avons défini le groupe affine comme le produit semi direct du groupe de translation et le groupe linéaire général, nous allons maintenant définir le groupe euclidien comme le produit direct de semi du groupe de translation et le groupe orthogonal. Le groupe orthogonal de la forme bilinéaire symétrique ou une forme quadratique sur un espace vectoriel est le groupement d'opérateurs linéaires inversibles sur l'espace qui permettent de préserver la forme. Dans cette recherche, nous allons seulement se concentrer sur le produit scalaire sur l'espace euclidien comme notre forme bilinéaire alors le groupe orthogonal correspondant est un ensemble de n matrices carrés orthogonales.



Représentation de transformation euclidienne \mathbb{R}^2

Groupe orthogonal [4]

$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique et $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ forme quadratique où $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire

(e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de \mathbb{R}^n (par choix ou par le processus de Graham – Schmidt)

$$A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \implies \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j) = 1 \text{ si } i = j \text{ et } \varphi(e_i, e_j) = 0 \text{ if } i \neq j$$

pour que $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ préserve φ

$$\implies \varphi(e_i, e_j) = \varphi(A(e_i), A(e_j)) = \varphi\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} e_k, \sum_{l=1}^n a_{j,l} e_l\right) = \sum_{k,l=1}^n a_{i,k} a_{j,l} \varphi(e_k, e_l) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{j,k}$$

$$\text{où } ({}^t A A)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{j,k} = 1 \text{ si } i = j \text{ et } 0 \text{ si } i \neq j \implies {}^t A A = I_n$$

$\implies O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A A = A {}^t A = I_n\}$ est le groupe orthogonal

$SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ est le groupe spécial orthogonal

$O_n(\mathbb{R}) \subset E_n$ (le groupe euclidien), $O_n(\mathbb{R}) = E_n \cap GL_n(\mathbb{R})$

Groupe euclidien [8]

$$E_n \subset G_A(E) \text{ où } \vec{E} = \mathbb{R}^n \implies G_L(\vec{E}) = GL_n(\mathbb{R}), O_n(\vec{E}) = O_n(\mathbb{R}) \text{ et } SO_n(\vec{E}) = SO_n(\mathbb{R})$$

$\pi : E_n \rightarrow G_L(\vec{E}), \pi(f) = \vec{f}$ est la projection canonique

$T(E) = \text{Ker } \pi = \{f \in E_n \mid \vec{f} = \text{id}_{\vec{E}}\}$ est le groupe de translation, $T(E)$ sous groupe de E_n

le groupe quotient $E_n/T(E)$ est isomorphe à $O_n(\vec{E})$

le groupe quotient $E_n^+/T(E)$ est isomorphe à $SO_n(\vec{E})$

$E_n = \left(\vec{E}, +\right) \times O_n(\vec{E})$ produit semi directe

$E_n = \{f \in G_A(E) \mid \vec{f} \in O_n(\vec{E})\}$ est le groupe euclidien (le groupe de symétrie)

$E_n^+ = \{f \in G_A(E) \mid \vec{f} \in SO_n(\vec{E})\}$ est le groupe de symétrie propre

Maintenant, avec l'espace affine, le groupe affine et le groupe euclidien définis, nous pouvons définir le plan affine (et éventuellement la transformations affine).

Application affine [5]

E, E' espaces affines et \vec{E}, \vec{E}' leurs espaces vectoriels directeurs $\left| E = \langle o, e_1, \dots, e_n \rangle \text{ et } E' = \langle o', e_1', \dots, e_m' \rangle \right.$
 $\implies B = (\overrightarrow{o e_1}, \dots, \overrightarrow{o e_n})$ et $B' = (\overrightarrow{o' e_1'}, \dots, \overrightarrow{o' e_m'})$ deux bases de \vec{E} et \vec{E}'

$f : E \rightarrow E'$ est une application affine si $\exists o \in E$ et

$$\vec{f} : \vec{E} \rightarrow \vec{E}' \text{ l'application linéaire attachée } \left| f(p) = f(o + \overrightarrow{o p}) = f(o) + \vec{f}(\overrightarrow{o p}) \right.$$

\vec{f} can be represented by the transformation matrix $A \in M_{n,m}(\mathbb{K}) \implies f(p) = o' + \vec{v} + A \vec{x}$, où $\vec{v} = \overrightarrow{o' f(o)}$

nous identifions E avec \mathbb{K}^n avec l'origine o (i.e. $E_o = \mathbb{K}^n$) et E' avec \mathbb{K}^m avec l'origine o' (i.e. $E_{o'} = \mathbb{K}^m$)

$p \in E = E_o = \mathbb{K}^n \implies p = x_0 o + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \overrightarrow{o p} = x_1 \overrightarrow{o e_1} + \dots + x_n \overrightarrow{o e_n} \implies p = \vec{x}$ dans $E_o = \mathbb{K}^n$
 $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ avec les coordonnées cartésiennes

de p par rapport à l'origine o et la base $\{\overrightarrow{o e_1}, \dots, \overrightarrow{o e_n}\}$ de $E_o = \mathbb{K}^n$

$$\implies f(p) = f(\vec{x}) = \vec{v} + A \vec{x}$$

il est commode d'écrire cette représentation de f comme \hat{f}

où $p = \vec{x} \in E = E_o = \mathbb{K}^n$ est représenté par $\hat{p} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix} \in \hat{E} = \mathbb{K}^{n+1}$

$$\hat{f} : \hat{E} = \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \hat{E}' = \mathbb{K}^{m+1}, \hat{f}(\hat{p}) = \hat{f} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v} + \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} A & \vec{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \vec{x} + \vec{v} \\ 1 \end{pmatrix}$$

si $E = E' = \mathbb{R}^3$ nous avons $\hat{E} = \hat{E}' = \mathbb{R}^4$, $(\overrightarrow{o e_1}, \dots, \overrightarrow{o e_n}) = (\overrightarrow{o' e_1'}, \dots, \overrightarrow{o' e_m'})$ et $o = o' = f(o)$

$$\forall p \in E \implies \hat{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \text{ est la transformation linéaire}$$

$$\hat{f} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f(p) = \hat{f}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & v_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & v_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + a_{1,3} x_3 + v_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + a_{2,3} x_3 + v_2 \\ a_{3,1} x_1 + a_{3,2} x_2 + a_{3,3} x_3 + v_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si A est une matrice orthogonale $\implies f$ est une transformation euclidienne

avec cette construction, nous sommes en mesure de transformer des formes dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 en

$$\text{ajoutant simplement 1 comme quatrième coordonnée à un point (i.e. } p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \hat{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4)$$

puis en appliquant le plan affine (représenter par une matrice augmentée de $M_4(\mathbb{R})$) puis enlever enfin le 1 à

$$\text{nouveau du vecteur l'image (i.e. } \hat{f}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \rightarrow f(p) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3)$$

5.4.2. Transformations affines isométriques (i.e. transformation euclidienne)

Symétrie de translation

La première transformation affine nous construisons est la translation aussi connu comme symétrie de translation. La traduction est l'un des la transformation la plus connue et utilisée dans la conception architecturale à travers son histoire. De copier éléments dans un, deux ou trois directions (par exemple, colonnes, poutres, arcs, fenêtres, escaliers marches, etc) est la forme la plus basique et la plus simple de la composition des formes et des motifs. La translation est une symétrie isométrique savoir qu'il garde la forme non déformée après son application. La translation dans une direction a été utilisé dans l'organisation des éléments structurels par exemple colonnes, poutres, arcs et des poutres etc alors que la traduction dans deux directions a été le principal outil de conception de façade en créant un tableau à deux dimensions de fenêtres. La translation en trois dimensions peut être utilisé dans l'étude de la composition volumétrique dans la première phase de la conception. Les exemples de symétrie de translation en architecture sont très nombreux puisque l'on peut à peine imaginer l'architecture sans translation. Classique styles architecturaux ont fait usage de la traduction des colonnes et des arcs pour la conception des temples et des églises mais le style qui a poussé à sa limite traduction comme un outil esthétique serait le haut modernisme.

Translation (symétrie isométrique propre) [5]

$$E = \langle o, e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathbb{R}^3, f : E \rightarrow E,$$

$$f(p) = t_{\vec{v}}(p) = p + \vec{v} \text{ est la translation, } f \text{ est une isométrie} \iff \|f(p)\| = \|p\|$$

$$\hat{E} = \mathbb{R}^4, \hat{f}(\hat{p}) \text{ est la matrice représentant la translation dans } \hat{E} = \mathbb{R}^4$$

$$\forall p, v \in \mathbb{R}^4, \hat{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \hat{f}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \\ x_3 + v_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

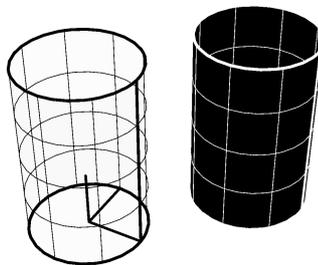
Translation d'une forme dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3

Nous allons utiliser le cylindre comme notre forme initiale et appliquer la traduction sur elle. Depuis affine (de cartes linéaire prolongée) prend vecteurs comme des variables, nous définissons notre forme comme un ensemble de vecteurs qui sont l'image de l'application paramétrique.

$$I_m(\chi) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid p = \chi(u, v), \text{ où } \chi(u, v) = (\cos(u)) e_1 + (\sin(u)) e_2 + \left(\frac{v}{2}\right) e_3, (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}$$

soit $\vec{v} = (2, 2, 0)$ le vecteur de translation

$$t_{\vec{v}} : E \rightarrow E \text{ la translation par le vecteur } \vec{v}, t_{\vec{v}}(p) = (2 + \cos(u)) e_1 + (2 + \sin(u)) e_2 + \left(\frac{v}{2}\right) e_3$$



Représentation d'une translation d'un cylindre dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3

Symétrie de rotation en architecture

la Symétrie de rotation est également fait partie des symétries isométriques, et est une technique de composition très important dans la conception architecturale. Comme toutes les autres opérations algébriques, il a été plus utilisé dans l'architecture classique que dans l'architecture moderne et contemporaine. Il a été poussé à son comble avec le style architectural byzantin et son intérêt dans les structures en forme de dôme. L'architecture islamique montre quelques-uns des exemples les plus élaborées de l'utilisation de la symétrie de rotation non seulement dans les dômes, mais aussi dans les motifs graphiques utilisés pour décorer les façades et les intérieurs.

Rotation (symétrie isométrique propre) [5]

Fix $(r) = \{p \in E \mid r(p) = p\}$ est l'axe de rotation

$E = \langle o, e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathbb{R}^3$, $r: E \rightarrow E$,

$r(p) = r(m + \overrightarrow{m p}) = m + \vec{r}_\theta(\overrightarrow{m p})$ est la rotation de centre m et d' angle θ

\vec{r}_θ rotation vectorielle sur les axes x , y et z est représenté par la matrices orthogonales

$$\vec{r}_{x,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{y,\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{z,\theta} = \text{mat}_\epsilon(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{r}_{\phi,\theta,\psi} = \vec{r}_{z,\psi} \vec{r}_{y,\theta} \vec{r}_{x,\phi}$ préserve l'orientation correspondant à la rotation

dans le sens horaire avec les angles d' Euler ϕ , θ , ψ avec la convention x , y , z

$$\vec{r}_{\phi,\theta,\psi} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) & -\cos(\phi) \sin(\psi) + \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) & \sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) \\ \cos(\theta) \sin(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) & -\sin(\phi) \cos(\psi) + \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) \\ -\sin(\theta) & \sin(\phi) \cos(\theta) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

rotation générale autour d' un axe $\overrightarrow{m a}$ où $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{m a}}{\|\overrightarrow{m a}\|} = (u_1, u_2, u_3)$ est son vecteur normalisé

$$\vec{r}_{\overrightarrow{m a},\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) + u_1^2(1 - \cos(\theta)) & u_1 u_2(1 - \cos(\theta)) - u_3 \sin(\theta) & u_1 u_3(1 - \cos(\theta)) + u_2 \sin(\theta) \\ u_1 u_2(1 - \cos(\theta)) + u_3 \sin(\theta) & \cos(\theta) + u_2^2(1 - \cos(\theta)) & u_2 u_3(1 - \cos(\theta)) - u_1 \sin(\theta) \\ u_1 u_3(1 - \cos(\theta)) - u_2 \sin(\theta) & u_2 u_3(1 - \cos(\theta)) + u_1 \sin(\theta) & \cos(\theta) + u_3^2(1 - \cos(\theta)) \end{pmatrix}$$

$\hat{E} = \mathbb{R}^4$, $\hat{r}(\hat{p})$ est la matrice représentant la rotation dans $\hat{E} = \mathbb{R}^4$

$$\forall p, v \in \mathbb{R}^4, \hat{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{r}_{\phi,\theta,\psi}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) & -\cos(\phi) \sin(\psi) + \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) & \sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) & v_1 \\ \cos(\theta) \sin(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) & -\sin(\phi) \cos(\psi) + \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) & v_2 \\ -\sin(\theta) & \sin(\phi) \cos(\theta) & \cos(\phi) \cos(\theta) & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\hat{r}_{\overrightarrow{u},\theta}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) + u_1^2(1 - \cos(\theta)) & u_1 u_2(1 - \cos(\theta)) - u_3 \sin(\theta) & u_1 u_3(1 - \cos(\theta)) + u_2 \sin(\theta) & v_1 \\ u_1 u_2(1 - \cos(\theta)) + u_3 \sin(\theta) & \cos(\theta) + u_2^2(1 - \cos(\theta)) & u_2 u_3(1 - \cos(\theta)) - u_1 \sin(\theta) & v_2 \\ u_1 u_3(1 - \cos(\theta)) - u_2 \sin(\theta) & u_2 u_3(1 - \cos(\theta)) + u_1 \sin(\theta) & \cos(\theta) + u_3^2(1 - \cos(\theta)) & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotation d'une forme dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3

Comme mentionné avant toute transformation affine est composé d'une transformation linéaire et une translation, pour la rotation affine (i.e. la rotation + translation) nous devons choisir son centre et souvent ce centre n'est pas à l'origine de \mathbb{R}^3 . Nous devons donc composer notre rotation avec une translation d'un vecteur (vecteur entre l'origine et le centre de rotation) et utiliser son inverse comme le vecteur de translation de la rotation affine.

Nous allons utiliser le cylindre à nouveau comme notre forme initiale à laquelle on applique la rotation.

$$I_m(\chi) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid p = \chi(u, v), \text{ où } \chi(u, v) = (\cos(u)) e_1 + (\sin(u)) e_2 + \left(\frac{v}{2}\right) e_3, (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}$$

soit $m = {}^t(0, 0, \frac{\pi}{2})$, $a = {}^t(0, -3, \frac{\pi}{2}) \in \mathbb{R}^3$ tel que \overrightarrow{ma} est l'axe de rotation, $\theta = \frac{\pi}{2}$ l'angle de rotation

soit $\overrightarrow{mO} = {}^t(0, 0, -\frac{\pi}{2})$ le vecteur de translation, afin de coïncider l'origine avec le centre de la rotation

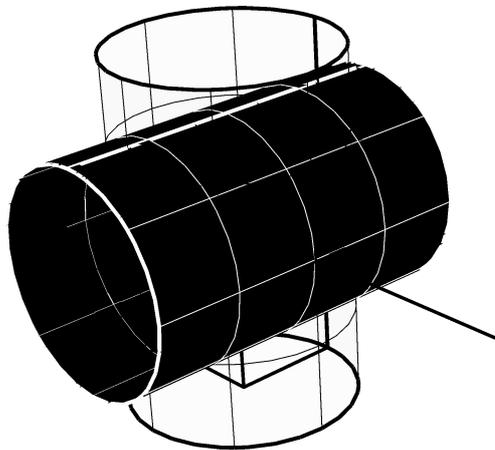
soit $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{ma}}{\|\overrightarrow{ma}\|}$ est le vecteur normalisé de l'axe de rotation

$t_{\overrightarrow{mO}}(p) = (0 + \cos(u)) e_1 + (0 + \sin(u)) e_2 + \left(\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) e_3$ est la forme tradatée

soit $\vec{v} = {}^t(0, 0, \frac{\pi}{2}) = \overrightarrow{Om}$ le vecteur de translation de la rotation affine

$r: E \rightarrow E$ est la rotation d'axe \overrightarrow{ma} et angle $\theta = \frac{\pi}{2}$

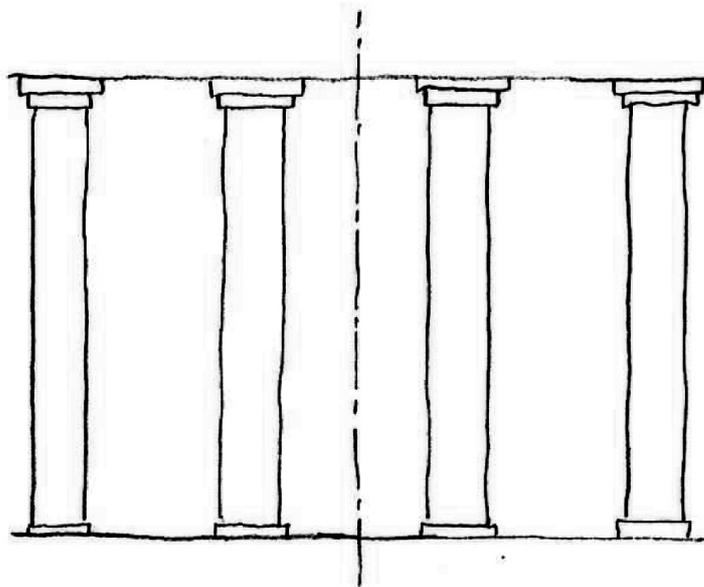
$$\forall p \in I_m(\chi), r(t_{\overrightarrow{mO}}(p)) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{v}{2}\right) e_1 + \sin(u) e_2 + \left(\frac{\pi}{2} + \cos(u)\right) e_3$$



Représentation d'une rotation d'un cylindre le long d'un axe dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3

Symétrie de réflexion (bilatéral)

La symétrie bilatérale avec la translation est l'opération algébrique la plus utilisée dans la conception architecturale. Historiquement, la majorité des bâtiments étaient symétriques autour d'un axe; spécialement, les bâtiments importants, puisque cette esthétique symétrique donnait un sens d'équilibre et de puissance. Cette technique de composition utilisée sur toute échelle dans la conception architecturale de la plus petite des meubles aux grands plans d'urbanisme. La raison de cet intérêt dans la symétrie bilatérale vient de la croyance en la beauté du corps humain qui est bien sûr symétrique, et que, puisque Dieu a créé l'homme à son image donc la symétrie a une certaine forme de divinité en elle. Les exemples de la symétrie bilatérale sont beaucoup plus évidents dans l'architecture classique que dans l'architecture moderne, mais elle reste bien présente. Seulement à la fin du 20ème siècle, avec l'intérêt pour des formes courbes, cette importance de la symétrie bilatérale diminue considérablement, donnant lieu à des effets plus cinématographiques de la dynamique plutôt que l'ancien intérêt dans l'équilibre statique.



Représentation de l'utilisation symétrie de réflexion (bilatéral) dans l'architecture

Réflexion (symétrie isométrique) [5]

$s : E \rightarrow E$, réflexion affine, $\vec{s} : \vec{E} \rightarrow \vec{E}$, réflexion vectoriel

$F \subset E$ sous-espace affine dont le sous-espace vectoriel directeur est \vec{F} ,

$G \subset E$ sous-espace affine dont le sous-espace vectoriel directeur est \vec{G}

$\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G} \Rightarrow \forall p \in E$,

\vec{s} est la réflexion vectorielle de \vec{E} par rapport à \vec{F} parallèle à \vec{G} ,

où $\vec{v} = v_1 \oplus v_2 \Rightarrow \vec{s}(\vec{v}) = v_1 \oplus (-v_2)$, $\vec{s}|_{\vec{G}} = -\text{id}_{\vec{G}}$

$\Rightarrow \vec{G} = \ker(\vec{s} + \text{id}_{\vec{E}})$ et $\vec{F} = \ker(\vec{s} - \text{id}_{\vec{E}}) \Rightarrow \vec{E} = \ker(\vec{s} + \text{id}_{\vec{E}}) \oplus \ker(\vec{s} - \text{id}_{\vec{E}})$

$\Rightarrow \vec{s}(\vec{s}) = \text{id}_{\vec{E}}$ (i.e. involution), $\text{Fix}(s) = F$

Réflexion (symétrie isométrique) [5]

$$E = \langle o, e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathbb{R}^3, F = \langle o, e_1, e_2 \rangle = \mathbb{R}^2, G = \langle o, e_3 \rangle = \mathbb{R}$$

$s : E \rightarrow E, s(p) = s(o + \overrightarrow{op}) = o + \vec{s}(\overrightarrow{op})$ est la réflexion de p par rapport à F parallèle à \vec{G}

\vec{s} est la réflexion vectorielle de \overrightarrow{op}

$\hat{E} = \mathbb{R}^4, \hat{s}(\hat{p})$ est la matrice représentant la réflexion dans $\hat{E} = \mathbb{R}^4$

$$\forall p, v \in \mathbb{R}^4, \hat{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{s}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \\ x_3 + v_3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ la réflexion sur le plan } y - z$$

$$\hat{s}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & -1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ -x_2 + v_2 \\ x_3 + v_3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ la réflexion sur le plan } x - z$$

$$\hat{s}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & -1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \\ -x_3 + v_3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ la réflexion sur le plan } x - y$$

Réflexion d'une forme dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3

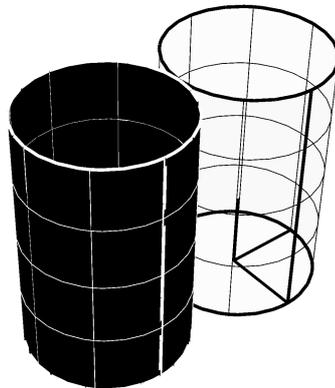
Nous allons utiliser le cylindre à nouveau comme notre forme initiale à laquelle nous appliquons la réflexion affine.

$$I_m(\chi) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid p = \chi(u, v), \text{ où } \chi(u, v) = (\cos(u)) e_1 + (\sin(u)) e_2 + \left(\frac{v}{2}\right) e_3, (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}$$

soit $\vec{v} = {}^t(0, -2, 0)$ le vecteur de translation de la réflexion affine

$s : E \rightarrow E$ la réflexion affine par rapport au plan $x - z$

$$\forall p \in I_m(\chi), s(p) = \cos(u) e_1 + (-2 - \sin(u)) e_2 + \left(\frac{v}{2}\right) e_3$$

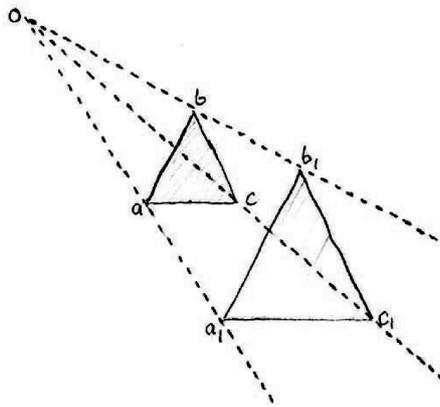


Représentation d'une réflexion d'un cylindre dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3

5.4.3. Transformation affine non-isométrique

Homothétie (mise à l'échelle)

Le deuxième type de transformation affine nous construisons est l'homothétie et mise à l'échelle non uniforme. Mise à l'échelle comme une symétrie est non isométrique à savoir que la forme est déformée après son application. Historiquement, ce type d'opérations algébriques n'a pas été utilisé autant que les symétries isométriques comme la translation et la rotation mais on peut encore le voir dans la répétition de certains éléments architecturaux de différentes tailles, souvent comme une technique de décoration. Homothety peut être vu clairement dans la pagode chinoise traditionnelle comme chaque calque du toit a la même forme que la précédente, mais de plus petite taille ou dans la tour de Pise où les colonnes sont plus petits à chaque niveau. Homothétie est beaucoup plus utilisé aujourd'hui en raison de l'intérêt dans des formes courbes, ce qui est visible lorsque l'on veut créer un tableau à deux dimensions d'éléments sur une surface courbe, par exemple pavage sur une façade courbe ou d'un toit. En raison de la courbure, chaque tuile ou élément sera similaire aux autres, mais à une échelle différente pour une meilleure approximation de la surface courbe. Homothety est poussé à sa limite esthétiquement avec l'utilisation des opérations algorithmiques qui automatise la mise à l'échelle des éléments donnant le sentiment cinématographique du mouvement des éléments variables.



Représentation d'une homothétie dans \mathbb{R}^2 d'un triangle à l'autre

Homothétie (symétrie non isométrique) [5]

$$\text{Fix}(h) = \{p \in E \mid h(p) = p\}$$

$$E = \langle o, e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathbb{R}^3, h : E \rightarrow E,$$

$$h(p) = h\left(m + \overrightarrow{m p}\right) = m + \overrightarrow{h(m p)} = m + \lambda \text{id}_E(\overrightarrow{m p}) \text{ est l'homothétie de centre } m \text{ et un rapport } \lambda$$

$$\overrightarrow{h} = \lambda \text{id}_E \text{ est l'homothétie vectorielle (mise à l'échelle uniforme)}$$

$$\overrightarrow{m h(p)} = \left(\frac{m h(p)}{m p}\right) \overrightarrow{m p} \implies \text{le rapport } \lambda = \frac{m h(p)}{m p}$$

$$\hat{E} = \mathbb{R}^4, \hat{h}(\hat{p}) \text{ est la matrice représentant l'homothétie dans } \hat{E} = \mathbb{R}^4$$

$$\forall p, v \in \mathbb{R}^4, \hat{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \hat{h}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & \lambda & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & \lambda & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + v_1 \\ \lambda x_2 + v_2 \\ \lambda x_3 + v_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{h}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + v_1 \\ \lambda_2 x_2 + v_2 \\ \lambda_3 x_3 + v_3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est la mise à l'échelle non uniforme}$$

Homothétie (et mise à l'échelle non uniforme) d'une forme dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3

Comme mentionné ci-dessus toute transformation affine est composée de une transformation linéaire et une translation, pour l'homothétie (et mise à l'échelle non uniforme) nous avons besoin de choisir son centre et souvent ce centre n'est pas l'origine de \mathbb{R}^3 . Nous devons donc composer notre homothétie avec une translation par un vecteur (vecteur entre l'origine et le centre de l'homothétie) et utiliser son inverse comme le vecteur de translation de l'homothétie affine.

Homothétie

$$I_m(\chi) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid p = \chi(u, v), \text{ où } \chi(u, v) = (\cos(u)) e_1 + (\sin(u)) e_2 + \left(\frac{v}{2}\right) e_3, (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}$$

soit $m = {}^t(0, 0, \frac{\pi}{2})$ le centre de l'homothétie

soit $\overrightarrow{mO} = {}^t(0, 0, -\frac{\pi}{2})$ le vecteur de translation, afin de coïncider l'origine avec le centre de l'homothétie

$$t_{\overrightarrow{mO}}(p) = (0 + \cos(u)) e_1 + (0 + \sin(u)) e_2 + \left(\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) e_3 \text{ est la forme translatée}$$

soit $\vec{v} = {}^t(0, 0, \frac{\pi}{2}) = \overrightarrow{Om}$ le vecteur de translation de l'homothétie

$h : E \rightarrow E$ est l'homothétie de centre o et de rapport $\frac{1}{2}$

$$\forall p \in I_m(\chi), h\left(t_{\overrightarrow{mO}}(p)\right) = \frac{1}{2} \cos(u) e_1 + \frac{1}{2} \sin(u) e_2 + \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) e_3$$

Non uniform scaling

$$I_m(\chi) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid p = \chi(u, v), \text{ où } \chi(u, v) = (\cos(u)) e_1 + (\sin(u)) e_2 + \left(\frac{v}{2}\right) e_3, (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}$$

soit $o = {}^t(0, 0, \frac{\pi}{2})$ le centre de la mise à l'échelle non uniforme

soit $\overrightarrow{mO} = {}^t(0, 0, -\frac{\pi}{2})$ le vecteur de translation,

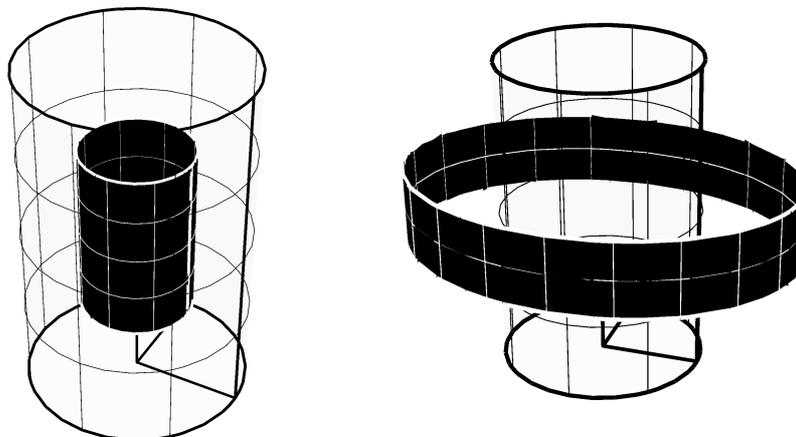
afin de coïncider l'origine avec le centre de la mise à l'échelle non uniforme

$$t_{\overrightarrow{mO}}(p) = (0 + \cos(u)) e_1 + (0 + \sin(u)) e_2 + \left(\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) e_3 \text{ est la forme translatée}$$

soit $\vec{v} = {}^t(0, 0, \frac{\pi}{2}) = \overrightarrow{Om}$ le vecteur de translation de la mise à l'échelle non uniforme

$h : E \rightarrow E$ est la mise à l'échelle non uniforme de centre o et rapports $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{3}{2}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{4}$

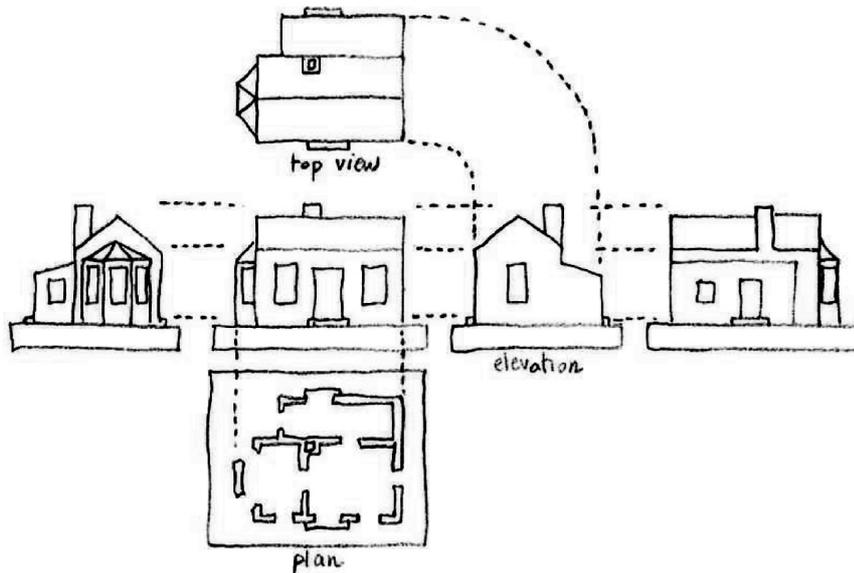
$$\forall p \in I_m(\chi), h\left(t_{\overrightarrow{mO}}(p)\right) = 2 \cos(u) e_1 + \frac{3}{2} \sin(u) e_2 + \left(\frac{1}{4} \left(\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) e_3$$



Représentation d'une homothétie et une mise à l'échelle non uniforme d'un cylindre dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3

5.4.4. Projections orthogonales

Maintenant, nous allons examiner certains des transformation affine les plus traditionnellement utilisé dans l'architecture à savoir les projections affines. les projections orthogonales affines sont généralement connus dans l'architecture que le plan, élévation, coupe, et il n'est pas nécessaire de souligner l'importance de ces types de représentations de formes dans l'architecture. En fait, les projections orthogonales sont un type particulier de projections affines où la direction de la projection est perpendiculaire au sous-espace affine sur lequel nous projetons. Pour la perspective, nous avons besoin de comprendre quelques notions de la géométrie projective afin de la définir, mais il y a aussi une version affine qui la plus souvent utilisée dans l'architecture. Ces projections orthogonales affine: le plan, l'élévation et la section sont connus comme le dessin technique d'un bâtiment ou un projet qui correspond à la définition de l'architecture. Ils sont utilisés pour développer une idée de conception en une proposition cohérente, de communiquer des idées et des concepts et convaincre le client des mérites d'une conception et de permettre à un entrepreneur pour le construire. Ils sont aussi utilisés comme un dossier du travail accompli, et de faire un enregistrement d'un bâtiment qui existe déjà.



Représentation de la projection orthographique architectural

Projection [5]

$\rho : E \rightarrow E$, projection affine, $\vec{\rho} : \vec{E} \rightarrow \vec{E}$, projection vectoriel

$F \subset E$ sous – espace affine dont le sous – espace vectoriel directeur est \vec{F} ,

$G \subset E$ sous – espace affine dont le sous – espace vectoriel directeur est \vec{G}

$\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G} \implies \forall p \in E, F \cap (p + \vec{G}) = \{\rho(p)\}$ un point (i.e. la projection de p sur F parallèle à \vec{G})

$\vec{\rho}$ est la projection vectorielle de \vec{E} sur \vec{F} parallèle à \vec{G} , où $\vec{v} = \vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2 \implies \vec{\rho}(\vec{v}) = \vec{v}_1$, $\vec{\rho}|_{\vec{F}} = \text{id}_{\vec{F}}$

$\implies \vec{G} = \ker \vec{\rho}$ et $\vec{F} = \ker(\vec{\rho} - \text{id}_{\vec{E}}) \implies \vec{E} = \ker \vec{\rho} \oplus \ker(\vec{\rho} - \text{id}_{\vec{E}})$

$\implies \vec{\rho}(\vec{\rho}) = \vec{\rho}$, $\text{Fix}(\rho) = F$ et $\rho(E) = F$

Projection [5]

$$E = \langle o, e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathbb{R}^3, F = \langle o, e_1, e_2 \rangle = \mathbb{R}^2, G = \langle o, e_3 \rangle = \mathbb{R}$$

$\rho : E \rightarrow E, \rho(p) = \rho(o + \overrightarrow{op}) = o + \vec{\rho}(\overrightarrow{op})$ la projection de p sur F parallèle à \vec{G}

$\vec{\rho}$ est projection vectorielle de \overrightarrow{op}

$\hat{E} = \mathbb{R}^4, \hat{\rho}(\hat{p})$ est la matrice représentant de la projection dans $\hat{E} = \mathbb{R}^4$

$$\forall p, v \in \mathbb{R}^4, \hat{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \\ 0 + v_3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ projection sur le plan } x - y$$

$$\hat{\rho}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + v_1 \\ x_2 + v_2 \\ x_3 + v_3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ projection sur le plan } y - z$$

$$\hat{\rho}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ 0 + v_2 \\ x_3 + v_3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ projection sur le plan } x - z$$

Affine projection orthogonale d'une forme dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3

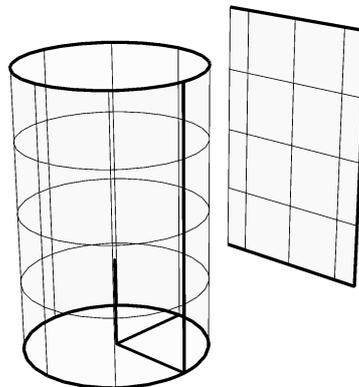
Nous allons utiliser le cylindre à nouveau comme notre forme initiale à laquelle on applique la projection affine.

$$I_m(\chi) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid p = \chi(u, v), \text{ où } \chi(u, v) = (\cos(u)) e_1 + (\sin(u)) e_2 + \left(\frac{v}{2}\right) e_3, (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}$$

soit $\vec{v} = (1, 1, 0)$ le vecteur de translation de la projection affine

$\rho : E \rightarrow E$ est la projection affine sur le plan $x - z$

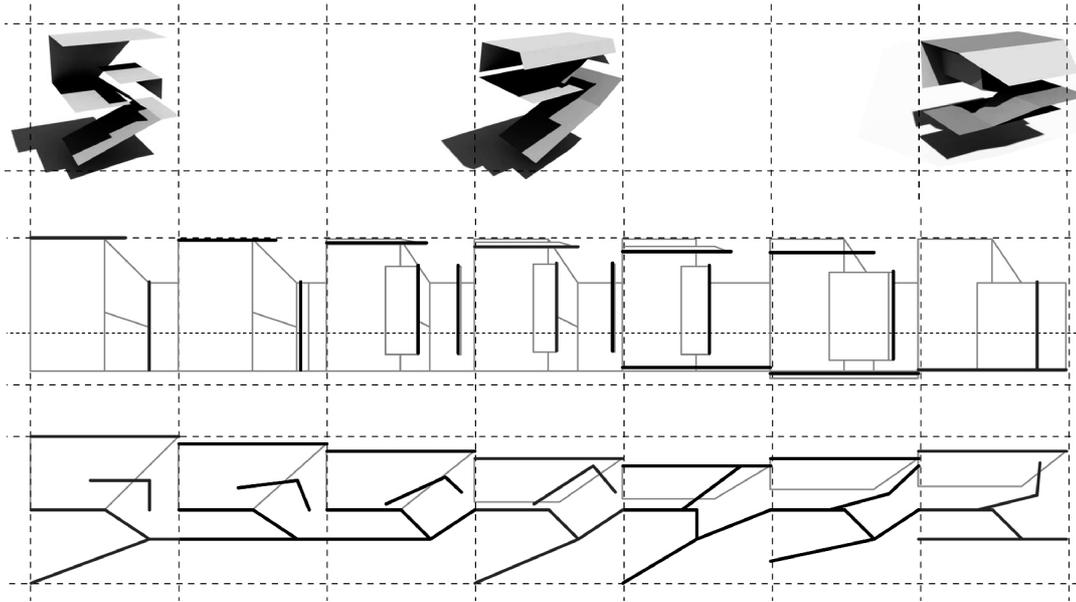
$$\forall p \in I_m(\chi), \rho(p) = \cos(u) e_1 + 3 e_2 + \left(\frac{v}{2}\right) e_3$$



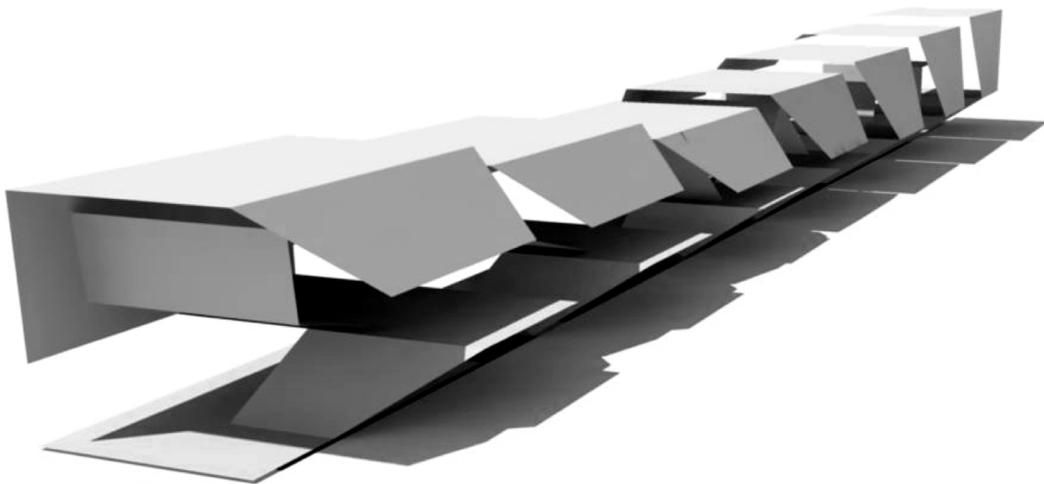
Représentation d'une projection orthogonale d'un cylindre dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3

5.4.5 Conception en utilisant la géométrie affine

Maintenant que nous avons défini ces transformations affines essentielles, nous allons maintenant montrer comment les utiliser comme outils pour la conception. Dans la partie qui suit, nous allons montrer quelques projets architecturaux où l'idée principale de la conception a été basée sur la transformation affine. L'idée était de créer un bâtiment de faible hauteur qui sera composé d'une série de composants, ces composants peuvent être considérés comme des ensembles de vecteurs ou de points qui seront progressivement transformés le long de la longueur du bâtiment, en utilisant des transformations affines comme mise à l'échelle et translations.



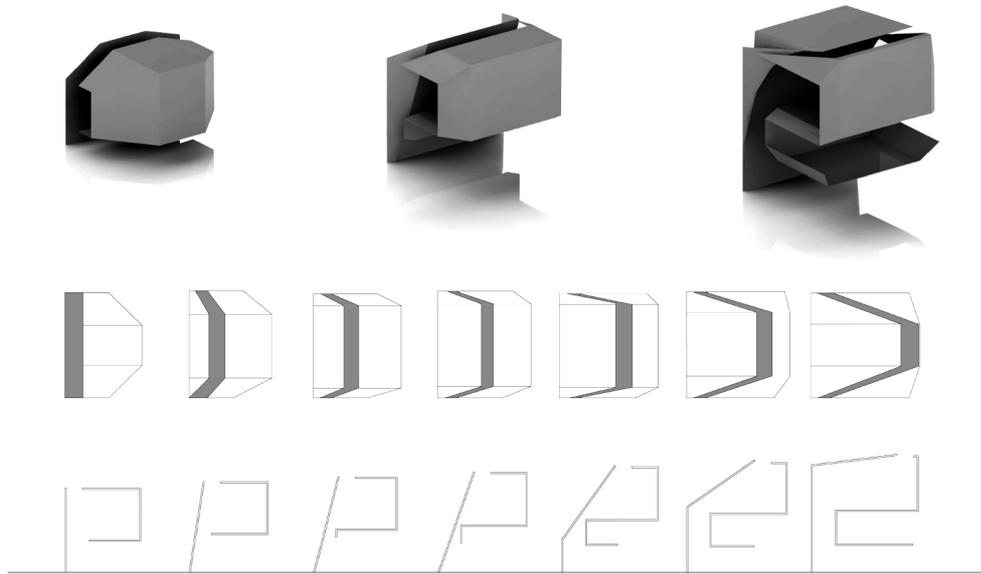
Représentation de la série des composants qui transforment le long de la longueur du bâtiment



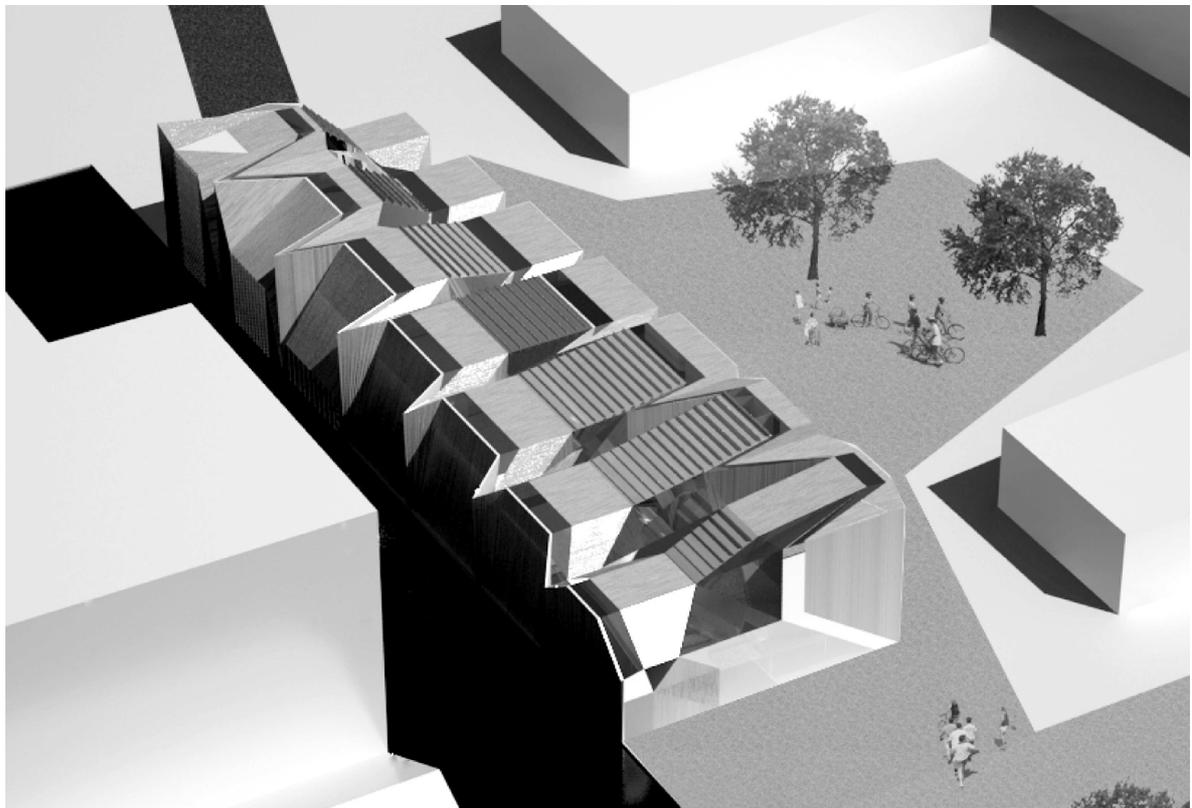
Représentation de la forme architecturale générée à partir des séries de composants

Plus de conception utilisant des transformations affines

Maintenant que nous avons montré le principe de base, nous allons montrer des conceptions plus élaborées utilisant cette méthode des transformations affines.



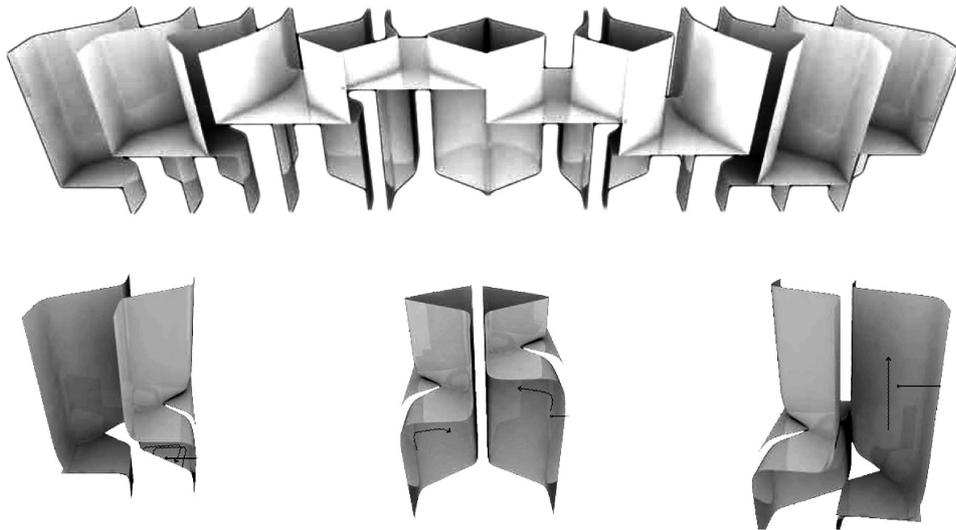
Représentation de la manière dont ces éléments se transforment dans le plan et dans la coupe



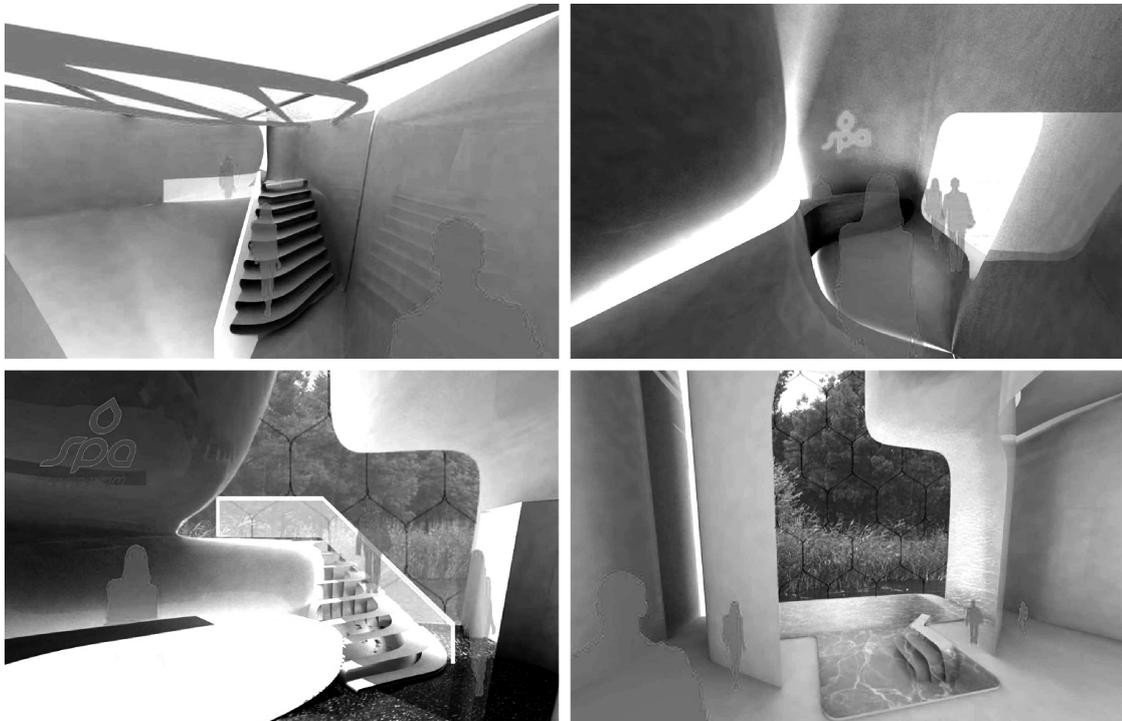
Représentation du bâtiment de faible hauteur conçu par des transformations affines

Plus de conception utilisant des transformations affines

Dans ces deux exemples suivants, les transformations des composantes sont liées à certaines propriétés ambiantes des activités, qu'ils abriteront en termes de programme architectural. Ces propriétés ambiantes n'ont pas été testés en termes d'ingénierie environnementale, mais notre accent est mis sur la méthode géométrique en utilisant des transformations affines et le lien avec les ambiances est plus hypothétique. Dans ce premier exemple, les transformations sont liées à la chaleur des activités dans chacun des composants, allant d'un extrême à l'autre.



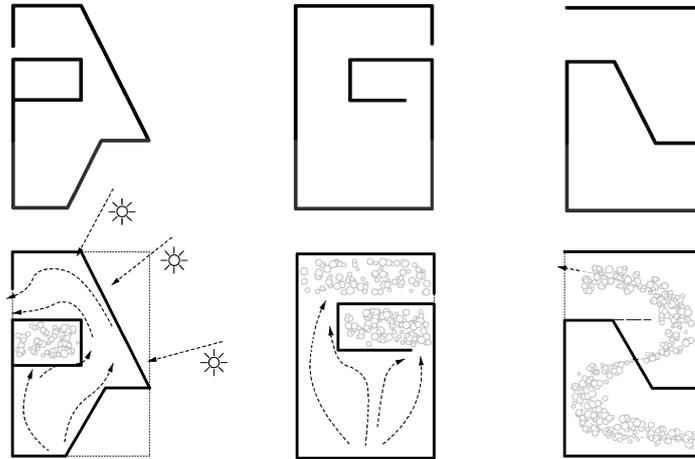
Représentation de la manière dont les composants ont différentes températures



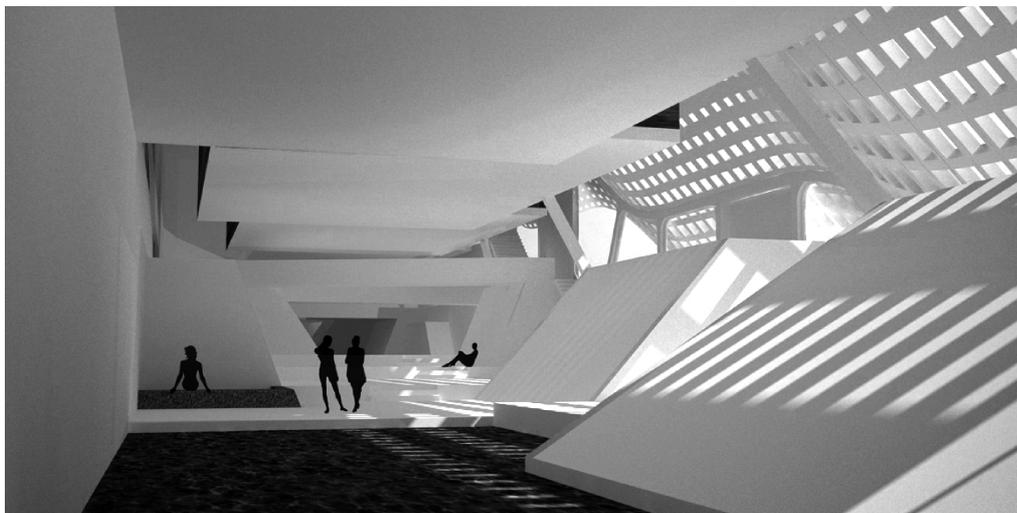
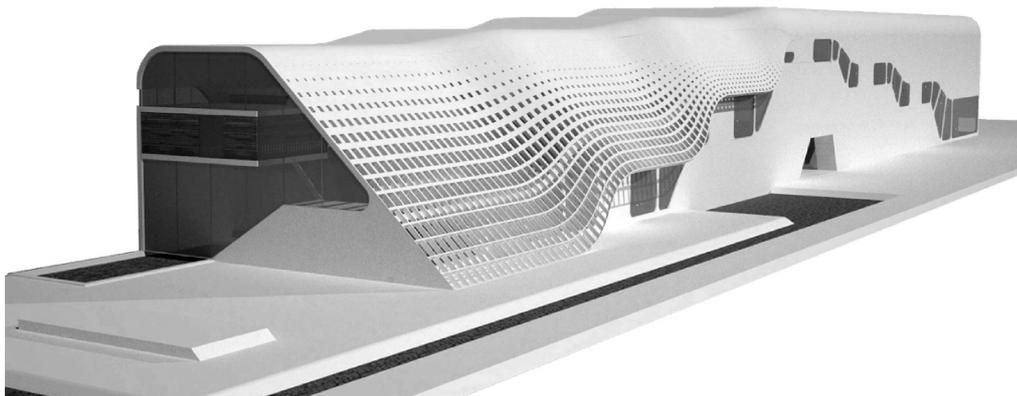
Représentation des différentes activités intérieures avec leurs différentes températures

Plus de conception utilisant des transformation affines

Dans ce second exemple, c'est le flux d'air chaud qui est stimulé par les différentes formes de composants qui, comme dans le premier exemple créerait des différents espaces ambiantes pour différentes activités.



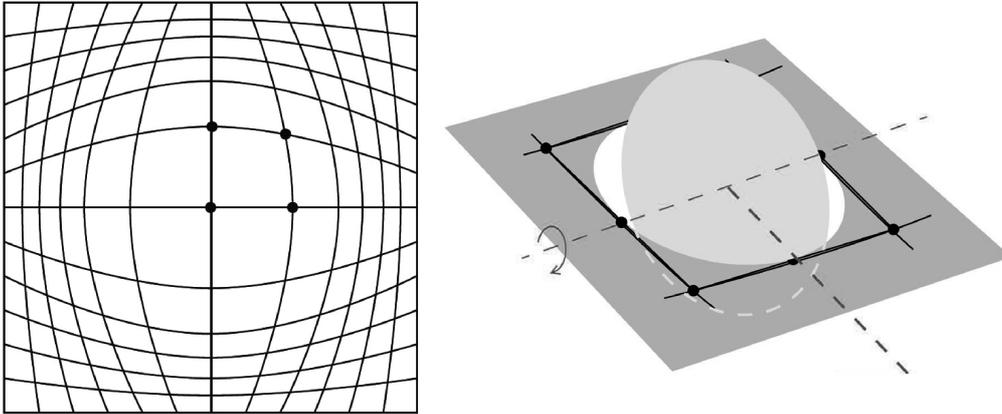
Représentation de la manière dont les composants auront des flux d'air différents



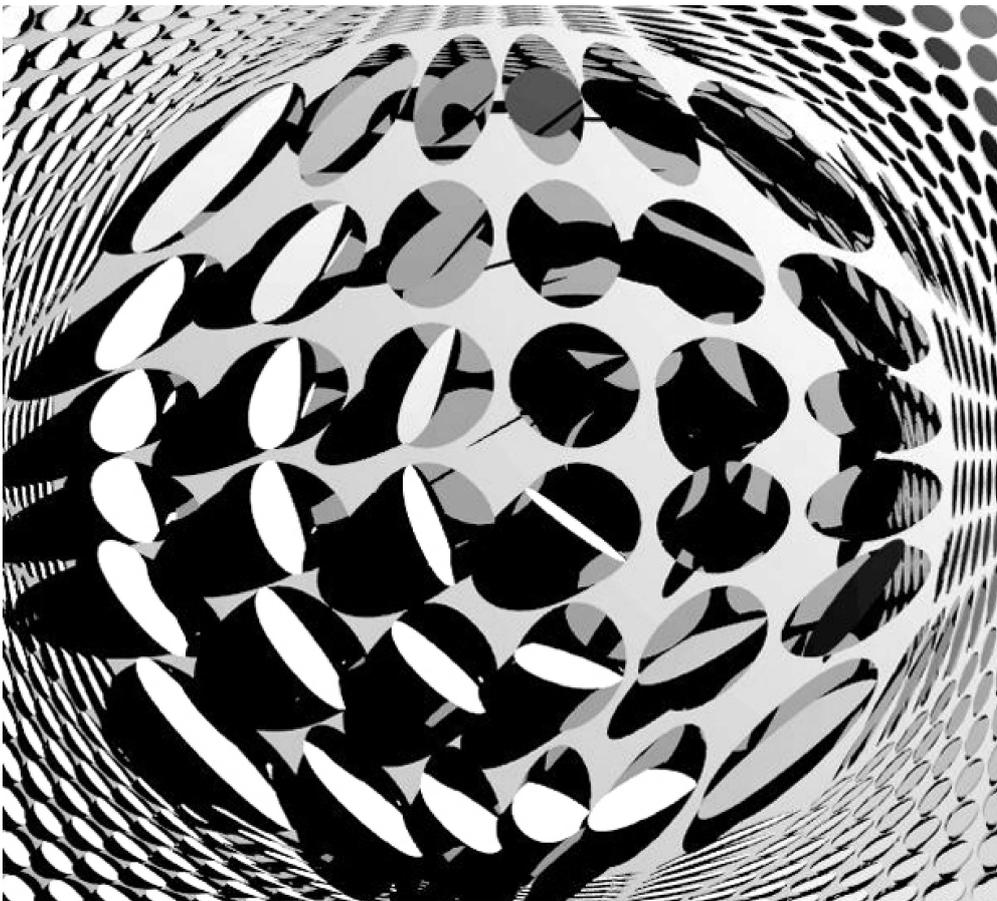
Représentation des différentes ambiances provoquées par les différentes composantes

Plus de conception utilisant des transformation affines

Dans ce qui suit, nous allons présenter une autre application de transformation affine, cette fois au lieu de travailler à l'échelle du bâtiment, nous allons transformer les composants à l'échelle éléments de façade pour créer des pavages. Dans cet exemple, il existe deux principales transformations affines: le premier est sur le réseau où se trouve le composant, ce qui à son tour déforme le composant elliptique et la seconde est la rotation de ce composant.



Représentation de la transformation affine du réseau et le composant

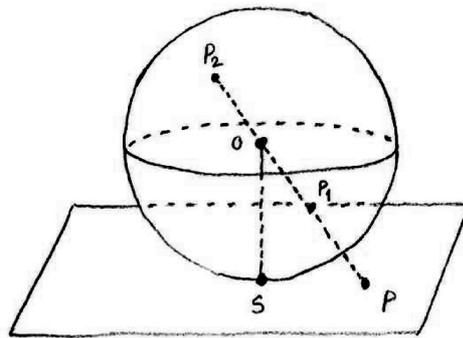


Représentation du motif généré en utilisant une transformation affine sur le réseau et le composant

5.5. Géométrie projective

5.5.1. Espace projectif et groupe projectif

Notre étude de symétrie nous a amené à comprendre la géométrie euclidienne comme l'étude des propriétés géométriques invariantes par le groupe euclidien (de transformations euclidiennes) comme une spécialisation de géométrie affines qui en elle-même l'étude des propriétés géométriques invariantes par le groupe affine (des transformations affines). De même, la géométrie projective serait l'étude des propriétés géométriques invariantes par le groupe projectif (des transformations projectives); naturellement, la géométrie projective a un contexte différent avec des notions telles que l'espace projectif, homographie, coordonnées homogènes. Un aspect important de la géométrie projective qui est différente de la géométrie euclidienne est que les lignes parallèles se rencontrent aux points à l'infini; cette notion a son origine dans l'invention de la perspective linéaire par des artistes de la Renaissance. En géométrie euclidienne, les angles et les distances sont invariantes par transformations euclidiennes, en géométrie affine, colinéarité, le parallélisme et des rapports de distance le long de lignes parallèles sont invariantes par transformation affine. En géométrie projective, la structure de l'incidence et de la relation de conjugués harmonique projective (entre autres) sont conservées sous des transformations projectives. Avant de discuter en détail la perspective, nous allons d'abord définir l'espace projectif et la transformation projective, qui est plus radical dans son expression que les transformations affine et euclidienne, exprimé par une translation et une transformation linéaire.



Représentation du plan projectif réel comme une sphère S^2 où les points antipodaux sont identifiés

Espace projectif [5]

\vec{E} est un \mathbb{K} – espace vectoriel et \mathbb{K} est un corps commutatif et $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$

$\mathbb{K}^* \times \vec{E} \setminus \{0\} \rightarrow \vec{E} \setminus \{0\}, (\lambda, \vec{x}) \rightarrow \lambda \cdot \vec{x} = \vec{\lambda x}$ est une action de groupe

$P(\vec{E}) = \vec{E} \setminus \{0\} / \mathbb{K}^*$ est l'espace projectif de \vec{E} (l'ensemble de droites de \vec{E})

$\bar{x} = P(x) \in P(\vec{E})$ est un point dans l'espace projectif de \vec{E} , $\bar{x} = \text{Orb}(x) = \{\vec{y} \in \vec{E} \setminus \{0\} \mid \vec{y} = \lambda \cdot \vec{x}\}$

$\dim P(\vec{E}) = \dim \vec{E} - 1$

si $\vec{E} = \mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow P(\vec{E}) = P_n(\mathbb{R})$ l'espace projectif réel et $\bar{x} = [x_0 : \dots : x_n]$ les coordonnées homogènes

Espace projectif comme une variété [9]

$U_i \subset P_n(\mathbb{K})$ ouvert, $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$

pour $i = 0, \dots, n$ où $P_n(\mathbb{K}) = \bigcup_{0 \leq i \leq n} U_i$ et (U_i, φ_i) est une carte de $P_n(\mathbb{K})$

$\varphi_i : U_i \subset P_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^n$, $[x_0 : \dots : x_n] \rightarrow \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$ est un difféomorphisme lisse

toutes les cartes de l'atlas maximal $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ sont compatibles $\implies P_n(\mathbb{K})$ est une variété différentiable

Sous-espace projectif [5]

$\vec{F} \subset \vec{E}$ sous – espace vectoriel $\implies P(\vec{F}) \subset P(\vec{E})$ est le sous – espace projectif

si \vec{H} est un hyperplan vectoriel (i.e. $\text{codim } \vec{H} = 1$) $\implies P(\vec{H})$ est un hyperplan projectif

$S = \{\vec{p}_0, \dots, \vec{p}_k\}$ est un ensemble de points de $P(\vec{E}) \implies \langle S \rangle$ est le plus petit sous –

espace projectif de $P(\vec{E})$ contenant S

$\vec{p}_0 = P(D_i)$, où $D_i = \mathbb{K} \vec{v}_i$ est une droite vectorielle \vec{E} et $\vec{F} = \text{vect}(\{\vec{v}_i, i = 0, \dots, k\})$

pour $i = 0, \dots, k$,

\vec{v}_i sont linéairement indépendants $\implies \vec{p}_i = P(D_i) = P(\mathbb{K} \vec{v}_i)$ sont projectivement indépendants

Transformation projective (homographie) [5]

\vec{E}, \vec{E}' deux espaces vectoriels, $P(\vec{E}), P(\vec{E}')$ leurs espaces projectifs associés

$\vec{f} : \vec{E} \rightarrow \vec{E}'$ est une application linéaire continue $\implies \forall \vec{D} \subset \vec{E}$ est une droite vectorielle

$\vec{f}(\vec{D}) = \vec{0}_{\vec{E}'}$ si $\vec{D} \subset \ker \vec{f}$ ou $\vec{f}(\vec{D}) = \vec{D}'$ une droite vectorielle de \vec{E}'

$\implies P(\vec{f}) : P(\vec{E}) \setminus P(\ker \vec{f}) \rightarrow P(\vec{E}')$, $P(\vec{f})(\vec{D}) = P(\vec{f}(\vec{D})) = P(\vec{D}')$ est une application projective

si \vec{f} est un isomorphisme $\implies P(\vec{f})$ est une transformation projective (ou une homographie)

Groupe projectif [5]

$GP(\vec{E}) =$

$\{P(\vec{f}) : \vec{E} \rightarrow \vec{E}, \text{ transformation projective}\}$ est le groupe projectif muni de la loi $P(\vec{f}) \circ P(\vec{g}) = P(\vec{f} \circ \vec{g})$

$P : GL(\vec{E}) \rightarrow GP(\vec{E})$ est un groupe de isomorphism

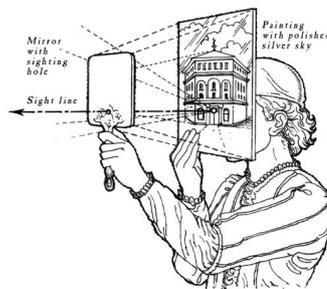
$Z(GL(\vec{E})) = \{\lambda \cdot \text{id}_{\vec{E}}, \lambda \in \mathbb{K}^*\}$ isomorphe à $\mathbb{K}^* \implies GL(\vec{E}) / \mathbb{K}^* \cdot \text{id}_{\vec{E}} = PGL(\vec{E})$ est le groupe projectif

si $\vec{E} = \mathbb{K}^{n+1} \implies GL_{n+1}(\mathbb{K}) / \mathbb{K}^* = PGL_{n+1}(\mathbb{K})$ est le groupe linéaire projective

Le perspective (projective) est une homographie qui est un élément du groupe projectif

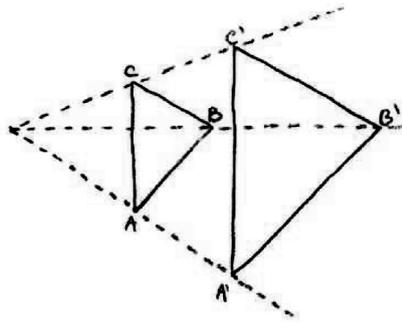
5.5.2. Bref historique de la perspective

Le système de perspective que nous tenons pour acquis aujourd'hui est une invention relativement récente dans l'histoire de l'art. Avant le 14^{ème} siècle, il n'y avait presque aucune tentative de dépeindre de façon réaliste le monde en trois dimensions dans l'art dans la manière dont nous sommes maintenant habitués à voir. L'art des périodes byzantines, médiévales et gothiques riches comme il était, il n'a fait aucune tentative pour créer l'illusion de la profondeur et de l'espace. Il n'était pas jusqu'à ce que les peintres de la pré-renaissance, comme Giotto et Duccio qu'une idée précoce de perspective a été en cours d'expérimentation. Ils ont utilisé les ombres à grand effet de créer une illusion de profondeur, mais il était encore loin d'être le genre de perspective que nous connaissons aujourd'hui. La première image connue à utiliser la perspective linéaire a été créé par la polymathe Filippo Brunelleschi, il dépeint le baptistère de Florence à partir de la grille d'entrée de la cathédrale inachevée. Le système de la perspective linéaire projeté l'illusion de profondeur sur un plan à deux dimensions par l'utilisation de points de fuite à laquelle toutes les lignes convergent, au niveau des yeux sur l'horizon. Masaccio a été le premier grand peintre du début de la Renaissance qui a démontré commandement intégral des nouvelles règles de la perspective, les personnages de ses peintures ont un volume et les bâtiments et le paysage se retirent de façon réaliste dans la distance. Mosaccio est considéré aujourd'hui comme l'initiateur du nouveau style de réalisme florentin. À la fin du 15^{ème} siècle, les artistes étaient en commande totale de la perspective et ont réussi à créer dans leur art un monde beau et réaliste. Derrière ces changements dans les méthodes artistiques et l'utilisation de la perspective était un désir renouvelé à décrire la beauté de la nature et de démêler sa beauté mathématique, avec les œuvres des maîtres de la Renaissance comme Léonard de Vinci. Les développements dans la perspective linéaire n'ont pas été seulement limitées à la Renaissance italienne, mais aussi la Renaissance du nord dans les œuvres des maîtres hollandais tels que Jan van Eyck, dont les peintures ont exprimé un haut niveau de détails en perspective. Cette corrélation entre les arts et les mathématiques a atteint son apogée avec le développement de la géométrie projective ayant ses origines dans la théorie de la perspective; les mathématiciens et les artistes étaient intéressés par les principes qui ont régi cette technique artistique. En particulier, l'intérêt pour les lignes de vue et les lignes parallèles qui convergent à un point de fuite, qui est connu plus tard comme le points à l'infini. La théorie de la perspective représente un moment unique où l'architecture, l'art et les mathématiques ont partagé un intérêt commun directe, un moment où de nouveaux concepts en mathématiques ont été créés à partir des origines artistiques. Le mathématicien et architecte Girard Desargues était l'un des premiers à poser les bases de ce qui sera la géométrie projective; sur la base de son travail sur la perspective. Desargues introduit une nouvelle technique pour l'élaboration de la perspective sans attirer le point de fuite (i.e. qu'ils se situent en dehors du plan de l'image); contrairement aux techniques de la perspective linéaire communes qui commencent par dessiner les points de fuite. Cette technique repose sur des mesures de l'objet, et des constructions des échelles dans le plan de l'image, ces échelles sont construits à partir des mesures et sont utilisés de manière à préserver la distance et la dimension dans l'image. Une fois les échelles ont été établies, l'artiste peut tout simplement utiliser un compas et une règle pour décrire le sujet souhaité de manière appropriée en perspective. Suite à cette construction de la perspective, Desargues crée son théorème qui stipule que si trois lignes droites reliant les sommets correspondants de deux triangles, les trois intersections des paires de côtés correspondants se trouvent sur une ligne droite.

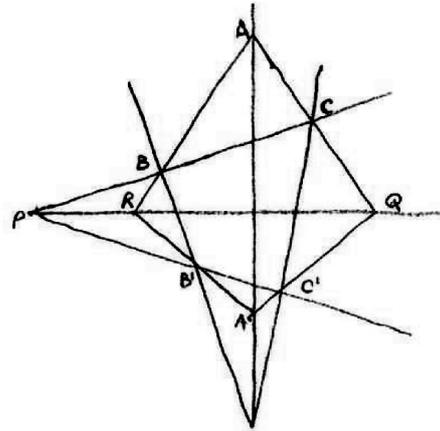


Représentation du système des miroirs de Filippo Brunelleschi pour construire la perspective

Théorème de Desargues



théorème de Desargues (affine)



théorème de Desargues (projective)

Théorème de Desargues (affine) [5]

soit (ABC) et $(A'B'C')$ deux triangles dans un plan affine E

tel que $A \neq A', B \neq B'$ and $C \neq C'$, $(BC) \parallel (B'C')$, $(CA) \parallel (C'A')$ and $(AB) \parallel (A'B')$

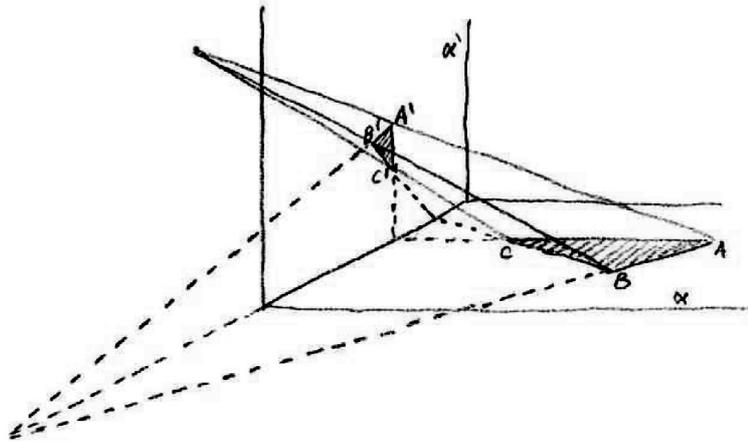
$\Rightarrow (AA'), (BB')$ and (CC') sont parallèles ou concurant

Théorème de Desargues (projective) [5]

soit A, B, C (et A', B', C') trois points projectivement indépendants dans un plan projectif

tel que $A \neq A', B \neq B'$ et $C \neq C'$, $P = (BC) \cap (B'C')$, $Q = (CA) \cap (C'A')$ et $R = (AB) \cap (A'B')$

alors P, Q, R sont alignés $\iff (AA'), (BB')$ et (CC') sont concurant



Représentation de la pyramide visuelle de Alberti montrant le théorème de Desargues

Il existe un lien clair entre ce théorème et la perspective linéaire ceci peut être vu dans l'image représentant la technique de la pyramide visuelle d'Alberti. Ici, le triangle ABC se trouve dans le plan de sol (la base de la pyramide), le triangle $A'B'C'$ se trouve dans le plan de l'image, le point E au cours de laquelle la lignes de vue (raccordement sommets correspondants) se rencontrent est l'œil de la l'artiste, la sommet de la pyramide visuelle. Ce théorème établit le lien entre les études de la perspective à la géométrie projective moderne. Considérons par exemple l'intersection $(AB) \cap (A'B')$ si elle est dans le plan contenant les deux lignes, c'est garanti par le théorème, Cependant, si les droites sont parallèles, dans le plan dans lequel ils se trouvent, ils ne se coupent dans ce plan. Cependant, le théorème garantit ces lignes se croisent; Desargues introduit un point où deux lignes parallèles se croisent à savoir le point à l'infini.

5.5.3. Points à l'infini

Depuis l'époque de Desargues, la géométrie projective a été élargi pour devenir un champ unique en mathématiques comme nous l'avons montré avec ses propres réglages et opérations (espace projectif, transformations projectives), mais cet espace projectif moderne peut être développée de la même manière qu'il était en géométrie projective classique. Nous avons construit plus tôt l'espace projectif réel comme l'ensemble des droites de l'espace euclidien, maintenant, nous allons montrer comment ce connecter à l'idée des lignes de vue de l'art de la perspective. Nous allons nous concentrer uniquement sur l'espace euclidien \mathbb{R}^3 et le plan projectif réel $P_2(\mathbb{R})$ et puis nous allons donner la définition générale formelle de l'espace projectif abstrait. Voyons d'abord prétendons que sur une ligne de vue, il est seulement un point que l'on voit, l'objet qui est le plus proche contiendra ce point, donc pour une ligne de vue que vous choisissez, le résultat est que vous voyez un seul point correspondant à la ligne de vue comme on le voit dans la formulation suivante. Voyons d'abord prétendons que sur une ligne de vue, il y a seulement un point que l'on voit, l'objet qui est le plus proche contiendra ce point, donc pour une ligne de vue que vous choisissez, le résultat est que vous voyez un seul point correspondant à la ligne de vue comme on le voit dans la formulation suivante.

$\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, (\lambda, \vec{x}) \longrightarrow \lambda \vec{x} = \vec{\lambda x}$ est une action de groupe,

$P_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \mathbb{R}^*$ est le plan projectif de \mathbb{R}^3

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ est équivalent à $\lambda \vec{x} = \vec{\lambda x} = \vec{y} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ (i.e. ils se trouvent sur la même ligne de vue)

$\bar{x} = P(x) \in P_2(\mathbb{R})$ est un point dans le plan projectif, $\bar{x} = \text{Orb}(x) = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{y} = \lambda \vec{x} \right\}$

Nous procédons maintenant à construire le plan projectif réel; Imaginez que vous êtes debout à l'origine et il y a une toile dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 au niveau du plan $y = 1$. Vous pouvez regarder dans n'importe quelle direction et vous verrez un point situé sur la ligne de vue; cette ligne de vue lorsqu'il est étendu à l'infini ferait l'une des deux choses, soit elle coupe le plan $y = 1$ ou elle est parallèle à savoir dans $y = 0$ plan. Si la ligne coupe le plan $y = 1$ au point d'intersection, par exemple $(x_1, 1, x_3)$ dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 alors $(x_1, 1, x_3)$ est dans le point d'intersection dans le plan projectif. Toutefois, si la ligne est parallèle au plan $y = 1$, le point dans le plan projectif d'intersection serait $(x_1, 0, x_3)$ (i.e. le point à l'infini). Cela nous indique que le plan projectif est l'union de l'ensemble des points dans le plan $y = 1$ (isomorphe à \mathbb{R}^2) et l'ensemble de points à l'infini, donc $P_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \cup \{\text{points à } \infty\}$. Maintenant, nous définissons les lignes dans le plan projectif (i.e. par l'équation $a X_1 + b X_3 + c = 0$), en accord avec notre toile $y = 1$ plan, si nous pensons d'une ligne dans ce plan compte tenu de notre relation d'équivalence, nous pouvons prendre le point $(x_1/x_2, 1, x_3/x_2)$ en tant que représentant de certain point (x_1, x_2, x_3) dans \mathbb{R}^3 with $(X_1 = x_1/x_2$ and $X_3 = x_3/x_2)$. De cette façon, l'équation de la ligne $a X_1 + b X_3 + c = 0$ est bien définie dans le plan projectif puisque $a(x_1/x_2) + b(x_3/x_2) + c = a x_1 + b x_3 + c x_2 = 0$ et $a x_1 + b x_3 + c x_2 = 0$ est bien défini dans le plan projectif. C'est parce que tout point $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ est une solution de l'équation puisque $a \lambda x_1 + b \lambda x_3 + c \lambda x_2 = \lambda(a x_1 + b x_3 + c x_2) = \lambda \cdot 0 = 0$. Maintenant, nous regardons ce qui se passe aux droites parallèles dans le plan projectif. Nous savons que les lignes parallèles ont la même pente si l'on considère les lignes $X_3 = (a/b) X_1 + c = 0$ et $X_3 = (a/b) X_1 + d = 0$ avec (a/b) la pente en commun, maintenant en multipliant les équations par b et substitution par $X_1 = x_1/x_2$ et $X_3 = x_3/x_2$, nous obtenons les deux équations $b x_3 - a x_1 - c b x_2 = 0$ et $b x_3 - a x_1 - d b x_2 = 0$. Pour trouver le point d'intersection nous supposons $x_2 = 1$, ce qui nous donne les équations $x_1 = (b/a) - (c b/a) x_2$ et $x_1 = (b/a) - (d b/a) x_2$ qui donne le point d'intersection $(b/a, 0, 1)$, Cela signifie que les points d'intersections des lignes parallèles en effet se situent sur le plan $y = 0$ (i.e. à l'infini) [10]. Maintenant que nous avons compris le construction mathématique de la perspective linéaire du point de vue de la géométrie projective moderne, nous allons maintenant donner la définition générale et abstraite des points à l'infini en utilisant des coordonnées homogènes et aller plus loin pour définir le perspective tant que transformation projective.

5.5.4. Construction de la perspective

Coordonnées homogènes [5]

$\vec{E} = \mathbb{K}^{n+1} \implies P(\vec{E}) = P_n(\mathbb{K}) = P(\mathbb{K}^{n+1})$ est son espace projectif associé

si $\vec{v} = (X_0, \dots, X_n)$, $\vec{v}' = (X_0', \dots, X_n')$ | $\vec{D} = \overline{v'v}$, $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$, $X_i = \lambda X_i'$ pour $i = 0, \dots, n$

$\vec{p} \in P_n(\mathbb{K})$, $\vec{p} = P(\vec{D}) = [X_0 : \dots : X_n] = [X_0' : \dots : X_n']$

$\overline{H}_i = \{\vec{p} = [X_0 : \dots : X_n] \in P_n(\mathbb{K}) \mid X_i = 0\}$ est un hyperplan projectif

Projectivisation de l'espace affine [5]

\vec{E} est \mathbb{K} – espace vectoriel, E est son espace affine associé à \hat{E} son extension vectoriel

$\implies P(\hat{E}) = E \cup P(\vec{E})$ est la projectivisation de E

où E est un ouvert affine de $P(\hat{E})$ avec un complémentaire le hyperplan projectif $P(\vec{E}) = E_\infty$

Points à l'infini [5]

$\vec{E} = \mathbb{K}^{n+1} \implies P(\vec{E}) = P_n(\mathbb{K})$ est son espace projectif associé

$\vec{H}_0 = \{p = (X_0, \dots, X_n) \in \vec{E} \mid X_0 = 0\}$ est l'hyperplan vectoriel

$P(\vec{H}_0) = \overline{H}_0 = \{\vec{p} = [X_0 : \dots : X_n] \in P_n(\mathbb{K}) \mid X_0 = 0\}$ est l'hyperplan projectif associé

$P(\vec{H}_0)^c = H_0$ est un ouvert affine dans $P_n(\mathbb{K}) \implies \vec{p} \in H_0$, $\vec{p} = \left[1 : x_1 = \frac{x_1}{x_0} : \dots : x_n = \frac{x_n}{x_0}\right]$

$H_0 = \vec{e}_0 + \vec{H}_0$ avec \vec{e}_0 comme origine et (e_1, \dots, e_n) comme base $\implies p \in H_0$,

$p = (x_1, \dots, x_n)$ coordonnées cartésiennes

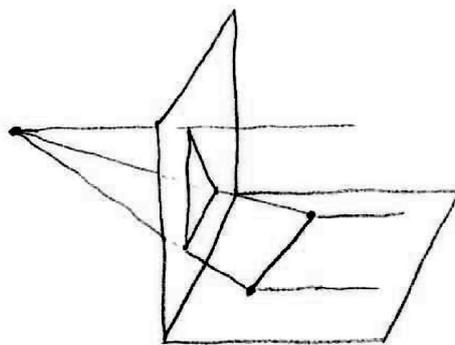
de même, si E un espace affine, $\dim E = n \mid E = \langle o, e_1, \dots, e_n \rangle = \mathbb{K}^n$ et $\hat{E} = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}^n$ son extension vectoriel

$\implies p \in E$, $p = (x_1, \dots, x_n)$ coordonnées cartésiennes et $\hat{p} \in \hat{E}$, $\hat{p} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ coordonnées cartésiennes

$\implies P_n(\mathbb{K}) = P(\mathbb{K}^{n+1}) = P(\hat{E}) = E \cup E_\infty$

$E = \{[1 : x_1 : \dots : x_n], (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n\}$

$E_\infty = P(\{x_0 = 0\})$ l'ensemble des points à l'infini



Représentation d'un point à l'infini où deux lignes parallèles se coupent

Perspective

Maintenant, nous allons donner la définition formelle de la perspective du point de vue de la géométrie projective et la géométrie affine.

