Contribution à la synthèse de lois de pilotage et de guidage pour les minidrones

Antoine Drouin

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *l'Université Toulouse III - Paul Sabatier*
Discipline ou spécialité : *Automatique*

Présentée et soutenue par *Antoine Drouin*
Le *20 janvier 2012*

Titre : *Contribution à la synthèse de lois de pilotage et de guidage pour les minidrones*

JURY
M. José Raul Azinheira, IST Lisbonne (rapporteur)
M. Houcine Chafouk, ESIGELEC Rouen (rapporteur)
M. Andrei Doncescu, UPS Toulouse (examinateur)
M. Max Suell Dutra, COPPE Rio de Janeiro (rapporteur)
M. Thierry Miquel, ENAC Toulouse (co-directeur de thèse)
M.Félix Mora-Camino, ENAC Toulouse (directeur de thèse)
M.Gilles Roux, UPS Toulouse (examinateur)

Ecole doctorale : *EDSYS*
Unité de recherche : *ENAC/LARA*
Directeur(s) de Thèse : *Professeur Félix Mora-Camino*
Rapporteurs : *Noms des rapporteurs (s'ils ne font pas partie des membre du jury)*

Résumé

Les applications mettant en œuvre les minidrones ont connu un développement très rapide ces dernières années. Ces applications concernent pour beaucoup l'amélioration de notre cadre de vie et principalement de notre sécurité face à des aléas naturels pour lesquels de nouveaux moyens de surveillance ont besoin d'être mis au point.

La plupart des missions confiées aux minidrones supposent la réalisation de trajectoires soit planifiées à l'avance, soit définies au fur et à mesure que de nouvelles informations sont disponibles. La qualité du suivi de trajectoire a d'importantes conséquences pour le succès de ces missions. L'objectif principal de cette thèse est de contribuer à la synthèse de lois de pilotage/guidage pour les minidrones présentant des performances améliorées sur un domaine de vol étendu et sur une panoplie de missions diversifiées.

Ainsi les minidrones sont ici appréhendés comme des systèmes fortement non linéaires, très souvent naturellement instables, aux paramètres physiques partiellement connus et susceptibles d'être soumis à de fortes perturbations. Les travaux de cette thèse portent donc sur la synthèse de lois de commande non linéaires (commande non linéaire inverse, commande différentiellement plate, commande par *Backstepping*) intégrant, dans le cadre de la commande adaptative, des processus d'apprentissage en ligne.

Le principal cas d'étude considéré dans cette thèse est celui du guidage d'un minidrone de type quadrirotor qui présente des caractéristiques opérationnelles particulièrement intéressantes : atterrissage et décollage verticaux, capacité de vol stationnaire, grande manœuvrabilité même à basse vitesse. Ainsi la dynamique de son vol a été modélisée et les propriétés mathématiques du modèle retenu ont été exploitées pour mettre au point la structure de commande dont les performances ont été évaluées par simulation sur une multitude de trajectoires de guidage.

Abstract

In recent years there has been a rapid growth in the application of miniature UAVs to monitoring our environment. The majority of this monitoring is for either ecological reasons or to provide improved security during times of natural disaster. A miniature UAV entrusted with a mission must follow either a pre-planned or a real-time defined trajectory. The ability of such a UAV to track the desired trajectory closely is critical. The main focus of this work is to contribute to the synthesis of guidance/piloting control laws which provide enhanced performance over an enlarged flight domain and mission set. From a control viewpoint, miniature UAVs represent often unstable, highly nonlinear dynamic systems, whose physical parameters are usually only partially known. They are also subject to strong atmospheric perturbations which provides further complications. In this respect, the work of this dissertation focuses on the synthesis of nonlinear control laws (feedback linearization, differentially flat control, backstepping) and their enhancement using adaptive control theory. The main case study of this dissertation is that of a quadrotor helicopter, a type of vehicle with an interesting flight envelope including : vertical takeoff and landing, stationary flight and, most importantly, manoeuvrability even at low speed. The flight dynamics of the vehicle have been modeled and the parameters of the model analysed in order to develop a control structure, the performance of which has been assessed using a number of simulations.

Aux absents, qui ont malgré tout parfois raison.

Table des matières

1 Microvéhicules aériens **5**

1.1 Généralités 6

1.1.1 Drones 6

1.1.2 Technologie des mini/microdrones 6

1.1.3 Applications des mini/microdrones 8

1.1.4 Mise en œuvre des mini/microdrones 15

1.1.5 Réglementation des mini/microdrones 16

1.2 Cellules 17

1.2.1 Propulsion 17

1.3 Avionique 18

1.3.1 Calculateurs 19

1.3.2 Capteurs embarqués 22

1.4 Pilote automatique pour minidrone 23

1.5 Conclusion 25

2 Analyse des systèmes dynamiques non linéaires **27**

2.1 Représentation d'état 27

2.2 Degré relatif d'une sortie 30

2.3 Dynamique interne 32

2.4 Point d'équilibre, trajectoire de référence 33

2.5 Linéarisation 33

2.6 Stabilité 35

2.7 Commandabilité, gouvernabilité 40

2.8 Conclusion 44

3 Commande des systèmes dynamiques non linéaires **45**

3.1 Introduction 45

3.2 Commande non linéaire inverse 46

3.2.1 Définition du problème de commande 46

3.2.2 Exemple : véhicule VTOL plan 47
3.3 Backstepping 51
3.3.1 Définition 51
3.3.2 Exemple : véhicule VTOL plan 54
3.4 Platitude différentielle 56
3.4.1 Définition 56
3.4.2 Exemple : système masses-ressorts 57
3.4.3 Exemple : véhicule VTOL plan 58
3.5 Conclusion 64

4 Commande adaptative 65
4.1 Introduction 65
4.2 Commande adaptative directe 66
4.2.1 Commande adaptative par modèle de référence (MRAC) 67
4.2.2 Application du MRAC au guidage vertical d'un hélicoptère 68
4.3 Commande adaptative indirecte 69
4.3.1 Application du MIAC au guidage vertical d'un hélicoptère 70
4.4 Comparaison méthodes directe et indirecte 71
4.5 Mise en œuvre d'une commande adaptative composite 72
4.6 Algorithmes d'adaptation 74
4.6.1 Descente de gradient 75
4.6.2 Moindres carrés récursifs 77
4.7 Application au VTOL plan 81
4.8 Conclusion 84

5 Analyse de la dynamique d'un drone à poussée vectorielle 85
5.1 Introduction 85
5.2 Caractéristiques physiques du véhicule considéré 86
5.2.1 Historique 86
5.2.2 Principe de fonctionnement 88
5.2.3 Configurations à plus de quatre rotors 89
5.3 Analyse physique de la dynamique des rotors 90
5.4 Missions et génération de trajectoires 93
5.5 Conclusion 95

6 Conception du système de guidage d'un quadrirotor 97
6.1 Introduction 97
6.2 Modèle de synthèse de la loi de commande 97

6.2.1 Hypothèses adoptées . . . 97
6.2.2 Équations des forces et moments . . . 99
6.3 Analyse des propriétés du modèle de synthèse . . . 104
6.3.1 Platitude différentielle . . . 104
6.3.2 Stabilité . . . 108
6.4 Élaboration de la loi de commande . . . 111
6.4.1 Boucle de stabilisation . . . 111
6.4.2 Boucle de retour de sortie . . . 115
6.5 Simulation du guidage du quadrirotor sans adaptation . . . 116
6.6 Conclusions . . . 121

7 Mise en place d'un mécanisme de commande adaptative indirecte 123
7.1 Introduction . . . 123
7.2 Description du mécanisme d'adaptation . . . 123
7.3 Analyse des résultats de simulation . . . 125
7.4 Conclusion . . . 127

8 Conclusion générale et perspectives 135

A Paparazzi 139
A.1 Historique . . . 139
A.2 Architecture . . . 140
A.3 Segment sol . . . 141
A.4 Systèmes embarqués . . . 142
A.5 Interface graphique . . . 144
A.6 Langage de plan de vol . . . 145
A.6.1 Cône . . . 148
A.6.2 Trajectoire d'atterrissage . . . 148
A.6.3 AnémoTaxis . . . 148
A.7 Simulateur . . . 149
A.8 Applications . . . 149

B Représentations de l'orientation d'un véhicule 151
B.1 Introduction . . . 151
B.2 Matrices de rotation . . . 151
B.2.1 Définition . . . 151
B.2.2 Cinématique et cinématique inverse . . . 152
B.3 Angles d'Euler . . . 152

B.3.1 Relation entre les angles d'Euler et les matrices de rotation 153
B.3.2 Cinématique et cinématique inverse 154
B.3.3 Singularités 155
B.4 Quaternions 155
B.4.1 Définition 155
B.4.2 Cinématique et cinématique inverse 156

Table des figures

1.1 Vue d'artiste d'un drone D-21 lancé depuis un bombardier Blackbird. . . . 5
1.2 Exemple de miniaturisation de minidrones 8
1.3 Le minidrone SUMO utilisé pour la mesure atmosphérique 9
1.4 Décollage du minidrone Slayer par un lancer manuel. 9
1.5 Minidrone longue endurance Spirit of Corsica 10
1.6 Exemple de cellules innovantes : Sentinel et Quadshot 17
1.7 Minidrone "*TAM*" à moteur à combustion 18
1.8 Helios, drone de 60 mètres d'envergure à propulsion électrique 19
1.9 Schéma fonctionnel des équipements embarqués d'un minidrone 19
1.10 Illustration de l'équipement d'un minidrone 20
1.11 Exemples de calculateurs embarqués 20
1.12 Technologie PoP. 21
1.13 Câblage de l'avionique du minidrone Slicer 22
1.14 Exemples de centrales inertielles 23
1.15 Minidrone militaire Raven 24

2.1 Illustration de la notion de degré relatif. 31
2.2 Schéma du pendule inversé 32
2.3 Schéma du satellite. 34
2.4 Illustration intuitive de la notion de stabilité. 35
2.5 Stabilité au sens de Lyapunov. 36
2.6 Stabilité asymptotique. 36
2.7 Stabilité exponentielle. 37
2.8 Équipotentielles de Lyapunov. 38
2.9 Schéma du chariot 42

3.1 Schéma du véhicule plan à poussée vectorielle. 48
3.2 Réponse du VTOL plan, perturbation d'assiette, commande NLI. 50
3.3 Réponse du VTOL plan, perturbation en position, commande NLI. 50
3.4 Réponse du VTOL plan, suivi de trajectoire, commande NLI. 51
3.5 Réponse du VTOL plan, perturbation d'assiette, commande *Backstepping*. 55
3.6 Réponse du VTOL plan, perturbation en position, commande *Backstepping*. 56
3.7 Schéma du système masses ressorts. 57
3.8 Réponse du VTOL plan, perturbation en position, commande plate. 60
3.9 Réponse du VTOL plan, commande plate plus retour d'état. 63

4.1 Principe de base de la commande adaptative directe. 66
4.2 Principe de base de la commande adaptative par modèle de référence. . . . 67
4.3 Simulation d'un algorithme MRAC pour la commande de l'hélicoptère . . . 69
4.4 Principe de base de la commande adaptative indirecte. 70
4.5 Simulation d'un algorithme MIAC pour la commande de l'hélicoptère. . . . 71
4.6 Principe de base de la commande adaptative composite. 72
4.7 Simulation d'un algorithme composite pour la commande de l'hélicoptère. . 73
4.8 Simulation d'un algorithme composite pour la commande de l'hélicoptère. . 73
4.9 Effet du gain d'estimation sur l'algorithme MIAC à descente de gradient . 76
4.10 Gain d'estimation et bruit, algorithme MIAC à descente de gradient 76
4.11 Paramètre variable, algorithme MIAC à descente de gradient 77
4.12 Bruit et paramètre variable, algorithme MIAC à descente de gradient . . . 77
4.13 Effets du gain initial pour l'algorithme MIAC à moindres carrés. 79
4.14 Effets du bruit, comparaison descente de gradient moindres carrés 79
4.15 Effet d'un paramètre variable sur un algorithme de moindres carrés. 80
4.16 Facteur d'oubli, algorithme moindres carrés à oubli exponentiel. 81
4.17 VTOL plan, commande plate et retour d'état, erreur paramétrique. 82
4.18 VTOL plan, commande plate et retour d'état, adaptation des paramètres . 83

5.1 Un minivéhicule aérien de type quadrirotor d'une masse de 400 grammes. . 85
5.2 Mécanique de têtes de rotor d'hélicoptère et de quadrirotor 86
5.3 Ancêtres des quadrirotors 87
5.4 Exemples de quadrirotor 87
5.5 Comparaison entre moteurs avec et sans balais. 88
5.6 Principe d'utilisation des actionneurs. 89
5.7 Véhicule hexarotors asymétrique. 90
5.8 Caractérisation dynamique et statique d'un groupe motopropulseur. 92
5.9 Rendement du groupe motopropulseur. 92

5.10 Distribution des pressions sur un rotor. 94
5.11 Structure de commande. 96

6.1 Notations utilisées pour le quadrirotor. 98
6.2 Schéma bloc du système de guidage. 112
6.3 Réponse du quadrirotor stabilisé à un échelon d'orientation de 10 degrés. . 113
6.4 Réponse du quadrirotor stabilisé à un échelon d'orientation de 180 degrés. 114
6.5 Réponse du quadrirotor stabilisé avec saturation des actionneurs 114
6.6 Réponse du quadrirotor stabilisé à un échelon de position. 117
6.7 Réponse du quadrirotor guidé à une rafale de vent. 118
6.8 Réponse du quadrirotor guidé avec erreur paramétrique. 119
6.9 Réponse du quadrirotor guidé avec saturation des actionneurs. 120

7.1 Réponse du quadirotor avec adaptation sur une trajectoire arrêt-arrêt. . . . 126
7.2 Évolution de l'estimation des paramètres. 127
7.3 Réponse du quadrirotor avec adaptation sur une trajectoire circulaire. . . . 128
7.4 Réponse du quadrirotor avec adaptation sur une trajectoire circulaire. . . . 129
7.5 Réponse du quadrirotor avec adaptation en présence de vent. 130
7.6 Évolution de l'estimation des paramètres. 131
7.7 Réponse du quadrirotor avec adaptation, trajectoire hélice toroïdale. 132
7.8 Réponse du quadrirotor avec adaptation sur un décollage et un atterrissage. 133

A.1 Schéma de l'architecture du système Paparazzi 140
A.2 Schéma de l'architecture du segment sol Paparazzi. 142
A.3 Architecture embarquée : schéma fonctionnel du logiciel embarqué. 143
A.4 Architecture embarquée : organisation en couches. 143
A.5 Calculateurs embarqués Paparazzi 144
A.6 Premières interfaces graphiques Paparazzi inspirées de cockpit d'avion. . . 145
A.7 Prototypes d'interfaces graphiques 145
A.8 Interface graphique Paparazzi actuelle. 146
A.9 Interfaces graphiques tactiles 146
A.10 Utilisation d'interface graphique en extérieur 147
A.11 Exemples de plans de vol 147
A.12 Schéma bloc d'un simulateur. 149

B.1 Ordre des rotations élémentaires. 153

TODO

B.1faire un schéma - mettre une reference sur un bouquin 151

Introduction

Depuis plusieurs années les applications mettant en œuvre des minidrones ont connu un développement très rapide. Ces applications concernent pour beaucoup l'amélioration de notre cadre de vie et principalement de notre sécurité face à des aléas naturels pour lesquels de nouveaux moyens de surveillance sont mis au point. D'autres applications s'intéressent au monitoring de systèmes industriels complexes et proposent des solutions plus économiques et plus performantes que les systèmes antérieurs.

Les progrès technologiques dans les domaines de la propulsion de ces engins atmosphériques, de la miniaturisation de leur système de navigation, dans l'intégration multi-sensorielle et dans les systèmes de communication ont rendu intéressante l'utilisation des minidrones dans de plus en plus d'applications.

La plupart des missions confiées aux minidrones supposent la réalisation de trajectoires soit planifiées à l'avance, soit définies au fur et à mesure que de nouvelles informations sont relevées par les capteurs embarqués. La qualité de suivi de trajectoire a d'importantes conséquences pour le succès des missions et celui-ci doit donc être réalisé au mieux. En ce qui concerne les trajectoires simples de type point à point, des moyens de guidage automatique basés sur des techniques de commandes linéaires (PID) sont disponibles depuis longtemps. Néanmoins, lorsque la complexité de la trajectoire est trop importante, lorsque les conditions atmosphériques deviennent difficiles (présence de vent, pluie) ou lorsque les caractéristiques physiques de l'engin évoluent au cours de la mission (largage ou amarrage de charges auxiliaires par exemple), ces systèmes atteignent leurs limites et il faut revenir au guidage, voire au pilotage manuel de ces engins. Ceci est une situation extrêmement pénalisante dans beaucoup de cas. L'objectif de cette thèse est de contribuer à la synthèse de lois de pilotage/guidage présentant des performances améliorées sur un domaine de vol étendu et sur une panoplie de missions beaucoup plus diversifiée. Ainsi les minidrones sont ici appréhendés comme des systèmes fortement non linéaires, très souvent naturellement instables, aux paramètres physiques partiellement connus et susceptibles d'être soumis à de fortes perturbations (vent). C'est donc naturellement que les travaux de cette thèse portent sur la synthèse de lois de commande non linéaire intégrant, dans le cadre de la commande adaptative, des processus d'apprentissage en ligne.

Le principal cas d'étude considéré dans cette thèse a été celui du guidage d'un minidrone de type quadrirotor qui présente des caractéristiques particulièrement intéressantes : atterrissage et décollage verticaux, capacité de vol stationnaire, grande manœuvrabilité même aux basses vitesses.

Le premier chapitre de cette thèse développe un aperçu général sur l'état de la technologie des minidrones aujourd'hui. Il porte un accent particulier sur les performances particulières de ceux-ci et la multitude d'applications qui en découle. Finalement les exigences en ce qui concerne l'avionique embarquée sont relevées.

Le chapitre 2 réalise un état de l'art sur la représentation d'état des systèmes dynamiques non linéaires continus. Il s'intéresse plus particulièrement aux propriétés mathématiques des représentations d'état mises sous forme affine de commande et reprend les notions de degrés relatifs et de dynamique interne. Les notions de commandabilité, de stabilité autour d'un point d'équilibre ou d'une trajectoire sont alors présentées dans un référentiel non linéaire. Une comparaison avec l'approche linéaire classique est aussi développée.

Le chapitre 3 aborde le problème de la synthèse de lois de commande pour les systèmes dynamiques non linéaires continus qui ne fassent pas l'impasse sur les non linéarités intrinsèques de ces systèmes. Ainsi trois grandes techniques sont présentées et analysées : la commande non linéaire inverse, le *Backstepping* et la commande différentiellement plate. Dans chacun des cas, des simulations numériques illustrent la mise en œuvre de ces types de lois de commande sur un VTOL (Vertical Take Off and Landing vehicle, véhicule à décollage et atterrissage verticaux) évoluant dans le plan vertical.

Le chapitre 4 aborde alors le problème de la commande adaptative qui doit permettre de faire face, en cours d'opération, à des variations paramétriques importantes, de façon à assurer la robustesse. Ainsi les deux principales approches, approche directe et approche indirecte, sont développées et comparées. Ici aussi diverses simulations numériques sont rapportées de façon à illustrer au mieux le propos sans passer par de longs développements mathématiques. Une première intégration d'une boucle d'adaptation composite à une loi de guidage est présentée dans le cas du VTOL évoluant dans le plan vertical.

Le chapitre 5 présente le minidrone quadrirotor qui sera l'objet principal d'application pour les lois de pilotage et de guidage développées dans cette thèse. Ici l'accent est mis sur l'analyse de son système de propulsion et sur son principe de fonctionnement (création de la force motrice et des moments sur les trois axes) alors que l'ensemble des missions qu'il peut réaliser est étudié.

Le chapitre 6 introduit plusieurs représentations de la dynamique du vol du drone quadrirotor avec notamment l'utilisation des quaternions pour représenter ses mouvements de rotation. Après avoir analysé dans un cadre non linéaire ses propriétés de stabilité et de commandabilité, une loi de stabilisation basée sur l'utilisation des quaternions est mise au point. Une boucle externe, basée sur la commande non linéaire inverse, permet alors de guider l'engin le long de trajectoires de référence. Ainsi différentes simulations, intégrant ou non l'effet du vent ou d'erreurs paramétriques, sont présentées et analysées.

Le chapitre 7 s'intéresse alors à l'introduction d'une boucle d'estimation en ligne, suivant l'approche adaptative indirecte, des principaux paramètres inertiels intervenant dans la dynamique du vol du quadrirotor. Les résultats de simulation permettent alors d'apprécier l'effet de cette adaptation sur les performances du système de guidage du drone.

La conclusion générale récapitule les contributions de cette recherche doctorale et indique plusieurs directions d'étude permettant d'améliorer les performances de guidage des minidrones.

Chapitre 1

Microvéhicules aériens

Les véhicules aériens sans pilote, encore appelés drones, font partie du paysage aérien depuis de nombreuses années. On peut citer par exemple la série de drones D-21, développée par Lockheed autour des années 1960. Ce type de véhicule, lancé depuis le bombardier furtif M-21 Blackbird, était capable d'effectuer une navigation automatique autour de la Terre dans le but de collecter des informations destinées au renseignement. D'une masse imposante, propulsé par un réacteur de type *ramjet*, volant à mach 3 à une altitude de 30 000 mètres, le coût phénoménal et non publié de ces engins ne pouvait se justifier que dans le contexte de la guerre froide. Depuis lors, l'intérêt pour les véhicules aériens sans pilote est allé croissant et les avancées technologiques ont permis à la fois une augmentation de leurs performances et une réduction drastique de leur taille et de leur coût, leur ouvrant par là même une grande variété d'applications.

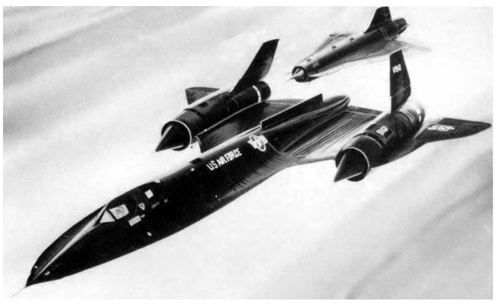


FIGURE 1.1 – Vue d'artiste d'un drone D-21 lancé depuis un bombardier Blackbird.

1.1 Généralités

1.1.1 Drones

Un véhicule aérien sans pilote ou *drone* peut être défini selon la définition anglo-saxonne [1] comme :

Définition 1.1 *An aircraft without a pilot that is operated by remote control.*

Cette définition implique en particulier :
- que le véhicule est contrôlé, *i.e.* pas complètement autonome ;
- que le contrôle peut être réalisé depuis le sol ou depuis un véhicule ;
- que le véhicule est réutilisable (ce qui exclut les ballons sonde et les missiles).

Le niveau d'interaction avec l'opérateur va du mode de pilotage direct, comme sur un aéromodèle classique, à des modes de pilotage à stabilité augmentée, comme ceux fournis par le pilote automatique des avions de transport modernes, ou encore à des modes de guidage automatique (ou navigation), semblables à ceux fournis par les FMS des mêmes avions de transport modernes. Pour les scénarii dans lesquels un opérateur contrôle plusieurs véhicules, le niveau d'abstraction atteint celui rencontré par les contrôleurs du trafic aérien.

Parmi les critères utilisés pour catégoriser les drones, on trouve généralement les quatre suivants (voir tableau (1.1)) :
- masse ;
- rayon d'action ;
- altitude de vol ;
- autonomie (temps de vol).

Ces catégories et les critères de performance qui les définissent évoluent avec la technologie. À l'heure actuelle, des minidrones à propulsion électrique de masse inférieure au kilogramme atteignent des autonomies de 24 heures [2]. Le minidrone à moteur à combustion TAM [3], d'une masse de 5 kilogrammes, a effectué une traversée de l'Atlantique en 2003 : un vol de plus de 38 heures et trois mille kilomètres.

1.1.2 Technologie des mini/microdrones

De par leur masse, leurs performances de vol et leur coût, les gros drones utilisent une technologie voisine de celle utilisée sur les aéronefs classiques de taille équivalente.

1. Au 16 juin 2011, le dictionnaire TLFI `http://atilf.atilf.fr/tlf.htm` ne propose pas encore de définition du mot *drone*
2. http ://www.sky-sailor.ethz.ch/ accédée le 15 juin 2011
3. `http://www.barnardmicrosystems.com/L4E_atlantic_crossing_II.htm` accédée le 15 juin 2011

	Micro	Mini	CR	SR	MR	LALE	MALE	HALE
R. d'action (km)	< 10	< 10	30	70	200	> 500	> 500	> 2000
Alt. max. (m)	250	3000	3000	3000	5000	3000	8000	5 à 15000
Autonomie (h)	1	< 2	2 à 4	3 à 6	6 à 10	> 24	24 à 48	24 à 48
Masse (kg)	< 5	< 30	1	50	200	1250	10000	12000

TABLE 1.1 – Classification des drones en fonction de leur rayon d'action, leur altitude de vol maximale, leur autonomie et leur masse (CR, SR et MR pour *Close*, *Short* et *Medium Range*, EN : *Endurance*, L(MH)ALE :*Low* (*Medium*, *High*) *Altitude Long Endurance*), d'après [Brisset, 2004].

La différence principale réside dans le déport du cockpit à l'extérieur du véhicule au moyen d'un lien radio. Cette dernière particularité génère néanmoins un certain nombre de problèmes, aussi bien techniques que réglementaires.

La technologie utilisée sur les minidrones est en revanche fondamentalement différente. Elle vient pour une partie de l'aéromodélisme, en particulier pour ce qui concerne la cellule et la propulsion. Les calculateurs et capteurs sont eux issus de l'électronique grand public. En revanche, l'état de l'art demeure insuffisant pour répondre aux besoins et la recherche est nécessaire pour découvrir ou adapter de nouvelles techniques. En effet, un certain nombre de contraintes sont spécifiques aux minidrones :

Besoin de miniaturisation Cette contrainte est plus ou moins sévère en fonction des applications. Cependant, dans tous les cas, la taille des véhicules de type minidrone rend impossible l'utilisation de composants d'avionique de l'aviation générale (figure 1.2).

Faible coût de mise en œuvre Pour la plupart des applications où le minidrone remplace un aéronef classique, une justification importante est la diminution du coût. Par exemple la photo aérienne réalisée par des minidrones peut se révéler jusqu'à dix fois moins chères qu'avec un aéronef habité. Dans tous les cas, le coût de mise en œuvre doit être comparable ou inférieur à celui de l'équipement remplacé. On peut également citer l'utilisation des minidrones pour la collecte d'observations météorologiques en remplacement des mesures effectuées par les ballons-sondes (figure 1.3).

Facilité de mise en œuvre Les minidrones sont en général lancés à la main depuis de petits terrains sans aménagement particulier tel qu'une piste de décollage, un dispositif de catapultage ou des filets de récupération. Les véhicules disposant de capacité de vol stationnaire facilitent grandement ce type de mise en œuvre (figure 1.4).

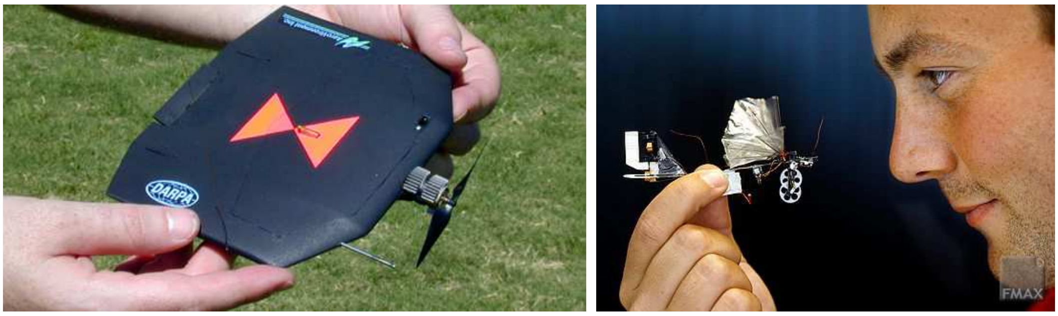


FIGURE 1.2 – Exemples de miniaturisation, à gauche : aile volante Black Widow d'Aerovironment ; à droite : ornithopthère Delfly de l'University of Delft.

Besoin d'autonomie En comparaison des véhicules de taille similaire utilisés dans le cadre de l'aéromodélisme, un temps de vol et une distance franchissable plus élevés sont généralement requis dans un but d'optimisation de l'utilisation de la charge embarquée et pour limiter le nombre de manœuvres d'atterrissage et de décollage (figure 1.5).

1.1.3 Applications des mini/microdrones

Si, dans un premier temps, les véhicules aériens sans pilote ont été destinés à des applications militaires en raison de leur coût élevé et de leur complexité, l'apparition des minidrones au cours de la dernière décennie a engendré un grand nombre d'applications ou d'applications potentielles à vocation civile.

Les véhicules aériens sans pilote de grande taille sont en mesure de remplir les missions d'ordinaire dévolues aux véhicules pilotés de taille équivalente. Ils sont également soumis aux mêmes contraintes de sécurité.

La taille des minidrones, en revanche, ne leur permet pas d'effectuer les mêmes missions, mais elle limite également les dégâts sur les personnes et les matériels au sol en cas de crash, ainsi que les conséquences financières.

La catégorie mini/micro regroupe des véhicules en fait relativement différents. Les conséquences du crash d'un véhicule de 100 grammes sont en effet très différentes de celles d'un véhicule d'un kilo. La vitesse de vol ainsi que le type de construction du véhicule, mousse expansée ou matériaux composites, jouent aussi un rôle important dans les dégâts occasionnés par un crash. Toutefois, il faut garder à l'esprit que, dans cette catégorie microdrones, les conséquences d'un crash sont équivalentes à celles d'une collision avec un oiseau ou la chute d'un ballon-sonde.

Pour les microdrones, le type d'applications est limité par les capacités d'emport de charge utile, par le rayon d'action et l'autonomie. La charge utile la plus souvent rencontrée consiste en des dispositifs d'imagerie. Dans les volumes et masses disponibles on peut

FIGURE 1.3 – Le minidrone SUMO est utilisé dans le cadre de campagnes de mesures, ici en Islande en 2008, en remplacement de ballons-sondes pour son faible coût de mise en œuvre.

FIGURE 1.4 – Décollage du minidrone Slayer par un lancer manuel.

FIGURE 1.5 – Prototype du minidrone Spirit of Corsica à propulsion électrique, d'une envergure d'un mètre cinquante, développé pour une traversée aérienne France-Corse en solitaire et sans escale.

aussi citer des capteurs météorologiques (température, pression, humidité), chimiques, de turbulence, ou des émetteurs-récepteurs radio. En conséquence, le type d'applications pour ces véhicules consiste généralement en de la surveillance ou de l'acquisition de données.

Applications militaires Les militaires utilisent déjà massivement des minidrones. On peut citer par exemple le minidrone Raven, produit par la société Aerovironment et dont l'armée américaine a acquis plus de 5 000 exemplaires. En majorité, les microdrones sont utilisés comme *l'œil du fantassin* pour voir *derrière la colline*. La charge utile est le plus souvent constituée de moyens d'imagerie mais également d'analyseurs chimiques. Le coût des véhicules est faible au regard de celui de la charge utile, les véhicules sont généralement considérés comme jetables, de par leur coût très faible en comparaison du reste de l'équipement militaire.

Pour les militaires, la technologie des minidrones entre dans la catégorie des *technologies de plateforme* et n'est en conséquence pas soumise aux restrictions habituellement rencontrées pour le matériel d'armement.

Le cahier des charges des microdrones à vocation militaire est assez bien reflété par le contenu des épreuves et les critères de notation de certains concours de microdrones (par exemple MAV08 [4] en Inde).

Le scénario de la mission proposée pour ce concours en Inde en 2008 était le suivant : il s'agissait d'assister un commando chargé de délivrer des otages retenus par des terroristes en localisant des mines sur le chemin du commando et en localisant les terroristes à l'intérieur du bâtiment où étaient retenus les otages. Les microdrones repérés par les terroristes étaient considérés comme perdus. Des robots terrestres pouvaient coopérer avec les robots aériens si besoin. La taille des véhicules et le temps d'exécution de la mission étaient des critères influant fortement sur la notation.

Comme le montre ce scénario, les principaux critères pour un microdrone à vocation militaire sont :

- La miniaturisation des véhicules, qui est fondamentale, afin que ces derniers puissent être transportés dans le sac à dos des soldats.
- La mise en œuvre du véhicule et de sa charge utile (assemblage, configuration, décollage) doit être facile et rapide afin de limiter au maximum le temps pendant lequel le soldat est vulnérable parce qu'il effectue ces tâches.
- La fonction d'opérateur de drone doit demander le moins de formation possible afin que chaque soldat puisse la remplir.
- Les véhicules doivent être discrets, ils doivent faire peu de bruit, et être de petite taille, afin d'être difficiles à repérer par l'ennemi.
- Dans certains cas, le véhicule dépose un capteur au sol avant de poursuivre sa mission ou de relayer les informations transmises par le capteur en place.
- Les véhicules doivent naviguer précisément afin de pouvoir s'approcher des obstacles, dans ce cas des capacités de vol stationnaire sont souhaitables.
- Le véhicule doit posséder une grande plage de vitesse. La plus rapide possible afin d'être en mesure de se rendre rapidement sur le lieu de sa mission, la plus faible possible afin d'optimiser la mise en œuvre de ses capteurs.
- Idéalement les véhicules devraient pouvoir voler à l'intérieur des bâtiments, se percher sur ceux-ci et être capables de redécoller.

Les applications militaires, qui sont réalisées sur des théâtres de guerre ou dans des espaces aériens militaires sont moins contraintes par les problèmes de réglementation que leurs homologues civiles.

Applications de sécurité civile Les applications de sécurité civile ressemblent beaucoup aux applications militaires. À l'heure actuelle, ces applications sont prometteuses mais peu mises en œuvre opérationnellement du fait de contraintes réglementaires (voir paragraphe 1.1.5).

4. http ://www.nal.res.in/MAV08/ accédé le 15 juin 2011

Il s'agit également majoritairement d'applications de surveillance. Parmi celles-ci on peut citer la détection de feu de forêt à l'aide de capteurs chimiques. Une expérimentation a été menée par l'ENAC en partenariat avec des brigades de sapeurs pompiers du sud de la France. Les enjeux de cette étude étaient d'une part techniques : choix, mise au point et calibration des capteurs chimiques, validation des algorithmes de navigation, etc ; d'autre part, un enjeu majeur et moins évident de l'étude a consisté en la résolution des problèmes réglementaires afin d'être en mesure de réaliser les vols d'expérimentation au dessus d'une forêt utilisée pour l'entraînement des sapeurs pompiers et située dans un zone de trafic aérien dense. Cette étude a montré que les microvéhicules aériens n'offrent pas d'avantage significatif pour la détection des feux de forêt, habituellement réalisée par des guetteurs sur des tours. En effet les capteurs chimiques ne permettent pas une détection suffisamment précoce du feu.

En revanche cette étude a permis de mettre en lumière d'autres utilisations où les minidrones apporteraient des avantages significatifs. En cas d'accident industriel, un microdrone équipé de capteurs chimiques permettrait d'aller analyser la toxicité de l'air au-dessus la zone sinistrée avant d'y envoyer des sapeurs pompiers, un véhicule inhabité revêtant une importance critique dans ce cas.

Dans le cas des incendies, un fois le feu éteint, un gros problème rencontré par les pompiers est de détecter les points chauds, c'est-à-dire les endroits où le feu n'a pas été suffisamment éteint et est susceptible de repartir. Ces points chauds sont difficiles à détecter car invisibles à l'œil nu et du fait des difficultés de parcourir la zone à pied. Dans ce cas un microdrone équipé de capteur infrarouge permettrait une détection efficace.

Comme pour les applications militaires, le cahier des charges des minidrones destinés aux applications de sécurité civile est bien décrit par le scénario et les critères de notation de certains concours. Par exemple le concours *Outback Challenge*,[5] organisé par l'*Australian Research Center for Aerospace Automation* et le gouvernement du Queensland, Australie, a pour objectif de :

- localiser une personne perdue dans le désert sur une surface de 8 kilomètres carrés située à une distance de 10 kilomètres du point de décollage ;
- transmettre sa position à une équipe de secours ;
- lui parachuter un nécessaire de survie pour lui permettre d'attendre l'arrivée des secours.

De la même façon, d'autres applications consistant en la surveillance de manifestations ou la cartographie de zones inondées lors de catastrophes naturelles ont été expérimentées.

5. `http//www.uavoutbackchallenge.com`

Applications scientifiques Les applications scientifiques des microdrones sont nombreuses et variées. Elles rencontrent un certain nombre de difficultés avec la réglementation. Toutefois dans les zones faiblement peuplées il est possible d'obtenir les autorisations nécessaires à leur conduite.

Par exemple on peut citer les campagnes FLOHOF (*Flow over and around Hofsjökull*) menée en Islande à l'été 2007, et celle menée au Spizberg en février-mars 2008, en collaboration avec l'Institut de Géophysique de l'Université de Bergen, la société allemande Martin Müller Engineering et l'ÉNAC. Au cours de ces campagnes un minidrone SUMO mesure des profils verticaux d'humidité, température, et de vitesse et direction du vent jusqu'à 3500 mètres d'altitude destinées à l'étude de la couche limite dans les régions polaires. L'avantage d'un microdrone pour ce genre de mesures, en comparaison d'un ballon-sonde utilisé habituellement, est la possibilité d'effectuer des trajectoires contrôlées pour les mesures de profils verticaux, alors qu'un ballon a une trajectoire libre dépendant des mouvements de l'atmosphère (verticaux et horizontaux).

Les microdrones sont faciles à mettre en œuvre et ont atteint un niveau de fiabilité qui permet à des scientifiques de pouvoir les mettre en œuvre sans l'aide d'un pilote ni d'un mécanicien.

La société Martin Müller Engineering et l'École polytechnique de Zurich font également voler un microdrone à proximité d'un champ d'éoliennes avec l'objectif d'étudier les turbulences générées par la rotation de leurs pales. Pour cette application, le microdrone constitue une avancée primordiale dans la mesure où aucun autre type de véhicule ou d'appareillage ne permettrait d'effectuer les mêmes mesures. Les contraintes sont en effet nombreuses :

– Le véhicule doit être suffisamment petit pour ne pas perturber le flux d'air à mesurer et pouvoir voler entre les éoliennes.
– Le véhicule doit également être suffisamment léger pour ne pas endommager l'éolienne en cas de collision.
– Le véhicule doit avoir un rayon d'action suffisant pour pouvoir monter à la hauteur du sommet des éoliennes (hauteur du pylône aux alentours de 100 mètres et sommet des pales autour de 200 mètres) et couvrir le champ d'éoliennes.

De manière générale, les minidrones sont adaptés à tous les types de collectes de données compatibles avec leur rayon d'action. Parmi les expérimentations menées par le laboratoire Drones de l'ÉNAC on peut citer :

– la photographie des vagues pour l'étude et la localisation des baïnes sur le littoral aquitain ;
– l'établissement de relevés de végétation par utilisation d'imagerie dans la baie du Mont-Saint-Michel ;

- le recensement et le suivi des populations de saumons dans les rivières, les poissons étant équipés d'émetteurs radio ;
- la mesure de pollution lumineuse autour de l'observatoire du pic du Midi.

Applications industrielles Les applications industrielles des minidrones sont extrêmement prometteuses mais malheureusement encore peu répandues, principalement du fait des obstacles réglementaires.

Quelques expérimentations ont été réalisées par le laboratoire drones de l'ÉNAC en coopération avec des industriels afin d'évaluer leur faisabilité. On peut citer par exemple :
- L'examen d'ouvrages d'art pour la surveillance des structures afin de réduire le déploiement d'échafaudages aux parties de l'ouvrage nécessitant une opération de maintenance.
- La cartographie à l'aide de capteurs chimiques embarqués des zones impactées par la pollution d'une usine dans le but d'aider à l'établissement de modèles de dispersion des polluants.
- La photographie aérienne des cultures afin d'évaluer précisément les dommages causés par des nuisibles et ainsi doser les produits phytosanitaires de manière optimale.

Applications de loisir La dernière catégorie d'applications des microdrones concerne les utilisations de loisir de type aéromodélisme. Même si à première vue celles-ci peuvent sembler disjointes du domaine des microdrones, il semble important de les mentionner ici. On constate en effet de nombreux échanges de technologie entre ces deux domaines. Du fait d'un marché vaste et bien établi, la recherche appliquée à l'aéromodélisme dispose d'importants moyens financiers et de force de travail, au contraire des microdrones qui ne sont pas encore développés du point de vue industriel.

Les progrès réalisés sur les cellules (matériaux composites, aérodynamique faible nombre de Reynolds) et les ensembles de propulsion (moteurs électriques brushless, batteries lithium-polymère, microréacteurs) pour l'aéromodélisme de loisir ont été rapidement mis à profit dans le domaine des minidrones.
- D'une part, l'existence de compétitions internationales d'aéromodélisme avec de fortes participations entraîne une augmentation rapide du niveau de performance des véhicules. Par exemple, les planeurs développés pour les compétitions de type F3B ou F3J (durée/vitesse avec mise en altitude au treuil) présentent un excellent compromis finesse/légèreté/résistance.
- D'autre part, les avancées technologiques réalisées pour les compétitions sont ensuite mises sur le marché en utilisant des moyens de production de masse permettant l'obtention d'un excellent rapport performance/coût.

De plus, certaines technologies développées spécifiquement pour les microdrones, telles que les systèmes de pilotage automatique, sont reprises par les marchés grand public et bénéficient de ce fait des investissements et du dynamisme liés à l'aéromodélisme :

- Les systèmes de stabilisation automatiques des microdrones sont maintenant courant dans l'aéromodélisme. Ils ont permis en particulier la simplification des véhicules à voilure tournante par le remplacement des systèmes de stabilisation mécanique utilisés jusqu'alors (barre de Bell) par une stabilisation active (hélicoptères flybarless). Ils ont aussi permis l'apparition d'une famille de véhicules à voilure tournante constitués uniquement de rotors à pas fixe et connus sous le nom de *quadrirotors*. L'absence totale de mécanique rend la production industrielle de ces véhicules très bon marché et leur confère une excellente durabilité [6].
- Les systèmes de télémesure sont désormais courant sur les aéromodèles. Ils permettent une amélioration de la sécurité en rendant disponibles pour le pilote des paramètres tels que la tension des batteries du véhicule. Ils contribuent aussi à l'augmentation des performances en permettant par exemple aux pilotes de planeurs de disposer de paramètres de vol tels que vitesse air ou vitesse verticale.

1.1.4 Mise en œuvre des mini/microdrones

Dans les premiers systèmes de drones à usage militaire, la solution retenue a été de déporter un cockpit d'avion au sol et d'utiliser des pilotes d'avion comme opérateurs. Cette solution s'avère lourde et peu efficace. D'une part la reproduction complète d'un cockpit au sol est contraignante, elle nécessite un local spécifique équipé de nombreux écrans et contrôles. D'autre part l'utilisation d'un cockpit déporté oblige à disposer d'un opérateur ayant une formation de pilote. Cette solution implique, de plus, d'avoir un opérateur par drone en vol (un pilote ne peut piloter deux avions simultanément).

L'opérateur de drone n'est pas seulement un pilote. Ses tâches sont nombreuses. Il doit contrôler le véhicule avant le vol, vérifier sa charge utile, planifier sa mission. Il doit ensuite piloter le drone, c'est-à-dire l'orienter dans l'espace, le guider, c'est-à-dire faire suivre à l'avion une trajectoire, et mettre en œuvre la charge utile du drone. Il peut éventuellement avoir à opérer plusieurs drones simultanément. De fait, ses fonctions sont entre celles du pilote et celles du contrôleur aérien, avec de surcroît l'opération de la charge utile. Il doit donc surveiller et synthétiser un grand nombre d'informations. Contrairement à un pilote, il peut être amené à faire évoluer l'appareil hors de vue. L'objectif est donc d'alléger sa charge de travail en délégant les fonctions de pilotage et de guidage aux systèmes automatisés. La recherche effectuée sur les drones peut être réutilisée dans l'aviation générale. En effet

6. http ://ardrone.parrot.com/parrot-ar-drone/usa/ accédée le 15 juin 2011

dans les avions modernes les cockpits évoluent, les informations présentées sont de plus en plus synthétiques et les tâches automatisées de plus en plus nombreuses.

Les gros drones sont généralement opérés par un ou plusieurs opérateurs, lesquels n'ont pas le drone à vue, et par un pilote de sécurité qui, lui, a le drone à vue au minimum pour les phases de décollage et d'atterrissage. Dans le cas des microdrones l'opérateur est souvent sur le champ d'opération, où les conditions ne sont pas bien contrôlées (vent, soleil, intempéries) ce qui complexifie encore sa tâche. De plus, du fait du faible coût et du peu de risques générés par les microdrones, il n'y a pas toujours de pilote de sécurité.

Pour les applications civiles, souvent les utilisateurs louent une équipe comprenant l'opérateur et récupèrent uniquement les données. Il est peu fréquent que les utilisateurs fassent voler le drone eux-mêmes, même si cette solution est plus flexible ensuite pour l'utilisateur.

Actuellement il n'y a pas de consensus sur la formation d'opérateur de drone. Chaque fabriquant de drone a sa propre école pour former ses opérateurs. La formation s'effectue le plus souvent à la fois en simulateur et sur des vols réels.

1.1.5 Réglementation des mini/microdrones

Les applications militaires ont le plus souvent lieu sur des théâtres de guerre où la réglementation civile ne s'applique plus. Ceci peut entraîner des difficultés. On peut rappeler à ce titre un incident survenu sur l'aéroport de Bagdad entre un Boeing et un drone Predator où une collision en vol a été évitée de justesse.

L'aviation de transport et les règles qui la régissent ont des impératifs de sécurité très élevés. Les procédures de certification sont très lourdes et la certification d'un nouveau type de matériel ou de procédure se fait en général par rapport à la génération précédente, en prouvant une non-dégradation des critères de sécurité. L'apparition des véhicules aériens sans pilote a posé un problème inédit aux organismes de réglementation et de certification : il n'y a pas de génération précédente sur laquelle baser des réglementations et des procédures de certification. Pour les plus grosses catégories de véhicules aériens sans pilote, une solution peut être de s'inspirer des règles grandeur. Pour les petites, dont l'attractivité tient en grande partie au faible coût et à la souplesse de mise en œuvre, de telles procédures seraient rédhibitoires. Les règles sont complexes, mais nous pouvons ici citer un certain nombre d'aspects pour illustrer le problème posé par l'apparition des véhicules sans pilote. L'opération d'un avion de transport met en jeu un certain nombre d'acteurs, comme le pilote, le contrôleur aérien, la compagnie aérienne. Les responsabilités sont partagées. Le pilote a pour responsabilité de *voir et éviter* (*see and avoid* en anglais). Même si les progrès de l'avionique des avions de transport modernes ont élargi la sémantique du *voir et éviter* vers une notion plus large de *détecter et éviter* (e.g. dispositifs anti-collision), il y a une différence portant sur la localisation de la personne responsable du *voir et éviter*, dans un cas, à bord de l'appareil pour le pilote d'avion, dans l'autre cas, au sol et séparé de son engin par un lien radioélectrique susceptible de faillir pour l'opérateur de drones.

Actuellement les fabricants attendent les usagers, les usagers attendent la réglementation, et les réglementeurs attendent les fabricants. Plusieurs groupes de travail sont actuellement à l'œuvre pour essayer de débloquer la situation.

1.2 Cellules

Le minidrone n'accueille personne à son bord. Ceci permet, pour la conception des cellules, de se libérer d'un certain nombre de contraintes, et d'accepter par exemple de plus grandes accélérations : utilisation de fusée de décollage, atterrissage en filet, etc. Ceci permet également le design de cellules innovantes comme des véhicules hybrides basculant (voir figure 1.6).

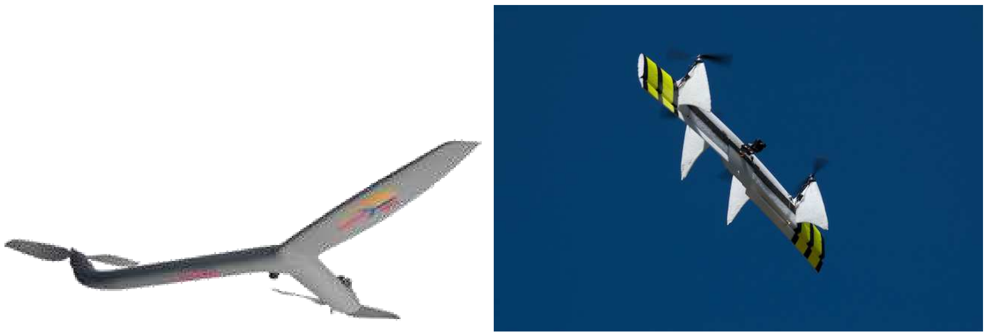


FIGURE 1.6 – À gauche : Phantom Sentinel, cellule rotative ; à droite : Quadshot, véhicule hybride basculant.

1.2.1 Propulsion

Depuis les débuts de l'aviation, les systèmes de propulsion des engins volants ont toujours été basés sur des moteurs à explosion. Le carburant de ces derniers constituait l'unique source d'énergie suffisamment dense pour satisfaire les contraintes de masse imposées par le vol, et les moteurs à explosion l'unique dispositif de conversion d'énergie suffisamment léger. Les principaux défauts des moteurs à explosion sont la difficulté de miniaturisation, leur faible rendement, ainsi que le bruit et les vibrations qu'ils engendrent. L'ensemble de ces caractéristiques a limité l'utilisation de ce type de moteur sur des très petits véhicules volants (voir figure 1.7). Il a fallu attendre le développement des petits moteurs électriques

	Ni-Cd	Ni-Mh	Li-Po	Li-S
Specific Energy (Wh/kg)	40	80	180	350
Energy Density (Wh/l)	100	300	300	350
Specific Power (W/kg)	300	900	2800	600

TABLE 1.2 – Caractéristiques des différents types de batteries (d'après les fabricants).

(moteurs *brushless*) et les progrès sur les batteries de ces dernières années (voir table 1.2) pour permettre le plein essor des microdrones. Jusqu'en 2003 on pouvait rencontrer des microdrones à moteur à explosion lors des compétitions de microdrones. Aujourd'hui toutes les cellules sont à moteur électrique.

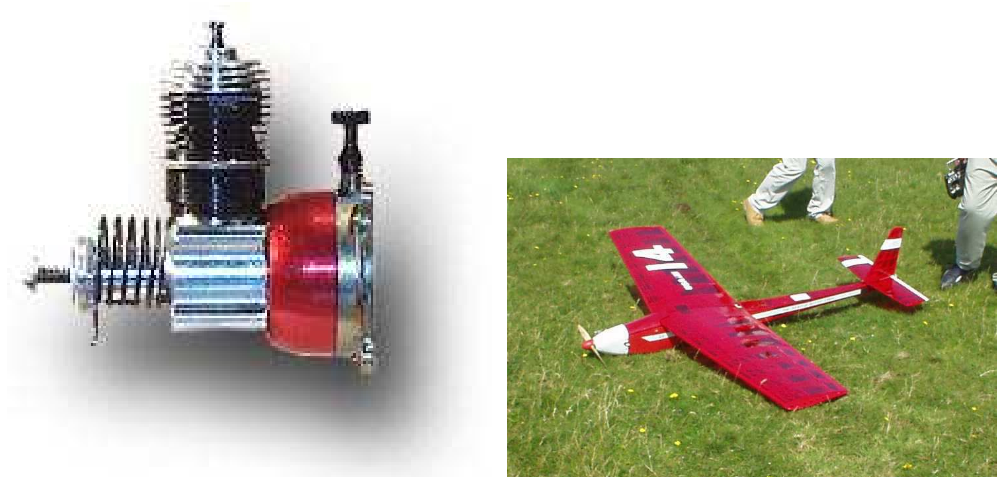


FIGURE 1.7 – À gauche : micromoteur à explosion Cox Pee Wee, d'une cylindrée de 0.3 cm^3 ; à droite : drone TAM5.

Aujourd'hui, les progrès sur les moteurs électriques sont tels que des cellules de plus en plus grandes sont équipées avec ces moteurs. Pour preuve, le Helios, véhicule aérien sans pilote d'une envergure de 60 mètres (voir figure 1.8).

1.3 Avionique

L'avionique typique d'un minidrone se compose au niveau matériel d'un calculateur, utilisé pour exécuter les différents algorithmes de guidage, de pilotage et d'estimation, ainsi que les communications. Le calculateur reçoit des mesures de capteurs (inertiels, GPS ou autres) et agit sur le véhicule au moyen d'actionneurs. Il interprète éventuellement des

FIGURE 1.8 – Helios, VASP à propulsion électrique d'une envergure de 60 mètres.

consignes de plus ou moins haut niveau venant d'une entité externe via le système de communications.

