# Identification de systèmes par modèle non entier à partir de signaux d'entrée sortie bruités

Manel Chetoui

▶ **To cite this version:**

Manel Chetoui. Identification de systèmes par modèle non entier à partir de signaux d'entrée sortie bruités. Autre. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I; École nationale d'ingénieurs de Gabès (Tunisie), 2013. Français. NNT : 2013BOR15244 . tel-00989549

**HAL Id: tel-00989549**

**https://theses.hal.science/tel-00989549**

Submitted on 12 May 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Gabès, Tunisie
École Doctorale Sciences, Ingénierie
et Société
Numéro d'ordre : 07/2013

Université Bordeaux 1, France
École Doctorale des Sciences Physiques
et de l'Ingénieur
Numéro d'ordre : 5016

# THÈSE

EN COTUTELLE ENTRE

**L'UNIVERSITÉ DE GABÈS**

ET

**L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1**

PRÉSENTÉE PAR

**Manel CHETOUI**

POUR OBTENIR LE

# DOCTORAT

Spécialité : Génie Électrique à l'Université de Gabès
Automatique, Productique, Signal et Image à l'Université Bordeaux 1

# IDENTIFICATION DE SYSTÈMES PAR MODÈLE NON ENTIER À PARTIR DE SIGNAUX D'ENTRÉE SORTIE BRUITÉS

Soutenue à l'**École Nationale d'Ingénieurs de Gabès** le 18 Décembre 2013

Devant la commission d'examen formée de :

| | | | |
|---|---|---|---|
| M. | Kamel ABDERRAHIM | Université de Gabès | *Président* |
| M. | Tarek RAÏSSI | CNAM, Paris | *Rapporteur* |
| M. | Nabil DERBEL | Université de Sfax | *Rapporteur* |
| M. | Rachid MALTI | Université Bordeaux 1 | *Directeur de Thèse* |
| M. | Mohamed Naceur ABDELKRIM | Université de Gabès | *Directeur de Thèse* |
| M. | Alain OUSTALOUP | Université Bordeaux 1 | *Membre* |
| M. | Pierre MELCHIOR | Université Bordeaux 1 | *Membre (Invité)* |
| M. | Mohamed AOUN | Université de Gabès | *Membre (Invité)* |

Unité de Recherche de Modélisation, Analyse et Commande de Systèmes (MACS - 06/UR/11-12), ENIG, Gabès, Tunisie
Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système (IMS - UMR 5218 CNRS), pôle APS, Bordeaux, France

*"Le succès n'est pas final, l'échec n'est pas fatal : c'est le courage de continuer qui compte."*

Winston Churchill.

*Je dédie ce travail*
*à ma mère Zakia,*
*à mon père Mohamed,*
*à mes sœurs Nadia et Imen,*
*à mes frères Belgacem et Haythem,*
*à ma petite nièce Salsabil,*
*et à mon chéri Ramzi.*

# Remerciements

Les travaux développés dans ce mémoire ont été effectués au Laboratoire de l'Intégration de Matériau au Système (IMS), UMR 5218 CNRS, pôle APS sous la direction de Rachid MALTI, Maître de Conférences habilité à diriger des recherches et l'Unité de Recherche Modélisation, Analyse et Commande de Systèmes (MACS-06/UR/11-12) sous la direction de Professeur Mohamed Naceur ABDELKRIM, dans le cadre d'une thèse en cotutelle entre l'Université Bordeaux 1 et l'École Nationale d'Ingénieurs de Gabès.

Cette thèse a été co-encadrée par Magalie THOMASSIN, Maître de Conférences à l'Université de Lorraine et Mohamed AOUN, Maître de Conférences à l'Université de Gabès.

Je remercie Monsieur Kamel ABDERRAHIM, Maître de Conférences à l'École Nationale d'Ingénieurs de Gabès, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Tarek RAISSI, Maître de Conférences habilité à diriger des recherches au Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM-Paris), et Monsieur Nabil DERBEL, Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Sfax, qui ont eu la gentillesse d'accepter la tâche importante d'être rapporteurs de ce travail. L'intérêt qu'ils portent à mon travail est pour moi un encouragement et une source de motivation importants.

Je suis profondément reconnaissante à Monsieur Rachid MALTI, Maître de Conférences habilité à diriger des recherches, à l'Université Bordeaux 1, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de diriger mes travaux de recherche. Je le remercie pour sa rigueur, ses nombreux conseils, ses qualités humaines, sa disponibilité et son aide permanente. Je lui serai toujours reconnaissante pour l'effort qu'il a investi dans cette thèse.

J'adresse également mes vifs remerciements à Monsieur Mohamed Naceur ABDELKRIM, Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Gabès pour la confiance qui m'a accordé tout au long de ce travail. Je le remercie pour sa disponibilité, ses conseils, son aide, son écoute et sa bienveillante directive.

Mes remerciements s'adressent à Madame Magalie THOMASSIN, Maître de Conférences à l'Université de Lorraine, pour la rigueur, l'attention et les nombreux conseils enrichissants qu'elle a su me prodiguer. Je la remercie encore pour son effort et ses encouragements et surtout son amitié.

Mes profonds remerciements s'adressent également à Monsieur Mohamed AOUN, Maître de Conférences à l'École Nationale d'Ingénieurs de Gabès, pour l'encadrement, la passion, les précieux conseils et la confiance qu'il a su me témoigner.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur Alain OUSTALOUP, Professeur à l'Institut Polytechnique de Bordeaux, pour sa disponibilité, son écoute, son encouragement et pour la joie et l'enthousiasme partagés durant mes séjours à Bordeaux.

Je témoigne également toute ma gratitude à Monsieur Pierre MELCHIOR, Maître de Conférences à l'Institut Polytechnique de Bordeaux (IPB/enseirbmatmeca), pour son aide, sa patience sa disponibilité. Je remercie aussi Monsieur Slaheddine NAJAR, Maître Assistant à l'École Nationale d'Ingénieurs de Gabès, qui m'a prodigué ses conseils et ses encouragements pour l'élaboration de ces travaux. Veuillez trouvez Messieurs toute ma profonde gratitude.

Je voudrais également remercier tous les membres de l'équipe CRONE pour leur conseils, leur sympathie et leur aide et plus particulièrement mes amis Asma, Mathieu, Stéphane, Benjamin, sans oublier mon binôme Lamine et tous ceux que je n'ai pas cités. Toute mon amitié va encore à tous les membres de l'Unité de recherche MACS et plus particulièrement à Madame Saloua BELHAJ ALI pour son soutien et son écoute.

Je ne peux terminer mes remerciements sans exprimer ma sincère gratitude à mes amis en particulier à : Saïda, Messaoud, Anis et Nizar, merci pour ces moments inoubliables que nous avons partagé. Je leur exprime ma profonde sympathie et je leur souhaite beaucoup de succès. Une pensée spéciale à Noura et Mouna tout simplement pour leur présence et leur encouragements.

Enfin, je remercie Ramzi pour m'avoir supporté pendant ces années de travail, et pour m'avoir accompagné en tout temps de peine et de joie et j'espère pouvoir faire de même à ses côtés pour les années à venir.

Pour finir, j'exprime toute ma reconnaissance à mes parents, mes sœurs et mes frères qui m'ont encouragé tout au long de ces années d'études. Qu'ils reçoivent ici ma gratitude pour leur innombrables sacrifices.

# Table des matières

**Terminologies et Notations**

**Introduction Générale**

**Chapitre 1**
**Outils statistiques pour l'identification dans un contexte EIV**

1.1 Introduction . . . . . 10
1.2 Outils statistiques . . . . . 10
1.2.1 Variables et vecteurs aléatoires . . . . . 10
1.2.2 Statistiques d'ordre supérieur . . . . . 13
1.2.2.1 Moments d'une variable aléatoire . . . . . 13
1.2.2.2 Cumulants d'une variable aléatoire . . . . . 15
1.2.2.3 Cumulants d'un vecteur aléatoire . . . . . 17
1.2.2.4 Cumulants d'un signal aléatoire . . . . . 17
1.2.2.5 Stationnarité . . . . . 18
1.2.2.6 Ergodicité . . . . . 19
1.2.2.7 Estimation des moments et des cumulants . . . . . 19
1.2.2.8 Propriétés des moments et des cumulants . . . . . 21
1.3 Identification à temps discret dans le contexte EIV . . . . . 22
1.3.1 Formulation du problème d'identification des systèmes EIV . . . . . 22
1.3.2 Méthodes basées sur les statistiques de second ordre (SSO) . . . . . 24
1.3.3 Méthodes basées sur les statistiques d'ordre supérieur (SOS) . . . . 27
1.3.3.1 Méthodes fondées sur la minimisation d'un critère . . . . . 27
1.3.3.2 Méthodes fondées sur une variable instrumentale . . . . . 29
1.3.3.3 Méthodes fondées sur l'équation du modèle . . . . . 30
1.4 Identification à temps continu dans le contexte EIV . . . . . 33
1.4.1 Formulation du problème d'identification des systèmes EIV . . . . . 34
1.4.2 Méthodes basées sur les statistiques de second ordre . . . . . 36

1.4.3 Méthodes basées sur les statistiques d'ordre supérieur . . . . . 37
1.4.3.1 Méthodes basées sur les statistiques d'ordre trois . . . . . 38
1.4.3.2 Méthodes basées sur les statistiques d'ordre quatre . . . . 42
1.5 Conclusion . . . . . 44

**Chapitre 2**
**Dérivation non entière et systèmes non entiers**

2.1 Introduction . . . . . 47
2.2 Intégration non entière . . . . . 47
2.2.1 Définition . . . . . 47
2.2.2 Transformée de Laplace de l'intégrale non entière d'une fonction temporelle . . . . . 48
2.2.3 Caractéristiques fréquentielles de l'intégration non entière . . . . . 49
2.3 Dérivation non entière . . . . . 50
2.3.1 Définition de Riemann . . . . . 50
2.3.2 Définition de Caputo . . . . . 51
2.3.3 Définition de Grünwald . . . . . 51
2.3.4 Généralisation de la définition de Grünwald . . . . . 52
2.3.5 Transformée de Laplace de la dérivée non entière d'une fonction temporelle . . . . . 60
2.3.6 Caractéristiques fréquentielles de la dérivation non entière . . . . . 60
2.4 Représentation des systèmes non entiers . . . . . 61
2.4.1 Equation différentielle . . . . . 62
2.4.2 Fonction de transfert . . . . . 62
2.4.2.1 Forme commensurable . . . . . 62
2.4.2.2 Forme modale factorisée . . . . . 63
2.4.2.3 Forme modale développée . . . . . 64
2.4.3 Représentation d'état . . . . . 64
2.5 Stabilité des systèmes non entiers . . . . . 65
2.6 Simulation des systèmes non entiers . . . . . 66
2.6.1 Approche fondée sur l'approximation par pôles et zéros récursifs de l'opérateur de dérivation non entier . . . . . 67
2.6.2 Approche fondée sur la définition de Grünwald de l'opérateur de dérivation non entier . . . . . 68
2.6.3 Approche fondée sur la définition de Grünwald généralisée de l'opérateur de dérivation non entier . . . . . 69

2.6.4 Exemple de simulation . . . . . 70
2.7 Conclusion . . . . . 71

**Chapitre 3**
**Contribution à l'identification par modèle EIV non entier : statistiques d'ordre trois**

3.1 Introduction . . . . . 74
3.2 Formulation du problème d'identification par modèle EIV non entier . . . . 76
3.3 Estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre trois . . . . . 78
3.3.1 Estimateur des moindres carrés : ftocls . . . . . 80
3.3.2 Estimateur des moindres carrés itératifs : ftocils . . . . . 83
3.4 Estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre trois combinés à l'estimation des ordres de dérivation . . . . . 86
3.4.1 Position du problème . . . . . 86
3.4.2 Méthodes d'optimisation non linéaires . . . . . 87
3.4.3 Estimateurs avec optimisation de l'ordre commensurable . . . . . 88
3.5 Exemple de simulation numérique . . . . . 90
3.5.1 Estimation des coefficients . . . . . 91
3.5.1.1 Etude du choix du signal d'entrée non bruité . . . . . 91
3.5.1.2 Influence de l'hyper-paramètre T . . . . . 96
3.5.1.3 Etude de l'influence du bruit sur l'entrée et la sortie . . . 97
3.5.1.4 Validation des modèles estimés . . . . . 102
3.5.1.5 Choix de l'ordre commensurable . . . . . 104
3.5.2 Estimation conjointe des coefficients et des ordres de dérivation . . 105
3.6 Application à l'identification d'un système thermique . . . . . 107
3.6.1 Description du système thermique . . . . . 107
3.6.2 Modélisation du système thermique . . . . . 109
3.6.3 Identification du système thermique . . . . . 111
3.6.3.1 Estimation paramétrique . . . . . 111
3.6.3.2 Validation des modèles estimés . . . . . 114
3.7 Conclusion . . . . . 115

**Chapitre 4**
**Contribution à l'identification par modèle EIV non entier : statistiques d'ordre quatre**

4.1 Introduction . . . . . 118

4.2 Estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre quatre . . . . . 119
4.2.1 Estimateur des moindres carrés : ffocls . . . . . 121
4.2.2 Estimateur des moindres carrés itératifs : ffocils . . . . . 125
4.3 Exemple de simulation numérique . . . . . 125
4.3.1 Cas des ordres de dérivation connus . . . . . 127
4.3.1.1 Influence de l'hyper-paramètre . . . . . 127
4.3.1.2 Etude de l'influence du bruit sur l'entrée et la sortie . . . 127
4.3.2 Cas des ordres de dérivation inconnus . . . . . 132
4.4 Estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre quatre combinés à l'estimation des ordres de dérivation . . . . . 135
4.4.1 Position du problème . . . . . 135
4.4.2 Estimateurs avec optimisation de l'ordre commensurable . . . . . 136
4.5 Application à l'identification d'un système électronique . . . . . 137
4.5.1 Description du système électronique . . . . . 137
4.5.2 Identification du système électronique . . . . . 140
4.5.2.1 Cas des ordres de derivation connus . . . . . 140
4.5.2.2 Cas des ordres de derivation inconnus . . . . . 146
4.6 Conclusion . . . . . 150

**Conclusion Générale et perspectives**

**Annexe A**

**Bibliographie** **173**

**Bibliographie de l'auteur**

# Liste des figures


1.1 Schéma du modèle EIV entier à temps discret. . . . . 22
1.2 Schéma du modèle EIV à temps continu. . . . . 34

2.1 Variation de $O_\upsilon$ pour $0.1 < \upsilon < 1$. . . . . 48
2.2 Diagrammes de Bode d'un intégrateur non entier. . . . . 50
2.3 Dérivée analytique de $\sin(t)$ et ses approximations au sens de Grünwald ($\upsilon = 0.3$, $h = 0.1$ et $L = \{1, ..., 4\}$). . . . . 54
2.4 Zoom sur la dérivée non entière de la fonction $\sin(t)$ et ses approximations au sens de Grünwald ($\upsilon = 0.3$, $h = 0.1$ et $L = \{1, ..., 4\}$) dans l'intervalle de temps [18.06 18.08]. . . . . 55
2.5 Erreurs entre la dérivée analytique de la fonction $\sin(t)$ et ses différentes approximations au sens de Grünwald ($\upsilon = 0.3$, $h = 0.1$ et $L = \{1, ..., 4\}$). . . . . 55
2.6 Zoom sur l'erreur entre la dérivée analytique de la fonction $\sin(t)$ et ses différentes approximations au sens de Grünwald ($\upsilon = 0.3$, $h = 0.1$ et $L = \{1, ..., 4\}$). . . . . 56
2.7 Différents FIT obtenus par l'approximation de la fonction $\sin(t)$ en fonction de $L$ ($\upsilon = 0.3$, $h = 0.1$s et $L = \{1, ..., 4\}$). . . . . 57
2.8 Dérivée non entière de la fonction $f(t) = \exp(\varsigma t)\sin(t)$ et ses approximations au sens de Grünwald ($\upsilon = 0.5$, $\varsigma = 0.1$ et $L = \{1, 2, 3\}$). . . . . 58
2.9 Erreurs entre la dérivée analytique de la fonction $f(t) = \exp(\varsigma t)\sin(t)$ et ses approximations au sens de Grünwald ($\upsilon = 0.5$, $\varsigma = 0.1$ et $L = \{1, 2, 3\}$). 58
2.10 Différents FIT obtenus par l'approximation de la fonction $f(t) = \exp(\varsigma t)\sin(t)$ en fonction de $L$ ($\upsilon = 0.5$, $\varsigma = 0.1$ et $L = \{1, 2, 3\}$). . . . . 59
2.11 Diagrammes de Bode d'un dérivateur non entier. . . . . 61
2.12 Régions de stabilité pour différents ordres commensurables : $\upsilon < 1$, $\upsilon = 1$ et $\upsilon > 1$. . . . . 66
2.13 Réponses indicielles d'un système non entier et ses approximations au sens de Grünwald. . . . . 71

2.14 Écart entre la réponse indicielle d'un système non entier et ses approximations au sens de Grünwald. . . . . 71

3.1 Schéma du modèle EIV non entier à temps continu. . . . . 76
3.2 Histogrammes des différents signaux d'entrée non bruités. . . . . 92
3.3 Influence du choix du signal d'entrée non bruité : histogrammes des estimées obtenues par l'estimateur *ftocls*. . . . . 94
3.4 Influence du choix du signal d'entrée non bruité : histogrammes des estimées obtenues par l'estimateur *ftocils*. . . . . 95
3.5 Signaux d'entrée et de sortie bruités (RSB=15dB). . . . . 96
3.6 Evolution des estimées obtenues par l'estimateur *ftocls* et *ftocils* en fonction de l'hyper-paramètre $T$. . . . . 97
3.7 Histogrammes des estimées obtenues par les algorithmes *srivcf*, *ftocls* et *ftocils* : bruits blancs sur l'entrée et sur la sortie ($N_t = 500$). . . . . 99
3.8 Histogrammes des estimées obtenues par les algorithmes *srivcf*, *ftocls* et *ftocils* : bruits blancs sur l'entrée et sur la sortie ($N_t = 2000$). . . . . 100
3.9 Histogrammes des estimées obtenues par les algorithmes *srivcf*, *ftocls* et *ftocils* : bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie ($N_t = 500$). . . . . 102
3.10 Histogrammes des estimées obtenues par les algorithmes *srivcf*, *ftocls* et *ftocils* : bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie ($N_t = 2000$). . . . . 103
3.11 Données de validation. . . . . 104
3.12 Réponses temporelles des modèles estimés par *srivcf*, *ftocls* et *ftocils* (données de validation). (a) : sur une fenêtre de 200 sec, (b) : zoom entre 55 sec et 63 sec. 104
3.13 Critère obtenu par l'estimateur *ftocls* et *ftocils* en fonction de l'ordre commensurable du modèle (bruits blancs sur l'entrée et sur la sortie). . . . . 105
3.14 Histogrammes des estimées obtenues par les algorithmes *co-ftocls* et *co-ftocils* : bruits blancs sur l'entrée et sur la sortie. . . . . 106
3.15 Histogrammes des estimées obtenues par les algorithmes *co-ftocls* et *co-ftocils* : bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie. . . . . 107
3.16 Barreau en alliage d'aluminium de géométrie cylindrique. . . . . 107
3.17 Isolation thermique du procédé. . . . . 108
3.18 Vue d'ensemble du système réel. . . . . 108
3.19 Milieu semi-infini plan. . . . . 109
3.20 Signaux d'entrée et de sortie du système thermique. . . . . 111
3.21 Intégrale à l'ordre 0.5 du signal d'entrée non bruité et sa distribution. . . . . 112
3.22 Signaux d'entrée et de sortie bruités du système thermique. . . . . 113

3.23 Réponses temporelles du modèle estimé par *ftocls* et du système réel (a) et l'erreur de sortie (b) (données d'estimation). . . . . 113
3.24 Réponses temporelles du modèle estimé par *co-ftocls* et du système réel (a) et l'erreur de sortie (b) (données d'estimation). . . . . 114
3.25 Réponses temporelles du modèle estimé par *co-ftocls* et du système réel (a) et l'erreur de sortie (b) (données de validation). . . . . 115

4.1 Signaux d'entrée et de sortie bruités. . . . . 126
4.2 Evolution des estimées obtenues par l'estimateur *ffocls* et *ffocils* en fonction de l'hyper-paramètre $T$. . . . . 128
4.3 Histogrammes des estimées obtenues par l'estimateur *oe*, *ffocls* et *ffocils* (cas d'un bruit blanc sur l'entrée et sur la sortie). . . . . 130
4.4 Données de validation. . . . . 131
4.5 Résultats de validation des modèles estimés par l'estimateur *oe*, *ffocls* et *ffocils* : (a) dans l'intervalle $[0\,,25]$, (b) zoom dans l'intervalle $[10\,,14]$ (cas d'un bruit blanc sur l'entrée et sur la sortie). . . . . 131
4.6 Histogrammes des estimées obtenues par l'estimateur *oe*, *ffocls* et *ffocils* (cas d'un bruit blanc sur l'entrée et d'un bruit coloré sur la sortie). . . . . 133
4.7 Résultats de validation des modèles estimés par l'estimateur *oe*, *ffocls* et *ffocils* : (a) dans l'intervalle $[0\,,25]$, (b) zoom dans l'intervalle $[10\,,14]$ (cas d'un bruit blanc sur l'entrée et d'un bruit coloré sur la sortie). . . . . 134
4.8 Critère obtenu par l'estimateur *ffocls* et *ffocils* en fonction de l'ordre commensurable du modèle (bruits blancs sur l'entrée et sur la sortie). . . . . 134
4.9 Schéma symbolique du circuit. . . . . 138
4.10 Schéma d'un dérivateur non entier d'ordre 0.5 borné en fréquence. . . . . 139
4.11 Schéma d'une cellule électronique. . . . . 139
4.12 Schéma symbolique du circuit. . . . . 139
4.13 Photographie du banc d'essai. . . . . 140
4.14 Signal d'entrée bruité $u$ et non bruité $u_0$ : données d'estimation. . . . . 141
4.15 Signal de sortie bruité $y$ et non bruité $y_0$ : données d'estimation. . . . . 141
4.16 Données de validation. . . . . 142
4.17 Réponses temporelles du système réel et du modèle estimé par *oe* (a), un zoom (b) et l'erreur de sortie (c) : données d'estimation. . . . . 143
4.18 Réponses temporelles du système réel et du modèle estimé par *ffocls* (a), un zoom (b) et l'erreur de sortie (c) : données d'estimation. . . . . 144

4.19 Réponses temporelles du système réel et du modèle estimé par *ffocils* (a), un zoom (b) et l'erreur de sortie (c) : données d'estimation. . . . . 145
4.20 Réponses temporelles du système réel et du modèle estimé par *ffocls*, *ffocils* et *oe* : données de validation. . . . . 146
4.21 Réponses temporelles du système réel et du modèle estimé par *oe* (a), un zoom (b) et l'erreur de sortie (c) : données d'estimation. . . . . 147
4.22 Réponses temporelles du système réel et du modèle estimé par *co-ffocls* (a), un zoom (b) et l'erreur de sortie (c) : données d'estimation. . . . . 148
4.23 Réponses temporelles du système réel et du modèle estimé par *co-ffocils* (a), un zoom (b) et l'erreur de sortie (c) : données d'estimation. . . . . 149
4.24 Réponses temporelles du système réel et du modèle estimé par *co-ffocls*, *co-ffocils* et *oe* : données de validation. . . . . 150

# Liste des tableaux


1.1 Méthodes d'identification à temps discret fondées sur les SSO : méthodes de compensation de biais de l'estimateur des moindres carrés. . . . . 25

1.2 Méthodes d'identification à temps discret fondées sur les SSO : méthodes fondées sur une variable instrumentale. . . . . 25

1.3 Méthodes d'identification à temps discret fondées sur les SSO : méthodes de compensation du biais d'estimation de l'estimateur de la variable instrumentale. . . . . 26

1.4 Méthodes d'identification à temps discret fondées sur les SSO : méthodes diverses. . . . . 26

1.5 Méthodes d'identification à temps continu fondés sur les SSO. . . . . 37

2.1 Différents FIT obtenus par l'approximation de la fonction $\sin(t)$ ($\upsilon = 0.3$, $h = 0.1$s et $L = \{1, ..., 4\}$). . . . . 56

2.2 Différents FIT obtenus par l'approximation de la fonction $f(t) = \exp(\varsigma t)\sin(t)$ ($h = 0.1$, $\upsilon = 0.5$ $\varsigma = 0.1$ et $L = \{1, ..., 3\}$). . . . . 59

2.3 Différents FIT obtenus par l'approximation de la fonction $f(t) = \exp(\varsigma t)\sin(t)$ ($h = 0.01$, $\upsilon = 0.5$ $\varsigma = 0.1$ et $L = \{1, ..., 3\}$). . . . . 59

3.1 Récapitulation des paramètres de simulation numérique. . . . . 91

3.2 Estimation par *ftocls* : influence du signal d'entrée non bruité. . . . . 93

3.3 Estimation par *ftocils* : influence du signal d'entrée non bruité. . . . . 93

3.4 Simulation de Monte carlo pour l'estimateur *srivcf*, *ftocls* et *ftocils* : bruits blancs sur l'entrée et la sortie ($N_t = 500$). . . . . 98

3.5 Simulation de Monte carlo pour l'estimateur *srivcf*, *ftocls* et *ftocils* : bruits blancs sur l'entrée et la sortie ($N_t = 2000$). . . . . 98

3.6 Simulation de Monte Carlo pour les deux estimateurs *ftocls* et *ftocils* : bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie ($N_t = 500$). . . . . 101

3.7 Simulation de Monte Carlo pour les deux estimateurs *ftocls* et *ftocils* : bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie ($N_t = 2000$). . . . . 101
3.8 Simulation de Monte Carlo pour les deux estimateurs *co-ftocls* et *co-ftocils* : bruit blanc sur l'entrée et sur la sortie. . . . . 106
3.9 Simulation de Monte Carlo pour les deux estimateurs *co-ftocls* et *co-ftocils* : bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie. . . . . 106

4.1 Simulation de Monte Carlo pour les estimateurs *oe*, *ffocls* et *ffocils* (cas d'un bruit blanc sur l'entrée et sur la sortie). . . . . 129
4.2 Simulation de Monte Carlo pour les estimateurs *oe*, *ffocls* et *ffocils* (cas d'un bruit blanc sur l'entrée et d'un bruit coloré sur la sortie). . . . . 131
4.3 Résultats d'estimation par *ffocls* , *ffocils* et *oe* du système électronique réel. 142
4.4 Résultats d'estimation par *co-ffocls* , *co-ffocils* et *oe* du système électronique réel : cas des ordres de dérivation inconnus. . . . . 146

# Terminologies et Notations

## Notations Mathématiques

| | |
|---|---|
| $x$ | Scalaire ou vecteur ponctuel |
| $A$ | Matrice ponctuelle |
| $x^T$ | Transposé du vecteur $x$ |
| $\mathbb{N}$ | Ensemble des nombres entiers naturels |
| $\mathbb{Z}$ | Ensemble des nombres relatifs |
| $\mathbb{Z}_-$ | Ensemble des nombres relatifs négatifs |
| $\mathbb{Q}$ | Ensemble des nombres rationnels |
| $\mathbb{R}$ | Ensemble des nombres réels |
| $\mathbb{R}_-$ | Ensemble des nombres réels négatifs |
| $\mathbb{R}^*$ | Ensemble des nombres réels non nuls |
| $\mathbb{R}_+$ | Ensemble des nombres réels positifs |
| $\mathbb{C}$ | Ensemble des nombres réels complexes |
| $\mathscr{L}(.)$ | Transformée de Laplace |
| $\mathscr{L}^{-1}(.)$ | Transformée inverse de Laplace |
| $s$ | Variable de Laplace |
| $\lfloor . \rfloor$ | Le plus grand entier minorant. |
| $\lceil . \rceil$ | Le plus petit entier majorant. |
| $\binom{n}{k}$ | Binôme de Newton |
| $*$ | Produit de convolution |
| $\omega$ | Pulsation |
| $\mathscr{R}e(z)$ | Partie réelle du complexe ponctuel $z$ |
| $\mathscr{I}m(z)$ | Partie imaginaire du complexe ponctuel $z$ |
| $j$ | Opérateur complexe tel que $j^2 = -1$ |
| $p$ | Opérateur différentiel |
| $q$ | Opérateur discret tel que $q^i y(t_k) = y(t_{k-i})$ |
| $\|.\|$ | Norme Euclidienne |

# Notations Mathématiques relatives à la dérivation non entière

| | |
|---|---|
| $D^{\upsilon}$ | Opérateur de dérivation à l'ordre $\upsilon$ |
| $I^{\upsilon}$ | Opérateur d'intégration à l'ordre $\upsilon$ |
| $s^{\upsilon}$ | Opérateur de dérivation à l'ordre $\upsilon$ dans le domaine de Laplace |
| $s^{-\upsilon}$ | Opérateur d'intégration à l'ordre $\upsilon$ dans le domaine de Laplace |
| $D_r^{\upsilon}$ | Opérateur de dérivation à l'ordre $\upsilon$ au sens de Riemann |
| $D_c^{\upsilon}$ | Opérateur de dérivation à l'ordre $\upsilon$ au sens de Caputo |
| $D_G^{\upsilon}$ | Opérateur de dérivation à l'ordre $\upsilon$ selon la première définition de Grünwald |
| $D_{G_L}^{\upsilon}$ | Opérateur de dérivation à l'ordre $\upsilon$ selon la deuxième définition de Grünwald |
| $\Gamma$ | Fonction Gamma |
| $\binom{\upsilon}{k}$ | Binôme de Newton généralisé à l'ordre $\upsilon$ |
| $s^{\upsilon}_{[\omega_A,\omega_B]}$ | Opérateur non entier d'ordre $\upsilon$ borné en fréquence sur $[\omega_A, \omega_B]$ |

# Notations relatives aux outils statistiques pour l'identification des systèmes à erreurs en les variables

| | |
|---|---|
| $\sigma$ | Écart type |
| $\sigma^2$ | Variance |
| $E[.]$ | Espérance mathématique |
| $Cum\{.\}$ | Cumulant d'une variable aléatoire |
| $u$ | Signal d'entrée mesuré |
| $u_0$ | Signal d'entrée non bruité |
| $\tilde{u}$ | Bruit additif sur la mesure de l'entrée du modèle |
| $y$ | Signal de sortie mesuré |
| $y_0$ | Signal de sortie non bruité |
| $\tilde{y}$ | Bruit additif sur la mesure de la sortie du modèle |
| $\mathcal{G}^*$ | Ensemble de modèles du processus à identifier |
| $\mathcal{H}^*$ | Ensemble de modèles des bruits additifs sur la mesure de l'entrée et la sortie du processus |
| $\mathcal{E}^*$ | Ensemble de modèles de l'entrée non bruitée $u_0$ |
| $\mathcal{M}^*$ | Ensemble de modèles : le modèle de processus, les modèles des bruits additifs et le modèle de l'entrée non bruitée |

| | |
|---|---|
| $\bar{E}\{.\}$ | Espérance mathématique généralisée définie par : $\bar{E}\{x(t_k)\} = \lim_{N_t \to \infty} \frac{1}{N_t} \sum_{k=1}^{N_t} E\{x(t_k)\}$ |
| $r_{vx}(\tau) = \bar{E}\{vx\}$ | Vecteur d'intercovariance du vecteur aléatoire $v$ et la variable aléatoire $x$ |
| $r_x(\tau) = \bar{E}\{x(t_k)x(t_k+\tau)\}$ | Fonction d'intercovariance d'un processus aléatoire stationnaire et centré $x$ |

# Abréviations

| | |
|---|---|
| LTI | Système linéaire invariant dans le temps (Linear Time Invariant) |
| RSB | Rapport Signal-sur-Bruit |
| SOS | Statistiques d'Ordre Supérieur |
| SSO | Statistiques de Second Ordre |
| SISO | Single-Input Single-Output (système mono-entrée mono-sortie) |
| BIBO | Bounded Input Bounded Output (Entrée bornée sortie bornée) |
| ddp | densité de probabilité |
| EIV | Errors-In-Variables (système ou contexte à erreurs en les variables) |
| ssi | si et seulement si |
| SBPA | Séquence Binaire Pseudo Aléatoire |
| PNL | Programmation Non Linéaire |

## Abréviations relatives aux méthodes d'identification basées sur les Statistiques de Second Ordre

| | |
|---|---|
| *pem* | prediction error based method |
| *ml* | maximum likelihood estimation method |
| *bcls* | bias compensated least squares |
| *bels* | bias eliminated least squares |
| *abels* | augmented *bels* |
| *fbcls* | filtered *bcls* |
| *pbcls* | predicted *bcls* |
| *iv* | instrumental variable |
| *xiv* | extended instrumental variable |
| *ecls* | extended compensated least squares |
| *bciv* | bias compensated instrumental variable |
| *fbciv* | filtered *bciv* |
| *give* | generalized instrumental variable estimation |

## Abréviations relatives aux méthodes d'identification basées sur les Statistiques d'Ordre Supérieur

| | |
|---|---|
| *eivsvf* | errors-in-variables based state variable filter approach |
| *tocls* | third-order cumulants based least squares |
| *tocils* | third-order cumulants based iterative least squares |
| *focls* | fourth-order cumulants based least squares |
| *focils* | fourth-order cumulants based iterative least squares |
| *ftocls* | fractional third-order cumulants based least squares |
| *ftocils* | fractional third-order cumulants based iterative least squares |
| *ffocls* | fractional fourth-order cumulants based least squares |
| *ffocils* | fractional fourth-order cumulants based iterative least squares |
| *co-ftocls* | commensurate order optimization combined to *ftocls* estimator |
| *co-ftocils* | commensurate order optimization combined to *ftocils* estimator |
| *co-ffocls* | commensurate order optimization combined to *ffocls* estimator |
| *co-ffocils* | commensurate order optimization combined to *ffocils* estimator |

# Introduction Générale

Plusieurs définitions de la dérivée non entière existent dans la littérature [Miller et Ross, 1993; Oldham et Spanier, 1974; Samko *et al.*, 1993]. En effet, plusieurs mathématiciens ont contribué à des degrés divers à son développement au fil des siècles. Ainsi, dès 1695, Leibnitz et L'Hôpital évoquaient la possibilité d'étendre la notion $d^{\upsilon}y/dx^{\upsilon}$ au cas où $\upsilon = 1/2$. Plus tard, dans une correspondance avec Bernoulli, Leibnitz utilisa la notion de la dérivée d'ordre général. Plusieurs mathématiciens évoquèrent cette notion par la suite : ce fut le cas d'Euler en 1730, de Laplace en 1812, de Lacroix en 1819 ou encore de Fourrier en 1822. Néanmoins, le premier à s'essayer au calcul non entier fut Abel en 1823 pour obtenir une définition de l'intégrale non entière d'ordre 1/2. Liouville en 1832 donna deux définitions de la dérivée non entière. Des tentatives de généralisation furent ensuite proposées, notamment par Riemann en 1892, mais aucune ne permit de définition générale et universelle du calcul non entier. La cause en fût peut être la recherche d'une définition englobant à la fois la notion d'intégration et celle de dérivation, c'est-à-dire une définition concernant un ordre réel quelconque, positif ou négatif. L'approche consiste alors à décomposer une dérivation non entière sous la forme d'une séquence d'intégro-différentiation mêlant dérivation entière et intégration non entière. Aujourd'hui, l'intérêt de la dérivation non entière ne cesse de grandir, notamment dans le domaine de l'automatique pour la modélisation et la commande de systèmes [Oldham et Spanier, 1974; Oustaloup, 1995; Podlubny, 1999; Sabatier *et al.*, 2007].

De nombreux travaux ont été développés depuis les dernières années dans le domaine de l'estimation et de l'identification des systèmes non entiers dans le domaine fréquentiel [Amairi, 2011; Khemane, 2011; Le Lay, 1998] et dans le domaine temporel [Aoun, 2005; Cois *et al.*, 2000; Lin, 2001; Victor, 2010].

Toutes les méthodes d'identification des systèmes par modèles non entiers élaborées jusqu'à présent considèrent que la sortie du système est entachée d'un bruit de mesure additif et que le signal d'entrée est supposé parfaitement connu. Or, pour certaines

applications, le signal d'entrée est mesuré et donc peut être entaché d'un bruit. Dans ce cas, le système est dit à erreurs-en-les-variables ou encore EIV, abréviation anglaise de Errors-In-Variables, et l'application des méthodes classiques d'identification mène souvent à une estimation paramétrique biaisée. Pour surmonter ce problème, des méthodes basées sur des statistiques d'ordre supérieur sont proposées afin d'obtenir des estimées non biaisées.

Dans ce cadre, deux classes de méthodes d'identification des systèmes EIV par modèles entiers à temps continu, développées dans les travaux de Thil [Thil, 2007], sont généralisées au cas non entier dans ce mémoire. La première classe est fondée sur les statistiques d'ordre trois et la deuxième classe est fondée sur les statistiques d'ordre quatre.

En dehors de l'annexe, la progression de la thèse est ponctuée par quatre chapitres dont le contenu est présenté ici d'une manière introductive.

**Le chapitre 1** présente des outils statistiques pour l'identification des systèmes linéaires à temps discret et à temps continu dans un contexte EIV. Il est ponctué principalement par trois paragraphes. Le premier paragraphe consiste à introduire les principales définitions et propriétés relatives aux statistiques d'ordre. Les méthodes développées jusqu'à présent peuvent être classifiées selon qu'elles sont basées sur les statistiques de second ordre (variance et moyenne) ou sur les statistiques d'ordre supérieur (cumulants d'ordre trois et quatre). Le deuxième et le troisième paragraphe présentent un état de l'art des méthodes d'identification des systèmes entiers respectivement à temps discret et à temps continu dans le contexte EIV.

**Le chapitre 2** est une introduction aux opérateurs de dérivation et d'intégration non entiers ainsi qu'aux systèmes non entiers. Il comporte principalement cinq paragraphes : les deux premiers paragraphes présentent respectivement les opérateurs d'intégration et de dérivation non entiers, leurs transformées de Laplace ainsi que leurs caractéristiques fréquentielles. Une contribution est détaillée dans le deuxième paragraphe. Elle consiste à généraliser la définition de Grünwald de la dérivation non entière dont l'objectif est de minimiser l'erreur d'approximation numérique. Le troisième paragraphe donne un aperçu sur les diverses représentations des systèmes non entiers. L'étude de stabilité de ce type de systèmes est détaillée dans le quatrième paragraphe. Une présentation des différentes approches de simulation des systèmes non entiers finit le chapitre. Des exemples de simulations numériques sont introduits pour montrer l'intérêt de l'approche développée,

soit en approximation de l'opérateur de dérivation non entier soit en simulation des systèmes non entiers.

**Le chapitre 3** est consacré aux principales contributions fondées sur les statistiques d'ordre trois. L'objectif de ce chapitre est de généraliser les méthodes d'identification des systèmes EIV par modèles entiers à temps continu au cas non entier. Deux cas différents sont distingués : le premier cas suppose que tous les ordres de dérivation non entière sont connus *a priori* et seuls les coefficients de l'équation différentielle non entière sont estimés en utilisant deux estimateurs basés sur le cumulants d'ordre trois (estimateur *ftocls* et *ftocils*). Le deuxième cas suppose que les ordres de dérivation sont commensurables à un ordre $v$ qui sera estimé au même temps que les coefficients de l'équation différentielle non entière en utilisant les techniques d'optimisation non linéaires vis-à-vis des paramètres (estimateur *co-ftocls* et *co-ftocils*). Les performances des méthodes développées sont analysées à l'aide d'un exemple de simulation numérique. Une application pratique réelle sur la modélisation d'un système thermique dans un contexte EIV finit le chapitre.

**Le chapitre 4** présente les principales contributions fondées sur les statistiques d'ordre quatre. L'objectif de ce chapitre est de généraliser les méthodes d'identification, fondées sur les cumulants d'ordre quatre, par modèle entier à temps continu au cas non entier. Comme au chapitre 3, deux cas différents se distinguent : le premier cas suppose que tous les ordres de dérivation non entière sont connus *a priori* et seuls les coefficients de l'équation différentielle non entière sont estimés en utilisant deux estimateurs fondés sur le cumulants d'ordre quatre (estimateur *ffocls* et *ffocils*). Le deuxième cas suppose que les ordres de dérivation sont commensurables à un ordre non entier $v$ qui sera estimé au même titre que les coefficients de l'équation différentielle non entière en utilisant les techniques d'optimisation non linéaires vis-à-vis des paramètres (estimateur *co-ffocls* et *co-ffocils*). Les performances des méthodes développées sont étudiées à l'aide d'un exemple de simulation numérique. Une application pratique réelle sur la modélisation d'un système électronique dans un contexte EIV finit le chapitre.

Une conclusion contenant les principaux résultats obtenus et des perspectives de recherche achève ce mémoire.

# Chapitre 1

# Outils statistiques pour l'identification dans un contexte EIV

## Sommaire


**1.1 Introduction . . . . . 10**

**1.2 Outils statistiques . . . . . 10**

1.2.1 Variables et vecteurs aléatoires . . . . . 10

1.2.2 Statistiques d'ordre supérieur . . . . . 13

**1.3 Identification à temps discret dans le contexte EIV . . . . . 22**

1.3.1 Formulation du problème d'identification des systèmes EIV . . 22

1.3.2 Méthodes basées sur les statistiques de second ordre (SSO) . . 24

1.3.3 Méthodes basées sur les statistiques d'ordre supérieur (SOS) . 27

**1.4 Identification à temps continu dans le contexte EIV . . . . . 33**

1.4.1 Formulation du problème d'identification des systèmes EIV . . 34

1.4.2 Méthodes basées sur les statistiques de second ordre . . . . . 36

1.4.3 Méthodes basées sur les statistiques d'ordre supérieur . . . . . 37

**1.5 Conclusion . . . . . 44**

## 1.1 Introduction

Ce chapitre présente des outils statistiques pour l'identification des systèmes linéaires à temps discret et à temps continu dans un contexte à erreurs en les variables (*Errors In Variables* en anglais (EIV)).

Il est principalement composé de trois parties. La première consiste à introduire les principales définitions et propriétés relatives aux statistiques d'ordre. La deuxième partie présente un état de l'art des méthodes d'identification des systèmes par modèles entiers à temps discret dans le contexte EIV. Les méthodes développées jusqu'à présent peuvent être classifiées selon qu'elles sont basées sur les statistiques de second ordre (variance et moyenne) ou sur les statistiques d'ordre supérieur (cumulants d'ordre trois et quatre). La dernière partie traite des méthodes d'identification de systèmes par modèles entiers à temps continu.

## 1.2 Outils statistiques

Cette section introduit les principales définitions et propriétés, liées aux statistiques de second ordre et d'ordre supérieur à deux, utilisées pour l'identification de systèmes par modèles EIV linéaires [Brillinger, 2001; Lacoume *et al.*, 1997; Mendel, 1991; Solaiman, 2006; Stuart et Ord, 1994].

### 1.2.1 Variables et vecteurs aléatoires

La modélisation des phénomènes physiques s'avère le plus souvent difficile. En revanche, seuls les aspects observables peuvent être modélisés en exploitant le concept des variables et des vecteurs aléatoires.

**Définition 1.1** ***: Phénomène aléatoire***
*Un phénomène est dit aléatoire s'il se répète plusieurs fois dans des conditions identiques et donne, à chaque expérience, un résultat différent et impossible à prévoir avec certitude.*

**Définition 1.2** ***: Variable aléatoire***
*Une variable $x$ est dite aléatoire si elle est définie par l'application suivante :*

$$\begin{aligned} x : \Omega &\rightarrow \varepsilon \\ \omega &\rightarrow x(\omega) \end{aligned} \tag{1.1}$$

*où $\Omega$ est l'ensemble des résultats susceptibles d'être observés ou mesurés lors de l'étude d'un phénomène physique (l'univers) et où $\varepsilon \subset \mathbb{R}$ désigne l'ensemble des valeurs observables du phénomène aléatoire.*

*Dans le cas où l'ensemble $\varepsilon$ est dénombrable, la variable aléatoire $x$ est dite discrète et définie par la loi :*

$$p_i = P_x\{u_i\} = \Pr\{x(\omega) = u_i\} = \Pr\{A_i\} \tag{1.2}$$

*où $u_i$ désigne l'élément numéro $i$ de l'ensemble $\varepsilon$ et $A_i$ est l'ensemble des éléments élémentaires $\omega \in \Omega$ définie par :*

$$A_i = \{\omega \in \Omega / x(\omega) = u_i\} \tag{1.3}$$

*Une variable aléatoire est dite continue si $\varepsilon$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non dénombrable.*

**Définition 1.3** ***: Fonction de répartition d'une variable aléatoire***

*Une variable aléatoire continue $x$ est entièrement définie par sa fonction de répartition $F_x(u)$ qui représente la probabilité pour que la valeur prise par $x$ soit inférieure au nombre réel $u$ :*

$$F_x(u) = \Pr\{x < u\} = \Pr\{A\} \tag{1.4}$$

*où $A \subseteq \Omega$ tel que $A = \{\omega \in \Omega / x(\omega) < u\}$.*

**Définition 1.4** ***: Densité de probabilité d'une variable aléatoire***

*La densité de probabilité (ou ddp) d'une variable aléatoire $x$, notée $f_x(u)$, est définie comme étant la dérivée de la fonction de répartition de la variable $x$ :*

$$f_x(u) = \frac{d}{du} F_x(u) \tag{1.5}$$

*et vérifiant les deux conditions suivantes :*

$$f_x(u) \geqslant 0 \tag{1.6}$$

$$F_x(u) = \Pr\{x < u\} = \int_{-\infty}^{u} f_x(t)dt \tag{1.7}$$

**Définition 1.5** ***: Fonctions caractéristiques d'une variable aléatoire***

- *La première fonction caractéristique d'une variable aléatoire $x$, notée $\Phi_x(\vartheta)$, est définie comme étant la transformée de Fourrier de la densité de probabilité de $x$ (à un coefficient multiplicatif $2\pi$, selon la convention utilisée) :*

$$\Phi_x(\vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(u) e^{j\vartheta u} du \ , \ \theta \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

*D'une manière équivalente, la première fonction caractéristique de $x$ est définie comme étant l'espérance mathématique de $e^{j\vartheta u}$ :*

$$\Phi_x(\vartheta) = \mathrm{E}\left\{e^{j\vartheta x}\right\} \tag{1.9}$$

- *La seconde fonction caractéristique d'une variable aléatoire $x$ est définie comme étant le logarithme népérien de sa première fonction caractéristique, soit :*

$$\Psi_x(\vartheta) = \ln\left(\Phi_x(\vartheta)\right) \tag{1.10}$$

**Définition 1.6** ***: Variable aléatoire gaussienne***

*Une variable aléatoire continue $x$ est dite gaussienne si sa densité de probabilité est définie par :*

$$f_x(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma}} \tag{1.11}$$

*Sa fonction caractéristique s'écrit :*

$$\Phi_x(\vartheta) = \exp(\frac{-\sigma_x^2\vartheta^2}{2}) \tag{1.12}$$

**Définition 1.7** ***: Variance d'une variable aléatoire***

*La variance de la variable aléatoire $x$ est définie par :*

$$\mathrm{var}\left\{x\right\} = \sigma_x^2 = \mathrm{E}\left\{\left(x - \mathrm{E}\left\{x\right\}\right)^2\right\} = \mathrm{E}\left\{x^2\right\} - \left(\mathrm{E}\left\{x\right\}\right)^2 \tag{1.13}$$

*La variance d'une variable aléatoire discrète est définie par :*

$$\mathrm{var}\left\{x\right\} = \sigma_x^2 = \sum_{u_i \in \varepsilon} \left(u_i - \mathrm{E}\left\{x\right\}\right)^2 P_x(u_i) \tag{1.14}$$

*La variance d'une variable aléatoire continue est définie par :*

$$\mathrm{var}\left\{x\right\} = \sigma_x^2 = \int_{\varepsilon} \left(u - \mathrm{E}\left\{x\right\}\right)^2 f_x(u) du \tag{1.15}$$

**Définition 1.8** ***: Indépendance statistique de deux variables aléatoires***

*Soient $x$ et $y$ deux variables aléatoires. Elles sont dites statistiquement indépendantes si et seulement si :*

$$\mathrm{E}\{xy\} = \mathrm{E}\{x\}\,\mathrm{E}\{y\} \tag{1.16}$$

**Définition 1.9** ***: Covariance de deux variables aléatoires***

*Soient $x$ et $y$ deux variables aléatoires de moyennes respectives $m_x$ et $m_y$ et de variances respectives $\sigma_x^2$ et $\sigma_y^2$. La covariance de ces deux variables est définie par :*

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(x,y) &= \mathrm{E}\{(x-m_x)(y-m_y)\} \\ &= \mathrm{E}\{xy\} - \mathrm{E}\{x\}\,\mathrm{E}\{y\}\end{aligned} \tag{1.17}$$

Il apparaît clairement d'après (1.16) et (1.17) que si les deux variables $x$ et $y$ sont indépendantes, leur covariance est nulle.

**Définition 1.10** ***: Fonctions caractéristiques des vecteurs aléatoires***

- *A l'instar de la définition 1.5, la première fonction caractéristique du vecteur aléatoire $x^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ est définie par :*

$$\Phi_x(\vartheta) = \mathrm{E}\left\{e^{j\vartheta x}\right\} \tag{1.18}$$

- *La seconde fonction caractéristique de $x$ est définie comme étant le logarithme népérien de sa première fonction caractéristique, soit :*

$$\Psi_x(\vartheta) = \ln\left(\Phi_x(\vartheta)\right) \tag{1.19}$$

## 1.2.2 Statistiques d'ordre supérieur

Les statistiques d'ordre supérieur à deux (SOS), ou encore moments et cumulants d'ordre supérieur à deux, sont utilisées le plus souvent en complément aux statistiques de second ordre (SSO).

### 1.2.2.1 Moments d'une variable aléatoire

Le moment d'ordre $r$ d'une variable aléatoire $x$ est défini :

– dans le cas discret par :

$$\mathrm{E}\{x^r\} = \sum_{u_i \in \varepsilon} u_i^r p_i = \sum_{u_i \in \varepsilon} u_i^r P_x\{u_i\} \tag{1.20}$$

– dans le cas continu par :

$$\mu_r(x) = \mathrm{E}\left\{x^r\right\} = \int_{\varepsilon} u^r f_x(u) du \tag{1.21}$$

Les moments d'ordre $r$ centrés sont définis par :

$$\mu_r^{'}(x) = \mathrm{E}\left\{(x - \mu_1(x))^r\right\} \tag{1.22}$$

Le développement en série de Taylor ou de MacLaurin au voisinage de l'origine de $e^{j\vartheta x}$ :

$$e^{j\vartheta x} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(j\vartheta)^r}{r!} x^r \tag{1.23}$$

et l'identification de ses coefficients avec ceux du développement en série de Taylor de la première fonction caractéristique :

$$\begin{aligned} \Phi_x(\vartheta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(u)\, e^{j\vartheta u} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(j\vartheta)^r}{r!} u^r f_x(u)\, du \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(j\vartheta)^r}{r!} E\left\{x^r\right\} \end{aligned} \tag{1.24}$$

permettent de définir les moments d'ordre $r$ comme suit :

$$\mu_r(x) = \mathrm{E}\left\{x^r\right\} \tag{1.25}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^r \Phi_x(\vartheta)}{d\vartheta}\right|_{\vartheta=0} &= \left.\frac{d^r}{d\vartheta}\left(E\left\{e^{j\vartheta x}\right\}\right)\right|_{\vartheta=0} \\ &= \left. E\left\{\frac{d^r}{d\vartheta}\left(e^{j\vartheta x}\right)\right\}\right|_{\vartheta=0} \\ &= \left. E\left\{(jx)^r e^{j\vartheta x}\right\}\right|_{\vartheta=0} \\ &= E\left\{(jx)^r\right\} \\ &= (j)^r E\left\{x^r\right\} \end{aligned} \tag{1.26}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\mu_r(x) = (-j)^r \left.\frac{d^r \Phi_x(\vartheta)}{d\vartheta}\right|_{\vartheta=0} = \mathrm{E}\left\{x^r\right\} \tag{1.27}$$

**Remarque 1.1**

*- Le moment d'ordre* 1 *d'une variable aléatoire $x$ est appelé espérance mathématique de cette variable.*

*- Le moment d'ordre* 2 *centré d'une variable aléatoire $x$ est appelé variance de cette variable.*

#### 1.2.2.2 Cumulants d'une variable aléatoire

Les dérivées de la seconde fonction caractéristique prises à l'origine (ou encore les coefficients du développement en série de MacLaurin de la seconde fonction caractéristique) définissent les cumulants d'ordre $r$, soit :

$$Cum\{x,...,x\} = (-1)^r \left.\frac{d^r \Psi_x(\vartheta)}{d\vartheta}\right|_{\vartheta=0} \tag{1.28}$$

Les cumulants d'ordre $r$ peuvent être calculés en utilisant la définition des moments d'ordre inférieur ou égal à $r$, soit pour :

$$\begin{aligned}
&r=1: \quad Cum\{x\} = \mu_1(x)\\
&r=2: \quad Cum\{x,x\} = \mu_2^{'}(x) = \mu_2(x) - (\mu_1(x))^2\\
&r=3: \quad Cum\{x,x,x\} = \mu_3^{'}(x) = \mu_3(x) - 3\mu_2(x)\mu_1(x) + 2(\mu_1(x))^3\\
&r=4: \quad Cum\{x,x,x,x\} = \mu_4(x) - 4\mu_3(x)\mu_1(x) - 3(\mu_2(x))^2 + 12\mu_2(x)(\mu_1(x))^2 - 6(\mu_1(x))^4
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Dans le cas où les variables aléatoires sont centrées, c.-à-d. $\mu_1(x) = 0$, les expressions des cumulants se réduisent comme suit :

$$\begin{aligned}
&Cum\{x\} = 0\\
&Cum\{x,x\} = \mu_2(x)\\
&Cum\{x,x,x\} = \mu_3(x)\\
&Cum\{x,x,x,x\} = \mu_4(x) - 3(\mu_2(x))^2
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Si la variable aléatoire $x$ est gaussienne, sa seconde fonction caractéristique s'écrit :

$$\Psi_x(\vartheta) = j\mu_1(x)\vartheta - \frac{1}{2}\mu_2(x)\vartheta^2 \tag{1.31}$$

Les cumulants d'ordre supérieur à deux de la variable $x$ sont tous nuls grâce à sa distribution gaussienne. De ce fait, les variables gaussiennes sont caractérisées par leurs propriétés au second ordre. Cela justifie la raison pour laquelle les chercheurs dans le domaine du traitement du signal se limitent souvent, dans leurs travaux, au second ordre.

**Remarque 1.2** *L'avantage majeur de l'utilisation des cumulants par rapport aux moments est que, pour un processus gaussien, tout cumulant d'ordre supérieur à 2 est nul.*

*Soit $\{x\}$ un processus aléatoire, à valeurs réelles et de distribution gaussienne. Les moments d'ordre $r$ de $\{x\}$ sont donnés par :*

$$\begin{cases}
\forall\, r \geqslant 1, \;\; \mu_{2r}(x) = \sigma^{2r}\dfrac{(2r)!}{r!2^r}\\
\forall\, r \geqslant 0, \;\; \mu_{2r+1}(x) = 0
\end{cases} \tag{1.32}$$

*et ses cumulants d'ordre r sont donnés par :*

$$\begin{cases} Cum\{x\} = 0 \\ Cum\{x, x\} = \sigma^2 \\ Cum\{\underbrace{x, ..., x}_{r\,fois}\} = 0, \ \ \forall\, r \geqslant 3 \end{cases} \tag{1.33}$$

Une variable est dite standardisée si elle est définie comme étant une variable aléatoire, centralisée et normalisée, soit :

$$\tilde{x} = \frac{x - \mu_1(x)}{\sqrt{Cum\,\{x, x\}}} \tag{1.34}$$

Les cumulants standardisés sont les cumulants de la variable aléatoire standardisée.

Le cumulant standardisé d'ordre trois, appelé facteur d'asymétrie, est défini par :

$$\rho_3(x) = \frac{\mathrm{E}\,\{x^3\}}{\left(\mathrm{E}\,\{x^2\}\right)^{3/2}} \tag{1.35}$$

L'appellation d'asymétrie est liée au fait que le cumulant d'ordre trois est nul pour toute densité de probabilité possédant un axe de symétrie (gaussienne, laplacienne, uniforme,...).

Le cumulant standardisé d'ordre quatre, appelé facteur d'aplatissement, est défini par :

$$\rho_4(x) = \frac{\mathrm{E}\,\{x^4\}}{\left(\mathrm{E}\,\{x^2\}\right)^2} - 3 \tag{1.36}$$

**Cas des variables aléatoires indépendantes :**

Soient $x$ et $y$ deux variables aléatoires indépendantes de dimensions respectives $n$ et $p$, et soit $z^T = \begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix}$ la concatenation des deux variables. Alors la première fonction caractéristique de $z$ est le produit des premières fonctions caractéristiques de $x$ et $y$. Par conséquent, la seconde fonction caractéristique de $z$ s'écrit comme suit :

$$\Psi_z(u, \vartheta) = \Psi_x(u) + \Psi_y(\vartheta) \tag{1.37}$$

De ce fait, les cumulants croisés entre $x$ et $y$ sont donnés par :

$$Cum\left\{x_{i_1}, ..., x_{i_n}, y_{j_1}, ..., y_{j_p}\right\} = (-j)^{(n+p)} \left.\frac{\partial^{(n+p)} \Psi_z(u, \vartheta)}{\partial u_{i_1} ... \partial u_{i_n} \partial \vartheta_{i_1} ... \partial \vartheta_{i_p}}\right|_{(u,\vartheta)=(0,0)} \tag{1.38}$$

Les cumulants croisés de $x$ et $y$ s'annulent dès que l'un des indices $i_k$ et l'un des indices $j_k$ sont non nuls simultanément.

Si $x$ et $y$ sont deux variables aléatoires indépendantes, alors quelle que soit la variable aléatoire $z$ :

$$Cum\,\{x, y, z\} = 0 \tag{1.39}$$

#### 1.2.2.3 Cumulants d'un vecteur aléatoire

Soit $x$ un vecteur aléatoire de dimension $r$. La relation liant les moments et les cumulants du vecteur $x$ est définie par :

$$Cum\{x_1,...,x_r\} = \sum_k (-1)^{k-1}(k-1)!\mathrm{E}\left\{\prod_{i\in\vartheta_1} x_i\right\}\mathrm{E}\left\{\prod_{i\in\vartheta_2} x_i\right\}...\,\mathrm{E}\left\{\prod_{i\in\vartheta_p} x_i\right\} \quad (1.40)$$

où la somme s'étend sur tous les ensembles $\{\vartheta_1,\vartheta_2,...,\vartheta_p|\ 1\leqslant p\leqslant r\}$ formant une partition de $\{1,2,...,r\}$ et où $k$ désigne le nombre d'éléments composant cette partition.

Dans le cas d'un vecteur aléatoire centré les cumulants d'ordre $r=1,...,4$ sont définis par :

$$\begin{aligned}
&Cum\{x_1\} = \mathrm{E}\{x_1\}\\
&Cum\{x_1,x_2\} = \mathrm{E}\{x_1x_2\}\\
&Cum\{x_1,x_2,x_3\} = \mathrm{E}\{x_1x_2x_3\}\\
&Cum\{x_1,x_2,x_3,x_4\} = \mathrm{E}\{x_1x_2x_3x_4\} - \mathrm{E}\{x_1x_2\}\,\mathrm{E}\{x_3x_4\}\\
&\qquad\qquad -\mathrm{E}\{x_1x_3\}\,\mathrm{E}\{x_2x_4\} - \mathrm{E}\{x_1x_4\}\,\mathrm{E}\{x_2x_3\}
\end{aligned} \quad (1.41)$$

#### 1.2.2.4 Cumulants d'un signal aléatoire

Les propriétés statistiques d'ordre supérieur des signaux aléatoires stationnaires peuvent être décrites, comme le cas des statistiques de second ordre, dans le domaine temporel et le domaine fréquentiel. L'étude dans le domaine temporel conduit aux multicorrélations alors que l'étude dans le domaine fréquentiel conduit aux multispectres.

Il convient de noter que les corrélations et les multicorrélations sont définies à partir des cumulants d'ordre supérieur à deux.

Comme les méthodes d'identification dans ce travail sont développées dans le domaine temporel, seules les multicorrélations sont détaillées.

**Définition 1.11** ***Multicorrélations d'un signal aléatoire***

*Soit $x$ un signal aléatoire à valeurs réelles. La multicorrélation d'ordre $r$ de $x$ est le cumulant d'ordre $r$ des valeurs (variables aléatoires) du signal aux instants $t_0,...,t_{r-1}$ :*

$$C_{r,x}(t) = Cum\{x(t_0),x(t_1),...,x(t_{r-1})\} \quad (1.42)$$

*où $t=(t_0,t_1,...,t_{r-1})$.*

Dans le cas général, la multicorrélation d'ordre $r$ est fonction d'un temps absolu $t_0$ et des $r-1$ temps $t_i$. Lorsque le signal $x$ est stationnaire au sens strict, ses statistiques sont invariantes par changement de l'origine des temps. Un des temps peut être pris comme

origine, soit $t_0$ par exemple. La multicorrélation d'ordre $r$, qui n'est alors fonction que des $r-1$ écarts de temps $\tau_i = t_i - t_0$, est définie par :

$$C_{r,x}(\tau) = Cum\left\{x(t_k), x(t_k+\tau_1), ..., x(t_k+\tau_{r-1})\right\} \tag{1.43}$$

où $\tau = (\tau_1, ..., \tau_{r-1})$.

**Remarque 1.3** *Les multicorrélations d'un signal aléatoire $x$ sont appelées cumulants et notées dans la suite du mémoire : $C_{xxx}(\tau_1, \tau_2)$ pour les cumulants d'ordre trois et $C_{xxxx}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ pour les cumulants d'ordre quatre.*

**Définition 1.12** ***Cumulants d'ordre trois et quatre d'un signal aléatoire***
*Soit $x$ un signal aléatoire à variables réelles, centrés et stationnaires.*

- *Les cumulants d'ordre trois de $x$ sont définis par :*

$$\begin{aligned} C_{xxx}(\tau_1, \tau_2) &= Cum\{x(t_k)x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_2)\} \\ &= E\left[x(t_k)x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_2)\right] \end{aligned} \tag{1.44}$$

- *Les cumulants d'ordre quatre de $x$ sont définis par :*

$$\begin{aligned} C_{xxxx}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= Cum\left[x(t_k)x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_2)x(t_k+\tau_3)\right] \\ &= E\left[x(t_k)x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_2)x(t_k+\tau_3)\right] \\ &- E\left[x(t_k)x(t_k+\tau_1)\right]E\left[x(t_k+\tau_2)x(t_k+\tau_3)\right] \\ &- E\left[x(t_k)x(t_k+\tau_2)\right]E\left[x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_3)\right] \\ &- E\left[x(t_k)x(t_k+\tau_3)\right]E\left[x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_2)\right] \end{aligned} \tag{1.45}$$

#### 1.2.2.5 Stationnarité

Un signal $x(t)$ est dit stationnaire au sens strict si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes pour toute translation de l'origine du temps ; c.-à-d. si $x(t)$ et $x(t+\tau)$ ont les mêmes propriétés statistiques.

L'hypothèse de stationnarité porte essentiellement sur les moments du premier et du second ordre. Une autre définition plus simple et plus connue, appelée stationnarité de second ordre, est suffisante dans de nombreux cas.

Un signal $x(t)$ est dit stationnaire jusqu'au second ordre si sa moyenne est constante et sa fonction de covariance est indépendante du temps.

#### 1.2.2.6 Ergodicité

Un processus est dit ergodique si toutes ses moyennes temporelles existent et ont la même valeur quelle que soit la trajectoire considérée, sauf pour un ensemble de trajectoires de probabilité nulle.

L'hypothèse d'ergodicité des signaux permet de remplacer l'espérance mathématique, que définit les moments et les cumulants, par des moyennes temporelles.

#### 1.2.2.7 Estimation des moments et des cumulants

L'utilisation des statistiques d'ordre supérieur nécessite leur estimation. Une présentation détaillée de la théorie de l'estimation des moments et des cumulants peut être trouvée dans [Kendall et Stuart, 1976; Kendall *et al.*, 1987; McCullagh, 1987; Read *et al.*, 1988]

**• Estimation des moments d'ordre $r$**

Soit $x$ une variable aléatoire, scalaire et centrée, et soit $x_k$, $1 \leqslant k \leqslant N_t$, $N_t$ réalisations de $x$. L'estimateur non biaisé des moments d'ordre $r$ de $x$ est défini par :

$$\hat{\mu}_r = \frac{1}{N_t} \sum_{k=1}^{N_t} x_k^r \tag{1.46}$$

**• Estimation des cumulants d'ordre trois**

Soit $x$ un signal aléatoire, centré, stationnaire et ergodique. Les cumulants d'ordre trois de $x$ sont estimés à partir de $N_t$ échantillons de mesures disponibles $\{x(t_k)\}_{k=1}^{N_t}$.