Perspective (projective) [5]

$\vec{D} \subset \vec{E}$ est une droite vectorielle, $\vec{Q} \subset \vec{E}$ est un plan vectoriel et $\vec{H} \subset \vec{E}$ est un hyperplan vectoriel

$\bar{o} = P(\vec{D}) \in P(\vec{E})$, $\bar{D} = P(\vec{Q}) \subset P(\vec{E})$ est une droite projective, $\bar{H} = P(\vec{H})$ est un hyperplan projectif

$\bar{o} n'$ est pas dans \bar{H} , $\bar{o} \in \bar{D}$, $\bar{D} \cap \bar{H} = \bar{o}' \implies \vec{D} \subset \vec{Q}$ et $\vec{D} n'$ est pas dans \vec{H}

$\implies \vec{Q} \cap \vec{H}$ est une droite projective et $\bar{o}' = \bar{D} \cap \bar{H} = P(\vec{Q} \cap \vec{H})$

$\implies \forall \bar{p} \in P(\vec{E}) \mid \bar{p} \neq \bar{o}$ la droite projective $\bar{o}\bar{p}$ est défini et $\bar{o}\bar{p} \cap \bar{H} = \bar{p}'$

$\pi : P(\vec{E}) \setminus \{\bar{o}\} \longrightarrow \bar{H}$, $\pi(\bar{p}) = \bar{p}'$ est la projection centrale de centre \bar{o} sur \bar{H}

soit $\bar{H}' = P(\vec{H}')$ un autre hyperplan projectif $\mid \bar{o} n'$ est pas dans \bar{H}'

$\implies \pi_{|\bar{H}'} : \bar{H}' \longrightarrow \bar{H}$ une bijection appelée la perspective (projective) de centre \bar{o} de \bar{H}' sur \bar{H}

Perspective (affine) [5]

E est un espace affine, $o \in E$, $H, H_o \subset E$ sont des hyperplans affines $\mid H_o$ parallèle à H et $o \in H_o$

$f : E \setminus H_o \longrightarrow H$ est la projection centrale de centre o sur H où $f(p) = o P \cap H$

soit H' un autre hyperplan affine $\mid o n'$ est pas dans H'

$\implies f_{|\bar{H}'} : H' \longrightarrow H$ une bijection appelé la perspective (affine) de centre o de H' sur H

Projection en perspective [11]

Maintenant que nous avons défini les versions projectives et affines de la transformation perspective, nous allons utiliser la version affine de construire notre propre projection en perspective, qui sera utilise pour créer des images en 2 dimensions des objets géométriques.

$p, c, \Theta, e, \delta, r \in \mathbb{R}^3$ et $\beta, s \in \mathbb{R}^2$

$p = (p_1, p_2, p_3)$ est le point à projeter

$c = (c_1, c_2, c_3)$ est la position de la caméra

$\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ est l'orientation de la caméra

$e = (e_1, e_2, e_3)$ est la position de l'observateur par rapport à la surface d' affichage

$\beta = (\beta_1, \beta_2)$ est la projection de p

$\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ est la position de p défini par la caméra

$\delta = \mathcal{R}_{\theta_1, \theta_2, \theta_3}(p - c)$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) & -\cos(\theta_1) \sin(\theta_3) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) & \sin(\theta_1) \sin(\theta_3) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) \\ \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) & \cos(\theta_1) \cos(\theta_3) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) & -\sin(\theta_1) \cos(\theta_3) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \\ -\sin(\theta_2) & \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) & \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 - c_1 \\ p_2 - c_2 \\ p_3 - c_3 \end{pmatrix}$$

$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\delta_2 - e_2) \frac{-e_1}{\delta_1} \\ (\delta_3 - e_3) \frac{e_1}{\delta_1} \end{pmatrix}$ est la projection du point d transformée sur le plan $y - z$

Projection en perspective d'une surface régulière

L'équation de la surface de base cylindrique est donnée par

$$\chi : U \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \chi(u, v) = (3.5, 3.5, 0)$$

$$+ \left(\cos(u) \left(1 - \frac{\left(\frac{9}{10}v - \pi\right) \sin(2u)^4}{\pi} \right) (1 + \sin(v)^2), \sin(u) \left(1 - \frac{\left(\frac{9}{10}v - \pi\right) \sin(2u)^4}{\pi} \right) (1 + \sin(v)^2), 2(v - \sin(v)) \right)$$

$I_m(\chi) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid p = \chi(u, v), (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}$ est l'objet à projeter

$$\chi_{ct} = \frac{\chi(0,\pi) + \chi(\pi,\pi)}{2} = (3.5, 3.5, 2.5) \text{ est la position de la caméra}$$

$$\chi_o(u, v) = \chi(u, v) - \chi_{ct}$$

$e = (e_1, e_2, e_3) = (2, 3, 2)$ est la position de l'observateur

$\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \theta_3 = \frac{\pi}{6}$ est l'orientation de la caméra

$$T_\chi(u, v) = \mathcal{R}_{\theta_1, \theta_2, \theta_3}(\chi(u, v) - \chi_{ct}) = (T_{1,\chi}(u, v), T_{2,\chi}(u, v), T_{3,\chi}(u, v))$$

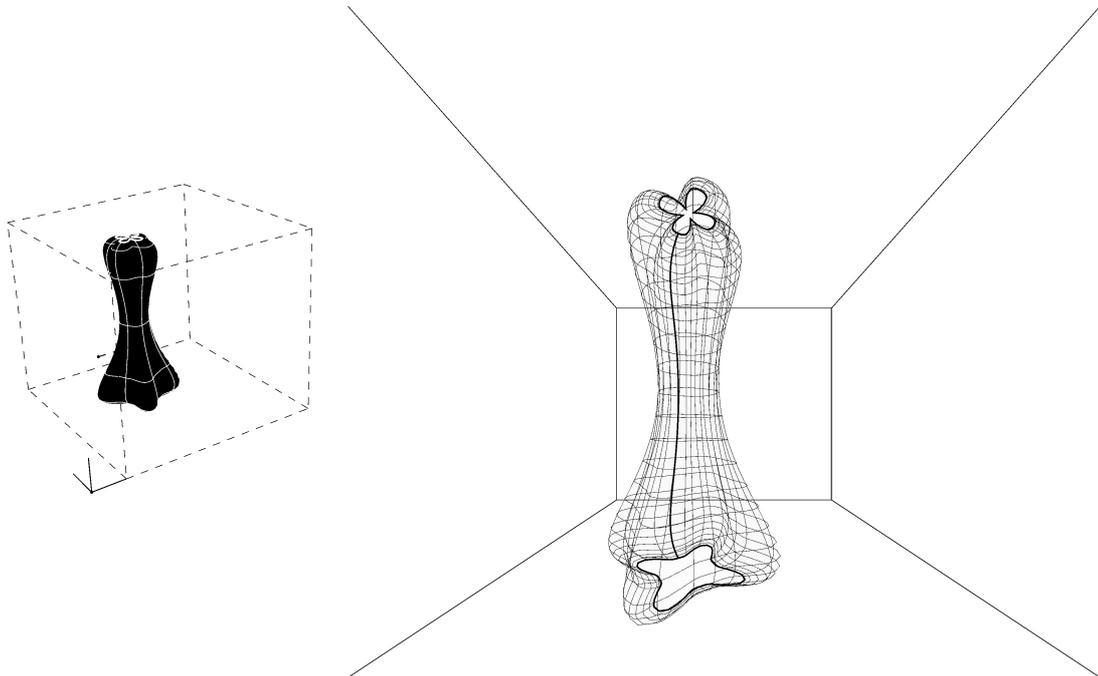
$I_m(T_\chi) = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid q = T_\chi(u, v), (u, v) \in U \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}$ est la position de l'objet dans la caméra

$$\implies \forall q \in I_m(T_\chi), \exists (u, v) \in U \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \mid q = T_\chi(u, v) = (q_1, q_2, q_3)$$

$$\beta_{T_\chi, e}(u, v) = \left((T_{2,\chi}(u, v) - e_2) \frac{-e_1}{T_{1,\chi}(u, v)}, (T_{3,\chi}(u, v) - e_3) \frac{e_1}{T_{1,\chi}(u, v)} \right) = (\beta_1(u, v), \beta_2(u, v))$$

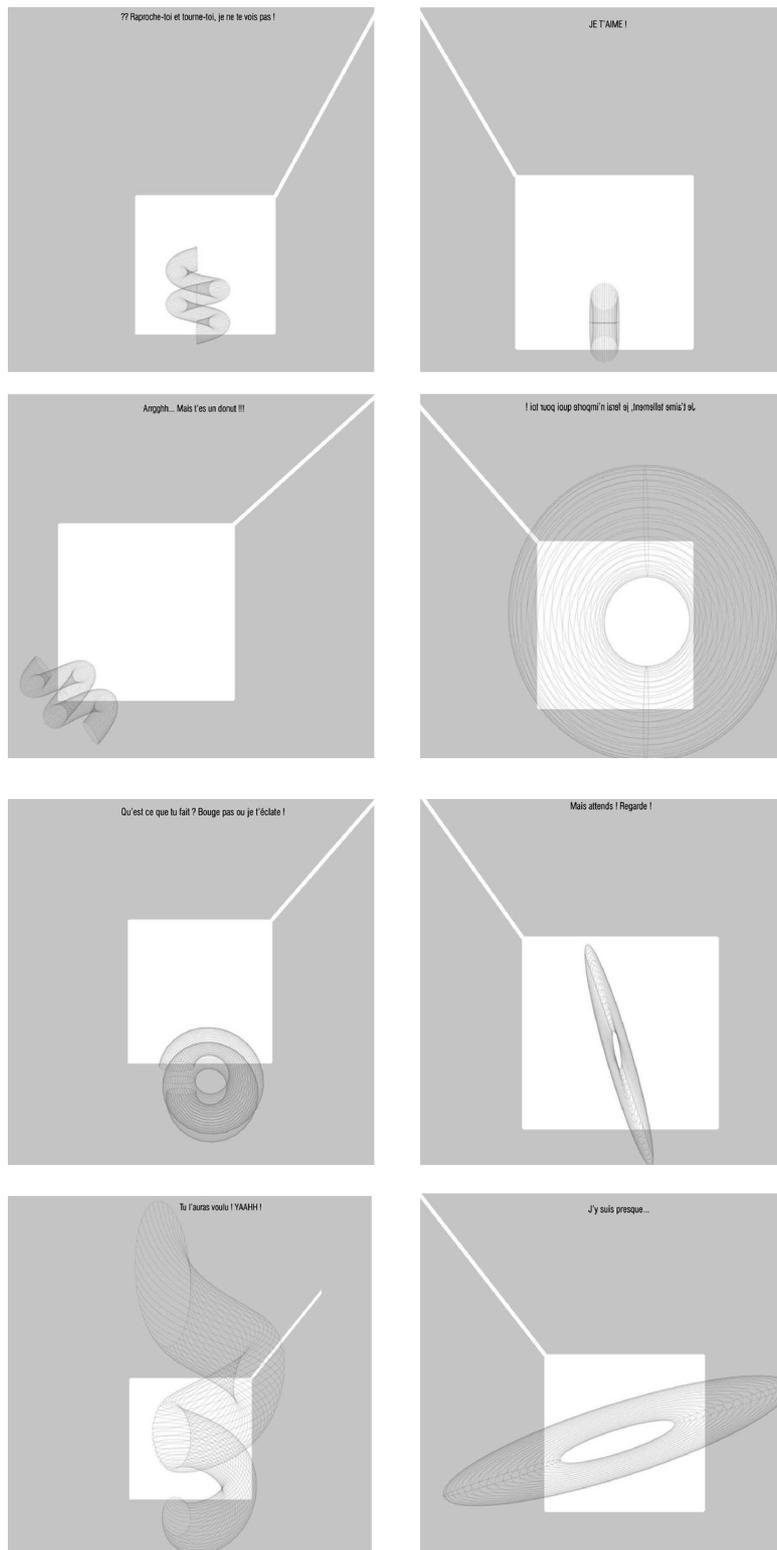
$I_m(\beta_{T_\chi, e}) = \{b \in \mathbb{R}^2 \mid b = \beta_{T_\chi, e}(u, v), (u, v) \in U \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}$ is the projected object

$$\implies \forall b \in I_m(\beta_{T_\chi, e}), \exists (u, v) \in U \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \mid b = \beta_{T_\chi, e}(u, v) = (b_1, b_2)$$



Représentation de la projection en perspective d'un objet géométrique sur le plan y-z

5.6. Conception utilisant la géométrie affine et la géométrie projective



Représentation des transformations affines et puis une projection en perspective

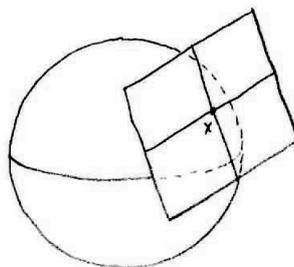
5.7. Références

- [1] *Cours d' Algèbre et géométrie*, Francois Patte, Université Paris Descartes, Paris, 2011
- [2] http://fr.wikipedia.org/wiki/Espace_vectoriel
- [3] *Cours d' Algèbre linéaire et bilinéaire*, Fabienne Comte, Université Paris Descartes, Paris, 2011
- [4] *Modern differential geometry of curves and surfaces*, Alfred Gray, CRC Press, 1993
- [5] *Cours d' Algèbre géométrique*, Daniel Bertrand, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2012
- [6] http://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_group
- [7] *Euclidism and theory of architecture*, Michele Sbacchi, Nexus Network Journal, vol. 3, no. 3, 2001
- [8] http://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_group
- [9] *Cours de Géométrie Différentielle*, Laurent Charles, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2012
- [10] *Projective geometry: perspectives from art and mathematics*, Hilary J. Smallwood, Fort Lewis college, Colorado, 2009
- [11] http://en.wikipedia.org/wiki/3d_projection

6. Opérations analytiques

6.1. Bases de calcul différentiel

Cette partie contient la majorité des opérations utilisées dans cette recherche, analytique ici se réfère à des opérations de dérivation et d'intégration par opposition aux opérations algébriques qui est basé sur l'addition et la multiplication. En utilisant des opérations analytiques, nous allons définir un grand nombre de notions importantes comme les champs de vecteurs et la courbure, qui seront des outils puissants pour la génération de formes; ces objets sont les fondements de la géométrie différentielle, ainsi nous commençons par donner un bref aperçu de cette branche de la géométrie. Géométrie différentielle est la discipline mathématique qui utilise les techniques du calcul différentiel et intégral, ainsi que l'algèbre linéaire et multilinéaire pour étudier les problèmes de géométrie. La théorie des courbes planes et spatiales et de surfaces dans l'espace euclidien de dimension 3 a été la base pour le développement de la géométrie différentielle au cours des 18^{ème} et 19^{ème} siècles, depuis lors, elle est devenue un domaine concerné, plus généralement, avec des structures géométriques sur les variétés différentiables. La géométrie différentielle est étroitement liée à la topologie différentielle, et des aspects géométriques de la théorie des équations différentielles, ce qui peut être vu clairement dans le sous-champ de la géométrie différentielle des surfaces. L'étude de la géométrie différentielle en particulier des courbes et des surfaces, est cruciale pour l'application de la géométrie moderne à la conception architecturale; cela est dû à l'intérêt croissant de l'architecture dans des formes courbes, pour cette raison, nous allons donner suffisamment d'attention à ce sujet. L'un des premières rencontres de surfaces en géométrie étaient les polyèdres de l'espace euclidien, telles que la limite d'un cube. Il est également possible de définir des surfaces lisses, dans lequel chaque point a un voisinage difféomorphe à un ensemble dans le plan euclidien; cette élaboration nous permet d'appliquer le calcul différentiel aux surfaces et de prouver de nombreux résultats. Les surfaces lisses équipées de métriques riemanniennes sont d'une importance fondamentale en géométrie différentielle, cette métrique apporte la surface avec les notions de distance, la superficie et géodésiques. Cela permettra à la définition de quelques classes importantes de surfaces en géométrie extrinsèque, à savoir les surfaces développables, réglées, de révolution et minimales. Les surfaces développables sont celles qui peuvent être aplatis à un plan sans étirement, les surfaces réglées sont ceux qui ont au moins une ligne droite passant par chaque point, les surfaces de révolution sont ceux qui sont obtenus par rotation d'une courbe dans le plan $x-z$ sur l'axe z et les surfaces minimales sont celles qui minimisent l'aire pour des conditions des limites données. Dans cette section, nous allons étudier et définir les catégories de cette surface, montrant aussi leur importance du point de vue de la conception architecturale. Une autre notion fondamentale que nous allons étudier est la courbure, ce qui permet à une classe supplémentaire de surfaces, notamment surfaces de courbure gaussienne constante; ces surfaces peuvent être représentées comme des groupes de Lie qui sont des groupes de symétrie continues de l'espace euclidien, la sphère et l'espace hyperbolique. Avant de commencer à donner l'analyse des courbes et des surfaces à l'aide de la géométrie différentielle, nous devons définir quelques notions importantes de calcul différentiel et l'algèbre linéaire comme la dérivabilité d'applications, difféomorphisme et le théorème d'inversion locale.



Représentation de la sphère (variété de deux dimensions) et son espace tangent

Nous allons commencer par donner des éléments de base de l'algèbre linéaire et du calcul différentiel

Déterminant, trace et inverse [1]

$A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$, est la trace de A

$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i_0+j} a_{i_0,j} \det(A_{i_0,j})$,

est le déterminant de A ($A_{i_0,j}$ est la matrice A à la suppression de la ligne i_0 et la colonne j)

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{com}(A)$, est l'inverse de A

(avec $\text{com}(A)_{i,j} = \det(A_{i,j})$ et $A_{i,j}$ is the matrix A with the removal of the line i and column j)

$\det(AB) = \det(A) \det(B)$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$,

si A est diagonalisable (i.e. $\exists P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible | $P^{-1} A P$ est une matrice diagonale)

$\implies \det(P^{-1} A P) = \det(P)^{-1} \det(A) \det(P) = \det(A)$ and $\text{Tr}(P^{-1} A P) = \text{Tr}(A P P^{-1}) = \text{Tr}(A)$

Produit vectoriel [1]

$a, b \in \mathbb{R}^3$, $\epsilon = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 alors $a = (a_1, a_2, a_3) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$

le produit vectoriel $a \times b = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} e_1 - \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} e_2 + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} e_3$

le produit vectoriel pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ a les propriétés suivantes

$a \times b = -b \times a$, $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

$(\lambda a) \times b = \lambda (a \times b) = a \times (\lambda b)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$

$\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$

$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2$

$(a \times b) \times c = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$, $\langle a \times b, c \rangle = \langle a, b \times c \rangle$

$\|a \times b\| = \text{Sin} \theta \|a\| \|b\|$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est l'angle positif entre a et b

$\|a \times b\|$ est l'aire du parallélogramme engendré par a et b

le produit mixte $(a \ b \ c) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a \times \langle b, c \rangle = \langle a, b \times c \rangle$

Différentiabilité cas général [2]

$(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés, $f: U \subset E \rightarrow F$, U un ouvert de E , $a \in U$ on dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire L qui vérifie

$$\frac{1}{\|h\|_E} (f(a+h) - f(a) - L(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0_F, \quad h \neq 0$$

si elle existe, elle dépend de a et est notée $f'(a) = L$, où $f'(a) \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\frac{1}{\|h\|_E} (f(a+h) - f(a) - f'(a).h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0_F, \quad h \neq 0, \quad \forall \epsilon > 0,$$

$\exists \eta: \|h\|_E > \eta$ tel que $\frac{1}{\|h\|_E} \|f(a+h) - f(a) - f'(a).h\|_F \leq \epsilon$

f est différentiable en $a \iff f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \|h\|_E \cdot \epsilon(h)$, où $\epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0_F, h \neq 0$

Applications composées [2]

$(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ and $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces vectoriels normés

$f: U \subset E \rightarrow F$, $g: V \subset F \rightarrow G$,

supposons $f(a) = b \in V$ et $W = f^{-1}(V) \subset U$ un ouvert de E , $a \in W$

$h = g \circ f: W \subset E \rightarrow G$ supposons f est différentiable en a et g est différentiable en $b = f(a)$

alors h est différentiable en a et $h'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$

où $f'(a) \in \mathcal{L}(E, F)$, $g'(a) \in \mathcal{L}(F, G)$, $h'(a) \in \mathcal{L}(E, G)$

Différentiabilité d'applications [2]

cas : 1

E, F_1, \dots, F_n $n + 1$ espaces vectoriels normés, U ouvert de E , $f : U \subset E \rightarrow F = F_1 \times \dots \times F_n$

$y \in F \Rightarrow y = (y_1, \dots, y_n)$ tel que pour $1 \leq i \leq n$

$$y_i \in F_i, \|y\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|_{F_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \|y\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, n} |y_i|_{F_i}$$

projection, $p_i : F \rightarrow F_i$, $p_i(y) = y_i$

injection canonique, $u_i : F_i \rightarrow F$, $u_i(y_i) = (0, \dots, 0, y_i, 0, \dots, 0)$

pour $1 \leq i \leq n$, p_i et u_i sont des applications continues linéaires donc différentiable

$$p_i \circ u_i = \text{id}_{F_i} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n u_i \circ p_i = \text{id}_F$$

pour $a \in U$, f est différentiable en $a \iff \forall i = 1, \dots,$

n $f_i = p_i \circ f : U \subset E \rightarrow F_i$ est différentiable en a et

$$f'(a) = \sum_{i=1}^n u_i \circ f'_i(a), \quad \text{où} \quad f'(a) \in \mathcal{L}(E, F) \quad \text{et} \quad f'_i(a) \in \mathcal{L}(E, F_i)$$

cas : 2

E_1, \dots, E_n, F $n + 1$ espaces vectoriels normés,

U ouvert de $E = E_1 \times \dots \times E_n$, $f : U \subset E = E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$

$$x \in E \Rightarrow x = (x_1, \dots, x_n), \quad \|x\|_E = \sup_{i=1, \dots, n} |x_i|_{E_i}$$

pour $a \in U$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $h = (h_1, \dots, h_n)$

application partielle $f \circ \lambda_i$, $\lambda_i : E_i \rightarrow E$,

$$\lambda_i(x_i) = a + u_i(x_i - a_i) = (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = a - u_i(a_i) + u_i(x_i)$$

λ_i est différentiable en x_i et $\lambda_i'(x_i) = u_i$, $f \circ \lambda_i : \lambda_i^{-1}(U) \subset E_i \rightarrow F$,

$f \circ \lambda_i$ est différentiable car λ_i et f sont différentiables

pour $a \in U$, f est différentiable en $a \iff \forall i = 1, \dots,$

n les applications partielles sont différentiables en les a_i

cette différentielle est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la dérivée partielle par rapport à x_i en a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'(a) \circ u_i, \quad f'(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \circ p_i \Rightarrow \text{pour } a, h \in U, \quad f'(a).h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i$$

cas : 3

$E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ espaces vectoriels normés, U ouvert de E ,

$$f : U \subset E \rightarrow F, \quad f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$$

f est différentiable $\iff \forall i = 1, \dots, p$, $\forall j = 1, \dots, n$ f_i est différentiable

$$f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \text{l'existence de } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \quad \text{où} \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$$

la matrice jacobienne

pour $a, h \in \mathbb{R}^n$

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}, \quad f'(a).h = J_f(a).h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$\text{ligne } i : \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a).h_k$$

Maintenant, nous allons donner deux théorèmes fondamentaux équivalents en calcul différentiel, à savoir, le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites.

Difféomorphisme [2]

E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ ouvert

$f : U \subset E \rightarrow F$ C^1 (i.e. différentiable et sa dérivée est continue), bijective et f^{-1} est C^1

$\Rightarrow f$ est un C^1 difféomorphisme

Théorème d'inversion locale (difféomorphisme local) [2]

E, F sont des espaces de Banach, $x \in U \subset E$ ouvert

$f : U \subset E \rightarrow F$ est C^1 est $f'(x) : E \rightarrow F$ est un isomorphisme

$\Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}_x$ et $W \in \mathcal{V}_{f(x)} \mid f : V \rightarrow W$ est un C^1 difféomorphisme

Théorème des fonctions implicites [2]

E, F, G sont des espaces de Banach, $(x, y) \in U \subset E \times F$ ouvert, $f : U \subset E \times F \rightarrow G$

tel que $f(x, y) = 0$, f est C^1 sur U et $\partial_y f(x, y) \in \text{Isom}(F, G)$

$\Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}_{(x,y)}, W \in \mathcal{V}_x$ et $\varphi : W \rightarrow F$ C^1

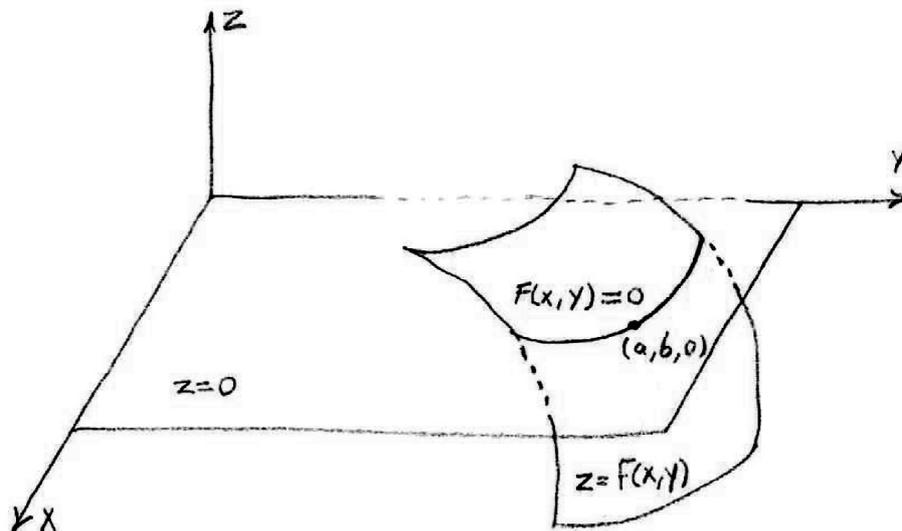
$(x, y) \in V, f(x, y) = 0 \iff x \in W, y = \varphi(x)$ et $\varphi'(x) = -(\partial_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ \partial_x f(x, \varphi(x))$

Théorème des fonctions implicites (en dimension finie) [2]

$f : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p, f(x, y) = 0, f$ est C^1 sur U et $\det(\text{Jac } f_y(x, y)) \neq 0$

$\Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}_x, W \in \mathcal{V}_y \mid V \times W \subset U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $\varphi : V \rightarrow W$ C^1

$x \in V, y \in W, f(x, y) = 0 \iff x \in V, y = \varphi(x)$



Représentation de la théorème des fonctions implicites

Ces théorèmes sont en fait équivalents, et le théorème des fonctions implicites a été utilisé plus tôt dans la définition des surfaces locales qui recouvrent une surface algébriquement définies; et qui permettent alors de faire toutes les opérations définies plus tard.

6.2. Géométrie différentielle des courbes

6.2.1. Définition d'une courbe régulière

Auparavant, nous avons donné une définition plus généralisée des courbes et des surfaces, comme des variétés de dimensions un et deux, définies par paramétrage local, maintenant nous allons les définir plus en détail avec des explication des notions mathématiques nécessaires.

Courbe paramétrée [1]

$$\alpha : I \subset (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est une courbe paramétrée à condition que α can be

étendue en fonction différentiable par morceaux à partir de $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$

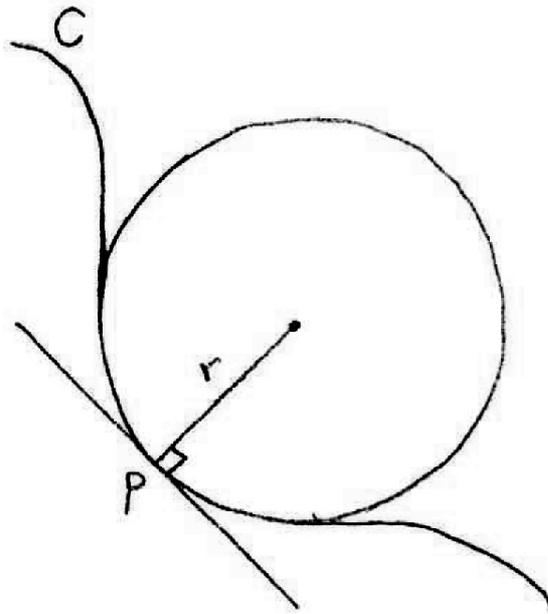
$\alpha(I)$ est la trace $d' \alpha$ et $S \subset \mathbb{R}^n$ est paramétrée par α si $\exists I \subset \mathbb{R} \mid \alpha(I) = S$

Courbe régulière [1]

$\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe régulière si $\forall t \in (a, b)$ α est différentiable et $\|\alpha'(t)\| \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)}$

si $\forall t \in (a, b)$ $\|\alpha'(t)\| = 1$ alors α est de vitesse unité

Maintenant, nous définissons les champs de vecteurs sur la courbe et le repère de Frenet et après la courbure des courbes et leur longueurs de l'arc. Intuitivement la courbure d'une courbe, mesure l'échec d'une courbe pour être une ligne droite, plus la vitesse tourne le long d'une courbe, plus la courbure. Maintenant, nous démontrons le contrôle de la forme en utilisant l'analyse, à savoir en tout point de la courbe nous savons son espace tangent, la longueur de la courbe, sa courbure et sa torsion, avec cette information, nous pouvons concevoir et décider beaucoup de choses sur cette courbe.



Représentation du rayon de courbure d'une courbe en un point

Vélocité de la courbe [1]

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe avec $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$, $t \in I$

alors la vélocité de f est donnée par l'application $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \dots, \alpha_n'(t))$,

où $\alpha'(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\alpha'(t)$ est une application linéaire

$v(t) = \|\alpha'(t)\|$ est la vitesse de α en t , $\alpha''(t)$ est l'accélération de α en t

pour $n = 3$, $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$

la vélocité, l'accélération et la vitesse sont donnés par

$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t))$ et $v_1(t) = \|\alpha'(t)\|$

$\alpha''(t) = (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t), \alpha_3''(t))$ et $v_2(t) = \|\alpha''(t)\|$

$\alpha'''(t) = (\alpha_1'''(t), \alpha_2'''(t), \alpha_3'''(t))$ et $v_3(t) = \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|$

Champ de vecteur de la courbe [1]

un champ de vecteurs le long α est une application Y qui associe à chaque $t \in$

(a, b) un vecteur $Y(t)$ au point $\alpha(t)$

$Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$, Y est différentiable $\iff \forall i = 1, \dots, n$ $y_i : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable

parfois, nous devons faire la distinction entre le vecteur $Y(t)$ en $\alpha(t)$ et le vecteur parallèle à celui à l'origine

soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, f différentiable et X, Y champs de vecteurs le long α alors

$f Y(t) = f(t) Y(t)$, $(f Y)' = f' Y + f Y'$

$(X + Y)' = X' + Y'$, $\langle X, Y \rangle' = \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle$

$(J Y)' = J Y'$, où J est la structure complexe, $(J(x, y)) = (-y, x)$

Champs de vecteurs tangente et normale normalisé de la courbe plane [1]

$\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, une courbe régulière ($\|\gamma'(t)\| \neq 0$) et différentiable par morceaux

$T_2(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ est le vecteur tangent à la courbe normalisé γ at $t \in (a, b)$

$N_2(t) = J \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right)$ est le vecteur normal à la courbe normalisé γ at $t \in (a, b)$,

où J est la structure complexe ($J^2 = -\text{id}_{\mathbb{R}^2}$)

Repère de Frenet le long d'une courbe dans l'espace [1]

$\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe régulière si $\forall t \in (a, b)$ α est différentiable et $\|\alpha'(t)\| \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)}$

$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ est le champ de vecteur tangent unitaire de α

$N(t) = B(t) \times T(t)$ est le champ de vecteur normal principal de α

$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$ est le champ de vecteur binormale unité de α

Homotopies de la courbe régulière [1]

$\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est fonction scalaire qui pourrait être remplacée par les fonctions de la longueur de l'arc,

la courbure ou la torsion

$\alpha, \beta_T, \beta_N, \beta_B : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ courbes régulières

$\beta_T(t) = \alpha(t) + |\lambda(t)| T(t)$

$\beta_N(t) = \alpha(t) + |\lambda(t)| N(t)$

$\beta_B(t) = \alpha(t) + |\lambda(t)| B(t)$

$T L_{\alpha, \lambda}, N L_{\alpha, \lambda}, B L_{\alpha, \lambda} : (a, b) \subset \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$T L_{\alpha, \lambda}(t, u) = \alpha(t) + u |\lambda(t)| T(t)$ | $T L_{\alpha, \lambda}(t, 0) = \alpha(t)$ et $T L_{\alpha, \lambda}(t, 1) = \beta_T(t)$

$N L_{\alpha, \lambda}(t, u) = \alpha(t) + u |\lambda(t)| N(t)$ | $N L_{\alpha, \lambda}(t, 0) = \alpha(t)$ et $N L_{\alpha, \lambda}(t, 1) = \beta_N(t)$

$B L_{\alpha, \lambda}(t, u) = \alpha(t) + u |\lambda(t)| B(t)$ | $B L_{\alpha, \lambda}(t, 0) = \alpha(t)$ et $B L_{\alpha, \lambda}(t, 1) = \beta_B(t)$

$T L_{\alpha, \lambda}, N L_{\alpha, \lambda}$ et $B L_{\alpha, \lambda}$ sont des homotopies entre α et $\beta_T, \beta_N, \beta_B$ respectivement

6.2.2. Analyse d'une courbe régulière

Courbure de la courbe plane [1]

$\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, une courbe régulière ($\|\gamma'(t)\| \neq 0$) et différentiable par morceaux

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{\gamma''(t) \cdot J \gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}} = \frac{\text{Re}(\gamma''(t) \overline{i\gamma'(t)})}{\|\gamma'(t)\|^3}$$
 est la courbure de γ ,

$$r_{\kappa 2}(t) = \frac{1}{\kappa_\gamma(t)}$$
 est le rayon de courbure

si $\gamma'(t) = 0$ ou $\gamma'(t) n'$ existe pas $\implies \kappa_\gamma(t) n'$ est pas défini et si $\gamma''(t) = 0 \implies \kappa_\gamma(t) s'$ annule

$\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2$, une courbe de vitesse unité ($\|\beta'(s)\| = 1, \forall s \in (c, d)$) $\implies \beta'' = \kappa_\beta J \beta'$ sa courbure signée

La courbure et la torsion d'une courbe de l'espace [1]

$$K(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$
 est la fonction de courbure de α ,

$$r_K(t) = \frac{1}{K_\alpha(t)}$$
 est le rayon de la fonction de courbure de α

$$\tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$
 est la fonction de torsion de α

$$K_\beta(s) = \|\beta''(s)\|$$
 est la courbure de β (ne s'annule jamais et $K_\beta = |\kappa_\beta|$ si β est contenu dans \mathbb{R}^2)

La longueur de l'arc [1]

$\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe, soit $I = (a, b)$ supposons α est défini et différentiable en a et b

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$
 est la longueur de α ne dépend pas de la paramétrisation de α

$$S_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$$
 est la fonction de longueur de l'arc de α à partir de $t_0 \in (a, b)$

$$S_\beta(t) =$$

$$\int_{t_0}^t \|\beta'(u)\| du = t - t_0$$
 est la longueur de l'arc d'une courbe de vitesse unité $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ à partir de t_0

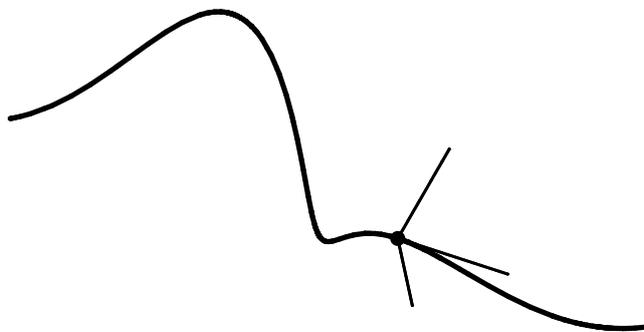
Analyse d'une courbe régulière [1]

L'équation de la courbe de base est donnée par

$$\varphi : U \subset [0, 4\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(t) = \left(t + \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{100} \sin(t), \sin\left(\frac{t}{2}\right), 1 - \cos(t) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right)$$

$$\text{le repère de Frenet } |_{\varphi(t=3\pi)} = \{T, N, B\} |_{\varphi(t=3\pi)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{la longueur de l'arc } |_{\varphi(t=3\pi)} = 12.1154, \text{ la courbure } |_{\varphi(t=3\pi)} = 0.774992 \text{ et la torsion } |_{\varphi(t=3\pi)} = 0$$



Représentation du repère de Frenet sur une courbe régulière

Jusqu'à présent, nous avons défini le repère de Frenet sur une courbe qui va nous permettre de définir les champs de vecteurs sur la courbe, qui à son tour est un outil de conception utile. Ensuite nous avons défini l'analyse de courbure et la longueur de l'arc de la courbe qui peut être également utilisé dans la conception d'autres courbes à partir de la courbe initiale. Avant de commencer à concevoir de nouvelles courbes à partir de courbes initiales à l'aide de ces définitions, nous allons définir une autre analyse utile qui est de trouver des points d'intersection entre les courbes.

Points d'intersection

si α, β deux droites, avec $a, b, x, y \in \mathbb{R}^3$

$$\alpha(t) = a + tx \quad \text{et} \quad \beta(s) = b + sy \implies \alpha(t) = \beta(s) \implies \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1(s) \\ \beta_2(s) \\ \beta_3(s) \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 & y_1 \\ -x_2 & y_2 \\ -x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

si α est une courbe et β est une droite,

nous pouvons toujours trouver des points d'intersection algébriquement en résolvant $\alpha(t) = \beta(s)$

si α est une droite et χ un plan, avec $a, c, x, y, z \in \mathbb{R}^3$

$$\alpha(t) = a + tx \quad \text{et} \quad \chi(u, v) = c + uy + vz \implies \alpha(t) = \chi(u, v) \implies \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1(u, v) \\ \chi_2(u, v) \\ \chi_3(u, v) \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} a_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 \\ a_3 - c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 & y_1 & z_1 \\ -x_2 & y_2 & z_2 \\ -x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ u \\ v \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} t \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 & y_1 & z_1 \\ -x_2 & y_2 & z_2 \\ -x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 \\ a_3 - c_3 \end{pmatrix}$$

si α est une courbe et χ un plan,

nous pouvons toujours trouver des points d'intersection algébriquement en résolvant $\alpha(t) = \chi(u, v)$

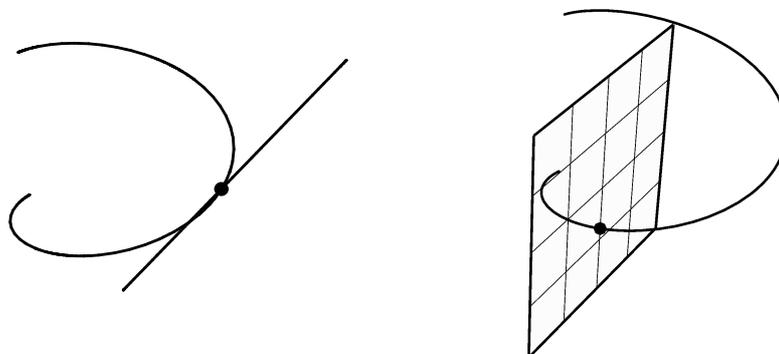
Les points d'intersection de ligne / courbe et de courbe / plan

$\alpha, \beta : U \subset [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (2 \cos(2\pi t - \pi), 2 \sin(2\pi t - \pi), \frac{(2\pi t - \pi)}{2})$, $\beta(s) = (4s, 0, 2\pi s - \pi)$

$\chi : \mathcal{U} \subset [-2, 2] \times [-2, 2] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\chi(u, v) = (0, u - 2, v)$

$\alpha(t) = \beta(s) \implies$ le point d'intersection est $(2, 0, 0)$

$\alpha(t) = \chi(u, v) \implies$ le point d'intersection est $(0, -2, -0.785)$



Représentation des intersections de ligne / courbe et de courbe / plan

6.2.3. Conception en utilisant l'analyse d'une courbe régulière

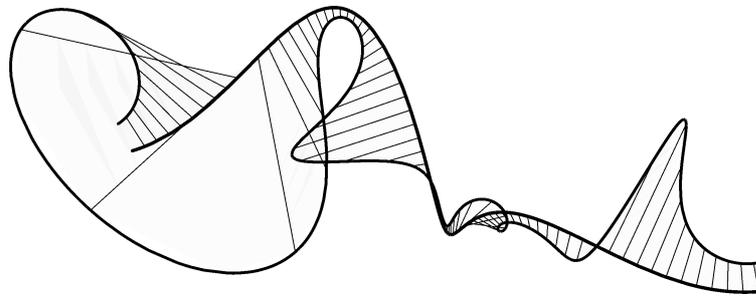
Avec ces définitions, nous pouvons déjà donner un exemple sur la façon d'utiliser l'analyse pour générer de nouvelles formes de celles définies précédemment. Par exemple, la courbe spirale allongée que nous avons défini plus haut va être utilisée comme notre courbe de base et nous allons définir son champ de vecteur normal et sa courbure et les utiliser pour dessiner une autre courbe. La courbure et la torsion peuvent être visualisées sur le domaine de la courbe, afin de voir clairement où elles sont les plus importantes et où elles ne sont pas définies.

Conception en utilisant l'analyse (homotopies sur une courbe régulière)

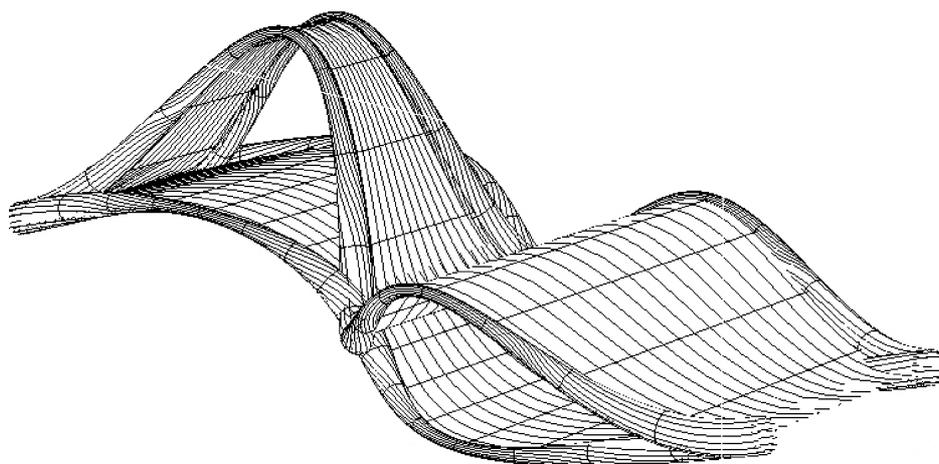
Le champ de vecteur normal défini sur cette courbe nous donne l'homotopie

$$N L_{\varphi}(t, u) = \varphi(t) + u |r_K(t)| N(t)$$

$$r_K : U \subset [0, 4\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad r_K(t) = \frac{1}{K_{\varphi}(t)} = \frac{\|\varphi'(t)\|^3}{\|\varphi'(t) \times \varphi''(t)\|} \quad \text{le rayon de courbure}$$



Représentation des deux courbes reliées par une homotopie



Représentation des tubes où le rayon de la section transversale varie avec la courbure

6.2.4. Tubes le long des courbes

Maintenant, on peut construire une surface à partir d'un champ de vecteur le long d'une courbe, à savoir un tube le long de la courbe

Tube le long d'une courbe [1]

$\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe, avec (T, N, B) est le repère de Frenet de α

N et B sont perpendiculaires à α au point t , $\forall t \in (a, b)$, (N, B) former une base orthonormée dans \mathbb{R}^2

$f_{t_0} : u \rightarrow \cos(u) N(t_0) + \sin(u) B(t_0)$ en un t_0 fixé, le cercle $f_{t_0}(u)$ est perpendiculaire à $\alpha(t_0)$

pour $t \in (a, b)$, le cercle $f_{t_0}(u)$ se déplace le long α et la trace de f est appelé le tube autour de α

le tube autour de α est définie par

$$\chi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \chi_{\alpha, \lambda, \mu}(t, u) = \alpha(t) + (\lambda(t) \cos(u) N_{\alpha}(t_0) + \mu(t) \sin(u) B_{\alpha}(t_0)),$$

où $\lambda, \mu : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonction scalaire

Tube autour de le noeud de tore

L 'équation de la courbe de base est donnée par

$$\varphi : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

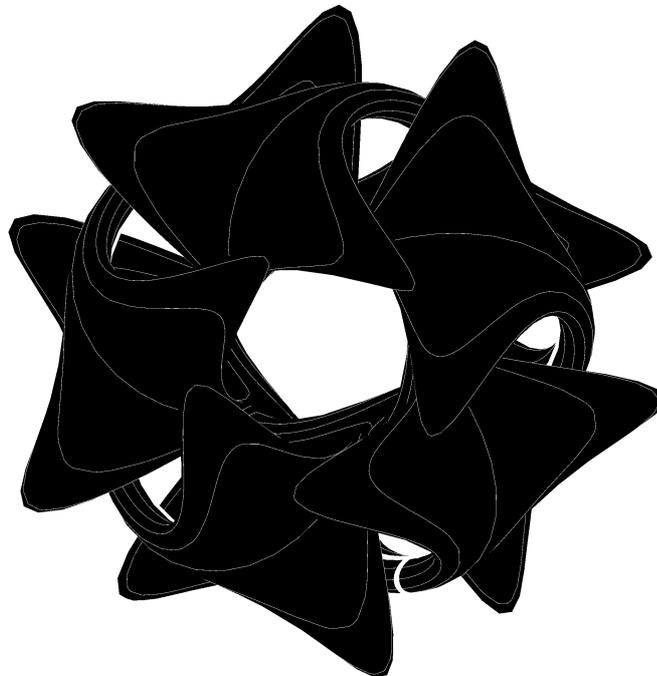
$$\varphi(t) = ((8 + 3 \cos(5t)) \cos(2t), (8 + 3 \cos(5t)) \sin(2t), 5 \sin(5t))$$

nous définissons les fonctions scalaires λ, μ et l'équation pour le tube le long de φ

$$\lambda, \mu : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \lambda = \frac{3}{4}, \mu(t) = 100 K_{\varphi}(t)^2$$

$$\chi_{\varphi} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \chi_{\varphi}(t, u) = \varphi(t) + (\lambda \cos(u) N_{\varphi}(t) + \mu(t) \sin(u) B_{\varphi}(t))$$

où $K_{\varphi}(t)$ est la fonction de courbure de φ et $N_{\varphi}(t), B_{\varphi}(t)$ sont les vecteurs normale et binormale de φ au point t



Représentation d'une surface tube autour d'un noeud de tore

6.2.5. Conception utilisant des tubes

Avec cette définition du tube le long de la courbe, nous allons montrer un exemple comment d'utiliser cette définition pour générer des surfaces de potentiel architecturale.

L'équation de la courbe de base est donnée par

$$\varphi : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(t) = (\cos(3u), \sin(2u), \frac{3}{10}(\frac{7}{10} + \sin(3u)))$$

L'équation du tube le long de la courbe φ

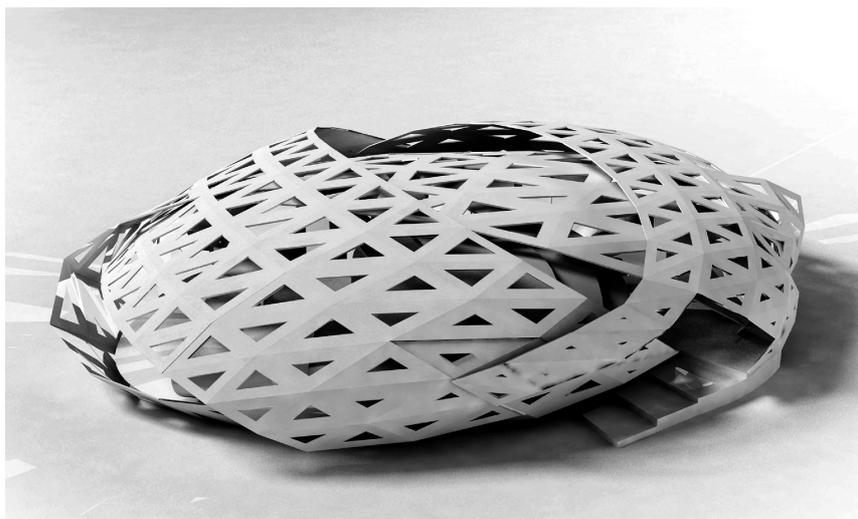
$$\chi_\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \chi_\varphi(u, v) = \varphi(u) + \frac{1}{2} \left(\frac{23}{20} \cos\left(\frac{v}{2}\right) B_\varphi(u) + \frac{2}{5} \sin\left(\frac{v}{2}\right) N_\varphi(u) \right)$$

où $N_\varphi(u)$, $B_\varphi(u)$ sont les vecteurs normale et binormale de φ au point u



Représentation de la courbe de section transversale en mouvement le long de la courbe de trajectoire

Maintenant, nous allons démontrer avec un exemple concret l'application de l'analyse d'une courbe régulière dans une conception architecturale. L'idée de la génération de forme était de travailler à partir d'une courbe dans l'espace et de générer une surface à partir de cette courbe.



Représentation l'application en architecture pour la conception utilisant des tubes

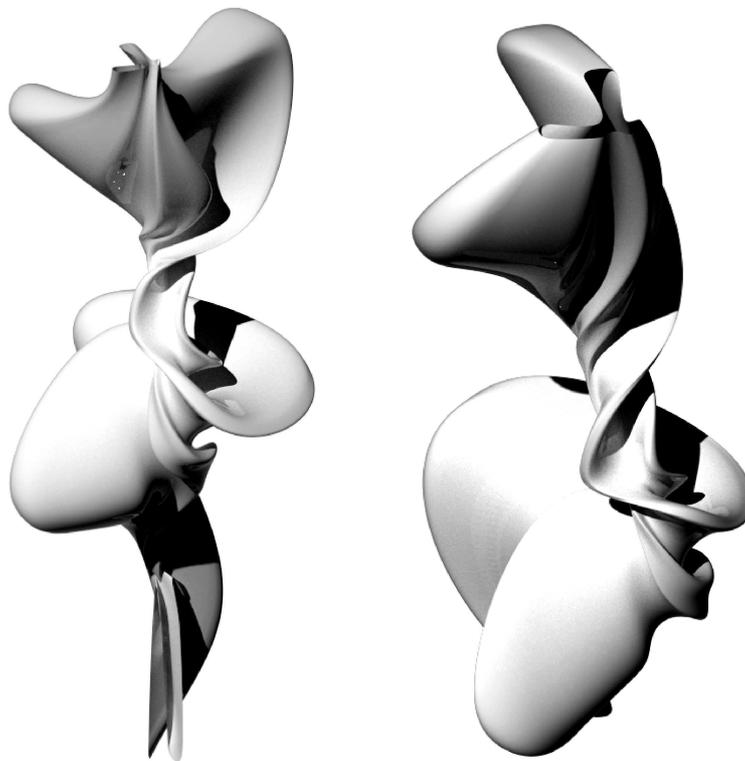
Conception en utilisant le tube le long de la courbe en CAD

Maintenant que nous avons défini le tube le long d'une courbe et la fonction de NURBS plus tôt, nous allons montrer d'autres exemples de l'utilisation de cette méthode d'un tube le long d'une courbe pour générer des formes architecturales, ces exemples ont été réalisées en utilisant le logiciel de modélisation NURBS.



Représentation du processus de la création de courbes transversales le long d'une courbe

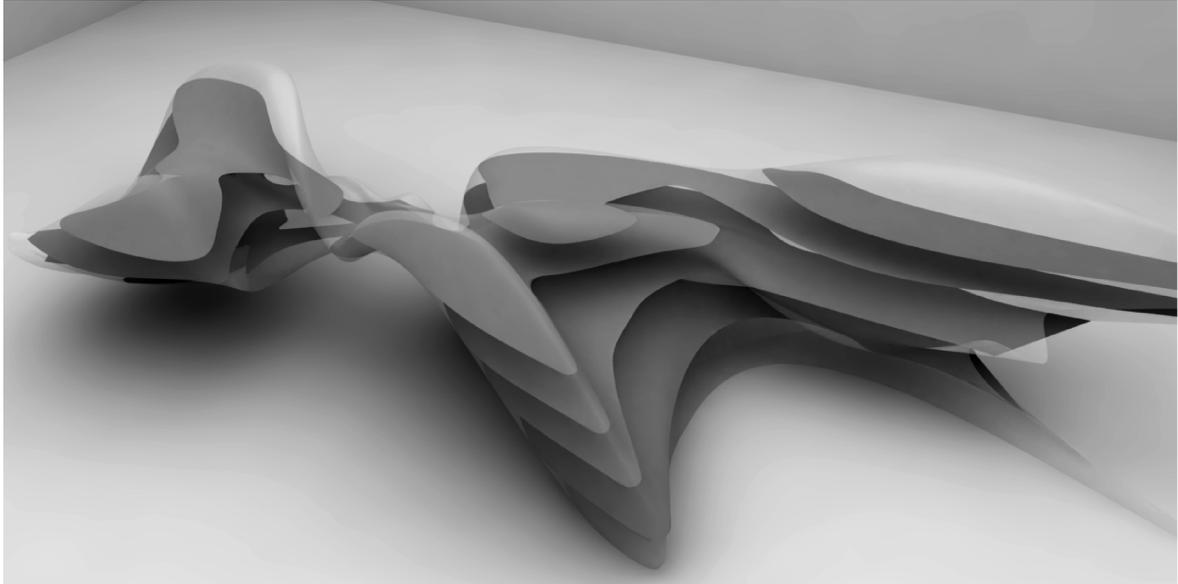
Dans cet exemple, nous pouvons voir la qualité sculpturale qui peut être introduit en utilisant le procédé d'un tube le long d'une courbe et la variation de la taille de la courbe transversale en utilisant une fonction à valeurs réelles le long de la courbe.



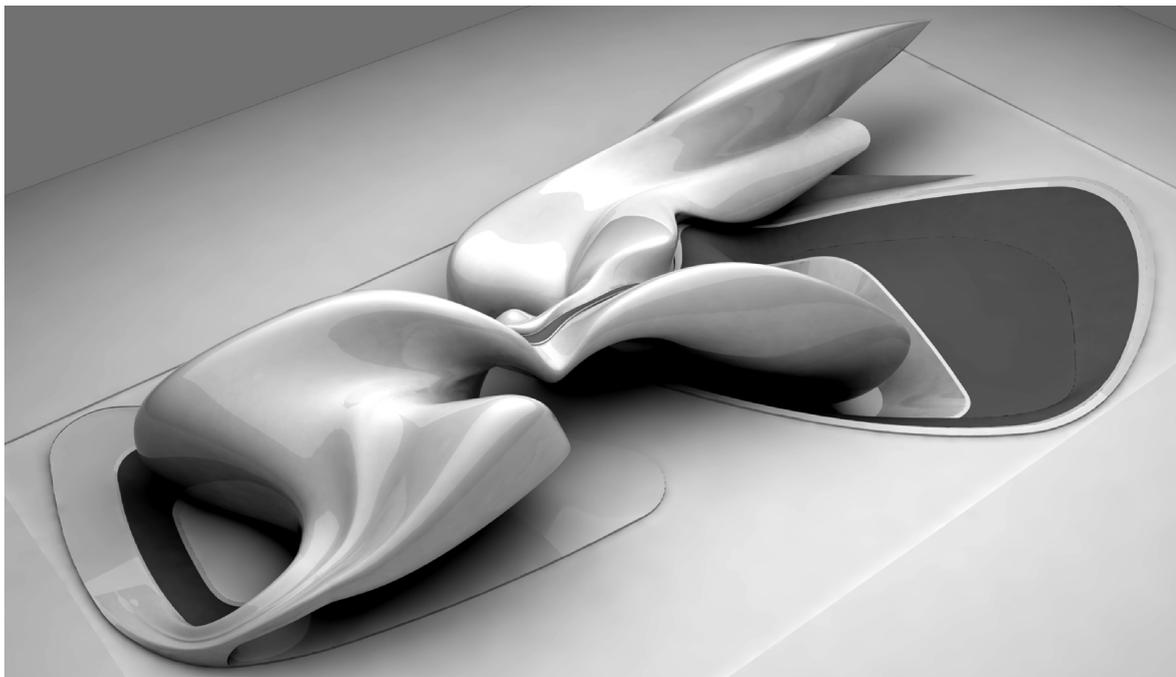
Représentation de la surface tube en suivant les courbes transversales le long de la courbe de trajectoire

Plus de conception utilisant des tubes

Dans cet exemple, on montre une conception de la forme d'un bâtiment construit entièrement à partir d'un tube le long d'une courbe avec des variations de l'échelle et de la rotation de la courbe transversale telle qu'elle progresse le long de la courbe de trajectoire. La surface tube peut être recoupée par des plans horizontaux pour obtenir des plans d'étage de base.



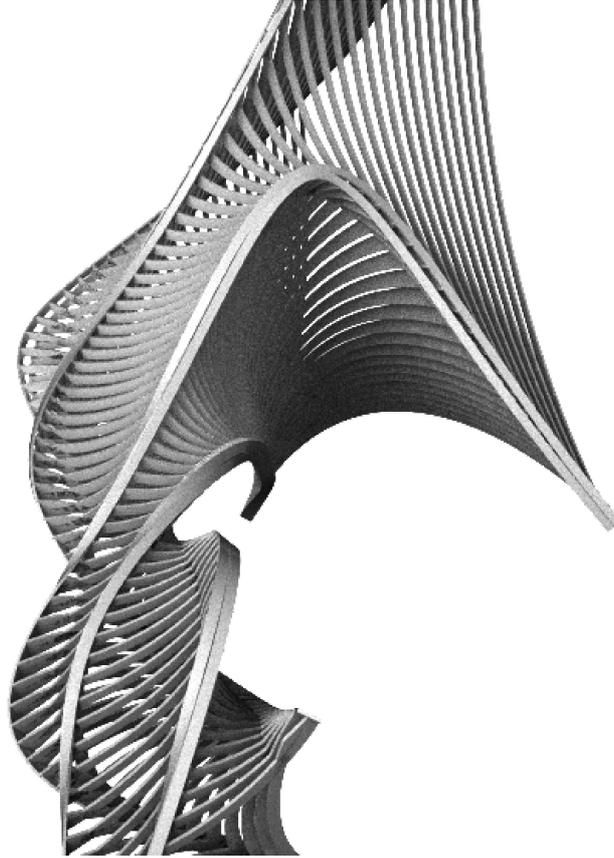
Représentation des plans d'étage internes obtenus par l'intersection de la surface tube avec des plans horizontaux



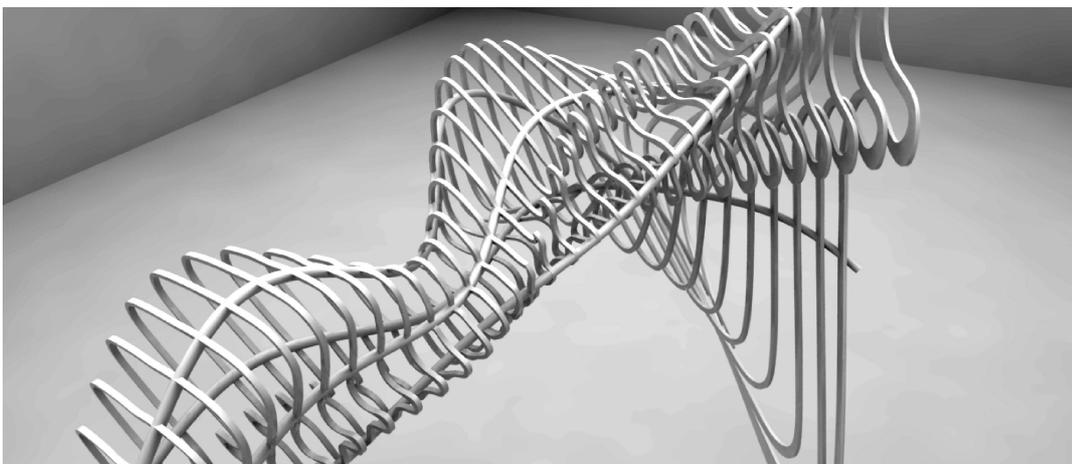
Représentation de la forme d'un bâtiment construit par la méthode du tube le long d'une courbe

Plus de conception utilisant des tubes

Maintenant, nous allons montrer d'autres exemples de générer une forme architecturale utilisant cette méthode du tube le long d'une courbe, cet exemple a également été conçu à l'aide d'un logiciel de CAO. On voit ci-dessous que dans ces exemples, nous n'avons pas créé une surface, mais les courbes transversales ont été utilisés pour créer des éléments discrets; ces éléments pourraient être des éléments structurels.



Représentation d'une forme structurelle développée en utilisant le tube le long de la courbe

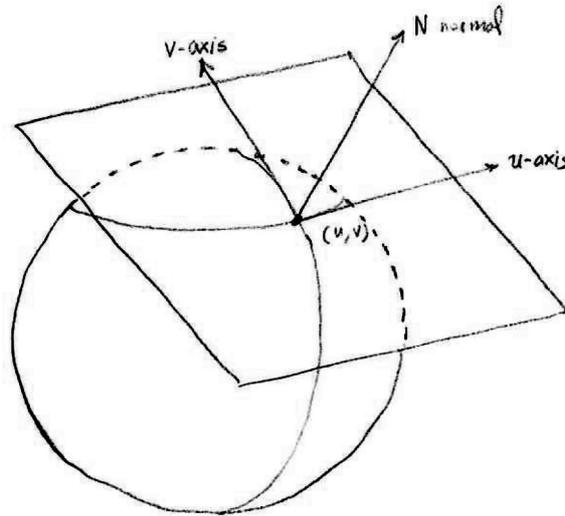


Représentation d'une forme structurelle développée en utilisant le tube le long de la courbe montrant les sections

6.3. Géométrie différentielle des surfaces

6.3.1. Calcul vectoriel

Nous commençons par l'analyse d'une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et en particulier pour le cas $n = 2$ et $m = 3$, c'est ce qu'on appelle une surface locale ou un patch. La surface locale est de plusieurs manières l'analogie en deux dimensions de la courbe dans l'espace, que nous avons défini plus tôt.



Représentation de l'espace tangent à une surface régulière

Vecteurs tangents à \mathbb{R}^n [1]

Un vecteur tangent v_p à l'espace euclidien \mathbb{R}^n se compose d'une paire de points $v, p \in \mathbb{R}^n$
 v est appelé la partie vecteur et p est appelé le point d'application de v_p

Espace tangent \mathbb{R}_p^n [1]

soit $p \in \mathbb{R}^n$, l'espace tangent de \mathbb{R}^n en p est l'ensemble $\mathbb{R}_p^n = \{v_p \mid v \in \mathbb{R}^n\}$,

l'espace tangent \mathbb{R}_p^n est une copie de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n

il y a un isomorphisme canonique entre eux donnée par $v_p \mapsto v$

ce qui nous permet de transformer \mathbb{R}_p^n à un espace vectoriel avec toutes ses propriétés

$\forall p, v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$, et J la structure complexe de \mathbb{R}^2 ($J^2 = -I$)

$v_p + w_p = (v + w)_p$, $\lambda(v_p) = (\lambda v)_p$, $\langle v_p, w_p \rangle = \langle v, w \rangle$, $|\langle v_p, w_p \rangle| \leq \|v_p\| \|w_p\|$

$J v_p = (J v)_p$, $\langle J v_p, J w_p \rangle = \langle v_p, w_p \rangle$

$\forall p, v, w \in \mathbb{R}^3$, $v_p \times w_p = (v \times w)_p$, $\|v_p \times w_p\|^2 = \|v_p\|^2 \|w_p\|^2 - \langle v_p, w_p \rangle^2$

Tangent vectors as directional derivatives [1]

$f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions différentiables, v_p, w_p vecteurs tangents à \mathbb{R}^n en $p \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$v_p[f] = \frac{d}{dt} f(p + tv) |_{t=0}$ (la dérivée directionnelle dans la direction v_p), $v_p[f] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial u_i} f(p) v_i$

$(\lambda v_p + \mu w_p)[f] = \lambda v_p[f] + \mu w_p[f]$,

$v_p[\lambda f + \mu g] = \lambda v_p[f] + \mu v_p[g]$, $v_p[fg] = f(p) v_p[g] + g(p) v_p[f]$

$g_1, \dots, g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions différentiables

v_p, w_p vecteurs tangents à \mathbb{R}^n en $p \in \mathbb{R}^n$ et $f = F(g_1, \dots, g_k)$, $v_p[f] = \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial u_i} F(g_1(p), \dots, g_k(p)) v_p[g_i]$

Difféomorphisme [1]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $A \subset \mathcal{U}$, $\tilde{F} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\tilde{F}(p) = (\tilde{f}_1(p), \dots, \tilde{f}_m(p))$, $\tilde{f}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ for $i = 1, \dots, m$ (\tilde{F} différentiable car \tilde{f}_i différentiable)

$F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F = \tilde{F}|_A$ (F est la restriction de \tilde{F}) $\implies F$ est différentiable

un difféomorphisme F entre \mathcal{U} et $V \subset \mathbb{R}^m$ est une application différentiable

$F : \mathcal{U} \rightarrow V$ qui a un inverse différentiable $F^{-1} : V \rightarrow \mathcal{U}$

Application tangente [1]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ application différentiable, $p \in \mathcal{U}$, $\forall v_p \in \mathbb{R}_p^n$

$F_* : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}_{F(p)}^m$ est appelé l'application tangente de F en p

$F_*(v_p) = F(p + tv)'(0)$ (la vitesse initiale de la courbe $t \mapsto F(p + tv)$), $F_*(v_p) = (v_p[f_1], \dots, v_p[f_m])_{F(p)}$

si $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathcal{U}$ une courbe $\implies (F \circ \alpha)'(t) = F_*(\alpha'(t))$ et si $v_p = \alpha'(0)$ et $\alpha(0) = p \implies F_*(v_p) = (F \circ \alpha)'(0)$

Champ de vecteurs [1]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert,

un champ de vecteurs V est une application qui associe à chaque $p \in \mathcal{U}$ un vecteur tangent $V(p) \in \mathbb{R}_p^n$

$f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, alors V agit sur f par $V[f](p) = V(p)[f]$

le champ de vecteurs est dit être différentiable à condition que $V[f] : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable si f l'est

V est un champ de vecteurs il existe des fonctions $v_i : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ (pour $i = 1, \dots, n$) tel que $V = \sum_{i=1}^n v_i U_i$

Fonctions coordonnées naturelles et repère naturel [1]

Fonctions coordonnées naturelles de \mathbb{R}^n $\{u_1, \dots, u_n\}$ are defined by $u_i(p) = p_i$, pour $p = (p_1, \dots, p_n)$

dans les cas particuliers de \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 f

les fonctions coordonnées naturelles sont désignés par t , $\{u, v\}$ and $\{x, y, z\}$

le champ de vecteurs $U_i(p) = (0, \dots, 1, \dots, 0)_p$ avec le 1 apparaissant dans la $i^{\text{ème}}$ position

le repère naturel de \mathbb{R}^n $\{U_1, \dots, U_n\}$ il est évident que $U_i[f] = \frac{\partial f}{\partial u_i}$ pour toute fonction différentiable f

Matrice jacobienne [1]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ application différentiable,

$p \in \mathcal{U}$, $F = (f_1, \dots, f_m)$, la matrice jacobienne est la matrice

$$J(F)(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_1}(p) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_n}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_n}(p) \end{pmatrix}$$

Gradient

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonction différentiable, le gradient de f est le champ de vecteurs $\text{grad } f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} U_i$

6.3.2. Définition d'une surface régulière

Nous pouvons maintenant définir ces notions de champs de vecteurs et la tangence à une surface locale (patch) qui, avec les notions de l'injectivité et la régularité sont les ingrédients essentiels pour définir les champs de vecteurs et la tangence à une surface régulière.

Surface locale (patch) dans \mathbb{R}^n [1]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $A \subset \mathcal{U}$, $q \in \mathcal{U}$, $\tilde{\chi} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application différentiable

$\chi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une surface locale à condition que χ peut être étendue à $\tilde{\chi}$, $\chi(A)$ est la trace de χ
une surface locale peut être écrit comme un n – uplet de la fonctions $\chi(u, v) = (x_1(u, v), \dots, x_n(u, v))$

Les dérivées partielles de la surface locale [1]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $q \in \mathcal{U}$

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surface locale $\implies \chi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \Big|_q \right) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}(q), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u}(q) \right)_{\chi(q)} = \chi_u(q)$,

où χ_* est l'application de poussée en avant de χ

$\chi_u(u, v) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u}(u, v) \right)$, $\chi_v(u, v) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial v}(u, v) \right)$

$\chi_{uu}(u, v) = \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}(u, v), \dots, \frac{\partial^2 x_n}{\partial u^2}(u, v) \right)$, $\chi_{vv}(u, v) = \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}(u, v), \dots, \frac{\partial^2 x_n}{\partial v^2}(u, v) \right)$

$\chi_{uv}(u, v) = \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right)(u, v), \dots, \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x_n}{\partial u} \right)(u, v) \right) = \chi_{vu}(u, v)$

Normes

$V_u(u, v) = \|\chi_u(u, v)\|$, $V_v(u, v) = \|\chi_v(u, v)\|$, $V_{u \times v}(u, v) = \|\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)\|$

Jacobienne

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surface locale \implies est la matrice jacobienne est l'application

$$J(\chi)(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial u}(u, v) & \dots & \frac{\partial \chi_m}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial v}(u, v) & \dots & \frac{\partial \chi_m}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_u(u, v) \\ \chi_v(u, v) \end{pmatrix}$$

Injectivité de la surface locale [1]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $q \in \mathcal{U}$, $\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surface locale injective à condition que

$\forall (u_1, v_1) \text{ et } (u_2, v_2) \in \mathcal{U}$, $\chi(u_1, v_1) = \chi(u_2, v_2) \iff (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$

Régularité de la surface locale [1]

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surface locale régulière $\iff J(\chi)(u, v)$ est de rang 2 pour tous $(u, v) \in \mathcal{U}$

ce qui est équivalent à $\forall (u, v) \in \mathcal{U}$,

$\chi_u(u, v)$ et $\chi_v(u, v)$ sont linéairement indépendants, sens de $\det \begin{pmatrix} \langle \chi_u, \chi_u \rangle & \langle \chi_u, \chi_v \rangle \\ \langle \chi_v, \chi_u \rangle & \langle \chi_v, \chi_v \rangle \end{pmatrix} \neq 0$

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surface locale régulière en $q \in \mathcal{U} \iff \chi_* : \mathbb{R}_q^n \rightarrow \mathbb{R}_{\chi(q)}^n$ est injective

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surface locale régulière en $q \in \mathcal{U} \implies \exists \mathcal{U}_q$ un voisinage de q |

$\chi : \mathcal{U}_q \rightarrow \chi(\mathcal{U}_q)$ est un difféomorphisme

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface locale régulière en $q \in \mathcal{U} \iff \chi_u(q) \times \chi_v(q) \neq 0$

Pour définir la tangence de la la surface, nous allons utiliser l'idée intuitive d'une courbe dont la trace se trouve dans la surface. Cette idée est tout à fait essentiel dans la géométrie différentielle des surfaces dans l'espace euclidien à trois dimensions, car une tangente à la surface peut être considérée comme une tangente à cette courbe.

Naturellement, la surface locale vient avec les deux courbes de paramètres dans les directions u et v si nous commençons par les définir et nous définissons une courbe générale dont la trace se trouve dans cette surface locale.

Courbes de paramètres [1]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$, $\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surface locale alors les courbes $u \mapsto \chi(u, v_0)$ and $v \mapsto \chi(u_0, v)$ sont appelées les courbes des paramètres u et v de χ

Courbe dont la trace se situe sur la surface locale [1]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $p = \chi(u_0, v_0) \in \chi(\mathcal{U})$,

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surface local régulier telle que $\chi : \mathcal{U} \rightarrow \chi(\mathcal{U})$ est un homéomorphisme

$\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe dont la trace se situe sur la trace $\chi(\mathcal{U}) \implies \exists ! u,$

$v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que

$\alpha(t) = \chi(u(t), v(t))$ pour $t \in (a, b)$, $\alpha'(t) = u'(t) \chi_u(u(t), v(t)) + v'(t) \chi_v(u(t), v(t))$

un vecteur tangent à χ en p est un vecteur tangent $v_p \in \mathbb{R}_p^n$ est tel que $\alpha(0) = p$ et $\alpha'(0) = v_p$

Espace tangent à la surface locale [1]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $p \in \chi(\mathcal{U})$, $\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surface locale régulière,

on note l' ensemble des vecteurs tangents à χ en p par $\chi(\mathcal{U})_p$

où $\chi(\mathcal{U})_p$ forme un espace vectoriel de dimension 2 qui est engendré par $\chi_u(u_0, v_0)$ et $\chi_v(u_0, v_0)$

$\chi(\mathcal{U})_p^\perp = \{z_p \in \mathbb{R}_p^n \mid \forall v_p \in \chi(\mathcal{U})_p, \langle z_p, v_p \rangle = 0\}$ et $\mathbb{R}_p^n = \chi(\mathcal{U})_p \oplus \chi(\mathcal{U})_p^\perp$

Champs de vecteurs sur la surface locale [1]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $q \in \mathcal{U}$ et $p = \chi(q)$, $\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surface locale,

un champ de vecteurs V sur χ est une application qui associe à chaque $q \in \mathcal{U}$ un vecteur tangent $V(q) \in \mathbb{R}_p^n$

V est tangent à χ si $V(q) \in \chi(\mathcal{U})_{\chi(q)} \forall q \in \mathcal{U}$, V est normal à χ si $\langle V(q), v_p \rangle = 0 \forall v_p \in \chi(\mathcal{U})_p$ et $\forall q \in \mathcal{U}$

Champ de vecteurs normal unitaire [1]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface locale injective,

$U(u, v) = \frac{\chi_u \times \chi_v}{\|\chi_u \times \chi_v\|}(u, v)$ le vecteur normal unitaire à la surface locale

Enfin, nous allons maintenant définir les notions de la tangence, des champs de vecteurs d'une surface régulière (variété de dimension two par paramétrisation locale).

Surface régulière (variété lisse de deux dimension par paramétrisation locale) [1]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ est une surface régulière à condition que

$\forall p \in \mathcal{M} \exists \mathcal{V}$ un voisinage de la p et \mathbb{R}^n et $\exists \chi : \mathcal{U} \rightarrow (\mathcal{V} \cap \mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^n$ où

χ est différentiable,

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{M}$ est un homéomorphisme et $\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ est une surface locale régulière

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une surface locale régulière $\implies \forall q \in \mathcal{U} \exists \mathcal{U}_q$ un voisinage de q |

$\chi(\mathcal{U}_q)$ est une surface régulière

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surface locale injective régulière $\implies \chi(\mathcal{U}_q)$ est une surface régulière

A partir de maintenant, nous allons toujours utiliser le terme surface régulière pour désigner une variété riemannienne lisse de deux dimensions (qui signifie tout simplement une variété lisse de deux dimensions avec une métrique riemannienne), cette définition d'une surface régulière est également connu comme une surface abstraite.

6.3.3. Analyse d'une surface régulière

6.3.3.1. Champs de vecteurs

Carte d'une surface régulière [3]

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ est une surface locale régulière sur \mathcal{M} ,

$(\chi(\mathcal{U}) = U) \subset \mathcal{M}$ ouvert, $(\chi^{-1} = \varphi) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ homéomorphisme

Une carte sur une surface régulière est définie comme le couple : (U, φ) ou (\mathcal{U}, χ)

Fonction sur la surface [3]

$f : \mathcal{W} \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $p \in \mathcal{W}$ à condition que pour

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ avec $p \in \chi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{W}$ la composition $f \circ \chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $\chi^{-1}(p)$

si f est différentiable en tout points de \mathcal{W} on dit que f est différentiable sur \mathcal{W}

$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable (ou lisse) à condition que

$\forall p \in \mathcal{M}, \exists (U, \varphi)$ carte de \mathcal{M} en $p \mid f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable (ou lisse)

Différentiabilité d'une courbe sur une surface régulière [3]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ est une surface régulière, $\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ une surface régulière,

$\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \forall t \in (a, b) \alpha(t) \in \mathcal{M}$,

α est différentiable à condition que $\chi^{-1} \circ \alpha : (a, b) \rightarrow \mathcal{U}$ est différentiable

Vecteur tangent à la surface régulière [3]

$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ est une surface régulière, $p \in \mathcal{M}$, $C(p, \mathcal{M})$ est l'ensemble des couples $(I, \alpha) \mid \alpha : I \rightarrow \mathcal{M}, \alpha(0) = p$

\sim est une relation d'équivalence sur $C(p, \mathcal{M})$ telle que

$(I_1, \alpha_1) \sim (I_2, \alpha_2) \iff \forall (U, \varphi)$ carte de \mathcal{M} en $p, \varphi : U \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^2, (\varphi \circ \alpha_1)'(0) = (\varphi \circ \alpha_2)'(0)$

\implies un vecteur tangent à \mathcal{M} en p est une classe d'équivalence $[I, \alpha] = v_p \mid \alpha(0) = p$ and $\alpha'(0) = v_p$

\mathcal{M}_p est l'ensemble des vecteurs tangents à \mathcal{M} en p ,

\mathcal{M}_p est isomorphe à \mathbb{R}^2 (et son espace tangent $\mathbb{R}_{\varphi(p)}^2$) par l'application

$D_p \varphi : \mathcal{M}_p \rightarrow \mathbb{R}_{\varphi(p)}^2, D_p \varphi([I, \alpha]) = D_p \varphi(v_p) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$

Application tangente [3]

$\chi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$ surface locale régulière, $q \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2, \chi(q) = p \in \mathcal{M}$ et (U, φ) carte de \mathcal{M}

$\forall (I_1, \gamma_1) \sim (I_2, \gamma_2) \in C(q, \mathbb{R}^2) \implies (I_1, \chi \circ \gamma_1) \sim (I_2, \chi \circ \gamma_2)$ et $\alpha_i = \chi \circ \gamma_i$ pour $i = 1, 2$

\implies nous pouvons définir l'application tangente entre les espaces tangents de la surfaces régulières \mathcal{U} et \mathcal{M}

$\implies T_q \chi : \mathcal{U}_q \subset \mathbb{R}_q^2 \rightarrow \mathcal{M}_p, T_q \chi([I, \gamma]) = T_q \chi(v_q) = [I, \chi \circ \gamma] = [I, \alpha] = v_p$

$D_p \varphi(v_p) = D_{\chi(q)} \varphi([I, \chi \circ \gamma]) = (\varphi \circ \chi \circ \gamma)'(0) = D_q \varphi \circ \chi(\gamma'(0))$

Espace tangent à la surface régulière [3]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ est une surface régulière, $q \in \mathcal{U}$ et $p \in \mathcal{M}$ et v_p est un vecteur tangent à \mathcal{M} en p

$\mathcal{M}_p = \{v_p \in \mathbb{R}_p^n \mid v_p \text{ vecteur tangent à } \mathcal{M} \text{ en } p\}$ est l'espace tangent à \mathcal{M} en p ,

un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}_p^n de dimension 2

si $\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ est une surface locale régulière (i.e. un plongement) $\implies T_{\chi(q)} \chi(\mathcal{U}) =$

$Im(T_q \chi : \mathcal{U}_q \subset \mathbb{R}_q^2 \rightarrow \mathcal{M}_p) = \mathcal{M}_p$

$\mathcal{M}_p^\perp = \{z_p \in \mathbb{R}_p^n \mid \forall v_p \in \mathcal{M}_p, \langle z_p, v_p \rangle = 0\}$ and $\mathbb{R}_p^n = \mathcal{M}_p \oplus \mathcal{M}_p^\perp$

Intuitivement, un champ de vecteurs sur une surface \mathcal{M} est une application qui associe à chaque point p un vecteur tangent v_p mais ici nous allons définir la généralisation d'un champ de vecteurs comme une section du fibré tangent sur une surface régulière.

