



HAL
open science

**Vers des traitements morphologiques couleur et
spectraux valides au sens perceptuel et physique :
Méthodes et critères de sélection**

Audrey Ledoux

► **To cite this version:**

Audrey Ledoux. Vers des traitements morphologiques couleur et spectraux valides au sens perceptuel et physique : Méthodes et critères de sélection. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Poitiers, 2013. Français. NNT: . tel-00965767

HAL Id: tel-00965767

<https://theses.hal.science/tel-00965767>

Submitted on 27 Mar 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Poitiers
Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées
École doctorale de Sciences et Ingénierie pour l'Information, Mathématiques

Thèse

En vue de l'obtention du Grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
Spécialité : Traitement du signal et des images

Présentée et soutenue par

Audrey LEDOUX

Vers des traitements morphologiques couleur et spectraux valides au sens perceptuel et physique : Méthodes et critères de sélection

Thèse dirigée par

Noël RICHARD

Anne-Sophie CAPELLE-LAIZÉ

Christine FERNANDEZ-MALOIGNE

Soutenue le 05 décembre 2013 devant la Commission d'Examen :

Jocelyn CHANUSSOT Rapporteur
Ludovic MACAIRE Rapporteur
Sébastien LEFÈVRE Examineur
Christine FERNANDEZ-MALOIGNE Directeur de thèse
Noël RICHARD Co-encadrant de thèse
Anne-Sophie CAPELLE-LAIZÉ Co-encadrant de thèse

Remerciements

Je remercie Mr Jocelyn Chanussot et Mr Ludovic Macaire pour le temps consacré à la lecture de ce mémoire et pour les différents points de vue qu'ils sauront m'apporter. Je remercie également Mr Sébastien Lefèvre d'avoir accepté de faire partie de mon jury et Mr Frank Giron pour avoir répondu à notre invitation.

Je tiens particulièrement à remercier Christine Fernandez-Maloigne qui a dirigé cette thèse et avec qui j'ai pu partager des moments de détente autour d'un panier de basket ; Noël Richard qui m'a toujours accueilli dans son bureau avec enthousiasme et qui a su me transmettre sa passion pour la recherche ; Anne-Sophie Capelle-Laizé pour son regard extérieur et sa présence malgré ses nouvelles responsabilités à l'IUT de Châtellerault. Merci pour vos conseils, vos remarques, vos critiques, votre rigueur scientifique et surtout pour la confiance que vous avez su m'accorder dès mon stage de Master.

Je remercie également Mihai Ivanovici pour les nombreux échanges scientifiques mais également ses invitations à l'école d'été organisée par son laboratoire. Cet événement m'a beaucoup apporté que ce soit scientifiquement ou personnellement. Les randonnées dans les montagnes roumaines m'ont montré que la vie d'un scientifique pouvait être parfois dangereuse mais fort agréable. Je le remercie également pour toutes les personnalités que j'ai pu croiser lors de cette école (Ioana Player, Detlef Richter (*Professor Richter*), Paulus Dietrich, Mr Erchan Aptoula, Mr Constantin Vertan, Alexandru Caliman et bien d'autres).

Je n'oublie pas Maxime Descoteaux et son équipe pour leur accueil lors de mon déplacement au sein de son laboratoire au Canada.

Je remercie la région Poitou-Charente et les entreprises L'Oréal, Crescen2o et le centre de cure thermal de La Roche Posay sans qui cette thèse n'aurait pu être financée. Merci également à toute l'équipe d'administration et technique (Philippe, Bruno (même si ce n'était pas ton rôle d'origine), Sébastien, Françoise, Virginie, Alice et nouvellement Alicia, ...) sans qui nous aurions quelques problèmes pour faire fonctionner le laboratoire. Je remercie aussi les anciens thésards pour leur aide et leurs conseils, en particulier Aurélie pour sa collaboration dans ce travail, Jonathan pour sa bonne humeur communicative, et tous les autres.

Même si je ne les ai pas vu depuis de longues années, je remercie Mr Franck Robichon et Mr Gérard Vezien, professeurs de Sciences de l'Ingénieur dans mon lycée, de m'avoir transmis le goût pour l'électronique et l'informatique. Sans eux je n'aurais sûrement pas suivi cette voie.

Je remercie également mes amis, mes parents et toute ma famille pour leurs encouragements et particulièrement Julien, mon compagnon, qui m'a supportée (surtout ces derniers mois) quelque soit les difficultés.

Merci à tous pour votre participation, aussi petite soit elle, à l'écriture de ce manuscrit.

Table des matières

Notations	vii
Terminologies	1
1 Introduction	1
1.1 Contexte	1
1.2 Organisation du manuscrit	2
I Opérateurs de base	5
2 De la morphologie mathématique vers la morphologie couleur	7
2.1 Cadre théorique	8
2.1.1 Contraintes de construction	9
2.1.1.1 Morphologie mathématique binaire	9
2.1.1.2 Morphologie mathématique niveaux de gris	11
2.1.2 La couleur : spectre d'énergie ou stimulus	13
2.1.2.1 La lumière	13
2.1.2.2 Le système visuel humain	14
2.1.2.3 La représentation de la couleur	16
2.2 État de l'art	19
2.2.1 Les ordonnancements couleurs : les approches de la littérature	20
2.2.1.1 Les ordres marginaux	21
2.2.1.2 Les ordres partiels	22
2.2.1.3 Les ordres réduits	23
2.2.1.4 Les ordres conditionnels	26
2.2.1.5 Les ordres hybrides	27
2.2.1.6 Les approches d'un point de vue couleur	27
2.2.2 Points forts et limites des approches de la littérature	29
2.3 Un nouveau cadre générique	32
2.3.1 Notre proposition de morphologie mathématique couleur perceptuel- lement linéaire	32
2.3.1.1 Principe de construction	32
2.3.1.2 Construction pour aboutir à un ordre total	33
2.3.1.3 Résultats	37
2.3.2 Un élément structurant non-plat pour nos opérateurs couleur	38
2.3.2.1 Etat de l'art	39
2.3.2.2 Construction couleur	42
2.4 Bilan	43

3	Comparaisons et critères de choix	47
3.1	Critères de choix basés sur les propriétés théoriques	48
3.1.1	Complémentaire couleur	48
3.1.2	Dualité	51
3.1.2.1	Dualité pour les images binaire et niveaux de gris	51
3.1.2.2	Dualité pour les images couleur	54
3.1.2.3	Validation numérique	63
3.1.3	Intérêt des critères théoriques	66
3.2	Critères d'incertitude	67
3.2.1	Incertitude d'ordonnancement	68
3.2.2	Exactitude sur critère morphologique de texture	72
3.2.3	Intérêt des critères d'incertitude	78
3.3	Critère d'efficacité numérique	80
3.3.1	Etude de la vitesse de convergence	84
3.3.2	Etude du chemin de convergence	86
3.3.3	Intérêt des critères d'efficacité numérique	90
3.4	Bilan sur les critères	91
4	Extension aux images multivaluées/multispectrales	95
4.1	Opérateurs morphologiques multi/hyperspectraux	98
4.1.1	Extension de la méthode CCMM au domaine multi/hyperspectral	98
4.1.2	Contraintes, hypothèses et premiers éléments de réponse	98
4.1.2.1	Ordre total et conjoncture sur la complexité du propos	98
4.1.2.2	La fonction de distance	100
4.1.2.3	Élément structurant non-plat multi/hyperspectral	110
4.2	Premiers résultats	110
4.2.1	Érosion et dilatation	110
4.2.2	Gradient de Beucher	113
4.2.3	Discussion	113
4.3	Bilan	113
II	Applications	117
5	Spectres de textures et de formes	119
5.1	Spectres morphologiques niveaux de gris	121
5.1.1	Définitions morphologiques préliminaires	122
5.1.1.1	Définition de la taille d'un objet	122
5.1.1.2	Ouverture et fermeture	124
5.1.2	Spectres morphologiques	131
5.1.2.1	Granulométrie et spectre de motifs	131
5.1.2.2	Covariance morphologique	134
5.1.2.3	Signatures fractales	135
5.1.3	Comparaison des méthodes face à des objets synthétiques	137
5.2	Spectres morphologiques couleur	148

5.2.1	Extension des outils d'analyse à la couleur	148
5.2.1.1	Besoins pour l'extension à la couleur	148
5.2.1.2	Intégrale couleur	149
5.2.1.3	Écritures des outils couleur	150
5.2.2	Étude des spectres couleur face à des objets synthétiques	152
5.3	Evaluation des spectres face à des textures réelles	155
5.3.1	Présentation de la base Outex	155
5.3.2	Étude sur quelques images	156
5.3.2.1	Spectres niveaux de gris	157
5.3.2.2	Spectres couleur	162
5.3.2.3	Synthèse	167
5.3.3	Résultats de classification	168
5.4	Bilan	177
6	Transformée en tout-ou-rien (Hit-or-Miss Transform)	179
6.1	Transformée en niveaux de gris	181
6.1.1	Etat de l'art	181
6.1.1.1	Construction binaire	182
6.1.1.2	Construction niveaux de gris avec ESP	183
6.1.1.3	Construction niveaux de gris avec ESNP	184
6.1.1.4	Discussion	187
6.1.2	Transformée MOMP : sélectivité en forme et en contraste	189
6.1.2.1	Sélectivité en forme	189
6.1.2.2	Sélectivité en contraste	190
6.2	Transformée en couleur	194
6.2.1	Ecriture couleur	194
6.2.1.1	Spécification du gabarit spatio-colorimétrique	194
6.2.1.2	Comparaison avec les méthodes existantes	196
6.2.2	Résultats sur images réelles couleurs	200
6.2.2.1	Détection d'objets dans des images de peau	200
6.2.2.2	Détection de cellules mitotiques	207
6.3	Transformée en tout-ou-rien Hit-or-Miss Multispectral	212
6.3.1	Ecriture multispectrale	212
6.3.2	Premiers résultats sur images multispectrales	212
6.4	Bilan	215
7	Conclusion et Perspectives générales	217
	Publications	223
A	Fondement de la morphologie mathématique	i
A.1	Fondements de la Morphologie Mathématique	i
A.1.1	Morphologie mathématique binaire	i
A.1.1.1	Érosion et dilatation	iii
A.1.1.2	Ouverture et fermeture	iv

A.1.2	Morphologie mathématique en niveaux de gris	v
A.1.2.1	Érosion et dilatation en niveaux de gris	vi
A.1.2.2	Ouverture et fermeture	x
A.2	Propriétés des opérateurs binaires	xii
A.2.1	Propriétés de la dilatation et de l'érosion	xii
A.2.2	Propriétés de l'ouverture et de la fermeture	xiv
A.2.2.1	Croissance	xiv
A.2.2.2	Extensivité	xv
A.2.2.3	Dualité	xv
A.2.2.4	Idempotence	xvi
A.3	Propriétés des opérateurs niveaux de gris	xviii
A.3.1	Dualité	xviii
A.3.1.1	Dilatation/érosion	xviii
A.3.1.2	Ouverture/fermeture	xix
A.3.2	Idempotence	xix
B	Métriques couleurs	xxi
B.1	Les métriques couleurs	xxi
C	Démonstrations	xxiii
C.1	Changement de repère	xxiii
C.1.1	Changement de repère de CIELAB vers le nouveau repère	xxiii
C.1.1.1	Détails du déroulement de la rotation	xxiv
C.1.1.2	Détails de la translation	xxv
C.1.2	Changement de repère du nouveau repère vers CIELAB	xxvi
C.2	Preuve dualité complète	xxvii
C.3	Démonstrations géométriques	xxxiv
C.3.1	Intersection de deux sphères	xxxiv
C.3.2	Intersection de trois sphères alignées	xxxv
C.3.3	Intersection de trois sphères non alignées	xxxvi
C.3.4	Intersection entre un cercle et un plan orthogonal	xxxvii
C.3.5	Intersection entre deux points et un plan orthogonal	xxxvii
D	Textures	xxxix
D.1	Fractals	xxxix
D.1.1	Algorithmes utilisés pour obtenir les signatures fractales	xxxix
D.2	Exemples de spectres après application de l'AFD	lxii
D.3	Matrice de confusions obtenues pour la classification	lxxi
	Bibliographie	lxxvii