L'estimateur non biaisé des cumulants d'ordre trois est alors défini par :

$$\hat{C}_{xxx}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{N_t} \sum_{k=1}^{N_t} x(t_k)x(t_k + \tau_1)x(t_k + \tau_2) \tag{1.47}$$

**• Estimation des cumulants d'ordre quatre**

L'estimateur des cumulants d'ordre quatre est déterminé de la même manière que précédemment, soit :

$$\begin{aligned}
\hat{C}^{*}_{xxxx}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) &= \frac{1}{N_t}\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k)x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_2)x(t_k+\tau_3) \\
&- \frac{1}{N_t^2}\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k)x(t_k+\tau_1)\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k+\tau_2)x(t_k+\tau_3) \\
&- \frac{1}{N_t^2}\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k)x(t_k+\tau_2)\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_3) \\
&- \frac{1}{N_t^2}\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k)x(t_k+\tau_3)\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_2)
\end{aligned} \tag{1.48}$$

L'étude de biais d'estimation montre que cet estimateur est asymptotiquement non biaisé pour un nombre d'échantillons $N_t$ grand et biaisé lorsque $N_t$ est fini. Le biais d'estimation est d'autant plus important que le nombre d'échantillons est petit et ne peut pas être négligé. Dans ce cas, il convient d'utiliser un estimateur non biaisé, appelé k-statistique, défini par :

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{xxxx}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) &= \frac{N_t+2}{N_t(N_t-1)}\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k)x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_2)x(t_k+\tau_3) \\
&- \frac{3}{N_t(N_t-1)}\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k)x(t_k+\tau_1)\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k+\tau_2)x(t_k+\tau_3) \\
&- \frac{3}{N_t(N_t-1)}\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k)x(t_k+\tau_2)\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_3) \\
&- \frac{3}{N_t(N_t-1)}\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k)x(t_k+\tau_3)\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_2)
\end{aligned} \tag{1.49}$$

**Remarque 1.4** ***: Choix des lignes des cumulants***

*Les cumulants d'ordre trois et les cumulants d'ordre quatre d'un signal aléatoire stationnaire x dépendent de plusieurs variables. En effet, les cumulants d'ordre trois dépendent de deux variables ($\tau_1$ et $\tau_2$) et les cumulants d'ordre quatre dépendent de trois variables ($\tau_1$, $\tau_2$ et $\tau_3$).*

*Ces variables contiennent plusieurs informations qui peuvent, par conséquence, être redondantes dans l'estimation des cumulants. L'idée est de se limiter à certaines parties de l'espace des délais*[1]*. Ces parties sont dépendantes d'une seule variable et appelées "lignes de cumulants".*

*Une ligne de cumulant est obtenue, par exemple :*

1. L'espace de délai est l'espace formé par les lignes de cumulants obtenus pour $N_t$ échantillons

- *en fixant $\tau_2$ à une valeur particulière constante et en faisant varier $\tau_1$ pour les cumulants d'ordre trois ;*
- *en fixant $\tau_2$ et $\tau_3$ à deux valeurs particulières constantes et en faisant varier $\tau_1$ pour les cumulants d'ordre quatre.*

#### 1.2.2.8 Propriétés des moments et des cumulants

Cette section se limite volontairement à la présentation des propriétés qui seront utilisées dans la suite du mémoire. Les démonstrations ne sont pas données dans ce manuscrit, mais pourront être trouvées dans [Lacoume *et al.*, 1997].

**Propriété 1.1** ***Multilinéarité***

*Soit $x$ un vecteur aléatoire composé de $r$ éléments $x_i$, $i = 1, ..., r$. Les cumulants de $x$ sont linéaires par rapport à chacun de ses arguments, soit :*

$$Cum\{\gamma_1 x_1, ..., \gamma_r x_r\} = \left(\prod_{i=1}^{r} \gamma_i\right) Cum\{x_1, ..., x_r\} \tag{1.50}$$

*où $\gamma_i$, $i = 1, ..., r$ sont des scalaires (constantes réelles) qui multiplient les arguments de $x$.*

**Propriété 1.2** ***Additivité***

*Le cumulant de la somme de deux vecteurs aléatoires indépendants $x = \{x_1, ..., x_n\}$ et $y = \{y_1, ..., y_n\}$ est égal à la somme de leurs cumulants :*

$$Cum\{x_1 + y_1, ..., x_n + y_n\} = Cum\{x_1, ..., x_n\} + Cum\{y_1, ..., y_n\} \tag{1.51}$$

**Propriété 1.3** ***Invariance par translation***

*Les cumulants sont invariants par translation déterministe. Soit, $x$, $y$ deux vecteurs aléatoires et $z$ un vecteur déterministe. Si $y = x + z$ alors les cumulants d'ordre supérieur ou égal à 2 de $y$ sont identiques à ceux de $x$. En effet, la translation provoque un déphasage de la première fonction caractéristique, qui implique que les secondes fonctions caractéristiques de $x$ et $y$ sont liées par $\Psi_y(\vartheta) = j\,\mathrm{Re}\left[t^T\vartheta\right] + \Psi_x(\vartheta)$. Cette relation montre que la translation n'affecte que le cumulant d'ordre 1, c'est-à-dire la moyenne.*

**Remarque 1.5** *La propriété d'invariance par translation déterministe n'est pas vérifiée par les moments.*

**Propriété 1.4** ***Cumulants d'une variable aléatoire de distribution symétrique***

*Les cumulants d'ordre trois d'une variable aléatoire dont la distribution possède un axe de symétrie sont tous nuls.*

**Propriété 1.5** ***Cumulants d'une variable aléatoire de distribution gaussienne***

*Les cumulants d'ordre quatre d'une variable aléatoire ayant une distribution gaussienne sont tous nuls.*

## 1.3 Identification à temps discret dans le contexte EIV

L'identification des modèles EIV entiers à temps discret dans le contexte "erreurs en les variables" (ou en anglais "*Errors In Variables*" (EIV)) a fait l'objet de nombreux travaux au cours des dernières années. Dans ce mémoire, l'accent est porté sur les méthodes d'identification qui sont basées sur les propriétés statistiques caractérisant les signaux d'entrée et de sortie. Elles peuvent être classées selon l'ordre des statistiques utilisées dans l'algorithme d'estimation paramétrique. Ainsi, deux classes de méthodes se distinguent : une classe basée sur les statistiques de second ordre (SSO) et une classe basée sur les statistiques d'ordre supérieur (SOS). En ce qui concerne les méthodes basées sur les SOS, l'ordre est limité à quatre dans la suite du mémoire. Après avoir formulé la problématique de l'identification des systèmes EIV à temps discret, un bref aperçu sur les deux classes de méthodes citées précédemment est donné ci-après.

### 1.3.1 Formulation du problème d'identification des systèmes EIV

Soit $G$ un système monovariable, linéaire, invariant et à temps discret représenté dans un contexte à erreurs en les variables (EIV) par le schéma représenté à la figure 1.1.

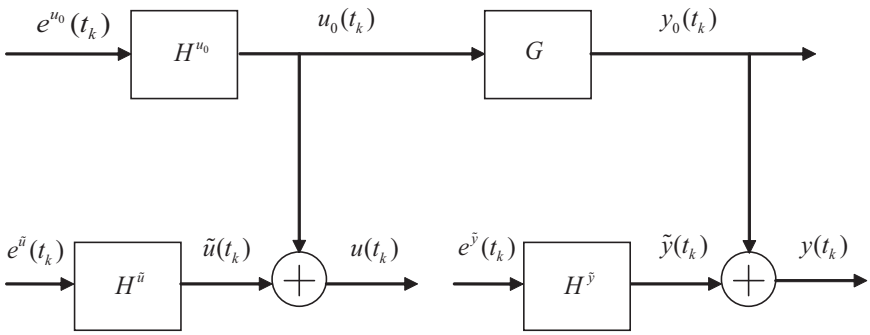



Figure 1.1 – Schéma du modèle EIV entier à temps discret.

Le système EIV $\mathcal{S}$ est décrit par :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} y_0(t_k) = G(q,\theta)u_0(t_k) \\ u(t_k) = u_0(t_k) + \tilde{u}(t_k) \\ y(t_k) = y_0(t_k) + \tilde{y}(t_k) \end{cases} \tag{1.52}$$

avec

$$\begin{cases} u_0(t_k) = H^{u_0}(q,\eta_{u_0})e^{u_0}(t_k) \\ \tilde{u}(t_k) = H^{\tilde{u}}(q,\eta_{\tilde{u}})e^{\tilde{u}}(t_k) \\ \tilde{y}(t_k) = H^{\tilde{y}}(q,\eta_{\tilde{y}})e^{\tilde{y}}(t_k) \end{cases} \tag{1.53}$$

et

- $q$ est l'opérateur discret défini tel que $q^i y(t_k) = y(t_{k-i})$ ;
- $G(q,\theta)$ est la fonction de transfert du modèle discret du processus ;
- $u_0(t_k)$ et $y_0(t_k)$ sont les signaux d'entrée et de sortie non bruités ;
- $\tilde{u}(t_k)$ et $\tilde{y}(t_k)$ sont les bruits de mesure sur l'entrée et la sortie ;
- $u(t_k)$ et $y(t_k)$ sont les signaux d'entrée et de sortie mesurés ;
- $e^{u_0}(t_k)$ est un bruit blanc discret ;
- $e^{\tilde{u}}(t_k)$ et $e^{\tilde{y}}(t_k)$ sont deux bruits blancs discrets de variances respectives $\sigma^2_{e^{\tilde{u}}}$ et $\sigma^2_{e^{\tilde{y}}}$.

La modélisation du système EIV décrit par la figure 1.1 est définie comme étant une fonction d'un ouvert $D_{\mathcal{M}}$ de $\mathbb{R}^{n_\Theta}$ dans un ensemble de modèles $\mathcal{M}^*$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : D_{\mathcal{M}} &\to \mathcal{M}^* = \{\, \mathcal{M}(\Theta) |\, \Theta \in D_{\mathcal{M}}\} \\ \Theta &\mapsto \mathcal{M}(\Theta) \end{aligned} \tag{1.54}$$

où $\Theta$ désigne le vecteur de paramètres. Il contient tous les coefficients du modèle de processus $G$, de l'entrée non bruitée et des bruits additifs sur l'entrée et la sortie.

L'ensemble ouvert $D_{\mathcal{M}}$ est le produit des intervalles ouverts $D_\theta$, $D_{\eta_{u_0}}$, $D_{\eta_{\tilde{u}}}$ et $D_{\eta_{\tilde{y}}}$, soit :

$$D_{\mathcal{M}} = D_\theta \times D_{\eta_{u_0}} \times D_{\eta_{\tilde{u}}} \times D_{\eta_{\tilde{y}}} \tag{1.55}$$

L'ensemble des modèles est alors décrit comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^* = \big\{ G(q,\theta),\, H^{u_0}(q,\eta_{u_0}),\, H^{\tilde{u}}(q,\eta_{\tilde{u}}),\, H^{\tilde{y}}(q,\eta_{\tilde{y}}) \big|\, \theta \in D_\theta, \eta_{u_0} \in D_{\eta_{u_0}}, \\ \eta_{\tilde{u}} \in D_{\eta_{\tilde{u}}}, \eta_{\tilde{y}} \in D_{\eta_{\tilde{y}}} \big\} \end{aligned} \tag{1.56}$$

On peut également définir de la même manière :

$$\mathcal{G}^* = \left\{ G(q,\theta) = \frac{B(q,\theta)}{A(q,\theta)} = \frac{b_0 + b_1 q + \ldots + b_{n_b} q^{n_b}}{a_0 + a_1 q + \ldots + a_{n_a-1} q^{n_a-1} + q^{n_a}} \,\middle|\, \theta \in D_\theta \right\} \tag{1.57}$$

$$\mathcal{E}^* = \left\{ H^{u_0}(q, \eta_{u_0}) | \, \eta_{u_0} \in D_{\eta_{u_0}} \right\} \tag{1.58}$$

$$\mathcal{H}^* = \left\{ \left( H^{\tilde{u}}(q, \eta_{\tilde{u}}),\, H^{\tilde{y}}(q, \eta_{\tilde{y}}) \right) \Big| \, \eta_{\tilde{u}} \in D_{\eta_{\tilde{u}}},\ \eta_{\tilde{y}} \in D_{\eta_{\tilde{y}}} \right\} \tag{1.59}$$

Les vecteurs des paramètres sont donnés par :

$$\Theta^T = \left[ \theta^T \ \eta_{u_0}^T \ \ \eta_{\tilde{u}}^T \ \ \eta_{\tilde{y}}^T \right] \tag{1.60}$$

$$\theta^T = [a_0, \ldots, a_{n_a-1}, b_0, \ldots, b_{n_b}] \tag{1.61}$$

Le problème d'identification des systèmes EIV à temps discret consiste à déterminer des estimées non biaisées de $\Theta^T$ à partir de $N_t$ échantillons de données en présence de bruits additifs sur les signaux d'entrée et de sortie, sachant que les méthodes d'identification classiques fournissent des estimées biaisées.

Il convient de noter que l'estimation de tous les paramètres contenus dans $\Theta$ n'est pas toujours nécessaire. En effet, dans le cas où les modèles de l'entrée non bruitée et les bruits affectant l'entrée et la sortie du système seul le vecteur des paramètres $\theta$ est estimé. Dans d'autres cas il est nécessaire d'estimer certains coefficients de $\eta_{u_0}$, $\eta_{\tilde{u}}$ et $\eta_{\tilde{y}}$.

### 1.3.2 Méthodes basées sur les statistiques de second ordre (SSO)

Les méthodes d'identification par modèle EIV à temps discret, basées sur les statistiques de second ordre et développées jusqu'à présent sont nombreuses. La plupart d'entre elles peut être classée en quatre catégories :

- les méthodes de compensation de biais de l'estimateur des moindres carrés ;
- les méthodes fondées sur une variable instrumentale ;
- les méthodes de compensation de biais de l'estimateur de la variable instrumentale ;
- les méthodes diverses.

Ces méthodes estiment les paramètres du modèle discret et éventuellement un vecteur $\rho$ qui contient les propriétés statistiques des bruits additifs selon les conditions pratiques dans lesquelles opère le système ainsi que les hypothèses imposées. Un récapitulatif des méthodes développées est donné dans les tableaux 1.1, 1.2, 1.3 et 1.4. Chaque tableau contient le nom de la méthode, les hypothèses utilisées, le vecteur de paramètres inconnus et les références bibliographiques relatives à chaque méthode.

Les hypothèses $H_1$ à $H_7$ indiquées dans les tableaux 1.1 à 1.4 correspondent à :

**H1.** $\mathcal{S} \in \mathcal{M}^*$ ;

**H2.** $G \in \mathcal{G}^*$ et $(H^{\tilde{u}}(q),\, H^{\tilde{y}}(q)) \in \mathcal{H}^*$ ;

**H3.** $u_0(t_k)$ a une distribution spectrale rationnelle ;

**H4.** $\tilde{u}(t_k)$ et $\tilde{y}(t_k)$ sont non-corrélés ;

**H5.** $\tilde{u}(t_k)$ et $\tilde{y}(t_k)$ sont blancs ($H^{\tilde{u}}(q) = H^{\tilde{y}}(q) = 1$ ) ;

**H6.** $\tilde{u}(t_k)$ est blanc alors que $\tilde{y}(t_k)$ est coloré (filtre MA) ;

**H7.** $\tilde{u}(t_k)$ est blanc alors que $\tilde{y}(t_k)$ est coloré (filtre ARMA).

**Remarque 1.6** *Les abréviations des méthodes citées dans les tableaux suivants sont détaillées au début du manuscript dans la section termonolgies et notations.*

Tableau 1.1 – Méthodes d'identification à temps discret fondées sur les SSO : méthodes de compensation de biais de l'estimateur des moindres carrés.

| **Méthode** | **Hypothèses** | **Inconnus** | **Références bibliographiques** |
|---|---|---|---|
| *bcls* | H2, H4 & H5 | $\left[\theta^T \;\; \sigma^2_{e^{\tilde{u}}} \;\; \sigma^2_{e^{\tilde{y}}}\right]$ | [Söderström, 2006] |
| *bels* | H2, H4 & H5 | $\left[\theta^T \;\; \sigma^2_{e^{\tilde{u}}} \;\; \sigma^2_{e^{\tilde{y}}}\right]$ | [Zheng, 1998, 1999] |
| *abels* | H2, H4 & H5 | $\left[\theta^T \;\; \sigma^2_{e^{\tilde{u}}} \;\; \sigma^2_{e^{\tilde{y}}}\right]$ | [Zheng, 2000] |
| *fbcls* | H2, H4 & H5 | $\left[\theta^T \;\; \sigma^2_{e^{\tilde{u}}} \;\; \sigma^2_{e^{\tilde{y}}}\right]$ | [Masato *et al.*, 2005] |
| *pbcls* | H2, H4 & H5 | $\left[\theta^T \;\; \sigma^2_{e^{\tilde{u}}} \;\; \sigma^2_{e^{\tilde{y}}}\right]$ | [Jia *et al.*, 2001] |
| *bels2* | H2, H4 & H7 | $\left[\theta^T \;\; \rho^T_{\tilde{u},\tilde{y}}\right]$ $\rho^T_{\tilde{u},\tilde{y}} = \left[\sigma^2_{e^{\tilde{y}}} \;\; r^T_{\tilde{y}\tilde{y}} \;\; \sigma^2_{e^{\tilde{u}}}\right]$ | [Zheng, 2002] |
| *abels2* | H2, H4 & H7 | $\left[\theta^T \;\; \rho^T_{\tilde{u},\tilde{y}}\right]$ $\rho^T_{\tilde{u},\tilde{y}} = \left[\sigma^2_{e^{\tilde{y}}} \;\; r^T_{\tilde{y}\tilde{y}} \;\; \sigma^2_{e^{\tilde{u}}}\right]$ | [Thil *et al.*, 2008] |

Tableau 1.2 – Méthodes d'identification à temps discret fondées sur les SSO : méthodes fondées sur une variable instrumentale.

| **Méthode** | **Hypothèses** | **Inconnus** | **Référence** |
|---|---|---|---|
| *iv* | H2, H4 & H5 | $\theta^T$ | [Söderström et Stoica, 1989] |
| *xiv* | H2, H4 & H6 | $\theta^T$ | [Thil *et al.*, 2008] |
| *xiv1* | H2, H4 & H6 | $\theta^T$ | [Söderström et Mahata, 2002; Thil *et al.*, 2008] |
| *xiv2* | H2, H4 & H6 | $\theta^T$ | [Thil *et al.*, 2008] |

Tableau 1.3 – Méthodes d'identification à temps discret fondées sur les SSO : méthodes de compensation du biais d'estimation de l'estimateur de la variable instrumentale.

| **Méthode** | **Hypothèses** | **Inconnus** | **Référence** |
|---|---|---|---|
| *ecls* | H2, H4 & H5 | $\left[\theta^T \ \rho^T\right]$ | [Ekman *et al.*, 2005, 2006] |
| *bciv* | H2, H4 & H6 | $\left[\theta^T \ \sigma^2_{e^{\tilde{u}}}\right]$ | [Thil *et al.*, 2008] |
| *fbciv* | H2, H4 & H6 | $\left[\theta^T \sigma^2_{e^{\tilde{u}}}\right]$ | [Thil *et al.*, 2011, 2008] |
| *give* | H2, H4 & H5 | $\left[\theta^T \ \rho^T\right]$ | [Söderström, 2011] |

Tableau 1.4 – Méthodes d'identification à temps discret fondées sur les SSO : méthodes diverses.

| **Méthode** | **Hypothèses** | **Inconnus** | **Références bibliographiques** |
|---|---|---|---|
| *frisch 1* | H2, H4 & H5 | $\left[\theta^T \ \sigma^2_{e^{\tilde{u}}} \ \sigma^2_{e^{\tilde{y}}}\right]$ | [Diversi *et al.*, 2003; Frisch, 1934] [Söderström, 2005, 2008] |
| *frisch 2* | H2, H4 & H7 | $\left[\theta^T \ \sigma^2_{e^{\tilde{u}}} \ \rho^T_{\tilde{y}}\right]$ $\rho^T_{\tilde{y}} = [r_{\tilde{y}}(0), ..., r_{\tilde{y}}(n)]$ | [Söderström, 2008] |
| *pem* | H1, H3, H4 & H5 | $\left[\theta^T \ \eta^T_{u_0}\right]$ | [Söderström, 1981] |
| *ml* | H1, H3, H4 & H5 | $\left[\theta^T \ \eta^T_{u_0}\right]$ | [Söderström, 1981, 2007] |

**Remarque 1.7 Identifiabilité des modèles à EIV**

*Dans le cas où le signal d'entrée est parfaitement connu, le problème d'identifiabilité se résout en utilisant les SSO [Söderström et Stoica, 1989]. Alors que dans le cas où l'entrée est mesurée et entachée d'un bruit additif ou des erreurs de mesure, les problèmes d'identifiabilité apparaissent. Par conséquent, les méthodes d'identification fondées sur les SSO deviennent restreintes malgré les hypothèses imposées sur les distributions du signal d'entrée non bruité et les bruits additifs sur l'entrée et la sortie du système. De ce fait, le problème d'identifiabilité des modèles EIV a attiré l'attention de plusieurs chercheurs et a fait l'objet de nombreuses publications en plus de celles mentionnées dans les tableaux précédents [Agüero et Goodwin, 2006, 2008; Anderson, 1985; Anderson et Deistler, 1984, 1987; Castaldi et Soverini, 1996; Deistler, 1986; Deistler et Anderson, 1989; Frisch, 1934; Solo, 1986].*

*Pour surmonter les problèmes d'identifiabilité des modèles EIV, une solution proposée*

*dans la littérature consiste à utiliser les statistiques d'ordre supérieur (SOS) au lieu des SSO. Des études statiques ont montré que les SOS peuvent contenir suffisamment d'information pour garantir l'identifiabilité des modèles EIV [Geary, 1941; Reiersøl, 1950]. Des études dynamiques ont été étendues en utilisant soit les multispectres, soit les cumulants [Akaike, 1966; Deistler, 1986; Deistler et Anderson, 1989; Giannakis, 1990].*

### 1.3.3 Méthodes basées sur les statistiques d'ordre supérieur (SOS)

Cette section présente un bref résumé des méthodes d'identification par modèle EIV discret développées en utilisant les SOS. Trois catégories sont distinguées :

- méthodes fondées sur la minimisation d'un critère [2] ;
- méthodes fondées sur la variable instrumentale ;
- méthodes fondées sur l'équation du modèle.

Chaque méthode est appliquée sous la satisfaction d'hypothèses liées aux distributions des bruits additifs. Il est important de rappeler que les cumulants d'ordre trois d'une variable aléatoire ayant une distribution symétrique sont nuls, alors que les cumulants d'ordre quatre d'une variable aléatoire ayant une distribution gaussienne sont nuls. De ce fait, l'application des SOS pour l'identification des modèles EIV suggère une hypothèse supplémentaire sur le signal d'entrée non bruité pour que ses cumulants ne soient pas nuls.

Les hypothèses nécessaires pour son application dans le contexte EIV sont présentées au début de chaque méthode.

#### 1.3.3.1 Méthodes fondées sur la minimisation d'un critère

**• Cumulants d'ordre trois**

Cette méthode a été proposée dans [Delopoulos et Giannakis, 1994] sous les hypothèses suivantes :

- le signal d'entrée non bruité $u_0$ a une densité spectrale rationnelle ;
- $e^{u_0}$ est un processus stochastique ayant une distribution asymétrique ;
- $\tilde{u}$ et $\tilde{y}$ ont une distribution symétrique ;
- $G_0 \in \mathcal{G}^*$.

2. Le nom de cette catégorie de méthodes est celui trouvé dans la littérature [Thill, 2007]. Bien que nous trouvions que ce nom pourrait être donné à beaucoup d'autres méthodes, nous avons tout de même fait le choix de le garder.

La méthode consiste à minimiser la fonction de coût suivante :

$$\bar{V}_\vartheta = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \bar{E}\left\{u(t_{k+i})\varepsilon^2_{y,u,\vartheta}(t_k)\right\} \tag{1.62}$$

où $\varepsilon^2_{y,u,\vartheta}(t_k)$ désigne l'erreur de prédiction généralisée, qui est la combinaison linéaire de l'entrée et de la sortie :

$$\varepsilon_{y,u,\vartheta}(t_k) = W_u(q,\vartheta)u(t_k) + W_y(q,\vartheta)y(t_k) \tag{1.63}$$

où $W_u(q,\vartheta)$ et $W_y(q,\vartheta)$ désignent les deux filtres appliqués respectivement à l'entrée et à la sortie. Ils sont supposés uniformément stables en $\vartheta$ (le lecteur pourra se référer à [Ljung, 1999] pour plus de détails concernant le choix de ces deux filtres).

La fonction de coût peut être exprimée en fonction des signaux d'entrée et de sortie non bruités comme suit [Delopoulos et Giannakis, 1994] :

$$\bar{V}_\vartheta = C_{u_0u_0u_0}(0,0)\frac{G(0)}{C_{u_0u_0}(0)}V_\vartheta \tag{1.64}$$

avec

$$G(0) \triangleq G(q=e^{j\omega})\big|_{\omega=0} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t) \tag{1.65}$$

et

$$V_\vartheta = \bar{\mathrm{E}}\left\{\varepsilon^2_{y_0,u_0,\vartheta}(t_k)\right\} \tag{1.66}$$

où

$$\varepsilon_{y_0,u_0,\vartheta}(t_k) = W_{u_0}(q,\vartheta)u_0(t_k) + W_{y_0}(q,\vartheta)y_0(t_k) \tag{1.67}$$

La solution optimale au sens des moindres carrés est donnée par :

$$\vartheta^* = \arg\min_\vartheta V_\vartheta = \arg\operatorname*{extremum}_\vartheta \ \bar{V}_\vartheta \tag{1.68}$$

• **Cumulants d'ordre quatre**

Cette méthode a été proposée dans [Tugnait, 1992] sous les hypothèses suivantes :

- le signal d'entrée non bruité $u_0$ a une densité spectrale rationnelle ;
- $e^{u_0}$ est un processus stochastique ayant distribution non gaussienne ;
- $\tilde{u}$ et $\tilde{y}$ ont une distribution gaussienne ;
- $G_0 \in \mathcal{G}^*$.

La méthode consiste à minimiser une fonction de coût qui fait intervenir les cumulants d'ordre quatre de l'erreur d'équation :

$$v(t_k,\theta) = y(t_k) - \varphi^T(t_k)\theta \tag{1.69}$$

La fonction de coût est donnée par :

$$J(\theta, N_t) = \frac{1}{N_t}\sum_{k=1}^{N_t} v^4(t_k, \theta) - 3\left(\frac{1}{N_t}\sum_{k=1}^{N_t} v^2(t_k, \theta)\right)^2 \tag{1.70}$$

L'estimation des cumulants d'ordre quatre de l'erreur d'équation se fait en utilisant un estimateur non biaisé [Tugnait, 1992]. La fonction de coût est non linéaire en $\theta$. Donc la solution optimale est obtenue en utilisant des algorithmes d'optimisation non linéaires :

$$\theta^* = \arg\min_{\theta} |J(\theta, N_t)| \tag{1.71}$$

#### 1.3.3.2 Méthodes fondées sur une variable instrumentale

**• Cumulants d'ordre trois : *tociv* (third-order cumulants based instrumental variable)**

Cette méthode, qui est une généralisation de l'approche classique de la variable instrumentale [Inouye et Tsuchiya, 1991] en utilisant les cumulants d'ordre trois, a été proposée sous les hypothèses suivantes :

- le signal d'entrée non bruité a une distribution asymétrique ;
- $\tilde{u}$ et $\tilde{y}$ sont non-corrélés ;
- $\tilde{u}$ et $\tilde{y}$ ont une distribution symétrique ;
- $G_0 \in \mathcal{G}^*$.

L'équation du modèle s'écrit sous la forme d'une régression linéaire comme suit :

$$y(t_k) = \varphi(t_k)\theta + v(t_k, \theta) \tag{1.72}$$

où $\varphi(t_k)$ est le vecteur de régression défini par :

$$\varphi^T(t_k) = [-y(t_{k-1}), ..., -y(t_{k-n_a})\ u(t_{k-1}), ..., u(t_{k-n_b})] \tag{1.73}$$

et $v(t_k, \theta)$ désigne l'erreur d'équation définie par :

$$v(t_k, \theta) = \tilde{y}(t_k) - \tilde{\varphi}(t_k)\theta \tag{1.74}$$

avec

$$\tilde{\varphi}^T(t_k) = [-\tilde{y}(t_{k-1}), ..., -\tilde{y}(t_{k-n_a})\ \tilde{u}(t_{k-1}), ..., \tilde{u}(t_{k-n_b})] \tag{1.75}$$

L'idée est de construire un nouveau vecteur de régression non corrélés avec l'erreur d'équation :

$$z^T(t_k) = \left[-y^2(t_{k-1}) \ldots - y^2(t_{k-n_a})\ u^2(t_{k-1}) \ldots u^2(t_{k-n_b})\right] \tag{1.76}$$

L'application de l'espérance mathématique au résultat de la multiplication de l'équation (1.72) par (1.76) permet d'aboutir à la relation suivante :

$$r_{z\varphi} = R_{z\varphi}\theta + r_{zv} \tag{1.77}$$

$R_{z\varphi}$ désigne la matrice d'intercovariance entre deux vecteurs aléatoires, $z$ et $\varphi$, et $r_{zv}$ désigne le vecteur d'intercovariance du vecteur aléatoire $z$ et de la variable aléatoire $v$. Les vecteurs et la matrice d'intercovariance apparaissant dans l'équation (1.77) contiennent les cumulants d'ordre trois des signaux d'entrée et de sortie.

L'estimateur *tociv* est défini par :

$$\theta^*_{tociv} = R^{-1}_{z\varphi} r_{z\varphi} \tag{1.78}$$

**• Cumulants d'ordre quatre : *fociv* (fourth-order cumulants based instrumental variable)**

Cette méthode, qui est une généralisation de l'approche classique de la variable instrumentale [Inouye et Suga, 1994] en utilisant les cumulants d'ordre quatre, a été proposée sous les hypothèses suivantes :

- $u_0$ est non gaussien ;
- $\tilde{u}$ et $\tilde{y}$ sont non-corrélés ;
- $\tilde{u}$ et $\tilde{y}$ ont une distribution gaussienne ;
- $G_0 \in \mathcal{G}^*$.

Le vecteur d'instruments est défini par :

$$z^T(t_k) = \begin{bmatrix} -y^3(t_k) + 3\bar{\mathrm{E}}\left\{y^2(t_k)\right\} y(t_k) \\ u^3(t_k) - 3\bar{\mathrm{E}}\left\{u^2(t_k)\right\} u(t_k) \end{bmatrix} \tag{1.79}$$

L'application de l'espérance mathématique au résultat de la multiplication de l'équation (1.72) par (1.79) permet d'aboutir à la relation suivante :

$$r_{zy} = R_{z\varphi}\theta + r_{zv} \tag{1.80}$$

Les vecteurs et la matrice d'intercovariance apparaissant dans l'équation (1.80) contiennent les cumulants d'ordre quatre des signaux d'entrée et de sortie.

L'estimateur *fociv* s'écrit :

$$\theta^*_{fociv} = R^{-1}_{z\varphi} r_{zy} \tag{1.81}$$

#### 1.3.3.3 Méthodes fondées sur l'équation du modèle

**• Cumulants d'ordre trois**

La propriété de multilinéarité des cumulants permet d'écrire l'équation du modèle en utilisant les cumulants d'ordre trois croisés comme suit :

$$C_{uyu}(\tau_1,\tau_2) = \frac{B(q^{-1},\theta)}{A(q^{-1},\theta)} C_{uuu}(\tau_1,\tau_2) \tag{1.82}$$

Les hypothèses suivantes sont nécessaires pour le développement de l'estimateur :

- $u_0$ a une distribution asymétrique ;
- $\tilde{u}$ et $\tilde{y}$ ont une distribution symétrique ;
- $G_0 \in \mathcal{G}^*$.

**Estimateur *tocls* :**

Cette méthode est basée sur la minimisation de l'erreur d'équation suivante :

$$\begin{aligned} v(\tau_1,\tau_2,\theta) &= A(q^{-1},\theta) C_{uyu}(\tau_1,\tau_2) - B(q^{-1},\theta) C_{uuu}(\tau_1,\tau_2) \\ &= C_{uyu}(\tau_1,\tau_2) - \varphi^T(\tau_1,\tau_2)\theta \end{aligned} \tag{1.83}$$

où le vecteur de régression est défini par :

$$\begin{aligned} \varphi^T(\tau_1,\tau_2) = [-C_{uyu}(\tau_1-1,\tau_2)\ldots - C_{uyu}(\tau_1-n_a,\tau_2)\ C_{uuu}(\tau_1-1,\tau_2)\ldots \\ C_{uuu}(\tau_1-n_b,\tau_2)] \end{aligned} \tag{1.84}$$

La minimisation de la fonction coût, basée sur l'erreur d'équation :

$$J(\tau_2,\theta) = \frac{1}{T}\sum_{\tau_1=1}^{T} \frac{1}{2} v^2(\tau_1,\tau_2,\theta) \tag{1.85}$$

permet de définir l'estimateur des moindres carrés fondé sur les cumulants d'ordre trois :

$$\theta^*_{tocls}(\tau_2,T) = \left[\sum_{\tau_1=1}^{T} \varphi(\tau_1,\tau_2)\varphi^T(\tau_1,\tau_2)\right]^{-1} \left[\sum_{\tau_1=1}^{T} \varphi(\tau_1,\tau_2) C_{uyu}(\tau_1,\tau_2)\right] \tag{1.86}$$

**Estimateur *tocils* :**

Cette méthode s'inspire de la méthode de Steiglitz-McBride [Steiglitz et McBride, 1965]. Elle est basée sur la minimisation de l'erreur de sortie suivante :

$$\varepsilon(\tau_1,\tau_2,\theta) = C_{uyu}(\tau_1,\tau_2) - \frac{B(q^{-1},\theta)}{A(q^{-1},\theta)} C_{uuu}(\tau_1,\tau_2) \tag{1.87}$$

Cette erreur est non linéaire en les paramètres ce qui requiert l'utilisation des techniques d'optimisation non linéaires. Une solution proposée dans la littérature consiste à convertir

l'erreur de sortie en erreur d'équation et à suivre un schéma itératif pour calculer l'estimateur *tocils* :

$$\begin{aligned}\varepsilon(\tau_1,\tau_2,\theta) &= \frac{1}{A(q^{-1},\theta)}\left(A(q^{-1},\theta)C_{uyu}(\tau_1,\tau_2) - B(q^{-1},\theta)C_{uuu}(\tau_1,\tau_2)\right)\\ &= A(q^{-1},\theta)C_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2) - B(q^{-1},\theta)C_{uuu,f}(\tau_1,\tau_2)\end{aligned} \tag{1.88}$$

où $C_{uuu,f}(\tau_1,\tau_2)$ et $C_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2)$ désignent les cumulants filtrés par $\dfrac{1}{A(q^{-1},\theta)}$. Comme les coefficients du polynôme $A(q^{-1},\theta)$ sont inconnus, le vecteur paramètres peut être estimé par la méthode de moindres carrés itérative.

L'estimateur *tocils* est alors défini par :

$$\theta^*_{tocils}(\tau_2,T) = \left[\sum_{\tau_1=1}^{T}\varphi_f(\tau_1,\tau_2)\varphi_f^T(\tau_1,\tau_2)\right]^{-1}\left[\sum_{\tau_1=1}^{T}\varphi_f(\tau_1,\tau_2)C_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2)\right] \tag{1.89}$$

**• Cumulants d'ordre quatre**

La propriété de multilinéarité des cumulants permet d'écrire l'équation du modèle en utilisant les cumulants d'ordre quatre croisés comme suit :

$$C_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = \frac{B(q^{-1},\theta)}{A(q^{-1},\theta)}C_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \tag{1.90}$$

Les hypothèses suivantes sont nécessaires pour le développement de l'estimateur :

- $u_0$ a une distribution non gaussienne ;
- $\tilde{u}$ et $\tilde{y}$ ont une distribution gaussienne ;
- $G_0 \in \mathcal{G}^*$.

**Estimateur *focls* :**

Cette méthode est basée sur la minimisation de l'erreur d'équation suivante :

$$\begin{aligned}v(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\theta) &= A(q^{-1},\theta)C_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) - B(q^{-1},\theta)C_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\\ &= C_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) - \varphi^T(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\theta\end{aligned} \tag{1.91}$$

où le vecteur de régression est défini par :

$$\begin{aligned}\varphi^T(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = [&-C_{uyuu}(\tau_1-1,\tau_2,\tau_3)\ldots - C_{uyuu}(\tau_1-n_a,\tau_2,\tau_3)\\ &C_{uuuu}(\tau_1-1,\tau_2,\tau_3)\ldots C_{uuuu}(\tau_1-n_b,\tau_2,\tau_3)]\end{aligned} \tag{1.92}$$

La minimisation de la fonction coût, basée sur l'erreur d'équation :

$$J(\tau_2,\tau_3,\theta) = \frac{1}{T}\sum_{\tau_1=1}^{T}\frac{1}{2}v^2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\theta) \tag{1.93}$$

permet de définir l'estimateur des moindres carrés fondé sur les cumulants d'ordre trois :

$$\theta^*_{focls}(\tau_2,\tau_3,T) = \left[\sum_{\tau_1=1}^{T}\varphi(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\varphi^T(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\right]^{-1} \left[\sum_{\tau_1=1}^{T}\varphi(\tau_1,\tau_2,\tau_3)C_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\right] \quad (1.94)$$

**Estimateur *focils* :**

Comme dans le cas des cumulants d'ordre trois, cette méthode est inspirée de la méthode de Steiglitz-McBride [Steiglitz et McBride, 1965]. Elle est basée sur la minimisation de l'erreur de sortie suivante :

$$\varepsilon(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\theta) = C_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) - \frac{B(q^{-1},\theta)}{A(q^{-1},\theta)}C_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \quad (1.95)$$

Cette erreur est non linéaire en les paramètres ce qui requiert l'utilisation des techniques d'optimisation non linéaires. Une solution proposée dans la littérature consiste à convertir l'erreur de sortie en erreur d'équation et à suivre un schéma itératif pour calculer l'estimateur *tocils* :

$$\begin{aligned}\varepsilon(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\theta) &= \frac{1}{A(q^{-1},\theta)}\left(A(q^{-1},\theta)C_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) - B(q^{-1},\theta)C_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\right)\\ &= A(q^{-1},\theta)C_{uyuu,f}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) - B(q^{-1},\theta)C_{uuuu,f}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\end{aligned} \quad (1.96)$$

où $C_{uuuu,f}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ et $C_{uyuu,f}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ désignent les cumulants filtrés par $\frac{1}{A(q^{-1},\theta)}$. Comme les coefficients du polynôme $A(q^{-1},\theta)$ sont inconnus, le vecteur paramètres peut être estimé par la méthode de moindres carrés itérative.

L'estimateur *focils* est alors défini par :

$$\theta^*_{focils}(\tau_2,\tau_3,T) = \left[\sum_{\tau_1=1}^{T}\varphi_f(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\varphi_f^T(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\right]^{-1} \left[\sum_{\tau_1=1}^{T}\varphi_f(\tau_1,\tau_2,\tau_3)C_{uyuu,f}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\right] \quad (1.97)$$

## 1.4 Identification à temps continu dans le contexte EIV

Le problème d'identification des systèmes par modèles entiers à temps continu a fait l'objet de plusieurs travaux étant donné que la plupart des systèmes réels régis

par les lois de la physique évoluent continuement dans le temps. L'idée est d'identifier un modèle continu à partir des données d'entrée et de sortie échantillonnées. Deux schémas différents sont possibles : schéma indirect et schéma direct. Le schéma indirect consiste, dans un premier temps, à estimer les coefficients du modèle discret moyennant les méthodes d'identification paramétriques à temps discret présentées au paragraphe 1.3, puis à déterminer le modèle continu à partir du modèle discret estimé. En ce qui concerne le schéma direct, il consiste à déterminer le modèle continu en une seule étape à l'aide de méthodes d'identification paramétriques à temps continu. Dans cette section, l'accent est porté sur l'identification des systèmes par modèle entier à temps continu en utilisant le schéma direct.

Deux classes de méthodes d'identification par modèle entier à temps continu ont été développées. La première classe est fondée sur les statistiques de second ordre [Mahata et Garnier, 2005, 2006a; Söderström *et al.*, 2006; Yang *et al.*, 1993; Zhao *et al.*, 1991]. La deuxième classe, fondée sur les statistiques d'ordre supérieur, est développée dans les travaux de Thil [Thil, 2007].

Cette section est composée principalement de trois parties : la première partie présente le problème d'identification des systèmes entiers à temps continu dans un contexte EIV. La deuxième partie présente un bref résumé des méthodes d'identification basées sur les statistiques de seconde ordre développées jusqu'à présent dans la littérature. La dernière partie présente deux estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre supérieur pour identifier les modèles entiers à temps continu dans le contexte EIV.

### 1.4.1 Formulation du problème d'identification des systèmes EIV

Soit $G$ un système monovariable, linéaire et à temps continu représenté dans un contexte à erreurs en les variables (EIV) par le schéma de la figure 1.2.

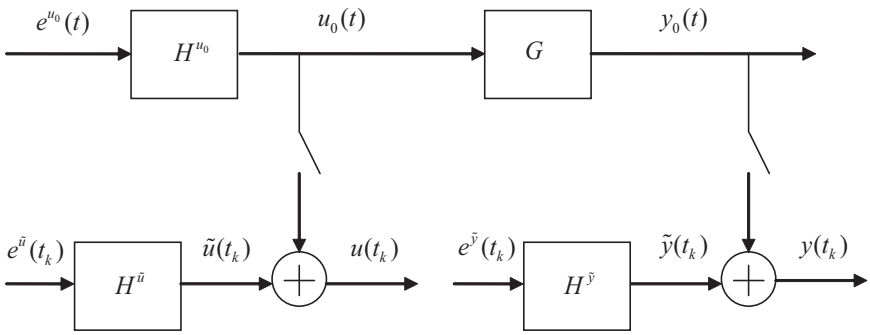



Figure 1.2 – Schéma du modèle EIV à temps continu.

Le vrai système est modélisé par :

$$\begin{aligned} y_0(t) &= G(p,\theta)u_0(t) \\ &= \frac{b_0 + b_1 p + \ldots + b_{n_b} p^{n_b}}{a_0 + a_1 p + \ldots + a_{n_a-1} p^{n_a-1} + p^{n_a}} u_0(t) \end{aligned} \tag{1.98}$$

où $0 \leq i \leq n_b$ et $0 \leq k \leq n_a$ sont les ordres de dérivation et $p$ désigne l'opérateur différentiel $\dfrac{\partial}{\partial t}$.

Les signaux $u_0(t)$ et $y_0(t)$ sont supposés échantillonnés aux instants $\{t_k = kh\}_{k=1}^{N_t}$, où $h$ est la période d'échantillonnage. Les signaux échantillonnés mesurés $u(t_k)$ et $y(t_k)$ sont supposés entachés par des bruits additifs à temps discret respectivement $\tilde{u}(t_k)$ et $\tilde{y}(t_k)$.

De ce fait, le modèle du système est à temps continu alors que les modèles des bruits en entrée et en sortie sont à temps discret ; ce qui caractérise les systèmes EIV à temps continu.

Le système EIV $\mathcal{S}$ est décrit par :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} y_0(t) = G(p,\theta)u_0(t) \\ u(t_k) = u_0(t_k) + \tilde{u}(t_k) \\ y(t_k) = y_0(t_k) + \tilde{y}(t_k) \end{cases} \tag{1.99}$$

avec

$$\begin{cases} u_0(t) = H^{u_0}(p,\eta_{u_0})e^{u_0}(t) \\ \tilde{u}(t_k) = H^{\tilde{u}}(q,\eta_{\tilde{u}})e^{\tilde{u}}(t_k) \\ \tilde{y}(t_k) = H^{\tilde{y}}(q,\eta_{\tilde{y}})e^{\tilde{y}}(t_k) \end{cases} \tag{1.100}$$

où $e^{u_0}(t)$ est défini par la dérivée d'un processus de Wiener de variance incrémentale unité et $e^{\tilde{u}}(t_k)$, $e^{\tilde{y}}(t_k)$ sont deux bruits blancs à temps discret de variances respectives $\sigma^2_{e^{\tilde{u}}}$ et $\sigma^2_{e^{\tilde{y}}}$.

La modélisation du système EIV décrit par la figure 1.2 est définie comme étant une fonction d'un ouvert $D_{\mathcal{M}}$ de $\mathbb{R}^{n_\Theta}$ dans un ensemble de modèles $\mathcal{M}^*$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : D_{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}^* &= \{\mathcal{M}(\Theta) |\, \Theta \in D_{\mathcal{M}}\} \\ \Theta &\mapsto \mathcal{M}(\Theta) \end{aligned} \tag{1.101}$$

où $\Theta$ désigne le vecteur de paramètres. Il contient tous les coefficients du modèle de processus $G$, de l'entrée non bruitée et des bruits additifs sur l'entrée et la sortie.

L'ensemble ouvert $D_{\mathcal{M}}$ est le produit des intervalles ouverts $D_\theta$, $D_{\eta_{u_0}}$, $D_{\eta_{\tilde{u}}}$ et $D_{\eta_{\tilde{y}}}$, soit :

$$D_{\mathcal{M}} = D_\theta \times D_{\eta_{u_0}} \times D_{\eta_{\tilde{u}}} \times D_{\eta_{\tilde{y}}} \tag{1.102}$$

L'ensemble des modèles est défini par :

$$\mathcal{M}^* = \left\{ G(p,\theta),\ H^{u_0}(p,\eta_{u_0}),\ H^{\tilde{u}}(q,\eta_{\tilde{u}}),\ H^{\tilde{y}}(q,\eta_{\tilde{y}}) \middle|\ \theta \in D_\theta, \eta_{u_0} \in D_{\eta_{u_0}}, \eta_{\tilde{u}} \in D_{\eta_{\tilde{u}}}, \eta_{\tilde{y}} \in D_{\eta_{\tilde{y}}} \right\} \quad (1.103)$$

$$\mathcal{G}^* = \left\{ G(p,\theta) = \frac{B(p,\theta)}{A(p,\theta)} = \frac{b_0 + b_1 p + \ldots + b_{n_b} p^{n_b}}{a_0 + a_1 p + \ldots + a_{n_a-1} p^{n_a-1} + p^{n_a}} \middle|\ \theta \in D_\theta \right\} \quad (1.104)$$

$$\mathcal{E}^* = \left\{ H^{u_0}(p,\eta_{u_0}) \middle|\ \eta_{u_0} \in D_{\eta_{u_0}} \right\} \quad (1.105)$$

$$\mathcal{H}^* = \left\{ \left( H^{\tilde{u}}(q,\eta_{\tilde{u}}),\ H^{\tilde{y}}(q,\eta_{\tilde{y}}) \right) \middle|\ \eta_{\tilde{u}} \in D_{\eta_{\tilde{u}}},\ \eta_{\tilde{y}} \in D_{\eta_{\tilde{y}}} \right\} \quad (1.106)$$

Le vecteur des paramètres regroupe les coefficients linéaires des modèles décrits ci-dessus, soit :

$$\Theta^T = \left[ \theta^T \ \eta_{u_0}^T \ \eta_{\tilde{u}}^T \ \eta_{\tilde{y}}^T \right] \quad (1.107)$$

avec

$$\theta^T = [a_0, \ldots, a_{n_a-1}, b_0, \ldots, b_{n_b}] \quad (1.108)$$

Le problème d'identification des systèmes EIV à temps continu consiste à déterminer des estimées non biaisées de $\Theta^T$ à partir de $N_t$ échantillons de données en présence de bruits additifs sur les signaux d'entrée et de sortie, sachant que les méthodes d'identification classiques donnent des estimées biaisées dans un contexte EIV.

### 1.4.2 Méthodes basées sur les statistiques de second ordre

Le problème majeur de l'identification directe des systèmes à temps continu est la nécessité du calcul des dérivées des signaux d'entrée et de sortie mesurés. Par conséquence, l'effet du bruit s'amplifie en évaluant les dérivées ce qui nécessite le pré-traitement des données mesurées.

Dans la littérature il existe trois classes de méthodes de pré-traitement de données [Garnier *et al.*, 2003; Garnier et Wang, 2008] :

- des méthodes basées sur les filtres linéaires ;
- des méthodes basées sur les filtres linéaires intégrales ;
- des méthodes basées sur les fonctions de modulation.

Le résumé des travaux développés jusqu'à présent est donné dans le tableau 1.5. Il contient les natures des bruits additifs en entrée et en sortie considérés dans chaque méthode, le vecteur des paramètres estimés, le type de pré-traitement utilisé ainsi que les références bibliographiques de chaque méthode.

**Remarque 1.8** *Les abréviations des méthodes citées dans le tableau suivant sont détaillées au début du manuscript dans la section terminologies et notations.*

Tableau 1.5 – Méthodes d'identification à temps continu fondés sur les SSO.

| **Méthode** | $\tilde{u}(t_k)/\tilde{y}(t_k)$ | Inconnus | Pré-traitement | Références |
|---|---|---|---|---|
| *bcls* | blanc/blanc | $\left[\theta^T \ \lambda_{e^{\tilde{u}}} \ \lambda_{e^{\tilde{y}}}\right]^T$ | Filtre linéaire intégral | [Zhao *et al.*, 1991] |
| *bciv* | blanc/coloré | $\left[\theta^T \ \lambda_{e^{\tilde{u}}}\right]^T$ | Filtre linéaire intégral | [Yang *et al.*, 1993] |
| *eivsvf* | blanc/blanc | $\left[\theta^T \ \lambda_{e^{\tilde{u}}} \ \lambda_{e^{\tilde{y}}}\right]^T$ | Filtre à variables d'état | [Mahata et Garnier, 2005] [Mahata et Garnier, 2006b] |
| *ecls* | blanc/blanc | $\left[\theta^T \ \lambda_{e^{\tilde{u}}} \ \lambda_{e^{\tilde{y}}}\right]^T$ | Fonctions de modulation | [Söderström *et al.*, 2006] |

Les méthodes d'identification présentées dans le tableau 1.5 sont développées sous l'hypothèse de blanchissement des bruits affectant les signaux d'entrée et de sortie sauf la méthode de compensation du biais de la variables instrumentale (*bciv*). Cette hypothèse permet d'une part de simplifier l'analyse et d'autre part de s'affranchir des problèmes d'identifiabilité apparaissant lors de l'utilisation des SSO. En outre, toutes ces méthodes utilisent une étape de pré-traitement de données et ceci mène souvent à la perte de blancheur des bruits affectant l'entrée et la sortie du système et par conséquent mène à des problèmes accrues.

Pour résoudre ces problèmes, l'utilisation des SOS au lieu des SSO est proposée d'une part pour leur insensibilité aux différents types de bruits et d'autre part pour s'affranchir des problèmes d'identifiabilité.

### 1.4.3 Méthodes basées sur les statistiques d'ordre supérieur

Les travaux développées sur l'identification de systèmes dans un contexte EIV à temps continu ont été initiés par Thil [Thil, 2007]. Ils étendent les méthodes d'identification par modèles EIV à temps discret présentées au paragraphe 1.3.3.3 au cas continu.

Deux classes de méthodes fondées sur l'erreur d'équation sont développées : la première classe est basée sur les cumulants d'ordre trois et la deuxième est basée sur les cumulants d'ordre quatre. L'utilisation des méthodes développées nécessite la satisfaction de certaines hypothèses sur la distribution du signal d'entrée non bruité $u_0$.

#### 1.4.3.1 Méthodes basées sur les statistiques d'ordre trois

La propriété de multilinéarité des cumulants permet d'écrire l'équation du modèle en fonction des cumulants d'ordre trois comme suit [Thil, 2007] :

$$C_{uyu}(\tau_1, \tau_2) = \frac{B(p,\theta)}{A(p,\theta)} C_{uuu}(\tau_1, \tau_2) \tag{1.109}$$

où $p$ désigne l'opérateur différentiel par rapport à $\tau_1$ défini par $\dfrac{\partial}{\partial \tau_1}$.

Les hypothèses suivantes sont nécessaires pour le développement des algorithmes des estimateurs *tocls* et *tocils* :

- $u_0$ a une distribution asymétrique ;
- $\tilde{u}$ et $\tilde{y}$ ont une distribution symétrique ;
- $G_0 \in \mathcal{G}^*$.

Vu que les cumulants d'ordre trois des signaux distribués d'une manière symétrique sont nuls, l'équation du modèle se réécrit comme suit :

$$C_{u_0 y_0 u_0}(\tau_1, \tau_2) = \frac{B(p,\theta)}{A(p,\theta)} C_{u_0 u_0 u_0}(\tau_1, \tau_2) \tag{1.110}$$

En pratique, les cumulants d'ordre trois peuvent être estimés à partir des $N_t$ échantillons de données d'entrée et de sortie disponibles $\{u(t_k), y(t_k)\}_{k=1}^{N_t}$. De ce fait, le modèle estimé est donné par :

$$\hat{C}_{uyu}(\tau_1, \tau_2) = \frac{B(p,\theta)}{A(p,\theta)} \hat{C}_{uuu}(\tau_1, \tau_2) + \varepsilon(\tau_1, \tau_2, \theta) \tag{1.111}$$

où $\varepsilon(\tau_1, \tau_2, \theta)$ désigne l'erreur de sortie définie par :

$$\varepsilon(\tau_1, \tau_2, \theta) = \frac{B(p,\theta)}{A(p,\theta)} \tilde{C}_{uuu}(\tau_1, \tau_2) - \tilde{C}_{uyu}(\tau_1, \tau_2) \tag{1.112}$$

avec :

$$\tilde{C}_{xxx}(\tau_1, \tau_2) = C_{xxx}(\tau_1, \tau_2) - \hat{C}_{xxx}(\tau_1, \tau_2) \tag{1.113}$$

$\tilde{C}_{xxx}(\tau_1, \tau_2)$ désigne l'erreur d'estimation des cumulants d'ordre trois.

Les estimées des cumulants d'ordre trois sont non biaisées et convergentes. Il convient alors de noter que :

$$\lim_{N_t \to \infty} \varepsilon(\tau_1, \tau_2, \theta) = 0 \tag{1.114}$$

**• Estimateur des moindres carrés : *tocls***

L'équation (1.111) peut être réécrite sous la forme de régression linéaire conformément à :

$$\hat{C}_{uyu}^{(n_a)}(\tau_1, \tau_2) = \hat{\Phi}^T(\tau_1, \tau_2)\theta + A(p,\theta)\varepsilon(\tau_1, \tau_2, \theta) \tag{1.115}$$

où le vecteur régression est défini par :

$$\hat{\Phi}^T(\tau_1,\tau_2) = \left[-\hat{C}^{(0)}_{uyu}(\tau_1,\tau_2)\ldots -\hat{C}^{(n_a-1)}_{uyu}(\tau_1,\tau_2)\ \hat{C}^{(0)}_{uuu}(\tau_1,\tau_2)\ldots\hat{C}^{(n_b)}_{uuu}(\tau_1,\tau_2)\right] \tag{1.116}$$

avec

$$\hat{C}^{(j)}_{xxx}(\tau_1,\tau_2) = \frac{\partial}{\partial\tau_1^j}\hat{C}_{xxx}(\tau_1,\tau_2) \tag{1.117}$$

L'erreur d'équation est définie par :

$$\begin{aligned}\vartheta_{cum}(\tau_1,\tau_2,\theta) &= A(p,\theta)\varepsilon(\tau_1,\tau_2,\theta)\\ &= B(p,\theta)\tilde{C}_{uuu}(\tau_1,\tau_2) - A(p,\theta)\tilde{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2)\end{aligned} \tag{1.118}$$

Le vecteur des paramètres optimal $\theta$ est obtenu en minimisant la fonction de coût suivante :

$$V(\tau_2,\theta,T) = \frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\frac{1}{2}\vartheta^2_{cum}(\tau_1,\tau_2,\theta) \tag{1.119}$$

La solution au sens des moindres carrés est donnée par :

$$\hat{\theta}_{tocls}(\tau_2,T) = \left[\frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\hat{\Phi}(\tau_1,\tau_2)\hat{\Phi}^T(\tau_1,\tau_2)\right]^{-1}\left[\frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\hat{\Phi}(\tau_1,\tau_2)\hat{C}^{(n_a)}_{uyu}(\tau_1,\tau_2)\right] \tag{1.120}$$

où $T$ est un hyper-paramètre choisi supérieur à $n_a+n_b+1$ pour assurer la non singularité de la matrice à inverser dans (1.120).

Les dérivées des estimées de cumulants d'ordre trois dans le vecteur régression (1.116) sont évaluées par l'approche du filtre à variables d'état [Young, 1981b]. La dérivée à l'ordre $n$ des cumulants filtrés est donnée par :

$$C^{(n)}_{xxx,f}(\tau_1,\tau_2) = C_{xx^{(n)}_f x}(\tau_1,\tau_2) \tag{1.121}$$

où $x^{(n)}_f$ désigne la dérivée filtrée du signal $x$ définie par :

$$x^{(n)}_f(t) = F_n(p)x(t) \tag{1.122}$$

avec

$$F_n(p) = p^n\left(\frac{\lambda}{p+\lambda}\right)^{n_a}\quad,\quad 0\leqslant n\leqslant n_a \tag{1.123}$$

et $\lambda$ est la fréquence de coupure du filtre. Elle peut être choisie légèrement supérieure à la borne supérieure de la bande passante du système à identifier.

La mise en œuvre de l'estimateur *tocls* se résume donc principalement en trois étapes :

- **Étape 1 :** définir un banc de filtres à variables d'état (1.123) et générer les dérivées des signaux d'entrée et sortie :

$$\begin{cases} u^{(n)}_f(t_k) = F_n(p)u(t_k)\ ,\ 0\leqslant n\leqslant n_b\\ y^{(n)}_f(t_k) = F_n(p)y(t_k)\ ,\ 0\leqslant n\leqslant n_a\end{cases} \tag{1.124}$$

– **Étape 2 :** calculer les dérivées des estimées de cumulants d'ordre trois :

$$\begin{cases} \hat{C}^{(n)}_{uuu,f}(\tau_1,\tau_2) = \dfrac{1}{N_t-\mu}\displaystyle\sum_{k=0}^{N_t-\mu} u(t_k)\, u_f^{(n)}(t_k+\tau_1)\, u(t_k+\tau_2)\ , \quad 0 \leqslant n \leqslant n_b \\ \hat{C}^{(n)}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2) = \dfrac{1}{N_t-\mu}\displaystyle\sum_{k=0}^{N_t-\mu} u(t_k)\, y_f^{(n)}(t_k+\tau_1)\, u(t_k+\tau_2)\ , \quad 0 \leqslant n \leqslant n_a \end{cases} \tag{1.125}$$

où $\mu = \max(\tau_1, \tau_2)$

– **Étape 3 :** construire le vecteur de régression :

$$\hat{\Phi}_f^T(\tau_1,\tau_2) = \left[-\hat{C}^{(0)}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2) \ldots - \hat{C}^{(n_a-1)}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2)\ \hat{C}^{(0)}_{uuu,f}(\tau_1,\tau_2) \ldots \hat{C}^{(n_b)}_{uuu,f}(\tau_1,\tau_2)\right] \tag{1.126}$$

et déterminer le vecteur des paramètres estimés *tocls* :

$$\hat{\theta}_{tocls}(\tau_2,T) = \left[\frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\hat{\Phi}_f(\tau_1,\tau_2)\hat{\Phi}_f^T(\tau_1,\tau_2)\right]^{-1}\left[\frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\hat{\Phi}_f(\tau_1,\tau_2)\hat{C}^{(n_a)}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2)\right] \tag{1.127}$$

• **Estimateur des moindres carrés itératifs : *tocils***

L'erreur de sortie est définie par :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau_1,\tau_2,\theta) &= \hat{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2) - \frac{B(p,\theta)}{A(p,\theta)}\hat{C}_{uuu}(\tau_1,\tau_2) \\ &= \frac{B(p,\theta)}{A(p,\theta)}\tilde{C}_{uuu}(\tau_1,\tau_2) - \tilde{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2) \end{aligned} \tag{1.128}$$

Cette erreur est non linéaire vis-à-vis des paramètres à estimer. Pour estimer $\theta$, il est nécessaire d'utiliser des algorithmes d'optimisation non linéaires. Une autre solution est proposée dans les travaux de Thil [Thil, 2007], fondée sur une procédure des moindres carrés itératifs. L'idée consiste à minimiser l'erreur d'équation :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau_1,\tau_2,\theta) &= \frac{1}{A(p,\theta)}\left(A(p,\theta)\hat{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2) - B(p,\theta)\hat{C}_{uuu}(\tau_1,\tau_2)\right) \\ &= A(p,\theta)\hat{C}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2) - B(p,\theta)\hat{C}_{uuu,f}(\tau_1,\tau_2) \end{aligned} \tag{1.129}$$

où $\hat{C}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2)$ et $\hat{C}_{uuu,f}(\tau_1,\tau_2)$ désignent les estimées des cumulants filtrés par $\dfrac{1}{A(p,\theta)}$.

Eu égard à la linéarité vis-à-vis des paramètres, l'estimation des coefficients du modèle peut être menée avec des algorithmes d'optimisation linéaires tel que les moindres carrés itératifs. Soit $\hat{\theta}^i$ l'estimée de $\theta$ à l'itération $i$, $\hat{\theta}^{i+1}$ est calculée par moindres carrés en minimisant l'erreur d'équation à chaque itération obtenue avec le filtre $\dfrac{1}{A(p,\hat{\theta}^i)}$.

Cette méthode est inspirée de celle de Steiglitz-McBride [Steiglitz et McBride, 1965], qui utilise les données d'entrée et de sortie disponibles, en supposant que le signal de sortie est entaché d'un bruit blanc alors que le signal d'entrée est parfaitement connu. La convergence de l'algorithme de Steiglitz-McBride est très rapide. L'estimée optimale peut être obtenue en quelques itérations.

L'algorithme *tocils* utilise les cumulants d'ordre trois. Il est appliqué sous l'hypothèse de symétrie des bruits additifs et converge très rapidement, en quelques itérations, quelle que soit la distribution des bruits entachant l'entrée et la sortie du système : bruits blancs ou bruits colorés (corrélés ou non corrélés) [Thil, 2007].

L'erreur d'équation décrite par la relation (1.129) peut être réécrite sous la forme de régression linéaire comme suit :

$$\varepsilon(\tau_1,\tau_2,\theta) = \hat{C}^{(n_a)}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2) - \hat{\Phi}^T_f(\tau_1,\tau_2)\theta \tag{1.130}$$

où le vecteur de régression est donné par :

$$\hat{\Phi}^T_f(\tau_1,\tau_2) = \left[-\hat{C}^{(0)}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2)\ldots - \hat{C}^{(n_a-1)}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2)\ \hat{C}^{(0)}_{uuu,f}(\tau_1,\tau_2)\ldots\ \hat{C}^{(n_b)}_{uuu,f}(\tau_1,\tau_2)\right] \tag{1.131}$$

et $\hat{C}_{xxx,f}$ désigne les estimées des cumulants filtrés par $\dfrac{1}{A(p,\theta)}$. L'erreur d'équation est définie à chaque itération $i$ par :

$$\varepsilon^i(\tau_1,\tau_2,\theta) = A(p,\theta)\frac{\hat{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2)}{A(p,\hat{\theta}^{i-1})} - B(p,\theta)\frac{\hat{C}_{uuu}(\tau_1,\tau_2)}{A(p,\hat{\theta}^{i-1})} \tag{1.132}$$

L'algorithme itératif consiste à minimiser le critère suivant à chaque itération $i$ :

$$V^i(\tau_1,\theta,T) = \frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\frac{1}{2}\left(\varepsilon^i(\tau_1,\tau_2,\theta)\right)^2 \tag{1.133}$$

La solution au sens des moindres carrés est donnée par :

$$\hat{\theta}^i_{tocils}(\tau_2,T) = \left[\frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\hat{\Phi}_f(\tau_1,\tau_2)\hat{\Phi}^T_f(\tau_1,\tau_2)\right]^{-1}\left[\frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\hat{\Phi}_f(\tau_1,\tau_2)\hat{C}^{(n_a)}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2)\right] \tag{1.134}$$

où l'indice $f$ indique le filtrage par $\dfrac{1}{A(p,\theta^{i-1})}$ des estimées des cumulants.

La mise en œuvre de l'estimateur *tocils* se résume principalement en trois étapes décrites ci-dessous.

– **Étape 1 :** calculer la première estimée en utilisant l'algorithme *tocls* :

$$\hat{\theta}^0_{tocils}(\tau_2,T) = \hat{\theta}_{tocls}(\tau_2,T) \tag{1.135}$$

– **Étape 2 :** estimer $\hat{\theta}^{i+1}_{tocils}(\tau_2, T)$ en exécutant les mêmes étapes que celles de l'algorithme *tocls* et en utilisant le filtre suivant au lieu de (1.123) :

$$F_n(p, \hat{\theta}^i_{tocils}(\tau_2, T)) = \frac{p^n}{A(p, \hat{\theta}^i_{tocils}(\tau_2, T))} \quad , \quad 0 \leqslant n \leqslant n_a \tag{1.136}$$

– **Étape 3 :** répéter la deuxième étape jusqu'à ce que la différence entre deux estimées successives satisfasse un critère d'arrêt.