Vector Bundle to a regular surface [3]

\mathcal{M} une surface régulière, E est l'espace total, $P : E \rightarrow \mathcal{M}$ is a vector bundle of rank $= n$,

$\exists U \subset \mathcal{M}$ ouvert | $\phi : P^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme

$\forall p \in \mathcal{M}, \forall e \in E_p$ et $\phi_p : P^{-1}(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($P^{-1}(p) = E_p$ la fibre est)

$\phi : P^{-1}(p) \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n, \phi(e) = (P(e) = p, \phi_p(e))$ isomorphisme d'espaces vectoriels

Fibré tangent sur une surface régulière [3]

\mathcal{M} une surface régulière, $p \in \mathcal{M}, \mathcal{M}_p$ est son espace tangent à p

$T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \mathcal{M}_p = \{(p, v_p) \mid p \in \mathcal{M} \text{ et } v_p \in \mathcal{M}_p\}$ est le fibré tangent de \mathcal{M}

$V : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}, V(p) = v_p \in \mathcal{M}_p, V$ est appelée une section de $T\mathcal{M}$ qui est un champ de vecteurs tangent

$\Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ est l'ensemble de toutes les sections

Fibré normal sur une surface régulière [4]

\mathcal{M} une surface régulière, \mathcal{M} est une sous-variété de $\mathcal{N} = \mathbb{R}^n, p \in \mathcal{M}, \mathcal{M}_p$ est son espace tangent à p

\mathcal{N}_p is \mathcal{M}_p^\perp est orthogonal à l'espace tangent en p ,

$\mathcal{V}_N \mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \mathcal{N}_p / \mathcal{M}_p$ est le fibré normal de \mathcal{M}

$N\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \mathcal{N}_p = \{(p, n_p) \mid p \in \mathcal{M} \text{ et } n_p \in \mathcal{M}_p^\perp\}$ est le fibré normal de \mathcal{M}

$N\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{V}_N \mathcal{M}, (p, n_p) \mapsto (p, [n_p])$ est un isomorphisme canonique

$N : \mathcal{M} \rightarrow N\mathcal{M}, N(p) = n_p \in \mathcal{M}_p^\perp, N$ est appelée une section de $N\mathcal{M}$ qui est un champ de vecteurs normal

$\forall p \in \mathcal{M}, g \in \Gamma(\mathcal{N}, T^* \mathcal{N}^{\otimes 2})$ une métrique riemannienne sur $\mathcal{N} \implies g_p(v_p, n_p) = 0$

$\Gamma(\mathcal{M}, N\mathcal{M})$ est l'ensemble de toutes les sections

Fibré cotangent et fibré alterné sur une surface régulière [3]

\mathcal{M} une surface régulière, $p \in \mathcal{M}, \mathcal{M}_p^* = \mathcal{L}(\mathcal{M}_p, \mathbb{R})$ est le dual de son espace tangent en p

$T^* \mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \mathcal{M}_p^* = \{(p, \lambda_p) \mid p \in \mathcal{M} \text{ et } \lambda_p \in \mathcal{M}_p^*\}$ est le fibré cotangent de \mathcal{M}

$\lambda : \mathcal{M} \rightarrow T^* \mathcal{M}, \lambda(p) = \lambda_p \in \mathcal{M}_p^*, \lambda$ est appelée une section de $T^* \mathcal{M}$ qui est une 1-forme différentielle

$\Gamma(\mathcal{M}, T^* \mathcal{M})$ est l'ensemble de toutes les sections

$\wedge^k T^* \mathcal{M} =$

$\bigcup_{p \in \mathcal{M}} \wedge^k \mathcal{M}_p^* = \{(p, \lambda_p) \mid p \in \mathcal{M} \text{ et } \lambda_p \in \wedge^k \mathcal{M}_p^*\}$ est la $k^{\text{ième}}$ puissance du fibré cotangent de \mathcal{M}

$\lambda : \mathcal{M} \rightarrow \wedge^k T^* \mathcal{M}, \lambda(p) = \lambda_p \in \wedge^k \mathcal{M}_p^*,$

λ est appelée une section de $\wedge^k T^* \mathcal{M}$ qui est une k -forme différentielle

$\Gamma(\mathcal{M}, \wedge^k T^* \mathcal{M})$ est l'ensemble de toutes les sections (comme $\dim \mathcal{M} = 2, k = 0, 1, 2$)

Système de coordonnées pour une surface régulière [3]

$U \subset \mathcal{M}$ une surface régulière, $x_1, x_2 \in C^\infty(U, \mathbb{R}) \mid \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(p) = (x_1(p), x_2(p))$ difféomorphisme

$\implies (U, \varphi)$ est un système de coordonnées

$\implies (\partial x_1, \partial x_2)$ est un repère de $T\mathcal{M}$ et (dx_1, dx_2) est un repère de $T^* \mathcal{M}$

$X = (X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2) \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M}), f \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}), \lambda = (\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2) \in (\mathcal{M}, T^* \mathcal{M})$

$df = \partial_{x_1} f dx_1 + \partial_{x_2} f dx_2$, où $X_i = X[x_i] = \langle d x_i, X \rangle$ et $\lambda_i = \langle \lambda, \partial x_i \rangle$ pour $i = 1, 2$

$X[f] = \langle df, X \rangle = X_1 \partial_{x_1} f + X_2 \partial_{x_2} f$

Pousser en avant des champs de vecteurs sur la surface régulière [3]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ est une surface régulière, $\chi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$ une surface locale régulière

$U \subset \mathcal{U}$ ouvert, $(u, v) \in C^\infty(U, \mathbb{R}) \mid \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(q) = (u(q), v(q))$ difféomorphisme

$\Rightarrow (U, \varphi)$ est un système de coordonnées

$\forall V \in \Gamma(\mathcal{U}, T\mathcal{U}), V = V_1 \frac{\partial}{\partial u} + V_2 \frac{\partial}{\partial v}$ est un champ de vecteurs tangent de \mathcal{U} , où $V_1, V_2 \in C^\infty(U, \mathbb{R})$

$\forall \gamma : I \rightarrow \mathcal{U}, \gamma(t) = (u(t), v(t))$,

$V(q) = V(\gamma(t)) = \gamma'(t) = (u \circ \gamma)'(t) \left(\frac{\partial}{\partial u} \Big|_{\gamma(t)} \right) + (v \circ \gamma)'(t) \left(\frac{\partial}{\partial v} \Big|_{\gamma(t)} \right)$

$\Rightarrow \chi_*(V) \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ un champ de vecteurs tangent de \mathcal{M}

$\forall p \in \mathcal{M}, \chi_*(V)(p) = T_{\chi^{-1}(p)} \chi[V(\chi^{-1}(p))] = T_q \chi[V(q)]$ est le poussé en avant de V

$\chi_*(V) = V_1 \chi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) + V_2 \chi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = V_1 \chi_u + V_2 \chi_v$

$\forall \alpha : I \rightarrow \mathcal{M}, \alpha(t) = \chi(\gamma(t)) = \chi(u(t), v(t))$,

$\chi_*(V)(p) = \chi_*(V)(\alpha(t)) = \alpha'(t) = (u \circ \gamma)'(t) \left(\chi_u \Big|_{\gamma(t)} \right) + (v \circ \gamma)'(t) \left(\chi_v \Big|_{\gamma(t)} \right)$

Produit extérieur [3]

E, F espaces vectoriels, $w : E^k \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme k -linéaire, σ_k le groupe de permutation de $\{1, \dots, k\}$

$\forall \sigma \in \sigma_k, w(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \epsilon_\sigma w(x_1, \dots, x_k) \Rightarrow w$ est antisymétrique

$\forall (x_1, \dots, x_k) \in E^k, \exists i \neq j \mid x_i = x_j \Rightarrow w(x_1, \dots, x_k) = 0 \Rightarrow w$ est alternée

w alternée $\Leftrightarrow w$ antisymétrique

$\wedge^k E^*$ est l'ensemble des formes k -linéaire alternées

$\wedge^0 E^* = \mathbb{K}, \wedge^1 E^* = E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et $\wedge^k E^*$ est la $k^{\text{ième}}$ puissance extérieure de E^*

$f : E \rightarrow F$ est une application linéaire,

$\alpha \in \wedge^k F^* \Rightarrow f^* : \wedge^k F^* \rightarrow \wedge^k E^*, f^* \alpha \in \wedge^k E^*$ est le tiré en arrière de α

$f^* \alpha : E^k \rightarrow \mathbb{K}, f^* \alpha(x_1, \dots, x_k) = \alpha(f(x_1), \dots, f(x_k))$

Tirer en arrière des formes différentielles d'une surface régulière [3]

$U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ ouvert, $p \in U$

$\Omega^k(U) = C^\infty(U, \wedge^k(\mathbb{R}^n)^*)$ est l'espace des k -formes différentielles de U avec $\Omega^0(U) = C^\infty(U, \mathbb{R})$

$(e_i)_i$ base de $\mathbb{R}^n, (e_i^*)_i$ base de $(\mathbb{R}^n)^*$ et $(e_i^*)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ base de $\wedge^k(\mathbb{R}^n)^*$

$f : U \rightarrow V$ lisse, $D_p f : U_p \rightarrow V_{f(p)}, (D_p f)^* : \wedge^k(\mathbb{R}^m)^* \rightarrow \wedge^k(\mathbb{R}^n)^*$

$\alpha \in \Omega^k(V) \Rightarrow f^* : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U), f^* \alpha \in \Omega^k(U)$ est la tirée en arrière de α

$f^* \alpha : U \rightarrow \mathbb{K}, f^* \alpha(p) \in \wedge^k(\mathbb{R}^n)^*, f^* \alpha(p) = (D_p f)^* \alpha(f(p))$

$\Rightarrow f^* \alpha(p) : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f^* \alpha(p)(x_1, \dots, x_k) = \alpha(f(p)) [D_p f(x_1), \dots, D_p f(x_k)]$

\mathcal{M} une surface régulière, $p \in \mathcal{M}, \mathcal{M}_p$ est son espace tangent en p ,

(U, φ) est une carte de \mathcal{M} en $p, \wedge^k T^* \mathcal{M}$ le fibré des k -formes alternées de \mathcal{M}

$D_p \varphi : \mathcal{M}_p \rightarrow \mathbb{R}_{\varphi(p)}^2$ isométrie, $(D_p \varphi)^* : \wedge^k(\mathbb{R}_{\varphi(p)}^2)^* \rightarrow \wedge^k \mathcal{M}_p^* \Rightarrow [(D_p \varphi)^*]^{-1} : \wedge^k \mathcal{M}_p^* \rightarrow \wedge^k(\mathbb{R}_{\varphi(p)}^2)^*$

$\Rightarrow \Gamma(\mathcal{M}, \wedge^k T^* \mathcal{M}) \xrightarrow{\text{bijection}} \Omega^k(U), \alpha \mapsto (p \mapsto [(D_p \varphi)^*]^{-1} \alpha(p))$

Vecteurs unitaires tangent et normal à la surface régulière [1]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $q \in \mathcal{U}$ et $p = \chi(q)$

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ une surface locale injective régulière

$\chi_U(u, v) = \frac{\chi_u}{\|\chi_u\|}(u, v)$ est le champ de vecteur tangent unitaire dans la direction u

$\chi_V(u, v) = \frac{\chi_v}{\|\chi_v\|}(u, v)$ est le champ de vecteur tangent unitaire dans la direction v

$\chi_N(u, v) = \frac{\chi_u \wedge \chi_v}{\|\chi_u \wedge \chi_v\|}(u, v)$ est le champ de vecteur unitaire normal à la surface

$\mathbb{R}_p^3 = \mathcal{M}_p \oplus \mathcal{M}_p^\perp = \text{Vect}(\{\chi_U, \chi_V, \chi_N\})$ est un espace vectoriel de dimension 3 en p

Homotopies d' une surface régulière

$\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est fonction scalaire qui pourrait être

remplacée par la courbures gaussienne ou moyenne ou une constante

$$\chi, \omega_U, \omega_V, \omega_N : \mathcal{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\omega_U(u, v) = \chi(u, v) + |\lambda(u, v)| \chi_U(u, v)$$

$$\omega_V(u, v) = \chi(u, v) + |\lambda(u, v)| \chi_V(u, v)$$

$$\omega_N(u, v) = \chi(u, v) + |\lambda(u, v)| \chi_N(u, v)$$

$$U_{\chi,\lambda}, V_{\chi,\lambda}, N_{\chi,\lambda} : \mathcal{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$U_{\chi,\lambda}(u, v, w) = \chi(u, v) + w |\lambda(u, v)| \chi_U(u, v) \mid U_{\chi,\lambda}(u, v, 0) = \chi(u, v) \text{ et } U_{\chi,\lambda}(u, v, 1) = \omega_U(u, v)$$

$$V_{\chi,\lambda}(u, v, w) = \chi(u, v) + w |\lambda(u, v)| \chi_V(u, v) \mid V_{\chi,\lambda}(u, v, 0) = \chi(u, v) \text{ et } V_{\chi,\lambda}(u, v, 1) = \omega_V(u, v)$$

$$N_{\chi,\lambda}(u, v, w) = \chi(u, v) + w |\lambda(u, v)| \chi_N(u, v) \mid N_{\chi,\lambda}(u, v, 0) = \chi(u, v) \text{ et } N_{\chi,\lambda}(u, v, 1) = \omega_N(u, v)$$

$U_{\chi,\lambda}, V_{\chi,\lambda}$ et $N_{\chi,\lambda}$ sont des homotopies entre χ et $\omega_U, \omega_V, \omega_N$ respectivement

Morphisme des surfaces [1]

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, \mathcal{M}, \mathcal{N} sont des surfaces régulières,

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ et $\gamma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{N}$ surfaces locales injectives régulières

$F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ est différentiable à condition que $\gamma^{-1} \circ F \circ \chi$ est différentiable

et F est appelée un morphisme des surfaces (application lue dans les cartes)

un difféomorphisme entre \mathcal{M} et \mathcal{N} est une application différentiable $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$

qui a un inverse différentiable $G : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \mid G \circ F = 1_{\mathcal{M}}$ l' identité de \mathcal{M} , $F \circ G = 1_{\mathcal{N}}$ l' identité de \mathcal{N}

$\varphi : \mathcal{U} \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ est un difféomorphisme local en $p \in \mathcal{U}$ à condition que

$\exists \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ un voisinage de $p \mid \varphi|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \varphi(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{N}$ est un difféomorphisme

Exemples

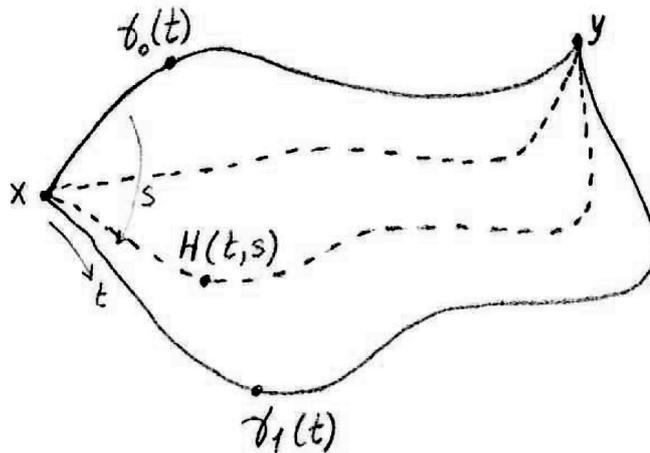
$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert,

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ une surface locale régulière $\implies \chi$ est un difféomorphisme entre les surfaces régulières \mathcal{U} et \mathcal{M}

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme,

$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ est une surface régulière $\implies F|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow F(\mathcal{M})$ est un difféomorphisme de surfaces régulières

i.e. toute transformation euclidienne de \mathbb{R}^n donne lieu à un morphisme de surfaces



Représentation d'une homotopie entre deux courbes

Maintenant, nous démontrons le contrôle sur la forme à l'aide de notre première analyse, à savoir en tout point de la surface, nous savons son espace tangent qui est essentiellement une copie de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 en ce point.

Première analyse d'une surface régulière

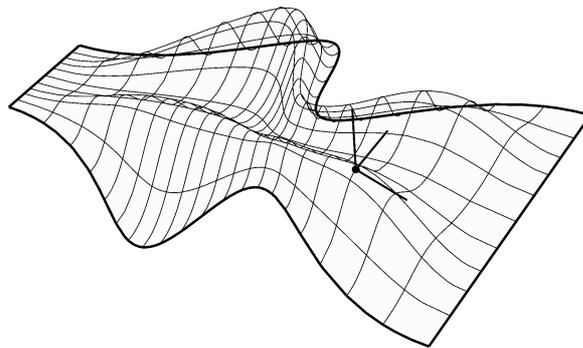
L'équation de la surface de base est donnée par

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\chi(u, v) = \left(u + \frac{4 \sin(u)}{5}, \frac{1}{4} (2 - \cos(\frac{3u}{2})) ((v - \pi) + \frac{1}{10} \sin(2v)), \frac{1}{8} (1 - \cos(\frac{u}{2})^{20}) (2 - \cos(\frac{3u}{2})) \left(1 + \frac{\cos(v)^{20}}{10} \right) (1 - \cos(\frac{v}{2})^{20}) (2 - \cos(2v)) \left(1 + \frac{1}{5} \sin(\frac{1}{2} (\pi + \frac{3u}{2}))^{20} \right) \right)$$

espace tangent de la surface régulière $|_{\chi(u=\frac{17\pi}{10}, v=\frac{\pi}{2})}$

$$= \{ \chi_U, \chi_V, \chi_N \} |_{\chi(u=\frac{17\pi}{10}, v=\frac{\pi}{2})} = \left\{ \begin{pmatrix} 0.928 \\ -0.367 \\ 0.056 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.999 \\ 0.016 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.067 \\ -0.016 \\ 0.997 \end{pmatrix} \right\}$$



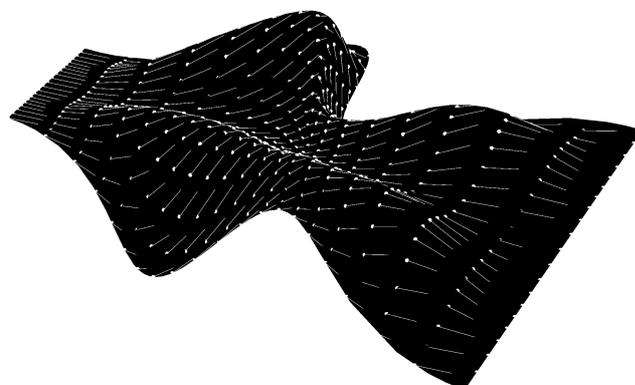
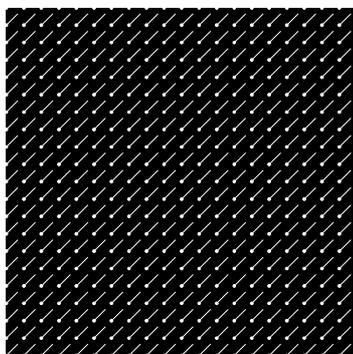
Représentation de l'espace tangent $\mathbb{R}_p^3 = \mathcal{M}_p \oplus \mathcal{M}_p^\perp$ en un point p

Pousser en avant d'un champ de vecteurs

$\mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ et $\chi(\mathcal{U}) = \mathcal{M}$ sont des surfaces régulières, $a, b \in \mathbb{R}$

$V = a \frac{\partial}{\partial u} + b \frac{\partial}{\partial v}$ est un champ de vecteurs constant de $\mathcal{U} \implies \chi_*(V)$ st un champ de vecteurs constant de \mathcal{M}

$$\forall q = (u, v) \in \mathcal{U}, V(q) = V(u, v) = (a, b) \implies \chi_*(V)(p) = T_{(u,v)} \chi[V(u, v)] = a \chi_u(u, v) + b \chi_v(u, v)$$



Représentation du poussé en avant d'un champ de vecteurs à partir du plan à la surface

6.3.3.2. Conception en utilisant des champs de vecteurs

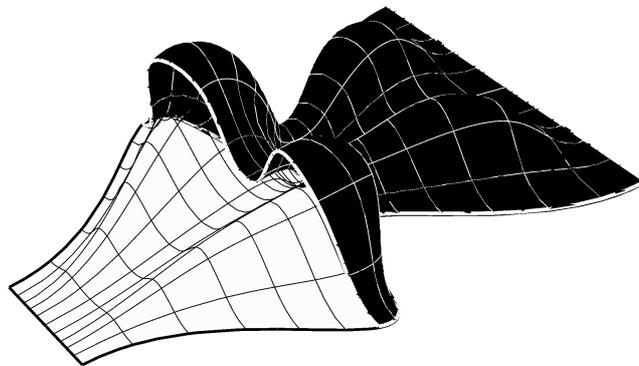
Avec ces définitions, nous pouvons déjà donner un exemple de comment utiliser l'analyse pour générer de nouvelles formes de celles définies précédemment. Par exemple, on peut définir le champ de vecteur normal sur une surface régulière et en utilisant une fonction scalaire on peut faire varier ce champ le long de la surface. Cette fonction scalaire peut être, par exemple, la courbure de la surface en un point donné. Puisque nous n'avons pas encore défini la courbure de la surface, nous allons utiliser la hauteur d'un point dans la direction z.

Conception à l'aide de notre première analyse (homotopies sur une surface régulière)

Le champ de vecteurs normal défini sur cette surface nous donne l'homotopie

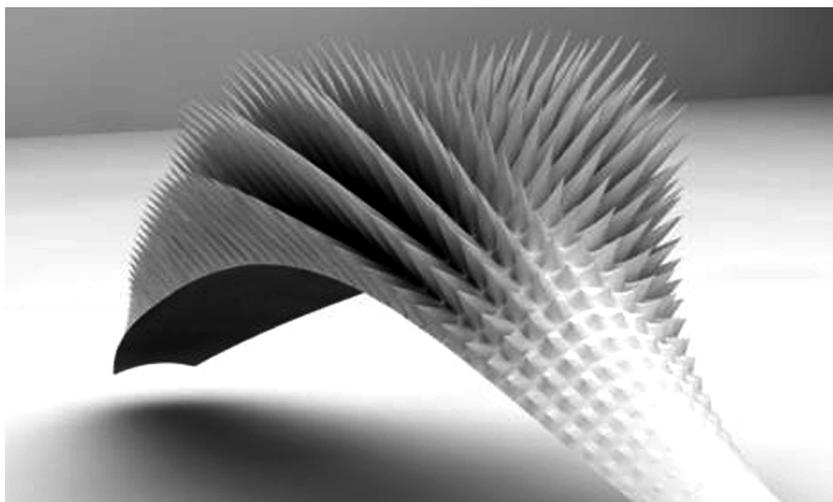
$$N_{\chi, \lambda}(u, v, w) = \chi(u, v) + w |\lambda(u, v)| \chi_N(u, v)$$

$$\lambda : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \lambda(u, v) = \frac{2}{100} + \frac{4}{10} \chi_3(u, v)$$



Représentation des deux surfaces reliées par une homotopie

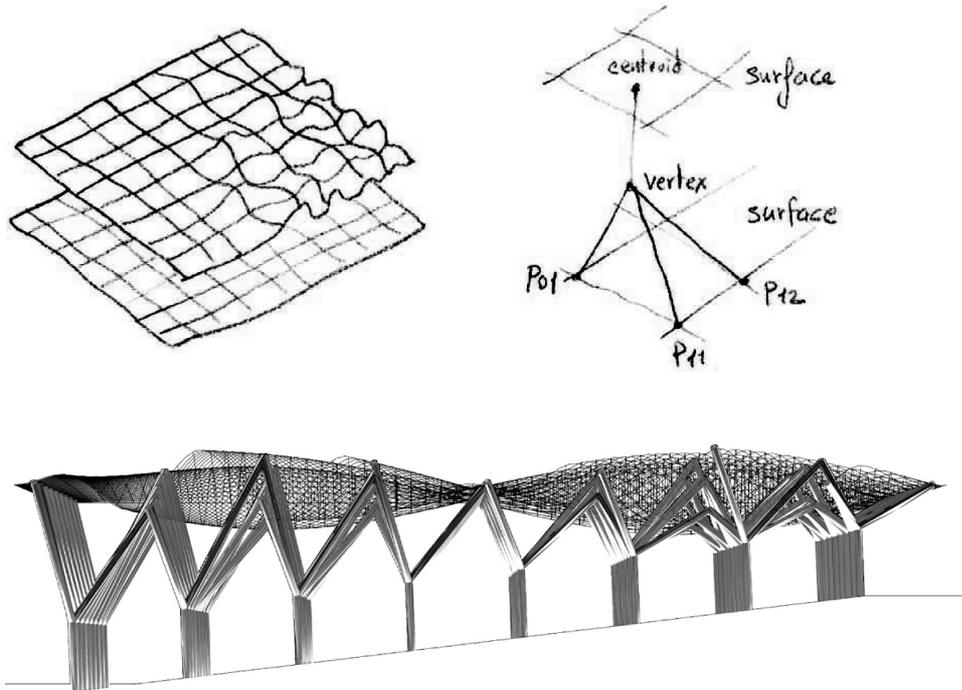
Maintenant que nous avons défini le champ de vecteurs normal à une surface régulière, nous allons montrer une application architecturale concrète de ce champ de vecteurs, à savoir sur des points discrets sur la surface; en chacun d'eux, nous pouvons extruder un élément architectural dans la direction de la normale .



Représentation d'une série de cônes orientés avec des la normale à la surface

Exemple de conception architecturale à l'aide d'un champ de vecteur et une homotopie

Dans l'exemple suivant, nous allons utiliser l'analyse consistant à déterminer le champ de vecteur normal à une surface et une homotopie entre deux surfaces pour concevoir un auvent au-dessus d'un champ. Nous prenons le même nombre de points discrets sur chacune des deux surfaces telles que nous avons une famille de cubes de huit points où un élément structurel serait mis. Le cube possède des faces supérieure et inférieure de quatre points chacune. Cet élément structurel est composée de quatre éléments linéaires; l'un des éléments est la normale à la face supérieure du cube et les trois autres relient la normale aux trois points de la face inférieure.



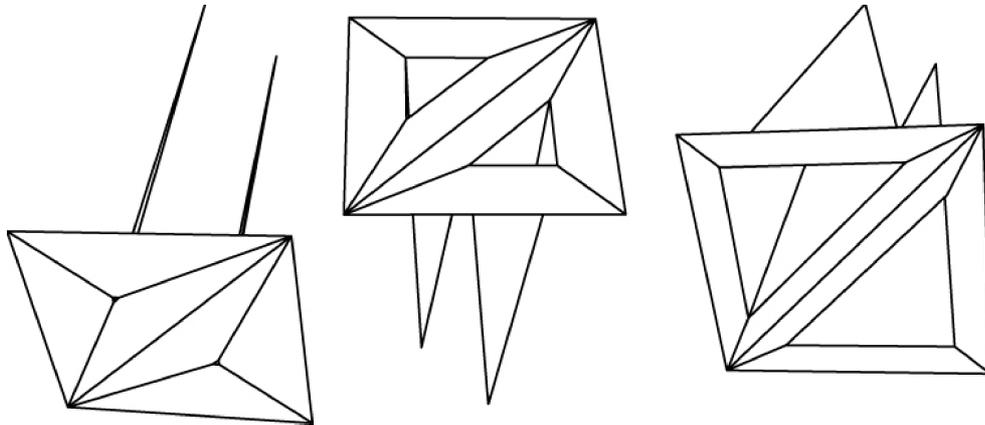
Représentation des deux surfaces homotopes et les éléments structurels



Représentation de la conception de l'auvent conçu en utilisant le champ de vecteurs normal et les surfaces homotopes

Exemple de la conception à l'aide de l'inclinaison du vecteur normal

Maintenant, nous allons montrer un autre exemple où l'inclinaison du champ de vecteurs normal détermine la taille de l'ouverture de la composante architecturale, à savoir que la plus horizontale le vecteur normal le plus ouvert le composant serait.



Représentation des différentes tailles des ouvertures en proportion de l'inclinaison des vecteurs normaux



Représentation de la conception où la taille de l'ouverture est proportionnelle à l'inclinaison du vecteur normal

L'équation de la surface de la robe et de l'adaptation

Maintenant, nous allons utiliser la surface bicubique du chapitre quatre, afin de créer un champ de vecteurs entre elle et la surface de la robe, d'abord nous définissons la surface de la robe comme suit.

L'équation de l'amplitude

$$X : N^2 \longrightarrow N, \text{ if } t > 0, X(t, t_x) = \frac{t_x}{t}, \text{ if } t = 0, X(t, t_x) = 0$$

$$R(t, t_x, f_r, \rho_r, \eta_r) : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$R(t, t_x, f_r, \rho_r, \eta_r)(u) = \left(1 + f_r \operatorname{Sin}\left(\frac{(u+(1-2X(t,t_x))\pi)}{2}\right)\right)^{\eta_r} + f_r \operatorname{Sin}\left(\rho_r t \left(\frac{u+\left(\frac{\pi X(t,t_x)}{t_x}\right)}{2}\right)\right)^{\eta_r}$$

L'équation du profil

$$\rho(f_o, f_a, f_c, f_d, \rho_a, \rho_b, \rho_c, \eta_a) : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\rho(f_o, f_a, f_c, f_d, \rho_a, \rho_b, \rho_c, \eta_a)(u, v) =$$

$$\left(\rho_x(f_o, f_a, f_c, f_d, \rho_a, \rho_b, \rho_c, \eta_a)(u, v), \rho_y(f_o, f_a, f_c, f_d, \rho_a, \rho_b, \rho_c, \eta_a)(u, v)\right)$$

$$\rho(f_o, f_a, f_c, f_d, \rho_a, \rho_b, \rho_c, \eta_a)(u, v) =$$

$$\left(v + f_o f_c \operatorname{Sin}(\rho_c u) \operatorname{Sin}(\rho_b v), \left(1 + f_o \left(2 + \operatorname{Cos}\left(\rho_a \left(v + \frac{\pi}{\rho_a}\right)\right)\right) \left(1 + f_d \operatorname{Sin}\left(\rho_a f_a \left(v + \frac{\pi}{\rho_a}\right)\right)^{\eta_a}\right)\right)\right)$$

L'équation totale de la robe

$$\chi_D(\partial_T, f_\rho, t_a, t_{x_a}, t_b, t_{x_b}, t_c, t_{x_c}, f_b, f_o, f_a, f_c, f_d, \rho_a, \rho_b, \rho_c, \eta_a, f_r, \rho_r, \eta_r) :$$

$$\mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\chi_D(\partial_T, f_\rho, t_a, t_{x_a}, t_b, t_{x_b}, t_c, t_{x_c}, f_b, f_o, f_a, f_c, f_d, \rho_a, \rho_b, \rho_c, \eta_a, f_r, \rho_r, \eta_r)(u, v) =$$

$$\left(\left(\operatorname{Cos}(\partial_T v) \left(\operatorname{Cos}\left(f_\rho \frac{v}{4}\right)\right)^8 \left((t_a + 1) \operatorname{Cos}(u) R(t_a, t_{x_a}, f_r, \rho_r, \eta_r)(u) + f_b \operatorname{Cos}((t_a + 1)u)\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left.\operatorname{Sin}\left(f_\rho \frac{v}{2}\right)^4 \left((t_b + 1) \operatorname{Cos}(u) R(t_b, t_{x_b}, f_r, \rho_r, \eta_r)(u) + f_b \operatorname{Cos}((t_b + 1)u)\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left.\operatorname{Sin}\left(f_\rho \frac{v}{4}\right)^8 \left((t_c + 1) \operatorname{Cos}(u) R(t_c, t_{x_c}, f_r, \rho_r, \eta_r)(u) + f_b \operatorname{Cos}((t_c + 1)u)\right)\right) -$$

$$\operatorname{Sin}(\partial_T v) \left(\operatorname{Cos}\left(f_\rho \frac{v}{4}\right)\right)^8 \left((t_a + 1) \operatorname{Sin}(u) R(t_a, t_{x_a}, f_r, \rho_r, \eta_r)(u) + f_b \operatorname{Sin}((t_a + 1)u)\right) +$$

$$\operatorname{Sin}\left(f_\rho \frac{v}{2}\right)^4 \left((t_b + 1) \operatorname{Sin}(u) R(t_b, t_{x_b}, f_r, \rho_r, \eta_r)(u) + f_b \operatorname{Sin}((t_b + 1)u)\right) +$$

$$\operatorname{Sin}\left(f_\rho \frac{v}{4}\right)^8 \left((t_c + 1) \operatorname{Sin}(u) R(t_c, t_{x_c}, f_r, \rho_r, \eta_r)(u) + f_b \operatorname{Sin}((t_c + 1)u)\right)\right)$$

$$\rho_y(f_o, f_a, f_c, f_d, \rho_a, \rho_b, \rho_c, \eta_a)(u, v),$$

$$\left(\operatorname{Cos}(\partial_T v) \left(\operatorname{Cos}\left(f_\rho \frac{v}{4}\right)\right)^8 \left((t_a + 1) \operatorname{Sin}(u) R(t_a, t_{x_a}, f_r, \rho_r, \eta_r)(u) + f_b \operatorname{Sin}((t_a + 1)u)\right) + \right.$$

$$\operatorname{Sin}\left(f_\rho \frac{v}{2}\right)^4 \left((t_b + 1) \operatorname{Sin}(u) R(t_b, t_{x_b}, f_r, \rho_r, \eta_r)(u) + f_b \operatorname{Sin}((t_b + 1)u)\right) +$$

$$\left.\left.\operatorname{Sin}\left(f_\rho \frac{v}{4}\right)^8 \left((t_c + 1) \operatorname{Sin}(u) R(t_c, t_{x_c}, f_r, \rho_r, \eta_r)(u) + f_b \operatorname{Sin}((t_c + 1)u)\right)\right) +$$

$$\operatorname{Sin}(\partial_T v) \left(\operatorname{Cos}\left(f_\rho \frac{v}{4}\right)\right)^8 \left((t_a + 1) \operatorname{Cos}(u) R(t_a, t_{x_a}, f_r, \rho_r, \eta_r)(u) + f_b \operatorname{Cos}((t_a + 1)u)\right) +$$

$$\operatorname{Sin}\left(f_\rho \frac{v}{2}\right)^4 \left((t_b + 1) \operatorname{Cos}(u) R(t_b, t_{x_b}, f_r, \rho_r, \eta_r)(u) + f_b \operatorname{Cos}((t_b + 1)u)\right) +$$

$$\left.\left.\operatorname{Sin}\left(f_\rho \frac{v}{4}\right)^8 \left((t_c + 1) \operatorname{Cos}(u) R(t_c, t_{x_c}, f_r, \rho_r, \eta_r)(u) + f_b \operatorname{Cos}((t_c + 1)u)\right)\right)\right)$$

$$\rho_y(f_o, f_a, f_c, f_d, \rho_a, \rho_b, \rho_c, \eta_a)(u, v),$$

$$(t_a + t_b + t_c + 1) \rho_x(f_o, f_a, f_c, f_d, \rho_a, \rho_b, \rho_c, \eta_a)(u, v)$$

Les paramètres de l'option choisie pour la surface de la robe

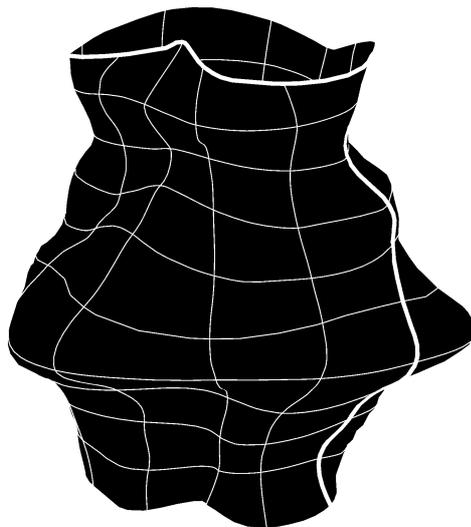
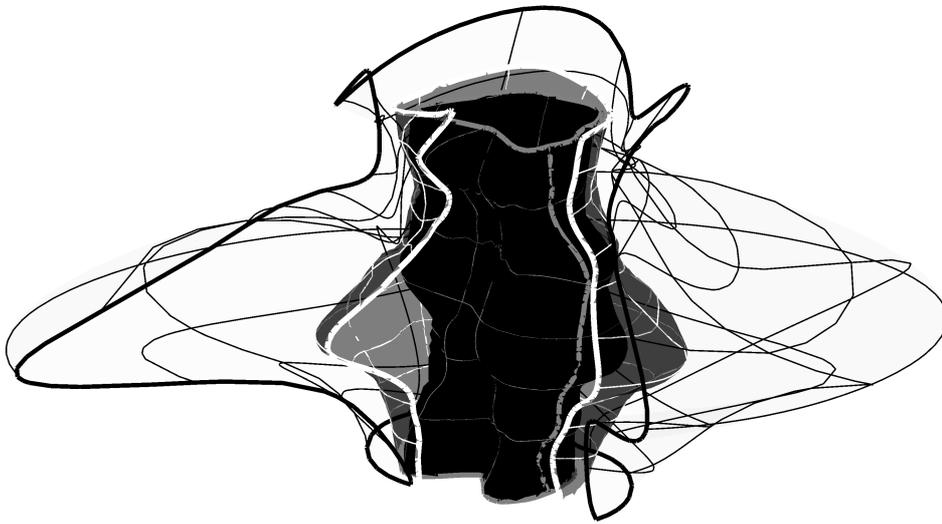
$\vartheta_T = 0.3, f_\rho = 1, \iota_a = 0, \iota_{xa} = 1, \iota_b = 3, \iota_{xb} = 1, \iota_c = 2, \iota_{xc} = 2, f_b = 0.08, f_o = 1, f_a = 0.9,$
 $f_c = -0.6, f_d = 0.3, \rho_a = 2.5, \rho_b = 2.9, \rho_c = 2, \eta_a = 2, f_r = 0.11, \rho_r = 1, \eta_r = 2$

$\chi_c, \beta : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \beta$ est la surface d'une spline bicubique
 $\chi_c = \chi_D(\vartheta_T, f_\rho, \iota_a, \iota_{xa}, \iota_b, \iota_{xb}, \iota_c, \iota_{xc}, f_b, f_o, f_a, f_c, f_d, \rho_a, \rho_b, \rho_c, \eta_a, f_r, \rho_r, \eta_r)$

$V_{\chi_c, \beta} : (\mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]) \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$V_{\chi_c, \beta}(u, v, t) = \chi_c(u - (\vartheta_T v), v) + t(\beta(u, v) - \chi_c(u - (\vartheta_T v), v))$ est l'homotopie entre χ_c et β

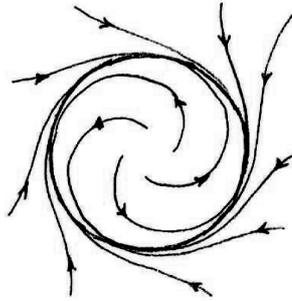
$\chi(u, v) = V_{\chi_c, \beta}(u, v, \frac{7}{10})$ est la surface déformée "adapté"



Représentation de la surface adapté à l'aide de l'homotopie

6.3.3.3. Courbes intégrales et systèmes dynamiques

L'étude des champs de vecteurs nous amène naturellement à l'étude de flot et des courbes intégrales et des systèmes dynamiques continus par la suite. Donc, nous commençons par définir la notion de courbe intégrale et le flot d'un champ de vecteurs, puis plus tard, nous allons examiner certains systèmes dynamiques du plan et leur poussé en avant sur une surface régulière.



Représentation d'un système dynamique (flot d'un champ de vecteurs dans \mathbb{R}^2)

Courbe intégrale d'un champ de vecteurs [3]

\mathcal{M} surface régulière, $V \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ est un champ de vecteurs tangent de \mathcal{M}

$I \subset \mathbb{R}$ ouvert, $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M} \mid \forall t \in I, \alpha'(t) = V(\alpha(t)) \Rightarrow (I, \alpha)$ est appelée la courbe intégrale de V

si $0 \in I$ et $\alpha(0) = p \Rightarrow (I, \alpha)$ est d'origine p , I_p est l'intervalle de vie de p et $\alpha_p(t)$ est la courbe intégrale

si \mathcal{M} est compacte le champ de vecteurs est complet et $I_p = \mathbb{R}$

Flot d'un champ de vecteurs [3]

\mathcal{M} surface régulière, $V \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ est un champ de vecteurs tangent \mathcal{M}

$\Omega = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}, t \in I_p\}$ (et si V est complet $\Omega = \mathbb{R} \times \mathcal{M}$),

$\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{M}, \Phi(t, p) = \alpha_p(t)$ est une application lisse

$\forall t \in \mathbb{R}, \Omega_t = \{p \in \mathcal{M} \mid t \in I_p\}, \Phi_t : \Omega_t \rightarrow \mathcal{M}, \Phi_t(p) = \alpha_p(t)$ est appelée le flot de V

$\Rightarrow \forall p \in \Omega_t \subset \mathcal{M}, \Phi_{t=0}(p) = p, \Phi_{t+s}(p) = \Phi_t \circ \Phi_s(p)$ et $T_p \Phi_t[V(p)] = V[\Phi_t(p)]$

$\chi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$ surface locale régulière, V est un champ de vecteurs tangent de \mathcal{U}

$\Rightarrow \chi_*(V) \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ un champ de vecteur de tangente de \mathcal{M} ,

si Φ_t est le flot de $V \Rightarrow \chi \circ \Phi_t \circ \chi^{-1}$ est le flot de $\chi_*(V)$

Maintenant, nous allons étudier certains des systèmes dynamiques du plan, puis nous allons utiliser le poussé en avant pour le flot du champ de vecteurs d'une surface régulière.

Système dynamique comme le flot d'un champ de vecteurs [5]

F est un champ de vecteurs sur $U \subset \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n, F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ est $C^k (k \geq 1)$

$\frac{dx}{dt} = F(x)$, est le système différentiel $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x)$ for $i = 1, \dots, n$

le flot $\Phi(t, x)$ est la solution de $\frac{dx}{dt} = F(x)$ qui dépend de la condition initiale x

telle que $\Phi_{t=0}(x) = x, \Phi_{t+s}(x) = \Phi_t \circ \Phi_s(x)$ est un système dynamique continu sur $U \subset \mathbb{R}^n$

un point fixe est le point $x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0$ (i.e. le champ de vecteurs est nul en x)

si le système est sous la forme $\frac{dx}{dt} =$

$F(x) = A.x$ avec $A \in M_n(\mathbb{K})$ il est appelé un système dynamique linéaire

$\Rightarrow \Phi_t(x) = e^{tA}.x_0$ est le flot de $F, \alpha_x(t) = \Phi_t(x) = x(t)$ est la courbe intégrale et $0_{\mathbb{K}^n}$ est le seul point fixe

où $e^{tA} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k A^k}{k!}$

Système dynamique du plan [5]

V est un champ de vecteurs sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, $\forall q \in \mathcal{U}$, $V(u, v) = (V_1(u, v), V_2(u, v))$

le système est $\frac{du}{dt} = V_1(u, v)$, $\frac{dv}{dt} = V_2(u, v)$

le flot $\Phi(t, q)$ est la solution du système, $\Phi(t, q) = \gamma_q(t)$ est une courbe intégrale de V

si le système est linéaire, il est dans cette forme $\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, avec $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A \in M_2(\mathbb{R})$

dans ce cas, le seul point fixe est $(0, 0)$ la nature de ce point fixe est déterminée par les valeurs propres de A
cas : $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (0, 0)$ est répulsif, $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \implies (0, 0)$ est attractif, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \implies (0, 0)$ est col

cas : $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$

$Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0 \implies (0, 0)$ est centre

$Re(\lambda) > 0 \implies (0, 0)$ est foyer répulsif, $Re(\lambda) < 0 \implies (0, 0)$ est foyer attractif

Le flot de poussé en avant d'un champ de vecteurs linéaire

$\mathcal{U} \subset [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ et $\chi(\mathcal{U}) = \mathcal{M}$ sont des surfaces régulières,

$\chi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, $\chi(u, v) = (\cos(u + \pi) \sin(\frac{v+\pi}{2}), \sin(u + \pi) \sin(\frac{v+\pi}{2}), 1 - \cos(\frac{v+\pi}{2}))$

$V = V_1 \frac{\partial}{\partial u} + V_2 \frac{\partial}{\partial v}$ est champ de vecteurs de $\mathcal{U} \implies \chi_*(V) = V_1 \chi_u + V_2 \chi_v$ est champ de vecteurs de \mathcal{M}

le système différentiel est $\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ -u(t) \end{pmatrix}$ est un système dynamique linéaire

$\gamma : I \longrightarrow \mathcal{U}$, $\gamma(t) = (u(t), v(t)) \mid V(q) = V(\gamma(t)) = \gamma'(t)$

$\implies \gamma(t) = \Psi_t(u, v) = (u(t), v(t)) = (u_0 \cos(t) + v_0 \sin(t), v_0 \cos(t) - u_0 \sin(t))$ est le flot de V

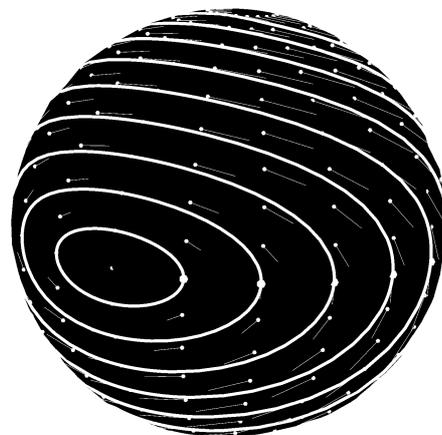
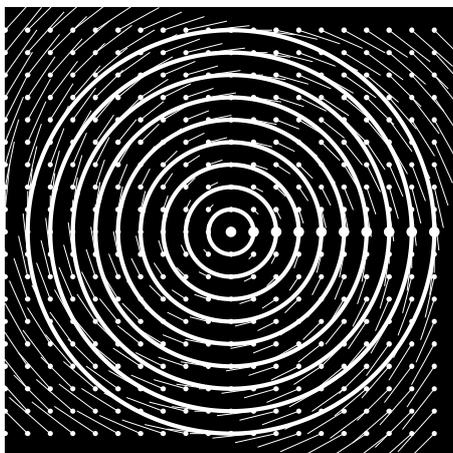
$\alpha : I \longrightarrow \mathcal{M}$,

$\alpha(t) = \chi(\gamma(t)) = \chi(u(t), v(t)) \mid \chi_*(V)(p) = \chi_*(V)(\alpha(t)) = u'(t) \chi_u(u(t), v(t)) + v'(t) \chi_v(u(t), v(t))$

$\implies \alpha(t) = \Phi_t(\chi(u, v)) = \chi \circ \Psi_t \circ \chi^{-1}(\chi(u, v)) = \chi \circ \Psi_t(u, v) = \chi(\gamma(t)) = \chi(u(t), v(t))$ est le flot de $\chi_*(V)$

$\alpha(t) = (-\cos(u_0 \cos(t) + v_0 \sin(t)) \sin(\frac{1}{2}(\pi + v_0 \cos(t) - u_0 \sin(t))),$

$-\sin(\frac{1}{2}(\pi + v_0 \cos(t) - u_0 \sin(t))) \sin(u_0 \cos(t) + v_0 \sin(t)), 1 - \cos(\frac{1}{2}(\pi + v_0 \cos(t) - u_0 \sin(t)))$)



Représentation du flot d'un champ de vecteurs linéaire du plan et son poussé en avant dans la surface

Le flot de poussé en avant d'un champ de vecteurs non linéaire

$\mathcal{U} \subset [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ et $\chi(\mathcal{U}) = \mathcal{M}$ sont des surfaces régulières,

$$\chi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = \left(\cos(u + \pi) \sin\left(\frac{v+\pi}{2}\right), \sin(u + \pi) \sin\left(\frac{v+\pi}{2}\right), 1 - \cos\left(\frac{v+\pi}{2}\right) \right)$$

$V = V_1 \frac{\partial}{\partial u} + V_2 \frac{\partial}{\partial v}$ est champ de vecteurs de $\mathcal{U} \implies \chi_*(V) = V_1 \chi_u + V_2 \chi_v$ est champ de vecteurs de \mathcal{M}

le système différentiel est $\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u(t) \\ v(t) + u^2(t) \end{pmatrix}$ est un système dynamique non linéaire

$\gamma : I \longrightarrow \mathcal{U}, \gamma(t) = (u(t), v(t)) \mid V(q) = V(\gamma(t)) = \gamma'(t)$

$$\implies \gamma(t) = \Psi_t(u, v) = (u(t), v(t)) = \left(u_0 e^{-t}, \left(v_0 + \frac{u_0^2}{3} \right) e^t - \left(\frac{u_0^2}{3} \right) e^{-2t} \right) \text{ est le flot de } V$$

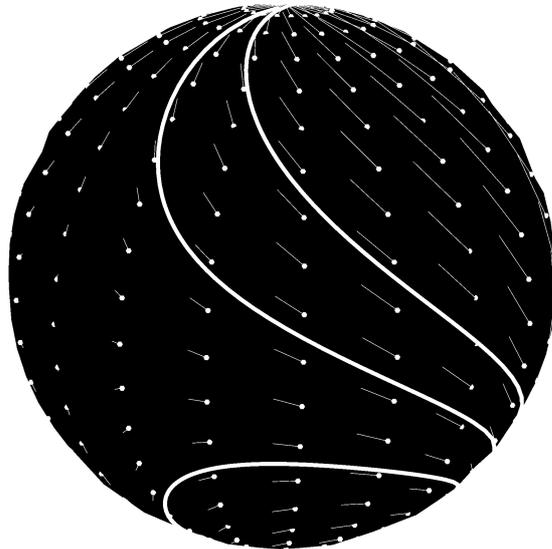
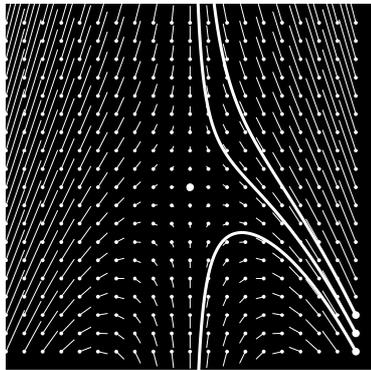
$\alpha : I \longrightarrow \mathcal{M},$

$\alpha(t) = \chi(\gamma(t)) = \chi(u(t), v(t)) \mid \chi_*(V)(p) = \chi_*(V)(\alpha(t)) = u'(t) \chi_u(u(t), v(t)) + v'(t) \chi_v(u(t), v(t))$

$\implies \alpha(t) = \Phi_t(\chi(u, v)) = \chi(\gamma(t))$ est le flot de $\chi_*(V)$

$$\alpha(t) = \left(-\cos(u_0 e^{-t}) \sin\left(\frac{1}{2} \left(\pi + \left(v_0 + \frac{u_0^2}{3} \right) e^t - \left(\frac{u_0^2}{3} \right) e^{-2t} \right) \right), \right.$$

$$\left. -\sin(u_0 e^{-t}) \sin\left(\frac{1}{2} \left(\pi + \left(v_0 + \frac{u_0^2}{3} \right) e^t - \left(\frac{u_0^2}{3} \right) e^{-2t} \right) \right), 1 - \cos\left(\frac{1}{2} \left(\pi + \left(v_0 + \frac{u_0^2}{3} \right) e^t - \left(\frac{u_0^2}{3} \right) e^{-2t} \right) \right) \right)$$



Représentation du flot d'un champ de vecteurs non linéaire du plan et son poussé en avant sur la surface

La courbe intégrale d'un champ de vecteur d'une surface peut être utilisé comme un outil de conception, car après tout, c'est une courbe paramétrique dont la trace se trouve sur la surface qui permet toutes les opérations que nous avons définies sur les courbes régulières. Maintenant, en utilisant une surface et un système dynamique linéaire que nous avons défini plus tôt, nous nous allons concevoir une homotopie de la courbe intégrale.

6.3.3.4. Conception en utilisant des courbes intégrales

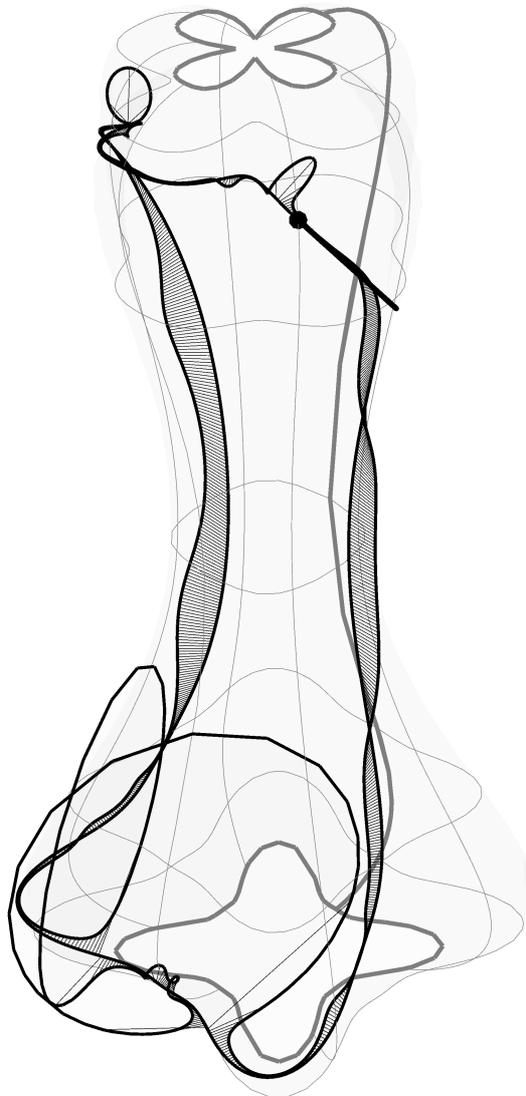
La courbe intégrale

$$\alpha(t) = \left(-\text{Cos}(u_0 \text{Cos}(t) + v_0 \text{Sin}(t)) \left(1 + \text{Sin}(v_0 \text{Cos}(t) - u_0 \text{Sin}(t))^2 \right) \right. \\ \left. \left(1 - \frac{1}{\pi} \left(-\pi + \frac{9}{10} (\pi + v_0 \text{Cos}(t) - u_0 \text{Sin}(t)) \right) \text{Sin}(2 (\pi + u_0 \text{Cos}(t) + v_0 \text{Sin}(t)))^4 \right), \right. \\ \left. - \left(1 + \text{Sin}(v_0 \text{Cos}(t) - u_0 \text{Sin}(t))^2 \right) \text{Sin}(u_0 \text{Cos}(t) + v_0 \text{Sin}(t)) \right. \\ \left. \left(1 - \frac{1}{\pi} \left(-\pi + \frac{9}{10} (\pi + v_0 \text{Cos}(t) - u_0 \text{Sin}(t)) \right) \text{Sin}(2 (\pi + u_0 \text{Cos}(t) + v_0 \text{Sin}(t)))^4 \right), \right. \\ \left. 2 (\pi + v_0 \text{Cos}(t) - u_0 \text{Sin}(t) + \text{Sin}(v_0 \text{Cos}(t) - u_0 \text{Sin}(t))) \right)$$

L'homotopie

Le champ de vecteurs normal défini sur cette courbe nous donne l'homotopie

$$N L_\alpha(t, u) = \alpha(t) + u |r_K(t)| N(t)$$



Représentation d'une homotopie entre une courbe intégrale et la courbe définie par sa normale et sa courbure

6.3.3.5. Métrique riemannienne sur une surface régulière

Nous commençons par définir la distance infinitésimale qui définit la métrique riemannienne (soit la première forme fondamentale) sur une surface régulière (comme une image d'une surface locale régulière injective). Géométriquement ds peut être interprété comme la distance infinitésimale d'un point $\chi(u, v)$ à $\chi(u + du, v + dv)$ mesurée le long la surface, De même, nous allons définir l'aire de la surface courbe en utilisant la même logique de la distance courbe. Ces analyses serait la deuxième analyse, nous réalisons sur notre surface régulière, il nous donne des informations comme l'aire de la surface, mais aussi des informations sur la courbe se situant dans la surface. Cet outil est d'être en mesure d'envoyer des courbes planes du plan à une surface régulière, il offre beaucoup de possibilités de conception pour les architectes intéressés dans la conception sur des toits ou des façades incurvées. Depuis que nous avons défini plus haut nos surfaces comme des variétés différentiables de deux dimensions en utilisant le paramétrage local et les cartes, la métrique riemannienne décrit les distances et les aires dans chaque carte locale, et cette surface a alors la structure d'une variété riemannienne de dimension deux. Chaque sous-variété lisse de \mathbb{R}^n a une métrique riemannienne induite g sur chaque espace tangent qui est une restriction du produit scalaire de \mathbb{R}^n , qui est un $(0, 2)$ tenseur défini positif. Dans chaque carte locale une métrique riemannienne est donnée par l'attribution d'une matrice 2×2 définie positive à chaque point; quand une carte différente est adoptée, la matrice est transformée selon la matrice jacobienne du changement de coordonnées. Une variété riemannienne connexe porte la structure d'un espace métrique dont la fonction de la distance est la longueur de l'arc d'une géodésique minimisante.

Variété riemannienne [6]

\mathcal{M} variété lisse, $p \in \mathcal{M}$, g_p est un produit scalaire sur son espace tangent \mathcal{M}_p

$X, Y \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ sont des champs de vecteurs tangents de \mathcal{M} ,

$g_p : \mathcal{M}_p \times \mathcal{M}_p \rightarrow \mathbb{R} \mid p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$ fonction lisse

$\Rightarrow (\mathcal{M}, g)$ variété riemannienne et la famille g_p de produits scalaires est appelé une métrique riemannienne

Métrique riemannienne [6]

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ une surface locale sur la surface régulière, $U \subset \mathcal{M}$ ouvert, $p \in U$

(u, v) système de coordonnées de $\mathcal{U} \Rightarrow (\partial u, \partial v)$

est une base de vecteurs tangents à \mathcal{U} et (du, dv) est la base duale

(x_1, x_2) est un système de coordonnées sur \mathcal{M}

$\Rightarrow (\partial x_1, \partial x_2)$ est une base de vecteurs tangents à \mathcal{M} and (dx_1, dx_2) est la base duale

$g \in \Gamma(\mathcal{M}, T^* \mathcal{M}^{\otimes 2})$ est le tenseur métrique

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j = g_{1,1} (dx_1)^2 + 2g_{1,2} dx_1 dx_2 + g_{2,2} (dx_2)^2 = (ds)^2$$

$\forall p \in U, g_{ij} = g(\partial x_i, \partial x_j) = \langle \partial x_i, \partial x_j \rangle =$ pour $i, j = 1, 2$ est la composant du tenseur métrique

$\chi^* : \Omega^2(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^2(\mathcal{U}), \chi^* g$ est la tirée en arrière de $g, \chi^* g \in \Omega^2(\mathcal{U}), \chi^* g : \mathcal{U} \rightarrow T^* \mathcal{U}^{\otimes 2}$

$\chi^* g(q) \in T^* \mathcal{U}^{\otimes 2}$, où $q \in \mathcal{U}, \partial u, \partial v \in \mathcal{U}_q$

$\chi^* g(q) : \mathcal{U}_q \times \mathcal{U}_q \rightarrow \mathbb{R}, \chi^* g(p)(\partial u, \partial v) = g(\chi(q)) [D_q \chi(\partial u), D_q \chi(\partial v)] = g(p)(\chi_*(\partial u), \chi_*(\partial v))$

où $\partial x_1 = \chi_*(\partial u) = \chi_u$ et $\partial x_2 = \chi_*(\partial v) = \chi_v \Rightarrow g_{1,1} \circ \chi = E, g_{1,2} \circ \chi = g_{2,1} \circ \chi = F, g_{2,2} \circ \chi = G$

$$\chi^* g = \chi^* [g_{1,1} (dx_1)^2 + 2g_{1,2} dx_1 dx_2 + g_{2,2} (dx_2)^2] = E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2$$

si $U \subset \mathbb{R}^n, (\partial u_1, \dots, \partial u_n)$ est le repère naturel i.e. $\partial u_i = e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ avec 1 à la $i^{\text{ème}}$ position

$\Rightarrow g_p : U_p \times U_p \rightarrow \mathbb{R}, (\sum_i a_i \partial u_i, \sum_j b_j \partial u_j) \mapsto \sum_i a_i b_i$

$\Rightarrow g_p = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ la métrique riemannienne est la métrique euclidienne canonique

Les coefficients de la première forme fondamentale [1]

$E, F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, E = \|\chi_u\|^2, F = \langle \chi_u, \chi_v \rangle, G = \|\chi_v\|^2$ et la matrice $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ est définie positive

La distance infinitesimal (i.e. la première forme fondamentale) [1]

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a patch, $(ds)^2 = E(du)^2 + 2F(du)(dv) + G(dv)^2$ est la première forme fondamentale
 $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a curve whose trace lies on the trace $\chi(\mathcal{U})$,

$$\alpha(t) = \chi(u(t), v(t)) \text{ et } \frac{ds}{dt} = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

$$s(t) = \int_c^t \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt \text{ est la fonction de longueur de } l' \text{ arc de } \alpha \text{ à partir de } \alpha(c)$$

L'aire infinitesimal [1]

$dV = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ est l'élément volume infinitésimal de \mathbb{R}^n , $dA = \sqrt{EG - F^2} du \times dv$,

où $\sqrt{EG - F^2} = \|\chi_u \times \chi_v\| = \|\chi_u\| \|\chi_v\| \sin\theta$ est l'aire du parallélogramme engendré par $\|\chi_u\|$ et $\|\chi_v\|$

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surface locale injective régulière, $A(\chi(\mathcal{U})) = \int_{\mathcal{U}} \sqrt{EG - F^2} du \times dv$ est l'aire de $\chi(\mathcal{U})$

Variété riemannienne comme espace métrique [6]

(\mathcal{M}, g) variété riemannienne, $p, q \in \mathcal{M}$

$$c : (a, b) \rightarrow \mathcal{M} \text{ une courbe dans } \mathcal{M} \implies L_a^b(c) := \int_a^b \sqrt{g(c'(t), c'(t))} dt = \int_a^b \|c'(t)\| dt$$

avec un changement de variables nous paramétriser c par sa longueur de l'arc i.e. $\forall t \in (a, b)$, $\|c'(t)\| = 1$

$$d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

$d(p, q) = \inf L(\gamma)$ est la borne inférieure sur toutes les courbes différentiables γ à partir de p et finissant à q

Connexion sur une surface régulière [6]

\mathcal{M} une surface régulière, une connexion ou dérivée covariante sur \mathcal{M} est l'application

$$D : \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{TM}) \times \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{TM}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{TM}) \mid \forall X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{TM}), f, g \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$$

$$D_X : \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{TM}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{TM})$$

$$D_{fX+gY} = fD_X + gD_Y, D_X(Y+Z) = D_X Y + D_X Z, D_X(fY) = X[f]Y + fD_X Y$$

avec le système de coordonnées de \mathcal{M} est (x_1, x_2) , $Y = Y_1 \partial x_1 + Y_2 \partial x_2 \implies D_X Y = X[Y_1] \partial x_1 + X[Y_2] \partial x_2$

Champ de vecteurs le long d'une courbe dans une surface régulière [6]

\mathcal{M} une surface régulière, $X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{TM})$, $I \subset \mathbb{R}$ ouvert, $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$ une courbe intégrale de X

$$\alpha'(t) = X(\alpha(t)), Y(\alpha(t)) = Z(\alpha(t)) \implies D_X Y(\alpha(t)) = D_X Z(\alpha(t))$$

V est un champ de vecteurs le long α si $\forall t \in I$, $V(t) \in \mathcal{M}_{\alpha(t)}$

si $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$ est une courbe régulière injective $\implies V'(t) = D_{\alpha'(t)} \bar{V}$, où $\bar{V}(\alpha(t)) = V(t)$

Symboles de Christoffel [6]

\mathcal{M} une surface régulière (muni d' une métrique riemannienne),

D est sa connexion riemannienne, (x_1, x_2) est son système de coordonnées

$\implies \Gamma_{ij}^k = dx_k(D_{\partial x_i} \partial x_j)$ pour $i, j, k = 1, 2$ sont les symboles de Christoffel D par rapport à (x_1, x_2)

$\implies D_{\partial x_i} \partial x_j = \Gamma_{ij}^1 \partial x_1 + \Gamma_{ij}^2 \partial x_2$ où $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surface locale régulière, alors les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k pour $i,$

$j, k = 1, 2$ correspondants à χ sont définis par

$$\Gamma_{1,1}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \Gamma_{1,2}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \Gamma_{2,2}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{1,1}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \Gamma_{1,2}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \Gamma_{2,2}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$

avec $\Gamma_{1,2}^1 = \Gamma_{2,1}^1$ and $\Gamma_{1,2}^2 = \Gamma_{2,1}^2$

Maintenant, nous démontrons le contrôle de la forme à l'aide de notre deuxième analyse, à savoir donner l'aire de la surface, la longueur de la courbe entre deux points quelconques sur la surface et le traçage de la courbe qui se trouvent sur la surface.

Deuxième analyse d'une surface régulière

L'équation de la surface de base est donnée par

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\chi_1(u, v) = \frac{3}{2} \left(\cos(u) + \frac{5}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right)^8 \right) \left(2 + \frac{35}{100} \cos\left(\frac{v}{2}\right) \right) \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)^6 + \sin\left(\frac{v}{2}\right) \right)$$

$$\chi_2(u, v) = 3 \sin(u) \left(2 + \frac{35}{100} \cos\left(\frac{v}{2}\right) \right) \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)^6 + \sin\left(\frac{v}{2}\right) \right)$$

$$\chi_3(u, v) = v - \sin(v), \quad \chi(u, v) = (\chi_1(u, v), \chi_2(u, v), \chi_3(u, v))$$

l'équation de la courbe plane dont la trace se situe dans le domaine

$$q_1, q_2 \in \mathcal{U}, \quad q_1 = \left(\frac{2}{3}\pi, \pi\right) \text{ and } q_2 = \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\gamma : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = q_1 + \frac{t}{2\pi}(q_2 - q_1) = (u(t), v(t)) = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{5t}{12}, \pi + \frac{t}{4}\right), \quad \text{where } \frac{du}{dt} = \frac{5}{12}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{4}$$

l'équation de la courbe α dont la trace se trouve dans la surface

$$\alpha : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (\chi \circ \gamma)(t) = \chi(u(t), v(t)) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

$$\alpha_1(t) = \chi_1(u(t), v(t)) =$$

$$\frac{3}{2} \left(2 + \frac{7}{20} \cos\left(\frac{1}{2}\left(\pi + \frac{t}{4}\right)\right) \right) \left(1 - \cos\left(\frac{1}{2}\left(\pi + \frac{t}{4}\right)\right)^6 + \sin\left(\frac{1}{2}\left(\pi + \frac{t}{4}\right)\right) \right) \left(\frac{5}{2} \cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{5t}{12}\right)\right)^8 - \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5t}{12}\right) \right)$$

$$\alpha_2(t) = \chi_2(u(t), v(t)) = 3 \left(2 + \frac{7}{20} \cos\left(\frac{1}{2}\left(\pi + \frac{t}{4}\right)\right) \right) \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5t}{12}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{1}{2}\left(\pi + \frac{t}{4}\right)\right)^6 + \sin\left(\frac{1}{2}\left(\pi + \frac{t}{4}\right)\right) \right)$$

$$\alpha_3(t) = \chi_3(u(t), v(t)) = \pi + \frac{t}{4} + \sin\left(\frac{t}{4}\right)$$

$$\alpha(0) = \chi(q_1) = \chi(u(0), v(0)) = p_1 \text{ and } \alpha(2\pi) = \chi(q_2) = \chi(u(2\pi), v(2\pi)) = p_2$$

$$\forall t \in U, \quad \alpha'(t) = (\chi \circ \gamma)'(t) = \chi_u(u(t), v(t)) \left(\frac{du}{dt}\right) + \chi_v(u(t), v(t)) \left(\frac{dv}{dt}\right) = ((\chi \circ \gamma)'_1(t), (\chi \circ \gamma)'_2(t), (\chi \circ \gamma)'_3(t))$$

la longueur de l'arc entre p_1 et p_2 dans la surface

$$E, F, G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad E = \|\chi_u\|^2, \quad F = \langle \chi_u, \chi_v \rangle, \quad G = \|\chi_v\|^2$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + F \left(\frac{du}{dt}\right) \left(\frac{dv}{dt}\right) + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} \text{ est la première forme fondamentale}$$

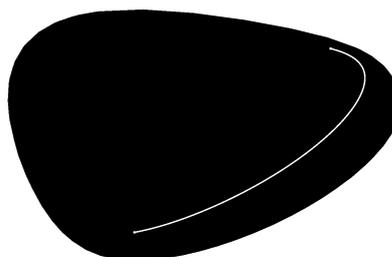
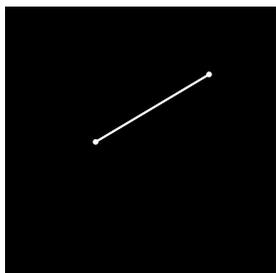
$$S(t) = \int_c^t \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + F \left(\frac{du}{dt}\right) \left(\frac{dv}{dt}\right) + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} \text{ est la fonction de longueur de l'arc de } \alpha$$

$$S(2\pi) = 23.298 \text{ est la longueur de l'arc de } \alpha \text{ à partir de } \alpha(0) = p_1 \text{ et finissant à } \alpha(2\pi) = p_2$$

L'aire de la surface

$$A_\chi[(u_0, v_0), (u_n, v_n)] = \int_{v_0}^{v_n} \int_{u_0}^{u_n} \sqrt{EG - F^2} \, du \times dv \text{ est la fonction de l'aire de } \chi$$

$$A_\chi[(0, 0), (2\pi, 2\pi)] = 1213 \text{ est l'aire de } \chi \text{ à partir de } \chi(0, 0) \text{ et finissant à } \chi(2\pi, 2\pi)$$



Représentation de la courbe entre deux points sur une surface régulière

6.3.3.6. Conception en utilisant la métrique riemannienne

Exemple de conception en utilisant la longueur de l'arc d'une courbe dans une surface régulière

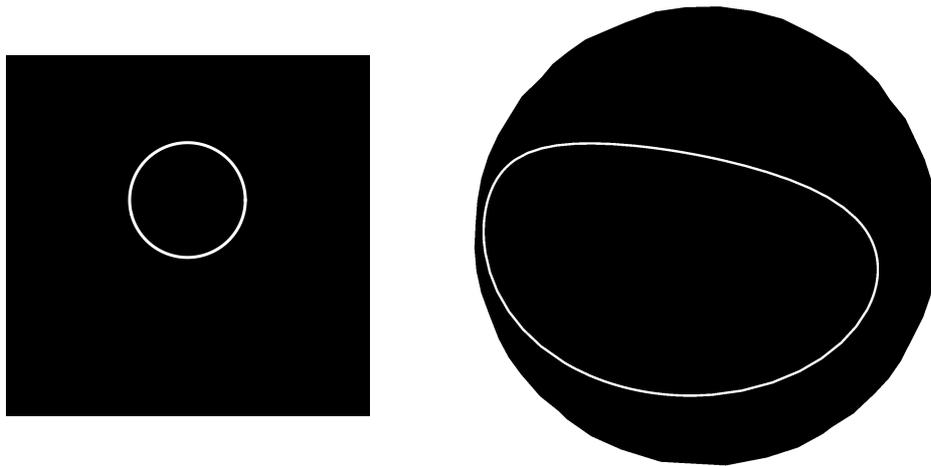
L'équation de la courbe α dont la trace se situe dans la surface

$$\varphi : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(t) = (\chi \circ \gamma)(t) = \chi(u(t), v(t))$$

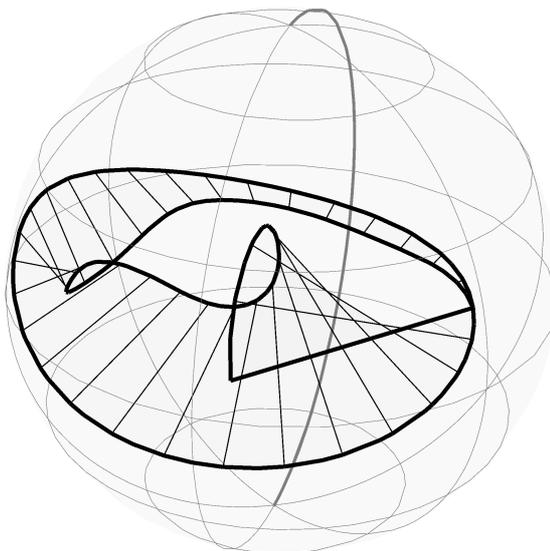
$$\varphi(t) = \left(-\cos(\cos(t)) \sin\left(\frac{1}{2} \left(\frac{6\pi}{5} + \sin(t) \right)\right), -\sin(\cos(t)) \sin\left(\frac{1}{2} \left(\frac{6\pi}{5} + \sin(t) \right)\right), 1 - \cos\left(\frac{1}{2} \left(\frac{6\pi}{5} + \sin(t) \right)\right) \right)$$

$S(2\pi) = 4.375$ est la longueur de l'arc de φ à partir de $\varphi(0)$ et finissant à $\varphi(2\pi)$

$N L_\varphi(t, u) = \varphi(t) + u S(t) N(t)$ est le champ de vecteurs normal défini sur cette courbe



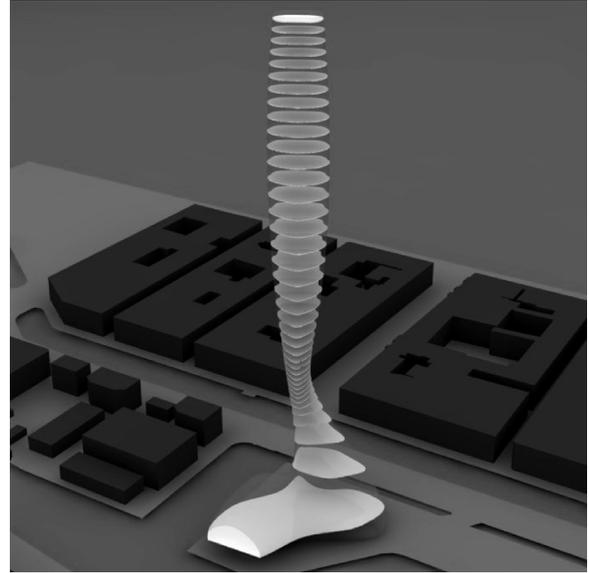
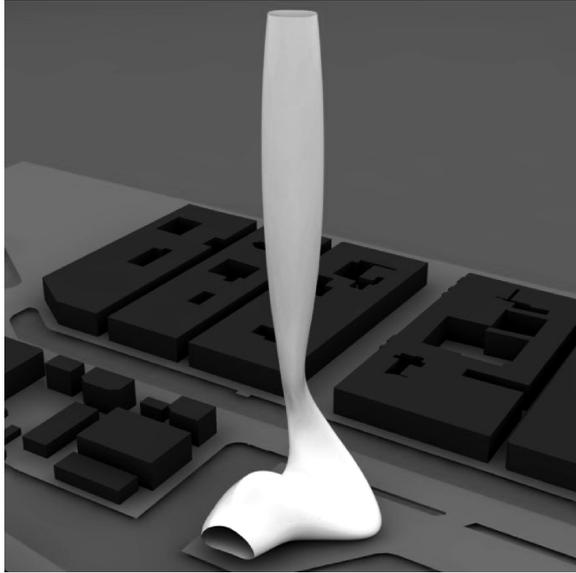
Représentation de l'envoi d'une courbe du plan à une surface régulière



Représentation d'une conception utilisant une courbe dans la surface et son champ de vecteurs normal

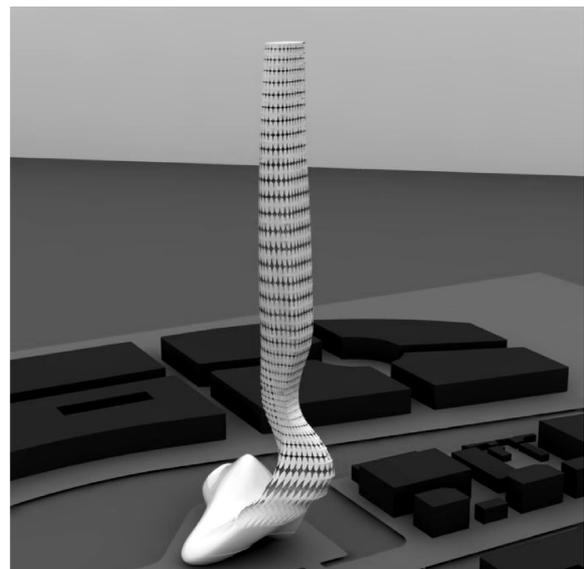
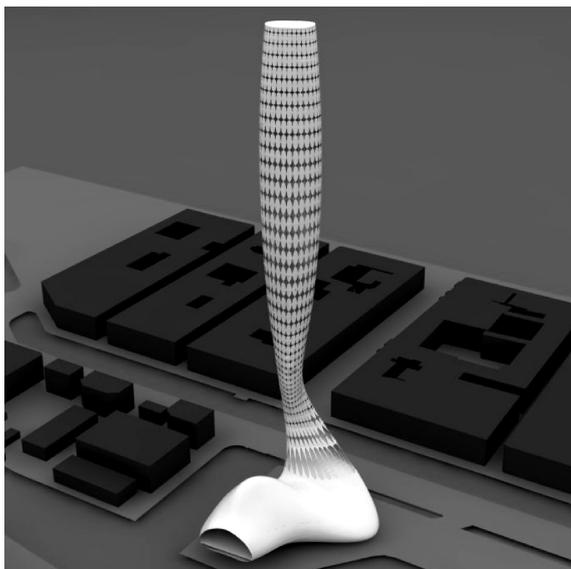
Exemple de conception utilisant l'aire de la surface

Dans l'exemple suivant, nous allons montrer le calcul d'aire peut être utilisé comme un outil de conception, à savoir dans la conception de la tour ci-dessous, l'aire de chaque plancher horizontal détermine la hauteur du plafond au-dessus de lui. Ceci à son tour détermine la taille des ouvertures, ce qui permet par exemple lumière d'atteindre plus profondément dans le plancher avec des aires supérieures.



Représentation de la variation des hauteurs de plafond en fonction de la superficie de chaque étage

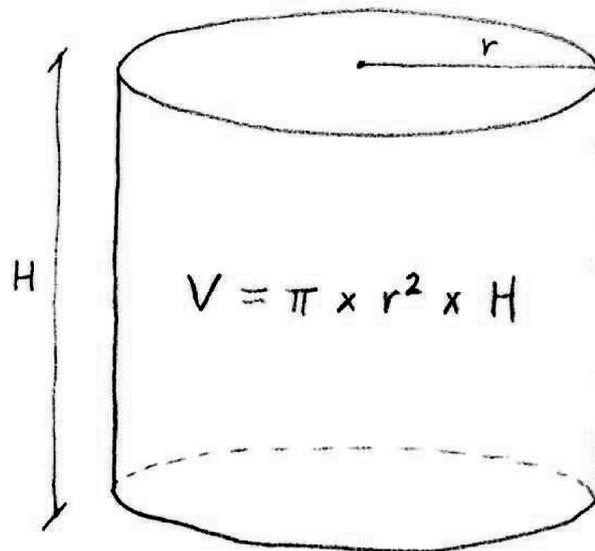
Maintenant que nous avons créé une variation de la hauteur du plafond à chaque étage proportionnel à la superficie de chaque étage (plafond plus haut pour une aire plus grande), nous allons de manière similaire créer des variations dans la taille des ouvertures en proportion à l'hauteur du plafond.



Représentation de la variation de la taille des ouvertures à chaque étage en fonction des aires

6.3.3.7. Volume contenu par une surface régulière

Après le calcul de l'aire d'une surface régulière en intégrant $dA = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv$ qui est une forme différentielle (donnée localement dans la carte (x_1, x_2) et la base $du \wedge dv = \chi^*(dx_1 \wedge dx_2)$ où (dx_1, dx_2) est le repère pour T^*M). Cette forme différentielle est de même degré que la dimension de la variété à savoir de degré deux. Cette forme différentielle est appelée une forme de volume puisqu'elle n'est jamais nulle sur la variété et son degré est égale à la dimension de la variété, donc du point de vue de la variété, le volume est l'intégration de la forme de volume. En d'autres termes, puisque la surface est une variété de deux dimensions ce que nous appelons l'aire est essentiellement le volume de la surface, mais dans l'architecture, nous sommes également intéressés au volume dans \mathbb{R}^3 contenue par le plongement de la variété dans \mathbb{R}^3 . Dans cette perspective, nous allons traiter la surface comme une application de deux variables avec son image dans \mathbb{R}^3 , et calculer le volume de solide contenue par cette surface à l'aide des techniques usuelles de changement des variables dans \mathbb{R}^3 (coordonnées polaires, sphériques et cylindriques). En plus du changement de variables, nous allons utiliser aussi la technique de balayage volumétrique, qui est simplement calculer l'aire de la surface plane obtenue en coupant le volume par un plan, puis l'intégration de cette aire en tant que fonction réelle le long de direction de la hauteur. Ce volume contenu par la surface est la troisième analyse, nous allons faire sur une surface régulière, son application dans l'architecture est tout à fait clair. Dans cette recherche, nous allons montrer un exemple comment le calcul du volume peut être utilisé en combinaison avec le calcul de l'aire comme un outil pour tester l'aptitude de certaines variations d'une surface donnée dans un algorithme d'optimisation. Par exemple, étant donné un grand espace de variations d'une surface, nous aimerions trouver ceux avec un plus grand rapport volume / surface en d'autres termes, nous essayons de s'approcher de la sphère algorithmiquement.