Notations

\mathbb{Z}, \mathbb{R}	Ensemble des entiers relatifs, ensemble des réels ;
$\{.\}$	Les éléments d'un ensemble sont entre deux accolades ;
$\{x c\}$	Ensemble des éléments x répondant à la propriété c ;
$x = (i, j)$	Coordonnées spatiales du pixel x ;
$F, F(x)$	Fonction binaire de x , sans précision F correspondra à une image dans cette thèse ;
$x \in F, x \notin F$	Le point x appartient à l'ensemble F , le point x n'appartient pas à l'ensemble F ;
ϕ	Ensemble vide ;
$\mathcal{C}_x[F]$	Ensemble des éléments de F connexes à x ;
$\#F$	Cardinal de F , nombre d'éléments dans l'ensemble F ;
$F \subseteq G, G \supseteq F$	F inclus dans G , F contient G ;
$F \cup G$	Union d'ensembles, éléments appartenant à F ou à G ;
$F \cap G$	Intersection d'ensembles, éléments appartenant à F et à G ;
$c \Rightarrow r, c \not\Rightarrow r$	La propriété c implique la propriété r , la propriété c n'implique pas la propriété r
f ou $f(x)$	Fonction numérique de x , sans précision f correspondra à une image dans cette thèse ;
\mathcal{D}_f	Domaine de définition spatial de la fonction f ;
C_x	Coordonnées couleur du pixel x ;
$\mathcal{S}_{\mathcal{D}f}$	Domaine de définition des coordonnées couleur de la fonction f ;
g, \mathcal{D}_g	Élément structurant g et son domaine de définition spatial \mathcal{D}_g ;
f^c	Complémentaire de f ;
f^r	Réfléchi de f ;
f_z	Translation de f par le vecteur z ;
$\mathcal{T}[f, t]$	Seuillage de la fonction f par t ;
$\mathcal{U}[f]$	Ombre de f ;
$\mathcal{H}(f)$	Fonction Heaviside :

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < 0 \\ 1 & \text{si } i \geq 1 \end{cases} ;$$

$\mathcal{D}(f)$	Fonction de Dirac $\mathcal{D}(x) = 1$ si $x = 0$, $\mathcal{D}(x) = 0$ sinon ;
$\mathfrak{T}(F), \mathfrak{t}(f)$	Transformation appliquée à un ensemble $\mathfrak{T}(F)$ ou une fonction $\mathfrak{t}(f)$;
$\text{Vol}(f)$	Volume de la fonction f ;
$ x $	Valeur absolue de x ;
$\ \vec{v}\ $	Norme du vecteur v ;
$\vec{v} \wedge \vec{w}$	Produit scalaire des vecteurs \vec{v} et \vec{w} ;
$a(n)_{n=0..N}$	$a(n)_{n=0..N} = [a_0 \ a_1 \ .. \ a_N]$;
$a(n)_{n=N..0}$	$a(n)_{n=N..0} = [a_N \ a_{N-1} \ .. \ a_0]$;

$\bigcup_{y \in G} (F)_y$	Union de toutes les translations $(F)_y$, avec $y \in G$;
$\bigcap_{y \in G} (F)_y$	Intersection de toutes les translations $(F)_y$, avec $y \in G$;
$> \geq < \leq$	Signes supérieur, supérieur ou égal, inférieur et inférieur ou égal pour les scalaires ;
$\succ \succeq \prec \preceq$	Signes supérieur, supérieur ou égal, inférieur et inférieur ou égal pour les ordres adaptés aux valeurs vectorielles ;
$\vee(\cdot)$	Maximum d'un ensemble ;
$\wedge(\cdot)$	Minimum d'un ensemble ;
$O^{+\infty}, O^{-\infty}$	Coordonnée couleur de convergence respectivement pour la dilatation et l'érosion ;
$\ \overrightarrow{C_x C_y}\ $	Distance couleur entre les coordonnées C_x et C_y ;
$\Delta E(C_x, C_y)$	Valeur de la distance ΔE entre les coordonnées couleur C_x et C_y ;
$\Delta E_{94}(C_x, C_y)$	Valeur de la distance ΔE_{94} entre les coordonnées couleur C_x et C_y ;
$\Delta E_{2000}(C_x, C_y)$	Valeur de la distance ΔE_{2000} entre les coordonnées couleur C_x et C_y ;
$\begin{matrix} +, - \\ \text{c} \end{matrix}$	Addition et soustraction pour des coordonnées couleur ;
$a = 5^\circ$	Angle a exprimé en degrés ;
$d_\wedge(a, a')$	Distance angulaire entre les angles a et a' ;
$a_i \overset{\circ}{=} a_j$	Soustraction d'angle tel que $a_i \overset{\circ}{=} a_j = \mathcal{K}(a_i - a_j)$ avec $\mathcal{K}(\theta) = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\mathcal{K}(\theta) \in [0, 2\pi[$;
$\varepsilon(f, g), \delta(f, g)$	Érosion et dilatation de f par g ;
$\gamma(f, g)$	Ouverture de f par $g, \delta(\varepsilon(f, g), g)$;
$\varphi(f, g)$	Fermeture de f par $g, \varepsilon(\delta(f, g), g)$;
$\eta(f, g)$	Hit-or-miss de f par g ;
$*_{\mathbf{b}}$	Application de l'opérateur $*$ en binaire ;
$*_{\mathbf{g}}$	Application de l'opérateur $*$ en niveaux de gris ;
$*_{\mathbf{c}}$	Application de l'opérateur $*$ en couleur ;
$*_{\mathbf{m}}$	Application de l'opérateur $*$ en multi/hyperspectral ;

Notation relative au chapitre Hit-or-Miss Transform (chp. 6) :

g', g''	Élément structurant inférieur et supérieur pour la transformée hit-or-miss ;
$h_{g'}, h_{g''}$	Valeur maximale respectivement des fonctions g' et g'' , située à l'origine spatiale o : $g'(o) = h_{g'}$ (pour des éléments structurants convexes) ;
$b'(x), b''(x)$	Valeurs minimale et maximale situées au bord de l'élément structurant ;
$\Delta 0$	Paramètre de sélectivité de la méthode MOMP de Barat [16]

Terminologies

APS	Area pattern spectrum ;
BIPM	Bureau International des Poids et Mesures ;
CIE	Commission Internationale de l'Éclairage ;
D_{cum}	Ordre basé sur la distance cumulée ;
Marg	Ordre marginal ;
ES	Élément Structurant ;
ESNP	Élément Structurant Non-Plat ;
ESP	Élément Structurant Plat ;
HMT	Hit-or-Miss Transform - Transformée tout-ou-rien ;
MM	Morphologie Mathématique ;
MOMP	Multiple Objects Matching using Probing ;
NVG	Niveaux de gris ;
PS	Pattern Spectrum ;
SOMP	Single Object Matching using Probing ;
SP	Spectre de Fourier ;

Introduction

1.1 Contexte

Cette thèse est la continuité d'un travail en collaboration avec les laboratoires de recherche de L'Oréal. L'objectif de cette collaboration est le développement d'outils de traitement et d'analyse d'images couleur dans les domaines de la dermatologie et cosmétologie. La problématique porte sur l'aide au diagnostic à partir d'images de peau. Face à la complexité de ces images, les premières recherches proposées lors de cette collaboration ont montré que les outils de traitement et d'analyse d'images existants dans le domaine de la couleur ne permettaient pas d'aboutir à des résultats satisfaisants.

L'aide au diagnostic est une tâche impliquant des experts dont le jugement est établi à partir de leur connaissance du domaine, de leurs expériences personnelles et de leur perception du contenu à travers l'image numérique. Or, le système visuel humain est non-linéaire dans l'analyse du contenu spatio-colorimétrique de son environnement. Il paraît donc indispensable de prendre en compte cette non-linéarité pour améliorer la capacité de nos outils d'aide au diagnostic à être cohérents avec la perception et par retombées les décisions des experts. Malheureusement, l'état de l'art en traitement d'images couleur, bien qu'ayant longuement exploré ce problème, aboutit à des approches qui se heurtent à la réalité perceptuelle de la couleur.

À partir de ce constat, nous nous sommes interrogés sur les opérations existantes et valides d'un point de vue perceptuel dans le domaine du traitement d'images couleur. Il est alors ressorti que les seuls traitements répondant à ces contraintes sont ceux utilisant des fonctions de distance associées aux espaces perceptuels, validées par la Commission Internationale de l'Éclairage. Dans le même temps, nous avons également fait ressortir le lien étroit existant entre le concept d'ordonnancement de paires de couleur utilisé pour construire les espaces couleur perceptuels et celui de l'ordonnancement nécessaire à la morphologie mathématique.

Bien que la morphologie mathématique soit un outil largement utilisé dans le domaine du traitement et de l'analyse d'images binaires ou niveaux de gris, son extension aux images couleur n'est pas élémentaire et encore moins unique. Généralement, l'extension aux espaces couleur tridimensionnels est limitée par une écriture purement mathématique, cette limite étant directement reproduite dans le cas spectral. Les questions particulières liées à l'aspect perceptuel de l'information couleur, ou l'aspect énergétique des spectres, ne sont au mieux qu'évoqués ou pire oubliés dans les hypothèses de construction des outils proposés. Ces questions d'hypothèses initiales censées être validées théoriquement, ou induire des expé-

rimentations de validation numériques, sont donc une des clefs d'évolution des approches de traitements. L'absence de validation ou simplement de prise en compte des particularités de l'information couleur induit dès lors un manque de stabilité, de robustesse ou plus simplement de précision des outils. Ces lacunes ont orienté notre travail vers les aspects métrologiques des opérateurs de traitement, avec la prise en considération des biais, incertitudes et précision découlant des approches proposées.

1.2 Organisation du manuscrit

Pour répondre aux constats introductifs liés au contexte de travail, nous avons choisi d'organiser nos travaux selon deux axes principaux (figure 1.1).

L'axe vertical met en évidence le besoin d'étendre les opérateurs morphologiques à la couleur, d'abord au travers d'espaces standards tridimensionnels pour tendre ensuite vers une représentation spectrale. Cette extension appuie notre point de vue sur la nécessité d'une validation embarquant les particularités de la couleur selon le sens perceptuel ou selon le sens physique. Notre objectif est de tendre vers des écritures génériques pleinement adaptées aux particularités physiques ou perceptuelles de l'information couleur.