**Remarque 1.9** *Les méthodes d'identification par modèle entier, fondées sur les cumulants d'ordre trois, ne s'appliquent que si la distribution du signal d'entrée non bruité $u_0$ est asymétrique. Pour surmonter cette restriction, l'utilisation des cumulants d'ordre quatre est proposée. Dans la suite, $u_0$ est supposée de distribution non gaussienne plutôt qu'asymétrique.*

#### 1.4.3.2 Méthodes basées sur les statistiques d'ordre quatre

La propriété de multilinéarité des cumulants permet d'écrire l'équation du modèle en fonction des cumulants d'ordre quatre comme suit [Thil, 2007] :

$$C_{uyuu}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{B(p, \theta)}{A(p, \theta)} C_{uuuu}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \tag{1.137}$$

où $p$ désigne l'opérateur différentiel par rapport à $\tau_1$ défini par $\dfrac{\partial}{\partial \tau_1}$.

Les hypothèses suivantes sont nécessaires pour la mise en place des algorithmes des estimateurs *focls* et *focils*.

– $u_0$ a une distribution non gaussienne ;
– $\tilde{u}$ et $\tilde{y}$ ont une distribution gaussienne ;
– $G_0 \in \mathcal{G}^*$

Les cumulants d'ordre quatre des signaux gaussiens sont nuls. L'équation du modèle se réécrit alors comme suit :

$$C_{u_0 y_0 u_0 u_0}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{B(p, \theta)}{A(p, \theta)} C_{u_0 u_0 u_0 u_0}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \tag{1.138}$$

En pratique, les cumulants d'ordre quatre peuvent être estimés à partir des $N_t$ échantillons de données d'entrée et de sortie disponibles $\{u(t_k), y(t_k)\}_{k=1}^{N_t}$. De ce fait, le modèle estimé est donné par :

$$\hat{C}_{uyuu}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{B(p, \theta)}{A(p, \theta)} \hat{C}_{uuuu}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + \varepsilon(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \theta) \tag{1.139}$$

où $\varepsilon(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \theta)$ est l'erreur de sortie définie par :

$$\varepsilon(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \theta) = \frac{B(p,\theta)}{A(p,\theta)} \tilde{C}_{uuuu}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - \tilde{C}_{uyuu}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \tag{1.140}$$

avec :

$$\tilde{C}_{xxxx}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = C_{xxxx}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - \hat{C}_{xxxx}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \tag{1.141}$$

$\tilde{C}_{xxxx}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ désigne l'erreur d'estimation des cumulants d'ordre quatre.

Les estimées des cumulants d'ordre quatre sont non biaisées et asymptotiquement convergentes, alors :

$$\lim_{N_t \to \infty} \varepsilon(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \theta) = 0 \tag{1.142}$$

Les développements des deux algorithmes *focls* et *focils* sont les mêmes que ceux des algorithmes *tocls* et *tocils* et seules les mises en œuvre des estimateurs sont présentées par la suite.

- **Estimateur des moindres carrés : *focls***

La mise en œuvre de l'estimateur *focls* se résume principalement en trois étapes décrites ci-dessous.

– **Étape 1 :** définir un banc de filtre des variables d'état d'ordre $n_a$ défini par la relation (1.123) et générer les dérivées des signaux d'entrée et de sortie :

$$\begin{cases} u_f^{(n)}(t_k) = F_n(p)u(t_k) \ , \ 0 \leqslant n \leqslant n_b \\ y_f^{(n)}(t_k) = F_n(p)y(t_k) \ , \ 0 \leqslant n \leqslant n_a \end{cases} \tag{1.143}$$

– **Étape 2 :** calculer les dérivées des estimées de cumulants d'ordre quatre définies par (1.49) en utilisant les signaux filtrés définis précédemment.

– **Étape 3 :** construire le vecteur régression :

$$\hat{\Phi}_f^T(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \Big[ -\hat{C}^{(0)}_{uyuu,f}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \ldots - \hat{C}^{(n_a-1)}_{uyuu,f}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\ \hat{C}^{(0)}_{uuuu,f}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \ldots \hat{C}^{(n_b)}_{uuuu,f}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \Big] \tag{1.144}$$

et déterminer l'estimée *focls*, soit :

$$\hat{\theta}_{focls}(\tau_2, \tau_3, T) = \left[ \frac{1}{T} \sum_{\tau_1=0}^{T-1} \hat{\Phi}_f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \hat{\Phi}_f^T(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \right]^{-1} \\ \left[ \frac{1}{T} \sum_{\tau_1=0}^{T-1} \hat{\Phi}_f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \hat{C}^{(n_a)}_{uyuu,f}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \right] \tag{1.145}$$

- **Estimateur des moindres carrés itératifs : *focils***

Le développement de l'algorithme *focils* est similaire à celui de l'algorithme *tocils* et sa mise en œuvre se résume principalement en trois étapes décrites ci-dessous.

– **Étape 1 :** calculer la première estimée en utilisant l'algorithme *focls* :

$$\hat{\theta}^0_{focils}(\tau_2, \tau_3, T) = \hat{\theta}_{focls}(\tau_2, \tau_3, T) \tag{1.146}$$

– **Étape 2 :** estimer $\hat{\theta}^{i+1}_{focils}(\tau_2, \tau_3, T)$ en exécutant les mêmes étapes de l'algorithme *focls* et en utilisant le filtre suivant au lieu de (1.123) :

$$F_n(p, \hat{\theta}^i_{focils}(\tau_2, \tau_3, T)) = \frac{p^n}{A(p, \hat{\theta}^i_{focils}(\tau_2, \tau_3, T))} \quad , \quad 0 \leqslant n \leqslant n_a \tag{1.147}$$

– **Étape 3 :** répéter la deuxième étape jusqu'à ce que la différence entre deux estimées successives satisfasse un critère d'arrêt.

## 1.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté un panorama des méthodes d'identification des systèmes par modèles entiers dans le contexte EIV. Les méthodes développées dans la littérature jusqu'à présent peuvent être classifiées selon qu'elles sont fondées sur les statistiques de second ordre ou sur les statistiques d'ordre supérieur. La deuxième classe de méthodes est proposée pour surmonter les problèmes d'identifiabilité des systèmes dans le cas où l'entrée et la sortie sont mesurées et entachées de bruits additifs.

# Chapitre 2

# Dérivation non entière et systèmes non entiers

## Sommaire


**2.1 Introduction . . . . . 47**

**2.2 Intégration non entière . . . . . 47**

2.2.1 Définition . . . . . 47

2.2.2 Transformée de Laplace de l'intégrale non entière d'une fonction temporelle . . . . . 48

2.2.3 Caractéristiques fréquentielles de l'intégration non entière . . . 49

**2.3 Dérivation non entière . . . . . 50**

2.3.1 Définition de Riemann . . . . . 50

2.3.2 Définition de Caputo . . . . . 51

2.3.3 Définition de Grünwald . . . . . 51

2.3.4 Généralisation de la définition de Grünwald . . . . . 52

2.3.5 Transformée de Laplace de la dérivée non entière d'une fonction temporelle . . . . . 60

2.3.6 Caractéristiques fréquentielles de la dérivation non entière . . . 60

**2.4 Représentation des systèmes non entiers . . . . . 61**

2.4.1 Equation différentielle . . . . . 62

2.4.2 Fonction de transfert . . . . . 62

2.4.3 Représentation d'état . . . . . 64

**2.5 Stabilité des systèmes non entiers . . . . . 65**

**2.6 Simulation des systèmes non entiers . . . . . 66**

2.6.1 Approche fondée sur l'approximation par pôles et zéros récursifs de l'opérateur de dérivation non entier . . . . . 67

2.6.2 Approche fondée sur la définition de Grünwald de l'opérateur de dérivation non entier . . . . . 68
2.6.3 Approche fondée sur la définition de Grünwald généralisée de l'opérateur de dérivation non entier . . . . . 69
2.6.4 Exemple de simulation . . . . . 70
**2.7 Conclusion . . . . . 71**

# 2.1 Introduction

Ce chapitre est une introduction aux opérateurs de dérivation et d'intégration non entiers ainsi qu'aux systèmes non entiers.

Il comporte principalement cinq sections : les deux sections suivantes présentent respectivement les opérateurs d'intégration et de dérivation non entiers, leur transformée de Laplace et leurs caractéristiques fréquentielles. Une contribution est détaillée dans la deuxième section. Elle consiste à généraliser la définition de Grünwald de la dérivation non entière avec comme objectif de diminuer l'erreur d'approximation numérique. La troisième section donne un aperçu sur les diverses représentations des systèmes non entiers. L'étude de la stabilité de ce type de systèmes est détaillée dans la quatrième section. Une présentation des différentes approches de simulation des systèmes non entiers finit le présent chapitre. Des exemples de simulation numérique sont introduits pour montrer l'intérêt de l'approche développée, soit en approximation d'opérateurs de dérivation non entiers, soit en simulation de systèmes non entiers.

# 2.2 Intégration non entière

## 2.2.1 Définition

L'intégration d'ordre entier $n$ d'une fonction temporelle $f(t)$ continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et intégrable sur $[0, +\infty[$ est définie, selon la formule de Cauchy, comme suit :

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \tag{2.1}$$

En généralisant la formule de Cauchy, l'intégrale d'ordre réel $\upsilon \in \mathbb{R}_+^*$ a été définie par Riemann et Liouville :

$$I^\upsilon f(t) = \frac{1}{\Gamma(\upsilon)} \int_0^t (t-\tau)^{\upsilon-1} f(\tau) d\tau \tag{2.2}$$

où $\Gamma(\upsilon)$ désigne la fonction Gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(\upsilon) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\upsilon-1} dx, \ \ \forall \upsilon \in \mathbb{R}_+^* \backslash \mathbb{Z}_- \tag{2.3}$$

L'équation (2.2) peut être réécrite sous la forme d'un produit de convolution $(*)$ :

$$I^\upsilon f(t) = \frac{t^{(\upsilon-1)}}{\Gamma(\upsilon)} * f(t) \tag{2.4}$$

Cette intégrale peut être interprétée géométriquement comme étant l'aire de la surface que définit la fonction $f(t)$ pondérée par la fonction $O_\upsilon$ :

$$O_\upsilon(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{\upsilon-1}}{\Gamma(\upsilon)} \tag{2.5}$$

La figure 2.1 présente la variation de $O_\upsilon$ pour différentes valeurs de $\upsilon$ ($0 < \upsilon < 1$). Pour un ordre entier ($\upsilon = 1$), la fonction $O_\upsilon$ vaut 1 et l'intégrale $I^\upsilon f(t)$ correspond à l'aire de la surface entre $f$ et l'axe des abscisses sur $\tau \in [0, t]$. Pour un ordre non entier, la fonction $O_\upsilon$ pondère différemment la fonction $f$. Pour $\upsilon < 1$ la valeur de l'intégrale $I^\upsilon f(t)$ en un point $t$ est plus influencée par son voisinage que par des valeurs plus éloignées. De ce fait, la fonction de pondération $O_\upsilon$ est fréquemment appelée facteur d'oubli [Oustaloup, 1995].

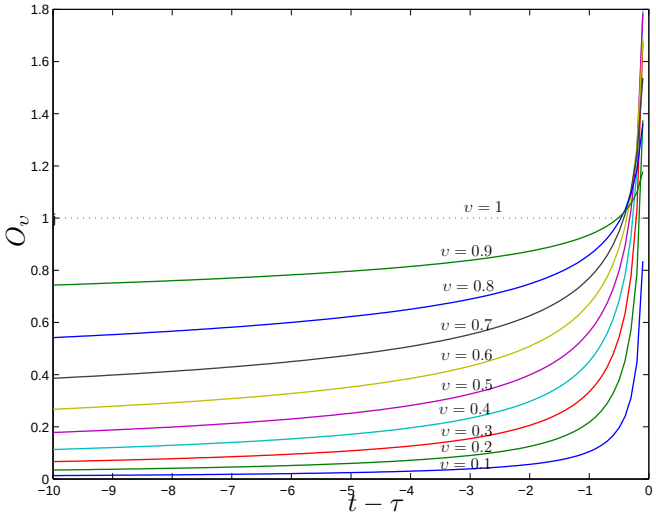



Figure 2.1 – Variation de $O_\upsilon$ pour $0.1 < \upsilon < 1$.

### 2.2.2 Transformée de Laplace de l'intégrale non entière d'une fonction temporelle

La transformée de Laplace de l'intégrale non entière d'une fonction temporelle causale, c.-à-d. $f(t) = 0$ quand $t \leqslant 0$, décrite par l'équation (2.4), s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left(I^\upsilon f(t)\right) &= \mathscr{L}\left(\frac{t^{\upsilon-1}}{\Gamma(\upsilon)} * f(t)\right) \\ &= \mathscr{L}\left(\frac{t^{\upsilon-1}}{\Gamma(\upsilon)}\right)\mathscr{L}\left(f(t)\right) \\ &= \frac{1}{s^\upsilon}F(s) \end{aligned} \tag{2.6}$$

où $s$ désigne l'opérateur de Laplace et $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$. Cette formule est la généralisation de la transformée de Laplace de l'intégration entière d'une fonction temporelle.

### 2.2.3 Caractéristiques fréquentielles de l'intégration non entière

L'opérateur d'intégration non entière est définie tel que sa grandeur de sortie $y(t)$ est, à un facteur prés, l'intégration non entière de sa grandeur d'entrée $u(t)$, soit [Oustaloup, 1995] :

$$y(t) = \frac{1}{\tau^{\upsilon}} I^{\upsilon} u(t) \tag{2.7}$$

où $\tau$ est la constante de temps de differentiation.

Pour des conditions initiales nulles, la transformée de Laplace de l'équation (2.7) permet d'écrire :

$$Y(s) = \left(\frac{\omega_u}{s}\right)^{\upsilon} U(s) = I(s)U(s) \tag{2.8}$$

où $\omega_u = \dfrac{1}{\tau}$ est appelée fréquence de transition et $I(s)$ est appelée transmittance.

Les caractéristiques fréquentielles de l'opérateur d'intégration non entière sont obtenues en remplaçant l'opérateur de Laplace $s$ par $j\omega$ dans la transmittance $I(s)$, soit :

$$I(j\omega) = \left(\frac{\omega_u}{j\omega}\right)^{\upsilon} \tag{2.9}$$

De ce fait le module et la phase de l'intégrateur non entier sont définis par :

$$\begin{cases} \text{module(dB)} = 20\log|I(j\omega)| = 20\log\left|\left(\dfrac{\omega_u}{j\omega}\right)^{\upsilon}\right| = -20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_u}\right) \\ \text{phase(rad)} = \arg(I(j\omega)) = \arg\left(\left(\dfrac{\omega_u}{j\omega}\right)^{\upsilon}\right) = -\upsilon\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{2.10}$$

L'analyse de ce système d'équations permet de décrire la représentation des diagrammes de Bode de l'intégrateur non entier, tels que :

- le diagramme de gain est représenté par une droite oblique de pente $-20\upsilon$ dB/décade ;
- le diagramme de phase est représenté par une droite horizontale d'ordonnée $-\upsilon\dfrac{\pi}{2}$.

La figure suivante représente les diagrammes de Bode d'un intégrateur non entier pour différents ordres $\upsilon$ ($\omega_u = 1$).

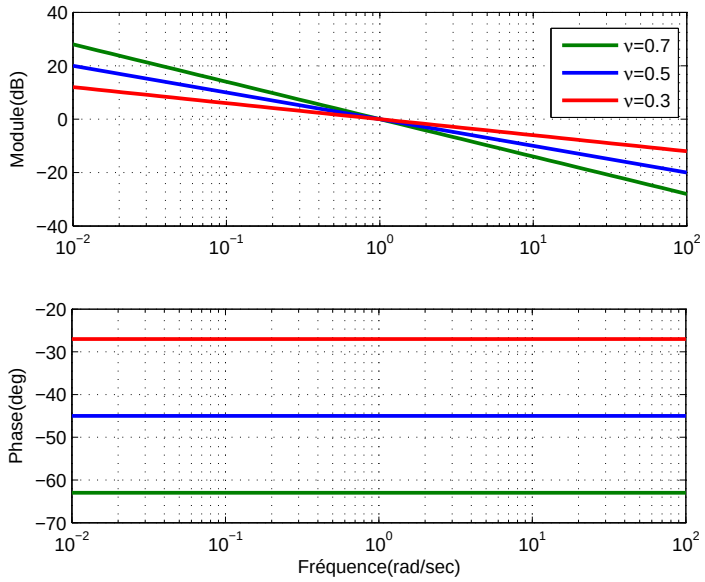



Figure 2.2 – Diagrammes de Bode d'un intégrateur non entier.

## 2.3 Dérivation non entière

Il existe plusieurs approches de généralisation de la dérivée d'ordre entier à un ordre non entier [Kilbas *et al.*, 2006]. Cette section commence par présenter les trois définitions les plus usuelles dans la littérature puis présente une nouvelle contribution.

La dérivée non entière d'ordre $v$ d'une fonction temporelle $f(t)$ est définie par une séquence d'intégro-différentiation de dérivée entière et d'intégration non entière. L'ordre de cette séquence donne naissance à deux définitions de la dérivation non entière, à savoir la définition de Riemann [Samko *et al.*, 1993] et la définition de Caputo [Caputo, 1967].

La généralisation de la définition de Cauchy de la dérivée non entière d'une fonction temporelle à un ordre non entier donne naissance à une approximation de la dérivée à temps discret, à savoir la définition de Grünwald [Grünwald, 1867]. Elle est basée sur le principe des différences finis et permet d'évaluer la dérivée non entière d'une fonction temporelle numériquement. Cette dernière définition est généralisée afin de diminuer l'erreur d'approximation numérique de la dérivée non entière.

### 2.3.1 Définition de Riemann

La dérivée d'ordre réel $v \in \mathbb{R}_+^*$ d'une fonction temporelle $f$ est définie, au sens de Riemann, comme étant la dérivée entière d'ordre $(\lfloor v \rfloor + 1)$ de l'intégrale non entière

d'ordre $(\lfloor \upsilon \rfloor + 1 - \upsilon)$ de $f(t)$, soit :

$$D_R^{\upsilon} f(t) = \frac{d^{\lfloor \upsilon \rfloor + 1}}{dt^{\lfloor \upsilon \rfloor + 1}} \left( I^{\lfloor \upsilon \rfloor + 1 - \upsilon} f(t) \right) \tag{2.11}$$

où $\lfloor \upsilon \rfloor$ est le plus grand entier inférieure ou égale à $\upsilon$.

En remplaçant l'intégration non entière par son expression (2.2), l'équation (2.11) se réécrit comme suit :

$$D_R^{\upsilon} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lfloor \upsilon \rfloor + 1 - \upsilon)} \frac{d^{\lfloor \upsilon \rfloor + 1}}{dt^{\lfloor \upsilon \rfloor + 1}} \left( \int_0^t (t - \tau)^{\lfloor \upsilon \rfloor - \upsilon} f(\tau) d\tau \right) \tag{2.12}$$

Il faut noter que la fonction $(t - \tau)^{\lfloor \upsilon \rfloor - \upsilon} f^{(\lfloor \upsilon \rfloor - \upsilon)}(t)$ doit être intégrable sur $[0, t]$ pour que la dérivée de Riemann existe.

### 2.3.2 Définition de Caputo

La dérivée d'ordre réel $\upsilon \in \mathbb{R}_+^*$ d'une fonction temporelle $f$ est définie, au sens de Caputo, comme étant l'intégrale non entière d'ordre $(\lfloor \upsilon \rfloor + 1 - \upsilon)$ de la dérivée entière d'ordre $(\lfloor \upsilon \rfloor + 1)$ de $f(t)$, soit :

$$D_C^{\upsilon} f(t) = I^{\lfloor \upsilon \rfloor + 1 - \upsilon} \left( \frac{d^{\lfloor \upsilon \rfloor + 1}}{dt^{\lfloor \upsilon \rfloor + 1}} f(t) \right) \tag{2.13}$$

En remplaçant l'intégration non entière par son expression (2.2), la définition de Caputo se réécrit comme suit :

$$D_C^{\upsilon} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lfloor \upsilon \rfloor + 1 - \upsilon)} \int_0^t (t - \tau)^{\lfloor \upsilon \rfloor - \upsilon} f^{(\lfloor \upsilon \rfloor - \upsilon)}(\tau) d\tau \tag{2.14}$$

Il faut noter que la fonction $(t - \tau)^{\lfloor \upsilon \rfloor - \upsilon} f^{(\lfloor \upsilon \rfloor - \upsilon)}(t)$ doit être intégrable sur $[0, t]$ pour que la dérivée de Caputo existe.

### 2.3.3 Définition de Grünwald

La dérivée d'ordre réel $\upsilon \in \mathbb{R}_+^*$ d'une fonction temporelle $f$, au sens de Grünwald, découle de la définition de Cauchy d'une dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ (voir e.g. [Aoun, 2005]) :

$$D_G^{\upsilon} f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\upsilon}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\upsilon}{k} f(t - kh) \tag{2.15}$$

où $h$ est la période d'échantillonnage et $\binom{\upsilon}{k}$ est le binôme de Newton généralisé à des nombres réels :

$$\binom{\upsilon}{k} = \frac{\Gamma(\upsilon + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\upsilon - k + 1)} = \frac{\upsilon(\upsilon - 1)...(\upsilon - k + 1)}{k!} \tag{2.16}$$

avec $\binom{\upsilon}{k} = 0$ lorsque $\upsilon - k = -1, -2, -3, ...$

Pour $h$ suffisamment petit, la dérivée d'ordre $\upsilon$ d'une fonction $f(t)$ au sens de Grünwald est approchée par :

$$D_G^{\upsilon} f(t) = \frac{1}{h^{\upsilon}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\upsilon}{k} f(t - kh) \tag{2.17}$$

Si la fonction $f$ est nulle pour tout $t < 0$, sa dérivée non entière au sens de Grünwald peut être réécrite sous la forme suivante :

$$D_G^{\upsilon} f(t) = \frac{1}{h^{\upsilon}} \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \binom{\upsilon}{k} f(t - kh) \tag{2.18}$$

avec $K = \left\lfloor \frac{t - t_0}{h} \right\rfloor$.

Il est important de noter que l'erreur d'approximation de la dérivée non entière selon la définition de Grünwald est de l'ordre de la période d'échantillonnage $h$ [Podlubny, 1999].

### 2.3.4 Généralisation de la définition de Grünwald

La dérivée d'ordre réel $\upsilon \in \mathbb{R}_+^*$ d'une fonction temporelle $f$, est définie par :

$$D^{\upsilon} f(t) = p^{\upsilon} f(t) \tag{2.19}$$

où $p$ désigne l'opérateur différentiel ($D = \left(\frac{d}{dt}\right) = p$). Cette dérivée peut être évaluée en utilisant la définition de Grünwald (2.18), ce qui permet de réécrire l'équation (2.19) comme suit :

$$D^{\upsilon} f(t) = D_G^{\upsilon} f(t) + \mathcal{O}(h) \tag{2.20}$$

L'erreur d'approximation est de l'ordre de $h$ [Podlubny, 1999]. Afin de réduire cette erreur, nous proposons une généralisation de la définition de Grünwald. Elle consiste à utiliser le développement limité de l'opérateur différentiel $p^{\upsilon}$, soit :

$$p^{\upsilon} = \sum_{l=1}^{L} A_l \left(\frac{1 - e^{-hp}}{h}\right)^{\upsilon+l-1} h^{l-1} + \mathcal{O}(h^L) \tag{2.21}$$

où $L$ désigne l'ordre du développement limité $\left(L \in \mathbb{N}_+^*\right)$ et les coefficients $A_l$ sont des constantes calculées en fonction de l'ordre de dérivation non entière $\upsilon$.

***Preuve :*** voir Annexe A.

Les coefficients $A_l$, pour $l = 1, ..., 10$, s'expriment de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 1 \\
A_2 &= \frac{\upsilon}{2} \\
A_3 &= \frac{\upsilon^2}{8} + \frac{5\upsilon}{24} \\
A_4 &= \frac{\upsilon^3}{48} + \frac{5\upsilon^2}{48} + \frac{\upsilon}{8} \\
A_5 &= \frac{\upsilon^4}{384} + \frac{5\upsilon^3}{192} + \frac{97\upsilon^2}{1152} + \frac{251\upsilon}{2880} \\
A_6 &= \frac{\upsilon^5}{3840} + \frac{5\upsilon^4}{1152} + \frac{61\upsilon^3}{2304} + \frac{401\upsilon^2}{5760} + \frac{19\upsilon}{288} \\
A_7 &= \frac{\upsilon^6}{46080} + \frac{5\upsilon^5}{9216} + \frac{49\upsilon^4}{9216} + \frac{10543\upsilon^3}{414720} + \frac{815\upsilon^2}{13824} + \frac{19087\upsilon}{362880} \\
A_8 &= \frac{\upsilon^7}{645120} + \frac{\upsilon^6}{18432} + \frac{43\upsilon^5}{55296} + \frac{4831\upsilon^4}{829440} + \frac{331\upsilon^3}{13824} + \frac{73937\upsilon^2}{1451520} + \frac{751\upsilon}{17280} \\
A_9 &= \frac{\upsilon^8}{10321920} + \frac{\upsilon^7}{221184} + \frac{197\upsilon^6}{2211840} + \frac{1589\upsilon^5}{1658880} + \frac{48217\upsilon^4}{7962624} + \frac{104105\upsilon^3}{4644864} + \\
&\quad \frac{15583301\upsilon^2}{348364800} + \frac{1070017\upsilon}{29030400} \\
A_{10} &= \frac{\upsilon^9}{185794560} + \frac{\upsilon^8}{3096576} + \frac{37\upsilon^7}{4423680} + \frac{6067\upsilon^6}{49766400} + \frac{17377\upsilon^5}{15925248} + \\
&\quad \frac{853277\upsilon^4}{139345920} + \frac{14603861\upsilon^3}{696729600} + \frac{770429\upsilon^2}{19353600} + \frac{2857\upsilon}{89600}
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Ainsi, à partir de l'équation (2.19) et d'une façon générale, la dérivée d'ordre réel $\upsilon \in \mathbb{R}_+^*$ d'une fonction temporelle $f(t)$ au sens de Grünwald généralisée à l'ordre $L$ s'écrit :

$$
D_{G_L}^{\upsilon} f(t) = \sum_{l=1}^{L} A_l \, D_G^{\upsilon+l-1} f(t) \, h^{l-1} + \mathcal{O}(h^L) \tag{2.23}
$$

Il est possible de vérifier que l'équation (2.20), qui exprime la définition de Grünwald, est un cas particulier de l'équation (2.23) obtenue pour $L = 1$ $\left(D_{G_1}^{\upsilon} = D_G^{\upsilon}\right)$. Ainsi, pour $L = 2$, la dérivée s'écrit :

$$
D_{G_2}^{\upsilon} f(t) = D_G^{\upsilon} f(t) + \frac{\upsilon}{2} h \, D_G^{\upsilon+1} f(t) + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.24}
$$

Nous allons maintenant réaliser une étude comparative entre la définition classique de Grünwald et la définition généralisée à l'aide de deux exemples.

**Exemple 1 :**

Soit la fonction temporelle $f(t) = \sin(t)$. La forme analytique de la dérivée non entière d'ordre $\upsilon$ est définie par [Podlubny, 1999] :

$$
D^{\upsilon} f(t) = D^{\upsilon} \sin(t) = \sin(t + \upsilon \frac{\pi}{2}) \tag{2.25}
$$

**Remarque 2.1** *L'équation (2.25) est valable pour une définition de la dérivée non entière de $-\infty$ à $t$, c.-à.-d en remplaçant la borne inférieure des dérivées de Riemann (2.12) et de Caputo (2.14) par $-\infty$ ou en utilisant la définition de Grünwald (2.17) (et non pas (2.18)). Cependant, en simulation une partie du passé ($]-\infty, 0[$) est ignorée, ce qui justifie la présence d'une erreur importante au transitoire (au voisinage de 0).*

En utilisant la définition de Grünwald généralisée, la dérivée non entière d'ordre $\upsilon$ de la fonction $f(t)$ est donnée par :

$$D^{\upsilon}_{G_L} \sin(t) = \sum_{l=1}^{L} A_l \, D^{\upsilon+l-1}_{G} \sin(t) \, h^{l-1} + \mathcal{O}(h^L) \tag{2.26}$$

Dans cet exemple, le niveau de généralisation est limité à $L = \{1, ..., 4\}$.

La figure 2.3 montre l'évolution des valeurs de la dérivée non entière de la fonction $f(t) = \sin(t)$ en utilisant la définition de Grünwald généralisée à $L = \{1, ..., 4\}$. La dérivée est évaluée pour un ordre de dérivation $\upsilon = 0.3$ et un pas d'échantillonnage $h = 0.1$.

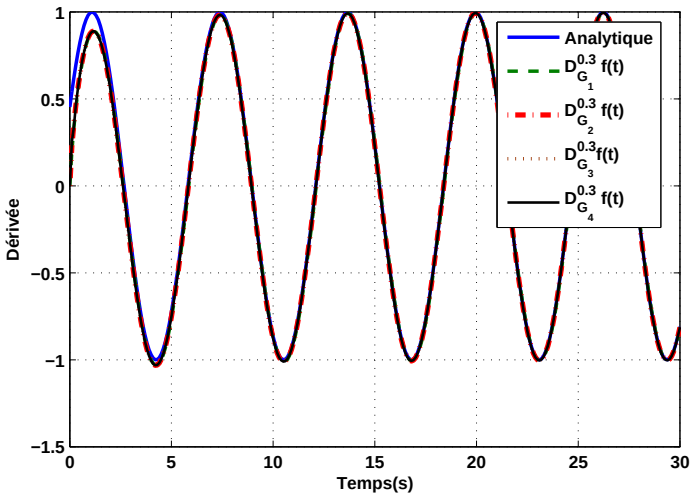



Figure 2.3 – Dérivée analytique de $\sin(t)$ et ses approximations au sens de Grünwald ($\upsilon = 0.3$, $h = 0.1$ et $L = \{1, ..., 4\}$).

Pour $t$ grand, les différentes approximations donnent des valeurs très proches des valeurs exactes de la dérivée non entière d'ordre $\upsilon$ de $f(t)$ comme le montre la figure 2.4.

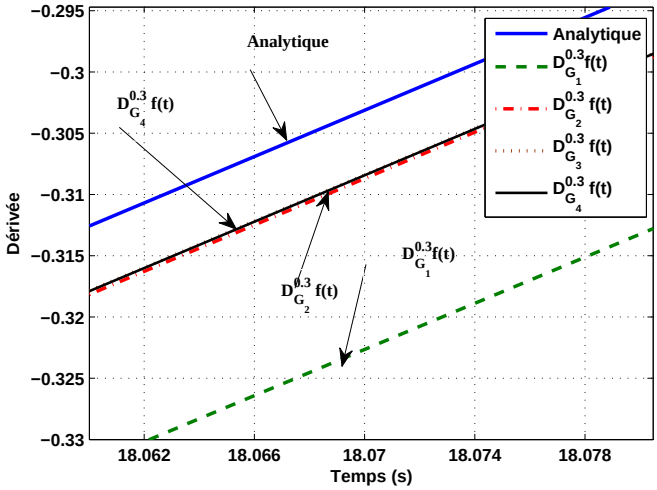



Figure 2.4 – Zoom sur la dérivée non entière de la fonction $\sin(t)$ et ses approximations au sens de Grünwald ($\upsilon = 0.3$, $h = 0.1$ et $L = \{1, ..., 4\}$) dans l'intervalle de temps [18.06 18.08].

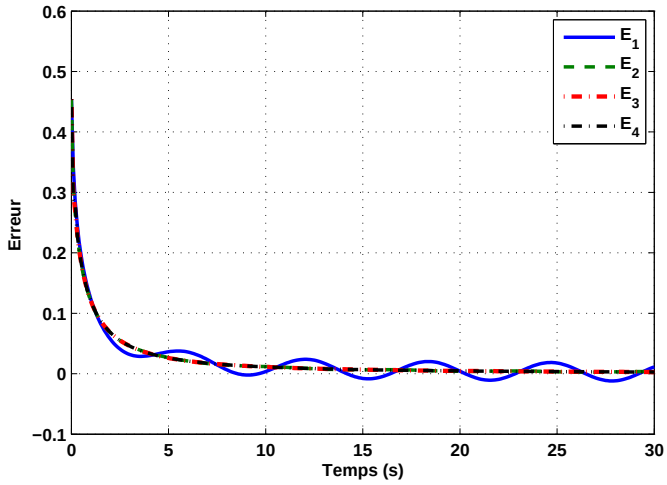



Figure 2.5 – Erreurs entre la dérivée analytique de la fonction $\sin(t)$ et ses différentes approximations au sens de Grünwald ($\upsilon = 0.3$, $h = 0.1$ et $L = \{1, ..., 4\}$).

La figure 2.5 présente les différentes erreurs d'approximation entre la dérivée analytique de $f(t)$ ($D^{0.3}\sin(t)$) et les dérivées numériques calculées au sens de Grünwald $\left(D^{0.3}_{G_L}\sin(t), L = \{1, ..., 4\}\right)$ :

$$E_L = D^{0.3}\sin(t) - D^{0.3}_{G_L}\sin(t),\ \ L = 1, .., 4 \tag{2.27}$$

Un zoom sur les différentes erreurs d'approximation montre que l'évaluation de la dérivée de $f(t)$ en utilisant la définition de Grünwald généralisée donne des dérivées plus proches de la dérivée analytique de la fonction $\sin(t)$ que celle de Grünwald classique.

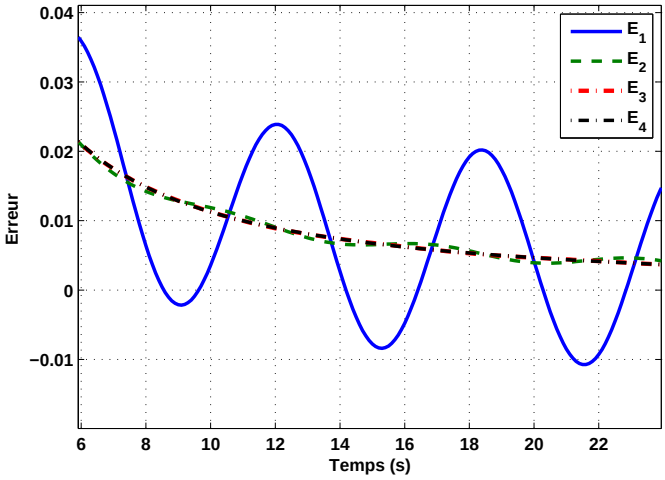



Figure 2.6 – Zoom sur l'erreur entre la dérivée analytique de la fonction $\sin(t)$ et ses différentes approximations au sens de Grünwald ($\upsilon = 0.3$, $h = 0.1$ et $L = \{1, ..., 4\}$).

Pour analyser l'amélioration par l'approximation issue de la définition de Grünwald généralisée lorsque $L$ augmente, les différents ajustements (FIT) sont calculés et présentés au tableau 2.1. Le FIT est défini par :

$$FIT = 100 \times \left( 1 - \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_t} \left( D^{0.3} \sin(t) - D_{GL}^{0.3} \sin(t) \right)^2}{\sum_{k=1}^{N_t} \left( D^{0.3} \sin(t) - \overline{D^{0.3} \sin(t)} \right)^2}} \right) \tag{2.28}$$

où $N_t$ est l'horizon de simulation. Il convient de noter qu'à partir d'un seuil de $L$ l'amélioration de l'approximation n'est plus significative.

Tableau 2.1 – Différents FIT obtenus par l'approximation de la fonction $\sin(t)$ ($\upsilon = 0.3$, $h = 0.1$s et $L = \{1, ..., 4\}$).

| Dérivée | $D_{G_1}^{0.3} \sin(t)$ | $D_{G_2}^{0.3} \sin(t)$ | $D_{G_3}^{0.3} \sin(t)$ | $D_{G_4}^{0.3} \sin(t)$ |
|---|---|---|---|---|
| FIT | 92.693 | 93.012 | 93.025 | 93.025 |

**Exemple 2 :**

Soit la fonction temporelle $f(t) = \exp(\varsigma t) \sin(t)$. Sa dérivée analytique d'ordre non entier $\upsilon$ est définie par [Podlubny, 1999] :

$$D^{\upsilon} f(t) = (1 + \varsigma^2)^{\frac{1}{2}+\upsilon} \exp(\varsigma t) \sin\left( t + \arctan\left( \frac{1}{\varsigma} \right) \upsilon \right) \tag{2.29}$$

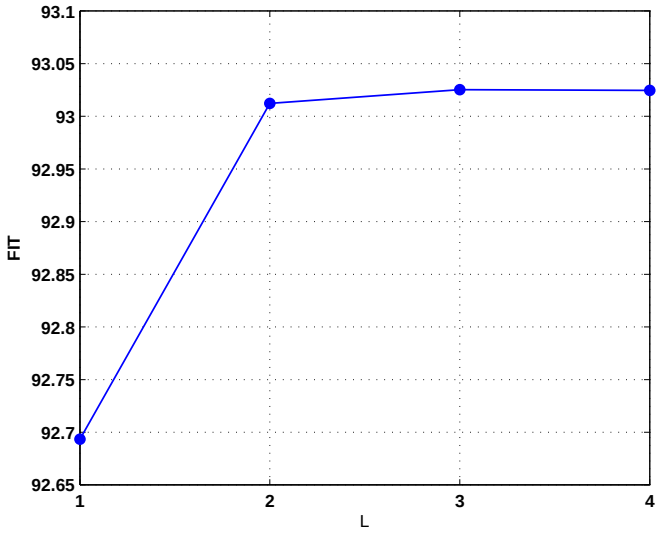



Figure 2.7 – Différents FIT obtenus par l'approximation de la fonction $\sin(t)$ en fonction de $L$ ($\upsilon = 0.3$, $h = 0.1$s et $L = \{1, ..., 4\}$).

Dans cet exemple $\varsigma = 0.1$, la dérivée de la fonction $f(t)$ est évaluée à l'ordre $\upsilon = 0.5$ et deux pas d'échantillonnage sont choisis à $h = 0.1$ et $h = 0.01$.

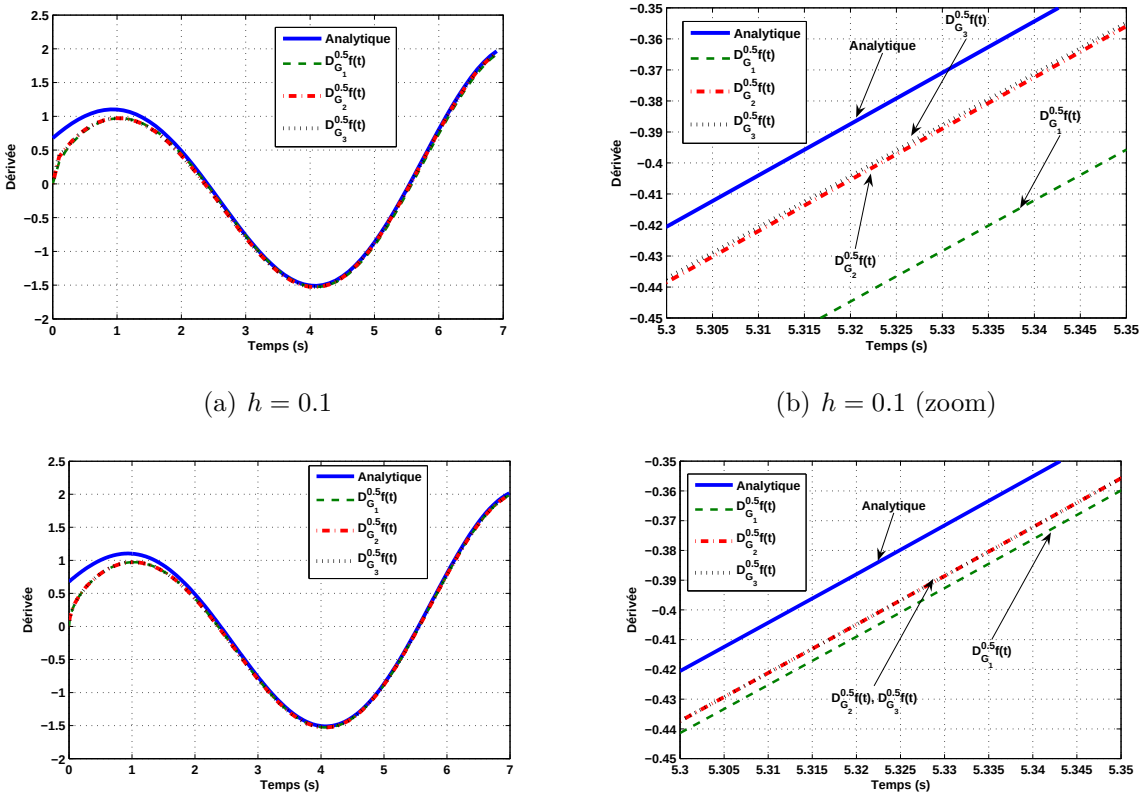
**Remarque 2.2** *L'équation (2.29) est valable pour une définition de la dérivée non entière de $-\infty$ à $t$, c.-à.-d en remplaçant la borne inférieure des dérivées de Riemann (2.12) et de Caputo (2.14) par $-\infty$ ou en utilisant la définition de Grünwald (2.17) (et non pas (2.18)). Cependant, en simulation une partie du passé ($]-\infty, 0[$) est ignorée, ce qui justifie la présence d'une erreur importante au transitoire (au voisinage de 0).*

La figure 2.8 présente l'évolution de la dérivée analytique de la fonction $f(t)$ ainsi que ses approximations au sens de Grünwald pour trois niveaux de généralisation $L = \{1, 2, 3\}$. Lorsque $L$ augmente, l'approximation de la dérivée non entière de $f(t)$ au sens de Grünwald devient plus proche de la dérivée analytique (ce résultat est vérifié pour $h = 0.1$ et $h = 0.01$).

L'erreur d'approximation est définie par :

$$E_L = D^{0.5} f(t) - D^{0.5}_{G_L} f(t), \quad L = 1, 2, 3 \tag{2.30}$$

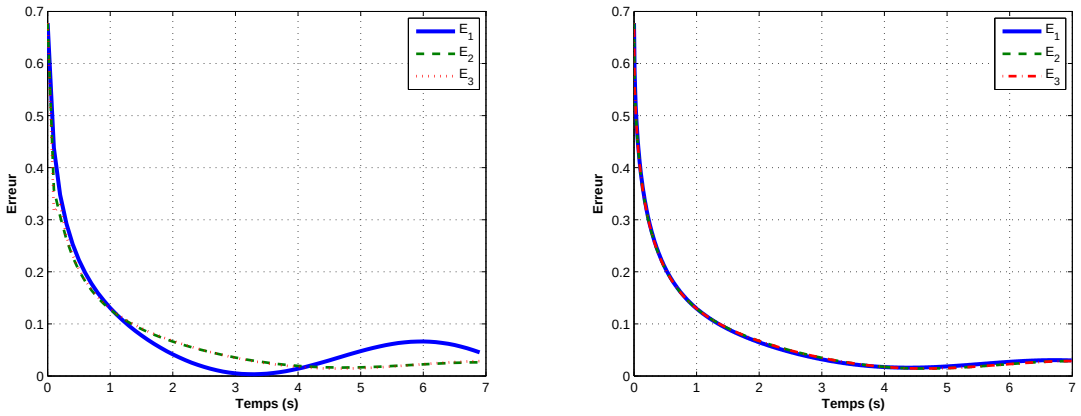
Étant donné que l'approximation de la dérivée non entière au sens de Grünwald est basée sur le principe des différences finies, l'influence du pas d'échantillonnage sur l'erreur d'approximation est étudiée et présentée sur la figure 2.9 qui révèle que plus la valeur de $h$ est petite, meilleure est l'approximation.




(a) $h = 0.1$ (b) $h = 0.1$ (zoom)

(c) $h = 0.01$ (d) $h = 0.01$ (zoom)

Figure 2.8 – Dérivée non entière de la fonction $f(t) = \exp(\varsigma t)\sin(t)$ et ses approximations au sens de Grünwald ($\upsilon = 0.5$, $\varsigma = 0.1$ et $L = \{1, 2, 3\}$).




(a) $h = 0.1$ (b) $h = 0.01$

Figure 2.9 – Erreurs entre la dérivée analytique de la fonction $f(t) = \exp(\varsigma t)\sin(t)$ et ses approximations au sens de Grünwald ($\upsilon = 0.5$, $\varsigma = 0.1$ et $L = \{1, 2, 3\}$).

Les différents FIT calculés pour $h = 0.1$ et $h = 0.01$ sont présentés respectivement au

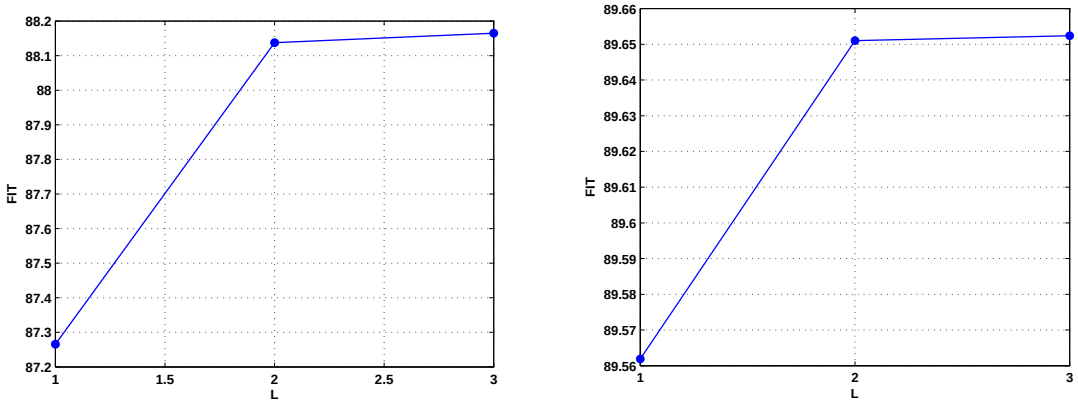
tableau 2.2 et 2.3 et tracés en fonction du niveau de généralisation $L$ sur la figure 2.10. Il est clair que lorsque $L$ augmente, la qualité de l'approximation s'améliore ce que justifie l'avantage de la généralisation de la définition de Grünwald.

Tableau 2.2 – Différents FIT obtenus par l'approximation de la fonction $f(t) = \exp(\varsigma t)\sin(t)$ ($h = 0.1$, $\upsilon = 0.5$ $\varsigma = 0.1$ et $L = \{1, ..., 3\}$).

| Dérivée | $D^{0.5}_{G_1} f(t)$ | $D^{0.5}_{G_2} f(t)$ | $D^{0.5}_{G_3} f(t)$ |
|---|---|---|---|
| FIT | 87.266 | 88.137 | 88.165 |

Tableau 2.3 – Différents FIT obtenus par l'approximation de la fonction $f(t) = \exp(\varsigma t)\sin(t)$ ($h = 0.01$, $\upsilon = 0.5$ $\varsigma = 0.1$ et $L = \{1, ..., 3\}$).

| Dérivée | $D^{0.5}_{G_1} f(t)$ | $D^{0.5}_{G_2} f(t)$ | $D^{0.5}_{G_3} f(t)$ |
|---|---|---|---|
| FIT | 89.562 | 89.650 | 89.652 |




(a) $h = 0.1$ (b) $h = 0.01$

Figure 2.10 – Différents FIT obtenus par l'approximation de la fonction $f(t) = \exp(\varsigma t)\sin(t)$ en fonction de $L$ ($\upsilon = 0.5$, $\varsigma = 0.1$ et $L = \{1, 2, 3\}$).

En termes de conclusion, la généralisation de la définition de Grünwald a permis d'améliorer la précision et diminuer l'erreur d'approximation. En effet, plus le niveau de généralisation augmente plus l'erreur d'approximation diminue. Par contre, d'un point de vue temps d'exécution qui constitue un critère clé dans le choix d'une méthode de simulation de systèmes non entiers, l'approximation de Grünwald généralisée est sensible au niveau de généralisation et au pas d'intégration.

### 2.3.5 Transformée de Laplace de la dérivée non entière d'une fonction temporelle

La transformée de Laplace de la dérivée non entière d'une fonction temporelle $f$, au sens de Riemann, est définie par [Miller et Ross, 1993] :

$$\mathscr{L}\left(D_R^{\upsilon} f(t)\right) = s^{\upsilon} F(s) - \sum_{k=0}^{\lfloor \upsilon \rfloor} s^k D_R^{\upsilon-k-1} f(t)\Big|_{t=0} \tag{2.31}$$

La transformée de Laplace de la dérivée non entière d'une fonction temporelle $f$, au sens de Caputo, est donnée par :

$$\mathscr{L}\left(D_C^{\upsilon} f(t)\right) = s^{\upsilon} F(s) - \sum_{k=0}^{\lfloor \upsilon \rfloor} s^{\upsilon-k-1} \frac{d^k}{dt^k}\left(f(t)\right)\Big|_{t=0} \tag{2.32}$$

Les conditions initiales définies dans (2.31) et (2.32) sont différentes. En effet, les conditions initiales de la transformée de Laplace de la dérivée non entière au sens de Riemann, s'expriment en fonction des valeurs à l'origine des dérivées non entières. Alors que les conditions initiales de la transformée de Laplace de la dérivée non entière au sens de Caputo, s'expriment en fonction des valeurs à l'origine des dérivées entières.

Si la fonction temporelle $f$ est causale, c.-à-d. $f(t) = 0$ quand $t \leq 0$, les conditions initiales s'annulent et les transformées de Laplace de ses dérivées au sens de Riemann et Caputo se réduisent indifféremment à :

$$\mathscr{L}\left(D^{\upsilon} f(t)\right) = s^{\upsilon} F(s) \tag{2.33}$$

### 2.3.6 Caractéristiques fréquentielles de la dérivation non entière

Un dérivateur non entier est défini tel que sa grandeur de sortie $y(t)$ est, à un facteur près, la dérivée non entière de sa grandeur d'entrée $u(t)$, soit :

$$y(t) = \tau^{\upsilon} D^{\upsilon} u(t) \tag{2.34}$$

où $\tau$ est la constante de temps de différentiation. Pour des conditions initiales nulles, la transformée de Laplace de l'équation (2.34), permet d'écrire :

$$Y(s) = \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^{\upsilon} U(s) = D(s)U(s) \tag{2.35}$$

où $\omega_u$ désigne la fréquence de transition et $D(s)$ est la transmittance.

Les caractéristiques fréquentielles de l'opérateur de dérivation non entier sont obtenues en remplaçant l'opérateur de Laplace $s$ par $j\omega$ dans la transmittance $D(s)$, soit :

$$D(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_u}\right)^{\upsilon} \tag{2.36}$$

De ce fait sont définis le module et la phase du dérivateur non entier :

$$\begin{cases} \text{module(dB)} = 20\log|D(j\omega)| = 20\log\left|\left(\dfrac{j\omega}{\omega_u}\right)^{\upsilon}\right| = 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_u}\right) \\ \text{phase(rad)} = \arg(D(j\omega)) = \arg\left(\left(\dfrac{j\omega}{\omega_u}\right)^{\upsilon}\right) = \upsilon\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{2.37}$$

L'analyse de ce système d'équations permet de décrire la représentation des diagrammes de Bode du dérivateur non entier, tels que :

- le diagramme de gain est représenté par une droite oblique de pente $20\upsilon$ dB/décade ;
- le diagramme de phase est représenté par une droite horizontale d'ordonnée $\upsilon\dfrac{\pi}{2}$.

La figure (2.11) représente les diagrammes de Bode d'un dérivateur non entier pour différents ordres $\upsilon$ ($\omega_u = 1$).

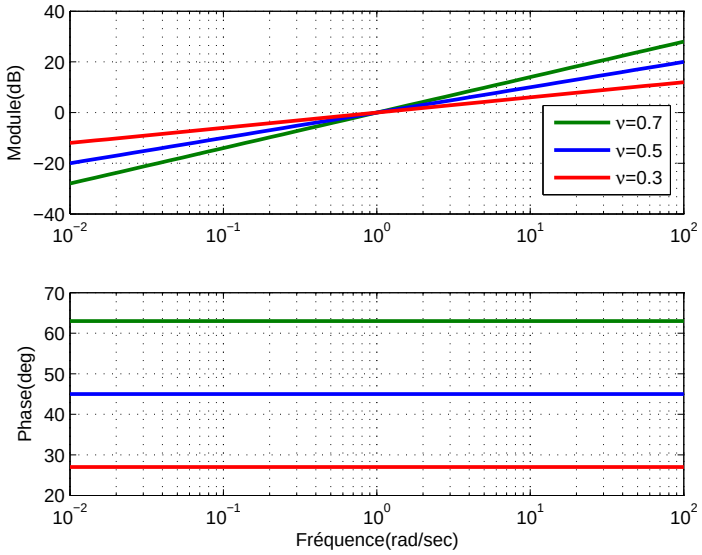



Figure 2.11 – Diagrammes de Bode d'un dérivateur non entier.

## 2.4 Représentation des systèmes non entiers

Dans ce mémoire, les systèmes sont considérés monovariables, linéaires, à temps continu, invariants dans le temps, non entiers et causaux. Ces systèmes peuvent être représentés de plusieurs façons à savoir :

- équation différentielle
- fonction de transfert
- représentation d'état

### 2.4.1 Equation différentielle

Un système linéaire non entier monovariable peut être représenté par une équation différentielle non entière de la forme suivante :

$$y(t) + \sum_{n=1}^{N} a_n D^{\alpha_n} y(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m D^{\beta_m} u(t) \tag{2.38}$$

où $u(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système, les coefficients qui multiplient les opérateurs différentiels sont supposés réels $(a_n, b_m) \in \mathbb{R}^2$ et les ordres de dérivation sont supposés réels positifs et ordonnés :

$$0 < \alpha_1 < ... < \alpha_N \quad ; \quad 0 \leq \beta_0 < ... < \beta_M$$

.

Comme pour les systèmes entiers, les ordres de dérivation vérifient la contrainte $\alpha_N > \beta_M$ pour que le système soit strictement propre.

### 2.4.2 Fonction de transfert

La fonction de transfert non entière est obtenue en appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle (2.38) :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^{\beta_m}}{1 + \sum_{n=1}^{N} a_n s^{\alpha_n}} \tag{2.39}$$

#### 2.4.2.1 Forme commensurable

**Définition 2.1** *Un ordre commensurable $\upsilon \in \mathbb{R}_+^*$ d'un ensemble de nombres réels $E = \{\alpha_n, \beta_m\}_{\substack{n=1,...,N \\ m=0,...,M}}$ correspond au plus grand nombre tel que tous les nombres réels de cet ensemble $E$ soient ses multiples entiers. L'ordre commensurable existe toujours lorsque $E$ est constitué de nombres rationnels $E \subset \mathbb{Q}$. Il peut ne pas exister lorsqu'il est constitué de nombres réels. Il vaut 1 pour les systèmes entiers.*

**Définition 2.2** *Une fonction de transfert est dite commensurable à un ordre $\upsilon$ si tous les ordres de dérivation sont des multiples entiers d'un ordre commensurable $\upsilon \in \mathbb{R}_+^*$.*

Si la fonction de transfert non entière définie par l'équation (2.39) est commensurable à l'ordre $\upsilon$, elle peut être réécrite sous la forme suivante :

$$H(s) = \frac{Q(s^{\upsilon})}{P(s^{\upsilon})} = \frac{\sum_{i=0}^{m} \tilde{b}_i s^{i\upsilon}}{1 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j s^{j\upsilon}} \tag{2.40}$$

où $m = \dfrac{\beta_M}{\upsilon}$ et $n = \dfrac{\alpha_N}{\upsilon}$ sont deux nombres entiers et les coefficients linéaires $\tilde{b_{i'}}$ , $\tilde{a_{j'}}$ sont définis tels que $\forall i' \in \{0, 1, \ldots, m\}, \forall j' \in \{1, \ldots, n\}$ :

$$\begin{cases} \tilde{b_{i'}} = b_i \text{ si } \exists i \in \{0, 1, \ldots, M\} \text{ tel que } i'\upsilon = \beta_i \\ \tilde{b_{i'}} = 0 \text{ sinon} \\ \tilde{a_{j'}} = a_j \text{ si } \exists j \in \{1, \ldots, N\} \text{ tel que } j'\upsilon = \alpha_j \\ \tilde{a_{j'}} = 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2.41}$$

La fonction de transfert définie par l'équation (2.40) est rationnelle en $s^{\upsilon}$ et $Q(s^{\upsilon})$ et $P(s^{\upsilon})$ sont deux polynômes à puissances entières dont les racines sont appelées respectivement les zéros en $s^{\upsilon}$ et les pôles en $s^{\upsilon}$ de la fonction de transfert $H(s)$.

#### 2.4.2.2 Forme modale factorisée

Selon les zéros et les pôles de la fonction de transfert non entière, deux niveaux de généralisation peuvent exister.

Dans un premier niveau de généralisation, les zéros et les pôles en $s^{\upsilon}$ sont associés indifféremment au même ordre commensurable $\upsilon$ et la fonction de transfert s'écrit comme suit :

$$H(s) = G_0 \frac{\prod_{k_z=1}^{N_z} (s^{\upsilon} - z_{k_z})^{q_{k_z}}}{\prod_{k_p=1}^{N_p} (s^{\upsilon} - p_{k_p})^{q_{k_p}}};\ (q_{k_z}, q_{k_p}) \in \mathbb{N}^2 \tag{2.42}$$

où $G_0$ désigne le gain de la fonction de transfert et $z_{k_z}$, $p_{k_p}$ désignent respectivement les zéros et les pôles en $s^{\upsilon}$ de multiplicités respectives $q_{k_z}$, $q_{k_p}$.

Dans le deuxième niveau de généralisation, la fonction de transfert s'écrit comme suit :

$$H(s) = G_0 \frac{\prod_{k_z=1}^{N_z} (s^{\upsilon_{k_z}} - z_{k_z})^{q_{k_z}}}{\prod_{k_p=1}^{N_p} (s^{\upsilon_{k_p}} - p_{k_p})^{q_{k_p}}};\ (q_{k_z}, q_{k_p}) \in \mathbb{N}^2 \tag{2.43}$$

où $z_{k_z}$, $p_{k_p}$ désignent respectivement les zéros en $s^{\upsilon_{k_z}}$ et les pôles en $s^{\upsilon_{k_p}}$ de multiplicités respectives $q_{k_z}$, $q_{k_p}$.

#### 2.4.2.3 Forme modale développée

Selon les modes propres du système, deux niveaux de généralisation de la fonction de transfert non entière sont définis là aussi.

**Définition 2.3** *Un mode propre de multiplicité $q_k$ est définie comme étant une fonction de transfert élémentaire de la forme suivante :*

$$\mathscr{M}_k(s,\upsilon) = \frac{A_k}{(s^\upsilon - p_k)^{q_k}} \tag{2.44}$$

*où $A_k$ désigne le gain et $p_k$ désigne le pôle en $s^\upsilon$ de la fonction de transfert élémentaire de multiplicité entière $q_k$.*

Dans le premier niveau de généralisation, la fonction de transfert non entière est définie par :

$$H(s) = \sum_{k=1}^{N_p} \mathscr{M}_k(s,\upsilon) = \sum_{k=1}^{N_p} \frac{A_k}{(s^\upsilon - p_k)^{q_k}} \tag{2.45}$$

Dans le deuxième niveau de généralisation, la fonction de transfert non entière est définie par :

$$H(s) = \sum_{k=1}^{N_p} \mathscr{M}_k(s,\upsilon_k) = \sum_{k=1}^{N_p} \frac{A_k}{(s^{\upsilon_k} - p_k)^{q_k}} \tag{2.46}$$

### 2.4.3 Représentation d'état

Comme pour les systèmes non entiers, la représentation d'état d'un système non entier comporte principalement deux équations :

- une équation d'état non entière qui fait apparaître la dérivée non entière du vecteur d'état ;
- une équation d'observation où la sortie est exprimée comme une combinaison linéaire de l'état.

Si les ordres de dérivations de toutes les équations différentielles élémentaires sont égaux à l'ordre commensurable $\upsilon$, la représentation d'état non entière est alors de la forme suivante :

$$\begin{cases} D^\upsilon x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{2.47}$$

avec :

- $u(t)$ est le vecteur d'entrée ;
- $x(t)$ est le vecteur d'état ;
- $y(t)$ est le vecteur de sortie ;

– $\upsilon$ est l'ordre commensurable ;

– $A$, $B$ et $C$ sont respectivement la matrice d'évolution, de commande et de sortie.

Si les ordres de dérivation des équations différentielles élémentaires sont différents, la représentation d'état est alors de la forme suivante :

$$\begin{cases} x^{(\gamma)}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{2.48}$$

où $\gamma$ est un vecteur qui contient les différents ordres de dérivation des équations élémentaires qui définissent le système non entier.

**Remarque 2.3** *La dimension de la matrice d'évolution $A$ est inversement proportionnelle à l'ordre commensurable $\upsilon$ : $dim(A) = \frac{\alpha_N}{\upsilon}$. La représentation de dimension minimale est obtenue pour l'ordre commensurable $\upsilon$.*

**Remarque 2.4** *Le passage de la représentation d'état (2.47) à la fonction de transfert non entière se fait comme dans le cas entier :*

$$H(s) = C(s^{\upsilon}I - A)^{-1}B \tag{2.49}$$

## 2.5 Stabilité des systèmes non entiers

Pendant les dernières décennies une attention considérable a été consacrée au problème de l'analyse de la stabilité des différentes classes de systèmes dynamiques. En ce qui concerne les conditions de stabilité des systèmes non entiers développées dans la littérature, le lecteur pourra se référer à [Aoun, 2005; Matignon, 1998; Sabatier *et al.*, 2007; Trigeassou *et al.*, 2011]. Le critère de stabilité le plus connu pour les systèmes non entiers est celui de *Matignon* [Matignon, 1998]. Il concerne, en particulier, les systèmes non entiers commensurables d'ordre $\upsilon$ compris entre 0 et 1. Ce critère repose sur l'étude des pôles en $s^{\upsilon}$. Le critère de Matignon a été étendu par la suite par *Aoun* [Aoun, 2005] pour des ordres commensurables quelconques.

**Théorème 2.1** *(Théorème de stabilité)*

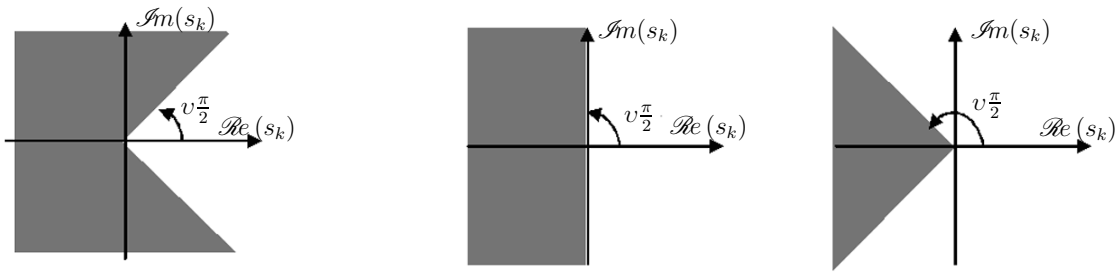
*Un système non entier commensurable à l'ordre $\upsilon$, représenté par la forme rationnelle irréductible $\frac{Q(s^{\upsilon})}{P(s^{\upsilon})}$ de sa fonction de transfert, est BIBO stable ssi :*

$$0 < \upsilon < 2 \tag{2.50}$$

*et*

$$\forall s_k \in \mathbb{C}, \quad Q(s_k^{\upsilon}) = 0 \text{ tel que } |\arg(s_k)| > \upsilon\frac{\pi}{2} \tag{2.51}$$

La figure 2.12 montre les régions de stabilité pour différents ordres commensurables ($\upsilon < 1$, $\upsilon = 1$ et $\upsilon > 1$) [Aoun, 2005]. Pour que le système soit stable, les arguments des pôles en $s^{\upsilon}$ doivent être dans la partie grisée. Pour un ordre entier $\upsilon = 1$, le critère de *Matignon* est équivalent à celui de *Routh-Hurwitz*. En effet, le système est BIBO stable si tous les pôles sont situés dans le demi-plan complexe gauche. Par ailleurs, lorsque l'ordre commensurable augmente la région de stabilité diminue et vise versa. Pour un ordre commensurable $\upsilon > 2$, la région de stabilité est un ensemble vide. Le système est alors instable quelle que soit la valeur de ses pôles en $s^{\upsilon}$.




a) $\upsilon < 1$ b) $\upsilon = 1$ c) $\upsilon > 1$

Figure 2.12 – Régions de stabilité pour différents ordres commensurables : $\upsilon < 1$, $\upsilon = 1$ et $\upsilon > 1$.