Représentation du volume du cylindre

σ -algèbre (tribu) [7]

E un ensemble non vide, \mathcal{A}, C sont des classes des parties de E , \mathcal{A} est une σ -algèbre (tribu) si $\phi \in \mathcal{A}$, si $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$ et si $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A} \implies \bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{A}$

$\sigma(C) = \bigcap_{C \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}$ est la tribu engendrée, et si

$C = \{(a, b) \text{ ouvert} \mid -\infty < a \leq b < \infty, a, b \in \mathbb{R}\} \implies \sigma(C) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne

\mathcal{U} est une topologie si $\phi, E \in \mathcal{U}$, si $(O_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de \mathcal{U}

$\implies \bigcup_{n \geq 0} O_n \in \mathcal{U}$ et si $(O_n)_{0 \leq n \leq N}$ une suite d'éléments de $\mathcal{U} \implies \bigcap_{0 \leq n \leq N} O_n \in \mathcal{U}$

dans un espace topologique (E, \mathcal{U}) la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{U})$

Fonctions mesurables et boréliennes [7]

$f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$ est mesurable $\iff \forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (E_1 \times \dots \times E_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n)$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ est mesurable $\iff \forall i \in 1, \dots, n, f_i : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (E_i, \mathcal{A}_i)$ est mesurable

$f : (E_1 \times \dots \times E_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,

$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ est mesurable $\iff \forall i \in 1, \dots, n, f_i : (E_i, \mathcal{A}_i) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable

$f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable $\iff \forall a \in \mathbb{R}, f^{-1}((a, \infty)) = \{f > a\} \in \mathcal{A}$

$f : (E, \mathcal{U}) \rightarrow (F, \mathcal{V})$ est continue,

$\mathcal{B}(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{U}) \implies f$ est borélienne $f : (E, \mathcal{B}(\mathcal{U})) \rightarrow (F, \mathcal{B}(\mathcal{V}))$ est mesurable

Mesure de Lebesgue et fonction λ -intégrable [7]

E un ensemble non vide, \mathcal{A} une tribu

$m : (E, \mathcal{A}) \rightarrow [0, \infty]$, $A \in \mathcal{A} \mapsto m(A) \mid m(\phi) = 0$ et $(A_n)_{n \geq 1}$ suite d'éléments 2 à 2 disjoints,

$m(\sum_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} m(A_n) \implies m$ est une mesure positive

et pour $f : (E, \mathcal{A}, m) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ mesurable $\implies m(A) = \int_A f d_m$

$\lambda : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow [0, \infty] \mid \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(B) = \lambda(x + B)$,

$\lambda([a, b]) = b - a$ et $\lambda(\{a\}) = 0 \implies \lambda$ est la mesure de Lebesgue

$f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, f est λ -intégrable si $\int_{\mathbb{R}} |f| d_\lambda < +\infty$

Théorème de convergence dominé de Lebesgue [7]

E est un ensemble, \mathcal{A} est une tribu, \mathcal{B} est la tribu borélienne et m est une mesure

$f_n : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ fonctions mesurables $\mid \forall x \in E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

et si $\exists g : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ m -mesurable

telle que $\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x) \implies f$ mesurable, m -intégrable et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d_m = \int_E f d_m$

Mesure produit et sections [7]

$E = E_1 \times E_2$ est un ensemble, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\})$ la tribu produite

$m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1) \times m_2(A_2)$ est la mesure produit sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ avec m_1 et m_2 σ -fini

$A_x = \{y \in E_2 \mid (x, y) \in A_1 \times A_2\}$ est la section pour un x fixé

$m(A_1 \times A_2) = \int_{E_1} m_2(A_x) d_{m_1}(x)$

Théorème de Fubini [7]

$f : (E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne produite

si $F_1(y) = \int_{E_1} f(x, y) d_{m_1}(x)$ et $F_2(x) = \int_{E_2} f(x, y) d_{m_2}(y)$

sont des fonctions mesurables ou si $\int_{E_1 \times E_2} |f(x, y)| d(m_1 \otimes m_2)(x, y) < +\infty$

$\implies \int_{E_1 \times E_2} f(x, y) d(m_1 \otimes m_2)(x, y) = \int_{E_1} \int_{E_2} f(x, y) d_{m_2}(y) d_{m_1}(x) = \int_{E_2} \int_{E_1} f(x, y) d_{m_1}(x) d_{m_2}(y)$

Intégration par changement de variables (formule générale) [7]

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta, I \subset \mathbb{R}$ fermé borné,

$g : [\alpha, \beta] \rightarrow I$ fonction de classe C^1 et $f : I \rightarrow \mathbb{R} \implies \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g(u) g'(u) du$

$D, \Delta \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, $t, x \in \mathbb{R}^n, \varphi : \Delta \rightarrow D,$

$t = (t_1, \dots, t_n) \rightarrow \varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ difféomorphisme (i.e. $J(\varphi)(t) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ inversible)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonction borélienne alors $\Delta \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow f \circ \varphi(t) |\det J(\varphi)(t)|$ est borélienne et positive

$$\implies \int_D f(x) d_{\lambda}^{\otimes n}(x) = \int_{\Delta} f \circ \varphi(t) |\det J(\varphi)(t)| d_{\lambda}^{\otimes n}(t)$$

Intégration par changement de variables (coordonnées polaires, cylindriques et sphériques) [7]

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ sont les coordonnées polaires

$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \implies |\det J(\varphi)(r, \theta)| = r$

$$\implies \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d_{\lambda}(x) d_{\lambda}(y) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} f \circ \varphi(r, \theta) r d_{\lambda}(r) d_{\lambda}(\theta)$$

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = \lambda$ sont les coordonnées cylindriques

$\varphi(r, \theta, \lambda) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \lambda) \implies |\det J(\varphi)(r, \theta, \lambda)| = r$

$$\implies \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) d_{\lambda}(x) d_{\lambda}(y) d_{\lambda}(z) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f \circ \varphi(r, \theta, \lambda) r d_{\lambda}(r) d_{\lambda}(\theta) d_{\lambda}(\lambda)$$

$x = r \cos \theta \sin \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \phi$ sont les coordonnées sphériques

$\varphi(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$

$\implies |\det J(\varphi)(r, \theta, \phi)| = r^2 \sin \phi$

$$\implies \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) d_{\lambda}(x) d_{\lambda}(y) d_{\lambda}(z) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f \circ \varphi(r, \theta, \phi) r^2 d_{\lambda}(r) d_{\lambda}(\theta) d_{\lambda}(\phi)$$

$dV = r d_{\lambda}(r) d_{\lambda}(\theta)$ est l'élément volume pour les coordonnées polaires

$dV = r d_{\lambda}(r) d_{\lambda}(\theta) d_{\lambda}(\lambda)$ est l'élément volume les coordonnées cylindriques

$dV = r^2 \sin \phi d_{\lambda}(r) d_{\lambda}(\theta) d_{\lambda}(\lambda)$ est l'élément volume pour les coordonnées sphériques

Volume contenu par une surface régulière

$(\mathcal{U} = E_1 \times E_2) \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface locale injective régulière

Volume sous un graphe sur un domaine rectangulaire

$\chi(u, v) = (u, v, h(u, v)) \implies V(\chi(\mathcal{U})) = \int_{\mathcal{U}} h(u, v) d_{\lambda}(u) d_{\lambda}(v)$ is the volume of $\chi(\mathcal{U})$

Volume sous un graphe sur un domaine non – rectangulaire (en coordonnées polaires)

$\chi(u, v) = (\cos(u) f(u) v, \sin(u) f(u) v, g(v)) = (x, y, z)$ où $f : E_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : E_2 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) = ((\cos u) f(u) v, (\sin u) f(u) v)$ et $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$

$\varphi^{-1}(x, y) = (\varphi_1^{-1}(x, y), \varphi_2^{-1}(x, y)) = (u, v)$

$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y) = g(\varphi_2^{-1}(x, y))$

$\implies V(\chi(\mathcal{U})) = \int_{\mathcal{U}} F \circ \varphi(u, v) |\det J(\varphi)(u, v)| d_{\lambda}(u) d_{\lambda}(v)$ est le volume de $\chi(\mathcal{U})$

Volume des surfaces cylindriques/sphériques (en utilisant les coordonnées cylindriques/sphériques)

$\chi(u, v) = (\cos(u) f(u, v), \sin(u) f(u, v), g(v)) = (x, y, z)$ où

$f : \mathcal{U} = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ and $g : E_2 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(r, u, v) = (r \cos(u) f(u, v), r \sin(u) f(u, v), g(v))$ (pour cylindrique)

$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(r, u, v) = (r \cos(u) f(u, v), r \sin(u) f(u, v), r g(v))$ (pour sphérique)

$\implies V(\chi(\mathcal{U})) = \int_{[0,1]} \int_{E_1} \int_{E_2} |\det J(\varphi)(r, u, v)| d_{\lambda}(r) d_{\lambda}(u) d_{\lambda}(v)$ est le volume de $\chi(\mathcal{U})$

Balayage volumétrique

$\chi(u, v) = (x, y, z)$ et $S_h(\chi)$ est une section transversale perpendiculaire à la direction $h,$

où $h \in [a, b]$ (une dimension de la figure)

$\implies V(\chi(\mathcal{U})) = \int_{[a,b]} A(S_h(\chi)) d_{\lambda}(h)$ est le volume de $\chi(\mathcal{U})$

Troisième analyse d'une surface régulière

Domaine rectangulaire

L'équation de la surface de base est donnée par

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \chi(u, v) = (u, v, h(u, v))$$

$$h(u, v) = \left(1 - \cos\left(\frac{u}{2}\right)^{90}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)^{90}\right) \left(1 + \cos(v)^2 - \sin\left(\frac{v}{2}\right)^{45} - \frac{1}{2} \sin(u) \sin(v)\right)$$

le volume en dessous de la surface

$$V_\chi[(u_0, v_0), (u_n, v_n)] = \int_{v_0}^{v_n} \int_{u_0}^{u_n} h(u, v) \, du \times dv \text{ est la fonction de volume de } \chi$$

$$V_\chi[(0, 0), (2\pi, 2\pi)] = 44 \text{ est le volume en dessous de } \chi \text{ à partir de } \chi(0, 0) \text{ et finissant à } \chi(2\pi, 2\pi)$$

Domaine non rectangulaire (en coordonnées polaires)

L'équation de la surface de base est donnée par

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ et } \varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\chi(u, v) = \left(v \cos(u) \left(\frac{13}{10} + \cos(u)^5\right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin(2u)^3\right), v \sin(u) \left(\frac{13}{10} + \cos(u)^5\right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin(2u)^3\right), 3 \sin\left(\frac{v}{2}\right)\right)$$

$$\varphi(u, v) = \left(v \cos(u) \left(\frac{13}{10} + \cos(u)^5\right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin(2u)^3\right), v \sin(u) \left(\frac{13}{10} + \cos(u)^5\right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin(2u)^3\right)\right)$$

$$u = \varphi_1^{-1}(x, y) \text{ et } v = \varphi_2^{-1}(x, y)$$

$$F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = 3 \sin\left(\frac{\varphi_2^{-1}(x, y)}{2}\right)$$

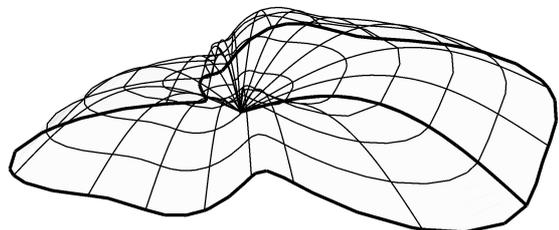
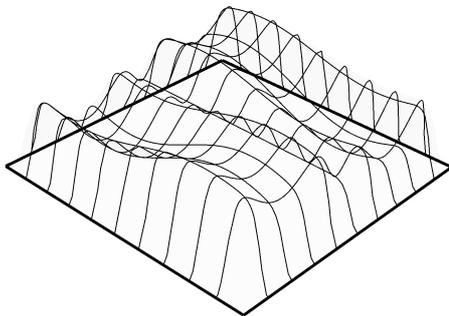
$$F(x, y) =$$

$$3 \sin\left(\left(5(x^2 + y^2)^{\frac{11}{2}} \left(13x^6 + 39x^4y^2 + 39x^2y^4 + 13y^6 - 10x^5\sqrt{x^2 + y^2}\right)\right) / \left(69x^{16} + 1052x^{14}y^2 + 276x^{13}y^3 + 4432x^{12}y^4 + 3380x^{11}y^5 + 9364x^{10}y^6 + 6760x^9y^7 + 11830x^8y^8 + 6760x^7y^9 + 9464x^6y^{10} + 3380x^5y^{11} + 4732x^4y^{12} + 676x^3y^{13} + 1352x^2y^{14} + 169y^{16}\right)\right)$$

le volume en dessous de la surface

$$V_\chi[F, (u_0, v_0), (u_n, v_n)] = \int_{v_0}^{v_n} \int_{u_0}^{u_n} F \circ \varphi(u, v) |\det J(\varphi)(u, v)| \, du \times dv \text{ est la fonction de volume de } \chi$$

$$V_\chi[F, (0, 0), (2\pi, 2\pi)] = 491.287 \text{ le volume en dessous de } \chi \text{ à partir de } \chi(0, 0) \text{ et finissant à } \chi(2\pi, 2\pi)$$



Représentation du volume sous la surface (aussi en utilisant les coordonnées polaires)

Balayage volumétrique

L'équation de la surface de base est donnée par

$$\chi: \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = (f_1(u), f_2(u, v), f_3(u, v))$$

$$\chi(u, v) = \left(u + \frac{4 \sin(u)}{5}, \frac{1}{4} (2 - \cos(\frac{3u}{2})) \left((v - \pi) + \frac{1}{10} \sin(2v) \right), \right.$$

$$\left. \frac{1}{8} (1 - \cos(\frac{u}{2}))^{20} (2 - \cos(\frac{3u}{2})) \left(1 + \frac{\cos(v)^{20}}{10} \right) (1 - \cos(\frac{v}{2}))^{20} (2 - \cos(2v)) \left(1 + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{1}{2} \left(\pi + \frac{3u}{2} \right)\right)^{20} \right) \right)$$

$$\eta: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \eta(h) = u \text{ (ici } h \text{ est la direction } x)$$

$S_h(\chi)(t, v) = (1-t)(f_1 \circ \eta(h), 0, 0) + t \chi(\eta(h), v)$ est la surface de la section transversale en un point h

$$(t, v) = \pi(1-t) + \pi t, \frac{t}{2} (-\pi + v + \frac{1}{10} \sin(2v)), \frac{t}{4} (1 - \cos(\frac{v}{2}))^{20} \left(1 + \frac{\cos(v)^{20}}{10} \right) (2 - \cos(2v))$$

$A(S_{|h=\pi}(\chi))[(0, 0), (1, 2\pi)] = 1.299$ est l'aire de $S_{|h=\pi}(\chi)$ à partir de $S_{|h=\pi}(\chi)(0, 0)$ et finissant à $S_{|h=\pi}(\chi)(1, 2\pi)$

le volume en dessous de la surface

$$V_\chi[h_0, h_n] = \int_{h_0}^{h_n} A(S_h(\chi)) dh \text{ est la fonction de volume de } \chi$$

$$V_\chi[(0, 2\pi)] = 6.292 \text{ le volume en dessous de } \chi \text{ à partir de } h = 0 \text{ et finissant à } h = 2\pi$$

Volume de surfaces cylindrique / sphériques

L'équation de la surface de base cylindrique est donnée par

$$\chi: \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(v))$$

$$\chi(u, v) = \left(\cos(u) \left(1 - \frac{(\frac{9}{10} v - \pi) \sin(2u)^4}{\pi} \right) (1 + \sin(v)^2), \sin(u) \left(1 - \frac{(\frac{9}{10} v - \pi) \sin(2u)^4}{\pi} \right) (1 + \sin(v)^2), 2(v - \sin(v)) \right)$$

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(r, u, v) = (r f_1(u, v), r f_2(u, v), f_3(v))$$

L'équation de la surface de base sphérique est donnée par

$$\chi: \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$$

$$\chi(u, v) = \left(\frac{3}{2} (\cos(u) + \frac{5}{2} \cos(\frac{u}{2}))^8 (2 + \frac{35}{100} \cos(\frac{v}{2})) (1 - \cos(\frac{v}{2}))^6 + \sin(\frac{v}{2})), \right.$$

$$\left. 3 \sin(u) (2 + \frac{35}{100} \cos(\frac{v}{2})) (1 - \cos(\frac{v}{2}))^6 + \sin(\frac{v}{2})), v - \sin(v) \right)$$

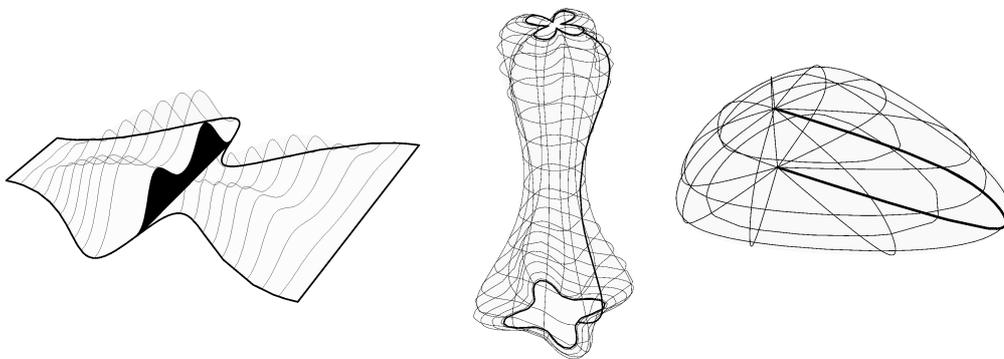
$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(r, u, v) = (r f_1(u, v), r f_2(u, v), r f_3(u, v))$$

le volume contenu par la surface

$$V_\chi[(r_0, u_0, v_0), (r_n, u_n, v_n)] = \int_{r_0}^{r_n} \int_{u_0}^{u_n} \int_{v_0}^{v_n} |\det J(\varphi)(r, u, v)| dr \times du \times dv \text{ est la fonction de volume de } \chi$$

$$V_\chi[(0, 0, 0), (1, 2\pi, 2\pi)] = 104.573 \text{ est le volume de la surface cylindrique } \chi(\mathcal{U})$$

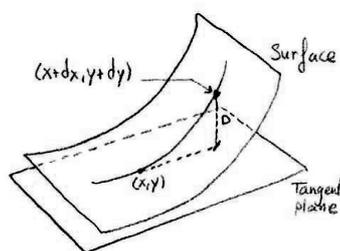
$$V_\chi[(0, 0, 0), (1, 2\pi, 2\pi)] = 2425.59 \text{ est le volume de la surface sphérique } \chi(\mathcal{U})$$



Représentation du calcul du volume en utilisant balayage volumétrique, coordonnées cylindrique / sphériques

6.3.3.7. Courbure d'une surface régulière

La partie à venir s'articule autour des notions de courbure, nous commençons par expliquer la notion de base de courbure d'une surface à partir de la courbure normale ensuite aller plus loin pour définir la notion de et les courbures gaussienne et moyenne. Cette étude est fondamentale pour le contrôle de la conception de formes courbes. La géométrie extrinsèque de surfaces étudie les propriétés des surfaces plongées dans un espace euclidien, à savoir la façon dont nous avons défini nos surfaces comme variété lisse de deux dimensions en utilisant le paramétrage local. En géométrie intrinsèque, deux surfaces sont les mêmes si il est possible de déplier une sur l'autre sans l'étirer, à savoir un morphisme de la surface sur l'autre en préservant la distance. En géométrie extrinsèque, deux surfaces sont les mêmes si elles sont conformes à l'espace euclidien ambiante, i.e. qu'il existe une isométrie de l'espace euclidien portant une surface sur l'autre. Même si l'invariant principal de l'étude de la géométrie intrinsèque des surfaces est la métrique riemannienne (la première forme fondamentale: $(E dx + 2F dx dy + G dy)$) et la courbure gaussienne, certaines propriétés des surfaces dépendent également de le plongement dans l'espace euclidien, le plus important est la deuxième forme fondamentale. Il peut être compris en prenant un point (x, y) sur la surface dans une carte locale, la distance euclidienne à partir d'un point proche $(x + dx, y + dy)$ au plan tangent en (x, y) i.e. la longueur de la perpendiculaire abaissée du point voisin au plan tangent a la forme $(e dx + 2f dx dy + g dy)$ plus des corrections d'ordre trois ou plus. Cette expression est la deuxième forme fondamentale qui est une forme bilinéaire symétrique, décrit par une matrice 2×2 symétrique; la courbure gaussienne peut être calculée comme étant le rapport des déterminants de la deuxième et première formes fondamentales $(eg - f^2)/(EG - F^2)$ et la courbure moyenne comme étant la somme des deux courbures principales $(eG + gE - 2fF)/(EG - F^2)$. Remarquablement Gauss a prouvé que la courbure gaussienne est un invariant intrinsèque de la surface mais la courbure moyenne ne l'est pas.



Représentation de la deuxième forme fondamentale

Nous commençons par introduire la notion de l'opérateur de forme, puis nous définissons la deuxième forme fondamentale qui nous aidera à définir la courbure normale d'une surface. Essentiellement l'opérateur de forme est le lien entre l'étude de la géométrie d'une surface régulière \mathcal{M} dans \mathbb{R}^3 et la géométrie de \mathbb{R}^3 . L'application de Gauss est une application à partir d'une surface à la sphère unité $U: \mathcal{M} \rightarrow S^2$, où $U(p)$ est la normale unitaire à \mathcal{M} en p , la différentielle de cette application est connu comme l'opérateur de forme ou l'application de Weingarten. Puisque l'espace tangent en chaque point $p \in \mathcal{M}$ est un espace préhilbertien, l'opérateur de forme à un point p est une transformation linéaire $S: \mathcal{M}_p \rightarrow \mathcal{M}_p$ qui mesure comment \mathcal{M} se courbe dans une certaine direction. La courbure normale k est une variante de l'opérateur de forme. pour $v_p \in \mathcal{M}_p$, $k(v_p)$ mesure combien la surface se courbe dans la direction v_p , au signe près, c'est la courbure signée de la courbe plane formée par l'intersection de \mathcal{M} avec le plan passant par v_p et perpendiculaire à \mathcal{M} . Les valeurs propres de l'opérateur de forme en p sont les valeurs maximale et minimale de la courbure normale en p maximale et (i.e. les courbures principales k_1 et k_2). En particulier, le déterminant de l'opérateur de forme en p est la courbure gaussienne et la moitié de sa trace est la courbure moyenne, et les vecteurs propres de l'opérateur de forme déterminent les directions dans lesquelles la surface se courbe en chaque point.

Opérateur de forme [1]

$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ surface régulière, $p \in \mathcal{M}$, $v_p, w_p \in \mathcal{M}_p$,

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface locale injective régulière sur \mathcal{M} , $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est normale unitaire à la surface

$$S : \mathcal{M}_p \rightarrow \mathcal{M}_p, S(v_p) = -D_v U \text{ et } \langle S(v_p), w_p \rangle = \langle v_p, S(w_p) \rangle = \langle S(w_p), v_p \rangle$$

$$S(\chi_u) = -D_u U = -U_u \text{ et } S(\chi_v) = -D_v U = -U_v$$

$\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe dont le tracé se situe sur \mathcal{M} alors $\langle \alpha'', U \rangle = \langle S(\alpha'), \alpha' \rangle$

$$\partial_v (\langle U, \chi_u \rangle) = \langle U_v, \chi_u \rangle + \langle U, \chi_{uv} \rangle = 0 \implies \langle -U_v, \chi_u \rangle = \langle U, \chi_{uv} \rangle \implies \langle S(\chi_v), \chi_u \rangle = \langle U, \chi_{uv} \rangle$$

$$\langle S(\chi_u), \chi_v \rangle = \langle U, \chi_{vu} \rangle = \langle U, \chi_{uv} \rangle = \langle S(\chi_v), \chi_u \rangle$$

Courbure normale [1]

$L \subset \mathcal{M}_p$ (sous-espace à dim 1) est une direction, $v_p, u_p \in \mathcal{M}_p$ et $\|u_p\| = 1$

$$\implies k(u_p) = \langle S(u_p), u_p \rangle \text{ et } k(v_p) = \frac{\langle S(v_p), v_p \rangle}{\|v_p\|^2}$$

$\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe dont le tracé se situe sur \mathcal{M} alors $k(\alpha') = \langle \alpha'', U \rangle = \langle S(\alpha'), \alpha' \rangle$

si $k(L) = 0$ alors L est une direction asymptotique de même, si $k(v_p) = 0$ alors v est un vecteur asymptotique

les max. et min. valeurs de $k(v_p)$ sont les courbures principales de \mathcal{M} en p notées k_1 et k_2

les vecteurs unitaires $e_1, e_2 \in \mathcal{M}_p$ où ces valeurs apparaissent sont les vecteurs principaux

$\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe de vitesse unitaire ($\|\beta'(s)\| = 1, \forall s \in (c, d)$) dont le tracé se situe sur \mathcal{M} où

$$\beta(0) = p \text{ et } \beta'(0) = u_p$$

$K_\beta(s) = \|\beta''(s)\|$ est la courbure de β et N est le champ de vecteurs normal principal de β

$$k(u_p) = \langle S(u_p), u_p \rangle = \langle \beta''(0), U(p) \rangle = \langle K_\beta(0) N(0), U(p) \rangle = K_\beta(0) \cos \theta \implies k(u_p) = \pm K_\beta(0)$$

Section normale [1]

$\Pi(u_p, U(p))$ est le plan défini par $u_p, U(p)$ où $\mathcal{M} \cap \Pi(u_p, U(p))$ est la section normale dans la direction u_p par conséquent, la section normale est une courbe plane dont la courbure signée est donnée par $k(u_p)$

$k(u_p)$ positive \implies la section normale se courbe dans la direction de $U(p)$

$k(u_p)$ négative \implies la section normale se courbe dans la direction opposée à $U(p)$

$k(u_p) = 0 \implies$ la courbure de la section normale s'annule en p

Les coefficients de la seconde forme fondamentale [1]

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface locale régulière, $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la normale unitaire à la surface

$e, f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sont les coefficients de la seconde forme fondamentale

$$e = \langle S(\chi_u), \chi_u \rangle = \langle -U_u, \chi_u \rangle = \langle U, \chi_{uu} \rangle = \left\langle \chi_{uu}, \frac{\chi_u \times \chi_v}{\|\chi_u \times \chi_v\|} \right\rangle = \frac{(\chi_{uu} \chi_u \chi_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$f = \langle S(\chi_u), \chi_v \rangle = \langle -U_u, \chi_v \rangle = \langle U, \chi_{vu} \rangle = \left\langle \chi_{vu}, \frac{\chi_u \times \chi_v}{\|\chi_u \times \chi_v\|} \right\rangle$$

$$= \frac{(\chi_{vu} \chi_u \chi_v)}{\sqrt{EG-F^2}} \left(= \langle U, \chi_{uv} \rangle = \langle -U_v, \chi_u \rangle = \langle S(\chi_v), \chi_u \rangle = \left\langle \chi_{uv}, \frac{\chi_u \times \chi_v}{\|\chi_u \times \chi_v\|} \right\rangle = \frac{(\chi_{uv} \chi_u \chi_v)}{\sqrt{EG-F^2}} \right)$$

$$g = \langle S(\chi_v), \chi_v \rangle = \langle -U_v, \chi_v \rangle = \langle U, \chi_{vv} \rangle = \left\langle \chi_{vv}, \frac{\chi_u \times \chi_v}{\|\chi_u \times \chi_v\|} \right\rangle = \frac{(\chi_{vv} \chi_u \chi_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

Les équations de Weingarten [1]

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface locale régulière, $\chi(\mathcal{U})_p = \text{Vect}(\{\chi_u, \chi_v\})$

$$-S(\chi_u) = U_u = \frac{fF-eG}{EG-F^2} \chi_u + \frac{eF-fE}{EG-F^2} \chi_v \text{ et } -S(\chi_v) = U_v = \frac{gF-fG}{EG-F^2} \chi_u + \frac{fF-gE}{EG-F^2} \chi_v$$

Courbure normale en termes de formes fondamentales [1]

$M \subset \mathbb{R}^3$ surface régulière, $\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface locale régulière sur M , $M_p = \text{Vect}(\{\chi_u, \chi_v\})$

$p \in M, p = \chi(u_0, v_0), v_p \in M_p \implies v_p = a \chi_u(u_0, v_0) + b \chi_v(u_0, v_0)$

$\zeta_1(v_p, v_p) = \langle v_p, v_p \rangle = \|v_p\|^2 = \|a \chi_u + b \chi_v\|^2 = a^2 E + 2 a b F + b^2 G$ (la première forme fondamentale)

$\zeta_2(v_p, v_p) = \langle S(v_p), v_p \rangle$

$= \langle a S(\chi_u) + b S(\chi_v), a \chi_u + b \chi_v \rangle = a^2 e + 2 a b f + b^2 g$ (la deuxième forme fondamentale)

$k(v_p) = \frac{\langle S(v_p), v_p \rangle}{\|v_p\|^2} = \frac{\zeta_2(v_p, v_p)}{\zeta_1(v_p, v_p)}$

Les valeurs propres de l'opérateur de forme [1]

M_p est un espace vectoriel de dimension 2 avec un produit intérieur \langle , \rangle

et $S : M_p \rightarrow M_p$ est une transformation linéaire symétrique par rapport à \langle , \rangle

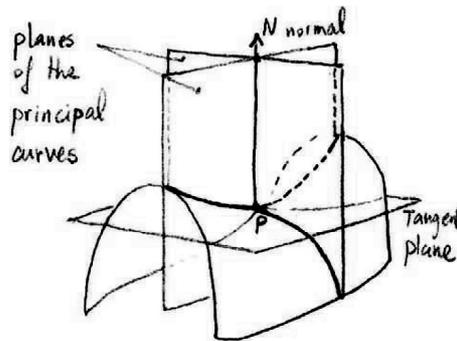
\implies les valeurs propres (k_1, k_2) de S sont réelles et S diagonalisable

$\implies \exists$ une base orthonormée $\{e_1, e_2\}$ de $M_p \mid S(e_1) = k_1 e_1$ et $S(e_2) = k_2 e_2$

où k_1, k_2 sont les courbures principales de M en p et e_1, e_2 sont les vecteurs principaux correspondants

$u_p = \text{Cos}\theta e_1 + \text{Sin}\theta e_2 \implies k(u_p) = k_1 \text{Cos}^2 \theta + k_2 \text{Sin}^2 \theta$

Maintenant que nous avons clarifié les notions de l'opérateur de forme, la courbure normale et les courbures principales, nous sommes maintenant en mesure de définir les notions les plus importantes dans la géométrie des surfaces dans \mathbb{R}^3 , à savoir la courbure gaussienne et la courbure moyenne. Elles jouent un rôle essentiel dans l'analyse de la forme, par exemple la disparition de la courbure gaussienne détermine la planéité d'une surface et la disparition de la courbure moyenne détermine si la surface est une surface minimale. La courbure gaussienne en un point est le produit des courbures principales, elle est une mesure intrinsèque de courbure i.e. elle ne dépend que de la façon dont les distances sont mesurées sur la surface, et pas sur la façon dont la surface est plongée dans l'espace. La courbure moyenne est pourtant une mesure extrinsèque de la courbure qui dépend de la paramétrisation de la surface, elle est importante dans l'analyse des surfaces minimales qui ont une courbure moyenne nulle et dans l'analyse des interfaces physiques entre des fluides tels que le film de savon qui a une courbure moyenne constante. Pour avoir une idée intuitive de la différence entre ces deux mesures intrinsèque et extrinsèque de courbure, nous considérons un morceau plat de papier, il a zéro des courbures moyennes et gaussiennes nulles. Mais si nous roulons le papier dans une forme cylindrique (disons avec un rayon unitaire), les courbures principales le long de l'axe et la section transversale circulaire sont respectivement 0 et 1, donc la surface a maintenant une courbure moyenne 1/2 et une courbure gaussienne encore 0. En général, la courbure moyenne est une propriété d'un plongement, ce qui signifie qu'elle dépend de la façon dont la surface est plongée dans l'espace ambiant. Cependant la courbure gaussienne dépend de la surface elle-même (i.e. ne dépend que de la métrique), et ne dépend pas du plongement. C'est naturellement important du point de vue de la conception architecturale et en particulier la fabrication, car il est beaucoup plus facile et moins coûteux de construire des éléments du bâtiment qui peut être déplié aux morceaux plats i.e. avec courbure gaussienne nulle, ce genre de surface sont appelées surfaces réglées plates ou surfaces développables.



Représentation des deux courbures principales en un point d'une surface régulière

Courbures gaussienne et moyenne [1]

$M \subset \mathbb{R}^3$ surface régulière, $p \in M$, $v_p, w_p \in \mathcal{M}_p$, $S: \mathcal{M}_p \rightarrow \mathcal{M}_p$ est l'opérateur de forme

$\mathcal{K}: \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{K}(p) = \det(S(p))$, est la courbure gaussienne de M en p

$\mathcal{H}: \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(p) = \frac{1}{2} \text{Tr}(S(p))$, est la courbure moyenne de M en p

dans une base orthonormée de \mathcal{M}_p la matrice de l'opérateur de forme est $S =$

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{K}(p) = k_1 k_2 \text{ et } \mathcal{H}(p) = \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

$\chi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface locale régulière, $\chi(\mathcal{U})_p = \text{Vect}(\{\chi_u, \chi_v\})$,

$\{\chi_u, \chi_v\}$ n'est pas nécessairement une base orthogonale alors $S = \begin{pmatrix} -\frac{fF-eG}{EG-F^2} & -\frac{eF-fE}{EG-F^2} \\ -\frac{gF-fG}{EG-F^2} & -\frac{fF-gE}{EG-F^2} \end{pmatrix}$

$\mathcal{K} (= \mathcal{K} \circ \chi): \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, est la courbure gaussienne de χ en $p = \chi(u, v)$

$$\mathcal{K}(u, v) = \det \begin{pmatrix} -\frac{fF-eG}{EG-F^2} & -\frac{eF-fE}{EG-F^2} \\ -\frac{gF-fG}{EG-F^2} & -\frac{fF-gE}{EG-F^2} \end{pmatrix} = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{(\chi_{uu} \chi_u \chi_v)(\chi_{vv} \chi_u \chi_v) - (\chi_{uv} \chi_u \chi_v)^2}{(\|\chi_u\|^2 \|\chi_v\|^2 - (\langle \chi_u, \chi_v \rangle)^2)^2}$$

$\mathcal{H} (= \mathcal{H} \circ \chi): \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, est la courbure moyenne de χ en $p = \chi(u, v)$, $\mathcal{H}(u, v) =$

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} -\frac{fF-eG}{EG-F^2} & -\frac{eF-fE}{EG-F^2} \\ -\frac{gF-fG}{EG-F^2} & -\frac{fF-gE}{EG-F^2} \end{pmatrix} = \frac{eG-2fF+gE}{2(EG-F^2)} =$$

$$\frac{(\chi_{uu} \chi_u \chi_v) \|\chi_v\|^2 - 2(\chi_{uv} \chi_u \chi_v) \langle \chi_u, \chi_v \rangle + (\chi_{vv} \chi_u \chi_v) \|\chi_u\|^2}{2(\|\chi_u\|^2 \|\chi_v\|^2 - (\langle \chi_u, \chi_v \rangle)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Caractérisation des points sur la surface [1]

$\mathcal{K}(p)$ est positive (i.e. $\text{sign}(k_1) = \text{sign}(k_2)$) $\Rightarrow p$ est un point elliptique

$\mathcal{K}(p)$ est négative (i.e. $\text{sign}(k_1) = -\text{sign}(k_2)$) $\Rightarrow p$ est un point hyperbolique

$\mathcal{K}(p) = 0$ (avec une seule des courbures principales s' annule, $S(p) \neq 0$) $\Rightarrow p$ est un point parabolique

$\mathcal{K}(p) = 0$ (avec les deux courbures principales s' annulent, $S(p) = 0$) $\Rightarrow p$ est un point planaire

Propriétés corrélatives [1]

La définition de la courbure est indépendante du choix de la matrice représentant S même si \mathcal{H} et S dépendent de la normale unitaire U , \mathcal{K} est indépendante de ce choix

une surface minimale dans \mathbb{R}^3 est une surface où \mathcal{H} s'annule identiquement

une surface plane \mathbb{R}^3 est une surface où \mathcal{K} s'annule identiquement

si $\mathcal{K}(p)$ est négative $\Rightarrow \exists 2$ directions asymptotiques en p coupé en deux par les directions principales et sont perpendiculaires $\Leftrightarrow \mathcal{H}(p) = 0$

$$\text{si } f = F = 0 \Rightarrow S = \begin{pmatrix} \frac{e}{E} & 0 \\ 0 & \frac{g}{G} \end{pmatrix} \text{ et } S(\chi_u) = \frac{e}{E} = k_1 \text{ et } S(\chi_v) = \frac{g}{G} = k_2$$

les courbures principales k_1, k_2 sont les valeurs propres de l'opérateur de forme mais aussi les racines de l'équation quadratique $k^2 - 2\mathcal{H}k + \mathcal{K} = 0$

$$\Rightarrow k_1 = \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 - \mathcal{K}} \text{ et } k_2 = \mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}^2 - \mathcal{K}}$$

$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ sont les trois formes fondamentales $\Rightarrow \zeta_3 - 2\mathcal{H}\zeta_2 + \mathcal{K}\zeta_1 = 0$

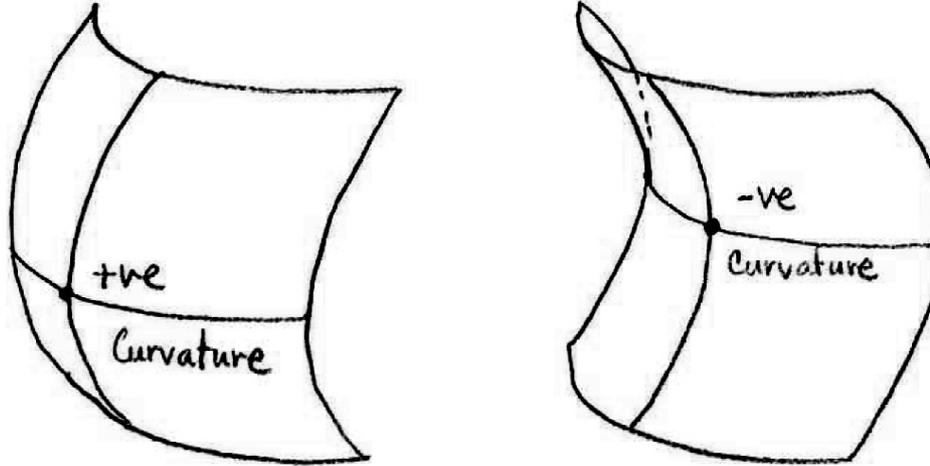
$$\zeta_1: \mathcal{M}_p \times \mathcal{M}_p \rightarrow \mathbb{R}, \zeta_1(v_p, w_p) = \langle v_p, w_p \rangle$$

$$\zeta_2: \mathcal{M}_p \times \mathcal{M}_p \rightarrow \mathbb{R}, \zeta_2(S(v_p), w_p) = \langle S(v_p), w_p \rangle = \langle S(w_p), v_p \rangle$$

$$\zeta_3: \mathcal{M}_p \times \mathcal{M}_p \rightarrow \mathbb{R}, \zeta_3(S(v_p), S(w_p)) = \langle S(v_p), S(w_p) \rangle$$

$$S(v_p) \times S(w_p) = \mathcal{K}(p) v_p \times w_p \text{ et } S(v_p) \times w_p + v_p \times S(w_p) = 2\mathcal{H}(p) v_p \times w_p$$

Avec ces définitions, nous sommes en mesure de calculer les courbures d'une surface paramétriquement définie; maintenant nous allons définir les courbures gaussienne et moyenne d'une surfaces non paramétriques, en plus de la fonction de support.



Représentation de courbure gaussienne positive et négative

Courbures gaussienne et moyennes pour les surfaces non paramétriques [1]

$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ surface régulière, $p \in \mathcal{M}$, $v_p, w_p \in \mathcal{M}_p$

Z champ de vecteurs non nul perpendiculaire à \mathcal{M} ,

V et W champs de vecteurs tangents à \mathcal{M} tels que $V \times W = Z$

$$\implies \mathcal{K} = \frac{\langle Z, D_V Z \times D_W Z \rangle}{\|Z\|^4} \quad \text{et} \quad \mathcal{H} = \frac{\langle -Z, D_V Z \times W + V \times D_W Z \rangle}{2 \|Z\|^3}$$

$$\mathcal{M} = \{p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 \mid g(p) = a_1 p_1^k + a_2 p_2^k + a_3 p_3^k - 1 = 0\} \quad \text{où } a_i \in \mathbb{R}, a_i \neq 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 u_1^{2k-2} + a_2^2 u_2^{2k-2} + a_3^2 u_3^{2k-2}}} \quad \text{est la fonction de support de } \mathcal{M} \quad \text{où } u_i(p) = p_i \text{ pour } i = 1, 2, 3$$

$$\mathcal{K} = \frac{(k-1)^2 a_1 a_2 a_3 (u_1 u_2 u_3)^{k-2}}{(a_1^2 u_1^{2k-2} + a_2^2 u_2^{2k-2} + a_3^2 u_3^{2k-2})^2} = h^4 (k-1)^2 a_1 a_2 a_3 (u_1 u_2 u_3)^{k-2}$$

$$\mathcal{H} = \frac{((k-1)(a_1 a_2 (u_1 u_2)^{k-2} (a_1 u_1^k + a_2 u_2^k) + a_2 a_3 (u_2 u_3)^{k-2} (a_2 u_2^k + a_3 u_3^k) + a_3 a_1 (u_3 u_1)^{k-2} (a_3 u_3^k + a_1 u_1^k)))}{\left(2(a_1^2 u_1^{2k-2} + a_2^2 u_2^{2k-2} + a_3^2 u_3^{2k-2})^{\frac{3}{2}}\right)}$$

6.3.3.9. Conception en utilisant la courbure

Maintenant démontrer le contrôle de la forme en utilisant la quatrième analyse, à savoir en tout point de la surface, nous savons son espace tangent, sa courbure gaussienne et moyenne et avec cette information, nous pouvons concevoir une nouvelle surface comme un champ de vecteurs sur la surface de base qui varient en termes de la courbure.

Quatrième analyse d'une surface régulière

L'équation de la surface de base est donnée par

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\chi_1(u, v) = \frac{3}{2} \left(\cos(u) + \frac{5}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right)^8 \right) \left(2 + \frac{35}{100} \cos\left(\frac{v}{2}\right) \right) \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)^6 + \sin\left(\frac{v}{2}\right) \right)$$

$$\chi_2(u, v) = 3 \sin(u) \left(2 + \frac{35}{100} \cos\left(\frac{v}{2}\right) \right) \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)^6 + \sin\left(\frac{v}{2}\right) \right)$$

$$\chi_3(u, v) = v - \sin(v)$$

$$\chi(u, v) = (\chi_1(u, v), \chi_2(u, v), \chi_3(u, v))$$

l'espace tangent de la surface régulière $\big|_{\chi(u=\frac{\pi}{2}, v=\frac{2\pi}{3})} = \{\chi_U, \chi_V, \chi_N\} \big|_{\chi(u=\frac{\pi}{2}, v=\frac{2\pi}{3})} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.051 \\ 0.659 \\ 0.749 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5.658 \\ 0.750 \\ -0.660 \end{pmatrix} \right\}$

la courbure gaussienne de la surface régulière $\big|_{u=\frac{\pi}{2}, v=\frac{2\pi}{3}} = 0.086$

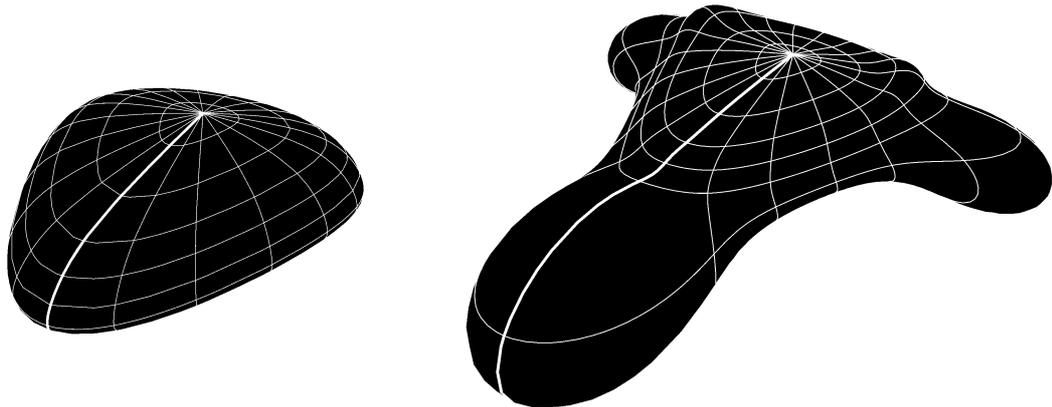
la courbure moyenne de la surface régulière $\big|_{u=\frac{\pi}{2}, v=\frac{2\pi}{3}} = -0.504$

Conception en utilisant quatrième analyse

Le champ de vecteurs normal défini sur cette surface

$$N_{\chi, \lambda} : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad N_{\chi, \lambda}(u, v, t) = \chi(u, v) + t |\lambda(u, v)| \chi_N$$

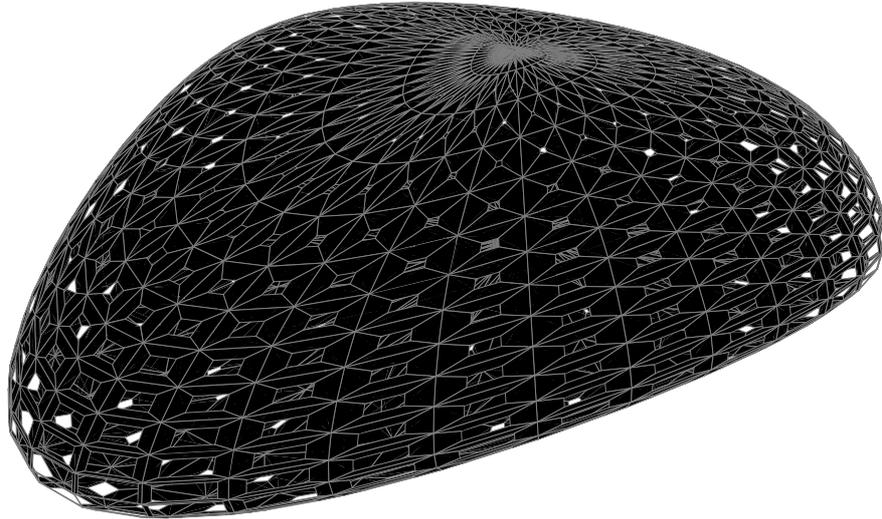
$$\lambda : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda(u, v) = 70 \mathcal{K}(u, v), \quad \text{où } \mathcal{K} \text{ est la courbure gaussienne}$$



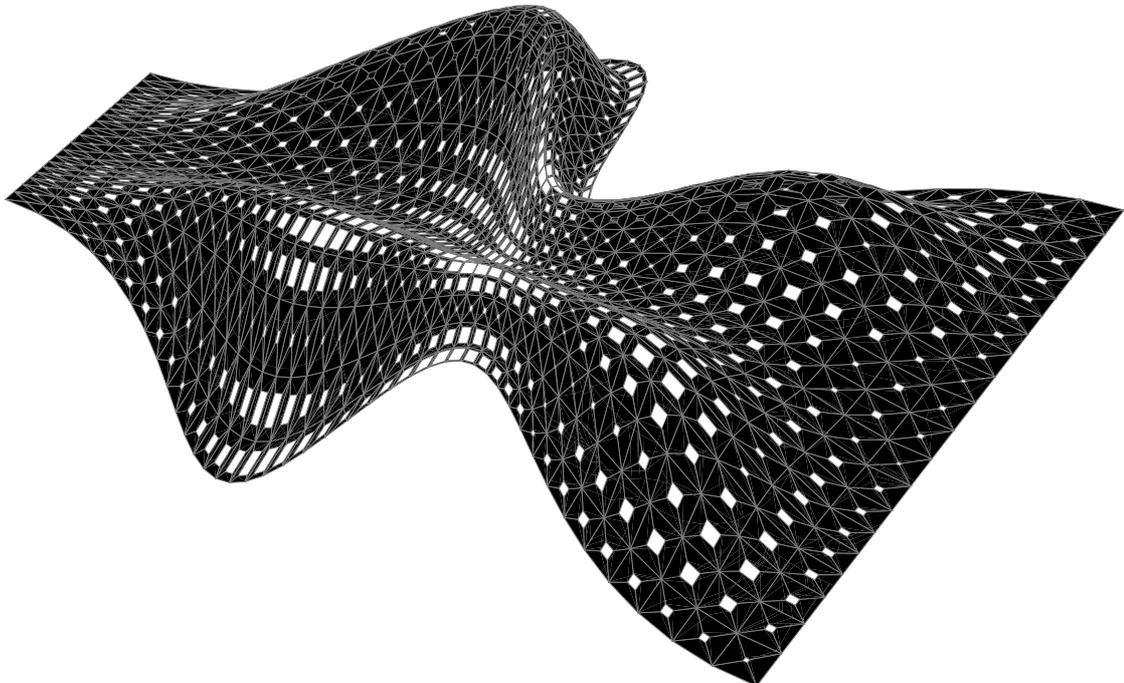
Représentation de l'utilisation de la courbure gaussienne comme une fonction scalaire multipliant la normale

Conception utilisant le courbure gaussienne

Dans l'exemple précédent, nous avons utilisé la courbure gaussienne pour définir une homotopie de la surface par mise à l'échelle le champ de vecteurs normal à une surface de base, maintenant, nous allons l'utiliser pour varier la taille de l'ouverture sur la surface.



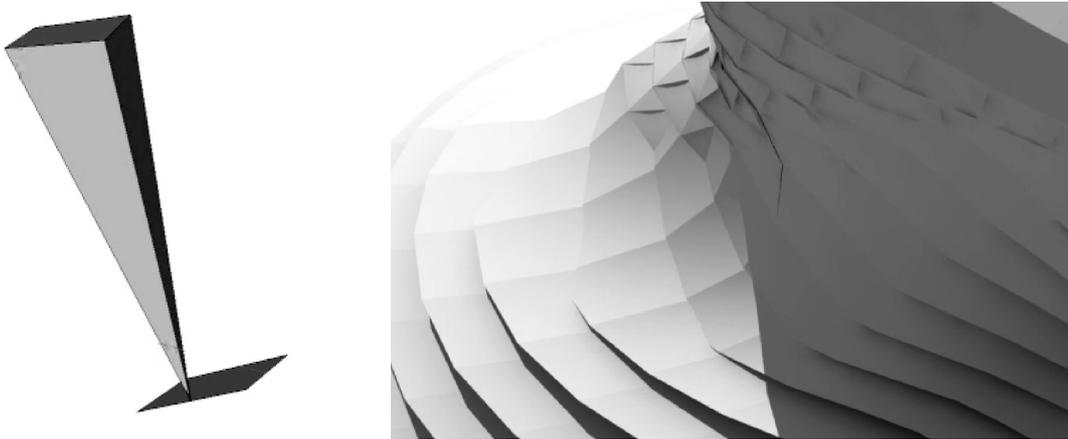
Représentation de la variation de la taille des ouvertures en fonction de la courbure gaussienne



Représentation de la variation de la taille des ouvertures d'une autre surface

Exemples de conception en utilisant la courbure gaussienne

Dans l'exemple suivant, nous allons montrer comment le calcul de la courbure gaussienne d'une surface en des points discrets peut être utilisé comme un paramètre qui varie la forme d'un élément d'architecture répétitive. Ici, ces élément architectural discret est composé d'une pyramide et un quadrilatère, à son extrémité, on va faire varier la hauteur du sommet de la pyramide en fonction de la courbure gaussienne de la surface en ce point. À savoir la hauteur de la pyramide augmente avec l'augmentation de la courbure gaussienne.



Représentation de l'élément architectural répété qui varie en fonction de la courbure gaussienne



Représentation d'une conception architecturale en utilisant la courbure gaussienne

6.3.3.10. Asymptotes dans une surface régulière

Après avoir défini les courbures nous allons maintenant commencer à trouver des formes avec des propriétés particulières par rapport à ces courbures, ce en particulier est très intéressant du point de vue de la conception architecturale. C'est à cause de l'intérêt dans le rapprochement des formes à double courbure en plates formes pour faciliter la fabrication d'où l'importance de l'étude des asymptotiques, surfaces développables et réglées. La première de ces études seraient les surfaces locales asymptotiques et pour cela nous avons besoin de définir les courbes asymptotiques sur une surface régulière (i.e. une courbe sur une surface dont le vecteur vitesse pointe toujours dans une direction asymptotiques), puis nous devons être en mesure de trouver ces asymptotiques sur la surface.

Caractérisation des points et des courbes asymptotiques sur la surface [1]

$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ surface régulière, $p \in \mathcal{M}$

p est un point elliptique $\implies ! \exists$ directions asymptotiques

p est un point hyperbolique $\implies \exists$ deux directions asymptotiques

p est un point parabolique $\implies \exists$ une direction asymptotique

p est un point planaire \implies toutes les directions sont des directions asymptotiques

Courbe asymptotique et la courbure normale [1]

$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ surface régulière, $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe dans $\mathcal{M} \mid \forall t \in (a, b)$,

$k(\alpha'(t)) = 0 \implies \alpha$ est asymptotique

α est asymptotique $\iff \alpha'' \in \mathcal{M}_p$ (comme $k(\alpha') = \langle S(\alpha'), \alpha' \rangle = \langle \alpha'', U \rangle$, $k(\alpha') \|\alpha'\|^2 = 0 \implies \langle \alpha'', U \rangle = 0$)

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface locale régulière,

$\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe dont le tracé se situe sur la trace $\chi(\mathcal{U})$, $\alpha(t) = \chi(u(t), v(t))$

$\forall t \in (a, b)$, $\alpha'(t) = u'(t) \chi_u(u(t), v(t)) + v'(t) \chi_v(u(t), v(t))$ écrit succinctement comme $(\alpha' = u' \chi_u + v' \chi_v)$

$\zeta_1(\alpha', \alpha') = \langle \alpha', \alpha' \rangle = \|\alpha'\|^2 = \|u' \chi_u + v' \chi_v\|^2 = u'^2 E + 2 u' v' F + v'^2 G$ (la première forme fondamentale)

$\zeta_2(\alpha', \alpha') = \langle S(\alpha'), \alpha' \rangle =$

$\langle u' S(\chi_u) + v' S(\chi_v), u' \chi_u + v' \chi_v \rangle = u'^2 e + 2 u' v' f + v'^2 g$ (la deuxième forme fondamentale)

α est asymptotique $\iff k(\alpha') = \frac{\langle S(\alpha'), \alpha' \rangle}{\|\alpha'\|^2} =$

$\frac{\zeta_2(\alpha', \alpha')}{\zeta_1(\alpha', \alpha')} = \frac{u'^2 e + 2 u' v' f + v'^2 g}{u'^2 E + 2 u' v' F + v'^2 G} = 0$ (i.e. α est asymptotique $\iff u'^2 e + 2 u' v' f + v'^2 g = 0$)

$\tilde{e} = \langle \chi_{uu}, \chi_u \times \chi_v \rangle = \det \begin{pmatrix} \chi_{uu} \\ \chi_u \\ \chi_v \end{pmatrix}$, $\tilde{f} = \langle \chi_{uv}, \chi_u \times \chi_v \rangle = \det \begin{pmatrix} \chi_{uv} \\ \chi_u \\ \chi_v \end{pmatrix}$ et $\tilde{g} = \langle \chi_{vv}, \chi_u \times \chi_v \rangle = \det \begin{pmatrix} \chi_{vv} \\ \chi_u \\ \chi_v \end{pmatrix}$

α est asymptotique $\iff u'^2 \tilde{e} + 2 u' v' \tilde{f} + v'^2 \tilde{g} = 0$

\implies nous avons deux familles de solutions $(A u' + B v') = 0$ et $(C u' + D v') = 0$ où A ,

B, C, D sont des fonctions réelles

Propriétés corrélatives [1]

$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ surface régulière, α est une courbe régulière dans \mathcal{M} ,

$\{T, N, B\}$ est le repère de Frenet de α et U est la normale à \mathcal{M}

α est asymptotique sur $\mathcal{M} \iff K(\alpha) = 0$ (i.e. $\langle N, U \rangle = 0$)

α est asymptotique sur \mathcal{M} , $K(\alpha) \neq 0 \implies \mathcal{K} \circ \alpha = -\tau(\alpha)^2$

α est asymptotique sur \mathcal{M} une surface régulière à courbure négative constante $\implies \alpha$ a une torsion constante

surface locale asymptotique sur \mathcal{M} est une surface locale dont $u \mapsto$

$\chi(u, v_0)$ et $v \mapsto \chi(u_0, v)$ courbes de paramètres sont asymptotiques

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surface locale, pour laquelle $f \neq 0 \implies \chi$ est asymptotique $\iff e = 0$ et $g = 0$

Nous allons également donner deux exemples de trouver des courbes asymptotiques des surfaces à courbure négative, nous commençons par trouver les courbes asymptotiques d'une surface réglée (la hyperboloïdes elliptique) en résolvant une équation différentielle $k(\alpha'(t)) = 0$, ensuite nous allons faire la même chose pour une surface non réglée. L'exemple le plus simple de trouver les des courbes asymptotiques d'une surface réglée est le paraboloid hyperbolique, cette surface est en fait une surface locale asymptotiques parce que ses courbes de paramètres sont asymptotiques.

Courbes asymptotiques d'une surface réglée

L'équation de la surface de l'hyperboloïde elliptique est donnée par

$$\chi: \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = (\cos(u) - (v - \pi) \sin(u), \sin(u) + (v - \pi) \cos(u), (v - \pi))$$

l'équation de la courbe plane γ dont la trace se situe dans le domaine

$$(u_0, v_0) \in \mathcal{U}, (u_0, v_0) = \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{6}\right), \gamma: U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (u(t), v(t))$$

l'équation de la courbe asymptotique dans la surface est $\alpha(t) = \chi(u(t), v(t))$

l'équation différentielle $k(\alpha'(t)) = 0$

$$\tilde{e} = -\frac{3}{2}(1 + \pi^2 - 2\pi v + v^2), \tilde{f} = -\frac{3}{2} \text{ et } \tilde{g} = 0$$

$$\Rightarrow \text{l'équation différentielle: } -\frac{3}{2} u' \left((1 + \pi^2 - 2\pi v + v^2) u' + 2v' \right) = 0$$

première solution (supposons $v(t) = t + v_0, v'(t) = 1$)

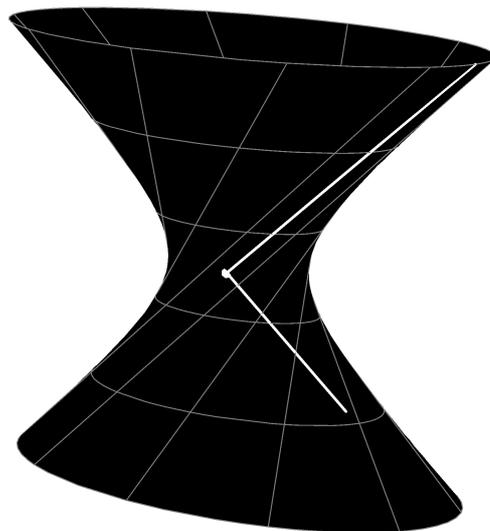
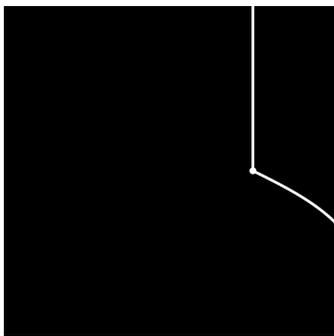
$$u'(t) = 0 \Rightarrow u(t) = u_0 \Rightarrow \gamma(t) = (u_0, t + v_0) \Rightarrow \alpha(t) = \chi(u_0, t + v_0)$$

$$u'(t) = -\frac{2}{1 + \pi^2 - 2\pi t + t^2} \Rightarrow u(t) = \frac{1}{2} (3\pi - 4 \operatorname{ArcTan}(\pi) + 4 \operatorname{ArcTan}(\pi - t))$$

$$\Rightarrow \gamma(t) = (u(t), t + v_0) \Rightarrow \alpha(t) = \chi(u(t), t + v_0)$$

deuxième solution (supposons $u(t) = t + u_0, u'(t) = 1$)

$$v'(t) = \frac{1}{2} (-1 - \pi^2 + 2\pi v(t) - v(t)^2) \Rightarrow v(t) = \pi - \operatorname{Tan}\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow \gamma(t) = (t + u_0, v(t)) \Rightarrow \alpha(t) = \chi(t + u_0, v(t))$$



Représentation des courbes asymptotiques d'une surface réglée

Maintenant on va donner un autre exemple de courbe asymptotiques qui n'est pas une ligne droite en utilisant une surface non réglée comme notre surface de base.

Courbes asymptotiques d'une surface non réglée

L'équation de la surface de base est donnée par

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = ((1 + (v - \pi)^2) \cos(u), (1 + (v - \pi)^2) \sin(u), 3(v - \pi))$$

l'équation de la courbe plane γ dont la trace se situe dans le domaine

$$(u_0, v_0) \in \mathcal{U}, (u_0, v_0) = \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{6}\right), \gamma : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (u(t), v(t))$$

l'équation de la courbe asymptotique dans la surface est $\alpha(t) = \chi(u(t), v(t))$

l'équation différentielle $k(\alpha'(t)) = 0$

$$\tilde{e} = -3(1 + \pi^2 - 2\pi v + v^2)^2, \tilde{f} = 0 \text{ et } \tilde{g} = 6(1 + \pi^2 - 2\pi v + v^2)$$

$$\implies \text{l'équation différentielle : } -3(1 + \pi^2 - 2\pi v + v^2)((1 + \pi^2 - 2\pi v + v^2)(u')^2 - 2(v')^2) = 0$$

première solution (supposons $v(t) = t + v_0, v'(t) = 1$)

$$u'(t) = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \pi^2 - 2\pi t + t^2}}$$

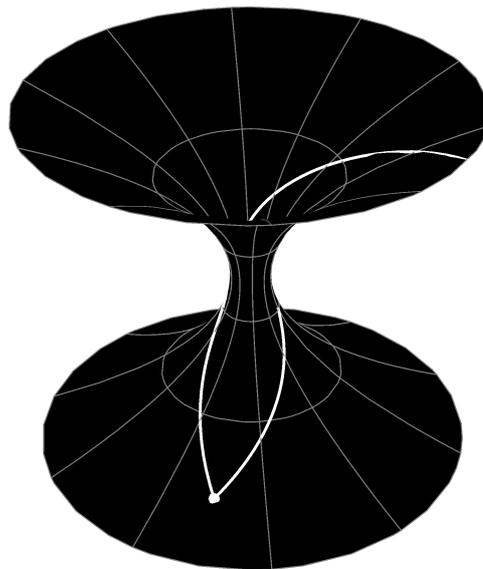
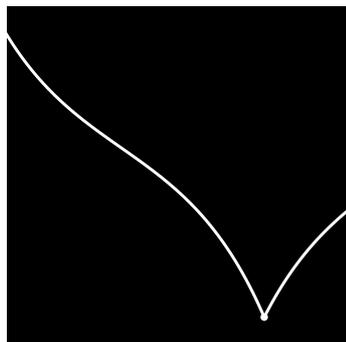
$$\implies u(t) = \frac{1}{2} (3\pi \pm 2\sqrt{2} \operatorname{ArcSinh}(\pi) \mp 2\sqrt{2} \operatorname{ArcSinh}(\pi - t))$$

$$\implies \gamma(t) = (u(t), t + v_0) \implies \alpha(t) = \chi(u(t), t + v_0)$$

deuxième solution (supposons $u(t) = t + u_0, u'(t) = 1$)

$$v'(t) = \pm \frac{\sqrt{1 + \pi^2 - 2\pi v(t) + v(t)^2}}{\sqrt{2}} \implies v(t) = \pi - \operatorname{Sinh}\left(\frac{1}{2} (\mp\sqrt{2} t + 2 \operatorname{ArcSinh}\left(\frac{5\pi}{6}\right))\right)$$

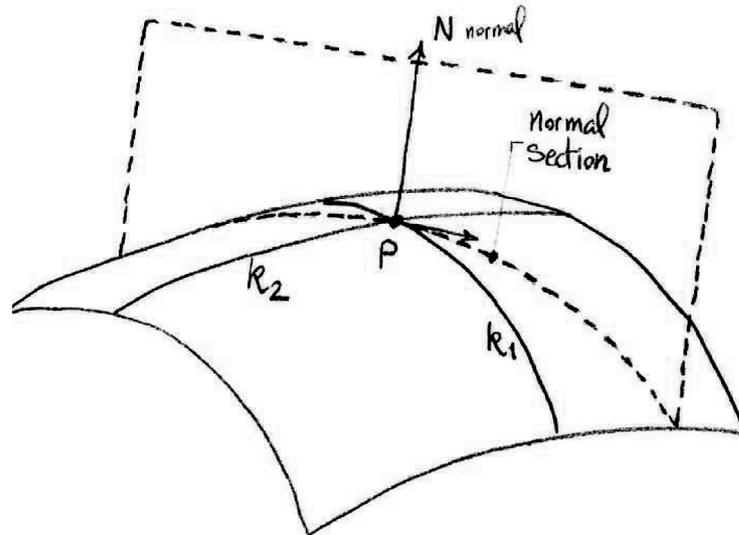
$$\implies \gamma(t) = (t + u_0, v(t)) \implies \alpha(t) = \chi(t + u_0, v(t))$$



Représentation des courbes asymptotiques d'une surface non réglée

6.3.3.11. Courbes principales dans une surface régulière

Nous avons déjà mentionné la courbe principale sur une surface comme la courbe dont le vecteur vitesse pointe dans la direction de la courbure principale. Maintenant on va montrer comment les trouver sur une surface donnée. Un système triplement orthogonal des surfaces se compose de trois familles de surfaces tels que chaque membre de chaque famille est orthogonale à chacun des membres des autres familles, ce système permet de connaître des courbes principales, car les surfaces des différentes familles se coupent en des courbes principales.



Représentation des courbes principales et la section normale

Courbes principales [1]

$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière, $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe dans \mathcal{M} ,

$p \in \mathcal{M}$, $v_p \in \mathcal{M}_p$ où $v_p = a \chi_u + b \chi_v$

α est principale $\Leftrightarrow S(\alpha') = k_i \alpha'$ où k_i est une courbure principale de \mathcal{M}

v_p est principale $\Leftrightarrow S(v_p) \times v_p = 0$

v_p est principale $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (fE - eF)a^2 + (gE - eG)ab + (gF - fG)b^2 = 0$

v_p est principale $\Leftrightarrow (fE - eF)u^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)v'^2 = 0$

$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}^3$ surfaces régulières, $\alpha \subset \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ est une courbe,

U_1, U_2 sont les normales unitaires des surfaces, $\langle U_1, U_2 \rangle|_\alpha$ is constant

alors α est principale dans $\mathcal{M}_1 \Leftrightarrow \alpha$ est principale dans \mathcal{M}_2

$\mathcal{M}_\alpha \subset \mathbb{R}^3$ surface de révolution régulière, $\alpha \subset \mathcal{I}$ courbe de profil, $L \subset \mathcal{I}$ est une ligne (l' axe de révolution),

$\Rightarrow \mathcal{I} \cap \mathcal{M}$ courbe méridienne, $L^\perp \cap \mathcal{M}$ courbe parallèle sont à la fois principale

Surface locale principale [1]

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une surface locale principale $\Leftrightarrow u \mapsto \chi(u, v_0)$,

$v \mapsto \chi(u_0, v)$ les courbes de paramètres sont principales

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une surface locale principale $\Leftrightarrow F = f = 0$

Courbes principales de l'hyperboloïde

L'équation de la surface de base est donnée par

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = (\cos(u) - (-\pi + v) \sin(u), (-\pi + v) \cos(u) + \sin(u), -\pi + v)$$

l'équation de la courbe plane γ dont la trace se situe dans le domaine

$$(u_0, v_0) \in \mathcal{U}, (u_0, v_0) = \left(\frac{3}{2}\pi, \pi\right), \gamma : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (u(t), v(t))$$

l'équation de la courbe principale dans la surface est $\alpha(t) = \chi(u(t), v(t))$

$$l' \text{ équation différentielle : } (f E - e F)_{|(u,v)} u'^2 + (g E - e G)_{|(u,v)} u' v' + (g F - f G)_{|(u,v)} v'^2 = 0$$

$$\Rightarrow l' \text{ équation différentielle : } \frac{2v'((1+\pi^2-2\pi v+v^2)u'+v')}{\sqrt{1+2\pi^2-4\pi v+2v^2}} = 0$$

première solution (supposons $v(t) = t, v'(t) = 1$)

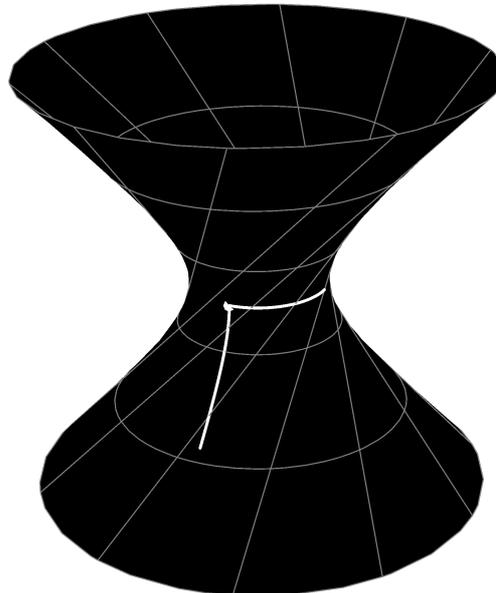
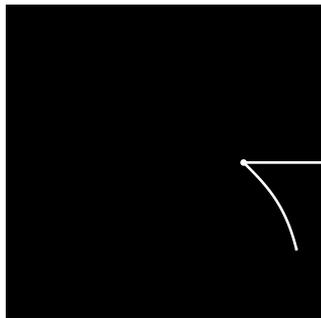
$$u'(t) = \frac{1}{-1-\pi^2+2\pi t-t^2} \Rightarrow u(t) = \frac{1}{2} (3\pi - 2 \operatorname{ArcTan}(\pi) + 2 \operatorname{ArcTan}(\pi - t))$$

$$\Rightarrow \gamma(t) = (u(t), t + v_0) \Rightarrow \alpha(t) = \chi(u(t), t + v_0)$$

deuxième solution (supposons $u(t) = t, u'(t) = 1$)

$$v'(t) = 0 \Rightarrow v(t) = v_0 \Rightarrow \gamma(t) = (t + u_0, v_0) \Rightarrow \alpha(t) = \chi(t + u_0, v_0)$$

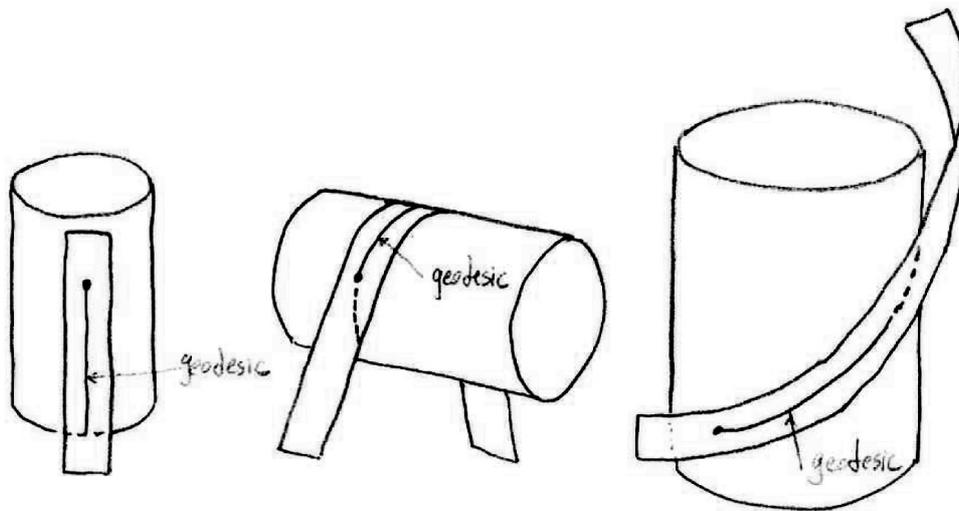
$$v'(t) = -1 - \pi^2 + 2\pi v(t) - v(t)^2 \Rightarrow v(t) = \pi - \operatorname{Tan}(t) \Rightarrow \gamma(t) = (t + u_0, v(t)) \Rightarrow \alpha(t) = \chi(t + u_0, v(t))$$



Représentation des courbes principales d'une surface régulière

6.3.3.12. Courbes géodésiques dans une surface régulière

Grosso modo une géodésique est une courbe dont la longueur est la distance la plus courte entre deux points. Cette notion a un sens non seulement pour les surfaces dans \mathbb{R}^3 ainsi que dans les variétés riemanniennes générales, afin d'étudier les géodésiques nous avons besoin la notion de connexion sur une variété différentiable et en particulier les connexions de Riemann. Comme les surfaces régulières sont variété riemannienne lisses de dimension deux; la connexion que nous allons définir ci-dessous est également une connexion riemannienne. Pour motiver la définition de géodésique considérons d'abord le cas d'une surface \mathcal{M} , soit α une courbe dedans et puisque c'est également une courbe dans \mathbb{R}^n , il y a deux accélérations concurrentes de α , à savoir α'' et $D_{\alpha'} \alpha'$, où D est la connexion riemannienne de \mathcal{M} .



Représentation d'une courbe géodésique sur un cylindre

Courbe géodésique dans une surface régulière [6]

\mathcal{M} une surface régulière, U est le champ de vecteurs normal unitaire,

$I \subset \mathbb{R}$ ouvert, $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$ une courbe dans \mathcal{M} , D est une connexion sur \mathcal{M}

l' accélération de α par rapport à D est le champ de vecteurs $D_{\alpha'} \alpha' : t \mapsto D_{\alpha'(t)} \alpha'(t)$

la composante tangentielle α'' de l' accélération dans \mathbb{R}^n est l' accélération de α par rapport à D

$$D_{\alpha'} \alpha' = \alpha'' - (S(\alpha') \cdot \alpha') U$$

$$\text{si } \forall t \in I, D_{\alpha'(t)} \alpha'(t) = 0$$

\Rightarrow la courbe α est géodésique pour D (la composante tangentielle α'' de l' accélération dans \mathbb{R}^n s'annule)

une droite dans \mathbb{R}^3 qui est contenu dans \mathcal{M} est une géodésique

Equation de la géodésique [6]

$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière, $\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ est un paramétrage de \mathcal{M}

\Rightarrow les géodésiques sur \mathcal{M} sont déterminées par les équations différentielles de deuxième ordre

$$(u'') + \Gamma_{1,1}^1 (u')^2 + 2 \Gamma_{1,2}^1 (u' v') + \Gamma_{2,2}^1 (v')^2 = 0$$

$$(v'') + \Gamma_{1,1}^2 (u')^2 + 2 \Gamma_{1,2}^2 (u' v') + \Gamma_{2,2}^2 (v')^2 = 0$$

Courbe géodésique sur l'hyperboloïde

L'équation de la surface de base est donnée par

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = (\cos(u) - (-\pi + v) \sin(u), (-\pi + v) \cos(u) + \sin(u), -\pi + v)$$

l'équation de la courbe plane γ dont la trace se situe dans le domaine

$$(u_0, v_0) \in \mathcal{U}, (u_0, v_0) = \left(\pi, \frac{2\pi}{3}\right), \gamma : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (u(t), v(t))$$

l'équation de la courbe géodésique dans la surface est $\alpha(t) = \chi(u(t), v(t))$

la direction de la géodésique est donnée par $(u_0', v_0') = (1, 1)$

les équations différentielles

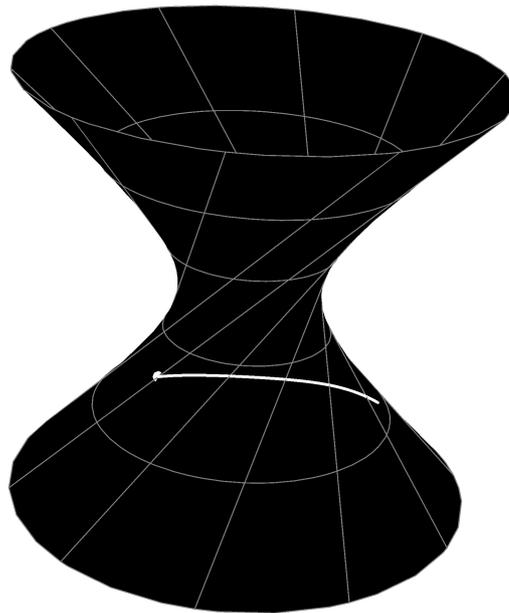
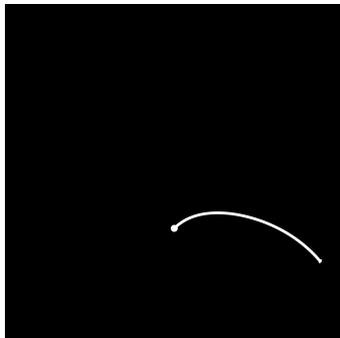
$$(u''') + \Gamma_{1,1|1}^1(u, v)(u')^2 + 2\Gamma_{1,2|1}^1(u, v)(u'v') + \Gamma_{2,2|1}^1(u, v)(v')^2 = 0$$

$$(v''') + \Gamma_{1,1|2}^2(u, v)(u')^2 + 2\Gamma_{1,2|2}^2(u, v)(u'v') + \Gamma_{2,2|2}^2(u, v)(v')^2 = 0$$

\implies les équations différentielles

$$\frac{(-\pi+v)(u')^2 + 4(-\pi+v)u'v' + (1+2\pi^2 - 4\pi v + 2v^2)u''}{1+2\pi^2 - 4\pi v + 2v^2} = 0$$

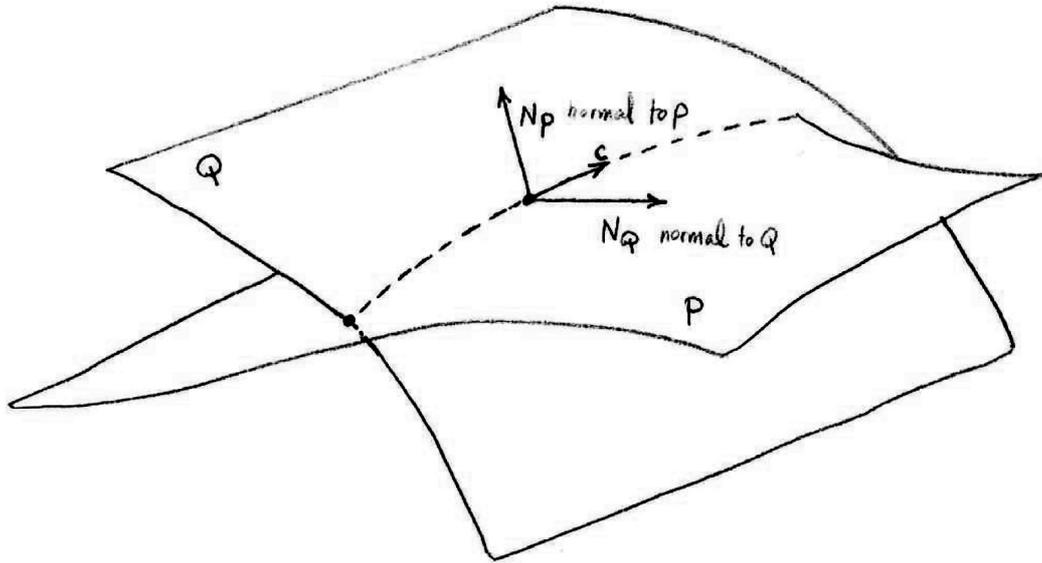
$$\left((\pi + \pi^3 - 3\pi^2 v + 3\pi v^2 - v(1+v^2))(u')^2 + 2(\pi - v)u'v' + (1 + 2\pi^2 - 4\pi v + 2v^2)u'' \right) / (1 + 2\pi^2 - 4\pi v + 2v^2) = 0$$



Représentation de la courbe géodésique sur une surface régulière

6.3.3.13. Courbes d'intersection entre les surfaces régulières

Maintenant, nous allons étudier un autre important outil d'analyse qui peut être utilisé beaucoup dans la conception architecturale; à savoir l'intersection des surfaces.



Représentation d'une intersection de deux surfaces

Courbes d'intersection de deux surfaces régulières [8]

si χ et ω sont des surfaces régulières (surfaces locales injectives régulières),

N_χ et N_ω sont leurs champs de vecteurs normal respectifs

$\Rightarrow c = \frac{N_\chi \times N_\omega}{\|N_\chi \times N_\omega\|}$ est le champ de vecteurs transversal

$$\chi(u, v) = \omega(s, w) \Rightarrow \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ s' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\det(c, \chi_u, N_\chi)}{\langle N_\chi, N_\chi \rangle} \\ \frac{\det(\chi_u, c, N_\chi)}{\langle N_\chi, N_\chi \rangle} \\ \frac{\det(c, \omega_s, N_\omega)}{\langle N_\omega, N_\omega \rangle} \\ \frac{\det(\omega_s, c, N_\omega)}{\langle N_\omega, N_\omega \rangle} \end{pmatrix}, \text{ soit } Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ s(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \text{ et } Y_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ s_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Y'(t) = F(Y(t))$ et $Y(0) = Y_0$

système de équations différentielles ordinaires avec le problème de la valeur initiale

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{ds}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(u(t), v(t), s(t), w(t)) \\ f_2(u(t), v(t), s(t), w(t)) \\ f_3(u(t), v(t), s(t), w(t)) \\ f_4(u(t), v(t), s(t), w(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\det(c(u(t), v(t), s(t), w(t)), \chi_u(u(t), v(t)), N_\chi(u(t), v(t)))}{\langle N_\chi(u(t), v(t)), N_\chi(u(t), v(t)) \rangle} \\ \frac{\det(\chi_u(u(t), v(t)), c(u(t), v(t), s(t), w(t)), N_\chi(u(t), v(t)))}{\langle N_\chi(u(t), v(t)), N_\chi(u(t), v(t)) \rangle} \\ \frac{\det(c(u(t), v(t), s(t), w(t)), \omega_s(s(t), w(t)), N_\omega(s(t), w(t)))}{\langle N_\omega(s(t), w(t)), N_\omega(s(t), w(t)) \rangle} \\ \frac{\det(\omega_s(s(t), w(t)), c(u(t), v(t), s(t), w(t)), N_\omega(s(t), w(t)))}{\langle N_\omega(s(t), w(t)), N_\omega(s(t), w(t)) \rangle} \end{pmatrix}$$

Courbe d'intersection entre une sphère et un tore

Les équations des surfaces de base sont donnés par
 $\chi, \omega : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\chi(u, v) = \left(\sin\left(\frac{v}{2}\right) \cos(u), \sin\left(\frac{v}{2}\right) \sin(u), \cos\left(\frac{v}{2}\right) \right)$$

$$\omega(s, w) = \left(\cos(s) \left(1 + \frac{\cos(w)}{2} \right) + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2} \right), \left(1 + \frac{\cos(w)}{2} \right) \sin(s), \frac{\sin(w)}{2} \right)$$

nous devons trouver le point de départ de la courbe d' intersection *i.e.* $q_1 = (u_0, v_0)$ et $q_2 = (s_0, w_0) \mid \chi(u_0, v_0) = \omega(s_0, w_0)$

si $u_0 = 0$ et $s_0 = \pi \implies$ les courbes de paramètres $\chi(u_0, v)$ et $\omega(s_0, w)$ se coupent en hauteur = $\frac{1}{2}$

en utilisant des fonctions inverses nous sommes en mesure de trouver v_0 et w_0

$$Y'(t) = F(Y(t)) \text{ et } Y(0) = Y_0 \implies Y(t) = (u(t), v(t), s(t), w(t))$$

les équations des des courbes planes γ et β dont les traces se situe dans les domaines $\mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

$$(u_0, v_0) \in \mathcal{U}, (u_0, v_0) = (0, 2.0944), \gamma : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (u(t), v(t))$$

$$(s_0, w_0) \in \mathcal{U}, (s_0, w_0) = \left(\pi, \frac{\pi}{2} \right), \beta : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \beta(t) = (u(t), v(t))$$

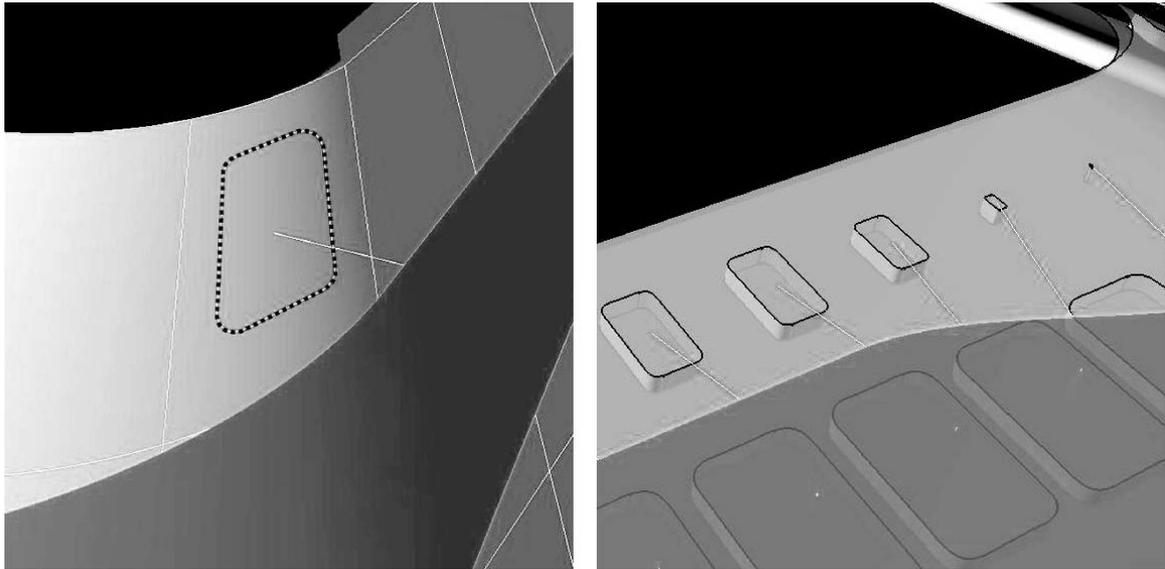
les équations de la courbe d'intersection de la surface sont $\alpha(t) = \chi(u(t), v(t)) = \omega(s(t), w(t))$



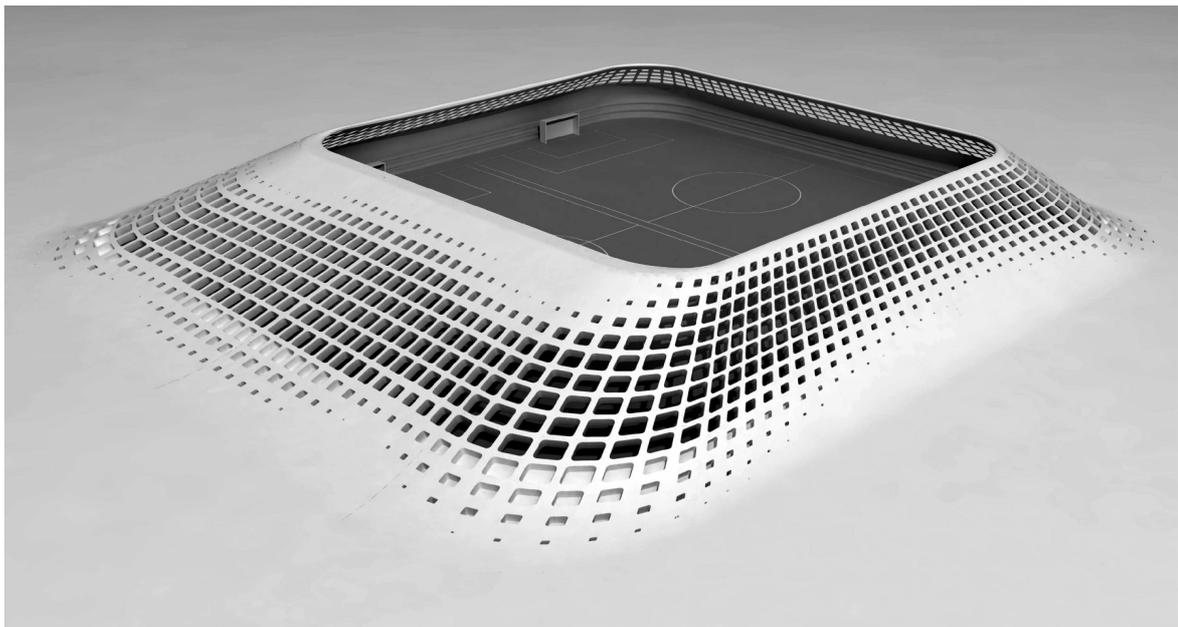
Représentation de la courbe d'intersection de deux surfaces régulières

6.3.3.14. Conception en utilisant l'intersection entre les surfaces régulières

Maintenant que nous avons défini l'intersection de surfaces paramétriques, nous allons montrer comment ces intersections peuvent être utiles du point de vue de la conception architecturale. Dans cet exemple, on montre que la forme des ouvertures dans la peau d'un bâtiment peut être déterminée par la courbe résultant de l'intersection d'une surface cylindrique avec la surface principale de la forme. Cette surface cylindrique est réalisée en extrudant une courbe dans l'espace tangent à la surface principale en un point donné le long de la normale en ce point; outre on peut faire varier le rayon de la base du cylindre en le définissant comme une fonction de la distance entre le point donné et un autre objet.