L'axe horizontal décrit notre volonté de pouvoir valider ou mesurer les apports des opérateurs à différents niveaux de construction. Actuellement, dans la littérature, les critères de choix utilisés pour comparer et évaluer les méthodes sont majoritairement des critères subjectifs ou des critères liés aux résultats d'opérateurs de très haut niveau qui masquent l'impact des opérateurs bas niveau. Afin de progresser dans la voie de la validation et de la métrologie pour les opérateurs du traitement d'images, il nous semblait important de définir dans un premier temps des critères objectifs d'évaluation de la robustesse, de la stabilité ou de la précision dans les traitements bas niveau (ordonnancement, opérateurs de base), dans

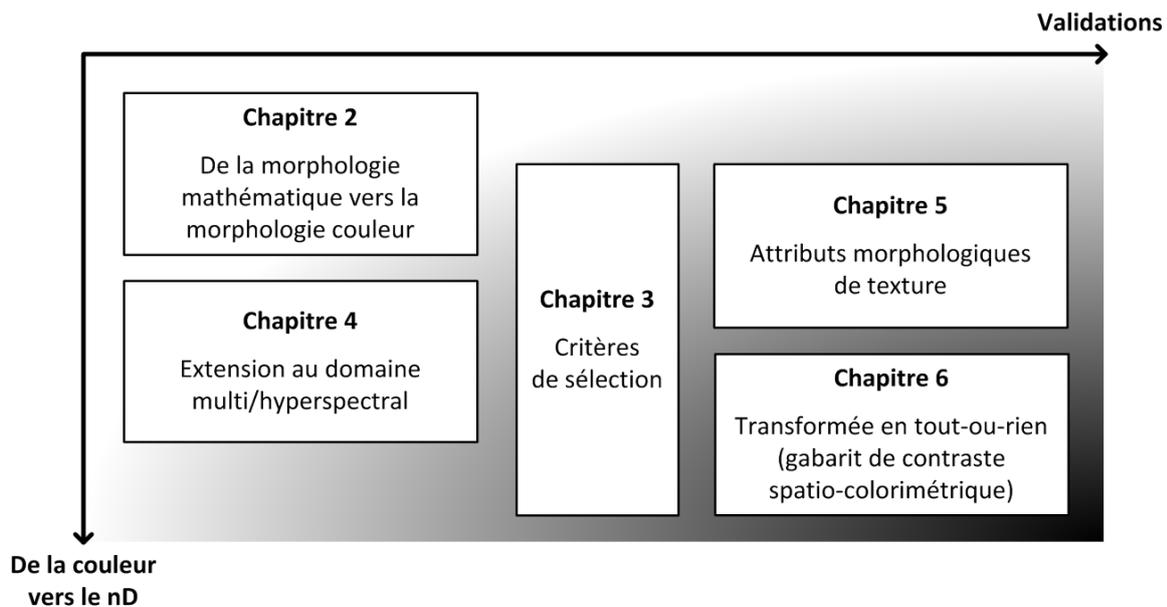


FIGURE 1.1 – Organisation de la thèse

les traitements intermédiaires (attributs de texture) mais aussi dans un second temps de confirmer les capacités des opérateurs haut niveau (extracteur d'objets d'intérêt, analyse de texture).

La lecture du manuscrit peut donc s'orienter soit dans une lecture plus orientée couleur, soit une lecture plus orientée validation en fonction de l'ordre de lecture choisi des cinq chapitres. De façon récurrente lors de ce travail, la question de la justification d'une telle approche a été souvent posée. Le manuscrit comporte donc deux parties, la première partie (chapitres 2, 3 et 4) décrit les fondements mathématiques et couleurs du propos avec les implications sur les questions d'ordonnement vectoriel. La seconde partie (chapitres 5 et 6) aborde des questions plus classiques de traitement : détecter un objet complexe coloré sur un fond texturé coloré ou estimer des attributs vectoriels de texture.

Le chapitre 2 est le point d'entrée commun de toutes ces lectures. Il permet de reposer rapidement les fondamentaux de l'information couleur, notamment la question de sa représentation en passant par la revue des espaces existants mais également ses différentes particularités perceptuelles et physiques. Ce chapitre permet également de replacer le contexte mathématique des opérateurs morphologiques ainsi que la problématique de l'ordonnement de vecteurs. Ces fondamentaux ont pour but de justifier les hypothèses de validation attendues pour toute approche morphologique couleur proposée. Dans ce chapitre, nous proposons une construction d'ordonnement générique basée sur une fonction de distance. Nous revenons également sur une notion oubliée en morphologie mathématique, celle des éléments structurants non-plats. L'extension des opérateurs morphologiques au domaine de la couleur et du spectral ouvre de nombreuses possibilités de traitement grâce aux éléments structurants non-plats. Dans ce manuscrit, nous donnons deux preuves de cet intérêt, que ce soit pour l'accroissement de la précision d'estimation de la dimension fractale d'une texture couleur (section 3.2.2), ou que ce soit pour l'extraction d'un objet couleur par son gabarit de contraste spatio-colorimétrique (section 6.2).

Une lecture dans l'axe couleur oriente ensuite le propos vers l'extension de la morphologie au contexte plus général des images multivaluées, notamment spectrales, présentée dans le chapitre 4. Ce chapitre n'apporte pas une réponse finie à cette question. L'ambition était ici de confronter la construction basée distance perceptuelle à un propos qui serait plus centré sur le sens physique de l'information couleur. L'extension aux images spectrales montre la généralité de la formulation proposée pour les espaces couleur. L'accroissement de complexité engendré par l'augmentation du nombre de bandes spectrales peut être amorti par une conjecture mathématique. Notre proposition permet ainsi d'atteindre tous les opérateurs de base de la morphologie mathématique de façon vectorielle et pleine bande, que ce soit pour les opérateurs bas niveau (érosion, dilatation) ou des opérateurs haut niveau (extraction de gradients, détecteur d'objet, analyse de texture, etc).

Les questions de robustesse, stabilité et précision des opérateurs ont justifié nombre de nos décisions. Le chapitre 3 est entièrement consacré à cette question. Auparavant, cette question n'avait pas ou peu été évoquée, la grande majorité des auteurs se limitant à l'obtention de critères subjectifs pour comparer et évaluer leur méthodes. Ce chapitre propose

trois familles de critères permettant chacune de répondre à une particularité de satisfaction spécifique. La première famille est basée sur les éléments nécessaires pour une validité morphologique des images couleur. Ce point particulier interroge sur la validité perceptuelle du complémentaire couleur dans les opérations de base. La seconde famille permet d'adresser des critères métrologiques d'incertitude. Deux aspects sont développés, le premier porte sur l'incertitude d'ordonnancement et le second porte sur l'exactitude dans l'estimation d'un critère de texture couleur. Ces deux critères ramènent à la question de la linéarité attendue d'une technique d'ordonnancement face à l'information. La troisième famille développe la notion d'efficacité numérique des techniques d'ordonnancement, ce qui s'exprime par la capacité de l'ordonnancement à faire converger l'ensemble des couleurs dans un schéma itératif vers une couleur unique : la couleur d'idempotence. Sous un autre aspect, cette famille de critères traite de la capacité de l'ordonnancement à concentrer l'information pour les attributs multi-échelle.

La seconde partie du manuscrit permet d'aborder des questions plus proches des besoins applicatifs. Deux grandes familles de traitement y sont abordées. La première famille de traitement proposée traite de la question des attributs d'images, avec la question de la spécification d'attributs de texture vectoriels (chapitre 5). Cette question complexe a été peu développée à partir des opérateurs morphologiques, les auteurs préférant bien souvent réduire la complexité des données avant d'attaquer l'information texture. Ce manque d'intérêt est lié d'une part aux problèmes de non-linéarité des ordonnancements développés jusqu'à présent et d'autre part à l'absence de travaux sur les éléments structurants non-plats dans le domaine de la couleur. Plusieurs spectres morphologiques (spectre de motifs, covariance morphologique et signature fractale) sont étudiés. Puis un premier niveau de résultats en classification de texture couleur est proposé.

La seconde famille concerne la détection d'objets dans les images par la transformée en tout-ou-rien (chapitre 6). Cet algorithme initialement développé pour des images binaires a engendré diverses extensions adaptées aux images niveaux de gris. Nous proposons dans ce chapitre une classification des approches existantes afin de faire ressortir les capacités dans le domaine du niveaux de gris. Nous expliquons en quoi l'approche MOMP de Cécile Barat, sélectionnée parmi toutes les autres méthodes, est la plus adaptée dans notre contexte et comment l'étendre au contexte couleur par le biais de nos opérateurs morphologiques. L'ensemble permet ainsi de définir un gabarit spatio-colorimétrique apte à chercher un objet défini par son contraste vectoriel dans une image complexe, avec un paramètre gérant le degré de sélectivité. La méthode est simple à paramétrer à partir d'exemples ou de modèles d'objets. Un premier niveau de résultats est proposé pour des images de synthèse puis dans un contexte applicatif couleur et spectral.

En abordant le thème de la morphologie mathématique couleur avec comme objectif la prise en compte des particularités de l'information couleur, de nombreuses voies de recherche se sont ouvertes. Dans ce manuscrit nous tentons d'apporter des solutions répondant aux hypothèses de départ. Cependant nous allons voir que de nombreuses questions apparaissent au fil de l'avancement de ce travail. Nous ne pourrions pas répondre à toutes ces questions, néanmoins nous essaierons de progresser sur ce chemin.

Première partie

Opérateurs de base

De la morphologie mathématique vers la morphologie couleur

Sommaire

2.1	Cadre théorique	8
2.1.1	Contraintes de construction	9
2.1.1.1	Morphologie mathématique binaire	9
2.1.1.2	Morphologie mathématique niveaux de gris	11
2.1.2	La couleur : spectre d'énergie ou stimulus	13
2.1.2.1	La lumière	13
2.1.2.2	Le système visuel humain	14
2.1.2.3	La représentation de la couleur	16
2.2	État de l'art	19
2.2.1	Les ordonnancements couleurs : les approches de la littérature	20
2.2.1.1	Les ordres marginaux	21
2.2.1.2	Les ordres partiels	22
2.2.1.3	Les ordres réduits	23
2.2.1.4	Les ordres conditionnels	26
2.2.1.5	Les ordres hybrides	27
2.2.1.6	Les approches d'un point de vue couleur	27
2.2.2	Points forts et limites des approches de la littérature	29
2.3	Un nouveau cadre générique	32
2.3.1	Notre proposition de morphologie mathématique couleur perceptuellement linéaire	32
2.3.1.1	Principe de construction	32
2.3.1.2	Construction pour aboutir à un ordre total	33
2.3.1.3	Résultats	37
2.3.2	Un élément structurant non-plat pour nos opérateurs couleur	38
2.3.2.1	Etat de l'art	39
2.3.2.2	Construction couleur	42
2.4	Bilan	43

La théorie de la morphologie mathématique, fondée par G. Matheron [87] et J. Serra [115, 117] à la fin des années 60, découle de l'étude de la géométrie des milieux poreux. Elle est construite dans le but d'obtenir un outil de traitement d'images permettant d'analyser les objets, plus précisément, d'analyser leur géométrie dans l'image. Les fondements de la morphologie mathématique sont initialement mis en place pour les images binaires en s'appuyant

sur l'utilisation des opérateurs ensemblistes tels que l'union, l'intersection, la translation et la complémentation. Les outils découlants de la théorie de la morphologie mathématique sont nombreux et entrent dans les différentes familles du traitement d'image comme le filtrage, la segmentation, la détection d'objet ou encore l'analyse de texture.

La solidité de ces fondements mathématiques et son extension naturelle pour les images niveaux de gris [126, 58] en font un outil très populaire dans la communauté du traitement de l'image durant les années 80 à 90 [81, 56, 80]. Cependant, après une période intense d'activité et de développement jusque dans les années 90, petit à petit ces approches sont devenues moins populaires face aux approches linéaires, autorisant des traitements plus efficaces numériquement et plus simples à concevoir.

Depuis une vingtaine d'années, l'extension de la morphologie mathématique aux images couleurs ou multivariées suscite un nouvel engouement autour des nombreuses questions théoriques et numériques [26, 54, 4, 44, 11]. Cette extension n'est pas simple, la recherche d'un maximum ou d'un minimum dans un ensemble de couleurs n'est pas unique. Le grand nombre d'espaces [25] et les ordonnancements vectoriels possibles [17] donnent lieu à un nombre de possibilités quasi-infini. Néanmoins aujourd'hui, la démonstration de la faisabilité n'étant plus à faire, les questions posées portent sur la validité théorique et numérique des opérations morphologiques couleur et dans notre contexte sur l'écriture de formulations adaptées aux particularités de l'information couleur.