## 2.6 Simulation des systèmes non entiers

La problématique principale de la simulation temporelle des systèmes non entiers est que l'évaluation de la sortie nécessite la connaissance de tout le passé qui est cependant difficile à prendre en compte. De ce fait, la simulation des systèmes non entiers a attiré l'attention de plusieurs chercheurs pendant les dernières décennies [Aoun, 2005; Ichise *et al.*, 1971; Lin, 2001; Oustaloup, 1995].

Les deux approches de simulation temporelle des systèmes non entiers les plus utilisées dans la littérature sont présentées dans cette section. La première approche est fondée sur le remplacement de chaque opérateur de dérivation non entière par une distribution de pôles et zéros récursifs afin d'obtenir un modèle entier continu. La deuxième approche est fondée sur une approximation numérique discrète issue de la définition de Grünwald afin d'obtenir un modèle entier discret. Par la suite, une nouvelle approche est présentée. Elle généralise la deuxième approche en remplaçant chaque dérivée non entière par son approximation issue de la définition de Grünwald généralisée.

### 2.6.1 Approche fondée sur l'approximation par pôles et zéros récursifs de l'opérateur de dérivation non entier

L'objectif de cette méthode est d'approcher l'opérateur d'intégration ou de dérivation non entier par un modèle entier borné en fréquence de dimension finie. Cette approximation nécessite deux étapes [Aoun, 2005] :

- une étape de troncature fréquentielle de l'opérateur d'intégration ou de dérivation non entière ;
- une étape d'approximation de l'opérateur d'intégration ou de dérivation non entier borné en fréquence par un modèle entier.

La première étape consiste à introduire l'opérateur d'intégration borné en fréquence proposé dans [Oustaloup, 1995] par :

$$s^{-\upsilon}_{[w_A,w_B]} = C\left(\frac{1+\frac{s}{w_h}}{1+\frac{s}{w_b}}\right)^{\upsilon}, \qquad -1<\upsilon<1 \tag{2.52}$$

où $w_b < w_h$ et $C$ est obtenu afin d'avoir un gain unitaire au centre de l'intervalle $[w_A,\ w_B]$.

$$\left|(jw_c)^{-\upsilon}\right| = C\left|\frac{1+j\frac{w_c}{w_h}}{1+j\frac{w_c}{w_b}}\right|^{\upsilon} \tag{2.53}$$

où $w_c = \sqrt{w_b w_h}$.

Les pulsations transitionnelles $w_b$ et $w_h$ sont définies par :

$$w_b = \frac{w_A}{\sigma} \tag{2.54}$$

$$w_h = \sigma w_B \tag{2.55}$$

où $\sigma$ est généralement fixé à 10.
L'élargissement de la bande fréquentielle $[w_A, w_B]$ permet d'éviter le phénomène d'effets de bord et obtenir une bonne approximation de $s^{-\upsilon}$ dans $[w_A, w_B]$.

La deuxième étape consiste à approximer la partie irrationnelle de (2.52) par une distribution récursive de zéros et pôles réels [Oustaloup, 1995] :

$$\left(\frac{1+\frac{s}{w_h}}{1+\frac{s}{w_b}}\right)^{\upsilon} \approx \prod_{k=1}^{N_s}\left(\frac{1+\frac{s}{w_k}}{1+\frac{s}{w_k{}'}}\right) \tag{2.56}$$

où $N_s$ désigne le nombre des pôles et zéros récursifs.

La récursivité des zéros et des pôles est caractérisée par les relations suivantes :

$$\frac{w_k}{w_{k+1}} = \frac{w_k{}'}{w'_{k+1}} = \alpha\eta \tag{2.57}$$

$$\frac{w_k}{w_k^{'}} = \alpha \tag{2.58}$$

$$\frac{w_{k+1}^{'}}{w_k} = \eta \tag{2.59}$$

Les facteurs récursifs $\alpha$ et $\eta$ sont liés à l'ordre de dérivation $\upsilon$ et définis par :

$$\alpha = \left(\frac{w_h}{w_b}\right)^{\upsilon/N_s} \tag{2.60}$$

$$\eta = \left(\frac{w_h}{w_b}\right)^{(1-\upsilon)/N_s} \tag{2.61}$$

L'intérêt de cette méthode d'approximation réside dans sa simplicité de mise en œuvre. Si l'ordre de dérivation $\upsilon > 1$ (respectivement ordre d'intégration $\upsilon < -1$) seule la partie non entière est approchée par un modèle entier.

**Remarque 2.5** *À défaut de l'expression analytique de la réponse indicielle d'un système non entier, la réponse issue de l'approximation par un grand nombre de pôles et zéros récursifs sur une large bande fréquentielle peut être considérée comme sortie de référence.*

### 2.6.2 Approche fondée sur la définition de Grünwald de l'opérateur de dérivation non entier

Cette approche consiste à remplacer chaque opérateur de dérivation non entière dans l'équation différentielle (2.38) par son approximation issue de la définition de Grünwald :

$$D_G^{\upsilon} f(t) = \frac{1}{h^{\upsilon}} \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \binom{\upsilon}{k} f((K-k)h) \tag{2.62}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$y(Kh) + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{h^{\alpha_n}} \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \binom{\alpha_n}{k} y((K-k)h) = \sum_{m=0}^{M} \frac{b_m}{h^{\beta_m}} \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \binom{\beta_m}{k} u((K-k)h) \tag{2.63}$$

La sortie à l'instant $Kh$ est obtenue en isolant $y(Kh)$, soit :

$$y(Kh) = \frac{\sum_{m=0}^{M} \frac{b_m}{h^{\beta_m}} \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \binom{\beta_m}{k} u((K-k)h) - \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{h^{\alpha_n}} \sum_{k=1}^{K} (-1)^k \binom{\alpha_n}{k} y((K-k)h)}{1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{h^{\alpha_n}}} \tag{2.64}$$

La sortie du système dépend ainsi de toutes les entrées et les sorties passées ce qui justifie le caractère global de la dérivation non entière. En dépit de sa simplicité de mise en œuvre, cette méthode de simulation est difficilement implémentable dans le cas de simulation en temps réel à cause d'un horizon de simulation croissant.

### 2.6.3 Approche fondée sur la définition de Grünwald généralisée de l'opérateur de dérivation non entier

Cette approche consiste à remplacer chaque opérateur de dérivation non entière dans l'équation différentielle (2.38) par son approximation issue de la définition de Grünwald généralisée issue de (2.23) :

$$D^{\upsilon}_{G_L} f(t) = \sum_{l=1}^{L} A_l \, D_G^{\upsilon+l-1} f(t) \, h^{l-1} \tag{2.65}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$y(t) + \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{l=1}^{L} A_l D_G^{\alpha_n+l-1} y(t) \, h^{l-1} = \sum_{m=0}^{M} b_m \sum_{l=1}^{L} A_l D_G^{\beta_m+l-1} u(t) \, h^{l-1} \tag{2.66}$$

En remplaçant chaque dérivée de Grünwald par son expression (2.62), l'équation (2.66) se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} &y(Kh) + \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{l=1}^{L} A_l \, h^{l-1} \frac{1}{h^{\alpha_n+l-1}} \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \binom{\alpha_n + l - 1}{k} y((K-k)h) \; = \\ &\sum_{m=0}^{M} b_m \sum_{l=1}^{L} A_l \, h^{l-1} \frac{1}{h^{\beta_m+l-1}} \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \binom{\beta_m + l - 1}{k} u((K-k)h) \end{aligned} \tag{2.67}$$

ou encore,

$$\begin{aligned} &y(Kh) + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{h^{\alpha_n}} \sum_{l=1}^{L} A_l \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \binom{\alpha_n + l - 1}{k} y((K-k)h) \; = \\ &\sum_{m=0}^{M} \frac{b_m}{h^{\beta_m}} \sum_{l=1}^{L} A_l \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \binom{\beta_m + l - 1}{k} u((K-k)h) \end{aligned} \tag{2.68}$$

La sortie à l'instant $Kh$ est obtenue en isolant le terme correspondant à $k = 0$ dans l'équation précédente, soit :

$$y(Kh) = \frac{-\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{h^{\alpha_n}} \sum_{l=1}^{L} A_l \sum_{k=1}^{K} (-1)^k \binom{\alpha_n + l - 1}{k} y((K-k)h)}{\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{h^{\alpha_n}} \sum_{l=1}^{L} A_l} + \frac{\sum_{m=0}^{M} \frac{b_m}{h^{\beta_m}} \sum_{l=1}^{L} A_l \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \binom{\beta_m + l - 1}{k} u((K-k)h)}{\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{h^{\alpha_{a_n}}} \sum_{l=1}^{L} A_l} \tag{2.69}$$

L'avantage de l'approximation de Grünwald généralisée est la diminution de l'erreur d'approximation. Mais, d'un point de vue simulation temporelle des systèmes non entiers cette approche est difficilement implementable en temps réel pour la même raison que précédemment. La dimension de l'équation de sortie (2.69) croît avec le temps.

### 2.6.4 Exemple de simulation

Soit le système décrit par la fonction de transfert non entière suivante :

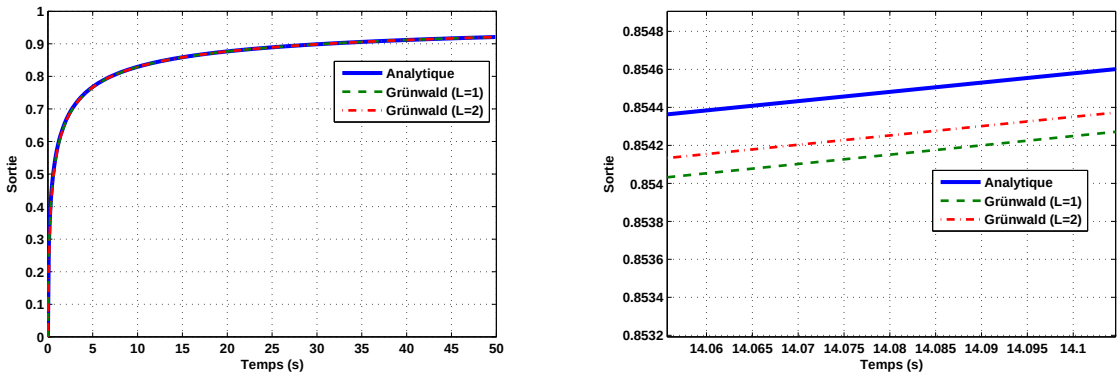
$$H(s) = \frac{1}{1 + s^{0.5}} \tag{2.70}$$

A défaut de l'expression analytique de la réponse indicielle de cette fonction de transfert et compte tenu de la remarque 2.5, la réponse issue de l'approximation par un grand nombre de pôles et zéros récursifs sur une large bande fréquentielle est utilisée comme référence.

La réponse analytique du système non entier est tracée sur la figure 2.13 et comparée à celles obtenues par l'approximation de Grünwald classique ($L = 1$) et par l'approximation de Grünwald généralisée au niveau de généralisation $L = 2$.

Il est clair que lorsque $L$ augmente la réponse indicielle issue de l'approximation de Grünwald devient plus proche de la réponse analytique du système non entier.

La figure 2.14 montre que pour un niveau de généralisation $L > 1$, l'erreur d'approximation diminue.




(a) Réponses indicielles (b) Zoom

Figure 2.13 – Réponses indicielles d'un système non entier et ses approximations au sens de Grünwald.

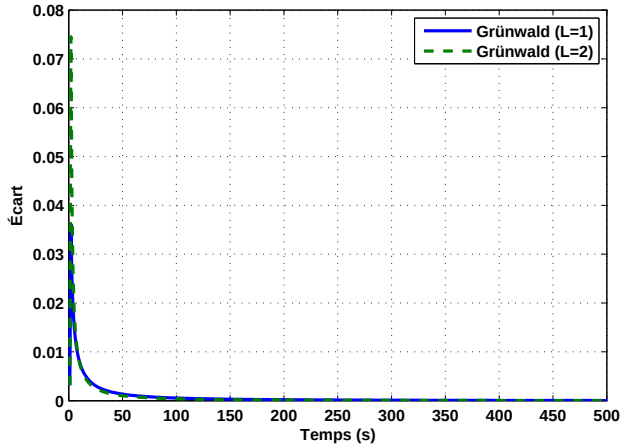



Figure 2.14 – Écart entre la réponse indicielle d'un système non entier et ses approximations au sens de Grünwald.

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, le concept de dérivation non entière a été présenté en rappelant les outils les plus utilisés pour la modélisation de systèmes non entiers. Une nouvelle contribution a été apportée en généralisant la définition de la dérivation non entière, au sens de Grünwald, afin de minimiser l'erreur numérique de calcul de la dérivée. Les différentes façons de représenter les systèmes non entiers ont été présentées : équation différentielle, fonction de transfert sous différentes formes, et représentation d'état. Enfin, le problème de simulation temporelle des systèmes non entiers a été détaillé notamment en utilisant la généralisation de la définition non entière de Grünwald.

# Chapitre 3

# Contribution à l'identification par modèle EIV non entier : statistiques d'ordre trois

## Sommaire


**3.1 Introduction . . . . . 74**

**3.2 Formulation du problème d'identification par modèle EIV non entier . . . . . 76**

**3.3 Estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre trois . . . . . 78**

3.3.1 Estimateur des moindres carrés : ftocls . . . . . 80

3.3.2 Estimateur des moindres carrés itératifs : ftocils . . . . . 83

**3.4 Estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre trois combinés à l'estimation des ordres de dérivation . . . . . 86**

3.4.1 Position du problème . . . . . 86

3.4.2 Méthodes d'optimisation non linéaires . . . . . 87

3.4.3 Estimateurs avec optimisation de l'ordre commensurable . . . . 88

**3.5 Exemple de simulation numérique . . . . . 90**

3.5.1 Estimation des coefficients . . . . . 91

3.5.2 Estimation conjointe des coefficients et des ordres de dérivation 105

**3.6 Application à l'identification d'un système thermique . . . . 107**

3.6.1 Description du système thermique . . . . . 107

3.6.2 Modélisation du système thermique . . . . . 109

3.6.3 Identification du système thermique . . . . . 111

**3.7 Conclusion . . . . . 115**

## 3.1 Introduction

Les travaux d'Oldham et Spanier [Oldham et Spanier, 1974] ont montré que l'opérateur de dérivation non entière apparaît lors de la modélisation de phénomènes de diffusion de chaleur par des fonctions de transfert impliquant des ordres de dérivation multiples de 0.5. D'autres travaux ont montré que les systèmes thermiques semi-infinis peuvent être modélisés par des fonctions de transfert non entières. En effet, la solution exacte de l'équation de chaleur lie le flux thermique à la température de la surface par des dérivées d'ordre 0.5 [Battaglia *et al.*, 2001].

De nombreux travaux ont été développés depuis les dernières années dans le domaine de l'estimation et de l'identification des systèmes non entiers. Le développement de méthodes d'identification basées sur des modèles non entiers s'impose naturellement pour deux principales raisons. D'une part, l'introduction des opérateurs de dérivation non entière dans une équation différentielle permet d'obtenir une solution dont la dynamique présente des multimodes apériodiques (modes non exponentiels à mémoire longue) [Oustaloup, 1995]. D'autre part, dans un contexte de modélisation de certains phénomènes, les modèles non entiers permettent d'obtenir des modèles plus compactes comparés aux modèles entiers [Cois, 2002].

Certaines approches classiques, développées pour l'identification des systèmes entiers, ont été étendues aux systèmes non entiers à la fois dans le domaine fréquentiel [Amairi, 2011; Khemane, 2011; Le Lay, 1998] et dans le domaine temporel [Aoun, 2005; Cois *et al.*, 2000; Lin, 2001; Victor, 2010].
Les méthodes d'identification temporelle par modèles non entiers développées jusqu'à présent peuvent être classifiées en deux classes selon qu'elles minimisent l'erreur d'équation ou l'erreur de sortie.
Les méthodes d'identification basées sur la minimisation de l'erreur d'équation, ont été développées dans un contexte d'estimation des coefficients de l'équation différentielle non entière en considérant des ordres de dérivation fixes. Ces méthodes sont basées sur des modèles ARX et sur l'estimation des coefficients par moindres carrés. L'estimation dans ce cas se fait :

- soit en discrétisant l'équation différentielle non entière moyennant l'approximation de Grünwald et en utilisant des algorithmes d'estimation paramétrique à temps discret [Aoun *et al.*, 2010; Cois, 2002; Djouambi *et al.*, 2012] ;
- soit en généralisant au cas non entier les méthodes classiques d'estimation

paramétrique à temps continu, à savoir celles basées sur les filtres intégrales [Aoun, 2005; Cois, 2002; Le Lay, 1998; Lin, 2001].

Pour les méthodes d'identification basées sur la minimisation de l'erreur de sortie, il existe principalement trois approches qui diffèrent dans le mode de représentation de la fonction de transfert non entière :

- une approche utilisant la forme développée d'une fonction de transfert non entière [Malti *et al.*, 2008] ;
- une approche utilisant la décomposition modale d'une fonction de transfert non entière [Cois *et al.*, 2000] ;
- une approche utilisant la décomposition en fonctions orthogonales de la fonction de transfert non entière [Aoun, 2005].

Des travaux développés récemment dans [Victor *et al.*, 2013] consistent à combiner les deux classes de méthodes d'estimation citées ci-dessus afin de rajouter l'optimisation de l'ordre commensurable ou de tous les ordres de dérivation en même temps que les coefficients de l'équation différentielle non entière.

Toutes les méthodes d'identification des systèmes par modèles non entiers élaborées jusqu'à présent considèrent que la sortie du système est entachée d'un bruit de mesure additif et que le signal d'entrée est supposé parfaitement connu. Or, pour certaines applications, le signal d'entrée est mesuré et donc peut être entaché d'un bruit. Dans ce cas, le système est dit à erreurs-en-les-variables ou encore EIV, abréviation anglaise de Errors-In-Variables, et l'application des méthodes classiques d'identification mène souvent à une estimation paramétrique biaisée. Pour surmonter ce problème, des méthodes basées sur des statistiques d'ordre supérieur sont proposées afin d'obtenir des estimées non biaisées.

Dans ce cadre, deux classes de méthodes d'identification des systèmes EIV par modèles entiers à temps continu, développées dans les travaux de Thil [Thil, 2007], sont généralisées dans ce mémoire au cas non entier. La première classe, fondée sur les statistiques d'ordre trois, est présentée dans le présent chapitre. La seconde, fondée sur les statistiques d'ordre quatre, fait l'objet du chapitre suivant.

En ce qui concerne les méthodes d'identification fondées sur les cumulants d'ordre trois, deux cas différents sont distingués : le premier cas suppose que tous les ordres de dérivation sont connus *a priori* et seuls les coefficients de l'équation différentielle non entière sont estimés en utilisant deux estimateurs basés sur les cumulants d'ordre

trois, à savoir l'estimateur *ftocls* et *ftocils*. Le deuxième cas suppose que les ordres de dérivation sont commensurables à un ordre non entier $\upsilon$ qui sera estimé en même temps que les coefficients de l'équation différentielle non entière en utilisant des techniques d'optimisation non linéaires vis-à-vis des paramètres, à savoir l'estimateur *co-ftocls* et *co-ftocils*.

Ce chapitre comporte principalement 7 paragraphes. Le deuxième paragraphe présente une description détaillée du problème d'identification par modèle non entier à temps continu dans le contexte EIV. Les principales contributions basées sur l'utilisation des cumulants d'ordre trois pour l'identification par modèle non entier, sont présentées au troisième et quatrième paragraphe. Les performances des algorithmes proposés sont illustrées à l'aide d'un exemple de simulation numérique au cinquième paragraphe. Une application pratique sur la modélisation du phénomène de diffusion de chaleur dans un barreau thermique est présentée au sixième paragraphe. Le dernier paragraphe conclut le chapitre.

## 3.2 Formulation du problème d'identification par modèle EIV non entier

Soit $G$ un système non entier, monovariable, linéaire, invariant et à temps continu représenté dans un contexte à erreurs en les variables (EIV) par le schéma de la figure 3.1.

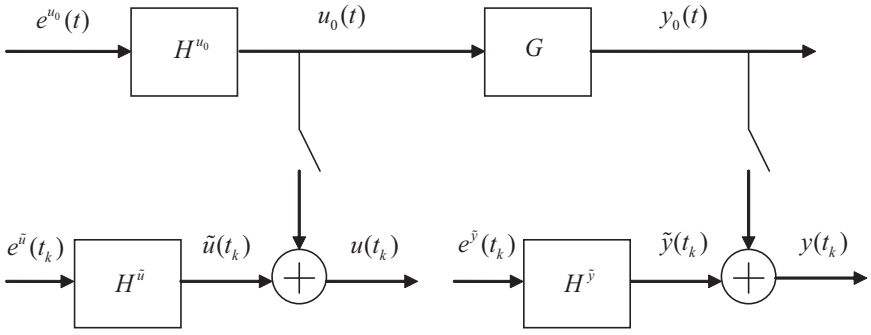



Figure 3.1 – Schéma du modèle EIV non entier à temps continu.

Les "vrais" signaux d'entrée et de sortie vérifient l'équation différentielle non entière suivante :

$$y_0(t) + \sum_{n=1}^{N} a_n D^{\alpha_n} y_0(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m D^{\beta_m} u_0(t) \tag{3.1}$$

Les signaux $u_0(t)$ et $y_0(t)$ sont supposés échantillonnés aux instants $\{t_k = kh\}_{k=1}^{N_t}$ et les signaux échantillonnés mesurés $u(t_k)$ et $y(t_k)$ sont supposés entachés par des bruits additifs à temps discret respectivement $\tilde{u}(t_k)$ et $\tilde{y}(t_k)$.

Le système EIV non entier $\mathcal{S}$ est décrit par :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} y_0(t) + \sum_{n=1}^{N} a_n D^{\alpha_n} y_0(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m D^{\beta_m} u_0(t) \\ u(t_k) = u_0(t_k) + \tilde{u}(t_k) \\ y(t_k) = y_0(t_k) + \tilde{y}(t_k) \end{cases} \tag{3.2}$$

avec

$$\begin{cases} u_0(t) = H^{u_0}(p, \eta_{u_0}) e^{u_0}(t) \\ \tilde{u}(t_k) = H^{\tilde{u}}(q, \eta_{\tilde{u}}) e^{\tilde{u}}(t_k) \\ \tilde{y}(t_k) = H^{\tilde{y}}(q, \eta_{\tilde{y}}) e^{\tilde{y}}(t_k) \end{cases} \tag{3.3}$$

et

- $u_0(t)$ et $y_0(t)$ sont les signaux d'entrée et de sortie non bruités ;
- $\tilde{u}(t_k)$ et $\tilde{y}(t_k)$ sont les bruits de mesure sur l'entrée et la sortie ;
- $u(t_k)$ et $y(t_k)$ sont les signaux d'entrée et de sortie mesurés ;
- $e^{u_0}(t)$ est défini par la dérivée d'un processus de Wiener de variance incrémentale unité ;
- $e^{\tilde{u}}(t_k)$ et $e^{\tilde{y}}(t_k)$ sont deux bruits blancs discrets de variances respectives $\sigma^2_{e^{\tilde{u}}}$ et $\sigma^2_{e^{\tilde{y}}}$.

L'ensemble de modèles est défini par :

$$\mathcal{M}^* = \left\{ G(p,\theta),\ H^{u_0}(p, \eta_{u_0}),\ H^{\tilde{u}}(q, \eta_{\tilde{u}}),\ H^{\tilde{y}}(q, \eta_{\tilde{y}}) \right\} \tag{3.4}$$

$$\mathcal{G}^* = \left\{ G(p,\theta) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}}{1 + \sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}} \,\middle|\, \theta \in D_\theta \right\} \tag{3.5}$$

$$\mathcal{E}^* = \left\{ H^{u_0}(p, \eta_{u_0}) \,|\, \eta_{u_0} \in D_{\eta_{u_0}} \right\} \tag{3.6}$$

$$\mathcal{H}^* = \left\{ \left( H^{\tilde{u}}(q, \eta_{\tilde{u}}),\ H^{\tilde{y}}(q, \eta_{\tilde{y}}) \right) \,\middle|\, \eta_{\tilde{u}} \in D_{\eta_{\tilde{u}}},\ \eta_{\tilde{y}} \in D_{\eta_{\tilde{y}}} \right\} \tag{3.7}$$

Dans ce mémoire les modèles décrivant le signal d'entrée non bruité et les bruits sur l'entrée et la sortie sont supposés connus et seuls les paramètres du modèle $G(p,\theta)$ sont estimés.

Le vecteur des paramètres est donné par :

$$\theta^T = [a_1, \ldots, a_N, b_0, \ldots, b_M] \tag{3.8}$$

Le problème d'identification des systèmes EIV à temps continu par modèles non entiers consiste, dans un premier temps, à estimer le vecteur $\theta^T$ à partir de $N_t$ échantillons de données en présence de bruits additifs sur les signaux d'entrée et de sortie. Dans un second temps, le problème consiste à estimer non seulement $\theta^T$ mais aussi les ordres de dérivation $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_N$ et $0 \leq \beta_0 < \beta_1 < ... < \beta_M$.

De plus les hypothèses suivantes sont posées :

- **H1.** Les ordres de dérivation non entiers $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_N$, $0 \leq \beta_0 < \beta_1 < ... < \beta_M$ sont supposés connus *a priori* ;
- **H2.** Le signal d'entrée non bruité $u_0$ est un processus stochastique, stationnaire, de moyenne nulle et de distribution asymétrique. Ses cumulants d'ordre trois ne peuvent pas alors être nuls, soit $\mathrm{E}\left[u_0^3(t_k)\right] \neq 0$ ;
- **H3.** $\tilde{u}$ et $\tilde{y}$ sont deux signaux aléatoires, stationnaires, de moyennes nulles, de distributions symétriques et indépendantes respectivement de $u_0$ et $y_0$ .

## 3.3 Estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre trois

**Proposition 1** *La propriété de multilinéarité des cumulants permet d'écrire l'équation du modèle en fonction des cumulants d'ordre trois croisés comme suit [Chetoui et al., 2011, 2013a] :*

$$C_{uyu}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}}{1 + \sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}} C_{uuu}(\tau_1, \tau_2) \tag{3.9}$$

*où $p^{\alpha_n}$ et $p^{\beta_m}$ désignent les opérateurs différentiels par rapport à $\tau_1$ définis respectivement par $\dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial \tau_1^{\alpha_n}}$ et $\dfrac{\partial^{\beta_m}}{\partial \tau_1^{\beta_m}}$ .*

L'équation du modèle (3.9) peut être réécrite sous la forme de l'équation différentielle non entière :

$$C_{uyu}(\tau_1, \tau_2) + \sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n} C_{uyu}(\tau_1, \tau_2) = \sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m} C_{uuu}(\tau_1, \tau_2) \tag{3.10}$$

***Démonstration :*** soit $g(t)$ la réponse impulsionnelle du modèle non entier à temps continu décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^{\beta_m}}{1 + \sum_{n=1}^{N} a_n s^{\alpha_n}} \tag{3.11}$$

Comme les cumulants d'ordre trois des signaux distribués d'une manière symétrique sont nuls, les cumulants d'ordre trois croisés entre les signaux d'entrée et de sortie mesurés $u$ et $y$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
C_{uyu}(\tau_1,\tau_2) &= C_{u_0y_0u_0}(\tau_1,\tau_2) \\
&= \mathrm{E}\left[u_0(t_k)\, y_0(t_k+\tau_1)\, u_0(t_k+\tau_2)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[u_0(t_k)\, \left(\int_0^\infty g(\tau)u_0(t_k+\tau_1-\tau)\, d\tau\right) u_0(t_k+\tau_2)\right] \\
&= \int_0^\infty g(\tau)\mathrm{E}\left[u_0(t_k)u_0(t_k+\tau_1-\tau)\, u_0(t_k+\tau_2)\right] d\tau \\
&= \int_0^\infty g(\tau)\, C_{u_0u_0u_0}(\tau_1-\tau,\tau_2)d\tau \\
&= \int_0^\infty g(\tau)\, C_{uuu}(\tau_1-\tau,\tau_2)d\tau \\
&= G(p)\, C_{uuu}(\tau_1,\tau_2) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}}{1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}}\, C_{uuu}(\tau_1,\tau_2)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

■

Compte tenu de l'hypothèse H3, les cumulants d'ordre trois des signaux $\tilde{u}(t_k)$ et $\tilde{y}(t_k)$ sont nuls et l'équation du modèle se réécrit comme suit :

$$C_{u_0y_0u_0}(\tau_1,\tau_2) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}}{1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}} C_{u_0u_0u_0}(\tau_1,\tau_2) \tag{3.13}$$

En pratique, les cumulants d'ordre trois sont estimés à partir des $N_t$ échantillons de données d'entrée et de sortie disponibles $\{u(t_k), y(t_k)\}_{k=1}^{N_t}$. De ce fait, le modèle estimé est donné par :

$$\hat{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}}{1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}}\, \hat{C}_{uuu}(\tau_1,\tau_2) + \varepsilon(\tau_1,\tau_2,\theta) \tag{3.14}$$

où $\varepsilon(\tau_1,\tau_2,\theta)$ désigne l'erreur de sortie sur les cumulants estimés.

Notons que les estimées des cumulants $\hat{C}_{uuu}(\tau_1,\tau_2)$ et $\hat{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2)$ sont asymptotiquement non biaisées et convergentes ce qui permet d'écrire [Thil, 2007] :

$$\lim_{N_t\to\infty} \varepsilon(\tau_1,\tau_2,\theta) = 0 \tag{3.15}$$

Dans la suite de cette section, deux méthodes basées sur la minimisation de l'erreur d'équation et l'erreur de sortie sur les cumulants estimés sont développées pour l'estimation des coefficients du modèle (3.9).

### 3.3.1 Estimateur des moindres carrés : ftocls

D'après (3.15), l'erreur de sortie est définie par :

$$\varepsilon(\tau_1,\tau_2,\theta) = \hat{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2) - \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}}{1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}}\,\hat{C}_{uuu}(\tau_1,\tau_2) \tag{3.16}$$

Cette erreur de sortie est non linéaire vis-à-vis des paramètres, donc l'estimation des coefficients du modèle (3.9) requiert l'utilisation des techniques d'optimisation non linéaires. Par conséquent, nous avons considéré l'erreur d'équation, obtenue par multiplication de (3.16) par $1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}$ et qui s'écrit sous la forme de la régression linéaire suivante :

$$\begin{aligned}
e_{cum}(\tau_1,\tau_2,\theta) &= \left(1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}\right)\varepsilon(\tau_1,\tau_2,\theta)\\
&= \left(1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}\right)\left(\hat{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2) - \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}}{1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}}\,\hat{C}_{uuu}(\tau_1,\tau_2)\right)\\
&= \left(1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}\right)\hat{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2) - \sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}\hat{C}_{uuu}(\tau_1,\tau_2)\\
&= \hat{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2) + \sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}\hat{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2) - \sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}\hat{C}_{uuu}(\tau_1,\tau_2)\\
&= \hat{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2) - \hat{\Phi}^T(\tau_1,\tau_2)\theta
\end{aligned} \tag{3.17}$$

où le vecteur de régression est défini par :

$$\hat{\Phi}^T(\tau_1,\tau_2) = \left[-p^{\alpha_1}\hat{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2),...,-p^{\alpha_N}\hat{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2), p^{\beta_0}\hat{C}_{uuu}(\tau_1,\tau_2),...,p^{\beta_M}\hat{C}_{uuu}(\tau_1,\tau_2)\right] \tag{3.18}$$

et le vecteur des paramètres $\theta$ est défini par :

$$\theta^T = [a_1, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m] \tag{3.19}$$

Le vecteur optimal des paramètres $\hat{\theta}$ est estimé par :

$$\hat{\theta}_{ftocls}(\tau_2, T) = \arg\min_{\theta} V(\tau_2, \theta, T) \tag{3.20}$$

en minimisant le critère :

$$V(\tau_2, \theta, T) = \frac{1}{T} \sum_{\tau_1=0}^{T} \frac{1}{2} e^2_{cum}(\tau_1, \tau_2, \theta) \tag{3.21}$$

La solution optimale s'écrit alors :

$$\hat{\theta}_{ftocls}(\tau_2, T) = \left[ \frac{1}{T} \sum_{\tau_1=0}^{T-1} \hat{\Phi}(\tau_1, \tau_2) \hat{\Phi}^T(\tau_1, \tau_2) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{T} \sum_{\tau_1=0}^{T-1} \hat{\Phi}(\tau_1, \tau_2) \hat{C}_{uyu}(\tau_1, \tau_2) \right] \tag{3.22}$$

où $T$ est un hyper-paramètre choisi supérieur à $N + M + 1$ pour assurer la non singularité de la matrice à inverser dans (3.22). L'influence de $T$ sur la qualité de l'estimation sera analysée dans l'exemple de simulation numérique.

**Remarque 3.1** *Étant donné les cumulants d'ordre trois sont bi-dimensionnels, ils dépendent de deux variables $\tau_1$ et $\tau_2$. Leur estimation à partir des données disponibles permet d'obtenir une matrice constituée des cumulants d'ordre trois, calculés avec différents délais. Ceci donne naissance à une matrice des estimées calculée en utilisant les deux vecteurs de la matrice de cumulants.*

*L'estimateur $\hat{\theta}_{ftocls}(\tau_2, T)$ est obtenu en ne considérant qu'un seul vecteur de la matrice et en choisissant $\tau_2 = 0$ et $0 \leq \tau_1 \leq T$. En simulation numérique, on constate que le deuxième vecteur de la matrice ne fournit pas d'amélioration significative sur l'estimation des paramètres.*

Toutefois, la mise en œuvre pratique de l'estimateur *ftocls* nécessite la construction du vecteur de régression (3.18) et, par conséquent, le calcul des dérivées non entières des estimées des cumulants $\hat{C}_{uuu}(\tau_1, \tau_2)$ et $\hat{C}_{uyu}(\tau_1, \tau_2)$. Pour cela, nous proposons dans ce mémoire de généraliser l'approche du filtre à variables d'état [Young, 1981a] au cas non entier.

**Proposition 2** *Les dérivées non entières des cumulants $p^{\upsilon}\hat{C}_{xxx}(\tau_1, \tau_2)$ définies dans le vecteur de régression (3.18) sont remplacées par des dérivées filtrées des cumulants $p^{\upsilon}\hat{C}_{xxx,f}(\tau_1, \tau_2)$ et évaluées comme suit [Chetoui et al., 2011, 2013a] :*

$$p^{\upsilon}\hat{C}_{xxx,f}(\tau_1, \tau_2) = \hat{C}_{xx_f^{\upsilon}x}(\tau_1, \tau_2) \tag{3.23}$$

*où $x_f^{\upsilon}$ désigne le signal $x$ filtré par :*

$$F_{\upsilon}(p) = p^{\upsilon}\left(\frac{\lambda}{p+\lambda}\right)^{\lfloor\alpha_N\rfloor+1} \tag{3.24}$$

*où $\lfloor\alpha_N\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\alpha_N$ et $\lambda$ désigne la fréquence de coupure du filtre à variables d'état non entier.*

***Démonstration :*** Soit $f_{\upsilon}(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre $F_{\upsilon}(p)$. On a :

$$\begin{aligned}
p^{\upsilon}C_{xxx,f}(\tau_1,\tau_2) &= F_{\upsilon}(p)\,C_{xxx}(\tau_1,\tau_2)\\
&= \int_{\mathbb{R}} f_{\upsilon}(\tau)\,\mathrm{E}\left[x(t_k)x(t_k+\tau_1-\tau)\,x(t_k+\tau_2)\right]d\tau\\
&= \mathrm{E}\left[x(t_k)\left(\int_{\mathbb{R}} f_{\upsilon}(\tau)\,x(t_k+\tau_1-\tau)\,d\tau\right)x(t_k+\tau_2)\right]\\
&= \mathrm{E}\left[x(t_k)x_f^{\upsilon}(t_k+\tau_1)\,x(t_k+\tau_2)\right]\\
&= C_{xx_f^{\upsilon}x}(\tau_1,\tau_2)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

■

Ainsi, l'utilisation de l'approche du filtre à variables d'état, généralisé au cas non entier, permet de transférer le problème de calcul des dérivées non entières des estimées des cumulants d'ordre trois en un problème de calcul des dérivées non entières des signaux d'entrée et de sortie.

En conclusion, la mise en œuvre de l'estimateur *ftocls* se résume en 3 étapes :

– ***Étape 1 :*** calculer les dérivées non entières des signaux d'entrée et de sortie :

$$u_f^{\beta_m}(t_k) = F_{\beta_m}(p)\,u(t_k);\quad 0 \leqslant m \leqslant M \tag{3.26}$$

$$y_f^{\alpha_n}(t_k) = F_{\alpha_n}(p)\,y(t_k);\quad 1 \leqslant n \leqslant N \tag{3.27}$$

où $F_{\beta_m}(p)$ et $F_{\alpha_n}(p)$ désignent les filtres à variables d'état non entiers définis par (3.24).

– ***Étape 2 :*** calculer les dérivées non entières des estimées de cumulants d'ordre trois :

$$p^{\beta_m}\hat{C}_{uuu,f}(\tau_1,\tau_2) = \frac{1}{N_t-\mu}\sum_{k=1}^{N_t-\mu} u(t_k)u_f^{\beta_m}(t_k+\tau_1)u(t_k+\tau_2);\ \ 0 \leqslant m \leqslant M \tag{3.28}$$

$$p^{\alpha_n}\hat{C}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2) = \frac{1}{N_t-\mu}\sum_{k=1}^{N_t-\mu} u(t_k)y_f^{\alpha_n}(t_k+\tau_1)u(t_k+\tau_2);\ \ 1 \leqslant n \leqslant N \tag{3.29}$$

où $\mu = max(\tau_1,\tau_2)$ et $\tau_2 = 0$.

– ***Étape 3 :*** construire le vecteur de régression :

$$\hat{\Phi}_f^T(\tau_1,\tau_2) = \Big[-p^{\alpha_1}\hat{C}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2),...,-p^{\alpha_N}\hat{C}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2), p^{\beta_0}\hat{C}_{uuu,f}(\tau_1,\tau_2),..., p^{\beta_M}\hat{C}_{uuu,f}(\tau_1,\tau_2)\Big] \quad (3.30)$$

et déterminer $\hat{\theta}_{ftocls}$ en utilisant l'estimateur des moindres carrées ordinaires :

$$\hat{\theta}_{ftocls}(\tau_2,T) = \left[\frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\hat{\Phi}_f(\tau_1,\tau_2)\hat{\Phi}_f^T(\tau_1,\tau_2)\right]^{-1}\left[\frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\hat{\Phi}_f(\tau_1,\tau_2)\hat{C}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2)\right] \quad (3.31)$$

### 3.3.2 Estimateur des moindres carrés itératifs : ftocils

Une approche fondée sur une procédure des moindres carrés itératifs a été proposée pour l'identification des systèmes EIV par modèles entiers à temps discret [Söderström, 2007] et à temps continu [Thill, 2007]. Dans ce paragraphe, cette approche itérative est étendue à l'identification des systèmes EIV par modèles non entiers [Chetoui *et al.*, 2012a].

Sur le même principe que la méthode *tocils* (présentée au chapitre 1), la méthode *ftocils* consiste à minimiser l'erreur d'équation :

$$e_{cum}(\tau_1,\tau_2,\theta) = \left(1+\sum_{n=1}^{N}a_n p^{\alpha_n}\right)\hat{C}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2) - \sum_{m=0}^{M}b_m p^{\beta_m}\hat{C}_{uuu,f}(\tau_1,\tau_2) \quad (3.32)$$

où $\hat{C}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2)$ et $\hat{C}_{uuu,f}(\tau_1,\tau_2)$ désignent respectivement les estimées des cumulants d'ordre trois, $C_{uyu}(\tau_1,\tau_2)$ et $C_{uuu}(\tau_1,\tau_2)$, filtrées par $F(p,\theta) = \dfrac{1}{1+\sum_{n=1}^{N}a_n p^{\alpha_n}}$.

Eu égard à la linéarité de l'équation (3.32) vis-à-vis des paramètres, l'estimation des coefficients du modèle peut être menée avec des algorithmes d'optimisation linéaires tels que les moindres carrées itératifs. Soit $\hat{\theta}^i$ l'estimée de $\theta$ à l'itération $i$, $\hat{\theta}^{i+1}$ est calculée par moindres carrés en minimisant l'erreur d'équation à chaque itération obtenue avec le filtre $F(p,\hat{\theta}^i) = \dfrac{1}{1+\sum_{n=1}^{N}\hat{a}_n^i p^{\alpha_n}}$.

En effet, l'erreur d'équation (3.32) peut être réécrite sous la forme d'une régression linéaire comme suit :

$$e_{cum}(\tau_1,\tau_2,\theta) = \hat{C}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2) - \hat{\Phi}_f^T(\tau_1,\tau_2)\,\theta \quad (3.33)$$

où le vecteur de régression contient les dérivées non entières des estimées des cumulants

d'ordre trois filtrées par $F(p,\theta)$ :

$$\Phi_f^T(\tau_1,\tau_2) = \Big[-p^{\alpha_1}\hat{C}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2),\ ...,\ -p^{\alpha_N}\hat{C}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2), p^{\beta_0}\hat{C}_{uuu,f}(\tau_1,\tau_2),\ ...,\ p^{\beta_M}\hat{C}_{uuu,f}(\tau_1,\tau_2)\Big] \quad (3.34)$$

et dépend donc de $\theta$. Une approche itérative permet de contourner cette difficulté.

Ainsi, le vecteur optimal des paramètres à l'itération $i$, donné par :

$$\hat{\theta}^i_{ftocils}(\tau_2,T) = \arg\min_{\theta} V^i(\tau_2,\theta,T) \quad (3.35)$$

est obtenu en minimisant le critère :

$$V^i(\tau_2,\theta,T) = \frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\frac{1}{2}\big(e^i_{cum}(\tau_1,\tau_2,\theta)\big)^2 \quad (3.36)$$

où $e^i_{cum}(\tau_1,\tau_2,\theta)$ désigne l'erreur résiduelle calculée à la $i^{\text{ième}}$ itération :

$$e^i_{cum}(\tau_1,\tau_2,\theta) = \left(1+\sum_{n=1}^{N}a_n p^{\alpha_n}\right)\frac{\hat{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2)}{1+\sum\limits_{n=1}^{N}\hat{a}_n^{i-1}p^{\alpha_n}} - \sum_{m=0}^{M}b_m p^{\beta_m}\frac{\hat{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2)}{1+\sum\limits_{n=1}^{N}\hat{a}_n^{i-1}p^{\alpha_n}} \quad (3.37)$$

La minimisation du critère $V^i(\tau_2,\theta,T)$ permet de déterminer l'estimateur *ftocils* :

$$\hat{\theta}^i_{ftocils}(\tau_2,T) = \left[\frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\hat{\Phi}_f(\tau_1,\tau_2)\hat{\Phi}_f^T(\tau_1,\tau_2)\right]^{-1}\left[\frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\hat{\Phi}_f(\tau_1,\tau_2)\hat{C}_{uyu,f}(\tau_1,\tau_2)\right] \quad (3.38)$$

où l'indice $f$ indique le filtrage par $\dfrac{p^{\upsilon}}{1+\sum\limits_{n=1}^{N}\hat{a}_n^{i-1}p^{\alpha_n}}$ des estimées des cumulants.

Le filtre à variables d'état non entier (3.24) n'est utilisé qu'à la première étape pour initialiser l'algorithme *ftocils*. Aux étapes suivantes, les dérivées non entières des signaux d'entrée et de sortie sont calculées en utilisant le filtre suivant :

$$F_{\upsilon}(p,\hat{\theta}^{i-1}) = \frac{p^{\upsilon}}{1+\sum\limits_{n=1}^{N}\hat{a}_n^{i-1}p^{\alpha_n}} \quad (3.39)$$

La mise en œuvre de l'algorithme *ftocils* est fondée sur celle de l'algorithme *ftocls*. Elle se résume par les trois étapes suivantes :

– ***Étape 1 :*** calculer la première estimée en appliquant l'algorithme *ftocls*, soit :

$$\hat{\theta}^0_{ftocils}(\tau_2,T) = \hat{\theta}_{ftocls}(\tau_2,T) \quad (3.40)$$

– ***Étape 2 :*** estimer $\hat{\theta}^i_{ftocils}(\tau_2, T)$ en exécutant les mêmes étapes de l'algorithme *ftocls* :

• calculer les dérivées non entières des signaux d'entrée et de sortie :

$$u_f^{\beta_m}(t_k) = \frac{p^{\beta_m}}{1 + \sum_{n=1}^{N} \hat{a}_n^{i-1} p^{\alpha_n}} u(t_k); \quad 0 \leqslant m \leqslant M \tag{3.41}$$

$$y_f^{\alpha_n}(t_k) = \frac{p^{\alpha_n}}{1 + \sum_{n=1}^{N} \hat{a}_n^{i-1} p^{\alpha_n}} y(t_k); \quad 1 \leqslant n \leqslant N \tag{3.42}$$

• calculer les dérivées non entières des estimées de cumulants d'ordre trois :

$$p^{\beta_m}\hat{C}_{uuu,f}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{N_t - \mu} \sum_{k=1}^{N_t - \mu} u(t_k) u_f^{\beta_m}(t_k + \tau_1) u(t_k + \tau_2); \quad 0 \leqslant m \leqslant M \tag{3.43}$$

$$p^{\alpha_n}\hat{C}_{uyu,f}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{N_t - \mu} \sum_{k=1}^{N_t - \mu} u(t_k) y_f^{\alpha_n}(t_k + \tau_1) u(t_k + \tau_2); \quad 1 \leqslant n \leqslant N \tag{3.44}$$

où $\mu = max(\tau_1, \tau_2)$ et $\tau_2 = 0$.

• construire le vecteur de régression :

$$\hat{\Phi}_f^T(\tau_1, \tau_2) = \Big[ -p^{\alpha_1}\hat{C}_{uyu,f}(\tau_1, \tau_2), ..., -p^{\alpha_N}\hat{C}_{uyu,f}(\tau_1, \tau_2), p^{\beta_0}\hat{C}_{uuu,f}(\tau_1, \tau_2), ..., p^{\beta_M}\hat{C}_{uuu,f}(\tau_1, \tau_2) \Big] \tag{3.45}$$

et déterminer $\hat{\theta}^i_{ftocls}$ en utilisant l'estimateur des moindres carrées ordinaires :

$$\hat{\theta}^i_{ftocls}(\tau_2, T) = \left[ \frac{1}{T} \sum_{\tau_1=0}^{T-1} \hat{\Phi}_f(\tau_1, \tau_2) \hat{\Phi}_f^T(\tau_1, \tau_2) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{T} \sum_{\tau_1=0}^{T-1} \hat{\Phi}_f(\tau_1, \tau_2) \hat{C}_{uyu,f}(\tau_1, \tau_2) \right] \tag{3.46}$$

– ***Étape 3 :*** répéter la deuxième étape jusqu'à la convergence, soit : $\frac{\left\| \hat{\theta}^{i+1}_{ftocils} - \hat{\theta}^i_{ftocils} \right\|}{\left\| \hat{\theta}^i_{ftocils} \right\|} < \epsilon$ ou jusqu'à ce qu'un nombre d'itérations maximal soit atteint.

L'influence de l'hyper-paramètre $T$ est étudiée dans l'exemple de simulation numérique.

## 3.4 Estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre trois combinés à l'estimation des ordres de dérivation

### 3.4.1 Position du problème

L'équation du modèle non entier dans le contexte EIV est décrite en fonction des cumulants d'ordre trois croisés par :

$$C_{uyu}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}}{1 + \sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}} C_{uuu}(\tau_1, \tau_2) \tag{3.47}$$

Si les ordres de dérivation non entiers sont inconnus, le vecteur des paramètres est donné par :

$$\Theta^T = [\theta,\, \gamma] \tag{3.48}$$

où $\theta$ est un vecteur de dimension $N + M + 1$ et contient les coefficients du modèle non entier (3.47) :

$$\theta^T = [a_1, \ldots, a_N, b_0, \ldots, b_M] \tag{3.49}$$

et $\gamma$ est un vecteur composé de $N + M + 1$ ordres de dérivation :

$$\gamma^T = [\alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_0, \ldots, \beta_M] \tag{3.50}$$

Dans le cas où le modèle décrit par la relation (3.47) est commensurable à l'ordre $\upsilon$, il se réécrit comme suit :

$$C_{uyu}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^{m\upsilon}}{1 + \sum_{n=1}^{N} a_n p^{n\upsilon}} C_{uuu}(\tau_1, \tau_2) \tag{3.51}$$

De ce fait, la dimension du vecteur des paramètres à estimer se réduit à $(N + M + 2)$ éléments, soit :

$$\Theta^T = [a_1, \ldots, a_N, b_0, \ldots, b_M, \upsilon] = \left[\theta^T,\, \upsilon\right] \tag{3.52}$$

L'algorithme développé consiste à estimer les coefficients du modèle (3.51) en appliquant l'estimateur *ftocls* (respectivement *ftocils*) et à estimer l'ordre commensurable en utilisant une technique d'optimisation non linéaire.

L'erreur de sortie est donnée par :

$$\varepsilon(\tau_1,\tau_2,\Theta)=\hat{C}_{uyu}(\tau_1,\tau_2)-\frac{\sum_{m=0}^{M}\hat{b}_m p^{m\upsilon}}{1+\sum_{n=1}^{N}\hat{a}_n p^{n\upsilon}}\hat{C}_{uuu}(\tau_1,\tau_2) \tag{3.53}$$

L'ordre commensurable optimal est obtenu itérativement en minimisant la norme $L_2$ de l'erreur de sortie, c-.à-.d en minimisant le critère :

$$J(\tau_1,\tau_2,\Theta)=\frac{1}{2}\left\|\varepsilon(\tau_1,\tau_2,\Theta)\right\|^2 \tag{3.54}$$

Toutefois, l'erreur de sortie est non linéaire vis-à-vis des paramètres inconnus, ce qui requiert l'utilisation des techniques d'optimisation non linéaires de type gradient [Bertsekas, 1982; Dennis et Schnabel, 1987; Ljung, 1999; Luenberger, 1973]. Un aperçu des méthodes d'optimisation numérique couramment utilisées est présenté dans la section suivante.

### 3.4.2 Méthodes d'optimisation non linéaires

Les méthodes d'optimisation numérique d'une fonction $J$ sont principalement basées sur une mise à jour itérative du vecteur des paramètres estimés. En effet, la procédure d'optimisation est donnée par :

$$\upsilon^{i+1}=\upsilon^i+\lambda f^i \tag{3.55}$$

où $f^i$ est une direction de recherche basée sur l'information du critère d'erreur $J(\Theta)$ acquise aux itérations précédentes et $\lambda$ est une constante positive permettant une décroissance appropriée de $J(\Theta)$.

Selon les définitions de $f^i$, les méthodes d'optimisation numériques peuvent être classifiées en trois groupes :

- des méthodes qui utilisent les valeurs de $J$ ;
- des méthodes qui utilisent les valeurs de $J$ ainsi que son gradient ;
- des méthodes qui utilisent les valeurs de $J$, son gradient et son Hessien (ce groupe de méthodes est utilisé souvent pour l'optimisation des ordres de dérivation).

Plusieurs algorithmes sont développés dans la littérature pour l'optimisation des ordres de dérivation, le plus connu est celui de Newton-Raphson. Il se caractérise par la direction suivante :

$$f_i=-\left[J''\right]^{-1}J' \tag{3.56}$$

où le gradient de $J$ est défini par :

$$J'=\frac{\partial J}{\partial \upsilon}=\frac{\partial \varepsilon}{\partial \upsilon}^T\varepsilon \tag{3.57}$$

et le Hessien est donné par :

$$J'' = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \upsilon}^T \frac{\partial \varepsilon}{\partial \upsilon} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \upsilon^2} \varepsilon \tag{3.58}$$

$\varepsilon$ désigne l'erreur de sortie (ici $\varepsilon(\tau_1, \tau_2, \Theta)$ définie par l'équation (3.53)).

L'information du Hessien n'est cependant pertinente que s'il est défini positif, l'estimée se trouve alors dans une partie convexe du critère $J$. Dans le cas contraire, le Hessien n'apporte aucune information pertinente pour la convergence vers un minimum. De plus, le calcul de $J''$ nécessite l'évaluation de la deuxième dérivée de l'erreur par rapport au vecteur des paramètres. Une alternative au calcul de $J''$ est l'évaluation du Hessien approché :

$$J'' \approx H_{app} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \upsilon}^T \frac{\partial \varepsilon}{\partial \upsilon} \tag{3.59}$$

Cette forme permet de garantir la semi-positivité du Hessien approché qui fournit une information d'autant plus pertinente que l'erreur $\varepsilon$ est faible, et garantit une descente vers un minimum. La méthode utilisant le Hessien approché est connue sous le nom de méthode de Gauss-Newton ou de Newton-Raphson modifiée.

**Remarque 3.2** *Bien que la matrice $H_{app}$ de (3.59) soit toujours semi-définie positive, elle peut être singulière ou en être proche lorsque le modèle est sur-dimensionné ou lorsque les données ne sont pas assez riches. Les techniques de régularisation, dont la plus connue est celle de Levenberg-Marquardt [Levenberg, 1944, Marquardt, 1963], peuvent être utilisées. Le nouveau Hessien approché est alors défini par :*

$$H_{app} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \upsilon}^T \frac{\partial \varepsilon}{\partial \upsilon} + \zeta I \tag{3.60}$$

*où $\zeta$ est une constante positive assurant l'inversibilité de la matrice $H_{app}$ et $I$ est la matrice identité.*

### 3.4.3 Estimateurs avec optimisation de l'ordre commensurable

L'estimateur *co-ftocls* : commensurate order optimisation combined to fractional third-order cumulants based least squares (respectivement *co-ftocils* : commensurate order optimisation combined to fractional third-order cumulants based iterative least squares) permet d'estimer les coefficients et l'ordre commensurable du modèle décrivant le système EIV non entier représenté par (3.51). L'idée est d'appliquer l'estimateur *ftocls* (respectivement *ftocils*) pour l'estimation des coefficients linéaires et d'utiliser le modèle estimé pour optimiser l'ordre de dérivation commensurable $\upsilon$ en appliquant la méthode d'optimisation numérique Gauss-Newton [Chetoui *et al.*, 2013c, 2012b].

En effet, l'ordre commensurable est estimé itérativement comme suit :

$$\upsilon^{i+1} = \upsilon^{i} - \lambda \left[ H_{app}^{-1} \frac{\partial J(\tau_1, \tau_2, \Theta)}{\partial \upsilon} \right] \Bigg|_{\upsilon = \upsilon^i} \tag{3.61}$$

Le gradient $\dfrac{\partial J(\tau_1, \tau_2, \Theta)}{\partial \upsilon}$ est défini par (3.57) et le Hessien approché $H_{app}$ par (3.58).

La fonction de sensibilité du vecteur de l'erreur de sortie $\varepsilon$ est donnée par :

$$\frac{\partial \varepsilon(\tau_1, \tau_2, \Theta)}{\partial \upsilon} = \frac{\partial C_{uyu}(\tau_1, \tau_2)}{\partial \upsilon} - \left( \frac{\sum_{m=0}^{M} m b_m p^{m\upsilon}}{\left(1 + \sum_{n=1}^{N} a_n p^{n\upsilon}\right)} - \frac{\sum_{n=1}^{N} n a_n p^{n\upsilon} \sum_{m=0}^{M} b_m p^{m\upsilon}}{\left(1 + \sum_{n=1}^{N} a_n p^{n\upsilon}\right)^2} \right) \ln(p) C_{uuu}(\tau_1, \tau_2) \tag{3.62}$$

La mise en œuvre de l'estimateur *co-ftocls* peut être résumée principalement en deux étapes :

- ***Étape 1 :*** pour $i = 0$,
  - ◇ initialiser $\upsilon^0$ et $\Lambda$, avec $\Lambda$ est une constante positive qui permet la décroissance du critère à minimiser ;
  - ◇ calculer $J^0$.

  $i = 1$
- ***Étape 2 : méthode d'optimisation de Gauss-Newton***

  faire
  - ◇ initialiser $\lambda = \Lambda$ ;
  - ◇ faire
    - ♦ affiner l'ordre commensurable : $\upsilon^i = \upsilon^{i-1} - \lambda \left[ H_{app}^{-1} \dfrac{\partial J(\tau_1, \tau_2, \Theta)}{\partial \upsilon} \right] \Bigg|_{\upsilon = \upsilon^{i-1}}$ ;
    - ♦ calculer les coefficients linéaires en appliquant l'estimateur *ftocls* (respectivement *ftocils*) ;
    - ♦ calculer le critère $J^i(\tau_1, \tau_2, \Theta) = \dfrac{1}{2} \left\| \varepsilon(\tau_1, \tau_2, \hat{\Theta}^i) \right\|^2$, avec $\hat{\Theta}^i$ désigne le vecteur des paramètres estimé à l'itération $i$ ;
    - ♦ $\lambda = \dfrac{\lambda}{2}$ ;

  tant que $J^i > J^{i-1}$

  $i = i + 1$

  tant que $\dfrac{\left\| \hat{\theta}^i_{co-ftocls} - \hat{\theta}^{i-1}_{co-ftocls} \right\|}{\left\| \hat{\theta}^{i-1}_{co-ftocls} \right\|} > \epsilon$ et $i > i_{max}$.

où $i_{max}$ désigne le nombre d'itérations maximal.

## 3.5 Exemple de simulation numérique

Soit le système décrit par l'équation différentielle non entière suivante :

$$y(t) + ap^{\upsilon}y(t) = bu(t) \tag{3.63}$$

avec $a = 1$, $b = 1$ et $\upsilon = 0.5$. La pulsation de coupure du filtre à variables d'état non entier (3.24) est choisie à $\lambda = 3$ rad/sec.

Les mesures des signaux d'entrée et de sortie sont échantillonnées avec une période d'échantillonnage de $h = 0.1$ sec. Le nombre de mesures est fixé à $N_t = 2000$.

Cette section est divisée principalement en deux parties. Dans la première partie, l'ordre de dérivation est supposé connu et seuls les coefficients de l'équation différentielle non entière (3.63) sont estimés en utilisant les estimateurs *ftocls* et *ftocils*. Dans la deuxième partie, l'ordre commensurable et les paramètres sont estimés par les deux méthodes *co-ftocls* et *co-ftocils*.

Les performances des différents algorithmes sont étudiées à l'aide de simulations de Monte Carlo, dans deux situations de bruits différentes :

- bruits blancs sur l'entrée et sur la sortie ;
- bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie.

Le rapport signal-sur-bruit (RSB), défini par :

$$RSB = 10\log_{10}\left(\frac{P_{x_0}}{P_{\tilde{x}}}\right) \tag{3.64}$$

où $x_0$ désigne le vrai signal, $\tilde{x}$ est le bruit et $P_x$ représente la puissance moyenne du signal $x$, est fixé à 15dB sur l'entrée et sur la sortie du système.

La qualité de l'estimation est quantifiée par l'erreur quadratique moyenne relative définie par :

$$EQMR = \sqrt{\frac{1}{n_{mc}}\sum_{i=1}^{n_{mc}}\frac{\left\|\hat{\theta}_i - \theta_0\right\|^2}{\left\|\theta_0\right\|^2}} \tag{3.65}$$

où $\hat{\theta}_i$ désigne l'estimée à la $i^{\text{ième}}$ itération et $n_{mc}$ est le nombre de réalisations de la simulation de Monte Carlo.

Pour l'algorithme itératif, le critère d'arrêt choisi tout au long des simulations est $\epsilon = 10^{-4}$ ou $i_{max} = 50$.

Le tableau 3.1 présente un récapitulatif des paramètres de simulation numérique.

Tableau 3.1 – Récapitulation des paramètres de simulation numérique.

| **Paramètres** | $a$ | $b$ | $v$ | $N_t$ | $h$ | $\epsilon$ | $i_{max}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Valeur** | 1 | 1 | 0.5 | 2000 | 0.1 | $10^{-4}$ | 50 |

### 3.5.1 Estimation des coefficients

Cette section est divisée en cinq parties permettant l'étude de certains aspects des algorithmes développés dans le contexte EIV : *ftocls* et *ftocils*. Dans la première partie, l'influence du choix de la distribution du signal d'entrée non bruité $u_0$ est étudiée à l'aide de simulations de Monte Carlo. L'influence du choix de l'hyper parameter $T$ sur la qualité de l'estimation est ensuite étudiée. Un bon choix de $T$ et de $u_0$ permet d'analyser, dans la troisième partie, les performances des estimateurs *ftocls* et *ftocils* à l'aide de simulations de Monte Carlo. Une étape de validation est indispensable pour vérifier l'attitude des modèles estimés à représenter le système pour n'importe quelle entrée, cette étape fait l'objet de la quatrième partie de la présente section. Enfin, une étude sur le choix de l'ordre commensurable est présentée dans la dernière partie.

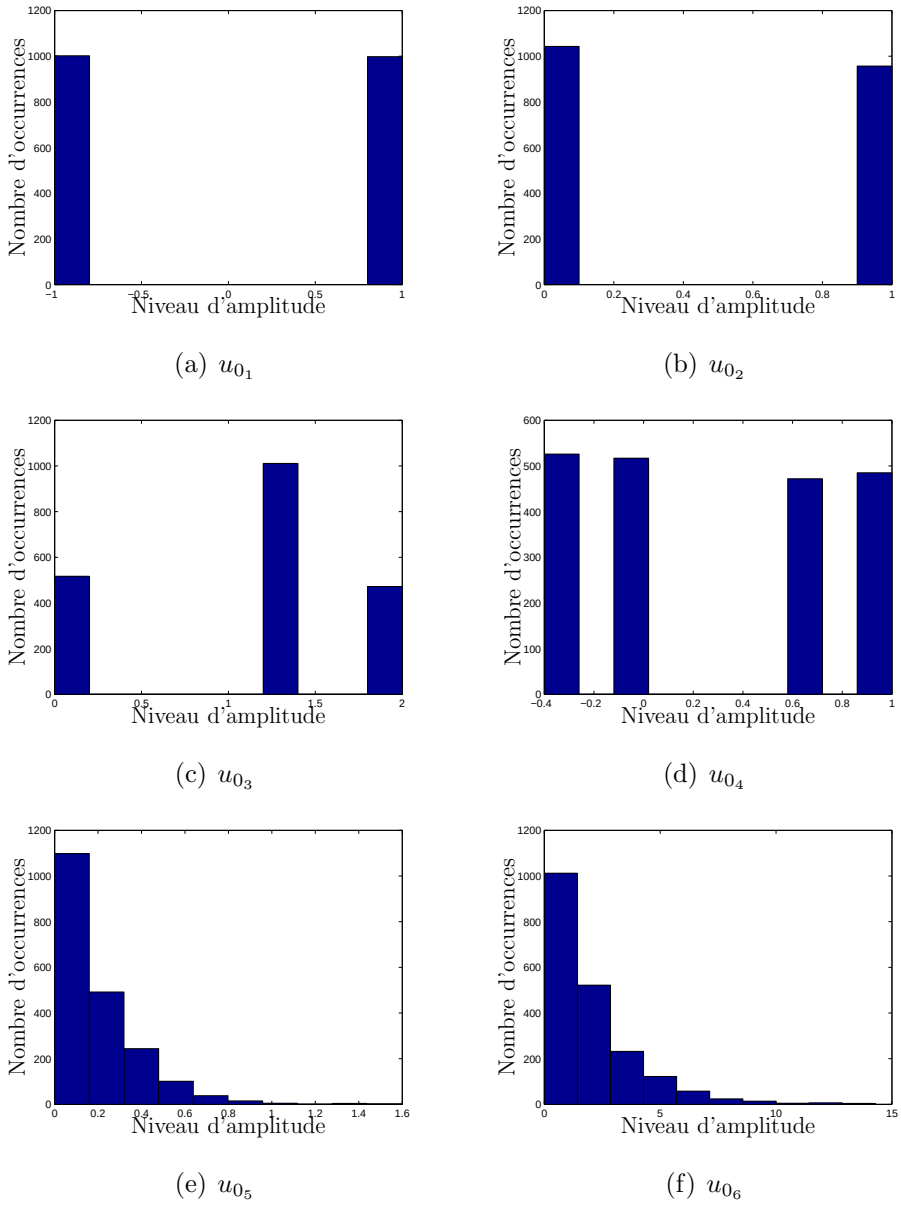
#### 3.5.1.1 Etude du choix du signal d'entrée non bruité

Les deux algorithmes *ftocls* et *ftocils* ayant été développés sous l'hypothèse d'asymétrie du signal d'entrée non bruité $u_0$, l'influence de sa distribution sur la qualité de l'estimation est étudiée dans cette section. Les signaux choisis sont de distributions différentes :

- $u_{0_1}$ est une séquence binaire pseudo aléatoire à deux niveaux d'amplitude centrée en 0 de distribution symétrique ;
- $u_{0_2}$ est une séquence binaire pseudo aléatoire à deux niveaux d'amplitude centrée en 0.5 de distribution asymétrique ;
- $u_{0_3}$ est une séquence pseudo aléatoire à trois niveaux d'amplitude de distribution asymétrique ;
- $u_{0_4}$ est une séquence binaire pseudo aléatoire à quatre niveaux d'amplitude de distribution asymétrique ;
- $u_{0_5}$ est un bruit blanc de loi exponentielle de distribution asymétrique ;
- $u_{0_6}$ est une séquence aléatoire de loi $\chi_2$ à deux degrés de liberté de distribution asymétrique.