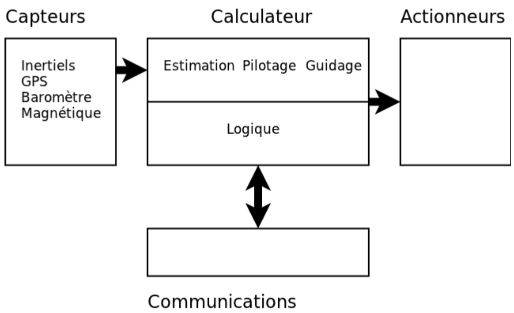


FIGURE 1.9 – Schéma fonctionnel des équipements embarqués d'un minidrone

1.3.1 Calculateurs

Dans un véhicule aérien sans pilote, le ou les calculateurs sont utilisés en particulier pour exécuter les algorithmes d'estimation et de contrôle. La puissance de calcul disponible constitue un des facteurs limitant la complexité et la fréquence de rafraîchissement de ces derniers.

Puissance de calcul

Depuis l'introduction des premiers calculateurs numériques dans les années 1960, la puissance de calcul de ces derniers n'a cessé d'augmenter suivant une loi exponentielle, vérifiant ainsi la prédiction connue sous le nom de *loi de Moore* et formulée à cette époque par l'un des co-fondateurs de l'entreprise Intel.

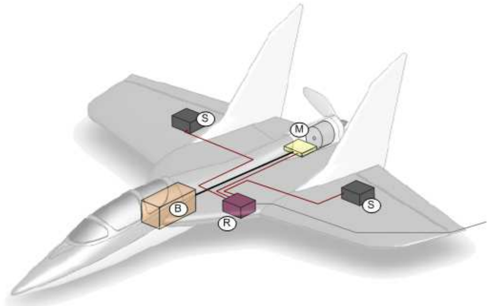


FIGURE 1.10 – Exemple d'équipement d'un minidrone, S=servos (actionneurs), B=batterie, R=avionique, M=groupe moto-propulseur.

Un des premiers calculateurs numériques embarqués fut le AGC (*Apollo Guidance Computer*). Avec une fréquence d'horloge de 2 MHz, disposant de 64ko de stockage, de 2ko de mémoire, pesant plus de 35 kg pour une consommation électrique de 70 W, il avait en charge l'ensemble des fonctions de guidage automatique du véhicule.

À titre de comparaison, les processeurs développés pour le marché de la téléphonie et de l'informatique mobile présentent des performances comparables à celles des supercalculateurs de la décennie passée avec une consommation électrique très faible (inférieure au Watt).

Le fait que les calculateurs utilisés sur les minidrones ne soient pas soumis aux mêmes contraintes de certification que ceux utilisés pour l'aviation générale ou le spatial fait que ces petits véhicules sont à même d'utiliser les dernières générations de microprocesseurs conçus pour les applications grand public et disposent ainsi, paradoxalement, de plus de puissance de calcul que leurs grands frères.

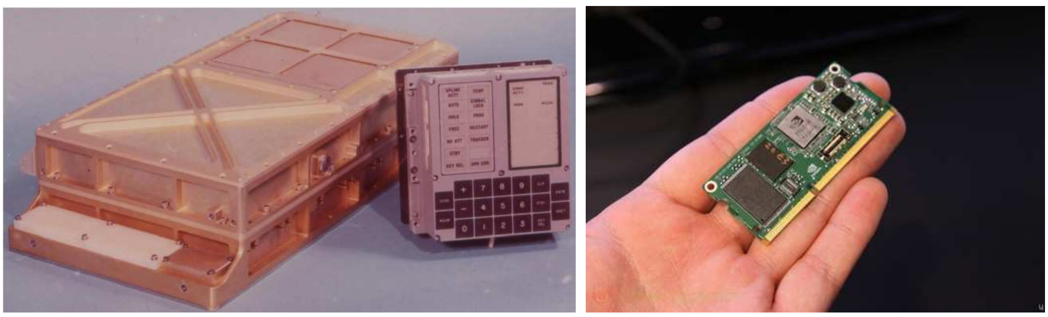


FIGURE 1.11 – À gauche : calculateur AGC ; à droite : module avec processeur Nvidia Tegra 2, ARM cortex A9 double cœur cadencé à 1.5 Ghz.

Rayonnements électromagnétiques

Un autre aspect important de l'avionique des minidrones concerne les émissions électromagnétiques : la petite taille des véhicules impose que les différents systèmes électroniques, calculateurs, émetteurs-récepteurs, capteurs et antennes soient localisés dans un volume réduit (1.13). Les émissions électromagnétiques doivent être minimisées pour éviter que les systèmes ne se perturbent entre eux. Cette problématique est commune avec l'informatique mobile et les solutions techniques développées pour ces applications sont pertinentes. Par exemple, la technologie *boîtier sur boîtier* (*Package on Package*, POP, voir figure 1.12) où le circuit intégré contenant le processeur et celui contenant la mémoire sont placés l'un au-dessus de l'autre, limite le rayonnement créé par les signaux du bus mémoire à haute fréquence.

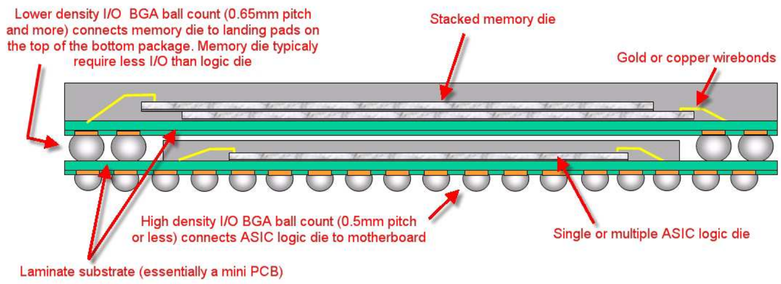


FIGURE 1.12 – Technologie PoP.

Systèmes d'exploitation, temps réel

L'utilisation d'un système d'exploitation permet d'abstraire l'utilisation du calculateur et par exemple d'utiliser des pilotes de périphériques existant. Cependant, cela se fait au prix d'une perte de performance parfois incompatible avec les contraintes temps réel liées au pilotage automatique.

Les noyaux temps réel permettent dans certains cas de résoudre le problème. Cependant pour les véhicules de très petites dimensions, qui possèdent une dynamique très rapide, ou pour les véhicules très instables, une fréquence d'exécution élevée des algorithmes d'estimation et de pilotage est nécessaire, ce qui rend les contraintes de temps réel très dures. Dans ce cas, il peut être intéressant d'utiliser deux processeurs, l'un fonctionnant avec un système d'exploitation et assurant les tâches complexes (e.g. communications réseaux) ou pilotant des périphériques sophistiqués (e.g. coupleur Ethernet sans fil), l'autre fonctionnant sans système d'exploitation et assurant les tâches temps réel dures (échantillonage des capteurs, estimation, pilotage).

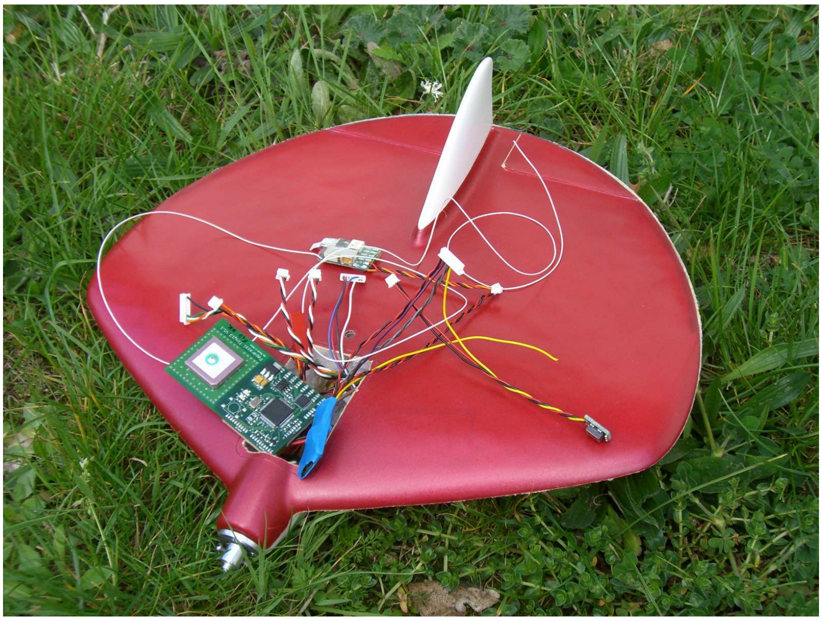


FIGURE 1.13 – Photo d'un microdrone Slicer de 30cm d'envergure montrant l'exiguïté du câblage.

1.3.2 Capteurs embarqués

Le vol d'un véhicule sans pilote dépend de la disponibilité d'un système de navigation inertielle. Les capteurs inertiels classiques, accéléromètres et gyromètres, étaient des système mécaniques complexes, masses en rotations pour les gyromètres, masses suspendues et amorties pour les accéléromètres. Les capteurs récents développés pour l'aviation utilisent d'autres technologies et d'autres principes comme les gyromètres laser (interférométrie). Les progrès des semi-conducteurs, poussés par la demande de secteurs grand public comme les véhicules automobiles (accéléromètres pour la sortie des airbags, gyromètres pour les systèmes de navigation et de correction de trajectoire) ont permis la création de capteurs à très faible coût, faible masse et faible consommation électrique. Le principe physique sur lequel reposent ces gyromètres vibrants est la détection de la force de Coriolis au moyen d'un élément vibrant. C'est le principe mis en œuvre par les insectes qui mesurent les vitesses rotationelles au moyen d'organes vibrants appelés *haltères*. Les premières versions utilisaient un élément piézoélectrique pour générer la vibration, ce qui les rendait fragiles et sensibles aux variations de température. Les nouveaux modèles utilisent des structures en silicium microusiné (*Micro Electro Mechanical Systems* ou MEMS) et ne présentent pas ces défauts. La plus récente génération de capteurs MEMS, produite par les fabriquants *Invensense* ou *ST Microelectronics*, a vu l'apparition de composants à sortie numérique contenant les trois axes de mesures, permettant ainsi la réalisation de centrales inertielles

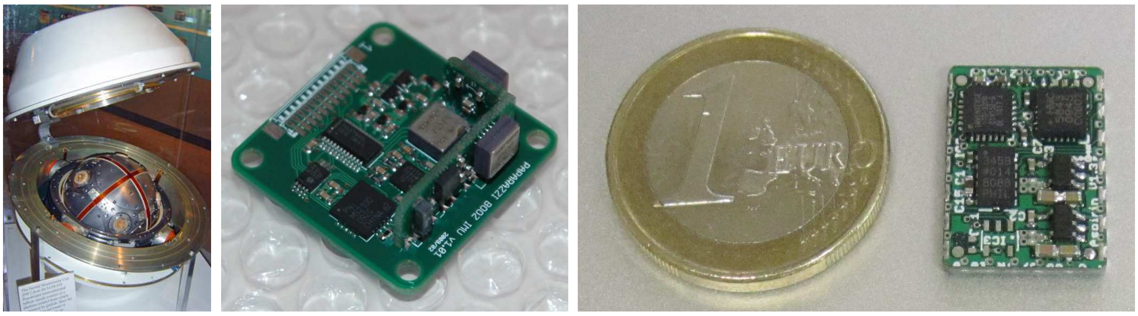


FIGURE 1.14 – De gauche à droite : Centrale inertielle mécanique, centrale inertielle MEMS avec assemblage tridimensionnel de circuits imprimés Booz, centrale inertielle MEMS plate Aspirin

plates (comme l'IMU Aspirin voir figure 1.14). La génération précédente de gyromètres MEMS ne comportait qu'un axe de mesure par boîtier, ce qui impliquait un assemblage tridimensionnel de circuits imprimés pour les centrales inertielles et engendrait des problèmes d'alignement.

Ces capteurs permettent de mettre en œuvre des systèmes de navigation inertielle sur des véhicules de petite taille.

Les performances ne sont pas comparables avec celles des capteurs de type aviation, mais en utilisant de bons algorithmes d'hybridation, elles sont néanmoins suffisantes pour permettre la navigation automatique. Le développement d'algorithmes d'hybridation représente un enjeu majeur et constitue un domaine actuel de recherche.

Ainsi de nouvelles technologies sont disponibles pour des capteurs ([Ripka et Tipek, 2007]) tels que gyromètres, accéléromètres et récepteurs GPS pour la navigation alors que de nouvelles mesures sont rendues nécessaires par certaines applications : mesures de pression, capteurs de vision.

1.4 Pilote automatique pour minidrone

L'aviation générale utilise la commande linéaire compte tenu de la présence humaine à bord de l'appareil et de ses limitations structurelles. Les manœuvres réalisées sont de faible ampleur ($-1.5° < \theta < 2.5°$ pour un gros porteur en configuration lisse) et la plupart du temps, l'avion évolue au voisinage immédiat d'une situation d'équilibre, ce qui justifie l'adoption de l'hypothèse des petits mouvements conduisant à un modèle linéarisé de la dynamique du vol pour calculer les paramètres des lois de commande.

En ce qui concerne les drones, la plupart de ces limitations n'existent pas et ils peuvent être amenés à effectuer des manœuvres extrêmes mettant en jeu de façon explicite les phénomènes non linéaires de leur aérodynamique, conduisant à la nécessité de mettre au point des lois de commande non linéaires.

Pour certaines applications une dynamique lente et un domaine de vol restreint sont suffisants : *e.g.* le Raven (voir figure 1.15). La cellule retenue est une forme de planeur double dièdre, extrêmement stable (géométrie issue du vol libre). La vitesse de vol est faible et constante. Les trajectoires demandées sont larges. L'inclinaison maximale nécessaire est de l'ordre d'une quinzaine de degrés. D'autre part, tous les Raven sont essayés et réglés en vol. Ceci constitue une procédure onéreuse et pénalisante pour une production de masse. Pour un mini ou microdrone, on souhaite une procédure de réglage et de calibration aussi réduite que possible.

Au cours de leurs missions, les minidrones peuvent être amenés à connaître d'importantes modifications de leur configuration, leur masse et leur inertie, et pour certaines applications une agilité particulière est recherchée. Compte tenu de leur faible valeur marchande, la mise au point coûteuse de lois de commande robustes ou de lois de commande faisant appel aux techniques de séquencement de gains (*gain scheduling*) peut être évitée en faisant appel aux techniques de la commande adaptative. On attendra de celles-ci flexibilité et facilité de mise en œuvre.

L'augmentation de la puissance de calcul, ainsi que la facilité avec laquelle un minidrone peut être mis en œuvre (pas de certification, coût faible), font des minidrones d'excellents candidats pour le développement et l'évaluation des méthodes de contrôle non linéaires.

FIGURE 1.15 – Minidrone militaire Raven

Bien que l'on s'intéresse dans cette thèse aux lois de commande, il faut néanmoins reconnaître que le succès de la mission impartie à un drone dépend de la mise en place de tout un système cohérent pour le faire voler, une part importante de la complexité se trouvant dans le segment sol (voir annexe A).

1.5 Conclusion

Comme on vient de le voir, même si on s'en tient aux minidrones, la diversité de conception de ceux-ci fait que, au-delà des caractéristiques générales communes (non linéarité de la dynamique très présente, faibles dimensions et poids, faible charge utile, etc.), le développement de systèmes de pilotage et de guidage performants devra être réalisé presque au cas par cas. Néanmoins, en ce qui concerne l'environnement de la mission, des systèmes de support (tel que Paparazzi, voir annexe A) compatibles avec un vaste spectre de minidrones peuvent être mis au point.

Chapitre 2

Analyse des systèmes dynamiques non linéaires

Un système dynamique est la description de l'évolution dans le temps d'un phénomène. Le phénomène peut être physique, comme le mouvement d'un solide ou la composition chimique d'un mélange, mais parfois aussi non physique, comme le cours des actions à la Bourse. Par extension, on appelle aussi système dynamique le *modèle mathématique* utilisé pour décrire le phénomène. Les systèmes dynamiques couramment utilisés pour la modélisation du vol des minivéhicules aériens rentrent dans la catégorie des systèmes dynamiques continus de dimension finie.

Dans ce chapitre, le formalisme de la *représentation d'état* et les outils de l'analyse en résultant sont présentés. Compte tenu du fort comportement non linéaire de la dynamique des minidrones, l'accent est mis sur les outils d'analyse des systèmes non linéaires.

2.1 Représentation d'état

La forme la plus répandue de modèle mathématique utilisée pour la représentation de la dynamique d'un système dynamique est appelée *représentation d'état*. L'état du système est représenté par un vecteur $\underline{X} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$. La représentation d'état met en jeu un vecteur de commande ou d'entrées $\underline{U} \in \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$ représentant les actions possibles sur le système, un vecteur de sortie $\underline{Y} \in \mathbb{R}^r, r \in \mathbb{N}$ représentant notre perception du système, ainsi qu'un couple de fonctions, $f : \mathbb{R}^{(n+m+1)} \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^{(n+m+1)} \to \mathbb{R}^r$, appelées respectivement *équation de dynamique* et *équation de sortie*, en général de classes C^∞ :

$$\dot{\underline{X}} = f(t, \underline{X}, \underline{U}) \tag{2.1.1}$$

$$\underline{Y} = g(t, \underline{X}, \underline{U}) \tag{2.1.2}$$

La contribution du vecteur de commande $\underline{U}$ dans l'équation de sortie est appelée *transmission directe* et modélise un effet instantané de l'entrée sur la sortie. Un tel effet est en général incompatible avec les lois régissant les systèmes physiques. Pour ces derniers, la forme générale de la représentation d'état devient donc :

$$\dot{\underline{X}} = f(t, \underline{X}, \underline{U}) \tag{2.1.3}$$

$$\underline{Y} = g(t, \underline{X}) \tag{2.1.4}$$

On introduit souvent un second vecteur d'entrées, $\underline{V}$, appelé *perturbation* et représentant les entrées non contrôlées du système (comme les perturbations atmosphériques dans le cas des véhicules aériens). La représentation d'état devient alors :

$$\dot{\underline{X}} = f(t, \underline{X}, \underline{U}, \underline{V}) \tag{2.1.5}$$

$$\underline{Y} = g(t, \underline{X}) \tag{2.1.6}$$

La dimension minimale du vecteur d'état est appelée *dimension du système*. Il existe une infinité de représentations d'état équivalentes pour un système donné, reliées entres elles par des difféomorphismes. Si $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme tel que $\underline{\tilde{X}} = \Phi(\underline{X})$, une nouvelle représentation d'état utilisant $\underline{\tilde{X}}$ comme vecteur d'état est obtenue de la façon suivante :

$$\dot{\underline{\tilde{X}}} = \dot{\underline{X}} \frac{d}{dt} \Phi(\underline{X}) \qquad \underline{Y} = g(t, \Phi^{-1}(\underline{\tilde{X}})) \tag{2.1.7}$$

$$\dot{\underline{\tilde{X}}} = f\left(t, \Phi^{-1}(\underline{\tilde{X}}), \underline{U}\right) \frac{d}{dt} \Phi\left(\Phi^{-1}(\underline{\tilde{X}})\right) \tag{2.1.8}$$

$$\dot{\underline{\tilde{X}}} = \tilde{f}(t, \underline{\tilde{X}}, \underline{U}) \qquad \underline{Y} = \tilde{g}(t, \underline{\tilde{X}}) \tag{2.1.9}$$

Système temporellement invariant

Lorsque les caractéristiques du système ne dépendent pas du temps, le système est dit *temporellement invariant* (*Time Invariant* ou *TI* en anglais) et la représentation d'état devient :

$$\dot{\underline{X}} = f(\underline{X}, \underline{U}) \tag{2.1.10}$$

$$\underline{Y} = g(\underline{X}) \tag{2.1.11}$$

La classe des systèmes temporellement invariants présente de nombreuses propriétés mathématiques pour la plupart issues de l'algèbre, et qui peuvent être mises à profit, par exemple lors de l'étude de stabilité. Lorsqu'un système présente des caractéristiques variant lentement dans le temps par rapport à la dynamique de l'état, comme par exemple la masse d'un avion du fait de sa consommation de carburant, les résultats propres aux systèmes temporellement invariants peuvent être adoptés.

Représentation d'état paramétrée

Les équations de dynamique et de sortie de la représentation d'état ont généralement une forme connue, découlant des lois physiques mises en jeu par le système physique. Elles font cependant intervenir un ensemble de paramètres, comme par exemple dans le cas des véhicules aériens, les dimensions des surfaces aérodynamiques, la masse ou les torseurs inertiels des solides, la densité de l'air, les coefficients aérodynamiques, etc. Ces paramètres peuvent souvent être calculés ou mesurés, mais ne sont connus qu'avec une précision relative, ce qui constitue un point délicat pour la synthèse de lois de commande. Ces paramètres sont de plus, dans certains cas, susceptibles d'évoluer dans le temps, souvent lentement par rapport à la dynamique du système. Dans le cas des véhicules aériens un exemple de ce phénomène peut être constitué par la dynamique des actionneurs se dégradant au fil du temps du fait de l'usure mécanique. Afin d'étudier l'influence de ces paramètres, un vecteur de paramètres réels que nous noterons $\underline{\eta}$ peut être ajouté à la représentation d'état qui devient

$$\dot{\underline{X}} = f(\underline{\eta}, t, \underline{X}, \underline{U}), \underline{\eta} \in \mathbb{R}^k \tag{2.1.12}$$

Une forme particulièrement intéressante de la représentation d'état paramétrée est la forme dite *linéairement paramétrée*. Dans cette forme, la représentation d'état est constitué d'une somme pondérée de fonctions non linéaires, les coefficients de pondération étant constitués des composantes du vecteur de paramètres.

$$f(\underline{\eta}, t, \underline{X}, \underline{U}) = \sum_{i=1}^{k} \eta_k f_k(t, \underline{X}, \underline{U}) \tag{2.1.13}$$

Forme affine en commande

Une forme très générale de la représentation d'état d'un système dynamique non linéaire est constituée par la forme dite *affine en commande*. Dans cette forme, la partie de l'équation de dynamique dépendant de la commande est constituée du produit d'une matrice de dimension $n \times m$ par le vecteur de commande.

$$\dot{\underline{X}} = f(t, \underline{X}) + h(t, \underline{X})\underline{U} \tag{2.1.14}$$

$$\underline{Y} = g(t, \underline{X}) \tag{2.1.15}$$

Pour montrer la généralité de cette représentation, considérons un système dont l'équation de dynamique est de la forme générale $\dot{\underline{X}} = f(\underline{X}, \underline{U})$, mais dont on est en mesure de commander les actionneurs en vitesse. On peut en effet le mettre sous forme affine de commande en augmentant le vecteur d'état :

$$\dot{\begin{pmatrix} \underline{X} \\ \underline{U} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} f(\underline{X}, \underline{U}) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\underline{U}} \tag{2.1.16}$$

Systèmes linéaires

Les systèmes dit *linéaires* constituent un cas particulier des systèmes affines en commande pour lesquels les termes non dépendant de la commande de l'équation de dynamique ainsi que de l'équation de sortie sont constitués du produit d'une matrice par le vecteur d'état. L'étude des systèmes linéaires constitue un domaine classique de l'Automatique et de nombreuses méthodes sont disponibles pour la synthèse de lois de commandes.

$$\dot{\underline{X}} = A(t)\underline{X} + B(t)\underline{U} \tag{2.1.17}$$

$$\underline{Y} = C(t)\underline{X} \tag{2.1.18}$$

Lorsque les matrices A, B et C sont constantes dans le temps, le système est dit *linéaire temporellement invariant* (*Linear Time Invariant* ou *LTI* en anglais) et la représentation d'état devient :

$$\dot{\underline{X}} = A\underline{X} + B\underline{U} \tag{2.1.19}$$

$$\underline{Y} = C\underline{X} \tag{2.1.20}$$

Les propriétés mathématiques de ce type de système sont encore plus faciles à exploiter sur le plan algébrique et permettent en particulier l'obtention d'une expression analytique de leur trajectoire. En notant $\underline{X}_0$ l'état du système à l'instant t_0, il vient pour tout $t \geq t_0$

$$\underline{X}(t) = e^{A(t-t_0)}\underline{X}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} BU(\tau) d\tau \tag{2.1.21}$$

La même remarque que pour les systèmes non linéaires à paramètres lentement variables s'applique aux systèmes linéaires. Lorsque la dynamique des paramètres est lente par rapport à celle de l'état, l'étude peut être réalisée pour différentes valeurs des paramètres en considérant ces derniers constants sur une certaine plage du domaine d'utilisation.

2.2 Degré relatif d'une sortie

En général, on suppose que la dimension du vecteur de commande $\underline{U}$ est supérieure ou égale à celle du vecteur de sortie $\underline{Y}$. On supposera dans ce paragraphe que $\underline{U}$ et $\underline{Y}$ sont de même dimension, le système est alors dit "carré". Dans le cas où les fonctions f, g et h sont suffisamment dérivables (par exemple C^∞) on peut définir les degrés relatifs des sorties du système.

Définition 2.1 *Le degré relatif de la $i^{ème}$ coordonnée du vecteur de sortie est défini comme le nombre de fois qu'il faut dériver l'équation de sortie correspondante moins une, en tenant compte de l'équation d'état, pour faire apparaître un terme de commande.*

Exemple : Soit le système dynamique non linéaire carré décrit par la représentation d'état suivante :

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \underline{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

$$\underline{\dot{X}} = f\left(\underline{X}, \underline{U}\right) = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_1 - x_2 + u_1 - u_2 \\ -x_1 + x_2 + x_2(u_1 + u_2) \end{pmatrix} \tag{2.2.2}$$

$$\underline{Y} = g\left(\underline{X}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{2.2.3}$$

En dérivant deux fois la première coordonnée de l'équation de sortie et en utilisant l'équation de dynamique 2.2.2, il vient

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 = -2x_2 \tag{2.2.4}$$

$$\ddot{y}_1 = -2\dot{x}_2 = -2\left(x_1 - 2x_2 + u_1 - u_2\right) \tag{2.2.5}$$

y_1 est donc de degré relatif 1.

En dérivant une fois la seconde coordonnée de l'équation de sortie et en utilisant l'équation de dynamique 2.2.2, il vient

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + x_2(u_1 + u_2) \tag{2.2.6}$$

y_2 est donc de degré relatif 0.

Le degré relatif est représentatif de l'ordre de la dynamique d'entrée-sortie du système non linéaire, comme décrit sur le schéma 2.1.

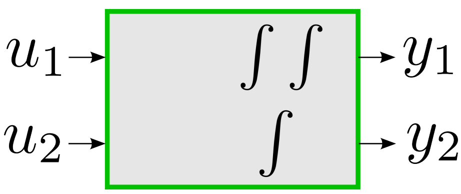


FIGURE 2.1 – Illustration de la notion de degré relatif.

2.3 Dynamique interne

Dans le cas où la somme des degrés relatifs de toutes les composantes de la sortie est inférieure à la différence entre les dimensions du vecteur d'état et du vecteur de sortie (qui est aussi dans notre cas celle du vecteur de commande), la dynamique des sorties n'est pas représentative de l'ensemble de la dynamique du système. On dit que le système présente une dynamique interne, relativement à ses sorties. Ainsi, si l'objectif de commande consiste à faire suivre aux sorties une certaine trajectoire, il conviendra de vérifier quelles en sont les conséquences pour la dynamique interne.

Exemple : Afin d'illustrer cette notion, considérons l'exemple classique d'un pendule inversé tel que représenté sur la figure 2.2. Les équations de la mécanique permettent

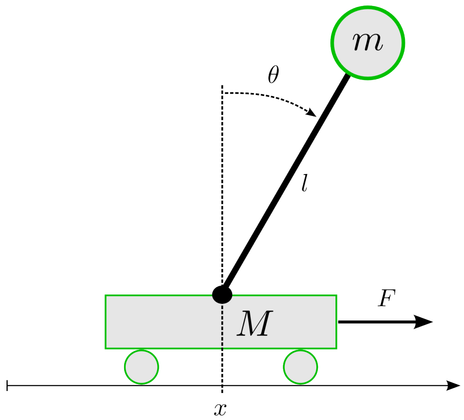


FIGURE 2.2 – Schéma du pendule inversé

d'obtenir pour le système la représentation d'état non linéaire suivante :

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x & \dot{x} & \theta & \dot{\theta} \end{pmatrix}^T \quad \underline{U} = \begin{pmatrix} F \end{pmatrix} \quad \underline{Y} = \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

$$\dot{\underline{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \frac{F + ma\dot{\theta}^2 - mg\sin(\theta)\cos(\theta)}{M + m\sin^2(\theta)} \\ \dot{\theta} \\ \frac{-F - ma\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + (M+m)g\sin\theta}{a\left(M + m\sin^2(\theta)\right)} \end{pmatrix} \tag{2.3.2}$$

Le calcul du degré relatif de la sortie z conduit à un résultat de 1. La différence entre la dimension du vecteur d'état et celui de la sortie étant de 3, le système possède donc une dynamique interne. Cela signifie que si l'on se contente de s'intéresser à la relation entre la position du chariot et la force F, nous occultons une partie de la dynamique du système, en l'occurrence la dynamique du pendule et au cours de la commande du chariot, celui-ci a toutes les chances de tomber.

2.4 Point d'équilibre, trajectoire de référence

Définition 2.2 *Un point d'équilibre pour un système dynamique est défini comme un couple de vecteurs* $(\underline{X}_e, \underline{U}_e) \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *annulant l'équation de dynamique,* i.e. *:*

$$f\left(t, \underline{X}_e, \underline{U}_e\right) = \underline{0}^n \tag{2.4.1}$$

Il découle de cette définition que si $(\underline{X}_e, \underline{U}_e)$ est un point d'équilibre et qu'à l'instant t_0, $\underline{X}(t_0) = \underline{X}_e$, alors, quel que soit $t \geq t_0$, $\underline{X}(t) = \underline{X}_e$, si le système atteint un point d'équilibre, il y reste.

Il pourra être utile de définir des comportements de référence pour un système dynamique. Ceci se traduit par la définition d'une trajectoire de référence comme étant un couple de fonctions du temps $(\underline{X}_r(t), \underline{U}_r(t)) \in (\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m)$ vérifiant identiquement l'équation de dynamique, *i.e.* :

$$\dot{\underline{X}}_r(t) = f\left(t, \underline{X}_r(t), \underline{U}_r(t)\right) \tag{2.4.2}$$

De la même façon que pour le point d'équilibre, la définition de la trajectoire de référence implique que, dans un monde parfait, c'est-à-dire en l'absence de perturbation et d'erreur de modélisation, si l'état du système se trouve à un instant donné sur la trajectoire de référence, il y reste tant que l'entrée reste égale à l'entrée de référence. Un point d'équilibre peut être vu comme un cas particulier d'une trajectoire de référence.

2.5 Linéarisation

Une méthode utilisée pour l'étude des propriétés des systèmes dynamiques non linéaires consiste en l'étude locale du linéarisé de la représentation d'état. Soit $(\underline{X}_r, \underline{U}_r)$ une trajectoire de référence. En notant $\delta\underline{X} = \underline{X} - \underline{X}_r$ et $\delta\underline{U} = \underline{U} - \underline{U}_r$ les écarts de trajectoire et de commande, un développement au premier ordre en série de Taylor conduit à

$$\delta\dot{\underline{X}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{X}}(\underline{X}_r, \underline{U}_r)\delta\underline{X} + \frac{\partial f}{\partial \underline{U}}(\underline{X}_r, \underline{U}_r)\delta\underline{U} + O(\delta\underline{X}^2, \delta\underline{U}^2) \tag{2.5.1}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, la représentation d'état obtenue est linéaire et les méthodes propres aux systèmes linéaires peuvent être appliquées.

Exemple : Soit un satellite en orbite géostationnaire autour de la Terre dont on considère la trajectoire dans le plan équatorial. $r(t)$ et $\theta(t)$ représentent respectivement la distance satellite-Terre et l'angle que fait le satellite avec un axe de référence contenu dans le plan. $u_r(t)$ et $u_\theta(t)$ désignent les poussées radiale et tangentielle des moteurs du satellite.

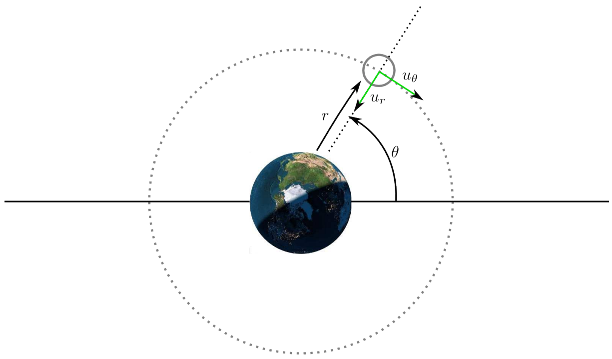


FIGURE 2.3 – Schéma du satellite.

Une représentation d'état du système utilisant le vecteur d'état $\underline{X} = \begin{pmatrix} r & \theta & \dot{r} & \dot{\theta} \end{pmatrix}^T$ est donnée par

$$\dot{\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ r\dot{\theta}^2 - \frac{\beta}{r^2} + u_r \\ -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{u_\theta}{r} \end{pmatrix} \tag{2.5.2}$$

où β est une constante positive. Le système ne possède pas de point d'équilibre, le point 0^4, centre de la Terre n'ayant pas de sens physique. En revanche la trajectoire :

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} r_0 \\ \omega t \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, U_r(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{\beta}{r_0^3}} \tag{2.5.3}$$

vérifie identiquement l'équation de dynamique et constitue donc une trajectoire de référence pour le système. En posant $\delta\underline{X} = \underline{X} - \underline{X}_r$, $\delta\underline{U} = \underline{U}$, en effectuant un développement au premier ordre en série de Taylor de l'équation de dynamique et en négligeant les termes d'ordre supérieur, il vient :

$$\delta\dot{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2r_0\omega \\ 0 & 0 & -2\frac{\omega}{r_0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta\theta \\ \delta\dot{r} \\ \delta\dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_r \\ \delta u_\theta \end{pmatrix} \tag{2.5.4}$$

qui constitue une représentation d'état linéaire de la dynamique des écarts à la trajectoire de référence.

2.6 Stabilité

La stabilité d'un système dynamique est une notion complexe qui caractérise la tendance du système à s'éloigner ou à se rapprocher d'un point d'équilibre (ou d'une trajectoire de référence) lorsqu'il en est écarté.

La notion de stabilité est généralement définie pour les systèmes dit *autonomes*, *i.e.* les systèmes sans commande. Lorsqu'on dispose d'un système non autonome et que l'on met en place une commande par contre-réaction, le système devient de fait autonome. Pour les systèmes non autonomes, il existe une notion dite de *stabilité entrées bornées - sorties bornées*.

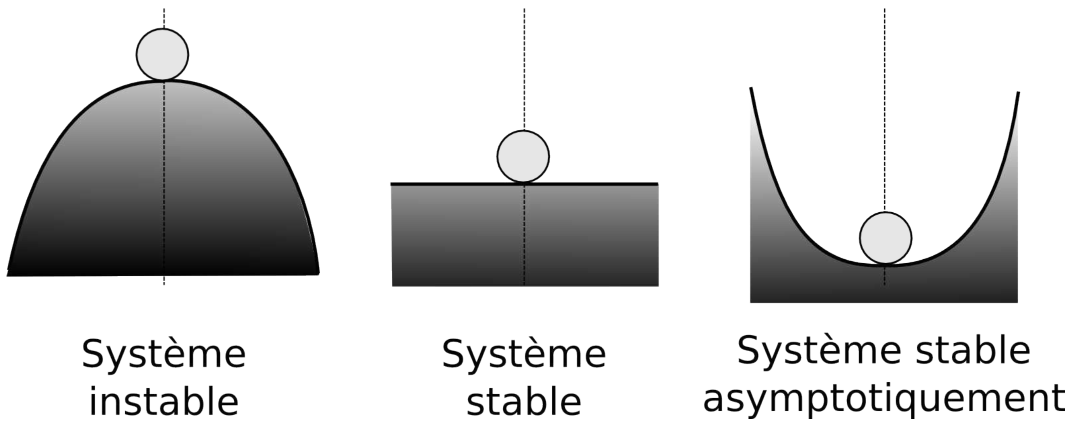


FIGURE 2.4 – Illustration intuitive de la notion de stabilité.

De manière intuitive, un système est dit :

- *instable* autour d'une position d'équilibre si, écarté de cette dernière, il continue son mouvement ;
- *stable* autour d'une position d'équilibre si, écarté de cette dernière, il s'arrête à proximité ;
- *asymptotiquement stable* autour d'une position d'équilibre si, écarté de cette dernière, il tend à y revenir et à s'y arrêter.

L'exemple d'une bille roulant avec frottement sur un contour parabolique comme représenté sur la figure 2.4, permet d'illustrer la définition intuitive ci-dessus.

Définition 2.3 *Soit un système dynamique autonome d'équation d'état $\dot{\underline{X}} = f(\underline{X})$. Un point d'équilibre $\underline{X}_e$ est dit* stable *(au sens de Lyapunov) si et seulement si $\forall \epsilon \geq 0$, il existe $V_{X_e}(\epsilon)$, un ouvert non vide de $\underline{X}_e$ tel que :*

$$\underline{X}(t_0) \in V_{X_e}(\epsilon) \Rightarrow |\underline{X}(t) - \underline{X}_e| \leq \epsilon, \forall t \geq 0 \tag{2.6.1}$$

Dans le cas contraire, le point d'équilibre est dit *instable*. Lorsqu'il y a stabilité au sens de Lyapunov autour d'un point d'équilibre $\underline{X}_e$, la trajectoire de l'état du système reste arbitrairement proche de $\underline{X}_e$, si son état initial est déjà suffisamment proche de $\underline{X}_e$ (voir figure 2.5).

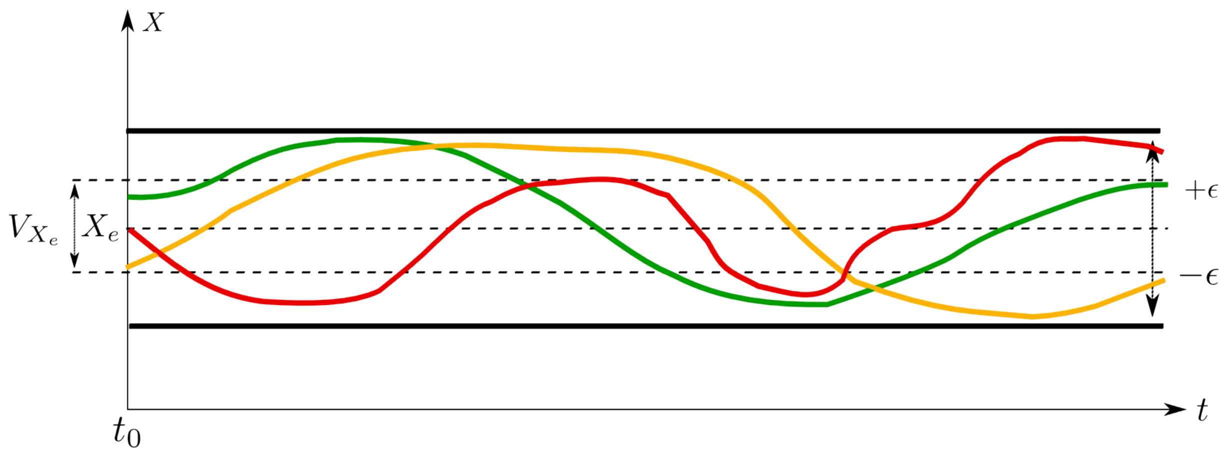


FIGURE 2.5 – Stabilité au sens de Lyapunov.

Définition 2.4 *Un point d'équilibre* $\underline{X}_e$ *est dit* asymptotiquement stable *s'il est stable et si :*

$$\exists \alpha \geq 0 : |\underline{X}(t_0) - \underline{X}_e| \leq \alpha \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \underline{X}(t) = \underline{X}_e \tag{2.6.2}$$

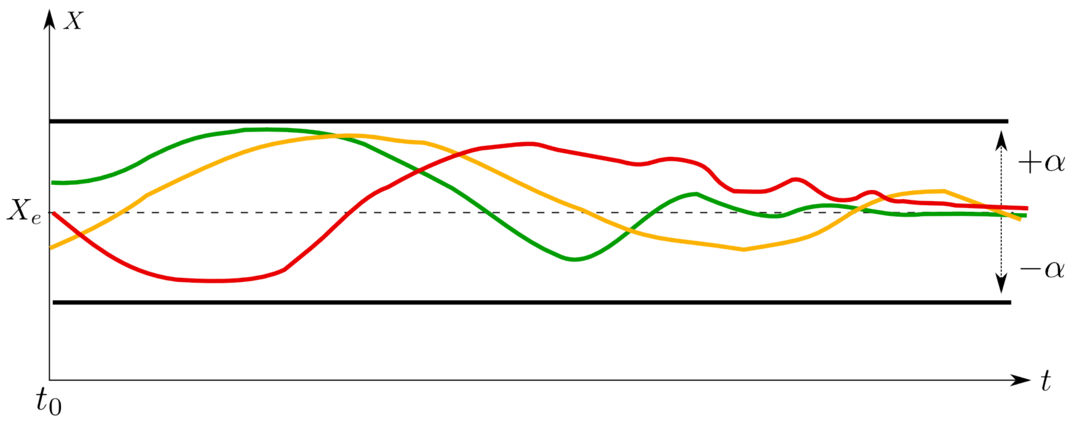


FIGURE 2.6 – Stabilité asymptotique.

La stabilité asymptotique, comme illustrée sur la figure 2.6, signifie que non seulement le point d'équilibre $\underline{X}_e$ est stable mais que de plus il existe un voisinage non nul du point d'équilibre tel que toute trajectoire issue d'un état initial $\underline{X}(t_0)$ appartenant à ce voisinage tend vers $\underline{X}_e$ quand t tend vers l'infini.

La notion de stabilité asymptotique ne donne pas d'indication sur la vitesse de convergence de l'état du système vers le point d'équilibre. Cette dernière constituant une information importante pour l'automaticien, on introduit la notion de *stabilité exponentielle* (voir figure 2.7).

Définition 2.5 *Un point d'équilibre* $\underline{X}_e$ *est dit* exponentiellement stable *s'il est asymptotiquement stable et si :*

$$\exists \beta \geq 0 : |\underline{X}(t) - \underline{X}_e| \leq e^{-\beta t} \tag{2.6.3}$$

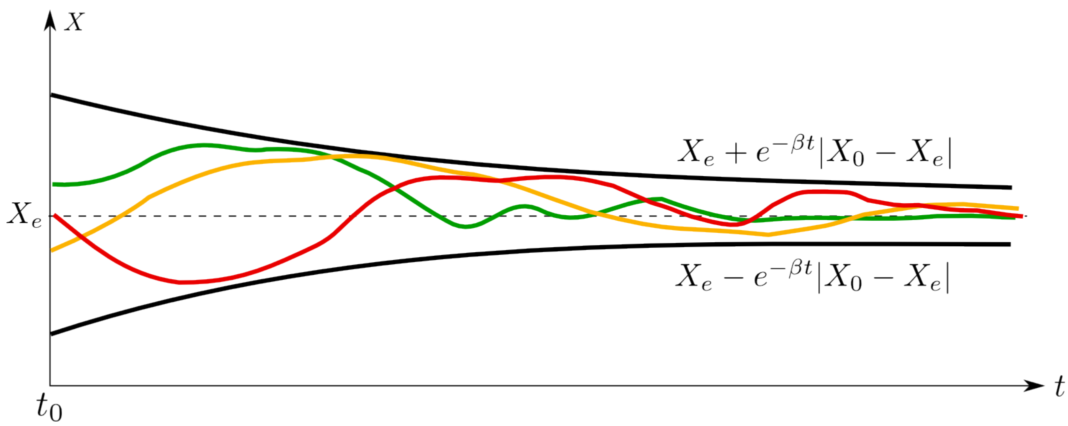


FIGURE 2.7 – Stabilité exponentielle.

Définition 2.6 *Si la propriété de stabilité vers un état d'équilibre est vérifiée quel que soit l'état initial* $\underline{X}(t_0)$*, ce point d'équilibre est dit* globalement stable.

Souvent, à défaut de pouvoir établir la stabilité globale d'un point d'équilibre, on pourra se contenter de déterminer des voisinages du point d'équilibre, les plus grands possibles, tels que la propriété de stabilité soit satisfaite. Ceci conduira à définir des domaines d'attraction et de stabilité autour d'un point d'équilibre.

Méthode de Lyapunov La stabilité d'un système dynamique autour d'une position d'équilibre ou d'une trajectoire de référence peut être établie ou infirmée en résolvant numériquement la représentation d'état pour différentes conditions initiales. Cette approche étant particulièrement lourde à mettre en pratique, il existe un certain nombre de résultats théoriques permettant d'analyser directement la stabilité d'un système à partir des propriétés du modèle mathématique de sa dynamique. Une contribution majeure a été apportée dans ce domaine dès 1892 par le savant russe Alexandre Mikhalovich Lyapunov. Lyapunov a introduit la majorité des concepts de base et des résultats théoriques concernant la stabilité des systèmes obéissant à des modèles différentiels de dimension finie. Les travaux de Lyapunov n'ont été reconnus et mis en œuvre qu'à partir de 1960, lorsque la notion de représentation d'état a été adoptée par les automaticiens et les cybernéticiens.

Définition 2.7 *Une fonction* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ *possédant les propriétés suivantes :*

- *L est continûment dérivable ;*
- $L(\underline{0}) = 0, \quad L(\underline{X}) > 0 \quad \forall \underline{X} \neq \underline{0}$ *;*
- *il existe deux fonctions scalaires* $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *et* $b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$*, continues, monotones, croissantes telles que* $a(0) = b(0)$ *et* $\forall \underline{X} \in \mathbb{R}^n a(|\underline{X}|) \leq L(\underline{X}) \leq b(|\underline{X}|)$

est appelée fonction candidate de Lyapunov.

Une fonction candidate de Lyapunov $L(\underline{X})$ permet de définir des courbes d'équation $L(\underline{X})$ = constante, appelées *équipotentielles de Lyapunov* (voir figure 2.8), délimitant des domaines convexes autour de l'origine tels que si $D_1 = \{\underline{X} | V(\underline{X}) < c_1\}$ et $D_2 = \{\underline{X} | V(\underline{X}) < c_2\}$, alors $c_1 < c_2 \Rightarrow D_1 \subset D_2$.

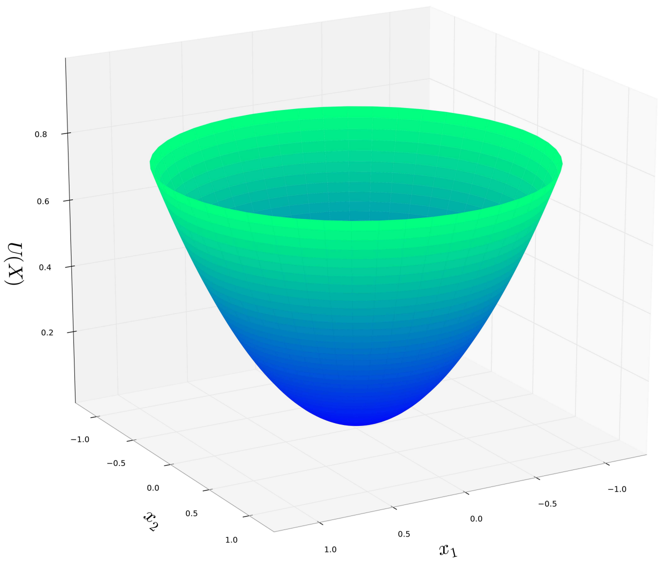


FIGURE 2.8 – Équipotentielles de Lyapunov.

Théorème 2.1 *S'il existe une fonction scalaire $L(\underline{X})$ dont les dérivées partielles premières sont continues et un voisinage V_{X_e} du point d'équilibre $\underline{X}_e$ tels que :*

- *L est une fonction candidate de Lyapunov ;*

– *L_f, une dérivée de $U(\underline{X})$ le long des trajectoires de $\dot{\underline{X}} = f(\underline{X})$, est localement semi-définie négative dans tout le voisinage V_{X_e}*

alors $\underline{X}_e$ est un point d'équilibre stable.

Exemple : Soit le système dynamique non linéaire autonome défini par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 2\right) - 4x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_2\left(x_1^2 + x_2^2 - 2\right) + 4x_2x_1^2 \end{cases}$$

On vérifie que le point $X_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point d'équilibre. La fonction $L(\underline{X}) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$ est une fonction candidate de Lyapunov. La dérivée de Lyapunov de cette fonction se calcule comme

$$L_f = x_1\dot{x}_1\left(x_1, x_2\right) + x_2\dot{x}_2\left(x_1, x_2\right) \tag{2.6.4}$$
$$L_f = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 - 2\right) \tag{2.6.5}$$

L_f est semi définie négative dans la boule ouverte $B = \{\underline{X}|x_1^2 + x_2^2 < 2\}$ (délimitée par l'équipotentielle L(x) $=$ 1). X_e est donc localement asymptotiquement stable dans la boule ouverte B.

Stabilité des systèmes linéaires

Dans le cas des systèmes linéaires, la stabilité est une propriété intrinsèque du système. En effet, le système sera stable ou instable dans tout l'espace du vecteur d'état. Un système dynamique linéaire possède un unique point d'équilibre à l'origine si la matrice de dynamique est de rang plein. Lorsque la matrice de dynamique n'est pas inversible, le système possède une infinité de points d'équilibre, constituant un sous-espace vectoriel, à savoir le noyau de la matrice de dynamique. Comme mentionné au chapitre 2.1, il est possible d'obtenir une expression analytique de la trajectoire d'un système linéaire invariant dans le temps. L'évolution du vecteur d'état est une combinaison linéaire des modes dynamiques du système, qui sont caractérisés par les valeurs propres de la matrice de dynamique. Ainsi le système sera asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres ont une partie réelle strictement négative. Rappelons que les valeurs propres de la matrice de dynamique sont aussi les racines du polynôme caractéristique de la matrice de dynamique. Un tel polynôme dont les racines sont à partie réelle négative est dit *Hurwitz*.

Exemple : Un exemple numérique de la dynamique latérale linéarisée d'un avion volant en croisière ([Mora-Camino, 2005]) est donné par :

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ r \\ p \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.056 & -1 & 0 & 0.04 \\ 0.46 & -0.115 & -0.032 & 0 \\ -0.995 & 0.23 & -0.465 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ r \\ p \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0.02 \\ 0 & -0.58 \\ -0.9 & 0.34 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_a \\ \delta_d \end{pmatrix} \tag{2.6.6}$$

où β représente l'angle de dérapage, p et r les vitesses angulaires de roulis et de lacet, ϕ l'angle de roulis et δ_a et δ_d les déflections des ailerons et de la dérive. Les quatre valeurs propres de la matrice de dynamique sont

$$\lambda_s = -0.0012 \quad \lambda_r = -0.5629 \quad \lambda_{rh1} = -0.0359 + 0.7147i \quad \lambda_{rh2} = -0.0359 - 0.7147i$$

et caractérisent ses modes propres naturels (mode *spirale*, mode *roulis pur* et mode *roulis hollandais*). On constate que ces quatre valeurs propres sont à partie réelle négative, ce qui confirme la stabilité naturelle de l'avion.

Une façon d'analyser partiellement la dynamique d'un système non linéaire sera d'étudier la stabilité du système linéarisé autour d'un point d'équilibre, voire d'une trajectoire de référence.

2.7 Commandabilité, gouvernabilité

La *commandabilité* d'un système dynamique est une propriété indiquant la possibilité d'amener son vecteur d'état en temps fini et énergie finie en tout point arbitraire à distance finie dans l'espace d'état. Cette propriété est fondamentale pour envisager la synthèse d'une loi de commande.

Commandabilité des systèmes linéaires

Définition 2.8 *Soit un système linéaire de représentation d'état $\underline{\dot{X}} = A\underline{X} + B\underline{U}$. Le système (ou la paire (A, B)) est dit* commandable *si, étant donné un instant $t_1 > 0$ et deux points quelconques de l'espace d'état $\underline{X}_0$ et $\underline{X}_1$, il existe une commande fonction du temps $\underline{U}(t) : [0, t_1] \to \mathbb{R}^m$, continue par morceaux, telle que la trajectoire résultante du système ayant pour condition initiale $\underline{X}(0) = \underline{X}_0$ l'amène à l'instant t_1 à l'état $\underline{X}(t_1) = \underline{X}_1$.*

Théorème 2.2 *Une condition nécessaire et suffisante établie par Kalman pour qu'un système linéaire invariant dans le temps soit commandable est que la matrice par blocs*

$$C_c = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

soit de rang n (la dimension du vecteur d'état). La matrice C_c est appelée matrice de commandabilité*.*

La démonstration de ce théorème est disponible par exemple dans [Lévine, 2004].

Lorsqu'un système n'est pas commandable, c'est-à-dire quand il n'est pas possible de ramener son vecteur d'état à une position arbitraire en un temps fini, il peut néanmoins être intéressant d'étudier la possibilité de maîtriser son vecteur de sortie.