Représentation d'une courbe d'intersection comme le contour de la forme de l'ouverture et ses variations

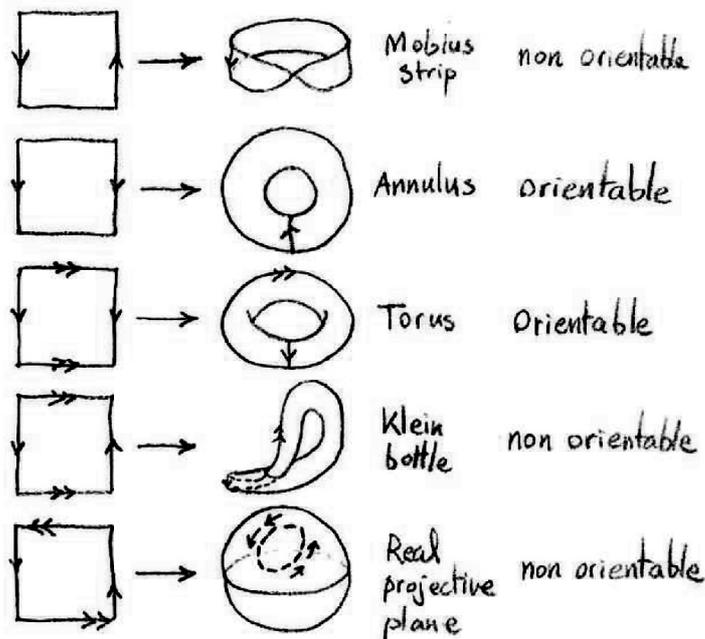


Représentation des ouvertures dans la peau du bâtiment basées sur des courbes d'intersection

6.3.4. Surfaces spéciales

6.3.4.1. Surfaces non orientables

Maintenant, nous allons définir une famille importante des surfaces ce sont les surfaces non orientables.



Représentation des surfaces non orientables

Orientation d'un espace vectoriel [3]

E espace vectoriel | $\dim E < \infty$, E a deux classes d'équivalence d'orientation sur ses bases

$B, B' \in \{\text{bases de } E\}$, B équivalente à $B' \iff \det M_B^{B'} > 0$, où $M_B^{B'}$ est la matrice de changement de base

\mathbb{R}^n admet une orientation canonique avec la base canonique, qui est dans le sens direct

$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ difféomorphisme, f préserve l'orientation si $\det \text{Jac}_x f > 0$, pour $x \in U$

Orientation d'une variété [3]

M variété différentiable, $\{(U_i, \varphi_i)\}$ atlas de M est orientable si

$\forall i, j \det \text{Jac}_x \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} > 0$, pour $x \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$

M variété différentiable est orientable si son atlas maximal est orientable

$(O_p)_{p \in M}$ famille d'orientations de l'espace tangent M_p , O_p est continue si

$\forall p \in U_i, d_p \varphi_i : M_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ préserve l'orientation

M variété différentiable est orientable $\iff (O_p)_{p \in M}$ est une famille continue

Orientation des surfaces régulières [1]

$M \subset \mathbb{R}^3$ surface régulière, M est orientable $\iff \exists$ une application continue $U : M \rightarrow M_p^\perp, p \mapsto U(p)$

où $U(p)$ est un vecteur normal unitaire à M en point p

si M est la trace d'une surface locale injective régulière $\implies M$ est orientable

si M est une surface orientable connexe

$\implies M$ a exactement deux vecteurs normal unitaires définis globalement

Ruban de Möbius et la bouteille de Klein [3]

M le ruban de Möbius est construit comme le quotient $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}$ par l' action de groupe

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (k, (u, v)) = k.(u, v) = (u + k, (-1)^k v)$$

K la bouteille de Klein est construit comme le quotient de $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ par l' action de groupe

$$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, ((k, l), (u, v)) = (k, l).(u, v) = (u + k, (-1)^k v + l)$$

nous pouvons construire un plongement du ruban de Möbius et une immersion de la bouteille de Klein dans \mathbb{R}^3 by the parametrizations

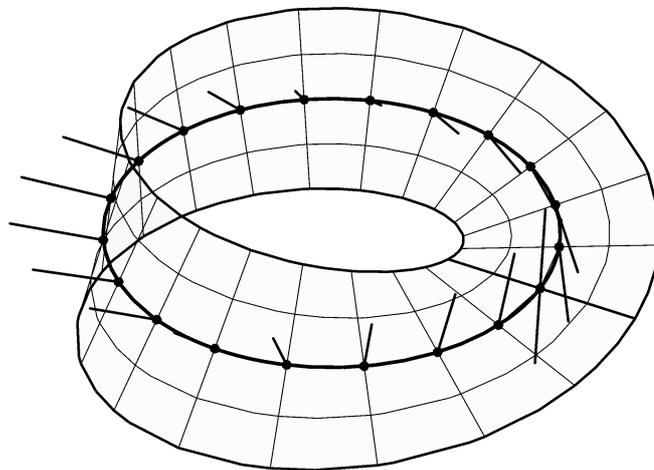
$$\chi_M : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\chi_M(u, v) = \left((1 + 2\pi + (v - \pi) \cos\left(\frac{u}{2}\right)) \cos(u), (1 + 2\pi + (v - \pi) \cos\left(\frac{u}{2}\right)) \sin(u), (v - \pi) \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right)$$

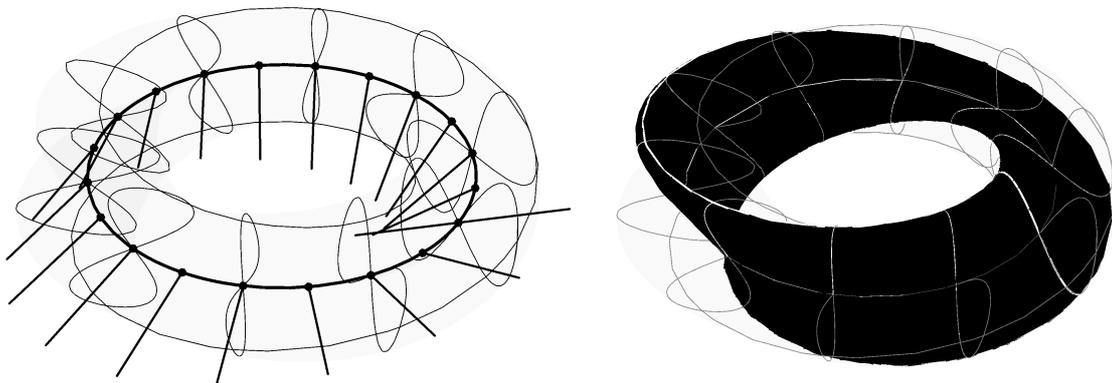
$$\chi_K : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\chi_K(u, v) = \left(\cos(u) \left(\pi - \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(v) - \sin\left(\frac{u}{2}\right) \sin(2(v - \pi)) \right), \right.$$

$$\left. \sin(u) \left(\pi - \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(v) - \sin\left(\frac{u}{2}\right) \sin(2(v - \pi)) \right), -\cos(v) \sin\left(\frac{u}{2}\right) + \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(2(v - \pi)) \right)$$



Représentation du ruban de Möbius montrant la famille non continue d'orientations $(O_p)_{p \in M}$



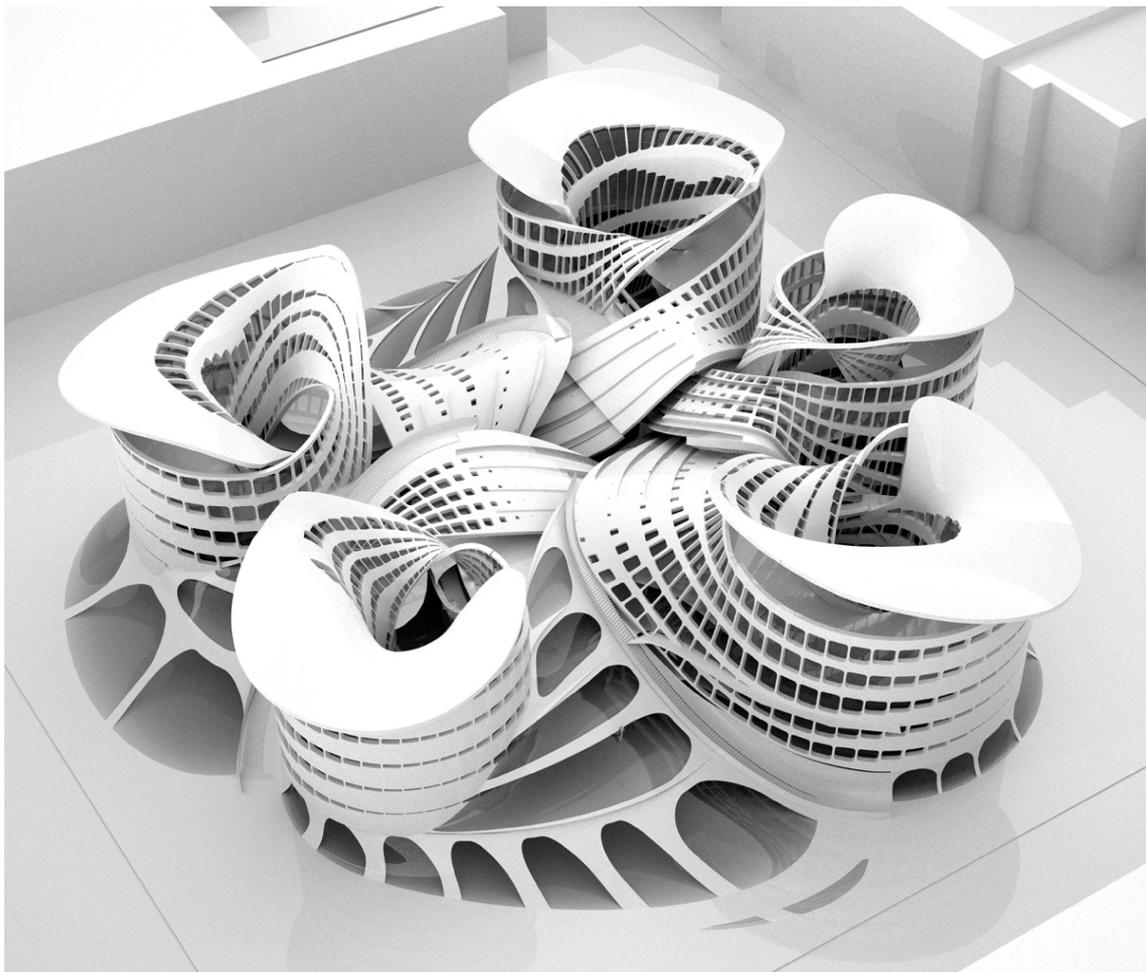
Représentation de la bouteille de Klein montrant son non orientabilité et un ruban de Möbius dedans

6.3.4.2. Conception en utilisant des surfaces non orientables

Maintenant, nous allons montrer un exemple d'une conception architecturale basée sur une surface non orientable. Dans cet exemple, nous allons utiliser le plongement du ruban de Möbius dans \mathbb{R}^3 , cela peut entraîner dans de nombreuses applications architecturales. À savoir que la distinction entre l'extérieur et l'intérieur du bâtiment n'est plus là, qui donne lieu à un jeu beaucoup plus riche entre le sentiment d'être à l'intérieur ou à l'extérieur.



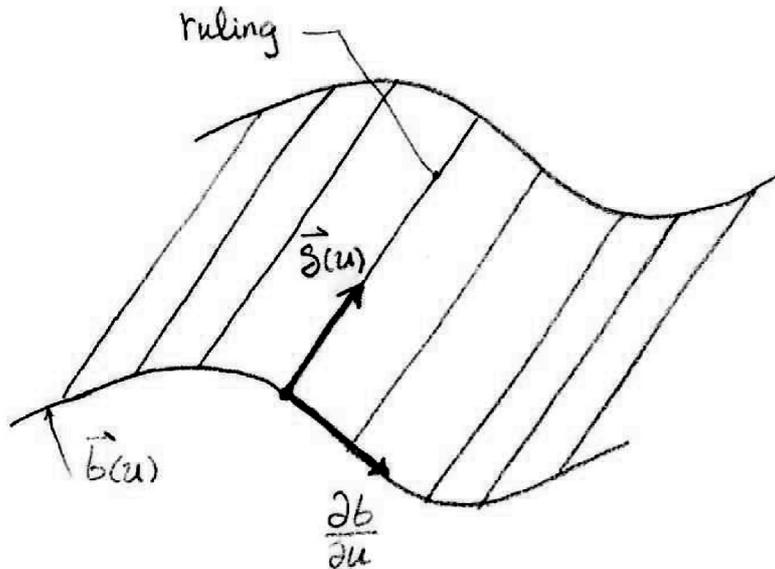
Représentation de la conception d'un ruban de Möbius plié plusieurs fois sur lui-même



Représentation d'une conception architecturale utilisant le ruban de Möbius

6.3.4.3. Surfaces réglées et développables

Avec ces définitions des courbes asymptotiques nous allons maintenant définir les surfaces réglées et développables, comme nous l'avons mentionné plus tôt, ils sont d'une importance particulière pour la conception architecturale parce qu'elles contiennent des lignes droites qui rend la réalisation de ces formes plus facile. Par exemple, la tangente développable à une hélice peut être construit à partir d'une feuille de papier en découpant un disque et tournant la partie restante autour d'un cylindre.



Représentation de la construction d'une surfaces réglée

Surfaces réglée [1]

$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ surface régulière, $\alpha, \gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec $\alpha' \neq 0$,

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$, $\chi(u, v) = \alpha(u) + v\gamma(u)$ est la paramétrisation de \mathcal{M}

χ est une surface locale réglée,

α est la courbe de base directrice et γ est la courbe génératrice (vecteur directeur)

$v \mapsto \chi(u_0, v) = \alpha(u_0) + v\gamma(u_0)$ sont les lignes droites dirigeantes (*i.e.* des courbes asymptotiques)

\mathcal{M} a deux surfaces locales réglées distinctes sur elle $\implies \mathcal{M}$ est doublement réglées

\mathcal{M} est une surface réglée $\implies \forall p \in \mathcal{M}$, $\mathcal{K}(p)$ la courbure gaussienne est non positives

Il existe deux formes extrêmes des surfaces réglées: les surfaces réglées planes et les surfaces réglées non cylindriques. Les surfaces réglées planes sont celle qui ont une courbure gaussienne nulle (i.e. développables), géométriquement elles sont de trois types, la développable tangente, le cylindre et le cône;

Surfaces réglée plane [1]

\mathcal{M} est une surface réglée, $p, q \in \mathbb{R}^3$, $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$, est la paramétrisation de \mathcal{M}

$\chi(u, v) = \alpha(u) + v \alpha'(u)$ est la développable tangente

$\chi(u, v) = \alpha(u) + v q$ est le cylindre généralisé

$\chi(u, v) = v \alpha(u) + q$ le cône est généralisée

\mathcal{M} est une surface réglées plane $\implies g = 0 \implies f = 0$ et $\forall p \in \mathcal{M}$,

$\mathcal{K}(p) = 0$ la courbure gaussienne est égale à zéro

$\beta : (c, d) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, est une courbe de vitesse unitaire et $\chi(u, v) = \beta(u) + v \beta'(u)$ est la tangente développable

$\implies E = 1 + v^2 K_\beta^2$, $F = 1$ et $G = 1$,

le coefficient de la première forme fondamentale dépend uniquement de la courbure de β

régularité

χ est une développable tangente alors est régulière partout sauf sur α (où α est une courbe régulière, $K(\alpha) \neq 0$)

χ est un cylindre généralisé alors est régulière partout tant que $\alpha' \times q \neq 0$

χ est un cône généralisé alors est régulière partout tant que $v \alpha \times \alpha' \neq 0$

Surfaces réglées non cylindriques [1]

$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ surface régulière, $\alpha, \gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec $\alpha' \neq 0$,

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$, $\chi(u, v) = \alpha(u) + v \gamma(u)$ est la paramétrisation de \mathcal{M}

\mathcal{M} est une surface réglées non cylindrique si $\gamma \times \gamma' \neq 0$ partout sur \mathcal{M}

Courbe de striction [1]

$\tilde{\chi}(u, v) = \alpha(u) + v \gamma(u)$ est une surface réglée non cylindrique

et $\chi(u, v) = \sigma(u) + v \delta(u)$ est un reparamétrage où $\|\delta\| = 1$ et $\langle \sigma', \delta' \rangle = 0$

$\implies \sigma$ est la courbe de striction de $\tilde{\chi}$ (il ne dépend pas du choix de la courbe de base)

$\chi(u, v) =$

$\sigma(u) + v \delta(u)$ est un reparamétrage où $\|\delta\| = 1 \implies \chi$ paramétrisation d' une surface réglées plane telle que

si $\sigma'(u) = 0 \implies \mathcal{M}$ est un cône

si $\delta'(u) = 0 \implies \mathcal{M}$ est un cylindre

si $\sigma', \delta' \neq 0 \implies \mathcal{M}$ est une tangente développable

Paramètre de distribution [1]

$\chi(u, v) = \sigma(u) + v \delta(u)$ est une surface réglée non cylindrique $\implies p = \frac{\langle \sigma', \delta \times \delta' \rangle}{\langle \delta', \delta' \rangle}$ est le paramètre de distribution

$\chi(u, v) = \sigma(u) + v \delta(u)$ est une surface réglée non cylindrique

le long de $v \mapsto v \delta(u)$ la courbure gaussienne $\mathcal{K}(u, v) \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0$

$\mathcal{K}(u, v) = 0 \iff p(u) = 0$

$p(u) \neq 0 \implies \mathcal{K}(u, v)$ est continue et $|\mathcal{K}(u, v)|$ assume son maximum à $v = 0$

χ est une surface réglée $\implies \chi$ est régulière lorsque $v \neq 0$ ou lorsque $v = 0$ et $p(u) \neq 0$

la courbure gaussienne d' une surface réglée est donnée par $\mathcal{K} = \frac{-p(u)}{(p(u)^2 + v^2)^2}$

Surface réglée (développable) [1]

L'équation de la surface réglée développable tangente est donnée par

$$\alpha : U \subset [0, 4\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(u) = (\cos(u), \sin(u), \frac{u}{5})$$

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 4\pi] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\chi(u, v) = \alpha(u) + v \frac{\alpha'(u)}{\|\alpha'(u)\|} = \left(\cos(u) - \frac{3v \sin(u)}{\sqrt{10}}, \frac{3v \cos(u)}{\sqrt{10}} + \sin(u), \frac{u}{3} + \frac{v}{\sqrt{10}} \right)$$

L'équation de la surface réglée cylindre généralisé est donnée par

$$\alpha : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(u) = (2 \cos(u), \sin(2u), 0), q = (1, 0, 1)$$

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = \alpha(u) + v q = (v + 2 \cos(u), \sin(2u), v)$$

L'équation de la surface réglée cône généralisé est donnée par

$$\alpha : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(u) = (2 \cos(u), \sin(2u), -2), q = (0, 0, -1)$$

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = v \alpha(u) + q = (2v \cos(u), v \sin(2u), -1 - 2v)$$

Surface réglée (non cylindrique) [1]

L'équation de la surface hélicoïdale est donnée par

$$\sigma, \delta : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \sigma(u) = (0, 0, u), \delta(u) = (\cos(u), \sin(u), 0),$$

avec $\delta(u) \times \delta'(u) = (0, 0, \cos(u)^2 + \sin(u)^2)$ (i.e. s'annule jamais)

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = \sigma(u) + v \delta(u) = (v \cos(u), v \sin(u), u)$$

$\sigma'(u) = (0, 0, 1), \delta'(u) = (-\sin(u), \cos(u), 0)$ et $\langle \sigma'(u), \delta'(u) \rangle = 0 \implies \sigma$ est la courbe de striction

$$p(u) = \frac{\langle \sigma'(u), \delta(u) \times \delta'(u) \rangle}{\langle \delta'(u), \delta'(u) \rangle} = \frac{\cos(u)^2 + \sin(u)^2}{1} = 1 \text{ est le paramètre de distribution}$$

L'équation de la surface de parabolöide hyperbolique est donné par

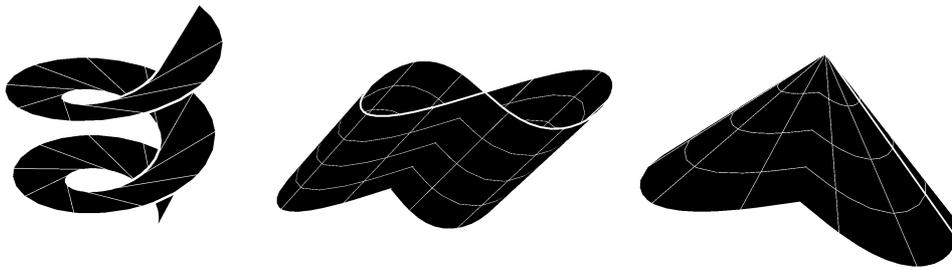
$$\sigma, \delta : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \sigma(u) = (u, 0, 0), \delta(u) = (0, 1, u),$$

with $\delta(u) \times \delta'(u) = (1, 0, 0)$ (i.e. never vanishes)

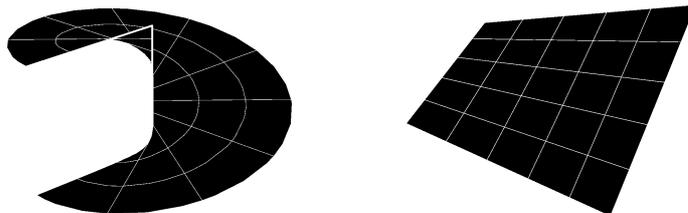
$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \chi(u, v) = \sigma(u) + v \delta(u) = (u, v, uv)$$

$\sigma'(u) = (1, 0, 0), \delta'(u) = (0, 0, 1)$ et $\langle \sigma'(u), \delta'(u) \rangle = 0 \implies \sigma$ est la courbe de striction

$$p(u) = \frac{\langle \sigma'(u), \delta(u) \times \delta'(u) \rangle}{\langle \delta'(u), \delta'(u) \rangle} = \frac{1}{1} = 1 \text{ est le paramètre de distribution}$$



Représentation des surfaces réglées planes (développables)



Représentation des surfaces réglées non cylindrique

6.3.4.4. Conception en utilisant les surfaces réglées

Après notre étude de surfaces réglées, nous allons montrer un projet de conception architecturale où ces méthodes ont été utilisées pour concevoir la forme.

Conception en utilisant les surfaces réglées (homotopies sur un courbes régulières)

Les équations des courbes

$$\alpha : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(u) = \left(\left(4 \cos(u) - \frac{3}{10} \cos(4u)\right), \left(4 \sin(u) - \frac{3}{10} \sin(4u)\right), 4 \right)$$

$$\gamma : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(u) = (12 \cos(u), 12 \sin(u), 0)$$

$$\Delta : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \Delta(u) = (3 \cos(u), 3 \sin(u), 0)$$

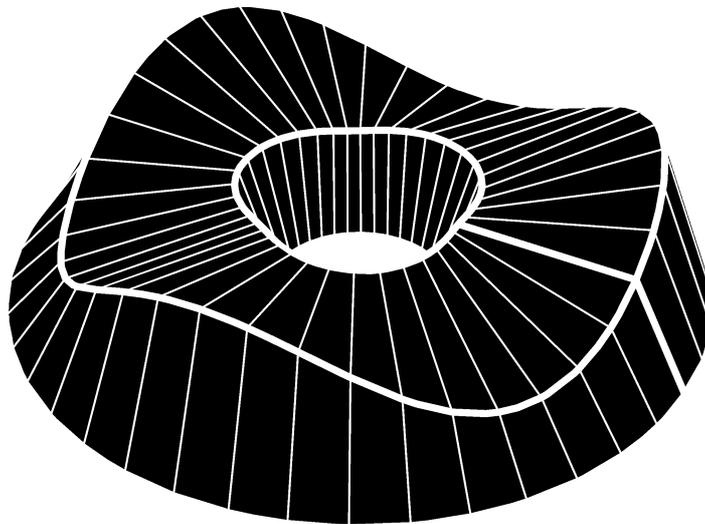
$$\beta : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \beta(u) = (10 \cos(u), 10 \sin(u), 4 + 2 \sin(3u))$$

Les équations des surfaces

$$\chi_{\alpha\beta} : [0, 2\pi] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \chi_{\alpha\beta}(u, v) = \beta(u) + v(\alpha(u) - \beta(u))$$

$$\chi_{\beta\gamma} : [0, 2\pi] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \chi_{\beta\gamma}(u, v) = \gamma(u) + v(\beta(u) - \gamma(u))$$

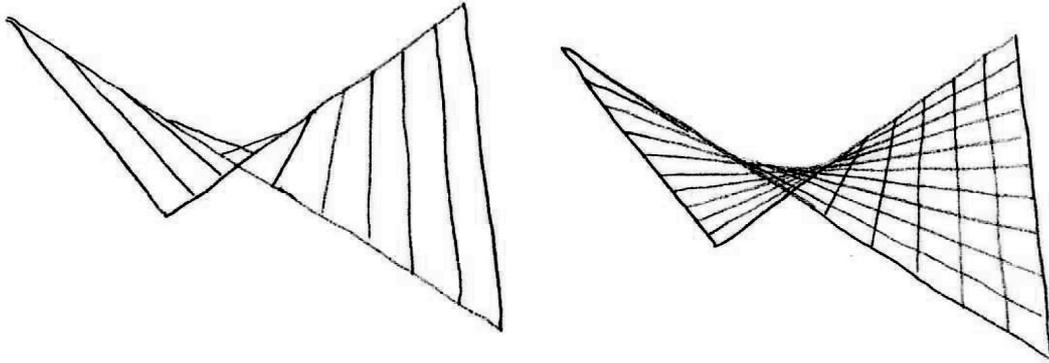
$$\chi_{\alpha\Delta} : [0, 2\pi] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \chi_{\alpha\Delta}(u, v) = \Delta(u) + v(\alpha(u) - \Delta(u))$$



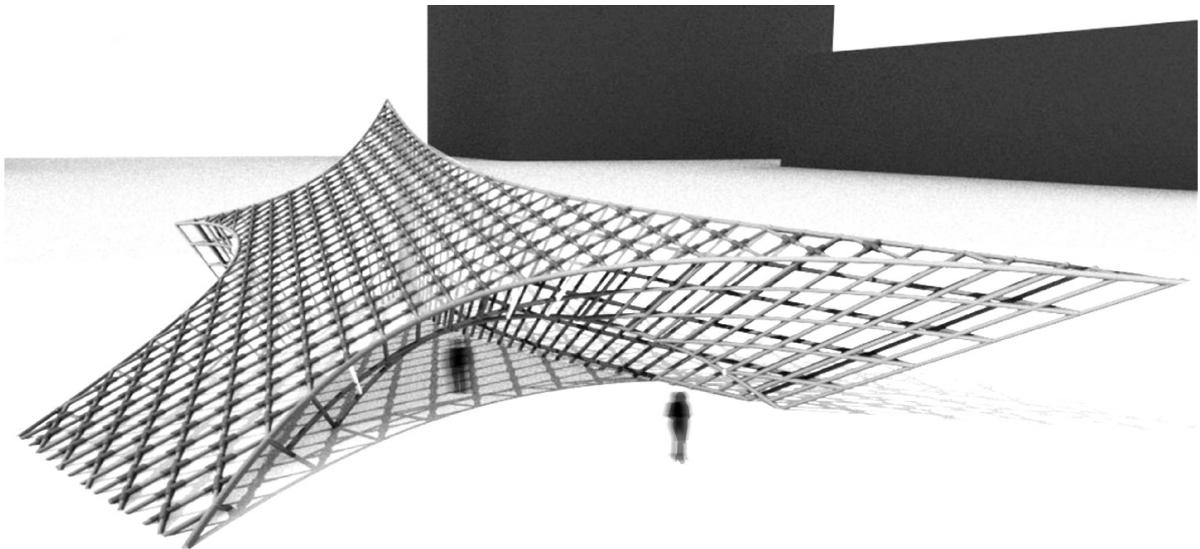
Représentation d'une conception architecturale en utilisant les surfaces réglées

Plus des conceptions architecturales en utilisant surfaces réglées

L'intérêt de l'architecture dans les surfaces réglées en général et les développables (plates), en particulier parce que leur construction peut être réalisée en utilisant des éléments plats (i.e. éléments de courbure gaussienne nulle); qui est bien sûr moins cher et plus facile d'un point de vue pratique.



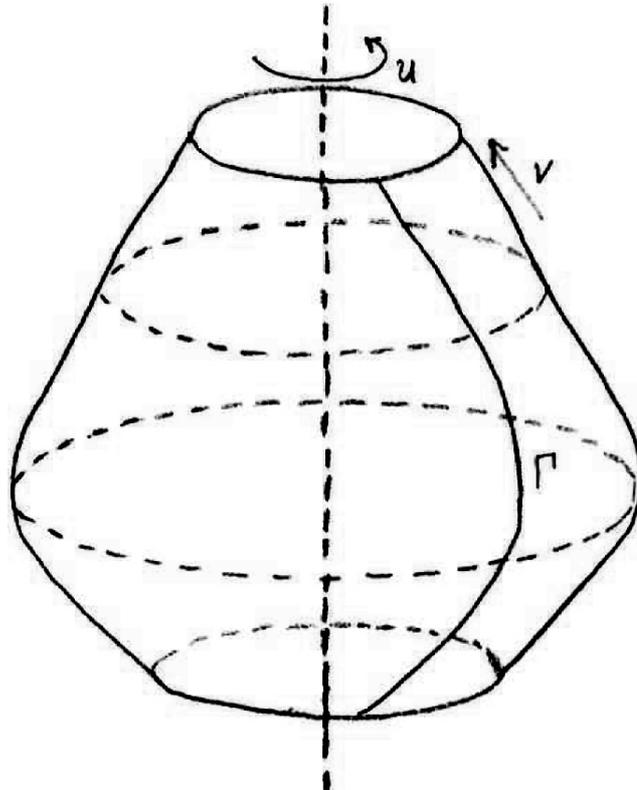
Représentation des dirigeantes de la surface qui devient les éléments structurels



Représentation d'une conception architecturale en utilisant des surfaces réglées

6.3.4.5. Surfaces de révolution

Notre étude des courbes asymptotiques et la définition de comment les trouver nous a conduit à l'étude des surfaces réglées, qui, comme nous l'avons mentionné plus tôt sont d'une grande utilité dans la conception architecturale surtout les développables. De manière similaire, notre étude des courbes principales et la définition analytique de la façon de les trouver nous conduiraient à l'étude des surfaces de révolution, qui sont aussi d'une grande importance dans la conception architecturale pour leur symétrie rotationnelle.



Représentation d'une surface de révolution

Surface de révolution [1]

Π un plan dans \mathbb{R}^3 , $L \subset \Pi$ est une ligne (axe de révolution)

et $C \subset \Pi$ un ensemble de points (courbe de profil) $\implies \mathcal{M}$ est une surface de révolution de C autour de L

Supposons Π est le plan $x - z$ et L est l'axe z et $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow C$,

$\alpha(v) = (\varphi(v), \psi(v))$ est la paramétrisation de C qui est différentiable

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$, $\chi(u, v) = (\varphi(v) \cos(u), \varphi(v) \sin(u), \psi(v))$ est le paramétrage standard de \mathcal{M}

$\Pi \cap \mathcal{M}$ est une courbe méridienne et $L^\perp \cap \mathcal{M}$ est une courbe parallèle

Courbure de la surface de révolution (surface locale principale) [1]

$\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(v) = (\varphi(v), \psi(v))$ est une courbe de profil

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$, $\chi(u, v) = (\varphi(v) \cos(u), \varphi(v) \sin(u), \psi(v))$ est le paramétrage standard de \mathcal{M}

$E, F, G, e, f, g, k_1, k_2, \mathcal{K}, \mathcal{H}$ sont tous constantes le long des parallèles

$$E = \varphi^2, \quad F = 0, \quad G = \varphi'^2 + \psi'^2, \quad e = \frac{-|\varphi| \psi'}{\sqrt{\varphi^2 + \psi'^2}}, \quad f = 0,$$

$$g = \frac{\text{sign}(\varphi) (\varphi'' \psi' - \varphi' \psi'')}{\sqrt{\varphi^2 + \psi'^2}} \quad \text{et} \quad U(u, v) = \frac{\text{sign}(\varphi) (\psi' \cos(u) - \psi'' \sin(u), \varphi')}{\sqrt{\varphi^2 + \psi'^2}}$$

$$k_1 = \frac{e}{E} = \frac{-\psi'}{|\varphi| \sqrt{\varphi^2 + \psi'^2}}, \quad k_2 = \frac{g}{G} = \frac{\text{sign}(\varphi) (\varphi'' \psi' - \varphi' \psi'')}{(\varphi^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \mathcal{K} = \frac{-\psi'^2 \varphi'' + \varphi' \psi' \psi''}{\varphi(\varphi^2 + \psi'^2)^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{H} = \frac{\varphi(\varphi'' \psi' - \varphi' \psi'') - \psi'(\varphi^2 + \psi'^2)}{2|\varphi|(\varphi^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

si $\alpha(v) = (\varphi(v), \psi(v))$ a une vitesse unitaire (i.e. $\forall v \in (a, b), \|\alpha'(v)\| = 1$) alors nous avons

$$E = \varphi^2, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad e = -|\varphi| \psi', \quad f = 0,$$

$$g = \text{sign}(\varphi) (\varphi'' \psi' - \varphi' \psi'') \quad \text{et} \quad U(u, v) = \text{sign}(\varphi) (\psi' \cos(u) - \psi'' \sin(u), \varphi')$$

$$k_1 = \frac{e}{E} = \frac{-\psi'}{|\varphi|}, \quad k_2 = \frac{g}{G} = \text{sign}(\varphi) (\varphi'' \psi' - \varphi' \psi''), \quad \mathcal{K} = \frac{-\varphi''}{\varphi} \quad \text{et} \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\text{sign}(\varphi) (\varphi'' \psi' - \varphi' \psi'') - \frac{\psi'}{|\varphi|} \right)$$

\mathcal{M} surface de révolution qui est minimale $\implies \mathcal{M}$ est contenu dans un plan ou une caténoïde

Surface de révolution [1]

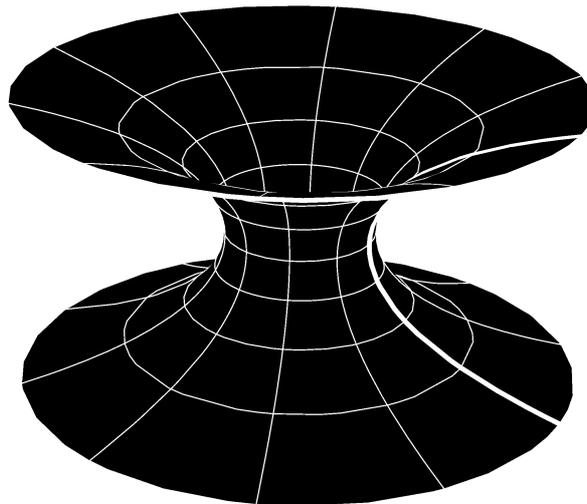
L'équation de la surface caténoïde est donnée par

$$\alpha : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(v) = (\varphi(v), \psi(v)) = (\cosh(v), v)$$

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\chi(u, v) = (\varphi(v) \cos(u), \varphi(v) \sin(u), \psi(v)) = (\cosh(u) \cosh(v), \sin(u) \cosh(v), v)$$

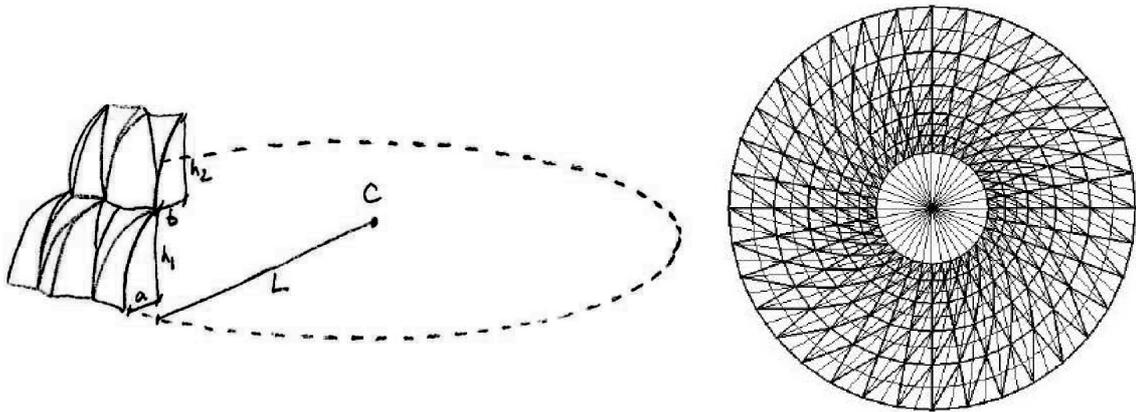
$$k_1 = \frac{e}{E} = -\frac{1}{\cosh^2(v)}, \quad k_2 = \frac{g}{G} = \frac{1}{\cosh^2(v)} \implies \mathcal{H} = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0 \implies \text{la caténoïde est une surface minimale}$$



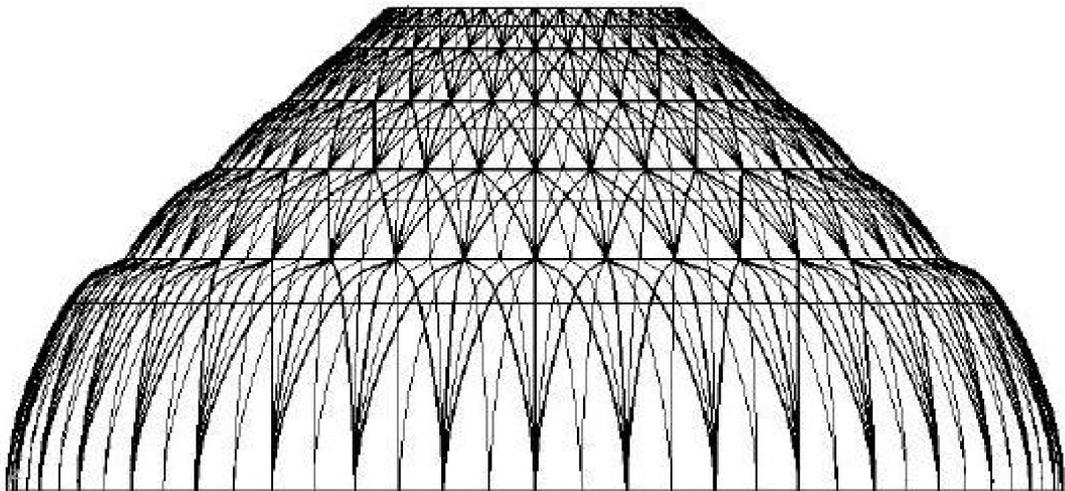
Représentation d'une surface de révolution (caténoïde)

Conception utilisant la surface de révolution

Les surfaces de révolution ont été un outil fondamental de conception en architecture, c'est bien sûr très claire dans la conception des dômes et des coupoles. Dans cet exemple, nous allons montrer la conception d'un dôme à l'aide de la répétition d'un élément profilé le long de la base circulaire et la hauteur de cet élément profilé est en relation avec sa distance par rapport au centre de la base circulaire. Cela signifie qu'il va être identique partout, nous donnant des éléments propres de la surface de révolution.



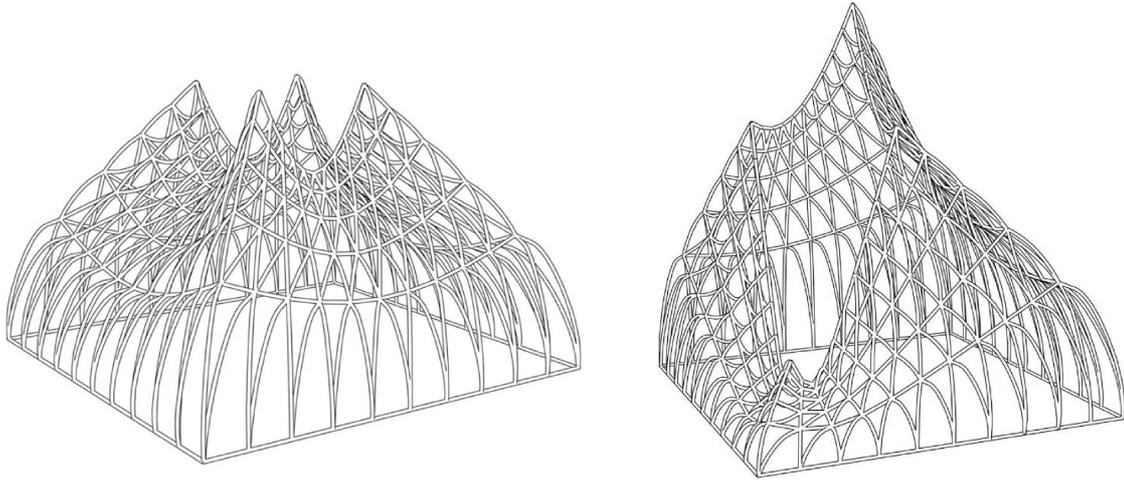
Représentation de la répétition de l'élément profilé le long de la base circulaire



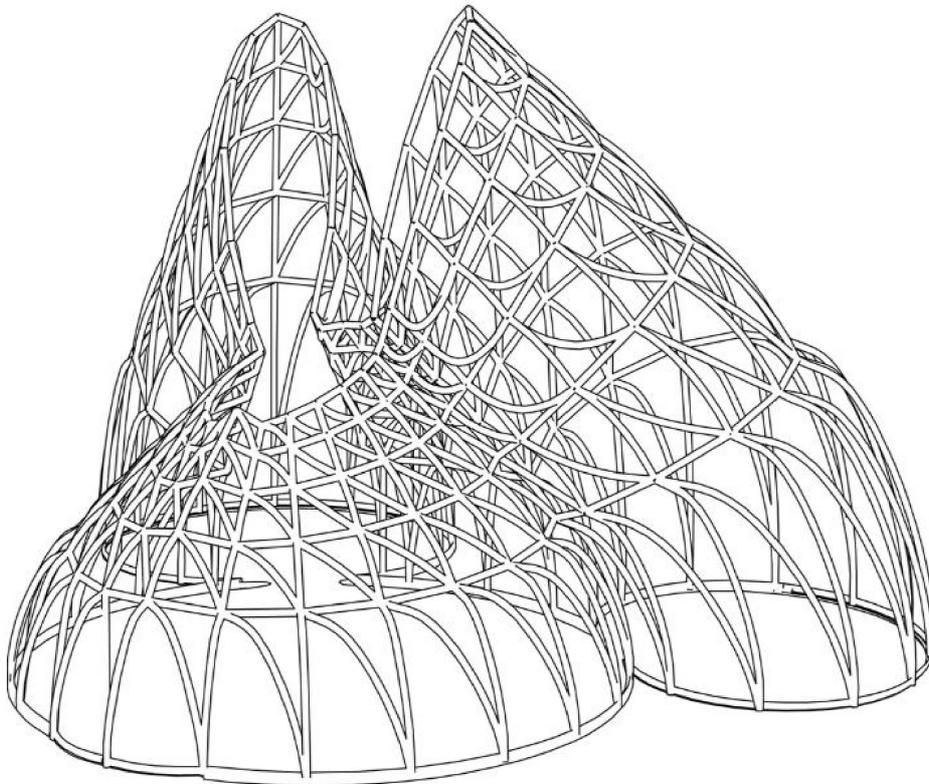
Représentation de la structure en dôme résultante

Plus de conception en utilisant la surface de révolution

Maintenant, on va étendre l'idée de révolution en utilisant différentes formes de la courbe de base autre que le cercle et les différentes positions pour le point central, ce qui conduirait à des éléments de surface non identiques, et ne produirait pas une surface de révolution. Mais l'idée de la construction d'un élément profil le long d'une courbe de base est toujours respectée et les résultats pourraient être intéressants du point de vue architectural.-



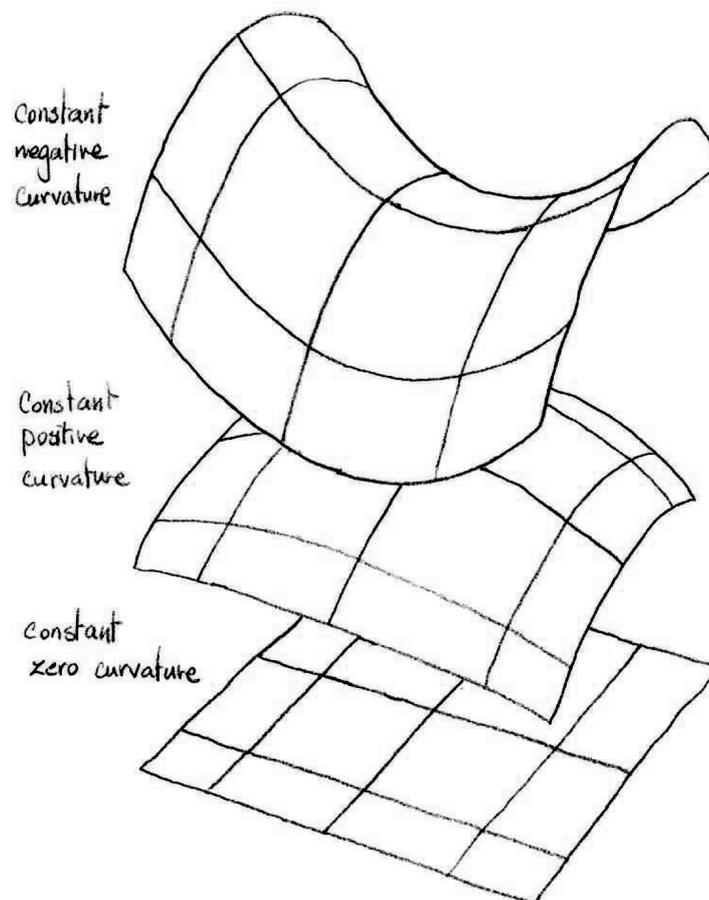
Représentation des composants générés sur une base carré centré et décentré



Représentation des composants générés le long de n'importe quelle forme de la courbe de base

6.3.4.6. Surfaces à courbure constante

Maintenant, nous allons définir les surfaces de révolution à courbure constante abord à courbure positive et ensuite à courbure négative, pour cela nous avons besoin d'utiliser la notion de la fonction elliptique et l'intégrale elliptique. La sphère de rayon a présente une courbure Gaussienne constante positive ($\mathcal{K} = 1/a^2$), Imaginez maintenant prendre la moitié de cette sphère et le plier de différentes manières sans l'étirer, et puisqu'il n'y a pas d'étirement la courbure gaussienne est un invariant isométrique (la sphère complète est cependant rigide). Maintenant, nous essayons de trouver ces surfaces (dans cet exemple, les différentes demi sphères) en trouvant des restrictions sur une paramétrisation χ de \mathcal{M} . L'intérêt de cela d'un point de vue architectural est tout à fait évident, à savoir parce que ce sera un outil de conception très utile de trouver la famille de surfaces qui ont la même aire, mais différentes formes.



Représentation des espaces à deux dimensions de courbures constantes négatifs, positifs et zéro

Elliptic integral [1]

$E(\phi | m) = \int_0^\phi (1 - m \sin^2(\theta))^2 d\theta$ est l'intégrale elliptique du second type,

$E\left(\frac{\pi}{2} | m\right)$ est l'intégrale elliptique complète

$\forall \phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $E(\phi | 1) = \sin(\phi) \implies E(\phi | m)$ est une généralisation de la fonction sin

$-iE(i\phi | -m) = \int_0^\phi (1 - m \sinh^2(\theta))^2 d\theta \implies -iE(i\phi | -m)$ est une généralisation de la fonction sinh

Surfaces de révolution à courbure constante positive [1]

$M \subset \mathbb{R}^3$ surface de révolution, $\forall p \in M$,

$\mathcal{K}(p) = \frac{1}{a^2} \implies M$ est contenue dans une surface \mathcal{M} paramétrée par $\chi(u, v) = (\varphi(v) \cos(u), \varphi(v) \sin(u), \psi(v))$

$\alpha(v) = (\varphi(v), \psi(v))$ courbe de profil, $\varphi(v) = b \cos\left(\frac{v}{a}\right)$, $\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \left(\sin\left(\frac{t}{a}\right)\right)^2} dt = a E\left(\frac{v}{a} \mid \frac{b^2}{a^2}\right)$

$S(a, b)$ est une surface de révolution dont la courbe de profil est α

si $b = a \implies v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $S(a, a)$ est la sphère de rayon a

si $b \in (0, a) \implies v \in [-\infty, \infty]$ et $S(a, b)$ est une broche (surfaces en forme de football)

si $a \in (0, b) \implies v \in \left[-a \operatorname{ArcSin}\left(\frac{a}{b}\right), a \operatorname{ArcSin}\left(\frac{a}{b}\right)\right]$ et $S(a, b)$ est un renflement (surfaces en forme d'un baril)

Surfaces de révolution à courbure négative constante [1]

$M \subset \mathbb{R}^3$ surface de révolution, $\forall p \in M$,

$\mathcal{K}(p) = -\frac{1}{a^2} \implies M$ est contenue dans une surface \mathcal{M} paramétrée par $\chi(u, v) = (\varphi(v) \cos(u), \varphi(v) \sin(u), \psi(v))$

$\alpha(v) = (\varphi(v), \psi(v))$ courbe de profil, qui a trois types

Pseudosphère

$\alpha(v) = \left(a e^{\frac{-v}{a}}, \int_0^v \sqrt{1 - e^{\frac{-2t}{a}}} dt \right)$, $\forall 0 \leq v < \infty$ et $\alpha(v) = \left(a e^{\frac{v}{a}}, \int_0^v \sqrt{1 - e^{\frac{-2t}{a}}} dt \right)$, $\forall -\infty < v \leq 0$

Hyperboloïde

b positive, $v \in \left[-a \operatorname{Sinh}^{-1}\left(\frac{a}{b}\right), a \operatorname{Sinh}^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right] \implies \varphi(v) = b \operatorname{Cosh}\left(\frac{v}{a}\right)$,

$\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \left(\operatorname{Sinh}\left(\frac{t}{a}\right)\right)^2} dt = -i a E\left(\frac{iv}{a} \mid \frac{-b^2}{a^2}\right)$

Conique

$b \in (0, a]$, $v \in \left[-a \operatorname{Sinh}^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right), a \operatorname{Sinh}^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)\right] \implies \varphi(v) = b \operatorname{Sinh}\left(\frac{v}{a}\right)$,

$\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \left(\operatorname{Cosh}\left(\frac{t}{a}\right)\right)^2} dt = -i \sqrt{a^2 - b^2} E\left(\frac{iv}{a} \mid \frac{-b^2}{a^2 - b^2}\right)$

Les trois types de surface de révolution à courbure constante positive

on fixe $a = 1 \implies$ la courbure gaussienne constante = 1

l'équation du type broche $S(1, \frac{2}{3})$ est donnée par

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\chi(u, v) = (\varphi(v) \cos(u), \varphi(v) \sin(u), \psi(v)) = (\frac{2}{3} \cos(u) \cos(v), \frac{2}{3} \sin(u) \cos(v), E(v | \frac{4}{9}))$$

$$\text{son aire } A_{|S(1, \frac{2}{3})}[(0, -\frac{\pi}{2}), (2\pi, \frac{\pi}{2})] = 8.377$$

l'équation du type sphère $S(1, 1)$ est donnée par

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\chi(u, v) = (\varphi(v) \cos(u), \varphi(v) \sin(u), \psi(v)) = (\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), E(v | 1))$$

$$\text{son aire } A_{|S(1,1)}[(0, -\frac{\pi}{2}), (2\pi, \frac{\pi}{2})] = 4\pi$$

l'équation du type renflement $S(1, \frac{3}{2})$ est donnée par

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [-\text{ArcSin}(\frac{2}{3}), \text{ArcSin}(\frac{2}{3})] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\chi(u, v) = (\varphi(v) \cos(u), \varphi(v) \sin(u), \psi(v)) = (\frac{3}{2} \cos(u) \cos(v), \frac{3}{2} \sin(u) \cos(v), \frac{2}{3} E(v | \frac{9}{4}))$$

l'équation du type renflement $S(1, 2)$ est donnée par

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [-\text{ArcSin}(\frac{1}{2}), \text{ArcSin}(\frac{1}{2})] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\chi(u, v) = (\varphi(v) \cos(u), \varphi(v) \sin(u), \psi(v)) = (2 \cos(u) \cos(v), 2 \sin(u) \cos(v), E(v | 4))$$

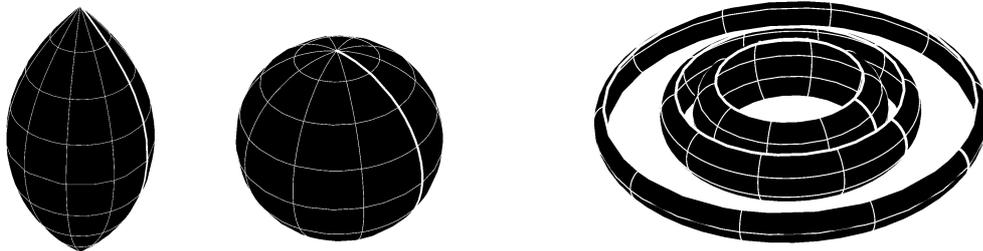
l'équation du type renflement $S(1, 3)$ est donnée par

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [-\text{ArcSin}(\frac{1}{3}), \text{ArcSin}(\frac{1}{3})] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\chi(u, v) = (\varphi(v) \cos(u), \varphi(v) \sin(u), \psi(v)) = (3 \cos(u) \cos(\frac{3v}{2}), 3 \sin(u) \cos(\frac{3v}{2}), E(v | 9))$$

$$\text{leur aires } A_{|S(1, \frac{3}{2})}[(0, -\text{ArcSin}(\frac{2}{3})), (2\pi, \text{ArcSin}(\frac{2}{3}))] =$$

$$A_{|S(1,2)}[(0, -\text{ArcSin}(\frac{1}{2})), (2\pi, \text{ArcSin}(\frac{1}{2}))] = A_{|S(1,3)}[(0, -\text{ArcSin}(\frac{1}{3})), (2\pi, \text{ArcSin}(\frac{1}{3}))] = 4\pi$$



Représentation des trois types de surface de révolution à courbure constante positive

Les trois types de surface de révolution à courbure négative constante

on fixe $a = 1 \implies$ la courbure gaussienne constante $= -1$

the equation of the pseudo sphere type is given by

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\chi(u, v) = (\varphi(v) \cos(u), \varphi(v) \sin(u), \psi(v)) = (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v) + \text{Log}\left(\tan\left(\frac{v}{2}\right)\right))$$

son aire $A[(0, 0), (2\pi, 2\pi)] = 25.132$

the equation of the hyperboloid type is given by

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [-\text{ArcSinh}^{-1}(1), \text{ArcSinh}^{-1}(1)] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\chi(u, v) = (\varphi(v) \cos(u), \varphi(v) \sin(u), \psi(v)) = (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), -i E(i v | -1))$$

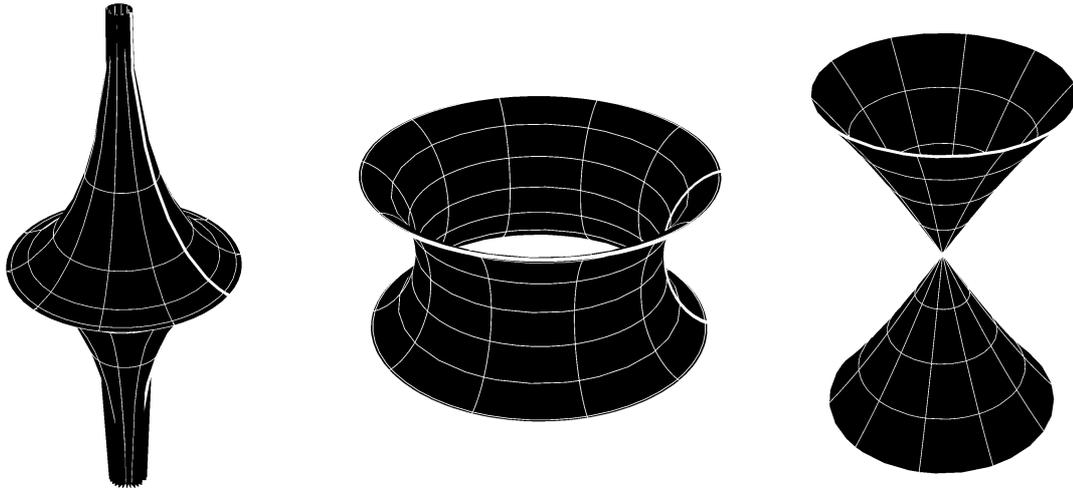
son aire $A[(0, -\text{ArcSinh}^{-1}(1)), (2\pi, \text{ArcSinh}^{-1}(1))] = 17.519$

the equation of the conic type is given by

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [-\text{ArcSin}^{-1}(\sqrt{3}), \text{ArcSin}^{-1}(\sqrt{3})] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\chi(u, v) = (\varphi(v) \cos(u), \varphi(v) \sin(u), \psi(v)) = \left(\frac{1}{2} \cos(u) \sinh(v), \frac{1}{2} \sin(u) \sinh(v), -\frac{i\sqrt{3}}{2} E\left(i v \left| \frac{-1}{2\sqrt{3}} \right. \right) \right)$$

son aire $A[(0, -\text{ArcSin}^{-1}(2)), (2\pi, \text{ArcSin}^{-1}(2))] = 1.91$



Représentation des trois types de surface de révolution à courbure négative constante

6.3.4.7. Surfaces minimales

Dans cette section, nous allons étudier une autre propriété importante d'analyse de surface qui est pratique dans la conception architecturale, à savoir la capacité à trouver la surface minimale dans une famille de surfaces. Une surface minimale est une surface d'aire minimale au sein d'une famille de surfaces, et elle est aussi une surface dont la courbure moyenne est identiquement nulle. Afin de montrer l'équivalence de ces deux définitions, nous devons définir la fonction de la variation normale qui représente la façon dont la surface \mathcal{M} change lorsqu'elle est tirée dans le sens normal, et comment la courbure moyenne est nulle si et seulement si la dérivée première de la fonction de l'aire s'annule.

Domaine borné et région [1]

$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ surface régulière,

$O \subset \mathcal{M}$ est un ouvert connexe (domaine) | $\phi : S^1 \rightarrow \phi(S^1) = \partial O$ la frontière de O ,

ϕ homéomorphisme différentiable

l' application tangente $\phi_* \neq 0$ sauf pour un nombre fini de points, et $\Delta = O \cup \partial O$ est une région de \mathcal{M}

Δ est bornée si $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall p \in \Delta, \|p\| \leq m$

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ est une surface locale régulière, $\Delta \subset \mathcal{M}$ est une région bornée

$A(\Delta) = \int_{\chi^{-1}(\Delta)} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \int_{\chi^{-1}(\Delta)} \|\chi_u \times \chi_v\| \, du \, dv$ est l'aire de Δ

Variation normale et la disparition courbure moyenne [1]

$\chi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une surface locale régulière, $\Omega \subset \mathcal{U}$ est une région bornée,

$h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, $\epsilon > 0$, U est la normale unitaire

$\chi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\chi(t)(u, v) = \chi(u, v) + t h(u, v) U(u, v)$ est la variation normale de χ et Ω

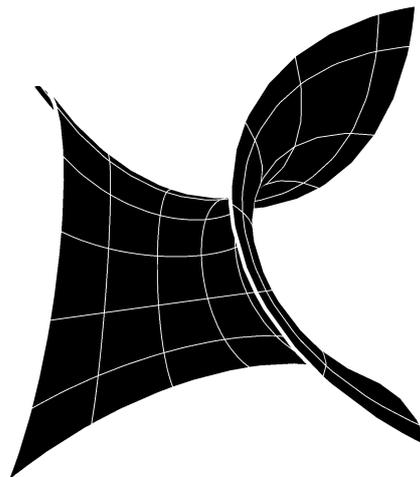
$E(t) = \langle \chi(t)_u, \chi(t)_u \rangle$,

$F(t) = \langle \chi(t)_u, \chi(t)_v \rangle$ et $G(t) = \langle \chi(t)_v, \chi(t)_v \rangle$ | pour ϵ suffisamment petite $E(0) = E$, $F(0) = F$ et $G(0) = G$

$A(t) = \int_{\Omega} \sqrt{E(t)G(t) - F(t)^2} \, du \times dv$ est l'aire de $\chi(t)(u, v)$

$A'(0) = -2 \int_{\Omega} h \mathcal{H} \sqrt{EG - F^2} \, du \times dv$, où \mathcal{H} est la courbure moyenne

χ est minimal sur $\Omega \iff A'(0) = 0$ pour une variation normale de χ et Ω par rapport à toute $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$



Représentation de la surface Enneper (exemple d'une surface minimale)

6.4. Références

- [1] *Modern differential geometry of curves and surfaces*, Alfred Gray, CRC Press, 1993
- [2] *Cours de Calcul différentiel et équations différentielles*, Mireille Chaleyat-Maurel, Université Paris Descartes, Paris, 2011
- [3] *Cours de Géométrie Différentielle*, Laurent Charles, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2012
- [4] *Cours de Géométrie et topologie Différentielles*, Alexandru Oancea, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2013
- [5] *Cours de Théorie des systèmes dynamiques*, Jean-Pierre Francoise, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2012
- [6] *Cours de Géométrie Riemannienne*, Alexandru Oancea, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2013
- [7] *Cours d'Intégration et théorie de la mesure*, Valentine Genon-Catalot, Université Paris Descartes, Paris, 2011
- [8] *Tracing surface intersection with validated ODE system solver*, H.Mukundan, K.H.Ko, T.Maekawa, T.Sakkalis, N.M.Patrikalakis, MIT, Cambridge, 2004

7. Opérations algorithmiques

7.1. Dessin automatisé

Après avoir défini une palette d'opérations (algébrique et analytique), nous allons maintenant définir certaines opérations algorithmiques qui utilisent dans une large mesure à la fois les deux autres opérations. Les opérations algorithmiques sont probablement les plus accessibles pour les architectes car elles sont moins abstraites que les opérations algébriques et analytiques. Dans cette partie de l'étude, nous allons voir quelques applications architecturales des propriétés définies dans les chapitres précédents qui étaient assez abstraites et loin du domaine architectural. Les algorithmes sont rien d'autre que des ensembles d'instructions qui peuvent être exécutées automatiquement et souvent de manière itérative, pour cette raison, ils sont les méthodes utilisées pour accomplir des tâches répétitives avec une grande précision et pour un grand nombre de fois. Les opérations algorithmiques traitent des objets géométriques discrets en utilisant des méthodes computationnelles donc elles sont naturellement liées à des notions de géométrie discrète et combinatoire, ainsi que la géométrie computationnelle. Les géométries discrètes et combinatoires sont des branches de géométrie qui étudient les propriétés combinatoires et des méthodes constructives des objets géométriques discrets, tandis que la géométrie computationnelle est une branche de l'informatique consacrée à l'étude des algorithmes qui peuvent être déclarés en termes de la géométrie. La géométrie computationnelle peut être divisée en géométrie computationnelle combinatoire et numériques; la computationnelle combinatoire est naturellement portée sur l'utilisation des algorithmes pour résoudre des problèmes combinatoires. Alors que la géométrie computationnelle numérique (aussi connue comme la modélisation géométrique) est plus soucieuse de la modélisation et la représentation des courbes et des surfaces en utilisant des méthodes paramétriques telles que splines de Bézier et NURBS. Il existe de nombreuses façons d'appliquer les opérations algorithmiques dans l'architecture, mais nous allons définir deux directions principales que nous allons appeler: le dessin automatisé et la méthode de recherche. Le dessin automatisé est essentiellement d'automatiser le processus de dessin des éléments répétitifs, un exemple classique de cela, sera le dessin de panneaux, fenêtres, poutres, escalier, etc. Cette pratique a connu une croissance très populaire récemment auprès des architectes en raison du développement de logiciels basé sur des scripts qui permet aux architectes de réaliser ces tâches. Dans le dessin automatisé, nous allons utiliser des notions et des techniques de la géométrie combinatoire et computationnelle, par exemple créer des pavages et de trouver le point le plus proche d'un point donné dans un ensemble fini. Mais avant d'entrer dans les techniques combinatoires et computationnelles, nous allons montrer comment créer des surfaces qui peuvent être utilisées comme des éléments architecturaux dans la peau générale défini par la surface principale. Jusqu'ici, nous avons été préoccupés seulement par la création de cette surface principale qui pourrait être comprise comme l'enveloppe du bâtiment, mais bien sûr, la conception architecturale est non seulement la conception de l'enveloppe extérieure, il comprend également la conception de l'organisation interne, par exemple escalier et subdivisions internes. Nous tenons à regrouper ces opérations relatives à l'organisation interne avec les opérations algorithmiques, même si elles ne sont pas entièrement computationnelles, c'est parce qu'ils traitent des surfaces séparées (éléments), par exemple, les niveaux différents de sol ou des étapes dans un escalier. Après ceux-ci nous allons nous concentrer davantage sur les techniques computationnelles et combinatoires à générer des motifs d'objets architecturaux. Dans la deuxième partie de ce chapitre à savoir la méthode de recherche, nous allons explorer les techniques des optimisations et nous aurons un supplément de la biologie de l'évolution afin de nous aider à comprendre les origines de la terminologie dans les algorithmes génétiques. Pour le moment, nous commençons avec le dessin automatisé pour créer des éléments d'organisation interne.

7.1.1. Organisation interne

7.1.1.1. Circulation verticale

La première de ces applications serait la création d'éléments d'organisation interne de base par exemple des connexions verticales comme les escaliers et les séparateurs d'espace comme les surfaces de séparation verticales et horizontales.

L'équation du cylindre de base est donnée par

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \chi(u, v) = \left(\cos(u), \sin(u), \frac{v}{2} \right)$$

$$I_i = \left[(i-1) \left(\frac{2\pi}{2m} \right), (i) \left(\frac{2\pi}{2m} \right) \right], \text{ les intervalles de } i = 1, \dots, 2m, \text{ où } m \text{ est le nombre d'étages}$$

L'équation de la courbe plane par morceaux γ dont la trace se situe dans le domaine ($m = 3$)

$$\text{est donnée par } \gamma : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (u(t), v(t))$$

$$\text{si } t \in I_1, \gamma(t) = \left(t, 2t - \frac{0}{3} 2\pi \right), \text{ si } t \in I_2, \gamma(t) = \left(t, \frac{1}{3} 2\pi \right)$$

$$\text{si } t \in I_3, \gamma(t) = \left(t, 2t - \frac{1}{3} 2\pi \right), \text{ si } t \in I_4, \gamma(t) = \left(t, \frac{2}{3} 2\pi \right)$$

$$\text{si } t \in I_5, \gamma(t) = \left(t, 2t - \frac{2}{3} 2\pi \right), \text{ si } t \in I_6, \gamma(t) = \left(t, \frac{2}{3} 2\pi \right)$$

L'équation de la courbe par morceaux dans le cylindre est $\alpha(t) = \chi(u(t), v(t))$

$$\text{si } t \in I_1, \alpha(t) = \left(\cos(t), \sin(t), \frac{1}{2} \left(2t - \frac{0}{3} 2\pi \right) \right), \text{ si } t \in I_2, \alpha(t) = \left(\cos(t), \sin(t), \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} 2\pi \right) \right)$$

$$\text{si } t \in I_3, \alpha(t) = \left(\cos(t), \sin(t), \frac{1}{2} \left(2t - \frac{1}{3} 2\pi \right) \right), \text{ si } t \in I_4, \alpha(t) = \left(\cos(t), \sin(t), \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} 2\pi \right) \right)$$

$$\text{si } t \in I_5, \alpha(t) = \left(\cos(t), \sin(t), \frac{1}{2} \left(2t - \frac{2}{3} 2\pi \right) \right), \text{ si } t \in I_6, \alpha(t) = \left(\cos(t), \sin(t), \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} 2\pi \right) \right)$$

L'équation de la surface est un escalier $Y(t, u) = \chi(u(t), v(t)) + u |\lambda(t)| \chi_N(u(t), v(t))$

où $\lambda(t) = 1$ est une fonction scalaire et $\chi_N(u(t), v(t))$ est la normale à la surface du cylindre restreinte à α

$$\text{si } t \in I_1, Y(t, u) = \left(\cos(t) (1 + u), \sin(t) (1 + u), \frac{1}{2} \left(2t - \frac{0}{3} 2\pi \right) \right),$$

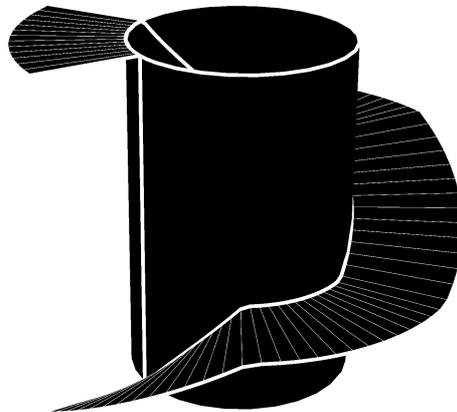
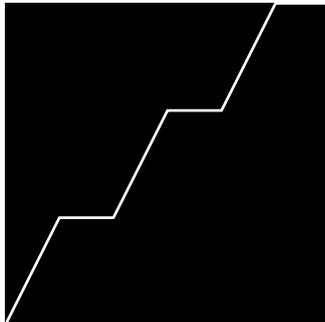
$$\text{si } t \in I_2, Y(t, u) = \left(\cos(t) (1 + u), \sin(t) (1 + u), \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} 2\pi \right) \right)$$

$$\text{si } t \in I_3, Y(t, u) = \left(\cos(t) (1 + u), \sin(t) (1 + u), \frac{1}{2} \left(2t - \frac{1}{3} 2\pi \right) \right),$$

$$\text{si } t \in I_4, Y(t, u) = \left(\cos(t) (1 + u), \sin(t) (1 + u), \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} 2\pi \right) \right)$$

$$\text{si } t \in I_5, Y(t, u) = \left(\cos(t) (1 + u), \sin(t) (1 + u), \frac{1}{2} \left(2t - \frac{2}{3} 2\pi \right) \right),$$

$$\text{si } t \in I_6, Y(t, u) = \left(\cos(t) (1 + u), \sin(t) (1 + u), \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} 2\pi \right) \right)$$



Représentation de l'élément de circulation verticale

7.1.1.2. Séparation et la division de l'espace

Après l'escalier, nous allons définir les murs et les sols qui divisent l'espace interne

l'équation de la surface de base est donnée par

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\chi(u, v) = \left(\frac{3}{2} \left(\cos(u) + \frac{5}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right) \left(2 + \frac{35}{100} \cos\left(\frac{v}{2}\right) \right) \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)^6 + \sin\left(\frac{v}{2}\right) \right), \right. \\ \left. 3 \sin(u) \left(2 + \frac{35}{100} \cos\left(\frac{v}{2}\right) \right) \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)^6 + \sin\left(\frac{v}{2}\right) \right), v - \sin(v) \right)$$

les points dans le domaine $\mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

$$q_1 = \left(0, \frac{3\pi}{5} \right), q_2 = \left(0, \frac{11\pi}{10} \right), q_3 = \left(\pi, \frac{3\pi}{5} \right), q_4 = \left(\pi, \frac{11\pi}{10} \right), q_5 = \frac{q_2 + q_4}{2}, q_6 = \left(2\pi, \frac{3\pi}{5} \right), q_7 = \frac{q_3 + q_6}{2}$$

les équations des courbes dans le domaine

$$\delta : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \delta(t) = q_2 + \frac{t}{2\pi} (q_5 - q_2) = (\delta_1(t), \delta_2(t))$$

$$\sigma : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \sigma(t) = q_4 + \frac{t}{2\pi} (q_5 - q_4) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$$

$$\eta : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \eta(t) = q_3 + \frac{t}{2\pi} (q_7 - q_3) = (\eta_1(t), \eta_2(t))$$

$$\theta : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \theta(t) = q_6 + \frac{t}{2\pi} (q_7 - q_6) = (\theta_1(t), \theta_2(t))$$

$$\gamma : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = q_1 + \frac{t}{2\pi} (q_2 - q_1) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

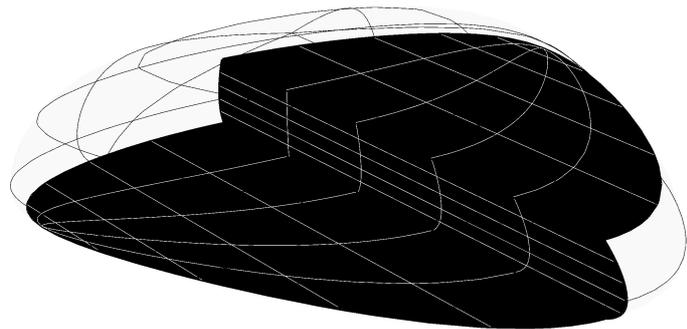
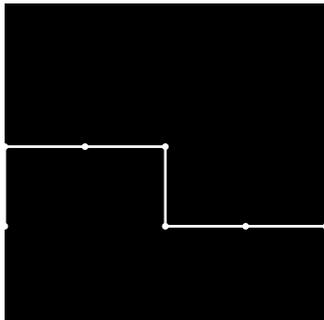
$$\beta : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \beta(t) = q_3 + \frac{t}{2\pi} (q_4 - q_3) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$$

les équations des éléments de séparation (murs et sols)

$$\chi_w : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \chi_w(t, u) = \chi(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) + u (\chi(\beta_1(t), \beta_2(t)) - \chi(\gamma_1(t), \gamma_2(t)))$$

$$\chi_{f_1} : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \chi_{f_1}(t, u) = \chi(\delta_1(t), \delta_2(t)) + u (\chi(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) - \chi(\delta_1(t), \delta_2(t)))$$

$$\chi_{f_2} : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \chi_{f_2}(t, u) = \chi(\eta_1(t), \eta_2(t)) + u (\chi(\theta_1(t), \theta_2(t)) - \chi(\eta_1(t), \eta_2(t)))$$



Représentation des éléments de séparation et de division de l'espace

7.1.1.3. Renflement et transition douce

Après les murs et les sols qui divise l'espace intérieur, nous allons définir une manière plus fluide pour désigner les différentes zones de l'espace, un peu comme un paysage avec des renflements.

l'équation de la surface de base est donnée par

$$\chi : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

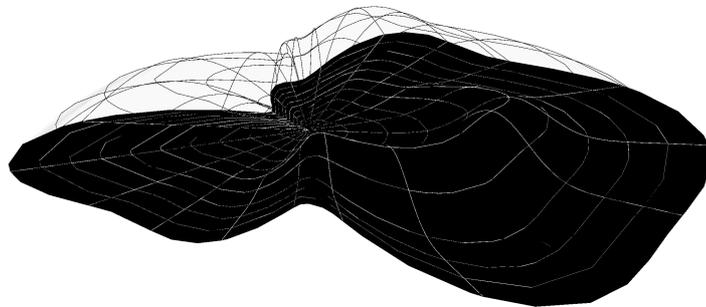
$$\chi(u, v) = \left(v \cos(u) \left(\frac{13}{10} + \cos(u)^5 \right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin(2u)^3 \right), v \sin(u) \left(\frac{13}{10} + \cos(u)^5 \right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin(2u)^3 \right), 3 \sin\left(\frac{v}{2}\right) \right)$$

l'équation de la surface renflée

$$h_1, h_2 : U \subset [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h_1(u) = \sin\left(\frac{\pi+u}{2}\right)^{10} \text{ and } h_2(v) = \sin\left(\frac{v}{2}\right)^{10}$$

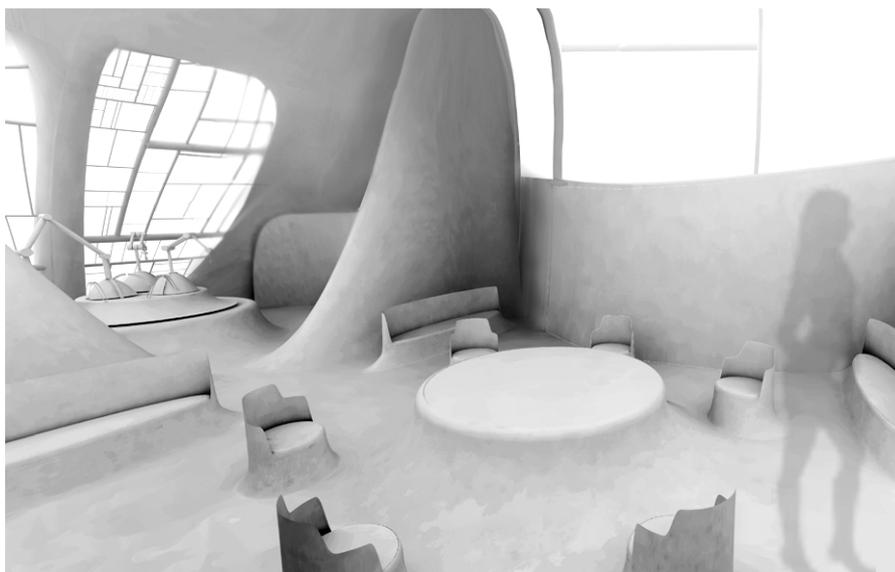
$$\chi_L : \mathcal{U} \subset [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\chi_L(u, v) = \left(v \cos(u) \left(\frac{13}{10} + \cos(u)^5 \right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin(2u)^3 \right), v \sin(u) \left(\frac{13}{10} + \cos(u)^5 \right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin(2u)^3 \right), 3 \sin\left(\frac{v}{2}\right) h_1(u) h_2(v) \right)$$



Représentation de la surface renflée

Maintenant, nous allons montrer un exemple concret où la fonction de renflement a été utilisée pour générer des variations de la surface du sol qui peuvent être utilisés à différentes fins architecturales par exemple des éléments de sièges.