Il est important de noter que l'hypothèse $H_2$ est vérifiée pour tous les signaux sauf $u_{01}$.

Les distributions des différents signaux choisis sont présentées sur la figure 3.2.




(a) $u_{0_1}$ (b) $u_{0_2}$

(c) $u_{0_3}$ (d) $u_{0_4}$

(e) $u_{0_5}$ (f) $u_{0_6}$

Figure 3.2 – Histogrammes des différents signaux d'entrée non bruités.

Pour analyser les performances des algorithmes développés, six simulations de Monte Carlo sont réalisées avec $n_{mc} = 200$ réalisations de bruits dont le RSB est fixé à 15dB à la fois sur les signaux d'entrée et de sortie. Les deux estimateurs sont appliqués pour chaque réalisation du bruit avec $T = 100$. Les tableaux 3.2 et 3.3 contiennent les moyennes des estimées obtenues respectivement par les estimateurs *ftocls* et *ftocils*, les écarts types des paramètres estimés et l'EQMR correspondante.

Tableau 3.2 – Estimation par *ftocls* : influence du signal d'entrée non bruité.

| Signal d'entrée non bruité | $\hat{a}$ | $\hat{\sigma_a}$ | $\hat{b}$ | $\hat{\sigma_b}$ | $EQMR$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_{0_1}$ | 0.736 | 0.893 | 0.967 | 0.719 | 0.828 |
| $u_{0_2}$ | 1.023 | 0.017 | 1.000 | 0.004 | 0.021 |
| $u_{0_3}$ | 1.069 | 0.027 | 1.003 | 0.004 | 0.052 |
| $u_{0_4}$ | 1.009 | 0.015 | 1.000 | 0.006 | 0.013 |
| $u_{0_5}$ | 0.906 | 0.019 | 0.995 | 0.005 | 0.067 |
| $u_{0_6}$ | 0.905 | 0.019 | 0.995 | 0.004 | 0.068 |
| Vrais paramètres | 1 | - | 1 | - | - |

Tableau 3.3 – Estimation par *ftocils* : influence du signal d'entrée non bruité.

| Signal d'entrée non bruité | $\hat{a}$ | $\hat{\sigma_a}$ | $\hat{b}$ | $\hat{\sigma_b}$ | $EQMR$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_{0_1}$ | 0.765 | 0.637 | 1.064 | 0.747 | 0.714 |
| $u_{0_2}$ | 1.029 | 0.016 | 1.001 | 0.004 | 0.024 |
| $u_{0_3}$ | 1.070 | 0.025 | 1.003 | 0.004 | 0.052 |
| $u_{0_4}$ | 1.010 | 0.014 | 1.000 | 0.006 | 0.013 |
| $u_{0_5}$ | 0.809 | 0.015 | 0.990 | 0.004 | 0.135 |
| $u_{0_6}$ | 0.807 | 0.016 | 0.990 | 0.004 | 0.137 |
| Vrais paramètres | 1 | - | 1 | - | - |

Les distributions des estimées obtenues par les estimateurs *ftocls* et *ftocils* sont présentées respectivement sur la figure 3.3 et la figure 3.4.

Pour $u_{0_1}$, les moyennes des estimées obtenues par *ftocls* et *ftocils* sont très biaisées à cause de la distribution symétrique du signal d'entrée non bruité. En effet,

$$C_{uuu}(\tau_1, \tau_2) = C_{u_{0_1} u_{0_1} u_{0_1}}(\tau_1, \tau_2) + C_{\tilde{u}\tilde{u}\tilde{u}}(\tau_1, \tau_2)$$

or $u_{0_1}$ et $\tilde{u}$ sont deux signaux symétriques et leurs cumulants d'ordre trois sont nuls. Par conséquent,

$$C_{uuu}(\tau_1, \tau_2) = 0$$

Pour $u_{0_2}$ et $u_{0_3}$, les moyennes des estimées ne sont pas biaisées et proches des vrais paramètres mais les résultats obtenus par les deux estimateurs *ftocls* et *ftocils* en utilisant la séquence binaire pseudo aléatoire à quatre niveaux d'amplitude ($u_{0_4}$) donne des meilleurs résultats avec une EQMR minimale.

Malgré leur distribution asymétrique, les deux signaux $u_{0_5}$ et $u_{0_6}$ donnent des estimées biaisées et par conséquence une EQMR importante.

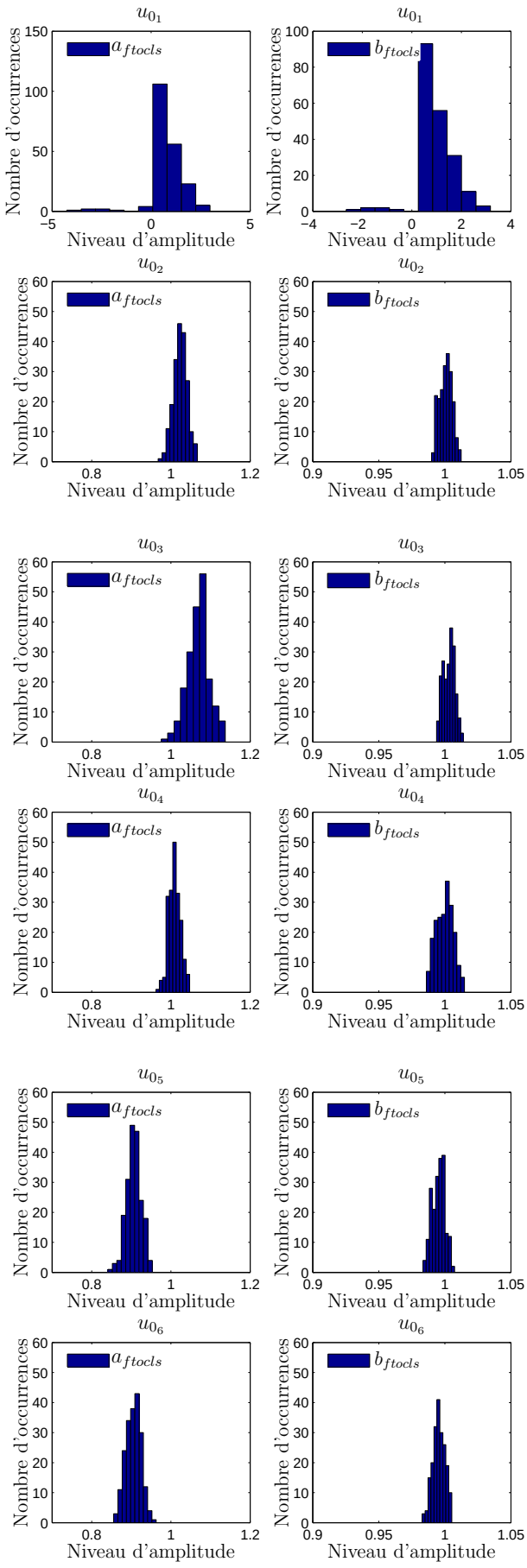





Figure 3.3 – Influence du choix du signal d'entrée non bruité : histogrammes des estimées obtenues par l'estimateur *ftocls*.

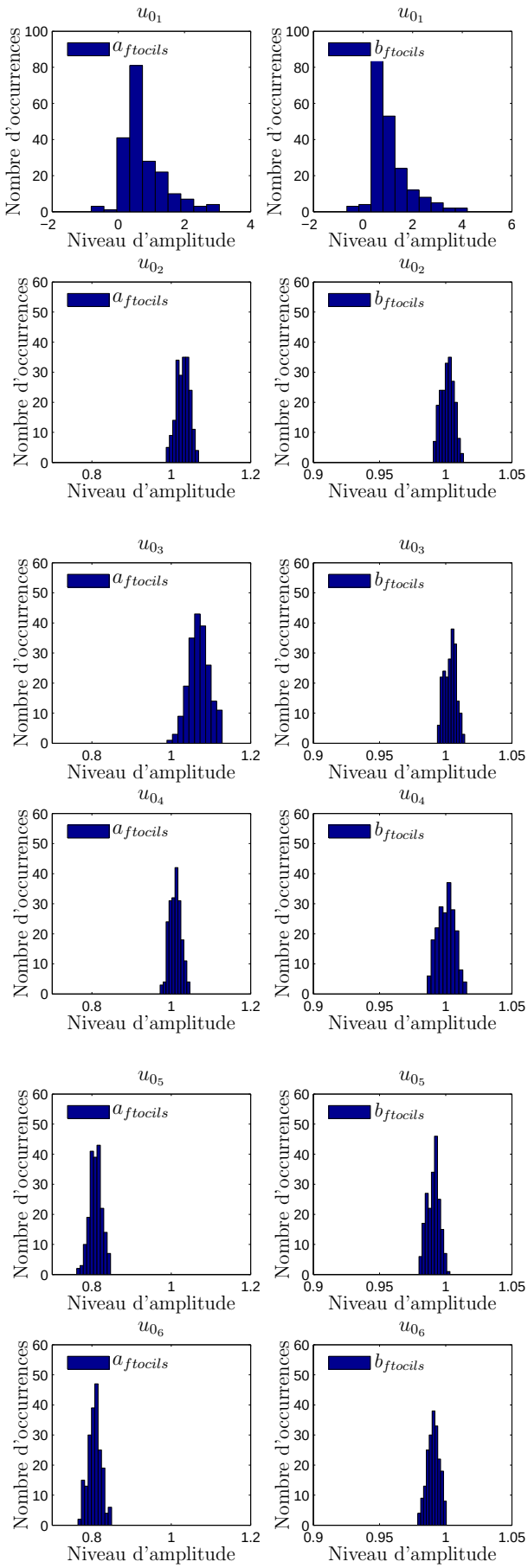





Figure 3.4 – Influence du choix du signal d'entrée non bruité : histogrammes des estimées obtenues par l'estimateur *ftocils*.

**Remarque 3.3** *Dans la suite de l'exemple de simulations numériques le signal d'entrée non bruité $u_0$ est choisi une séquence binaire pseudo-aléatoire à quatre niveaux d'amplitude. L'hypothèse d'asymétrie de la distribution du signal d'entrée non bruité est satisfaite.*

#### 3.5.1.2 Influence de l'hyper-paramètre T

L'hyper-paramètre $T$ est choisi supérieur à $N + M + 1$ pour assurer la non singularité de la matrice à inverser dans l'estimateur $\hat{\theta}_{ftocls}(\tau_2, T)$ et $\hat{\theta}_{ftocils}(\tau_2, T)$. Son influence sur la qualité de l'estimation des coefficients du modèle non entier (3.63) est étudiée dans cette section.

Les mesures des signaux d'entrée et de sortie sont supposées entachées de deux bruits blancs discrets ayant un RSB qui vaut 15dB. Le pas d'échantillonnage est fixé à $h = 0.1$ sec et le nombre de mesures à $N_t = 2000$ (Fig.3.5). Les deux algorithmes *ftocls* et *ftocils* sont appliqués avec différentes valeurs de $T$ ($T$ est choisi entre 5 et 100).

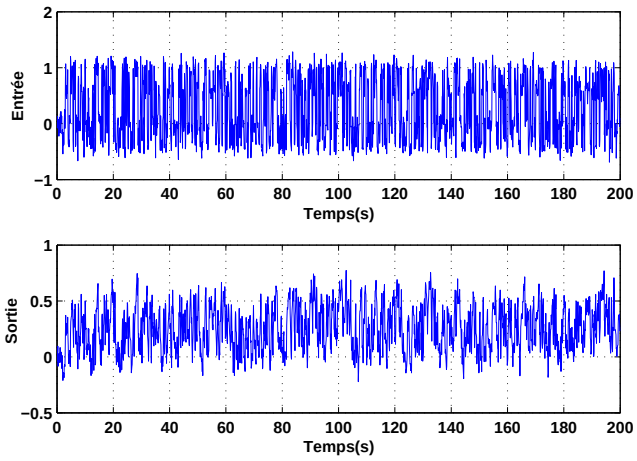



Figure 3.5 – Signaux d'entrée et de sortie bruités (RSB=15dB).

L'évaluation des estimées en fonction de $T$ (Fig.3.6) montre que pour de faibles valeurs de $T$ ($T < 10$) les estimées sont de mauvaise qualité. En effet, les cumulants d'ordre trois croisés sont estimés à partir d'un petit nombre d'échantillons qui est insuffisant et conduit à des estimées biaisées. Cependant, au delà de $T = 10$, l'estimation s'améliore et les coefficients estimés par *ftocls* et *ftocils* convergent vers les vrais valeurs.

**Remarque 3.4** *L'hyper-paramètre peut être choisi de façon empirique au delà d'une valeur minimale qui dépend des aspects pratiques du système. D'ailleurs, les deux algorithmes développés ne sont pas très sensibles à l'hyper-paramètre. Dans la suite de l'exemple de simulation numérique $T$ est fixé à* 100.

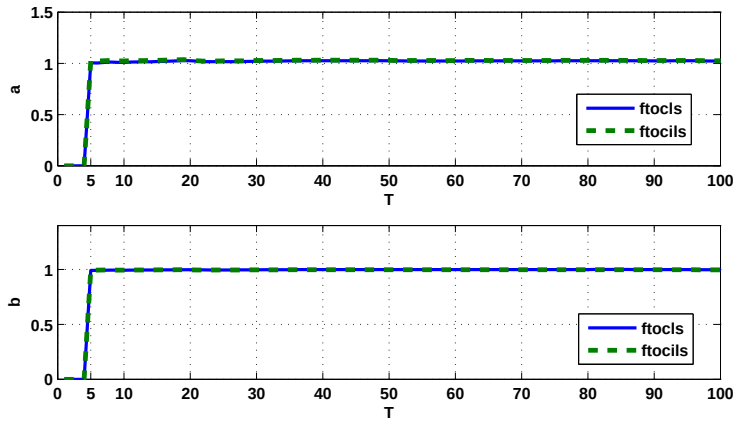



Figure 3.6 – Evolution des estimées obtenues par l'estimateur *ftocls* et *ftocils* en fonction de l'hyper-paramètre $T$.

#### 3.5.1.3 Etude de l'influence du bruit sur l'entrée et la sortie

Les performances des algorithmes proposés sont analysées à l'aide de simulations de Monte Carlo et comparées à celles obtenues par la méthode *srivcf*[3] [Victor, 2010] disponible dans la boîte à outils CRONE sous MATLAB.

Pour étudier l'influence du bruit sur l'entrée et sur la sortie du système, deux situations de bruits additifs sont considérés dans cet exemple.

Pour avoir une bonne précision en estimation, les méthodes d'identification fondées sur les statistiques d'ordre supérieur nécessitent une grande quantité de données. Nous avons exploité les simulations de Monte Carlo dans ce paragraphe pour étudier l'influence de la longueur du jeu de données sur la qualité d'estimation. Les différents estimateurs sont appliqués pour $N_t = 500$ et $N_t = 2000$.

Les résultats de simulation sont résumés dans les tableaux 3.4, 3.5 3.6 et 3.7 qui contiennent les moyennes des estimées obtenues par les estimateurs *srivcf*, *ftocls* et *ftocils*, leurs écarts types et l'EQMR correspondante.

- ***Bruit blanc sur l'entrée et la sortie :***

La simulation de Monte Carlo est réalisée avec $n_{mc} = 500$ réalisations de bruits blancs différents dont le RSB est fixé à 15dB.

3. Simplified Refined Instrumental Variable for Continuous-time and Fractional models

Tableau 3.4 – Simulation de Monte carlo pour l'estimateur *srivcf*, *ftocls* et *ftocils* : bruits blancs sur l'entrée et la sortie ($N_t = 500$).

| Méthode | $\hat{a}$ | $\hat{\sigma_a}$ | $\hat{b}$ | $\hat{\sigma_b}$ | $EQMR$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *srivcf* | 1.165 | 0.187 | 1.026 | 0.03 | 0.25 |
| *ftocls* | 0.989 | 0.043 | 0.996 | 0.025 | 0.048 |
| *ftocils* | 0.978 | 0.045 | 0.993 | 0.025 | 0.053 |
| vrai paramètres | 1 | - | 1 | - | - |

Tableau 3.5 – Simulation de Monte carlo pour l'estimateur *srivcf*, *ftocls* et *ftocils* : bruits blancs sur l'entrée et la sortie ($N_t = 2000$).

| Méthode | $\hat{a}$ | $\hat{\sigma_a}$ | $\hat{b}$ | $\hat{\sigma_b}$ | $EQMR$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *srivcf* | 1.181 | 0.182 | 1.007 | 0.114 | 0.257 |
| *ftocls* | 0.999 | 0.017 | 0.999 | 0.01 | 0.018 |
| *ftocils* | 0.998 | 0.017 | 0.996 | 0.01 | 0.019 |
| vrai paramètres | 1 | - | 1 | - | - |

Lorsque les bruits sont tous deux blancs, un biais apparaît sur les estimées obtenues par l'algorithme *srivcf*, plus précisément sur $\hat{a}$. Bien que la méthode *srivcf* ne soit pas développée pour l'identification des systèmes EIV non entiers, elle fournit des estimées qui ne sont pas fortement biaisées. Ce résultat peut être expliqué par l'étape de pré-filtrage qu'utilise l'algorithme *srivcf*. Les deux estimateurs *ftocls* et *ftocils* donnent des bons résultats en terme de minimisation de l'erreur d'estimation et en terme d'absence du biais d'estimation.

Les distributions des paramètres estimés représentées par les deux figures 3.7 et 3.8 montrent la consistence des estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre trois dans le contexte où les signaux d'entrée et de sortie sont entachés de bruits blancs. Il est clair que la méthode fondée sur les variables instrumentales est moins précise. Les estimées obtenues par l'estimateur *ftocls* et *ftocils* sont pratiquement comparables. Pour $N_t = 500$, les estimées obtenues par les deux estimateurs *ftocls* et *ftocils* sont acceptables mais elles deviennent plus précises lorsque $N_t = 2000$. Ces résultats sont justifiés par les valeurs des variances et de l'EQMR et expliqués par le fait que les cumulants d'ordre trois nécessitent

un grand nombre d'échantillons pour atteindre une bonne précision.

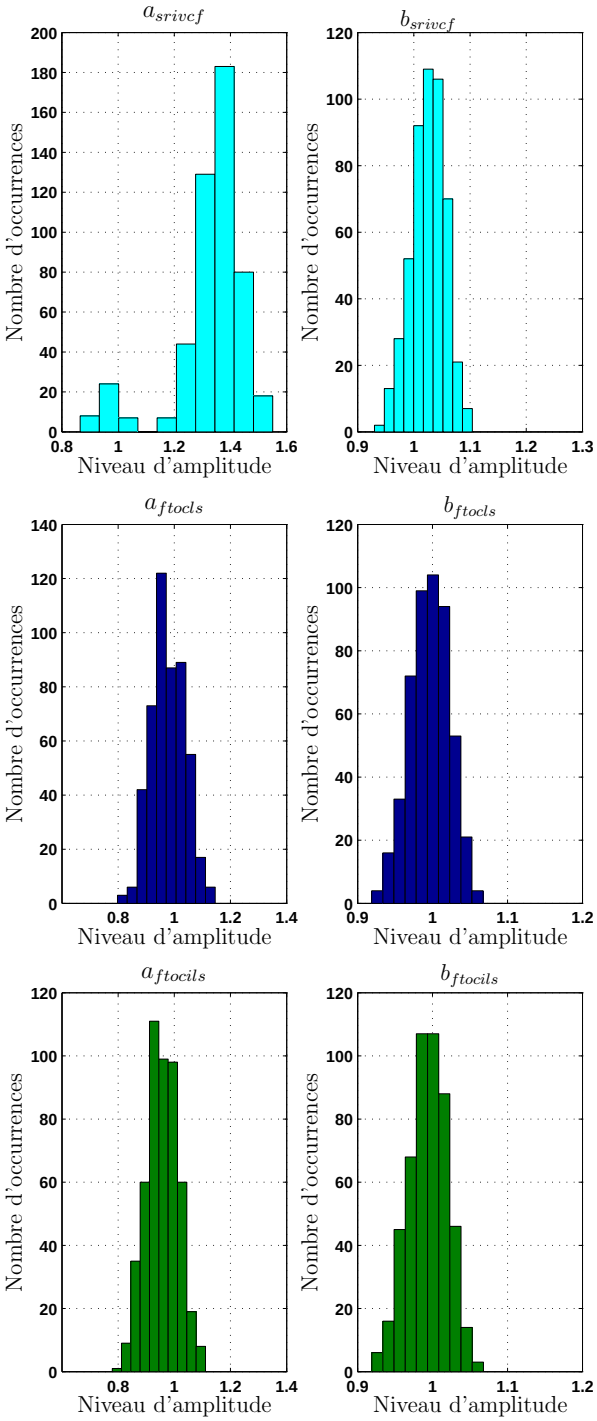



Figure 3.7 – Histogrammes des estimées obtenues par les algorithmes *srivcf*, *ftocls* et *ftocils* : bruits blancs sur l'entrée et sur la sortie ($N_t = 500$).

- ***Bruit blanc sur l'entrée et bruit coloré sur la sortie :***

  La simulation de Monte Carlo est réalisée avec $n_{mc} = 500$ réalisations de bruits

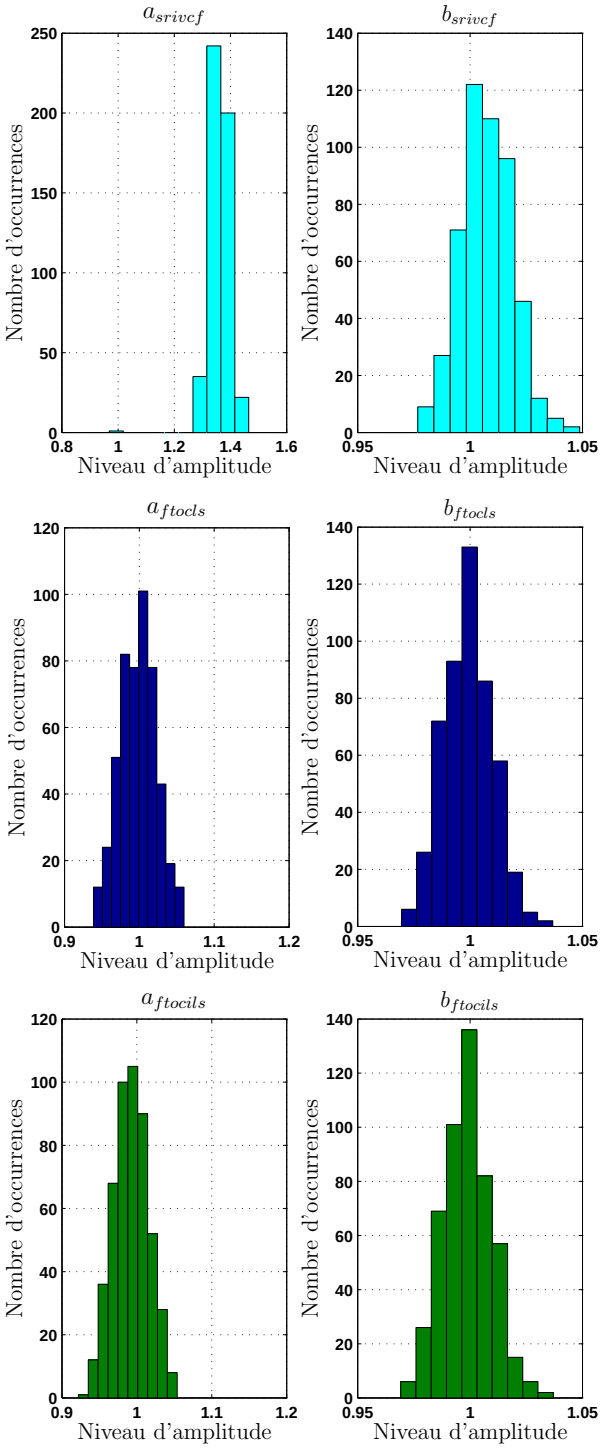



Figure 3.8 – Histogrammes des estimées obtenues par les algorithmes *srivcf*, *ftocls* et *ftocils* : bruits blancs sur l'entrée et sur la sortie ($N_t = 2000$).

différents définis par :

$$\begin{cases} \tilde{u}(t_k) = e^{\tilde{u}}(t_k) \\ \tilde{y}(t_k) = \dfrac{1 + 0.3q^{-1}}{1 - 0.3q^{-1}} e^{\tilde{y}}(t_k) \end{cases} \tag{3.66}$$

où $e^{\tilde{u}}(t_k)$ et $e^{\tilde{y}}(t_k)$ sont deux bruits blancs dont les variances sont ajustées de sorte que le RSB soit égal à 10dB.

Tableau 3.6 – Simulation de Monte Carlo pour les deux estimateurs *ftocls* et *ftocils* : bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie ($N_t = 500$).

| Méthode | $\hat{a}$ | $\hat{\sigma_a}$ | $\hat{b}$ | $\hat{\sigma_b}$ | $EQMR$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *srivcf* | 1.16 | 0.20 | 1.029 | 0.038 | 0.257 |
| *ftocls* | 0.996 | 0.060 | 0.979 | 0.032 | 0.067 |
| *ftocils* | 0.992 | 0.061 | 0.967 | 0.032 | 0.073 |
| vrai paramètres | 1 | - | 1 | - | - |

Tableau 3.7 – Simulation de Monte Carlo pour les deux estimateurs *ftocls* et *ftocils* : bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie ($N_t = 2000$).

| Méthode | $\hat{a}$ | $\hat{\sigma_a}$ | $\hat{b}$ | $\hat{\sigma_b}$ | $EQMR$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *srivcf* | 1.18 | 0.53 | 1.007 | 0.015 | 0.259 |
| *ftocls* | 0.995 | 0.025 | 0.998 | 0.014 | 0.027 |
| *ftocils* | 0.992 | 0.024 | 0.998 | 0.014 | 0.027 |
| vrai paramètres | 1 | - | 1 | - | - |

Lorsque le bruit sur la sortie est coloré, les performances des méthodes restent presque les mêmes que précédemment. L'estimateur *srivcf* donne un biais d'estimation sur $\hat{a}$ tandis que les deux estimateurs *ftocls* et *ftocils* montrent leur robustesse face à différents types de bruits.

Les distributions des paramètres estimés représentées par les deux figures 3.9 et 3.10 montrent la consistence des estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre trois même en présence d'un bruit coloré sur le signal de sortie. La méthode *srivcf* fournit des estimées biaisées. Lorsque le nombre de données augmente, le biais de la méthode *srivcf* ne décroît pas significativement, ce qui justifie que la méthode ne peut pas fournir des estimées précises dans un contexte EIV. Par contre, les estimateurs fondés sur les cumulants d'ordre trois fournissent des estimées plus précises avec des variances et une EQMR moins faibles lorsque $N_t$ augmente.

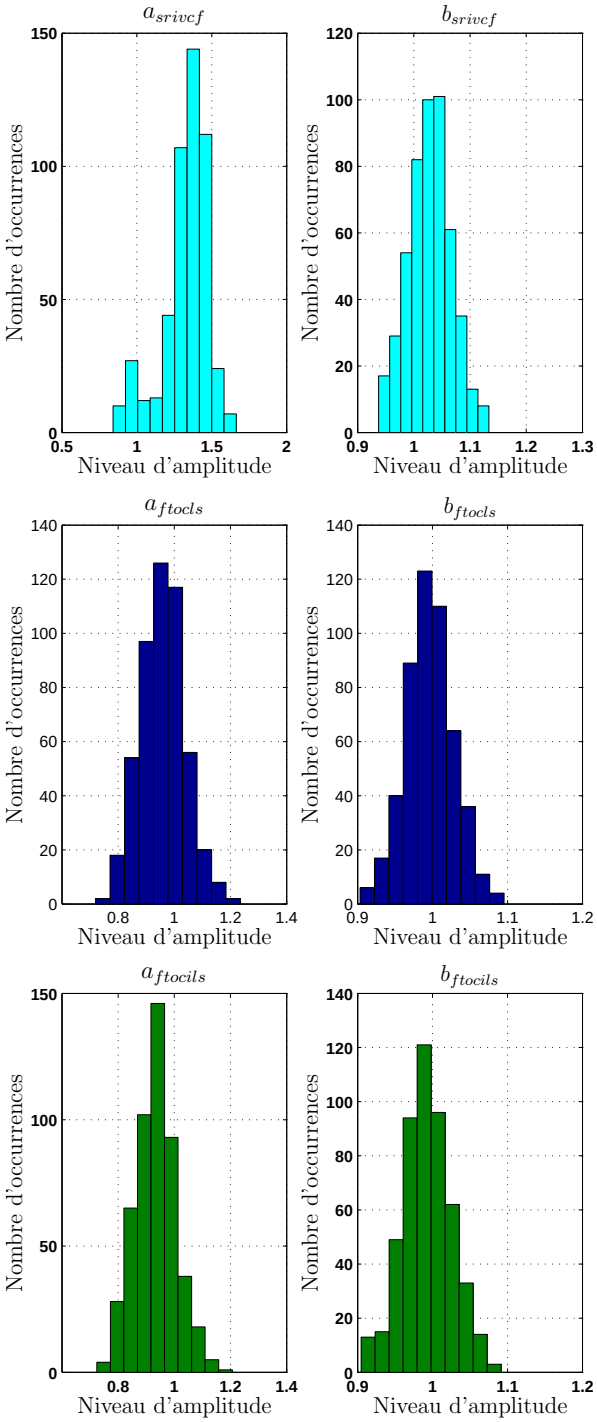



Figure 3.9 – Histogrammes des estimées obtenues par les algorithmes *srivcf*, *ftocls* et *ftocils* : bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie ($N_t = 500$).

#### 3.5.1.4 Validation des modèles estimés

L'étape de validation consiste à utiliser un jeu de données différent de celui utilisé dans l'étape d'estimation et à comparer les réponses des modèles estimés par les différents

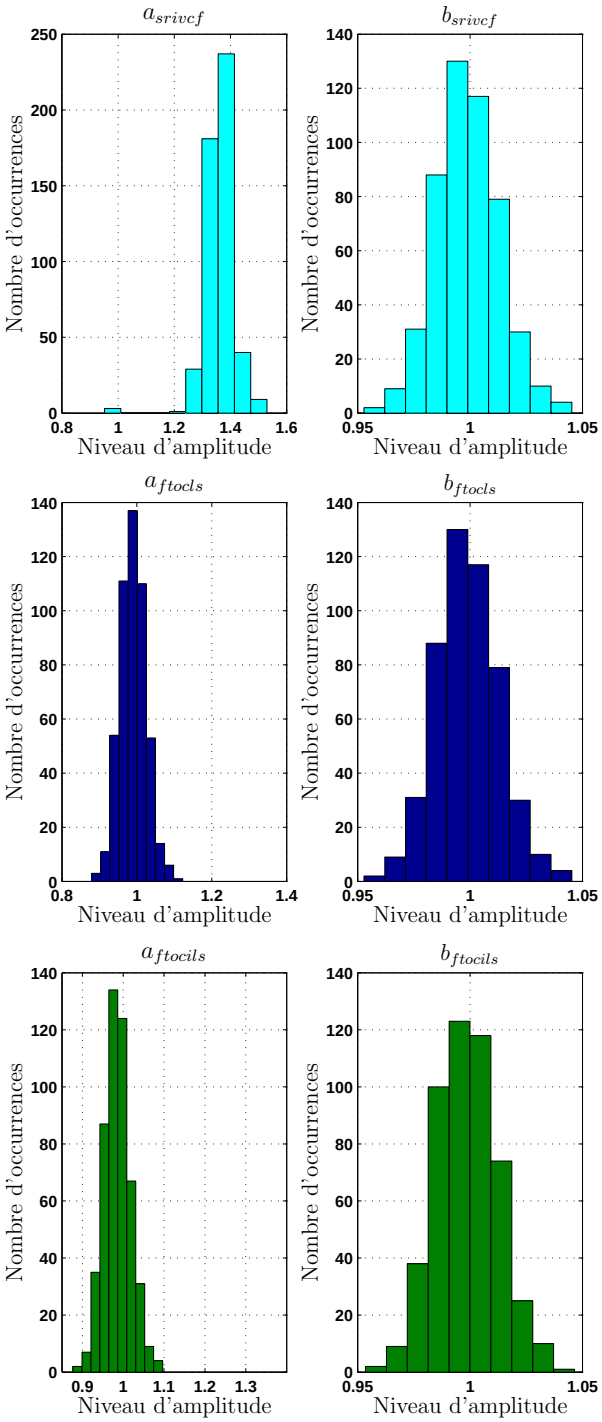



Figure 3.10 – Histogrammes des estimées obtenues par les algorithmes *srivcf*, *ftocls* et *ftocils* : bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie ($N_t = 2000$).

estimateurs à la sortie réelle du système. Le signal d'entrée choisi en validation est une SBPA à trois niveaux d'amplitude. Les données de validation sont présentées sur la figure 3.11. La figure 3.12 montre la superposition des sorties des modèles estimés par les deux estimateurs fondés sur les SOS, par opposition à l'estimateur *srivcf*.

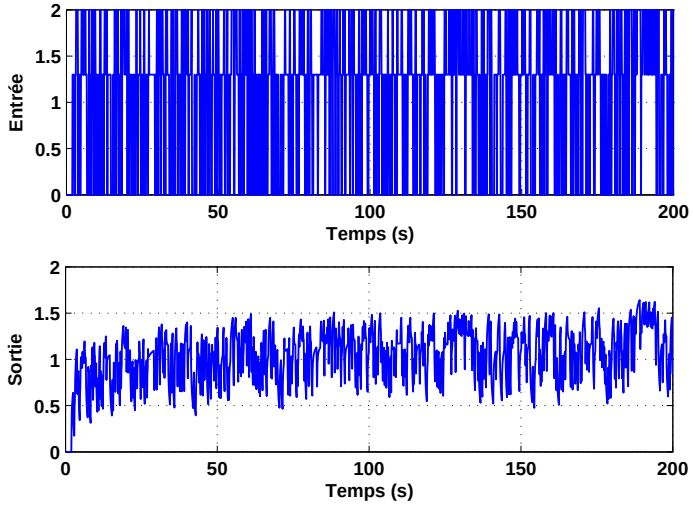
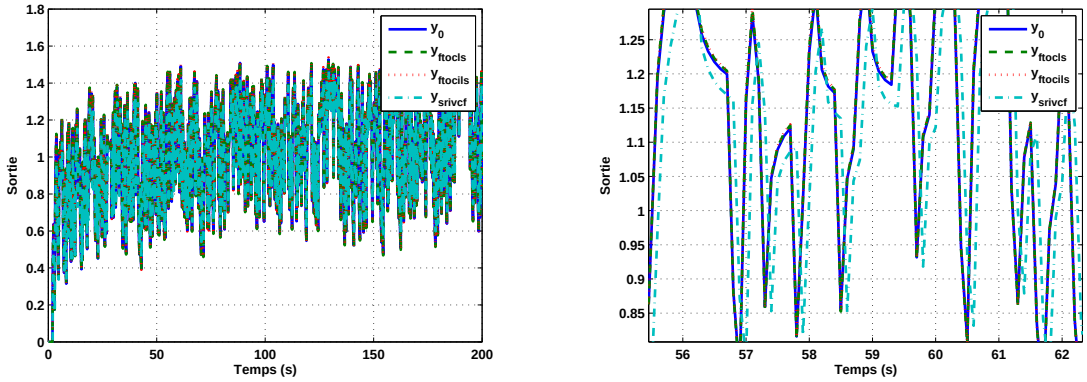



Figure 3.11 – Données de validation.




(a) (b)

Figure 3.12 – Réponses temporelles des modèles estimés par *srivcf*, *ftocls* et *ftocils* (données de validation). (a) : sur une fenêtre de 200 sec, (b) : zoom entre 55 sec et 63 sec.

#### 3.5.1.5 Choix de l'ordre commensurable

Soit la norme $L_2$ de l'erreur de sortie définie par :

$$J_{dB} = 10 \log \left( \frac{\|y - \hat{y}\|^2}{\|y\|^2} \right) \tag{3.67}$$

où $y$ désigne la sortie du système entachée d'un bruit additif et $\hat{y}$ désigne la sortie estimée du système. L'ordre commensurable est supposé inconnu et les deux estimateurs *ftocls* et *ftocils* sont appliqués pour estimer les coefficients du modèle non entier (3.63) pour différents valeurs de $\upsilon \in (0, 2)$. La norme $L_2$ de l'erreur de sortie est évaluée pour chaque ordre commensurable et tracée sur la figure 3.13. Il est clair que la valeur optimale du

critère $J(dB)$ vaut $-RSB$ et qu'elle est obtenue à l'ordre $\upsilon = 0.5$.

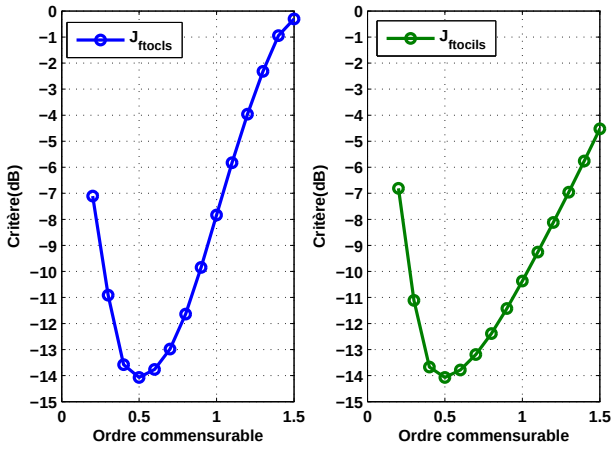



Figure 3.13 – Critère obtenu par l'estimateur *ftocls* et *ftocils* en fonction de l'ordre commensurable du modèle (bruits blancs sur l'entrée et sur la sortie).

Il est clair, en absence de connaissance a priori sur l'ordre de dérivation qu'un ordre optimal peut exister d'où l'intérêt d'une estimation conjointe des coefficients et de l'ordre commensurable.

### 3.5.2 Estimation conjointe des coefficients et des ordres de dérivation

Dans cette section, l'ordre de dérivation dans l'équation différentielle non entière (3.63) est supposé inconnu. L'évaluation du critère de minimisation de l'erreur de sortie représenté par la figure 3.13 permet de donner une connaissance *a priori* de l'ordre commensurable. En outre, ce dernier peut être estimé en même temps que les coefficients linéaires du modèle non entier en appliquant les deux estimateurs *co-ftocls* et *co-ftocils*.

Les performances des algorithmes proposés *co-ftocls* et *co-ftocils* sont étudiées à l'aide de simulations de Monte Carlo en utilisant $n_{mc} = 300$ réalisations de bruit différentes. Pour chaque réalisation de bruit, les deux estimateurs *co-ftocls* et *co-ftocils* sont appliqués pour estimer les coefficients et l'ordre de dérivation du modèle (3.63). L'initialisation de l'ordre commensurable est fixée à $\upsilon^0 = 1$.

Les deux situations de bruits décrites dans la section (3.5.1.3), à savoir bruit blanc sur l'entrée et sur la sortie et bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie, sont considérées dans cette section. Les résultats d'estimation sont résumés dans les tableaux 3.8 et 3.9.

Ils contiennent les moyennes et les écarts-types des estimées obtenues respectivement par l'algorithme *co-ftocls* et *co-ftocils*.

Tableau 3.8 – Simulation de Monte Carlo pour les deux estimateurs *co-ftocls* et *co-ftocils* : bruit blanc sur l'entrée et sur la sortie.

| Méthode | $\hat{a}$ | $\hat{\sigma_a}$ | $\hat{b}$ | $\hat{\sigma_b}$ | $\hat{\upsilon}$ | $\hat{\sigma_\upsilon}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $co-ftocls$ | 1.01 | 0.03 | 0.99 | 0.01 | 0.503 | 0.009 |
| $co-ftocils$ | 1.03 | 0.04 | 1.00 | 0.01 | 0.494 | 0.010 |
| vrais paramètres | 1 | - | 1 | - | 0.5 | - |

Tableau 3.9 – Simulation de Monte Carlo pour les deux estimateurs *co-ftocls* et *co-ftocils* : bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie.

| Méthode | $\hat{a}$ | $\hat{\sigma_a}$ | $\hat{b}$ | $\hat{\sigma_b}$ | $\hat{\upsilon}$ | $\hat{\sigma_\upsilon}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $co-ftocls$ | 1.01 | 0.05 | 0.99 | 0.018 | 0.50 | 0.01 |
| $co-ftocils$ | 1.03 | 0.06 | 1.00 | 0.02 | 0.49 | 0.02 |
| vrais paramètres | 1 | - | 1 | - | 0.5 | - |

Les distributions des estimées obtenues par l'estimateur *co-ftocls* et *co-ftocils* sont représentées respectivement par la figure 3.14 et la figure 3.15.

Les deux méthodes d'estimation donnent de bons résultats dans les deux cas de bruits additifs. Ceci montre leur consistence et leur robustesse face à différents types de bruits additifs sur l'entrée et sur la sortie du système.

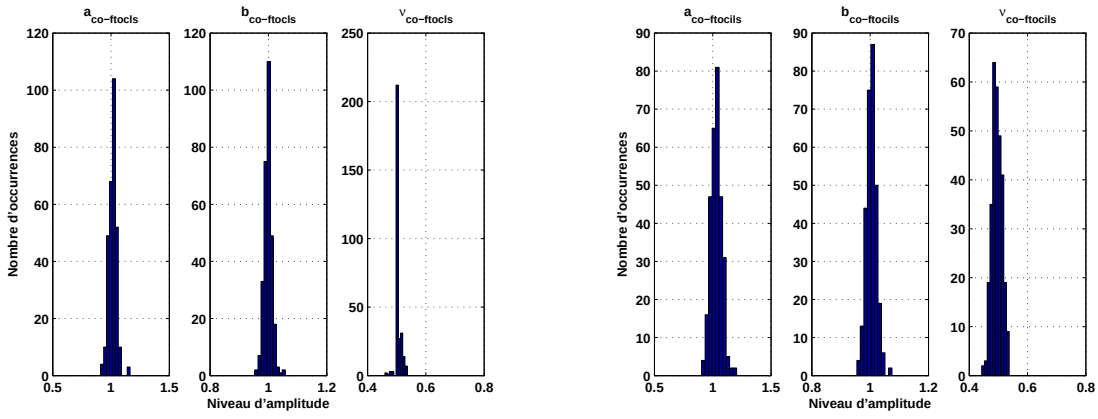



Figure 3.14 – Histogrammes des estimées obtenues par les algorithmes *co-ftocls* et *co-ftocils* : bruits blancs sur l'entrée et sur la sortie.

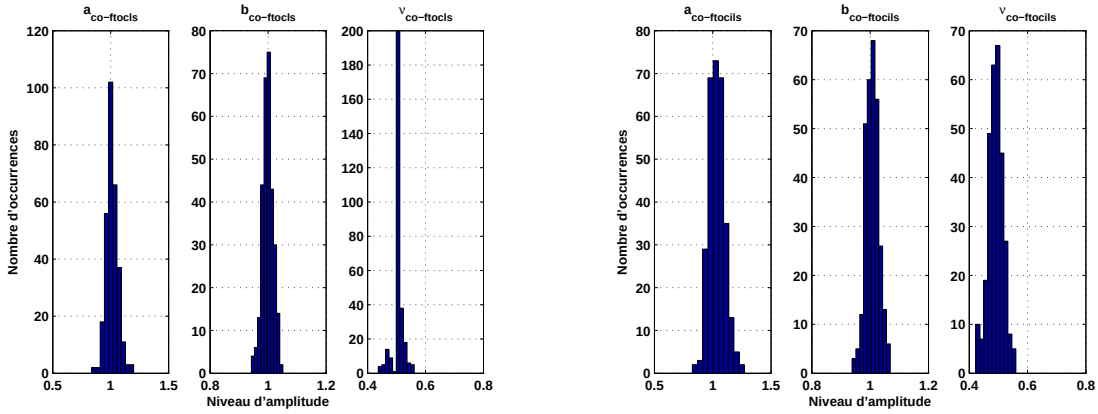



Figure 3.15 – Histogrammes des estimées obtenues par les algorithmes *co-ftocls* et *co-ftocils* : bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie.

## 3.6 Application à l'identification d'un système thermique

### 3.6.1 Description du système thermique

Le système est constitué d'un barreau en alliage d'aluminium de géométrie cylindrique, de longueur $l = 33$ cm et de diamètre $d = 4$ cm et d'une résistance chauffante $R_T$ de type RB25 27R développant un flux de chaleur à l'extrémité du barreau. Sur la paroi, 13 trous sont percées (Fig.3.16), permettant de loger des capteurs de température de type LM335 [Aoun *et al.*, 2010]. En fait, chaque capteur est muni d'une carte d'adaptation délivrant une tension $U(V)$ proportionnelle à la température $T(^{\circ}C)$ avec un facteur 10 :

$$T(^{\circ}C) = 10U(V) \tag{3.68}$$

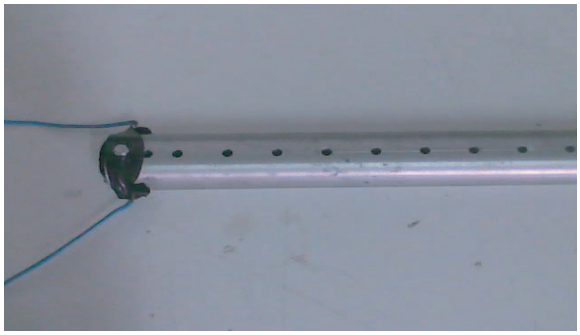


Figure 3.16 – Barreau en alliage d'aluminium de géométrie cylindrique.

Le signal d'entrée est le flux de chaleur généré par la résistance chauffante commandée

par un micro ordinateur à travers une carte électronique de puissance à base de relais. La densité de flux de chaleur est exprimée par :

$$d\varphi = \frac{\varphi}{S} \tag{3.69}$$

où $S = \pi r^2$ est la surface, $r$ désigne le rayon du barreau et $\varphi$ le flux de chaleur défini par :

$$\varphi = R_T I^2 = \frac{U^2}{R_T} \tag{3.70}$$

Afin d'assurer un transfert thermique unidirectionnel, la surface du barreau est isolée comme le montre la figure 3.17.

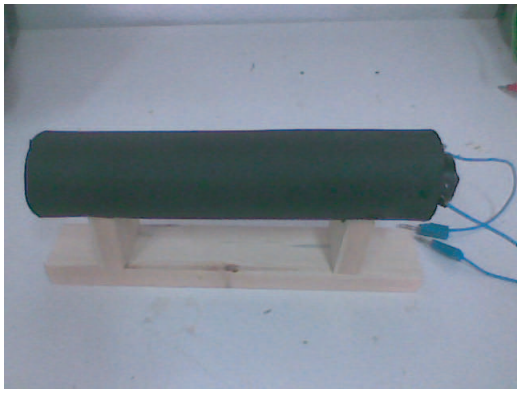


Figure 3.17 – Isolation thermique du procédé.

La résistance chauffante est alimentée par une alimentation stabilisée dont la puissance est mesurée ($I = 0.74A$ sous une tension $U = 20V$). La figure 3.18 présente une photographie du système global.

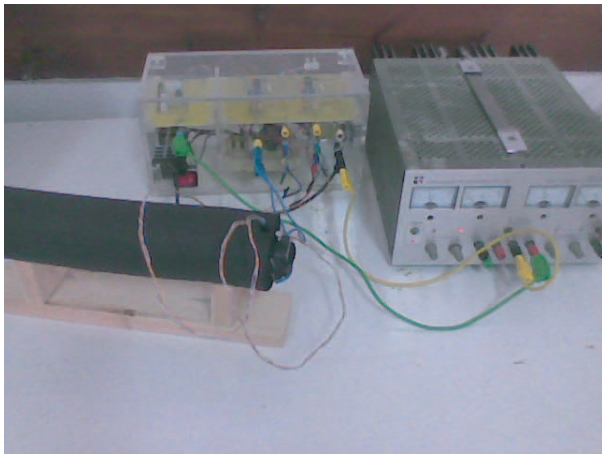


Figure 3.18 – Vue d'ensemble du système réel.

### 3.6.2 Modélisation du système thermique

Il s'agit de faire l'étude du transfert de chaleur dans les milieux semi-infinis de géométrie plane. Le milieu étudié est supposé homogène, de conductivité $\lambda$, de diffusivité $\alpha$ et de température initiale nulle en tout point [Oldham et Spanier, 1974]. Il est soumis à une densité de flux $\varphi(t)$ sur la surface normale sortante $\vec{n}$. Le transfert de chaleur $1D$ est régi par le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \dfrac{\alpha}{r^p}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^p \dfrac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right) \quad , \quad 0 < r < \infty, \quad t > 0 \\ -\lambda \dfrac{\partial T(r,t)}{\partial r} = \varphi(t) \quad , \quad r = 0, \quad t > 0 \\ T(r,t) = 0 \quad , \quad 0 \leqslant r < \infty, \quad t = 0 \end{cases} , \tag{3.71}$$

où $p$ est une variable désignant le type de géométrie considérée.

L'étude d'un milieu semi-infini plan correspond au cas où $p = 0$ et $r = x$, $x$ désigne l'abscisse du point de mesure de la température à l'intérieur du milieu comme le montre la figure 3.19.

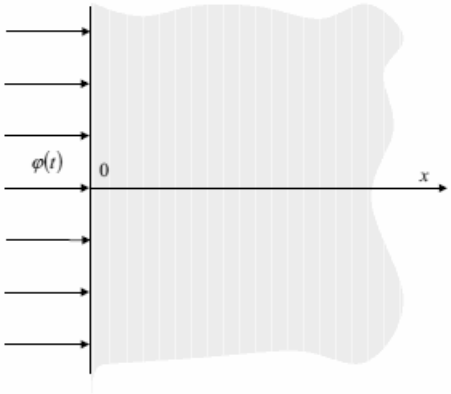



Figure 3.19 – Milieu semi-infini plan.

Pour $p = 0$, le système d'équations (3.71) se réduit à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad , \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \\ -\lambda \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \varphi(t) \quad , \quad x = 0, \quad t > 0 \\ T(x,t) = 0 \quad , \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad t = 0 \end{cases} \tag{3.72}$$

La transformée de Laplace de la première équation conduit à :

$$\frac{\partial^2 \overline{T}(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s}{\alpha}\overline{T}(x,s) = 0 \text{ où } \overline{T}(x,s) = \mathscr{L}\left(T(x,t)\right) \tag{3.73}$$

qui définit une équation différentielle par rapport à la variable $x$, dont la solution s'exprime par :

$$\overline{T}(x,s) = K_1(s)e^{-x\sqrt{s/\alpha}} + K_2(s)e^{x\sqrt{s/\alpha}} \tag{3.74}$$

La prise en compte des conditions aux limites dictées par les deux autres équations du système (3.72) permet d'établir un transfert de la forme :

$$H(x,s) = \frac{\bar{T}(x,s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda\rho C_p}}e^{-x\sqrt{s/\alpha}} \tag{3.75}$$

Lorsque $x = 0$, le terme exponentiel disparaît et (3.75) se réduit à :

$$H(0,s) = \frac{\bar{T}(0,s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda\rho C_p}} \tag{3.76}$$

Dans le domaine temporel, la relation précédente se traduit par :

$$T(0,t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda\rho C_p}} I^{0.5}\varphi(t) \tag{3.77}$$

qui exprime une impédance thermique du milieu semi-infini plan proportionnelle à un intégrateur d'ordre 0.5.

Lorsque $x > 0$, $H(x,s)$ peut être rapprochée en utilisant l'approximation de Padé du terme exponentiel. Soit $z = x\sqrt{\frac{s}{\alpha}}$, l'approximation de Padé d'ordre $P$ de $e^{-z}$ est définie par :

$$e^{-z} \approx \frac{\sum_{k=0}^{P} \frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!}(-z)^k}{\sum_{k=0}^{P} \frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!}z^k} \tag{3.78}$$

En remplaçant le terme exponentiel par son approximation, l'équation (3.75) se réécrit comme suit :

$$H(x,s) = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda\rho C_p}} \frac{\sum_{k=0}^{P} \frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!}(-x\sqrt{\frac{s}{\alpha}})^k}{\sum_{k=0}^{P} \frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!}(x\sqrt{\frac{s}{\alpha}})^k} \tag{3.79}$$

Cette transmittance fait apparaître une intégration pure d'ordre 0.5, qui rend impossible leur approximation par une transmittance entière de dimension finie sur tout l'espace des fréquences [Cois, 2002].

La structure du modèle de connaissance est de la forme :

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s^{0.5}}{s^{0.5}(1 + a_1 s^{0.5} + a_2 s)} \tag{3.80}$$

L'entrée du système est la densité de flux de chaleur définie par la relation (3.69) et la sortie du système est la différence entre la température mesurée et la température ambiante :

$$T(^\circ C) = T_m - T_a \tag{3.81}$$

### 3.6.3 Identification du système thermique

La température est mesurée à une distance $x = 2$mm de la surface chauffée, mais la même procédure peut être appliquée en considérant des distances différentes.

Une fois la structure du modèle est choisie, la modélisation des systèmes se fait généralement en deux étapes. La première est une étape d'estimation classique des paramètres du modèle approprié et la deuxième est une étape de validation. Elle consiste à vérifier l'aptitude du modèle obtenu à représenter le comportement du système réel pour une entrée quelconque.

#### 3.6.3.1 Estimation paramétrique

Dans cette section, les paramètres du modèle qui lie la température du barreau à la densité de flux de chaleur sont estimés. D'abord tous les ordres de dérivation sont supposés connus et seuls les coefficients sont estimés en appliquant l'algorithme *ftocls*. Ensuite, l'ordre commensurable $\upsilon$ est supposé inconnu et estimé en même temps que les coefficients moyennant l'estimateur *co-ftocls*.

La densité de flux de chaleur appliquée en entrée du système est une SBPA comprise entre 0 et 12730 $W.m^{-2}$. Les signaux d'entrée et de sortie sont échantillonnées avec une période d'échantillonnage $h = 1$ sec et tracés sur la figure 3.20.

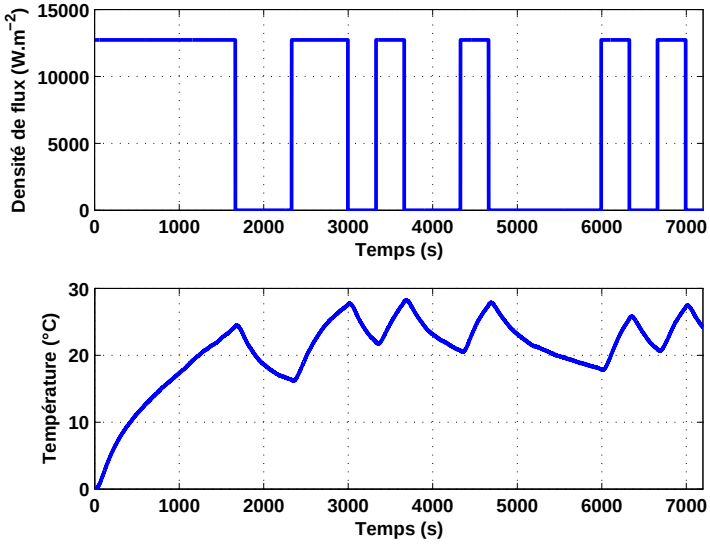



Figure 3.20 – Signaux d'entrée et de sortie du système thermique.

Les estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre trois sont développés sous l'hypothèse de l'asymétrie du signal d'entrée non bruité mais cette hypothèse n'est pas

vérifiée ici. La solution proposée dans cette application est d'utiliser l'intégrale à l'ordre 0.5 du signal d'entrée non bruité, soit :

$$u_{0_1}(t) = I^{0.5}(u_0(t)) \tag{3.82}$$

La structure de modèle (3.80) devient alors avec ce signal d'entrée $u_{0_1}(t)$ :

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s^{0.5}}{1 + a_1 s^{0.5} + a_2 s} \tag{3.83}$$

La figure 3.21 présente le signal d'entrée non bruité utilisé pour l'estimation paramétrique.

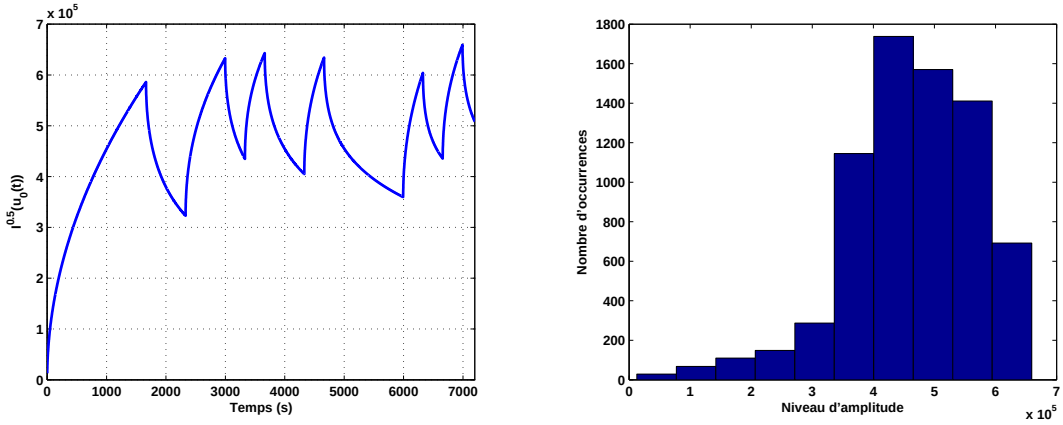



Figure 3.21 – Intégrale à l'ordre 0.5 du signal d'entrée non bruité et sa distribution.

Les signaux recueillis n'étant pas très bruités, un bruit additif a été rajouté sur les signaux d'entrée et de sortie d'un RSB de 10dB (3.22) afin d'être dans un contexte EIV avec un niveau important de bruit.

Le modèle EIV non entier à identifier est décrit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} y_0(t) + a_1 p^{\upsilon} y_0(t) + a_2 p^{2\upsilon} y_0(t) = b_0 u_0(t) + b_1 p^{\upsilon} y_0(t) \\ u(t_k) = u_{0_1}(t_k) + \tilde{u}(t_k) \\ y(t_k) = y_0(t_k) + \tilde{y}(t_k) \end{cases} \tag{3.84}$$

• ***Cas des ordres de dérivation connus :***

Dans ce paragraphe, l'ordre commensurable est supposé connu et vaut 0.5 et seuls les coefficients du modèle EIV non entier sont estimés en appliquant l'algorithme *ftocls*. Le modèle estimé est le suivant :

$$H(s) = \frac{(5.006 - 13.22 s^{0.5})\, 10^{-5}}{(1 + 5.104 s^{0.5} - 2.936 s)\, s^{0.5}} \tag{3.85}$$

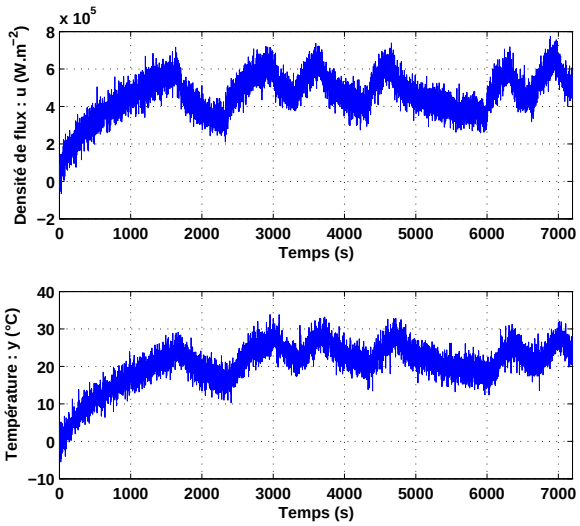
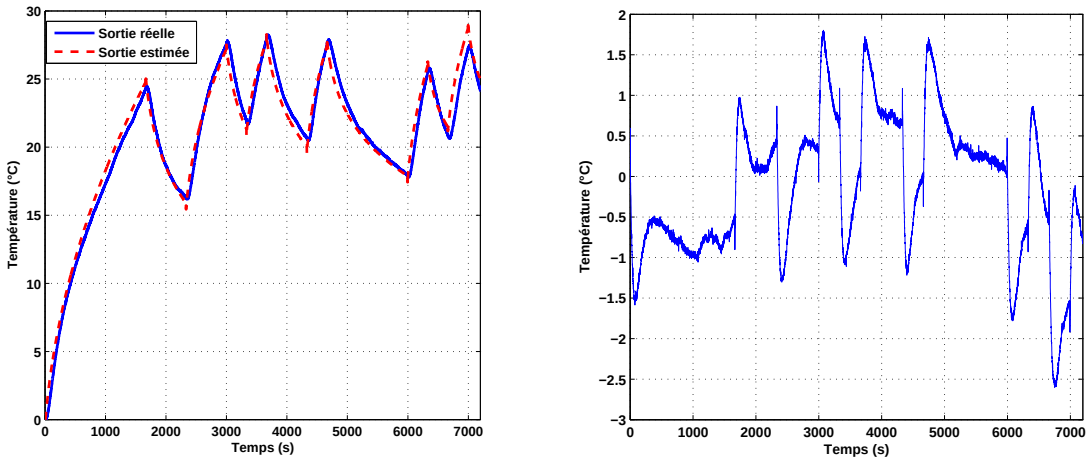



Figure 3.22 – Signaux d'entrée et de sortie bruités du système thermique.

La figure 3.23 montre la comparaison entre la sortie du modèle estimé par l'algorithme *ftocls* et la sortie réelle ainsi que l'erreur de sortie correspondante. Malgré la présence du bruit sur l'entrée et sur la sortie du systèmes thermique, l'estimateur *ftocls* donne des résultats consistents.




(a) (b)

Figure 3.23 – Réponses temporelles du modèle estimé par *ftocls* et du système réel (a) et l'erreur de sortie (b) (données d'estimation).

- ***Cas des ordres de dérivation inconnus :***

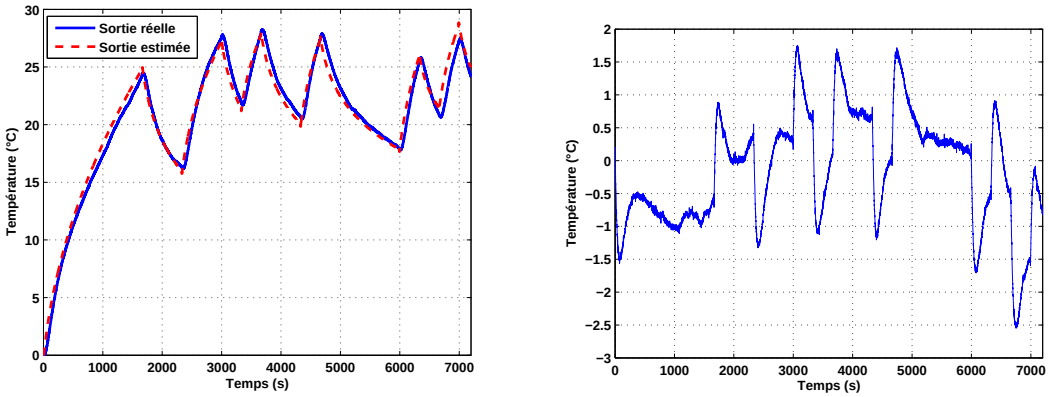
L'application de l'algorithme *co-ftocls*, en choisissant un ordre commensurable initial

$\upsilon = 0.6$, permet d'aboutir au modèle estimé suivant :

$$H(s) = \frac{(4.936 - 10.19s^{0.55})\,10^{-5}}{(1 + 8.911s^{0.55} - 4.803s^{1.11})\,s^{0.5}} \tag{3.86}$$

L'ordre commensurable estimé est $\upsilon = 0.55$.

La figure 3.24 montre la superposition de la sortie du modèle estimé par *co-ftocls* et la sortie réelle et l'erreur de sortie correspondante.



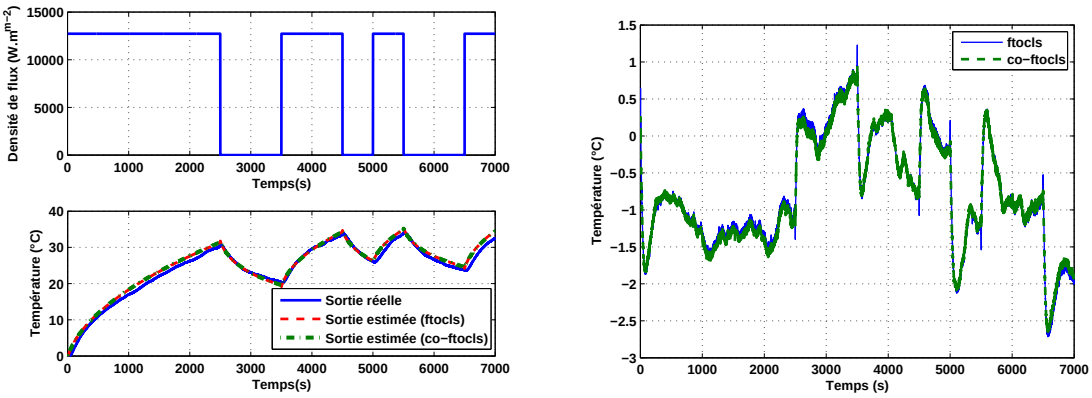

(a) (b)

Figure 3.24 – Réponses temporelles du modèle estimé par *co-ftocls* et du système réel (a) et l'erreur de sortie (b) (données d'estimation).