Ce chapitre commence par l'étude des fondements mathématiques de la morphologie mathématique. Cette étude a pour objectif de mettre en avant les propriétés nécessaires à l'expression d'opérateurs morphologiques avant de passer au cadre de la couleur mais également d'unifier les notations utilisées tout au long de cette thèse. La couleur est ensuite présentée selon ses particularités physiques, perceptuelles et selon ses différentes représentations numériques. L'analyse de l'état de l'art est effectué en tenant compte de l'intégration des particularités de la couleur. Finalement, face aux conclusions de cette analyse, une nouvelle méthode intégrant une fonction de distance perceptuelle et basée sur le concept de convergence est proposée ainsi qu'une définition d'éléments structurants non-plats adaptés aux opérateurs morphologiques couleur.

2.1 Cadre théorique

Tout au long de ce manuscrit, nous utiliserons différentes notions portant sur les opérateurs de la morphologie mathématique, à commencer par les traditionnelles dilatations et érosions et leurs extensions du binaire aux niveaux de gris, puis au cadre multi-dimensionnel. Cependant, comme nous aurons besoin d'effectuer certaines démonstrations et commenter certains comportements, il est nécessaire de repartir d'une formulation commune et de démonstrations existantes, ce que nous allons effectuer dans ce chapitre avant d'exposer quelques fondamentaux sur l'information couleur justifiant notre proposition de construction de morphologie mathématique couleur dédiée.

2.1.1 Contraintes de construction

La morphologie mathématique est basée sur la notion d'ordre et de treillis complet. Ces deux notions sont portées par des relations binaires entre objets et des propriétés associées à ces notions. Nous commençons par poser ces différentes écritures et notions.

2.1.1.1 Morphologie mathématique binaire

La morphologie mathématique fut d'abord développée pour l'analyse d'images binaires afin d'étudier les milieux poreux. Elle repose sur la théorie des ensembles. Le principe est d'analyser la géométrie au sein d'une image en utilisant un ensemble. Mais avant de décrire plus en détail cette construction, nous commençons par rappeler les différents éléments composant une image binaire et posons les différentes notations utilisées dans cette thèse.

Une image binaire est une image pour laquelle les pixels prennent uniquement deux valeurs. Par convention ces valeurs sont '1' et '0', et correspondent respectivement au blanc et au noir, nous conservons cette notation pour la suite. Les pixels de l'image de valeur '1' sont les pixels appartenant à l'ensemble appelé « objet » et les pixels de valeur '0' sont les pixels n'appartenant pas à cet ensemble. Le domaine de définition spatial d'un ensemble définit les pixels appartenant à cet ensemble, par exemple, un ensemble F est défini par l'ensemble des pixels x tels que $F = \{x \in D_F\}$, avec D_F le domaine de définition spatial de l'ensemble F .

Pour analyser une image binaire, les opérateurs morphologiques utilisent un sous-ensemble \mathbb{Z}^3 appelé élément structurant, que nous notons G . Les éléments qui le composent appartiennent au support spatial D_G . L'élément structurant est repéré par son origine (qu'il peut contenir ou non). Il peut posséder différentes formes et tailles. La figure 2.1 présente quelques exemples d'éléments structurants binaires possibles.

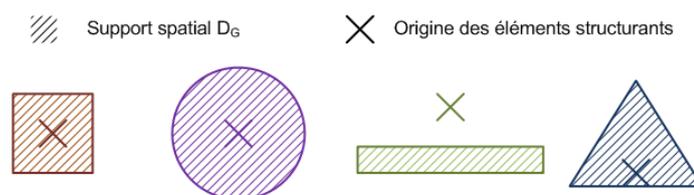


FIGURE 2.1 – Exemples d'éléments structurants binaires.

L'élément structurant G est traduit le long de l'image afin d'étudier la relation géométrique entre les éléments qui le composent et les pixels de l'image. Pour exprimer l'effet produit par l'élément structurant sur l'image en fonction des différents opérateurs morphologiques, nous rappelons les définitions des opérateurs ensemblistes utilisés : l'union/intersection, la translation, le complémentaire et le symétrique.

L'*union* de deux ensembles F et G est l'ensemble des éléments appartenant à F ou à G (équation 2.1). L'*intersection* de deux ensembles F et G est l'ensemble des éléments

10 Chapitre 2. De la morphologie mathématique vers la morphologie couleur

appartenant à F et à G (équation 2.2).

$$F \cup G = \{x | x \in D_F \text{ ou } x \in D_G\} \quad (2.1)$$

$$F \cap G = \{x | x \in D_F \text{ et } x \in D_G\} \quad (2.2)$$

La *translation* d'un ensemble F par un vecteur y est notée F_y et se définit par l'expression suivante :

$$F_y(x) = F(x - y) \quad (2.3)$$

Le *complémentaire* d'un ensemble F , noté F^c , est l'ensemble contenant tous les éléments n'appartenant pas à F (équation 2.4).

$$F^c(x) = \{x | x \notin D_F\} \quad (2.4)$$

Le *symétrique* d'un ensemble F , noté F^r , est l'ensemble ayant subi une rotation autour de son origine de 180° (figure 2.2) :

$$F^r(x) = F(-x) \quad (2.5)$$

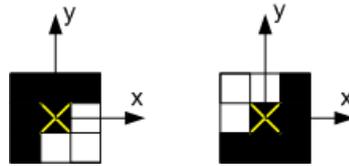


FIGURE 2.2 – À gauche un ensemble F et à droite son symétrique F^r .

Les opérateurs morphologiques, l'érosion et la dilatation, permettent de supprimer ou d'amplifier des parties de l'objet présent dans l'image, ce qui a pour conséquence de supprimer les détails de l'image. Cependant, les effets que nous décrivons sont vrais uniquement dans le cas où l'élément structurant est convexe¹.

L'érosion est l'intersection de toutes les translations de l'image F par les éléments appartenant à l'élément structurant G (équation 2.6). Cette construction a pour effet de diminuer la taille de l'objet en fonction de la taille de l'élément structurant, de supprimer les parties connexes de l'objet plus petites que l'élément structurant et de supprimer les chemins plus fins que l'élément structurant reliant deux parties connexes.

La dilatation est construite à partir de l'érosion afin de respecter la propriété de dualité. Nous détaillons la propriété de dualité dans la section 3.1. La dilatation est l'union de toutes les translations de l'image F par les éléments appartenant à l'élément structurant G (équation 2.7). Elle a l'effet opposé de l'érosion, elle augmente la taille des objets, relie

1. Un ensemble G est convexe si et seulement si tous les segments reliant les points de l'ensemble G appartiennent à l'ensemble G .

les éléments proches et comble les trous. Ces effets dépendent de la taille de l'élément structurant.

$$\varepsilon_{\mathbf{b}}(F, G) = \bigcap_{y \in D_G} F_{-y} \quad (2.6)$$

$$\delta_{\mathbf{b}}(F, G) = \bigcup_{y \in D_G} F_{-y} \quad (2.7)$$

La figure 2.3 illustre les effets des opérateurs morphologiques sur une image binaire. Pour plus de lisibilité, les objets de l'image sont en noir. L'érosion supprime l'œil et les dents et augmente la taille de la cicatrice, du fil du cache œil, de la bouche et celle des orbites des yeux. La dilatation supprime la cicatrice et le fil du cache œil et augmente la taille des dents et de l'œil tout en diminuant la taille de la bouche et des orbites des yeux.

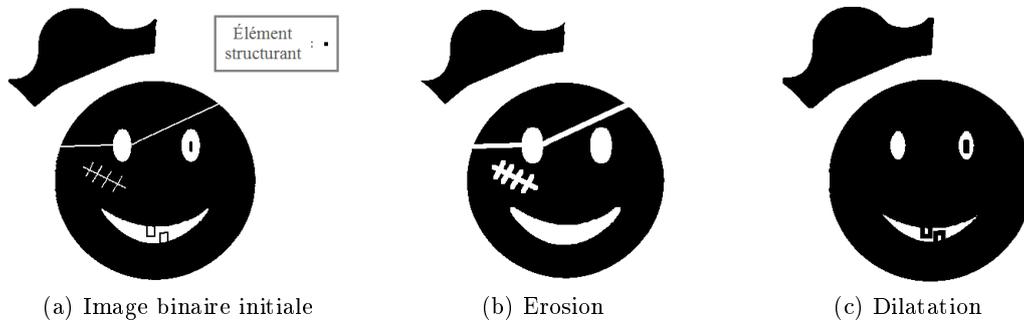


FIGURE 2.3 – Erosion et dilatation d'une image binaire par un élément structurant carré 5×5 pixels. Pour plus de lisibilité, les pixels appartenant à l'objet sont en noir

Ces deux opérateurs sont attachés à différentes propriétés qui permettent de contrôler les effets de l'élément structurant. Toutes ces propriétés sont décrites en Annexe A.2.

2.1.1.2 Morphologie mathématique niveaux de gris

Dans la littérature plusieurs approches ont été développées pour obtenir les opérateurs d'érosion et de dilatation adaptés aux images en niveaux de gris. Les écritures en niveaux de gris des opérateurs sont obtenues soit par l'utilisation d'« ombres » [126] soit par l'utilisation de « graphes » [58]. Quelque soit la méthode d'extension, les opérateurs niveaux de gris sont obtenus en remplaçant les concepts ensemblistes par les concepts fonctionnels (voir Annexe A.1). L'érosion (équation 2.8), respectivement la dilatation (équation 2.9), d'une image f se traduit en chaque pixel par la recherche du minimum, respectivement du maximum, dans un ensemble de valeurs déterminées par le domaine de définition de l'élément structurant g .

$$\varepsilon_{\mathbf{n}}(f, g)(x) = \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x + y) - g(y)) \quad (2.8)$$

$$\delta_{\mathbf{n}}(f, g)(x) = \bigvee_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x + y) + g(y)) \quad (2.9)$$

La définition exacte des opérateurs se fait en soustrayant dans le cas de l'érosion ou en ajoutant dans le cas de la dilatation les valeurs de l'élément structurant aux valeurs de l'image. Nous reviendrons sur ce point dans la section 2.3.2, où nous décrirons plus précisément la différence entre les éléments structurants plats et non-plats. Dans un premier temps, nous nous concentrons sur la recherche d'un minimum/maximum dans le cadre des éléments structurants plats, c'est-à-dire, dans un ensemble de coordonnées sans soustraction/addition (équations 2.10 et 2.11).

$$\varepsilon_n(f, g)(x) = \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x + y)) \quad (2.10)$$

$$\delta_n(f, g)(x) = \bigvee_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x + y)) \quad (2.11)$$

Nous avons vu précédemment que les opérateurs morphologiques binaires suppriment des détails de l'image. Les opérateurs morphologiques niveaux de gris vont également supprimer des détails de l'image en lissant certaines parties en fonction de la géométrie de l'élément structurant. La figure 2.4 montre ce phénomène en fonction d'un élément structurant plat carré de taille 5×5 pixels sur une image niveaux de gris. Toutes les parties sombres de l'image s'étendent lors de l'érosion, tandis que les parties claires de l'image s'étendent lors de la dilatation.