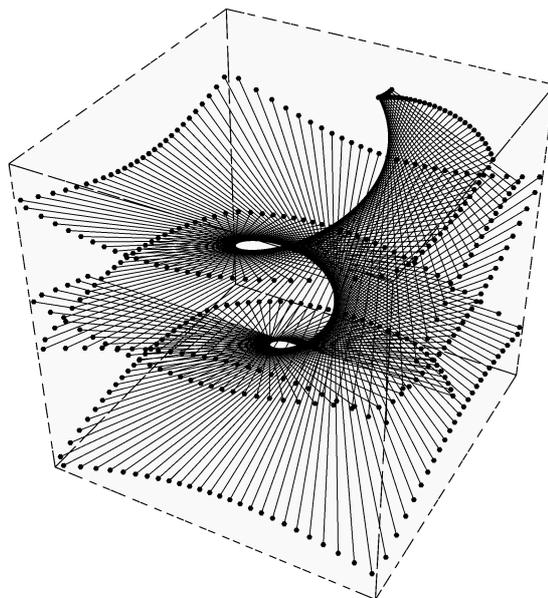
Représentation de l'utilisation architecturale de la fonction de renflement

7.1.2. Tâches répétitives

7.1.2.1. Opération géométrique répétée

Une autre forme de dessin automatisé est faire des tâches répétitives, nous démontrons dans l'exemple suivant: le calcul de l'intersection d'un ensemble de droites et les plans d'un cube; ici ces droites sont tangentes à une courbe spirale contenue dans le cube.

```
k = 4; max = 10; b = {1, 1, 1}; a = {max/2, max/2, 0} + b;
Tmin = -0.5; Tmax = 1.; ndiv = 200; Ts = 0.0;
Tstep = (Tmax - Tmin) / ndiv;
F[T_] := a + {Exp[T] Cos[8 T], Exp[T] Sin[8 T], 4 Exp[T]};
G[T_] := {Cos[8 T] - 8 Sin[8 T], Sin[8 T] + 8 Cos[8 T], 4};
L[T_, t_] := F[T] + t G[T];
χPlnorth[u_, v_] := {u, max, v};
χPlsouth[u_, v_] := {u, 0, v};
χPleast[u_, v_] := {max, u, v};
χPlwest[u_, v_] := {0, u, v};
χPlbottom[u_, v_] := {u, v, 0};
χPlup[u_, v_] := {u, v, max};
TabL = Table[L[T, t], {T, Tmin, Tmax, Tstep};
Planes = {χPlnorth[u, v] + b, χPlsouth[u, v] + b, χPleast[u, v] + b, χPlwest[u, v] + b, χPlbottom[u, v] + b, χPlup[u, v] + b};
PlanesViz = {χPlnorth[u, v], χPlsouth[u, v], χPleast[u, v], χPlwest[u, v], χPlbottom[u, v], χPlup[u, v]};
Clear[P, c];
Pair = Table[{i, 1, ndiv + 1};
Do[
  P = Table[{c, 1, 2};
  c = 1;
  MLine[t_] = TabL[[i]];
  Do[
    Mplane[u_, v_] = Planes[[j]];
    test = CSInt[MLine, Mplane, 1];
    If[(max + 1 ≥ test[[1]] ≥ 1) ∧ (max + 1 ≥ test[[2]] ≥ 1) ∧ (max + 1 ≥ test[[3]] ≥ 1),
      P[[c]] = test;
      c = c + 1;
    , {j, 1, 6};
  Pair[[i]] = {P[[1]] - b, P[[2]] - b};
  , {i, 1, ndiv + 1};
MarcLines = Table[Line[{Pair[[i]][[1]], Pair[[i]][[2]]}], {i, 1, ndiv + 1};
MarcPoints = Flatten[Pair, 1];
```



Représentation d'un dessin automatisé d'une tâche répétitive

7.1.2.2. Élément architectural répété

Une autre forme de dessin automatisé est le dessin des éléments architecturaux similaires qui sont légèrement différents les uns des autres; pour montrer cela, nous allons revenir à notre exemple de la surface de la robe. Nous allons construire des éléments entre la surface adaptée et à la surface de la robe.

```
Tn = 2 π; Un = 2 π; Vn = 2 π;
ndu = 30; ndv = 30;
us = Un / ndu; vs = Vn / ndv;
uf = π / 4.0; vf = π / 4.0;
Vox[u_, v_] := Fox[u, v] - Body[u, v];
Voxnor[u_, v_] := √((Vox[u, v][[1]])^2 + (Vox[u, v][[2]])^2 + (Vox[u, v][[3]])^2)

F1Points = Table[Fox[u, v], {u, 0, Un, us}, {v, 0, Vn, vs}];
F2Points = Table[Body[u, v], {u, 0, Un, us}, {v, 0, Vn, vs}];
MV = Table[Voxnor[u, v], {u, 0 + (0.5 us), Un - (0.5 us), us}, {v, 0 + (0.5 vs), Vn - (0.5 vs), vs}];

MaxMV1 = Max[Flatten[MV, 1]];
MSVal = Table[MV[[i, j]] / MaxMV1, {i, 1, ndu}, {j, 1, ndv}];
Composant1 = Table[{i, 1, ndu}, {j, 1, ndv}];

Do[
  Do[
    a1 = F1Points[[i, j]]; b1 = F1Points[[i, j + 1]]; c1 = F1Points[[i + 1, j + 1]]; d1 = F1Points[[i + 1, j]];
    a2 = F2Points[[i, j]]; b2 = F2Points[[i, j + 1]]; c2 = F2Points[[i + 1, j + 1]]; d2 = F2Points[[i + 1, j]];
    x = 0.2 (MSVal[[i, j]]); y = 0.8 (MSVal[[i, j]]);

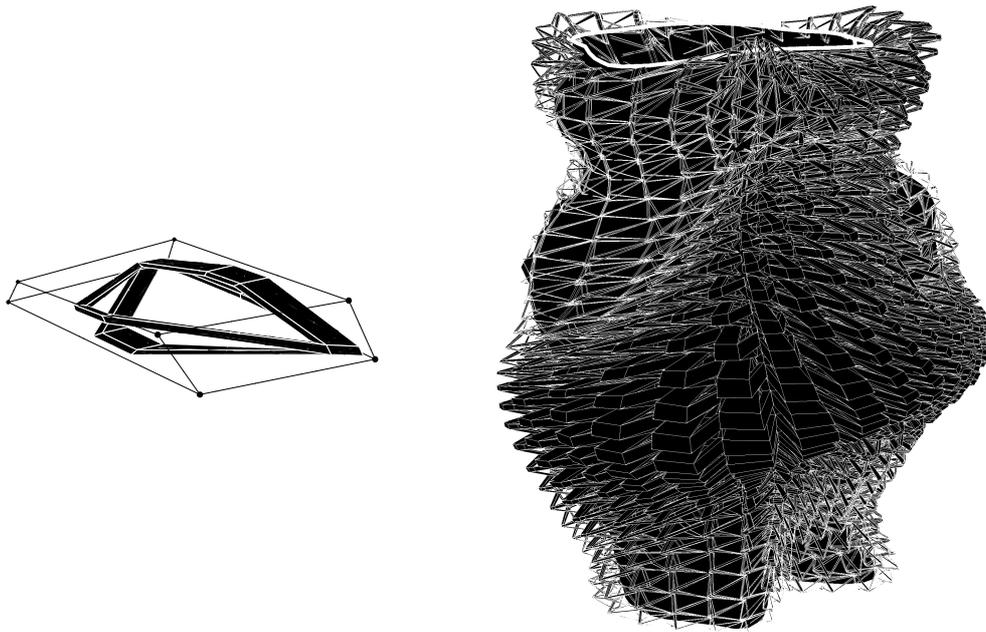
    M1a = a1 + x (b1 - a1); M1b = a1 + y (b1 - a1); M2a = a2 + x (b2 - a2); M2b = a2 + y (b2 - a2);
    M3a = b1 + x (c1 - b1); M3b = b1 + y (c1 - b1); M4a = b2 + x (c2 - b2); M4b = b2 + y (c2 - b2);
    M5a = c1 + x (d1 - c1); M5a = c1 + y (d1 - c1); M6b = c2 + x (d2 - c2); M6a = c2 + y (d2 - c2);
    M7b = d1 + x (a1 - d1); M7a = d1 + y (a1 - d1); M8b = d2 + x (a2 - d2); M8a = d2 + y (a2 - d2);

    L1a = M1a + 0.4 (M2a - M1a); L1b = M1a + 0.6 (M2a - M1a); L1d = M1b + 0.4 (M2b - M1b); L1c = M1b + 0.6 (M2b - M1b);
    Dev2a = M3a + 0.4 (M4a - M3a); Dev2b = M3a + 0.6 (M4a - M3a); Dev2d = M3b + 0.4 (M4b - M3b); Dev2c = M3b + 0.6 (M4b - M3b);
    R3a = M5a + 0.4 (M6a - M5a); R3b = M5a + 0.6 (M6a - M5a); R3d = M5b + 0.4 (M6b - M5b); R3c = M5b + 0.6 (M6b - M5b);
    Der4d = M7a + 0.4 (M8a - M7a); Der4c = M7a + 0.6 (M8a - M7a); Der4a = M7b + 0.4 (M8b - M7b); Der4b = M7b + 0.6 (M8b - M7b);
    Top5a = M2a + x (M6a - M2a); Top5b = M2a + y (M6a - M2a); Top5c = M2b + y (M6b - M2b); Top5d = M2b + x (M6b - M2b);
    Base6a = M1a + x (M5a - M1a); Base6b = M1a + y (M5a - M1a); Base6c = M1b + y (M5b - M1b); Base6d = M1b + x (M5b - M1b);

    Aa1 = a1 + x (c2 - a1); Bb1 = b1 + x (d2 - b1); Cc1 = c1 + x (a2 - c1); Dd1 = d1 + x (b2 - d1);
    Aa2 = a2 + x (c1 - a2); Bb2 = b2 + x (d1 - b2); Cc2 = c2 + x (a1 - c2); Dd2 = d2 + x (b1 - d2);
    M1A = Aa1 + x (Bb1 - Aa1); M1B = Aa1 + y (Bb1 - Aa1); M2A = Aa2 + x (Bb2 - Aa2); M2B = Aa2 + y (Bb2 - Aa2);
    M3A = Bb1 + x (Cc1 - Bb1); M3B = Bb1 + y (Cc1 - Bb1); M4A = Bb2 + x (Cc2 - Bb2); M4B = Bb2 + y (Cc2 - Bb2);
    M5B = Cc1 + x (Dd1 - Cc1); M5A = Cc1 + y (Dd1 - Cc1); M6B = Cc2 + x (Dd2 - Cc2); M6A = Cc2 + y (Dd2 - Cc2);
    M7B = Dd1 + x (Aa1 - Dd1); M7A = Dd1 + y (Aa1 - Dd1); M8B = Dd2 + x (Aa2 - Dd2); M8A = Dd2 + y (Aa2 - Dd2);

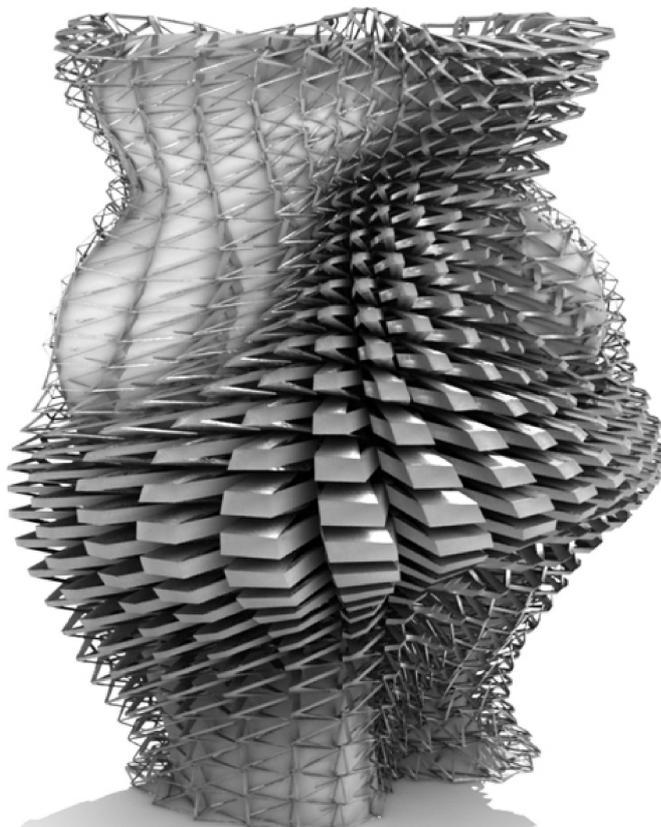
    L1A = M1A + 0.4 (M2A - M1A); L1B = M1A + 0.6 (M2A - M1A); L1D = M1B + 0.4 (M2B - M1B); L1C = M1B + 0.6 (M2B - M1B);
    Dev2A = M3A + 0.4 (M4A - M3A); Dev2B = M3A + 0.6 (M4A - M3A); Dev2D = M3B + 0.4 (M4B - M3B); Dev2C = M3B + 0.6 (M4B - M3B);
    R3A = M5A + 0.4 (M6A - M5A); R3B = M5A + 0.6 (M6A - M5A); R3D = M5B + 0.4 (M6B - M5B); R3C = M5B + 0.6 (M6B - M5B);
    Der4D = M7A + 0.4 (M8A - M7A); Der4C = M7A + 0.6 (M8A - M7A); Der4A = M7B + 0.4 (M8B - M7B); Der4B = M7B + 0.6 (M8B - M7B);
    Top5A = M2A + x (M6A - M2A); Top5B = M2A + y (M6A - M2A); Top5C = M2B + y (M6B - M2B); Top5D = M2B + x (M6B - M2B);
    Base6A = M1A + x (M5A - M1A); Base6B = M1A + y (M5A - M1A); Base6C = M1B + y (M5B - M1B); Base6D = M1B + x (M5B - M1B);

    Composant1[[i, j]] = Polygon[{{L1a, L1b, L1c, L1d}, {R3a, R3b, R3c, R3d}, {Dev2a, Dev2b, Dev2c, Dev2d},
      {Der4a, Der4b, Der4c, Der4d}, {Base6a, Base6b, Base6c, Base6d}, {L1d, L1a, Base6a, Base6d},
      {Top5a, Top5b, Top5c, Top5d}, {Dev2a, Dev2d, Base6c, Base6d}, {Base6c, Base6b, R3a, R3d}, {Base6b, Base6a, Der4d, Der4a},
      {Top5b, Top5c, R3c, R3b}, {Top5a, Top5d, L1c, L1b}, {Top5d, Top5c, Dev2c, Dev2b}, {Top5b, Top5a, Der4c, Der4b},
      {L1a, L1b, L1c, L1d}, {R3A, R3B, R3C, R3D}, {Dev2A, Dev2B, Dev2C, Dev2D}, {Der4A, Der4B, Der4C, Der4D},
      {Base6A, Base6B, Base6C, Base6D}, {L1D, L1A, Base6A, Base6D}, {Top5A, Top5B, Top5C, Top5D},
      {Dev2A, Dev2D, Base6C, Base6D}, {Base6C, Base6B, R3A, R3D}, {Base6B, Base6A, Der4D, Der4A},
      {Top5B, Top5C, R3C, R3B}, {Top5A, Top5D, L1C, L1B}, {Top5D, Top5C, Dev2C, Dev2B}, {Top5B, Top5A, Der4C, Der4B},
      {Top5b, Top5B, Der4B, Der4b}, {Der4B, Der4A, Der4a, Der4b},
      {Der4A, Der4a, Base6b, Base6B}, {Top5b, Top5B, R3B, R3b},
      {R3C, R3c, R3d, R3D}, {R3d, R3D, Base6C, Base6c},
      {Top5c, Top5C, R3C, R3c}, {R3B, R3b, R3a, R3A},
      {R3a, R3A, Base6B, Base6b}, {Top5c, Top5C, Dev2C, Dev2c},
      {Dev2C, Dev2c, Dev2d, Dev2D}, {Dev2d, Dev2D, Base6C, Base6c},
      {Top5d, Top5D, Dev2B, Dev2b}, {Dev2B, Dev2b, Dev2a, Dev2A}, {Dev2a, Dev2A, Base6D, Base6d}, {Top5d, Top5D, L1C, L1c},
      {L1C, L1c, L1d, L1D}, {L1d, L1D, Base6D, Base6d}, {Top5a, Top5A, L1B, L1b}, {L1B, L1b, L1a, L1A},
      {L1a, L1A, Base6A, Base6a}, {Top5a, Top5A, Der4C, Der4c}, {Der4C, Der4c, Der4d, Der4D}, {Der4D, Der4d, Base6a, Base6a}
    ]];
  ], {i, 1, ndu}, {j, 1, ndv}];
```



Représentation du dessin automatisé d'un élément architectural répétitif

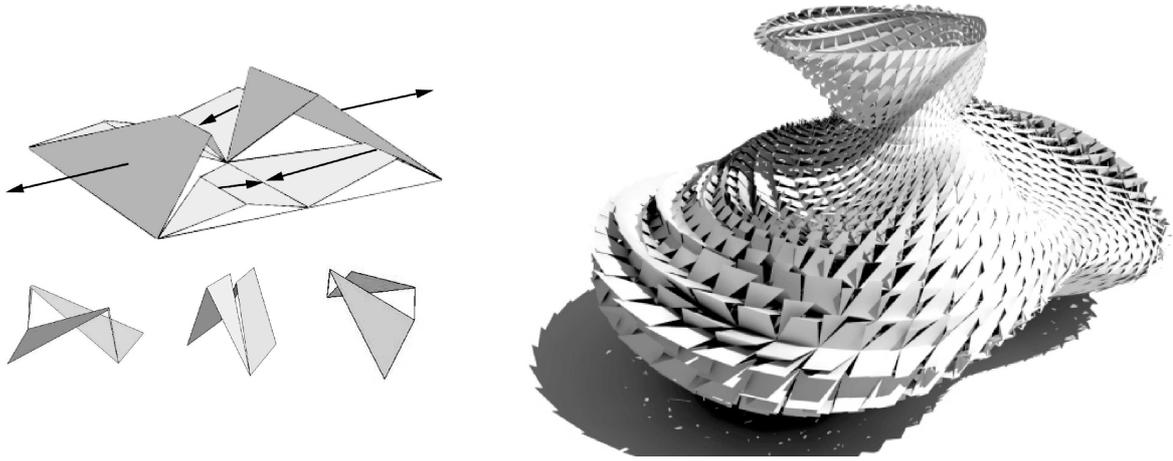
Maintenant, nous allons montrer un exemple concret où nous générons un élément architectural répétitif qui varie dans leur taille et position.



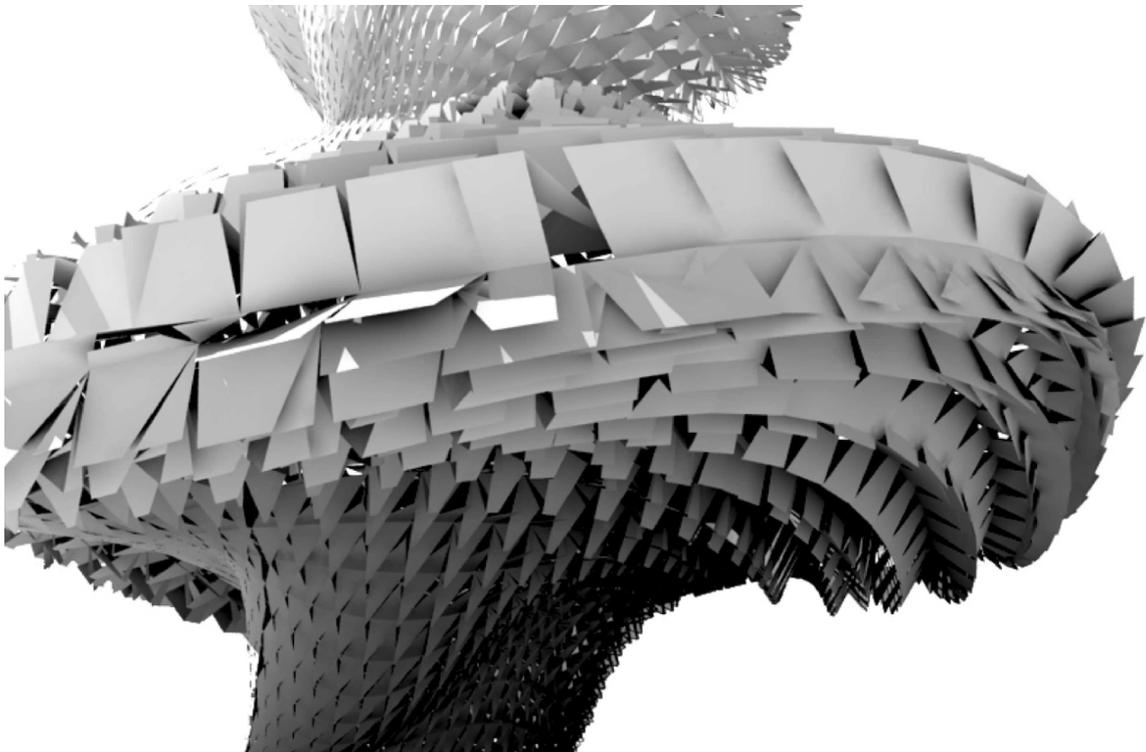
Représentation de l'élément architectural répété

Plus d'exemples de l'élément architectural répété

Comme dans l'exemple précédent, nous allons montrer une application de l'opération algorithmique, à savoir la répétition d'un élément architectural, dans cet exemple, l'élément comme indiqué dans la figure ci-dessous sera transformé en utilisant des transformations affines tant que sa position varie sur la surface.



Représentation des transformations affines sur l'élément architectural répété



Représentation de la conception à l'aide de l'élément architectural répété

7.1.2.3. Génération des variants

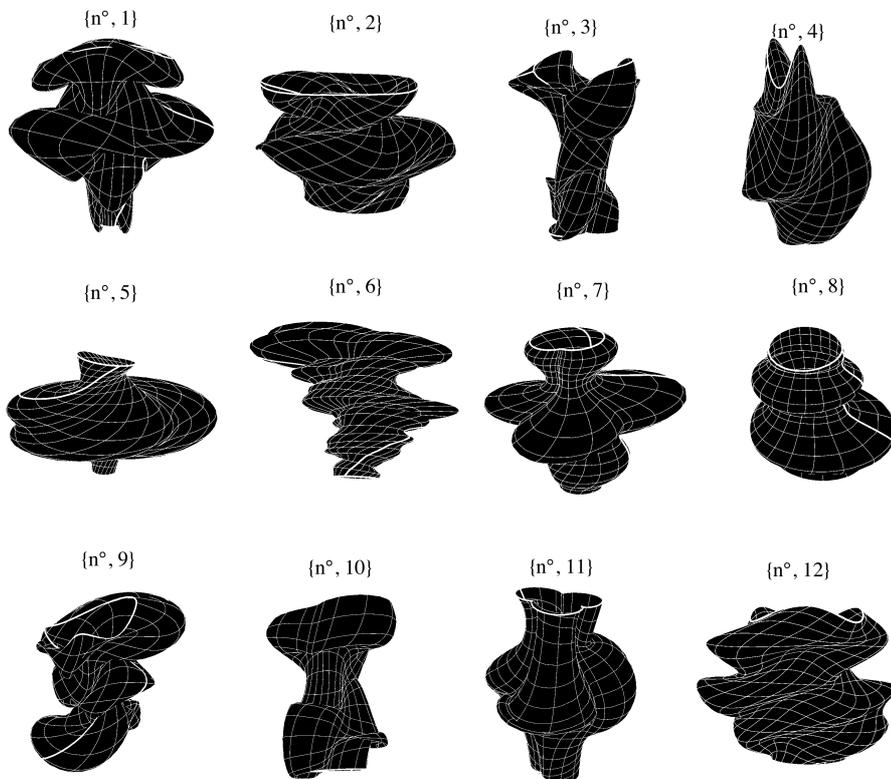
Voici la puissance des opérations algorithmiques peut être ressenti, nous allons construire une formule qui est capable de générer une grande variété de formes homéomorphe au cylindre ($S^1 \times \mathbb{R}$) puis on va définir un petit algorithme qui génère des valeurs aléatoires pour les paramètres de cette formule. En faisant cela, nous sommes en mesure de visualiser de nombreuses possibilités au hasard avant de commencer à préciser la recherche ou la guider à une forme particulière désirée. Le choix de la famille du cylindre est due au désir de générer des formes différentes pour les robes. L'algorithme pour générer les différentes robes est tout simplement une boucle qui génère à chaque itération un ensemble de valeurs aléatoires pour les paramètres et les stocker dans une matrice pour être en mesure de se reproduire à nouveau la robe désirée.

```
Apocalypse = 12;
ParamVal = Table[{p, 1, Apocalypse}]; Plots = Table[{p, 1, Apocalypse}];
Do[
  ST = RandomReal[{0, 1}]; FP = RandomInteger[{1, 1}];
  LA = RandomInteger[{0, 3}]; LB = RandomInteger[{0, 3}]; LC = RandomInteger[{0, 3}];
  LXA = If[LA > 0, RandomInteger[{1, LA}], 1];
  LXB = If[LB > 0, RandomInteger[{1, LB}], 1];
  LXC = If[LC > 0, RandomInteger[{1, LC}], 1];

  FB = RandomReal[{0, 1.0}]; FO = RandomInteger[{1, 1}];
  FA = RandomReal[{0, 1}]; FC = -RandomReal[{0, 0.9}]; FD = RandomReal[{0, 1}];
  PA = RandomReal[{1, 3}]; PB = RandomReal[{1, 3}]; PC = RandomInteger[{1, 3}]; NA = RandomInteger[{1, 4}];
  PR = RandomReal[{0, 0.7}]; PX = RandomInteger[{1, 1}]; NY = 2 RandomInteger[{1, 6}];

  Plots[[p]] = ParametricPlot3D[χDress[ST, FP, LA, LXA, LB, LXB, LC, LXC, FB, FO, FA, FC, FD, PA, PB, PC, NA, PR, PX, NY][u, v],
    {u, 0, 2 π}, {v, 0, 2 π}, PlotStyle → {Black}, Mesh → {Range[0, 2 π,  $\frac{2}{20} \pi$ ], Range[0, 2 π,  $\frac{2}{20} \pi$ ]},
    MeshStyle → {{Thickness[0.002], White}, {Thickness[0.002], White}}, BoundaryStyle → {Thickness[0.008], White},
    PlotRange → All, PlotLabel → {"n°", p}, Boxed → False, Axes → False];

  ParamVal[[p]] = {{{"n°", p}, {ST, FP, LA, LXA, LB, LXB, LC, LXC, FB, FO, FA, FC, FD, PA, PB, PC, NA, PR, PX, NY}}};
, {p, 1, Apocalypse}];
```



Representation of the random parameters values resulting in different dresses

Exemple architectural utilisant la génération des variations au cours du processus de la conception

Maintenant, nous allons montrer un exemple concret où nous générons des variations d'une conception initiale d'une forme architecturale, ce qui donne une grande possibilité de choix et d'exploration.



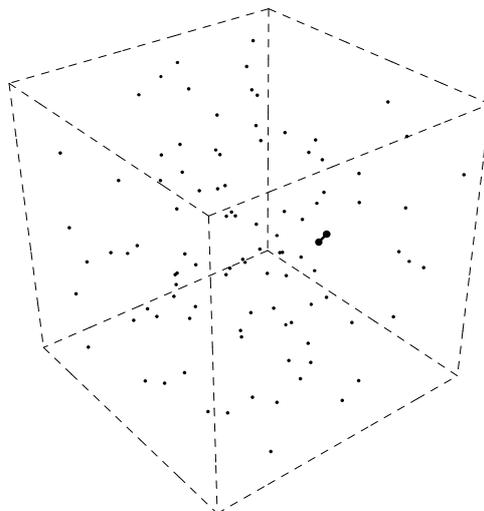
Représentation des variations produites pour une forme architecturale

7.1.3. Géométrie computationnelle

7.1.3.1. Problèmes de géométrie computationnelle (le paire la plus proche)

Le problème de la paire de points la plus proche est un exemple classique d'un problème de géométrie computationnelle, étant donné n points dans un espace métrique, nous voulons trouver la paire de points avec la plus petite distance entre eux. Le problème de la paire la plus proche pour les points dans le plan euclidien a été parmi les premiers problèmes géométriques qui ont été traités à l'origine de l'étude systématique de la complexité de calcul des algorithmes géométriques. Nous pouvons voir immédiatement l'intérêt architectural dans un tel problème et des problèmes du même type; pour cette raison, nous allons présenter ici un algorithme qui peut résoudre ce problème pour l'espace euclidien de dimension n . La résolution de ce problème peut être fait par une manière plus sophistiquée, mais ici nous allons résoudre en utilisant la solution naïve brute, à savoir un algorithme de recherche de la distance entre toutes les paires et ensuite sélectionner le paires avec la distance minimale.

```
ClosePt[j_, Pts_] := Module[{n, m, Ds, c,  $\sigma$ , Ps, Test, Chosen, ChosenT, WinDist, WinPt},
  n = Length[Pts];  $\sigma$  = Table[{i, 1, n-1}]; Ds[p_, q_] :=  $\sqrt{(q-p).(q-p)}$ ;
  c = 1;
  Do[If[j  $\neq$  i,  $\sigma$ [[c]] = i; c = c+1;], {i, 1, n}];
  Ps = Table[Pts[[ $\sigma$ [[i]]]], {i, 1, n-1}];
  Do[Test = Ds[Pts[[j]], Ps[[k]]];
    Which[
      k == 1, Chosen = Test; ChosenT = {Ps[[k]],  $\sigma$ [[k]]};,
      k > 1, If[WinDist < Test, Chosen = WinDist; ChosenT = WinPt, Chosen = Test; ChosenT = {Ps[[k]],  $\sigma$ [[k]]}];
    WinDist = Chosen; WinPt = ChosenT;
    , {k, 1, n-1}];
  {WinDist, WinPt}];
ClosePair[Pts_] := Module[{n, Dees, kozen, kozenI, WDist, WI},
  n = Length[Pts]; Dees = Table[ClosePt[i, Pts], {i, 1, n}];
  Do[
    Which[
      k == 1, kozen = Dees[[k, 1]]; kozenI = k;,
      k > 1, If[WDist < Dees[[k, 1]], kozen = WDist; kozenI = WI, kozen = Dees[[k, 1]]; kozenI = k];
    WDist = kozen; WI = kozenI;
    , {k, 1, n}];
  {WDist, WI, Dees[[WI, 2]]}, {Pts[[WI]], Pts[[Dees[[WI, 2]]]]}];
a = 1;
p1 = {0, 0, 0}; p2 = {a, 0, 0}; p3 = {a, a, 0}; p4 = {0, a, 0};
p5 = {0, 0, a}; p6 = {a, 0, a}; p7 = {a, a, a}; p8 = {0, a, a};
cube = {{p1, p2}, {p2, p3}, {p3, p4}, {p4, p1}, {p5, p6}, {p6, p7}, {p7, p8}, {p8, p5}, {p5, p1}, {p6, p2}, {p7, p3}, {p8, p4}};
V = Table[{RandomReal[{0, a}], RandomReal[{0, a}], RandomReal[{0, a}]}], {i, 1, 100};
```



Représentation de l'algorithme pour trouver la paire la plus proche dans un nuage de 100 points

7.1.3.2. Motif computationnelle

Automates cellulaires

programme court pour générer des automates cellulaires classique

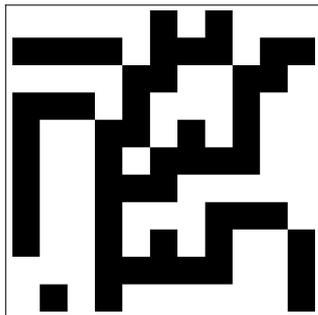
```

u = 11; v = 11;
Array[H, {u, v}]; Start = {0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0}; Start[[1]];

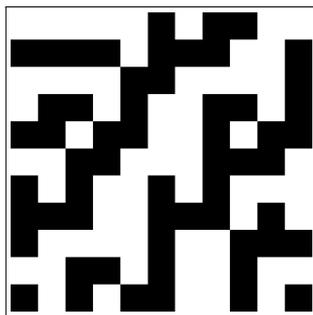
Do[Do[
  If[i == 1, H[i, j] = Start[[j]],
  Which[
    j == 1,
    Which[
      H[i-1, v] == 1 ^ H[i-1, j] == 1 ^ H[i-1, j+1] == 1, H[i, j] = 0,
      H[i-1, v] == 1 ^ H[i-1, j] == 1 ^ H[i-1, j+1] == 0, H[i, j] = 0,
      H[i-1, v] == 1 ^ H[i-1, j] == 0 ^ H[i-1, j+1] == 1, H[i, j] = 1,
      H[i-1, v] == 1 ^ H[i-1, j] == 0 ^ H[i-1, j+1] == 0, H[i, j] = 0,
      H[i-1, v] == 0 ^ H[i-1, j] == 1 ^ H[i-1, j+1] == 1, H[i, j] = 1,
      H[i-1, v] == 0 ^ H[i-1, j] == 1 ^ H[i-1, j+1] == 0, H[i, j] = 1,
      H[i-1, v] == 0 ^ H[i-1, j] == 0 ^ H[i-1, j+1] == 1, H[i, j] = 0,
      H[i-1, v] == 0 ^ H[i-1, j] == 0 ^ H[i-1, j+1] == 0, H[i, j] = 1
    ],
    j == v,
    Which[
      H[i-1, j-1] == 1 ^ H[i-1, j] == 1 ^ H[i-1, 1] == 1, H[i, j] = 0,
      H[i-1, j-1] == 1 ^ H[i-1, j] == 1 ^ H[i-1, 1] == 0, H[i, j] = 0,
      H[i-1, j-1] == 1 ^ H[i-1, j] == 0 ^ H[i-1, 1] == 1, H[i, j] = 1,
      H[i-1, j-1] == 1 ^ H[i-1, j] == 0 ^ H[i-1, 1] == 0, H[i, j] = 0,
      H[i-1, j-1] == 0 ^ H[i-1, j] == 1 ^ H[i-1, 1] == 1, H[i, j] = 1,
      H[i-1, j-1] == 0 ^ H[i-1, j] == 1 ^ H[i-1, 1] == 0, H[i, j] = 1,
      H[i-1, j-1] == 0 ^ H[i-1, j] == 0 ^ H[i-1, 1] == 1, H[i, j] = 0,
      H[i-1, j-1] == 0 ^ H[i-1, j] == 0 ^ H[i-1, 1] == 0, H[i, j] = 1
    ],
    j != 1 ^ j != v,
    Which[
      H[i-1, j-1] == 1 ^ H[i-1, j] == 1 ^ H[i-1, j+1] == 1, H[i, j] = 0,
      H[i-1, j-1] == 1 ^ H[i-1, j] == 1 ^ H[i-1, j+1] == 0, H[i, j] = 0,
      H[i-1, j-1] == 1 ^ H[i-1, j] == 0 ^ H[i-1, j+1] == 1, H[i, j] = 1,
      H[i-1, j-1] == 1 ^ H[i-1, j] == 0 ^ H[i-1, j+1] == 0, H[i, j] = 0,
      H[i-1, j-1] == 0 ^ H[i-1, j] == 1 ^ H[i-1, j+1] == 1, H[i, j] = 1,
      H[i-1, j-1] == 0 ^ H[i-1, j] == 1 ^ H[i-1, j+1] == 0, H[i, j] = 1,
      H[i-1, j-1] == 0 ^ H[i-1, j] == 0 ^ H[i-1, j+1] == 1, H[i, j] = 0,
      H[i-1, j-1] == 0 ^ H[i-1, j] == 0 ^ H[i-1, j+1] == 0, H[i, j] = 1
    ]
  ]
], {j, 1, v}], {i, 1, u}];

HH = Table[H[i, j], {i, 1, u}, {j, 1, v}];

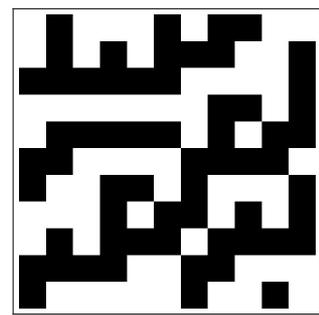
```



initiale (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)



initiale (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)



initiale (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)

Maintenant, nous allons donner un autre exemple des modèles computationnelle basée sur l'interaction locale entre la cellule et de ses voisins. Cette fois, nous allons fixer la tuile et nous ne sommes autorisés à donner transformation euclidienne savoir rotations et de réflexion (pas de déformation de la forme), la seule règle locale est que chaque cellule doit trouver la transformation euclidienne approprié afin de s'adapter à ses voisins précédents. Le résultat est un motif irrégulier résultant de la même tuile.

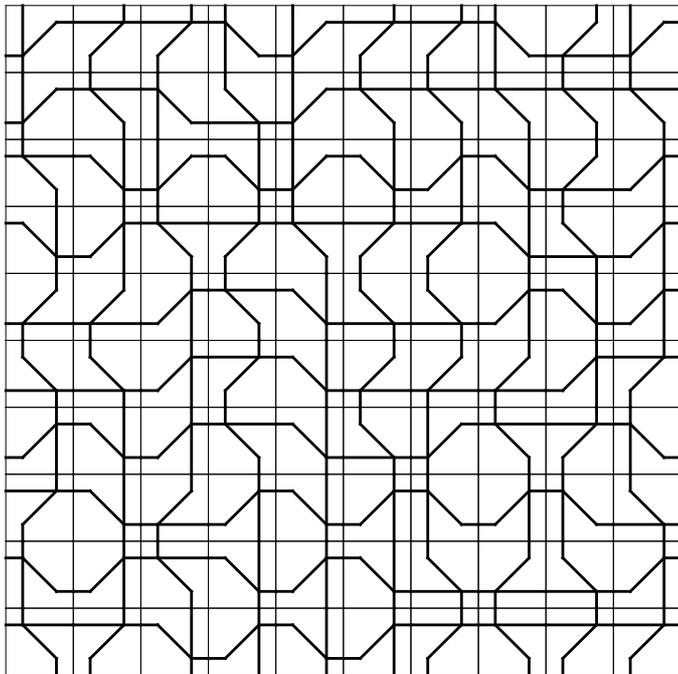
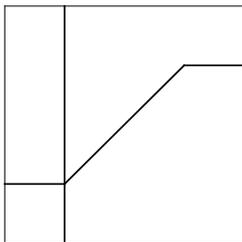

```

id[[i-1, j]] = 8  $\wedge$  id[[i, j-1]] = 2, Combi = {2, 7}; Comb = Combi[[Random[Integer, {1, 2}]]],
id[[i-1, j]] = 8  $\wedge$  id[[i, j-1]] = 3, Combi = {6, 8}; Comb = Combi[[Random[Integer, {1, 2}]]],
id[[i-1, j]] = 8  $\wedge$  id[[i, j-1]] = 4, Combi = {2, 7}; Comb = Combi[[Random[Integer, {1, 2}]]],
id[[i-1, j]] = 8  $\wedge$  id[[i, j-1]] = 5, Combi = {2, 7}; Comb = Combi[[Random[Integer, {1, 2}]]],
id[[i-1, j]] = 8  $\wedge$  id[[i, j-1]] = 6, Combi = {6, 8}; Comb = Combi[[Random[Integer, {1, 2}]]],
id[[i-1, j]] = 8  $\wedge$  id[[i, j-1]] = 7, Combi = {6, 8}; Comb = Combi[[Random[Integer, {1, 2}]]],
id[[i-1, j]] = 8  $\wedge$  id[[i, j-1]] = 8, Combi = {2, 7}; Comb = Combi[[Random[Integer, {1, 2}]]]
]];

Which[
Comb = 1,
id[[i, j]] = 1;
{a, b, c, d} = {Jp[[i, j]], Jp[[i+1, j]], Jp[[i+1, j+1]], Jp[[i, j+1]]},
Comb = 2,
id[[i, j]] = 2; {b, a, d, c} = {Jp[[i, j]], Jp[[i+1, j]], Jp[[i+1, j+1]], Jp[[i, j+1]]},
Comb = 3,
id[[i, j]] = 3; {d, a, b, c} = {Jp[[i, j]], Jp[[i+1, j]], Jp[[i+1, j+1]], Jp[[i, j+1]]},
Comb = 4,
id[[i, j]] = 4; {a, d, c, b} = {Jp[[i, j]], Jp[[i+1, j]], Jp[[i+1, j+1]], Jp[[i, j+1]]},
Comb = 5,
id[[i, j]] = 5; {c, d, a, b} = {Jp[[i, j]], Jp[[i+1, j]], Jp[[i+1, j+1]], Jp[[i, j+1]]},
Comb = 6,
id[[i, j]] = 6; {d, c, b, a} = {Jp[[i, j]], Jp[[i+1, j]], Jp[[i+1, j+1]], Jp[[i, j+1]]},
Comb = 7,
id[[i, j]] = 7; {b, c, d, a} = {Jp[[i, j]], Jp[[i+1, j]], Jp[[i+1, j+1]], Jp[[i, j+1]]},
Comb = 8,
id[[i, j]] = 8; {c, b, a, d} = {Jp[[i, j]], Jp[[i+1, j]], Jp[[i+1, j+1]], Jp[[i, j+1]]}
];

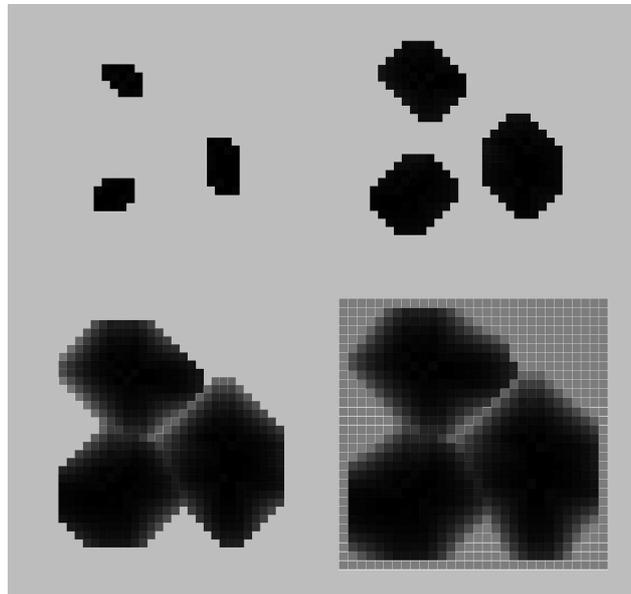
ab = a +  $\lambda$  (b - a);
dc = d +  $\lambda$  (c - d);
cb = c +  $\lambda$  (b - c);
ad = a +  $\lambda$  (d - a);
m = ab +  $\lambda$  (dc - ab);
n = dc +  $\lambda$  (ab - dc);
m1 = ad + 2 (m - ad);
n1 = cb +  $\frac{2}{3}$  (n - cb);
n2 = cb +  $\frac{1}{3}$  (n - cb);
frame[[i, j]] = Line[{{a, b}, {b, c}, {c, d}, {d, a}}];
Composant[[i, j]] = Line[{{ad, m}, {m, n2}, {n2, cb}, {ab, dc}}];
, {i, 1, ndu}, {j, 1, ndv}];

```



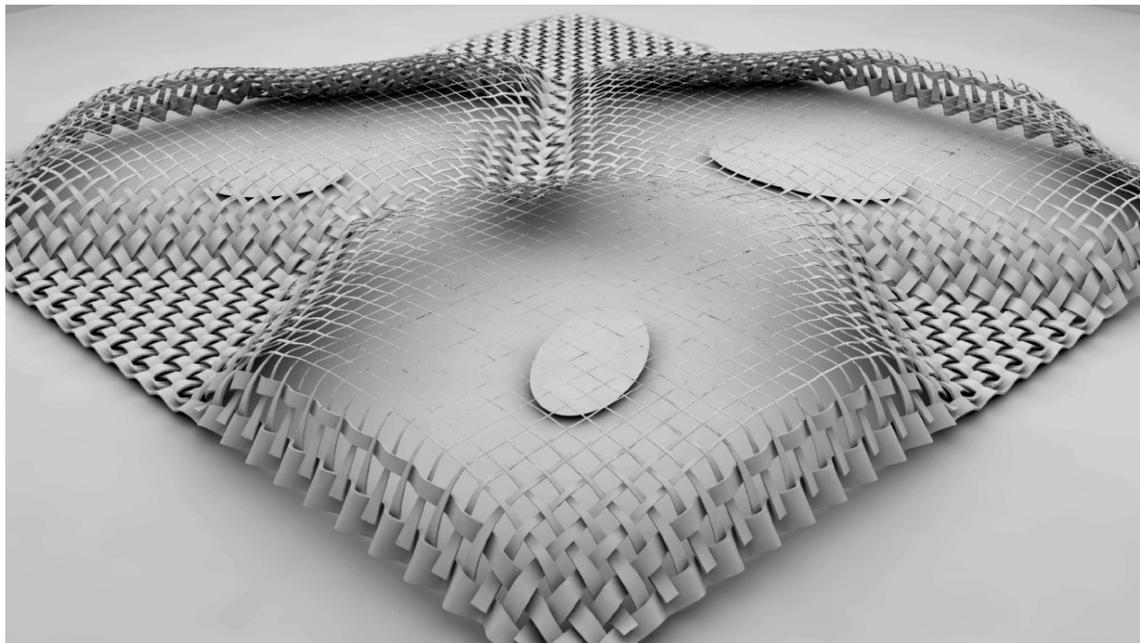
Représentation de la tuile et le motif irrégulier résultant de son interaction locale avec ses voisins

Maintenant que nous avons donné un type des automates cellulaires et présentait un profil résultant des interactions locales, nous allons donner un exemple de générer des motifs de base de comportement cellulaire local. Dans cet exemple qui suit, l'apparition et la couleur de la cellule est déterminé par ses interactions locales avec ses cellules voisines.



Représentation du motif générés par des interactions cellulaires locales

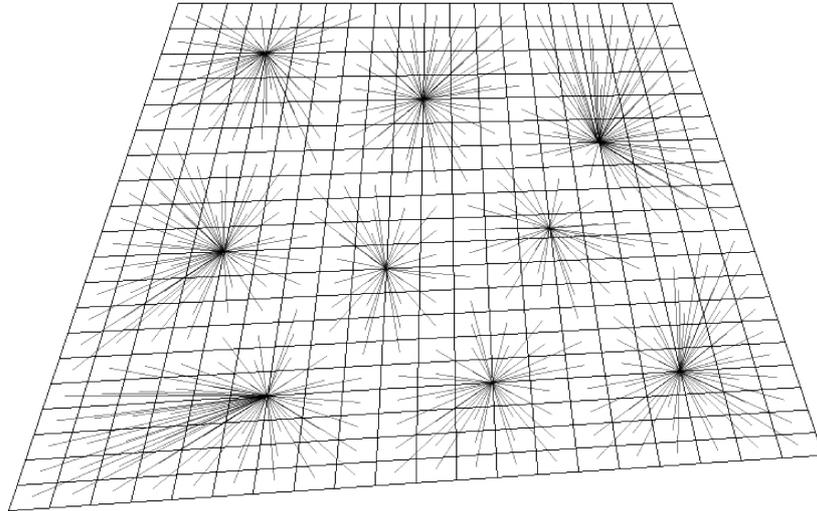
Nous allons maintenant utiliser ce modèle calculé à informer l'épaisseur et la hauteur des poutres d'une structure de recouvrement pour permettre une plus grande ouverture et plus de hauteur au-dessus des zones les plus sombres.



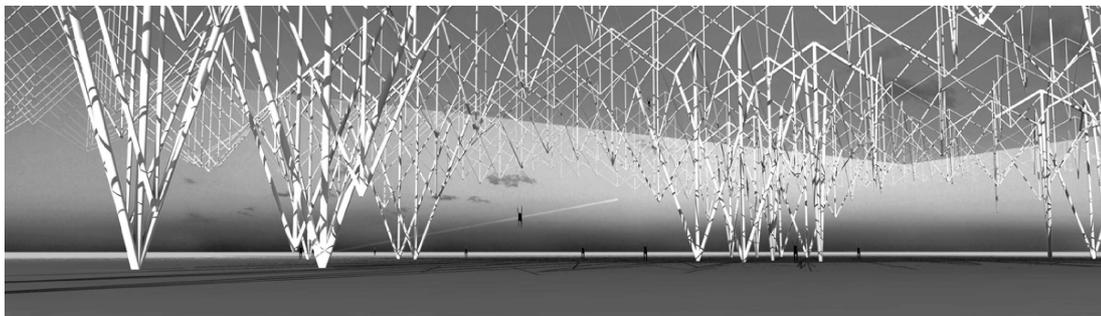
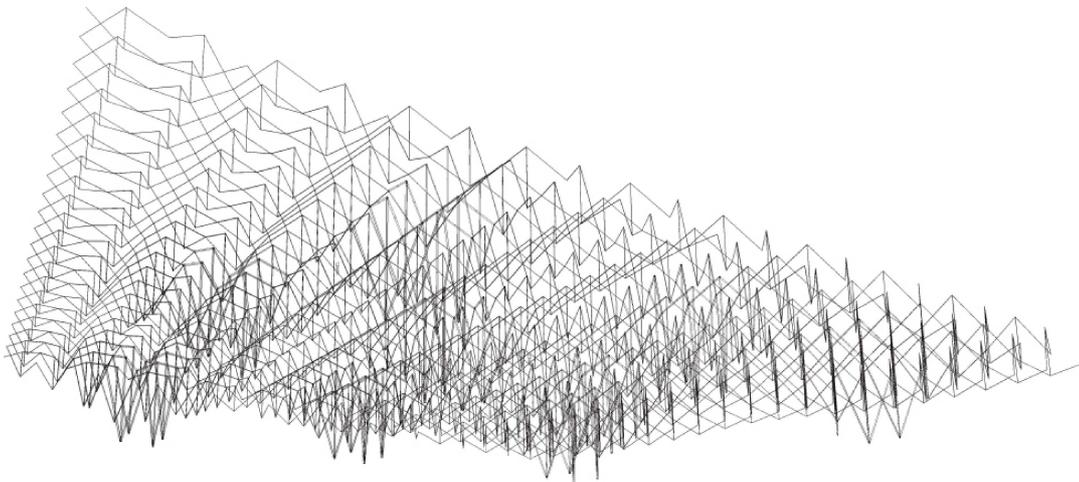
Représentation de la structure informé par le motif calculé

Plus d'exemples de motifs résultant des interactions locales

Nous allons maintenant montrer un autre exemple du motif résultant de l'interaction locale entre chaque composant du motif et des points spécifiques sur le site au lieu des voisins directs. In this example we are going to change the height of a given structural component proportional to its distance to the closest one of the specific points. Dans cet exemple, nous allons modifier la hauteur d'un élément structurel donnée proportionnelle à sa distance de l'un des points spécifiques le plus proche.



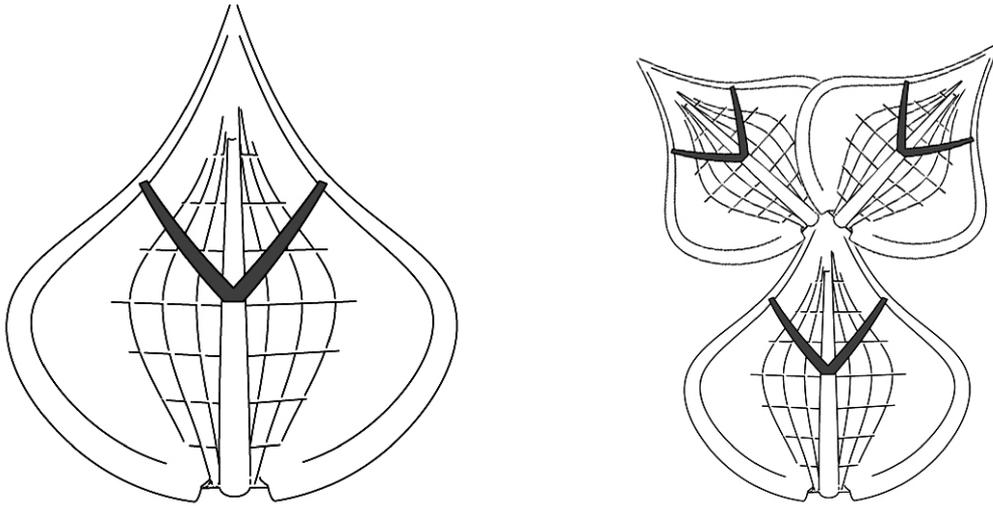
Représentation des points spécifiques et les lignes reliant chaque composant au point spécifique le plus proche



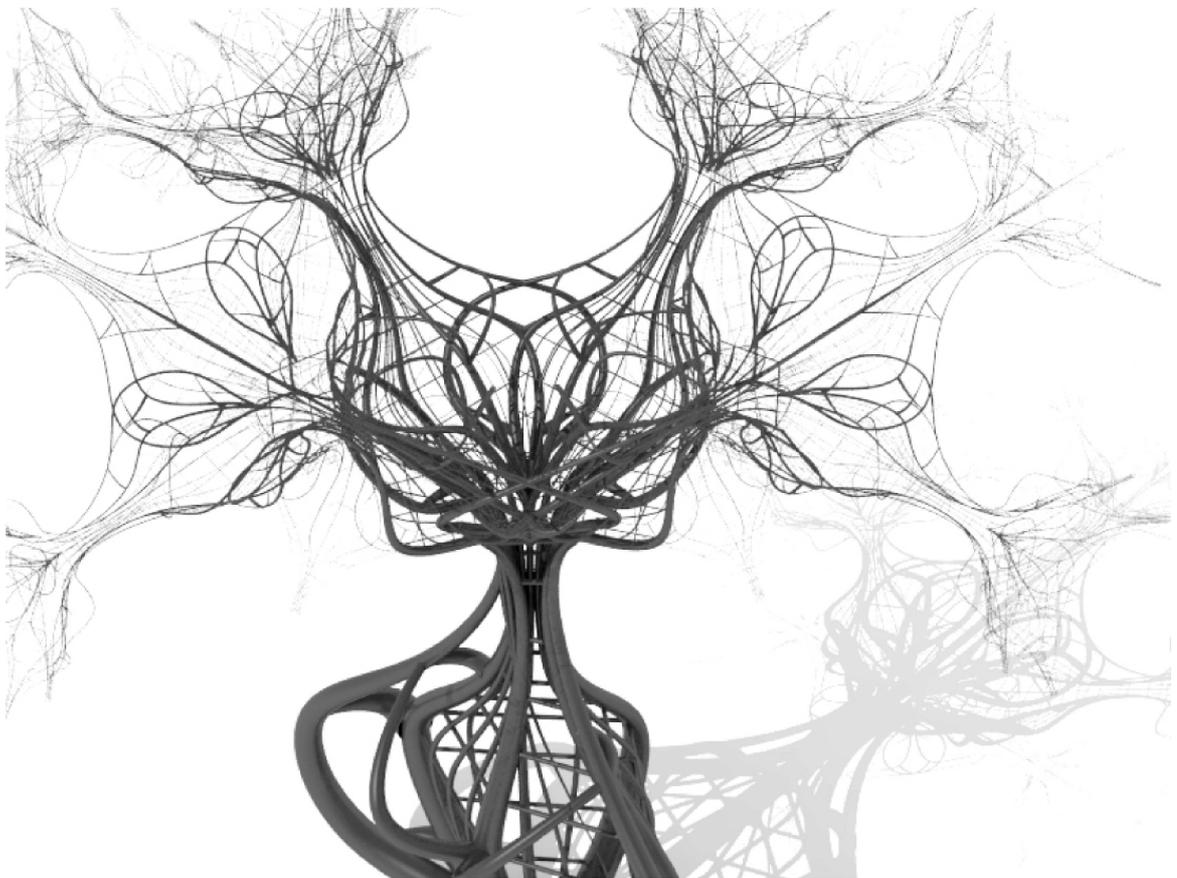
Représentation de la conception d'une structure où les hauteurs des composants varient proportionnellement

Motif itératif

Un autre exemple de l'application de motifs générés à partir d'interactions locales comprennent le motif itératif.



Représentation de l'élément destiné à être répété à différents niveaux d'itération



Représentation des quatre niveaux de itération de l'élément conçu

Plus des motifs itératifs

Comme dans l'exemple précédent, nous montrons un autre exemple de la génération d'un motif en utilisant les itérations en répétant la même construction géométrique encore et encore sur des échelles plus petites. Ce procédé de génération de motif peut être adaptée dans un contexte plus spécifique afin de produire des structures efficaces.



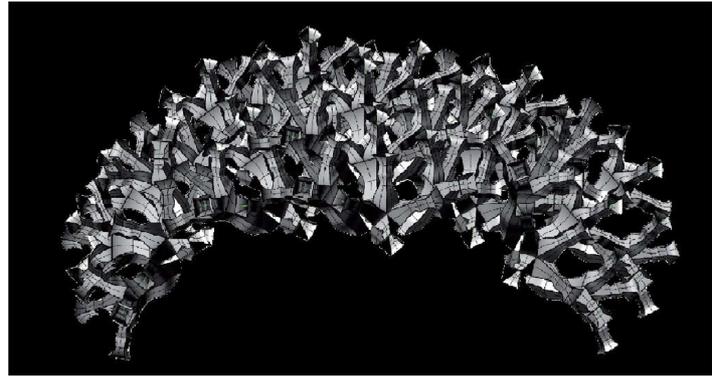
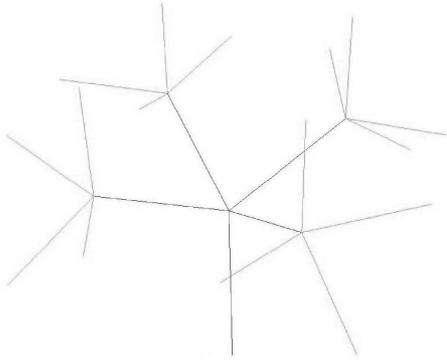
Représentation de l'élément conçu et la façon dont il va se régénérer dans l'itération suivante



Représentation du motif après avoir itéré quatre fois

Plus des motifs itératifs

Dans cet exemple, nous poursuivons avec les motifs itératifs qui peuvent être utilisés dans la conception structurelle, cet exemple peut être vu, d'une part en tant que concept d'une structure arborescente similaire à l'exemple précédent. D'autre part, il pourrait être considéré avec le bon nombre d'itérations à titre d'approximation d'une structure en forme de dôme. Il est important de souligner que ce qui nous concerne dans cette recherche est la construction géométrique et ces exemples sont suggestives sur le niveau de la mécanique des structures, et pas précisément testé structurellement.



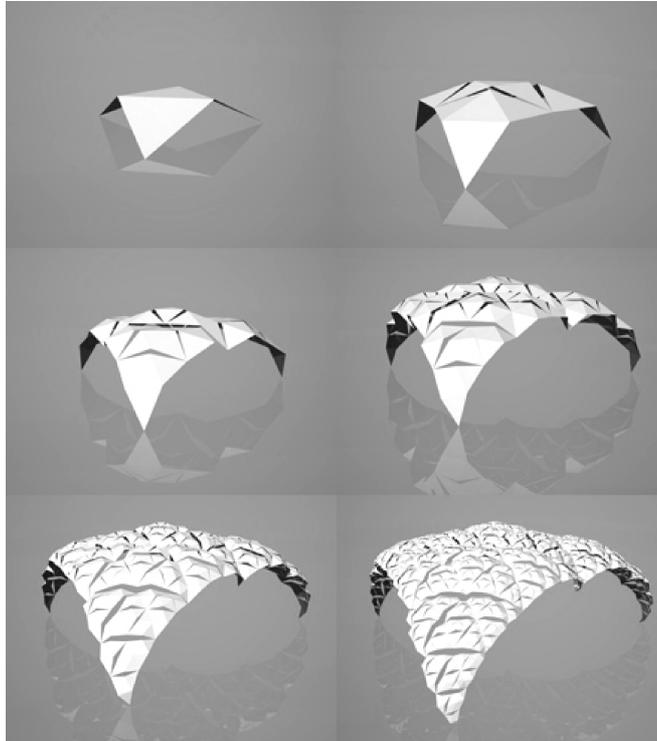
Représentation de l'élément de base de la structure arborescente et la quatrième itération approchant un dôme



Représentation de la structure arborescente après nous avons itéré quatre fois

Application des motifs itératifs

Nous allons maintenant montrer un exemple architectural où cette méthode de génération de motif itératif a été utilisée pour la conception d'une structure d'une coque. À chaque niveau d'itération les surfaces sont subdivisées pour produire une surface globale plus fine.



Représentation de la subdivision itérative des surfaces



Représentation d'une subdivision itéré trois fois

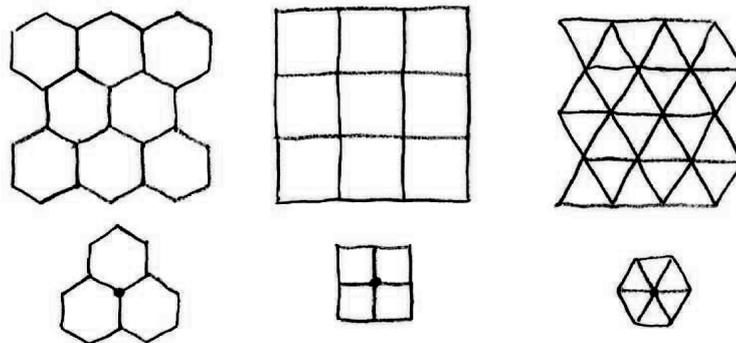
7.1.4. Problèmes de géométrie combinatoire (pavage)

7.1.4.1. Pavage et l'architecture

Le pavage est traditionnellement le labourage du plan en utilisant un ou plusieurs formes géométriques sans chevauchements et aucun écart; l'importance du pavage dans l'architecture et l'art est tout à fait évident, il a été utilisé pour créer des motifs décoratifs depuis les temps anciens. Les pavages mosaïques ont été utilisés par les Romains pour décorer leurs murs et sols; d'autres civilisations ultérieures et en particulier la civilisation islamique a utilisé le pavage largement. Un des plus beaux exemples ont été faites par les Maures en Espagne dans leurs pavages de l'Alhambra à Grenade et La Mezquita de Cordoue. le pavage est une branche des mathématiques qui étudie comment les formes, appelées tuiles, peuvent être organisées pour remplir un plan sans lacunes. Il y a seulement trois pavages réguliers en utilisant exactement une sorte de polygones réguliers identiques disposées bord à bord, mais de nombreux autres types de pavages sont possibles, différentes dans les contraintes qui sont choisis à appliquer. En général, les côtés des polygones dans un pavage ne sont pas nécessairement identiques aux bords des carreaux, si ce serait le cas, alors le pavage est appelé un bord à bord tessellation. Un pavage normal est un pavage pour lequel chaque carreau est topologiquement équivalente à un disque, l'intersection de deux carreaux est un ensemble connexe unique ou un ensemble vide et l'ensemble des tuiles sont uniformément bornée. Un carrelage monohedral est un pavage dans laquelle toutes les tuiles sont congruents, il n'a qu'un seul protopavé, un variant spécial de ce carrelage est le carrelage isohédral, dans lequel toutes les tuiles sont dans la même classe de transitivité (i.e. transformées du protopavé sous la symétrie groupe de carrelage). Les types les plus communs de pavages sont les pavages réguliers et semi-réguliers (d'Archimède), que nous allons étudier plus en détail; autres types de pavages plus complexes sont le pavage de Voronoi (ou de Dirichlet) et le pavage apériodique par exemple les tuiles de Penrose. Les pavages peuvent être étendues aux espaces autres que le plan euclidien (par exemple l'espace euclidien de dimension trois), en utilisant ce que les mathématiciens appelés polytopes. Ces polyèdres peuvent être empilés dans un motif régulier ou cristal pour remplir l'espace en trois dimensions, ces pavages sont aussi appelés nids d'abeilles.

les pavages réguliers et semi-réguliers

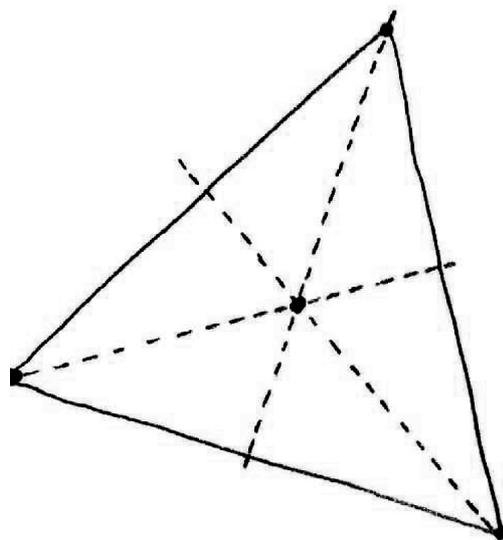
Un pavage est dit régulier si le groupe de symétrie du carrelage agit transitivement sur les drapeaux du carrelage (pour deux drapeaux, il existe une opération de symétrie qui envoi une sur l'autre). Ceci est équivalent au carrelage soit bord à bord par des polygones réguliers congruents. Il doit y avoir trois hexagones réguliers, quatre carrés ou six triangles équilatéraux à un sommet, ce qui donne les trois pavages réguliers. Si l'exigence de la transitivité de drapeau est détendu à une transitivité d'un sommet, tandis que la condition de bord à bord de l'arête est gardé, alors il y a huit pavages supplémentaires possibles, connus sous le nom pavages semi-réguliers ou d'Archimède. Une troisième variant de pavages réguliers est le pavage demi-régulière ou polymorphe, il n'y a pas de définition précise; ils sont essentiellement des pavages ayant plus d'une classe de transitivité de sommets (qui conduit à nombre infini de pavages possibles).



Représentation des pavages réguliers avec leurs drapeaux: 6^3 , 4^4 and 3^6

7.1.4.2. Groupes ponctuels discrets et groupes de «wallpaper»

Dans les arts et l'architecture, nous avons souvent besoin des motifs plus décoratifs que les pavages réguliers ou semi-réguliers, ce qui peuvent servir comme des réseaux de deux dimensions où un certain motifs peut être superposée sur eux avec une certaine transformation (i.e. un groupe de «wallpaper»). Précédemment, nous avons étudié le groupe de symétrie de l'espace euclidien (le groupe euclidien), maintenant, nous allons étudier les groupes de «wallpaper» qui sont des groupes de symétrie du plan euclidien et qui sont intermédiaires dans la complexité entre les groupes de frise et les groupes cristallographiques (le groupe d'espace). Avant de nous concentrer sur les groupes de «wallpaper», nous donnons une idée générale des groupes de symétrie en trois dimensions. Nous avons déjà mentionné que les groupes de symétrie peuvent être soit discret ou continu, et que les groupes de symétrie discrets sont de trois types: points, réseau infini et groupes de l'espace infini; nous avons également mentionné que les groupes de symétrie continues sont étudiés comme des groupes de Lie. En un dimension, les groupes d'isométrie (où, pour tous les points de l'ensemble des images sous les isométries est topologiquement fermé): le groupe trivial C_1 , les groupes isomorphes à C_2 , les groupes de symétrie discrets infinis isomorphes à \mathbb{Z} et à son groupe dièdre généralisée $Dih(\mathbb{Z})$ et le groupe isomorphe à \mathbb{R} et à son groupe dièdre généralisée $Dih(\mathbb{R})$. En deux dimensions, les groupes ponctuels discrets sont conjugués soit à des groupes cycliques C_1, \dots, C_n ou les groupes dièdres D_1, \dots, D_n , les groupes d'isométrie restants (où, pour tous les points de l'ensemble des images sous les isométries est topologiquement fermé): le groupe spécial orthogonal SO_2 et le groupe orthogonal O_2 . Le groupe SO_2 est également appelé le groupe de cercle S^1 et est constitué de l'ensemble des rotations autour d'un point fixe, et est la version continue de C_n ; tandis que O_2 est aussi appelé le groupe dièdre généralisée $Dih(S^1)$, et est constitué de toutes les rotations autour d'un point et les réflexions dans n'importe quel axe fixe par ce point. Pour les formes non bornées, les groupes d'isométrie supplémentaires peuvent inclure des translations; les fermés sont les sept groupes de frise et les dix-sept groupes de «wallpaper». Et les groupes constitués par les groupes de symétrie dans un dimension, et le groupe de toutes les translations dans la direction perpendiculaire (même avec des réflexions sur une ligne dans la première direction). En trois dimensions, les groupes ponctuels discrets (à conjugaison près) sont constitués de sept séries infinies et sept distincts; en cristallographie ils sont limités pour être compatibles avec la symétrie de translation discret d'un réseau cristallin. Cette restriction cristallographique des familles infinies de groupes ponctuels généraux donne trente-deux groupes cristallographiques ponctuelles (vingt-sept des séries infinies et cinq des autres), et les groupes ponctuels continus comprennent ceux de symétrie cylindrique et sphérique.



Représentation du groupe de symétrie ponctuelle discrète C_3 du triangle équilatéral

Revenons maintenant aux groupes de «wallpaper», nous allons nous concentrer sur les groupes de symétrie ponctuels discrets en deux dimensions à savoir les groupes cycliques et dièdres avec bien sûr la translation supplémentaire, ce qui signifie que chacun des groupes de «wallpaper» (dépouillés de la translation) peut être représenté par un groupe cyclique ou dièdre. Il est au total 17 groupes de papier peint. Il existe 17 groupes de «wallpaper» au total. Les groupes de «wallpaper» catégorisent les motifs par leurs symétries, des différences subtiles peuvent placer des motifs similaires dans les différents groupes, tandis que les motifs qui sont différents dans le style, la couleur, l'échelle ou d'orientation peuvent appartenir au même groupe. Une symétrie d'un motif est essentiellement un moyen de transformer le motif de sorte qu'il reste exactement le même après la transformation; un groupe de «wallpaper» est un groupe discret d'isométries du plan euclidien qui contient deux translations linéairement indépendants.

Groupe cyclique [2]

Gest appelé un groupe cyclique si $\exists n \in \mathbb{Z} \mid G = \langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$$G = C_n = \{C^0, C^1, \dots, C^{n-1}\},$$

par exemple $G = \{g^0, g^1, \dots, g^{n-1}, g = e^{\frac{2\pi i}{n}}\}$ est un groupe cyclique sous la multiplication de l'ordre n

Groupe dièdre [3]

pour tout polygone régulier à n arête,

il possède $2n$ différent symétries (n symétries de rotation et n symétries de réflexion)

$D_n = \langle r, s \rangle = \{r^k s^l \mid r^n = 1, s^2 = 1 \text{ et } s^{-1} r s = r^{-1}\}$ les rotations et les réflexions des ce polygone associés

Groupe «wallpaper» [4]

E_2 groupe de symétrie du plan euclidien, $L \subset \mathbb{R}^2$ est un réseau à 2 dimensions

$W \subset E_2$ est un groupe de «wallpaper» si son sous – groupe de translation

H est engendré par deux translation indépendant et son groupe ponctuel J est fini

$$L = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid h \in H, y = h(0_{\mathbb{R}^2})\} = \{n t_1 + m t_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}, (t_1, t_2) \text{ une base de } \mathbb{R}^2\}$$

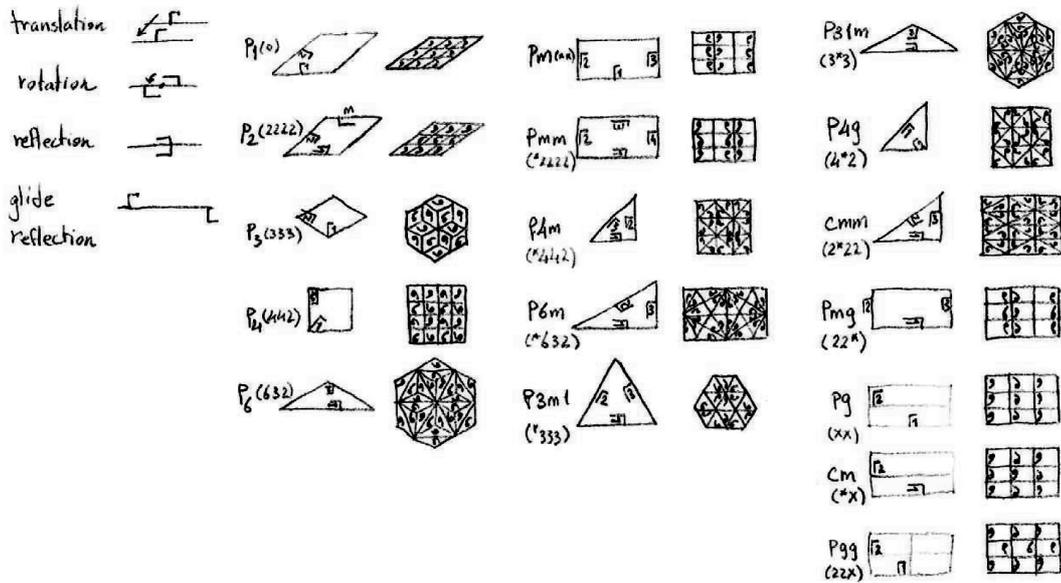
il n'y a que 5 types de réseaux : obliques, rectangulaire, rectangulaire centrée, carrées et hexagonales

Théorème de restriction cristallographique [4]

L'ordre de rotation dans un groupe de «wallpaper» ne peut être que 2,3,4 ou 6

On note les groupes «wallpaper» avec la notation cristallographique, le nom complet est composé de quatre symboles: le premier symbole représente le type de réseau, p pour primitive et c centrée. Ceci est suivi par un chiffre n indiquant les symétrie de rotation: 1 (aucun), 2, 3, 4 ou 6, les deux symboles suivants sont soit m , g ou 1. Un m (ou g) à la place de la troisième symbole signifie qu'il y a une ligne de réflexion (ou une ligne de réflexion glissée) perpendiculaire à l'axe x , tandis que 1 signifie qu'il n'y a pas de ligne de n'importe quel type. Enfin, le dernier symbole m (ou g) représente une ligne de réflexion (ou une ligne de réflexion glissée) à un angle α avec l'axe x , l'angle dépend du plus grand ordre de rotation comme suit: $\alpha = 90^\circ$ pour $n = 1, 2$; $\alpha = 60^\circ$ pour $n = 3, 6$; $\alpha = 45^\circ$ pour $n = 4$. La courte notation supprime des chiffres ou un m qui peut être déduit. Par exemple, le groupe $p3m1$ représente un groupe avec 120° rotation, une ligne de réflexion perpendiculaire à l'axe x , et aucune réflexion ou ligne de réflexion glissée à un angle de 60° . Les opérateurs de chaque groupe de «wallpaper» utilisent le symboles bien établis présentés dans le tableau suivant.

Les groupes de «wallpaper»



Représentation des opérateurs des groupes de «wallpaper»

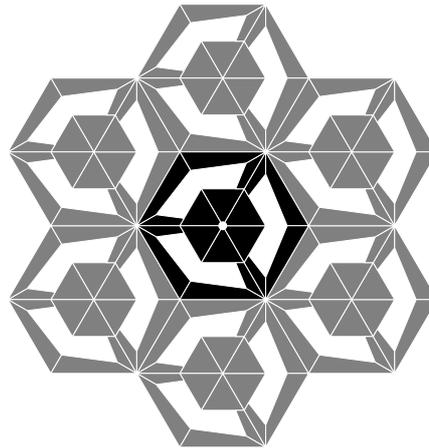
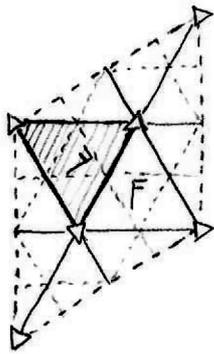
Dans les groupes de «wallpaper», nous avons trois types de réseaux: obliques, carrées et hexagonales, ce qui est naturel parce que nous l'avons mentionné plus tôt que les seuls pavages réguliers du plan sont carré, triangulaire et hexagonale, et chacun des groupes de «wallpaper» en avoir un de ces pavages réguliers comme son réseau.

Wallpaper group	crystallographic	shortened	point group	underneath lattice
1	p1	1	C ₁	oblique
2	p2	2	C ₂	oblique
3	pm	m	D ₁	rectangular
4	pg	m	D ₁	rectangular
5	cm	m	D ₁	rectangular
6	p2mm	2 mm	D ₂	rectangular
7	p2mg	2 mm	D ₂	rectangular
8	p2gg	2 mm	D ₂	rectangular
9	c2mm	2 mm	D ₂	rectangular
10	p4	4	C ₄	square
11	p4mm	4 mm	D ₄	square
12	p4gm	4 mm	D ₄	square
13	p3	3	C ₃	hexagonal
14	p3m1	3 m	D ₃	hexagonal
15	p31m	3 m	D ₃	hexagonal
16	p6	6	C ₆	hexagonal
17	p6mm	6 mm	D ₆	hexagonal

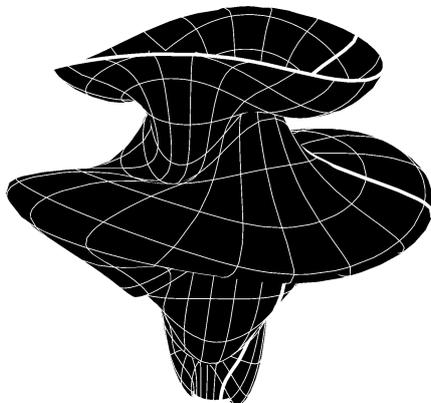
Représentation des 17 groupes de «wallpaper» avec leurs notations et réseaux

7.1.4.3. Conception en utilisant le groupe de «wallpaper»

Nous allons maintenant mettre l'accent sur l'un de ces groupes afin de montrer comment l'utiliser dans la conception architecturale, le groupe, nous allons étudier est $p3m1$. Ce groupe a un groupe ponctuel D_3 , un réseau hexagonal, trois centres rotation différents d'ordre 3 et trois réflexions dans les trois côtés d'un triangle équilatéral, et trois réflexions de glissées dans trois directions distinctes, dont les axes sont situés en mi-chemin entre les axes parallèles adjacents de réflexion. Le réseau hexagonal est construite par les vecteurs $\{t_1, t_2\}$ où t_1 est un vecteur de longueur minimum et $t_2 = R(t_1)$, avec R une rotation de 120° . si $J = D_3$, alors groupe ponctuel contient trois réflexions; avec les lignes de réflexions séparées par des angles de 60° , comme M est une réflexion dans D_3 , alors MR est une réflexion dont la ligne de réflexion fait un angle de 60° avec celle de M . Les lignes de réflexion pour D_3 doivent être des lignes de réflexion pour D_6 car D_3 est un sous-groupe de D_6 ; cela indique que D_3 peut agir de deux façons par rapport à un réseau hexagonal proposée. Les lignes de réflexion peuvent être $30^\circ, 90^\circ$ et 150° par rapport au t_1 . La rotation par 120° et la ligne de réflexion sur 30° génèrent le groupe $D_{3,l}$, où l signifie longue. Ce groupe contient une ligne de réflexion sur 150° , qui est la grande diagonale du parallélogramme et le groupe de «wallpaper» associé à $D_{3,l}$ est $p3m1$. De même, les lignes de réflexion peuvent être $0^\circ, 60^\circ$ et 120° par rapport au t_1 . La rotation par 120° et la ligne de réflexion sur 0° génèrent le groupe $D_{3,s}$, où s signifie court. Ce groupe contient une réflexion sur 60° , qui est la petite diagonale du parallélogramme et le groupe de «wallpaper» associé à $D_{3,s}$ est $p31m$.



Représentation d'un pavage utilisant le groupe de «wallpaper» $p3m1$ et montrent la domaine fondamental



Les paramètres de l'option choisie

$$\partial_T = 0.3, f_\rho = 1,$$

$$t_a = 0, t_{xa} = 1, t_b = 3, t_{xb} = 1, t_c = 2, t_{xc} = 2,$$

$$f_b = 0.08, f_o = 1,$$

$$f_a = 0.9, f_c = -0.6, f_d = 0.3,$$

$$\rho_a = 2.5, \rho_b = 2.9, \rho_c = 2,$$

$$\eta_a = 2, f_r = 0.11, \rho_r = 1, \eta_r = 2$$

Même que nous avons fait pour générer un grand nombre de surfaces qui sont candidats à la forme générale d'une conception à l'aide d'un petit algorithme, nous pouvons utiliser un autre algorithme pour automatiser le processus de dessin des éléments répétitifs. Par exemple, si nous tenons à couvrir la surface de la robe avec le pavage ci-dessus, nous aimerions écrire les instructions pour dessiner un élément, puis un processus itératif pour dessiner le reste.