### 3.6.3.2 Validation des modèles estimés

Le test de validation consiste à utiliser un jeu de données différent de celui utilisé dans la phase d'estimation et de comparer les réponses des modèles estimés par les deux estimateurs *ftocls* et *co-ftocls* à la sortie réelle. La figure 3.25 montre la comparaison des différentes réponses.

En conclusion, les résultats obtenus sont satisfaisants en termes de minimisation de l'erreur d'estimation et en termes de consistence des algorithmes développés. En fait, les estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre trois permettent de déterminer des paramètres non biaisés à partir de données fortement bruités.




(a) (b)

Figure 3.25 – Réponses temporelles du modèle estimé par *co-ftocls* et du système réel (a) et l'erreur de sortie (b) (données de validation).

## 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre des méthodes d'identification des systèmes EIV par modèles entiers à temps continu sont généralisées au cas non entier. Elles sont fondées sur les statistiques d'ordre trois. Deux cas différents sont distingués : le premier cas suppose que tous les ordres de dérivation non entiers sont connus *a priori* et seuls les coefficients de l'équation différentielle non entière sont estimés en utilisant deux estimateurs basés sur le cumulants d'ordre trois, à savoir l'estimateur *ftocls* et *ftocils*. Le deuxième cas suppose que les ordres de dérivation sont commensurables à un ordre $v$ qui est estimé conjointement aux coefficients de l'équation différentielle non entière en utilisant des techniques d'optimisation non linéaires (estimateurs *co-ftocls* et *co-ftocils*).

Les performances des algorithmes développés sont testés sur un exemple de simulation numérique. Les résultats obtenus ont montré leur robustesse et leur pertinence dans différentes situations de bruits additifs sur l'entrée et la sortie du système.

Une application pratique sur la modélisation du phénomène de diffusion de chaleur dans le contexte EIV a montré la consistence des algorithmes présentés dans ce chapitre.

En outre, les méthodes d'identification par modèle entier, fondées sur les cumulants d'ordre trois, ne s'appliquent que si la distribution du signal d'entrée non bruité $u_0$ est asymétrique. Pour adoucir cette restriction, l'utilisation des cumulants d'ordre quatre est proposée. Dans ce cas, $u_0$ doit avoir une distribution non gaussienne. D'autres contributions sont proposées dans ce contexte et font l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre 4

# Contribution à l'identification par modèle EIV non entier : statistiques d'ordre quatre

## Sommaire


**4.1 Introduction . . . . . 118**

**4.2 Estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre quatre . . . . 119**

4.2.1 Estimateur des moindres carrés : ffocls . . . . . 121

4.2.2 Estimateur des moindres carrés itératifs : ffocils . . . . . 125

**4.3 Exemple de simulation numérique . . . . . 125**

4.3.1 Cas des ordres de dérivation connus . . . . . 127

4.3.2 Cas des ordres de dérivation inconnus . . . . . 132

**4.4 Estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre quatre combinés à l'estimation des ordres de dérivation . . . . . 135**

4.4.1 Position du problème . . . . . 135

4.4.2 Estimateurs avec optimisation de l'ordre commensurable . . . . 136

**4.5 Application à l'identification d'un système électronique . . . 137**

4.5.1 Description du système électronique . . . . . 137

4.5.2 Identification du système électronique . . . . . 140

**4.6 Conclusion . . . . . 150**

## 4.1 Introduction

Les algorithmes développés dans le chapitre précédent sont fondés sur les statistiques d'ordre trois. Bien qu'imposant des restrictions sur le signal d'entrée non bruité, ces méthodes permettent souvent de considérer différentes situations de bruit additif sur l'entrée et la sortie du système.

Les questions qui se posent sont les suivantes : tant que les estimateurs fondés sur les cumulants d'ordre trois sont consistants, pourquoi utiliser les cumulants d'ordre quatre ? Est-ce que les cumulants d'ordre trois ne sont pas suffisants ? Dans quels cas ces méthodes deviennent-elles restreintes ?

La réponse est dans le cas où le signal d'entrée non bruité est symétrique, les cumulants d'ordre trois s'annulent ce qui requiert l'utilisation des cumulants d'ordre quatre pour adoucir l'hypothèse restrictive sur la distribution du signal d'entrée non bruité. De plus, certains processus ont de faibles cumulants d'ordre trois et de larges cumulants d'ordre quatre qui contiennent souvent plus d'information et mènent à de meilleurs résultats en identification.

L'objectif de ce chapitre est de généraliser les méthodes d'identification, fondées sur les cumulants d'ordre quatre, par modèle entier à temps continu [Thil, 2007] au cas non entier. Comme au chapitre 3, deux cas différents se distinguent : le premier suppose que tous les ordres de dérivation sont connus *a priori* et seuls les coefficients de l'équation différentielle non entière sont estimés en utilisant deux estimateurs fondés sur les cumulants d'ordre quatre, à savoir l'estimateur *ffocls* et *ffocils*. Le deuxième cas suppose que les ordres de dérivation sont commensurables à un ordre non entier $v$ qui sera estimé au même titre que les coefficients de l'équation différentielle non entière en utilisant des techniques d'optimisation non linéaires vis-à-vis des paramètres, à savoir l'estimateur *co-ffocls* et *co-ffocils*.

Ce chapitre est composé principalement de 6 paragraphes. Le deuxième paragraphe présente les deux estimateurs *ffocls* et *ffocils*. Les performances des estimateurs développés sont analysées dans le troisième paragraphe à l'aide d'un exemple de simulation numérique tout en considérant deux situations différentes de bruit additif : bruits blancs sur l'entrée et la sortie ; bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie. Les résultats d'estimation paramétrique sont comparés à ceux obtenus par une méthode d'identification classique afin d'illustrer l'avantage des algorithmes proposés. Les deux estimateurs *co-ffocls* et *co-ffocils* sont exposés dans le quatrième paragraphe et appliqués dans le cinquième pour la modélisation d'un système électronique réel opérant dans un contexte EIV. Le sixième paragraphe conclut le chapitre.

## 4.2 Estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre quatre

La formulation du problème d'identification par modèle EIV non entier reste identique à celle présentée au paragraphe 3.2. La différence est que le problème est résolu dans ce chapitre à l'aide des cumulants d'ordre quatre.

Les hypothèses suivantes sont nécessaires pour le développement des algorithmes des estimateurs *ffocls* et *ffocils* :

- **H1.** Les ordres de dérivation non entiers $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_N,\ 0 \leq \beta_0 < \beta_1 < ... < \beta_M$ sont supposés connus *a priori* ;
- **H2.** Le signal d'entrée non bruité $u_0$ est un processus stochastique, stationnaire, de moyenne nulle et de distribution non gaussienne. Ses cumulants d'ordre quatre ne peuvent pas alors être nuls ;
- **H3.** $\tilde{u}$ et $\tilde{y}$ sont deux signaux aléatoires, stationnaires, de moyennes nulles, de distributions gaussiennes et indépendants respectivement de $u_0$ et $y_0$.

**Proposition 3** *La propriété de multilinéarité des cumulants permet d'écrire l'équation du modèle EIV non entier en fonction des cumulants d'ordre quatre croisés comme suit [Chetoui et al., 2013b] :*

$$C_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}}{1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}} C_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \tag{4.1}$$

*où $p^{\alpha_n}$ et $p^{\beta_m}$ désignent les opérateurs différentiels par rapport à $\tau_1$ définis respectivement par $\dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial \tau_1^{\alpha_n}}$ et $\dfrac{\partial^{\beta_m}}{\partial \tau_1^{\beta_m}}$.*

L'équation du modèle (4.1) peut être réécrite sous la forme de l'équation différentielle :

$$C_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) + \sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n} C_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = \sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m} C_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \tag{4.2}$$

***Démonstration :*** soit $g(t)$ la réponse impulsionnelle du modèle non entier à temps continu décrit par la fonction de transfert non entière (3.11). Puisque les cumulants d'ordre quatre des signaux gaussiens sont nuls, les cumulants d'ordre quatre croisés entre les signaux d'entrée et de sortie mesurés $u$ et $y$ sont donnés par :

$$
\begin{aligned}
C_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) &= C_{u_0y_0u_0u_0}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\\
&= \mathrm{E}\left[u_0(t_k)y_0(t_k+\tau_1)u_0(t_k+\tau_2)u_0(t_k+\tau_3)\right]\\
&- \mathrm{E}\left[u_0(t_k)y_0(t_k+\tau_1)\right]E\left[u_0(t_k+\tau_2)u_0(t_k+\tau_3)\right]\\
&- \mathrm{E}\left[u_0(t_k)u_0(t_k+\tau_2)\right]\mathrm{E}\left[y_0(t_k+\tau_1)u_0(t_k+\tau_3)\right]\\
&- \mathrm{E}\left[u_0(t_k)u_0(t_k+\tau_3)\right]E\left[y_0(t_k+\tau_1)u_0(t_k+\tau_2)\right]\\
&= \mathrm{E}\left[u_0(t_k)\left(\int_0^\infty g(\tau)u_0(t_k+\tau_1-\tau)d\tau\right)u_0(t_k+\tau_2)u_0(t_k+\tau_3)\right]\\
&- \mathrm{E}\left[u_0(t_k)\left(\int_0^\infty g(\tau)u_0(t_k+\tau_1-\tau)d\tau\right)\right]\mathrm{E}\left[u_0(t_k+\tau_2)u_0(t_k+\tau_3)\right]\\
&- \mathrm{E}\left[u_0(t_k)u_0(t_k+\tau_2)\right]\mathrm{E}\left[\left(\int_0^\infty g(\tau)u_0(t_k+\tau_1-\tau)d\tau\right)u_0(t_k+\tau_3)\right]\\
&- \mathrm{E}\left[u_0(t_k)u_0(t_k+\tau_3)\right]\mathrm{E}\left[\left(\int_0^\infty g(\tau)u_0(t_k+\tau_1-\tau)d\tau\right)u_0(t_k+\tau_2)\right]\\
&= \int_0^\infty g(\tau)\left(\mathrm{E}\left[u_0(t_k)u_0(t_k+\tau_1-\tau)u_0(t_k+\tau_2)u_0(t_k+\tau_3)\right]\right)\\
&- \mathrm{E}\left[u_0(t_k)u_0(t_k+\tau_1-\tau)\right]E\left[u_0(t_k+\tau_2)u_0(t_k+\tau_3)\right]\\
&- \mathrm{E}\left[u_0(t_k)u_0(t_k+\tau_2)\right]E\left[u_0(t_k+\tau_1-\tau)u_0(t_k+\tau_3)\right]\\
&- \mathrm{E}\left[u_0(t_k)u_0(t_k+\tau_3)\right]\mathrm{E}\left[u_0(t_k+\tau_1-\tau)u_0(t_k+\tau_2)\right]d\tau)\\
&= \int_0^\infty g(\tau)C_{u_0u_0u_0u_0}(\tau_1-\tau,\tau_2,\tau_3)d\tau\\
&= G(p)C_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

■

Comme les cumulants d'ordre quatre des signaux gaussiens sont nuls, l'équation du modèle se réécrit comme suit :

$$C_{u_0y_0u_0u_0}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}}{1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}} C_{u_0u_0u_0u_0}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \qquad (4.4)$$

**Proposition 4** *Les cumulants d'ordre quatre peuvent être estimés à partir de $N_t$ échantillons de données d'entrée et de sortie disponibles $\{u(t_k),y(t_k)\}_{k=1}^{N_t}$ [Lacoume,*

*1997] :*

$$\begin{aligned}\hat{C}_{xxxx}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = &\frac{N_t+2}{N_t(N_t-1)}\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k)x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_2)x(t_k+\tau_3)\\ &-\frac{3}{N_t(N_t-1)}\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k)x(t_k+\tau_1)\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k+\tau_2)x(t_k+\tau_3)\\ &-\frac{3}{N_t(N_t-1)}\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k)x(t_k+\tau_2)\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_3)\\ &-\frac{3}{N_t(N_t-1)}\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k)x(t_k+\tau_3)\sum_{k=1}^{N_t} x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_2)\end{aligned} \tag{4.5}$$

L'équation du modèle estimé s'écrit alors :

$$\hat{C}_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}}{1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}}\hat{C}_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) + \varepsilon(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\theta) \tag{4.6}$$

où $\varepsilon(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\theta)$ désigne l'erreur de sortie sur l'estimation des cumulants d'ordre quatre.

L'estimateur (4.5), appelé encore k-statistique, est asymptotiquement non biaisé lorsque le nombre d'échantillons est grand. De ce fait, les estimées des cumulants $\hat{C}_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ et $\hat{C}_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ sont convergentes [Thil, 2007]. Il convient alors d'écrire :

$$\lim_{N_t\to\infty} \varepsilon(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\theta) = 0 \tag{4.7}$$

Dans la suite du paragraphe, deux estimateurs fondés sur les cumulants d'ordre quatre sont développés pour l'estimation des coefficients du modèle (4.1).

### 4.2.1 Estimateur des moindres carrés : ffocls

L'erreur de sortie est définie par :

$$\varepsilon(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\theta) = \hat{C}_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) - \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}}{1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}}\hat{C}_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \tag{4.8}$$

L'estimateur des moindres carrés *ffocls* est obtenu en multipliant l'erreur de sortie par

$\left(1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}\right)$, soit :

$$\begin{aligned}
e_{cum}(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\theta) &= \left(1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}\right)\varepsilon(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\theta) \\
&= \left(1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}\right)\left(\hat{C}_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) - \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}}{1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}}\,\hat{C}_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\right) \\
&= \left(1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}\right)\hat{C}_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) - \sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}\hat{C}_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \\
&= \hat{C}_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) + \sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}\hat{C}_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) - \sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}\hat{C}_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \\
&= \hat{C}_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) - \hat{\Phi}^T(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\theta \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

où le vecteur de régression est défini par :

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}^T(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = \Big[&-p^{\alpha_1}\hat{C}_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3),...,-p^{\alpha_N}\hat{C}_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3), \\
&p^{\beta_0}\hat{C}_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3),...,p^{\beta_M}\hat{C}_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\Big]
\end{aligned} \qquad (4.10)$$

et le vecteur des paramètres $\theta$ est donnée par :

$$\theta^T = [a_1,\ldots,a_N,b_0,\ldots,b_M] \qquad (4.11)$$

Le vecteur optimal des paramètres est estimé par :

$$\hat{\theta}_{ffocls}(\tau_2,\tau_3,T) = \arg\min_{\theta} V(\tau_2,\tau_3,\theta,T) \qquad (4.12)$$

où le critère $V$ correspond à :

$$\begin{aligned}
V(\tau_2,\tau_3,\theta,T) &= \frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T}\frac{1}{2}\,e^2_{cum}(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\theta) \\
&= \frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T}\frac{1}{2}\,\left(\hat{C}_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\theta) - \hat{\Phi}^T(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\theta\right)^2 \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

Ainsi, la minimisation de ce critère possède une solution analytique (moindres carrés) et conduit à l'estimateur *ffocls* :

$$\hat{\theta}_{ffocls}(\tau_2,\tau_3,T) = \left[\frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\hat{\Phi}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\hat{\Phi}^T(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\right]^{-1}\left[\frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\hat{\Phi}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\hat{C}_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\right] \qquad (4.14)$$

**Remarque 4.1** *Comme il est expliqué au paragraphe 3.3.1, il est nécessaire de choisir des lignes de cumulants au lieu d'utiliser tous les cumulants disponibles. Pour les cumulants d'ordre trois, un seul vecteur de la matrice de cumulants calculés avec différents délais est utilisé. Maintenant, le nombre de cumulants disponibles augmente et par conséquent la complexité aussi. Le calcul des cumulants d'ordre quatre avec différents délais permet d'obtenir un cube. En effet les cumulants d'ordre quatre sont tri-dimensionnels. Ils dépendent de trois variables (ici* $\tau_1$*,* $\tau_2$ *et* $\tau_3$*).*

*L'estimateur* $\hat{\theta}_{ffocls}(\tau_2, \tau_3, T)$ *est obtenu en considérant qu'une seule partie du cube tout en choisissant par exemple* $\tau_2 = \tau_3 = 0$ *et* $0 \leq \tau_1 \leq T$*.*

$T$ *est un hyper-paramètre choisi supérieur à* $N+M+1$ *pour assurer la non singularité de la matrice à inverser dans (4.14). L'influence de* $T$ *sur la qualité de l'estimation sera étudiée dans l'exemple de simulation numérique.*

Comme dans le cas des cumulants d'ordre trois, les dérivées non entières des estimées des cumulants d'ordre quatre sont calculées en utilisant les filtres à variables d'état non entiers (3.24).

**Propriété 4.1** *Les dérivées non entières des cumulants* $p^{\upsilon}\hat{C}_{xxxx}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ *définies dans le vecteur de régression (4.10) sont remplacées par des dérivées filtrées des cumulants* $p^{\upsilon}\hat{C}_{xxxx,f}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ *et évaluées comme suit :*

$$p^{\upsilon}\hat{C}_{xxxx,f}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \hat{C}_{xxx_f^{\upsilon}xx}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \tag{4.15}$$

*où* $x_f^{\upsilon}$ *désigne le signal* $x$ *filtré par :*

$$F_{\upsilon}(p) = p^{\upsilon}\left(\frac{\lambda}{p+\lambda}\right)^{\lfloor \alpha_N \rfloor + 1} \tag{4.16}$$

$\lfloor \alpha_N \rfloor$ *est le plus grand entier inférieur ou égal à* $\alpha_N$ *et* $\lambda$ *désigne la pulsation de coupure du filtre à variables d'état non entier.*

***Démonstration :*** Soit $f_\upsilon(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre $F_\upsilon(p)$.

$$\begin{aligned}
p^\upsilon C_{xxxx,f}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) &= F_\upsilon(p) C_{xxxx}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \\
&= \int_0^\infty f_\upsilon(\tau)d\tau \ (\mathrm{E}\left[x(t_k)x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_2)x(t_k+\tau_3)\right] \\
&- \mathrm{E}\left[x(t_k)x(t_k+\tau_1)\right]\mathrm{E}\left[x(t_k+\tau_2)x(t_k+\tau_3)\right] \\
&- \mathrm{E}\left[x(t_k)x(t_k+\tau_2)\right]\mathrm{E}\left[x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_3)\right] \\
&- \mathrm{E}\left[x(t_k)x(t_k+\tau_3)\right]E\left[x(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_2)\right]) \\
&= \mathrm{E}\left[x(t_k)\left(\int_0^\infty f_\upsilon(\tau)x(t_k+\tau_1-\tau)d\tau\right)x(t_k+\tau_2)x(t_k+\tau_3)\right] \\
&- \mathrm{E}\left[x(t_k)\left(\int_0^\infty f_\upsilon(\tau)x(t_k+\tau_1-\tau)d\tau\right)\right]\mathrm{E}\left[x(t_k+\tau_2)x(t_k+\tau_3)\right] \\
&- \mathrm{E}\left[x(t_k)x(t_k+\tau_2)\right]\mathrm{E}\left[\left(\int_0^\infty f_\upsilon(\tau)x(t_k+\tau_1-\tau)d\tau\right)x(t_k+\tau_3)\right] \\
&- \mathrm{E}\left[x(t_k)x(t_k+\tau_3)\right]\mathrm{E}\left[\left(\int_0^\infty f_\upsilon(\tau)x(t_k+\tau_1-\tau)d\tau\right)x(t_k+\tau_2)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[x(t_k)x_f^\upsilon(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_2)x(t_k+\tau_3)\right] \\
&- \mathrm{E}\left[x(t_k)x_f^\upsilon(t_k+\tau_1)\right]\mathrm{E}\left[x(t_k+\tau_2)x(t_k+\tau_3)\right] \\
&- \mathrm{E}\left[x(t_k)x(t_k+\tau_2)\right]\mathrm{E}\left[x_f^\upsilon(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_3)\right] \\
&- \mathrm{E}\left[x(t_k)x(t_k+\tau_3)\right]\mathrm{E}\left[x_f^\upsilon(t_k+\tau_1)x(t_k+\tau_2)\right] \\
&= C_{xxx_f^\upsilon x x}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

La mise en œuvre de l'estimateur *ffocls* est similaire à celle de l'estimateur *ftocls* et se résume principalement à trois étapes :

– ***Étape 1 :*** calculer les dérivées non entières des signaux d'entrée et de sortie :

$$u_f^{\beta_m}(t_k) = F_{\beta_m}(p)\,u(t_k); \quad 0 \leqslant m \leqslant M \qquad (4.18)$$

$$y_f^{\alpha_n}(t_k) = F_{\alpha_n}(p)\,y(t_k); \quad 1 \leqslant n \leqslant N \qquad (4.19)$$

où $F_{\beta_m}(p)$ et $F_{\alpha_n}(p)$ désignent les filtres à variables d'état non entiers définis par :

$$F_\gamma(p) = p^\gamma \left(\frac{\lambda}{p+\lambda}\right)^{\lfloor \alpha_N \rfloor + 1} \qquad (4.20)$$

– ***Étape 2 :*** calculer les dérivées non entières des cumulants d'ordre quatre en utilisant la relation (4.15) ainsi que la définition de l'estimateur d'ordre quatre (4.5).

En pratique, une seule ligne de cumulant est utilisée en choisissant $\tau_2 = \tau_3 = 0$ et $0 \leq \tau_1 \leq T$.

– ***Étape 3 :*** construire le vecteur de régression :

$$\hat{\Phi}_f^T(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = \Big[-p^{\alpha_1}\hat{C}_{uyuu,f}(\tau_1,\tau_2,\tau_3),...,-p^{\alpha_N}\hat{C}_{uyuu,f}(\tau_1,\tau_2,\tau_3), p^{\beta_0}\hat{C}_{uuuu,f}(\tau_1,\tau_2,\tau_3),...,p^{\beta_M}\hat{C}_{uuuu,f}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\Big] \quad (4.21)$$

et déterminer $\hat{\theta}_{ffocls}$ en appliquant l'algorithme des moindres carrées ordinaires :

$$\hat{\theta}_{ffocls}(\tau_2,\tau_3,T) = \left[\frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\hat{\Phi}_f(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\hat{\Phi}_f^T(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\right]^{-1} \left[\frac{1}{T}\sum_{\tau_1=0}^{T-1}\hat{\Phi}_f(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\hat{C}_{uyuu,f}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\right] \quad (4.22)$$

### 4.2.2 Estimateur des moindres carrés itératifs : ffocils

Le développement exposé au paragraphe 3.3.2 reste vrai en utilisant les cumulants d'ordre quatre. Par soucis de concision, les détails ne sont pas répétés dans cette section et seule la mise en œuvre de l'algorithme est présentée. Elle comporte principalement trois étapes :

– ***Étape 1 :*** calculer la première estimée en appliquant l'algorithme *ffocls* :

$$\hat{\theta}^0_{ffocils}(\tau_2,\tau_3,T) = \hat{\theta}_{ffocls}(\tau_2,\tau_3,T) \quad (4.23)$$

– ***Étape 2 :*** estimer $\hat{\theta}^i_{ffocils}(\tau_2,\tau_3,T)$ en exécutant les mêmes étapes de l'algorithme *ffocls* et en utilisant le filtre suivant au lieu de (4.20) :

$$F_\gamma(p,\hat{\theta}^{i-1}_{ffocils}) = \frac{p^\gamma}{1+\sum_{n=1}^{N}\hat{a}_n^{i-1}p^{\alpha_n}} \quad (4.24)$$

– ***Étape 3 :*** répéter la deuxième étape jusqu'à la convergence, soit : $\dfrac{\left\|\hat{\theta}^{i+1}_{ffocils}-\hat{\theta}^i_{ffocils}\right\|}{\left\|\hat{\theta}^i_{ffocils}\right\|} < \epsilon$ ou un nombre d'itérations maximal est atteint.

## 4.3 Exemple de simulation numérique

Soit le système décrit par la fonction de transfert non entière d'ordre commensurable suivante :

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s^\upsilon}{1 + a_1 s^\upsilon + a_2 s^{2\upsilon}} \quad (4.25)$$

avec $b_0 = -1$, $b_1 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ et $\upsilon = 0.5$. $\theta_0^T = [2 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 1]$ est le vrai vecteur des paramètres et $\lambda = 3$ rad/s est la fréquence de coupure du filtre à variables d'état non entier.

Le signal d'entrée non bruité $u_0$ est choisi comme étant une somme de sinus :

$$u_0(t) = \sin(0.2t) + \sin(0.8t) + \sin(t) + \sin(1.4t) + \sin(2t) + \sin(3t) \tag{4.26}$$

Les données d'entrée et de sortie sont corrompues par deux bruits blancs gaussiens $\tilde{u}(t_k)$ et $\tilde{y}(t_k)$. Leurs variances sont ajustées de manière à avoir un rapport signal-sur-bruit (RSB), défini par (3.64), égal à 10dB. Les signaux d'entrée et de sortie sont échantillonnées avec une période de $h = 0.05$ sec. Le nombre d'échantillons est fixé à $N_t = 5000$ (Fig.4.1).

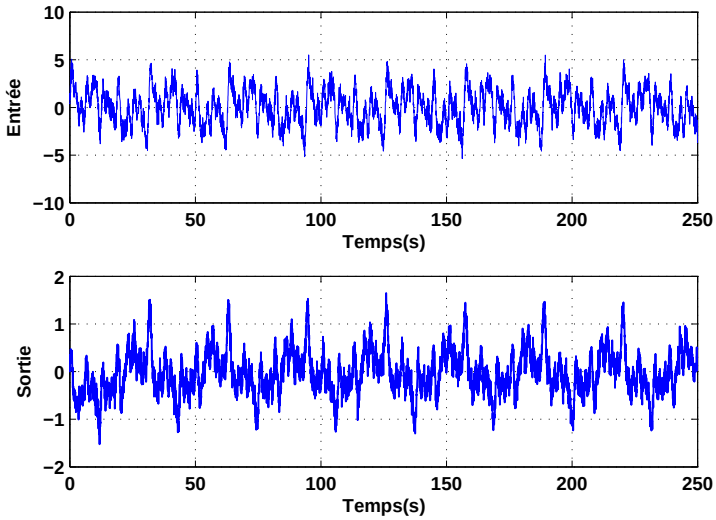



Figure 4.1 – Signaux d'entrée et de sortie bruités.

Cette section est divisée principalement en deux parties. Dans la première partie, tous les ordres de dérivation sont supposés connus et seuls les coefficients de la fonction de transfert non entière (4.25) sont estimés en appliquant les algorithmes *ffocls* et *ffocils*. Dans la deuxième partie, la fonction de transfert (4.25) est supposée commensurable à un ordre non entier $\upsilon$ qui sera estimé en même temps que les coefficients.

Les performances des différents algorithmes sont étudiées, à l'aide des simulations de Monte Carlo, dans deux situations de bruits différentes :

– bruits blancs sur l'entrée et sur la sortie ;

– bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie.

La qualité de l'estimation est donnée par l'erreur quadratique moyenne relative définie

par :

$$EQMR = \sqrt{\frac{1}{n_{mc}} \sum_{i=1}^{n_{mc}} \frac{\left\| \hat{\theta}_i - \theta_0 \right\|^2}{\left\| \theta_0 \right\|^2}} \tag{4.27}$$

où $\hat{\theta}_i$ désigne l'estimée à la $i^{\text{ième}}$ itération et $n_{mc}$ le nombre de réalisations dans la simulation de Monte Carlo.

Pour l'algorithme itératif, le critère d'arrêt choisi tout au long des simulations est $\epsilon = 10^{-4}$ ou $i_{max} = 50$.

### 4.3.1 Cas des ordres de dérivation connus

Cette section est divisée en trois parties, dans lesquelles sont étudiés certains aspects des algorithmes développés dans le contexte EIV : *ffocls* et *ffocils*. La première partie consiste à étudier l'influence du choix de l'hyper-paramètre $T$ sur la qualité de l'estimation. Dans la troisième partie, les performances des estimateurs *ffocls* et *ffocils* sont analysées à l'aide des simulations de Monte Carlo. Une étude sur le choix de l'ordre commensurable est présentée dans la dernière partie.

#### 4.3.1.1 Influence de l'hyper-paramètre

L'objectif de cette section est d'étudier l'influence du choix de l'hyper-paramètre $T$ sur la qualité de l'estimation paramétrique du modèle non entier (4.25). En effet, $T$ est choisi entre 20 et 500 et les deux estimateurs *ffocls* et *ffocils* sont appliqués pour chaque valeur de $T$.

L'évolution des estimées en fonction de $T$ est tracée sur la figure 4.2. Elle montre que pour de faibles valeurs de $T$ ($T < 150$) les estimées sont erronées. En effet, les cumulants d'ordre quatre sont estimés à partir d'un nombre d'échantillons insuffisant. Pour $T > 150$, les estimées sont pratiquement non biaisées.

Il est important de noter que les deux estimateurs ne sont pas très sensibles à l'hyper-paramètre $T$ choisi au delà de 150. Il peut être choisi d'une façon empirique tout en considérant les aspects pratiques du système EIV.

**Remarque 4.2** *Dans la suite de cette section l'hyper-paramètre est fixé à* $T = 200$.

#### 4.3.1.2 Etude de l'influence du bruit sur l'entrée et la sortie

Pour analyser les performances des estimateurs *ffocls* et *ffocils*, des simulations de Monte Carlo sont réalisées dans deux situations différentes de bruits additifs.

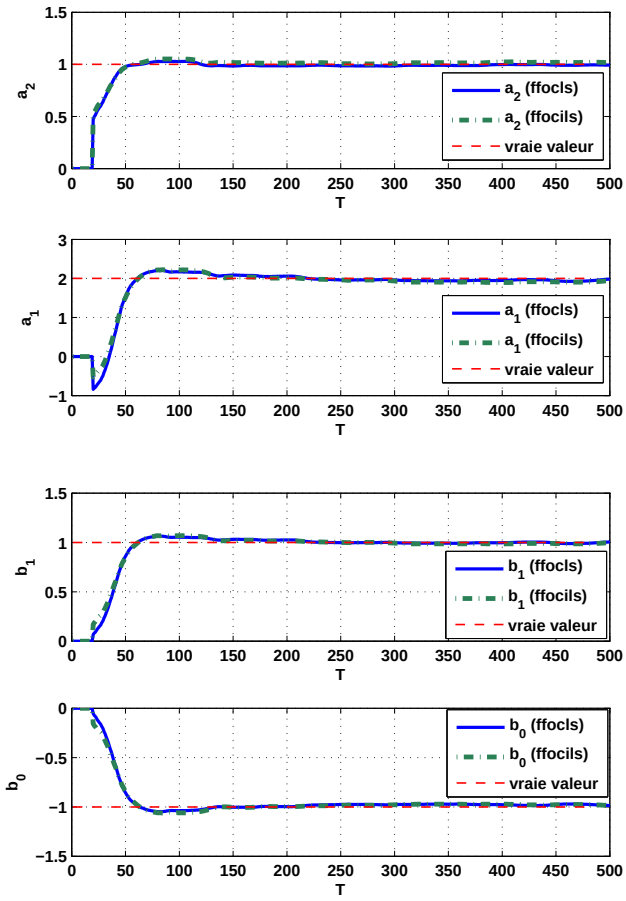



Figure 4.2 – Evolution des estimées obtenues par l'estimateur *ffocls* et *ffocils* en fonction de l'hyper-paramètre $T$.

Pour montrer l'intérêt des méthodes développées dans le contexte EIV, l'identification du système (4.25) a été réalisée par modèle à erreur de sortie à l'aide de la méthode *œ*[4] disponible dans la Toolbox CRONE de Matlab.

• **Bruits blancs sur l'entrée et la sortie**

La simulation de Monte Carlo est réalisée avec $n_{mc} = 500$ réalisations de bruits blancs différents dont le RSB est fixé à 10dB. Les résultats de simulations sont résumés dans le tableau 4.1 qui contient les moyennes des estimées obtenues par l'estimateur *oe*, *ffocls* et *ffocils*, leurs écarts types et l'EQMR correspondante.

Il est clair que la méthode *oe* fournit des estimées biaisées alors que les résultats obtenus par les deux estimateurs *ffocls* et *ffocils* sont satisfaisants en termes de minimisation de l'erreur d'estimation et en termes d'absence de biais d'estimation.

4. oe : Output error based method

Tableau 4.1 – Simulation de Monte Carlo pour les estimateurs *oe*, *ffocls* et *ffocils* (cas d'un bruit blanc sur l'entrée et sur la sortie).

| Méthode | $\hat{a}_2$ | $\hat{\sigma}_{a_2}$ | $\hat{a}_1$ | $\hat{\sigma}_{a_1}$ | $\hat{b}_1$ | $\sigma_{b_1}$ | $\hat{b}_0$ | $\hat{\sigma}_{b_0}$ | $EQMR$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *oe* | 1.21 | 0.03 | 1.55 | 0.09 | 0.88 | 0.07 | $-0.91$ | 0.028 | 0.2 |
| *ffocls* | 1.00 | 0.037 | 1.95 | 0.143 | 0.98 | 0.04 | $-0.98$ | 0.037 | 0.06 |
| *ffocils* | 1.00 | 0.035 | 1.97 | 0.13 | 0.99 | 0.037 | $-0.99$ | 0.057 | 0.057 |
| vrais paramètres | 1 | - | 2 | - | 1 | - | $-1$ | - | - |

Les distributions des estimées représentées sur la figure 4.3 montrent bien la convergence des paramètres estimés par *ffocls* et *ffocils* vers les vrais paramètres, d'où la consistance des estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre quatre dans le contexte EIV.

Un autre jeux de données, constitué d'une séquence binaire pseudo aléatoire (SBPA) avec un nombre de mesures de $N_t = 500$, tracé sur la figure 4.4, est utilisé pour valider les différents modèles estimés.

La figure 4.5 montre la superposition des sorties estimées par les estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre quatre. Il est clair que le modèle estimé par la méthode *oe* n'est pas valide. Ce résultat est justifié par le fait que la méthode *oe* n'est pas développée pour l'identification des systèmes dans le contexte EIV.

• **Bruit blanc sur l'entrée et coloré sur la sortie**

Dans cette section le bruit qui entache le signal d'entrée est supposé blanc alors que le bruit qui entache le signal de sortie est coloré :

$$\begin{cases} \tilde{u}(t_k) = e^{\tilde{u}}(t_k) \\ \tilde{y}(t_k) = \dfrac{1 + 0.3q^{-1}}{1 - 0.3q^{-1}} e^{\tilde{y}}(t_k) \end{cases} \tag{4.28}$$

où $e^{\tilde{u}}(t_k)$ et $e^{\tilde{y}}(t_k)$ sont deux bruits blancs gaussiens dont le RSB est fixé à 10dB.

Une simulation de Monte Carlo est réalisée avec $n_{mc} = 500$ réalisations de bruits différentes. Pour chaque réalisation de bruits les estimateurs *oe*, *ffocls* et *ffocils* sont appliqués. Le tableau 4.2 contient les moyennes des estimées, leurs écarts type et l'EQMR.

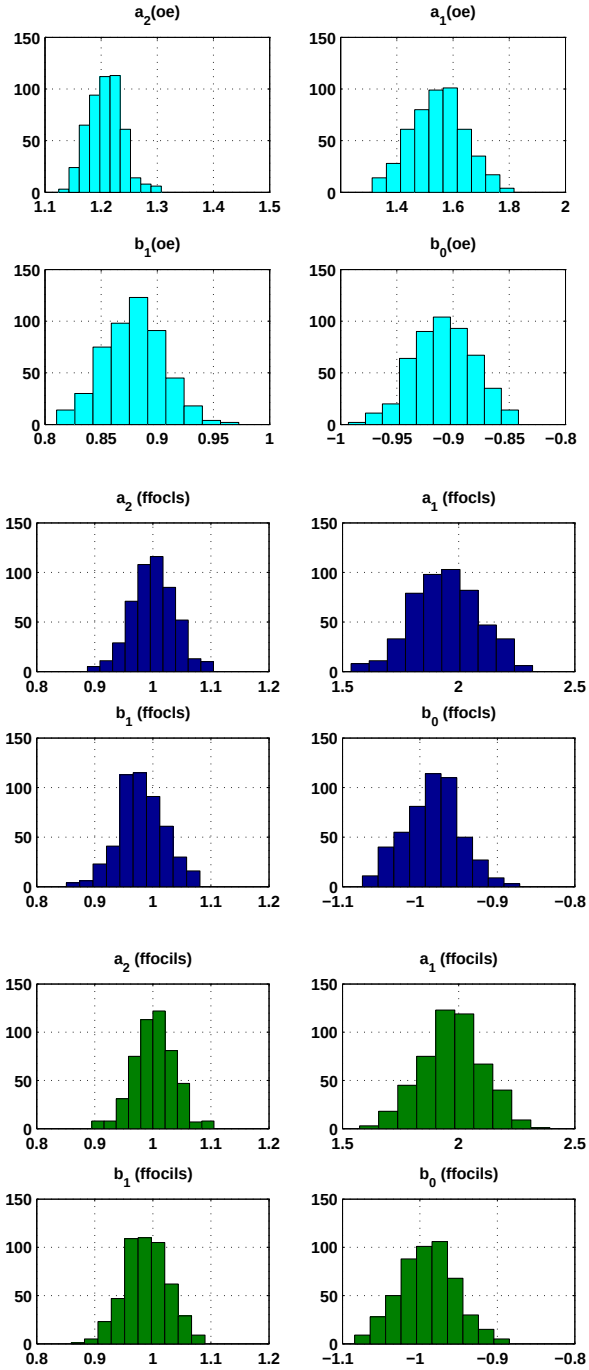



Figure 4.3 – Histogrammes des estimées obtenues par l'estimateur *oe*, *ffocls* et *ffocils* (cas d'un bruit blanc sur l'entrée et sur la sortie).

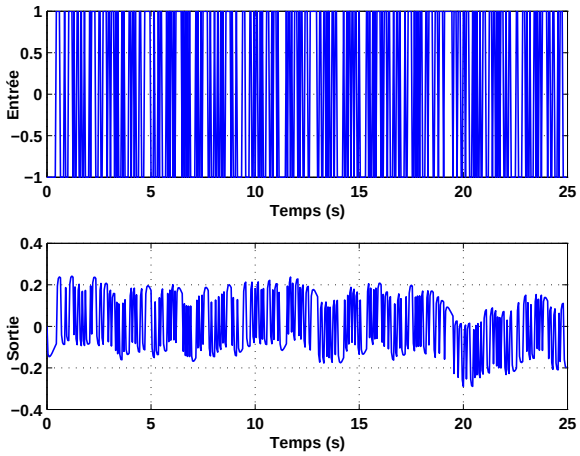
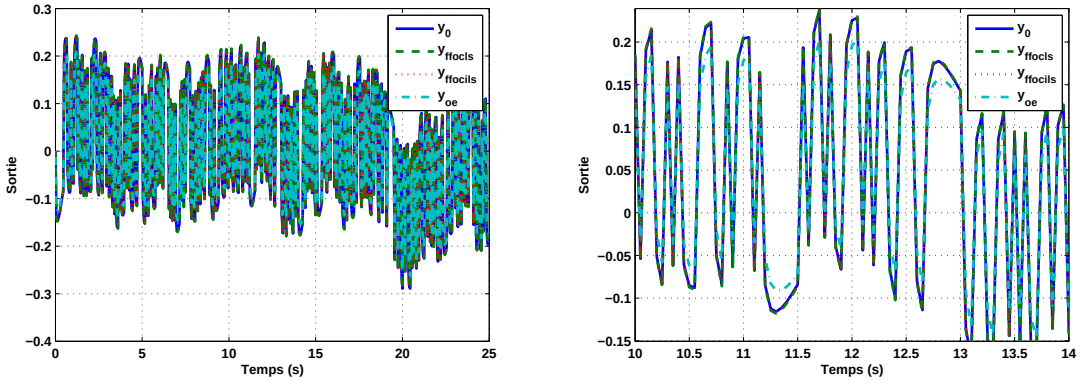



Figure 4.4 – Données de validation.




(a) (b)

Figure 4.5 – Résultats de validation des modèles estimés par l'estimateur *oe*, *ffocls* et *ffocils* : (a) dans l'intervalle $[0\,,25]$, (b) zoom dans l'intervalle $[10\,,14]$ (cas d'un bruit blanc sur l'entrée et sur la sortie).

Tableau 4.2 – Simulation de Monte Carlo pour les estimateurs *oe*, *ffocls* et *ffocils* (cas d'un bruit blanc sur l'entrée et d'un bruit coloré sur la sortie).

| Méthode | $\hat{a}_2$ | $\hat{\sigma}_{a_2}$ | $\hat{a}_1$ | $\hat{\sigma}_{a_1}$ | $\hat{b}_1$ | $\hat{\sigma}_{b_1}$ | $\hat{b}_0$ | $\hat{\sigma}_{b_0}$ | $EQMR$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *oe* | 1.21 | 0.045 | 1.55 | 0.125 | 0.88 | 0.035 | $-0.91$ | 0.036 | 0.2 |
| *ffocls* | 1.00 | 0.06 | 1.90 | 0.22 | 0.97 | 0.06 | $-0.97$ | 0.055 | 0.1 |
| *ffocils* | 1.01 | 0.056 | 1.95 | 0.2 | 0.98 | 0.056 | $-0.98$ | 0.053 | 0.09 |
| vrais paramètres | 1 | - | 2 | - | 1 | - | $-1$ | - | - |

En présence d'un bruit coloré en sortie les deux estimateurs *ffocls* et *ffocils* fournissent des bons résultats en les comparant aux résultats obtenus par l'estimateur *oe*.

Les histogrammes des paramètres estimés représentés sur la figure 4.6 montrent la consistance des estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre quatre dans le contexte EIV même en présence d'un bruit coloré sur le signal de sortie.

Le même jeu de données utilisé précédemment est exploité dans ce paragraphe pour valider les modèles estimés par les différentes méthodes dans le cas où le bruit sur la sortie est coloré. Les réponses temporelles des modèles estimés par la méthode *oe*, *ffocls* et *ffocils* sont tracés sur la figure 4.7 et comparées à la sortie réelle du système. Elle montrent la pertinence des méthodes développées dans le contexte EIV.

### 4.3.2 Cas des ordres de dérivation inconnus

Soit la norme $L_2$ de l'erreur de sortie définie en dB par :

$$J_{dB} = 10 \log \left( \frac{\|y - \hat{y}\|^2}{\|y\|^2} \right) \tag{4.29}$$

où $y$ désigne la sortie du système entachée d'un bruit additif et $\hat{y}$ désigne la sortie estimée du système. L'ordre commensurable est supposé inconnu et les deux estimateurs *ffocls* et *ffocils* sont appliqués pour estimer les coefficients du modèle suivant :

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s^{\upsilon}}{1 + a_1 s^{\upsilon} + a_2 s^{2\upsilon}} \tag{4.30}$$

La structure du modèle est fixée pour des ordres commensurables $\upsilon \in (0.1, 0.9)$. En appliquant l'estimateur *ffocls* et *ffocils*, $J_{dB}$ est évaluée pour chaque ordre commensurable. Son évolution en fonction de $\upsilon$ est tracée sur la figure 4.8. Il est clair que la valeur optimale du critère $J_{dB}$ vaut $-RSB$ à l'optimum $\upsilon = 0.5$.

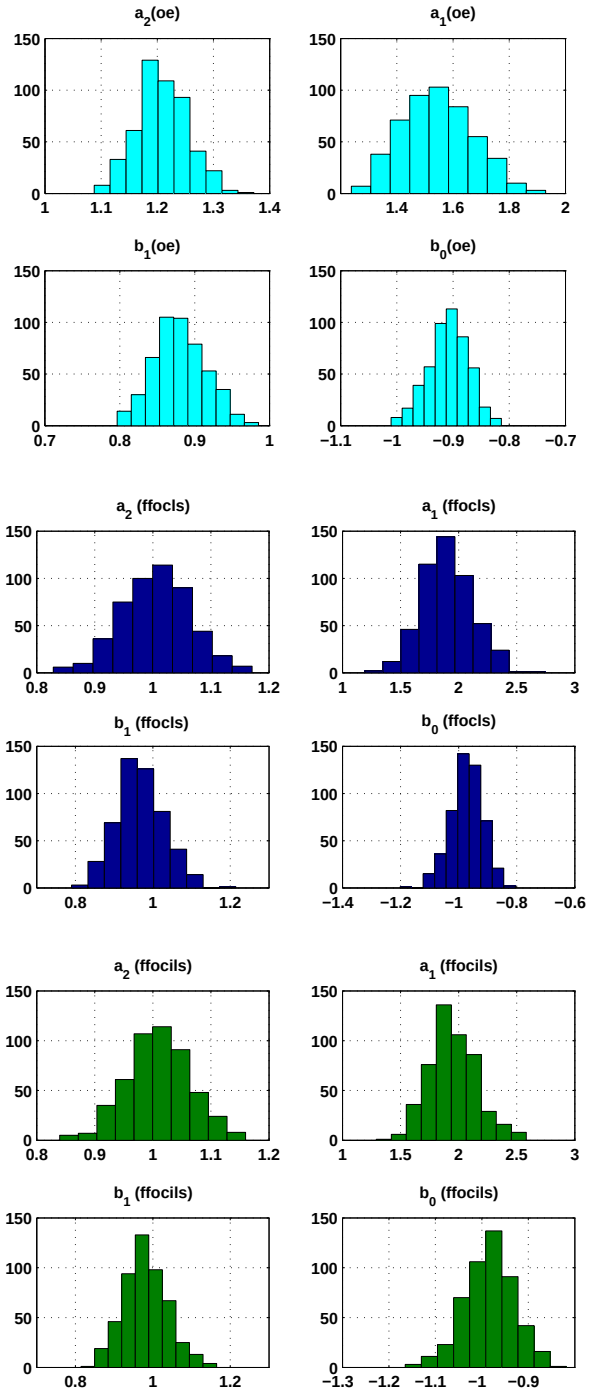
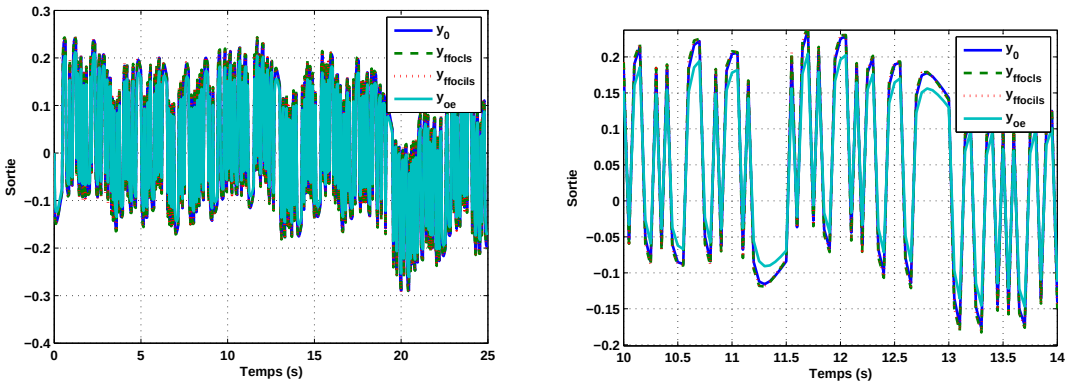



Figure 4.6 – Histogrammes des estimées obtenues par l'estimateur *oe*, *ffocls* et *ffocils* (cas d'un bruit blanc sur l'entrée et d'un bruit coloré sur la sortie).




(a) (b)

Figure 4.7 – Résultats de validation des modèles estimés par l'estimateur *oe*, *ffocls* et *ffocils* : (a) dans l'intervalle $[0\,,25]$, (b) zoom dans l'intervalle $[10\,,14]$ (cas d'un bruit blanc sur l'entrée et d'un bruit coloré sur la sortie).

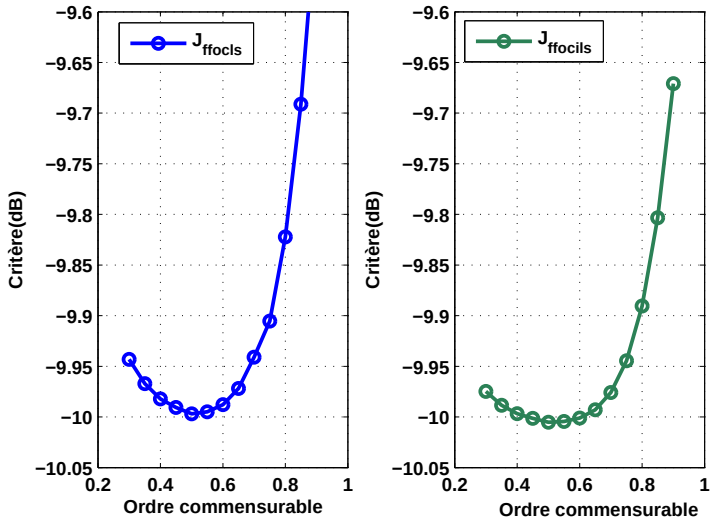



Figure 4.8 – Critère obtenu par l'estimateur *ffocls* et *ffocils* en fonction de l'ordre commensurable du modèle (bruits blancs sur l'entrée et sur la sortie).

Dans la suite, les estimateurs fondés sur les cumulants d'ordre quatre seront combinés à des techniques d'optimisation non linéaire pour optimiser l'ordre commensurable du modèle non entier dans le contexte EIV.

## 4.4 Estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre quatre combinés à l'estimation des ordres de dérivation

### 4.4.1 Position du problème

L'équation du modèle non entier décrit dans un contexte EIV est défini en fonction des cumulants d'ordre quatre croisés comme suit :

$$C_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^{\beta_m}}{1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{\alpha_n}} C_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \tag{4.31}$$

Si les ordres de dérivation non entiers sont inconnus, le vecteur des paramètres est donné par :

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta \\ \gamma \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

où $\theta$, un vecteur de dimension $(N+M+1)$, contient les coefficients linéaires :

$$\theta^T = [a_1,\ldots,a_N,b_0,\ldots,b_M] \tag{4.33}$$

et où $\gamma$ est un vecteur composé de $(N+M+1)$ ordres de dérivation :

$$\gamma^T = [\alpha_1,\ldots,\alpha_N,\beta_0,\ldots,\beta_M] \tag{4.34}$$

Dans le cas où le modèle décrit par la relation (4.31) est commensurable à l'ordre $\upsilon$, il se réécrit comme suit :

$$C_{uyuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^{m\upsilon}}{1+\sum_{n=1}^{N} a_n p^{n\upsilon}} C_{uuuu}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \tag{4.35}$$

De ce fait, la dimension du vecteur des paramètres à estimer se réduit à $(N+M+2)$ éléments, soit :

$$\Theta^T = [a_1,\ldots,a_N,b_0,\ldots,b_M,\upsilon] \tag{4.36}$$

L'idée proposée consiste à estimer les coefficients du modèle (4.35) en appliquant l'estimateur *ffocls* (respectivement *ffocils*) et estimer l'ordre commensurable en utilisant une technique d'optimisation non linéaire.

L'ordre commensurable optimal est obtenu itérativement en minimisant la norme $L_2$ suivante :

$$J(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \Theta) = \frac{1}{2} \left\| \varepsilon(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \Theta) \right\|^2 \tag{4.37}$$

$\varepsilon(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \Theta)$ désigne l'erreur de sortie définie par :

$$\varepsilon(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \Theta) = \hat{C}_{uyuu}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - \frac{\sum_{m=0}^{M} \hat{b}_m p^{m\upsilon}}{1 + \sum_{n=1}^{N} \hat{a}_n p^{n\upsilon}} \hat{C}_{uuuu}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \tag{4.38}$$

### 4.4.2 Estimateurs avec optimisation de l'ordre commensurable

L'estimateur *co-ffocls* : commensurate order optimisation combined to fractional fourth-order cumulants based least squares (respectivement *co-ffocils* : commensurate order optimisation combined to fractional fourth-order cumulants based iterative least squares) permet d'estimer les coefficient ainsi que l'ordre commensurable du modèle décrivant le système EIV non entier représenté par (4.35). L'idée est d'appliquer l'estimateur *ffocls* (respectivement *ffocils*) pour l'estimation des coefficients et d'utiliser le modèle estimé pour optimiser l'ordre de dérivation commensurable $\upsilon$ en appliquant la méthode d'optimisation numérique Gauss-Newton.

En effet, l'ordre commensurable est estimé itérativement :

$$\upsilon^{i+1} = \upsilon^i - \lambda \left[ H_{app}^{-1} \frac{\partial J(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \Theta)}{\partial \upsilon} \right] \Bigg|_{\upsilon = \upsilon^i} \tag{4.39}$$

où le gradient $\dfrac{\partial J(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \Theta)}{\partial \upsilon}$ est défini par (3.57) et le Hessien approché $H_{app}$ par (3.58).

La fonction de sensibilité du vecteur de l'erreur de sortie $\varepsilon$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \Theta)}{\partial \upsilon} &= \frac{\partial C_{uyuu}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)}{\partial \upsilon} - \\ &\left( \frac{\sum_{m=0}^{M} m b_m p^{m\upsilon}}{\left(1 + \sum_{n=1}^{N} a_n p^{n\upsilon}\right)} - \frac{\sum_{n=1}^{N} n a_n p^{n\upsilon} \sum_{m=0}^{M} b_m p^{m\upsilon}}{\left(1 + \sum_{n=1}^{N} a_n p^{n\upsilon}\right)^2} \right) \ln(p) C_{uuuu}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \end{aligned} \tag{4.40}$$

La mise en œuvre de l'estimateur *co-ffocls* se résume donc principalement en deux étapes :

- ***Étape 1 :*** pour $i = 0$,
  - ◇ initialiser $\upsilon^0$ et $\Lambda$ ;

◇ calculer $J^0$.

$i = 1$

– ***Étape 2 : méthode d'optimisation de Gauss-Newton***

faire

◇ initialiser $\lambda = \Lambda$ ;

◇ faire

♦ affiner l'ordre commensurable : $\upsilon^i = \upsilon^{i-1} - \lambda \left[H_{app}^{-1} \frac{\partial J}{\partial \upsilon}\right]\Big|_{\upsilon=\upsilon^{i-1}}$ ;

♦ calculer les coefficients linéaires en appliquant l'estimateur *ffocls* (respectivement *ffocils*) ;

♦ calculer le critère $J^i$ ;

♦ $\lambda = \dfrac{\lambda}{2}$ ;

tant que $J^i > J^{i-1}$

$i = i + 1$

tant que $\dfrac{\left\|\hat{\theta}^i_{co-ffocls} - \hat{\theta}^{i-1}_{co-ffocls}\right\|}{\left\|\hat{\theta}^{i-1}_{co-ffocls}\right\|} > \epsilon$ et $i > i_{max}$.

où $i_{max}$ désigne le nombre d'itérations maximal et $\Lambda$ est une constante positive qui permet la décroissance du critère à minimiser.

## 4.5 Application à l'identification d'un système électronique

L'objectif de cette section est d'analyser les performances des algorithmes développés précédemment à l'aide d'un système électronique réel. Elle est divisée principalement en deux paragraphes. Le premier paragraphe présente une description du système réel et le deuxième présente son identification dans un contexte EIV en utilisant les estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre quatre.

### 4.5.1 Description du système électronique

Le système électronique est un double intégrateur réalisé à base de résistances, de capacités et d'amplificateurs opérationnels. C'est une association en cascade de deux intégrateurs purs ayant une fréquence de coupure $w_c = 1$ rad/s représentée sur la figure 4.9.

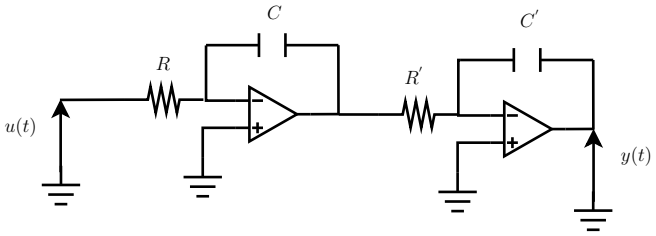



Figure 4.9 – Schéma symbolique du circuit.

Le système est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$H_1(s) = \frac{k}{s^2} \tag{4.41}$$

où le gain $k$ est incertain. Sa valeur nominale vaut 1.

Le système est corrigé par un dérivateur non entier d'ordre $\upsilon = 0.5$ afin d'avoir une marge de phase de 45°. Ce dérivateur, borné sur la bande fréquentielle $[w_b, w_h]$, est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$C(s) = C_0 \left( \frac{1 + \frac{s}{w_b}}{1 + \frac{s}{w_h}} \right)^{\upsilon} \tag{4.42}$$

Il est approché en utilisant une distribution récursive de pôles et de zéros [Oustaloup, 1995] comme suit :

$$\tilde{C}(s) \simeq C_0 \prod_{k=1}^{N_s} \left( \frac{1 + \frac{s}{w_k'}}{1 + \frac{s}{w_k}} \right) \tag{4.43}$$

Les pôles et les zéros sont donnés par les relations suivantes :

$$\frac{w_k}{w_{k+1}} = \frac{w_k{}'}{w_{k+1}'} = \alpha\eta \tag{4.44}$$

$$\frac{w_k}{w_k{}'} = \alpha \tag{4.45}$$

$$\frac{w_{k+1}'}{w_k} = \eta \tag{4.46}$$

Les facteurs récursifs $\alpha$ et $\eta$ sont choisis égaux afin d'obtenir un ordre $\upsilon = 0.5$. Le facteur $\alpha\eta$ est choisi égale à 8 menant à quatre paires de pôles et de zéros ($N_s = 4$). Le schéma global du dérivateur non entier d'ordre 0.5 est représenté sur la figure 4.10.

Chaque paire de pôle et zéro de la fonction de transfert $\tilde{C}(s)$ constitue une cellule. Chaque cellule est conçue à l'aide d'une paire de résistance, une paire de capacité et un amplificateur opérationnel conformément à la figure 4.11.

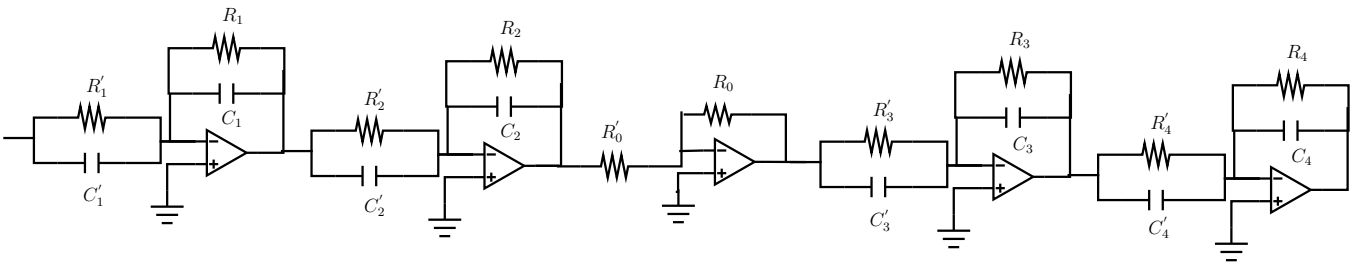



Figure 4.10 – Schéma d'un dérivateur non entier d'ordre 0.5 borné en fréquence.

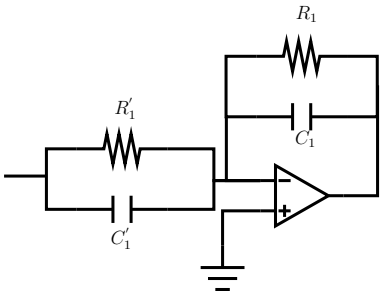



Figure 4.11 – Schéma d'une cellule électronique.

La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par :

$$H(s) = \tilde{C}(s)H_1(s) \simeq C_0 \prod_{k=1}^{N_s} \left( \frac{1 + \frac{s}{w_k'}}{1 + \frac{s}{w_k}} \right) \frac{1}{s^2} \tag{4.47}$$

Une contre réaction est rajoutée à $H(s)$ permettant d'obtenir la boucle fermée représentée sur la figure 4.12.

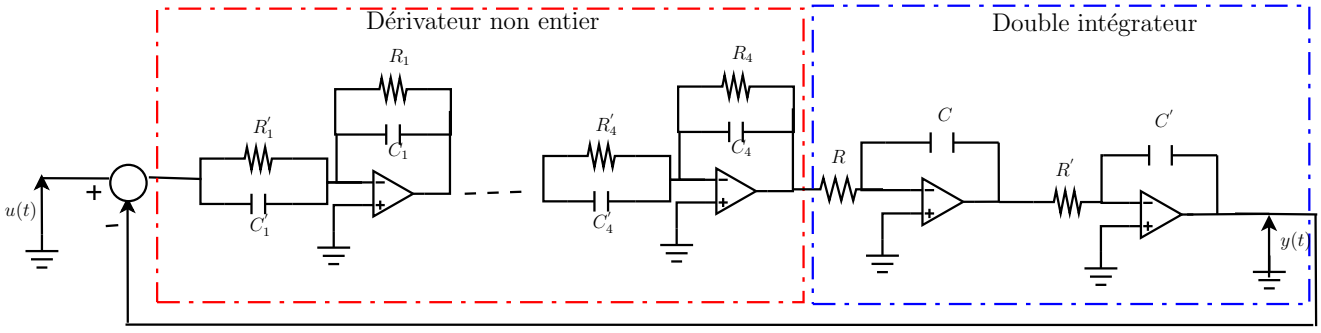



Figure 4.12 – Schéma symbolique du circuit.

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$G(s) = \frac{b}{a + s^{\upsilon}} \tag{4.48}$$

avec $\upsilon = 1.5$. La figure 4.13 représente une photographie du banc d'essai.

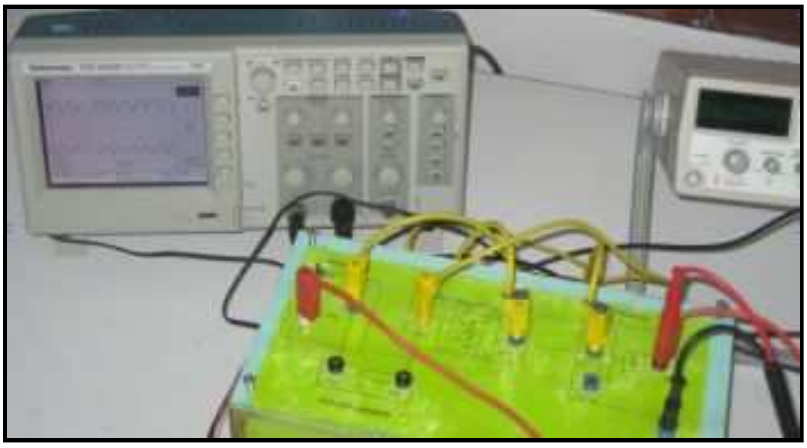


Figure 4.13 – Photographie du banc d'essai.

### 4.5.2 Identification du système électronique

Dans cette section, les paramètres du modèle décrit par l'équation (4.48) sont estimés. D'abord, tous les ordres de dérivation sont supposés connus et seuls les coefficients du modèle sont estimés en appliquant les algorithmes *ffocls*, *ffocils* et *oe*. Ensuite, l'ordre commensurable $\upsilon$ est supposé inconnu et estimé au même titre que les coefficients moyennant les estimateurs *co-ffocls*, *co-ffocils* et *oe*.

Le signal d'entrée non bruité est une séquence binaire pseudo aléatoire (SBPA) de distribution non gaussienne (hypothèse H2 vérifiée). Les signaux d'entrée et de sortie sont échantillonnés avec une période $h = 0.1$ sec et le nombre d'échantillons est de $N_t = 1000$. Les signaux recueillis n'étant pas très bruités, un bruit additif a été rajouté aux signaux d'entrée et de sortie d'un RSB de 10dB afin d'être dans un contexte EIV avec un niveau important de bruit (Fig.4.14 et Fig.4.15).

#### 4.5.2.1 Cas des ordres de derivation connus

Dans ce paragraphe toutes les hypothèses, sous lesquelles sont développés les estimateurs fondés sur les cumulants d'ordre quatre, sont vérifiées :

- l'ordre de dérivation est connu $\upsilon = 1.5$ ;
- le signal d'entrée non bruité a une distribution non gaussienne ;
- les bruits additifs sur l'entrée et sur la sortie du système ont une distribution gaussienne.

Les résultats d'estimation obtenus en appliquant les estimateurs *ffocls*, *ffocils* et *oe* sont résumés dans le tableau 4.3 qui contient les coefficients estimés par chaque estimateur ainsi

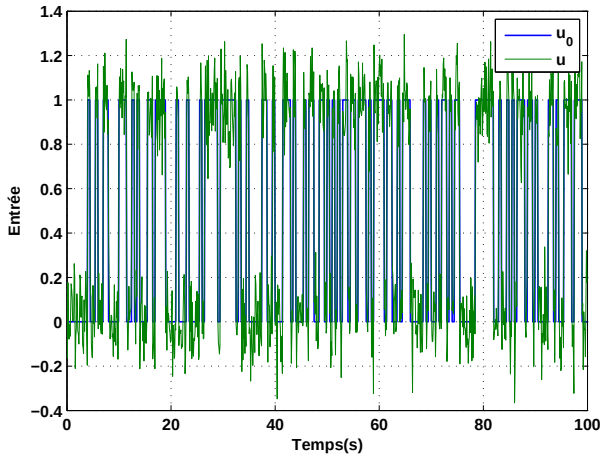



Figure 4.14 – Signal d'entrée bruité $u$ et non bruité $u_0$ : données d'estimation.