Définition 2.9 *Soit un système linéaire de représentation d'état $\dot{\underline{X}} = A\underline{X} + B\underline{U} \quad \underline{Y} = C\underline{X}$. Le système (ou le triplet (A, B, C)) est dit* gouvernable *si, étant donné un instant $t_1 > 0$ et deux points quelconques de l'espace de sortie $\underline{Y}_0$ et $\underline{Y}_1$, il existe une commande fonction du temps $\underline{U}(t) : [0, t_1] \to \mathbb{R}^m$, continue par morceaux, telle que la trajectoire résultante de la sortie du système ayant pour condition initiale $\underline{Y}(0) = \underline{Y}_0$ l'amène à l'instant t_1 en $\underline{Y}(t_1) = \underline{Y}_1$.*

Théorème 2.3 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire invariant dans le temps soit gouvernable est que la matrice par blocs*

$$C_g = \begin{pmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \end{pmatrix}$$

soit de rang r (la dimension du vecteur de sortie). La matrice C_g est appelée matrice de gouvernabilité*.*

Commandabilité des systèmes non linéaires

Pour les systèmes non linéaires, il existe plusieurs approches de la notion de commandabilité. La plus proche de celle définie pour les systèmes linéaires est la *commandabilité au premier ordre.*

Commandabilité au premier ordre

Définition 2.10 *Soit un système dynamique non linéaire d'équation de dynamique $\dot{\underline{X}} = f(\underline{X}, \underline{U})$ et une trajectoire de référence $(\underline{X}_r(t), U_r(t))$. Le système linéaire représentant les écarts à la trajectoire de référence est défini comme au paragraphe 2.4 par*

$$\delta\dot{\underline{X}} = A\delta\underline{X} + B\delta\underline{U}, \quad A = \frac{\partial f}{\partial \underline{X}}(\underline{X}, \underline{U}), \quad B = \frac{\partial f}{\partial \underline{U}}(\underline{X}, \underline{U}) \tag{2.7.1}$$

Le système non linéaire est dit commandable au premier ordre *si la paire (A, B) est commandable.*

Commandabilité locale

Définition 2.11 *Le système non linéaire d'équation de dynamique* $\dot{\underline{X}} = f(\underline{X}, \underline{U})$ *est dit* commandable localement *au point d'équilibre* $(\underline{X}_e, U_e)$ *si pour tout réel* $\epsilon > 0$*, il existe un réel* $\eta > 0$ *tel que, pour chaque couple de points* $(\underline{X}_0, \underline{X}_1)$ *suffisamment proches du point d'équilibre,* i.e. $|\underline{X}_0 - \underline{X}_e| < \eta$ *et* $|\underline{X}_1 - \underline{X}_e| < \eta$*, il existe une fonction* $\underline{U}(t)$ *continue par morceaux sur* $[0, \epsilon]$ *telle que* $|\underline{U}(t)| < \epsilon \quad \forall t \in [0, \epsilon]$ *et* $\int_0^\epsilon f(\underline{X}(\tau), \underline{U}(\tau)) d\tau = \underline{X}_1$

Théorème 2.4 *Si un système non linéaire est commandable au premier ordre en un point* $(\underline{X}_r, \underline{U}_r)$*, il est localement commandable en ce même point.*

Néanmoins, un système non linéaire peut être commandable alors que son linéarisé ne l'est pas.

Exemple : Considérons un chariot évoluant par roulement sans glissement dans le plan et dont les roues avant sont directrices et motrices (voir figure 2.9) :

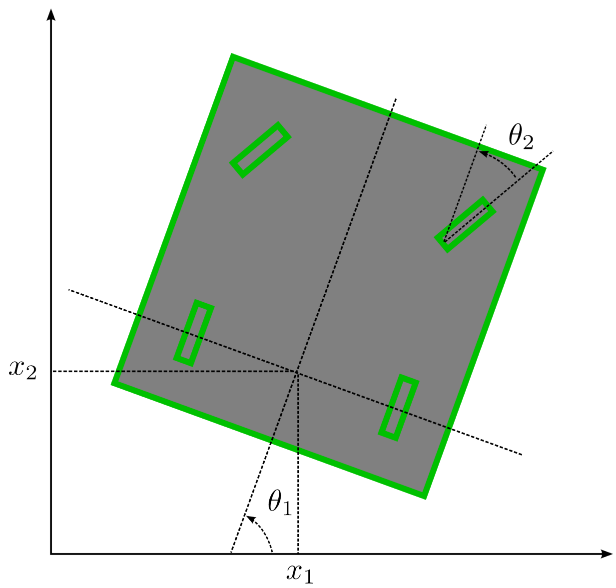


FIGURE 2.9 – Schéma du chariot

La position du chariot évolue suivant les équations :

$$\dot{x}_1 = \sin\theta_1 \cos\theta_2 u_1 \tag{2.7.2}$$

$$\dot{x}_2 = -\cos\theta_1 \cos\theta_2 u_1 \tag{2.7.3}$$

$$\dot{\theta}_1 = \sin\theta_2 \frac{u_1}{l} \tag{2.7.4}$$

$$\dot{\theta}_2 = u_2 \tag{2.7.5}$$

où u_1 est la vitesse de propulsion et u_2 la vitesse de braquage des roues avant, on prend $l = 1$.

Un point d'équilibre du système est tel que $\underline{X}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ et le linéarisé autour de ce point d'équilibre s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \\ \delta\dot{\theta}_1 \\ \delta\dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin\theta_1 \cos\theta_2 & 0 \\ -\cos\theta_1 \cos\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{pmatrix} \tag{2.7.6}$$

Ce linéarisé n'est pas commandable au sens de Kalman alors qu'à l'évidence le système non linéaire est commandable dans le plan, en faisant abstraction des limitations de braquage en position et vitesse.

Avant de passer à l'analyse des conditions de commandabilité des systèmes non linéaires, il est intéressant d'introduire les notations de Lie pour exprimer le critère de commandabilité des systèmes linéaires (théorème 2.2).

Ainsi, considérant un système mis sous la forme affine :

$$\dot{\underline{X}} = f(\underline{X}) + g(\underline{X})\underline{U} \tag{2.7.7}$$

On définit le *crochet de Lie* associé à f et g par :

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial \underline{X}} f - \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} g \tag{2.7.8}$$

ou encore

$$[f, g] = \left(\mathrm{ad}_f^1, g\right) \tag{2.7.9}$$

On peut définir de façon récurrente des crochets de Lie d'ordres supérieurs :

$$\left(\mathrm{ad}_f^2, g\right) = \left[f, \left(\mathrm{ad}_f^1, g\right)\right] \tag{2.7.10}$$

$$\vdots \tag{2.7.11}$$

$$\left(\mathrm{ad}_f^n, g\right) = \left[f, \left(\mathrm{ad}_f^{n-1}, g\right)\right] \tag{2.7.12}$$

Dans le cas linéaire :

$$f(\underline{X}) = A\underline{X} \qquad \text{et} \qquad g(\underline{X}) = B \tag{2.7.13}$$

La matrice de commandabilité C_c devient alors :

$$C_c = \begin{pmatrix} B & \left(\mathrm{ad}_f^1, B\right) & \left(\mathrm{ad}_f^2, B\right) & \dots & \left(\mathrm{ad}_f^{n-1}, B\right) \end{pmatrix} \tag{2.7.14}$$

Écrivant $B\underline{U} = \sum_{i=1}^{m} \underline{B}_i u_i$, C_c se réécrit aussi :

$$C_c = \Big(\underline{B}_1 \quad \dots \quad \underline{B}_n \quad \left(\mathrm{ad}_f^1, \underline{B}_1\right) \quad \dots \quad \left(\mathrm{ad}_f^1, \underline{B}_n\right) \quad \dots \quad \left(\mathrm{ad}_f^{n-1}, \underline{B}_1\right) \quad \dots \quad \left(\mathrm{ad}_f^{n-1}, \underline{B}_n\right)\Big) \tag{2.7.15}$$

Dans le cas non linéaire très général où la représentation d'état s'écrit sous la forme affine additive :

$$\underline{\dot{X}} = f(\underline{X}) + \sum_{i=1}^{m} g_i(\underline{X}) u_i \tag{2.7.16}$$

On introduit la *distribution* au sens de la géométrie différentielle [Slotine et Li, 1991] associée à cette représentation :

$$C_c = \Big(g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_n \quad \left(\mathrm{ad}_f^1, g_1\right) \quad \dots \quad \dots \quad \left(\mathrm{ad}_f^{n-1}, g_1\right) \quad \dots \quad \left(\mathrm{ad}_f^{n-1}, g_n\right)\Big) \tag{2.7.17}$$

La condition de commandabilité locale en x_0 devient alors :

Théorème 2.5 *Pour tout voisinage V de $\underline{X}_0$ de $\mathbb{R}^{\kappa}$, la distribution $C(\underline{X})$ est de rang n quel que soit $\underline{X}$ dans V.*

Exemple : Revenons au cas du mobile plan, on a ($f(\underline{X}) = \underline{0}$) :

$$C_c(\underline{X}) = \begin{pmatrix} \sin\theta_1 \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_1 \sin\theta_2 & \sin\theta_1 \\ -\cos\theta_1 \cos\theta_2 & 0 & -\cos\theta_1 \sin\theta_2 & \cos\theta_1 \\ \sin\theta_2 & 0 & -\cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7.18}$$

dont le déterminant est égal à $\sin 2\theta_1$, la matrice $C_c(\underline{X})$ est donc régulière sur $\mathbb{R}^4$ et le système est bien commandable.

Remarquons que le formalisme de Lie peut être étendu au critère d'observabilité des systèmes linéaires et non linéaires.

2.8 Conclusion

Longtemps, l'étude des systèmes non linéaires s'est résumée à l'étude de leur linéarisés autour de certains points ou trajectoires, conduisant à des analyses partielles, et pour leur commande, à des résultats parfois décevants.

Aujourd'hui, les progrès de la géométrie différentielle ont conduit à la définition de nouveaux concepts pour analyser la dynamique des systèmes non linéaires et prédire leur comportement. Ceci a conséquemment débouché sur le développement de nouvelles méthodes de synthèse de lois de commandes pour les systèmes non linéaires. Cette question est abordée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Commande des systèmes dynamiques non linéaires

3.1 Introduction

La synthèse de loi de commande pour les systèmes linéaires a été très fortement développée depuis les années 1970 dans le cadre de l'automatique dite *moderne* ([Kalman, 1960], [Friedland, 1987]). Elle a donné lieu à différentes techniques de commande par retour d'état : commande modale avec placement de pôles et de vecteurs propres, commande linéaire quadratique, etc. Ces techniques ont été adaptées à la commande des systèmes non linéaires en général par utilisation de techniques de séquencement de gains qui considèrent l'évolution du système au voisinage d'une succession de points d'équilibres pour lesquels une loi de commande linéaire a été auparavant élaborée pour le modèle linéarisé du système. Cette méthode est déjà extrêmement lourde, et son extension au cas de la commande des systèmes non linéaires paramétrés devient quasiment impossible. Depuis une vingtaine d'années, les théoriciens de l'Automatique ([isi,], [Singh, 2009], [Fliess, 1986], Sira, Marquez, etc.) ont développé de nouvelles méthodes pour la synthèse directe de lois de commande pour les systèmes non linéaires. Ces dernières méthodes ont connu de nombreuses applications, notamment dans le domaine de la robotique terrestre et spatiale. Ces techniques ont aussi soulevées un vif intérêt dans le domaine de l'Aéronautique militaire puis civile.

Comme on s'intéresse plus particulièrement dans cette thèse au problème de suivi de trajectoire (*trajectory tracking*) pour les sorties d'un système non linéaire, dans ce chapitre seront présentées les principales méthodes de synthèse de loi de guidage non linéaires en soulignant leurs avantages et leurs limitations. Ceci nous amènera à considérer principalement les méthodes dites de commande non linéaire inverse, de commande par *Backstepping* et de commande différentiellement plate.

3.2 Commande non linéaire inverse

La méthode de commande non linéaire inverse, connue en anglais sous le nom de *Feedback Linearisation* ou *Dynamic Inversion* a été une des premières méthodes de contrôle non linéaire appliquée au domaine aéronautique ([Shen, 1995], [Ostroff et Bacon, 1999], [Ghosh et C., 2000], [Miquel, 2004], [Asep *et al.*, 1993]).

Le principe de cette méthode consiste à effectuer un changement de variables $Z = Z(X)$ où Z est un difféomorphisme dans un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^n$ et à utiliser une loi de commande $u = u(X, v)$ telle que le système $[Z, v]$ soit linéaire ou partiellement linéaire et que la commande v permette de guider le système vers une trajectoire désirée.

3.2.1 Définition du problème de commande

Le problème de commande standard de la méthode d'inversion dynamique est le suivant.

Soit un système dynamique non linéaire carré ($dim(u) = dim(y)$) sous forme affine de commande

$$\begin{cases} \dot{\underline{X}} & = & f(\underline{X}) + g(\underline{X})\underline{U} \quad X \in \mathbb{R}^n \quad U \in \mathbb{R}^m \\ \underline{Y} & = & h(\underline{X}) \qquad \underline{Y} \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{3.2.1}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sont des fonctions non linéaires. Les sorties du système admettent au voisinage d'un point de fonctionnement $\underline{X}_0$ des degrés relatifs $\begin{pmatrix} r_1 & \ldots & r_m \end{pmatrix}$. Ces sorties obéissent à des équations telles que :

$$y_i{}^{(r_i+1)} = a_i(\underline{X}) + B_i(\underline{X})\underline{U} \quad i \in 1 \ldots m$$

L'objectif est que les sorties rejoignent une trajectoire de référence en suivant une dynamique linéaire stable, l'ordre de la dynamique de chacune des sorties étant fixé par le degré relatif de celle-ci, soit :

$$\begin{pmatrix} y_1{}^{(r_1+1)} \\ \vdots \\ y_m{}^{(r_m+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=r_1}^{1} \alpha_{1i} y_1{}^{(i)} + \alpha_{10}(y_1 - y_{1c} \\ \vdots \\ \sum_{i=r_m}^{1} \alpha_{mi} y_m{}^{(i)} + \alpha_{m0}(y_m - y_{mc} \end{pmatrix} \tag{3.2.2}$$

où les polynômes $\lambda^{r_{j+1}} - \sum_{j=0}^{r_j} \alpha_{ji} \lambda^j \quad j = 1..m$ admettent des racines à partie réelle négative.

Dans les cas où la matrice $B = \begin{pmatrix} B_1(\underline{X}) & \dots & B_m(\underline{X}) \end{pmatrix}^T$ est inversible, il est possible de calculer analytiquement une loi de commande qui confère aux sorties des dynamiques linéaires prédéfinies. L'expression générale de cette loi de commande est :

$$\underline{U} = B(\underline{X})^{-1} \left(\begin{pmatrix} \sum_{i=r_1}^{1} \alpha_{1i} {y_1}^{(i)} + \alpha_{10}(y_1 - y_{1c} \\ \vdots \\ \sum_{i=r_m}^{1} \alpha_{mi} {y_m}^{(i)} + \alpha_{m0}(y_m - y_{mc} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1(\underline{X}) \\ \vdots \\ a_m(\underline{X}) \end{pmatrix} \right) \tag{3.2.3}$$

L'approche proposée ici conduit, comme le souligne l'équation 3.2.2, à un découplage théorique de la dynamique des sorties, ce qui peut être un objectif de commande faisant partie du cahier des charges. Par exemple, en ce qui concerne le pilotage latéral d'un véhicule à ailes fixes, on souhaite souvent découpler le dérapage aérodynamique (β) de l'inclinaison latérale (ϕ). En effet, pour un avion, on cherche à maintenir le dérapage aérodynamique aussi petit que possible au cours d'une mise en virage.

Pour ce qui concerne le suivi de trajectoire par les sorties du système, celui-ci sera possible si la dynamique choisie pour les sorties du système est découplée (*i.e.* beaucoup plus rapide) que la dynamique de la trajectoire de référence.

Néanmoins, pour que ces objectifs soient effectivement réalisés, il convient de satisfaire un certain nombre de conditions :

- Les actionneurs ne doivent pas être amenés en saturation (en position comme en vitesse), ce qui conduirait à une dégradation des performances.
- Le système ne doit pas présenter de dynamique interne. Si ce n'est pas le cas, la dynamique interne doit être stable sinon la survie du système sera compromise.
- Le modèle de dynamique utilisé pour réaliser l'inversion doit être suffisamment représentatif de la dynamique que l'on prétend inverser, sinon une dérive aura tendance à s'établir.

3.2.2 Exemple : véhicule VTOL plan

Considérons un véhicule aérien composé de deux rotors solidaires d'un bras et astreint à se déplacer dans un plan vertical. La masse du véhicule est notée m, son moment d'inertie en tangage J, les poussées des rotors F_1, F_2 et la distance entre les points d'application de ces dernières et le centre de gravité l comme décrit sur la figure 3.1.

En notant x, y les coordonnées du centre d'inertie du véhicule, θ l'inclinaison du véhicule et appliquant les lois de Newton, il vient

$$m\ddot{x} = -sin(\theta)\,(F_2 + F_1) \tag{3.2.4}$$

$$m\ddot{z} = cos(\theta)\,(F_2 + F_1) - mg \tag{3.2.5}$$

$$J\ddot{\theta} = l\,(F_2 - F_1) \tag{3.2.6}$$

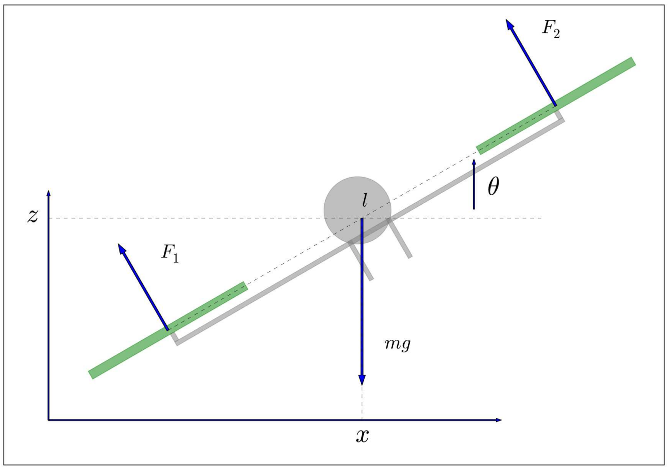


FIGURE 3.1 – Schéma du véhicule plan à poussée vectorielle.

En réalisant le changement de variables de commande suivant :

$$u_t = \frac{1}{m}(F_1 + F_2) \tag{3.2.7}$$

$$u_d = \frac{l}{J}(F_2 - F_1) \tag{3.2.8}$$

les équations précédentes se réécrivent

$$\ddot{x} = -sin(\theta)u_t \tag{3.2.9}$$

$$\ddot{z} = cos(\theta)u_t - g \tag{3.2.10}$$

$$\ddot{\theta} = u_d \tag{3.2.11}$$

ce qui conduit à la représentation d'état non linéaire suivante :

$$X = \begin{pmatrix} x & z & \theta & \dot{x} & \dot{z} & \dot{\theta} \end{pmatrix}^T \qquad U = \begin{pmatrix} u_t & u_d \end{pmatrix}^T \tag{3.2.12}$$

$$\dot{X} = f(X) + g(X)U = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -sin(\theta) & 0 \\ cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t \\ u_d \end{pmatrix} \tag{3.2.13}$$

La dynamique angulaire peut être mise sous la forme

$$\ddot{\theta} = u_d \tag{3.2.14}$$

Le degré relatif de la sortie θ est 1 et il n'y a pas de dynamique interne. La loi de commande

$$u_d = -2\xi_\theta \omega_\theta \dot{\theta} - \omega_\theta^2 (\theta - \theta_c) \tag{3.2.15}$$

permet alors d'imposer à θ une dynamique linéaire stable du second ordre le ramenant vers la valeur de consigne θ_c.

La dynamique de guidage (mouvement du centre de gravité) peut être mise sous la forme

$$\ddot{x} = -\sin(\theta) u_t \tag{3.2.16}$$

$$\ddot{z} = \cos(\theta) u_t - g \tag{3.2.17}$$

Ici encore, la dynamique de guidage présente pour chacune de ses composantes un degré relatif de 1 alors que la dynamique interne, qui est la dynamique angulaire, est supposée déjà stabilisée. Nous allons à nouveau adopter comme objectif de commande une dynamique linéaire du second ordre, stable et découplée avec pour consigne $X_c = \begin{pmatrix} x_c & z_c \end{pmatrix}^T$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\xi_x \omega_x \dot{x} - \omega_x^2 (x - x_c) \\ -2\xi_z \omega_z \dot{z} - \omega_z^2 (z - z_c) \end{pmatrix} \tag{3.2.18}$$

En combinant (3.2.16) et (3.2.18), il vient

$$u_t = \sqrt{\ddot{x}^2 + (\ddot{z} + g)^2} \tag{3.2.19}$$

$$\theta_c = -\mathrm{atan}\left(\frac{\ddot{x}}{\ddot{z} + g}\right) \tag{3.2.20}$$

$$\theta_c = -\mathrm{atan}\left(\frac{-2\xi_x \omega_x \dot{x} - \omega_x^2 (x - x_c)}{-2\xi_z \omega_z \dot{z} - \omega_z^2 (z - z_c) + g}\right) \tag{3.2.21}$$

puis

$$u_d = -2\xi_\theta \omega_\theta \dot{\theta} - \omega_\theta^2 \left(\theta + \mathrm{atan}\left(\frac{-2\xi_x \omega_x \dot{x} - \omega_x^2 (x - x_c)}{-2\xi_z \omega_z \dot{z} - \omega_z^2 (z - z_c) + g}\right)\right) \tag{3.2.22}$$

Les figures 3.2 et 3.3 montrent l'application de cette loi au VTOL soumis à une perturbation de 10 degrés sur son assiette θ à l'instant initial (figure 3.2) puis une erreur de position initiale d'un mètre (figure 3.3). Sur la figure 3.2, on constate que le système revient à la position initiale d'équilibre en moins de 2 secondes sans que les actionneurs ne se mettent en saturation. Ainsi ce temps de réponse correspond à la dynamique choisie en 3.2.18. Cette perturbation de 10 degrés en assiette est déjà assez importante. Elle peut correspondre à l'effet d'une forte turbulence atmosphérique. Sur la figure 3.3, le VTOL plan est écarté de sa position de référence ($\Delta x = 1m$, $\Delta z = 1m$). Le système de guidage

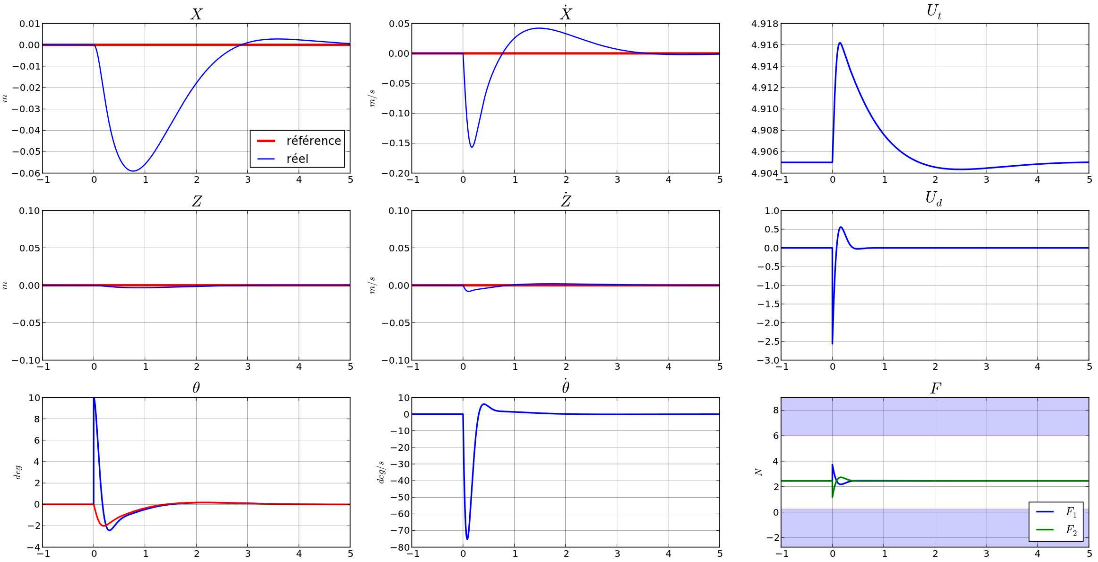


FIGURE 3.2 – Réponse du VTOL plan commandé par une commande de type NLI à une perturbation de 10 degrés en θ. La courbe en rouge sur le graphique de θ correspond à la consigne de la boucle interne.

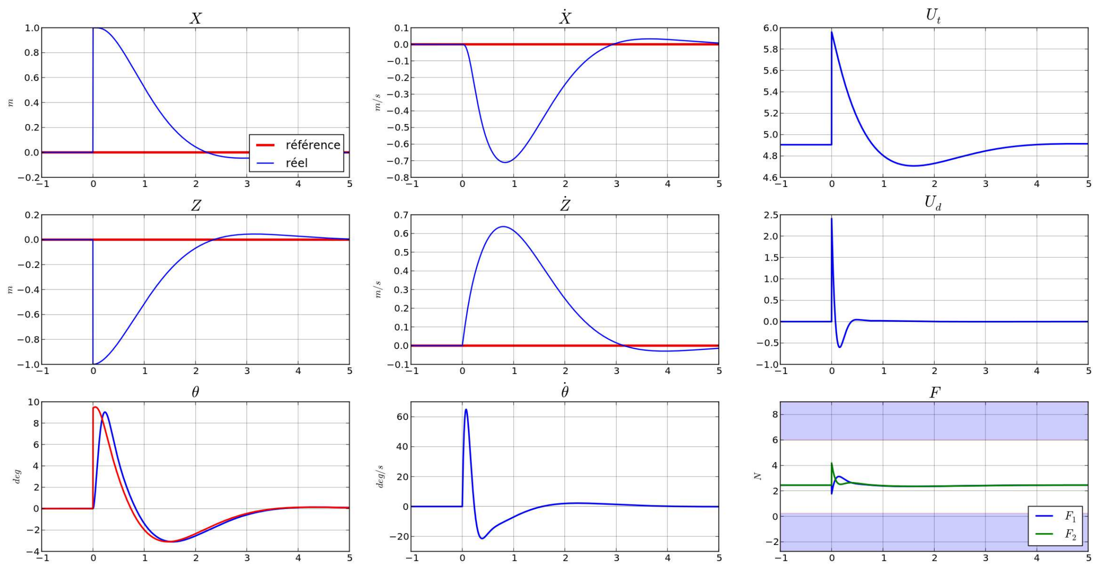


FIGURE 3.3 – Réponse du VTOL plan avec la commande NLI pour une perturbation en position.

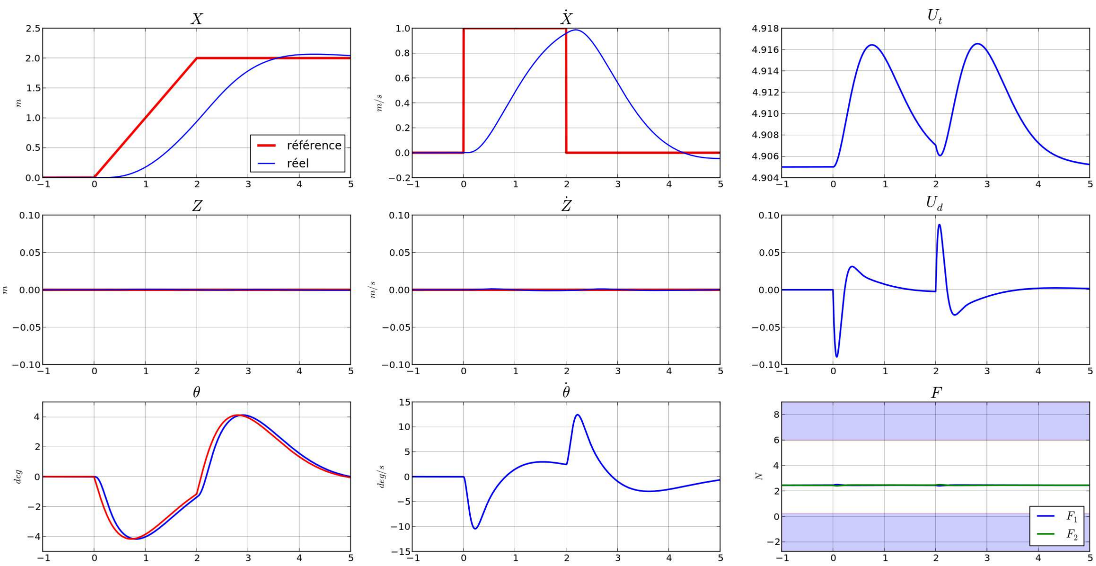


FIGURE 3.4 – Réponse du VTOL plan avec la commande NLI pour un suivi de trajectoire.

proposé le fait, là aussi, revenir à sa position initiale en environ 2 secondes sans présenter de saturation des actionneurs.

La figure 3.4 considère le cas du suivi d'une trajectoire rectiligne par morceaux. Si, au niveau de la boucle de pilotage, le retard n'est que de 0.2 seconde, celui-ci se traduit par un retard au niveau de la boucle de guidage de l'ordre d' une seconde.

La trajectoire réalisée par le VTOL plan correspond pratiquement au passage de la trajectoire de référence par un filtre d'ordre 2. La trajectoire ainsi réalisée est de type C^{∞}.

3.3 Backstepping

3.3.1 Définition

La méthode de synthèse de loi de commande connue sous le nom de *Backstepping* a été formalisée dans les années 1990 par des chercheurs dont Petar V. Kokotović [Kokotović, 1992], R. Lozano et B. Brogliato [Lozano et Brogliato, 1992]. Afin d'assurer la stabilité du système commandé, elle fait appel à la méthode directe de Lyapunov. Elle permet la synthèse de lois de commande stabilisantes de manière séquentielle pour la classe de systèmes non linéaires présentant une forme en cascade (*strict feedback form*).

Définition 3.1 *Un système dynamique dont la représentation d'état se met sous la forme* *suivante :*

$$\begin{cases} \underline{\dot{X}} = f_x(\underline{X}) + g_x(\underline{X})z_1 \\ \dot{z}_1 = f_1(\underline{X}, z_1) + g_1(\underline{X}, z_1)z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_i = f_i(\underline{X}, z_1, \ldots, z_i) + g_i(\underline{X}, z_1, \ldots, z_i)z_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_k = f_k(\underline{X}, z_1, \ldots, z_k) + g_k(\underline{X}, z_1, \ldots, z_k)u \end{cases}$$

où

- $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$ *est le vecteur d'état du système ;*
- $z_1, \ldots, z_k$ *sont des variables scalaires ;*
- u *est l'entrée scalaire du système ;*
- $f_x, f_1, \ldots, f_k$ *s'annulent à l'origine ;*
- $g_1, \ldots, g_k$ *sont non nulles sur le domaine d'intérêt*

est dit de la forme strict feedback*.*

Le principe du *Backstepping* est le suivant : si l'on dispose d'une loi de commande u_x stabilisant le sous système $\underline{\dot{X}} = f_x(\underline{X}) + g_x(\underline{X})u_x$ et d'une fonction de Lyapunov V_x prouvant cette stabilité, il est possible de synthétiser successivement des lois de commande stabilisant z_1, puis z_2, jusqu'à z_k, et d'obtenir ainsi une loi de commande u stabilisant le système complet.

Par exemple, considérons le système décrit par la représentation d'état suivante

$$\underline{\dot{X}}_1 = \underline{X}_2 \tag{3.3.1}$$

$$\underline{\dot{X}}_2 = g(\underline{X}_2, \underline{U}) \tag{3.3.2}$$

où $\underline{X}_1$ et $\underline{X}_2$ consituent le vecteur d'état, $\underline{U}$ l'entrée de commande et g est un difféomorphisme pour $\underline{U}$. L'objectif de commande est de stabiliser $\underline{X}_1$ autour de la valeur $\underline{X}_{1c}$. $\underline{X}_2$ peut être considéré comme une entrée virtuelle pour la dynamique de $\underline{X}_1$ et la dynamique de $\underline{X}_2$ est commandée par $\underline{U}$. Supposons qu'il existe une loi de commande $\underline{X}_2 = G(\underline{X}_1, \underline{X}_{1c})$ stabilisant la dynamique de $\underline{X}_1$ autour de $\underline{X}_{1c}$ et une fonction de Lyapunov $V_1(\underline{X}_1 - \underline{X}_{1c})$ prouvant cette stabilité, i.e.

$$\dot{V}_1(\underline{X}_1 - \underline{X}_{1c}) = \frac{\partial V_1}{\partial X_1}^T G(\underline{X}_1, \underline{X}_{1c}) \leq -W(\underline{X}_1 - \underline{X}_{1c}) \tag{3.3.3}$$

où $W(\underline{X}_1 - \underline{X}_{1c})$ est une fonction définie positive. Un choix possible consiste en

$$G(\underline{X}_1, \underline{X}_{1c}) = -\Lambda\left(\underline{X}_1 - \underline{X}_{1c}\right) \tag{3.3.4}$$

où Λ est une matrice symétrique définie positive. On a dans ce cas

$$V_1(\underline{X}_1 - \underline{X}_{1c}) = W(\underline{X}_1 - \underline{X}_{1c}) = \frac{1}{2}\left(\underline{X}_1 - \underline{X}_{1c}\right)^T\left(\underline{X}_1 - \underline{X}_{1c}\right) \tag{3.3.5}$$

La dynamique en boucle fermée peut s'exprimer comme

$$\dot{X}_1 = G(\underline{X}_1, \underline{X}_{1c}) + \underline{z} \quad \text{et} \quad \dot{\underline{z}} = \underline{w} \tag{3.3.6}$$

où

$$\underline{z} = \underline{X}_2 - G(\underline{X}_1, \underline{X}_{1c}) \tag{3.3.7}$$

et

$$\underline{w} = g(\underline{X}_2, \underline{U}) - \frac{\partial G}{\partial \underline{X}_1}\underline{X}_2 \tag{3.3.8}$$

Une fonction de Lyapunov pour le système complet est

$$V(\underline{X}_1 - \underline{X}_{1c}, \underline{z}) = V_1(\underline{X}_1 - \underline{X}_{1c}) + \frac{1}{2}\underline{z}^T\underline{z} \tag{3.3.9}$$

La dérivée temporelle de V se calcule comme

$$\dot{V}(\underline{X}_1 - \underline{X}_{1c}, \underline{z}) = \frac{\partial V_1}{\partial \underline{X}_1}^T\left(G(\underline{X}_1, \underline{X}_{1c}) + \underline{z}\right) + \underline{z}^T\underline{w} \tag{3.3.10}$$

Il vient alors

$$\dot{V}(\underline{X}_1 - \underline{X}_{1c}, \underline{z}) \leq -W(\underline{X}_1 - \underline{X}_{1c}) + \frac{\partial V_1}{\partial \underline{X}_1}^T\underline{z} + \underline{z}^T\underline{w} \tag{3.3.11}$$

En choisissant $\underline{w}$ tel que

$$\underline{w} = -\frac{\partial V_1}{\partial \underline{X}_1} - \Omega\underline{z} \tag{3.3.12}$$

où Ω est une matrice symétrique définie positive, la stabilité asymptotique du système est démontrée car

$$\dot{V}(\underline{X}_1 - \underline{X}_{1c}, \underline{z}) \leq -W(\underline{X}_1 - \underline{X}_{1c}) - \underline{z}^T\Omega\underline{z} \tag{3.3.13}$$

La loi de commande est alors donné par

$$\underline{U} = -g^{-1}(\underline{X}_2)\left(\frac{\partial V_1}{\partial \underline{X}_1} + \Omega\left(\underline{X}_2 - G(\underline{X}_1, \underline{X}_{1c})\right)\right) \tag{3.3.14}$$

3.3.2 Exemple : véhicule VTOL plan

Reprenons l'exemple du véhicule VTOL plan traité au paragraphe 3.2. Une représentation d'état du système s'écrit :

$$X = \begin{pmatrix} x & z & \theta & \dot{x} & \dot{z} & \dot{\theta} \end{pmatrix}^T \qquad U = \begin{pmatrix} u_t & u_d \end{pmatrix}^T \tag{3.3.15}$$

$$\dot{X} = f(X, U) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ -sin(\theta)u_t \\ cos(\theta)u_t - g \\ u_d \end{pmatrix} \tag{3.3.16}$$

La commande par *Backstepping* se développe ici en deux étapes : l'une relative à la commande de l'assiette, l'autre relative à la commande de la position de l'engin.

Notons $\tilde{\theta} = \theta - \theta_c$ l'erreur entre l'assiette et une assiette de consigne θ_c. Adoptant une commande virtuelle $\dot{\theta}_v$ telle que :

$$\dot{\theta}_v = \dot{\theta}_c + \alpha_1\tilde{\theta} \quad \text{avec} \quad \alpha_1 > 0 \tag{3.3.17}$$

on a pour la fonction quadratique $v_1 = \frac{1}{2}\tilde{\theta}^2$:

$$\dot{v}_1 = \tilde{\theta}\left(\dot{\theta} - \dot{\theta}_c\right) = -\alpha_1.\tilde{\theta}^2 \tag{3.3.18}$$

Soit maintenant la variable auxiliaire $\tilde{\dot{\theta}}$ donnée par :

$$\tilde{\dot{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\theta}_v = \dot{\theta} - \dot{\theta}_c - \alpha_1.\tilde{\theta} \tag{3.3.19}$$

La dérivée par rapport au temps de la fonction quadratique $v_2 = \frac{1}{2}\left(\tilde{\theta}^2 + \tilde{\dot{\theta}}^2\right)$ s'écrit :

$$\dot{v}_2 = \tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} + \tilde{\dot{\theta}}\left(\ddot{\theta} - \ddot{\theta}_c - \alpha_1\left(\dot{\theta} - \dot{\theta}_c\right)\right) \tag{3.3.20}$$

où $\ddot{\theta} = u_d$

Adoptant pour u_d l'expression :

$$u_d = -\tilde{\theta} + \alpha_1\dot{\theta} - \alpha_2\tilde{\dot{\theta}} \tag{3.3.21}$$

on a :

$$\dot{v}_2 = -\alpha_2\tilde{\dot{\theta}}^2 - \tilde{\dot{\theta}}\ddot{\theta}_c - \tilde{\theta}\dot{\theta}_c \tag{3.3.22}$$

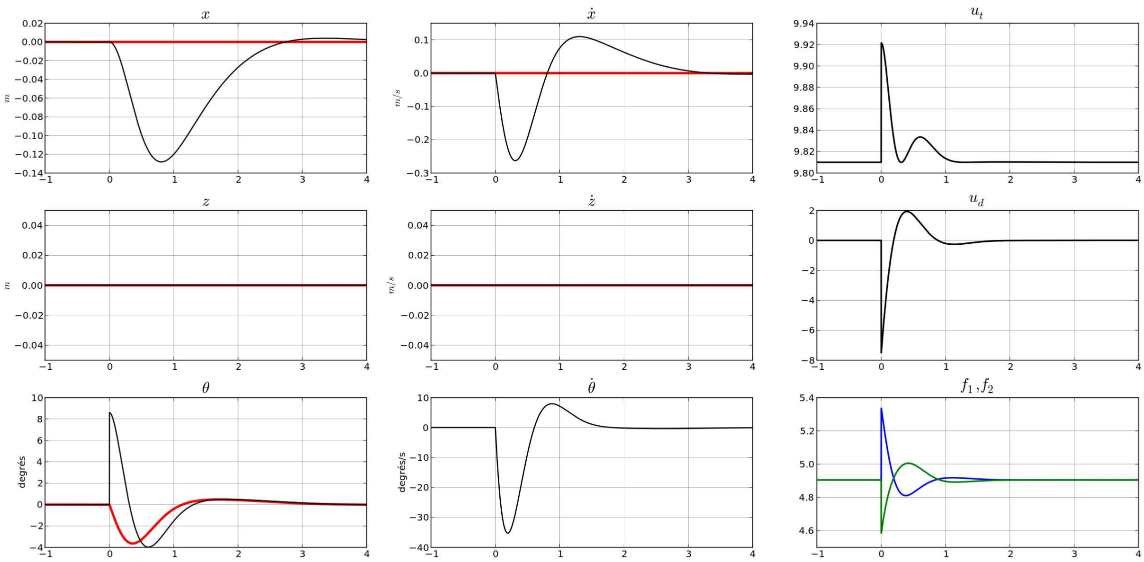


FIGURE 3.5 – Réponse du VTOL plan commandé par une commande de type *Backstepping* à une perturbation de 10 degrés en θ. La courbe en rouge sur le graphique de θ correspond à la consigne de la boucle interne.

Considérant que θ_c varie lentement, on a en pratique :

$$\dot{v}_2 = -\alpha_2 \tilde{\dot{\theta}}^2 \tag{3.3.23}$$

et l'assiette se stabilise à la valeur θ_c.

Introduisant l'entrée virtuelle u_x telle que :

$$u_x = \frac{1}{u_t}\left(\tilde{x} - \alpha_{\dot{x}}\left(\dot{\tilde{x}} + \alpha_x \tilde{x}\right)\right) \tag{3.3.24}$$

avec $\tilde{x} = x - x_c$, $\alpha_{\dot{x}} > 0$ et $\alpha_x > 0$. On prendra $\theta_d = -asin(u_x)$

Finalement, adoptant pour u_t l'expression :

$$u_t = \frac{1}{\cos(\theta)}\left(\tilde{z} + g - \alpha_{\dot{z}}\left(\dot{\tilde{z}} + \alpha_z \tilde{z}\right)\right) \tag{3.3.25}$$

avec $\tilde{z} = z - z_c$, $\alpha_{\dot{z}} > 0$ et $\alpha_z > 0$

Ainsi, z et x obéiront à des dynamiques stables du second ordre et convergeront respectivement vers les valeurs z_c et x_c. Si l'on veut absolument faire apparaître une fonction de Lyapunov, il suffira d'effectuer le changement de base adéquat afin d'obtenir une dérivée strictement négative de celle-ci en dehors du point $z = z_c, x = x_c$.

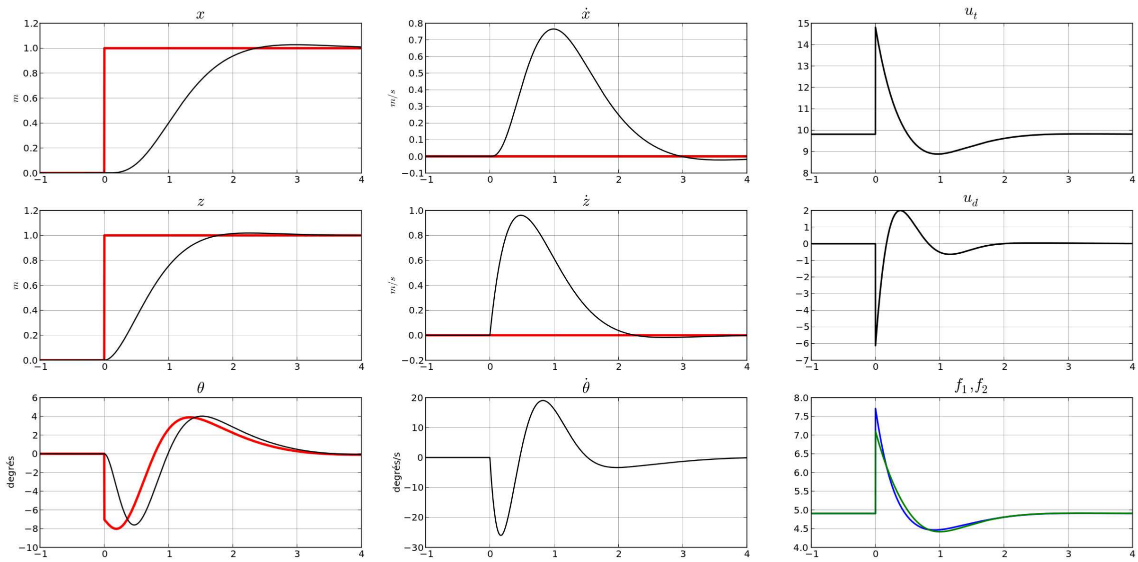


FIGURE 3.6 – Trajectoire du VTOL plan avec la commande de type *Backstepping* pour une perturbation en position.

3.4 Platitude différentielle

3.4.1 Définition

Un certain nombre de systèmes possèdent en réalité moins de degrés de liberté que la dimension de leur vecteur d'état. Par exemple, un avion doit s'incliner afin d'être en mesure d'accélérer dans le plan horizontal. Lorsqu'un système est tel que ses vecteurs d'état et de commande peuvent être exprimés en fonction d'une sortie et d'un nombre fini des dérivées temporelles de cette sortie, le système est dit *différentiellement plat* et la sortie correspondante est appelée *sortie plate.*

Définition 3.2 *Soit un système dynamique S défini par une représentation d'état*

$$\dot{\underline{X}} = f(\underline{X}, \underline{U}) \qquad \underline{X} \in \mathbb{R}^n \qquad \underline{U} \in \mathbb{R}^m \tag{3.4.1}$$

S est dit différentiellement plat *si et seulement si il existe une sortie $\underline{Y} = g(\underline{X}, \underline{U})$ de dimension m, appelée* sortie plate, *deux entiers r et s et des applications $\Psi : X \times (\mathbb{R}^n)^{s+1} \to \mathbb{R}^m$, de rang m dans un ouvert convenable, et $(\phi_0, \phi_1) : \mathbb{R}^{(m+2)r} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, de rang $n+m$ dans un ouvert convenable, tel que $\underline{Y} = \psi(\underline{X}, \underline{U}, \ldots, \underline{U}^{(s)})$ $\underline{X} = \phi_0(\underline{Y}, \ldots, \underline{Y}^{(r)})$ et $\underline{U} = \phi_1(\underline{Y}, \ldots, \underline{Y}^{(r+1)})$, l'équation $\dot{\phi}_0 = f(\phi_0, \phi_1)$ étant identiquement vérifiée.*

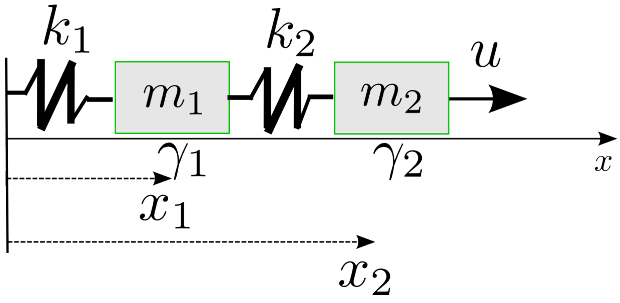


FIGURE 3.7 – Schéma du système masses ressorts.

Le système S est dit *Lie-Bäcklund* équivalent au système trivial suivant, où $\underline{v}$ est une nouvelle entrée :

$$\underline{Y}^{(r+1)} = \underline{v} \tag{3.4.2}$$

La propriété de platitude différentielle exprime que l'on est en mesure d'obtenir toutes les variables du système, c'est à dire le vecteur d'état ainsi que le vecteur de commande, en fonction de la sortie plate et d'un nombre fini de ses dérivées temporelles. Par conséquent, toute trajectoire $t \rightarrow (\underline{X}(t), \underline{U}(t))$ du système (S) est l'image d'une trajectoire $t \rightarrow (\underline{Y}(t), \ldots, \underline{Y}^{(r+1)}(t))$ engendrée par la sortie plate et un nombre fini de ses dérivées temporelles.

Il n'y a pas unicité des sorties plates. Par exemple, [Lévine, 2004] montre que si (y_1, y_2) est une sortie plate d'un système à deux entrées, alors $(z_1, z_2) = (y_1 + y_2^k, y_2)$ est aussi une sortie plate pour tout entier k. En revanche, certaines sorties plates pourront avoir un sens physique et un objectif de commande pourra être de faire suivre aux sortie plates une certaine trajectoire, alors que d'autres sorties plates pourront n'avoir aucun sens physiquement interprétable.

3.4.2 Exemple : système masses-ressorts

L'exemple suivant est une application classique de la commande plate ([Lévine, 2009] page 133). Considérons le système constitué de deux masses connectées par deux ressorts et astreintes à se déplacer sur un axe horizontal tel que représenté sur la figure 3.7. Notons respectivement x_1 et x_2 les abscisses des centres de gravité des masse m_1 et m_2, k_1 et k_2 les coefficients de raideur des ressorts et $\gamma_1(\dot{x_1})$ et $\gamma_2(\dot{x_2})$ des frottements fluides s'exerçant sur les masses, ces dernières étant des fonctions supposées deux fois continûment dérivables. Une force u, considérée comme notre variable de commande, est exercée sur la masse m_2.

L'application de la seconde loi de Newton conduit au système d'équations suivant :

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2\left(x_2 - x1\right) - \gamma_1(x_1^{(1)}) \tag{3.4.3}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2\left(x_2 - x1\right) - \gamma_2(x_2^{(1)}) + u \tag{3.4.4}$$

En réécrivant (3.4.3), il vient :

$$x_2^{(0)} = \frac{m_1}{k_2}x_1^{(2)} + \frac{k_1+k_2}{k_2}x_1^{(0)} + \frac{1}{k_2}\gamma_1(x_1^{(1)}) \tag{3.4.5}$$

puis en dérivant par rapport au temps, il vient :

$$x_2^{(1)} = \frac{m_1}{k_2}x_1^{(3)} + \frac{k_1+k_2}{k_2}x_1^{(1)} + \frac{x_1^{(2)}}{k_2}\dot{\gamma}_1(x_1^{(1)}) \tag{3.4.6}$$

En dérivant une nouvelle fois par rapport au temps, il vient :

$$x_2^{(2)} = \frac{m_1}{k_2}x_1^{(4)} + \frac{k_1+k_2}{k_2}x_1^{(2)} + \frac{1}{k_2}\left(x_1^{(3)}\dot{\gamma}_1(x_1^{(1)}) + x_1^{(2)}\ddot{\gamma}_1(x_1^{(1)})\right) \tag{3.4.7}$$

En remplaçant $x_2^{(0)}$, $x_2^{(1)}$ et $x_2^{(2)}$ dans (3.4.4), il vient

$$\begin{aligned} u = {} & \frac{m_1m_2}{k_2}x_1^{(4)} + \left(\frac{m_2.k_1}{k_2} + m_2 + m_1\right)x_1^{(2)} + k_1x_1 + \gamma_1(x_1^{(1)}) \\ & + \frac{m_2}{k_2}\left(\ddot{\gamma}_1(x_1^{(1)})x_1^{(2)^2} + \dot{\gamma}_1(x_1^{(1)})x_1^{(3)}\right) \\ & + \gamma_2\left(\frac{m_1}{k_2}x_1^{(3)} + \frac{1}{k_2}\left(\left(k_1+k_2\right)x_1^{(1)} + \dot{\gamma}_1(x_1^{(1)})x_1^{(2)}\right)\right) \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Ce calcul montre que le système considéré est plat par rapport à la sortie x_1. Nous avons en effet exprimé son vecteur d'état $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{pmatrix}$ et son vecteur de commande (u) en fonction d'un nombre fini de dérivées temporelles de x_1.

3.4.3 Exemple : véhicule VTOL plan

Reprenons l'exemple du VTOL plan utilisé comme illustration du paragraphe 3.2 sur la commande *NLI*. Cet exemple est d'autant plus intéressant qu'il permet d'introduire le problème de commande qui sera traité au chapitre 6.