L'algorithme de pavage de la surface

```

Un = 2 π; Vn = π (√3);
A = 7 (6); ndu = A; ndv = A; us = Un / ndu; vs = Vn / ndv;
F[u_, v_] := Fox[u,  $\frac{2v}{\sqrt{3}}$ ];

p = Table[F[u, v], {u, 0, Un, us}, {v, 0, Vn, vs}];
pm = Table[F[u, v], {u, 0.5 us, Un - 0.5 us, us}, {v, 0.5 vs, Vn - 0.5 vs, vs}];
pU = Table[F[u, v], {u, 0.5 us, Un - 0.5 us, us}, {v, 0, Vn, vs}];
pV = Table[F[u, v], {u, 0, Un, us}, {v, 0.5 vs, Vn - 0.5 vs, vs}];
datta = Flatten[p, 1];

cod = Table[, {j, 1, ndv - 1}];
Do[
  e = 1;
  cody = Table[, {i, 1, ndu / 3}];
  Do[
    Which[Mod[j, 2] == 1,
      cody[[e]] = F[i (us), j (vs)];
      , Mod[j, 2] == 0,
      cody[[e]] = F[(i + 2) (us) - 0.5 us, j (vs)];];
    e = e + 1;
    , {i, 1, ndu, 3}];
  cod[[j]] = cody;
  , {j, 1, ndv - 1}];
dattam = Flatten[cod, 1];

Sc = 0.5;
paul = Table[, {j, 1, ndv - 1}]; caul = Table[, {j, 1, 2}]; d = 1;
Do[
  c = 1;
  poly = Table[, {i, 1, ndu / 3}]; coly = Table[, {i, 1, ndu / 3}];
  Do[

    Which[Mod[j, 2] == 1,
      MP = cod[[j, c]];
      h1 = pU[[i, j]]; h2 = pU[[i + 1, j]]; h3 = p[[i + 2, j + 1]];
      h4 = pU[[i + 1, j + 2]]; h5 = pU[[i, j + 2]]; h6 = p[[i, j + 1]];
      H1 = MP + Sc (h1 - MP); H2 = MP + Sc (h2 - MP);
      H3 = MP + Sc (h3 - MP); H4 = MP + Sc (h4 - MP);
      H5 = MP + Sc (h5 - MP); H6 = MP + Sc (h6 - MP);
      a1 = H4 + ac (H5 - H4); a2 = H4 + ac (H3 - H4);
      b1 = H6 + ac (H5 - H6); b2 = H6 + ac (H1 - H6);
      c1 = H2 + ac (H1 - H2); c2 = H2 + ac (H3 - H2);
      α1 = h4 + cc (H5 - h4); α2 = h4 + cc (H3 - h4);
      β1 = h6 + cc (H5 - h6); β2 = h6 + cc (H1 - h6);
      γ1 = h2 + cc (H1 - h2); γ2 = h2 + cc (H3 - h2);
      η1 = h1 + nc (H1 - h1); η2 = h3 + nc (H3 - h3); η3 = h5 + nc (H5 - h5);

      poly[[c]] = Polygon[{{MP, H1, H2}, {MP, H2, H3}, {MP, H3, H4}, {MP, H4, H5}, {MP, H5, H6}, {MP, H6, H1},
        {H4, a2, α2, h4}, {a1, H4, h4, α1}, {H6, b1, β1, h6}, {b2, H6, h6, β2}, {H2, c1, γ1, h2}, {c2, H2, h2, γ2},
        {η2, h3, h4, α2}, {h4, h5, η3, α1}, {η3, h5, h6, β1}, {h6, h1, η1, β2},
        {η1, h1, h2, γ1}, {h2, h3, η2, γ2}}];

    , Mod[j, 2] == 0,
    Which[i == ndu - 2,
      MP = cod[[j, c]];
      h1 = p[[i + 2, j]]; h2 = p[[i + 3, j]]; h3 = pU[[1, j + 1]];
      h4 = p[[i + 3, j + 2]]; h5 = p[[i + 2, j + 2]]; h6 = pU[[i + 1, j + 1]];
      H1 = MP + Sc (h1 - MP); H2 = MP + Sc (h2 - MP);
      H3 = MP + Sc (h3 - MP); H4 = MP + Sc (h4 - MP);
      H5 = MP + Sc (h5 - MP); H6 = MP + Sc (h6 - MP);
      a1 = H4 + ac (H5 - H4); a2 = H4 + ac (H3 - H4);
      b1 = H6 + ac (H5 - H6); b2 = H6 + ac (H1 - H6);
      c1 = H2 + ac (H1 - H2); c2 = H2 + ac (H3 - H2);
      α1 = h4 + cc (H5 - h4); α2 = h4 + cc (H3 - h4);
      β1 = h6 + cc (H5 - h6); β2 = h6 + cc (H1 - h6);
      γ1 = h2 + cc (H1 - h2); γ2 = h2 + cc (H3 - h2);
      η1 = h1 + nc (H1 - h1); η2 = h3 + nc (H3 - h3); η3 = h5 + nc (H5 - h5);
    ]
  ]
]

```

```

poly[c] = Polygon[{MP, H1, H2}, {MP, H2, H3}, {MP, H3, H4}, {MP, H4, H5}, {MP, H5, H6}, {MP, H6, H1},
  {H4, a2, α2, h4}, {a1, H4, h4, α1}, {H6, b1, β1, h6}, {b2, H6, h6, β2}, {H2, c1, γ1, h2}, {c2, H2, h2, γ2},
  {η2, h3, h4, α2}, {h4, h5, η3, α1}, {η3, h5, h6, β1}, {h6, h1, η1, β2},
  {η1, h1, h2, γ1}, {h2, h3, η2, γ2}];
, Mod[j, 2] = 0,
Which[i == ndu - 2,
  MP = cod[j, c];
  h1 = p[[i + 2, j]]; h2 = p[[i + 3, j]]; h3 = pU[[1, j + 1]];
  h4 = p[[i + 3, j + 2]]; h5 = p[[i + 2, j + 2]]; h6 = pU[[i + 1, j + 1]];
  H1 = MP + Sc (h1 - MP); H2 = MP + Sc (h2 - MP); H3 = MP + Sc (h3 - MP); H4 = MP + Sc (h4 - MP); H5 = MP + Sc (h5 - MP); H6 = MP + Sc (h6 - MP);
  a1 = H4 + ac (H5 - H4); a2 = H4 + ac (H3 - H4); b1 = H6 + ac (H5 - H6); b2 = H6 + ac (H1 - H6); c1 = H2 + ac (H1 - H2); c2 = H2 + ac (H3 - H2);
  α1 = h4 + cc (H5 - h4); α2 = h4 + cc (H3 - h4); β1 = h6 + cc (H5 - h6); β2 = h6 + cc (H1 - h6); γ1 = h2 + cc (H1 - h2); γ2 = h2 + cc (H3 - h2);
  η1 = h1 + nc (H1 - h1); η2 = h3 + nc (H3 - h3); η3 = h5 + nc (H5 - h5);

  poly[c] = Polygon[{MP, H1, H2}, {MP, H2, H3}, {MP, H3, H4}, {MP, H4, H5}, {MP, H5, H6}, {MP, H6, H1},
    {H4, a2, α2, h4}, {a1, H4, h4, α1}, {H6, b1, β1, h6}, {b2, H6, h6, β2}, {H2, c1, γ1, h2}, {c2, H2, h2, γ2},
    {η2, h3, h4, α2}, {h4, h5, η3, α1}, {η3, h5, h6, β1}, {h6, h1, η1, β2},
    {η1, h1, h2, γ1}, {h2, h3, η2, γ2}];

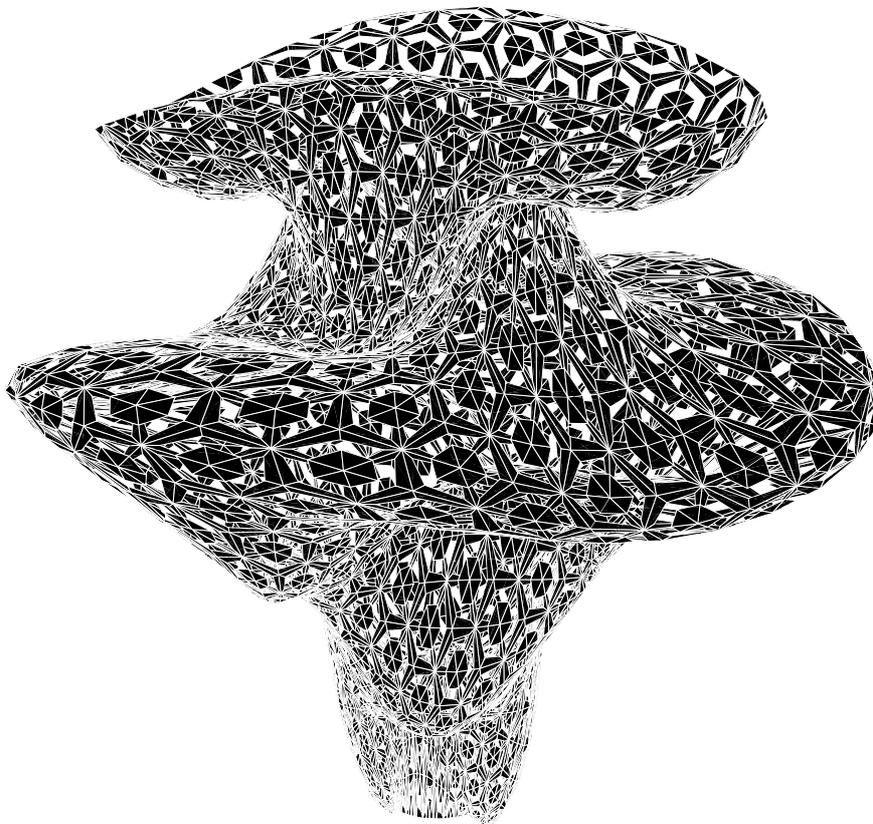
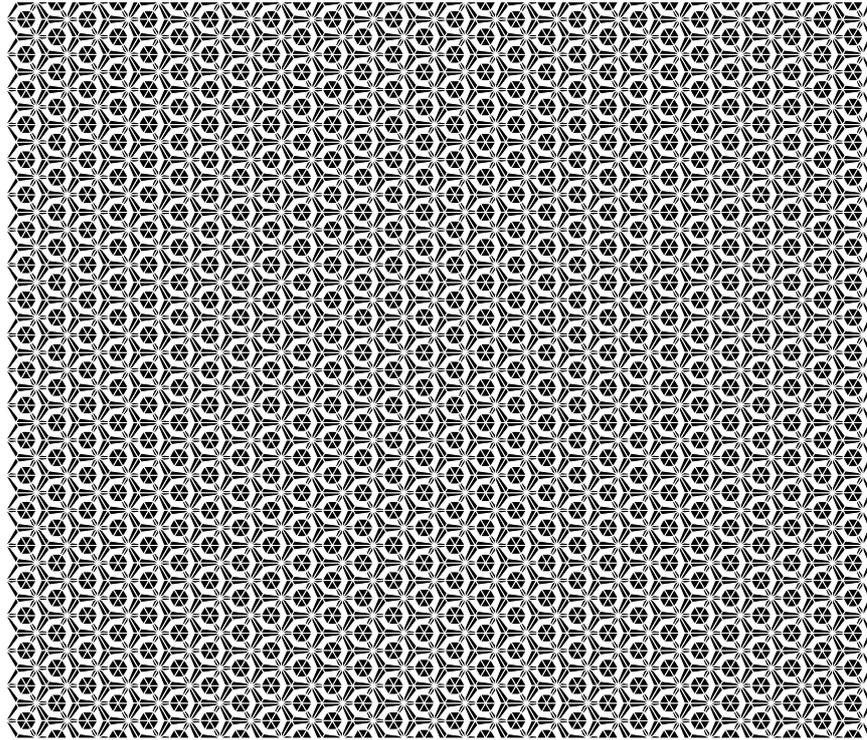
, i # ndu - 2,
  MP = cod[j, c];
  h1 = p[[i + 2, j]]; h2 = p[[i + 3, j]]; h3 = pU[[i + 3, j + 1]];
  h4 = p[[i + 3, j + 2]]; h5 = p[[i + 2, j + 2]]; h6 = pU[[i + 1, j + 1]];
  H1 = MP + Sc (h1 - MP); H2 = MP + Sc (h2 - MP); H3 = MP + Sc (h3 - MP); H4 = MP + Sc (h4 - MP); H5 = MP + Sc (h5 - MP); H6 = MP + Sc (h6 - MP);
  a1 = H4 + ac (H5 - H4); a2 = H4 + ac (H3 - H4); b1 = H6 + ac (H5 - H6); b2 = H6 + ac (H1 - H6); c1 = H2 + ac (H1 - H2); c2 = H2 + ac (H3 - H2);
  α1 = h4 + cc (H5 - h4); α2 = h4 + cc (H3 - h4); β1 = h6 + cc (H5 - h6); β2 = h6 + cc (H1 - h6); γ1 = h2 + cc (H1 - h2); γ2 = h2 + cc (H3 - h2);
  η1 = h1 + nc (H1 - h1); η2 = h3 + nc (H3 - h3); η3 = h5 + nc (H5 - h5);
  poly[c] = Polygon[{MP, H1, H2}, {MP, H2, H3}, {MP, H3, H4}, {MP, H4, H5}, {MP, H5, H6}, {MP, H6, H1},
    {H4, a2, α2, h4}, {a1, H4, h4, α1}, {H6, b1, β1, h6}, {b2, H6, h6, β2}, {H2, c1, γ1, h2}, {c2, H2, h2, γ2},
    {η2, h3, h4, α2}, {h4, h5, η3, α1}, {η3, h5, h6, β1}, {h6, h1, η1, β2},
    {η1, h1, h2, γ1}, {h2, h3, η2, γ2}];];

Which[j == 1,
  Which[i == ndu - 2,
    h6 = pU[[i + 1, j]]; h3 = pU[[1, j]];
    h4 = p[[i + 3, j + 1]]; h5 = p[[i + 2, j + 1]]; MP =  $\frac{h6+h3}{2}$ ;
    H3 = MP + Sc (h3 - MP); H4 = MP + Sc (h4 - MP); H5 = MP + Sc (h5 - MP); H6 = MP + Sc (h6 - MP);
    a1 = H4 + ac (H5 - H4); a2 = H4 + ac (H3 - H4); b1 = H6 + ac (H5 - H6);
    α1 = h4 + cc (H5 - h4); α2 = h4 + cc (H3 - h4); β1 = h6 + cc (H5 - h6);
    η2 = h3 + nc (H3 - h3); η3 = h5 + nc (H5 - h5);
    coly[c] = Polygon[{MP, H3, H4}, {MP, H4, H5}, {MP, H5, H6}, {H4, a2, α2, h4}, {a1, H4, h4, α1}, {H6, b1, β1, h6},
      {η2, h3, h4, α2}, {h4, h5, η3, α1}, {η3, h5, h6, β1}];];
, i # ndu - 2,
  h6 = pU[[i + 1, j]]; h3 = pU[[i + 3, j]]; h4 = p[[i + 3, j + 1]]; h5 = p[[i + 2, j + 1]]; MP =  $\frac{h6+h3}{2}$ ;
  H3 = MP + Sc (h3 - MP); H4 = MP + Sc (h4 - MP); H5 = MP + Sc (h5 - MP); H6 = MP + Sc (h6 - MP);
  a1 = H4 + ac (H5 - H4); a2 = H4 + ac (H3 - H4); b1 = H6 + ac (H5 - H6);
  α1 = h4 + cc (H5 - h4); α2 = h4 + cc (H3 - h4); β1 = h6 + cc (H5 - h6);
  η2 = h3 + nc (H3 - h3); η3 = h5 + nc (H5 - h5);
  coly[c] = Polygon[{MP, H3, H4}, {MP, H4, H5}, {MP, H5, H6}, {H4, a2, α2, h4}, {a1, H4, h4, α1}, {H6, b1, β1, h6},
    {η2, h3, h4, α2}, {h4, h5, η3, α1}, {η3, h5, h6, β1}];];
, j == ndv - 1,
  Which[i == ndu - 2,
    h6 = pU[[i + 1, j + 2]]; h1 = p[[i + 2, j + 1]]; h2 = p[[i + 3, j + 1]]; h3 = pU[[1, j + 2]]; MP =  $\frac{h6+h3}{2}$ ;
    H1 = MP + Sc (h1 - MP); H2 = MP + Sc (h2 - MP); H3 = MP + Sc (h3 - MP); H6 = MP + Sc (h6 - MP);
    b2 = H6 + ac (H1 - H6); c1 = H2 + ac (H1 - H2); c2 = H2 + ac (H3 - H2);
    β2 = h6 + cc (H1 - h6); γ1 = h2 + cc (H1 - h2); γ2 = h2 + cc (H3 - h2);
    η1 = h1 + nc (H1 - h1); η2 = h3 + nc (H3 - h3);
    coly[c] =
      Polygon[{MP, H1, H2}, {MP, H2, H3}, {MP, H6, H1}, {b2, H6, h6, β2}, {H2, c1, γ1, h2}, {c2, H2, h2, γ2}, {h6, h1, η1, β2},
        {η1, h1, h2, γ1}, {h2, h3, η2, γ2}];];
, i # ndu - 2,
  h6 = pU[[i + 1, j + 2]]; h1 = p[[i + 2, j + 1]]; h2 = p[[i + 3, j + 1]]; h3 = pU[[i + 3, j + 2]]; MP =  $\frac{h6+h3}{2}$ ;
  H1 = MP + Sc (h1 - MP); H2 = MP + Sc (h2 - MP); H3 = MP + Sc (h3 - MP); H6 = MP + Sc (h6 - MP);
  b2 = H6 + ac (H1 - H6); c1 = H2 + ac (H1 - H2); c2 = H2 + ac (H3 - H2);
  β2 = h6 + cc (H1 - h6); γ1 = h2 + cc (H1 - h2); γ2 = h2 + cc (H3 - h2);
  η1 = h1 + nc (H1 - h1); η2 = h3 + nc (H3 - h3);
  coly[c] =
    Polygon[{MP, H1, H2}, {MP, H2, H3}, {MP, H6, H1}, {b2, H6, h6, β2}, {H2, c1, γ1, h2}, {c2, H2, h2, γ2}, {h6, h1, η1, β2},
      {η1, h1, h2, γ1}, {h2, h3, η2, γ2}];];];

c = c + 1; , {i, 1, ndu, 3}];
paul[[j]] = poly;
If[j == 1 ∨ j == ndv - 1, caul[[d]] = coly; d = d + 1;];
, {j, 1, ndv - 1}];

```

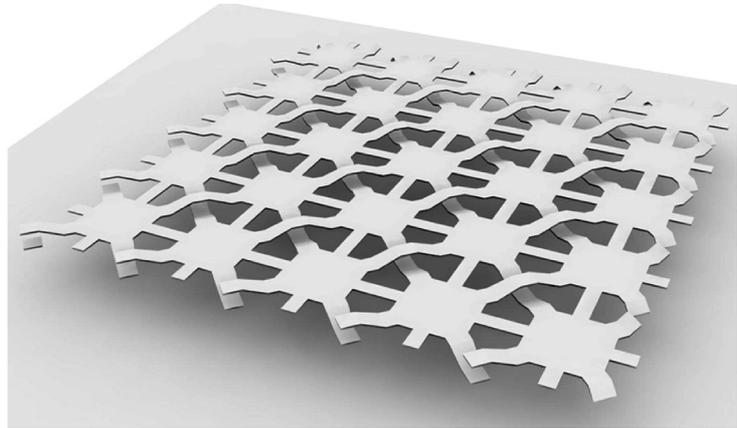
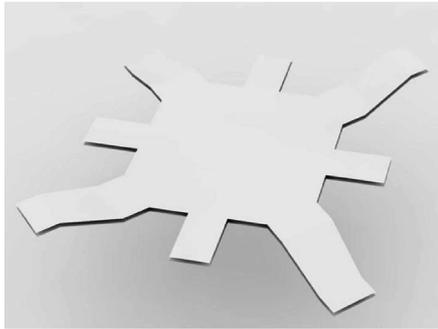
Le pavage appliqué



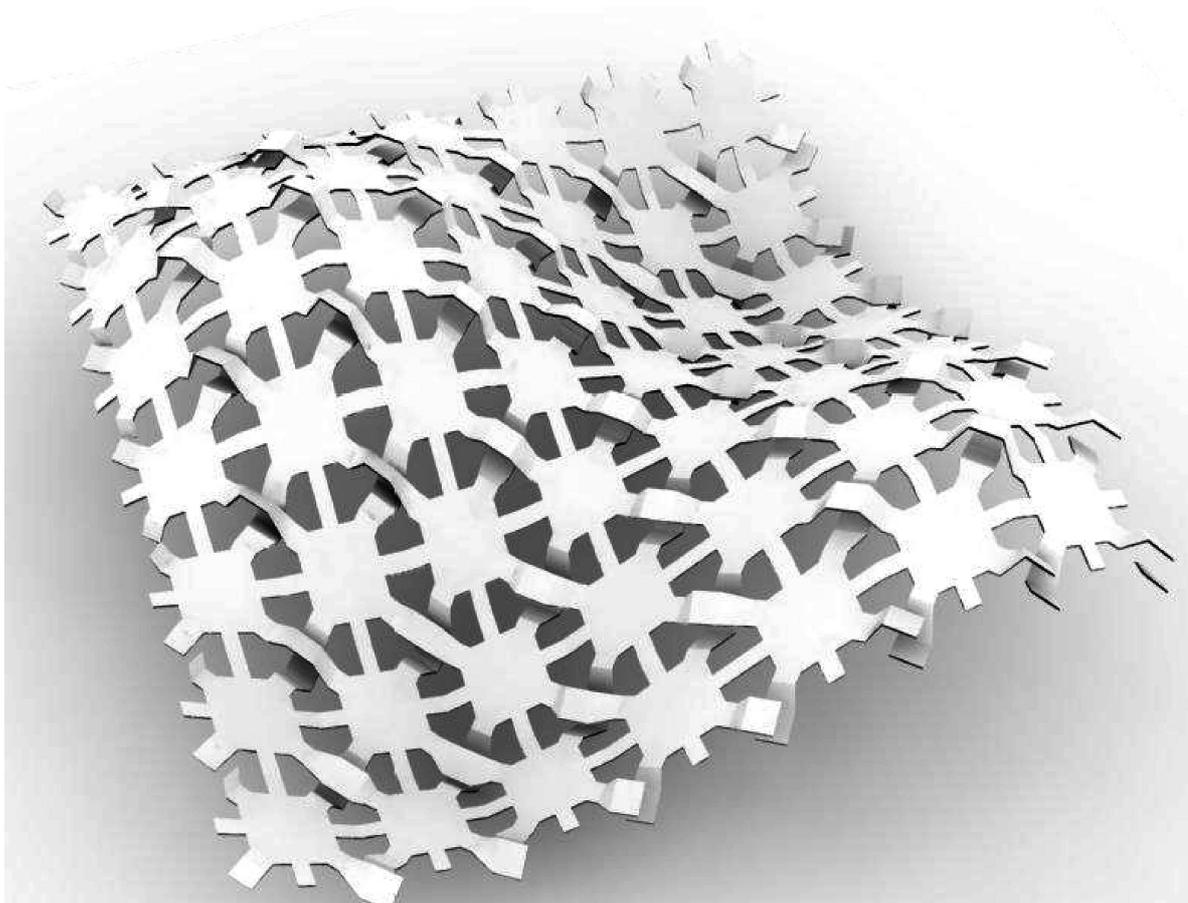
Représentation de l'application du pavage régulière à partir du plan à une variété 2D

Plus de conception en utilisant des groupes de «wallpaper» ($p2$)

Dans ce qui suit nous allons montrer plus d'applications de conception en utilisant les groupes de «wallpaper» à savoir les motifs entrelacés générés par les deux groupes ($p2$) et ($p4gm$), bien que ces groupes sont des groupes de symétrie du plan euclidien, une fois que le motif est généré dans le plan il pourrait être envoyé à n'importe quelle surface par une application.



Représentation d'un motif généré par le groupe de «wallpaper» ($p2$)



Représentation de l'image du motif de ($p2$) envoyé par une application sur une surface

Plus de conception en utilisant des groupes de «wallpaper» ($p4gm$)

Comme nous l'avons fait dans l'exemple ci-dessus, nous allons générer un motif dans le plan en utilisant le groupe de «wallpaper» (dans cet exemple: ($p4gm$)) et ensuite à une surface en utilisant une application.



Représentation d'un motif généré par le groupe de «wallpaper» ($p4gm$)



Représentation de l'image du motif de ($p4gm$) envoyé par une application sur une surface

7.2. Optimisation (méthode de recherche)

7.2.1. Problème d'optimisation

La méthode de recherche est essentiellement un terme collectif décrivant les méthodes heuristiques numériques à la recherche de solution pour les problèmes d'optimisation. Il y a un assez grand nombre de techniques, des algorithmes génétiques, et MonteCarlo aux automates cellulaires; bien sûr, nous n'allons pas définir chacune d'elles, mais plutôt nous allons donner des exemples qui peuvent être utiles lors du processus de conception. C'est ici, dans la méthode de recherche que nous allons utiliser quelques-unes des notions des processus évolutifs de biologie, formalisées dans les algorithmes d'optimisation, des algorithmes évolutifs et génétiques à savoir pour résoudre des problèmes d'optimisation. Optimisation est tout simplement le choix d'un meilleur élément en ce qui concerne certains critères de certain ensemble d'alternatives disponibles. Dans sa plus simple des cas, un problème d'optimisation consiste à maximiser ou à minimiser une fonction réelle en choisissant systématiquement des valeurs d'entrée à partir d'un ensemble autorisé et le calcul de la valeur de la fonction.

Problème d'optimisation [5]

A un ensemble, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, recherche : $x_0 \in A \mid \forall x \in A, f(x_0) \leq f(x)$ (minimisation) or $f(x_0) \geq f(x)$ (maximisation)

Beaucoup de problèmes du monde réel et théoriques peuvent être modélisés dans ce cadre. Le domaine A de f est appelé l'espace de recherche, tandis que les éléments de A sont appelés candidat (ou solutions possibles). La fonction f est appelée la fonction objective, une solution possible qui maximise ou minimise cette fonction objective est appelé une solution optimale. La formulation standard d'un problème d'optimisation est énoncé en termes de minimisation; généralement moins que l'objectif et la région réalisable sont convexes, il peut y avoir plusieurs minima locaux, qui sont définis comme suit:

x^* est un minimum local si $\exists \delta > 0 \mid \forall x \in A$ avec $\|x - x^*\| \leq \delta \implies f(x^*) \leq f(x)$

x^* est un maximum local si $\exists \delta > 0 \mid \forall x \in A$ avec $\|x - x^*\| \leq \delta \implies f(x^*) \geq f(x)$

Un grand nombre d'algorithmes proposés pour résoudre des problèmes non convexes ne sont pas capables de faire la distinction entre les solutions optimales locales et la solution optimale globale, les algorithmes et les méthodes utilisées dans la résolution de ces problèmes non convexes (c'est à dire la convergence vers une solution optimale en un temps fini) appartiennent à la domaine de l'optimisation globale. Il existe trois approches principales pour les problèmes d'optimisation globale: méthodes déterministes comme les méthodes de plan de coupe, les méthodes stochastiques comme les méthodes de Monte Carlo et (méta) heuristiques comme les algorithmes évolutifs. Dans cette recherche, nous allons nous concentrer principalement sur stochastiques et (méta) heuristiques, spécialement les algorithmes évolutifs.

La méthode de Newton [6]

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 et $f'(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$

supposons $f(x) = x^2 - a \implies f'(x) = 2x \implies x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2} \left(x_n - \frac{a}{x_n} \right)$ avec $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{a}$

l'équation de la limite : $x = x - C f(x)$, avec $C = \frac{1}{f'(x)}$, nous allons l'utiliser pour trouver la solution de $f(x) = x^2 - 3$

```
f[x_] := x^2 - 3; δf[f_][x_] := Evaluate[∂x f[x]] xo = 10.0; xp = xo;
```

```
Do[xc = xp -  $\frac{f[xp]}{\delta f[f][xp]}$ ; If[xc == xp, x* = xc; Break[], xp = xc];, {i, 1, 20}];
```

L'algorithme a été en mesure de trouver une approximation de la racine carrée de 3, $x = 1.73205$

7.2.2. Conception et la science

Même si cette recherche est centrée sur l'application de la géométrie moderne dans la conception architecturale, ce ne doit pas être interprété comme une tentative pour créer un modèle de conception rationnelle (c'est à dire de la conception «raison-centrée»); l'application de la géométrie ici sert à l'expansion intellectuelle de la compréhension des formes à concevoir. Compte tenu de la diversité des disciplines de conception, il n'y a pas une définition universelle de la conception, mais les théoriciens s'accordent, que la conception est sur la virtualité, pas la réalité et que, dans sa création, elle est à propos de quelque chose de vague, indéterminée, et incertain. Ce n'est pas nécessairement l'apparition soudaine d'une forme (pour cela être certain), mais plutôt sur une combinaison de pensées qui mènent à la création d'une form. Ralph et Wand fourni une définition formelle de la conception comme une spécification d'un objet, qui se manifeste par un agent, destiné à atteindre des objectifs, dans un environnement particulier, en utilisant un ensemble de composants primitifs, satisfaisant un ensemble d'exigences, soumis à des contraintes; à créer un dessin, dans un environnement. Théoriciens de la conception Dorst et Dijkhuis décrivent deux modèles de base principaux des processus de conception, «raison-centrée» et «action-centrée» [7]. Psychologue Herbert Simon est crédité de développement du modèle «raison-centrée» également connu comme le modèle rationnel. Il postule que les concepteurs tentent d'optimiser un candidat de conception pour des contraintes connues, et que le processus de conception est un plan, conduit et compris en termes de séquence discrète de stades. Ce modèle «raison-centrée» est basé sur la philosophie rationaliste selon laquelle, la conception doit être informé par la recherche et la connaissance d'une manière prévisible et contrôlée. Il est assez clair que la conception d'ingénierie tombe directement dans le modèle «raison-centrée», puisque la rationalité technique est le principe directeur du processus. Cependant, le modèle «action-centrée» postule que le concepteur utilise la créativité et les émotions pour générer des candidats de conception et que le processus de conception est improvisé avec aucune séquence universelle d'étapes apparent où l'analyse, la conception et la mise en œuvre sont inextricablement liés. Le modèle «action-centrée» est basé sur la philosophie empiriste, et comme le modèle «raison-centrée», il voit la conception guidées par la recherche et les connaissances. Cependant, contrairement au «raison-centrée», la recherche et la connaissance sont amenées par le sens commun, le jugement professionnel et l'expérience en fonction du contexte du concepteur, au lieu de par le processus prévisible et contrôlé. Il est clair que l'architecture appartient au modèle «action-centrée», car il n'y a pas de séquence universelle d'étapes de la conception et que le principe directeur central est à travers le bon sens et l'expérience professionnelle de l'architecte. Herbert Simon dans son livre *La science de l'artificiel*, développe une étude scientifique de la conception et les méthodologies de conception systématiques pertinentes aux nombreuses disciplines de conception. Cette étude scientifique de la conception ne nécessite pas que les actes de conception sont eux-mêmes scientifiques. Cette clarification de la relation entre conception et science est d'une importance cruciale en particulier dans les disciplines de conception «action-centrée» comme l'architecture, où l'intuition et le bon sens du concepteur domine le processus. L'intérêt croissant des architectes contemporains dans la science finit par créer une certaine confusion sur la nature de l'architecture comme une discipline de conception et une incompréhension significative des sujets scientifiques d'intérêt. Cette vulgarisation des théories scientifiques est vu à plusieurs reprises différentes dans l'architecture; reprises où les architectes les utilisent comme sources d'inspiration et parfois réclamer comme base pour les conceptions. Ces disciplines scientifiques varient de sciences naturelles comme la physique et la biologie aux sciences sociales comme la sociologie et la philosophie. Mais les sciences qui ont été les plus vulgarisé sont les mathématiques et la biologie, mais la position des mathématiques dans l'architecture est plus importante en raison de la relation intime entre la conception et la géométrie tandis que la biologie a un rapport plus critique à la conception architecturale. Tout au long de l'histoire de l'architecture la biologie était d'une manière ou d'une autre traînée dans le processus de conception, cela a continué jusqu'à ce jour. Mais maintenant, avec la montée des logiciels de CAO, des idées plus complexes de la biologie moderne sont amenées dans l'architecture, des idées comme la théorie de l'évolution, la génétique et la biologie du développement.

7.2.3. Notions de base de la biologie évolutive

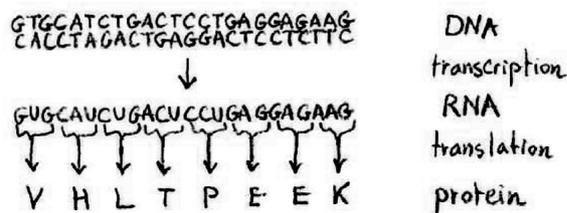
La raison pour laquelle les idées biologiques sont les plus associées et utilisées dans le processus de conception architecturale, sont les analogies directes, on peut faire entre l'architecture et la biologie. C'est parce que les caractéristiques des objets conçus comme des bâtiments, et les caractéristiques de la façon dont les conceptions sont produites se prêtent bien aux métaphores biologiques. Les idées de l'intégrité, de la cohérence et de la corrélation qui sont utilisées pour exprimer la relation organisée entre les parties d'un organisme biologique, peuvent être appliqués pour décrire des qualités similaires dans des objets bien conçu. L'adaptation de l'organisme à son environnement, sa forme, peut être comparée à la relation harmonieuse du bâtiment à son contexte. C'est également la biologie de toutes les sciences, qui a confronté d'abord le problème de la téléologie de la conception dans la nature; c'est pourquoi elle attire l'intérêt particulier des architectes. En regardant la conception architecturale du point de vue de la science de l'artificiel, nous voyons qu'elle peut emprunter un grand nombre de concepts de la biologie comme la science de la vie et ses systèmes. Concepts biologiques comme l'évolution, la classification, l'hérédité entre autres peuvent offrir beaucoup à l'architecture, sur les niveaux formels, abstraits et métaphoriques. L'utilisation de ces notions biologiques en général dans un sens abstrait formel et de les appliquer au processus de conception architecturale pourrait faire l'objet d'une thèse en elle-même, mais dans le cadre de cette recherche, nous ne faisons que passer à explorer certains aspects de la théorie de l'évolution et ses mécanismes. Dans le domaine de l'intelligence artificielle, nous trouvons une abstraction formelle de certaines notions biologiques de l'évolution dans une famille de méthodes de calcul appelé calcul évolutif; dont les algorithmes considèrent des méthodes d'optimisation métaheuristiques globales. Les algorithmes évolutionnaires et en particulier les algorithmes génétiques sont un sous-ensemble de calcul évolutif, qui utilisent des mécanismes inspirés par l'évolution biologique tels que la reproduction, la mutation et la sélection afin de résoudre des problèmes d'optimisation. Les solutions candidates jouent le rôle des individus dans une population et la fonction de la valeur sélective «fitness» détermine la qualité de la solution. Avant de définir les processus d'évolution sur un niveau formel pour utiliser dans la conception architecturale, nous devons d'abord comprendre ces processus dans leur contexte biologique. Nous commençons par donner une brève explication de la théorie de l'évolution et quelques-uns de ses mécanismes importants, comme l'hérédité, le croisement, la mutation et la sélection du point de vue de la biologie et ensuite nous montrons comment ils sont prélevée et utilisé dans le domaine de l'intelligence artificielle.

Évolution et variation génétique [8]

L'évolution peut être définie comme la variation dans les caractéristiques héritées des populations biologiques au cours des générations successives. L'idée est que toute vie sur terre descend d'un ancêtre commun; la spéciation répétée et la divergence de la vie peuvent être déduites à partir des ensembles communs de caractères biochimiques et morphologiques ou par des séquences d'ADN communs. La théorie scientifique de l'évolution a été présentée par Charles Darwin dans son livre *L'origine des espèces*, où il a expliqué l'évolution par la sélection naturelle. Vers le milieu du 20ème siècle, une synthèse moderne de l'évolution stimulée par le développement de la génétique des populations a connecté la sélection naturelle et la génétique mendélienne dans une théorie unifiée qui est généralement appliqué à n'importe quelle succursale de la biologie; cette synthèse moderne a été étendue pour inclure la biologie évolutive du développement. Cette synthèse moderne définit l'évolution comme la modification des fréquences alléliques dans une population causés par les quatre processus évolutifs: la sélection naturelle, la mutation, le flux de gènes et la dérive génétique; avec la sélection naturelle comme le mécanisme le plus important. L'étude moderne de ces fréquences alléliques dans une population est appelée la génétique des populations, elle étudie leurs changements et distribution sous l'influence des quatre processus évolutifs, tout en prenant en compte les facteurs de recombinaison génétique, subdivision de la population et de la structure et de tenter d'expliquer les phénomènes d'adaptation et de spéciation. Le phénotype d'un organisme individuel résulte de son génotype et de l'influence de l'environnement, une partie substantielle de la variation de phénotypes est causée par la différence entre les génotypes. La sélection naturelle va provoquer l'évolution si il y a assez de variation génétique dans une population. La variation génétique vient de remaniement des gènes par la reproduction sexuelle, la mutation dans le matériel génétique, la migration entre les populations (flux de gènes).

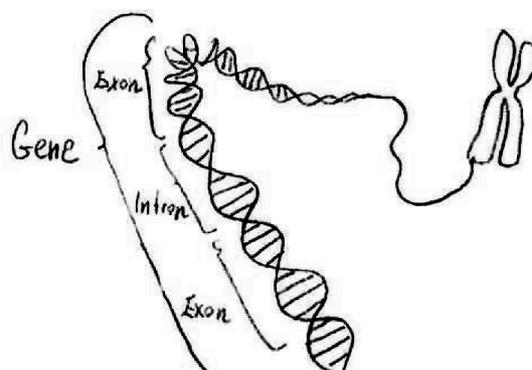
L'hérédité (recombinaison génétique) [8]

La génétique est la science des gènes, hérédité et la variation dans les organismes vivants. Elle concerne le procédé de transmission des caractères des parents aux enfants, y compris la structure moléculaire et la fonction des gènes, le comportement des gènes dans le contexte d'une cellule ou un organisme, la distribution et la variation des gènes et le changement dans les populations. La science moderne de la génétique commence au 19^{ème} siècle avec les travaux de Gregor Mendel, qui a observé que les organismes héritent des traits au moyen des unités discrètes d'héritage. Cette unité de transmission est définie dans le sens moderne comme un gène qui est une partie de séquence ADN qui code pour une fonction cellulaire connue. La séquence de nucléotides dans un gène est lue et traduit par une cellule pour produire une chaîne d'acides aminés qui à leur tour se replie spontanément en protéines; l'ordre des acides aminés dans une protéine correspond à l'ordre de nucléotides dans le gène. L'information contenue dans l'ADN est maintenue dans la séquence des unités répétitives le long de la chaîne d'ADN, ces unités sont de quatre types de nucléotides (A, T, G et C) et la séquence de nucléotides stocke l'information dans un alphabet appelé le code génétique. Lorsqu'un gène est lue par une cellule, la séquence ADN est copiée dans une molécule similaire appelé ARN par un processus appelé transcription; la copie d'ARN est ensuite alimenté à travers une structure appelée un ribosome, ce qui traduit la séquence d'ARN en une séquence d'acides aminés et les joint ensemble en une chaîne de protéine.



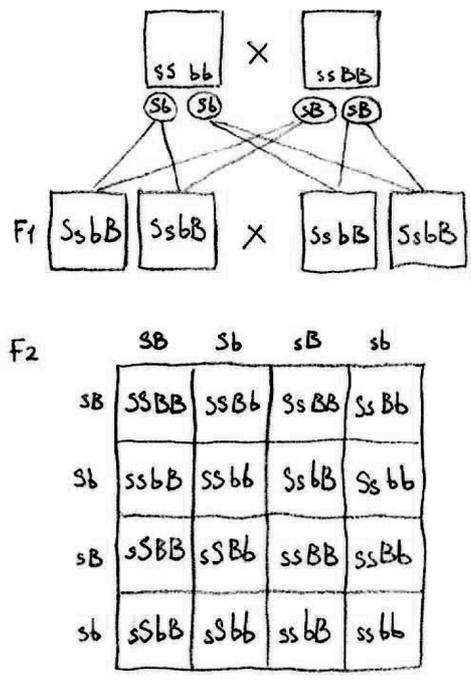
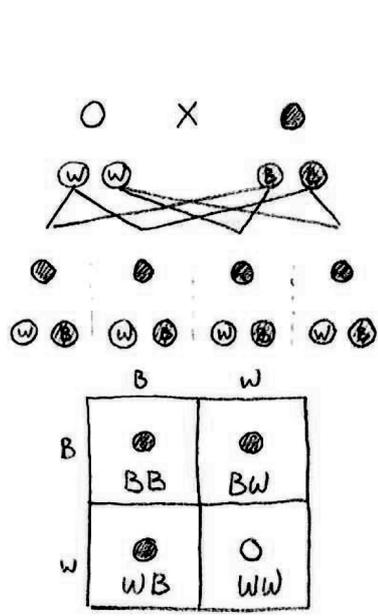
Représentation du processus de formation de la protéine par la lecture du code ADN

Les différentes copies d'un gène ne donnent pas toujours exactement les mêmes instructions, chaque forme unique d'un seul gène est appelée allèle. Parfois, différents allèles peuvent entraîner différents traits phénotypiques observables. La plupart des organismes multicellulaires ont deux ensembles de chromosomes (i.e. ils sont diploïdes) avec une copie de chaque gène sur chacun des deux chromosomes; si les deux allèles sont identiques l'organisme est homozygote et si les allèles sont différents, alors il est hétérozygote. Les chromosomes sont des structures organisées d'ADN, des protéines et d'ARN présentes dans les cellules. Il s'agit d'un seul morceau d'ADN enroulé contenant des nombreux gènes, des éléments régulateurs et d'autres séquences nucléotidiques, en plus des protéines qui emballent l'ADN et contrôlent les fonctions. L'ADN chromosomique codant pour la plupart ou la totalité de l'information génétique de l'organisme. La compression des chromosomes dupliqués lors de la mitose et méiose résultats dans la structure classique à quatre bras avec le centromère situé au milieu.



Représentation d'un gène et de son emplacement sur un chromosome

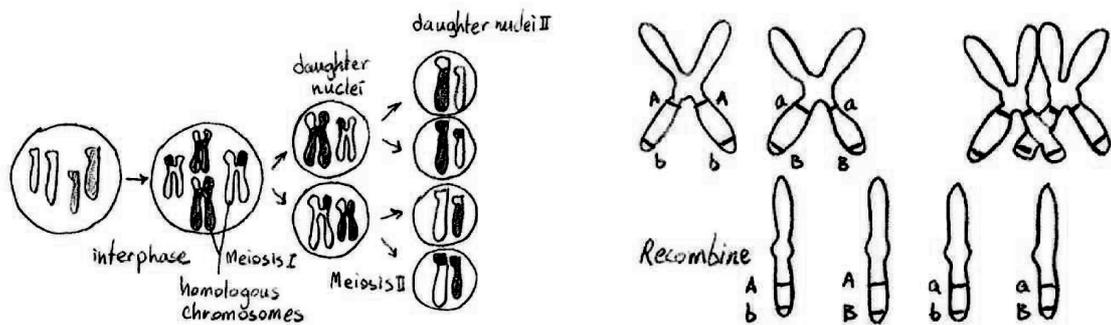
La plupart des animaux et certaines plantes ont des chromosomes paires (diploïdes), un contribué par le parent femelle dans son ovule et un par le parent mâle dans son sperme, qui sont reliés par recombinaison chromosomique lors de la fécondation. La recombinaison chromosomique joue un rôle essentiel dans la diversité génétique, ceci est expliqué par ce que l'on appelle aujourd'hui la génétique classique, qui intègre un modèle théorique de la génétique mendélienne avec la théorie chromosomique de l'hérédité. Nous allons maintenant donner deux exemples classiques de combinaisons alléliques avec un trait et avec deux traits pour illustrer la relation domination / récessivité et les lois de Mendel. La première loi de Mendel aussi connu comme la loi d'uniformité de la première génération, stipule que si les deux parent sont homozygotes, tous les descendants de la première génération F1 seront identiques. La deuxième loi de Mendel aussi connu comme la loi de disjonction des allèles, stipule que chaque individu possède une paire d'allèles pour un trait particulier et que chaque parent passe une copie (allèle) sélectionné au hasard d'une de cette paire à sa descendance. La dominante entre ces deux allèles détermine comment les descendants exprime ce trait. Par exemple, nous considérons la couleur de l'organisme comme un trait, le gène codant pour ce trait existe dans deux versions alléliques R (noir) dominante et w (blanc) récessif. Nous commençons par deux parents homozygotes, chacun a une paire d'allèles: RR et ww, ils vont produire une génération F1 hétérozygote dont chaque descendant a une paire d'allèles: Rw. En retour, ils produiront génération F2 (RR, Rw, Rw et ww) avec un rapport de 3:1 entre phénotypes dominants et récessifs; ce qui montre les première et deuxième lois. La troisième loi de Mendel aussi connu comme la loi d'indépendance dans la ségrégation des caractères (dihybridisme). Pour illustrer cela, nous faisons maintenant le mélange avec deux traits au lieu d'un, par exemple la couleur avec deux versions alléliques B (noir) et de b (blanc) récessif, et la longueur de la queue avec deux versions alléliques S (court) dominante et s (longue) récessif. Nous recommençons avec deux parents homozygotes: mâle (ss BB) et femelle (SS bb) ils produisent une génération F1 hétérozygote dont chaque descendant (Ss bB) a une paire d'allèles: Ss pour la couleur et bB pour la longueur de la queue. À leur tour, vont produire une génération F2 de 16 possibilités: 9 descendants (noir, queue courte), 3 descendants (blanc, queue courte), 3 descendants (noir, queue longue) et une descendants (blanc, queue longue). Alors que le premier exemple de mélange avec un trait résulte en un rapport de 3:1 entre dominante et récessif, le second exemple de mélange avec deux traits résulte dans les rapports 9:3:3:1. Ceci illustre le fait que chacun des deux gènes est hérité indépendamment, avec un rapport phénotypique de 3:1.



Représentation du mélange avec un trait génétique

Représentation du mélange avec deux traits génétiques

Mendel a conclu que différents traits sont hérités indépendamment les uns des autres, ce qui est vrai si ces deux gènes ne sont pas liés. La liaison génétique est la tendance de gènes qui sont situés proximale à l'autre sur le chromosome à être hérités ensemble au cours de la méiose, ce qui signifie qu'ils sont moins susceptibles d'être séparés sur différentes chromatides pendant le «crossover» chromosomique. Le «crossover» chromosomique est l'échange de matériel génétique entre les chromosomes homologues qui résulte en des chromosomes recombinés, c'est l'une des phases finales de la recombinaison génétique qui se produit au cours de la méiose. Il se produit lors de l'appariement des régions sur des chromosomes correspondant se brisent et ensuite se reconnecter à l'autre chromosome. La méiose est un type particulier de division cellulaire nécessaire pour la reproduction sexuelle chez les eucaryotes (organismes dont les cellules contiennent le noyau et d'autres structures fermées à l'intérieur de la membrane). La méiose commence avec une cellule diploïde contenant deux copies de chaque chromosome (un de la mère et l'autre du père); la cellule se divise deux fois, produisant quatre cellules haploïdes ou gamètes qui sont soit mâle ou femelle (spermatozoïdes ou ovules). Le «crossover» chromosomique compte également pour la variation génétique, car après l'échange de matériel génétique, les chromatides maintenues ensemble par le centromère sont plus identiques. Ainsi, lorsque les chromosomes vont en méiose 2 et se séparent, les cellules filles reçoivent des chromosomes avec allèles recombinés, ce qui a été vu dans le deuxième exemple où une descendance F1 (Ss bb) produit pour les gènes S et B après le «crossover», les gamètes recombinés SB, Sb, sb et sB.

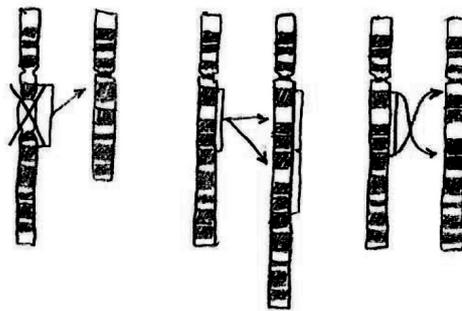


Représentation de la méiose montrant le «crossover»

Représentation du «crossover» des gènes A et B

Mutation [8]

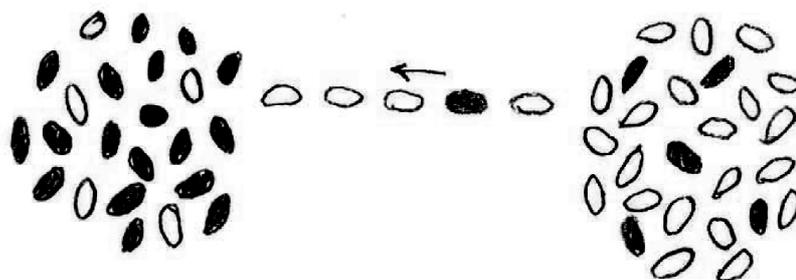
La prochaine mécanisme de variation génétique nous allons expliquer est la mutation du matériel génétique. La mutation est le changement de la séquence nucléotidique du génome d'un organisme, elle peut provenir des dommages non réparés des génomes de l'ADN ou de l'ARN, à partir des erreurs dans le processus de réplication, ou de l'insertion ou délétion de segments de l'ADN par des éléments génétiques mobiles. Les mutations peuvent ou pas produire des changements perceptibles dans le phénotype d'un organisme, d'où jouer un rôle dans le processus de l'évolution. Les mutations peuvent impliquer la duplication de grandes sections d'ADN, généralement par recombinaison génétique; ces duplications sont la principale source de matières premières pour l'évolution de nouveaux gènes. Des séquences d'ADN portables tels que le transposon dans les plantes et la séquence Alu dans le génome humain jouent le rôle de réguler l'expression des gènes, et comme ils se déplacent ils peuvent muter ou supprimer des gènes existants produisant une diversité génétique. Mutation peut être classé par l'effet sur: la structure, la fonction, la forme physique, l'impact sur la séquence de la protéine, par héritage ou par des cas particuliers. Les mutations dans la structure des gènes peuvent être à petite échelle comme des mutations ponctuelles, des insertions ou des suppressions ou à grande échelle comme des amplifications (duplication de gènes), les suppressions de grandes régions chromosomiques, translocation chromosomique ou perte d'hétérozygotie. Mutations par effet sur la fonction peuvent être par la perte ou le gain de fonction, mutations négatives dominante, mutations létales; mutations par effet sur la condition physique peuvent être nocifs, bénéfiques ou neutres, à savoir diminuer ou augmenter l'aptitude du phénotype de l'organisme.



Représentation de mutation par effet sur la structure: la suppression, la duplication et inversion

Le flux de gènes [8]

Il est le transfert des allèles ou des gènes d'une population à une autre, les migrations dans et hors d'une population peut être responsable d'un changement marqué dans la fréquence des allèles, l'immigration peut aussi entraîner l'ajout de nouveaux variants génétiques à la ressource génétique établie d'un espèces particulières. Un des facteurs les plus importants qui affectent le flux de gènes est la mobilité, comme une plus grande mobilité d'un individu tend à lui donner plus de potentiel migratoire. Le flux de gènes maintenue entre deux populations peuvent également conduire à une combinaison des deux ressources génétiques, ce qui réduit la variation génétique entre les groupes, c'est pour cette raison que le flux de gènes travaille contre la spéciation. Le flux de gènes entre les espèces comprend la formation d'organismes hybrides.



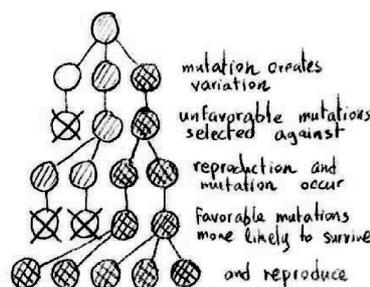
Représentation des flux de gènes entre deux populations de fréquences alléliques en noir et blanc

Dérive génétique [8]

C'est le changement dans la fréquence des allèles d'une génération à l'autre qui se produit parce que les allèles sont sujettes à l'erreur d'échantillonnage, par conséquent, quand les forces sélectives sont absentes ou relativement faible, la fréquence des allèles ont tendance à dériver vers le haut ou vers le bas de façon aléatoire. Cette dérive s'arrête quand un allèle devient finalement fixe, soit par la disparition de la population, ou un remplacement des autres alleles entièrement; la dérive génétique peut donc éliminer certains allèles d'une population due au hasard seulement. Même en l'absence de forces sélectives, la dérive génétique peut entraîner deux populations distinctes, même si elles ont commencé avec la même structure génétique à la dérive en deux populations divergentes avec différents ensembles d'allèles. Certaines théories suggèrent que la dérive génétique est éclipsé par d'autres forces évolutives stochastiques tels que l'auto-stop génétique, ce qui est le processus par lequel un allèle peut augmenter en fréquence en vertu d'être lié à un gène qui est positivement sélectionnée. Le temps pendant lequel un allèle neutre se fixe par la dérive génétique dépend de la taille de la population, avec fixation survenant plus rapidement dans les petites populations.

Sélection naturelle [8]

Après avoir expliqué le processus différent qui provoque des variations génétiques dans une population, nous allons maintenant expliquer la plus importante et aussi la plus ancienne du processus d'évolution, que la sélection naturelle. La sélection naturelle est le processus naturel progressive par lequel des traits biologiques deviennent plus ou moins commun dans une population en fonction de l'effet des traits hérités au succès reproducteur des organismes qui interagissent avec leur environnement. La sélection naturelle est un mécanisme clé de l'évolution développée avant l'existence d'une théorie valable sur l'hérédité et il agit sur le phénotype (les caractéristiques observables d'un organisme), mais c'est le génotype de l'organisme qui est héritée. Du point de vue de la synthèse moderne de l'évolution, la sélection naturelle est le processus par lequel la variation génétique qui améliorent la reproduction devient et reste plus fréquente chez les générations successives d'une population. Il en résulte nécessairement de trois faits simples: la variation héréditaire existe dans la population des organismes; organismes produisent plus descendants qui peut survivre et ces descendants varier dans leur capacité à survivre et se reproduire. Ces conditions produisent la concurrence entre les organismes pour la survie et la reproduction. Par conséquent, les organismes ayant des caractéristiques qui leur donnent un avantage sur leurs concurrents passent ces traits avantageux, tandis que les traits qui ne confèrent pas un avantage ne sont pas transmis à la génération suivante. Au centre de la sélection naturelle est le concept de la valeur sélective, il est défini par le succès de l'organisme à se reproduire (i.e. transmettre ses gènes), qui détermine la taille de sa contribution génétique à la génération suivante. Si un allèle augmente la valeur sélective plus que les autres allèles de ce gène, alors avec chaque génération cet allèle deviendra plus fréquent dans la population; de même, si un allèle provoque moins bonne condition physique, il finira par devenir plus rares. La sélection naturelle dans une population peuvent être classés en trois types différents; la première est une sélection directionnelle, qui est un changement dans la valeur moyenne d'un trait au cours du temps. La deuxième est la sélection perturbatrice, qui est la sélection des valeurs de traits extrêmes et elle résulte souvent en deux valeurs différentes deviennent plus courante, avec la sélection contre la valeur moyenne. Et la troisième est une sélection stabilisant, ce qui est contre les valeurs extrêmes de traits sur les deux extrémités, et qui provoque une diminution de la variance autour de la valeur moyenne et moins de diversité.

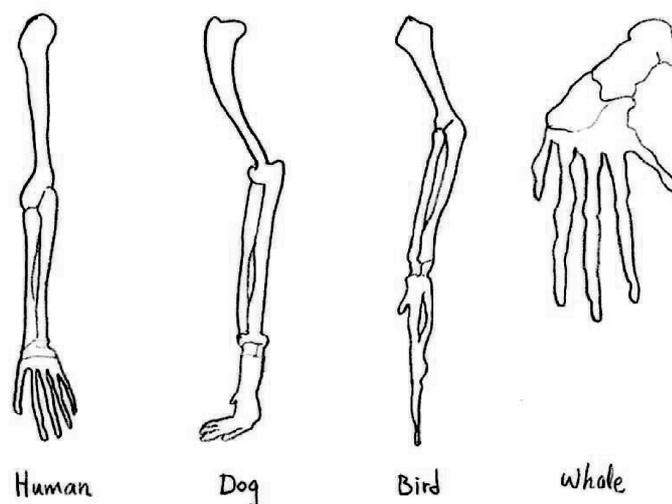


Représentation du mécanisme de la sélection naturelle avec une mutation provoquant la variation génétique

Un type spécial de la sélection naturelle est la sélection sexuelle, qui est une sélection pour tous les traits qui augmentent le succès d'accouplement en augmentant l'attractivité d'un organisme à des partenaires potentiels. Evolution influence tous les aspects de la forme et le comportement des organismes; les plus importants sont les adaptations comportementales et physiques qui sont le résultat de la sélection naturelle. Ces adaptations augmentent la valeur sélective en aidant des activités telles que la recherche de nourriture, éviter les prédateurs ou attirer les femelles. Les organismes peuvent également répondre à la sélection en coopérant les uns avec les autres en s'engageant dans une symbiose mutuellement bénéfique. Sur le long terme, l'évolution produit de nouvelles espèces en divisant des populations ancestrales des organismes en groupes qui ne peuvent pas ou ne veulent pas s'accoupler. Une idée fausse commune est que l'évolution a un but, en fait, il n'a pas de but et ne produit pas nécessairement une plus grande complexité. Bien que les espèces complexes ont évolué, ils se produisent comme un effet secondaire de l'augmentation du nombre global des organismes et forme de vie simple qui restent encore plus fréquent dans la biosphère. Nous devons aussi précise ici que la célèbre phrase du philosophe anglais Herbert Spencer: «la survie du plus apte» , décrivant la sélection naturelle pourrait être détourné en raison de la mauvaise compréhension de la signification des mots «survie» et «plus apte». Dans le contexte de la biologie évolutive, la survie est simplement une condition préalable à la reproduction, et le plus apte se référer à une différence de taux de reproduction d'une génération à l'autre. Par conséquent, il ne s'agit pas de savoir si l'organisme est en bonne forme physique, plus grand, plus rapide ou plus fort ou mieux dans n'importe quel sens. Dans la partie qui suit, nous allons montrer quelques-uns des résultats importants de l'impact de l'évolution sur les organismes, à commencer par l'adaptation.

Adaptation [8]

C'est le processus qui rend les organismes mieux adaptés à leur habitat, il peut également se référer à un trait qui est important pour la survie de l'organisme; adaptations sont produites par la sélection naturelle. L'adaptation est définie par le biologiste ukrainien Theodosius Dobzhansky comme le processus évolutif par lequel un organisme est mieux en mesure de vivre dans son habitat, où l'adaptabilité est le degré auquel un organisme est capable de vivre et de se reproduire dans un ensemble donné des habitats. Il définit également un trait adaptatif comme un aspect du développement de l'organisme, ce qui permet ou améliore la probabilité de survie et de reproduction de cet organisme. L'adaptation se fait par la modification progressive des structures existantes, par conséquent, des structures avec des organisations internes similaires peuvent avoir différentes fonctions dans les organismes liés. Au cours de l'évolution, certaines structures peuvent perdre leur fonction d'origine et devenir des structures rudimentaires, ces structures peuvent avoir peu ou pas de fonction dans une espèce actuelle, mais qui ont une fonction claire dans une espèce ancestrale ou dans une autre étroitement liées.



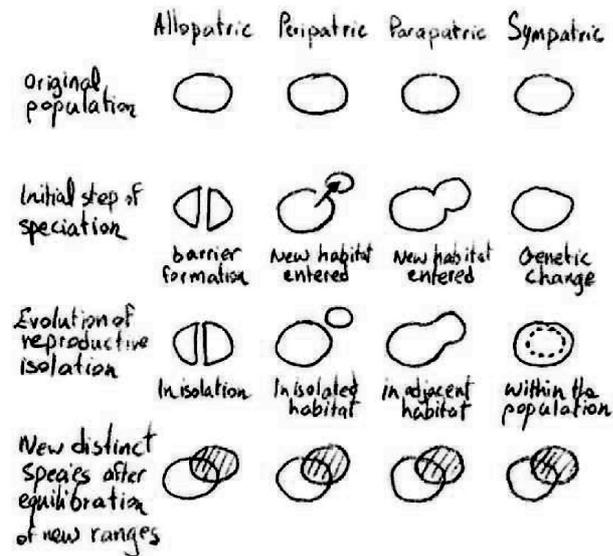
Représentation des os homologues adaptées dans différentes espèces: homme, chien, oiseaux et baleines

Co-évolution [8]

Interaction entre les organismes peut produire à la fois des conflits et de la coopération, lorsque l'interaction entre un pathogène et un hôte par exemple, est une co-opération, et c'est un conflit si elle est comprise entre un prédateur et proie. Ces espèces peuvent développer des ensembles assortis d'adaptations, à savoir l'évolution d'une espèce entraîne des adaptations dans la seconde espèce, qui à son tour provoquer des adaptations dans la première espèce. Ce cycle est appelé co-évolution.

Spéciation [8]

C'est le processus où une espèce diverge en deux ou plusieurs espèces de descendants. Il y a plusieurs façons de définir la notion d'espèce, le choix de la définition dépend des particularités de l'espèce concernée. Malgré la diversité des différents concepts d'espèces, ces différents concepts peuvent être placés dans l'une des trois grandes approches philosophiques: métissage, écologique et phylogénétique. Le mécanisme de spéciation le plus courant chez les animaux est la spéciation allopatrique, qui se produit dans des populations initialement géographiquement isolées, comme par fragmentation de l'habitat ou la migration. Le deuxième mécanisme de la spéciation est la spéciation péripatrique, qui se produit quand une petite population d'organismes devient isolée dans un nouvel environnement. Cela diffère de la spéciation allopatrique en ce que la population isolée est beaucoup plus petite que la population parentale, ici l'effet fondateur provoque une spéciation rapide après une augmentation de la consanguinité augmente la sélection sur la homozygote, ce qui conduit à une modification génétique rapide. Le troisième mécanisme de la spéciation est la spéciation parapatriques, ce qui est similaire à la spéciation péripatrique en ce qu'une petite population entre dans un nouvel habitat, mais diffère en ce que il n'y a pas de séparation physique entre ces deux populations. Au lieu de cela, la spéciation résulte de l'évolution des mécanismes qui réduisent le flux génétique entre les deux populations. Le dernier type de la spéciation est la spéciation sympatrique, où les espèces divergent sans isolement géographique ou de changement de l'habitat, il s'agit d'une forme rare de la spéciation. La spéciation est important dans la théorie de l'équilibre ponctuel, qui compte pour les courtes rafales de l'évolution dans les archives fossiles, entrecoupées par des périodes relativement longues de stase, où les espèces demeurent relativement inchangés.



Représentation des différents mécanismes de la spéciation

Extinction [8]

Un autre résultat de l'évolution est l'extinction, qui est la disparition de toute une espèce. Extinction n'est pas rare, tout comme les espèces apparaissent régulièrement par la spéciation et ils disparaissent par l'extinction. L'extinction est en fait le sort ultime de toutes les espèces.

Visualisation du processus évolutif simplifié

Dans la partie qui suit, nous allons montrer quelques utilisations des mécanismes évolutifs tels que la sélection naturelle et de l'hérédité dans les problèmes d'optimisation, mais avant cela, nous aimerions donner une visualisation de la façon dont ces idées peuvent être mises en pratique. Pour cela, nous allons donner un exemple simple en utilisant un ensemble de 10 colonnes, chaque colonne aura 10 unités de différentes échelles de gris, qui représenteront le marqueur génétique de cette colonne. L'idée, bien sûr, est de mélanger ces colonnes en utilisant les mécanismes de l'évolution pour générer une nouvelle famille de colonnes qui porterait les traits favorables; dans ce cas, nous avons privilégié les tons plus clairs qui signifie la colonne avec le ton le plus léger sera celui qui passe ses gènes à la génération suivante. Cet exemple n'est pas un algorithme génétique rigoureuse comme ils sont conçus de façon classique, mais il est là pour donner une idée plus claire de la façon dont les traits favorables seraient plus dominante dans une population au cours du temps, ce qui est la base de la sélection naturelle.

```
Tn = 2  $\pi$ ; Un = 2  $\pi$ ; Vn = 2  $\pi$ ;
ndu = 10; ndv = 10; ndT = 5000;
us = Un / ndu; vs = Vn / ndv;
Mat[u_, v_] := {u, v}
Pts = Table[Mat[u, v], {u, 0, Un, us}, {v, 0, Vn, vs}];
BH = Table[, {i, 1, ndu}, {j, 1, ndv}];
MH = Table[, {i, 1, ndu}, {j, 1, ndv}];
Gn = Table[, {k, 1, ndT}]; OGn = Table[, {k, 1, ndT}];
Hom = Table[, {k, 1, ndT}];
GDess = Table[, {k, 1, ndT}]; ODess = Table[, {k, 1, ndT}];
Comp = Table[, {i, 1, ndu}, {j, 1, ndv}];
OV = Table[, {i, 1, ndu}];

 $\lambda$  = 0;
Do[
  a = Pts[[i, j]]; b = Pts[[i+1, j]]; c = Pts[[i+1, j+1]]; d = Pts[[i, j+1]];
  Col = RandomInteger[{1, 9}]; BH[[i, j]] = Col;  $\lambda$  = BH[[i, j]] +  $\lambda$ ;
  Comp[[i, j]] = {GrayLevel[0.1 Col], Polygon[{a, b, c, d}]};
  , {i, 1, ndu}, {j, 1, ndv}];

OC =  $\lambda$ ; dess = Table[Graphics[Comp[[i]]], {i, 1, ndu}]; NInd = 0; OP = 0;
Do[

  Do[
    Do[If[j == 1, tp = BH[[i, j]]; tc = tp, tc = BH[[i, j]] + tp; tp = tc], {j, 1, ndv}];
    OV[[i]] = tc, {i, 1, ndu}];

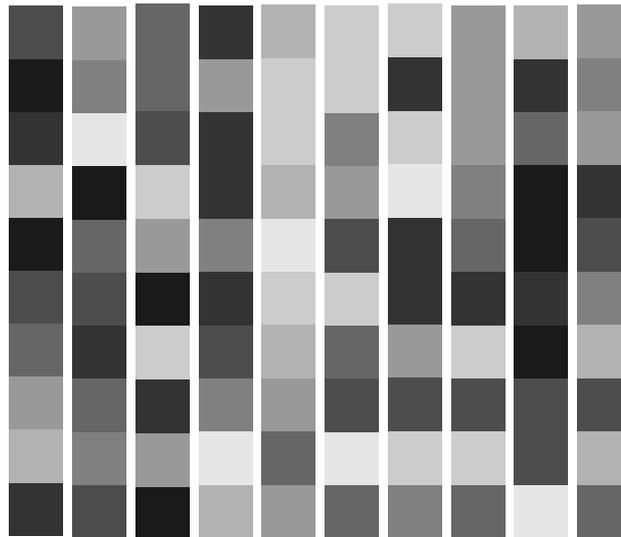
  Do[If[OV[[i]] == Max[OV], HV = i; Break[]];, {i, 1, ndu}];

  If[OC > OP, OP = OC; Hom[[k]] = OC; NInd = NInd+1;
  ODess[[k]] = Table[Graphics[Comp[[i]]], {i, 1, ndu}];
  OGn[[k]] = BH, OP = OP; Hom[[k]] = 0; ODess[[k]] = 0; OGn[[k]] = 0];

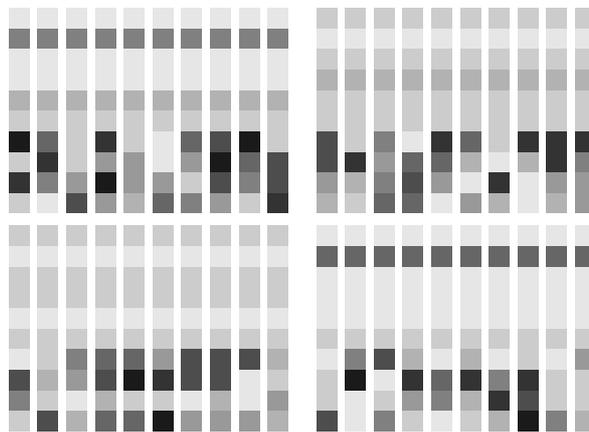
  Gn[[k]] = BH; GDess[[k]] = Table[Graphics[Comp[[i]]], {i, 1, ndu}];
  cros = RandomInteger[{0, 1}];  $\lambda$  = 0;

  Do[
    a = Pts[[i, j]]; b = Pts[[i+1, j]]; c = Pts[[i+1, j+1]]; d = Pts[[i, j+1]];
    Col = RandomInteger[{1, 9}];
    Which[
      cros == 0, If[j  $\geq$  5, MH[[i, j]] = BH[[HV, j]], MH[[i, j]] = Col],
      cros == 1, If[j  $\leq$  5, MH[[i, j]] = BH[[HV, j]], MH[[i, j]] = Col];
     $\lambda$  = MH[[i, j]] +  $\lambda$ ; Comp[[i, j]] = {GrayLevel[0.1 MH[[i, j]]], Polygon[{a, b, c, d}]};
    , {i, 1, ndu}, {j, 1, ndv}];
  OC =  $\lambda$ ; BH = MH;
  , {k, 1, ndT}];

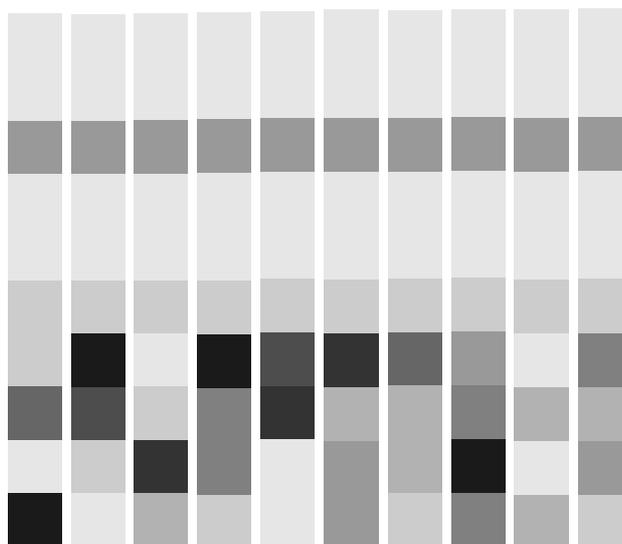
q = 1;
HomC = Table[, {q, 1, NInd}]; ODessC = Table[, {q, 1, NInd}]; OGnC = Table[, {q, 1, NInd}];
Do[
  If[Hom[[k]]  $\neq$  0, HomC[[q]] = Hom[[k]]; OGnC[[q]] = OGn[[k]]; ODessC[[q]] = ODess[[k]];
  q = q+1];
  , {k, 1, ndT}];
```



Représentation de la population initiale des colonnes avec des différentes teintes de gris



Représentation des étapes intermédiaires où les tons de la population ont été s'allègent



Représentation de la dernière génération après 5000 itérations avec des tons plus clairs

7.2.4. Optimisation en utilisant un algorithme génétique

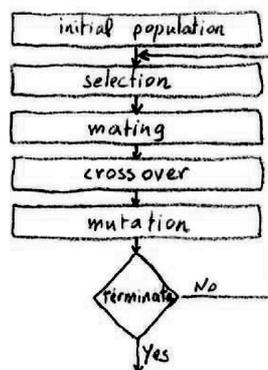
Maintenant que nous avons donné une brève explication de l'évolution biologique et de ses mécanismes, nous pouvons commencer à définir une abstraction formelle de ces processus à savoir de calcul évolutif qui est un sous-champ de l'intelligence artificielle. Le calcul évolutif contient des problèmes d'optimisation continue et combinatoires, dont les algorithmes sont des méthodes d'optimisation globale avec une caractère métaheuristique (stochastique) d'optimisation et sont la plupart du temps appliqué pour aux problèmes sans dérivés connus. Un sous-ensemble de calcul évolutif sont les algorithmes évolutionnaires qui, comme nous l'avons mentionné plus tôt, utilisent des mécanismes de l'évolution biologique sous une forme abstraite.

Les algorithmes évolutionnaires utilisent des procédés biologiques de l'évolution [9]

1. Générer la population initiale au hasard
2. Évaluer l' aptitude de chaque individu dans cette population
3. Répéter l' opération sur cette génération jusqu' à la fin
 - 3.1. Sélectionnez la personne la mieux appropriées pour la reproduction
 - 3.2. Reproduire de nouveaux individus par «crossover» et mutation
 - 3.3. Évaluer l' aptitude des nouveaux individus
 - 3.4. Remplacer les moins aptes dans la population par les nouveaux individus

Les algorithmes génétiques [10]

Un algorithme génétique est une heuristique de recherche (méta) qui appartient à la catégorie plus large des algorithmes évolutionnaires, il imite le processus de l'évolution naturelle, et est couramment utilisée pour générer des solutions utiles aux problèmes de optimisation. Comme nous l'avons mentionné plus tôt pour les algorithmes évolutionnaires en général, les algorithmes génétiques utilisent des mécanismes inspirés par l'évolution comme l'hérédité, la mutation, la sélection et le «crossover». Dans les algorithmes génétiques, une population des solutions candidates appelé (phénotypes) à un problème d'optimisation est évolué vers des meilleures solutions. Chaque solution candidate a son chromosome ou génotype qui peut être muté et modifié; traditionnellement ces génotypes sont représentés comme des chaînes de caractères binaires de 0 et de 1, mais d'autres codages sont possibles. L'évolution commence généralement à partir d'une population d'individus générés aléatoirement et est un processus itératif, avec la population de chaque itération appelé une génération. Dans chaque génération l'aptitude de chaque individu de la population est évaluée; la valeur sélective est généralement la valeur de la fonction objective dans le problème d'optimisation à résoudre. Les individus plus en forme sont stochastiquement choisis parmi la population actuelle, et le génome de chaque individu est recombinaison et peut-être mutés au hasard pour former une nouvelle génération. La nouvelle génération de solution candidate est ensuite utilisé dans la prochaine itération de l'algorithme. Généralement, l'algorithme se termine quand soit un nombre maximum de générations a été produit, ou un niveau de valeur sélective satisfaisante a été trouvée pour la population.



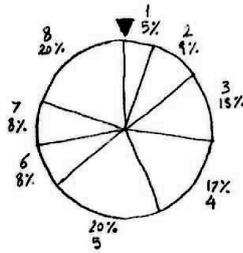
Représentation du diagramme d'un algorithme génétique simple

Encodage [11]

Avant un algorithme génétique peut être mis à travailler sur un problème, une méthode est nécessaire pour encoder les solutions possibles à ce problème en une forme afin qu'un ordinateur peut les traiter. Une approche courante consiste à encoder des solutions comme des chaînes de caractères binaires, le moyen le plus populaire d'encodage binaire est de la forme: chromosome = 1 101 100 100 110 110. Il y a beaucoup d'autres façons d'encodage, par exemple, l'encodage de la valeur (nombres entiers ou réels) est de la forme: chromosomes = 1.2 ... 6.3 ou l'encodage de permutation (permutation des entiers) est de la forme: chromosome = 2 5 6 1 3 4. Dans l'encodage binaire, le chromosome dans sa forme binaire représente le génotype tandis que la valeur décodée de l'individu est son phénotype, où les chaînes de caractères de n bits peuvent représenter 2^n entiers. Par exemple, dans une population d'entiers $x = 0, \dots, 15$ chaque entier (phénotype particulier) est représenté par une chaîne de caractères de 4 bits avec $x^L = 0$ a un génotype de (0000) et $x^U = 15$ a un génotype de (1111). En général la chaîne de caractères de n bits ($s_1 \dots s_n$) est décodé par la formule $D(s_1 \dots s_n) = \sum_{j=0}^{n-1} 2^j s_{n-j}$ et de trouver la valeur de phénotype x de ce génotype ($s_1 \dots s_n$) qui est entre les deux x^L et x^U nous utilisons la formule de conversion $x = x^L + (x^U - x^L) D(s_1 \dots s_n) / (2^n - 1)$. Ce décodage est important car il est sur le phénotype que nous mesurons la valeur sélective. Initialement nombreuses solutions individuelles sont générés habituellement au hasard pour former une population initiale. Traditionnellement, la population est générée de façon aléatoire, ce qui permet toute la gamme des solutions possibles.

Opérateurs génétiques et sélection [11]

Opérateurs génétiques sont utilisés dans les algorithmes génétiques pour maintenir la diversité génétique, qui est nécessaire pour le processus de l'évolution, les opérateurs génétiques sont analogues à ceux qui se produisent dans la nature à savoir, la sélection, le «crossover» et la mutation. En plus de ces opérateurs, il y a d'autres paramètres importants d'un algorithme génétique, par exemple la taille de la population, qui dépend normalement de la nature du problème d'optimisation. Il est le premier opérateur génétique appliqué sur la population; de la population, les chromosomes sont choisis pour être les parents pour faire le «crossover» et de produire des descendants. Selon la sélection naturelle dans l'évolution biologique des individus les plus aptes doivent survivre et créer une nouvelle progéniture; ici la sélection dans un algorithme génétique diffère fondamentalement de sélection naturelle dans la nature téléologique. Dans les algorithmes génétiques, nous visons des solutions optimales tandis que la sélection naturelle est aveugle et le plus apte dans la nature ne signifie pas la meilleure en aucune façon physique, il se réfère uniquement à la capacité de produire une descendance. Après avoir clarifié ce point, nous définissons l'opérateur de sélection comme les mécanisme qui extrait un sous-ensemble des gènes à partir d'une population existante selon une définition de la qualité (valeur sélective). La fonction de la valeur sélective quantifie l'optimalité d'une solution (chromosome) afin qu'une solution particulière peut être classé contre toutes les autres solutions. Il existe de nombreux types des opérateurs de sélection, tous choisissent essentiellement de la population actuelle les chaînes de caractères dessus de la moyenne et insèrent leurs multiples exemplaires dans la piscine de l'accouplement de manière probabiliste. Les opérateurs de sélection les plus courants sont la sélection de la roue de la roulette (sélection proportionnelle à la valeur sélective), la sélection de rang, la sélection de Boltzmann, la sélection de tournoi et la sélection de l'état stable. La de sélection de Boltzmann est un procédé utilisé pour minimiser ou maximiser une fonction, il simule le processus de refroidissement lent du métal en fusion pour obtenir la valeur minimum de la fonction dans un problème de minimisation. Nous allons nous concentrer principalement sur la sélection de la roue de la roulette. La sélection de la roue de la roulette repose sur la probabilité de la $i^{\text{ème}}$ chaîne de caractères dans la population où $p_i = f_i / \sum_{i=1}^n f_i$ avec f_i est la valeur sélective de la $i^{\text{ème}}$ chaîne de caractères exprimée en $f(x)$ où f est la valeur sélective, n est le nombre des individus dans la population et $n \times p_i$ est le nombre prévu. La chance d'un individu d'être sélectionné est proportionnelle à valeur sélective, plus ou moins des valeurs sélectives de ses concurrents. Par exemple, la roue de la roulette simule 8 individus avec des valeurs sélectives f_i marquée à la circonférence; comme le 5^{ème} individu a une valeur sélective plus que les autres, la roue de la roulette le choisirait plus que les autres. L'aptitude de l'individu est calculé quand la roue de la roulette est lancée 8 fois, et à chaque fois sélectionne une instance de la chaîne de caractères, choisi par le pointeur de la roue, avec le comte prévu = $(n = 8) \times p_i$.



Représentation de la sélection par la roue de la roulette d'une population de 8 individus

«Crossover» et Mutation [11]

Le second opérateur génétique est le croisement, elle combine deux chromosomes ou parents afin de produire une nouvelle progéniture de chromosome. L'idée derrière le «crossover» est que le nouveau chromosome peut être meilleur que les deux parents si il a les meilleures caractéristiques de chacun des parents, le «crossover» sélectionne les gènes des chromosomes parents et crée une nouvelle progéniture. L'opérateur de croisement dispose également de divers types: un ou deux points de croisement, uniformes, arithmétiques et croisements heuristiques, ces opérateurs sont choisis en fonction de la façon dont les chromosomes sont encodés. L'un ou deux point de croisement sélectionne un ou deux points dans un chromosome et échange les deux chromosomes des parents entre ces points pour produire une descendance. L'opérateur de croisement uniforme décide avec une certaine probabilité connu comme le rapport de mélange, lequel des parents contribuera les valeurs de gènes dans les chromosomes de la progéniture, il se mélange au niveau du gène, au lieu de au niveau du segment. L'opérateur de croisement arithmétique combine linéairement les vecteurs des deux chromosomes des parents pour produire deux nouveaux descendants selon les équations: descendant 1 = (a) parent 1 + $(1 - a)$ parent 2 et descendant 2 = $(1 - a)$ parent 1 + (a) parent 2 avec un facteur de pondération aléatoire. L'opérateur de croisement heuristique utilise les valeurs sélectives des deux chromosomes parents pour déterminer la direction de la recherche selon les équations: descendants 1 = meilleur parent + r (meilleur parent - pire parent) et descendants 2 = r meilleur parent, avec un nombre aléatoire r entre 0 et 1. Nous allons nous concentrer principalement sur l'opérateur de croisement d'un point. L'opérateur de croisement d'un point sélectionne au hasard un point de croisement puis copie tout ce qui est avant ce point du premier parent, puis tout ce qui suit du deuxième parent, ce serait se présenter comme suit parent 1 = 0 1 | 1 0 1 et parent 2 = 1 1 | 0 0 1, alors descendant 1 = 0 1 | 0 0 1 et descendant 2 = 1 1 | 1 0 1 avec le signe vertical représentant le point de croisement. Après une croisement est réalisée, la mutation a lieu. Mutation se produit au cours de l'évolution en fonction d'une probabilité de mutation définie par l'utilisateur, généralement fixé à une valeur assez faible. Mutation modifie une ou plusieurs valeurs dans un chromosome, ce qui peut entraîner des nouvelles valeurs de gènes étant ajoutés au patrimoine génétique, avec ces nouvelles valeurs de gènes, l'algorithme génétique peut être en mesure d'arriver à une meilleure solution que ce qui était possible auparavant. La mutation est une partie importante de la recherche en génétique, qui aide à prévenir la population de stagner en tout optima locaux. Il existe également différents types de mutations en fonction de la façon dont les chromosomes sont encodés, des types comme renverser bit, limite, non uniforme, uniforme et gaussien. L'opérateur de mutation limite, remplace la valeur du gène choisi par la partie supérieure ou la limite inférieure pour ce gène (choisi au hasard); Cette mutation ne peut être utilisé que pour l'encodage de la valeur. La mutation non uniforme augmente la probabilité telle que la quantité de la mutation sera proche de 0 lorsque la génération augmente. La mutation uniforme remplace la valeur d'un gène choisi avec une valeur aléatoire uniforme choisie par les utilisateurs et spécifiée entre la limite supérieure et inférieure pour ce gène. L'opérateur de mutation gaussienne ajoute une valeur gaussienne aléatoire distribuée au gène choisi; la nouvelle valeur de gène est tronqué si elle tombe à l'extérieur des bornes supérieures ou inférieures pour ce gène spécifiés par l'utilisateur. Nous allons nous concentrer principalement sur le renverser bit; cette mutation inverse tout simplement la valeur d'un gène choisi de dire de 0 à 1 et 1 à 0. Ce type de mutation peut être utilisée uniquement pour l'encodage binaire de la manière suivante: descendant = 0 1 0 1 1 est mutée au descendant = 0 0 0 1 1 avec la mutation sur le gène marqué en gras.

Nous allons maintenant donner un exemple d'un algorithme génétique pour optimiser la fonction objective $f(x) = x^2$

```

ndu = 2 (2); ndv = 5; Xlow = 0; Xup = 31;
f[X_] := X^2; Opt = 2000;

Fsum = 0; l = 1;
While[Fsum ≤ Opt,
  If[l == 5, Break[]];
  If[l == 1, PGenTyp = Table[RandomInteger[{0, 1}], {i, 1, ndu}, {j, 1, ndv}]];

  Print["initial population=", PGenTyp];
  DV = Table[Sum[2^j PGenTyp[[i, ndv-j]], {i, 1, ndu}];
  X = Table[Xlow + (Xup-Xlow)/2^ndv-1 DV[[i]], {i, 1, ndu}]; F = Table[f[X[[i]]], {i, 1, ndu}];
  P = Table[F[[i]] (1-), {i, 1, ndu}]; Fsum = Sum[F[[i]], {i, 1, ndu}]; nP = Table[ndu P[[i]], {i, 1, ndu}];
  Bin = Table[, {i, 1, ndu}]; ββ = 0;
  Do[Bin[[i]] = {ββ, ββ + P[[i]]}; ββ = ββ + P[[i]]; {i, 1, ndu}];

  αα = Table[RandomReal[{0, 1}], {i, 1, ndu}]; kk = Table[, {i, 1, ndu}];
  Do[Do[If[Bin[[i, 1]] ≤ αα[[k]] ≤ Bin[[i, 2]], kk[[k]] = i; Break[]]; {i, 1, ndu}]; {k, 1, ndu}];

  SPGenTyp = Table[PGenTyp[[kk[[i]]]], {i, 1, ndu}];
  Print["initial population decoded=", X];
  Print["initial population Fitness=", F, " with total fitness=", Fsum];
  Print["initial population probabiltly=", P];
  Print["initial population Bins=", Bin];
  Print["selected population indices=", kk];
  Print["selected population=", SPGenTyp];
  Per = Table[, {i, 1, ndu}];
  Do[
    σσ = RandomInteger[{1, ndu}];
    If[i == 1, Per[[i]] = σσ,
      k = 1;
      While[k ≤ i - 1,
        If[Per[[k]] == σσ, σσ = RandomInteger[{1, ndu}]; k = 1, k = k + 1];
        Per[[i]] = σσ
      ];
    , {i, 1, ndu}];
  Pairs = Table[{Per[[i]], Per[[i+1]]}, {i, 1, ndu, 2}];
  Print["Pairing=", Pairs];
  Parents = Table[SPGenTyp[[Per[[i]]]], {i, 1, ndu}];
  Offspri = Table[, {i, 1, ndu}, {j, 1, ndv}];
  Do[
    ηη = RandomInteger[{1, ndv - 1}];
    Do[
      If[j ≤ ηη,
        Offspri[[i, j]] = Parents[[i, j]];
        Offspri[[i+1, j]] = Parents[[i+1, j]];
        Offspri[[i, j]] = Parents[[i+1, j]];
        Offspri[[i+1, j]] = Parents[[i, j]];
      , {j, 1, ndv}];
    , {i, 1, ndu, 2}];

  Print["parents=", Parents];
  Print["offspring=", Offspri];

  MutOffspri = Table[, {i, 1, ndu}, {j, 1, ndv}];
  Do[
    μμ = RandomInteger[{1, 100}];
    Do[
      If[j == μμ,
        MutOffspri[[i, j]] = 1 - Parents[[i, j]];
      ,
        MutOffspri[[i, j]] = Offspri[[i, j]];
      ];
    , {j, 1, ndv}];
    , {i, 1, ndu}];

  Print["mutated offspring=", MutOffspri];
  PGenTyp = MutOffspri;
  l = l + 1];

```

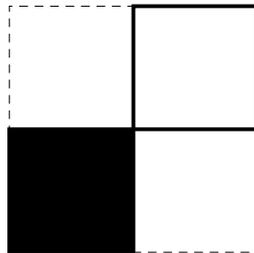
7.2.5. Optimisation en utilisant la méthode de Monte-Carlo

L'approche suivante que nous allons utiliser pour résoudre des problèmes d'optimisation globale est d'utiliser des méthodes stochastiques à savoir les méthodes de Monte Carlo. Ces méthodes sont une large classe d'algorithmes de calcul qui reposent sur un échantillonnage aléatoire répétée pour obtenir des résultats numériques; i.e. en exécutant des simulations à plusieurs reprises afin de calculer ces probabilités heuristiquement; c'est comme jouer et enregistrer vos résultats dans une situation de casino réel.