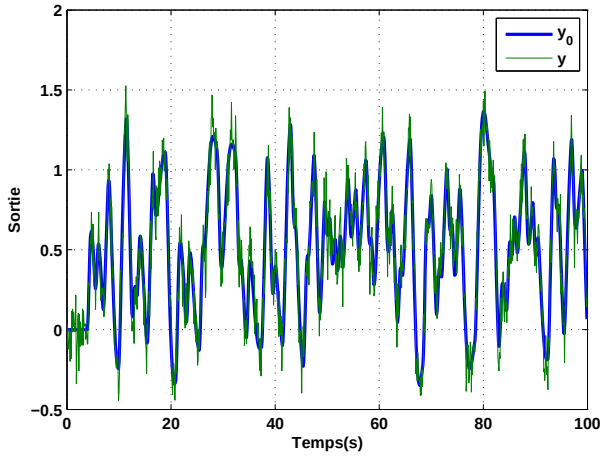



Figure 4.15 – Signal de sortie bruité $y$ et non bruité $y_0$ : données d'estimation.

que l'ajustement ($FIT$) défini par :

$$FIT = 100 \times \left( 1 - \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_t} \left(y(t_k) - \hat{y}(t_k)\right)^2}{\sum_{k=1}^{N_t} \left(y(t_k) - \bar{y}(t_k)\right)^2}} \right) \tag{4.49}$$

où $\hat{y}(t_k)$ désigne la sortie du modèle estimé et $\bar{y}(t_k)$ est la moyenne du signal de sortie $y(t_k)$.

Tableau 4.3 – Résultats d'estimation par *ffocls* , *ffocils* et *oe* du système électronique réel.

| Méthode | $\hat{a}$ | $\hat{b}$ | $FIT$ |
|---|---|---|---|
| *oe* | 2.81 | 2.83 | 90.27 |
| *ffocls* | 2.47 | 2.49 | 93.37 |
| *ffocils* | 2.49 | 2.5 | 93.38 |

En comparant les différents Fits obtenus, il est clair que l'algorithme *oe* donne des paramètres biaisés alors que les résultats obtenus par les deux algorithmes ffocls et ffocils sont satisfaisantes en termes de minimisation de l'erreur d'estimation et en termes d'absence de biais d'estimation.

Les réponses temporelles des modèles estimés par *oe*, *ffocls* et *ffocils* sont représentées respectivement sur les figures 4.17, 4.18 et 4.19. Les deux sorties obtenues par *ffocls* et *ffocils* sont plus proches à la sortie réelle.

Un autre jeux de données, constitué d'une séquence binaire pseudo aléatoire (SBPA) avec un nombre de mesures de $N_t = 1000$, tracé sur la figure 4.16, est utilisé pour valider les différents modèles estimés. La figure 4.20 permet de comparer les différentes réponses temporelles. Les modèles obtenus par les deux algorithmes *ffocls* et *ffocils* sont plus valides que le modèle obtenu par l'algorithme *oe*.

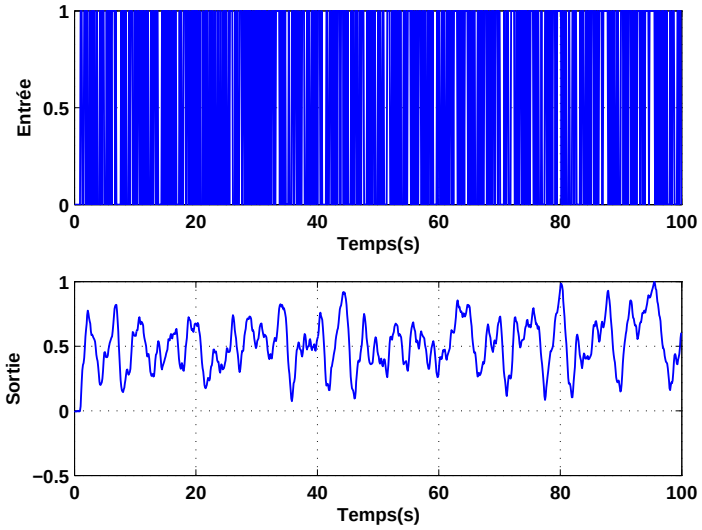
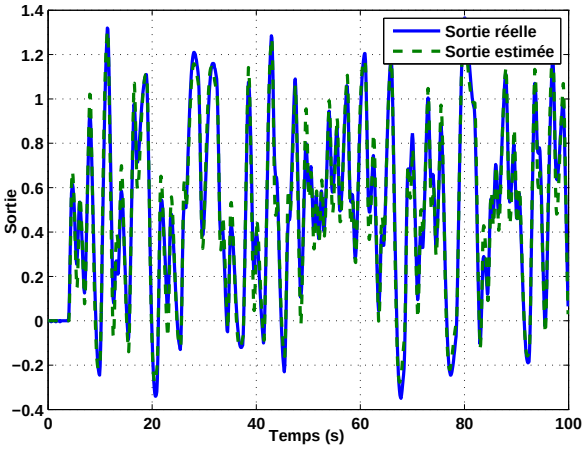
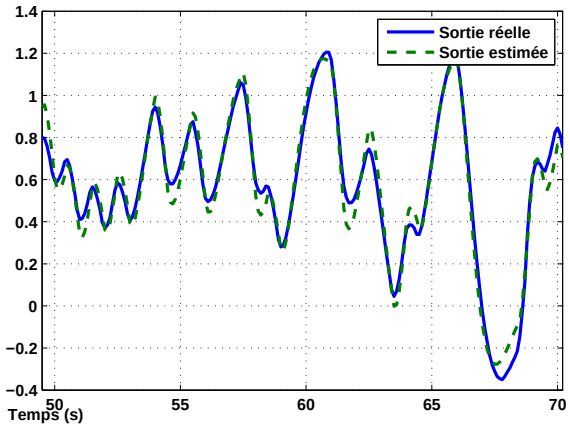


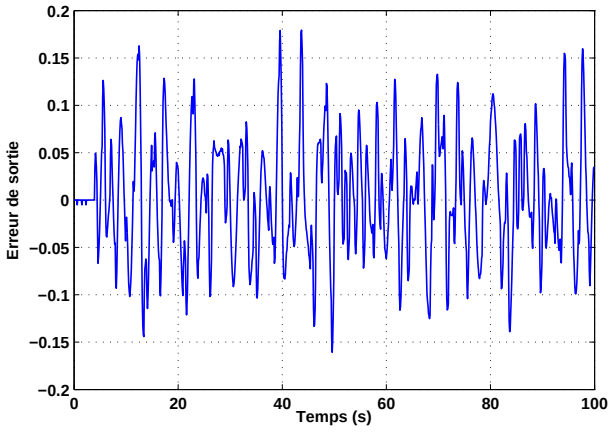

Figure 4.16 – Données de validation.




(a)

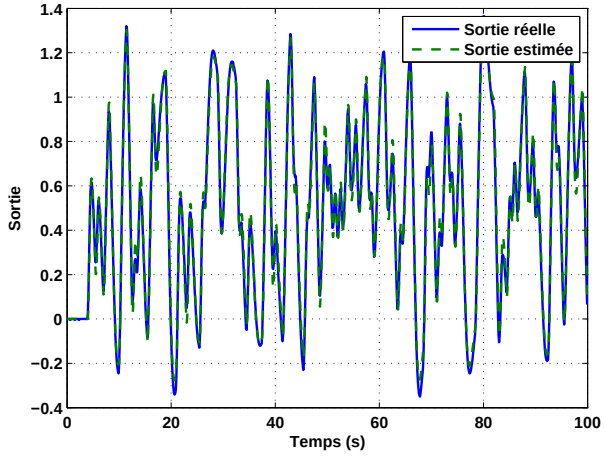



(b)

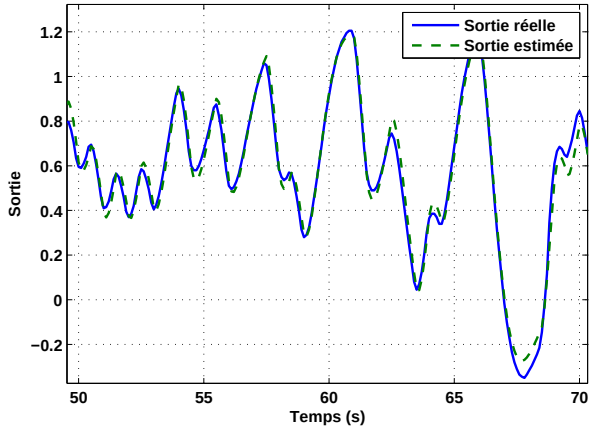



(c)

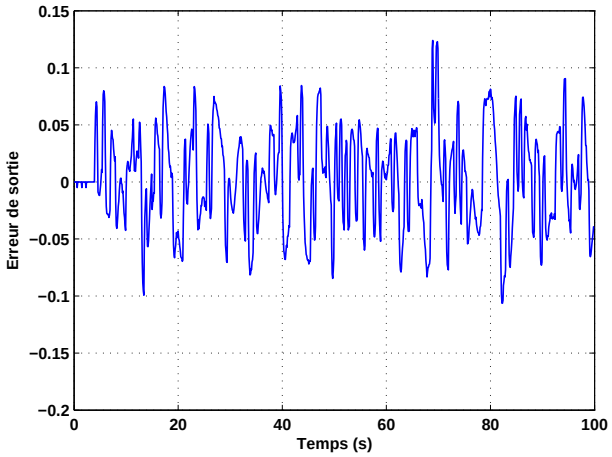
Figure 4.17 – Réponses temporelles du système réel et du modèle estimé par *oe* (a), un zoom (b) et l'erreur de sortie (c) : données d'estimation.




(a)

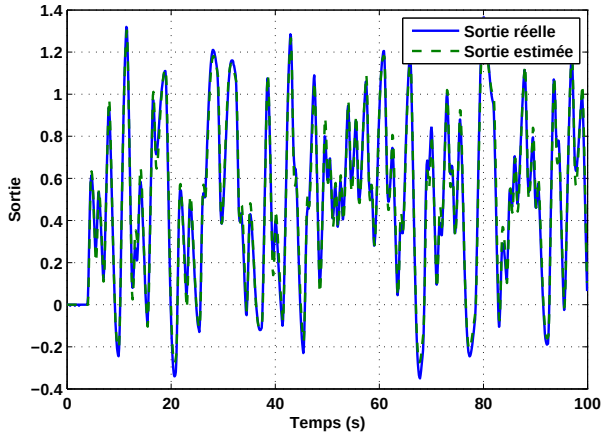



(b)

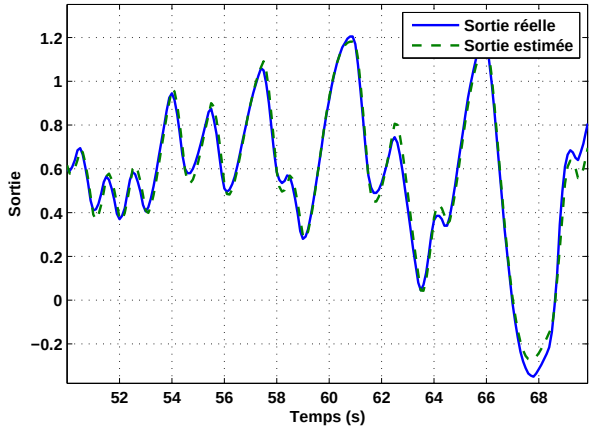



(c)

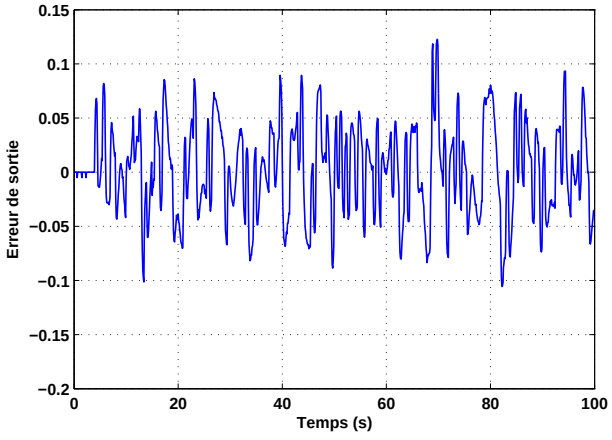
Figure 4.18 – Réponses temporelles du système réel et du modèle estimé par *ffocls* (a), un zoom (b) et l'erreur de sortie (c) : données d'estimation.




(a)




(b)




(c)

Figure 4.19 – Réponses temporelles du système réel et du modèle estimé par *ffocils* (a), un zoom (b) et l'erreur de sortie (c) : données d'estimation.

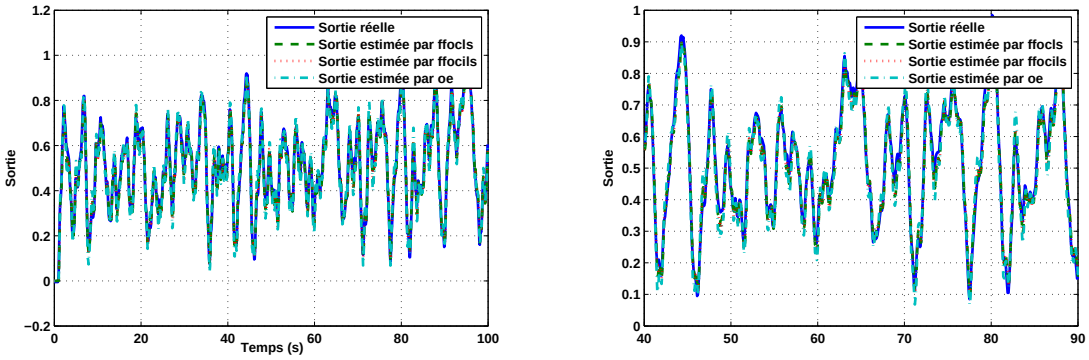



Figure 4.20 – Réponses temporelles du système réel et du modèle estimé par *ffocls*, *ffocils* et *oe* : données de validation.

#### 4.5.2.2 Cas des ordres de derivation inconnus

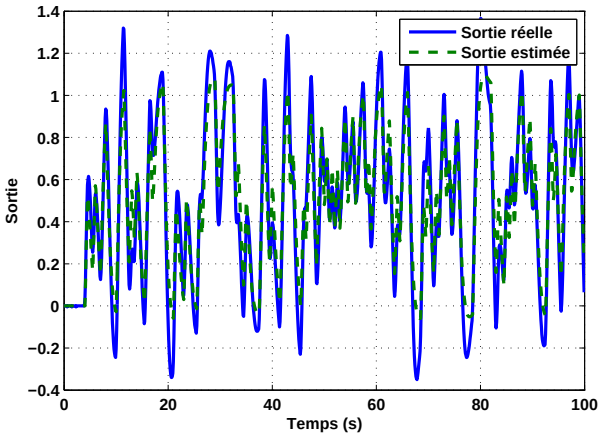
Dans ce paragraphe l'ordre de dérivation est supposé inconnu. Les estimateurs *co-ffocls*, *co-ffocils* et *oe* sont appliqués pour estimer les coefficients et l'ordre commensurable du modèle (4.48) qui décrit le système électronique réel.

Les résultats d'estimation sont résumés dans le tableau 4.4 avec un ordre commensurable optimal de $\upsilon = 1.51$.

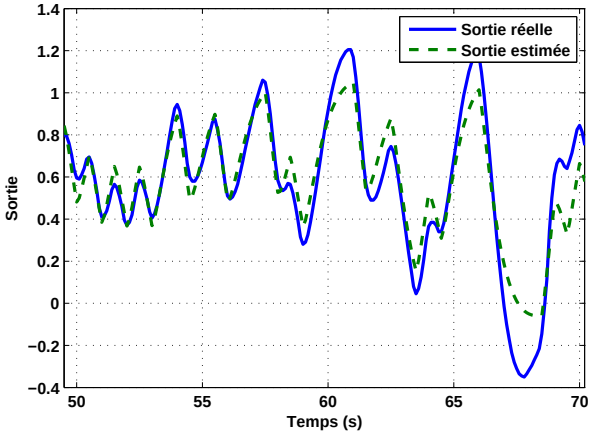
Tableau 4.4 – Résultats d'estimation par *co-ffocls* , *co-ffocils* et *oe* du système électronique réel : cas des ordres de dérivation inconnus.

| Méthode | $\hat{a}$ | $\hat{b}$ | $\hat{\upsilon}$ | $FIT$ |
|---|---|---|---|---|
| *oe* | 1.71 | 1.75 | 1.22 | 79.15 |
| *co-ffocls* | 2.50 | 2.51 | 1.51 | 93.51 |
| *co-ffocils* | 2.52 | 2.53 | 1.51 | 93.52 |

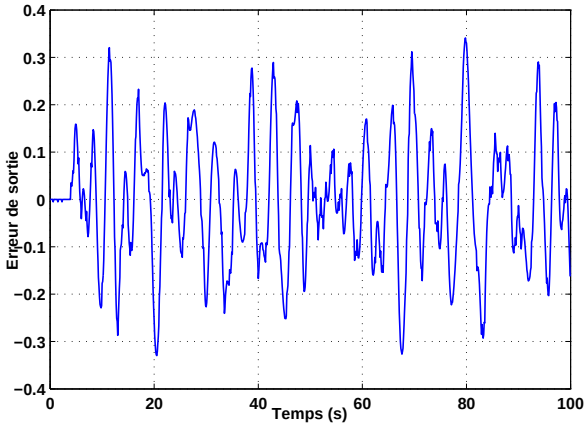
Les figures 4.21, 4.22 et 4.23 permettent de comparer la sortie du système électronique aux sorties des modèles estimés respectivement par *oe*, *co-ffocls* et *co-ffocils*. Les résultats sont améliorés par les estimateurs basés sur les cumulants d'ordre quatre, l'erreur étant inférieure que précédemment. Le Fit obtenu par l'algorithme *oe* diminue et l'erreur de sortie augmente.




(a)

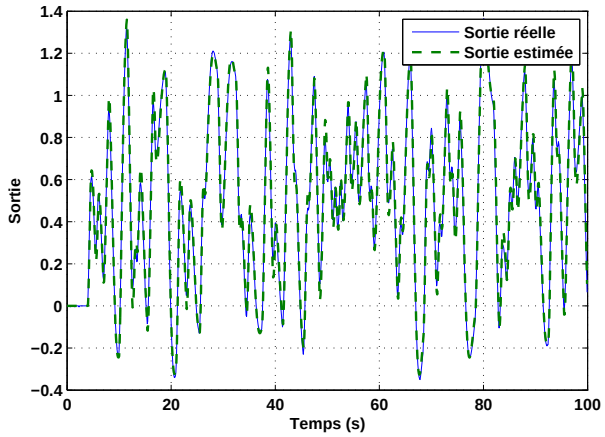



(b)

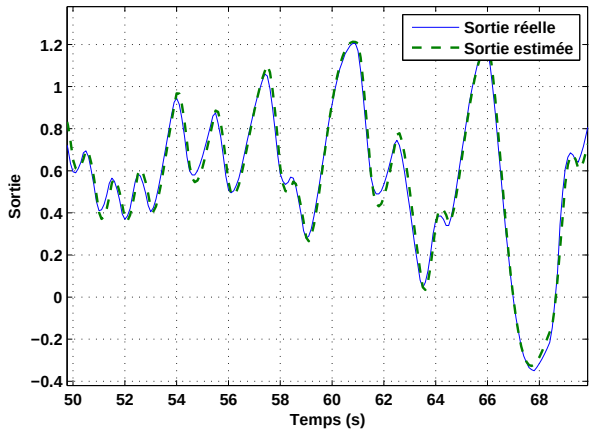



(c)

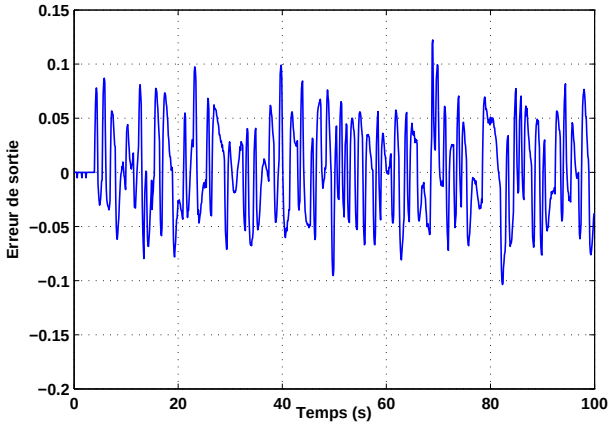
Figure 4.21 – Réponses temporelles du système réel et du modèle estimé par *oe* (a), un zoom (b) et l'erreur de sortie (c) : données d'estimation.




(a)

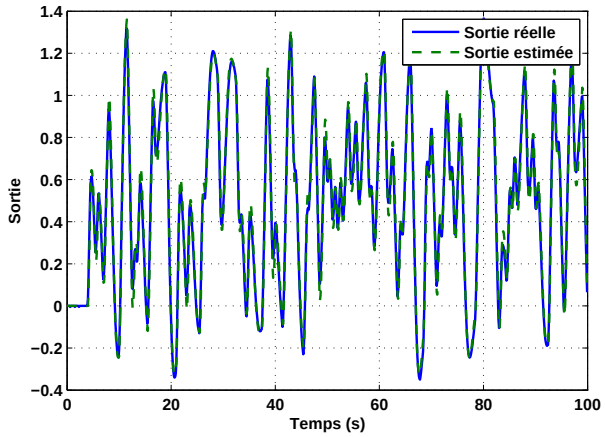



(b)

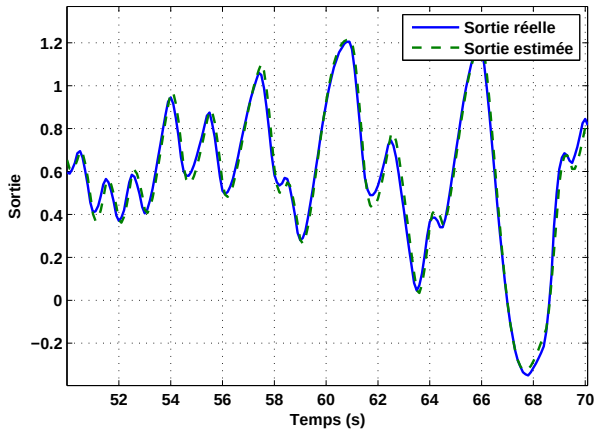



(c)

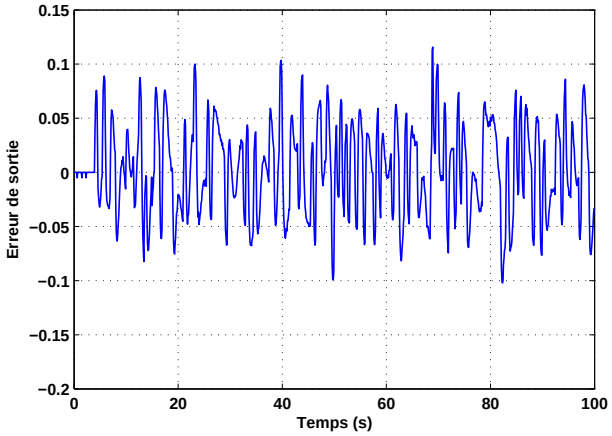
Figure 4.22 – Réponses temporelles du système réel et du modèle estimé par *co-ffocls* (a), un zoom (b) et l'erreur de sortie (c) : données d'estimation.




(a)




(b)




(c)

Figure 4.23 – Réponses temporelles du système réel et du modèle estimé par *co-ffocils* (a), un zoom (b) et l'erreur de sortie (c) : données d'estimation.

Les mêmes données de validation utilisées précédemment sont exploités dans ce paragraphe pour valider les modèles estimés par les estimateurs *oe*, *co-ffocls* et *co-ffocils*. La figure 4.24 montre la validité des modèles estimés par les deux algorithmes *ffocls* et *ffocils* ce qui justifie la consistance des algorithmes utilisés.

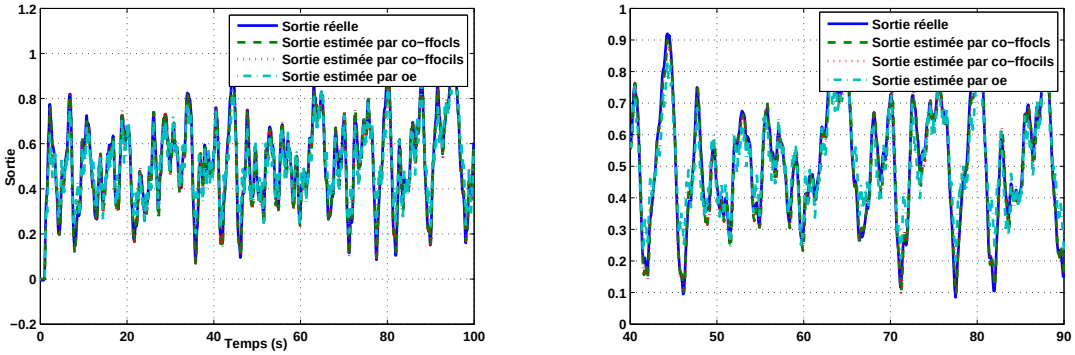



Figure 4.24 – Réponses temporelles du système réel et du modèle estimé par *co-ffocls*, *co-ffocils* et *oe* : données de validation.

En conclusion, les résultats obtenus sont satisfaisants. Les estimateurs fondées sur les statistiques d'ordre quatre ont montré leur pertinence en identification d'un système électronique où les données des signaux d'entrée et de sortie sont entachées par des bruits additifs.

## 4.6 Conclusion

Ce chapitre traite le problème d'identification des systèmes EIV à temps continu par modèles non entiers. Les contributions sont fondées sur les statistiques d'ordre quatre. L'utilisation des cumulants d'ordre quatre au lieu des cumulants d'ordre trois a permis de lever l'hypothèse restrictive d'asymétrie du signal d'entrée non bruité. Deux méthodes sont développées. La première suppose que tous les ordres de dérivation sont connus et seuls les coefficients de l'équation différentielle non entière sont estimés en utilisant les algorithmes fondés sur les cumulants d'ordre quatre : *ffocls* et *ffocils*. La deuxième consiste à estimer l'ordre commensurable au même titre que les coefficients de l'équation différentielle non entière en utilisant des techniques d'optimisation non linéaires combinées aux estimateurs *ffocls* et *ffocils*, soit les deux estimateurs *co-ffocls* et *co-ffocils*.

Les performances des estimateurs développés sont illustrées dans différentes situations de bruit additif à l'aide d'un exemple de simulation numérique. Les résultats obtenus ont montré que lorsque les bruits additifs sur l'entrée et la sortie du système sont blancs ou

colorés, les algorithmes fondées sur les cumulants d'ordre quatre donnent des résultats consistants.

Une application pratique sur l'identification d'un système électronique a été réalisée. Il s'agit d'un intégrateur non entier, borné en fréquence, approché par des pôles et zéros récursifs. Le système est identifié en boucle fermée tout en supposant que les mesures des signaux d'entrée et de sortie sont entachées par des bruits additifs ou des erreurs de mesures. L'application des estimateurs cités précédemment a montré leur pertinence même en utilisant des mesures réelles.

# Conclusion Générale et perspectives

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur l'identification temporelle des systèmes non entiers dans un contexte à erreurs en les variables. Deux classes de méthodes d'identification par modèles entiers sont généralisées au cas non entier. La première classe est fondée sur les statistiques d'ordre trois et la deuxième classe est fondée sur les statistiques d'ordre quatre.

**Le chapitre 1** est un panorama des méthodes d'identification des systèmes linéaires à temps discret et à temps continu par modèles entiers dans le contexte EIV. Diverses méthodes fondées sur les sur les statistiques de second ordre et sur les statistiques d'ordre supérieur sont détaillés.

**Le chapitre 2** présente les outils les plus utilisés dans le domaine de l'application des systèmes non entiers. Les opérateurs d'intégration et de dérivation, leurs transformées de Laplace ainsi que leurs caractéristiques fréquentielles y sont rappelés. Puis, une contribution est présentée. Elle consiste à généraliser la définition de Grünwald de la dérivation non entière dont l'objectif est de minimiser l'erreur d'approximation numérique. Enfin, une présentation des différentes méthodes de simulation temporelle des systèmes non entiers est détaillée y compris une nouvelle approche fondée sur la définition de Grünwald généralisée. Des exemples de simulation numérique ont montré l'intérêt de cette contribution, soit en approximation de l'opérateur de dérivation non entier soit en simulation des systèmes non entiers.

**Le chapitre 3** présente les principales contributions fondées sur les statistiques d'ordre trois. Les méthodes d'identification des systèmes EIV par modèles entiers à temps continu sont généralisées au cas non entier. Deux cas différents sont distingués : le premier cas suppose que tous les ordres de dérivation non entière sont connus *a priori* et seuls les coefficients de l'équation différentielle non entière sont estimés en utilisant deux estimateurs basés sur le cumulants d'ordre trois (estimateur *ftocls* et *ftocils*). Le deuxième

cas suppose que les ordres de dérivation sont commensurables à un ordre $v$, estimé au même titre que les coefficients de l'équation différentielle non entière en utilisant les techniques d'optimisation non linéaires vis-à-vis des paramètres (estimateur *co-ftocls* et *co-ftocils*). Les résultats de simulation, sur un système non entier dans un contexte EIV, ont montré la consistance des méthodes développées. Une application pratique sur la modélisation du phénomène de diffusion de chaleur dans un barreau d'Aluminium a aussi montré la pertinence de ces méthodes.

**Le chapitre 4** détaille les principales contributions basées sur les statistiques d'ordre quatre. Comme dans le chapitre 3, deux cas différents sont distingués : le premier cas suppose que tous les ordres de dérivation non entière sont connus *a priori* et seuls les coefficients de l'équation différentielle sont estimés en utilisant deux estimateurs basés sur le cumulants d'ordre quatre (estimateur *ffocls* et *ffocils*). Le deuxième cas suppose que les ordres de dérivation sont commensurables à un ordre $v$ qui est estimé au même temps que les coefficients de l'équation différentielle non entière en utilisant les techniques d'optimisation non linéaires vis-à-vis des paramètres (*co-ffocls* et *co-ffocils*). Les exemples de simulations numériques ont montré la consistance des méthodes développées. Une application pratique sur la modélisation d'un système électronique a aussi montré la consistance de ces méthodes.

Quant aux perspectives de recherche, elles s'inscrivent directement dans la continuité des travaux exposés dans ce mémoire.

La première perspective consiste à relâcher la contrainte de commensurabilité pour l'estimation de tous les ordres de dérivation du modèle non entier au même titre que les coefficients de l'équation différentielle non entière.

La deuxième perspective consiste à étendre les méthodes développées pour l'identification des systèmes multivariables dans un contexte EIV par modèles non entiers.

# Annexe A

## Calcul des coefficients $A_i$

Ce calcul a été effectué par François Levron, Maître de Conférences à l'Université Bordeaux 1 et à l'Institut Mathématique de Bordeaux (IMB), qui est grandement apprécié.

```
> restart;
```

```
> f:=h->series((1-exp(-h*p))/h,h=0,11);
```

$$f := h \to \text{series}\left(\frac{1-e^{(-h\,p)}}{h},\, h=0,\, 11\right)$$

```
> f(h);
```

$$p - \frac{1}{2}\,p^2\,h + \frac{1}{6}\,p^3\,h^2 - \frac{1}{24}\,p^4\,h^3 + \frac{1}{120}\,p^5\,h^4 - \frac{1}{720}\,p^6\,h^5 + \frac{1}{5040}\,p^7\,h^6 - \frac{1}{40320}\,p^8\,h^7 + \frac{1}{362880}\,p^9\,h^8 - \frac{1}{3628800}\,p^{10}\,h^9 + \mathrm{O}(h^{10})$$

```
> for i from 1 to 10 do
> s[i]:=simplify(series(f(h)^(n+i-1),h=0,11));
> od:
```

```
> S:=simplify(series(sum(A[j]*s[j]*h^(j-1),j=1..10),h=0,11));
```

$$
\begin{aligned}
S := {} & A_1\,p^n + \left(-\frac{1}{2}\,A_1\,p^{(n+1)}\,n + A_2\,p^{(n+1)}\right)\,h + \\
& \left(\frac{1}{24}\,A_1\,p^{(n+2)}\,n + \frac{1}{8}\,A_1\,p^{(n+2)}\,n^2 - \frac{1}{2}\,A_2\,p^{(n+2)}\,n - \frac{1}{2}\,A_2\,p^{(n+2)} + A_3\,p^{(n+2)}\right)\,h^2 + \\
& \left(A_4\,p^{(n+3)} - \frac{1}{48}\,A_1\,p^{(n+3)}\,n^3 - \frac{1}{48}\,A_1\,p^{(n+3)}\,n^2 + \frac{7}{24}\,A_2\,p^{(n+3)}\,n + \frac{1}{6}\,A_2\,p^{(n+3)}\right. \\
& \left. + \frac{1}{8}\,A_2\,p^{(n+3)}\,n^2 - \frac{1}{2}\,A_3\,p^{(n+3)}\,n - A_3\,p^{(n+3)}\right)\,h^3 + \left(\frac{1}{1152}\,A_1\,p^{(n+4)}\,n^2\right. \\
& - \frac{1}{2880}\,A_1\,p^{(n+4)}\,n + \frac{1}{192}\,A_1\,p^{(n+4)}\,n^3 + \frac{1}{384}\,A_1\,p^{(n+4)}\,n^4 - \frac{1}{2}\,A_4\,p^{(n+4)}\,n \\
& - \frac{3}{2}\,A_4\,p^{(n+4)} + \frac{13}{24}\,A_3\,p^{(n+4)}\,n + \frac{7}{12}\,A_3\,p^{(n+4)} + \frac{1}{8}\,A_3\,p^{(n+4)}\,n^2 - \frac{1}{12}\,A_2\,p^{(n+4)}\,n^2 \\
& \left. - \frac{5}{48}\,A_2\,p^{(n+4)}\,n - \frac{1}{24}\,A_2\,p^{(n+4)} - \frac{1}{48}\,A_2\,p^{(n+4)}\,n^3 + A_5\,p^{(n+4)}\right)\,h^4 +
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{1}{5760}\,A_1\,p^{(n+5)}\,n^2-\frac{1}{2304}\,A_1\,p^{(n+5)}\,n^3-\frac{1}{1152}\,A_1\,p^{(n+5)}\,n^4-\frac{1}{3840}\,A_1\,p^{(n+5)}\,n^5\right.$$
$$+\frac{19}{24}\,A_4\,p^{(n+5)}\,n+\frac{5}{4}\,A_4\,p^{(n+5)}+\frac{1}{8}\,A_4\,p^{(n+5)}\,n^2-\frac{7}{48}\,A_3\,p^{(n+5)}\,n^2-\frac{1}{3}\,A_3\,p^{(n+5)}\,n$$
$$-\frac{1}{4}\,A_3\,p^{(n+5)}-\frac{1}{48}\,A_3\,p^{(n+5)}\,n^3+A_6\,p^{(n+5)}-\frac{1}{2}\,A_5\,p^{(n+5)}\,n-2\,A_5\,p^{(n+5)}$$
$$+\frac{37}{1152}\,A_2\,p^{(n+5)}\,n^2+\frac{79}{2880}\,A_2\,p^{(n+5)}\,n+\frac{1}{120}\,A_2\,p^{(n+5)}+\frac{1}{64}\,A_2\,p^{(n+5)}\,n^3$$
$$\left.+\frac{1}{384}\,A_2\,p^{(n+5)}\,n^4\right)h^5+\left(-\frac{13}{414720}\,A_1\,p^{(n+6)}\,n^3+\frac{1}{9216}\,A_1\,p^{(n+6)}\,n^4\right.$$
$$+\frac{1}{9216}\,A_1\,p^{(n+6)}\,n^5+\frac{1}{46080}\,A_1\,p^{(n+6)}\,n^6+\frac{1}{8}\,A_5\,p^{(n+6)}\,n^2+\frac{25}{24}\,A_5\,p^{(n+6)}\,n$$
$$+\frac{109}{1152}\,A_3\,p^{(n+6)}\,n^2+\frac{5}{192}\,A_3\,p^{(n+6)}\,n^3+\frac{1}{384}\,A_3\,p^{(n+6)}\,n^4+\frac{143}{960}\,A_3\,p^{(n+6)}\,n$$
$$+\frac{1}{181440}\,A_1\,p^{(n+6)}\,n-\frac{1}{2}\,A_6\,p^{(n+6)}\,n-\frac{103}{11520}\,A_2\,p^{(n+6)}\,n^2-\frac{5}{768}\,A_2\,p^{(n+6)}\,n^3$$
$$-\frac{5}{2304}\,A_2\,p^{(n+6)}\,n^4-\frac{1}{3840}\,A_2\,p^{(n+6)}\,n^5-\frac{11}{1920}\,A_2\,p^{(n+6)}\,n-\frac{5}{24}\,A_4\,p^{(n+6)}\,n^2$$
$$-\frac{1}{48}\,A_4\,p^{(n+6)}\,n^3-\frac{11}{16}\,A_4\,p^{(n+6)}\,n-\frac{1}{69120}\,A_1\,p^{(n+6)}\,n^2+\frac{13}{6}\,A_5\,p^{(n+6)}$$
$$\left.-\frac{3}{4}\,A_4\,p^{(n+6)}-\frac{1}{720}\,A_2\,p^{(n+6)}+A_7\,p^{(n+6)}-\frac{5}{2}\,A_6\,p^{(n+6)}+\frac{31}{360}\,A_3\,p^{(n+6)}\right)h^6+$$
$$\left(\frac{1}{5040}\,A_2\,p^{(n+7)}-\frac{5}{3}\,A_5\,p^{(n+7)}-3\,A_7\,p^{(n+7)}+\frac{43}{120}\,A_4\,p^{(n+7)}-\frac{1}{40}\,A_3\,p^{(n+7)}\right.$$
$$-\frac{1}{55296}\,A_1\,p^{(n+7)}\,n^5+\frac{359}{362880}\,A_2\,p^{(n+7)}\,n-\frac{1}{92160}\,A_1\,p^{(n+7)}\,n^6$$
$$-\frac{1}{645120}\,A_1\,p^{(n+7)}\,n^7+\frac{1}{138240}\,A_1\,p^{(n+7)}\,n^3+\frac{1}{829440}\,A_1\,p^{(n+7)}\,n^4$$
$$-\frac{1}{362880}\,A_1\,p^{(n+7)}\,n^2-\frac{1}{2}\,A_7\,p^{(n+7)}\,n+\frac{1}{512}\,A_2\,p^{(n+7)}\,n^2+\frac{797}{414720}\,A_2\,p^{(n+7)}\,n^3$$
$$+\frac{1}{1024}\,A_2\,p^{(n+7)}\,n^4+\frac{11}{46080}\,A_2\,p^{(n+7)}\,n^5+\frac{1}{46080}\,A_2\,p^{(n+7)}\,n^6-\frac{13}{48}\,A_5\,p^{(n+7)}\,n^2$$
$$-\frac{7}{6}\,A_5\,p^{(n+7)}\,n-\frac{127}{2880}\,A_3\,p^{(n+7)}\,n^2-\frac{41}{2304}\,A_3\,p^{(n+7)}\,n^3-\frac{1}{288}\,A_3\,p^{(n+7)}\,n^4$$
$$-\frac{1}{48}\,A_5\,p^{(n+7)}\,n^3+\frac{217}{1152}\,A_4\,p^{(n+7)}\,n^2+\frac{7}{192}\,A_4\,p^{(n+7)}\,n^3+\frac{1}{384}\,A_4\,p^{(n+7)}\,n^4$$
$$+\frac{1229}{2880}\,A_4\,p^{(n+7)}\,n-\frac{17}{320}\,A_3\,p^{(n+7)}\,n+\frac{10}{3}\,A_6\,p^{(n+7)}+\frac{31}{24}\,A_6\,p^{(n+7)}\,n$$
$$\left.-\frac{1}{3840}\,A_3\,p^{(n+7)}\,n^5+\frac{1}{8}\,A_6\,p^{(n+7)}\,n^2+A_8\,p^{(n+7)}\right)h^7+$$

$$\left(\frac{81}{80}\,A_5\,p^{(n+8)}+\frac{19}{4}\,A_7\,p^{(n+8)}-\frac{1}{40320}\,A_2\,p^{(n+8)}-\frac{23}{160}\,A_4\,p^{(n+8)}+A_9\,p^{(n+8)}\right.$$
$$-\frac{7}{2}\,A_8\,p^{(n+8)}-\frac{211}{1451520}\,A_2\,p^{(n+8)}\,n+\frac{563}{34560}\,A_3\,p^{(n+8)}\,n^2+\frac{3587}{414720}\,A_3\,p^{(n+8)}\,n^3$$
$$+\frac{1}{10321920}\,A_1\,p^{(n+8)}\,n^8+\frac{1}{1105920}\,A_1\,p^{(n+8)}\,n^7+\frac{1}{442368}\,A_1\,p^{(n+8)}\,n^6$$
$$+\frac{1}{1658880}\,A_1\,p^{(n+8)}\,n^5-\frac{67}{39813120}\,A_1\,p^{(n+8)}\,n^4+\frac{1}{2580480}\,A_1\,p^{(n+8)}\,n^3$$
$$+\frac{101}{348364800}\,A_1\,p^{(n+8)}\,n^2+\frac{361}{1152}\,A_5\,p^{(n+8)}\,n^2+\frac{3}{64}\,A_5\,p^{(n+8)}\,n^3$$
$$+\frac{1}{384}\,A_5\,p^{(n+8)}\,n^4+\frac{2659}{2880}\,A_5\,p^{(n+8)}\,n-\frac{1393}{11520}\,A_4\,p^{(n+8)}\,n^2+\frac{127}{20160}\,A_3\,p^{(n+8)}$$
$$-\frac{1}{2}\,A_8\,p^{(n+8)}\,n-\frac{1}{645120}\,A_2\,p^{(n+8)}\,n^7-\frac{127}{414720}\,A_2\,p^{(n+8)}\,n^4$$
$$-\frac{73}{165888}\,A_2\,p^{(n+8)}\,n^3-\frac{127}{362880}\,A_2\,p^{(n+8)}\,n^2-\frac{1}{8640}\,A_2\,p^{(n+8)}\,n^5$$
$$-\frac{1}{46080}\,A_2\,p^{(n+8)}\,n^6-\frac{79}{2304}\,A_4\,p^{(n+8)}\,n^3-\frac{1}{3840}\,A_4\,p^{(n+8)}\,n^5$$
$$-\frac{403}{1920}\,A_4\,p^{(n+8)}\,n-\frac{1}{9676800}\,A_1\,p^{(n+8)}\,n+\frac{23}{9216}\,A_3\,p^{(n+8)}\,n^4$$
$$+\frac{17}{46080}\,A_3\,p^{(n+8)}\,n^5+\frac{1}{46080}\,A_3\,p^{(n+8)}\,n^6+\frac{11533}{725760}\,A_3\,p^{(n+8)}\,n$$
$$-\frac{1}{3}\,A_6\,p^{(n+8)}\,n^2-\frac{1}{48}\,A_6\,p^{(n+8)}\,n^3-\frac{85}{48}\,A_6\,p^{(n+8)}\,n+\frac{1}{8}\,A_7\,p^{(n+8)}\,n^2$$
$$\left.+\frac{37}{24}\,A_7\,p^{(n+8)}\,n-\frac{11}{2304}\,A_4\,p^{(n+8)}\,n^4-\frac{25}{8}\,A_6\,p^{(n+8)}\right)h^8+\left(\frac{1}{362880}\,A_2\,p^{(n+9)}\right.$$
$$+\frac{1}{27869184}\,A_1\,p^{(n+9)}\,n^4+\frac{2933}{39813120}\,A_2\,p^{(n+9)}\,n^4+\frac{5711}{69672960}\,A_2\,p^{(n+9)}\,n^3$$
$$+\frac{18461}{348364800}\,A_2\,p^{(n+9)}\,n^2-\frac{7291}{1451520}\,A_3\,p^{(n+9)}\,n^2-\frac{1469}{5760}\,A_5\,p^{(n+9)}\,n^2$$
$$-\frac{43}{768}\,A_5\,p^{(n+9)}\,n^3-\frac{7}{1152}\,A_5\,p^{(n+9)}\,n^4-\frac{1}{3840}\,A_5\,p^{(n+9)}\,n^5$$
$$-\frac{1}{645120}\,A_3\,p^{(n+9)}\,n^7-\frac{1}{30720}\,A_3\,p^{(n+9)}\,n^6-\frac{77}{276480}\,A_3\,p^{(n+9)}\,n^5$$
$$-\frac{1049}{829440}\,A_3\,p^{(n+9)}\,n^4-\frac{1373}{414720}\,A_3\,p^{(n+9)}\,n^3+\frac{11}{192}\,A_6\,p^{(n+9)}\,n^3$$
$$+\frac{43}{9216}\,A_4\,p^{(n+9)}\,n^4+\frac{23}{46080}\,A_4\,p^{(n+9)}\,n^5+\frac{1}{46080}\,A_4\,p^{(n+9)}\,n^6$$
$$+\frac{62689}{725760}\,A_4\,p^{(n+9)}\,n+\frac{1}{8}\,A_8\,p^{(n+9)}\,n^2+\frac{43}{24}\,A_8\,p^{(n+9)}\,n-\frac{23}{40}\,A_5\,p^{(n+9)}\,n$$
$$-\frac{19}{48}\,A_7\,p^{(n+9)}\,n^2-\frac{1}{48}\,A_7\,p^{(n+9)}\,n^3-\frac{2983}{725760}\,A_3\,p^{(n+9)}\,n+\frac{529}{8640}\,A_4\,p^{(n+9)}\,n^2$$
$$+\frac{9437}{414720}\,A_4\,p^{(n+9)}\,n^3+\frac{13}{7741440}\,A_2\,p^{(n+9)}\,n^7-\frac{1}{2}\,A_9\,p^{(n+9)}\,n$$
$$+\frac{5}{442368}\,A_2\,p^{(n+9)}\,n^6+\frac{1}{25920}\,A_2\,p^{(n+9)}\,n^5-\frac{5}{2}\,A_7\,p^{(n+9)}\,n+\frac{1}{384}\,A_6\,p^{(n+9)}\,n^4$$

$$+\frac{1633}{960}A_6\,p^{(n+9)}\,n-\frac{101}{696729600}A_1\,p^{(n+9)}\,n^3-\frac{1}{4423680}A_1\,p^{(n+9)}\,n^7$$
$$-\frac{1}{185794560}A_1\,p^{(n+9)}\,n^9-\frac{1}{15482880}A_1\,p^{(n+9)}\,n^8+\frac{1}{19353600}A_1\,p^{(n+9)}\,n^2$$
$$+\frac{1}{10321920}A_2\,p^{(n+9)}\,n^8+\frac{1619}{87091200}A_2\,p^{(n+9)}\,n-\frac{1}{6220800}A_1\,p^{(n+9)}\,n^6$$
$$+\frac{19}{79626240}A_1\,p^{(n+9)}\,n^5+\frac{77}{12}A_8\,p^{(n+9)}+\frac{541}{1152}A_6\,p^{(n+9)}\,n^2+A_{10}\,p^{(n+9)}$$
$$-\frac{37}{72}A_5\,p^{(n+9)}-4\,A_9\,p^{(n+9)}-\frac{21}{4}A_7\,p^{(n+9)}+\frac{605}{12096}A_4\,p^{(n+9)}+\frac{331}{144}A_6\,p^{(n+9)}$$
$$-\frac{17}{12096}A_3\,p^{(n+9)}\Bigg)h^9+\mathrm{O}(h^{10})$$

```
> A[1]:=1;
```

$$A_1 := 1$$

```
> simplify(S);
```

$$p^n+\left(-\frac{1}{2}p^{(n+1)}\,n+A_2\,p^{(n+1)}\right)h+$$
$$\left(\frac{1}{24}p^{(n+2)}\,n+\frac{1}{8}p^{(n+2)}\,n^2-\frac{1}{2}A_2\,p^{(n+2)}\,n-\frac{1}{2}A_2\,p^{(n+2)}+A_3\,p^{(n+2)}\right)h^2+$$
$$\left(A_4\,p^{(n+3)}-\frac{1}{48}p^{(n+3)}\,n^3-\frac{1}{48}p^{(n+3)}\,n^2+\frac{7}{24}A_2\,p^{(n+3)}\,n+\frac{1}{6}A_2\,p^{(n+3)}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8}A_2\,p^{(n+3)}\,n^2-\frac{1}{2}A_3\,p^{(n+3)}\,n-A_3\,p^{(n+3)}\right)h^3+\left(\frac{1}{1152}p^{(n+4)}\,n^2\right.$$
$$-\frac{1}{2880}p^{(n+4)}\,n+\frac{1}{192}p^{(n+4)}\,n^3+\frac{1}{384}p^{(n+4)}\,n^4-\frac{1}{2}A_4\,p^{(n+4)}\,n-\frac{3}{2}A_4\,p^{(n+4)}$$
$$+\frac{13}{24}A_3\,p^{(n+4)}\,n+\frac{7}{12}A_3\,p^{(n+4)}+\frac{1}{8}A_3\,p^{(n+4)}\,n^2-\frac{1}{12}A_2\,p^{(n+4)}\,n^2$$
$$\left.-\frac{5}{48}A_2\,p^{(n+4)}\,n-\frac{1}{24}A_2\,p^{(n+4)}-\frac{1}{48}A_2\,p^{(n+4)}\,n^3+A_5\,p^{(n+4)}\right)h^4+$$
$$\left(\frac{1}{5760}p^{(n+5)}\,n^2-\frac{1}{2304}p^{(n+5)}\,n^3-\frac{1}{1152}p^{(n+5)}\,n^4-\frac{1}{3840}p^{(n+5)}\,n^5\right.$$
$$+\frac{19}{24}A_4\,p^{(n+5)}\,n+\frac{5}{4}A_4\,p^{(n+5)}+\frac{1}{8}A_4\,p^{(n+5)}\,n^2-\frac{7}{48}A_3\,p^{(n+5)}\,n^2-\frac{1}{3}A_3\,p^{(n+5)}\,n$$
$$-\frac{1}{4}A_3\,p^{(n+5)}-\frac{1}{48}A_3\,p^{(n+5)}\,n^3+A_6\,p^{(n+5)}-\frac{1}{2}A_5\,p^{(n+5)}\,n-2\,A_5\,p^{(n+5)}$$
$$+\frac{37}{1152}A_2\,p^{(n+5)}\,n^2+\frac{79}{2880}A_2\,p^{(n+5)}\,n+\frac{1}{120}A_2\,p^{(n+5)}+\frac{1}{64}A_2\,p^{(n+5)}\,n^3$$
$$\left.+\frac{1}{384}A_2\,p^{(n+5)}\,n^4\right)h^5+\left(\frac{1}{8}A_5\,p^{(n+6)}\,n^2+\frac{25}{24}A_5\,p^{(n+6)}\,n+\frac{109}{1152}A_3\,p^{(n+6)}\,n^2\right.$$
$$+\frac{5}{192}A_3\,p^{(n+6)}\,n^3+\frac{1}{384}A_3\,p^{(n+6)}\,n^4+\frac{143}{960}A_3\,p^{(n+6)}\,n-\frac{1}{2}A_6\,p^{(n+6)}\,n$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{103}{11520}\, A_2\, p^{(n+6)}\, n^2 - \frac{5}{768}\, A_2\, p^{(n+6)}\, n^3 - \frac{5}{2304}\, A_2\, p^{(n+6)}\, n^4 - \frac{1}{3840}\, A_2\, p^{(n+6)}\, n^5 \\
&- \frac{11}{1920}\, A_2\, p^{(n+6)}\, n - \frac{5}{24}\, A_4\, p^{(n+6)}\, n^2 - \frac{1}{48}\, A_4\, p^{(n+6)}\, n^3 - \frac{11}{16}\, A_4\, p^{(n+6)}\, n \\
&+ \frac{13}{6}\, A_5\, p^{(n+6)} - \frac{3}{4}\, A_4\, p^{(n+6)} - \frac{1}{720}\, A_2\, p^{(n+6)} - \frac{13}{414720}\, p^{(n+6)}\, n^3 \\
&+ \frac{1}{9216}\, p^{(n+6)}\, n^4 + \frac{1}{9216}\, p^{(n+6)}\, n^5 + \frac{1}{46080}\, p^{(n+6)}\, n^6 + \frac{1}{181440}\, p^{(n+6)}\, n \\
&- \frac{1}{69120}\, p^{(n+6)}\, n^2 + A_7\, p^{(n+6)} - \frac{5}{2}\, A_6\, p^{(n+6)} + \frac{31}{360}\, A_3\, p^{(n+6)} \Bigg)\, h^6 + \\
&\Bigg( \frac{1}{5040}\, A_2\, p^{(n+7)} - \frac{5}{3}\, A_5\, p^{(n+7)} - 3\, A_7\, p^{(n+7)} + \frac{43}{120}\, A_4\, p^{(n+7)} - \frac{1}{40}\, A_3\, p^{(n+7)} \\
&+ \frac{359}{362880}\, A_2\, p^{(n+7)}\, n - \frac{1}{2}\, A_7\, p^{(n+7)}\, n + \frac{1}{512}\, A_2\, p^{(n+7)}\, n^2 + \frac{797}{414720}\, A_2\, p^{(n+7)}\, n^3 \\
&+ \frac{1}{1024}\, A_2\, p^{(n+7)}\, n^4 + \frac{11}{46080}\, A_2\, p^{(n+7)}\, n^5 + \frac{1}{46080}\, A_2\, p^{(n+7)}\, n^6 - \frac{13}{48}\, A_5\, p^{(n+7)}\, n^2 \\
&- \frac{7}{6}\, A_5\, p^{(n+7)}\, n - \frac{127}{2880}\, A_3\, p^{(n+7)}\, n^2 - \frac{41}{2304}\, A_3\, p^{(n+7)}\, n^3 - \frac{1}{288}\, A_3\, p^{(n+7)}\, n^4 \\
&- \frac{1}{48}\, A_5\, p^{(n+7)}\, n^3 + \frac{217}{1152}\, A_4\, p^{(n+7)}\, n^2 + \frac{7}{192}\, A_4\, p^{(n+7)}\, n^3 + \frac{1}{384}\, A_4\, p^{(n+7)}\, n^4 \\
&+ \frac{1229}{2880}\, A_4\, p^{(n+7)}\, n - \frac{17}{320}\, A_3\, p^{(n+7)}\, n + \frac{10}{3}\, A_6\, p^{(n+7)} + \frac{31}{24}\, A_6\, p^{(n+7)}\, n \\
&- \frac{1}{3840}\, A_3\, p^{(n+7)}\, n^5 - \frac{1}{55296}\, p^{(n+7)}\, n^5 - \frac{1}{92160}\, p^{(n+7)}\, n^6 + \frac{1}{8}\, A_6\, p^{(n+7)}\, n^2 \\
&+ A_8\, p^{(n+7)} - \frac{1}{645120}\, p^{(n+7)}\, n^7 + \frac{1}{138240}\, p^{(n+7)}\, n^3 + \frac{1}{829440}\, p^{(n+7)}\, n^4 \\
&- \frac{1}{362880}\, p^{(n+7)}\, n^2 \Bigg)\, h^7 + \Bigg( \frac{81}{80}\, A_5\, p^{(n+8)} + \frac{19}{4}\, A_7\, p^{(n+8)} - \frac{1}{40320}\, A_2\, p^{(n+8)} \\
&- \frac{23}{160}\, A_4\, p^{(n+8)} + A_9\, p^{(n+8)} - \frac{7}{2}\, A_8\, p^{(n+8)} - \frac{211}{1451520}\, A_2\, p^{(n+8)}\, n \\
&+ \frac{563}{34560}\, A_3\, p^{(n+8)}\, n^2 + \frac{3587}{414720}\, A_3\, p^{(n+8)}\, n^3 + \frac{361}{1152}\, A_5\, p^{(n+8)}\, n^2 \\
&+ \frac{3}{64}\, A_5\, p^{(n+8)}\, n^3 + \frac{1}{384}\, A_5\, p^{(n+8)}\, n^4 + \frac{2659}{2880}\, A_5\, p^{(n+8)}\, n - \frac{1393}{11520}\, A_4\, p^{(n+8)}\, n^2 \\
&+ \frac{127}{20160}\, A_3\, p^{(n+8)} - \frac{1}{2}\, A_8\, p^{(n+8)}\, n - \frac{1}{645120}\, A_2\, p^{(n+8)}\, n^7 - \frac{127}{414720}\, A_2\, p^{(n+8)}\, n^4 \\
&- \frac{73}{165888}\, A_2\, p^{(n+8)}\, n^3 - \frac{127}{362880}\, A_2\, p^{(n+8)}\, n^2 - \frac{1}{8640}\, A_2\, p^{(n+8)}\, n^5 \\
&- \frac{1}{46080}\, A_2\, p^{(n+8)}\, n^6 - \frac{79}{2304}\, A_4\, p^{(n+8)}\, n^3 - \frac{1}{3840}\, A_4\, p^{(n+8)}\, n^5 \\
&- \frac{403}{1920}\, A_4\, p^{(n+8)}\, n + \frac{23}{9216}\, A_3\, p^{(n+8)}\, n^4 + \frac{17}{46080}\, A_3\, p^{(n+8)}\, n^5 \\
&+ \frac{1}{46080}\, A_3\, p^{(n+8)}\, n^6 + \frac{11533}{725760}\, A_3\, p^{(n+8)}\, n - \frac{1}{3}\, A_6\, p^{(n+8)}\, n^2 - \frac{1}{48}\, A_6\, p^{(n+8)}\, n^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{85}{48} A_6 p^{(n+8)} n + \frac{1}{8} A_7 p^{(n+8)} n^2 + \frac{37}{24} A_7 p^{(n+8)} n - \frac{11}{2304} A_4 p^{(n+8)} n^4 \\
&- \frac{25}{8} A_6 p^{(n+8)} + \frac{1}{10321920} p^{(n+8)} n^8 + \frac{1}{1105920} p^{(n+8)} n^7 + \frac{1}{442368} p^{(n+8)} n^6 \\
&+ \frac{1}{1658880} p^{(n+8)} n^5 - \frac{67}{39813120} p^{(n+8)} n^4 + \frac{1}{2580480} p^{(n+8)} n^3 \\
&+ \frac{101}{348364800} p^{(n+8)} n^2 - \frac{1}{9676800} p^{(n+8)} n \Bigg) h^8 + \Bigg( \frac{1}{362880} A_2 p^{(n+9)} \\
&+ \frac{2933}{39813120} A_2 p^{(n+9)} n^4 + \frac{5711}{69672960} A_2 p^{(n+9)} n^3 + \frac{18461}{348364800} A_2 p^{(n+9)} n^2 \\
&- \frac{7291}{1451520} A_3 p^{(n+9)} n^2 - \frac{1469}{5760} A_5 p^{(n+9)} n^2 - \frac{43}{768} A_5 p^{(n+9)} n^3 \\
&- \frac{7}{1152} A_5 p^{(n+9)} n^4 - \frac{1}{3840} A_5 p^{(n+9)} n^5 - \frac{1}{645120} A_3 p^{(n+9)} n^7 \\
&- \frac{1}{30720} A_3 p^{(n+9)} n^6 - \frac{77}{276480} A_3 p^{(n+9)} n^5 - \frac{1049}{829440} A_3 p^{(n+9)} n^4 \\
&- \frac{1373}{414720} A_3 p^{(n+9)} n^3 + \frac{11}{192} A_6 p^{(n+9)} n^3 + \frac{43}{9216} A_4 p^{(n+9)} n^4 \\
&+ \frac{23}{46080} A_4 p^{(n+9)} n^5 + \frac{1}{46080} A_4 p^{(n+9)} n^6 + \frac{62689}{725760} A_4 p^{(n+9)} n \\
&+ \frac{1}{8} A_8 p^{(n+9)} n^2 + \frac{43}{24} A_8 p^{(n+9)} n - \frac{23}{40} A_5 p^{(n+9)} n - \frac{19}{48} A_7 p^{(n+9)} n^2 \\
&- \frac{1}{48} A_7 p^{(n+9)} n^3 - \frac{2983}{725760} A_3 p^{(n+9)} n + \frac{529}{8640} A_4 p^{(n+9)} n^2 \\
&+ \frac{9437}{414720} A_4 p^{(n+9)} n^3 + \frac{13}{7741440} A_2 p^{(n+9)} n^7 - \frac{1}{2} A_9 p^{(n+9)} n \\
&+ \frac{5}{442368} A_2 p^{(n+9)} n^6 + \frac{1}{25920} A_2 p^{(n+9)} n^5 - \frac{5}{2} A_7 p^{(n+9)} n + \frac{1}{384} A_6 p^{(n+9)} n^4 \\
&+ \frac{1633}{960} A_6 p^{(n+9)} n + \frac{1}{10321920} A_2 p^{(n+9)} n^8 + \frac{1619}{87091200} A_2 p^{(n+9)} n \\
&+ \frac{77}{12} A_8 p^{(n+9)} + \frac{541}{1152} A_6 p^{(n+9)} n^2 + A_{10} p^{(n+9)} - \frac{37}{72} A_5 p^{(n+9)} - 4 A_9 p^{(n+9)} \\
&- \frac{21}{4} A_7 p^{(n+9)} + \frac{605}{12096} A_4 p^{(n+9)} + \frac{331}{144} A_6 p^{(n+9)} - \frac{17}{12096} A_3 p^{(n+9)} \\
&+ \frac{1}{27869184} p^{(n+9)} n^4 - \frac{101}{696729600} p^{(n+9)} n^3 - \frac{1}{4423680} p^{(n+9)} n^7 \\
&- \frac{1}{185794560} p^{(n+9)} n^9 - \frac{1}{15482880} p^{(n+9)} n^8 + \frac{1}{19353600} p^{(n+9)} n^2 \\
&- \frac{1}{6220800} p^{(n+9)} n^6 + \frac{19}{79626240} p^{(n+9)} n^5 \Bigg) h^9 + \mathrm{O}(h^{10})
\end{aligned}
$$

```
> A[2]:=sort(solve((-1/2*p^(n+1)*n+A[2]*p^(n+1)),A[2]));
```