Considérons la sortie

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} x & z \end{pmatrix}^T \tag{3.4.9}$$

En divisant (3.2.9) par (3.2.10), il vient

$$\theta = -arctan\left(\frac{x^{(2)}}{z^{(2)}+g}\right) \tag{3.4.10}$$

En dérivant (3.4.10), il vient

$$\dot{\theta} = -\frac{\left(z^{(2)}+g\right)x^{(3)} - x^{(2)}z^{(3)}}{\left(z^{(2)}+g\right)^2 + \left(x^{(2)}\right)^2} \tag{3.4.11}$$

En regroupant 3.4.10 et 3.4.11, il vient :

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ z^{(0)} \\ -arctan\left(\frac{x^{(2)}}{z^{(2)}+g}\right) \\ x^{(1)} \\ z^{(1)} \\ -\frac{\left(z^{(2)}+g\right)x^{(3)} - x^{(2)}z^{(3)}}{\left(z^{(2)}+g\right)^2 + \left(x^{(2)}\right)^2} \end{pmatrix} \tag{3.4.12}$$

Nous avons donc exprimé le vecteur d'état $\underline{X}$ en fonction d'un nombre fini des dérivées temporelles de la sortie $\underline{Y}$

$$\underline{X} = \phi_0\left(Y^{(0)}, Y^{(1)}, Y^{(2)}, Y^{(3)}\right) \tag{3.4.13}$$

D'après (3.2.7), u_t est positive comme somme de deux quantités positives. En élevant au carré (3.2.9) et (3.2.10) puis en sommant les deux, il vient :

$$u_t = \sqrt{\left(x^{(2)}\right)^2 + \left(z^{(2)}+g\right)^2} \tag{3.4.14}$$

En dérivant (3.4.11) puis en remplaçant dans (3.2.11), il vient

$$u_d = \frac{\left[x^{(4)}(z^{(2)}+g) - z^{(4)}x^{(2)}\right]\left[(z^{(2)}+g)^2 + (x^{(2)})^2\right] - \left[2(z^{(2)}+g)z^{(3)} + 2x^{(2)}x^{(3)}\right]\left[x^{(3)}(z^{(2)}+g) - z^{(3)}x^{(2)}\right]}{\left(\left(z^{(2)}+g\right)^2 + \left(x^{(2)}\right)^2\right)^2} \tag{3.4.15}$$

En regroupant 3.4.14 et 3.4.15, il vient :

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} \sqrt{\left(x^{(2)}\right)^2 + \left(z^{(2)}+g\right)^2} \\ \frac{\left[x^{(4)}(z^{(2)}+g) - z^{(4)}x^{(2)}\right]\left[(z^{(2)}+g)^2 + (x^{(2)})^2\right] - \left[2(z^{(2)}+g)z^{(3)} + 2x^{(2)}x^{(3)}\right]\left[x^{(3)}(z^{(2)}+g) - z^{(3)}x^{(2)}\right]}{\left(\left(z^{(2)}+g\right)^2 + \left(x^{(2)}\right)^2\right)^2} \end{pmatrix} \tag{3.4.16}$$

$$\underline{U} = \phi_1\left(\underline{Y}^{(0)}, \underline{Y}^{(1)}, \underline{Y}^{(2)}, \underline{Y}^{(3)}, \underline{Y}^{(4)}\right)$$

Nous avons donc exprimé le vecteur de commande $\underline{U}$ en fonction d'un nombre fini de dérivées temporelles de la sortie $\underline{Y}$, ce qui prouve que le VTOL plan est un système différentiellement plat et que le vecteur de sortie $\underline{Y} = \begin{pmatrix} x & z \end{pmatrix}^T$ est une sortie plate. La figure 3.8 illustre une simulation dans laquelle le VTOL plan est guidé par une commande plate sur

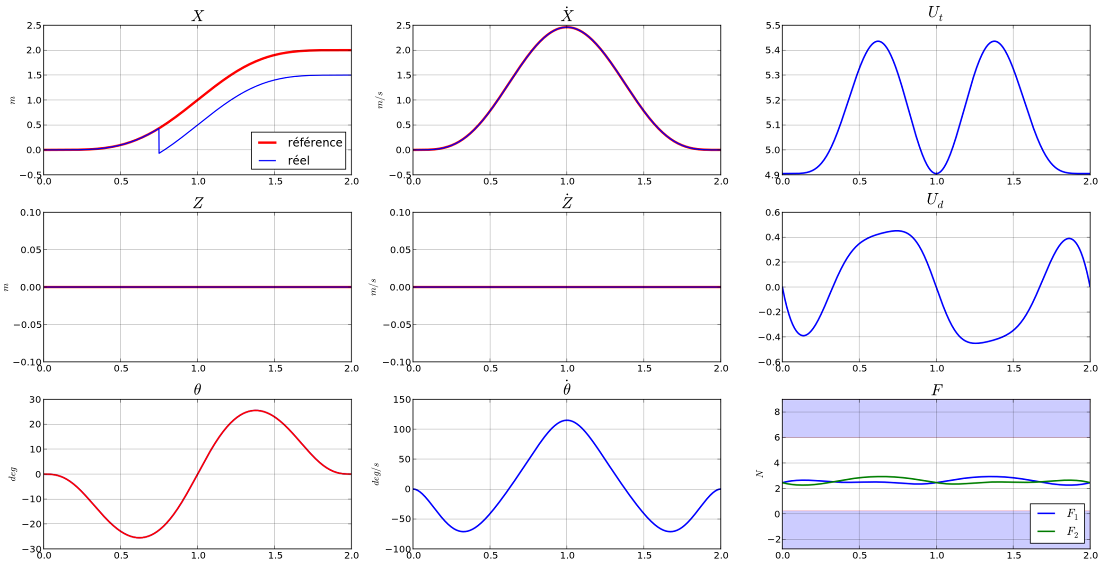


FIGURE 3.8 – Réponse du VTOL plan avec la commande plate en présence d'une perturbation en position.

une trajectoire consistant en un déplacement selon l'axe de x. À l'instant $t = 0.75$ seconde, une perturbation est injectée sur la position en x. Cette simulation illustre que la commande plate est à même de guider parfaitement le véhicule sur sa trajectoire, mais qu'en revanche elle ne le stabilise pas. Dans le paragraphe suivant, nous complétons cette loi de façon à assurer la stabilité du système commandé autour de la trajectoire de référence.

Ajout d'une stabilisation par retour d'état Grâce aux calculs développés précédemment, nous disposons d'une trajectoire de référence pour le vecteur d'état $\underline{X}_r$ et d'un vecteur de commande $\underline{U}_r$ permettant de guider le véhicule sur cette trajectoire, ce qui se traduit par

$$\dot{\underline{X}}_r = f(\underline{X}_r, \underline{U}_r) \tag{3.4.17}$$

En posant

$$\delta\underline{X} = \underline{X} - \underline{X}_r \quad \delta\underline{U} = \underline{U} - \underline{U}_r \tag{3.4.18}$$

Le développement au premier ordre en série de Taylor de (3.2.9) conduit à :

$$\delta\dot{\underline{X}} = A\delta\underline{X} + B\delta\underline{U} \tag{3.4.19}$$

avec

$$A = \frac{\partial f}{\partial \underline{X}}(\underline{X}, \underline{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\cos(\theta_r)u_{tr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\theta_r)u_{tr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \frac{\partial f}{\partial \underline{U}}(\underline{X}, \underline{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\sin(\theta_r) & 0 \\ \cos(\theta_r) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4.20}$$

Le polynôme caractéristique de A se calcule comme

$$P(\lambda) = det(\lambda\mathcal{I} - A) = \lambda^6 \tag{3.4.21}$$

ce qui confirme que la linéarisation du système autour de la trajectoire de référence n'est pas stable. En revanche, la matrice de commandabilité du système linéarisé autour de la trajectoire de référence

$$Q_c = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & A^4B & A^5B \end{pmatrix} \tag{3.4.22}$$

se calcule par bloc en notant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \end{pmatrix} \tag{3.4.23}$$

il vient

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^2B = \begin{pmatrix} 0 \\ A_1B_1 \end{pmatrix} \tag{3.4.24}$$

$$A^3B = \begin{pmatrix} A_1B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^4B = \begin{pmatrix} 0 \\ A_1^2B_1 \end{pmatrix} \quad A^5B = \begin{pmatrix} A_1^2B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.4.25}$$

avec

$$A_1B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -c_\theta u_t \\ 0 & -s_\theta u_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1^2B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4.26}$$

Q_{c1} est la matrice obtenue en retirant toutes les colonnes nulles de Q_c.

$$Q_{c1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -s_\theta & 0 & 0 & -c_\theta u_t \\ 0 & 0 & c_\theta & 0 & 0 & -s_\theta u_t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\theta & 0 & 0 & 0 & -c_\theta u_t & 0 \\ c_\theta & 0 & 0 & 0 & -s_\theta u_t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4.27}$$

On calcule

$$det(Q_{c1}) = -u_t^2 \tag{3.4.28}$$

ce qui montre que le système linéarisé est commandable autour de la trajectoire de référence dès lors que u_t n'est pas nulle.

Nous pouvons donc synthétiser une commande linéaire par retour d'état stabilisant les écarts du système à la trajectoire de référence.

En remarquant que la dynamique des écarts angulaires doit être beaucoup plus rapide que celle des écarts en position, nous pouvons commencer par imposer à θ une dynamique linéaire du second ordre stable en utilisant la commande

$$\delta u_d = -2\omega_\theta \xi_\theta \delta\dot{\theta} - \omega_\theta^2(\delta\theta - \delta\theta_c) \tag{3.4.29}$$

En faisant l'hypothèse que pour les dynamiques lentes de δx and δz, $\delta\theta$ suit $\delta\theta_c$, les lignes 4 et 5 de (3.4.20) conduisent à

$$\begin{pmatrix} \ddot{\delta x} \\ \ddot{\delta z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \sin(\theta_r) & \cos(\theta_r)u_{tr} \\ -\cos(\theta_r) & \sin(\theta_r)u_{tr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_t \\ \delta\theta_c \end{pmatrix} \tag{3.4.30}$$

Le déterminant de la matrice ci-dessus est u_{tr}. La matrice est donc inversible dès lors que u_{tr} n'est pas nulle. La relation inverse s'exprime comme

$$\begin{pmatrix} \delta u_t \\ \delta\theta_c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \sin(\theta_r) & -\cos(\theta_r) \\ \frac{\cos(\theta_r)}{u_{tr}} & \frac{\sin(\theta_r)}{u_{tr}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\delta x} \\ \ddot{\delta z} \end{pmatrix} \tag{3.4.31}$$

Si nous souhaitons imposer à δx and δz une dynamique linéaire du second ordre, stable, de pulsations caractéristiques ω_x, ω_z et d'amortissements ξ_x, ξ_z, l'expression devient

$$\begin{pmatrix} \delta u_t \\ \delta\theta_c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} s_\theta & -c_\theta \\ \frac{c_\theta}{u_{tref}} & \frac{s_\theta}{u_{tref}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega_x^2 & 0 & -2\xi_x\omega_x & 0 \\ 0 & -\omega_z^2 & 0 & -2\xi_z\omega_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \\ \dot{\delta x} \\ \dot{\delta z} \end{pmatrix} \tag{3.4.32}$$

$$\begin{pmatrix} \delta u_t \\ \delta\theta_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x^2 s_\theta & -\omega_z^2 c_\theta & 2\xi_x\omega_x s_\theta & -2\xi_z\omega_z c_\theta \\ \frac{\omega_x^2 c_\theta}{u_{tref}} & \frac{\omega_z^2 s_\theta}{u_{tref}} & \frac{2\xi_x\omega_x c_\theta}{u_{tref}} & \frac{2\xi_z\omega_z s_\theta}{u_{tref}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \\ \dot{\delta x} \\ \dot{\delta z} \end{pmatrix} \tag{3.4.33}$$

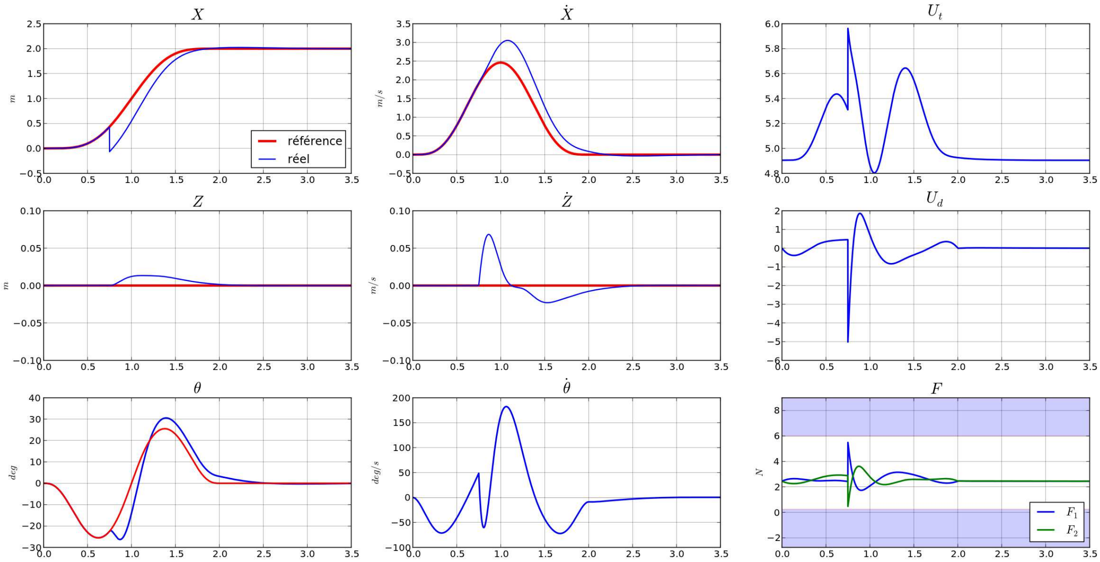


FIGURE 3.9 – Trajectoire du VTOL plan avec la commande plate et retour d'état pour une perturbation en position.

En replaçant $\delta\theta_c$ avec l'expression 3.4.29, la loi de commande s'exprime finalement comme

$$\begin{pmatrix} \delta u_t \\ \delta u_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x^2 s_{\theta r} & -\omega_z^2 c_{\theta r} & 0 & 2\xi_x\omega_x s_{\theta r} & -2\xi_z\omega_z c_{\theta r} & 0 \\ \frac{\omega_\theta^2}{b}\frac{\omega_x^2 c_\theta}{a u_{tref}} & \frac{\omega_\theta^2}{b}\frac{\omega_z^2 s_\theta}{a u_{tref}} & -\frac{\omega_\theta^2}{b} & \frac{\omega_\theta^2}{b}\frac{2\xi_x\omega_x c_\theta}{a u_{tref}} & \frac{\omega_\theta^2}{b}\frac{2\xi_z\omega_z s_\theta}{a u_{tref}} & -\frac{2\xi_\theta\omega_\theta}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \\ \delta\theta \\ \dot{\delta x} \\ \dot{\delta z} \\ \dot{\delta\theta} \end{pmatrix} \tag{3.4.34}$$

Ainsi, à la commande plate (boucle ouverte) obtenue en 3.4.14, nous rajoutons la correction (boucle fermée) de 3.4.34.

La figure 3.9 montre alors la réponse du système stabilisé à une perturbation en position lors d'un déplacement en x. Ainsi, contrairement à la réponse du système présentée sur la figure 3.8, on constate que l'erreur de position résultant de la perturbation est résorbée en une seconde et la sortie se remet à suivre parfaitement la trajectoire de référence. Remarquons quand même que nous nous sommes placés dans une situation où les actionneurs ne présentent pas de saturation.

3.5 Conclusion

Ce chapitre, sans être exhaustif, montre la grande diversité des techniques aujourd'hui disponibles pour la synthèse de lois de commande destinées au guidage des sorties des systèmes non linéaires. Ces techniques supposent en général la disponibilité d'un modèle analytique de la dynamique (non linéaire) du système qui se prête à une opération d'inversion directe ou indirecte, en une seule ou plusieurs étapes. Les résultats de simulation présentés démontrent l'efficacité de ces diverses approches. Néanmoins, dans ce chapitre, nous nous sommes placés dans des conditions favorables où les trajectoires de référence adoptées pour les différentes sorties des systèmes ne conduisent pas à des saturations soutenues des actionneurs. Par ailleurs, il a été ici supposé que les paramètres des modèles adoptés ne présentaient aucune incertitude, ce qui est rarement le cas, d'autant plus que, lorsqu'il s'agit d'un drone, beaucoup de ses missions peuvent impliquer des modifications importantes des valeurs des paramètres de sa dynamique. C'est cette dernière question qui est abordée au chapitre suivant.

Chapitre 4

Commande adaptative

4.1 Introduction

L'ensemble des méthodes de synthèse de lois de commande présentées au chapitre précédent repose sur la disponibilité d'un modèle représentatif de la dynamique du processus à commander. Dans la pratique, même s'il est en général possible d'obtenir un tel modèle par une analyse physique du système, les paramètres du modèle ne sont connus qu'avec une précision limitée.

D'autre part les contraintes de complexité liées à la mise en œuvre des méthodes de synthèse de lois de commande conduisent souvent à négliger un certain nombre de dynamiques d'ordre supérieur et à utiliser un modèle simplifié, dégradant de surcroît la pertinence des coefficients du modèle obtenus par mesure ou analyse.

Finalement de nombreux systèmes présentent une dynamique dont certains paramètres varient lentement dans le temps, comme par exemple la masse d'un véhicule du fait de la consommation de carburant, ou les performances d'un actionneur du fait de l'usure mécanique.

La commande adaptative peut être vue comme un moyen d'adaptation en temps réel de la loi de commande pour tenir compte des incertitudes énoncées ci-dessus concernant le modèle de dynamique.

Bien que les premières tentatives d'application à l'Aéronautique des méthodes de commande adaptative datent des années 1960, les échecs de mise en pratique de ces dernières (crash du X15 en 1967 [Dydek *et al.*, 2008]), le manque de résultats théoriques ainsi que les capacités limitées de traitement firent que ces dernières furent reléguées au profit de méthodes qui à l'époque étaient plus au point, comme les techniques de commutation de gain (*gain scheduling* en anglais).

La commande adaptative constitue un domaine de la recherche relativement récent en

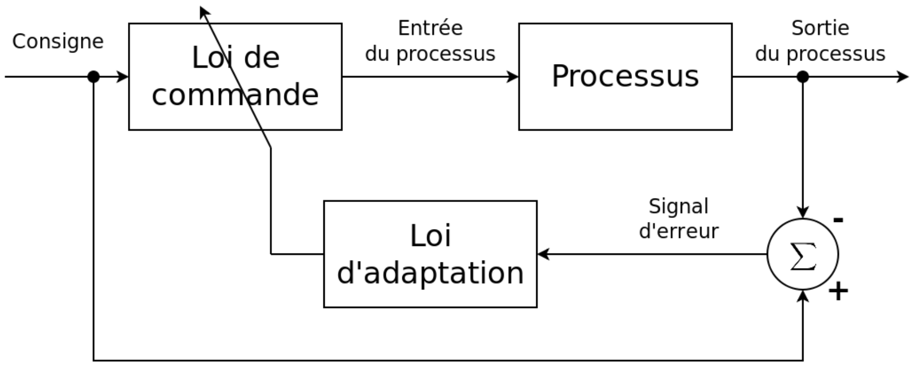


FIGURE 4.1 – Principe de base de la commande adaptative directe.

Automatique ([Slotine et Li, 1991], [Walach et Widrow, 1996], [Astrom et Wittenmark, 1994], [Krstic *et al.*, 1995]) et ses applications au domaine aéronautique ne datent que de la dernière décade.

Les méthodes de commande adaptative peuvent être classées en deux grandes catégories. Les méthodes dites *directes* extraient l'information utilisée pour l'adaptation de la loi de commande de l'erreur de suivi de trajectoire, tandis que les méthodes dites *indirectes* utilisent l'entrée et la sortie du système pour identifier les paramètres du modèle de dynamique sur lequel repose la synthèse de la loi de commande. Lorsque le formalisme utilisé permet l'unification des deux méthodes, les deux sources d'information peuvent être exploitées en parallèle. Ce troisième type de méthode, appelée commande adaptative *composite*, offre en général des performances supérieures aux deux premières.

Dans le présent chapitre, nous présenterons dans un premier temps les méthodes directe indirecte et composite et les illustrerons sur un exemple monodimensionel de guidage vertical d'un hélicoptère à pas fixe. Dans un second temps, nous passerons en revue différents algorithmes d'adaptation et discuterons des effets des erreurs de modélisation et des problèmes liés aux saturations.

4.2 Commande adaptative directe

Les méthodes de commande adaptative directes extraient l'information utilisée pour adapter la loi de commande de l'erreur de suivi de trajectoire. Par exemple, le terme intégral d'un correcteur *PID* peut être vu comme une forme extrêmement primitive d'une loi de commande adaptative directe.

Parmi les méthodes de commande adaptative directe, la méthode dite par *modèle de référence* se distingue par la clarté de son approche et la qualité des résultats obtenus. Nous la décrivons dans le paragraphe qui suit.

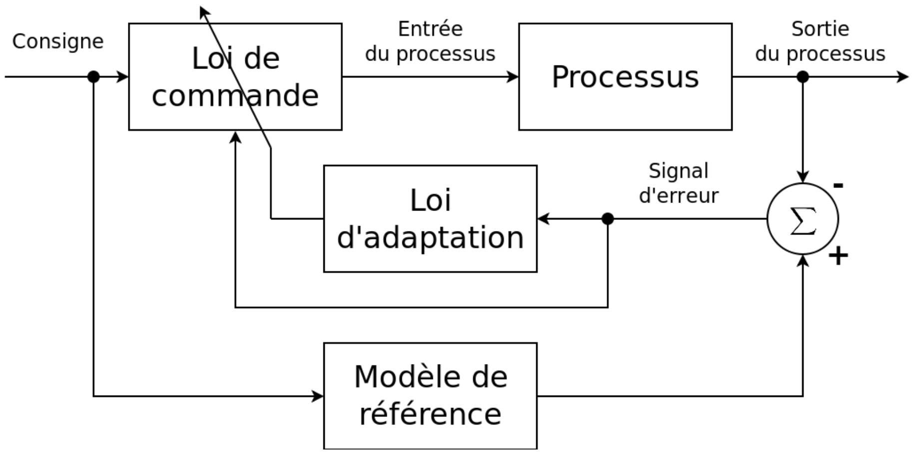


FIGURE 4.2 – Principe de base de la commande adaptative par modèle de référence.

4.2.1 Commande adaptative par modèle de référence (MRAC)

Le principe de la commande adaptative par modèle de référence est décrit sur la figure 4.1.

La figure est composée de quatre blocs : le processus à commander, comportant des paramètres inconnus, le modèle de référence, décrivant la réponse souhaitée du système commandé, une loi de commande en boucle fermée contenant des paramètres ajustables et finalement un algorithme d'adaptation, dont le rôle est d'ajuster les paramètres de la loi de commande afin d'amener la réponse du système à celle du modèle de référence.

Un certain nombre d'hypothèses doivent être réalisées sur ces quatre éléments afin de permettre la synthèse de ce type de contrôleur.

Le processus à commander est supposé avoir une structure connue. C'est-à-dire que pour un processus linéaire, le nombre de pôles et de zéros est connu mais leur position est inconnue. Pour un processus non linéaire, la structure de l'équation de dynamique est connue et seuls certains paramètres de cette équation sont inconnus.

Le modèle de référence, qui représente le comportement souhaité du processus commandé, doit être compatible d'une part avec la structure du modèle du processus, en termes d'ordre et de degrés relatifs, et d'autre part avec ses hypothèses de validité, par exemple en termes de bande passante, de saturation d'actionneur et de résistance structurelle.

La loi de commande doit être capable de réaliser un suivi de trajectoire parfait dans le cas où les valeurs des paramètres du modèle du processus sont parfaitement connues.

Enfin, l'algorithme d'adaptation doit être en mesure d'adapter les paramètres de la loi de commande de telle sorte que l'erreur de suivi de trajectoire s'annule. L'enjeu de la synthèse de l'algorithme d'adaptation est de garantir la stabilité du système ainsi que la convergence vers zéro de l'erreur de suivi de trajectoire.

4.2.2 Application du MRAC au guidage vertical d'un hélicoptère

Afin d'illustrer la méthode *MRAC* présentée ci-dessus, considérons le problème du guidage vertical d'un hélicoptère. Un modèle simplifié de la dynamique du processus est le suivant :

$$\ddot{z} = \frac{1}{m}F - g \tag{4.2.1}$$

où z représente l'altitude du véhicule considéré comme un point matériel, F la poussée produite par son rotor, que nous considérerons comme étant la variable de commande, g l'accélération de la pesanteur, et m la masse du véhicule, que nous considérerons imparfaitement connue.

Supposons que nous souhaitons que la loi de commande fasse que le véhicule se comporte comme un système linéaire du second ordre de pulsation naturelle ω_r et de facteur d'amortissement ξ_r piloté par la consigne z_c

$$\ddot{z}_r = -2\xi_r\omega_r\dot{z}_r - \omega_r^2(z_r - z_c) \tag{4.2.2}$$

Ce modèle de référence est bien compatible avec l'ordre et le degré relatif du modèle de dynamique du processus.

Si la valeur de m était connue, la loi de commande suivante (commande linéaire inverse) :

$$F(z, \dot{z}) = m(\ddot{z}_r - 2\omega_{cl}\dot{\tilde{z}} - \omega_{cl}^2\tilde{z} + g) \tag{4.2.3}$$

où $\tilde{z} = z - z_r$ permettrait un suivi de trajectoire parfait en imposant au système commandé la dynamique linéaire du second ordre de pulsation ω_{cl} et de facteur d'amortissement 1. Si la valeur de m n'est pas connue mais qu'en revanche nous disposons d'une estimation $\hat{m}$ de cette dernière, nous pouvons l'utiliser dans (4.2.3). La loi de commande devient alors

$$F(z, \dot{z}, \hat{m}) = \hat{m}(\ddot{z}_r - 2\omega_{cl}\dot{\tilde{z}} - \omega_{cl}^2\tilde{z}_{cl} + g) \tag{4.2.4}$$

et la dynamique en boucle fermée du système se met sous la forme :

$$m(\dot{s} + \omega_{cl}s) = \tilde{m}v \tag{4.2.5}$$

où

$$s = \dot{\tilde{z}} + \omega\tilde{z} \tag{4.2.6}$$

est une erreur combinée de suivi de trajectoire en position et en vitesse, $\tilde{m} = \hat{m} - m$ est l'erreur d'estimation de la masse, et v un signal défini par $v = \ddot{z}_r - 2\omega\dot{\tilde{z}} - \omega^2\tilde{z}$.

L'équation (4.2.5) montre que l'erreur combinée de suivi de trajectoire s est liée à l'erreur d'estimation de masse $\tilde{m}$ par une relation dynamique linéaire stable. L'estimation de masse peut donc être adaptée en utilisant l'erreur combinée de suivi de trajectoire, par

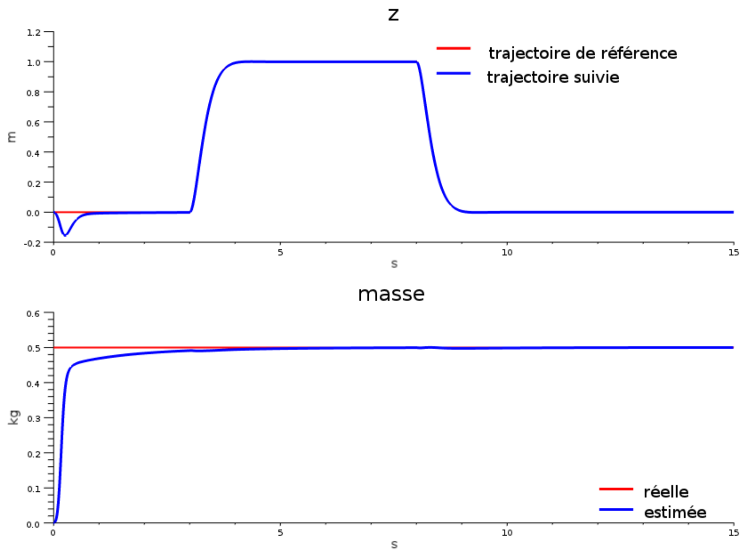


FIGURE 4.3 – Suivi de trajectoire et estimation de paramètre pour la commande adaptative de type MRAC.

exemple au moyen d'une simple descente de gradient conduisant à l'équation d'adaptation suivante

$$\dot{\hat{m}} = -\gamma v s \tag{4.2.7}$$

où γ est un gain d'adaptation positif, définissant la vitesse de convergence de $\hat{m}$.

La simulation représentée sur la figure 4.3 montre le fonctionnement du système. À l'instant initial, il n'est fait aucune hypothèse sur la valeur de la masse et une valeur nulle est utilisée. Une valeur de 0.03 pour le gain d'adaptation γ permet d'obtenir une convergence de l'estimation de masse en environ 2 secondes.

4.3 Commande adaptative indirecte

Le principe des méthodes de commande adaptative indirecte, ou *MIAC* (Model Identification Adaptive Control), consiste à estimer les paramètres du modèle de dynamique utilisé lors de la synthèse de la loi de commande. Il est à noter que dans le cas de modèles non-linéaires, il n'existe pas d'approche générique, sauf dans le cas d'un modèle linéaire par rapport à son paramétrage, c'est-à-dire une somme pondérée de fonctions non linéaires connues, dont seules les pondérations sont inconnues :

$$Y = \sum_i a_i f_i(X, u) \tag{4.3.1}$$

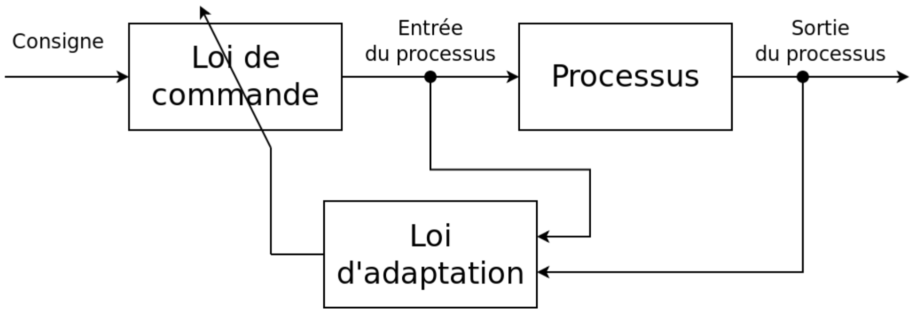


FIGURE 4.4 – Principe de base de la commande adaptative indirecte.

ou sous forme matricielle, A étant le vecteur des paramètres du modèle :

$$Y = F(X,u)A \tag{4.3.2}$$

Supposons que nous disposons d'une estimation de A, $\hat{A}$. Nous pouvons calculer $\hat{Y}$, la sortie prédite du modèle :

$$\hat{Y} = F(X,u)\hat{A} \tag{4.3.3}$$

Nous pouvons maintenant définir l'erreur de prédiction e_1 de la façon suivante :

$$e_1 = \hat{Y} - Y \tag{4.3.4}$$

L'erreur de prédiction est liée à l'erreur d'estimation du vecteur de paramètres $\tilde{A} = \hat{A} - A$ par la relation suivante :

$$\begin{aligned} e_1 &= F(X,u)\hat{A} - F(X,u)A \\ e_1 &= F(X,u)\tilde{A} \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

En faisant l'hypothèse que le signal $F(X,u)$ contient suffisamment d'information, l'erreur de prédiction peut servir à estimer le vecteur de paramètres A.

4.3.1 Application du MIAC au guidage vertical d'un hélicoptère

Considérons à nouveau le cas de l'hélicoptère traité au chapitre précédent.

La loi de commande

$$F(m, X_{des}, X) = m.(g + \ddot{z}_{des} + 2\xi\omega(\dot{z} - \dot{z}_{des}) + \omega^2(z - z_{des})) \tag{4.3.6}$$

permet de suivre la trajectoire $X_{des} = \begin{pmatrix} z_{des} & \dot{z}_{des} & \ddot{z}_{des} \end{pmatrix}^T$ en imposant au système en boucle fermée la dynamique linéaire du second ordre de pulsation ω et de facteur d'amortissement ξ.

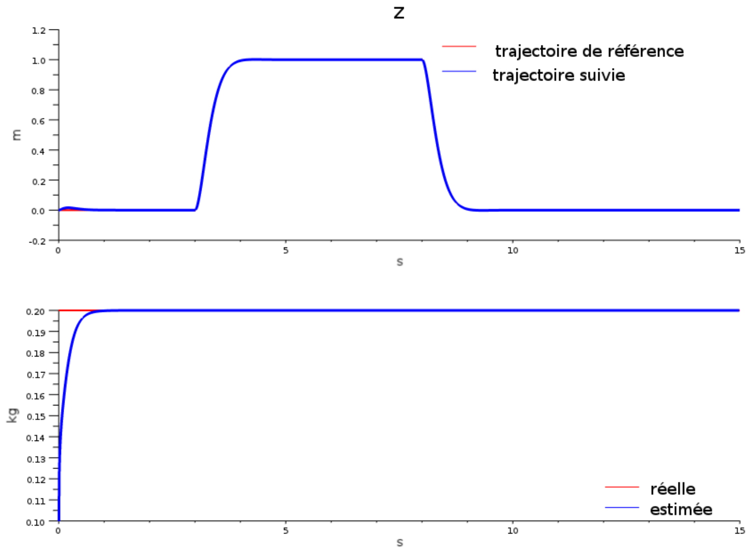


FIGURE 4.5 – Simulation d'un algorithme MIAC pour la commande de l'hélicoptère.

Cette loi de commande dépend du paramètre m. D'après (4.2.1), ce paramètre peut être exprimé en fonction de la sortie $\ddot{z}$ (mesurée à l'aide d'un accéléromètre) et d'un signal dépendant de la commande de la façon suivante :

$$\ddot{z} + g = F\frac{1}{m} \tag{4.3.7}$$

Il peut donc être estimé en utilisant un des algorithmes présentés au paragraphe 4.6, par exemple, dans le cas de la simulation ci-dessous, une descente de gradient.

4.4 Comparaison entre les méthodes directe et indirecte

Comme mentionné précédemment, les méthodes de commande adaptative directe et indirecte fonctionnent sur des principes très différents. La méthode directe adapte les paramètres de la loi de commande afin de minimiser l'erreur de suivi de trajectoire. La méthode indirecte adapte, quant à elle, les coefficients du modèle de dynamique du processus afin de minimiser l'erreur de prédiction. Il existe cependant une similitude importante entre les deux méthodes, qui apparaît clairement sur les schémas de principe (figures 4.1 et 4.4). Elles comportent toutes deux une boucle interne réalisant la commande du processus et une boucle externe estimant des paramètres.

Les deux méthodes sont très différentes en termes d'analyse et d'implémentation.

La méthode indirecte est à première vue plus flexible, dans la mesure où elle n'impose pas de relation entre la loi de commande et l'algorithme d'estimation des paramètres du

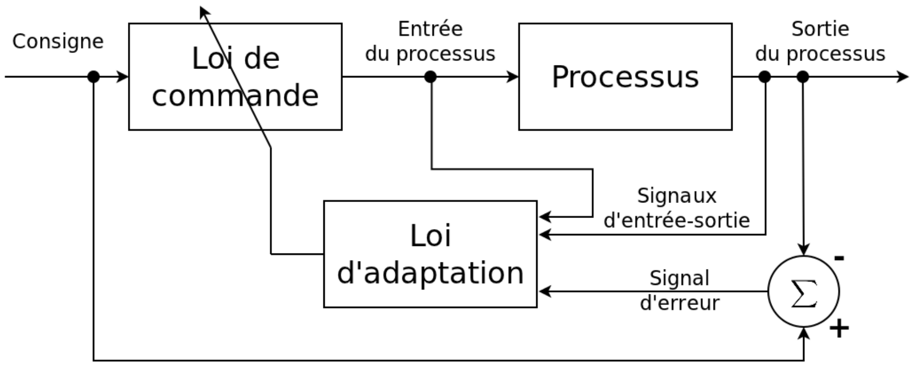


FIGURE 4.6 – Principe de base de la commande adaptative composite.

modèle de dynamique du processus (découplage de la commande et de l'estimation). Cependant, la convergence de l'estimation des paramètres dépend de la richesse en information de la trajectoire suivie. Dans le cas de trajectoires pauvres (dérivées de rang supérieur nulles), l'estimation de paramètres peut ne pas converger et compromettre la stabilité de la loi de commande. Il peut être nécessaire de détecter ces cas et de modifier la trajectoire pour l'enrichir.

La méthode directe impose, quant à elle, la relation entre la loi de commande et l'algorithme d'estimation des paramètres. En revanche la stabilité de la loi de commande et la convergence de l'erreur de suivi de trajectoire sont en général garanties indépendamment de la trajectoire suivie.

4.5 Exemple de mise en œuvre d'une commande adaptative composite

Les méthodes de commande adaptatives dites *directes* exploitent l'information de l'erreur de suivi de trajectoire alors que les méthodes dites *indirectes* exploitent celle de l'erreur de prédiction. Lorsque les formalismes des deux méthodes peuvent être unifiés, les deux sources d'information peuvent être exploitées en parallèle, dans le cadre d'un type de commande dite *composite* fournissant en général des performances supérieures à chacune des deux méthodes utilisées seules.

La commande adaptative *composite* permet en général l'utilisation de gains d'adaptation plus élevés, conduisant à une adaptation plus rapide, tout en offrant une résistance supérieure aux bruits de mesure et aux erreurs de modélisation.

Dans le cas de la commande adaptative directe appliquée au guidage vertical de l'hélicoptère, nous avons utilisé une loi d'adaptation de type descente de gradient de la forme :

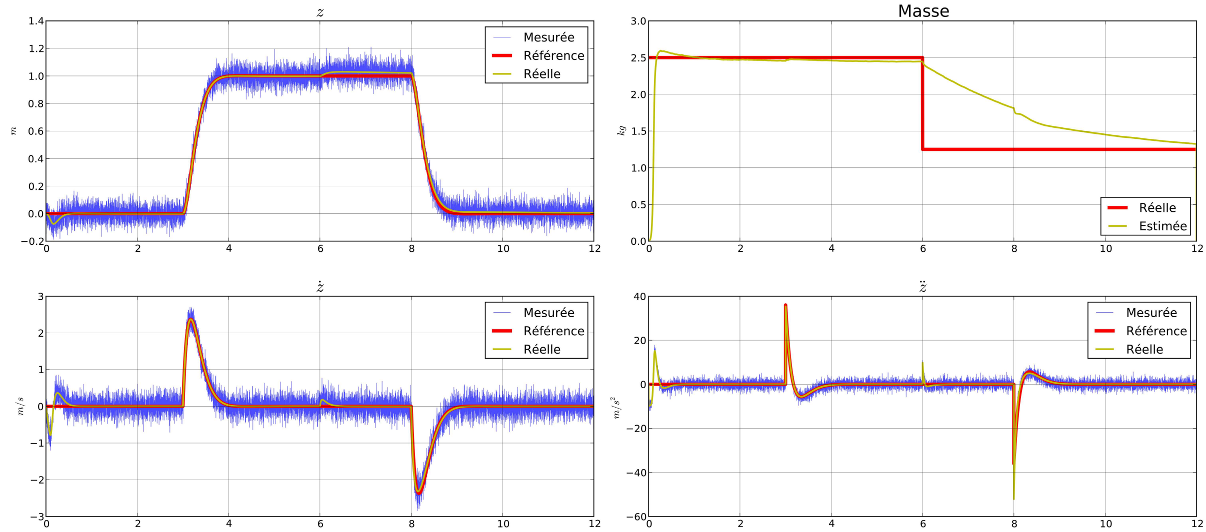


FIGURE 4.7 – Simulation d'un algorithme d'adaptation composite pour la commande de l'hélicoptère sur l'axe vertical pour une trajectoire arrêt-arrêt.

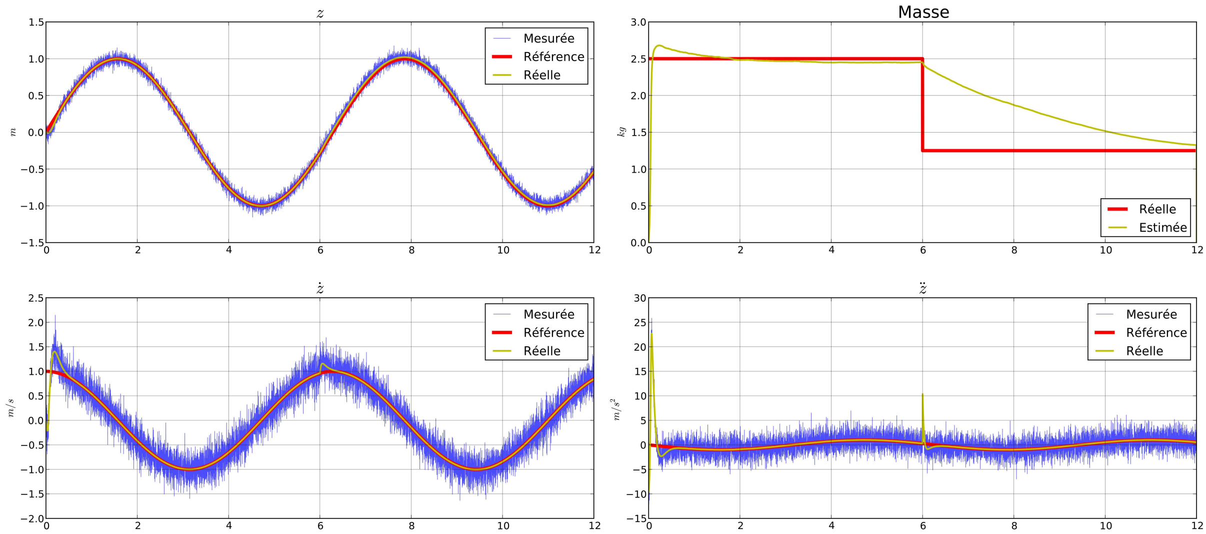


FIGURE 4.8 – Simulation d'un algorithme d'adaptation composite pour la commande de l'hélicoptère sur l'axe vertical pour une trajectoire sinusoïdale.

$$\dot{\hat{m}} = -\gamma v s \tag{4.5.1}$$

Dans le cas de la commande indirecte, nous avons utilisé une loi d'adaptation de type moindres carrés récursifs à facteur d'oubli exponentiel, de la forme :

$$\dot{\hat{m}} = -PWe_p \tag{4.5.2}$$

Une loi d'adaptation composite peut être construite comme une combinaison des deux lois précédentes, à savoir :

$$\dot{\hat{m}} = -P\left(vs + We_p\right) \tag{4.5.3}$$

La mise à jour du gain P est effectuée de la façon décrite au paragraphe 4.6.2.

Afin de vérifier la convergence de l'erreur d'estimation, la fonction de Lyapunov suivante peut être utilisée :

$$V = \frac{1}{2}\left(ms^2 + P^{-1}\tilde{m}^2\right) \tag{4.5.4}$$

Sa dérivée se calcule comme

$$\dot{V} = -\lambda m s^2 - \frac{1}{2}W^2\tilde{m}^2 - \frac{1}{2}\lambda P^{-1}\tilde{m}^2 \tag{4.5.5}$$

qui reste négative tant que la convergence n'est pas arrivée à son terme.

Les figures 4.7 et 4.8 présentent le résultat d'une simulation de guidage vertical de l'hélicoptère avec la loi décrite ci-dessus permettant d'obtenir une convergence extrêmement rapide de l'estimation de la masse ainsi qu'un suivi parfait de la trajectoire.

4.6 Algorithmes d'adaptation

Nous allons présenter dans ce paragraphe différents algorithmes utilisés pour l'identification des paramètres d'un modèle de dynamique exprimé sous forme paramétrique linéaire. $y(t)$ est la sortie de notre processus, $W(u,t)$ est le modèle du processus, et $a(t)$ le vecteur de paramètres à estimer. Ils sont tels que :

$$y(t) = W(u,t)a(t) \tag{4.6.1}$$

Si, à l'instant t, nous disposons d'une estimation $\hat{a}(t)$ du vecteur de paramètres, nous pouvons calculer la sortie prédite du modèle :

$$\hat{y}(t) = W(u,t)\hat{a}(t) \tag{4.6.2}$$

L'erreur de prédiction $e_p(t)$ est définie comme

$$e_p(t) = \hat{y}(t) - y(t) \tag{4.6.3}$$

L'erreur de prédiction est liée à l'erreur d'estimation

$$\tilde{a}(t) = \hat{a}(t) - a(t) \tag{4.6.4}$$

de la manière suivante :

$$e_p(t) = W(u,t)\tilde{a}(t) \tag{4.6.5}$$

4.6.1 Descente de gradient

Présentation Le principe de l'algorithme appelé descente de gradient consiste à mettre à jour le vecteur de paramètres de façon à réduire l'erreur quadratique d'estimation. Pour ce faire, la dérivée temporelle du vecteur de paramètres est exprimée comme une quantité proportionelle à l'opposé du gradient du carré de la norme euclidienne de l'erreur de prédiction par rapport au vecteur de paramètres, soit :

$$\dot{\hat{a}} = -\gamma \frac{\partial (e_p^T e_p)}{\partial \hat{a}} \tag{4.6.6}$$

où γ est appelé *gain d'estimation*. En développant (4.6.6), il vient

$$\dot{\hat{a}} = -2\gamma \frac{\partial (e_p)}{\partial \hat{a}}^T e_p \tag{4.6.7}$$

puis, en utilisant (4.6.5), $\dot{\hat{a}}$ peut être exprimé en fonction du signal et de l'erreur de prédiction :

$$\dot{\hat{a}} = -2\gamma W^T e_p \tag{4.6.8}$$

Stabilité et Convergence Pour étudier la convergence de l'algorithme de descente de gradient, le vecteur de paramètres à estimer étant considéré constant, nous pouvons utiliser (4.6.8) et (4.6.5) pour exprimer la dérivée temporelle de l'erreur d'estimation comme

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}} &= \dot{\hat{a}} \\ \dot{\tilde{a}} &= -2\gamma W^T W \tilde{a} \end{aligned} \tag{4.6.9}$$

La fonction de Lyapunov

$$V = \tilde{a}^T \tilde{a} \tag{4.6.10}$$

dont la dérivée est la suivante et est négative

$$\dot{V} = -4\gamma \tilde{a}^T W^T W \tilde{a} \leq 0 \tag{4.6.11}$$

prouve la stabilité de l'algorithme.

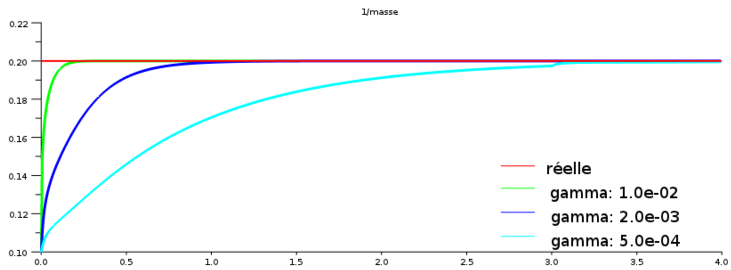


FIGURE 4.9 – Différents gains d'estimation pour l'algorithme MIAC à descente de gradient appliqué au guidage vertical de l'hélicoptère.

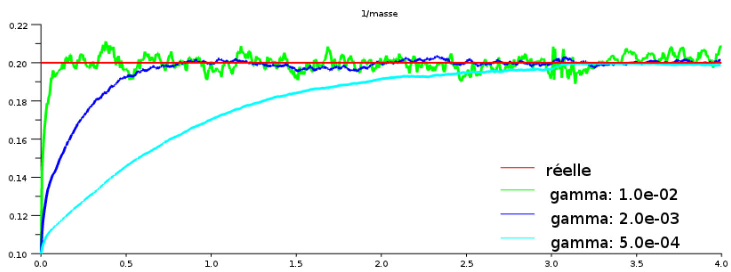


FIGURE 4.10 – Différents gains d'estimation pour l'algorithme MIAC à descente de gradient appliqué au guidage vertical de l'hélicoptère en présence de bruit.

Effets du gain d'estimation Pour mettre en évidence les effets de la valeur du gain d'estimation, reprenons l'exemple développé au chapitre 4.3.1 de l'algorithme MIAC à descente de gradient appliqué à la commande d'un hélicoptère. Il apparaît, comme nous le supposions, que la vitesse de convergence de l'algorithme d'estimation est liée à la valeur du gain d'estimation, une valeur élevée du gain favorisant une convergence rapide de l'estimation (voir figure 4.9).

Supposons maintenant que l'équation suivante est utilisée pour la simulation en place de l'équation (4.3.7) :

$$\ddot{z} + g + \nu = F\frac{1}{m} \tag{4.6.12}$$

ν étant un bruit blanc représentant soit un bruit de mesure, soit une perturbation issue de l'atmosphère.

La simulation (voir figure 4.10) montre qu'un gain d'estimation élevé, bien que permettant une convergence plus rapide, rend l'algorithme plus sensible aux bruits de mesure et aux perturbations.

Pour mettre en évidence un autre effet du gain d'estimation, supposons maintenant

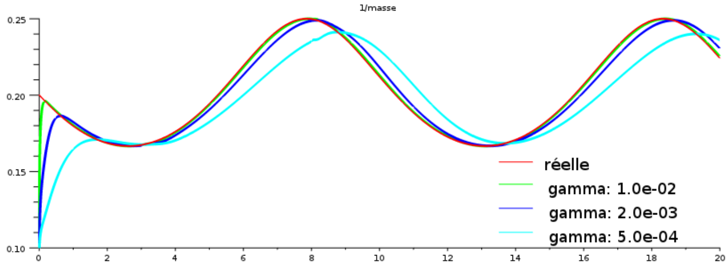


FIGURE 4.11 – Différents gains d'estimation pour l'algorithme MIAC à descente de gradient appliqué au guidage vertical de l'hélicoptère en présence d'un paramètre variable.

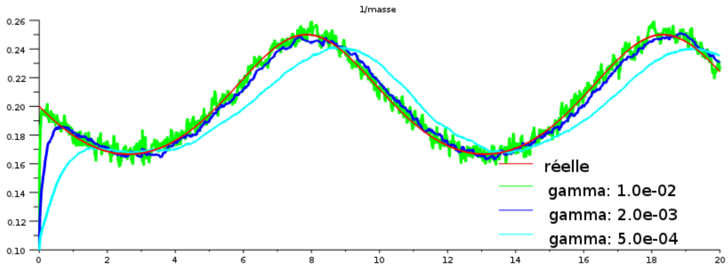


FIGURE 4.12 – Différents gains d'estimation pour l'algorithme MIAC à descente de gradient appliqué au guidage vertical de l'hélicoptère en présence de bruit et d'un paramètre variable.

que le paramètre à estimer n'est plus constant, mais lentement variable (une sinusoïde de pulsation 0.6 radians par seconde dans cet exemple). La simulation (voir figure 4.11) montre qu'un gain d'estimation trop faible empêche l'algorithme d'estimer correctement le paramètre variable.

Si nous réalisons maintenant une simulation contenant à la fois du bruit et un paramètre lentement variable (voir figure 4.12), il apparaît que la valeur du gain d'adaptation doit être choisie avec soin, une valeur trop grande rendant l'algorithme sensible aux bruits, une valeur trop faible le rendant incapable de suivre l'évolution d'un paramètre variable.

4.6.2 Moindres carrés récursifs

Le principe de l'algorithme des moindres carrés est de minimiser l'intégrale du carré de la norme de l'erreur de prédiction.

$$J = \int_0^t |y(r) - W(r)\hat{a}(r)|^2 dr \qquad (4.6.13)$$

En différenciant J par rapport à $\hat{a}$, et en annulant cette expression, il vient

$$\left(\int_0^t W^T(r)W(r)dr\right)\hat{a}(t) = \int_0^t W^T(r)y(r)dr \tag{4.6.14}$$

En supposant que $\int_0^t W^T(r)W(r)dr$ est inversible, nous obtenons la valeur de $\hat{a}$ minimisant l'erreur de prédiction sur l'ensemble des données disponibles.

$$\hat{a}(t) = \left(\int_0^t W^T(r)W(r)dr\right)^{-1}\int_0^t W^T(r)y(r)dr \tag{4.6.15}$$

Cependant, dans le cas de la commande adaptative, les données sont obtenues au fur et à mesure du temps et il est numériquement inefficace de recalculer l'intégrale dès qu'une nouvelle donnée est disponible. En posant

$$P(t) = \left(\int_0^t W^T(r)W(r)dr\right)^{-1} \tag{4.6.16}$$

et en différenciant l'équation (4.6.15) par rapport au temps, nous obtenons une équation différentielle permettant de mettre à jour le vecteur de paramètres lorsqu'une nouvelle donnée devient disponible

$$\dot{\hat{a}}(t) = -P(t)W(t)e_p(t) \tag{4.6.17}$$

L'équation d'évolution de $P(t)$ est obtenue en différenciant (4.6.16) par rapport au temps

$$\frac{d}{dt}\left(P^{-1}(t)\right) = W^T(t)W(t) \tag{4.6.18}$$

et en utilisant l'identité

$$\frac{d}{dt}\left(P^{-1}P\right) = \frac{d}{dt}\left(P\right)P^{-1} + P\frac{d}{dt}\left(P^{-1}\right) = 0 \tag{4.6.19}$$

soit

$$\dot{P}(t) = -P(t)W^T(t)W(t)P(t) \tag{4.6.20}$$

Choix des valeurs initiales Lors de l'utilisation de la forme récursive de l'algorithme des moindres carrés, il est nécessaire de disposer de valeurs initiales pour l'estimée du paramètre $\hat{a}(t_0)$ et pour le gain $P(t_0)$. Il apparaît conséquent de choisir pour $\hat{a}(t_0)$ la meilleure valeur disponible. L'équation (4.6.16) suggère que la valeur initiale de P devrait être infinie, ce qui pose un problème du point de vue numérique.

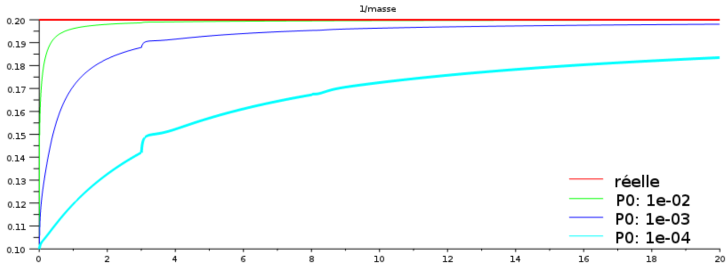


FIGURE 4.13 – Effets du gain initial pour l'algorithme MIAC à moindres carrés.

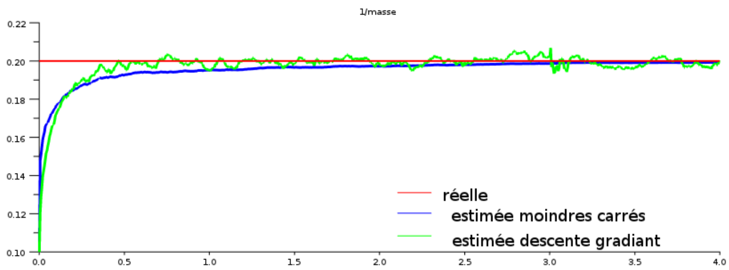


FIGURE 4.14 – Comparaison des effets du bruit pour l'algorithme MIAC à descente de gradient et à moindres carrés.