Après un nombre d'itérations tendant vers l'infini, les images vont tendre vers une image unie. Au cours des itérations l'image va tendre vers le noir pour l'érosion et vers le blanc pour la dilatation. Nous appelons ce phénomène « convergence » et ces deux niveaux de gris « coordonnées de convergence ». Les coordonnées de convergences sont notées $O^{-\infty}$ et $O^{+\infty}$ et sont respectivement les coordonnées de convergence de l'érosion et de la dilatation. La morphologie mathématique pour les images niveaux de gris repose donc sur la notion

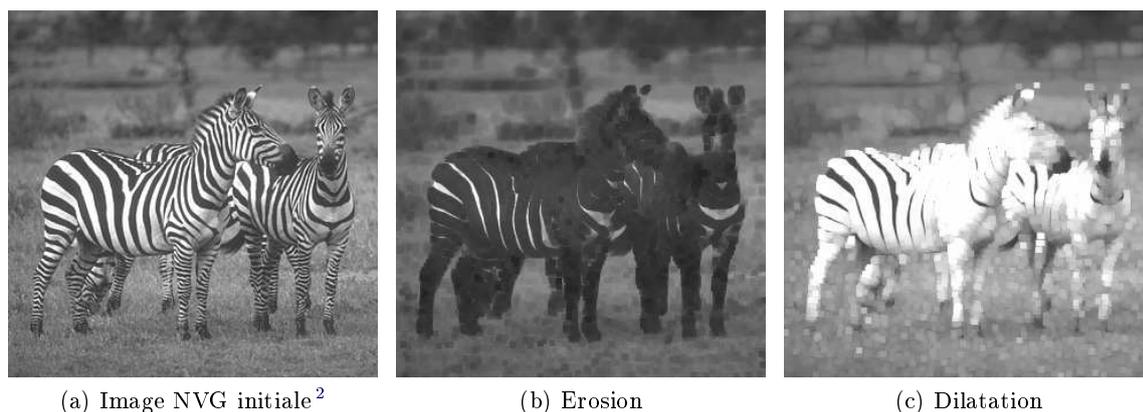


FIGURE 2.4 – Erosion et dilatation d'une image niveaux de gris par un élément structurant plat carré de taille 5×5 pixels (taille de l'image : 321×321 pixels).

2. Source de l'image : http://www.irisa.fr/symbiose/index2.php?option=com_docman&task=doc_view&gid=16&Itemid=99999999

d'ordre dans l'espace ou la théorie des treillis complets. Un treillis complet est défini comme un ensemble non-vide associé à un ordre partiel, de telle sorte que chaque sous-ensemble non vide, ait une borne inférieure et une borne supérieure. Lorsque ces bornes appartiennent à l'ensemble des coordonnées initiales, nous parlerons de minimum/maximum et lorsqu'elles seront extérieures à cet ensemble, nous parlerons d'infimum/supremum. Pour définir cette notion d'ordre nous allons spécifier deux nouveaux opérateurs binaires : \prec et \succ qui remplacent les relations habituelles $<$ et $>$. Ces opérateurs définissent des relations quelconques entre éléments d'un même espace. Si ces relations sont réflexives et transitives, l'ordre est un *pré-ordre* ; il devient un *ordre* lorsque ces relations sont anti-symétriques. Soient A, B et $C \in \mathfrak{L}$, 3 ensembles. Les propriétés s'expriment alors par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{réflexivité} &: A \preceq A \\ \text{transitivité} &: A \preceq B \quad , \quad B \preceq C \Rightarrow A \preceq C \\ \text{anti-symétrie} &: A \preceq B \quad , \quad B \preceq A \Rightarrow A = B \end{aligned}$$

Finalement, un ordre \prec est *total*, si pour tous les éléments de \mathfrak{L} les relations précédentes sont vraies :

$$\prec \text{ est total si : } A \preceq B \text{ ou } B \preceq A, \quad \forall A, B \in \mathfrak{L}$$

Ces notions d'ordre sont simples et leur adaptation dans un cadre vectoriel est possible de différentes manières comme nous le verrons dans la section 2.2. Cependant l'information couleur n'est pas une information vectorielle classique, exprimée dans un espace euclidien standard. Avant d'étudier les techniques d'ordonnement couleur, il convient de revenir quelque peu sur les particularités de la couleur et de sa représentation.

2.1.2 La couleur : spectre d'énergie ou stimulus

L'information couleur est une information complexe. Elle dépend non seulement de l'environnement physique qui nous entoure mais également de la perception du système visuel humain. Ces deux notions sont importantes et donnent lieu à deux voies d'étude de la couleur. La voie physique, appelée colorimétrie, associe la couleur à un spectre lumineux. La voie perceptuelle, appelée psychométrie, passe par l'étude du système visuel humain. Nous allons donc étudier la couleur sous ces deux aspects avant d'aborder la construction de la couleur pour le traitement d'image.

L'objet de cette section n'est pas de détailler tous les éléments de la colorimétrie ou de la psychométrie mais de mettre en évidence les points particuliers justifiant un traitement adapté de l'information couleur. Un travail plus complet pourra être trouvé dans le livre de Bonton et al. [22].

2.1.2.1 La lumière

La lumière est une onde (ou rayonnement) électro-magnétique. Elle se définit par une quantité d'énergie dans une certaine gamme de longueurs d'onde qui s'exprime en unité de longueur. Le physicien britannique Isaac Newton démontre au 17^{ème} siècle que la lumière blanche peut se décomposer en rayons multicolores en utilisant un prisme. La réfraction à travers le prisme permet de faire apparaître le spectre chromatique ou spectre des couleurs.

14 Chapitre 2. De la morphologie mathématique vers la morphologie couleur

Ce spectre met en évidence la partie de la lumière visible qui se situe grossièrement entre 380nm et 750nm (figure 2.5).

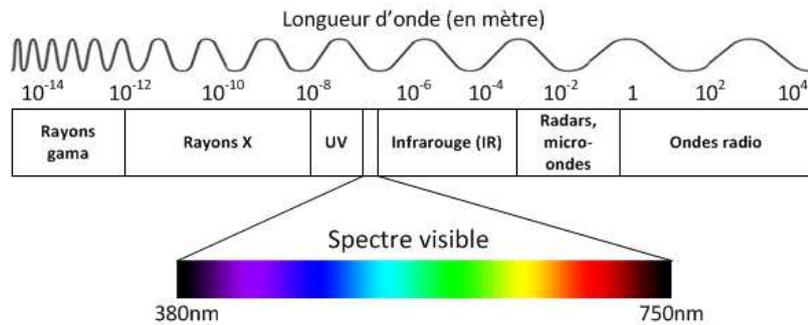


FIGURE 2.5 – Spectre électromagnétique. La partie du spectre visible correspond à la bande comprise entre 380nm et 750nm.

La figure 2.6 présente les spectres colorimétriques de quatre couleurs différentes. D'un point de vue physique, la couleur est donc associée à un spectre lumineux, elle est décrite par une quantité d'énergie répartie sur les longueurs d'onde qui la composent. La quantité d'énergie caractérise l'intensité lumineuse de la couleur et la répartition de l'énergie caractérise l'information colorimétrique (figure 2.6).

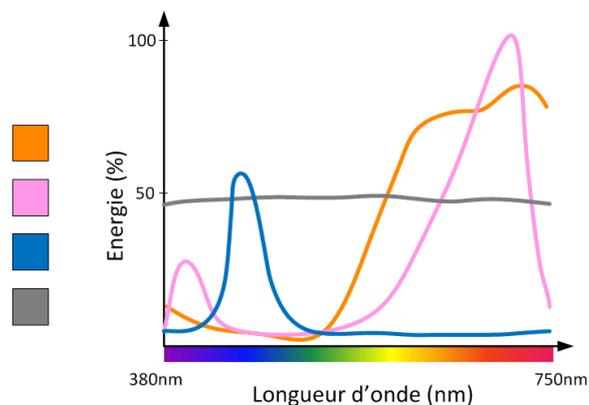


FIGURE 2.6 – Représentation spectrale de différentes couleurs. La couleur du spectre correspond à la couleur représentée.

Ce point de vue physique de la couleur est intéressant car il est décorrélé de la perception humaine et susceptible de donner lieu à des expérimentations physiques reproductibles.

2.1.2.2 Le système visuel humain

Le système visuel humain est complexe. Dans cette section, nous nous focalisons sur la façon dont le système visuel humain perçoit la couleur en tant que stimulus.

L'analyse des couleurs présentes dans une scène observée se fait en plusieurs étapes. Tout d'abord, la lumière émise ou diffusée par la scène pénètre notre œil par la pupille, traverse le cristallin puis le globe oculaire, pour atteindre la rétine et exciter les cellules nerveuses qui la tapissent. Deux types de cellules sont présentes dans la rétine, les bâtonnets et les cônes. Les bâtonnets sont sensibles à l'intensité lumineuse en vision de nuit mais sont inactifs en vision de jour tandis que les cônes captent les différentes longueurs d'onde du spectre visible lorsque l'intensité lumineuse est suffisante.

Parmi les cônes, il en existe trois types, chacun sensible à une plage de longueurs d'onde (figure 2.7). Les cônes 'S' sont plutôt sensibles aux petites longueurs d'onde (couleurs dans la gamme du bleu), les 'M' plutôt aux moyennes (gamme associée au vert) et les 'L' aux grandes (gamme associée au rouge).

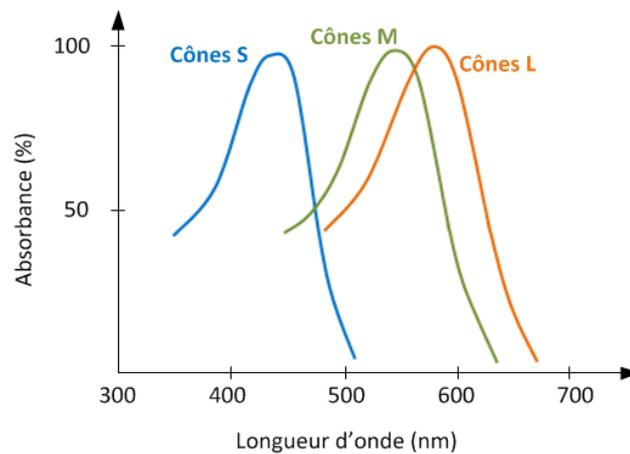


FIGURE 2.7 – Sensibilité des cônes en fonction des longueurs d'onde.

Avant que l'information colorimétrique ne soit acheminée jusqu'au cortex, un traitement post-rétine est effectué. L'information trichromatique est transformée en signaux antagonistes. Les signaux transmis par les nerfs optiques sont donc une information achromatique (opposition blanc-noir, $L + M + S$) et deux informations chromatiques ($L-M$ équivalent à une opposition rouge/vert et $L+M-S$ correspondant à une opposition jaune/bleu).

À la fin de la chaîne du système visuel humain se trouve le cortex visuel qui est chargé de traduire l'information fournie par l'œil en information colorimétrique. Cependant, d'un individu à l'autre la couleur perçue ne sera pas identique. Le cortex interprète les informations fournies en fonction de sa connaissance *a priori* mais également du contexte dans lequel se trouve la couleur. Selon la fréquence, le contraste des stimuli, son environnement et bien d'autres facteurs, la couleur ne sera pas perçue de la même manière.

Les illusions d'optique sont des exemples de mauvaises interprétations du système visuel humain. La figure 2.8 en est un exemple, elle est composée de trois couleurs différentes : blanc, orange et bleu. L'image semble pourtant être composée de plus de trois couleurs. Les carrés oranges entourés de bleu semblent différents des carrés oranges entourés de blanc.

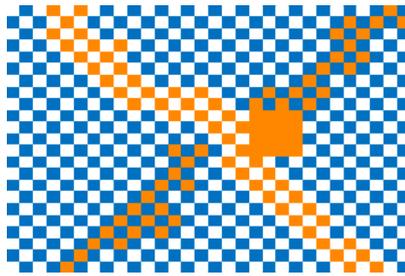


FIGURE 2.8 – La couleur orange entourée de bleu semble différente du orange entouré de blanc. Cette illusion d’optique est due à l’analyse de notre système visuel.

2.1.2.3 La représentation de la couleur

Dès lors que Newton fit la découverte du spectre colorimétrique, le travail sur la représentation de la couleur s’est rapidement développé. En 1807, Young met au point les prémisses de la trichromie. Il découvre que seulement trois couleurs de lumière permettent de reconstruire la couleur blanche et définit les trois couleurs de lumière primaires (bleue, verte et rouge). Cette théorie rejoint la physiologie de l’oeil qui capte trois informations chromatiques différentes. De cette découverte découle les espaces de couleurs primaires.