$$A_2 := \frac{1}{2} n$$

```
> simpify(S);
```

$$
\begin{aligned}
&p^n + \left(-\frac{5}{24}\,p^{(n+2)}\,n - \frac{1}{8}\,p^{(n+2)}\,n^2 + A_3\,p^{(n+2)}\right)\,h^2 + \\
&\left(A_4\,p^{(n+3)} + \frac{1}{24}\,p^{(n+3)}\,n^3 + \frac{1}{8}\,p^{(n+3)}\,n^2 + \frac{1}{12}\,n\,p^{(n+3)} - \frac{1}{2}\,A_3\,p^{(n+3)}\,n - A_3\,p^{(n+3)}\right)\,h^3 \\
&+ \left(-\frac{59}{1152}\,p^{(n+4)}\,n^2 - \frac{61}{2880}\,p^{(n+4)}\,n - \frac{7}{192}\,p^{(n+4)}\,n^3 - \frac{1}{128}\,p^{(n+4)}\,n^4\right. \\
&- \frac{1}{2}\,A_4\,p^{(n+4)}\,n - \frac{3}{2}\,A_4\,p^{(n+4)} + \frac{13}{24}\,A_3\,p^{(n+4)}\,n + \frac{7}{12}\,A_3\,p^{(n+4)} + \frac{1}{8}\,A_3\,p^{(n+4)}\,n^2 \\
&\left.+ A_5\,p^{(n+4)}\right)\,h^4 + \left(\frac{1}{72}\,p^{(n+5)}\,n^2 + \frac{1}{64}\,p^{(n+5)}\,n^3 + \frac{1}{144}\,p^{(n+5)}\,n^4 + \frac{1}{960}\,p^{(n+5)}\,n^5\right. \\
&+ \frac{19}{24}\,A_4\,p^{(n+5)}\,n + \frac{5}{4}\,A_4\,p^{(n+5)} + \frac{1}{8}\,A_4\,p^{(n+5)}\,n^2 - \frac{7}{48}\,A_3\,p^{(n+5)}\,n^2 - \frac{1}{3}\,A_3\,p^{(n+5)}\,n \\
&- \frac{1}{4}\,A_3\,p^{(n+5)} - \frac{1}{48}\,A_3\,p^{(n+5)}\,n^3 + A_6\,p^{(n+5)} - \frac{1}{2}\,A_5\,p^{(n+5)}\,n - 2\,A_5\,p^{(n+5)} \\
&\left.+ \frac{1}{240}\,n\,p^{(n+5)}\right)\,h^5 + \left(\frac{1}{8}\,A_5\,p^{(n+6)}\,n^2 + \frac{25}{24}\,A_5\,p^{(n+6)}\,n + \frac{109}{1152}\,A_3\,p^{(n+6)}\,n^2\right. \\
&+ \frac{5}{192}\,A_3\,p^{(n+6)}\,n^3 + \frac{1}{384}\,A_3\,p^{(n+6)}\,n^4 + \frac{143}{960}\,A_3\,p^{(n+6)}\,n - \frac{1}{2}\,A_6\,p^{(n+6)}\,n \\
&- \frac{5}{24}\,A_4\,p^{(n+6)}\,n^2 - \frac{1}{48}\,A_4\,p^{(n+6)}\,n^3 - \frac{11}{16}\,A_4\,p^{(n+6)}\,n + \frac{13}{6}\,A_5\,p^{(n+6)} \\
&- \frac{3}{4}\,A_4\,p^{(n+6)} - \frac{1867}{414720}\,p^{(n+6)}\,n^3 - \frac{29}{9216}\,p^{(n+6)}\,n^4 - \frac{1}{1024}\,p^{(n+6)}\,n^5 \\
&- \frac{1}{9216}\,p^{(n+6)}\,n^6 - \frac{25}{36288}\,p^{(n+6)}\,n - \frac{199}{69120}\,p^{(n+6)}\,n^2 + A_7\,p^{(n+6)} - \frac{5}{2}\,A_6\,p^{(n+6)} \\
&\left.+ \frac{31}{360}\,A_3\,p^{(n+6)}\right)\,h^6 + \left(\frac{1}{10080}\,n\,p^{(n+7)} - \frac{5}{3}\,A_5\,p^{(n+7)} - 3\,A_7\,p^{(n+7)}\right. \\
&+ \frac{43}{120}\,A_4\,p^{(n+7)} - \frac{1}{40}\,A_3\,p^{(n+7)} - \frac{1}{2}\,A_7\,p^{(n+7)}\,n - \frac{13}{48}\,A_5\,p^{(n+7)}\,n^2 - \frac{7}{6}\,A_5\,p^{(n+7)}\,n \\
&- \frac{127}{2880}\,A_3\,p^{(n+7)}\,n^2 - \frac{41}{2304}\,A_3\,p^{(n+7)}\,n^3 - \frac{1}{288}\,A_3\,p^{(n+7)}\,n^4 - \frac{1}{48}\,A_5\,p^{(n+7)}\,n^3 \\
&+ \frac{217}{1152}\,A_4\,p^{(n+7)}\,n^2 + \frac{7}{192}\,A_4\,p^{(n+7)}\,n^3 + \frac{1}{384}\,A_4\,p^{(n+7)}\,n^4 + \frac{1229}{2880}\,A_4\,p^{(n+7)}\,n \\
&- \frac{17}{320}\,A_3\,p^{(n+7)}\,n + \frac{10}{3}\,A_6\,p^{(n+7)} + \frac{31}{24}\,A_6\,p^{(n+7)}\,n - \frac{1}{3840}\,A_3\,p^{(n+7)}\,n^5 \\
&+ \frac{13}{27648}\,p^{(n+7)}\,n^5 + \frac{1}{9216}\,p^{(n+7)}\,n^6 + \frac{1}{8}\,A_6\,p^{(n+7)}\,n^2 + A_8\,p^{(n+7)} \\
&\left.+ \frac{1}{107520}\,p^{(n+7)}\,n^7 + \frac{17}{17280}\,p^{(n+7)}\,n^3 + \frac{133}{138240}\,p^{(n+7)}\,n^4 + \frac{17}{34560}\,p^{(n+7)}\,n^2\right)\,h^7 \\
&+ \left(\frac{81}{80}\,A_5\,p^{(n+8)} + \frac{19}{4}\,A_7\,p^{(n+8)} - \frac{23}{160}\,A_4\,p^{(n+8)} + A_9\,p^{(n+8)} - \frac{7}{2}\,A_8\,p^{(n+8)}\right. \\
&+ \frac{563}{34560}\,A_3\,p^{(n+8)}\,n^2 + \frac{3587}{414720}\,A_3\,p^{(n+8)}\,n^3 + \frac{361}{1152}\,A_5\,p^{(n+8)}\,n^2 \\
&\left.+ \frac{3}{64}\,A_5\,p^{(n+8)}\,n^3 + \frac{1}{384}\,A_5\,p^{(n+8)}\,n^4 + \frac{2659}{2880}\,A_5\,p^{(n+8)}\,n - \frac{1393}{11520}\,A_4\,p^{(n+8)}\,n^2\right.
\end{aligned}
$$

$$+\frac{127}{20160}A_3\,p^{(n+8)}-\frac{1}{2}A_8\,p^{(n+8)}\,n-\frac{79}{2304}A_4\,p^{(n+8)}\,n^3-\frac{1}{3840}A_4\,p^{(n+8)}\,n^5$$
$$-\frac{403}{1920}A_4\,p^{(n+8)}\,n+\frac{23}{9216}A_3\,p^{(n+8)}\,n^4+\frac{17}{46080}A_3\,p^{(n+8)}\,n^5$$
$$+\frac{1}{46080}A_3\,p^{(n+8)}\,n^6+\frac{11533}{725760}A_3\,p^{(n+8)}\,n-\frac{1}{3}A_6\,p^{(n+8)}\,n^2-\frac{1}{48}A_6\,p^{(n+8)}\,n^3$$
$$-\frac{85}{48}A_6\,p^{(n+8)}\,n+\frac{1}{8}A_7\,p^{(n+8)}\,n^2+\frac{37}{24}A_7\,p^{(n+8)}\,n-\frac{11}{2304}A_4\,p^{(n+8)}\,n^4$$
$$-\frac{25}{8}A_6\,p^{(n+8)}-\frac{1}{1474560}\,p^{(n+8)}\,n^8-\frac{11}{1105920}\,p^{(n+8)}\,n^7-\frac{41}{737280}\,p^{(n+8)}\,n^6$$
$$-\frac{253}{1658880}\,p^{(n+8)}\,n^5-\frac{8827}{39813120}\,p^{(n+8)}\,n^4-\frac{811}{4644864}\,p^{(n+8)}\,n^3$$
$$-\frac{25219}{348364800}\,p^{(n+8)}\,n^2-\frac{121}{9676800}\,p^{(n+8)}\,n\Bigg)h^8+\Bigg(-\frac{7291}{1451520}A_3\,p^{(n+9)}\,n^2$$
$$-\frac{1469}{5760}A_5\,p^{(n+9)}\,n^2-\frac{43}{768}A_5\,p^{(n+9)}\,n^3-\frac{7}{1152}A_5\,p^{(n+9)}\,n^4-\frac{1}{3840}A_5\,p^{(n+9)}\,n^5$$
$$-\frac{1}{645120}A_3\,p^{(n+9)}\,n^7-\frac{1}{30720}A_3\,p^{(n+9)}\,n^6-\frac{77}{276480}A_3\,p^{(n+9)}\,n^5$$
$$-\frac{1049}{829440}A_3\,p^{(n+9)}\,n^4-\frac{1373}{414720}A_3\,p^{(n+9)}\,n^3+\frac{11}{192}A_6\,p^{(n+9)}\,n^3$$
$$+\frac{43}{9216}A_4\,p^{(n+9)}\,n^4+\frac{23}{46080}A_4\,p^{(n+9)}\,n^5+\frac{1}{46080}A_4\,p^{(n+9)}\,n^6$$
$$+\frac{62689}{725760}A_4\,p^{(n+9)}\,n+\frac{1}{8}A_8\,p^{(n+9)}\,n^2+\frac{43}{24}A_8\,p^{(n+9)}\,n-\frac{23}{40}A_5\,p^{(n+9)}\,n$$
$$-\frac{19}{48}A_7\,p^{(n+9)}\,n^2-\frac{1}{48}A_7\,p^{(n+9)}\,n^3-\frac{2983}{725760}A_3\,p^{(n+9)}\,n+\frac{529}{8640}A_4\,p^{(n+9)}\,n^2$$
$$+\frac{9437}{414720}A_4\,p^{(n+9)}\,n^3-\frac{1}{2}A_9\,p^{(n+9)}\,n-\frac{5}{2}A_7\,p^{(n+9)}\,n+\frac{1}{384}A_6\,p^{(n+9)}\,n^4$$
$$+\frac{1633}{960}A_6\,p^{(n+9)}\,n+\frac{77}{12}A_8\,p^{(n+9)}+\frac{541}{1152}A_6\,p^{(n+9)}\,n^2+\frac{1}{725760}\,n\,p^{(n+9)}$$
$$+A_{10}\,p^{(n+9)}-\frac{37}{72}A_5\,p^{(n+9)}-4\,A_9\,p^{(n+9)}-\frac{21}{4}A_7\,p^{(n+9)}+\frac{605}{12096}A_4\,p^{(n+9)}$$
$$+\frac{331}{144}A_6\,p^{(n+9)}-\frac{17}{12096}A_3\,p^{(n+9)}+\frac{1429}{34836480}\,p^{(n+9)}\,n^4+\frac{17}{645120}\,p^{(n+9)}\,n^3$$
$$+\frac{1}{184320}\,p^{(n+9)}\,n^7+\frac{1}{23224320}\,p^{(n+9)}\,n^9+\frac{1}{1290240}\,p^{(n+9)}\,n^8$$
$$+\frac{407}{43545600}\,p^{(n+9)}\,n^2+\frac{119}{6220800}\,p^{(n+9)}\,n^6+\frac{41}{1105920}\,p^{(n+9)}\,n^5\Bigg)h^9+\mathrm{O}(h^{10})$$

```
> A[3]:=sort(solve(A[3]*p^(n+2)-5/24*p^(n+2)*n-
1/8*p^(n+2)*n^2,A[3]));
```

$$A_3 := \frac{1}{8}\,n^2+\frac{5}{24}\,n$$

```
> simplify(S);
```

$$
\begin{aligned}
& p^n + \left( A_4\, p^{(n+3)} - \frac{1}{48}\, p^{(n+3)}\, n^3 - \frac{5}{48}\, p^{(n+3)}\, n^2 - \frac{1}{8}\, n\, p^{(n+3)} \right) h^3 + \left( \frac{155}{1152}\, p^{(n+4)}\, n^2 \right. \\
& + \frac{289}{2880}\, p^{(n+4)}\, n + \frac{11}{192}\, p^{(n+4)}\, n^3 + \frac{1}{128}\, p^{(n+4)}\, n^4 - \frac{1}{2}\, A_4\, p^{(n+4)}\, n - \frac{3}{2}\, A_4\, p^{(n+4)} \\
& \left. + A_5\, p^{(n+4)} \right) h^4 + \left( -\frac{25}{288}\, p^{(n+5)}\, n^2 - \frac{65}{1152}\, p^{(n+5)}\, n^3 - \frac{1}{64}\, p^{(n+5)}\, n^4 - \frac{1}{640}\, p^{(n+5)}\, n^5 \right. \\
& + \frac{19}{24}\, A_4\, p^{(n+5)}\, n + \frac{5}{4}\, A_4\, p^{(n+5)} + \frac{1}{8}\, A_4\, p^{(n+5)}\, n^2 - \frac{23}{480}\, n\, p^{(n+5)} + A_6\, p^{(n+5)} \\
& \left. - \frac{1}{2}\, A_5\, p^{(n+5)}\, n - 2\, A_5\, p^{(n+5)} \right) h^5 + \left( A_7\, p^{(n+6)} + \frac{13}{6}\, A_5\, p^{(n+6)} - \frac{3}{4}\, A_4\, p^{(n+6)} \right. \\
& + \frac{1403}{41472}\, p^{(n+6)}\, n^3 + \frac{65}{4608}\, p^{(n+6)}\, n^4 + \frac{13}{4608}\, p^{(n+6)}\, n^5 + \frac{1}{4608}\, p^{(n+6)}\, n^6 \\
& + \frac{313}{18144}\, p^{(n+6)}\, n + \frac{269}{6912}\, p^{(n+6)}\, n^2 - \frac{5}{2}\, A_6\, p^{(n+6)} - \frac{5}{24}\, A_4\, p^{(n+6)}\, n^2 \\
& - \frac{1}{48}\, A_4\, p^{(n+6)}\, n^3 - \frac{11}{16}\, A_4\, p^{(n+6)}\, n + \frac{1}{8}\, A_5\, p^{(n+6)}\, n^2 + \frac{25}{24}\, A_5\, p^{(n+6)}\, n \\
& \left. - \frac{1}{2}\, A_6\, p^{(n+6)}\, n \right) h^6 + \left( -\frac{761}{92160}\, p^{(n+7)}\, n^4 - \frac{947}{69120}\, p^{(n+7)}\, n^2 - \frac{103}{20160}\, n\, p^{(n+7)} \right. \\
& - \frac{5}{3}\, A_5\, p^{(n+7)} - 3\, A_7\, p^{(n+7)} + \frac{43}{120}\, A_4\, p^{(n+7)} + \frac{10}{3}\, A_6\, p^{(n+7)} - \frac{137}{55296}\, p^{(n+7)}\, n^5 \\
& - \frac{7}{18432}\, p^{(n+7)}\, n^6 - \frac{1}{43008}\, p^{(n+7)}\, n^7 - \frac{19}{1280}\, p^{(n+7)}\, n^3 + \frac{7}{192}\, A_4\, p^{(n+7)}\, n^3 \\
& + \frac{1229}{2880}\, A_4\, p^{(n+7)}\, n + \frac{31}{24}\, A_6\, p^{(n+7)}\, n + \frac{1}{8}\, A_6\, p^{(n+7)}\, n^2 + \frac{1}{384}\, A_4\, p^{(n+7)}\, n^4 \\
& - \frac{1}{2}\, A_7\, p^{(n+7)}\, n - \frac{13}{48}\, A_5\, p^{(n+7)}\, n^2 - \frac{7}{6}\, A_5\, p^{(n+7)}\, n - \frac{1}{48}\, A_5\, p^{(n+7)}\, n^3 \\
& \left. + \frac{217}{1152}\, A_4\, p^{(n+7)}\, n^2 + A_8\, p^{(n+7)} \right) h^7 + \left( \frac{81}{80}\, A_5\, p^{(n+8)} + \frac{19}{4}\, A_7\, p^{(n+8)} \right. \\
& - \frac{23}{160}\, A_4\, p^{(n+8)} + A_9\, p^{(n+8)} - \frac{7}{2}\, A_8\, p^{(n+8)} + \frac{361}{1152}\, A_5\, p^{(n+8)}\, n^2 + \frac{3}{64}\, A_5\, p^{(n+8)}\, n^3 \\
& + \frac{1}{384}\, A_5\, p^{(n+8)}\, n^4 + \frac{2659}{2880}\, A_5\, p^{(n+8)}\, n - \frac{1393}{11520}\, A_4\, p^{(n+8)}\, n^2 - \frac{1}{2}\, A_8\, p^{(n+8)}\, n \\
& - \frac{79}{2304}\, A_4\, p^{(n+8)}\, n^3 - \frac{1}{3840}\, A_4\, p^{(n+8)}\, n^5 - \frac{403}{1920}\, A_4\, p^{(n+8)}\, n - \frac{1}{3}\, A_6\, p^{(n+8)}\, n^2 \\
& - \frac{1}{48}\, A_6\, p^{(n+8)}\, n^3 - \frac{85}{48}\, A_6\, p^{(n+8)}\, n + \frac{1}{8}\, A_7\, p^{(n+8)}\, n^2 + \frac{37}{24}\, A_7\, p^{(n+8)}\, n \\
& - \frac{11}{2304}\, A_4\, p^{(n+8)}\, n^4 - \frac{25}{8}\, A_6\, p^{(n+8)} + \frac{1}{491520}\, p^{(n+8)}\, n^8 + \frac{1}{24576}\, p^{(n+8)}\, n^7 \\
& + \frac{737}{2211840}\, p^{(n+8)}\, n^6 + \frac{89}{61440}\, p^{(n+8)}\, n^5 + \frac{9599}{2654208}\, p^{(n+8)}\, n^4 + \frac{1919}{368640}\, p^{(n+8)}\, n^3 \\
& \left. + \frac{66781}{16588800}\, p^{(n+8)}\, n^2 + \frac{599}{460800}\, p^{(n+8)}\, n \right) h^8 + \left( -\frac{1469}{5760}\, A_5\, p^{(n+9)}\, n^2 \right. \\
& - \frac{43}{768}\, A_5\, p^{(n+9)}\, n^3 - \frac{7}{1152}\, A_5\, p^{(n+9)}\, n^4 - \frac{1}{3840}\, A_5\, p^{(n+9)}\, n^5 + \frac{11}{192}\, A_6\, p^{(n+9)}\, n^3
\end{aligned}
$$

$$+\frac{43}{9216}A_4\,p^{(n+9)}\,n^4+\frac{23}{46080}A_4\,p^{(n+9)}\,n^5+\frac{1}{46080}A_4\,p^{(n+9)}\,n^6$$
$$+\frac{62689}{725760}A_4\,p^{(n+9)}\,n+\frac{1}{8}A_8\,p^{(n+9)}\,n^2+\frac{43}{24}A_8\,p^{(n+9)}\,n-\frac{23}{40}A_5\,p^{(n+9)}\,n$$
$$-\frac{19}{48}A_7\,p^{(n+9)}\,n^2-\frac{1}{48}A_7\,p^{(n+9)}\,n^3+\frac{529}{8640}A_4\,p^{(n+9)}\,n^2+\frac{9437}{414720}A_4\,p^{(n+9)}\,n^3$$
$$-\frac{1}{2}A_9\,p^{(n+9)}\,n-\frac{5}{2}A_7\,p^{(n+9)}\,n+\frac{1}{384}A_6\,p^{(n+9)}\,n^4+\frac{1633}{960}A_6\,p^{(n+9)}\,n$$
$$+\frac{77}{12}A_8\,p^{(n+9)}+\frac{541}{1152}A_6\,p^{(n+9)}\,n^2-\frac{47}{161280}n\,p^{(n+9)}+A_{10}\,p^{(n+9)}$$
$$-\frac{37}{72}A_5\,p^{(n+9)}-4\,A_9\,p^{(n+9)}-\frac{21}{4}A_7\,p^{(n+9)}+\frac{605}{12096}A_4\,p^{(n+9)}+\frac{331}{144}A_6\,p^{(n+9)}$$
$$-\frac{88943}{69672960}p^{(n+9)}\,n^4-\frac{10687}{6967296}p^{(n+9)}\,n^3-\frac{1}{27648}p^{(n+9)}\,n^7$$
$$-\frac{1}{6635520}p^{(n+9)}\,n^9-\frac{1}{276480}p^{(n+9)}\,n^8-\frac{4241}{4147200}p^{(n+9)}\,n^2$$
$$-\frac{9803}{49766400}p^{(n+9)}\,n^6-\frac{2549}{3981312}p^{(n+9)}\,n^5\Bigg)h^9+\mathrm{O}(h^{10})$$

```
> A[4]:=sort(solve((-5/48*p^(n+3)*n^2-1/48*p^(n+3)*n^3-
1/8*n*p^(n+3)+A[4]*p^(n+3)),A[4]));
```

$$A_4:=\frac{1}{48}n^3+\frac{5}{48}n^2+\frac{1}{8}n$$

```
> simplify(S);
```

$$p^n+\left(-\frac{97}{1152}p^{(n+4)}\,n^2-\frac{251}{2880}p^{(n+4)}\,n-\frac{5}{192}p^{(n+4)}\,n^3-\frac{1}{384}p^{(n+4)}\,n^4+A_5\,p^{(n+4)}\right)h^4+$$
$$\left(-\frac{1}{2}A_5\,p^{(n+5)}\,n-2\,A_5\,p^{(n+5)}+\frac{1}{960}p^{(n+5)}\,n^5+\frac{1}{72}p^{(n+5)}\,n^4+\frac{13}{192}p^{(n+5)}\,n^3\right.$$
$$\left.+\frac{41}{288}p^{(n+5)}\,n^2+A_6\,p^{(n+5)}+\frac{13}{120}n\,p^{(n+5)}\right)h^5+\left(A_7\,p^{(n+6)}+\frac{1}{8}A_5\,p^{(n+6)}\,n^2\right.$$
$$\left.+\frac{25}{24}A_5\,p^{(n+6)}\,n-\frac{1}{2}A_6\,p^{(n+6)}\,n+\frac{13}{6}A_5\,p^{(n+6)}-\frac{3295}{41472}p^{(n+6)}\,n^3\right.$$
$$\left.-\frac{113}{4608}p^{(n+6)}\,n^4-\frac{17}{4608}p^{(n+6)}\,n^5-\frac{1}{4608}p^{(n+6)}\,n^6-\frac{347}{4536}p^{(n+6)}\,n\right.$$
$$\left.-\frac{865}{6912}p^{(n+6)}\,n^2-\frac{5}{2}A_6\,p^{(n+6)}\right)h^6+\left(\frac{1}{8}A_6\,p^{(n+7)}\,n^2-3\,A_7\,p^{(n+7)}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}A_7\,p^{(n+7)}\,n-\frac{13}{48}A_5\,p^{(n+7)}\,n^2-\frac{7}{6}A_5\,p^{(n+7)}\,n-\frac{1}{48}A_5\,p^{(n+7)}\,n^3\right.$$
$$\left.+\frac{31}{24}A_6\,p^{(n+7)}\,n+\frac{1}{1536}p^{(n+7)}\,n^6+\frac{1}{32256}p^{(n+7)}\,n^7+\frac{419}{6912}p^{(n+7)}\,n^3\right.$$
$$\left.+\frac{343}{13824}p^{(n+7)}\,n^4+\frac{133}{1728}p^{(n+7)}\,n^2+\frac{5}{126}n\,p^{(n+7)}-\frac{5}{3}A_5\,p^{(n+7)}+\frac{10}{3}A_6\,p^{(n+7)}\right.$$

$$+\frac{77}{13824}\,p^{(n+7)}\,n^5+A_8\,p^{(n+7)}\Bigg)\,h^7+\Bigg(A_9\,p^{(n+8)}+\frac{81}{80}\,A_5\,p^{(n+8)}$$
$$+\frac{361}{1152}\,A_5\,p^{(n+8)}\,n^2+\frac{3}{64}\,A_5\,p^{(n+8)}\,n^3+\frac{1}{384}\,A_5\,p^{(n+8)}\,n^4+\frac{2659}{2880}\,A_5\,p^{(n+8)}\,n$$
$$-\frac{1}{2}\,A_8\,p^{(n+8)}\,n-\frac{1}{3}\,A_6\,p^{(n+8)}\,n^2-\frac{1}{48}\,A_6\,p^{(n+8)}\,n^3-\frac{85}{48}\,A_6\,p^{(n+8)}\,n$$
$$+\frac{1}{8}\,A_7\,p^{(n+8)}\,n^2+\frac{37}{24}\,A_7\,p^{(n+8)}\,n+\frac{19}{4}\,A_7\,p^{(n+8)}-\frac{7}{2}\,A_8\,p^{(n+8)}-\frac{25}{8}\,A_6\,p^{(n+8)}$$
$$-\frac{1}{294912}\,p^{(n+8)}\,n^8-\frac{19}{221184}\,p^{(n+8)}\,n^7-\frac{403}{442368}\,p^{(n+8)}\,n^6-\frac{2897}{552960}\,p^{(n+8)}\,n^5$$
$$-\frac{234077}{13271040}\,p^{(n+8)}\,n^4-\frac{12817}{368640}\,p^{(n+8)}\,n^3-\frac{616859}{16588800}\,p^{(n+8)}\,n^2$$
$$-\frac{7681}{460800}\,p^{(n+8)}\,n\Bigg)\,h^8+\Bigg(-\frac{1469}{5760}\,A_5\,p^{(n+9)}\,n^2-\frac{43}{768}\,A_5\,p^{(n+9)}\,n^3$$
$$-\frac{7}{1152}\,A_5\,p^{(n+9)}\,n^4-\frac{1}{3840}\,A_5\,p^{(n+9)}\,n^5+\frac{11}{192}\,A_6\,p^{(n+9)}\,n^3+\frac{1}{8}\,A_8\,p^{(n+9)}\,n^2$$
$$+\frac{43}{24}\,A_8\,p^{(n+9)}\,n-\frac{23}{40}\,A_5\,p^{(n+9)}\,n-\frac{19}{48}\,A_7\,p^{(n+9)}\,n^2-\frac{1}{48}\,A_7\,p^{(n+9)}\,n^3$$
$$-\frac{1}{2}\,A_9\,p^{(n+9)}\,n-\frac{5}{2}\,A_7\,p^{(n+9)}\,n+\frac{1}{384}\,A_6\,p^{(n+9)}\,n^4+\frac{1633}{960}\,A_6\,p^{(n+9)}\,n$$
$$+\frac{77}{12}\,A_8\,p^{(n+9)}+\frac{541}{1152}\,A_6\,p^{(n+9)}\,n^2+\frac{103}{17280}\,n\,p^{(n+9)}+A_{10}\,p^{(n+9)}-\frac{37}{72}\,A_5\,p^{(n+9)}$$
$$-4\,A_9\,p^{(n+9)}-\frac{21}{4}\,A_7\,p^{(n+9)}+\frac{331}{144}\,A_6\,p^{(n+9)}+\frac{8083}{829440}\,p^{(n+9)}\,n^4$$
$$+\frac{13403}{829440}\,p^{(n+9)}\,n^3+\frac{1}{8640}\,p^{(n+9)}\,n^7+\frac{1}{3317760}\,p^{(n+9)}\,n^9+\frac{1}{110592}\,p^{(n+9)}\,n^8$$
$$+\frac{971}{64800}\,p^{(n+9)}\,n^2+\frac{6847}{8294400}\,p^{(n+9)}\,n^6+\frac{147}{40960}\,p^{(n+9)}\,n^5\Bigg)\,h^9+\mathrm{O}(h^{10})$$

```
> A[5]:=sort(solve((-97/1152*p^(n+4)*n^2-5/192*p^(n+4)*n^3-
251/2880*p^(
> n+4)*n-1/384*p^(n+4)*n^4+A[5]*p^(n+4)),A[5]));
```

$$A_5 := \frac{1}{384}\,n^4+\frac{5}{192}\,n^3+\frac{97}{1152}\,n^2+\frac{251}{2880}\,n$$

```
> simplify(S);
```

$$p^n + \left(-\frac{401}{5760}\,p^{(n+5)}\,n^2 - \frac{61}{2304}\,p^{(n+5)}\,n^3 - \frac{5}{1152}\,p^{(n+5)}\,n^4 - \frac{1}{3840}\,p^{(n+5)}\,n^5 + A_6\,p^{(n+5)} - \frac{19}{288}\,n\,p^{(n+5)}\right)h^5 + \left(A_7\,p^{(n+6)} - \frac{5}{2}\,A_6\,p^{(n+6)} + \frac{2047}{13824}\,p^{(n+6)}\,n^2 + \frac{40763}{362880}\,p^{(n+6)}\,n + \frac{1}{9216}\,p^{(n+6)}\,n^6 + \frac{7}{3072}\,p^{(n+6)}\,n^5 + \frac{173}{9216}\,p^{(n+6)}\,n^4 + \frac{31343}{414720}\,p^{(n+6)}\,n^3 - \frac{1}{2}\,A_6\,p^{(n+6)}\,n\right)h^6 + \left(A_8\,p^{(n+7)} - \frac{1277}{12096}\,n\,p^{(n+7)} - 3\,A_7\,p^{(n+7)} + \frac{10}{3}\,A_6\,p^{(n+7)} - \frac{347}{55296}\,p^{(n+7)}\,n^5 - \frac{11}{18432}\,p^{(n+7)}\,n^6 - \frac{1}{43008}\,p^{(n+7)}\,n^7 - \frac{1607}{15360}\,p^{(n+7)}\,n^3 - \frac{9547}{276480}\,p^{(n+7)}\,n^4 - \frac{713}{4320}\,p^{(n+7)}\,n^2 - \frac{1}{2}\,A_7\,p^{(n+7)}\,n + \frac{31}{24}\,A_6\,p^{(n+7)}\,n + \frac{1}{8}\,A_6\,p^{(n+7)}\,n^2\right)h^7 + \left(A_9\,p^{(n+8)} + \frac{595}{442368}\,p^{(n+8)}\,n^6 + \frac{23}{221184}\,p^{(n+8)}\,n^7 + \frac{1}{294912}\,p^{(n+8)}\,n^8 - \frac{25}{8}\,A_6\,p^{(n+8)} - \frac{7}{2}\,A_8\,p^{(n+8)} + \frac{19}{4}\,A_7\,p^{(n+8)} + \frac{32981}{460800}\,p^{(n+8)}\,n + \frac{2132219}{16588800}\,p^{(n+8)}\,n^2 + \frac{35629}{368640}\,p^{(n+8)}\,n^3 + \frac{524381}{13271040}\,p^{(n+8)}\,n^4 + \frac{1751}{184320}\,p^{(n+8)}\,n^5 - \frac{1}{2}\,A_8\,p^{(n+8)}\,n - \frac{1}{3}\,A_6\,p^{(n+8)}\,n^2 - \frac{1}{48}\,A_6\,p^{(n+8)}\,n^3 - \frac{85}{48}\,A_6\,p^{(n+8)}\,n + \frac{1}{8}\,A_7\,p^{(n+8)}\,n^2 + \frac{37}{24}\,A_7\,p^{(n+8)}\,n\right)h^8 + \left(-\frac{1517}{46080}\,p^{(n+9)}\,n^4 - \frac{13899}{204800}\,p^{(n+9)}\,n^3 - \frac{31}{147456}\,p^{(n+9)}\,n^7 - \frac{1}{2654208}\,p^{(n+9)}\,n^9 - \frac{1}{73728}\,p^{(n+9)}\,n^8 - \frac{2007}{25600}\,p^{(n+9)}\,n^2 - \frac{15}{8192}\,p^{(n+9)}\,n^6 + \frac{77}{12}\,A_8\,p^{(n+9)} - \frac{8051}{207360}\,n\,p^{(n+9)} - 4\,A_9\,p^{(n+9)} - \frac{21}{4}\,A_7\,p^{(n+9)} + \frac{331}{144}\,A_6\,p^{(n+9)} + \frac{11}{192}\,A_6\,p^{(n+9)}\,n^3 + \frac{1}{8}\,A_8\,p^{(n+9)}\,n^2 + \frac{43}{24}\,A_8\,p^{(n+9)}\,n - \frac{19}{48}\,A_7\,p^{(n+9)}\,n^2 - \frac{1}{48}\,A_7\,p^{(n+9)}\,n^3 - \frac{1}{2}\,A_9\,p^{(n+9)}\,n - \frac{5}{2}\,A_7\,p^{(n+9)}\,n + \frac{1}{384}\,A_6\,p^{(n+9)}\,n^4 + \frac{1633}{960}\,A_6\,p^{(n+9)}\,n + \frac{541}{1152}\,A_6\,p^{(n+9)}\,n^2 + A_{10}\,p^{(n+9)} - \frac{129977}{13271040}\,p^{(n+9)}\,n^5\right)h^9 + O(h^{10})$$

```
> A[6]:=sort(solve(A[6]*p^(n+5)-401/5760*p^(n+5)*n^2-
19/288*n*p^(n+5)-61/2304*p^(n+5)*n^3-5/1152*p^(n+5)*n^4-
1/3840*p^(n+5)*n^5,A[6]));
```

$$A_6 := \frac{1}{3840}\,n^5 + \frac{5}{1152}\,n^4 + \frac{61}{2304}\,n^3 + \frac{401}{5760}\,n^2 + \frac{19}{288}\,n$$

```
> simplify(S);
```

$$p^n + \left(-\frac{815}{13824}\,p^{(n+6)}\,n^2 - \frac{10543}{414720}\,p^{(n+6)}\,n^3 - \frac{49}{9216}\,p^{(n+6)}\,n^4 - \frac{5}{9216}\,p^{(n+6)}\,n^5 - \frac{1}{46080}\,p^{(n+6)}\,n^6 - \frac{19087}{362880}\,p^{(n+6)}\,n + A_7\,p^{(n+6)}\right) h^6 + \left(\frac{461}{4032}\,n\,p^{(n+7)} - 3\,A_7\,p^{(n+7)} + \frac{97}{27648}\,p^{(n+7)}\,n^5 + \frac{13}{46080}\,p^{(n+7)}\,n^6 + \frac{1}{107520}\,p^{(n+7)}\,n^7 + \frac{2827}{34560}\,p^{(n+7)}\,n^3 + \frac{3157}{138240}\,p^{(n+7)}\,n^4 + \frac{5261}{34560}\,p^{(n+7)}\,n^2 - \frac{1}{2}\,A_7\,p^{(n+7)}\,n + A_8\,p^{(n+7)}\right) h^7 + \left(-\frac{1}{2}\,A_8\,p^{(n+8)}\,n + \frac{1}{8}\,A_7\,p^{(n+8)}\,n^2 + \frac{37}{24}\,A_7\,p^{(n+8)}\,n - \frac{7}{2}\,A_8\,p^{(n+8)} + \frac{19}{4}\,A_7\,p^{(n+8)} - \frac{1}{491520}\,p^{(n+8)}\,n^8 - \frac{3}{40960}\,p^{(n+8)}\,n^7 - \frac{493}{442368}\,p^{(n+8)}\,n^6 - \frac{5129}{552960}\,p^{(n+8)}\,n^5 - \frac{604027}{13271040}\,p^{(n+8)}\,n^4 - \frac{145273}{1105920}\,p^{(n+8)}\,n^3 - \frac{3414781}{16588800}\,p^{(n+8)}\,n^2 - \frac{6891}{51200}\,p^{(n+8)}\,n + A_9\,p^{(n+8)}\right) h^8 + \left(\frac{118109}{829440}\,p^{(n+9)}\,n^3 + \frac{127}{552960}\,p^{(n+9)}\,n^7 + \frac{1}{3317760}\,p^{(n+9)}\,n^9 + \frac{7}{552960}\,p^{(n+9)}\,n^8 + \frac{401963}{2073600}\,p^{(n+9)}\,n^2 - 4\,A_9\,p^{(n+9)} - \frac{21}{4}\,A_7\,p^{(n+9)} + \frac{9739}{4147200}\,p^{(n+9)}\,n^6 + \frac{77}{12}\,A_8\,p^{(n+9)} + \frac{97153}{1658880}\,p^{(n+9)}\,n^4 - \frac{5}{2}\,A_7\,p^{(n+9)}\,n - \frac{1}{2}\,A_9\,p^{(n+9)}\,n - \frac{1}{48}\,A_7\,p^{(n+9)}\,n^3 - \frac{19}{48}\,A_7\,p^{(n+9)}\,n^2 + \frac{43}{24}\,A_8\,p^{(n+9)}\,n + \frac{1}{8}\,A_8\,p^{(n+9)}\,n^2 + A_{10}\,p^{(n+9)} + \frac{5449}{368640}\,p^{(n+9)}\,n^5 + \frac{3899}{34560}\,n\,p^{(n+9)}\right) h^9 + \mathrm{O}(h^{10})$$

```
> A[7]:=sort(solve((-1/46080*p^(n+6)*n^6-10543/414720*p^(n+6)*n^3-
815/13824*p^(n+6)*n^2-19087/362880*p^(n+6)*n-5/9216*p^(n+6)*n^5-
49/9216*p^(n+6)*n^4+A[7]*p^(n+6)),A[7]));
```

$$A_7 := \frac{1}{46080}\,n^6 + \frac{5}{9216}\,n^5 + \frac{49}{9216}\,n^4 + \frac{10543}{414720}\,n^3 + \frac{815}{13824}\,n^2 + \frac{19087}{362880}\,n$$

```
> simplify(S);
```

$$p^n + \left( A_8\, p^{(n+7)} - \frac{751}{17280}\, n\, p^{(n+7)} - \frac{43}{55296}\, p^{(n+7)}\, n^5 - \frac{1}{18432}\, p^{(n+7)}\, n^6 \right.$$
$$\left. - \frac{1}{645120}\, p^{(n+7)}\, n^7 - \frac{331}{13824}\, p^{(n+7)}\, n^3 - \frac{4831}{829440}\, p^{(n+7)}\, n^4 - \frac{73937}{1451520}\, p^{(n+7)}\, n^2 \right)$$
$$h^7 + \left( A_9\, p^{(n+8)} + \frac{3345863}{29030400}\, p^{(n+8)}\, n + \frac{54093859}{348364800}\, p^{(n+8)}\, n^2 + \frac{74713}{860160}\, p^{(n+8)}\, n^3 \right.$$
$$+ \frac{7757}{1658880}\, p^{(n+8)}\, n^5 + \frac{361}{737280}\, p^{(n+8)}\, n^6 + \frac{31}{1105920}\, p^{(n+8)}\, n^7$$
$$\left. + \frac{1}{1474560}\, p^{(n+8)}\, n^8 - \frac{7}{2}\, A_8\, p^{(n+8)} - \frac{1}{2}\, A_8\, p^{(n+8)}\, n + \frac{1047163}{39813120}\, p^{(n+8)}\, n^4 \right) h^8 +$$
$$\left( -\frac{1}{6635520}\, p^{(n+9)}\, n^9 - \frac{1}{138240}\, p^{(n+9)}\, n^8 - \frac{7175293}{29030400}\, p^{(n+9)}\, n^2 \right.$$
$$- \frac{87397}{49766400}\, p^{(n+9)}\, n^6 - \frac{251821}{19906560}\, p^{(n+9)}\, n^5 + A_{10}\, p^{(n+9)} + \frac{77}{12}\, A_8\, p^{(n+9)}$$
$$- \frac{3763}{23040}\, n\, p^{(n+9)} - \frac{3994717}{69672960}\, p^{(n+9)}\, n^4 - \frac{5548691}{34836480}\, p^{(n+9)}\, n^3$$
$$- \frac{83}{552960}\, p^{(n+9)}\, n^7 + \frac{1}{8}\, A_8\, p^{(n+9)}\, n^2 + \frac{43}{24}\, A_8\, p^{(n+9)}\, n - \frac{1}{2}\, A_9\, p^{(n+9)}\, n$$
$$\left. - 4\, A_9\, p^{(n+9)} \right) h^9 + \mathrm{O}(h^{10})$$

```
> A[8]:=sort(solve(-43/55296*p^(n+7)*n^5-4831/829440*p^(n+7)*n^4-
331/13824*p^(n+7)*n^3-1/18432*p^(n+7)*n^6-1/645120*p^(n+7)*n^7-
751/17280*n*p^(n+7)-73937/1451520*p^(n+7)*n^2+A[8]*p^(n+7),A[8]));
```

$$A_8 := \frac{1}{645120}\, n^7 + \frac{1}{18432}\, n^6 + \frac{43}{55296}\, n^5 + \frac{4831}{829440}\, n^4 + \frac{331}{13824}\, n^3 + \frac{73937}{1451520}\, n^2 + \frac{751}{17280}\, n$$

```
> simplify(S);
```

$$p^n + \left( -\frac{48217}{7962624}\, p^{(n+8)}\, n^4 - \frac{15583301}{348364800}\, p^{(n+8)}\, n^2 - \frac{1070017}{29030400}\, p^{(n+8)}\, n \right.$$
$$- \frac{104105}{4644864}\, p^{(n+8)}\, n^3 - \frac{1}{10321920}\, p^{(n+8)}\, n^8 - \frac{1}{221184}\, p^{(n+8)}\, n^7$$
$$\left. - \frac{197}{2211840}\, p^{(n+8)}\, n^6 - \frac{1589}{1658880}\, p^{(n+8)}\, n^5 + A_9\, p^{(n+8)} \right) h^8 + \left( \frac{6379}{1105920}\, p^{(n+9)}\, n^5 \right.$$
$$+ \frac{1}{23224320}\, p^{(n+9)}\, n^9 + \frac{1}{430080}\, p^{(n+9)}\, n^8 + \frac{3430349}{21772800}\, p^{(n+9)}\, n^2$$
$$+ \frac{17749}{24883200}\, p^{(n+9)}\, n^6 + \frac{599}{5184}\, n\, p^{(n+9)} + \frac{6527}{71680}\, p^{(n+9)}\, n^3 + \frac{1}{18432}\, p^{(n+9)}\, n^7$$
$$\left. + A_{10}\, p^{(n+9)} - \frac{1}{2}\, A_9\, p^{(n+9)}\, n + \frac{127609}{4354560}\, p^{(n+9)}\, n^4 - 4\, A_9\, p^{(n+9)} \right) h^9 + \mathrm{O}(h^{10})$$

```
> A[9]:=sort(solve(-197/2211840*p^(n+8)*n^6-1070017/29030400*p^(n+8)*n-
15583301/348364800*p^(n+8)*n^2-104105/4644864*p^(n+8)*n^3-
1/10321920*p^(n+8)*n^8-1/221184*p^(n+8)*n^7-48217/7962624*p^(n+8)*n^4-
1589/1658880*p^(n+8)*n^5+A[9]*p^(n+8),A[9]));
```

$$A_9 := \frac{1}{10321920}\,n^8 + \frac{1}{221184}\,n^7 + \frac{197}{2211840}\,n^6 + \frac{1589}{1658880}\,n^5 + \frac{48217}{7962624}\,n^4 + \frac{104105}{4644864}\,n^3 + \frac{15583301}{348364800}\,n^2 + \frac{1070017}{29030400}\,n$$

```
> simplify(S);
```

$$p^n + \left(-\frac{853277}{139345920}\,p^{(n+9)}\,n^4 + A_{10}\,p^{(n+9)} - \frac{2857}{89600}\,n\,p^{(n+9)} - \frac{1}{185794560}\,p^{(n+9)}\,n^9 - \frac{1}{3096576}\,p^{(n+9)}\,n^8 - \frac{770429}{19353600}\,p^{(n+9)}\,n^2 - \frac{6067}{49766400}\,p^{(n+9)}\,n^6 - \frac{17377}{15925248}\,p^{(n+9)}\,n^5 - \frac{14603861}{696729600}\,p^{(n+9)}\,n^3 - \frac{37}{4423680}\,p^{(n+9)}\,n^7\right) h^9 + \mathrm{O}(h^{10})$$

```
> A[10]:=sort(solve(-853277/139345920*p^(n+9)*n^4+A[10]*p^(n+9)-
2857/89600*n*p^(n+9)-1/185794560*p^(n+9)*n^9-1/3096576*p^(n+9)*n^8-
770429/19353600*p^(n+9)*n^2-6067/49766400*p^(n+9)*n^6-
17377/15925248*p^(n+9)*n^5-14603861/696729600*p^(n+9)*n^3-
37/4423680*p^(n+9)*n^7,A[10]));
```

$$A_{10} := \frac{1}{185794560}\,n^9 + \frac{1}{3096576}\,n^8 + \frac{37}{4423680}\,n^7 + \frac{6067}{49766400}\,n^6 + \frac{17377}{15925248}\,n^5 + \frac{853277}{139345920}\,n^4 + \frac{14603861}{696729600}\,n^3 + \frac{770429}{19353600}\,n^2 + \frac{2857}{89600}\,n$$

```
> simplify(S);
```

$$p^n + \mathrm{O}(h^{10})$$

Valeur de p^n

```
> sum(A[j]*(((1-exp(-h*p))/h)^(n+j-1))*h^(j-1),j=1..10);
```

$$\left(\frac{1-e^{(-h\,p)}}{h}\right)^{n}+\frac{1}{2}\,n\,\left(\frac{1-e^{(-h\,p)}}{h}\right)^{(n+1)}\,h+\left(\frac{1}{8}\,n^{2}+\frac{5}{24}\,n\right)\,\left(\frac{1-e^{(-h\,p)}}{h}\right)^{(n+2)}\,h^{2}$$
$$+\left(\frac{1}{48}\,n^{3}+\frac{5}{48}\,n^{2}+\frac{1}{8}\,n\right)\,\left(\frac{1-e^{(-h\,p)}}{h}\right)^{(n+3)}\,h^{3}$$
$$+\left(\frac{1}{384}\,n^{4}+\frac{5}{192}\,n^{3}+\frac{97}{1152}\,n^{2}+\frac{251}{2880}\,n\right)\,\left(\frac{1-e^{(-h\,p)}}{h}\right)^{(n+4)}\,h^{4}$$
$$+\left(\frac{1}{3840}\,n^{5}+\frac{5}{1152}\,n^{4}+\frac{61}{2304}\,n^{3}+\frac{401}{5760}\,n^{2}+\frac{19}{288}\,n\right)\,\left(\frac{1-e^{(-h\,p)}}{h}\right)^{(n+5)}\,h^{5}+$$
$$\left(\frac{1}{46080}\,n^{6}+\frac{5}{9216}\,n^{5}+\frac{49}{9216}\,n^{4}+\frac{10543}{414720}\,n^{3}+\frac{815}{13824}\,n^{2}+\frac{19087}{362880}\,n\right)$$
$$\left(\frac{1-e^{(-h\,p)}}{h}\right)^{(n+6)}\,h^{6}+\left(\frac{1}{645120}\,n^{7}+\frac{1}{18432}\,n^{6}+\frac{43}{55296}\,n^{5}+\frac{4831}{829440}\,n^{4}+\frac{331}{13824}\,n^{3}\right.$$
$$\left.+\frac{73937}{1451520}\,n^{2}+\frac{751}{17280}\,n\right)\,\left(\frac{1-e^{(-h\,p)}}{h}\right)^{(n+7)}\,h^{7}+\left(\frac{1}{10321920}\,n^{8}+\frac{1}{221184}\,n^{7}\right.$$
$$\left.+\frac{197}{2211840}\,n^{6}+\frac{1589}{1658880}\,n^{5}+\frac{48217}{7962624}\,n^{4}+\frac{104105}{4644864}\,n^{3}+\frac{15583301}{348364800}\,n^{2}\right.$$
$$\left.+\frac{1070017}{29030400}\,n\right)\,\left(\frac{1-e^{(-h\,p)}}{h}\right)^{(n+8)}\,h^{8}+\left(\frac{1}{185794560}\,n^{9}+\frac{1}{3096576}\,n^{8}+\frac{37}{4423680}\,n^{7}\right.$$
$$\left.+\frac{6067}{49766400}\,n^{6}+\frac{17377}{15925248}\,n^{5}+\frac{853277}{139345920}\,n^{4}+\frac{14603861}{696729600}\,n^{3}+\frac{770429}{19353600}\,n^{2}\right.$$
$$\left.+\frac{2857}{89600}\,n\right)\,\left(\frac{1-e^{(-h\,p)}}{h}\right)^{(n+9)}\,h^{9}$$

# Bibliographie


Agüero, J. C. et Goodwin, G. C. (2006). Identifiability of errors in variables dynamic systems. *In 14th IFAC Symposium on System Identification (Sysid 06), New Castle (Australia), March*, pages 29–31.

Agüero, J. C. et Goodwin, G. C. (2008). Identifiability of errors in variables dynamic systems. *Automatica*, 44(2):371–382.

Akaike, H. (1966). On the use of non-gaussian process in the identification of a linear dynamic system. *Annals of the institute of statistical mathematics*, 18(1):269–276.

Amairi, M. (2011). *Systèmes d'ordres non entiers et identification par méthodes ensemblistes*. Thèse de doctorat, Gabès University, Tunisia.

Anderson, B. (1985). Identification of scalar errors-in-variables models with dynamics. *Automatica*, 21(6):709–716.

Anderson, B. et Deistler, M. (1984). Identifiability in dynamic errors-in-variables models. *Journal of Time Series Analysis*, 5(1):1–13.

Anderson, B. et Deistler, M. (1987). Dynamic errors-in-variables systems with three variables. *Automatica*, 23(5):611–616.

Aoun, M. (2005). *Systèmes linéaires non entiers et identification par bases orthogonales non entières*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux1, France.

Aoun, M., Chetoui, M., Najar, S. et Abdelkrim, M. N. (2010). Online identification of fractional linear systems. *In 11th International conference on Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering December 19-21, Monastir, Tunisia*.

Battaglia, J.-L., Cois, O., Puigsegur, L. et Oustaloup, A. (2001). Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(14):2671–2680.

Bertsekas, D. (1982). Constrained optimization and lagrange multiplier methods. *Computer Science and Applied Mathematics, Boston : Academic Press, 1982*, 1.

Brillinger, D. (2001). *Time series : data analysis and theory*, volume 36. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II. *Geophysical Journal International*, 13(5):529–539.

Castaldi, P. et Soverini, U. (1996). Identification of dynamic errors-in-variables models. *Automatica*, 32(4):631–636.

Chetoui, M., Malti, R., Thomassin, M., Aoun, M., Najar, S. et Abdelkrim, M. (2011). Third-order cumulants based method for continuous-time errors-in-variables system identification by fractional models. *In 8th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices, SSD2011*, pages 1–6. IEEE.

Chetoui, M., Malti, R., Thomassin, M., Aoun, M., Najar, S. et et Alain Oustaloup, M. N. A. (2013a). Continuous-time system identification with fractional models from noisy input/output measurements using third-order cumulants. *International Journal of Transactions on Signals Systems and Devices (TSSD), Sheker-Verlag*, pages 63–84.

Chetoui, M., Malti, R., Thomassin, M., Aoun, M., Najar, S., Oustaloup, A. et Abdelkrim, M. N. (2012a). Eiv methods for system identification with fractional models. *In 16th IFAC Symposium on System Identification, SYSID2012*, volume 16, pages 1641–1646.

Chetoui, M., Malti, R., Thomassin, M., Najar, S., Aoun, M., Abdelkrim, M. N. et Oustaloup, A. (2013b). Fourth-order cumulants based method for continuous-time eiv fractional model identification. *In 10th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD), 2013*, pages 1–7. IEEE.

Chetoui, M., Thomassin, M., Malti, R., Aoun, M., Najar, S., Abdelkrim, M. N. et Oustaloup, A. (2013c). New consistent methods for order and coefficient estimation of continuous-time errors-in-variables fractional models. *Computers & Mathematics with Applications*.

Chetoui, M., Thomassin, M., Malti, R., Aoun, M., Najar, S., Oustaloup, A., Abdelkrim, M. N. *et al.* (2012b). Higher-order statistics-based methods for order and

parameter estimation of continuous-time errors-in-variables fractional models. *In 5th symposium on Fractional Differentiation and its Applications, FDA2012.*

Cois, O. (2002). *Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : application en thermique.* Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, France.

Cois, O., Oustaloup, A., Battaglia, E. et Battaglia, J. (2000). Non integer model from modal decomposition for time domain system identification. *In Proc. Symp. System Identification, SYSID*, pages 989–994.

Deistler, M. (1986). Linear errors-in-variables models. *Time series and linear systems*, pages 37–68.

Deistler, M. et Anderson, B. D. (1989). Linear dynamic errors-in-variables models : some structure theory. *Journal of Econometrics*, 41(1):39–63.

Delopoulos, A. et Giannakis, G. (1994). Consistent identification of stochastic linear systems with noisy input-output data. *Automatica*, 30(8):1271–1294.

Dennis, J. et Schnabel, R. (1987). *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*, volume 16. Society for Industrial Mathematics.

Diversi, R., Guidorzi, R. et Soverini, U. (2003). A new criterion in eiv identification and filtering applications. *In Proc. 13th IFAC symposium on system identification*, pages 1993–1998.

Djouambi, A., Voda, A. et Charef, A. (2012). Recursive prediction error identification of fractional order models. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(6):2517–2524.

Ekman, M., Hong, M. et Söderström, T. (2005). Identification of linear systems with errors in variables using separable nonlinear least squares. *In Proc. 16th IFAC world congress*, pages 4–8. Prague Czech Republic.

Ekman, M., Hong, M. et Söderström, T. (2006). A separable nonlinear least-squares approach for identification of linear systems with errors in variables. *In 14th IFAC symposium on system identification.*

Frisch, R. (1934). *Statistical confluence analysis by means of complete regression systems*, volume 5. Universitetets Økonomiske Instituut.

Garnier, H., Mensler, M. et Richard, A. (2003). Continuous-time model identification from sampled data : implementation issues and performance evaluation. *International Journal of Control*, 76(13):1337–1357.

Garnier, H. et Wang, L. (2008). *Identification of continuous-time models from sampled data*. Springer.

Geary, R. C. (1941). Inherent relations between random variables. *In Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A : Mathematical and Physical Sciences*, volume 47, pages 63–76. JSTOR.

Giannakis, G. B. (1990). On the identifiability of non-gaussian arma models using cumulants. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 35(1):18–26.

Grünwald, A. (1867). Uber begrenzte derivationen und deren anwendung. *Z. Angew. Math. Phys*, 12:441–480.

Ichise, M., Nagayanagi, Y. et Kojima, T. (1971). An analog simulation of non-integer order transfer functions for analysis of electrode processes. *Journal of electroanalytical chemistry*, 33(2):253–265.

Inouye, Y. et Suga, Y. (1994). Identification of linear systems with noisy input using input-output cumulants. *International Journal of Control*, 59(5):1231–1253.

Inouye, Y. et Tsuchiya, H. (1991). Identification of linear systems using input-output cumulants. *International Journal of Control*, 53(6):1431–1448.

Jia, L., Ikenoue, M., Jin, C. et Wada, K. (2001). On bias compensated least squares method for noisy input-output system identification. *In Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*, volume 4, pages 3332–3337. IEEE.

Kendall, M. et Stuart, A. (1976). The advanced theory of statistics. vol. 3 : Design and analysis, and time-series. *London : Griffin, 1976, 3rd ed.*, 1.

Kendall, S., Stuart, A. et Ord, J. (1987). Kendall's advanced theory of statistics. volume 1 : Distribution theory.

Khemane, F. (2011). *Estimation fréquentielle par modèle non entier et approche ensembliste - Application à la modélisation de la dynamique du conducteur*. Thèse de doctorat, Bordeaux 1 University, France.

Kilbas, A., Srivastava, H. et Trujillo, J. (2006). *Theory and Applications of fractional differential equations*. Elsevier Science Ltd.

Lacoume, J.-L., Amblard, P.-O. et Comon, P. (1997). *Statistiques d'ordre Supérieur pour le Traitement du Signal*. Masson.

Le Lay, L. (1998). *Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier*. Thèse de doctorat.

Lin, J. (2001). *Modélisation et identification de systèmes d'ordre non entier*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, France.

Ljung, L. (1999). *System identification*. Wiley Online Library.

Luenberger, D. G. (1973). *Introduction to linear and nonlinear programming*. Addison-Wesley publishing company.

Mahata, K. et Garnier, H. (2005). Direct identification of continuous-time errors-in-variables models. *In Preprints of the 16th World Congress of the International Fedeartion of Automatic Control, July*, pages 3–8.

Mahata, K. et Garnier, H. (2006a). Identification of continuous-time errors-in-variables models. *Automatica*, 49(7):1470–1490.

Mahata, K. et Garnier, H. (2006b). Identification of continuous-time errors-in-variables models. *Automatica*, 42(9):1477–1490.

Malti, R. R., Victor, S., Oustaloup, A. *et al.* (2008). Advances in system identification using fractional models. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 3(2).

Masato, I., Shunshoku, K., Zi-Jiang, Y. et Kiyoshi, W. (2005). Identification of noisy input-output system using bias-compensated least-squares method.

Matignon, D. (1998). Stability properties for generalized fractional differential systems. *In ESAIM : proceedings*, volume 5, pages 145–158.

McCullagh, P. (1987). *Tensor methods in statistics*, volume 161. Chapman and Hall London.

Mendel, J. (1991). Tutorial on high-order statistics (spectra) in signal processing and system theory : Theoretical results and some applications. volume 79, pages 278–305.

Miller, K. et Ross, B. (1993). *Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley & Sons New York.

Oldham, K. et Spanier, J. (1974). *The fractional calculus*. Academic Press New York.

Oustaloup, A. (1995). *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*. Hermès, Paris.

Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations*. Academic press New York.

Read, C., Kotz, S. et Johnson, N. (1988). *Encyclopedia of Statistical Sciences*. Wiley.

Reiersøl, O. (1950). Identifiability of a linear relation between variables which are subject to error. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 375–389.

Sabatier, J., Agrawal, O. et Tenreiro Machado, J. (2007). *Advances in Fractional Calculus : Theorical Developments and Application in Physics and Engineering*. Springer.

Samko, S., Kilbas, A. et Marichev, O. (1993). *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*. New York, NY : Gordon and Breach.

Söderström, T. (2006). Errors-in-variables methods in system identification. *In 14th IFAC Sympsuim on System Identification, Newcastle, Australia*, volume 14, pages 1–19.

Söderström, T., Larsson, E. K., Mahata, K. et Mossberg, M. (2006). Using continuous-time modeling for errors-in-variables identification. *In 14th IFAC Symposium on System Identification, Newcastle, Australia*, pages 428–433.

Söderström, T. (1981). Identification of stochastic linear systems in presence of input noise. *Automatica*, 17(5):713–725.

Söderström, T. (2005). Accuracy analysis of the frisch estimates for identifying errors-in-variables systems. *In Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*, pages 4281–4286. IEEE.

Söderström, T. (2007). Errors-in-variables methods in system identification. *Automatica*, 43(6):939–958.

Söderström, T. (2008). Extending the frisch scheme for errors-in-variables identification to correlated output noise. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 22(1):55–73.

Söderström, T. (2011). A generalized instrumental variable estimation method for errors-in-variables identification problems. *Automatica*, 47(8):1656–1666.

Söderström, T. et Mahata, K. (2002). On instrumental variable and total least squares approaches for identification of noisy systems. *International Journal of Control*, 75(6): 381–389.

Söderström, T. et Stoica, P. (1989). *System identification.* Series in Systems and Control Engeneering. Prentice-Hall, New York.

Solaiman, B. (2006). *Processus stochastiques pour l'ingénieur*. PPUR.

Solo, V. (1986). Identifiability of time series models with errors in variables. *Journal of Applied Probability*, pages 63–71.

Steiglitz, K. et McBride, L. (1965). A technique for the identification of linear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 10(4):461–464.

Stuart, A. et Ord, J. (1994). *Kendall's advanced theory of statistics*, volume 1. Edward Arnold, 6 édition.

Thil, S. (2007). *Contributions à l'identification de modèles avec des erreurs en les variables*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré-Nancy I.

Thil, S., Gilson, M. *et al.* (2011). Survey of analytical iv estimates for errors-in-variables model identification. *In 18th IFAC World Congress, IFAC WC'2011*, pages 13098–13103.

Thil, S., Gilson, M., Garnier, H. *et al.* (2008). On instrumental variable-based methods for errors-in-variables model identification. *In 17th IFAC World Congress*, pages 426–431.

Thill, S. (2007). *Contributions à l'identification de modèles avec des erreurs en les variables*. Thèse de doctorat, Henri Poincaré University, Nancy 1.

Trigeassou, J.-C., Maamri, N., Sabatier, J. et Oustaloup, A. (2011). A lyapunov approach to the stability of fractional differential equations. *Signal Processing*, 91(3): 437–445.

Tugnait, J. (1992). Stochastic system identification with noisy input using cumulant statistics. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 37(4):476–485.

Victor, S. (2010). *Identification par Modéle Non Entier pour la Poursuite Robuste de Trajectoire par Platitude*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, France.

Victor, S., Malti, R., Garnier, H. et Oustaloup, A. (2013). Parameter and differentiation order estimation in fractional models. *Automatica*.

Yang, Z., Sagara, S. et Wada, K. (1993). Identification of continuous-time systems from sampled input-output data using bias eliminating techniques. *Control Theory and Advanced Technology*, 9(1):53–75.

Young, P. (1981a). Parameter estimation for continuous-time models- a survey. *Automatica*, 17(1):23–39.

Young, P. (1981b). Parameter estimation for continuous-time models-a survey. *Automatica*, 17(1):23–39.

Zhao, Z., Sagara, S. et Wada, K. (1991). Bias-compensating least squares method for identification of continuous-time systems from sampled data. *International Journal of Control*, 53(2):445–461.

Zheng, W. (1998). Transfer function estimation from noisy input and output data. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 12(4):365–380.

Zheng, W. (1999). On least-squares identification of stochastic linear systems with noisy input–output data. *International journal of adaptive control and signal processing*, 13(3):131–143.

Zheng, W. (2000). Unbiased identification of stochastic linear systems from noisy input and output measurements. *In Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decison and Controls*, volume 3, pages 2710–2715. IEEE.

Zheng, W. (2002). A bias correction method for identification of linear dynamic errors-in-variables models. *Automatic Control, IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(7):1142–1147.

# Bibliographie de l'auteur

## Articles dans des Journaux

[**A1**] **Manel Chetoui**, Rachid Malti, Magalie Thomassin, Mohamed Aoun, Slaheddine Najar, Mohamed Naceur Abdelkrim et Alain Oustaloup (**2012**), Continuous-time system identification with fractional models from noisy input/output measurements using third-order cumulants. *International Journal of Transactions on Signals Systems and Devices (TSSD), Sheker-Verlag*, 8(1) :1-21.

[**A2**] **Manel Chetoui**, Rachid Malti, Magalie Thomassin, Mohamed Aoun, Slaheddine Najar, Mohamed Naceur Abdelkrim et Alain Oustaloup (**2013**), New consistent methods for order and coefficient estimation of continuous-time errors-in-variables fractional models. *International Journal of Computers and Mathematics With Applications (CAMWA)*, http ://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2013.04.028.

[**A3**] **:** **Manel Chetoui**, Rachid Malti, Mohamed Aoun, Magalie Thomassin, Mohamed Naceur Abdelkrim, Alain Oustaloup (**2013**), Continuous-time system identification with fractional models from noisy input and output data using fourth-order cumulants, *International Journal of Transactions on Signals Systems and Devices (TSSD), Sheker-Verlag.* (**Accepté**)

## Communications dans des conférences Internationales avec actes et comité de lecture

[**C1**] Mohamed Aoun, **Manel Chetoui** , Slaheddine Najar et Mohamed Naceur Abdelkrim . Online identification of fractional linear systems. *In 11th International conference on Sciences and Techniques of Automatic control and computer engineering, STA2010.*

[**C2**] **Manel Chetoui**, Rachid Malti , Magalie Thomassin , Mohamed Aoun , Slaheddine Najar et Mohamed Naceur Abdelkrim. Third-order cumulants based method for continuous-

time errors-in-variables system identification by fractional models. *In 8th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices, SSD2011*, pages 1-6. IEEE.

**[C3]** **Manel Chetoui**, Rachid Malti, Magalie Thomassin, Mohamed Aoun, Slaheddine Najar, Alain Oustaloup et Mohamed Naceur Abdelkrim. EIV methods for system identification with fractional models. *In 16th IFAC Symposium on System Identification, SYSID2012*, volume 16, pages 1641-1646.

**[C4]** **Manel Chetoui**, Magalie Thomassin, Rachid Malti, Mohamed Aoun, Slaheddine Najar, Alain Oustaloup et Mohamed Naceur Abdelkrim. Higher-order statistics-based methods for order and parameter estimation of continuous-time errors-in-variables fractional models. *In 5th symposium on Fractional Differentiation and its Applications, FDA2012.*

**[C5]** **Manel Chetoui**, Rachid Malti, Magalie Thomassin, Slaheddine Najar, Mohamed Aoun, Alain Oustaloup et Mohamed Naceur Abdelkrim. Fourth-order cumulants based method for continuous-time EIV fractional model identification. *In 10th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices, SSD2013.* IEEE.

**[C6]** **Manel Chetoui**, Rachid Malti, Magalie Thomassin, Mohamed Aoun, Mohamed Naceur Abdelkrim et Alain Oustaloup. Comparative study of two fourth-order cumulants based methods for continuous-time EIV fractional model identification. *In European Control Conference, ECC2014.* (***Soumis***)

# Résumé

Les principales contributions de cette thèse concernent l'identification à temps continu des systèmes par modèles non entiers dans un contexte à erreurs en les variables. Deux classes de méthodes sont développées : la première classe est fondée sur les statistiques d'ordre trois et la deuxième est fondée sur les statistiques d'ordre quatre. Dans chaque classe, deux cas différents sont distingués : le premier cas suppose que tous les ordres de dérivation non entiers sont connus *a priori* et seuls les coefficients de l'équation différentielle non entière sont estimés en utilisant les estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre supérieur. Le deuxième cas suppose que les ordres de dérivation sont commensurables à un ordre $v$ estimé au même titre que les coefficients de l'équation différentielle non entière par des techniques d'optimisation non linéaire combinées aux estimateurs fondés sur les cumulants d'ordre trois et quatre. Des exemples de simulation numérique illustrent les développements théoriques. Des applications pratiques sur la modélisation du phénomène de diffusion de chaleur dans un barreau d'Aluminium et sur la modélisation d'un système électronique ont montré la pertinence des méthodes développées.



**Mots clés :** dérivation non entière, identification, temps continu, erreurs en les variables, statistiques d'ordre supérieur.



# Abstract

This thesis deals with continuous-time system identification by fractional models in the EIV context. Two classes of methods are developed : the first class is based on third-order statistics and the second one is based on fourth-order statistics. Firstly, all differentiation orders are known *a priori* and only the coefficients of the differential equation are estimated using the developed algorithms based on higher-order statistics. Then, they are extended to estimate both the fractional differential equation coefficients and the commensurate order. Simulation examples display the theoretical developments on system identification in the EIV context. A practical application for modeling heat transfer phenomena in an aluminium rod and for modeling an electronic real system have shown the efficiency of the developed methods.



**Mots clés :** fractional differentiation, system identification, continuous-time, Errors in variables, higher-order statistics.