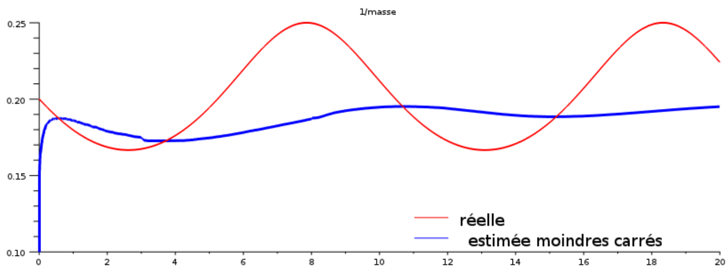


FIGURE 4.15 – Effet d'un paramètre variable sur un algorithme de moindres carrés.

Facteur d'oubli L'algorithme des moindres carrés récursifs réalise *une moyenne* de l'intégralité de l'information disponible jusqu'à l'instant présent et présente de ce fait une bonne résistance aux bruits, résistance s'améliorant au cours du temps.

En contrepartie, il est incapable d'estimer des paramètres variables. En effet, l'équation (4.6.16) montre que P ne peut que décroître au cours du temps, ce qui à pour effet de diminuer l'efficacité de l'adaptation. Intuitivement, *une moyenne* étant réalisée sur l'ensemble des valeurs disponibles depuis le démarrage de l'algorithme, l'influence des nouvelles valeurs décroît au fil du temps. Pire encore, les anciennes valeurs, produites par les anciens paramètres sont prises en compte au même titre que les valeurs récentes, issues des paramètres récents, empêchant ainsi l'algorithme de converger vers ces derniers.

Pour remédier à ce problème, il existe une version de l'algorithme dite *à facteur d'oubli exponentiel*. Cet algorithme minimise l'intégrale pondérée du carré de la norme de l'erreur de prédiction, la pondération décroissant exponentiellement avec l'âge des données.

$$J = \int_0^t e^{-\int_s^t \lambda(r)dr} |y(s) - W(s)\hat{a}(t)|^2 ds \tag{4.6.21}$$

On montre que l'équation de mise à jour du vecteur de paramètres reste identique, soit :

$$\dot{\hat{a}}(t) = -P(t)W(t)e_p(t) \tag{4.6.22}$$

et que l'équation de mise à jour de la matrice de gain devient

$$\dot{P}(t) = \lambda(t)P(t) - P(t)W^T(t)W(t)P(t) \tag{4.6.23}$$

Facteur d'oubli à gain borné Si le facteur d'oubli est petit, P converge vers 0 en présence d'un signal constamment excitant, ce qui a pour effet d'empêcher la prise en compte d'une variation des paramètres. En revanche, si le facteur d'oubli est grand, P va croître en l'absence d'un signal excitant, ce qui risque de provoquer l'instabilité de

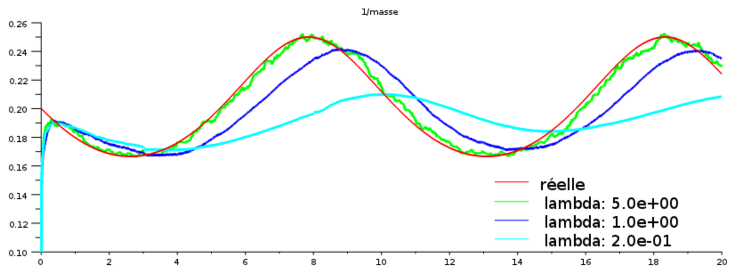


FIGURE 4.16 – Effet du facteur d'oubli sur un algorithme de moindres carrés à oubli exponentiel.

l'estimateur. Dans la mesure où l'estimateur est susceptible d'être soumis à des signaux de niveau d'excitation variable, il semble intéressant de faire varier le facteur d'oubli. De plus, la norme de la matrice de gain P constituant une mesure du niveau d'excitation de W, une stratégie consiste à corréler la valeur du facteur d'oubli λ à la norme de P, ce qui peut être réalisé de la manière suivante :

$$\lambda(t) = \lambda_0 \left(1 - \frac{|P|}{P_s}\right) \tag{4.6.24}$$

où λ_0 et P_s sont des constantes positives, définissant respectivement la valeur maximale du facteur d'oubli et la borne supérieure de la norme de P.

4.7 Application au VTOL plan

Réexaminons la loi de commande basée sur la propriété de platitude différentielle et un retour d'état développée au chapitre précédent. Cette loi a montré être en mesure de guider précisément le véhicule tout en rejetant les perturbations de manière efficace. Cependant, la figure 4.17 représente le comportement du système en présence d'une erreur de 50% des paramètres du modèle (masse et inertie du véhicule), ce qui permet de constater une dégradation des performances de la loi, avec en particulier l'apparition d'un dépassement en x et d'une erreur statique en z.

Afin de remédier à ce problème, il est possible de mettre en place un mécanisme d'adaptation des paramètres du modèle. La loi de commande étant déjà développée par ailleurs, un schéma de type adaptation indirecte va être utilisé. Les calculs effectués au chapitre

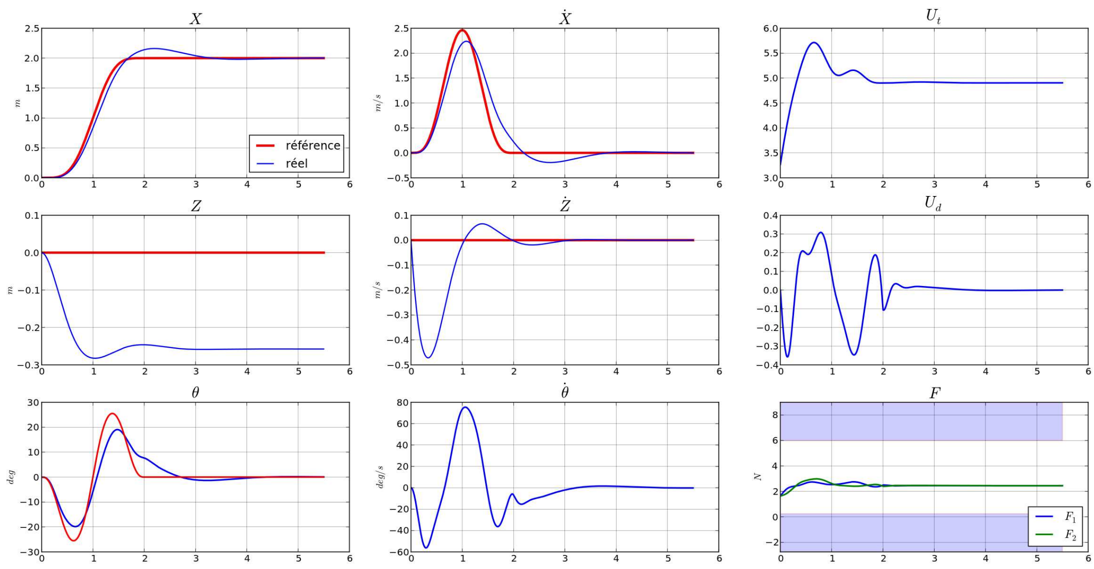


FIGURE 4.17 – Trajectoire du VTOL plan avec la commande plate et le retour d'état en présence d'une erreur de 50% sur les paramètres du modèle.

précédent conduisent à

$$\sqrt{\ddot{x}^2 + (\ddot{z}+g)^2} = \frac{1}{m}.u_t \tag{4.7.1}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{l}{J}.u_d \tag{4.7.2}$$

Le modèle est linéaire par rapport à son paramétrage, ce qui va permettre de réaliser une identification en utilisant la méthode des moindres carrés récursifs. Cependant l'accélération angulaire n'est pas mesurée par les capteurs du véhicule. Cette limitation peut être contournée par l'utilisation de la technique de filtrage décrite dans [Slotine et Li, 1991]. En effectuant la transformée de Laplace de (4.7.2), et en multipliant les deux membres de l'équation par $\frac{1}{p+\lambda}$ (filtre passe bas), où λ est un entier positif et p la variable de Laplace, il vient

$$\frac{1}{p+\lambda} p\dot{\theta}(p) = \frac{l}{J}.\frac{1}{p+\lambda} u_d(p) \tag{4.7.3}$$

Notons

$$u_{df}(p) = \frac{1}{p+\lambda} u_d(p) \tag{4.7.4}$$

et

$$\dot{\theta}_f(p) = \frac{1}{p+\lambda}\dot{\theta}(p) \tag{4.7.5}$$

les signaux obtenus par l'application du filtre passe-bas à u_d et $\dot{\theta}$. (4.7.3) se réécrit, après

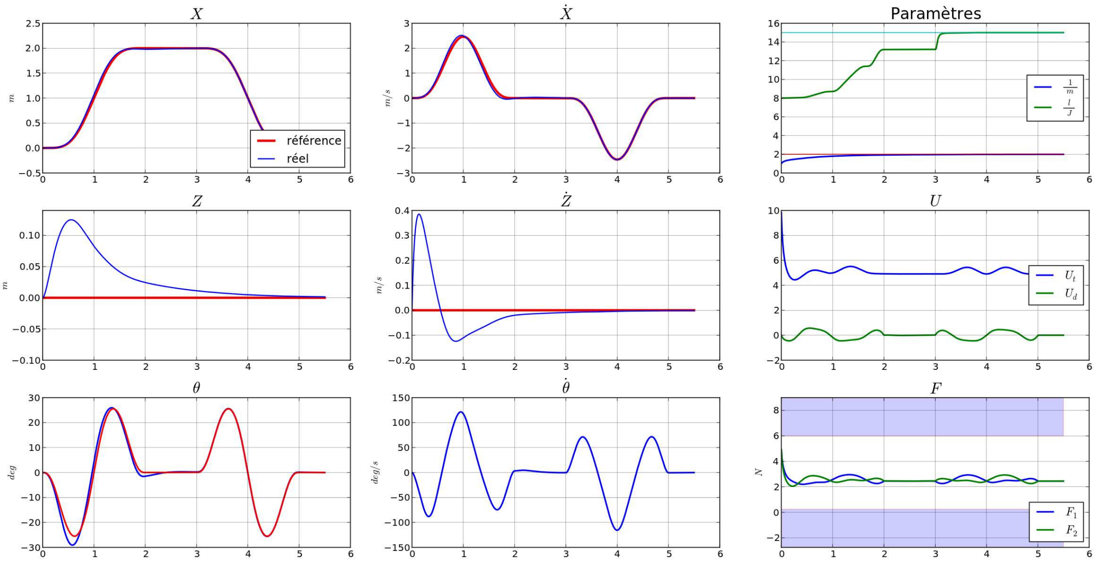


FIGURE 4.18 – Trajectoire du VTOL plan avec la commande plate et le retour d'état avec adaptation des paramètres du modèle.

retransformation dans le domaine temporel :

$$\dot{\theta}(t) - \lambda\dot{\theta}_f(t) = \frac{l}{J}.u_{df}(t) \tag{4.7.6}$$

En notant

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} \sqrt{\ddot{x}^2 + (\ddot{z}+g)^2} \\ \dot{\theta}(t) - \lambda\dot{\theta}_f(t) \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} u_t & 0 \\ 0 & u_{df} \end{pmatrix} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ \frac{l}{J} \end{pmatrix} \tag{4.7.7}$$

(4.7.1) et (4.7.6) se réécrivent sous la forme standard :

$$\underline{y} = W.\underline{a} \tag{4.7.8}$$

qui permet l'estimation du vecteur $\underline{a}$ par la méthode des moindres carrés récursifs présentée au paragraphe 4.6.2. La figure 4.18 présente le résultat d'une simulation consistant en un déplacement horizontal arrêt-arrêt à hauteur constante. Le vecteur de paramètres est estimé au moyen d'un moindre carré récursif à oubli exponentiel avec un facteur d'oubli $\lambda = 0.75$ et les valeurs initiales de la masse et de l'inertie sont entachées de 50% d'erreur comme dans l'expérience de la figure 4.17. On constate que les valeurs réelles des paramètres sont estimées en environ 2 secondes et que le véhicule suit correctement la trajectoire désirée.

4.8 Conclusion

Les techniques de la commande adaptative ont connu face aux exigences de la réalité industrielle un développement très important, concourant de façon décisive à l'applicabilité des techniques de synthèse de lois de commande mises au point par ailleurs. Dans le cas des UAV, il existe une exigence de simplicité pour la mise en œuvre des techniques d'estimation de paramètres. Une première mise en œuvre a été présentée dans le cas du VTOL plan. Dans les chapitres suivants, la dynamique d'un quadrirotor sera mise en équations et analysée. Ceci permettra ensuite de mettre au point des lois de guidage intégrant une boucle d'adaptation pour ce type d'engin aux usages multiples, contribuant ainsi à sa robustesse opérationnelle et à sa polyvalence.

Chapitre 5

Analyse de la dynamique d'un drone à poussée vectorielle

FIGURE 5.1 – Un minivéhicule aérien de type quadrirotor d'une masse de 400 grammes.

5.1 Introduction

Les véhicules aériens de type quadrirotor à pas fixe sont particulièrement répandus dans le monde des minidrones, du fait de leurs possibilités de vol stationnaire associées à une simplicité mécanique permettant une réalisation à bas coût ainsi qu'une miniaturisation aisée. Nous avons donc développé des lois de pilotage-guidage plus particulièrement pour ce type de véhicule. Ceci sera décrit dans les chapitres suivants.

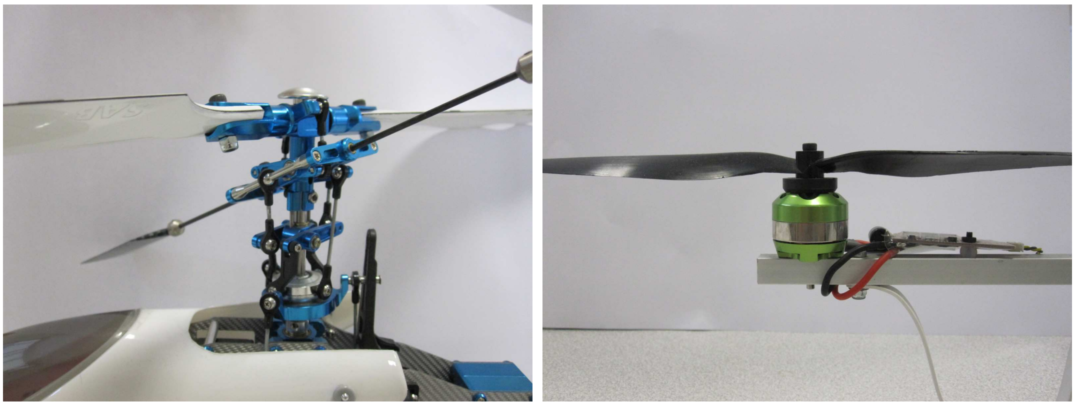


FIGURE 5.2 – Mécanique d'une tête de rotor d'hélicoptère à pas variable (à gauche), rotor à pas fixe (à droite).

5.2 Caractéristiques physiques du véhicule considéré

Le véhicule étudié est composé d'une structure rigide en forme de croix aux extrémités de laquelle sont fixés quatre groupes de propulsion composés d'un moteur électrique et d'une hélice à pas fixe. L'avionique ainsi que la batterie sont regroupées au centre de la croix. Cette disposition offre l'avantage de procurer une protection mécanique, de localiser les capteurs inertiels au centre de masse du véhicule et de minimiser l'inertie. Contrairement aux hélicoptères classiques qui utilisent un système de rotors à pas variable (collectif et cyclique) comme illustré sur la figure 5.2, le quadrirotor à pas fixe présente un simplicité mécanique qui le favorise en terme de masse, de coût et de robustesse.

5.2.1 Historique

Les premiers véhicules utilisant ce type de configuration furent développés dans les années 1920 simultanément en France par Etienne Oemichen, ingénieur de la société Peugeot et aux États-Unis par George de Bothezat pour l'armée américaine (figure 5.3). Les faibles performances des motorisations de l'époque ainsi que l'instabilité naturelle de l'appareil, qui rendaient son pilotage particulièrement délicat, firent que la formule fut provisoirement abandonnée.

La première version miniaturisée de la formule fut réalisée en 1999 par la société américaine Spectrolutions et commercialisée par l'entreprise canadienne Draganfly sous le nom de Roswell Flyer (figure 5.4). L'appareil était équipé d'un stabilisateur électronique à base de gyromètres piézoélectriques et de groupes de propulsion constitués de moteurs électriques à courant continu entraînant les hélices à travers un ensemble de réduction mécanique. La masse importante des moteurs à courant continu, leur faible rendement diminué de sur-

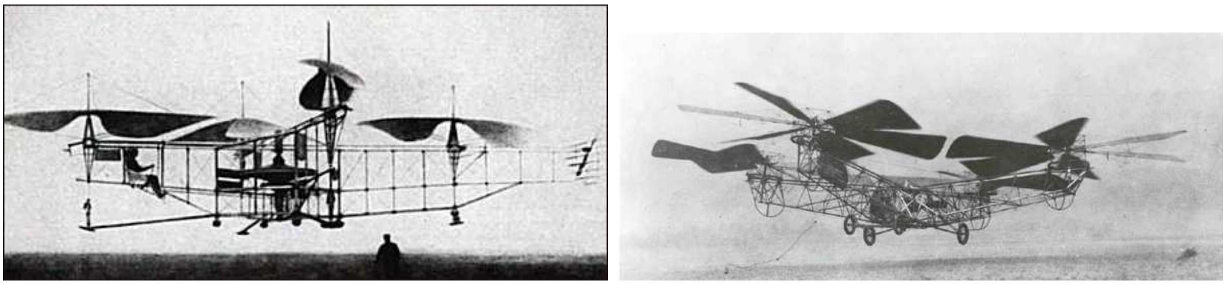


FIGURE 5.3 – Les véhicules quadrirotor développés par Oemichen (à gauche) et par de Bothezat (à droite).

FIGURE 5.4 – Le Roswell Flyer (à gauche) et une représentation de la structure du véhicule issue d'un logiciel de CAO (à droite).

croît par la réduction mécanique, ainsi que la faible densité d'énergie des batteries de type cadmium nickel disponibles à l'époque conféraient au véhicule un faible rapport poussée-poids, à peine supérieur à un, et synonyme de mauvaises qualités de vol ainsi que d'une autonomie réduite à quelques minutes.

Les progrès de l'électronique ont permis l'apparition vers les années 2005 des moteurs électriques synchrones à courant continu (moteurs *brushless*, figure 5.5). Ces moteurs, possédant un meilleur rapport puissance/masse, un meilleur rendement ainsi qu'un couple plus important permettant la suppression du dispositif de réduction, permirent une augmentation spectaculaire des performances des mini-hélicoptères électriques. D'autre part, l'apparition vers la même date de la technologie des batteries au lithium-polymère, possédant une densité d'énergie plus de quatre fois supérieure à la technologie au cadmium-nickel, conféra à ce type d'engin une autonomie comprise entre 30 et 60 minutes de vol.

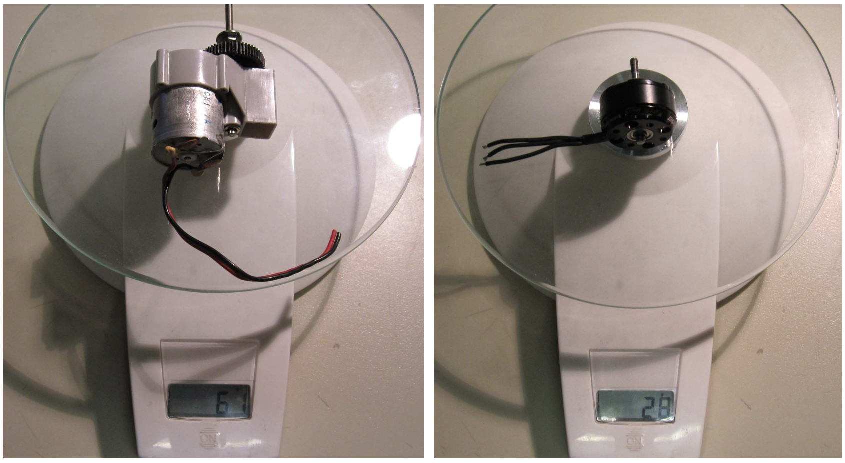


FIGURE 5.5 – Comparaison entre moteurs à courant continu à balais (à gauche) et sans balais (à droite) de puissance équivalente.

5.2.2 Principe de fonctionnement

Le véhicule étant équipé de rotors à pas fixe, il n'est possible d'agir sur ce dernier qu'en modifiant les vitesses de rotation des hélices. Le véhicule ne possède que quatre actionneurs pour commander six degrés de liberté. Il fait à ce titre partie de la catégorie des véhicules sous-actionnés. Il doit s'incliner pour orienter la poussée des rotors qui lui permet de se déplacer.

Les deux paires de rotors de chacun des axes de l'appareil tournent en sens opposés. Lorsque les moteurs tournent tous à la même vitesse, les poussées des quatre rotors sont égales et la résultante est donc appliquée au centre du véhicule. De même, les moments produits par la rotation des rotors s'annulent. En faisant varier de manière identique la vitesse de rotation des quatre rotors, il est donc possible de faire varier la portance sans créer de moment.

De même, en accélérant une paire de rotors opposés et en ralentissant l'autre, il est possible de créer un moment sur l'axe de lacet, sans modifier la poussée totale ni créer de moment de roulis ni de tangage.

Finalement, en accélérant un rotor et en ralentissant le rotor opposé, il est possible de créer un moment sur l'axe de tangage ou de roulis sans modifier la poussée totale ni créer de moment sur l'axe de lacet. La figure 5.6 présente le principe d'utilisation des rotors d'un quadrirotors afin de le piloter et de le guider.

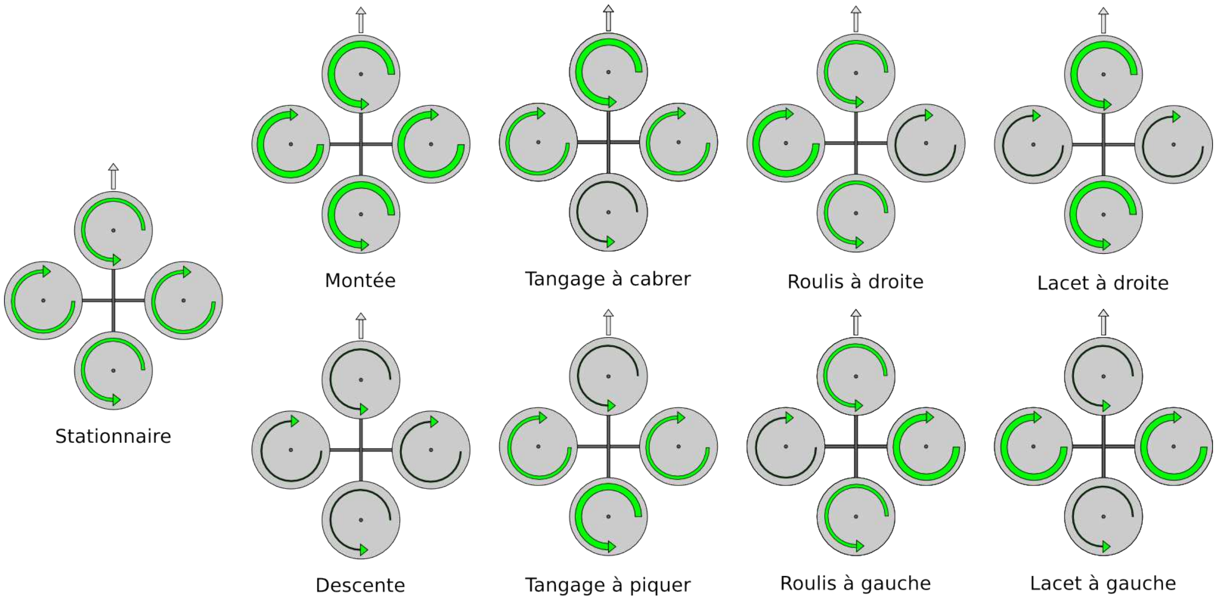


FIGURE 5.6 – Principe d'utilisation des actionneurs. La flèche grise indique l'avant du véhicule ; l'épaisseur des flèches vertes symbolise la vitesse de rotation du rotor correspondant.

5.2.3 Configurations à plus de quatre rotors

Il peut être intéressant d'envisager l'utilisation de système présentant plus de quatre rotors. En effet, ceux-ci présentent des avantages très importants :

Augmentation de la charge utile Pour augmenter la charge utile, on peut augmenter la taille des rotors. Mais pas infiniment : au bout d'un moment la vitesse des extrémités de pales devient problématique. D'autre part le véhicule devient plus dangereux car les gros rotors ont plus d'inertie et provoquent donc plus de dégâts en cas de collision. Une solution beaucoup plus simple consiste donc à augmenter le nombre de rotors.

Augmentation de la sûreté de fonctionnement Dans le cas ou un rotor défaille, un véhicule à quatre rotors n'est plus commandable (voir le calcul ci-dessous). En multipliant le nombre de rotors, il est possible de faire en sorte que la perte d'un rotor non seulement laisse le véhicule commandable, mais lui permette de continuer à accomplir sa mission initiale de façon normale.

Diversité de configuration Avec quatre rotors, une configuration en croix est obligatoire. Avec plus de rotors, on ajoute des degrés de liberté sur la disposition des rotors, qui permettent par exemple de satisfaire des contraintes imposées par la mise en œuvre du

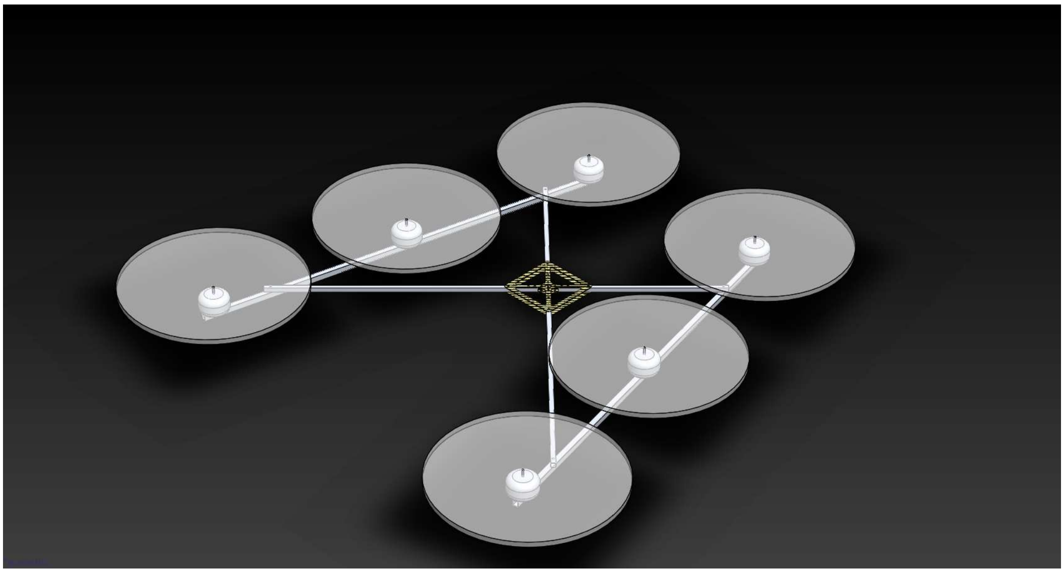


FIGURE 5.7 – Véhicule hexarotors asymétrique.

véhicule (transport par exemple) ou de la charge utile (dégager un axe du véhicule pour un capteur). La configuration en H (figure 5.7) est à ce titre intéressante car elle dégage un axe pour un capteur de type photographique.

Mécaniquement, il est plus difficile de réaliser de gros rotors que de multiplier le nombre de petits rotors (idem pour les moteurs et les contrôleurs de moteur).

5.3 Analyse physique de la dynamique des rotors

Dynamique des rotors D'après [Waslander, 2004], la dynamique d'un rotor peut être représentée en première approximation par l'équation de Ricatti suivante

$$\dot{\omega} = -\frac{1}{\tau}\omega - K_Q\omega^2 + \frac{K_V}{\tau}V \tag{5.3.1}$$

avec

- ω régime de rotation en rad/s
- V tension appliquée aux bornes du moteur en volts
- $\tau, \quad K_Q, \quad K_V$ constantes propres à l'ensemble moteur-hélice-contrôleur.

Cette équation correspond à l'équation du moment cinétique où interviennent un moment interne de frein d'origine mécanique et électrique, un moment aérodynamique résistant et le moment électrique du moteur.

Dans ce cas, on considère que le temps de réaction du propulseur *brushless* est très faible devant le temps de réponse du véhicule, ce qui nous permet de négliger la dynamique du rotor. La figure 5.9 présente la réponse d'un propulseur (moteur *brushless* + rotor) à un échelon de tension électrique. On vérifie effectivement que la réponse du propulseur est certes non linéaire, mais présente un temps de réponse très faible sur une entrée en échelon. La réponse à un échelon de tension V_0 d'un système obéissant à l'équation (5.3.1) est donnée par

$$\omega(t) = \omega_1 + \frac{e^{-\frac{t}{\tau'}}}{\frac{1}{\omega(0)-\omega(1)} + K_Q\tau'\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}}\right)} \tag{5.3.2}$$

avec

$$\omega_1 = \frac{1}{2\tau K_Q}\left(\sqrt{1+4K_VK_Q\tau V_0} - 1\right) \tag{5.3.3}$$

et

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1+4K_VK_Q\tau V_0}} \tag{5.3.4}$$

On a donc en général $\tau' \ll \tau$ et la réponse à un échelon du propulseur ressemble à celle d'un système du premier ordre de constante de temps τ'. Pour les valeurs courantes des paramètres, la durée du transitoire est de l'ordre de quelques centièmes de seconde et on a en régime permanent $\omega_0 = \omega_1$.

Analysons maintenant les effets aérodynamiques créés par la rotation d'un propulseur. L'écoulement de l'air autour des pales du rotor crée à la fois le moment aérodynamique résistant, mais aussi une force de traction perpendiculaire au plan de rotation. Soit θ l'angle que fait le profil d'une section de pale avec le plan de rotation, α est l'incidence locale, et l'inclinaison locale est $\phi = \theta - \alpha$.

Sur une section de pale d'épaisseur Δr, la portance et la traînée s'écrivent

$$\Delta L = \frac{1}{2}\rho V^2 c C_L \Delta r \tag{5.3.5}$$

$$\Delta D = \frac{1}{2}\rho V^2 c C_D \Delta r \tag{5.3.6}$$

où ρ est la masse volumique de l'air, c la corde de la section et C_L et C_D des coefficients aérodynamiques locaux sans dimension (par exemple $C_L = a \cdot \alpha$). La force verticale créée par cette section s'écrit

$$\Delta F = \Delta L \cos\phi - \Delta D \sin\phi \tag{5.3.7}$$

La traction totale du rotor est alors donnée par :

$$T = \frac{N}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\Delta F}{\Delta r} \cdot dr \cdot d\psi \tag{5.3.8}$$

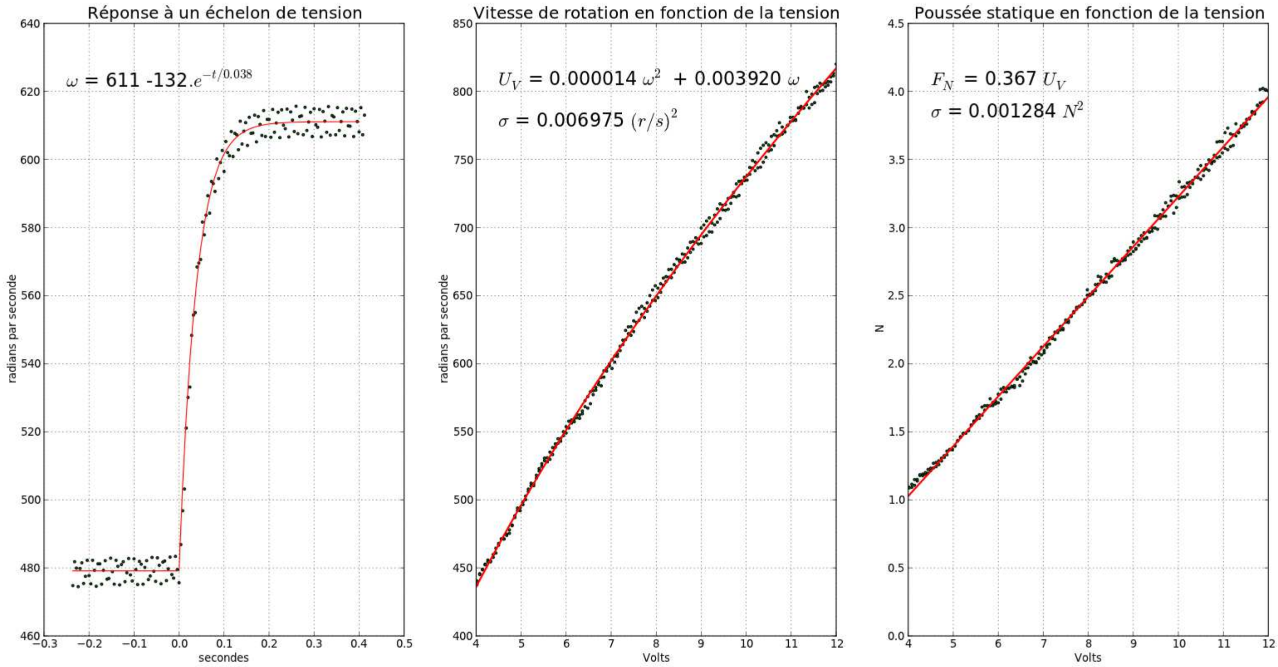


FIGURE 5.8 – Caractérisation dynamique et statique d'un groupe motopropulseur. En pointillés, mesures ; en lignes continues, modèle.

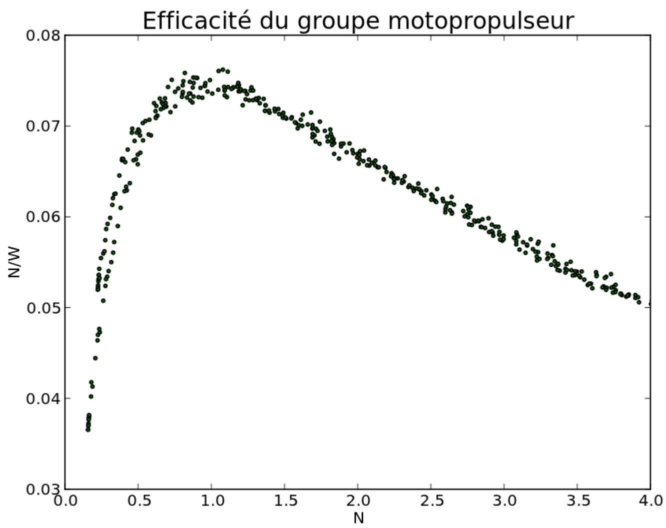


FIGURE 5.9 – Rendement du groupe motopropulseur. La mesure confirme que la masse idéale du véhicule est de 100 grammes par rotor, soit 400 grammes pour le quadrirotor mesuré.

où R est le rayon des N pales du rotor et ou ψ est l'azimut des pales, pris nul à l'opposé de la vitesse d'avancement. On introduit les paramètres σ, μ et λ donnés par

$$\sigma = \frac{N\overline{c}}{\pi R} \tag{5.3.9}$$

où $\overline{c}$ est la corde moyenne des pales

$$\mu = \frac{V}{R\omega} \tag{5.3.10}$$

qui est le rapport entre la vitesse d'avancement et la vitesse de rotation

$$\lambda = \frac{V \sin\phi - V_z}{\omega R} \tag{5.3.11}$$

où V_z est la vitesse verticale du rotor.

On obtient alors une expression pour la traction donnée par :

$$T = \left(NR^3\rho a\overline{c}\left(\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\mu^2\right)\theta - \frac{1}{4}\lambda\right)\right)\omega^2 \tag{5.3.12}$$

$$T = K_T \cdot \omega^2 \tag{5.3.13}$$

On obtient de même l'expression du moment aérodynamique résistant :

$$Q = \left(NR^3\rho a\overline{c}\sigma\left(\frac{1}{8a}\left(1+\mu^2\right)\overline{C}_d + \lambda\left(\frac{1}{6}\theta - \frac{1}{4}\lambda\right)\right)\right)\cdot\omega^2 \tag{5.3.14}$$

où $\overline{C}_D$ est la valeur moyenne du coefficient de traînée sur une pale

$$Q = K_Q\omega^2 \tag{5.3.15}$$

La figure 5.10 représente la distribution des pressions pour un rotor opérant avec $\mu = 0.3$. En fait dans cette étude, compte tenu de la puissance maximale développable par les différents moteurs, la vitesse d'avancement sera toujours très petite par rapport à la vitesse de rotation du rotor et on pourra prendre $\mu = 0$. Dans le cas d'un vol stationnaire ou à faible vitesse, on pourra prendre aussi $\lambda = 0$. Remarquons ici que le modèle précédant ne tient pas compte de la proximité du sol ou de tout autre obstacle qui, modifiant l'écoulement de l'air au voisinage du rotor, modifierait les forces et les moments aérodynamiques créés.

5.4 Missions et génération de trajectoires

Comme décrit au chapitre 1, les missions attribuées aux mini-véhicules aériens sont diverses et variées, mais consistent le plus souvent à collecter des données produites par des

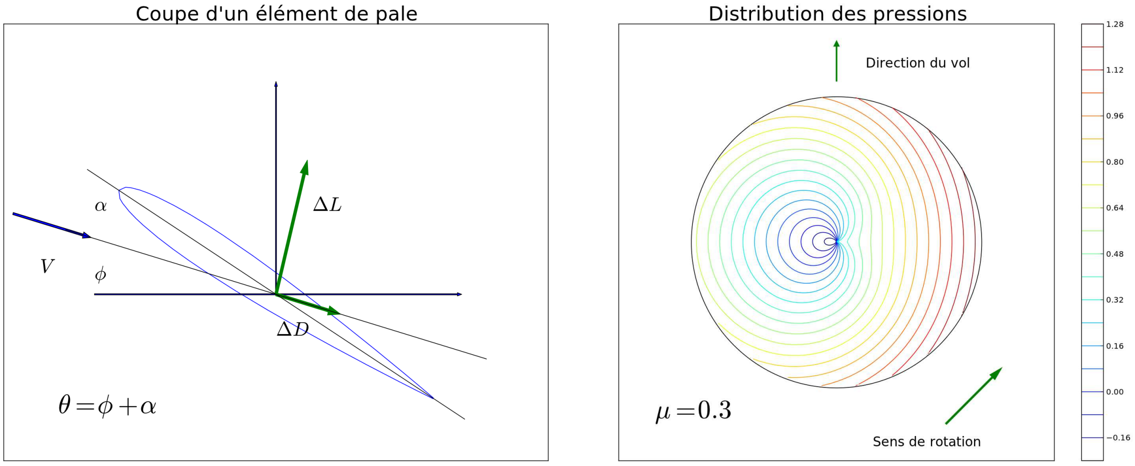


FIGURE 5.10 – Distribution des pressions pour un rotor opérant avec $\mu = 0.3$.

capteurs embarqués. Un des avantages liés à la forme symétrique du véhicule quadrirotor est que ce dernier est en mesure de suivre une trajectoire arbitraire indépendamment de son orientation sur l'axe de lacet. En effet, contrairement à un avion qui du fait de ses surfaces aérodynamiques doit toujours être orienté dans l'axe de sa trajectoire, le quadrirotor présente une très grande manœuvrabilité.

Les missions à réaliser se feront dans des conditions variables associées aux paramètres atmosphériques (vent, pluie, visibilité) et aux charges embarquées. La plupart de ces missions sont à caractère d'observation. Rares sont celles qui supposent une intervention sur le terrain (dépôt ou emport de charges utiles). Une des caractéristiques principales de ces missions, en ce qui concerne le problème de guidage traité dans cette thèse, est le type de mouvements que le minidrone est censé réaliser au cours de ces missions. On pourra distinguer par exemple :

- Un mouvement vertical de montée/descente pour réaliser les manœuvres de décollage et atterrissage. En général l'orientation en cap ne sera pas un objectif primordial pendant ces manœuvres.
- Un vol stationnaire avec surveillance circulaire (commande en cap) ou focalisée et ceci dans des conditions de vent qui pourront être non négligeables.
- Un mouvement en trois dimensions, en général rectiligne par morceaux et réalisé à vitesse assez élevée pour déplacer l'engin d'un endroit de mesure à un autre.
- Un mouvement en trois dimensions accompagnant un repère au sol (voie ferrée, oléoduc...) avec surveillance en continu de l'ouvrage.
- Un mouvement en trois dimensions à caractère local, réalisé à basse vitesse.

On distingue ici deux cas :
- trajectoire à suivre complexe dans un espace confiné (par exemple à l'intérieur d'un bâtiment), la trajectoire peut être préétablie ou générée en ligne suivant la mission ;
- trajectoire à suivre complexe non confinée mais réalisée au voisinage d'objets dont on surveille l'état de surface (les piles d'un pont par exemple).

Dans le cas où les trajectoires à suivre sont planifiées, celles-ci doivent être soumises au système de guidage sous un formalisme compatible avec les caractéristiques des lois de commande mises en œuvre. Les formalismes les plus fréquemment utilisés sont analytiques (la trajectoire à suivre est décrite par une équation tridimensionnelle mettant en œuvre des coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques suivant le cas), paramétriques (courbes de Bezier par exemple), ou différentielles (dans ce dernier cas en général une solution de continuité permet d'intégrer la position actuelle du véhicule à une trajectoire convergente vers la trajectoire souhaitée).

En ce qui concerne la vitesse à laquelle ces trajectoires sont parcourues, celle-ci résultera d'un synthèse (voire d'un compromis) entre les exigences opérationnelles de la mission (par exemple existence d'une contrainte de durée maximale) et les performances de l'engin équipé de son système de guidage et de son système de propulsion.

Dans le cas où les trajectoires à suivre sont générées en ligne, il s'agira le plus souvent de générer des directions locales de déplacement qui intègrent les objectifs de la mission, la présence d'obstacles et les performances manœuvrières de l'engin. Cette génération pourra être, suivant les cas, téléopérée par un opérateur humain ou réalisée automatiquement en mettant en œuvre des techniques de l'Intelligence Artificielle.

Que ces trajectoires soient planifiées à l'avance ou générées en ligne, les performances du système de localisation et d'estimation de l'attitude de l'engin seront fondamentales. Il en sera de même pour le suivi en ligne des principaux paramètres de l'engin quand ceux-ci sont susceptibles d'évoluer au cours de la mission. Ainsi, la figure 5.11 présente un premier schéma général de la structure de commande devant développer la fonction guidage du minidrone.

5.5 Conclusion

Le succès des missions dévolues aux minidrones dépend pour beaucoup de la précision du guidage (1D, 2D, 3D ou 4D). Les difficultés à surmonter concernent principalement :
- la dynamique non linéaire du vol de l'engin associée à des actionneurs unidirectionnels avec possibilité de saturation de ceux-ci ;
- un niveau d'incertitude non négligeable sur des paramètres fondamentaux de cette

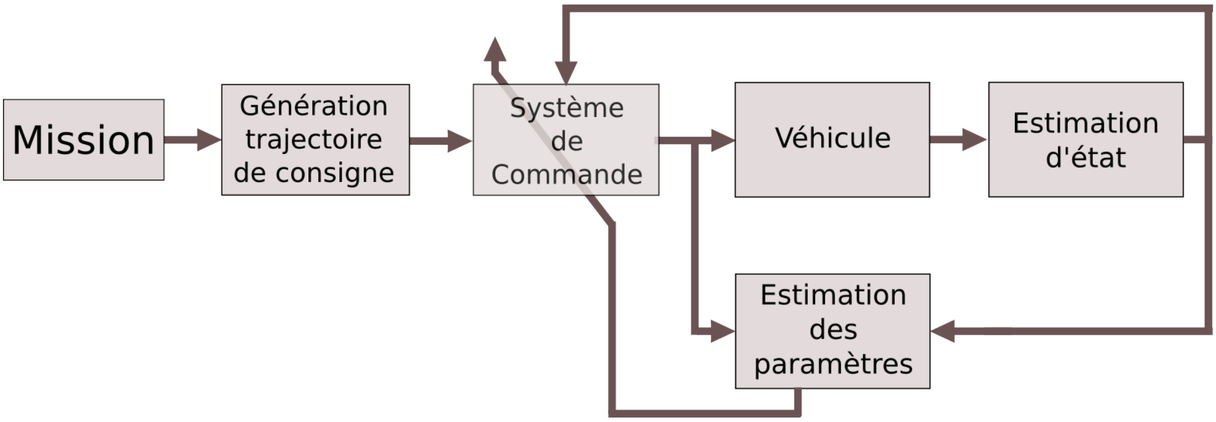


FIGURE 5.11 – Structure de commande.

dynamique (masses, inerties, coefficients aérodynamiques) ;
- des variables difficiles à estimer (vitesse-air faible, effet de sol) ;
- des conditions opérationnelles très variables (diversité des trajectoires à suivre, conditions météorologiques très différenciées...).

Remarquons que la précision du guidage des drones est un critère essentiel pour les études actuelles de réglementation des organismes normatifs de l'Aviation Civile visant à autoriser l'opération des drones au sein du trafic aérien général. Ainsi dans les derniers chapitres de cette thèse sont développés plusieurs éléments visant à contribuer à la synthèse de systèmes de guidage précis, robustes et de mise en œuvre peu exigeante.

Chapitre 6

Conception du système de guidage d'un quadrirotor

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, après avoir mis la dynamique du vol du quadrirotor sous forme de représentation d'état affine non linéaire intégrant une représentation à base de quaternions de ses mouvements de rotation, une structure de commande permettant de guider et de stabiliser le véhicule le long d'une trajectoire de référence est développée.

6.2 Modèle de synthèse de la loi de commande

Il s'agit tout d'abord de mettre au point un modèle de synthèse de la loi de commande. Pour cela, on adopte diverses hypothèses généralement satisfaites dans la réalité.

6.2.1 Hypothèses adoptées

Pour la synthèse de la loi de commande, un modèle dynamique simplifié du quadrirotor est utilisé. Les hypothèses suivantes sont introduites dans le but d'obtenir une forme mathématiquement plus simple de la représentation d'état :

- Dynamique des rotors : La dynamique des rotors du véhicule n'est pas prise en compte. Nous considérons comme variable de commande la poussée des rotors, la dynamique des rotors étant beaucoup plus rapide que la dynamique du véhicule considéré.
- Aérodynamique des rotors : Les forces et moments aérodynamiques créés par les rotors sont supposés proportionnels au carré de la vitesse de rotation des différents

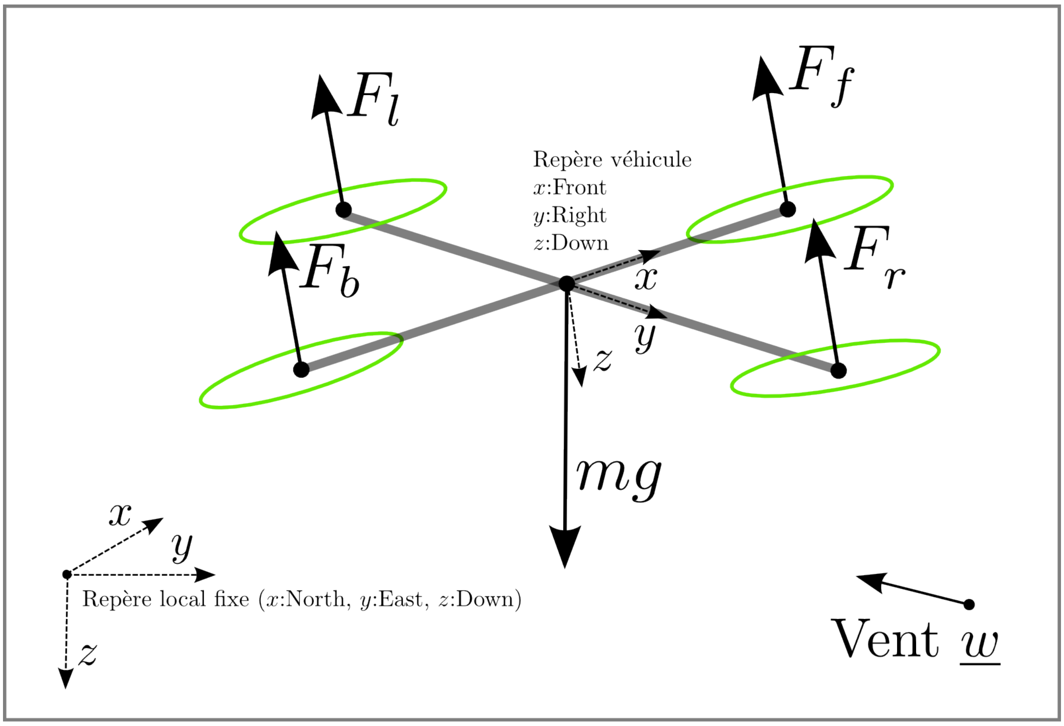


FIGURE 6.1 – Schéma décrivant les notations utilisées pour la mise en équations de la dynamique du quadrirotor.

rotors.

- Aérodynamique de la cellule : Les forces aérodynamiques exercées sur la cellule sont supposées négligeables.
- Tenseur d'inertie : Le tenseur d'inertie du véhicule est considéré diagonal. Une évaluation à l'aide d'un logiciel de CAO, confirmée par une mesure au pendule de torsion, montre que les termes non diagonaux sont environ cent fois plus petits que les termes diagonaux. On adoptera donc ici pour la matrice d'inertie du quadrirotor l'expression :

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix} \tag{6.2.1}$$

6.2.2 Équations des forces et moments

Équation des forces

En appliquant la seconde loi de Newton dans le repère sol considéré inertiel et en notant DCM la matrice rotation entre le repère sol et le repère véhicule, il vient :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} - \Big(DCM\Big)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_f + F_r + F_b + F_l \end{pmatrix} - C_d \begin{pmatrix} \dot{x} - w_x \\ \dot{y} - w_y \\ \dot{z} - w_z \end{pmatrix} \tag{6.2.2}$$

(6.2.2) peut être réécrite comme

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -\frac{C_d}{m}(\dot{x} - w_x) & -\frac{F_f+F_r+F_b+F_l}{m} & DCM(3,1) \\ & -\frac{C_d}{m}(\dot{y} - w_y) & -\frac{F_f+F_r+F_b+F_l}{m} & DCM(3,2) \\ g & -\frac{C_d}{m}(\dot{z} - w_z) & -\frac{F_f+F_r+F_b+F_l}{m} & DCM(3,3) \end{pmatrix} \tag{6.2.3}$$

Équation des moments

En appliquant la loi de Newton pour les moments dans le repère du véhicule, il vient :

$$J \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} F_l - F_r \\ F_f - F_b \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_f + F_b - F_l - F_r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge J \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \tag{6.2.4}$$

qui peut être simplifiée en

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{J_{zz}-J_{yy}}{J_{xx}}qr & + & \frac{l}{J_{xx}} & (F_l - F_r) \\ -\frac{J_{xx}-J_{zz}}{J_{yy}}pr & + & \frac{l}{J_{yy}} & (F_f - F_b) \\ -\frac{J_{yy}-J_{xx}}{J_{zz}}pq & + & \frac{k}{J_{zz}} & (F_f + F_b - F_l - F_r) \end{pmatrix} \tag{6.2.5}$$

Variables de commande

Au vu de (6.2.3) et (6.2.5), il apparaît intéressant de réaliser le changement de variables de commande suivant

$$\begin{aligned} u_t &= F_f + F_b + F_l + F_r \\ u_p &= F_l - F_r \\ u_q &= F_f - F_b \\ u_r &= F_f + F_b - F_l - F_r \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

ou matriciellement :

$$\begin{pmatrix} u_t \\ u_p \\ u_q \\ u_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_f \\ F_b \\ F_r \\ F_l \end{pmatrix} \tag{6.2.7}$$

ou de façon inverse :

$$\begin{pmatrix} F_f \\ F_b \\ F_r \\ F_l \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t \\ u_p \\ u_q \\ u_r \end{pmatrix} \tag{6.2.8}$$

Notons

$$\begin{pmatrix} \delta_{Jx} & \delta_{Jy} & \delta_{Jz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{J_{zz}-J_{yy}}{J_{xx}} & \frac{J_{xx}-J_{zz}}{J_{yy}} & \frac{J_{yy}-J_{xx}}{J_{zz}} \end{pmatrix} \tag{6.2.9}$$

L'équation (6.2.5) se réécrit alors

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta_{Jx} qr & + & \frac{l}{J_{xx}} & u_p \\ -\delta_{Jy} pr & + & \frac{l}{J_{yy}} & u_q \\ -\delta_{Jz} pq & + & \frac{k}{J_{zz}} & u_r \end{pmatrix} \tag{6.2.10}$$

Extension à plus de quatre rotors

Considérons un véhicule constitué d'un ensemble de N rotors identiques $R_i, i \in [1:N]$, coplanaires et localisés aux coordonnées $(x_i, y_i), i \in [1:N]$ dans le repère lié au véhicule, chaque rotor tournant dans la direction $d_i, i \in [1:N], d_i \in [-1;1]$ à la vitesse $\omega_i, i \in [1:N]$. En adoptant les notations et les hypothèses du paragraphe 6.2, l'équation des forces s'écrit

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -\frac{C_d}{m}(\dot{x} - w_x) & -\frac{DCM(3,1)}{m} & \sum_{i=1}^N F_i \\ & -\frac{C_d}{m}(\dot{y} - w_y) & -\frac{DCM(3,2)}{m} & \sum_{i=1}^N F_i \\ g & -\frac{C_d}{m}(\dot{z} - w_z) & -\frac{DCM(3,3)}{m} & \sum_{i=1}^N F_i \end{pmatrix} \tag{6.2.11}$$

L'équation des moments s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{J_{zz}-J_{yy}}{J_{xx}} qr & + & \frac{1}{J_{xx}} & \sum_{i=1}^N -y_i.F_i \\ -\frac{J_{xx}-J_{zz}}{J_{yy}} pr & + & \frac{1}{J_{yy}} & \sum_{i=1}^N x_i.F_i \\ -\frac{J_{yy}-J_{xx}}{J_{zz}} pq & + & \frac{k}{J_{zz}} & \sum_{i=1}^N d_i.F_i \end{pmatrix} \tag{6.2.12}$$

Au vu de (6.2.11) et (6.2.12), il apparaît intéressant de réaliser le changement de variable de commande suivant :

$$u_t = \sum_{i=1}^N F_i \quad u_p = \sum_{i=1}^N -y_i.F_i \quad u_q = \sum_{i=1}^N x_i.F_i \quad u_r = \sum_{i=1}^N d_i.F_i \tag{6.2.13}$$

ou matriciellement :

$$\begin{pmatrix} u_t \\ u_p \\ u_q \\ u_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ -y_1 & \dots & -y_N \\ x_1 & \dots & x_N \\ d_1 & \dots & d_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} \tag{6.2.14}$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ u_p \\ u_q \\ u_r \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} \tag{6.2.15}$$

La matrice P est une matrice de dimensions $4 \times N$ composée des paramètres décrivant la géométrie des N rotors. Sous réserve que P soit de rang 4, il existe une infinité d'inverses à gauche Q décrivant l'allocation de l'effort de commande sur les différents actionneurs.