Méthodes de Monte Carlo mettent en œuvre ce processus [12]

1. Définir un domaine d'entrées possibles
2. Générer des entrées de manière aléatoire à partir d'une distribution de probabilité sur la domaine
3. Effectuer un calcul déterministe sur cette entrée
4. Agréger les résultats

Un programme court en utilisant la méthode de Monte Carlo pour trouver le centre d'un carré.



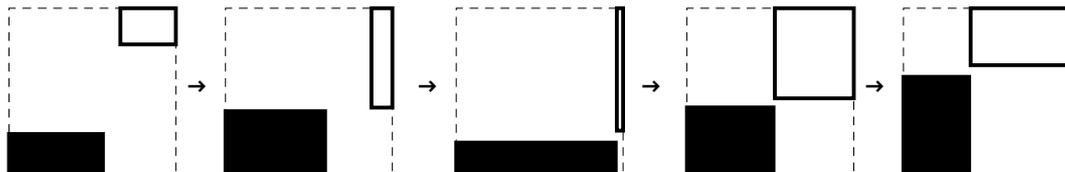
```
cc = 1;
A[a_] := a2;

dess[a_, x_, y_, z_, w_] := Show[Graphics[{EdgeForm[Directive[Thin, Dashed, Black]], White, Rectangle[{0, 0}, {a, a}]},
  Graphics[{EdgeForm[Directive[Thick, Black]], Black, Rectangle[{0, 0}, {x, y}]},
  Graphics[{EdgeForm[Directive[Thick, Black]], White, Rectangle[{a, a}, {a, a} - {z, w}]}]];

dess[1, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5];
surf1[a_, x_, y_] := x y;
surf2[a_, z_, w_] := (a - z) (a - w);
surf3[a_, x_, y_, z_, w_] := (A[a] - surf1[a, x, y] - surf2[a, z, w]) / 2;

obj[a_, x_, y_, z_, w_] := (surf1[a, x, y] - surf3[a, x, y, z, w])2 +
  (surf2[a, z, w] - surf3[a, x, y, z, w])2 +
  cc (surf1[a, x, y] - surf2[a, z, w])2;

numta = 1000; aaa = Table[, {i, 1, 1}]; bbb = Table[, {i, 1, 1}]; bbb[[1]] = 1000; j = 2;
Do[
  xx = RandomReal[]; yy = RandomReal[]; zz = RandomReal[] (1 - xx); ww = RandomReal[] (1 - yy);
  buffer = obj[1, xx, yy, zz, ww];
  If[buffer ≤ bbb[[j - 1]], bbb = Append[bbb, buffer];
  aaa = Append[aaa, dess[1, xx, yy, zz, ww]]; j = j + 1
, {i, 2, numta}];
```



Représentation de la convergence vers le centre du carré

Optimisation volume / aire

Maintenant, nous allons utiliser les deuxième et troisième analyse des surfaces que nous avons définies dans les opérations analytiques, à savoir l'aire et le volume du solide délimité par la surface. En outre, nous allons définir leur rapport et à définir un algorithme pour trouver au sein d'une famille de surfaces, la surface avec le plus grand rapport de volume / aire. En substance, cet algorithme est à la recherche pour des surfaces qui se rapprochent de la forme de la sphère qui a le plus grand rapport de volume / aire.

```
A[a_] := (1 / (2 a));
R[a_, r_, m_, b_] [u_] := (1+r Sin[a (u+ (1-A[a]) π) / 2]^m) (1+b Sin[(u+ (1-A[a]) π) / 2]^m)

f1[a_, r_, m_, b_, n_, k_, d_, e_] [u_, v_] := e (Cos[u]) R[a, r, m, b] [u] (v+d Sin[v/2]^n);
f2[a_, r_, m_, b_, n_, k_, d_, e_] [u_, v_] := e (Sin[u]) R[a, r, m, b] [u] (v+d Sin[v/2]^n);
f3[k_, c_] [u_, v_] := c (1+Cos[v/2]^k);

χScarlet[a_, r_, m_, b_, n_, k_, c_, d_, e_] [u_, v_] :=
  {f1[a, r, m, b, n, k, d, e] [u, v], f2[a, r, m, b, n, k, d, e] [u, v], f3[k, c] [u, v]};

OFUN[a_, r_, m_, b_, n_, k_, c_, d_, e_] :=
  VSC[χScarlet[a, r, m, b, n, k, c, d, e], 1] [0, 0, 0, 1, 2 π, 2 π]
  IAreaN[χScarlet[a, r, m, b, n, k, c, d, e]] [0, 0, 2 π, 2 π]

Apocalypse = 10;
OV = Table[, {p, 1, Apocalypse}]; OF = Table[, {p, 1, Apocalypse}]; Plots = Table[, {p, 1, Apocalypse}];
BGraph = Table[, {p, 1, Apocalypse}]; RGraph = Table[, {p, 1, Apocalypse}];
OP = 0; NInd = 0; q = 1;

Do[
  a = RandomInteger[{1, 4}]; r = RandomInteger[{0, 1}]; m = 2 RandomInteger[{1, 20}];
  b = RandomInteger[{0, 2}]; n = RandomInteger[{1, 5}]; k = 2 RandomInteger[{0, 1}]+1;
  c = RandomInteger[{4, 10}]; d = RandomInteger[{0, 2}]; e = RandomInteger[{3, 3}];

  OC = OFUN[a, r, m, b, n, k, c, d, e]; BGraph[[p]] = {p, OC};

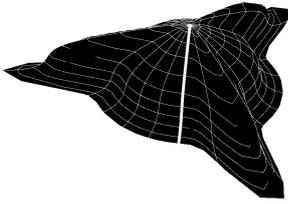
  Plots[[p]] = ParametricPlot3D[χScarlet[a, r, m, b, n, k, c, d, e] [u, v],
    {u, 0, 2 π}, {v, 0, 2 π}, PlotStyle → {Black}, Mesh → {Range[0, 2 π,  $\frac{2}{20}$  π], Range[0, 2 π,  $\frac{2}{10}$  π]},
    MeshStyle → {{Thickness[0.001], White}, {Thickness[0.001], White}}, BoundaryStyle → {Thickness[0.008], White},
    PlotRange → All, PlotLabel → {"n°", p}, Boxed → False, Axes → False];

  If[OC > OP,
    OP = OC;
    OV[[p]] = OC;
    OF[[p]] = ParametricPlot3D[χScarlet[a, r, m, b, n, k, c, d, e] [u, v],
      {u, 0, 2 π}, {v, 0, 2 π}, PlotStyle → {Black}, Mesh → {Range[0, 2 π,  $\frac{2}{20}$  π], Range[0, 2 π,  $\frac{2}{10}$  π]},
      MeshStyle → {{Thickness[0.001], White}, {Thickness[0.001], White}}, BoundaryStyle → {Thickness[0.008], White},
      PlotRange → All, PlotLabel → {"n°", p}, Boxed → False, Axes → False];
    RGraph[[p]] = {p, OC};

    NInd = NInd+1;
    , OP = OP;
    OV[[p]] = 0;
  ];
  , {p, 1, Apocalypse}];

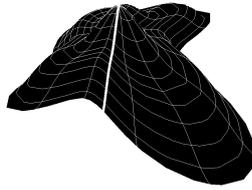
OVC = Table[, {q, 1, NInd}]; OFC = Table[, {q, 1, NInd}]; RGraphC = Table[, {q, 1, NInd}];
Do[
  If[OV[[p]] ≠ 0,
    OVC[[q]] = OV[[p]];
    OFC[[q]] = OF[[p]];
    RGraphC[[q]] = RGraph[[p]];
    q = q+1;
  , {p, 1, Apocalypse}];
```

{n°, 1}



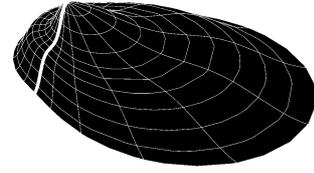
$$\frac{\text{volume}}{\text{aire}} = 3.49$$

{n°, 3}



$$\frac{\text{volume}}{\text{aire}} = 4.74$$

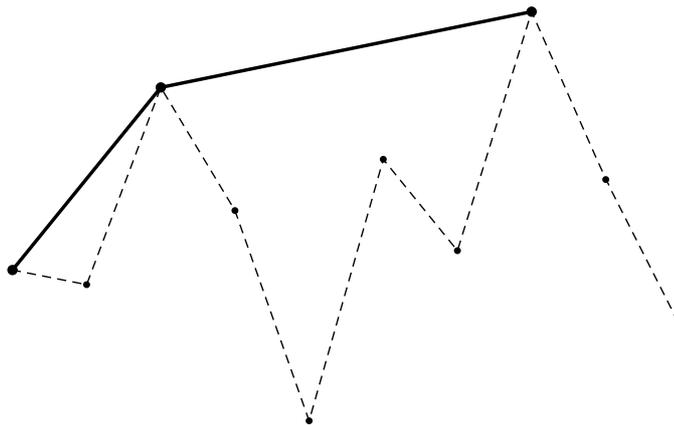
{n°, 8}



$$\frac{\text{volume}}{\text{aire}} = 5.25$$

Représentation des options qui ont montré une augmentation du rapport volume / aire

Ces résultats sont présentés sur le graphe ci-dessous avec l'axe horizontal représente l'indice de la surface de candidat et l'axe vertical représente son rapport volume / surface, les lignes épaisses montrant les candidats qui ont montré une augmentation de ce rapport, ici, sur dix candidats, nous avons eu seulement 3 qui ont montré une augmentation.



Représentation du graphe entre les candidats et leur rapport volume / surface

7.3. Références

- [1] <http://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation>
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Cyclic_group
- [3] http://en.wikipedia.org/wiki/Dihedral_group
- [4] *Wallpaper groups*, Julija Zavadlav, University of Ljubljana, Ljubljana, 2012
- [5] http://en.wikipedia.org/wiki/Optimization_problem
- [6] *Cours de Méthodes numériques*, Georges Koepfler, Université Paris Descartes, Paris, 2011
- [7] <http://en.wikipedia.org/wiki/Design>
- [8] *Cours de Théorie de l'évolution et Génétique des Eucaryotes - biologie de la reproduction*, Dominique Aubert-Marson, Université Paris Descartes, Paris, 2011
- [9] http://en.wikipedia.org/wiki/Evolutionary_algorithm
- [10] http://en.wikipedia.org/wiki/Genetic_algorithm
- [11] *Lecture notes on Genetic algorithms and modeling - soft computing*, R.C. Chakraborty, Juet University, Guna, 2010
- [12] http://en.wikipedia.org/wiki/Monte_carlo_method

8. Qu'est-ce que l'architecture

8.1. Architecture

A la fin de cette recherche qui met l'accent sur les mathématiques et de créer des outils pour les calculs et les représentations géométriques, on peut se demander si cette recherche doit être toujours considérée comme dans le domaine de la recherche architecturale. La réponse est tout simplement oui. Malgré le langage technique dans lequel il est écrit, ce travail ne peut être fait que dans l'architecture, car il représente l'esprit de l'architecture contemporaine avec tous ses paradoxes. En d'autres termes, il est dans la nature fondamentale de l'architecture que l'on retrouve des paradoxes, et en faisant la recherche ces paradoxes nous apparaîtra, principalement dans la position de l'architecture dans le fossé irréconciliable entre l'esthétique et le fonctionnel. En d'autres termes, il est dans la nature fondamentale de l'architecture que l'on retrouve des paradoxes, et en faisant la recherche ces paradoxes nous apparaîtra, principalement dans la position de l'architecture dans le fossé irréconciliable entre l'esthétique et le fonctionnel. Dans ce dernier chapitre, nous allons mettre l'accent sur ces paradoxes et sur la question de la frontière de l'architecture en tant que discipline, et si oui ou non cette limite existe, nous allons demander la simple question «quelle est l'architecture?» et en essayant d'y répondre, nous verrions la pertinence de cette recherche à l'architecture. Pour commencer, ce n'est pas une question évidente depuis l'architecture en tant que discipline n'est pas si facile à définir en dépit du fait que tout le monde semble savoir ce qu'un architecte mais de plus près on peut trouver une variation parmi les architectes ne trouve pas dans n'importe quelle autre discipline. Par exemple, il arrive souvent qu'un architecte spécialisé dans la sociologie aurait plus en commun avec un sociologue que disons un architecte intéressé par la structure qui serait beaucoup plus proche aux ingénieurs. Pour cette raison, l'essence de la discipline de l'architecture repose pas sur une idéologie globale, mais des idées de plus en plus petites qui se rapprochent des définitions individuelles de la discipline, ce fait seul met l'architecture en dehors du domaine des sciences sociales et naturelles. Si l'on regarde la définition standard que nous trouvons dans les dictionnaires nous trouvons quelque chose de ce genre: *l'architecture est l'art et la science de la conception et de la construction de bâtiments et d'autres structures physiques*; une définition qui est largement acceptée et semble cohérente et sincère, mais sur une plus proche observation nous pouvons voir que cette définition est problématique et essentiellement pré-moderne. Nous avons expliqué plus tôt dans la recherche, les conséquences de l'arrivée de la modernité sur la relation entre l'art et la science et la rupture irréparable entre eux causés par le changement de paradigme moderne. Donc, pour continuer à définir l'architecture comme un art et une science montre simultanément la nature problématique intrinsèque de cette discipline dans la perspective moderne, en d'autres termes l'architecture en quelque sorte jamais accepté la modernité car elle n'a jamais trouvé sa place dedans. Ceci est visible dans les opinions contradictoires sur ce qu'est l'architecture et son rôle à travers le modernisme de montée dans le 18th siècle et en particulier de la fin du 19th siècle jusqu'à aujourd'hui. C'est aussi cette nature contradictoire qui donne l'architecture une position unique parmi les disciplines modernes, une position d'un terrain fertile pour la recherche expérimentale ou comme nous l'avons décrit précédemment une position indisciplinaire avec assez de distance pour éviter l'orthodoxie d'une discipline donnée. Ceci a été démontré dans cette recherche à plusieurs reprises où certains concepts scientifiques rigoureux sont prises à partir de leurs territoires et mis dans le contexte de la création artistique. Cet acte particulier d'oscillation continue entre les disciplines artistiques et scientifiques est essentielle à la compréhension de l'architecture du point de vue moderne. L'idée de l'oscillation est importante car elle signifie qu'il ya eu une transgression entre les différents champs, contrastant le temps pré-moderne où ces différents domaines ont été considérés comme des facettes d'un ensemble harmonieux de la connaissance divine. Avec la modernité, les disciplines sont allés à définir leurs territoires et les défendre avec l'orthodoxie, mais cela reste difficile et dans un certain sens inaccessible pour l'architecture. Néanmoins, de nombreuses tentatives ont été faites pour établir les limites de la discipline de l'architecture, influencé par de nombreuses écoles de pensée moderne, de l'utilitarisme et le positivisme au post-structuralisme et la déconstruction. Dans la modernité, l'architecture est venu à être compris comme le produit d'une façon de penser, qui signifie que si les problèmes de l'architecture doivent être tracés à leurs racines, alors attention doit se concentrer sur la pensée et les considérations qui informent sa production. Par conséquent, pour comprendre l'architecture de la modernité, il faut non seule-

ment que la pensée traditionnelle de l'architecture sera radicalement repensé, mais aussi les limites mêmes par lesquelles elle a été délimitées comme une zone distincte doivent être réexaminées. Le refus d'être limité par des frontières implique que la notion même de frontière qui définit l'architecture doit être reconsidérée, et la relation entre ce qui est à l'intérieur et à l'extérieur doit être réexaminée. Même si nous avons supposé que la définition de l'architecture se décompose au des définitions individuelles, ces définitions individualisées ont tendance à se regrouper sous des idéologies principales qui sont liées aux différents points de vue philosophiques. Notre stratégie dans la partie à venir est de présenter trois idéologies dominantes dans l'architecture depuis le changement de paradigme de la modernité, et de montrer que chacun a une définition de la discipline qui, dans de nombreux aspects en contradiction avec les autres. En outre, nous allons évaluer la pertinence du travail accompli ici dans cette recherche compte tenu de ces différentes définitions, ce qui va être fait en utilisant des comptes de philosophes qui écrivent sur l'architecture. Les trois définitions idéologiques que nous allons prendre en compte sont: l'architecture comme fonction, l'architecture comme communication et l'architecture comme une expérience vécue. Ces trois définitions correspondent à trois écoles de pensée: l'esthétique, la sémiologie et la phénoménologie (respectivement) et les philosophes dont les comptes que nous allons utiliser sont Theodor Adorno, Umberto Eco et enfin Georg Gadamer et Henri Lefebvre.

8.2. Idéologies architecturales dominantes

8.2.1. L'architecture comme fonction

Le premier point de vue, nous allons considérer serait l'esthétique et en faisant cela, nous allons confronter la première caractérisation importante et influente de l'architecture dans la modernité à savoir l'architecture comme un but ou fonctionnelle, avec le slogan emblématique de Louis Sullivan: *la forme suit la fonction*. Le fonctionnalisme est de loin l'idéologie la plus dominante que a défini l'architecture et qui continue à le faire de nos jours, c'est le discours de l'architecte moyenne qui essaie de comprendre sa conception comme un produit remplissant une certaine fonction. Même si cela est vrai à de nombreux niveaux et les conceptions architecturales faire remplir certaines fonctions, la relation entre l'esthétique et le fonctionnel n'est jamais une ligne claire. Dans cette recherche, nous avons compté sur l'esthétique comme une motivation importante pour le travail, et plus tôt nous avons souligné la notion de la poétique de la connaissance résultant du travail entre les deux disciplines. Maintenant, nous tenons à creuser plus profondément dans la question du fonctionnalisme de l'architecture et de voir si cette vision de l'architecture est adéquate et comment cette recherche pourrait porter sur elle. Certes, la partie pratique d'avoir des outils mathématiques pour mesurer et calculer propose une relation forte à des problèmes d'ingénierie en architecture, d'où la fonctionnalité, mais c'est plus la dimension esthétique que nous aimerions étudier. Pour cela, on va s'appuyer sur le compte de philosophe Theodor Adorno dans son essai *fonctionnalisme aujourd'hui*, où il aborde la question du fonctionnalisme en architecture et ses paradoxes. Selon Adorno, les arts avec but et sans but peuvent être jamais absolument séparés, détenus dans une relation dialectique. Les arts sans but ont souvent une fonction sociale, alors qu'il n'existe aucune détermination pure, par conséquent le fonctionnalisme en architecture ne peut jamais être un fonctionnalisme pur et le rejet du style devient un style en soi, puisque, pour Adorno le fonctionnel peut attirer le symbolique. Les symboles sont nés de la nécessité d'identifier avec son environnement et l'homme attache une importance symbolique, même au plus technique des objets [1]. Cela nous ramène à la caractérisation de jugement dans la conception architecturale comme un jugement esthétique, peu importe combien nous essayons d'être pragmatique dans un processus de conception, et même si toute la méthode est basé sur les mathématiques rigoureuses, à la fin, le fait demeure que la conception architecturale met notre jugement de retour dans la catégorie esthétique. Kant mise à la terre cette philosophie dans la formule de la finalité sans fin, la question du fonctionnalisme ne coïncide pas avec la question de la fonction pratique, cette notion kantienne est presque omniprésente dans cette recherche, à tout moment, il y a un sentiment de détermination sans but. Kant mise à la terre cette philosophie dans la formule de la *détermination sans but*, la question du fonctionnalisme ne coïncide pas avec la question de la fonction pratique, cette notion kantienne est presque omniprésente dans cette recherche, à tout moment, il y a un sentiment de détermination sans but. La vision d'Adorno de la détermination contraste celle des architectes fonctionnalistes, il affirme que les arts sans but et avec but ne font pas l'opposition radicale comme imputé par les architectes fonctionnalistes tels que Adolf Loos, la différence entre le nécessaire et le superflu est inhérente à un travail, et n'est pas défini par la relation du travail à quelque chose en dehors de lui [1]. Dans le cas de cette recherche, nous prenons une position à peu près conforme à celle d'Adorno, cela se voit dans l'introduction des techniques qui sont traditionnellement utilisées pour des buts, à savoir les notions mathématiques utilisées en physique et en ingénierie, mais afin de générer des formes d'appréciation artistique, cela est une forme de décadence ornementale, car évidemment il n'y a aucune raison pragmatique pour cet excès. Toutefois, compte tenu de la recherche comme un objet esthétique, et le fait que nous pouvons aussi utiliser les mathématiques codées ici d'une manière productive réelle, montre le pliage intrinsèque de ce qui est avec but au sein du ce qui est sans but et vice versa. Pour Adorno n'existe rien comme un objet esthétique en soi, mais seulement dans le domaine de tension de cette sublimation, il n'y a donc pas de détermination pur avec but mis en place comme l'opposé de l'esthétique sans but. Même les formes les plus pures de but sont nourris par des idées comme la transparence formelle qui sont en fait issus de l'expérience artistique [1]. Après avoir clarifié cette relation subtile entre le fonctionnel et l'esthétique; Adorno tourne son attention vers l'essence d'être un architecte, qu'il pense être un sens de l'espace architectural et il relie cette notion au but de cet espace. C'est un point important pour nous dans cette recherche puisque toute thèse est basée sur application du sens mathématique de l'espace dans la conception architecturale. Dans cette tentative de mettre les mathématiques modernes dans la conception architecturale

nous sommes allés aux grandes étendues dans la définition de l'espace formel des mathématiques; utilisant des formules abstraites et les phénomènes de leurs représentations graphiques. Cependant, nous ne pouvons pas considérer ces constructions géométriques comme des espaces architecturaux, nous allons les appeler conceptions d'espaces architecturaux potentiels, de nouveau en conformité avec Adorno qui établit une distinction entre l'espace géométrique et l'espace architectural. Pour Adorno de parler de l'espace architectural, nous devons d'abord parler d'un sens de l'espace dans l'architecture. Ce sens de l'espace n'est pas une essence abstraite pure comme dans les espaces formels mathématiques, ni un sens de la spatialité lui-même comme dans l'espace de la cognition visuelle, puisque l'espace architectural est concevable que comme un espace concret avec des dimensions spécifiques. Un sens de l'espace est étroitement liée au son but. Même quand l'architecture tente d'élever ce sens au-delà du domaine du but, il est encore simultanément immanent dans le but, la réussite de cette synthèse est le principal critère pour une grande architecture. En d'autres termes Adorno essaie de nous dire une fois de plus que l'utile et le sans but sont inextricablement liés, ou de les mettre dans une langue deleuzienne: ils sont repliés l'un sur l'autre, ce qui signifie que les conceptions architecturales ne peuvent jamais être totalement des sculptures libres. C'est parce que le sens de l'espace architectural est fusionnée à la notion du but, mais en même temps, il ne peut jamais être purement fonctionnel. Adorno va ensuite expliqué que l'architecture s'enquiert: comment un certain but (à utiliser dans le sens le plus large du mot) peut devenir un espace; sous quelles formes et quels matériaux; tous les facteurs sont liés entre eux réciproquement. L'imagination architecturale est, selon cette conception, la capacité à articuler l'espace vers un but. Il permet aux buts, de devenir l'espace et construit les formes selon ces buts. Inversement, l'espace et le sens de l'espace peut devenir plus qu'un but pauvre que lorsque l'imagination les imprègne. Imagination éclate des connexions immanentes du but, à laquelle elle doit son existence même [1]. Adorno tire ensuite une comparaison entre le sens de l'espace architectural et le sens de la musicalité, la comparaison est importante, car les deux partagent une relation similaire aux mathématiques. À savoir que les deux, l'espace architectural et les compositions musicales sont complètement expliquées à l'aide des mathématiques, mais cette description abstraite ne peut pas être considéré comme l'architecture ou la musique; elles doivent être affectées avec un sens de l'espace architectural dans le cas de l'architecture et un sens de la musicalité dans le cas de la musique. Le sens de l'espace architectural est l'essence d'être un architecte, contrairement à l'idée abstraite de l'espace, ce qui correspond dans le domaine visuel à la musicalité dans le acoustique. La musicalité ne peut pas être réduit à une conception abstraite du temps, par exemple la capacité néanmoins bénéfique de concevoir des unités de temps sur un métronome sans devoir écouter un. De même, le sens de l'espace ne se limite pas à des images spatiales, même si ceux-ci sont probablement prérequis pour chaque architecte, s'il veut lire ses lignes et ces plans la façon dont un musicien lit son score. Un sens de l'espace semble d'exiger plus, à savoir que quelque chose peut se survenir à l'artiste de l'espace lui-même, ce qui ne peut pas être quelque chose d'arbitraire dans l'espace et indifférents à l'égard de l'espace. De manière analogue, le musicien invente ses mélodies, ses structures musicales sont en effet fabriqués à partir du temps et de la nécessité d'organiser le temps. Les relations simples ne suffisent pas, car ils sont indifférents à l'événement musical concret, ni l'invention des passages ou des complexes musicaux individuels, car leurs structures temporelles et leurs relations temporelles ne sont pas conçus avec eux. Dans la partie suivante Adorno commente sur la double nature des arts avec but et en particulière l'architecture, et comment le rôle du but concerne le rôle de l'esthétique formelle; ce qui est d'une grande importance pour nous, puisque nous avons insisté sur la façon dont la tension entre l'esthétique et la pratique a été la caractéristique fondamentale de cette recherche et que cette tension est essentiel dans l'architecture. Adorno explique que dans le sens de production de l'espace, le but reprend dans une large mesure le rôle du contenu, par opposition au constituant formelle qui rend possible toute la création artistique et se communique à travers le but en particulier dans les arts avec buts. L'architecture serait donc atteindre un niveau plus élevé, le plus intensément elle médiatise réciproquement les deux extrêmes: la construction et la fonction officielle. L'architecture est autonome et avec but, elle ne peut pas simplement nier les hommes tels qu'ils sont, et encore elle doit faire précisément ça, si elle veut rester autonome, c'est avec la volonté générale contre la volonté de tous. Par conséquent, il y a ceux à qui l'architecture légitime apparaît comme un ennemi, elle retient d'eux ce qu'ils, par leur nature veulent et même doivent [1]. Enfin Adorno souligne l'importance de l'esthétique et de la réflexion esthétique en architecture et en les arts avec buts en général, ce qui est la plupart du temps, soit sous-estimée comme goût personnel ou stigmatisée et rejetée au nom du fonctionnalisme. Au début de cette recherche, nous sommes allés dans une

large mesure dans la définition et la réflexion sur la nature esthétique de l'œuvre, en essayant de mettre la pensée esthétique au stade central de l'architecture en double relation avec la pratique. Adorno affirme que l'architecture est un art avec but qui exige une réflexion esthétique constante; esthétique ici ne signifie pas certaines lois formelles d'une beauté éternelle, qui ne sont plus que des recettes pour la production éphémère et kitsch. En fait, le contraire doit être le cas dans la véritable esthétique. Elle doit absorber précisément les objections qu'elle a soulevées en principe une fois contre tous les artistes. L'esthétique se condamnerait si elle continuait sans réfléchir, d'une manière spéculative, sans une implacable autocritique. L'esthétique comme une facette intégrante de la philosophie attend une nouvelle impulsion qui doit provenir des efforts de réflexion. L'esthétique devient une nécessité pratique une fois qu'il devient clair que des concepts tels que l'utilité et l'inutilité dans l'art, comme la séparation de l'art autonome et avec but, et comme l'imagination et l'ornement, doivent être à nouveau discutées. Une fois votre activité vous oblige à des considérations esthétiques, vous livrez-vous à son pouvoir, vous ne pouvez plus détacher et évoquer des idées arbitrairement au nom de l'expertise pure et approfondie. L'artiste qui ne poursuit pas énergiquement la pensée esthétique tend à tomber dans des hypothèses dilettantes et des justifications incertaines dans l'intérêt de la défense de sa propre construction intellectuelle. Aujourd'hui, la beauté peut avoir aucune autre mesure sauf la profondeur à laquelle un travail résout les contradictions. Un travail doit couper à travers les contradictions et les surmonter, pas en les couvrant, mais en les poursuivant. La beauté formelle simple, quelle qu'elle soit, est vide et dénuée de sens, la beauté de son contenu est perdu dans le plaisir sensuel pré-artistique de l'observateur. Une esthétique modifiée décrira son propre objet avec de plus en plus de clarté car elle commence à se sentir plus intensément la nécessité de l'étudier. Contrairement à l'esthétique traditionnelle, elle ne verrait pas nécessairement le concept de l'art comme son corrélat, elle faut dépasser l'art en pensant art. elle dépassera donc l'opposition actuelle de l'utile et sans but, sous laquelle le producteur doit souffrir autant que l'observateur [1]. Avec ces réflexions sur l'importance de l'esthétique et de la pensée esthétique, nous terminons notre analyse concernant la première définition de l'architecture à savoir comme fonctionnelle et ses paradoxes. Il était clair que le point de vue d'Adorno sur le sujet est d'une importance cruciale, car elle décrit un grand nombre de convictions théoriques de base de cette recherche, il nous a aussi donné une des premières idées sur la façon dont la définition de l'architecture n'est pas une évidence. Même dans la plus basique et réductrice des définitions de l'architecture: l'architecture comme un accomplissement d'une fonction programmatique; Adorno nous a montré les nuances et les subtilités cachées dans cette apparente simplicité. Avec le compte d'Adorno, nous pouvons voir que la certitude par laquelle la majorité des architectes distinguent l'esthétique purement formelle et la pratique fonctionnelle n'est pas fondée, puisque les conceptions architecturales ne peuvent jamais être purement esthétique ni purement fonctionnelles.

8.2.2. L'architecture comme communication

Maintenant que nous avons expliqué la caractérisation de l'architecture en termes de fonctionnalité, nous allons maintenant analyser plus en détail la deuxième définition de l'architecture en termes de la sémiotique, à savoir l'architecture comme communication. L'analyse précédente a été axée sur les paradoxes concernant la relation entre l'esthétique et le fonctionnel, mais le point de vue d'Adorno sur ce sujet est largement moderniste, à savoir fonction signifie comment cet objet va être utilisé. Dans cette analyse qui suit, nous allons regarder le fonctionnalisme de l'architecture d'un point de vue plus post-moderne, à savoir en mettant l'accent sur la dimension symbolique de ce fonctionnalisme. Dans la première définition de l'architecture, nous avons montré la complexité de la relation entre l'esthétique et le fonctionnel, dans cette définition, nous allons montrer la complexité de la relation entre les fonctions dénotatives et connotative de l'architecture. En cela, nous allons montrer une fois de plus que la certitude par laquelle la majorité des architectes reconnaît la fonction de leur conception n'est pas fondée, en d'autres termes un objet architectural n'est jamais aussi innocent que sa fonction programmatique désignée. Même le plus technique d'objets peut être rempli par des significations et de symbolisme comme Adorno explique, cela jouera un rôle important dans la compréhension de la position des mathématiques dans l'architecture en général et dans cette recherche en particulier. Afin d'effectuer cette analyse, nous allons nous appuyer sur le compte du sémioticien italien Umberto Eco sur le sujet dans son article *Fonction et signe: Sémiotique de l'architecture*. Eco croit que l'architecture fonctionne comme une forme de communication de masse, il fait la distinction entre la fonction primaire: l'architecture comme un objet fonctionnel et la fonction secondaire: l'architecture comme un objet symbolique. C'est dans cette dualité que les mathématiques jouent un double rôle dans la conception architecturale; tout d'abord, un rôle fonctionnel dans le sens de la géométrie de la mécanique des structures et le second est plus ambiguë dans le sens du symbolisme de la géométrie. Ce symbolisme de la géométrie n'est plus aujourd'hui référant à la volonté divine comme dans les rapports sacrés, mais il fonctionne encore comme une connotation de l'esprit du temps, de l'orthogonalité de l'architecture moderne jusqu'à la curvilinéarité du mouvement numérique contemporain, l'architecture utilise la géométrie à coder une idéologie. Eco applique cette théorie à l'exemple extrême du pavillon, il fait valoir que, dans les foires du monde et des contextes similaires, la fonction principale du pavillon est réduite tandis que la fonction secondaire exagéré [2]. Dans cette optique, il ne devrait pas être une surprise que la plupart des bâtiments et des conceptions de l'architecture dite paramétrique sont essentiellement des pavillons, puisque l'intention principale est de montrer cette idéologie, plutôt que d'avoir vraiment un pavillon. Et de la même perspective, le rejet de l'ornementation et la focalisation sur le pratique devient ornemental en soi, puisque l'apparence minimaliste devient un style dans son propre droit, et tandis que sa fonction primaire est pratique sa fonction symbolique est idéologique. Cette dualité entre des fonctions explicite et implicite peut être comprise comme deux modes de communication dans lequel un objet architectural se manifeste, c'est un autre notion importante pour nous dans cette recherche que nous allons expliquer du point de vue de Eco. Eco explique que l'architecture a deux modes de communication qui correspondent à des fonctions primaires et secondaires d'un bâtiment. L'objet d'usage est dans sa capacité de communication, le véhicule de signe du sens précisément et conventionnellement désigné: sa fonction, en d'autres mots, le sens premier d'un bâtiment est ce qu'il faut faire afin de l'habiter, l'objet architectural dénote une forme d'une habitation. Outre cette dénotation de la fonction, l'objet architectural pourrait connoter une certaine idéologie de la fonction, mais il peut aussi connoter autres choses, la maison, par exemple, dénote une fonction de logement, mais aussi connote la famille, la sécurité et les environnement familiaux [2]. Nous pouvons voir que la croyance de l'architecte en la forme qui suit la fonction serait plutôt naïf sauf si elle reposait vraiment sur une compréhension des processus du codification en cause. Ainsi, le titre: fonction, devrait être étendue à toutes les utilisations de l'objets d'usage (dans notre point de vue, à divers communication, ainsi que à les fonctions dénotées), pour ce qui concerne la vie en société, les capacités symboliques de ces objets ne sont pas moins utiles que leurs capacités fonctionnelles. Tout comme Adorno a souligné l'importance de la pensée esthétique dans l'architecture, Eco souligne l'importance de la fonction connotative de l'architecture, comme il l'explique qu'il doit être clair que nous ne sommes pas métaphorique en appelant les connotations symboliques fonctionnel. Parce que même si elles ne peuvent pas être immédiatement identifiées avec des fonctions strictement définies, elles représentent et communiquent dans chaque cas une véritable utilité sociale de l'objet. Il faut dire que parler des fonctions primaires et secondaires d'un objet architectural ne donne pas une

discrimination axiologique (comme si une fonction est plus importante que l'autre), mais plutôt un mécanisme sémiotique, en ce sens que les fonctions secondaires reposent sur les dénotation des fonctions primaires [2]. Eco nous donne ensuite un exemple de la façon dont ces fonctions primaire et secondaire interagissent; l'exemple est celui de l'ogive gothique. Nous pouvons voir la subtilité de l'interaction entre les fonctions primaires et secondaires dans la comparaison des registres des différents historiens de l'architecture sur la valeur structurelle de l'ogive du voûte croisée de l'architecture gothique. Trois hypothèses majeures ont été présentées, la première était que l'ogive a une fonction structurelle, la seconde était qu'elle n'avait pas de valeur structurelle, et ce sont les nervures de la voûte ogivale qui étaient structurelles et la troisième était qu'elle avait une valeur structurelle en cours de construction, mais plus tard, ce sont les nervures qui étaient structurelles. Peu importe à quelle interprétation on pourrait adhérer, personne n'a douté que l'ogive a dénoté une fonction structurelle, la controverse porte plutôt sur le référent de cette dénotation: est la fonction dénotée une illusion? Même si elle était, la valeur communicative des nervures ogivales reste incontestable. Ce débat a fait les historiens se rendre compte que le code de la gothique a également une dimension symbolique; en d'autres termes que les éléments des cathédrales gothiques ont des complexes de fonctions secondaires pour eux et ici ils ont utilisé les mathématiques (géométrie sacrée) pour désigner ces fonctions secondaires [2]. Or, ces fonctions secondaires peuvent être définies encore et encore, sur la base des sous codes connotatives élaborées fondées sur les conventions culturelles et le patrimoine intellectuel des groupes donnés et des périodes déterminées et fixées par des perspectives idéologiques particuliers, avec lesquels elles sont en harmonie. Par exemple, l'interprétation romantique standard, de sorte que la structure de la cathédrale gothique a été conçue pour reproduire la voûte des forêts celtiques, et donc le monde pré-romain de la religiosité druidique. Et à l'époque médiévale, des légions de commentateurs et allégoristes se mettent à définir, selon des codes d'une précision et une subtilité redoutables des significations individuelles de tous les simples éléments architecturaux. En effet, dans le 19^{ème} siècle on a assisté à un phénomène typique de l'histoire de l'art, quand dans une période donnée, un code dans son intégralité s'agit de connoter une idéologie; on avait au moment de l'identification de style gothique = religiosité et le grec temple = harmonie équilibrée. Il est clair que dans le cours de l'histoire, les fonctions primaires et secondaires pourraient subir des pertes, des recouvrements et des substitutions de types divers; qui sont communs à la vie des formes en général, et constituent la norme au cours de la lecture des ouvrages de l'art [2]. Avec ces exemples de connotations symboliques des différentes périodes de l'architecture et l'exemple de l'ogive gothique, nous avons montré une fois de plus que les mathématiques ont joué un rôle crucial dans le codage de ces fonctions symboliques connotatives. Dans la modernité comme nous l'avons expliqué dans le début de la recherche, ce rôle des mathématiques a changé, et a mis l'accent uniquement sur les fonctions dénotatives telles que les calculs pratiques, mais avec l'analyse de Eco nous sommes à nouveau conscients que la fonction connotative ne peut jamais laisser l'architecture, même si nous sommes maintenant moins enclins à y faire face. Cela a été évoqué dans notre critique de l'architecture numérique en particulier avec sa revendication d'une approche purement dénotative basée sur l'analyse de l'efficacité, la critique était que l'architecture ne peut jamais être que dénotative et que ces images paramétriques sont essentiellement idéologique. Cela signifie que les mathématiques derrière ces conceptions si les architectes sont conscients ou pas, jouent un rôle similaire à celui des mathématiques de la géométrie sacrée des proportions de l'architecture pré-moderne; seulement maintenant les mathématiques sont plus complexes et les codes connotés ne sont pas déclarés, mais leur présence idéologique est plus forte que jamais. C'est pourquoi ces modèles paramétriques sont tous semblables et sont immédiatement reconnus par les autres membres ou partisans de cette vague, c'est comme si ces conceptions paramétriques connotent l'alliance de leurs concepteurs à cette vague. Cela dit, nous allons maintenant creuser plus profondément dans la mécanique de ces codes dénotatifs et connotatifs, dans ce qui suit, nous allons présenter une variété de différents codes de l'architecture à travers laquelle l'architecture communique. Eco explique que les signes architecturaux sont dénotatifs et connotatifs selon des codes, ces codes et sous codes font des lectures différentes possible dans le cours de l'histoire. L'architecte travaille avec la probabilité de son travail soit soumise à la variété de lectures, des vicissitudes de la communication, en concevant pour des fonctions primaires variables et des fonctions secondaires ouvertes, ouvertes dans le sens où elles sont déterminées par les codes imprévisibles de l'avenir. Ceci est un aperçu important pour nous dans cette recherche avec notre accent sur des modèles génériques construits mathématiquement la place de conceptions particulières spécifiées; ce qui est implicite dans l'analyse de Eco est que les architectes doivent comprendre le large spectre

d'interprétations à la fois des fonctions dénotatives et connotatives de leur conceptions. Ceci dans un certain sens peut être comprise comme un appel pour des conceptions plus génériques avec des programmes non déclarés ambigus, mais cela serait une manière réductrice de le faire. Au lieu de cela Eco essaie de dire que ces fonctions qui guident les conceptions soit pratique ou symbolique sont liées aux temps et lieu où elles sont et que dans un contexte différent, elles seront décodées de manière totalement différente, et pour Eco, l'architecture est capable d'être réinterprété dans plusieurs contextes différents. Cette question est cruciale, car elle capture l'une des différences les plus fondamentales entre la compréhension mathématique et la compréhension architecturale de l'espace, à savoir que les mathématiques s'efforcent pour la généralisation tandis que l'architecture aspire à la particularisation dans le traitement de l'espace. L'espace architectural est un espace comme nous l'avons mentionné au début de la recherche faite sur des endroits particuliers tandis que l'espace mathématique est un espace général où les particularités sont constamment mis sous une forme générale, ce qui est l'un des points principaux de tension soulevés par cette recherche. La construction de l'espace formellement comme en mathématiques et créer toutes ces constructions géométriques qui peuvent être spécialisés éventuellement dans un contexte particulier donné en une conception architecturale, est un processus étranger pour la discipline architecturale où le travail sur les projets commence seulement à partir d'un contexte spécifique. Cependant, C'est un pas de plus vers l'idée de Eco: des conceptions architecturales ouvertes pour une variété de lectures, en ce sens que l'une de ces constructions formelles est assez ouverte pour être relu fonction d'un contexte particulier. On peut voir ces constructions géométriques comme des prototypes des conceptions (espaces mathématiques), reliés entre elles que par des relations logiques et une fois un contexte est fixé elles sont transformées en des modèles réelles (espaces architecturaux). Cela dit, nous allons maintenant expliquer comment les codes architecturaux sont construits, pour ceci nous nous appuyons sur le compte de Eco et son application des méthodes de la sémiotique pour expliquer comment le code architectural se rapporte au code mathématique pour décrire l'espace, il va montrer ça en comparant ceci au langage verbal. Eco explique que dans le traitement des codes, nous constatons que les éléments d'articulation sous un code donné peuvent être syntagmes d'un autre code plus analytique ou les syntagmes d'un code peut se révéler être des éléments d'articulation d'un code plus synthétique [2]. Ceci doit être gardé en tête tout en traitant les codes architecturaux, pour on trouve généralement que ses articulations appartiennent vraiment, soit à un code plus analytique ou un code plus synthétiques se trouvant en dehors de l'architecture; dans cette recherche, ceci était tout à fait clair par le fait de porter le langage de la géométrie moderne dans le domaine de la conception architecturale. Cependant, avant de commencer à comparer les codes architecturaux et mathématiques, nous devons faire une distinction importante lorsqu'il s'agit des codes de l'architecture, c'est la distinction entre les codes de lecture de l'objet et les codes de lecture de la conception de l'objet, mais nous remarquons que les codes de notation de la conception, tandis que conventionnalisés de manière indépendante, sont dans une certaine mesure des dérivés des codes de l'objet. Ils fournissent des façons pour transcrire l'objet, tout comme pour transcrire la langue parlée il existe des conventions pour représenter des éléments tels que les sons des syllabes ou mots [2]. Cela dit, nous allons maintenant montrer la relation du code architectural au code mathématique basé sur la comparaison de Eco de l'architecture à la langue. Eco explique que dans l'architecture, nous pourrions émettons l'hypothèse qu'il existe quelque chose comme une double articulation similaire à celui trouvé dans les langues orales et supposons que le niveau le plus élémentaire de l'articulation c'est une question de géométrie. Si l'on considère l'architecture d'être l'art de l'articulation de l'espace, alors peut-être que nous avons déjà en géométrie une bonne définition du code rudimentaire de l'architecture. Dans cette double articulation si l'on considère l'articulation de base reposant sur des éléments de géométrie, alors l'articulation supérieure impliquerait des éléments spatiaux de plus haut niveau, avec leurs combinaisons en des syntagmes spatiales d'une sorte ou d'une autre [2]. En d'autres termes les courbes et les surfaces pourraient être des éléments d'articulation de base, un niveau auquel les éléments ne sont pas encore significatifs, mais sont distincts, et leurs combinaisons, tels que des polygones, des polyèdres et des compositions des courbes et des surfaces peuvent être des éléments de l'articulation supérieure, d'un niveau au cours de laquelle les éléments commencent à être significatifs, par exemple un syntagme de deux polygones, par exemple un rectangle à l'intérieur d'un autre rectangle comme un fenêtre dans un mur. Cette description de Eco des deux niveaux d'articulation de l'architecture avec les mathématiques comme l'articulation de base et l'architecture comme l'articulation supérieure est assez intuitive et conformément à ce que nous avons fait dans cette recherche, à savoir fournir un ensemble rudimentaire des éléments dépourvus de signification pour être

transformé plus tard par des combinaisons en éléments architecturaux significatifs. Alors, quand nous faisons une construction géométrique pour une famille des surfaces et une opération de transformation; ceux-ci restent dépourvues de signification, elles sont seulement des articulations au niveau de base, cependant, lorsque dans un contexte particulier une transformation particulière a été appliquée sur une surface particulière de la famille; le résultat est maintenant significatif et appartient à l'articulation de niveau supérieur. Cette analogie de double articulation aux langues verbales posées par Eco est une façon intuitive et claire d'expliquer comment une conception architecturale diffère d'une construction géométrique; précisément il s'agit d'une articulation d'un niveau supérieur qui utilise les constructions géométriques comme ses éléments pour créer des constructions architecturales. Après avoir expliqué cela, nous devons être prudents dans la compréhension de cette affinité entre les codes architecturaux et géométriques, le problème est bien sûr que ce code géométrique n'appartient pas uniquement à l'architecture, en plus couché derrière certains phénomènes artistique le code sous-tend clairement les formulations de la géométrie dans l'sens étymologique du mot à savoir l'arpentage et d'autres types de transcription du terrain. Ce pourrait même être identifié avec le code gestaltique présidant sur notre perception du toutes ces formes, ce code géométrique que nous avons ici est un code capable de servir comme un métalangage pour l' articulations et pour une certain nombre d'autres codes plus synthétiques [2]. Cette relation non exclusive entre le code architectural et son code géométrique élémentaire ne devrait pas être comprise comme un désavantage, le fait que la géométrie sert comme un code de base pour de nombreux autres codes synthétiques montrera ses avantages pour l'architecture. Cela devient évident dans le côté pratique de cette recherche, à savoir que, en décrivant les articulations architecturales utilisant un métalangage: les mathématiques, nous sommes en mesure de comparer les phénomènes architecturales avec les phénomènes appartenant aux autres langues, par exemple, la physique et particulier la mécanique, en utilisant les mêmes termes de ce métalangage. A la fin, nous tenons à souligner une fois de plus que, même si l'architecture peut être décrite en termes de la géométrie, elle ne peut pas être simplement réduite à l'articulation d'un code géométrique, elle aura toujours besoin de l'articulation supérieure de la conception de l'architecture manipulant ces constructions du code géométrique. Eco donne un exemple de langues verbales pour clarifier ce fait, il souligne que, après tout à la fois le chinois et l'italien peuvent être considérés comme une question d'amplitudes, des fréquences, des formes d'ondes, etc, mais cela ne signifie pas qu'ils reposent sur un seul et même code, il montre simplement que pour certaines fins ils peuvent être réduits à un système commun de transcription [2]. De même, bien que l'architecture et la physique ont la géométrie comme code d'articulation de base, elles ne peuvent pas être simplement réduites au même code. Après avoir expliqué comment le code architectural se rapporte à son code élémentaire mathématique avec la double articulation, nous allons maintenant nous concentrer sur le code dans son ensemble et ce qu'il communique. Eco décrit trois types des codes architecturaux, chacun avec un autre mode de communication, il explique que l'architecture comme nous l'avons montré peut être décrit par le métalangage du code géométrique qu'elle peut le partager avec d'autres disciplines, mais les codes architecturaux peuvent plus ou moins être divisés en: codes techniques, syntaxiques et sémantiques. Les codes techniques: articulations du genre traitées dans la science de l'ingénierie architecturale, l'architecture se résout en des poutres, systèmes de planchers, des colonnes, etc, il n'y a pas de contenu de communication à ce niveau de codification, seulement la logique structurelle. Les codes syntaxiques: sont illustrés par des des codes typologiques concernant l'articulation dans les types spatiaux (plan circulaire, le plan en croix grecque, etc) avec les autres conventions syntaxiques tels que, d'une chambre c'est généralement adjacente à une salle de bain. Les codes sémantiques: sont concernés par les éléments architecturaux, ou les relations établies entre les signes architecturaux individuels (ou des syntagmes) et leur significations dénotatives et connotatives. Cela pourrait être subdivisée à savoir si les éléments: désignent les fonctions primaires, ont des fonctions secondaires connotatives, connotent des idéologies d'habitation ou à grande échelle ont une signification typologique sous certains types fonctionnels et sociologiques [2]. Avec ces description Eco s'interroge comment l'architecture peut être créative tout en restant dans les limites de l'adhésion à ses codes, ce problème se pose bien sûr le plus synthétique le code serait. Eco souligne que ce qui ressort de ces codes architecturaux, est que dans l'ensemble ils semblent être, assez communicatifs, mais ils sont en fait assez limités dans les possibilités opérationnelles. Ces limitations sont dues au fait que ces codes pourraient être considérés comme codifications des solutions déjà travaillées, des codifications qui rendent des messages standardisés, ce qui est assez contrasté aux codes linguistiques verbales qui sont capables de générer d'innombrables messages très différents [2]. Cette limitation est assez

intuitive et claire, par exemple, si l'on prend l'exemple d'un appartement il n'y a pas vraiment un nombre infini de combinaisons architecturales des différentes pièces qui seraient sensibles en termes architecturaux. En revanche si le sens architectural est éliminé, nous avons un nombre infini de combinaisons géométriques de ces éléments, comme un exemple simple: un escalier après une certaine inclinaison ou une certaine taille des étapes devient architecturalement absurde, bien que géométriquement et même physiquement, il reste possible. Cela montre une fois de plus comment le code géométrique est beaucoup plus rudimentaire par rapport au code architectural; avec cela dit, il semble que l'innovation dans l'architecture est en opposition avec rester dans la syntaxe architectural. Comme Eco explique, que reposant sur ces codes, le message architectural devient quelque chose d'un appel de masse, quelque chose qui peut être pris pour acquis, et pourtant il semble que l'architecture peut aussi se déplacer dans la direction du contenu innovant, allant à l'encontre des rhétoriques existantes et des attentes idéologiques. ce ne peut pas être le cas, cependant, que lorsque l'architecture se déplace dans cette direction, elle s'écarte entièrement des codes donnés, car sans la base d'un code quelconque, il n'y aurait pas de communication efficace [2]. En d'autres mots pour produire une nouvelle architecture, l'architecte est obligé avant de penser comme un architecte, de penser comme un mathématicien, philosophe, sociologue, etc d'étendre et d'explorer d'autres territoires que l'architecture touche et d'essayer de travailler à partir de là. Eco pense que l'architecte doit identifier une série des exigences sociales, un système des fonctions qui satisfieraient ces exigences et, enfin, un système des formes qui correspondent à ces fonctions, et seulement à ce niveau nous pourrions trouver quelque chose à comprendre comme architecture. Ainsi, alors que les éléments de l'architecture se constituent en un système, ils deviennent un code uniquement lorsqu'il est couplé avec des systèmes qui se trouvent en dehors de l'architecture, et l'architecte, dans la pratique, est toujours obligés d'être autre chose qu'un architecte [2]. Ce point de vue est essentiel pour nous dans cette recherche, dans le sens qu'il y a certainement un esprit de sortir du territoire de l'architecture afin de faire quelque chose d'innovant et d'une manière impliquer un sentiment d'obligation pour les architectes à faire ça. Ce sortir de l'architecture afin de faire une nouvelle architecture serait toujours problématique à la majorité des architectes qui préfèrent rester confortablement dans leur territoire et d'inviter plutôt des experts de ces autres territoires dans un travail d'équipe. Toutefois, ayant des experts des différents domaines ne change pas beaucoup la situation concernant l'innovation de l'architecture, même si le travail d'équipe rend le processus moins une question de deviner. C'est tout simplement parce que les architectes restent ignorants de ces domaines et forcés de trouver des formes qui donneront forme aux systèmes sur lesquels ils ont aucun pouvoir ou connaissances. En conséquence, l'architecte qui est à la recherche de l'innovation va être toujours forcé à articuler des langues qui expriment quelque chose d'extérieur à l'architecture, ce qui signifie que l'architecte est tenu dans le travail de penser en termes de totalité [2]. Ce pensée en termes de la totalité exigerait l'architecte de s'efforcer pour des connaissances techniques disciplinaires d'autres disciplines que ce soit les mathématiques, la philosophie ou la sociologie, entre autres. Cela doit être fait, peu importe combien il semble que l'architecte est devenu un technicien, un spécialiste ou une personne prévu à des opérations spécifiques plutôt que des questions générales. Cela est évident dans le cas de l'esprit général de cette recherche à savoir en ce qui concerne la discipline des mathématiques, nous n'avons pas hésité de aller aux grandes étendues de technicité qui semble être trop spécialisé pour un architecte à acquérir, mais pour Eco ce processus est d'une grande importance afin de créer de l'innovation dans l'architecture. De ce point de vue, nous arrivons à trois interprétations de quel est le rôle de l'architecte selon Eco, les deux premières sont extrêmes et la dernière est la plus raisonnable. Dans la première interprétation, nous pourrions comprendre l'architecte comme quelqu'un qui n'a plus qu'à trouver les formes appropriées pour répondre aux demandes programmatiques proposées et accepter sur la foi certaines déterminations sociologiques et idéologiques faites par d'autres. Dans le second, l'architecte devient un démiurge ou un artisan de l'histoire. Enfin, la plus raisonnable serait que l'architecte doit concevoir pour des fonctions primaires variables avec des fonctions secondaires ouvertes [2].

8.2.3. L'architecture comme une expérience vécue

Jusqu'à présent, dans notre enquête sur la définition de l'architecture, nous avons donné deux définitions importantes la première était celle de l'architecture comme une fonction, où nous avons traité la relation entre l'esthétique et le fonctionnel, nous l'avons fait à travers le compte de Theodor Adorno sur le sujet. La deuxième définition est celle de l'architecture comme la communication, où nous avons traité la relation entre les fonctions dénotatives et connotatives de l'architecture, en plus de la relation entre le code de l'architecture et le code mathématique. Nous avons terminé cette deuxième partie par l'affirmation que les architectes ont besoin de sortir du territoire de l'architecture afin d'atteindre l'innovation dans la discipline, nous l'avons fait à travers le compte de Umberto Eco sur le sujet. Maintenant, nous allons étudier la dernière de nos trois définitions dominantes de l'architecture: l'architecture comme un expérience vécue; cette définition sera principalement phénoménologique couplé par une brève analyse de la nature politique de l'architecture. La phénoménologie est une importante école de pensée qui a dominé de nombreuses théories architecturales, inspirés par l'œuvre de Heidegger et son élève Hans Georg Gadamer et les œuvres du philosophe français Henri Lefebvre qui est plus politiquement orientée. En essence, la phénoménologie implique une dimension interprétative profonde de la réalité sous la forme de l'herméneutique, ce qui permet pour la réception et la compréhension de cette vérité. Participer à l'architecture phénoménologiquement implique une ouverture non seulement au domaine du sensible, mais aussi à la révélation d'une vérité potentiel. Phénoménologie offre une compréhension de l'architecture et de l'espace qui est en quelque sorte plus profonde que la compréhension sémiotique donnée plus tôt dans le compte de Eco, et le compte esthétique proposée par Adorno, elle cherche à aller au-delà de la capacité de codification de la sémiologie de révéler une compréhension plus riche du monde. Cette profondeur et l'insistance sur l'authenticité est aussi la faiblesse de la phénoménologie car elle devient un système d'auto-référentiel, sans fondements normatifs pour légitimer ses revendications, et c'était la chose qui Adorno a critiqué en elle. Néanmoins, en dépit de sa faiblesse épistémologique la phénoménologie continue de jouer un rôle important dans la théorie de l'architecture jusqu'à aujourd'hui, surtout à l'ère de la réalité virtuelle et les sociétés de contrôle de la question de la corporalité est plus pertinent que jamais. Après avoir souligné l'importance de la phénoménologie dans la théorie architecturale moderne, nous devons souligner que même si le fondateur de cette école de pensée était Husserl qui était aussi un mathématicien, sa phénoménologie diffère de la phénoménologie dominante actuelle qui est due au travail de Heidegger. Comme nous l'avons mentionné au début de la recherche la phénoménologie de Husserl était transcendante, ayant une saveur plus mathématique dans sa description de l'espace et de la cognition sans tenir compte des présuppositions personnels. En revanche, la phénoménologie de Heidegger a mis ces présuppositions personnels au centre de la scène avec son concept important de l'homme (de Dasein) d'être jeté dans le monde, ce point de vue heideggérien reste une position très forte dans la théorie architecturale. C'est assez facile à comprendre que, car sa focalisation est fondamentalement concernée par le particulier, avec le lieu des expériences individuelles et non l'espace de calculs abstraits. Cela a été également reflété dans le rapport soupçonneux des phénoménologues à la science positiviste en tant qu'autorité sur la vérité de la réalité, l'espace et les objets dedans. L'œuvre d'art et particulièrement l'architecture était une préoccupation majeure pour Gadamer et Heidegger, ils croyaient qu'il a transmis la vérité de manière pas moins que le raisonnement scientifique, et qu'il joue un rôle important dans la représentation ontologique. Gadamer dans son essai *Le fondement ontologique de l'occasionnel et le décoratif*, exprime l'importance de l'occasion pour l'œuvre d'art à savoir, l'occasion ou la situation à partir de laquelle le travail est apparu, il souligne que l'œuvre d'art contiendra plus que il aurait sans cette occasion [3]. Nous pouvons immédiatement commencer à remarquer l'idéologie architecturale dominante concernant le traitement de l'espace avec son accent sur le particulier, ou comme le dit Gadamer l'occasion; ce que nous avons mentionné plus tôt, c'est l'un des points critiques de cette recherche qui met l'accent sur une approche à l'espace plus générale provenant d'une idéologie mathématique. Gadamer met également l'accent sur les questions de l'esthétique et la sémantique qui nous avons soulevées ci-dessus dans les comptes antérieurs, mais il fait valoir l'importance de la situation ou l'occasion comme le donateur du sens aux œuvres architecturales. Il souligne qu'il est important de voir que l'œuvre d'art ne doit pas son véritable sens à une institution, c'est plutôt déjà une structure avec une fonction significative, comme représentation picturale ou non picturale, avant d'être affecté sa fonction. Pour cette raison, les œuvres d'art peuvent assumer des fonctions réelles définies et résister à d'autres: par exemple des fonctions

publics ou privées, religieuses ou laïques. Ils sont institués et mis en place en tant que monuments commémoratifs de respect, d'honneur ou de piété, seulement parce qu'ils se prescrivent et contribuent à créer ce genre de contexte fonctionnel. Ils revendiquent leur place, et même si elles sont déplacées, par exemple, placée dans un musée moderne, la trace de leur objectif initial ne peuvent pas être détruits. Il fait partie de leur être parce que leur être est la représentation [3]. Maintenant dans une certaine mesure, on peut interpréter le point de vue de Gadamer comme un moyen d'attacher plus aux codes déjà faits de l'architecture, par exemple les codes syntaxiques des différentes typologies que Eco décrit. A savoir que la conception d'un bâtiment n'est pas seulement attachées intrinsèquement à la fonction dénotative que ce soit un hôpital ou une école, etc, mais aussi son sens est profondément liée au temps et au lieu de sa conception. C'est par contraste à la vision plus dynamique de Eco où l'architecture s'ouvre aux interprétations différentes et les architectes conçoivent des fonctions primaires variables et des fonctions secondaires ouvertes, ici nous avons une vision beaucoup plus statique: une architecture liée à l'endroit et au moment de sa conception et incapables de perdre ce lien. Pour Gadamer ceci peut être vu dans la transformation des vieux bâtiments pour abriter des nouvelles fonctions, par exemple des anciens entrepôts et des églises en d'autres espaces fonctionnels, les traces originales de l'industrie et de la religiosité persistent dans les éléments de l'architecture. C'est pourquoi Gadamer a considéré l'architecture comme formes d'art la plus grande et la plus distinguée pour exprimer l'occasion; une œuvre d'architecture s'étend au-delà d'elle même en de deux façons, elle est autant déterminée par l'objectif qu'elle doit servir, que par l'endroit où elle va prendre dans un contexte spatial totale [3]. Gadamer se concentre ensuite sur la question de l'esthétique qui, selon lui est intrinsèquement une fois liés à l'occasion du travail, qui, dans le cas de l'architecture le contexte dans lequel cet objet est conçu. Gadamer pense que chaque architecte doit considérer à la fois les fins et le contexte de la construction, le plan est influencé par le fait que le bâtiment doit servir un objectif de vie particulier et doit être adaptée aux situations architecturales particulières; par cette double commande le bâtiment présente une augmentation réelle de l'être: il s'agit d'une œuvre d'art. Ce n'est pas une œuvre d'art si elle se tient tout simplement n'importe où, comme un bâtiment qui est une tache sur le paysage, mais seulement si elle représente la solution du problème de la construction (dans le sens de l'occasion); ce point de vue est plus créatif dans le traitement de la relation dialectique entre l'esthétique et la fonctionnalité de l'architecture [3]. Voyant que précisément la réponse du bâtiment au contexte dans le sens de son occasion est ce que lui donne son caractère artistique, contrairement à la compréhension conventionnelle qui s'accroche à l'autonomie artistique de l'architecture sur un effacement superficiel de son occasion. Si un bâtiment est une œuvre d'art, il est non seulement la solution artistique d'un problème de construction posé par les contextes de but et de la vie à laquelle il appartient à l'origine, mais de toute façon il conserve ceux-ci, de sorte qu'ils sont visiblement présents même si la manifestation présente des objectifs premiers est étrange. Ainsi l'architecture est la plus statuaire de toutes les formes d'art, le but d'un bâtiment, à travers lequel elle appartient au contexte de la vie, ne peut pas être séparé d'elle sans lui faire perdre une partie de sa réalité [3]. L'avis de Gadamer sur l'esthétique est également dans une large mesure en opposition à la vue de l'esthétique que nous avons définie au début de la recherche, à savoir la doctrine kantienne de l'esthétique avec sa non prise en compte les paramètres contextuels et sociologiques dans lesquels l'œuvre d'art est conçu. Kant a expliqué cela par l'exemple des travailleurs du palais étant en mesure d'apprécier l'esthétique du palais, en dépit du contexte du palais comme un signe de l'oppression sociale et un rappel de la différence de classe entre les travailleurs et le propriétaire. Dans cette recherche, nous avons pris le point de vue de Kant et de Rancière sur l'esthétique plutôt que celui des phénoménologues. Ce point de vue nous permet d'apprécier l'esthétique des constructions géométriques que nous avons développés dans cette recherche, qui dans leur état actuel sont dépourvues de contextes architecturaux dans le sens du lieu et du temps. Avec la position désintéressée de Kant nous sommes en mesure d'isoler ces objets et de trouver leur beauté comme ils sont, comme dit Kant: en eux-mêmes, et qui est pour Rancière une forme de démocratie où tout le monde peut accéder à cette esthétique. Avec la position désintéressée de Kant nous sommes en mesure d'isoler ces objets et de trouver leur beauté comme ils sont, comme dit Kant: en eux-mêmes, et qui est pour Rancière une forme de démocratie où tout le monde peut accéder à cette esthétique. Le contraste en vue entre Kant et Gadamer continue dans le concept de Gadamer de décoration et du génie artistique, à savoir que la complexité de l'œuvre en elle-même n'est pas ce qui la rend génie, puisque pour Gadamer, l'œuvre est réduit aux compétences techniques. Gadamer affirme que l'architecture tant qu'art qui crée l'espace, elle le façonne et le laisse libre, elle englobe non seulement tous les aspects décoratifs de la mise en forme de l'espace, y

compris l'ornement, mais elle-même est de nature décorative. C'est notamment à attirer l'attention du spectateur à elle-même, pour satisfaire son goût et ensuite lui rediriger loin d'elle vers le plus grand ensemble du contexte de la vie qui l'accompagne. Le concept de la décoration ici est conçu comme une antithèse à une véritable œuvre d'art à partir de son origine dans l'inspiration de génie au sens kantien, l'argument était que ce qui est seulement décoratif n'est pas un art de génie, mais simple savoir-faire qui peut être remplacé, comme tous les autres moyens subordonnés à une fin, par un autre moyen approprié [3]. Il est clair que le point de vue de Gadamer est dominant dans l'architecture, puisque la majorité des discours architecturaux adhère à l'idée que l'architecture ne peut pas être suffisamment innovante sauf si ce travail a été une réponse à un certain contexte. En fait la plupart des étudiants dans les écoles d'architecture sont enseignés le même discours de différentes façons que: la forme en elle-même n'est pas une architecture sauf si elle a été justifiée par le raisonnement contextuel. Il ne fait aucun doute que les constructions géométriques elles-mêmes ne sont pas une architecture, mais elles ont toujours des valeurs et d'esthétique architecturale en elles-mêmes; qui pourraient être adaptées à un contexte donné. Néanmoins, cette approche est la plupart du temps rejetée par la majorité des institutions d'architecture en raison de leur croyance dans l'occasion d'être la donatrice de la valeur d'une conception architecturale et dans de nombreux cas, si cette occasion est suffisante, ce serait assez pour considérer la conception précieuse, même si la construction géométrique n'est pas très développée. Cependant, dans cette recherche, nous adhérons à la vue kantien où le travail (dans ce cas, la construction géométrique) a une valeur esthétique et architecturale en lui-même en dehors du contexte dans lequel ces constructions géométriques peuvent être appliquées. Gadamer affirme cependant que la décoration doit être libéré de cette relation antithétique à la notion de l'art de l'expérience et être ancrée dans la structure ontologique de la représentation, que nous avons vu comme un mode d'être de l'œuvre d'art. Il est nécessaire de récupérer la vision ancienne dans laquelle les significations d'origine de l'ornement et de la décoration étaient la beauté comme telle, elles sont également déterminées par leur rapport à ce qu'elles décorent, une vue que même Kant approuvera [3]. Cela dit, Gadamer précise que l'ornement (ou la décoration) fait partie de goût, il n'est pas d'abord quelque chose par lui-même, qui est ensuite appliqué à autre chose, mais appartient à la présentation de son porteur, il fait partie de la présentation comme un événement ontologique ce qui signifie qu'il est une représentation. Ce que Gadamer entend par représentation est des éléments universels ontologiques structurelles de l'esthétique, un événement ontologique et non pas un événement expérientiel qui se produit au moment de la création artistique et est répétée à chaque fois dans l'esprit du spectateur [3]. Avec ça, nous obtenons une description claire dans cet essai de la position de Gadamer concernant l'esthétique des objets étant fondées dans leurs contextes, comme nous l'avons dit c'est une position à laquelle la majorité des architectes adhèrent. A côté du compte de Gadamer nous voudrions donner un autre point de vue important phénoménologique et politique de l'architecture et de la production de l'espace, à savoir, le compte de Lefebvre sur le monument architectural et l'espace dans son livre *La production de l'espace*. Encore une fois, nous allons voir une forte différence entre la définition de l'architecture donnée ici par Lefebvre et celles présentées plus tôt par Eco et Adorno et par conséquent celle de cette recherche qui est en accord avec eux. L'avis de Lefebvre que nous allons discuter est plus politiquement orientée, critiquant l'aliénation du corps et le sens de la compréhension architecturale de l'espace causée par l'abstraction, à savoir l'abstraction causée par une pensée mathématique de l'espace. Lefebvre fait valoir que le privilège de l'image a conduit à une compréhension appauvrie de l'espace, transformant l'espace social en une abstraction fétichisée, il estime que l'image tue et elle ne peut pas rendre compte de la richesse de l'expérience vécue [4]. Il pense que les architectes sont complices dans toute la nature aliénante de l'existence contemporaine, non seulement ils sont dominés par le capitalisme bourgeois, mais avec leurs méthodes abstraites de la représentation, ils ont réduit le monde à un domaine de bleus. Lefebvre appelle à une restauration de préoccupation pour le corps, l'espace doit être connu par tous les sens, non seulement l'approche de la codification de la sémiologie puisque nous ne sommes pas face au texte, mais à la texture. Il fait valoir que cette approche de codification de la sémiologie, qui vise à classer les représentations, les impressions et les évocations comme des termes dans le code de la connaissance, le code de sentiments personnels, le code symbolique, ou le code herméneutique, est tout à fait incapable de couvrir toutes les facettes de l'architecture. Car il est le résidu, irréductible, ce qui ne peut être classé ou codifié selon les catégories conçu à la suite de la production, qui est le plus précieux et le plus essentiel, le diamant au fond du pot de fusion [4]. Nous pouvons voir clairement dans l'avis de Lefebvre le sentiment anti-abstraction, il est critiquant de la sémiologie et des lectures sémiologiques de l'architecture comme celle de

Eco que nous avons décrit plus haut, et bien sûr, il est critiquant des toutes les approches similaires où les expériences vécues sont réduites aux codes. Par conséquent, il serait en opposition à la codification de l'espace architectural dans les codes mathématiques qui serait les plus abstraits et aliénants. Il est clair que nous ne adhérons pas entièrement à ce point de vue dans cette recherche, mais il est important pour nous d'apporter le compte de Lefebvre puisque dans son opposition, nous pouvons comprendre certaines des raisons pour lesquelles les mathématiques modernes et l'architecture ne sont pas naturellement combinés. Ceci dit, nous devons souligner que Lefebvre est juste de considérer ce qui est irréductible aux codes comme le plus précieux mais on ne peut nier la beauté et l'importance de ce qui est codé; aussi nous ne devons pas oublier que l'irréductible est dialectiquement lié au réductible. En d'autres termes, il n'y aurait pas irréductible s'il n'y avait pas réductible ou codifié, c'est parce que nous sommes capables de coder de nombreux aspects de la réalité que nous apprécions les aspects que nous ne pouvons pas coder. En d'autres termes, il n'y aurait pas d'irréductible s'il n'y avait pas de réductible ou codifié, c'est parce que nous sommes capables de coder de nombreux aspects de la réalité que nous apprécions les aspects que nous ne pouvons pas coder. Comme nous l'avons mentionné plus tôt dans cette recherche, nous ne sommes pas en aucune façon en train de réduire le processus architectural en un problème scientifique positiviste en utilisant le langage mathématique pour décrire l'espace, c'est au contraire une tentative pour étendre notre appréciation poétique de ce processus. Lefebvre poursuit sa description de la raison pour laquelle l'architecture ne peut pas être réduit à une langue, il convient qu'un monument architectural est le résultat d'une pratique signifiante et une façon particulière de proposer une signification, mais il ne croit pas qu'elle peut être réduite ni à une langue ou un discours, ni aux catégories et concepts développés pour l'étude de la langue [4]. C'est parce que Lefebvre estime que l'architecture comme une œuvre spatiale contient une complexité fondamentalement différente de la complexité du texte, les actions de la pratique sociale sont exprimable mais pas lu, l'architecture comme la musique n'a pas des signifiés, a plutôt un horizon de signification. Une multiplicité de significations, une hiérarchie mobile dans laquelle aujourd'hui l'un, tantôt l'autre signification vient momentanément au premier plan, par le biais de (et pour le bien de) une action particulière; l'opération sociale et politique d'une œuvre architecturale traverse les différents systèmes et sous-systèmes des codes, qui constituent et fondent la société concernée [4]. C'est pour cela que l'architecture pour Lefebvre est plus que toutes les fonctions dénotatives et connotatives, l'architecture dépasse ces codes et sous-codes et implique un super-codage, en ce qu'elle tend à la présence de la totalité. Lefebvre croit également que l'architecture efface les traces de la violence et de la négativité dans la pratique sociale par une puissance tranquille et une certitude qui peut englober la violence et la terreur [4]. Cela signifie que par un monument architectural, la pratique sociale transcende les limites par lesquelles autres pratiques signifiantes et donc autres arts, y compris les textes dits littéraires sont bornées, de cette façon un consensus, un accord profond est atteint. Nous pouvons voir la nature politique dans le compte de Lefebvre, il essaie de montrer que l'architecture a aussi et sur tout une dimension politique, mais cette dimension est un dépassement subtil et de signes simplistes. Cela est compris en regardant les monuments qui ont été faites pour imposer ou exprimer certaine idéologie politique; par exemple les bâtiments des vieux régimes totalitaires. Même si ces bâtiments disposent une fois des fonctions dénotatives comme bâtiment du gouvernement et une fonction connotative comme l'idéologie de ce régime, les bâtiments selon Lefebvre transcende cette violence totalitaire avec leur silence et leur présence continue bien après que ces régimes sont partis. Pour cette raison Lefebvre pense qu'un monument architectural ne doit pas être considéré comme un collections de symboles, ni comme une chaîne de signes, il n'est pas un objet ni une agrégation des objets divers. Lefebvre met ensuite l'accent sur la relation entre le corps et l'objet architectural, il souligne que malgré le fait que son physique, sa position comme un objet social est rappelée à chaque instant, peut-être par la brutalité des matériaux ou des masses en jeu, ou peut-être au contraire par ses qualités douces; ce n'est pas une sculpture, ni une figure ni simplement le résultat des procédures des matériaux [4]. Un monument architectural est défini par ce qui peut y avoir lieu; les qualités monumentales ne sont pas uniquement plastiques pour être appréhendées que en regardant, elles possèdent également des propriétés acoustiques; par exemple, dans une maison de prière la silence est sa musique, l'espace est mesuré par l'oreille. Les sons, les voix et le chant se répercutent dans un jeu analogue à celle entre les sons les plus élémentaires et les tons et à l'interaction mis en place lors de la lecture vocale insuffler une nouvelle vie dans un texte écrit. Les volumes architecturaux assurent une corrélation entre les rythmes qu'ils divertissent et leur résonance musicale, c'est de cette manière et à ce niveau, dans le non visible que les organismes trouvent de l'autre [4]. Ici, nous pouvons voir le côté

phénoménologique / politique du compte de Lefebvre avec son accent sur les sens et l'expérience, ce sentiment poursuivra par la suite où il critique les architectes et leurs rôles dans l'aliénation du corps de l'espace architectural avec leur accent sur les images et la représentation graphique. Il explique que c'est facile d'imaginer que l'architecte aurait une tranche ou un morceau de l'espace comme une donnée et ensuite travailler sur elle selon un certain goût, les compétences techniques, les idées et les préférences en toute liberté. Ce n'est pas ce qui se passe réellement, mais la section de l'espace attribuée à l'architecte par un développeur ou un organisme gouvernemental est affectée par des calculs, que l'architecte ne connaît pas très bien; cet espace n'est pas un espace innocent: il répond aux tactiques particulières et stratégies. C'est tout simplement l'espace du mode de production dominant, et donc l'espace du capitalisme régie par la bourgeoisie [4]. Voici Lefebvre attire notre attention aux forces politiques cachées derrière le processus de la pratique architecturale, et encore plus important de ce qu'il appelle l'espace de l'architecte, ce qui est l'espace de la représentation architecturale: des dessins et des images. Lefebvre explique que l'architecte n'est pas plus innocent que le lot donné ou le papier blanc pour le premier croquis, l'espace de l'architecte est frété avec des significations très objectives, il est un espace visuel, un espace réduit à des plans, à de simples images. Ces réductions sont accentuées et justifiées par la règle de la perspective linéaire, ces tendances de stérilisation ont été dénoncées depuis longtemps par l'architecte George Gromort, qui a démontré comment elles servaient à fétichiser la façade. La tendance à faire des réductions de ce genre: réductions aux parcelles, aux images, au façades qui sont faites pour être vu et de voir de, renforçant ainsi l'espace visuel pur est une tendance qui dégrade l'espace [4]. On peut dire du discours architectural qu'il imite trop souvent ou caricature le discours du pouvoir, et qu'il souffre de l'illusion que la connaissance objective de la réalité peut être atteint par des moyens de représentations graphiques. Dans la pratique spatiale de la société moderne, l'architecte a une représentation de l'espace liée à des éléments graphiques, des feuilles de papier, des plans, des élévations, des coupes, des vues en perspective des façades, des modules et ainsi de suite. Cet espace est considéré par ceux qui font usage de celui-ci d'être vrai, malgré le fait ou peut-être en raison du fait qu'il est géométrique: parce que c'est un milieu pour les objets, un objet lui-même, et un lieu de l'objectivation des plans. Son lointain ancêtre est la perspective linéaire développé pendant la Renaissance: un observateur fixe, un champ perceptif immobile, un monde visuel stable [4]. Nous pouvons voir clairement dans cette partie, de le sentiment anti-abstraction de Lefebvre, concernant la connaissance de l'espace et la réalité, il critique les architectes de croire en la représentation graphique avec sa base géométrique d'être la vraie connaissance objective de la réalité. Nous pouvons imaginer que son opposition serait plus forte en ce qui concerne une autre abstraction de l'espace à savoir comme celui que nous faisons dans cette recherche en utilisant la construction mathématique. Il est important pour nous cependant de mentionner ce point de vue, car il a une présence importante dans l'architecture, de nombreux architectes pensent que les dessins et les images géométriques dégrade l'espace, et que le moins mathématique le dessin est le mieux. Cela nous rappelle également le compte de Merleau-Ponty préférant l'approche anti-perspective de Cézanne à la peinture sur la peinture avec perspective linéaire telles que celles de la renaissance. Avec ces points de vue ayant une présence importante dans l'architecture, nous pouvons voir pourquoi la relation entre l'architecture et la géométrie a été en régression depuis la renaissance, et pourquoi cette tentative de mettre une fois de plus l'architecture et la géométrie ensemble est problématique. Il est clair pourquoi Lefebvre et Merleau-Ponty critiquent en particulier la perspective linéaire, puisque c'était précisément son invention qui a abouti à la hauteur l'affinité entre les arts et les sciences en général et l'architecture et les mathématiques en particulier. En d'autres termes lorsque l'art et la science partagent une base commune de compréhension de l'espace et de la réalité et une notion commune de la beauté et de l'harmonie écrit dans le langage de la géométrie donnée à l'homme par le divin. Lefebvre résume enfin quel est le critère principal du plan architectural, qui est inconsciemment déterminé par ce champ perceptif, à savoir si ou non il est réalisable; tout plan qui mérite un considération doit être quantifiable, rentable, transmissible et réaliste. Mettant l'accent sur toutes les questions relatives à ce qui est trop près ou trop loin, ou relatives à l'environnement et sur la relation entre privé et public [4]. Une fois encore, nous voyons un rejet clair de tout valeur de l'architecture qui n'est pas fondée sur l'expérience vécue, en d'autres mots les œuvres architecturales qui sont basées sur l'imagination ou des utopies fictives. Enfin à partir de l'espace de l'architecte Lefebvre tourne l'attention cette fois à l'espace de l'utilisateur, il pense tout d'abord que la notion d'utilisateur et habitant sont péjoratives et qu'il n'y a pas des termes bien définis avec des connotations claires pour désigner ces groupes. L'espace de l'utilisateur est vécue non représentés ou conçu, par rapport à l'espace abstrait des experts

(architectes, et urbanistes), l'espace des activités quotidiennes des utilisateurs est concret, c'est-à-dire, subjective [4]. En tant qu'espace de sujets plutôt que des calculs, comme un espace de représentation, il a une origine et cette origine est l'enfance; avec ses difficultés, ses réalisations et ses manques; l'espace vécu porte le cachet de conflit entre un inévitable, si long et difficile processus de maturation et de manque de maturité, qui laisse certaines ressources et réserves originales intactes. C'est dans cet espace que le domaine privé affirme lui-même, quoique plus ou moins vigoureusement, et toujours de façon conflictuelle contre celui du public. La restauration du corps signifie, d'abord et avant tout, la restauration de la sensorielle sensuelle de la parole, de la voix, de l'odorat, de l'entendre, bref, du non-visuel et du sexuel mais pas dans le sens du sexe considéré isolément, mais plutôt dans le sens de l'énergie sexuelle dirigée vers une décharge spécifique et circulant selon des rythmes spécifiques [4].

Avec cela, nous terminons les trois définitions idéologiques principales de l'architecture que nous avons trouvé le plus dominant dans l'architecture après la modernité, en plus de la dernière courant dans l'architecture: architecture numérique que nous avons discuté plus tôt dans notre analyse de l'ordinateur et la conception. Il est important de comprendre que ces comptes ne sont pas utilisés ici pour donner un historique concis complet de la définition de l'architecture en tant que discipline. Mais ils sont là pour montrer que la discipline de l'architecture n'est pas clairement définie ou une discipline fixe, c'est une discipline qui est ouverte à des interprétations et résiste une définition universelle. C'est une différence fondamentale que l'architecture a en comparaison avec les sciences naturelles et humaines, et où elle reste connectée à ses racines artistiques. C'est précisément ce caractère d'ouverture à l'interprétation que font de l'architecture un terrain fertile pour le travail expérimental; expérimental dans le sens de remettre en cause les principes fondamentaux et non seulement le travail le long des grandes lignes déjà décidées. C'est quelque chose qui aurait été assez difficile dans les recherches en sciences dures car les grandes lignes de recherche sont dans la plupart des cas prédéterminées par la communauté scientifique. Dans cette recherche, nous avons profité de cette liberté offerte par la recherche en architecture afin de soulever la question fondamentale de la géométrie et l'architecture une fois de plus dans un contexte moderne. Nous avons commencé par expliquer la nature esthétique de cette recherche et sa relation avec le côté pratique d'avoir des descriptions techniques mathématiques, des dessins architecturaux. Nous avons ensuite examiné la notion de l'espace lui-même et la façon dont les différentes définitions de l'espace qui viennent de différentes disciplines pourraient se rapporter, puis nous avons établi les bases théoriques pour la construction de l'espace mathématique formelle. A partir de là, nous avons fait nos constructions mathématiques; qui sont divisés en deux catégories principales: définitions (paramétrique, algébriques et d'interpolation) et opérations (algébriques, analytiques et algorithmique). Enfin nous sommes retournés à l'analyse théorique avec notre enquête sur la définition de l'architecture et comment ces définitions portent sur le travail accompli dans cette recherche.

8.3. Références

[1] *Functionalism today*, Theodor Adorno, 1965; *Rethinking architecture, a reader in cultural theory*, Niel Leach, London 1997

[2] *Function and sign: the semiotics of architecture*, Umberto Eco; *Rethinking architecture, a reader in cultural theory*, Niel Leach, London 1997

[3] *The ontological foundation of the occasional and the decorative*, Hans Georg Gadamer; *Rethinking architecture, a reader in cultural theory*, Niel Leach, London 1997

[4] *The production of space (extracts)*., Henri Lefebvre; *Rethinking architecture, a reader in cultural theory*, Niel Leach, London 1997