Les systèmes de primaires reposent sur l’addition des trois couleurs primaires (rouge, vert, bleu) ou plus pour les nouvelles technologies. Ils sont commodes pour décrire les couleurs d’un écran. De nombreux auteurs les utilisent directement pour le traitement et l’analyse d’images couleur [99, 33]. La justification apportée est souvent liée à des coûts de traitement réduits. Cependant ces espaces couleurs souffrent de la non-linéarité des opérations couleur, au sens physique et au sens perceptuel. De plus, à cause des compositions physiques des primaires, les axes couleurs sont fortement corrélés.

Ce groupe contient aussi l’espace XYZ qui est une adaptation linéaire de l’espace RGB. Il a été créé pour pouvoir obtenir toutes les couleurs visibles par composition de valeurs positives de tous les plans. Ce système, qui a engendré un grand nombre de systèmes pratiques, souffre d’une imperfection héritée du codage RGB : dans le diagramme de chrominance, les distances entre deux points voisins représentent mal les différences de perception par le cerveau humain [78].

Plus récemment les espaces de type LMS [37] ont été développés dans le but de reproduire la configuration des signaux électriques en sortie des cônes de la rétine.

La théorie de la trichromie ne fut pas la seule à voir le jour. Goethe dans son « Traité des couleurs » terminé en 1823, suivi de Hering en 1878, ont montré que les couleurs pouvaient également être construites par un système antagoniste. Ils montrent qu’une couleur qui contient du rouge ne peut contenir du vert et une couleur qui contient du jaune ne peut contenir du bleu. C’est à partir de ce constat qu’ils définissent quatre couleurs primaires antagonistes. Ils associent alors une information d’intensité lumineuse avec une opposition noir/blanc et deux informations couleur comme étant les oppositions rouge/vert et

bleu/jaune. Jusqu'au milieu du 20^{ème} siècle, cette théorie était en contradiction avec la trichromie. Puis, des physiologistes comme Hubel et Wiesel ont mis en relation les deux théories en se basant sur le fonctionnement de l'oeil, en particulier, le codage sur les nerfs optiques. La théorie antagoniste permet d'obtenir les espaces couleur basés sur le principe d'intensité-chromaticité.

Les systèmes dits "luminance-chrominance" sont principalement utilisés pour l'affichage sur les téléviseurs couleurs. Tous ces systèmes sont construits avec un plan intensité permettant d'adapter l'information couleur aux téléviseurs "noir et blanc", et de deux plans de chrominance. Ces espaces couleur ne sont pas adaptés aux traitements et à l'analyse d'images puisque, issus des systèmes de primaires, ils souffrent du même problème de corrélation entre les plans.

Pour résoudre le problème de corrélation des deux familles d'espaces précédentes, les systèmes d'axes indépendants ont été créés. Ils utilisent une analyse en composantes principales ou une analyse en composantes indépendantes. De plus, ces transformations sous-entendent l'existence d'opérations valides d'addition de couleurs et de multiplication par un scalaire. L'espace le plus souvent cité est celui développé par Ohta nommé (I_1, I_2, I_3) [93]. Cependant ces espaces de couleur présentent un inconvénient lié aux transformations utilisées pour calculer la nouvelle représentation de l'image, qui est dépendante de l'image considérée ou de la base d'image utilisée. La comparaison entre images n'appartenant pas à ces images d'apprentissage introduit dès lors des artefacts.

Enfin, une dernière famille de représentation de la couleur a été développée pour se rapprocher au mieux de la perception de la couleur par l'homme. Cette famille comprend deux classes d'espaces, les espaces perceptuels codant la couleur par les attributs teinte, saturation, intensité et les espaces perceptuellement uniformes comme le CIELAB ou CIELUV.

Les espaces Teinte-Luminance-Saturation (HSV, HSL ...) ont été conçus pour se rapprocher de la manière dont l'esprit humain perçoit le phénomène de la couleur. La teinte représente le type de couleur (rouge, vert, orange ...) codée en degrés sur le cercle chromatique (rouge = 0°), la saturation représente la pureté de la couleur en pourcentage (codée généralement entre 0 et 1) et la composante dite Luminance ou Value représente l'intensité lumineuse.

Les espaces CIELAB et CIELUV ont quant à eux été spécialement étudiés pour que les distances entre les couleurs à l'intérieur de ces espaces soient équivalentes aux différences perçues par l'œil humain. On notera que ces espaces sont également des systèmes de codage antagoniste. La distance utilisée dans ces espaces permettant de comparer deux couleurs est appelée ΔE . Il existe également des dérivés à cette distance, plus précises pour de faibles variations de couleur comme $\Delta E94$ ou $\Delta E2000$ [29].

Les relations entre ces espaces couleur sont synthétisées dans un schéma (figure 2.9) extrait de la thèse de Vandenbroucke [132].

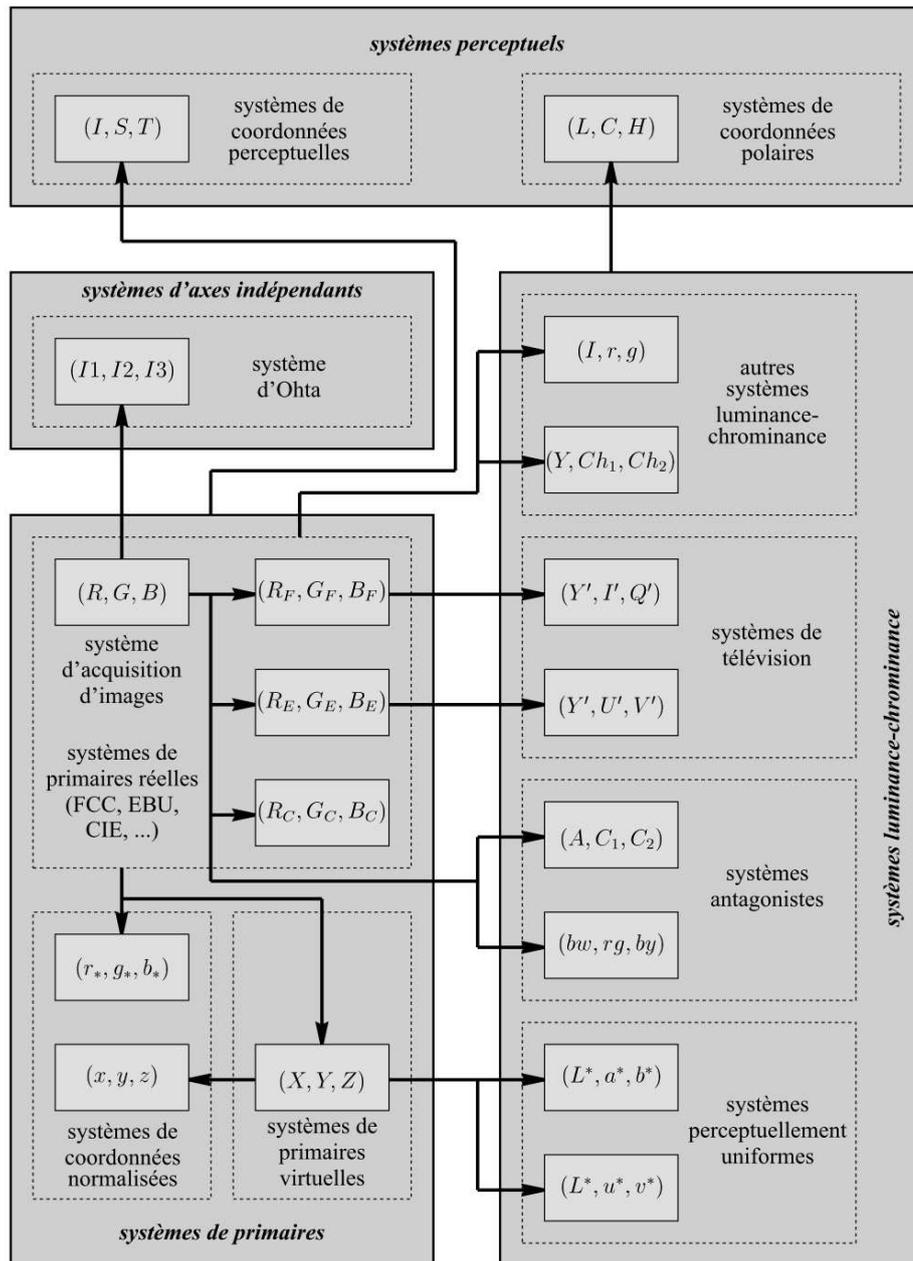


FIGURE 2.9 – Familles des espaces couleur, Vandebroucke [132].

Au final, parmi cette liste non exhaustive d'espaces couleurs, il existe peu d'espaces pour lesquelles des opérations numériques ont été validées. Les espaces de primaires ont été validés uniquement pour reproduire des couleurs à partir de la réduction du spectre colorimétrique en 3 valeurs. Seulement, le spectre (spectrum locus) des couleurs produites par cette technique est limité par un triangle (triangle de Maxwell) qui ne contient pas forcément toutes les couleurs existantes. Les systèmes de type Teinte-Saturation-Luminance permettent de décrire une couleur de la même façon que l'esprit humain l'interprète mais sans validation de toute autre action ou opération. Ces espaces ne possèdent donc pas de métrique permettant l'exploitation sans réserve de ces espaces pour des traitements et analyses numériques à visée métrologique. Et même si les espaces CIELAB et CIELUV ne prennent pas en compte la complexité de la perception de la couleur dans sa globalité (prise en compte du voisinage couleur, de la texture), ils sont les seuls à posséder des fonctions de distances normalisées [22]. Pour aller plus loin dans la prise en compte des phénomènes perceptuels, il faut passer par l'exploitation des Modèles d'apparence couleur [40]

2.2 État de l'art

Numériquement, la couleur est une information pouvant être retranscrite de différentes manières. De nos jours, elle est le plus souvent acquise ou affichée en utilisant la théorie de la trichromie, c'est-à-dire en utilisant un triplet de valeurs. Néanmoins, de plus en plus d'appareils d'acquisition multispectraux voient le jour permettant d'obtenir le spectre colorimétrique *quasi* continu de la couleur. Ces appareils peuvent acquérir de 100 à 300 bandes spectrales. La représentation numérique de la couleur est alors un vecteur pouvant contenir de 3 à 300 valeurs. Chaque valeur du vecteur est appelée composante.

L'écriture des opérateurs morphologiques de base en utilisant des éléments structurants non-plats s'exprime par la recherche d'un extremum dans un ensemble de valeurs (équations 2.12 et 2.13). Cependant, même si la couleur est représentée de différentes manières, il n'existe toujours pas de façon unique ou naturelle d'ordonner un ensemble de couleurs entre elles.

$$\delta_c(f, g)(x) = \bigvee_{x \in D_f, y \in D_g} \{f(x - y)\} \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_c(f, g)(x) = \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} \{f(x - y)\} \quad (2.13)$$

Dès lors que les couleurs sont variées, comme le montre la figure 2.10, il devient difficile de mettre une relation d'ordre entre les différentes couleurs. Il existe néanmoins des solutions d'ordonnements vectoriels. Cependant, nous allons voir qu'elles ne sont pas toutes adaptées à la morphologie mathématique ou à l'information couleur.