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_t \\ u_p \\ u_q \\ u_r \end{pmatrix} \tag{6.2.16}$$

On remarque que, sous réserve que le changement de variables soit inversible et inversé, les équations de dynamique obtenues pour le véhicule à plus de quatre rotors sont identiques à celles obtenues pour le quadrirotor.

Représentation d'état utilisant les angles d'Euler

Revenant au quadrirotor, en exprimant les composantes de DCM en fonction des angles d'Euler selon (B.3.3) et en utilisant le changement de variables de commande défini en (6.2.6), (6.2.3) peut être réécrite comme

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -\frac{C_d}{m}(\dot{x} - w_x) & -\frac{u_t}{m} & (c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) \\ & -\frac{C_d}{m}(\dot{y} - w_y) & -\frac{u_t}{m} & (c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi) \\ g & -\frac{C_d}{m}(\dot{z} - w_z) & -\frac{u_t}{m} & (c_\phi c_\theta) \end{pmatrix} \tag{6.2.17}$$

À ces équations s'ajoute l'équation cinématique des angles d'Euler (B.3.10). En introduisant le vecteur d'état

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x & y & z & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \phi & \theta & \psi & p & q & r \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{12}$$

et le vecteur de commande

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} u_t & u_p & u_q & u_r \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$$

on obtient la représentation d'état non linéaire suivante :

$$\underline{\dot{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ -\frac{C_d}{m}(\dot{x}-w_x) - \frac{u_t}{m}(c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) \\ -\frac{C_d}{m}(\dot{y}-w_y) - \frac{u_t}{m}(c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi) \\ g - \frac{C_d}{m}(\dot{z}-w_z) - \frac{u_t}{m}(c_\phi c_\theta) \\ p + s_\phi t_\theta q + c_\phi t_\theta r \\ c_\phi q - s_\phi r \\ \frac{s_\phi}{c_\theta} q + \frac{c_\phi}{c_\theta} r \\ -\delta_{Jx} qr + u_p \frac{l}{J_{xx}} \\ -\delta_{Jy} pr + u_q \frac{l}{J_{yy}} \\ -\delta_{Jz} pq + u_r \frac{k}{J_{zz}} \end{pmatrix} \tag{6.2.18}$$

qui peut se mettre sous forme affine de commande :

$$\underline{\dot{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ -\frac{C_d}{m}(\dot{x}-w_x) \\ -\frac{C_d}{m}(\dot{y}-w_y) \\ g - \frac{C_d}{m}(\dot{z}-w_z) \\ p + s_\phi t_\theta q + c_\phi t_\theta r \\ c_\phi q - s_\phi r \\ \frac{s_\phi}{c_\theta} q + \frac{c_\phi}{c_\theta} r \\ -\delta_{Jx} qr \\ -\delta_{Jy} pr \\ -\delta_{Jz} pq \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m}(c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m}(c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m}(c_\phi c_\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{J_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{J_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k}{J_{zz}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t \\ u_p \\ u_q \\ u_r \end{pmatrix} \tag{6.2.19}$$

Représentation d'état utilisant un quaternion unitaire

En exprimant les composantes de DCM en fonction des composantes d'un quaternion unitaire (voir (B.4.3)) et en utilisant le changement de variable de commande défini en (6.2.6), (6.2.3) peut être réécrite comme

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -\frac{C_d}{m}(\dot{x}-w_x) & -\frac{u_t}{m} & 2(\eta_x\eta_z + \eta_i\eta_y) \\ & -\frac{C_d}{m}(\dot{y}-w_y) & -\frac{u_t}{m} & 2(\eta_y\eta_z - \eta_i\eta_x) \\ g & -\frac{C_d}{m}(\dot{z}-w_z) & -\frac{u_t}{m} & (\eta_i^2 - \eta_x^2 - \eta_y^2 + \eta_z^2) \end{pmatrix} \tag{6.2.20}$$

À ces équations s'ajoutent l'équation cinématique du quaternion (B.4.7).

Considérant le vecteur d'état $\underline{X} = \begin{pmatrix} x & y & z & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \eta_i & \eta_x & \eta_y & \eta_z & p & q & r \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{13}$ et le vecteur de commande $\underline{U} = \begin{pmatrix} u_t & u_p & u_q & u_r \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$, une nouvelle représentation d'état non linéaire de la dynamique est obtenue

$$\underline{\dot{X}} = \left(\begin{array}{ccc} & \dot{x} & \\ & \dot{y} & \\ & \dot{z} & \\ \hline -\frac{C_d}{m}(\dot{x} - w_x) & -\frac{u_t}{m} & 2(\eta_x\eta_z + \eta_i\eta_y) \\ -\frac{C_d}{m}(\dot{y} - w_y) & -\frac{u_t}{m} & 2(\eta_y\eta_z - \eta_i\eta_x) \\ g - \frac{C_d}{m}(\dot{z} - w_z) & -\frac{u_t}{m} & (\eta_i^2 - \eta_x^2 - \eta_y^2 + \eta_z^2) \\ \hline \frac{1}{2}(-p\eta_x - q\eta_y - r\eta_z) & & \\ \frac{1}{2}(p\eta_e + r\eta_y - q\eta_z) & & \\ \frac{1}{2}(q\eta_e - r\eta_x + p\eta_z) & & \\ \frac{1}{2}(r\eta_e + q\eta_x - p\eta_y) & & \\ \hline -\delta_{Jx}qr & +u_p & \frac{l}{J_{xx}} \\ -\delta_{Jy}pr & +u_q & \frac{l}{J_{yy}} \\ -\delta_{Jz}pq & +u_r & \frac{k}{J_{zz}} \end{array} \right) \tag{6.2.21}$$

Cette représentation utilisant un quaternion pour représenter l'orientation a l'avantage de ne pas comporter de singularité, mais n'est par contre pas de dimension minimale. Elle peut elle aussi être mise sous forme affine de commande :

$$\underline{\dot{X}} = \left(\begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \hline -\frac{C_d}{m}(\dot{x} - w_x) \\ -\frac{C_d}{m}(\dot{y} - w_y) \\ -\frac{C_d}{m}(\dot{z} - w_z) \\ \hline \frac{1}{2}(-p\eta_x - q\eta_y - r\eta_z) \\ \frac{1}{2}(p\eta_e + r\eta_y - q\eta_z) \\ \frac{1}{2}(q\eta_e - r\eta_x + p\eta_z) \\ \frac{1}{2}(r\eta_e + q\eta_x - p\eta_y) \\ \hline -\delta_{Jx}qr \\ -\delta_{Jy}pr \\ -\delta_{Jz}pq \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{m}2(\eta_x\eta_z + \eta_i\eta_y) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m}2(\eta_y\eta_z - \eta_i\eta_x) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m}(\eta_i^2 - \eta_x^2 - \eta_y^2 + \eta_z^2) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{l}{J_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{J_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k}{J_{zz}} \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_t \\ u_p \\ u_q \\ u_r \end{pmatrix} \tag{6.2.22}$$

6.3 Analyse des propriétés du modèle de synthèse

6.3.1 Platitude différentielle

Considérons la sortie $\underline{Y} = \begin{pmatrix} x & y & z & \psi \end{pmatrix}^T$. Il semble intéressant ici de vérifier que ces quatre sorties sont des sorties plates pour les quatre entrées u_t, u_p, u_q, u_r. Ceci permettra alors d'utiliser les techniques de suivi de trajectoire de la commande différentiellement plate. Pour démontrer que ces quatre sorties sont plates, il suffit d'exprimer le vecteur d'état ainsi que le vecteur de commande en fonction d'un nombre fini de dérivées temporelles de ces quatre sorties.

Vecteur d'état

Le cas des composantes $x, y, z, \psi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\psi}$ est trivial. Il reste donc à exprimer ϕ, θ, p, q, r. L'inverse de l'équation cinématique des angles d'Euler (B.3.9) permet d'exprimer les vitesses angulaires en fonction de ces derniers et de leurs dérivées temporelles, soit :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & s_\phi c_\theta \\ 0 & -s_\phi & c_\phi c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{6.3.1}$$

Il reste donc à exprimer $\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}$ en fonction des composantes de la sortie plate et de ses dérivées temporelles. Les lignes 4 à 6 de la représentation d'état (6.2.18) peuvent être réécrites de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} + \frac{C_d}{m}(\dot{x} - w_x) \\ \ddot{y} + \frac{C_d}{m}(\dot{y} - w_y) \\ \ddot{z} + \frac{C_d}{m}(\dot{z} - w_z) \quad -g \end{pmatrix} = -\frac{u_t}{m} \begin{pmatrix} c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ c_\phi c_\theta \end{pmatrix} \tag{6.3.2}$$

Posons

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} + \frac{C_d}{m}(\dot{x} - w_x) \\ \ddot{y} + \frac{C_d}{m}(\dot{y} - w_y) \\ \ddot{z} + \frac{C_d}{m}(\dot{z} - w_z) \quad -g \end{pmatrix} \tag{6.3.3}$$

En supposant u_t, c_ϕ et c_θ différents de zéro, et en divisant les premières et deuxièmes lignes de (6.3.2) par la troisième, il vient

$$\frac{a_x}{a_z} = t_\theta c_\psi + t_\phi \frac{s_\psi}{c_\theta} \tag{6.3.4}$$

$$\frac{a_y}{a_z} = t_\theta s_\psi - t_\phi \frac{c_\psi}{c_\theta} \tag{6.3.5}$$

En multipliant (6.3.4) par c_ψ, (6.3.5) par s_ψ, puis en ajoutant les deux, il vient :

$$t_\theta = \frac{a_x c_\psi + a_y s_\psi}{a_z} \tag{6.3.6}$$

En multipliant (6.3.4) par s_ψ, (6.3.5) par $-c_\psi$, puis en ajoutant les deux, il vient :

$$t_\phi = \frac{a_x s_\psi - a_y c_\psi}{a_z} c_\theta \tag{6.3.7}$$

(6.3.6) et (6.3.7) suggèrent de définir $\underline{b}$, l'image de $\underline{a}$ par la rotation d'axe z et d'angle ψ.

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{6.3.8}$$

Les dérivées de $\underline{b}$ se calculent comme

$$\dot{\underline{b}} = \begin{pmatrix} \dot{b}_x \\ \dot{b}_y \\ \dot{b}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & {}_c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix} - \dot{\psi} \begin{pmatrix} s_\psi & -c_\psi & 0 \\ c_\psi & s_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{6.3.9}$$

$$\ddot{\underline{b}} = \begin{pmatrix} \ddot{b}_x \\ \ddot{b}_y \\ \ddot{b}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{a}_x \\ \ddot{a}_y \\ \ddot{a}_z \end{pmatrix} - 2\dot{\psi} \begin{pmatrix} s_\psi & -c_\psi & 0 \\ c_\psi & s_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix} \tag{6.3.10}$$

$$+ \begin{pmatrix} -\ddot{\psi} s_\psi - \dot{\psi}^2 c_\psi & \ddot{\psi} c_\psi - \dot{\psi}^2 s_\psi & 0 \\ -\ddot{\psi} c_\psi + \dot{\psi}^2 s_\psi & -\ddot{\psi} s_\psi - \dot{\psi}^2 c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{6.3.11}$$

Notons c le module des composantes de $\underline{b}$ dans le plan xz

$$c = \sqrt{b_x^2 + b_z^2} \tag{6.3.12}$$

Les dérivées première et seconde par rapport au temps de c s'expriment comme

$$\dot{c} = \frac{b_x \dot{b}_x + b_z \dot{b}_z}{c} \tag{6.3.13}$$

$$\ddot{c} = \frac{\dot{b}_x^2 + b_x \ddot{b}_x + \dot{b}_z^2 + b_z \ddot{b}_z - \dot{c}^2}{c} \tag{6.3.14}$$

Il vient alors de (6.3.6)

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{b_x}{b_z}\right) \tag{6.3.15}$$

En utilisant l'identité

$$\cos\left(\operatorname{atan}(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{6.3.16}$$

il vient de (6.3.15)

$$\cos\theta = \frac{|b_z|}{c} \tag{6.3.17}$$

(6.3.7) se réécrit

$$\tan\phi = -\operatorname{sign}(b_z)\,\frac{b_y}{c} \tag{6.3.18}$$

d'où finalement

$$\phi = -\operatorname{sign}(b_z)\operatorname{atan}\left(\frac{b_y}{c}\right) \tag{6.3.19}$$

En dérivant (6.3.15), il vient

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{b}_x b_z - b_x \dot{b}_z}{c^2} \tag{6.3.20}$$

En dérivant (6.3.19), il vient

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{b}_y c - b_y \dot{c}}{|\underline{b}|^2} \tag{6.3.21}$$

En utilisant l'identité

$$\sin\left(\operatorname{atan}(x)\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \tag{6.3.22}$$

il vient

$$\sin\theta = \operatorname{sign}(b_z)\,\frac{b_x}{c} \tag{6.3.23}$$

En utilisant (6.3.1), il vient

$$p = \frac{\dot{b}_y c - b_y \dot{c}}{|\underline{b}|^2} - \operatorname{sign}(b_z)\,\frac{b_x}{c}\dot{\psi} \tag{6.3.24}$$

De la même façon que pour θ, on calcule

$$\cos\phi = \frac{c}{|\underline{b}|} \tag{6.3.25}$$

et

$$\sin\phi = \frac{b_y}{|\underline{b}|} \tag{6.3.26}$$

En utilisant (6.3.1), il vient

$$q = \frac{\dot{b}_x b_z - b_x \dot{b}_z}{|\underline{b}|c} + \frac{b_y b_z}{|\underline{b}|c}\dot{\psi} \tag{6.3.27}$$

et

$$r = -\frac{b_y}{|\underline{b}|}\frac{\dot{b}_x b_z - b_x \dot{b}_z}{c^2} + \frac{b_z}{|\underline{b}|}\dot{\psi} \tag{6.3.28}$$

Le vecteur d'état peut donc être exprimé en fonction des dérivées jusqu'à l'ordre deux des coordonnées du centre de gravité du quadrirotor et de son cap :

$$\underline{X} = \Phi_0(x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}, z, \dot{z}, \ddot{z}, \psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi})$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ -\text{sign}\,(b_z)\,\text{atan}\left(\frac{b_y}{|b|_{xz}}\right) \\ \text{atan}\left(\frac{b_x}{b_z}\right) \\ \psi \\ -\text{sign}\,(b_z)\,\frac{|b|_{xz}\dot{b}_y - |\dot{b}|_{xz} b_y}{|b|^2} - \dot{\psi}\frac{b_x}{|b|_{xz}} \\ \frac{\dot{b}_x b_z - b_x \dot{b}_z}{|b|} + \frac{b_y b_z}{|b||b|_{xz}}\dot{\psi} \\ -\frac{b_y}{|b|_{xz}}\frac{\dot{b}_x b_z - b_x \dot{b}_z}{|b|} + \frac{b_z}{|b|}\dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{6.3.29}$$

Vecteur de commande

L'équation (6.2.2) peut être réécrite sous la forme

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} - \frac{C_d}{m}(\dot{x} - w_x) \\ \ddot{y} - \frac{C_d}{m}(\dot{y} - w_y) \\ \ddot{z} - \frac{C_d}{m}(\dot{z} - w_z) \quad -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \left(DCM\right)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{u_t}{m} \end{pmatrix} \tag{6.3.30}$$

DCM étant une matrice de rotation, elle conserve les normes. Il vient donc

$$\left(\frac{u_t}{m}\right)^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \tag{6.3.31}$$

u_t étant positive (car somme de quatre quantités positives), il vient

$$u_t = m\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{6.3.32}$$

En inversant l'équation (6.2.10), il vient

$$\begin{pmatrix} u_p \\ u_q \\ u_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{J_{xx}}{l}(\dot{p} + \delta_{Jx} qr) \\ \frac{J_{yy}}{l}(\dot{q} + \delta_{Jy} pr) \\ \frac{J_{zz}}{k}(\dot{r} + \delta_{Jz} pq) \end{pmatrix} \tag{6.3.33}$$

En dérivant (6.3.1), il vient

$$\dot{p} = \ddot{\phi} - c_\theta \dot{\theta}\dot{\psi} - s_\theta \ddot{\psi} \tag{6.3.34}$$

$$\dot{q} = -s_\phi \dot{\phi}\dot{\theta} + c_\phi \ddot{\theta} + c_\phi c_\theta \dot{\phi}\dot{\psi} - s_\phi s_\theta \dot{\theta}\dot{\psi} + s_\phi c_\theta \ddot{\psi} \tag{6.3.35}$$

$$\dot{r} = -c_\phi \dot{\phi}\dot{\theta} - s_\phi \ddot{\theta} - s_\phi c_\theta \dot{\phi}\dot{\psi} - c_\phi s_\theta \dot{\theta}\dot{\psi} + c_\phi c_\theta \ddot{\psi} \tag{6.3.36}$$

En dérivant (6.3.21) et (6.3.20), il vient :

$$\ddot{\phi} = \frac{\left(\ddot{b}_y c - b_y \ddot{c}\right)}{|\underline{b}|^2} - 2\frac{\left(\dot{b}_y c - b_y \dot{c}\right)\left(\dot{b}_x b_x + \dot{b}_y b_y + \dot{b}_z b_z\right)}{|\underline{b}|^4} \tag{6.3.37}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\left(\ddot{b}_x b_z - b_x \ddot{b}_z\right)}{c^2} - 2\frac{\left(\dot{b}_x b_z - b_x \dot{b}_z\right)\left(b_x \dot{b}_x + b_z \dot{b}_z\right)}{c^4} \tag{6.3.38}$$

En regroupant (6.3.33), (6.3.34), (6.3.35), (6.3.36), (6.3.37) et (6.3.38), le vecteur de commande peut donc être exprimé en fonction des dérivées temporelles de la sortie jusqu'à l'ordre quatre :

$$\underline{U} = \Phi_1(\underline{Y}^{(0)}, \underline{Y}^{(1)}, \underline{Y}^{(2)}, \underline{Y}^{(3)}, \underline{Y}^{(4)})$$

6.3.2 Stabilité

Afin d'étudier plus aisément la stabilité de la dynamique du système, nous divisons la représentation d'état utilisant les angles d'Euler comme suit :

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} \underline{X}_p^T & \underline{X}_v^T & \underline{X}_e^T & \underline{X}_\omega^T \end{pmatrix}^T \tag{6.3.39a}$$

avec

$$\underline{X}_p = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \tag{6.3.39b}$$

$$\underline{X}_v = \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{pmatrix}^T \tag{6.3.39c}$$

$$\underline{X}_e = \begin{pmatrix} \phi & \theta & \psi \end{pmatrix}^T \tag{6.3.39d}$$

$$\underline{X}_\omega = \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}^T \tag{6.3.39e}$$

et

$$f = \begin{pmatrix} f_p^T & f_v^T & f_e^T & f_\omega^T \end{pmatrix}^T \tag{6.3.40a}$$

où

$$f_p = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \tag{6.3.40b}$$

$$f_v = \begin{pmatrix} -\frac{C_d}{m}(\dot{x} - \dot{x}_w) & -\frac{u_t}{m} & (c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) \\ -\frac{C_d}{m}(\dot{y} - \dot{y}_w) & -\frac{u_t}{m} & (c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi) \\ -\frac{C_d}{m}(\dot{z} - \dot{z}_w) & -\frac{u_t}{m} & (c_\phi c_\theta) \end{pmatrix} \tag{6.3.40c}$$

$$f_e = \begin{pmatrix} p + s_\phi t_\theta q + c_\phi t_\theta r \\ c_\phi q + s_\phi r \\ \frac{s_\phi}{c_\theta} q + \frac{c_\phi}{c_\theta} r \end{pmatrix} \tag{6.3.40d}$$

$$f_\omega = \begin{pmatrix} -\delta_{Jx} qr + u_p \frac{l}{J_{xx}} \\ -\delta_{Jy} pr + u_q \frac{l}{J_{yy}} \\ -\delta_{Jz} pq + u_r \frac{k}{J_{zz}} \end{pmatrix} \tag{6.3.40e}$$

Afin d'obtenir une représentation d'état linéaire des écarts à la trajectoire de référence au voisinage du point de fonctionnement, calculons les Jacobiens de la représentation d'état. Il vient

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbb{O}^3 & \mathbb{I}^3 & \mathbb{O}^3 & \mathbb{O}^3 \\ \hline \mathbb{O}^3 & -\frac{C_d}{m}\mathbb{I}^3 & \frac{\partial f_v}{\partial X_e} & \mathbb{O}^3 \\ \hline \mathbb{O}^3 & \mathbb{O}^3 & \frac{\partial f_e}{\partial X_e} & \frac{\partial f_e}{\partial X_\omega} \\ \hline \mathbb{O}^3 & \mathbb{O}^3 & \mathbb{O}^3 & \frac{\partial f_\omega}{\partial X_\omega} \end{array}\right) \tag{6.3.41a}$$

avec

$$\frac{\partial f_v}{\partial X_e} = -\frac{u_t}{m} \begin{pmatrix} -s_\phi s_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & c_\phi c_\theta c_\psi & -c_\phi s_\theta s_\psi + s_\phi c_\psi \\ -s_\phi s_\theta s_\psi - c_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ -s_\phi c_\theta & -c_\phi s_\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{6.3.41b}$$

$$\frac{\partial f_e}{\partial X_e} = \begin{pmatrix} t_\theta \left(q c_\phi - r s_\phi\right) & \left(1 + t_\theta^2\right)\left(q s_\phi + r c_\phi\right) & 0 \\ -q s_\phi + r c_\phi & 0 & 0 \\ \frac{1}{c_\theta}\left(q c_\phi - r s_\phi\right) & \frac{s_\theta}{c_\theta^2}\left(q s_\phi + r c_\phi\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{6.3.41c}$$

$$\frac{\partial f_e}{\partial X_\omega} = \begin{pmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & s_\phi \\ 0 & \frac{s_\phi}{c_\theta} & \frac{c_\phi}{c_\theta} \end{pmatrix} \tag{6.3.41d}$$

$$\frac{\partial f_\omega}{\partial X_\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{Jx} r & -\delta_{Jx} q \\ -\delta_{Jy} r & 0 & -\delta_{Jy} p \\ -\delta_{Jz} q & -\delta_{Jz} p & 0 \end{pmatrix} \tag{6.3.41e}$$

On a aussi

$$\frac{\partial f}{\partial U} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}^{4\times 3} \\ \hline \frac{\partial f_v}{\partial U} \\ \hline \mathbb{O}^{4\times 3} \\ \hline \frac{\partial f_\omega}{\partial U} \end{pmatrix} \tag{6.3.41f}$$

avec

$$\frac{\partial f_v}{\partial U} = -\frac{1}{m}\begin{pmatrix} c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & 0 & 0 & 0 \\ c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & 0 & 0 & 0 \\ c_\phi c_\theta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.3.41g}$$

et

$$\frac{\partial f_\omega}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{l}{J_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{J_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k}{J_{zz}} \end{pmatrix} \tag{6.3.41h}$$

$$\tag{6.3.41i}$$

Définissant les écarts par rapport aux conditions de fonctionnement de référence par :

$$\delta \underline{X} = \underline{X} - \underline{X}_{fct} \tag{6.3.42}$$

et

$$\delta \underline{U} = \underline{U} - \underline{U}_{fct} \tag{6.3.43}$$

la représentation d'état linéarisée s'écrit

$$\dot{\begin{pmatrix} \delta X_p \\ \delta X_v \\ \delta X_e \\ \delta X_\omega \end{pmatrix}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbb{O}^3 & \mathbb{I}^3 & \mathbb{O}^3 & \mathbb{O}^3 \\ \hline \mathbb{O}^3 & -\frac{C_d}{m}\mathbb{I}^3 & \frac{\partial f_v}{\partial X_e} & \mathbb{O}^3 \\ \hline \mathbb{O}^3 & \mathbb{O}^3 & \frac{\partial f_e}{\partial X_e} & \frac{\partial f_e}{\partial X_\omega} \\ \hline \mathbb{O}^3 & \mathbb{O}^3 & \mathbb{O}^3 & \frac{\partial f_\omega}{\partial X_\omega} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \delta X_p \\ \delta X_v \\ \delta X_e \\ \delta X_\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{O}^{4\times 3} \\ \hline \frac{\partial f_v}{\partial U} \\ \hline \mathbb{O}^{4\times 3} \\ \hline \frac{\partial f_\omega}{\partial U} \end{pmatrix} \delta \underline{U} \tag{6.3.44}$$

ou de façon résumée

$$\delta \dot{\underline{X}} = A\delta \underline{X} + B\delta \underline{U} \tag{6.3.45}$$

La matrice de dynamique de la représentation d'état linéarisée $\frac{\partial f}{\partial X}$ est triangulaire par blocs et son polynôme caractéristique est donné par le produit des polynômes caractéristiques des blocs diagonaux.

$$P(\lambda) = P_p(\lambda)P_v(\lambda)P_e(\lambda)P_\omega(\lambda) \tag{6.3.46}$$

avec

$$P_p(\lambda) = \lambda^3 \tag{6.3.47}$$

$$P_v(\lambda) = (\lambda + \frac{C_d}{m})^3 \tag{6.3.48}$$

$$P_e(\lambda) = \lambda\left(\lambda^2 - t_\theta\left(qc_\phi - rs_\phi\right)\lambda + \left(1 + t_\theta^2\right)\left(q^2 s_\phi^2 - r^2 c_\phi^2\right)\right) \tag{6.3.49}$$

$$P_\omega(\lambda) = \lambda^3 - \left(\delta_{Jy}\delta_{Jz}p^2 + \delta_{Jx}\delta_{Jz}q^2 + \delta_{Jx}\delta_{Jy}r^2\right)\lambda + 2\delta_{Jx}\delta_{Jy}\delta_{Jz}pqr \tag{6.3.50}$$

$\frac{\partial f}{\partial X}$ possède un mode triple nul associé à X_p, stable non asymptotiquement, et un mode triple en $-\frac{C_d}{m}$ associé à X_v, asymptotiquement stable. $P_e(\lambda)$ et $P_\omega(\lambda)$ possèdent des coefficients de signes opposés, ils possèdent au moins une racine à partie réelle positive, ce qui indique l'instabilité de la dynamique linéarisée. Ce résultat n'est pas étonnant et se retrouve pour la plupart des engins volants à voilure tournante. Ainsi la mise en œuvre par le système de commande d'une fonction de stabilisation suivant les trois axes semble impérative.

On vérifie aisément par le calcul que la représentation d'état (6.3.44) est globalement commandable à partir de $\delta\underline{U}$ si ϕ et θ sont différents de $+/-\frac{\pi}{2}$ et u_t est différent de zéro. Ainsi le système non linéaire (6.2.18) sera, en dehors de ces configurations, commandable au premier ordre.

6.4 Élaboration de la loi de commande

La structure de commande proposée est représentée sur la figure 6.2 et comporte les éléments suivants :

- une boucle de stabilisation du quaternion d'attitude ;
- une boucle de retour de sortie ;
- un terme de commande en boucle ouverte générant les valeurs nominales de l'état et de la commande.

6.4.1 Boucle de stabilisation

La représentation d'attitude traditionnellement utilisée dans le domaine aéronautique est la représentation par angles d'Euler. Cette représentation possède l'avantage d'être intuitive ainsi que de dimension minimale. Cette représentation est intéressante pour les faibles valeurs de roulis et de tangage. Cependant elle est possède une singularité pour les valeurs de tangage de $+/-\frac{\pi}{2}$. De plus les calculs impliquent un usage intensif de fonctions trigonométriques, peu compatible avec l'implantation sur des calculateurs embarqués.

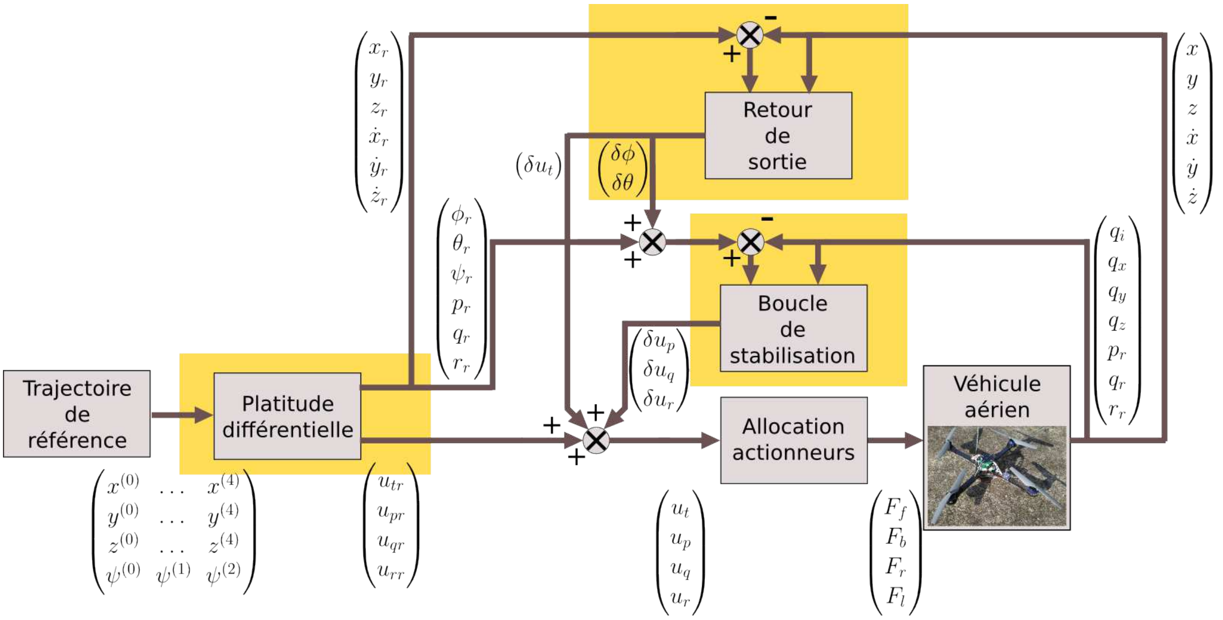


FIGURE 6.2 – Schéma bloc du système de guidage.

La représentation d'attitude par quaternion unitaire a l'inconvénient de ne pas être de dimension minimale. En revanche, elle ne possède pas de singularité et les calculs sont linéaires. De plus, une erreur d'attitude peut facilement être représentée par un quaternion relatif aux axes principaux liés au repère véhicule, axes selon lesquels s'exercent les moments des actionneurs.

En notant $\underline{\eta}_{ref}$ l'orientation désirée du véhicule et $\underline{\eta}$ son orientation réelle, $\underline{\eta}_e$, défini comme

$$\underline{\eta}_{ref} = \underline{\eta}_e \otimes \underline{\eta} \tag{6.4.1}$$

représente l'erreur d'orientation exprimée dans le repère lié au véhicule. $\otimes$ désigne ici la composition des quaternions d'orientation tel que définie en annexe dans l'équation (B.4.4). Les trois dernières composantes du quaternion d'erreur consistent en un vecteur unitaire, décrivant l'axe de rotation, multiplié par le sinus du demi-angle de rotation.

$$\underline{\eta}_e = \underline{\eta}_{ref} \otimes \underline{\eta}^{-1} \tag{6.4.2}$$

Afin d'imposer au système la dynamique linéaire stable suivante pilotée par η_{ref}

$$\dot{\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -2\xi_p\omega_p p + \omega_p^2\eta_{ex} \\ -2\xi_q\omega_q q + \omega_q^2\eta_{ey} \\ -2\xi_r\omega_r r + \omega_r^2\eta_{ez} \end{pmatrix} \tag{6.4.3}$$

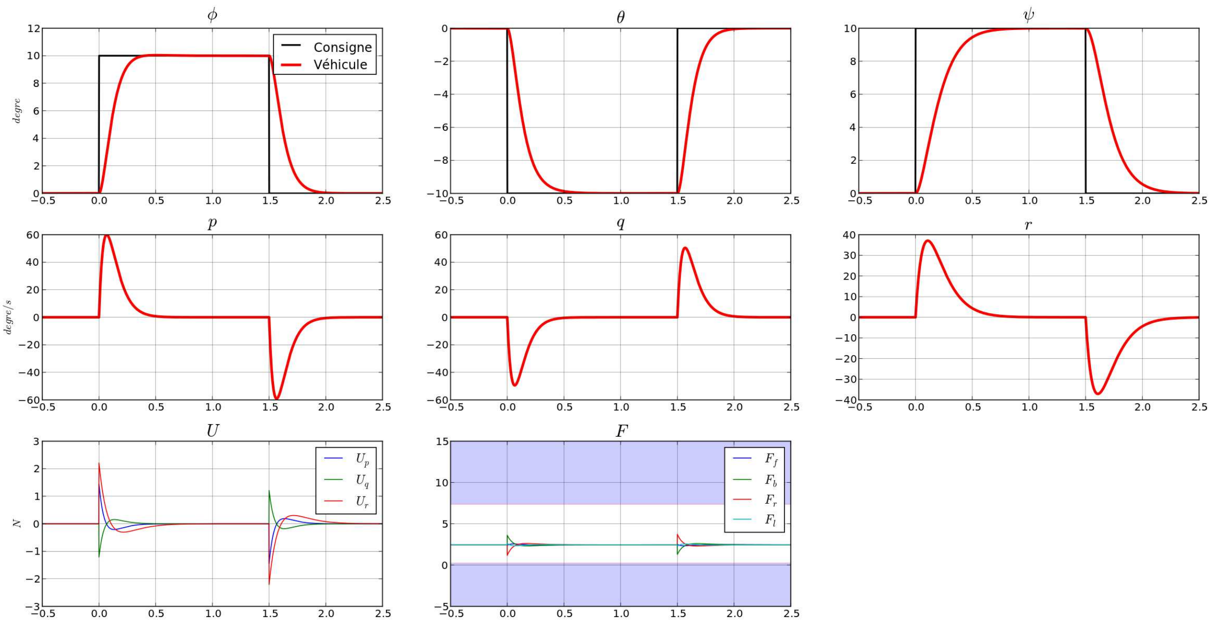


FIGURE 6.3 – Réponse du quadrirotor stabilisé à un échelon d'orientation de 10 degrés.

la loi de commande :

$$\begin{pmatrix} u_p \\ u_q \\ u_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{J_{xx}}{l}\left(-2\xi_p\omega_p p + \omega_p^2\eta_{ex} + \delta_{Jx}qr\right) \\ \frac{J_{yy}}{l}\left(-2\xi_q\omega_q q + \omega_q^2\eta_{ey} + \delta_{Jy}pr\right) \\ \frac{J_{zz}}{k}\left(-2\xi_r\omega_r r + \omega_r^2\eta_{ez} + \delta_{Jz}pq\right) \end{pmatrix} \tag{6.4.4}$$

est utilisée.

La démonstration de la stabilité du système ainsi commandé peut être établie en adoptant un développement similaire à celui de [Lee, 2010].

La figure 6.3 décrit le résultat d'une simulation dans laquelle le véhicule est soumis à un échelon d'orientation de 10 degrés. Les paramètres utilisés pour la loi de commande sont une pulsation caractéristique de 1200 degrés par seconde et un amortissement de 0.7. Pour ces valeurs, une amplitude de 10 degrés sur chacun des axes provoque l'utilisation de 40% de la puissance en stationnaire des actionneurs, ce qui ne conduit pas à la saturation.

La figure 6.4 illustre le comportement du système en présence d'un échelon d'orientation de 180 degrés, c'est à dire la plus grande valeur possible. On constate que la réponse du système est bien celle attendue. Cependant, pour cette simulation, les pulsations caractéristiques on été réduites à une valeur de 600 degrés par seconde afin d'éviter la saturation des actionneurs.

La figure 6.5 représente la réponse du système en présence du même échelon d'orien-

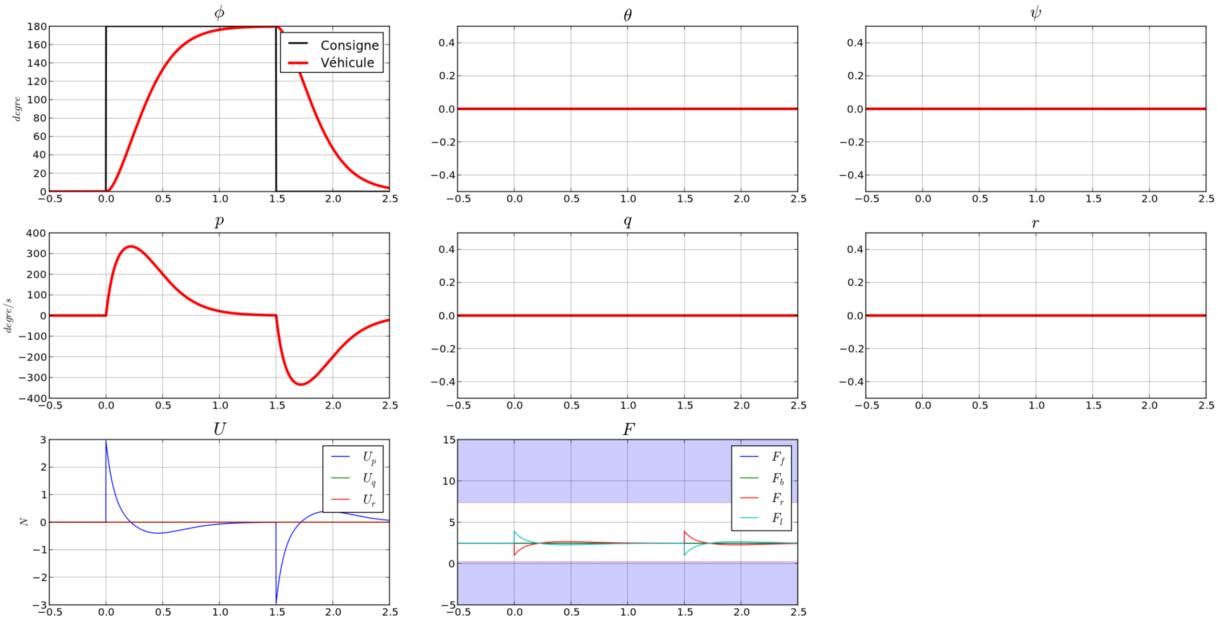


FIGURE 6.4 – Réponse du quadrirotor stabilisé à un échelon d'orientation de 180 degrés.

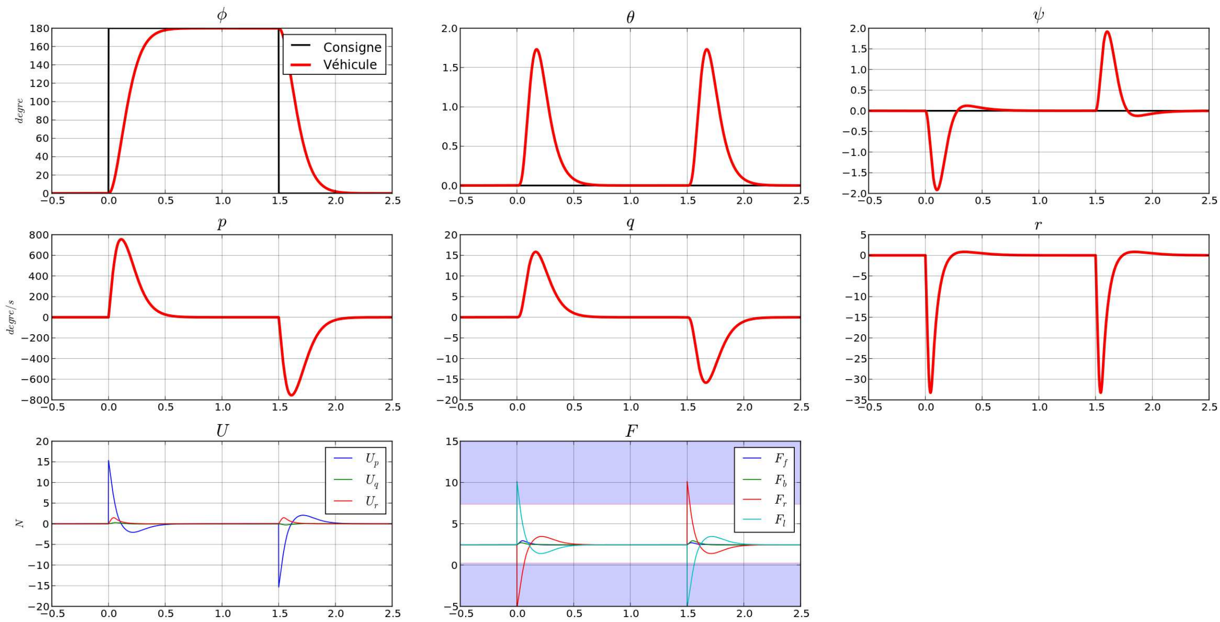


FIGURE 6.5 – Réponse du quadrirotor stabilisé à un échelon d'orientation de 180 degrés avec saturation des actionneurs.

tation de 180 degrés, mais avec les pulsations naturelles à 1200 degrés par seconde. La saturation des actionneurs (zones grisées sur la courbe F) provoque un écart de quelques degrés en lacet et en tangage (courbes θ et ψ), écart qui est cependant rapidement résorbé dès la disparition des saturations.

6.4.2 Boucle de retour de sortie

En faisant l'hypothèse que, pour les dynamiques lentes de $\delta \underline{X}_p$, l'écart d'orientation en roulis et tangage $\delta\phi$ et $\delta\theta$ suit les consignes $\delta\phi_c$ et $\delta\theta_c$, les lignes 4 à 6 de (6.3.44) conduisent à

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\ddot{\delta x}\\ \ddot{\delta y}\\ \ddot{\delta z}\end{pmatrix} &= -\frac{1}{m}\begin{pmatrix}C_d\dot{\delta x} + u_t\left(-c_\phi s_\theta s_\psi + s_\phi c_\psi\right)\delta\psi\\ C_d\dot{\delta y} + u_t\left(c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi\right)\delta\psi\\ C_d\dot{\delta z}\end{pmatrix} + \\ & -\frac{1}{m}\begin{pmatrix}c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & u_t\left(-s_\phi s_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi\right) & u_t c_\phi c_\theta c_\psi\\ c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & u_t\left(-s_\phi s_\theta s_\psi - c_\phi c_\psi\right) & u_t c_\phi c_\theta s_\psi\\ c_\phi c_\theta & -u_t s_\phi c_\theta & -u_t c_\phi s_\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta u_t\\ \delta\phi_c\\ \delta\theta_c\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{6.4.5}$$

En nommant $\underline{F}$ la fonction de dynamique et G la matrice de commande, (6.4.5) s'écrit

$$\begin{pmatrix}\ddot{\delta x}\\ \ddot{\delta y}\\ \ddot{\delta z}\end{pmatrix} = -\frac{1}{m}\left(\underline{F}(\underline{X}, \underline{U}, \delta\underline{X}_v, \delta\psi) + G\begin{pmatrix}\delta u_t\\ \delta\phi_c\\ \delta\theta_c\end{pmatrix}\right) \tag{6.4.6}$$

Le déterminant de G vaut $u_t^2 c_\phi$. G est donc inversible pour $u_t \neq 0$ et $\phi \neq \pm\frac{\pi}{2}$ et son inverse se calcule comme

$$G^{-1} = \begin{pmatrix}c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta\\ -\frac{s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi}{u_t} & -\frac{s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi}{u_t} & -\frac{s_\phi c_\theta}{u_t}\\ \frac{c_\theta c_\psi}{u_t c_\phi} & \frac{c_\theta s_\psi}{u_t c_\phi} & -\frac{s_\theta}{u_t c_\phi}\end{pmatrix} \tag{6.4.7}$$

Si nous souhaitons imposer à $\begin{pmatrix}\delta x & \delta y & \delta z\end{pmatrix}^T$ une dynamique linéaire du second ordre, stable, de pulsations caractéristiques $\begin{pmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{pmatrix}$ et d'amortissements $\begin{pmatrix}\xi_x & \xi_y & \xi_z\end{pmatrix}$, à savoir

$$\begin{pmatrix}\ddot{\delta x}\\ \ddot{\delta y}\\ \ddot{\delta z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\omega_x\xi_x\dot{\delta x} - \omega_x^2\delta x\\ -2\omega_y\xi_y\dot{\delta y} - \omega_y^2\delta y\\ -2\omega_z\xi_z\dot{\delta z} - \omega_z^2\delta z\end{pmatrix} \tag{6.4.8}$$

la loi de commande se déduit de (6.4.6) et de (6.4.8)

$$\begin{pmatrix} \delta u_t \\ \delta \phi_c \\ \delta \theta_c \end{pmatrix} = G^{-1} \left(-m \begin{pmatrix} -2\omega_x \xi_x \dot{\delta x} - \omega_x^2 \delta x \\ -2\omega_y \xi_y \dot{\delta y} - \omega_y^2 \delta y \\ -2\omega_z \xi_z \dot{\delta z} - \omega_z^2 \delta z \end{pmatrix} - F \right) \tag{6.4.9}$$

6.5 Simulation du guidage du quadrirotor sans adaptation

Les figures 6.6 à 6.9 présentent des résultats de simulation où la commande développée au paragraphe précédent est mise en œuvre pour suivre des consignes de complexité variable, en présence ou non de perturbations (rafales de vent, erreurs paramétriques).

Dans le cas de la figure 6.6, on vérifie que le quadrirotor répond à une consigne en échelon de position de son centre de gravité (déplacement tridimensionnel) de façon parfaite (pas d'erreur, pas de dépassement notoire) en environ 1.5 secondes. Ceci est notamment rendu possible par la rapidité de son système propulsif, qui, agissant de façon collective, présente des temps de réaction de l'ordre du dixième de seconde.

La figure 6.7 montre la réponse du véhicule à une rafale de vent de 10 mètres par seconde lors d'un déplacement arrêt-arrêt. La rafale engendre un écart de trajectoire d'une quinzaine de centimètres sur chacun des axes.

La figure 6.7 présente la réponse du quadrirotor à une sollicitation de suivi de trajectoire arrêt-arrêt en présence d'une rafale de vent de 10 mètres par seconde. On constate une petite dégradation dans la précision du suivi, qui tarde à disparaître. Néanmoins, le comportement de l'engin reste acceptable.

Dans le cas de la figure 6.8, la commande proposée est appliquée à l'engin alors qu'une erreur de 50% est présente dans les paramètres de masse et d'inertie du modèle. La réponse du système présente alors une double dégradation :

- perte en précision qui met du temps à se résorber pendant les phases stabilisées de la trajectoire de référence ;
- présence d'oscillations pendant les transitoires.

Cependant, ici aussi, on peut encore considérer que le comportement du système reste dans le domaine de l'acceptable.

La figure 6.9 représente le comportement du système dans le cas où, au travers du choix d'une forte dynamique de référence, on a cherché à activer la saturation des actionneurs. On constate qu'il y a effectivement présence de saturation des actionneurs, mais on remarque aussi que cette présence n'affecte finalement que très peu les performances du système de guidage au cours d'une manœuvre arrêt-arrêt.

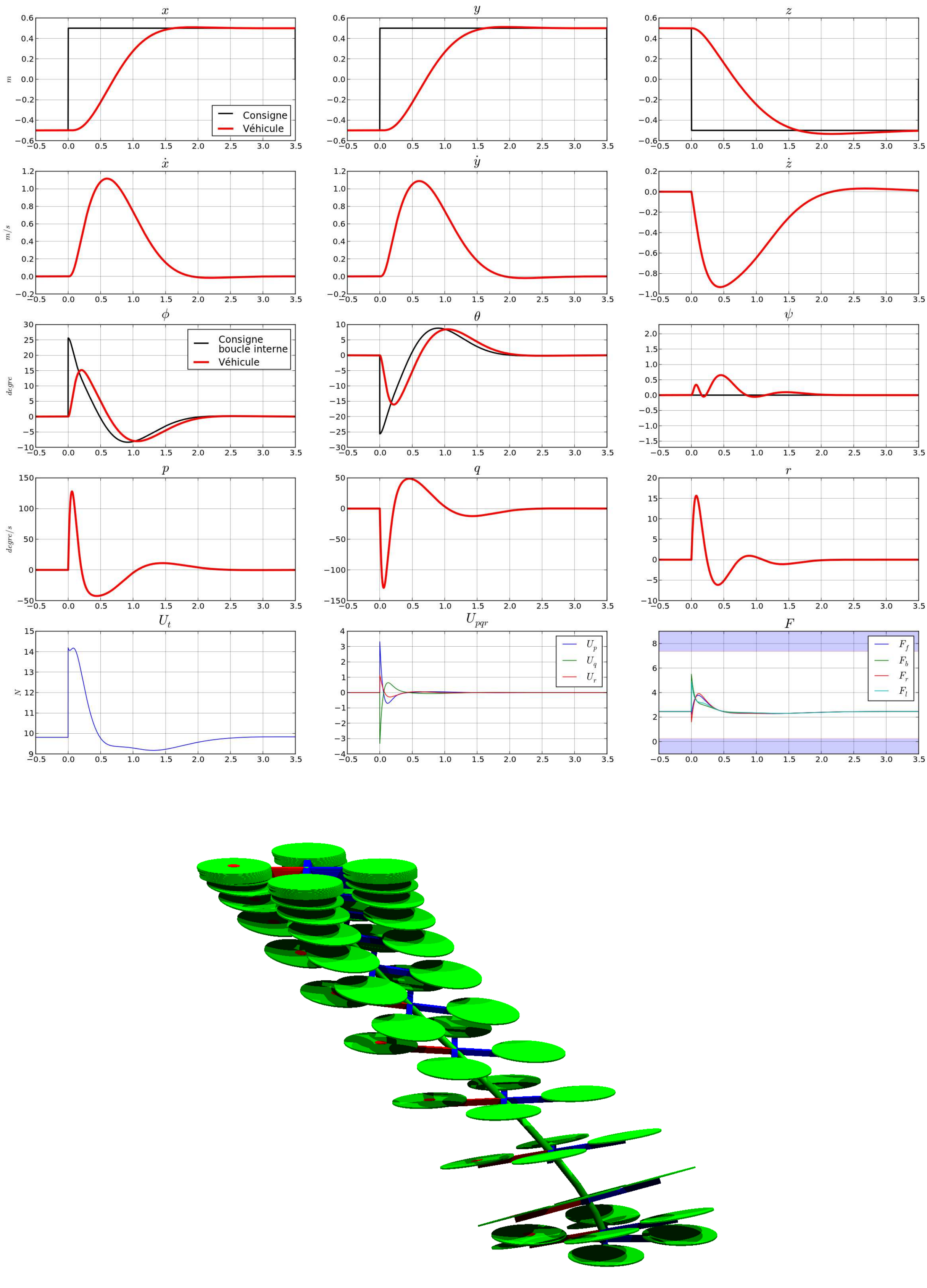


FIGURE 6.6 – Réponse du quadrirotor stabilisé à un échelon de position.