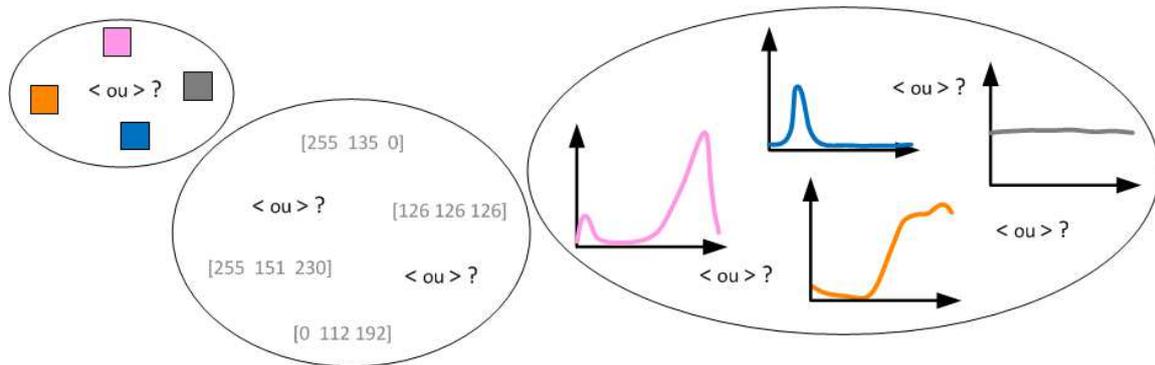


FIGURE 2.10 – Illustration du problème d'ordonnement d'un ensemble de couleurs. Le placement des relations d'ordre $<$ et $>$ entre les différentes couleurs n'est pas naturel.

2.2.1 Les ordonnancements couleurs : les approches de la littérature

Le tableau 2.1 présente une partie des approches de la littérature ou servant de référence. Il est classé par technique d'ordonnement [17] et type d'espace de représentation.

		Espace de représentation utilisé					
		RGB	HLS,HSI,HSV,...	CIELAB, CIELUV	Complexe	Générique	
Type d'ordre	Marginal		Weber (2004)			Goutsias (1995) Gu (1996) Al Otum (2003)	
		Partiel					Mojsilovic (2000) Cordeiro (2007)
	Réduit		pré-ordre	Li (2004)	Wheeler (2000)		Vertan (2003) Plaza (2004) Ledda (2005) Ronse (2008) Chanussot (1998) Stringa (1999) Gibson (2003) Lezoray (2005)
		ordre total	Florez (2005)				
	Conditionnel			Peters (1997)			
				Andrealis (2000)			
				Vardavoulia (2001)			
				Hanbury (2002)		Rivist (2004)	Bush (1995)
				Louverdis (2002)			
				Ortiz (2002)			
	Hybride			Lopez (2003)			
			Comer (1999)				Sartor (2001)
			Lopez (2003)			Lopez (2009)	Evans (2003)
			Gonzalez (2010)				Lopez (2007)
						Torres (2011) Benavent (2012)	

TABLE 2.1 – Méthodes de la littérature en fonction de l'ordre³ utilisé et de l'espace de représentation.

3. Les familles d'ordres utilisées sont extraites de l'article de Barnett [17] à ne pas confondre avec les ordres répondant aux propriétés de la morphologie mathématique (total, partiel, pré-ordre).

Si une grande partie des approches s'est portée sur des techniques d'ordres réduits, elles ne sont pas attachées spécifiquement à l'information couleur et finalement restent peu utilisées. D'un autre côté, les approches plus sensibles à cette information particulière reposent principalement sur des techniques d'ordonnements conditionnels dans des espaces de type Teinte-Luminance-Saturation avec les problèmes induits que nous allons aborder. Ce faisant, les travaux récents montrent un intérêt pour des constructions hybrides avec un réel attachement à l'information couleur tout en préservant les propriétés fondamentales (ordre total).

Nous allons détailler les différents ordonnancements afin de voir leurs intérêts face à la morphologie mathématique. Puis nous orienterons la discussion sur l'utilisation des espaces couleur. Nous rappelons que les relations habituellement notées $<$, $>$, \leq et \geq deviennent \succ , \prec , \succeq et \preceq . Ces relations ne sont pas des relations entre éléments scalaires et ne construisent pas forcément un ordre total. Nous noterons v et v' les vecteurs à ordonner.

2.2.1.1 Les ordres marginaux

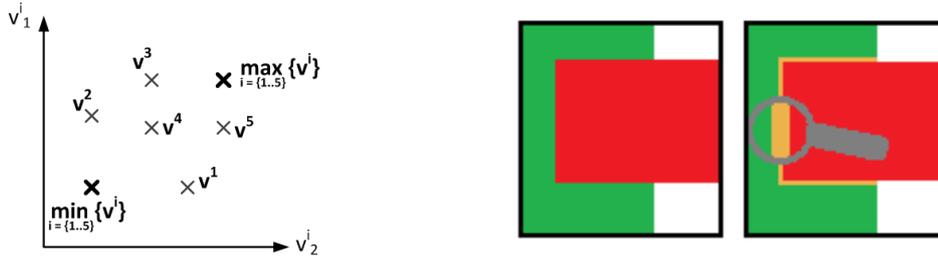
Les ordres marginaux se construisent en ordonnant séparément chaque composante vectorielle (équation 2.14). Cet ordonnancement est facile à mettre en oeuvre en utilisant directement les algorithmes niveaux de gris existants sans modification de l'image initiale.

$$\begin{aligned} \forall v = [v_1, \dots, v_p], v' = [v'_1, \dots, v'_p] \in \mathbb{R}^p, \quad \vee(v, v') = [\vee(v_1, v'_1), \dots, \vee(v_p, v'_p)] = v'' \\ \text{avec } v'' \in \{v, v'\} \text{ ou } v'' \notin \{v, v'\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Cependant le traitement séparé des composantes entraîne l'apparition de nouveaux vecteurs n'appartenant pas forcément à l'ensemble des vecteurs initiaux [71]. La figure 2.11 illustre l'apparition de nouveaux vecteurs lors de la recherche du maximum et du minimum. Dans le cas de données 2D (figure 2.11a), les extrema ne font pas partie de l'ensemble de vecteur v^i . Dans le cas d'une image couleur (figure 2.11b), la dilatation fait apparaître la couleur jaune alors qu'elle n'était pas présente dans l'image initiale.

Al-Otum [3] propose une méthode afin de ne pas obtenir de fausses couleurs. Le principe proposé consiste à remplacer les couleurs résultant de l'ordre marginal par les couleurs de l'image initiale les plus proches. Pour cela, il utilise la distance de Mahalanobis. Cependant, l'utilisation de cette distance dans le contexte de la couleur n'a pas de sens perceptuel ou physique. De plus, plusieurs couleurs appartenant à l'image peuvent se trouver à la même distance mais aucune solution n'est proposée dans ce cas de configuration.

Le second problème pour cet ordonnancement apparaît lors du choix de l'espace couleur. Le fonctionnement des ordres marginaux ne permet pas de prendre en compte l'intercorrélation des composantes. Les espaces fortement corrélés comme l'espace RGB ne sont donc pas adaptés. L'utilisation d'espaces couleur moins corrélés de type Luminance-Chrominance ou des transformations telles que l'ACP, la transformée en cosinus discret ou encore la transformée de Karhunen-Loeve [134, 48] permettent d'atténuer ce problème.



(a) Extraction du maximum/minimum dans un cas 2D.

(b) Dilatation marginale.

FIGURE 2.11 – Apparition de nouveaux vecteurs lors de l'utilisation de l'ordre marginal en 2D et pour une image couleur. Dans le cas couleur l'image est dilatée par un élément structurant carré 3x3.

Finalement, l'ordre marginal possède un dernier problème. Plus le nombre de composantes augmente, plus le coût combinatoire devient élevé ce qui, dans le cas des traitement d'images multi/hyperspectrales [13], peut poser certains problèmes.

2.2.1.2 Les ordres partiels

Les ordres partiels sont généralement fondés sur une transformation géométrique de l'espace en sous-espaces. Chaque élément appartenant à un sous-espace peut être ordonné par rapport à un élément d'un autre sous-espace. Mais aucune relation d'ordonnement n'existe entre les éléments d'un même sous espace. La figure 2.12 est un exemple d'ordre partiel utilisant la méthode d'ensembles convexes.

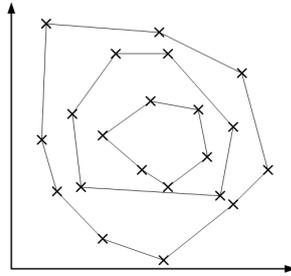


FIGURE 2.12 – Exemple d'ordre partiel pour un espace 2D avec la méthode d'ensembles convexes.

Cordeiro [34] utilise cet ordonnancement en utilisant le principe de dominance hiérarchique. La dominance hiérarchique s'exprime dans le cas où toutes les valeurs d'un vecteur v sont supérieures à celle du vecteur v' (équation 2.15)

$$\forall v, v' \in \mathbb{R}^p, \quad v \preceq v' \Leftrightarrow \forall i = 1..p, v_i \leq v'_i \quad (2.15)$$

Cependant, ces ordres ne permettent pas d'obtenir un ordre total. Leurs utilisations dans le cadre de la morphologie mathématique ne sont donc pas valides théoriquement.

2.2.1.3 Les ordres réduits

Cette technique d'ordonnement utilise une fonction qui va transposer l'information vectorielle sur une base scalaire, rendant l'ordonnement direct. La transposition s'effectue par le biais d'une transformation \mathbf{t} (équation 2.16) incluant les différentes composantes du vecteur. Contrairement aux ordonnements marginaux, les ordonnements réduits prennent donc en compte l'information vectorielle dans son ensemble. La transformation permet alors d'obtenir une image pseudo-niveaux de gris⁴ et d'appliquer directement l'algorithme niveaux de gris.

$$\forall v, v' \in \mathbb{R}^p, \quad v \preceq v' \Leftrightarrow \mathbf{t}(v) \leq \mathbf{t}(v') \\ \text{avec } \mathbf{t} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.16)$$

Le choix de la transformation n'est pas unique. Dans le contexte du traitement d'images couleur, différentes transformations sont utilisées ; des sommes pondérées, des distance, etc. Nous détaillons certaines de ces transformations développées dans la littérature.

Sommes pondérées

L'application d'une somme pondérée permet de gérer l'importance de chacune des composantes dans l'ordonnement en agissant sur les différents coefficients (équation 2.17).

$$\forall v \in \mathbb{R}^p, \quad \mathbf{t}(v) = \sum_{i=1..p} \alpha_i v_i \quad (2.17)$$

Comer [31] explique dans son article comment gérer les différents paramètres α_i en fonction de l'objectif de l'application. Par exemple, le choix des paramètres permet de réduire l'information vectorielle à une valeur de luminance.

Distance

Plusieurs constructions à partir de fonctions de distance peuvent être utilisées pour ordonner un ensemble. Nous allons détailler les deux constructions les plus populaires dans le contexte du traitement d'image : la première utilisant un vecteur de référence ; la seconde appelée distance cumulée.

Distance à un vecteur de référence :

La transformation utilisée peut être une fonction de distance à un point de référence (équation 2.18). Plusieurs auteurs utilisent cette approche, mais elle ne permet pas d'obtenir un ordre total [31, 114, 5]. De plus, le choix de la coordonnée de référence est une contrainte supplémentaire.

$$\forall v \in \mathbb{R}^p, \quad \mathbf{t}(v) = \|\overrightarrow{v \ v_{ref}}\| \quad (2.18)$$

4. La transformation utilisée ne transforme pas toujours les vecteurs en entiers mais souvent en réels.

Distance cumulée :

Pour contourner le problème du choix de la distance de référence, il est possible de sommer les distances entre le vecteur courant et tous les vecteurs de l'ensemble à ordonner (équation 2.19) [104]. Cette méthode est connue sous le nom de distance cumulée et est souvent utilisée dans le traitement d'image couleur [134, 31, 71].

$$\forall v \in \mathbb{R}^p, \quad t(v_y) = \sum_{x \in D_f \cap \mathbf{S}} \overrightarrow{\|v_y - v_x\|} \quad (2.19)$$

avec D_f le domaine de définition de l'image et \mathbf{S} le support de recherche autour du pixel y .