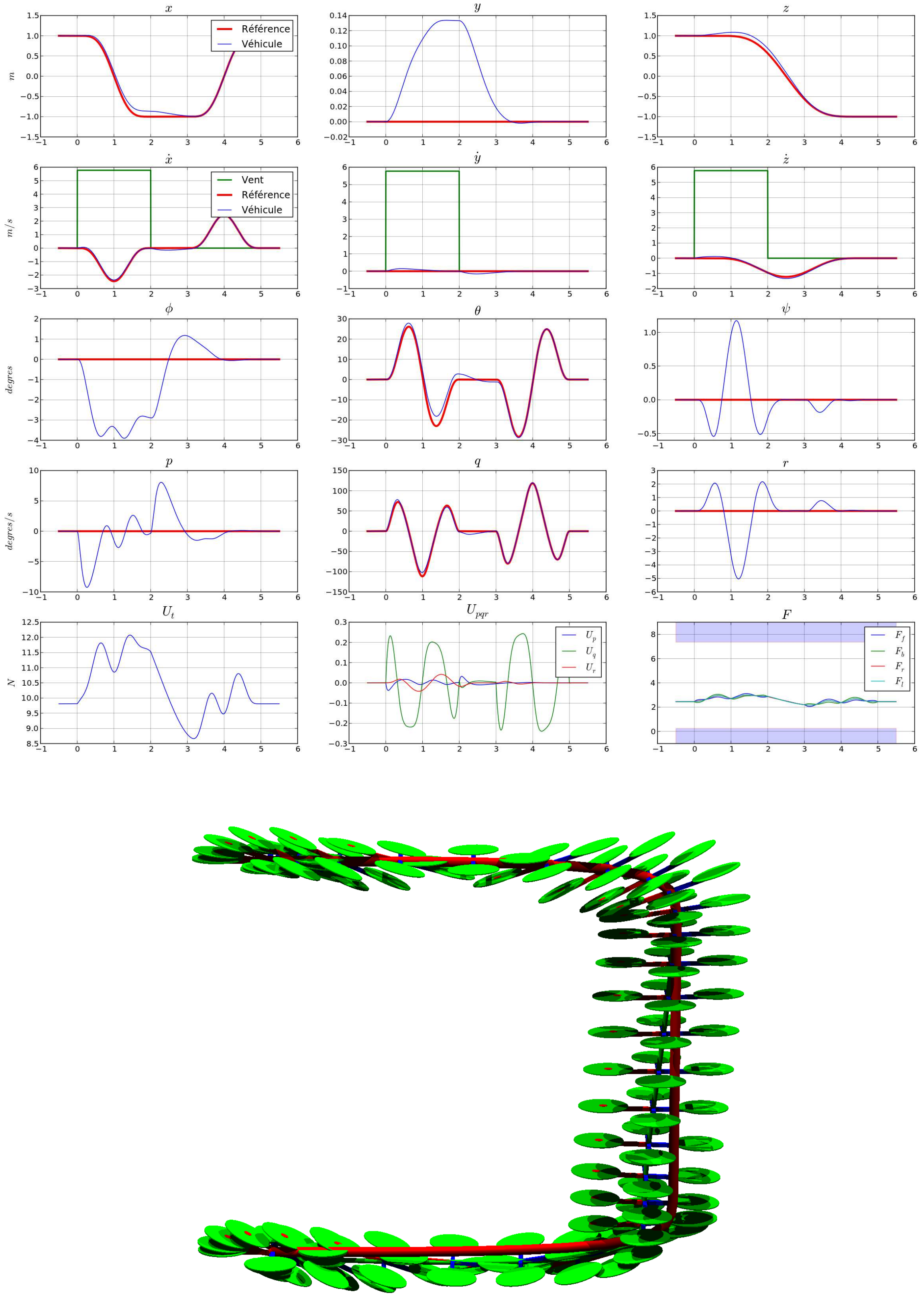


FIGURE 6.7 – Réponse du quadrirotor à une rafale de vent lors d'un déplacement arrêt-arrêt sur l'axe des x.

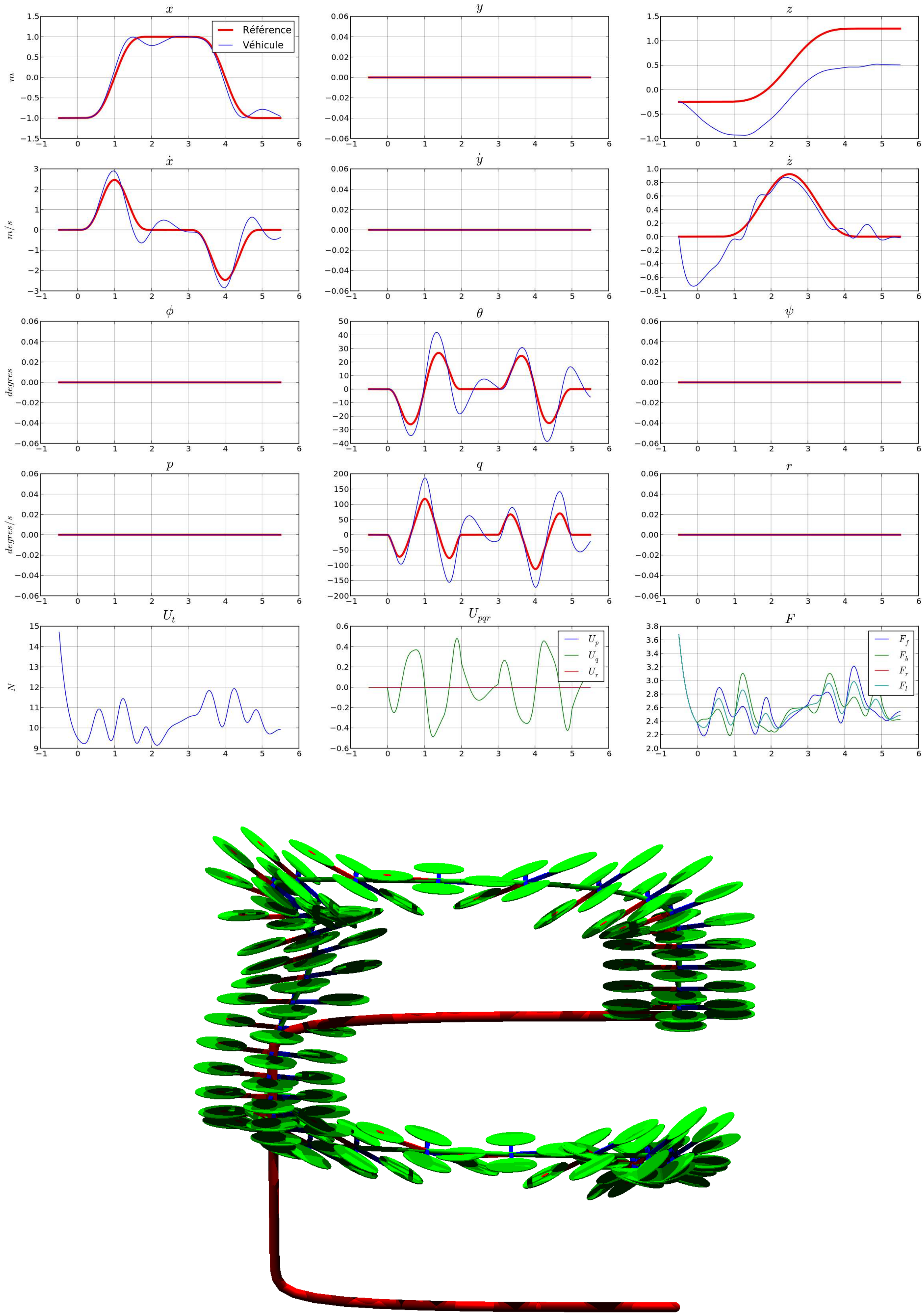


FIGURE 6.8 – Réponse du quadrirotor lors d'un déplacement arrêt-arrêt sur l'axe des x en présence d'une erreur de 50% des paramètres du modèle.

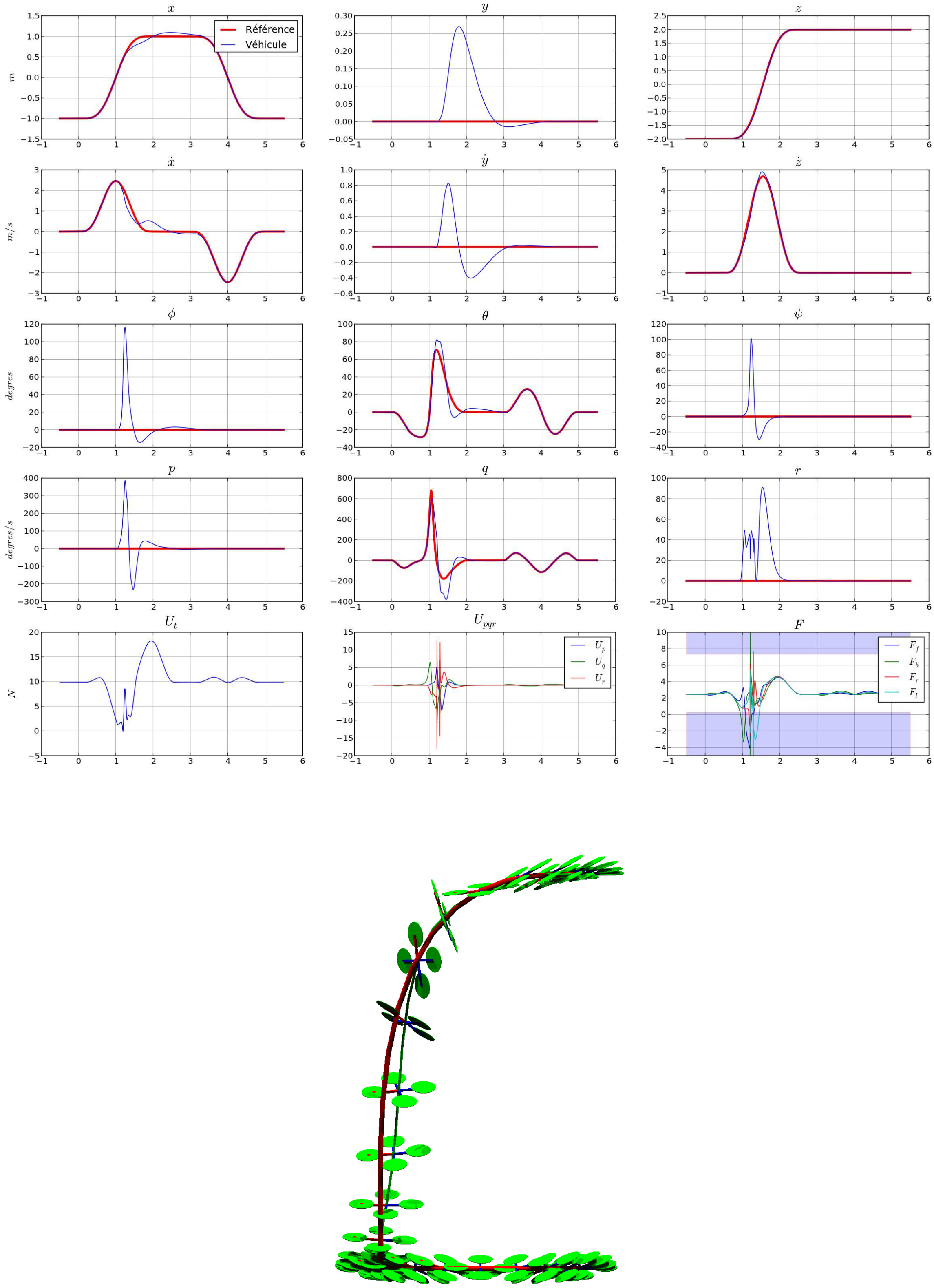


FIGURE 6.9 – Réponse du quadrirotor lors d'un déplacement arrêt-arrêt de forte dynamique provocant la saturation des actionneurs.

6.6 Conclusions

Dans ce chapitre, la dynamique du quadrirotor a été mise en équations. Afin d'obtenir une représentation valable dans toutes les configurations de cet engin fortement manœuvrant, une représentation de son attitude à l'aide de quaternions a été introduite. Le modèle mathématique résultant a alors été analysé en mettant en évidence la propriété de platitude différentielle par rapport aux sorties (x, y, z), coordonnées cartésiennes du centre de gravité, et par rapport à l'angle de cap ψ de l'engin. L'instabilité inhérente à l'engin a été identifiée en se basant sur une représentation d'état linéarisée de sa dynamique, de même que sa commandabilité locale a été établie. Une première boucle de stabilisation manipulant le quaternion unitaire représentant l'attitude de l'engin a alors été développée, avant de proposer une loi de guidage basée sur la commande non linéaire inverse. Les résultats de simulation présentés annoncent pour cette structure de commande des performances de précision et de robustesse intéressantes, même si, dans le cas où il y a présence d'erreur paramétrique, les résultats sont à la limite de l'acceptable. C'est ce dernier point qui sera traité dans le prochain chapitre.

Chapitre 7

Mise en place d'un mécanisme de commande adaptative indirecte

7.1 Introduction

La loi de commande décrite au chapitre précédent se révèle en mesure de guider précisément le véhicule lorsque les paramètres du modèle de dynamique sont connus avec précision. En revanche on constate une certaine dégradation des performances lorsque les paramètres s'éloignent de leurs valeurs nominales. Ces paramètres, qui correspondent à la masse du véhicule et à ses moments d'inerties principaux, sont soit difficiles à mesurer, soit susceptibles de varier d'un vol à l'autre, par exemple en cas de changement de charge utile, ou même en cours de vol. Il apparaît alors intéressant de disposer d'un moyen d'adapter en ligne la loi de commande. Un schéma du type adaptation indirecte tel que présenté au chapitre 4 semble approprié si on adopte une structure de loi de commande telle que celle développée au précédent chapitre. Il s'agira donc, grâce à la mise en œuvre d'un estimateur en ligne, d'adapter les paramètres de cette loi et de vérifier que les performances obtenues sont satisfaisantes.

7.2 Description du mécanisme d'adaptation

D'après l'équation (6.3.32), la poussée totale des quatre rotors s'écrit :

$$u_t = \left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right).m \tag{7.2.1}$$

D'après l'équation des moments (6.2.10), il vient

$$\begin{pmatrix} l.u_p \\ l.u_q \\ k.u_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx}\dot{p} + J_{yy}qr - J_{zz}qr \\ -J_{xx}pr + J_{yy}\dot{q} + J_{zz}pr \\ J_{xx}pq - J_{yy}pq + J_{zz}\dot{r} \end{pmatrix} \tag{7.2.2}$$

Les relations (7.2.1) et (7.2.2) introduisent un ensemble de contraintes à satisfaire et qui serviront de base à l'estimation des paramètres de masse et d'inertie. La technique des moindres carrés récursifs sera utilisée ici. Remarquons que les accélérations angulaires intervenant dans les relations (7.2.2) ne peuvent pas être en général directement mesurées par les capteurs présents sur un tel type de véhicule. En général seule la vitesse angulaire est mesurée directement. Les moments d'inertie peuvent néanmoins être estimés assez facilement en utilisant la technique de filtrage proposée dans [Slotine et Li, 1991]. En notant s la variable de Laplace et en effectuant la transformée de Laplace de (7.2.2), il vient

$$\begin{pmatrix} l.u_p(s) \\ l.u_q(s) \\ k.u_r(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx}.s.p(s) + J_{yy}.qr(s) - J_{zz}.qr(s) \\ -J_{xx}.pr(s) + J_{yy}.s.q(s) + J_{zz}.pr(s) \\ J_{xx}.pq(s) - J_{yy}.pq(s) + J_{zz}.s.r(s) \end{pmatrix} \tag{7.2.3}$$

En multipliant les deux membres de (7.2.3) par $\frac{1}{s+\lambda}$, où λ est un réel positif (ce qui constitue la fonction de transfert d'un filtre passe bas du premier ordre de constante de temps $\frac{1}{\lambda}$), il vient

$$\begin{pmatrix} l.\frac{u_p(s)}{s+\lambda} \\ l.\frac{u_q(s)}{s+\lambda} \\ k.\frac{u_r(s)}{s+\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx}.\frac{s}{s+\lambda}.p(s) + J_{yy}.\frac{qr(s)}{s+\lambda} - J_{zz}.\frac{qr(s)}{s+\lambda} \\ -J_{xx}.\frac{pr(s)}{s+\lambda} + J_{yy}.\frac{s}{s+\lambda}.q(s) + J_{zz}.\frac{pr(s)}{s+\lambda} \\ J_{xx}.\frac{pq(s)}{s+\lambda} - J_{yy}.\frac{pq(s)}{s+\lambda} + J_{zz}.\frac{s}{s+\lambda}.r(s) \end{pmatrix} \tag{7.2.4}$$

Notons respectivement $\begin{pmatrix} u_{pl} & u_{ql} & u_{rl} \end{pmatrix}$ les signaux obtenus par application du filtre passe bas à $\begin{pmatrix} u_p & u_q & u_r \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} p_l & q_l & r_l \end{pmatrix}$ ceux obtenus par application du filtre à $\begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} qr_l & pr_l & pq_l \end{pmatrix}$ ceux obtenus par application du filtre à $\begin{pmatrix} qr & pr & pq \end{pmatrix}$. En réarrangeant (7.2.4) puis en repassant dans le domaine temporel, il vient

$$\begin{pmatrix} l.u_{pl}(t) \\ l.u_{ql}(t) \\ k.u_{rl}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx}.\left(p(t) - \lambda.p_l(t)\right) + J_{yy}.qr_l(t) - J_{zz}.qr_l(t) \\ -J_{xx}.pr_l(t) + J_{yy}.\left(q(t) - \lambda.q_l(t)\right) + J_{zz}.pr_l(t) \\ J_{xx}.pq_l(t) - J_{yy}.pq_l(t) + J_{zz}.\left(r(t) - \lambda.r_l(t)\right) \end{pmatrix} \tag{7.2.5}$$

Les relations (7.2.5) constituent un nouveau système de contraintes caractéristiques qui seront utilisées par l'estimateur des moments d'inertie principaux, lequel ne fera plus appel qu'à des quantités construites à partir de données produites par les capteurs disponibles sur le véhicule. Notons

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} u_t \\ l.u_{pl} \\ l.u_{ql} \\ k.u_{rl} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p - \lambda.p_l & qr_l & -qr_l \\ 0 & -pr_l & q - \lambda.q_l & pr_l \\ 0 & pq_l & -pq_l & r - \lambda.r_l \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} m \\ J_{xx} \\ J_{yy} \\ J_{zz} \end{pmatrix} \tag{7.2.6}$$

Les relations (7.2.1) et (7.2.5) se réécrivent sous la forme standard :

$$\underline{y} = W\underline{a} \tag{7.2.7}$$

qui est une forme linéaire adaptée à l'utilisation d'un algorithme de type moindres carrés récursifs comme décrit au paragraphe 4.6.2.

7.3 Analyse des résultats de simulation

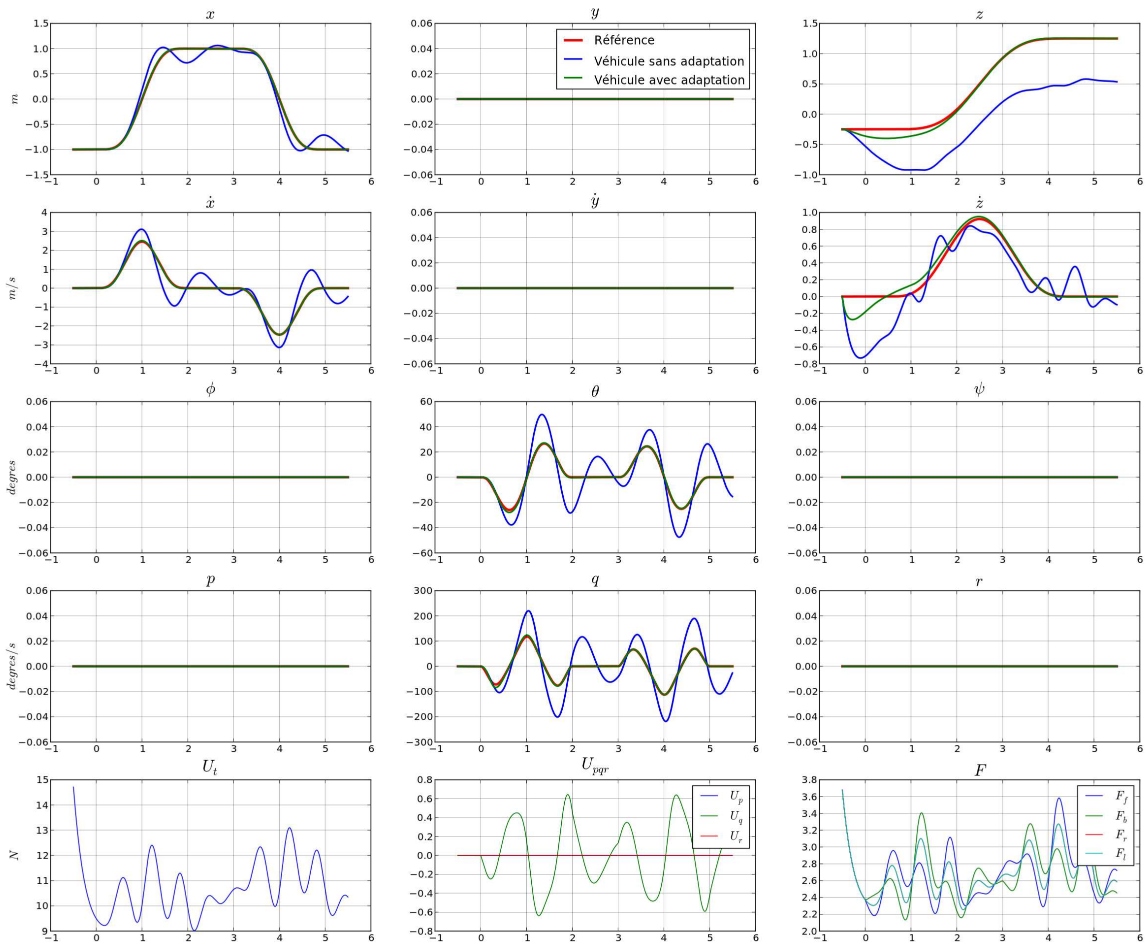
La matrice W introduite ci-dessus étant diagonale par blocs, les estimations en ligne de la masse et des moments d'inertie pourront être réalisées de façon indépendante l'une de l'autre.

La figure 7.1 considère une situation où le quadrirotor est censé faire un aller-retour entre deux points situés à la même hauteur. Les estimations initiales de la masse et des inerties fournies au système de guidage présentent une erreur de 50%. On constate que sans adaptation, la manoeuvre n'est pas réalisée parfaitement, car le quadrirotor est à la fois incapable de rejoindre directement la nouvelle position demandée (il oscille autour de celle-ci avec une tendance à l'atténuation qui conduit à une stabilisation au bout de 3 secondes) et en même temps il perd irrémédiablement son niveau de vol initial.

En revanche, la mise en œuvre d'une loi de commande avec adaptation indirecte permet de réaliser presque parfaitement cette manoeuvre. Si on poursuit l'analyse des résultats de la figure 7.1, on constate que l'erreur paramétrique non compensée dans le cas sans adaptation conduit à de fortes oscillations (il s'agit de θ) autour des valeurs effectivement nécessaires pour réaliser la manœuvre.

Finalement, si on s'intéresse aux forces de poussée demandées aux différents rotors, on s'aperçoit que, dans le cas sans adaptation, celles-ci oscillent fortement sans pour autant atteindre les valeurs de saturation. Dans le cas avec adaptation, les fluctuations de poussées demandées sont beaucoup plus modérées et n'atteignent pas, ici non plus, les saturations.

Les paramètres retenus pour le processus d'adaptation ont été choisis de façon empirique. Il s'agit de la valeur maximale du facteur d'oubli λ_0 et de la borne supérieure de la matrice de gain P_s, dont les valeurs retenues sont respectivement 0.3 et 100.



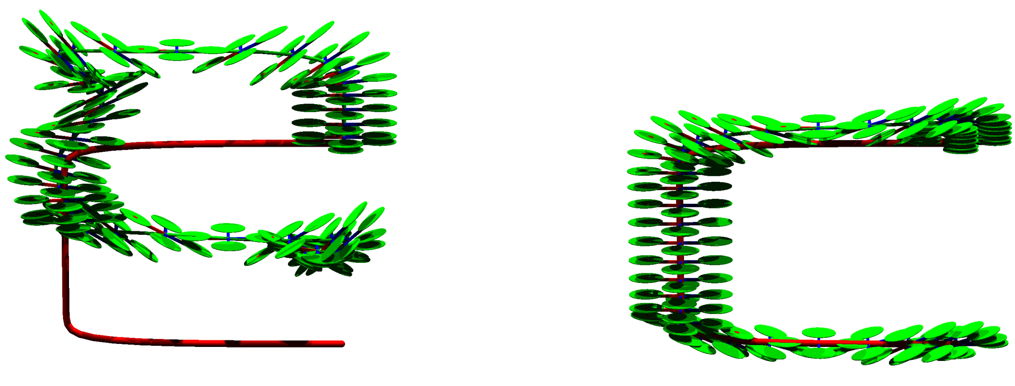


FIGURE 7.1 – Comparaison de la réponse du quadrirotor avec et sans adaptation en présence d'une erreur initiale de 50% des paramètres de masse et d'inertie.

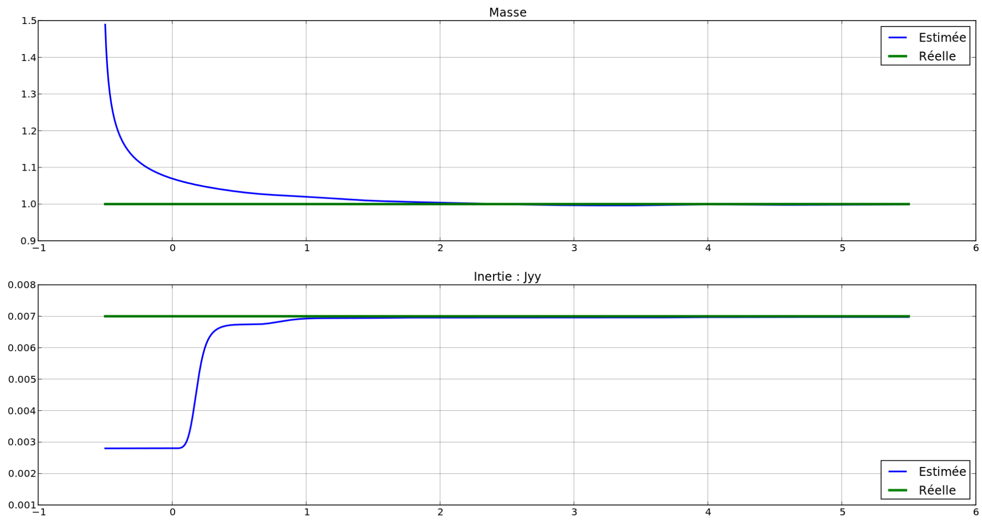


FIGURE 7.2 – Évolution de l'estimation des paramètres.

En présence d'incertitudes paramétriques, comme des bruits de mesure ou des perturbations atmosphériques, il sera utile de diminuer le facteur d'oubli afin d'éviter l'instabilité du processus d'estimation.

La figure 7.2 décrit le processus d'apprentissage de la masse et du moment d'inertie de tangage au cours de la manœuvre représentée sur la figure 7.1. On constate que l'estimation de la masse converge à 95% vers la vraie valeur de celle-ci en environ 1 seconde, alors que l'estimation du moment d'inertie est beaucoup plus lente, car l'apprentissage n'est effectué qu'aux instants où l'assiette longitudinale connaît des phases d'accélération angulaire.

Afin de garantir une bonne estimation des inerties suivant les trois axes principaux, il sera bénéfique de faire exécuter au véhicule des trajectoires présentant des accélérations angulaires sur les trois axes. Ceci peut être réalisé spontanément par l'engin volant soumis aux perturbations de l'atmosphère (vent, turbulences), sinon il pourra être rendu nécessaire, avant la réalisation effective d'une mission, d'effectuer des manœuvres permettant d'exciter le mécanisme d'adaptation suivant les trois axes. Ceci pourra par exemple être le fait d'une manœuvre circulaire à cap constant.

7.4 Conclusion

Ce chapitre a vu la mise en œuvre de la structure de commande développé dans cette thèse dans le cas du guidage d'un quadrirotor. Cette structure intègre des éléments de

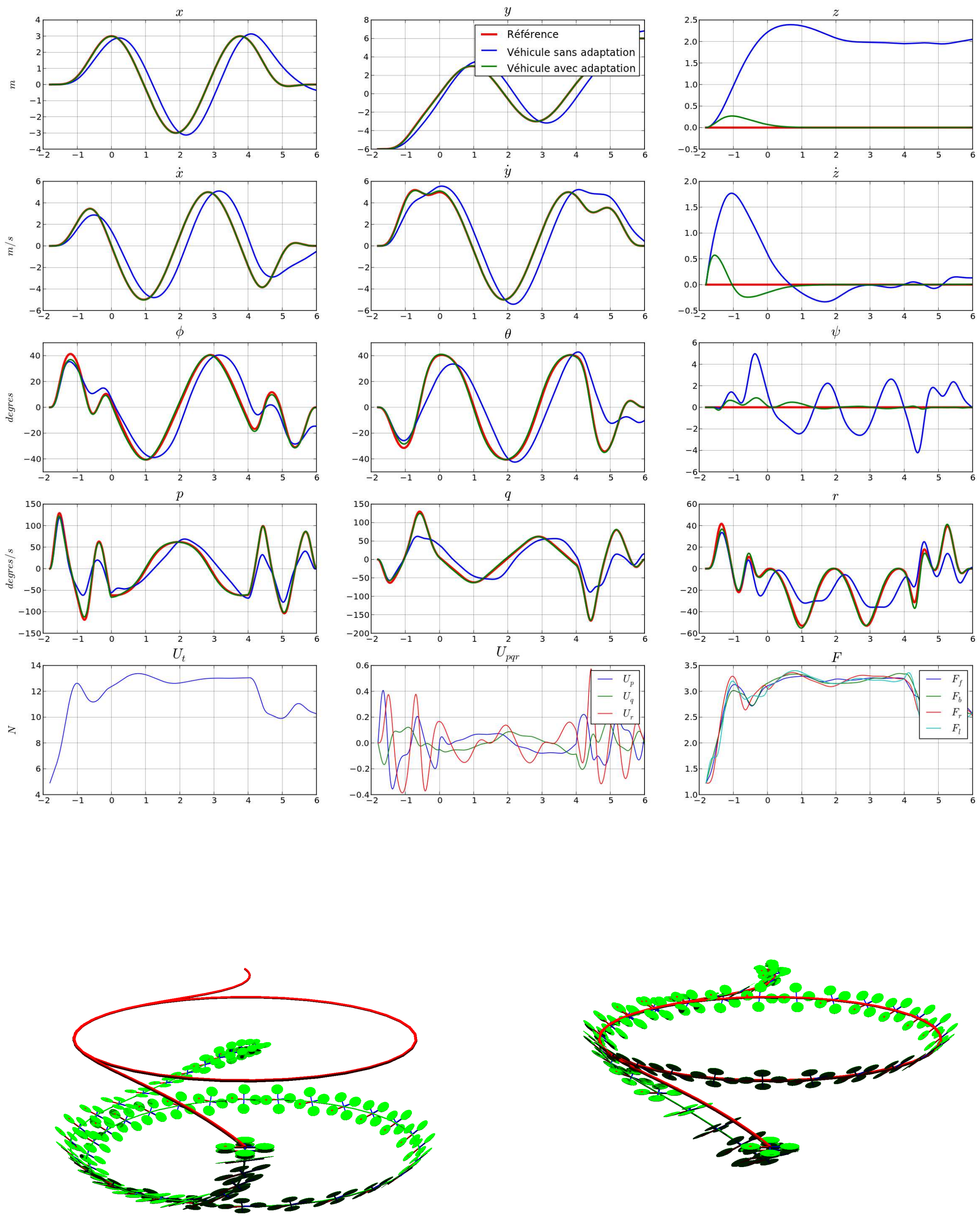


FIGURE 7.3 – Comparaison de la réponse du quadrirotor avec et sans adaptation en présence d'une erreur initiale de 50% des paramètres de masse et d'inertie.

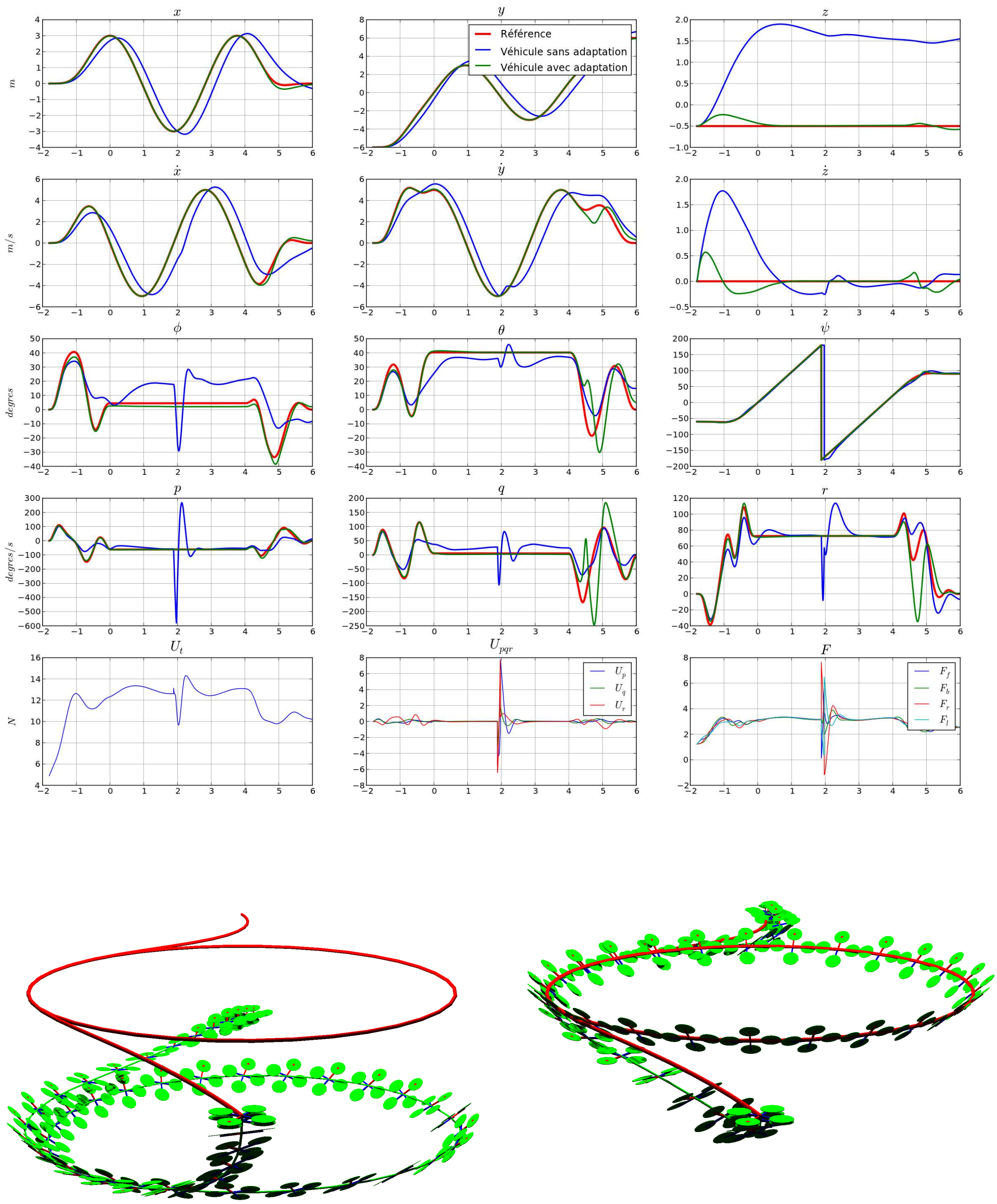


FIGURE 7.4 – Comparaison de la réponse du quadrirotor avec et sans adaptation en présence d'une erreur initiale de 50% des paramètres de masse et d'inertie.

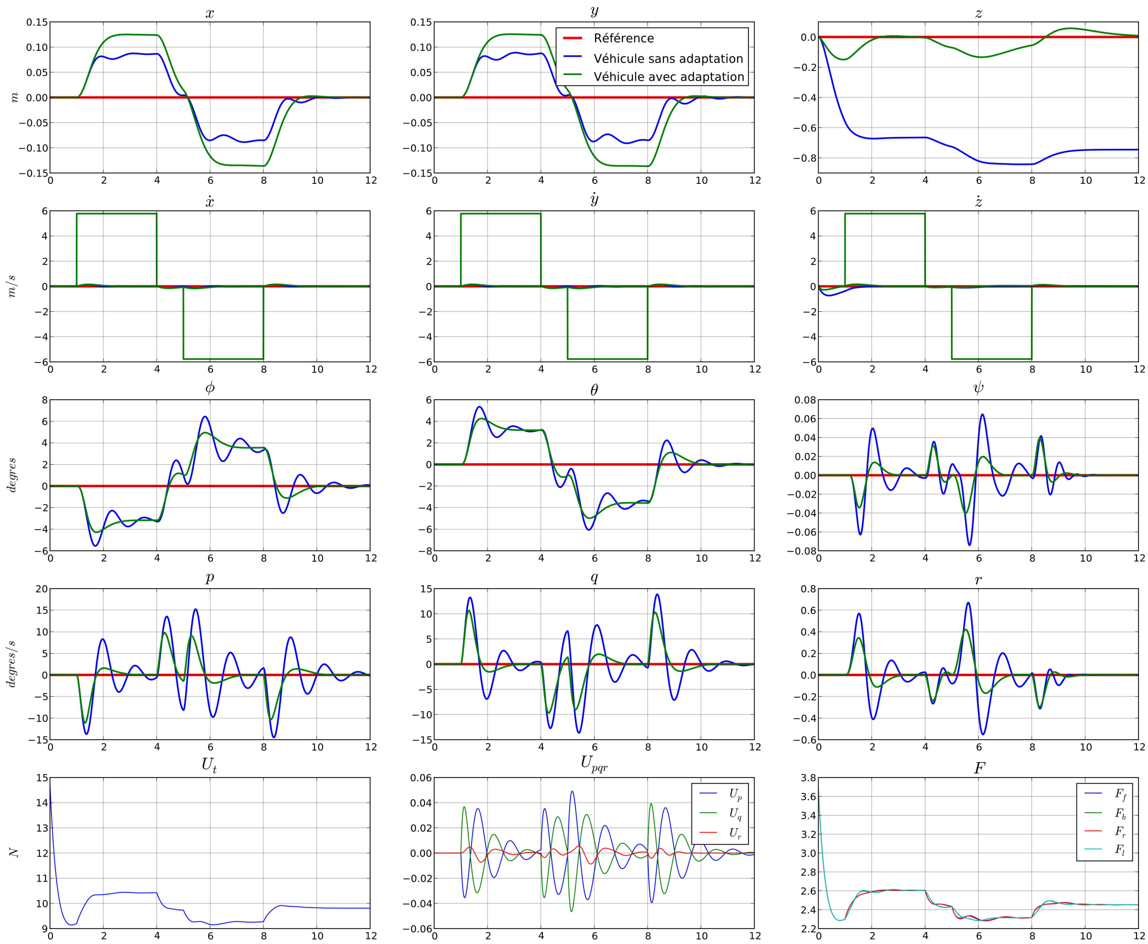


FIGURE 7.5 – Comparaison de la réponse du quadrirotor avec et sans adaptation en présence d'une erreur initiale de 50% des paramètres de masse et d'inertie.

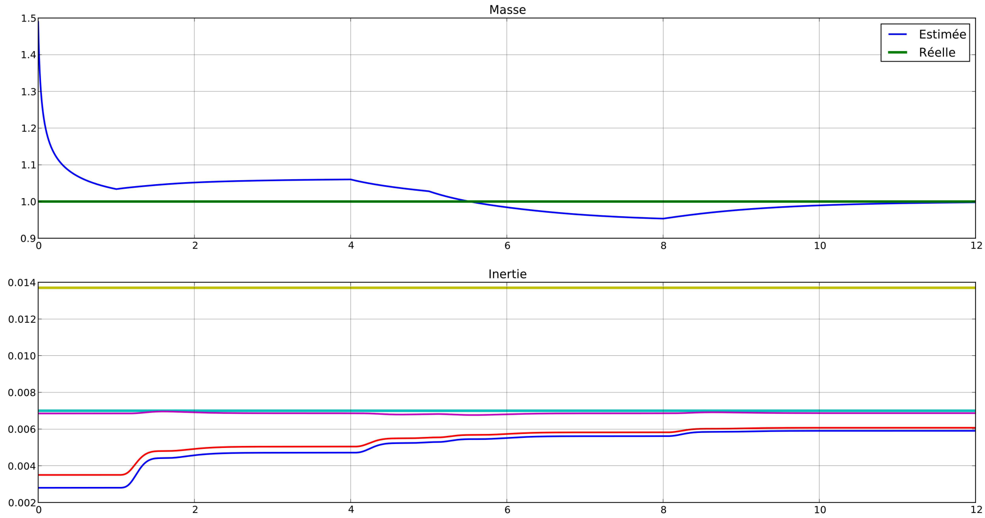


FIGURE 7.6 – Évolution de l'estimation des paramètres.

commande différentiellement plate (*feed forward*), de commande non linéaire inverse (*feed-back*) et d'adaptation. Les résultats de simulation démontrent la capacité de cette structure à faire suivre au quadrirotor des trajectoires très variées en imposant des contraintes sur l'orientation de l'engin en fonction des applications considérées. Les résultats montrent que la fonction d'adaptation contribue de façon significative aux performances de guidage de l'engin. Il est aussi intéressant de remarquer que l'effet de la présence des perturbations atmosphériques est mis à profit par la boucle d'estimation pour obtenir des paramètres qui en cas de vol stationnaire non perturbé seraient inaccessibles. De même, il est intéressant de remarquer que la loi de guidage permet de couvrir l'ensemble du vol, depuis le décollage jusqu'à l'atterrissage.

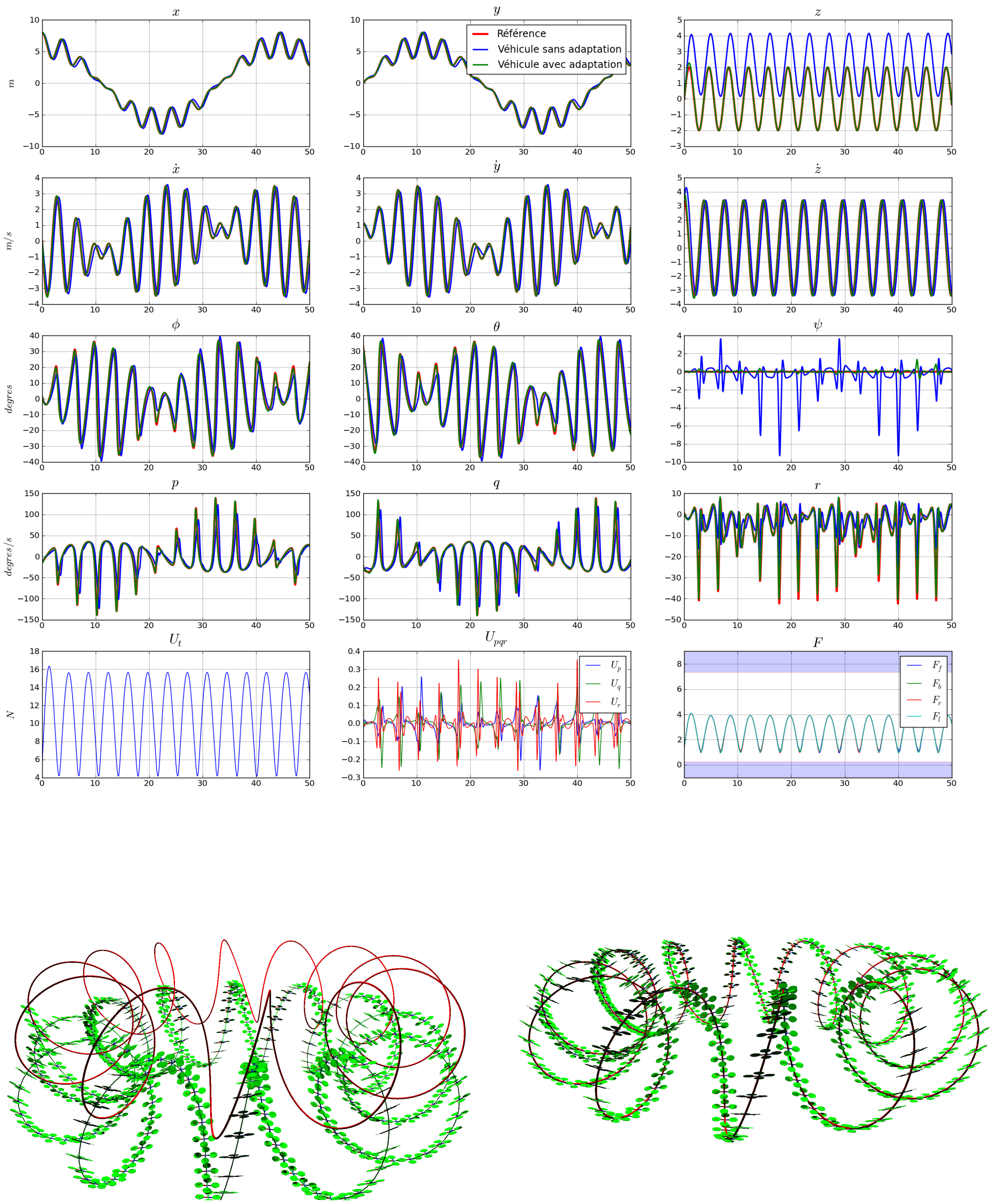


FIGURE 7.7 – hélice toroïdale

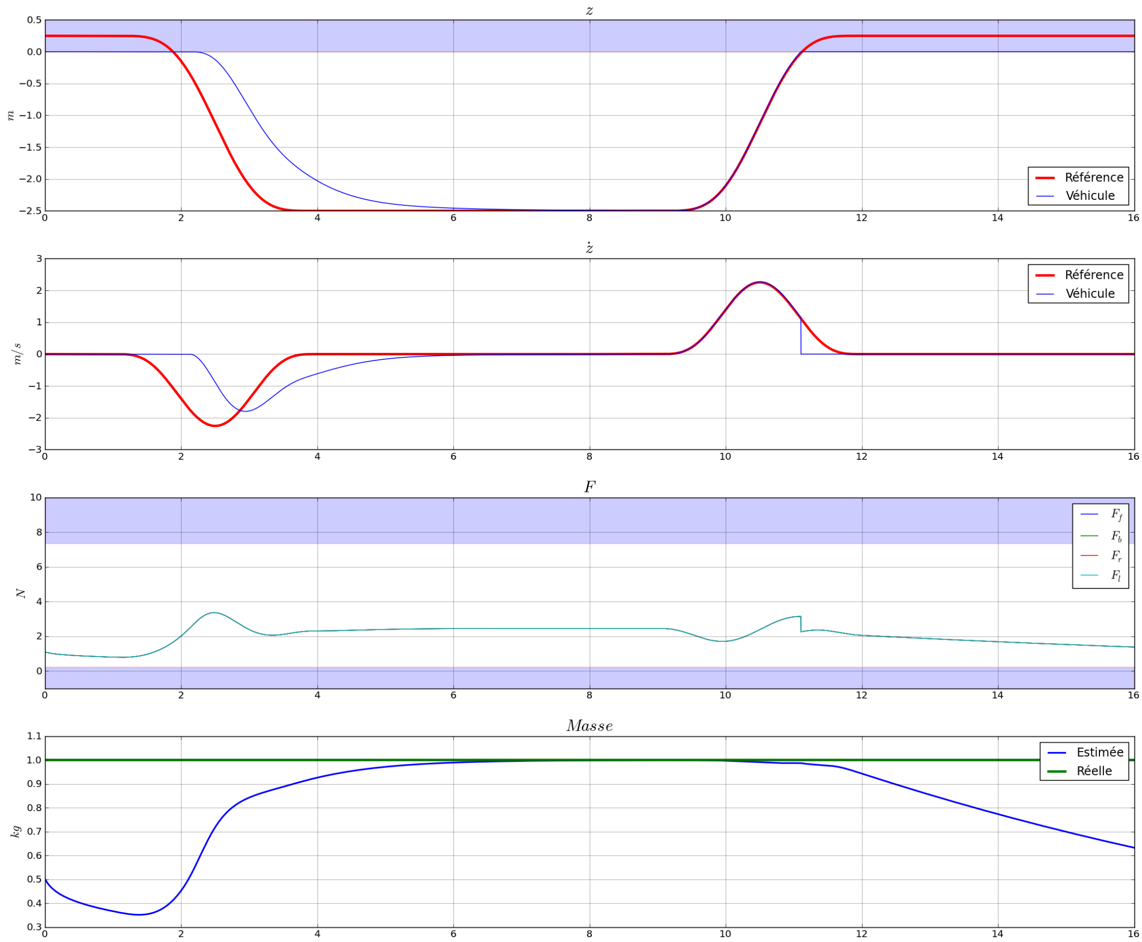


FIGURE 7.8 – décollage

Chapitre 8

Conclusion générale et perspectives

Cette thèse retrace un travail de recherche réalisé au cours de ces dernières années en vue d'améliorer les performances de guidage des minidrones.

Il semble utile ici de rappeler que l'intérêt de l'auteur pour les minidrones ne date pas d'hier. En effet, ce qui au début des années 2000 n'était qu'une activité de loisir s'est, avec le temps et face aux défis technologiques à surmonter, transformé en une activité de développement et de recherche. Celle-ci a été grandement facilitée par le développement d'un environnement performant pour la robotique mobile (Paparazzi). Cette activité a très vite reçu l'appui de l'ÉNAC, celle-ci y voyant un outil pédagogique de faible coût, motivant pour les étudiants, et désirant aussi être à la pointe dans le domaine des applications civiles des minidrones. La réalisation de cette thèse devenait ainsi opportune.

Le mémoire a été organisé en trois grandes parties. La première concerne aussi bien l'état actuel du développement technologique des minidrones que les méthodes et techniques de l'Automatique non linéaire. La deuxième partie concerne l'étude, la modélisation et l'analyse des propriétés des minidrones de type quadrirotor. La troisième partie porte sur la synthèse d'une structure de commande en vue du guidage le long de trajectoires et sur l'évaluation des performances obtenues.

Chacune de ces parties apporte des contributions originales en vue de la satisfaction de l'objectif de cette recherche.

Ainsi la première partie a permis tout d'abord d'identifier les contraintes liées au développement de systèmes performants de guidage pour les minidrones. Ensuite, un état de l'art original a été développé en ce qui concerne la représentation d'état et la commande des système non linéaires, celui-ci étant illustré non seulement par des développements analytiques, mais aussi par de nombreuses simulations portant sur la conduite du vol de différents véhicules.

Dans la deuxième partie de cette étude, différentes représentations de la dynamique des minidrones de type quadrirotor ont été développées. Les propriétés de stabilité (instabilité), de commandabilité non linéaire et de platitude différentielle ont été établies. La représentation par les quaternions de l'attitude de l'engin a été introduite.

Finalement, dans la troisième partie de cette étude, a été développée une structure de commande originale intégrant une boucle de stabilisation et pilotage à base de commande différentiellement plate appliquée à la dynamique des quaternions, une boucle de guidage à base de commande non linéaire inverse et une boucle d'estimation paramétrique. Différentes techniques d'adaptation ont été développées et comparées avant de procéder à la validation de la structure de commande proposée par simulation numérique. Cette simulation numérique a alors porté sur une très grande diversité de trajectoires de guidage correspondant à une multitude d'applications potentielles.

L'implémentation préliminaire de la structure de commande sur un quadrirotor a été réalisée. Celle-ci montre que des manœuvres complexes peuvent être effectuées. Alors que théoriquement l'un des principaux avantages de cette structure de commande est de permettre des manœuvres à très forte dynamique, on s'aperçoit que les chaînes de mesure constituent un facteur limitant. En particulier, les performances du récepteur GPS utilisé dans l'estimation d'état sont limitées par la réglementation. Par ailleurs, la réception GPS pouvant être facilement brouillée (volontairement ou non), il semble intéressant de rechercher de nouveaux moyens de positionnement. Cette limitation semble commune à de nombreuses autres applications dans le domaine de la robotique mobile [FIXME ref] et les pistes principales développées aujourd'hui concernent l'utilisation de télémètres laser et de capteurs de vision.

Un problème important qui n'a été que peu abordé dans cette étude est celui de l'occurrence de saturations des actionneurs. Celle-ci se produit en général lors de manoeuvres à fortes dynamiques qui sollicitent les éléments non linéaires de la dynamique du minidrone. La gestion de la saturation des actionneurs d'un système à dynamique linéaire étant déjà une question extrêmement compliquée, la proposition qui est faite ici est de chercher à développer des générateurs de trajectoires de référence qui tiennent compte des limites de manœuvre résultant des saturations afin de les éviter. Selon l'application considérée, ces générateurs pourront être mis en œuvre hors ligne ou déployés en ligne. Ceci constitue ainsi un domaine d'application prometteur pour la Géométrie Différentielle.

Une solution pratique à la question de la saturation des actionneurs serait de multiplier le nombre de rotors ou d'introduire des rotors à pas variable, ce qui nous amène à la question du guidage des multirotors redondants (plus de quatre rotors) dont nous avons souligné le potentiel. Ceci doit conduire à la conception d'unités de gestion des actionneurs, que ce soit pour réaliser des manœuvres à forte dynamique en régime nominal ou que ce soit pour gérer des régimes dégradés résultant de la défaillance d'un ou de plusieurs rotors. On peut alors envisager la résolution en temps réel de problèmes d'affectation des actionneurs.

L'un des principaux inconvénients des véhicules à voilure tournante est relatif à leur système de sustentation. En effet, les rotors doivent fournir directement une force contre-balançant le poids de l'engin, ce qui est fortement pénalisant pour l'autonomie et la charge utile embarquable. Une solution que nous sommes en train d'étudier consiste à munir le multirotor de surfaces portantes actionnées, qui seront utilisées pendant les phases de vol d'avancement. Ceci conduit à de nouvelles problématiques aussi bien dans le domaine de l'Aérodynamique que dans le domaine de l'Automatique.

Annexe A

Paparazzi

Introduction

Paparazzi est un projet consistant à développer un système de minivéhicules aériens sans pilote suivant un modèle de développement emprunté au logiciel libre. Une particularité du projet est qu'il conçoit, publie et documente non seulement un ensemble de logiciels, mais aussi les plans du matériel embarqué (calculateur, capteurs) nécessaires à la réalisation des véhicules. Ce contenu est publié sous licence *open source*, ce qui permet à chacun d'en disposer, de le modifier et de redistribuer les modifications. Ce modèle de développement, qui a déjà prouvé son efficacité sur des projets purement logiciels comme le système d'exploitation *GNU/Linux*, le serveur web *Apache* ou le navigateur *Firefox*, a une nouvelle fois fonctionné dans le cas de Paparazzi qui est devenu à l'heure actuelle un standard de référence pour les systèmes de minidrones.

Après une description de l'historique du projet, ce chapitre approfondira un certain nombre de particularités du système.

A.1 Historique

Le projet fut initié en 2003 [1] par Pascal Brisset, enseignant-chercheur à l'ENAC et par l'auteur, comme un projet de loisir. Le but initial était de participer à une des premières rencontres de minidrones, *Les troisièmes journées microdrones*, [2] organisée par Sup'Aéro et L'ÉNSICA. Le système participa et remporta l'épreuve de vol autonome. À partir de 2005, l'ÉNAC devient un contributeur majeur du projet, et l'utilise depuis lors comme support pour la recherche et l'enseignement. Au cours des années, le projet Paparazzi s'est mué en

1. L'enregistrement du projet sur gnu.org est daté du 19 février 2003.
2. `http://aeromav.free.fr/MAV03/` accédée le 3 mai 2011

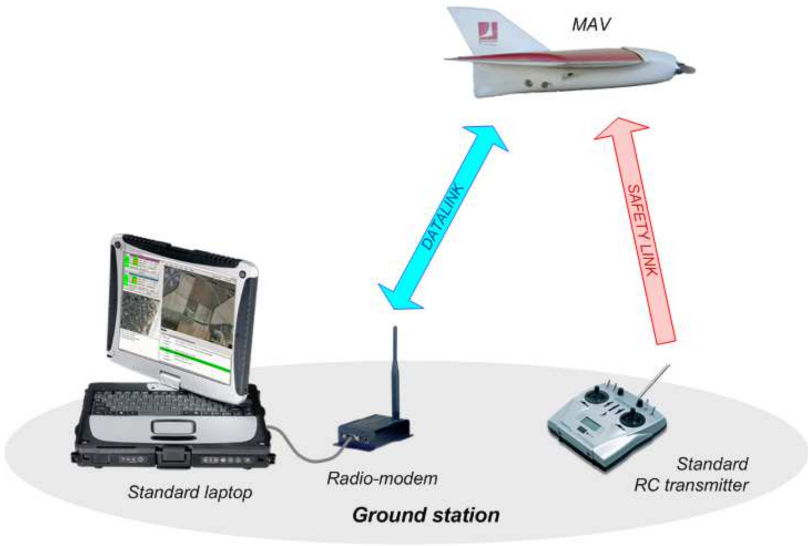


FIGURE A.1 – Schéma de l'architecture du système Paparazzi

un environnement générique pour la robotique et a gagné de nombreux utilisateurs, privés, professionnels et académiques.

A.2 Architecture

Lorsqu'on évoque les minidrones, le véhicule et en particulier le pilote automatique sont les premiers éléments qui viennent généralement à l'esprit. La mise en œuvre d'un ou plusieurs véhicules aériens sans pilote requiert cependant une infrastructure beaucoup plus vaste (voir figure A.1), comprenant en particulier le segment sol et les moyens de communication.

Le pilote automatique pilote uniquement, alors que le segment sol remplit de nombreuses fonctions : avant la mission, il prépare un plan de vol ; pendant la mission il supervise le vol, éventuellement le reconfigure, et en archive les données ; après le vol il les analyse.

Dans Paparazzi, le système embarqué est capable de navigation automatique (sur véhicules à ailes fixes et à voilures tournantes). Il est donc complètement autonome et ne dépend pas de la disponibilité du lien de communication.

A.3 Segment sol

Le segment sol de Paparazzi est constitué d'une architecture distribuée multi-agents. Dans cette architecture, chaque agent réalise une tâche simple et bien définie et communique avec les autres agents par l'intermédiaire d'un bus logiciel. Des exemples d'agents sont représentés sur la figure A.2 :

- GCS est la station sol - c'est-à-dire l'interface graphique avec l'opérateur. Elle permet la suveillance des paramètres de vol et l'interaction avec le véhicule.
- Link est la passerelle avec un réseau "air".
- Plotter est un outil générique de tracé de courbes permettant de visualiser l'évolution de différents paramètres.
- Server est le serveur central, il réalise l'aiguillage des flux de données entre les différents agents et enregistre toutes les opérations à des fins de rejeu ou d'analyse.
- Simulator est une enveloppe permettant d'exécuter le code embarqué du pilote automatique sur la machine hôte à des fins de mise au point ou de formation.
- Payload Application est l'application charge utile.

Cette approche, par opposition à une approche de type monolithique, présente un certain nombre d'avantages :

- Chaque agent réalise une tâche simple et bien définie, ce qui le rend plus facile à spécifier, à implémenter et à mettre au point.
- Chaque agent peut être écrit dans un langage de programmation différent, adapté à la tâche en question (interaction avec le matériel ou langage de haut niveau) ou aux connaissances de la personne développant l'agent. Ceci apporte une grande souplesse au processus de développement.
- Les différents agents peuvent être localisés sur des calculateurs différents, ce qui apporte une grande souplesse d'utilisation du système.
- Le système peut être facilement interfacé avec d'autres systèmes préexistants en développant une passerelle d'accès au middleware.
- Le système peut être facilement enrichi.

Un premier exemple des possibilités offerte par l'architecture du segment sol a été démontré par l'auteur lors de la conférence *24C3*[3] du Chaos Computer Club à Berlin en 2007. Pendant la présentation, deux véhicules aériens sans pilote ont été mis en œuvre depuis la salle de conférence, l'un évoluant en France, à Toulouse, l'autre dans le nord de l'Allemagne, à Hildesheim. Les véhicules étaient contrôlés depuis la salle de conférence et retransmettaient leurs paramètres de vol ainsi que leur vidéo aérienne sur l'écran de projection de la salle de conférence. Le lien réseau entre l'opérateur et les véhicules était

3. `http://events.ccc.de/congress/2007/Fahrplan/events/2225.en.html` accédée le 3 mai 2011

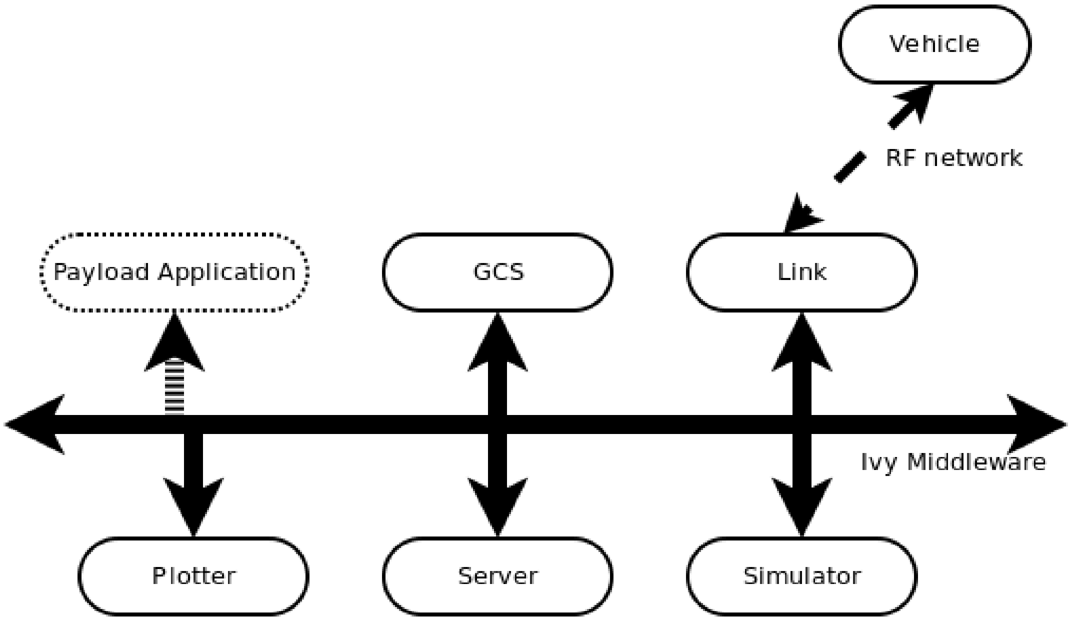


FIGURE A.2 – Schéma de l'architecture du segment sol Paparazzi.

constitué par le réseau Internet, utilisant aux extrémités pour l'un des véhicules une ligne privée de type DSL et pour l'autre un accès de type téléphonie mobile (GSM). Ce genre de fonctionnalité est courante pour les drones de grande taille. Ainsi les drones déployés en Iraq par l'armée américaine sont-ils contrôlés depuis la Floride au moyen d'un lien satellite. En revanche cette fonctionnalité est peu courante pour les drones de petite taille.

Une utilisation plus courante des possibilités offertes par l'architecture distribuée du segment sol consiste à partager la charge de travail entre deux opérateurs, l'un responsable de la navigation des véhicules, l'autre responsable de la mise en œuvre de la charge utile.

A.4 Systèmes embarqués

Le logiciel embarqué Paparazzi présente une conception modulaire en couches qui simplifie son utilisation sur différentes architectures matérielles (voir figure A.3) et dans différentes configurations logicielles. Par exemple, il est possible de faire fonctionner Paparazzi sur des calculateurs multiprocesseurs en répartissant le logiciel dans les processeurs en fonction de son niveau de criticité.

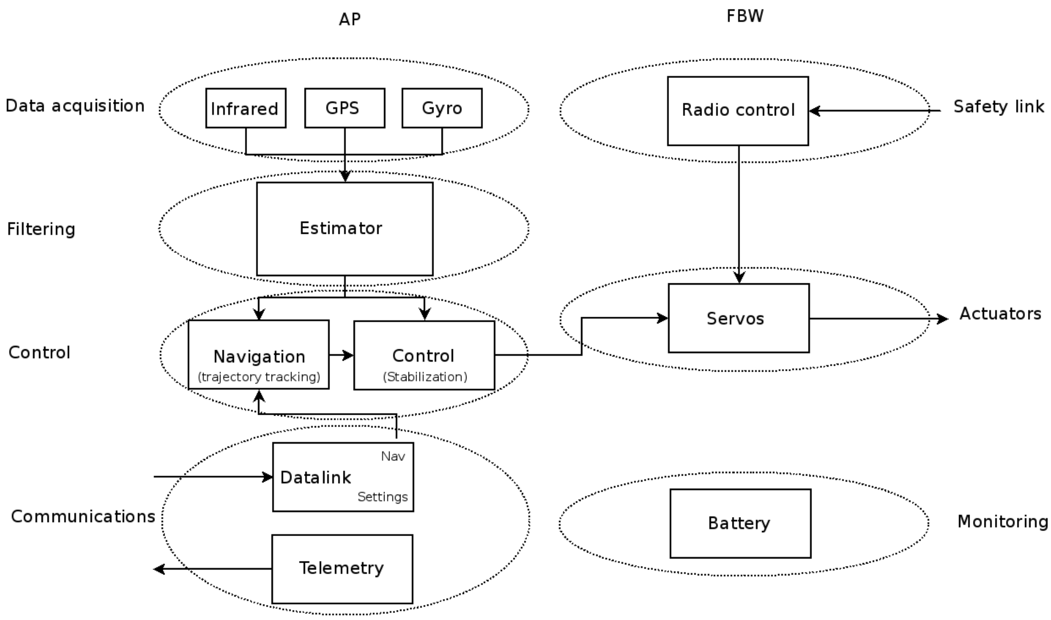


FIGURE A.3 – Architecture embarquée : schéma fonctionnel du logiciel embarqué.

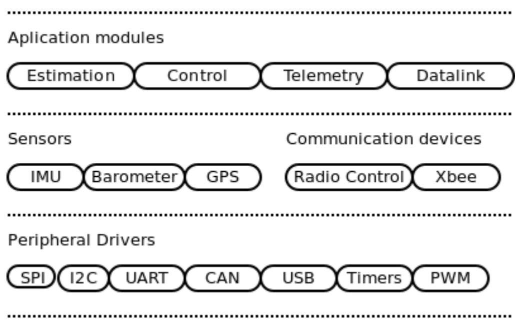


FIGURE A.4 – Architecture embarquée : organisation en couches.

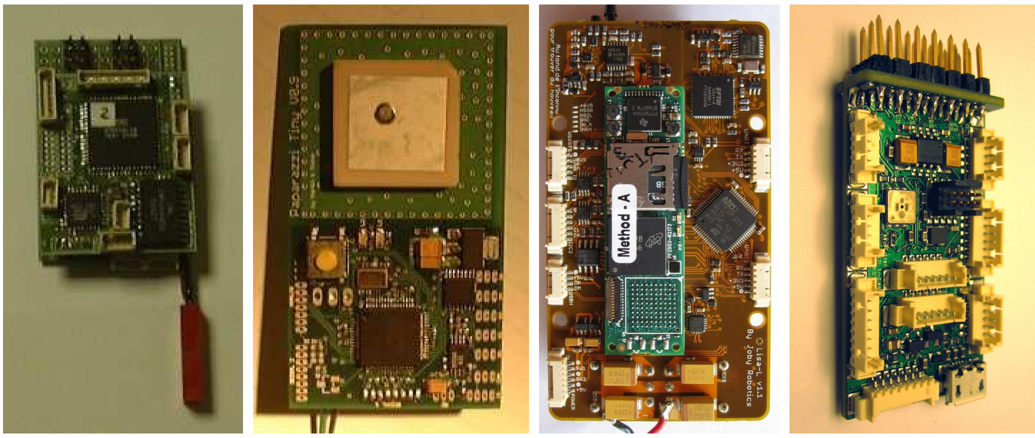


Figure A.5 – Calculateurs Paparazzi, de gauche à droite : double AVR 8bit 16Mhz (2004), simple ARM7 32bit 60Mhz(2006), Cortex M3 32bit 72Mhz + OMAP35 32bit 600Mhz (2010), Cortex M3 32bit 80Mhz (2011).

A.5 Interface graphique

L'interface graphique constitue le lien entre l'opérateur et le système. C'est un élément critique. Elle doit permettre :

- de minimiser le risque d'erreur ;
- d'avoir une vision globale et synthétique du système ;
- de minimiser la charge de travail de l'opérateur ;
- de minimiser le besoin de formation de l'opérateur.

Le dernier point est particulièrement vrai dans le cas des minidrones, où l'on souhaite que l'opérateur ne soit pas spécialisé, e.g. l'agriculteur qui veut surveiller son champ, le scientifique qui veut faire ses mesures, le soldat qui a besoin d'images.

Dans un premier temps, Paparazzi a suivi la démarche classique consistant à s'inspirer d'un cockpit d'avion. Avec l'expérience, l'approche a changé. Une nouvelle interface spécifique a été développée, après avoir constaté que le cockpit n'était pas adapté. Celui-ci a été remplacé par un système de strips et de cartes.

La solution s'inspirant d'un cockpit n'est pas adaptée parce que l'opérateur n'est pas un pilote. Il veut pouvoir éditer un plan de vol, superviser les paramètres de vol et, moins fréquemment, ajuster certains paramètres du pilote automatique. D'autre part les minidrones emportent une charge utile. L'opérateur doit fournir la charge de travail nécessaire à en assurer la mise en œuvre efficace. Par exemple, l'agriculteur surveille sa vidéo.

Comme nous avons un système de pilotage automatique, la charge de travail liée au pilotage du véhicule est réduite. En revanche l'utilisateur est à l'extérieur, ce qui pose des problèmes d'ergonomie.

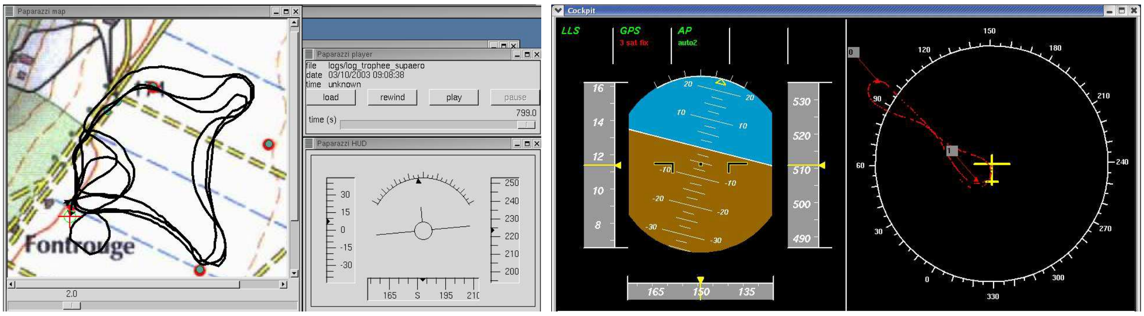


FIGURE A.6 – Premières interfaces graphiques Paparazzi inspirées de cockpit d'avion.

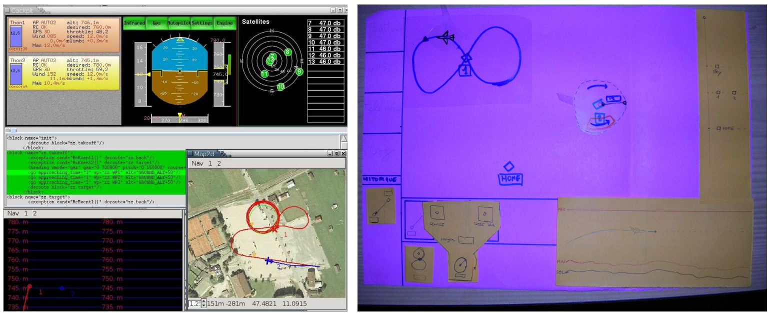


FIGURE A.7 – À droite : maquette papier d'interface graphique ; à gauche : prototype d'interface graphique à strips.

Dans le cas où on fait voler plusieurs drones simultanément, la tâche devient intensive et complexe. Le travail est celui de plusieurs pilotes plus celui du contrôleur aérien, d'où la nécessité d'automatiser au maximum les tâches et de synthétiser les informations pour l'opérateur.

A.6 Langage de plan de vol

Un aspect particulièrement intéressant du système Paparazzi est le langage de description de plan de vol. Alors que, dans la plupart des systèmes concurrents, le plan de vol consiste en un simple enchaînement de points de passage, Paparazzi propose un langage complet (Turing-complet) pour la description du plan de vol. D'une part la description de trajectoires arbitrairement complexes, par opposition à des segments de droites reliant les points de passage, est rendu possible par la possibilité d'effectuer du calcul. D'autre part, la présence de structures de contrôle permet la description d'une logique arbitrairement complexe, autorisant par exemple la description de trajectoires réactives (voir figure A.11).

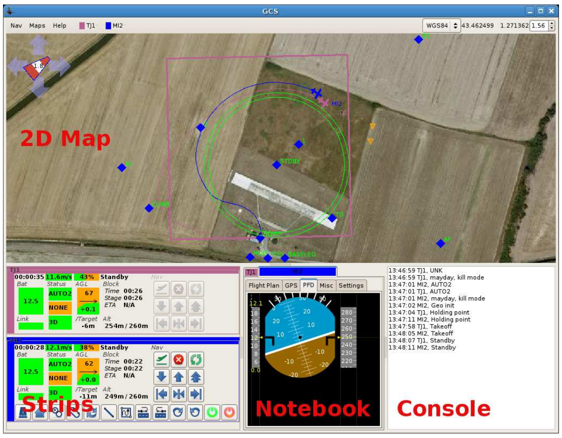


FIGURE A.8 – Interface graphique Paparazzi actuelle.

FIGURE A.9 – Interface graphique Paparazzi en fonctionnement, à gauche sur un PC avec écran tactile, à droite un tablet-PC.

FIGURE A.10 – Exemples de conditions d'utilisation des interfaces graphiques Paparazzi en extérieur.

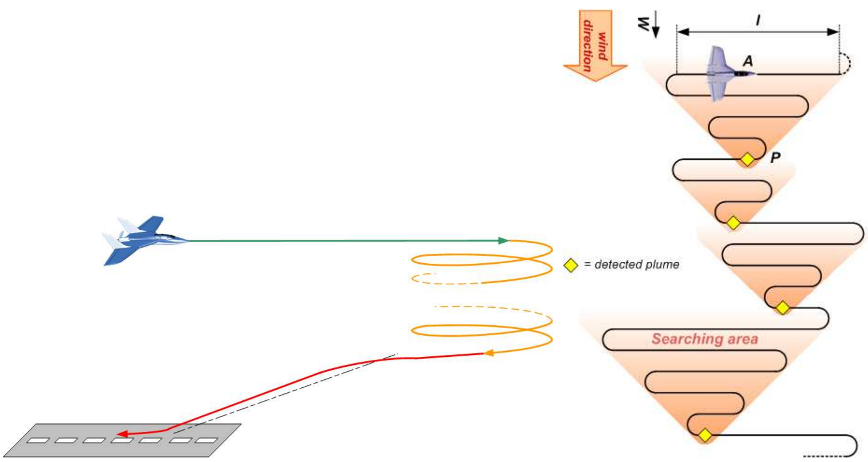


FIGURE A.11 – Exemples de plans de vol : à gauche, procédure d'atterrissage ; à droite, Anémotaxis.

A.6.1 Cône

Listing A.1 – Montée sur un cône permettant l'atterrissage en vol plané

```
<block name="cone">
  <circle wp="cone" vmode="climb" climb="1" radius="50+(estimator_z-ground_alt)/2"
      until="10 > PowerVoltage()"/>
</block>
```

A.6.2 Trajectoire d'atterrissage

Listing A.2 – Exemple de procédure d'atterrissage

```
<block name="land">
   <circle radius="nav_radius" until="NavCircleCount() > 0.5" wp="_BASELEG"/>
   <circle radius="nav_radius" until="And(NavQdrCloseTo(DegOfRad(baseleg_out_qdr)-(
       nav_radius/fabs(nav_radius))*10), 10 > fabs(estimator_z - WaypointAlt(WP__BASELEG))
       )" wp="_BASELEG"/>
</block>
<block name="final">
  <exception cond="ground_alt + 10 > estimator_z" deroute="flare"/>
  <go from="AF" hmode="route" vmode="glide" wp="TD"/>
</block>
<block name="flare">
  <go approaching_time="0" from="AF" hmode="route" throttle="0.0" vmode="throttle" wp="TD"
      />
  <attitude roll="0.0" throttle="0.0" until="FALSE" vmode="throttle"/>
</block>
```

A.6.3 AnémoTaxis

Anémotaxis est une fonction de navigation qui utilise les données d'un capteur de particules afin de trouver la source d'émission de celles-ci. Cette fonction de navigation est inspirée du comportement des insectes. Elle a été développée dans le cadre d'une expérimentation visant à détecter des feux de forêts.

Listing A.3 – Anémotaxis

```
  <block name="Anemotaxis">
      <call fun="nav_anemotaxis_downwind(WP_C, 300)"/>
      <go from="HOME" wp="C" hmode="route" approaching_time="0"/>
      <call fun="nav_anemotaxis_init(WP_C)"/>
      <call fun="nav_anemotaxis(WP_C, WP_C1, WP_C2, WP_PLUME)"/>
    </block>
```

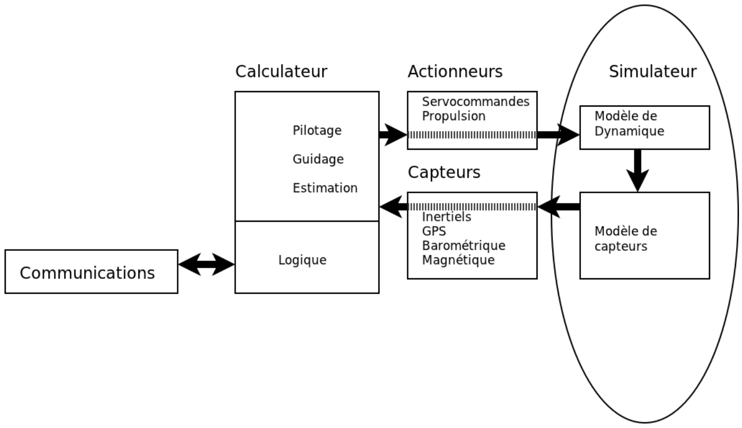


FIGURE A.12 – Schéma bloc d'un simulateur.

A.7 Simulateur

Pour réaliser une simulation il convient de disposer d'un modèle de dynamique et d'un modèle de capteurs. Le modèle de dynamique décrit la dynamique de l'avion. Le modèle de capteurs est le modèle mathématique décrivant le comportement des capteurs embarqués dans l'avion.

L'architecture de Paparazzi est faite de telle sorte que le modèle de dynamique et le modèle de capteurs peuvent être changés arbitrairement pour répondre aux besoins spécifiques de l'utilisateur. Actuellement il fonctionne avec des modèles simplifiés mais suffisamment réalistes du point de vue de la navigation.

Paparazzi peut aussi utiliser JSBSIM [4], qui est un modèle de dynamique sophistiqué développé par une équipe internationale.

A.8 Applications

Les applications du projet Paparazzi sont nombreuses et recouvrent tous les domaines habituellement rencontrés pour les minidrones : recherche, industrie, enseignement, militaire, sécurité civile. Nous citons ici quelques exemples :

- Projet Spy Arrow, Thales : depuis 2005, [5] le groupe Thales développe un microdrone à vocation militaire basé sur le système Paparazzi ;
- la start-up américaine Miraterre a développé une gamme de microdrones polyvalents

4. `http://jsbsim.sourceforge.net` accédé le 30 octobre 2011
5. `http://www.thalesgroup.com/Portfolio/Defence/LandJoint_Products_SPY_ARROW/` accédé le 31 octobre 2011

utilisant le système Paparazzi [6] ;
- la société Allemande Martin Muller Engineering [7] commercialise des systèmes de microdrones Paparazzi complets pour des universités ou des scientifiques, cette société forme également les acheteurs afin qu'ils puissent opérer leurs microdrones eux-mêmes ;
- la start-up Française Fly'n Sense [8] commercialise des systèmes de drones et des services utilisant des drones basés sur le système Paparazzi ;
- la société californienne Joby Energy [9] a mené des recherches sur la production d'énergie par turbines volantes utilisant le système Paparazzi.

6. http://miraterre.com/ accédé le 31 octobre 2011
7. http://pfump.org/ accédé le 31 octobre 2011
8. http://www.fly-n-sense.com/ accédé le 31 octobre 2011
9. http://www.jobyenergy.com/ accédé le 31 octobre 2011

Annexe B

Représentations de l'orientation d'un véhicule

B.1 Introduction

Un des premiers problèmes qui se pose à toute personne étudiant la physique du solide consiste à représenter son *orientation* dans l'espace. L'orientation ou *attitude* d'un solide est définie comme la rotation permettant d'amener un repère de référence en coïncidence avec un repère lié au solide.

L'image $\underline{\tilde{v}}$ d'un vecteur $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ par une rotation d'axe $\underline{u}$ et d'angle α peut être décrite par la formule de Rodrigues :

$$\underline{\tilde{v}} = \cos(\alpha)\underline{v} + \sin(\alpha)\underline{u} \wedge \underline{v} + (1 - \cos(\alpha))(\underline{u}.\underline{v})\underline{u} \tag{B.1.1}$$

TODO 1. faire un schéma - mettre une reference sur un bouquin

B.2 Matrices de rotation

B.2.1 Définition

En tant qu'application linéaire de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, une rotation peut être représentée par une matrice réelle 3×3. La matrice représentant une rotation d'axe défini par le vecteur unitaire $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix}^T$ et d'angle α est aussi donnée par :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{pmatrix} \sin\alpha + \left(\mathbb{I} - \underline{uu}^T\right)\cos\alpha + \underline{uu}^T \tag{B.2.1}$$

En développant, il vient

$$R = \begin{pmatrix} u_x^2 + (1-u_x^2)c_\alpha & u_xu_y(1-c_\alpha) + u_zs_\alpha & u_xu_z(1-c_\alpha) - u_ys_\alpha \\ u_xu_y(1-c_\alpha) - u_zs_\alpha & u_y^2 + (1-u_y^2)c_\alpha & u_yu_z(1-c_\alpha) + u_xs_\alpha \\ u_xu_z(1-c_\alpha) + u_ys_\alpha & u_yu_z(1-c_\alpha) - u_xs_\alpha & u_z^2 + (1-u_z^2)c_\alpha \end{pmatrix} \tag{B.2.2}$$

Les matrices de rotation sont dites orthogonales directes, c'est-à-dire que leur inverse est leur transposée et que leur déterminant vaut un. L'ensemble des matrices de rotation constitue un groupe de $\mathbb{R}^3$ habituellement noté SO^3.

L'image d'un vecteur par une rotation correspond au produit matrice-vecteur :

$$\underline{v}_b = R_{ab}\underline{v}_a \tag{B.2.3}$$

La composition des rotations se traduit par le produit matriciel :

$$R_{ac} = R_{bc}R_{ab} \tag{B.2.4}$$

B.2.2 Cinématique et cinématique inverse

La dérivée temporelle d'une matrice de rotation ayant pour vitesse angulaire $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}^T$ s'exprime comme

$$\dot{R} = R\Omega \tag{B.2.5}$$

où Ω est la matrice antisymétrique définie à partir de $\underline{\omega}$ comme

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} \tag{B.2.6}$$

L'expression de la rotation ayant pour vitesse angulaire constante $\underline{\omega}$ est donnée par

$$R(t) = R_0 e^{\Omega t} \tag{B.2.7}$$

B.3 Angles d'Euler

Toute rotation peut être décomposée comme la succession de trois rotations suivant des axes correspondant à des directions linéairement indépendantes. La représentation des orientations dite en *angles d'Euler* se base sur cette propriété pour définir une orientation comme un triplet de nombres réels constituant les angles des trois rotations successives. Les axes de ces trois rotations sont définis par convention.

Dans certaines conventions, les axes des trois rotations sont définis par rapport au repère de référence. Ces conventions sont dites *extrinsèques*. Dans d'autres conventions, l'axe de chaque rotation est défini dans le repère induit par la rotation précédente. Ces conventions sont dites *intrinsèques*.

La représentation par angles d'Euler est attractive pour son intuitivité. Elle constitue aussi la représentation mathématique des rotations de dimension minimale. Ses principaux inconvénients sont la multiplicité des conventions pour le choix des axes (différents domaines de la physique utilisent différentes conventions) ainsi que l'existence de singularités (pour certaines valeurs des angles, les rotations associées ne sont pas discernables).

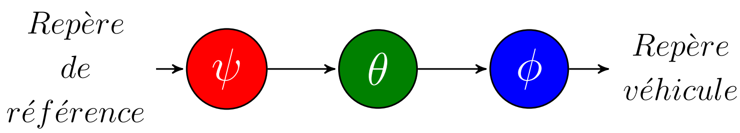


FIGURE B.1 – L'ordre des rotations pour la convention *3-2-1 relative au véhicule* est lacet, puis tangage puis ϕroulis.

La convention généralement admise dans le domaine de l'Aéronautique fait partie de la famille des conventions intrinsèques et est dite *3-2-1 relative au véhicule*. La première rotation est effectuée autour du troisième axe (axe des z) du repère de référence ; l'angle de cette rotation est appelé *lacet* et désigné par la lettre ψ. La seconde rotation est effectuée autour du second axe (axe des y) du repère engendré par la première rotation, l'angle étant appelé *tangage* et désigné par la lettre θ. Finalement, la troisième rotation est effectuée autour du premier axe (axe des x) du repère engendré par la seconde rotation. Ce troisième angle est appelé roulis et noté ϕ.

B.3.1 Relation entre les angles d'Euler et les matrices de rotation

Les trois rotations mises en jeu dans la représentation Aéronautique étant effectuées autour d'axes principaux des repères intermédiaires, les matrices associées sont exprimées de la manière suivante :

$$R_\psi = \begin{pmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & s_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_\theta = \begin{pmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix} R_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi \end{pmatrix} \tag{B.3.1}$$

La matrice de rotation complète, souvent notée DCM (pour *Direct Cosine Matrix*, où matrice des cosinus directeurs) est obtenue par le produit des trois matrices de rotation ci-dessus, soit

$$DCM = R_\phi R_\theta R_\psi \tag{B.3.2}$$

En développant, il vient :

$$DCM = \begin{pmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi c_\theta \\ c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{pmatrix} \tag{B.3.3}$$

De manière inverse, les angles d'Euler peuvent être obtenus à partir des composantes de la matrice de rotation. En notant :

$$R = \begin{pmatrix} r_{(1,1)} & r_{(1,2)} & r_{(1,3)} \\ r_{(2,1)} & r_{(2,2)} & r_{(2,3)} \\ r_{(3,1)} & r_{(3,2)} & r_{(3,3)} \end{pmatrix} \tag{B.3.4}$$

Il vient

$$\phi = atan(\frac{r_{(2,3)}}{r_{(3,3)}}) \tag{B.3.5}$$

$$\theta = -asin(r_{(1,3)}) \tag{B.3.6}$$

$$\psi = atan(\frac{r_{(1,2)}}{r_{(1,1)}}) \tag{B.3.7}$$

B.3.2 Cinématique et cinématique inverse

La dérivée temporelle des angles d'Euler est calculée en exprimant $\underline{\omega}$, le vecteur des vitesses angulaires dans le repère véhicule :

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_\phi \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_\phi \cdot \mathbf{R}_\theta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{B.3.8}$$

Puis en développant :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & s_\phi c_\theta \\ 0 & -s_\phi & c_\phi c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{B.3.9}$$

qui s'inverse en :

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & \frac{s_\phi}{c_\theta} & \frac{c_\phi}{c_\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \tag{B.3.10}$$

B.3.3 Singularités

Pour une valeur du tangage de $\frac{\pi}{2}$, la matrice de rotation s'écrit

$$DCM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ s_\phi c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi c_\psi & 0 \\ c_\phi c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\psi - s_\phi c_\psi & 0 \end{pmatrix} \tag{B.3.11}$$

ou

$$DCM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin(\phi - \psi) & \cos(\phi - \psi) & 0 \\ \cos(\phi - \psi) & -\sin(\phi - \psi) & 0 \end{pmatrix} \tag{B.3.12}$$

Il apparaît alors qu'il n'est plus possible de distinguer le roulis du lacet. De même, la matrice obtenue dans l'équation (B.3.9) est singulière pour une valeur de θ égale à $\frac{\pi}{2}$.

B.4 Quaternions

B.4.1 Définition

Une troisième représentation couramment utilisée pour la représentation des rotations est connue sous le nom de *quaternion unitaire*. Un quaternion unitaire est un quadruplet de réels qui s'exprime en fonction du vecteur unitaire $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix}^T$ représentant l'axe de la rotation et de l'angle de rotation α de la manière suivante :

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_e \\ \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) \\ \sin(\frac{\alpha}{2}) u_x \\ \sin(\frac{\alpha}{2}) u_y \\ \sin(\frac{\alpha}{2}) u_z \end{pmatrix} \tag{B.4.1}$$

Dans la mesure où ce vecteur de dimension 4 représente de manière unique une transformation n'ayant que 3 degrés de liberté, on vérifie qu'il existe une contrainte sur sa norme, à savoir :

$$|\eta| = \sqrt{\eta_e^2 + \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2} = 1 \tag{B.4.2}$$

L'image v_b d'un vecteur v_a par une rotation définie par le quaternion η est notée en utilisant l'operateur $\odot$ et peut être représentée en utilisant un produit matriciel de la façon suivante :

$$v_b = \eta \odot v_a = \begin{pmatrix} \eta_e^2 + \eta_x^2 - \eta_y^2 - \eta_z^2 & 2(\eta_x \eta_y + \eta_z \eta_e) & 2(\eta_x \eta_z - \eta_y \eta_e) \\ 2(\eta_x \eta_y - \eta_z \eta_e) & \eta_e^2 - \eta_x^2 + \eta_y^2 - \eta_z^2 & 2(\eta_y \eta_z + \eta_x \eta_e) \\ 2(\eta_x \eta_z + \eta_y \eta_e) & 2(\eta_y \eta_z - \eta_x \eta_e) & \eta_e^2 - \eta_x^2 - \eta_y^2 + \eta_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{ax} \\ v_{ay} \\ v_{az} \end{pmatrix} \tag{B.4.3}$$

La composition des rotations se traduit par le produit des quaternions qui s'exprime de la façon suivante :

$$\eta_3 = \eta_1 \otimes \eta_2 = \begin{pmatrix} \eta_{3e} \\ \eta_{3x} \\ \eta_{3y} \\ \eta_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{1e}\eta_{2e} - \eta_{1x}\eta_{2x} - \eta_{1y}\eta_{2y} - \eta_{1z}\eta_{2z} \\ \eta_{1e}\eta_{2x} + \eta_{1x}\eta_{2e} + \eta_{1y}\eta_{2z} - \eta_{1z}\eta_{2y} \\ \eta_{1e}\eta_{2y} - \eta_{1x}\eta_{2z} + \eta_{1y}\eta_{2e} + \eta_{1z}\eta_{2x} \\ \eta_{1e}\eta_{2z} + \eta_{1x}\eta_{2y} - \eta_{1y}\eta_{2x} + \eta_{1z}\eta_{2e} \end{pmatrix} \tag{B.4.4}$$

Il convient de noter que, similairement à la composition des rotations, le produit des quaternions n'est pas commutatif.

L'inverse d'un quaternion $\eta = {}^t\begin{pmatrix} \eta_e\eta_x\eta_y\eta_z \end{pmatrix}$ se calcule comme

$$\eta^{-1} = {}^t\begin{pmatrix} \eta_e^{-1} & \eta_x^{-1} & \eta_y^{-1} & \eta_z^{-1} \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} \eta_e & -\eta_x & -\eta_y & -\eta_z \end{pmatrix} \tag{B.4.5}$$

et est tel que

$$\eta \otimes \eta^{-1} = \eta^{-1} \otimes \eta = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.4.6}$$

en utilisant la définition du produit.

B.4.2 Cinématique et cinématique inverse

La dérivée temporelle d'un quaternion η ayant une vitesse angulaire $\omega = {}^t\begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}$ s'exprime comme

$$\dot{\eta} = \begin{pmatrix} \dot{\eta_e} \\ \dot{\eta_x} \\ \dot{\eta_y} \\ \dot{\eta_z} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p\eta_x q\eta_y r\eta_z \\ -p\eta_e - r\eta_y q\eta_z \\ -q\eta_e + r\eta_x - p\eta_z \\ -r\eta_e - q\eta_x + p\eta_y \end{pmatrix} \tag{B.4.7}$$

La dérivée temporelle d'un quaternion peut aussi être exprimée à l'aide d'un produit matriciel :

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & p & q & r \\ -p & 0 & -r & q \\ -q & r & 0 & -p \\ -r & -q & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_e \\ \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{pmatrix} \tag{B.4.8}$$

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2}\Omega\eta \tag{B.4.9}$$

La trajectoire d'un quaternion ayant une vitesse angulaire $\underline{\omega}$ constante s'exprime comme

$$\eta(t) = \Phi(t, t_0)\eta(t_0) \tag{B.4.10}$$

où la matrice de transition $\Phi(t, t_0)$ est donnée par

$$\Phi(t, t_0) = e^{(t-t_0)\Omega} \tag{B.4.11}$$

qui se calcule comme

$$\Phi(t, t_0) = \cos(\frac{(t-t_0)}{2}|\omega|)\mathcal{I} + \frac{\sin(\frac{(t-t_0)}{2}|\omega|)}{|\omega|}\Omega \tag{B.4.12}$$

La trajectoire peut aussi être exprimée en terme de produit de quaternions.

$$\eta(t) = \eta(t_0) \otimes \begin{pmatrix} \cos(\frac{(t-t_0)}{2}|\omega|) \\ \frac{p}{|\omega|}\sin(\frac{(t-t_0)}{2}|\omega|) \\ \frac{q}{|\omega|}\sin(\frac{(t-t_0)}{2}|\omega|) \\ \frac{r}{|\omega|}\sin(\frac{(t-t_0)}{2}|\omega|) \end{pmatrix} \tag{B.4.13}$$

Nomenclature

- $\hat{x}$: estimée de x
- $\tilde{x}$: erreur en x
- $\overline{x}$: point de linéarisation x
- $\underline{x}$: vecteur
- $\underline{x}^T$: transposée d'un vecteur ou d'une matrice
- $E[x]$: espérance de x
- $\dot{f}$: dérivée temporelle de f
- $\ddot{f}$: seconde dérivée temporelle de f
- $f^{(n)}$: n^{ieme} dérivée temporelle de f

Acronymes

- CAO : Conception Assistée par Ordinateur ;
- DCM : *Direct Cosine Matrix*, matrice des cosinus directeurs ;
- DSL : *Digital Subscriber Line*
- ÉNAC : École Nationale de l'Aviation Civile ;
- ÉNSICA : École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Constructions Aéronautiques ;
- GNU : *Gnu is Not Unix* ;
- GSM : *Global System for Mobile communications* ;
- GPS : *Global Positioning System*, système de positionnement global ;
- IMU : *Inertial Measurement Unit*, centrale inertielle ;
- MEMS : *Micro Electro Mechanical System* ;
- MIAC : *Model Identification Adaptive Control* ;
- MRAC : *Model Reference Adaptive Control* ;
- NLI : *Non Linear Inverse* ;
- PID : Proportionnel, Intégral, Dérivatif ;
- POP : *Package On Package* ;
- TLFI : Trésor de la Langue Française Informatisé ;
- UAV : *Unmanned Aerial Vehicle* ;
- VASP : Véhicule Aérien Sans Pilote ;
- VTOL : *Vertical Take Off and Landing.*

Bibliographie

[isi,]

[Asep *et al.*, 1993] Asep, R., Shen, T. J., Achaíbou, A. K. et Mora-Camino, F. (1993). An application of the nonlinear inverse technique to flight-path supervision and control. *In Proceedings of the 9th International Conference of Systems Engineering, Las Vegas.*

[Astrom et Wittenmark, 1994] Astrom, K. J. et Wittenmark, B. (1994). *Adaptive Control.* Dover.

[Bellman, 1997] Bellman, R. (1997). *Introduction to Matrix Analysis.* SIAM, 2 édition.

[Boyd *et al.*, 1994] Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. et Balakrishnan, V. (1994). Linear matrix inequalities in system and control theory. *In Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).*

[Brisset, 2004] Brisset, P. (2004). Drones civils : Perspectives et réalités. Rapport technique, ENAC.

[Bryson et Ho, 1975] Bryson, A. E. et Ho, Y.-C. (1975). *Applied Optimal Control :Optimization, Estimation and Control.* Taylor and Francis Group.

[Dydek *et al.*, 2008] Dydek, Z. T., Annaswamy, A. M. et Lavretsky, E. (2008). Adaptive control and the nasa x-15 program : A concise history, lessons learned, and a provably correct design.

[Fliess, 1986] Fliess, M. (1986). *Algebraic and geometric methods in nonlinear control theory.* D. Reidel Pub. Co.

[Friedland, 1987] Friedland, B. (1987). *Control System Design.* Mc Graw-Hill, 2 édition.

[Ghosh et C., 2000] Ghosh, R. et C., T. (2000). Nonlinear inverse dynamic control for model-based flight. *In Proceeding of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference.*

[Golub et van Loan, 1996] Golub, G. H. et van Loan, C. F. (1996). *Matrix Computations.* The Johns Hopkins University Press.

[Gurdan *et al.*, 2007] GURDAN, D., STUMPF, J., ACHTELIK, M., DOTH, K.-M., HIRZINGER, G. et RUS, D. (2007). Energy-efficient autonomous four-rotor flying robot controlled at 1khz. *IEEE International Conference on Robotics and Automation.*

[Hedrick et Girard, 2005] HEDRICK, J. K. et GIRARD, A. (2005). Control of nonlinear dynamic systems : Theory and applications. *Berkeley lecture notes.*

[Hoffman *et al.*, 2008] HOFFMAN, G. M., WASLANDER, S. L. et TOMLIN, C. J. (2008). Quadrotor helicopter trajectory tracking control. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference.*

[Horn et Johnson, 1990] HORN, R. A. et JOHNSON, C. R. (1990). *Matrix Analysis.* Cambridge University Press.

[Ifassiouen *et al.*, 2007] IFASSIOUEN, H., GUISSER, M. et MEDROMI, H. (2007). Robust nonlinear control of a miniature autonomous helicopter using sliding mode control structure. *World Academy of Science Engineering and Technology*, 26.

[Isidori *et al.*, 2003] ISIDORI, A., MARCONI, L. et SERRANI, A. (2003). Robust nonlinear control of a helicopter. *IEEE transactions on automatic control*, 48(3).

[Johnson et Kannan, 2002] JOHNSON, E. N. et KANNAN, S. K. (2002). Adaptive flight control for an autonomous unmanned helicopter. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference.*

[Joshi *et al.*, 1995] JOSHI, S. M., KELKAR, A. G. et WEN, J. T. (1995). Robust attitude stabilization of spacecraft using nonlinear quaternion feedback. *IEEE Trans. Automatic Control*, 40(10):1800–1803.

[Kalman, 1960] KALMAN, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, 1(82 (Series D)):35–45.

[Knuth, 1998] KNUTH, D. E. (1998). *The Art of Computer Programming.* Addison-Wesley Professional.

[Kokotović, 1992] KOKOTOVIĆ, P. V. (1992). Joy of feedback : Nonlinear and adaptive, (1991 bode prize lecture). Rapport technique CCEC-92-0207. Published in Control Systems Magazine, 12 :7-17, June 1992.

[Kokotović et Arcak, 2001] KOKOTOVIĆ, P. V. et ARCAK, M. (2001). Nonlinear and adaptive control : An abreviated status report. *Proceedings of the 9th Mediterranean Conference on Control and Automation.*

[Krstic *et al.*, 1995] KRSTIC, M., KANELLAKOPOULOS, I. et KOKOTOVIĆ, P. V. (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Design.* Wiley-Interscience.

[Lee, 2010] Lee, T. (2010). Geometric tracking control of the attitude dynamics of a rigid body on so(3).

[Lozano et Brogliato, 1992] Lozano, R. et Brogliato, B. (1992). Adaptive control of robot manipulators with flexible joints. *IEEE Trans. Automatic Control*, 37(2):174–181.

[Lévine, 2004] Lévine, J. (2004). *Analyse et commande des système non linéaires.* École Nationale des Ponts et Chaussées.

[Lévine, 2009] Lévine, J. (2009). *Analysis and Control of Nonlinear Systems, a Flatness-based Approach.* Springer.

[Miquel, 2004] Miquel, T. (2004). *Contribution à la synthèse de lois de commande pour la navigation relative entre aéronefs.* Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse.

[Mora-Camino, 2005] Mora-Camino, F. (2005). Commande des systèmes linéaires. *Polycopié de cours ENAC.*

[Ostroff et Bacon, 1999] Ostroff, A. J. et Bacon, B. J. (1999). Force and moment approach for achievable dynamics using nonlinear dynamic inversion. *In Proceeding of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference.*

[Phillips et Hailey, 2001] Phillips, W. F. et Hailey, C. E. (2001). Review of attitude representations used for aircraft kinematics. *In JOURNAL OF AIRCRAFT*, volume 38.

[Primbs *et al.*, 1999] Primbs, J. A., Nevistic, V. et Doyle, J. C. (1999). Nonlinear optimal control : a control lyapunov function and rededing horizon perspective. *Asian Journal of Control*, 1(1).

[Rabbath, 2005] Rabbath, F. (2005). *The Art of the Bow.* Avant Bass.

[Rios-Bolivar *et al.*, 1995] Rios-Bolivar, M., Sira-Ramirez, H. et Zinober, A. S. I. (1995). Output tracking control via adaptive input-output linearization : a backstepping approach. *Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control.*

[Ripka et Tipek, 2007] Ripka, P. et Tipek, A. (2007). *Modern Sensors Handbook.* Pavel Ripka and Alois Tipek.

[Rogers, 2007] Rogers, R. M. (2007). *Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems.* AIAA education serie, 3 édition.

[Shen, 1995] Shen, T. J. (1995). *Les Réseaux Neurones Affines et Leur Application à la Commande Automatique du Vol.* Thèse de doctorat, Institut Nationale Polytechnique de Toulouse.

[Simon, 2006] Simon, D. (2006). *Optimal State Estimation.* Wiley Interscience, 1 édition.

[Singh, 2009] Singh, S. K. (2009). *Process Control : Concepts Dynamics And Applications.* Prentice-Hall Of India Pvt. Ltd.

[Slotine et Li, 1991] Slotine, J.-J. E. et Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control.* Person Education.

[Sonneveldt *et al.*, 2009] Sonneveldt, L., van Oort, E., Chu, Q. et Mulder, J. (2009). Nonlinear adaptive flight control law design and handling qualities evaluation. *48th IEEE Conference on Decision and Control.*

[Stengel, 1994] Stengel, R. F. (1994). *Optimal Control and Estimation.* Dover Publications.

[Tayebi et McGilvray, 2006] Tayebi, A. et McGilvray, S. (2006). Attitude stabilization of a vtol quadrotor aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(3).

[Taylor *et al.*, 2003] Taylor, B., Bil, C. et Watkins, S. (2003). Horizon sensing attitude stabilisation : A VMC autopilot. *In 18th International UAV Systems Conference*, Bristol.

[Tenenbaum, 2005] Tenenbaum, R. (2005). *Fundamentals of Applied Dynamics.* Springer.

[Titterton et Weston, 2005] Titterton, D. H. et Weston, J. L. (2005). *Strapdown Inertial Navigation Technology.* AIAA, 2 édition.

[Wachowski et Wachowski, 2000] Wachowski, L. et Wachowski, A. (2000). *The Art of the Matrix.* Newmarket Press.

[Walach et Widrow, 1996] Walach, E. et Widrow, B. (1996). *Adaptive Inverse Control.* Prentice Hal.

[Wang et Stengel, 2005] Wang, Q. et Stengel, R. F. (2005). Robust nonlinear flight control of a high-performance aircraft. *IEEE Transactions on Control Technology*, 13(1).

[Waslander, 2004] Waslander, S. (2004). Starmac vehicle dynamics.

[Wei *et al.*, 1989] Wei, B., Weiss, H. et Arapostathis, A. (1989). Quaternion feedback regulator for spacecraft eigenaxis rotations. *AIAA Journal of Guidence and Control*, 12(3):375–380.

[Wendel, 2007] Wendel, J. (2007). *Integrierte Navigationsysteme.* Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, Rosenheimer St 145, D-81671 München, 1 édition.

[Wertz, 1978] Wertz, J. R. (1978). *Spacrecraft Attitude Determination and Control.* Kluwer Academic Publishers, 10 édition.

[Winkler, 2007] Winkler, S. (2007). *Zur Sensordatenfusion integrierte Navigationssysteme unbemannter Kleinstflugzeuge.* Shaker Verlag, Braunschweig, 1 édition.

[Yu *et al.*, 2009] Yu, Z., Fan, G. et Yi, J. (2009). Indirect adaptive flight control based on nonlinear inversion. *procedings of the 2009 International Conference on Mechatronics and Automation.*

[Zarchan et Musoff, 2005] Zarchan, P. et Musoff, H. (2005). *Fundamentals of Kalman Filtering : a practical approach.* AIAA, 2 édition.

Contacts

Antoine Drouin
Ecole Nationale de l'Aviation Civile,
7 avenue Edouard-Belin BP 54005,
31055 Toulouse Cedex 4,
France,

Téléphone : +33 (0)5 62 17 43 89,
Toile : http ://www.recherche.enac.fr/~poine,
Mél : drouin@recherche.enac.fr