Cette méthode présente de bons résultats pour les filtres médians mais elle ne convient pas à la morphologie mathématique. Sa construction ne permet pas d'aboutir à un ordre total. De plus, la notion d'infimum définie au sens de cet ordre coïncide avec la notion de valeur médiane et n'a pas le sens de plus petit élément tel que le nécessite la morphologie mathématique. Comme le montre la figure 2.13, le point ayant la somme des distances aux autres vecteurs la plus petite est le point situé au milieu du nuage de points. De plus, la définition du supremum est en plus très instable : une faible variation modifiant un des points peut avoir un impact important sur la valeur du supremum [22].

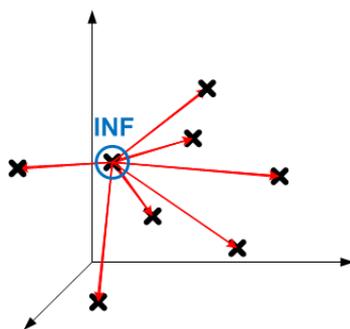


FIGURE 2.13 – Illustration de la méthode de distance cumulée.

Enfin, le coût calculatoire devient très important en comparaison à la méthode calculant la distance par rapport à un vecteur référence.

Autres transformations

Entrelacement de bits :

La méthode dite d'« entrelacement de bits » ou « bit mixing » est une méthode bien connue du traitement d'image. Elle fut une des premières méthodes populaires utilisées pour la morphologie mathématique couleur [26] permettant d'obtenir un ordre total. Le principe est de construire un entier unique pour chaque vecteur en entrelaçant les bits de chacune de ses composantes. Pour cela, la transformation utilisée pour un vecteur v dans \mathbb{R}^p composé de n bits est la suivante :

$$t(v) = \sum_{j=1}^n \{2^{p-(n-j)} \sum_{i=1}^p 2^{p-i} v_{i,j}\} \quad (2.20)$$

Cette méthode d'ordonnement est simple puisqu'elle permet d'obtenir des entiers et permet ainsi d'appliquer les opérateurs de morphologie niveaux de gris. La dissymétrie induite par cet ordonnancement est moins importante que celle des ordres lexicographiques [26] mais reste néanmoins présente.

Projection vectorielle :

Wheeler [138] ou encore [135] utilisent des projections de vecteurs dans des espaces de dimensionnalité inférieure. Vertan [135], par exemple, utilise cette technique pour projeter l'information vectorielle sur un plan 2D. Pour cela, il projette les différents axes sur le plan en conservant la même origine et en séparant tous les axes de la même distance angulaire. Il crée ainsi une forme géométrique reliant tous les points d'un vecteur. L'ordre est obtenu en comparant des données géométriques tel que le périmètre, la surface, etc. des formes créées (équation 2.21).

$$t(v) = \frac{S}{P^2} \quad (2.21)$$

avec S , la surface de la forme
et P , le périmètre de la forme

Chemin minimisant un coût :

Les différentes méthodes de cette catégorie construisent un chemin passant par toutes les couleurs de l'image une unique fois. L'objectif est de minimiser le chemin parcourant les couleurs. Florez [44] détermine directement le minimum et le maximum comme le noir et le blanc et construit le chemin à partir de ces deux couleurs en utilisant un réseau de neurones. Lezoray [75] considère le maximum comme la couleur la plus éloignée de la couleur de référence et le minimum comme la plus proche de la couleur de référence.

Ordre statistique :

Ledda [73] utilise le nombre d'apparitions des couleurs dans une image afin de les ordonner. Cette méthode permet d'être indépendant de l'espace de représentation mais ne permet pas d'aboutir à un ordre total.

Analyse en composante principale :

Li [76] utilise la première composante après avoir effectué une Analyse en Composante Principale (ACP) sur l'espace de représentation. La méthode est alors indépendante de l'espace de représentation mais surtout décorrèle les composantes afin de concentrer l'information dans la première composante. Ainsi, la seule utilisation de la première composante est suffisante dans la majorité des cas, cependant l'ordonnement n'est pas un ordre total.

Synthèse des ordres réduits

La réduction de l'information à l'aide d'une transformation ne permet pas dans tous les cas d'obtenir un ordre total. Il faut donc utiliser ces méthodes avec précaution dans le cadre de la morphologie mathématique.

2.2.1.4 Les ordres conditionnels

Les ordres conditionnels, plus connus sous le nom d'ordres lexicographiques, sont les plus utilisés pour le traitement d'images multivaluées. Ils consistent à ordonner des vecteurs en utilisant les composantes les unes après les autres (équation 2.22). Leur construction permet de construire un ordre total.

$$\begin{aligned}
 v \succ v' &\Leftrightarrow v_1 > v'_1 \\
 &\text{ou} \\
 &v_1 = v'_1 \text{ et } v_2 > v'_2 \\
 &\text{ou} \\
 &\dots \\
 &\text{ou} \\
 &v_1 = v'_1 \text{ et } v_2 = v'_2 \text{ et } \dots \text{et } v_p > v'_p
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Cependant, de la même manière que pour le bit mixing, l'utilisation d'un tel ordre induit un problème de priorisation. La composante utilisée en première position pour ordonner les couleurs est favorisée, ce qui affecte le résultat final.

Pour diminuer ce phénomène, il est possible d'utiliser un ordre lexicographique de module- α [96]. L'application de paramètres de contrôle appelés α_k sur chacun des niveaux de l'ordre lexicographique permet de diminuer leur marge dynamique (équation 2.23). Ainsi l'influence de la première composante de l'ordre lexicographique est diminuée.

$$\begin{aligned}
 v \succ v' &\Leftrightarrow \frac{v_1}{\alpha_1} > \frac{v'_1}{\alpha_1} \\
 &\text{ou} \\
 &\frac{v_1}{\alpha_1} = \frac{v'_1}{\alpha_1} \text{ et } \frac{v_2}{\alpha_2} > \frac{v'_2}{\alpha_2} \\
 &\text{ou} \\
 &\dots \\
 &\text{ou} \\
 &\frac{v_1}{\alpha_1} = \frac{v'_1}{\alpha_1} \text{ et } \frac{v_2}{\alpha_2} = \frac{v'_2}{\alpha_2} \text{ et } \dots \text{et } \frac{v_p}{\alpha_p} > \frac{v'_p}{\alpha_p}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Cependant, l'application de cet assouplissement annule la construction d'un ordre total [8]. Avec un tel ordre, deux couleurs peuvent tomber dans le même intervalle de valeurs pour la première composante et avoir les mêmes valeurs pour les composantes suivantes.

2.2.1.5 Les ordres hybrides

Par définition, au moins deux types d'ordonnements sont combinés. La combinaison de plusieurs ordonnancements permet d'une part de respecter certaines hypothèses liées au domaine d'application (couleur, par exemple) et d'autre part d'assurer la construction d'un ordre total. L'exemple type est l'usage d'un ordre réduit auquel est associé un ordre lexicographique en cas de doublons des extrema issus de la première partie (équation 2.24).

$$\begin{aligned}
 \forall v, v' \in \mathbb{R}^p, \quad v \succ v' &\Leftrightarrow \mathbf{t}(v) \leq \mathbf{t}(v') \\
 &\frac{v_1}{\alpha_1} > \frac{v'_1}{\alpha_1} \\
 &\text{ou} \\
 &\frac{v_1}{\alpha_1} = \frac{v'_1}{\alpha_1} \quad \text{et} \quad \frac{v_2}{\alpha_2} > \frac{v'_2}{\alpha_2} \\
 &\text{ou} \\
 &\dots \\
 &\text{ou} \\
 &\frac{v_1}{\alpha_1} = \frac{v'_1}{\alpha_1} \quad \text{et} \quad \frac{v_2}{\alpha_2} = \frac{v'_2}{\alpha_2} \quad \text{et} \quad \dots \text{et} \quad \frac{v_p}{\alpha_p} > \frac{v'_p}{\alpha_p} \\
 &\text{avec } \mathbf{t} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Dans la littérature, nous pouvons trouver l'utilisation des valeurs maximales et minimales des composantes du vecteur ou encore de fonction pondérée combinant chacune des composantes [7]. Une approche originale a également été construite en utilisant les quaternions [6]. Finalement, la méthode hybride la plus répandue utilise une fonction de distance en première condition [114, 5]. Finalement, même si ces méthodes utilisent un ordre réduit en première condition, les non-linéarités demeurent par l'utilisation de l'ordre lexicographique en deuxième condition.

2.2.1.6 Les approches d'un point de vue couleur

Toutes les méthodes présentées précédemment ont leurs avantages et leurs inconvénients. Mais le choix de l'espace couleur peut permettre de corriger certains défauts.

Dans le cas de l'ordre marginal, qui ne prend pas en compte la corrélation entre les composantes, l'utilisation d'espaces tel que l'espace RGB n'est donc pas approprié. La solution adoptée par les auteurs est donc de se tourner vers des espaces dont les axes de représentation sont moins corrélés, comme les espaces de type luminance-chrominance ou de type Otha.

Les ordres réduits sont principalement construits à partir de fonctions de distance. En pratique toutes les distances et tous les espaces de représentation permettent d'aboutir un à ordre réduit. Cependant, la couleur est une information particulière et seuls les espaces perceptuels de type CIELAB et CIELUV possèdent des métriques valides perceptuellement. Ils sont donc à privilégier dans notre contexte de travail.

Dans le cadre des ordres conditionnels ou de l'utilisation de l'entrelacement de bits, l'utilisation d'espaces décorrélés permet dans certain cas d'atténuer l'effet engendré par la priorisation des composantes. Lors de l'utilisation d'espace de type RGB, la priorisation de la première composante est accentuée par la séparation de l'information chromatique en 3 valeurs. La figure 2.14 montre clairement ce phénomène de priorité dans l'espace couleur RGB. Les flèches indiquent le sens de progression des couleurs après avoir appliqué une dilatation à l'aide de l'ordre lexicographique. Sur l'image de gauche, où l'ordre $R \rightarrow G \rightarrow B$ est utilisé, le rouge est prioritaire sur le vert et le bleu. La couleur blanche, pour tous les ordres lexicographiques utilisés, est prioritaire puisque elle la valeur maximale des trois composantes.

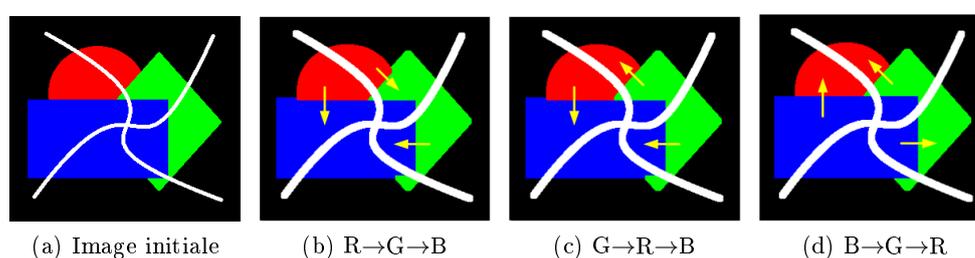


FIGURE 2.14 – Dilatation avec un élément structurant carré de taille 3×3 pour différents ordres lexicographiques sur les composantes RGB.

Pour atténuer l'impact de la priorisation, un grand nombre d'auteurs ont donc formulé leur ordre lexicographique dans des espaces de type « luminance-teinte-saturation » [54, 77, 4, 95]. Ils justifient leur choix par l'indépendance des mesures de saturation et de clarté. De plus, la construction de tels espaces permet de rendre les résultats obtenus facilement interprétables par l'utilisateur. Ce type d'espace couleur est construit de manière proche de la façon qu'un observateur humain décrit une couleur.

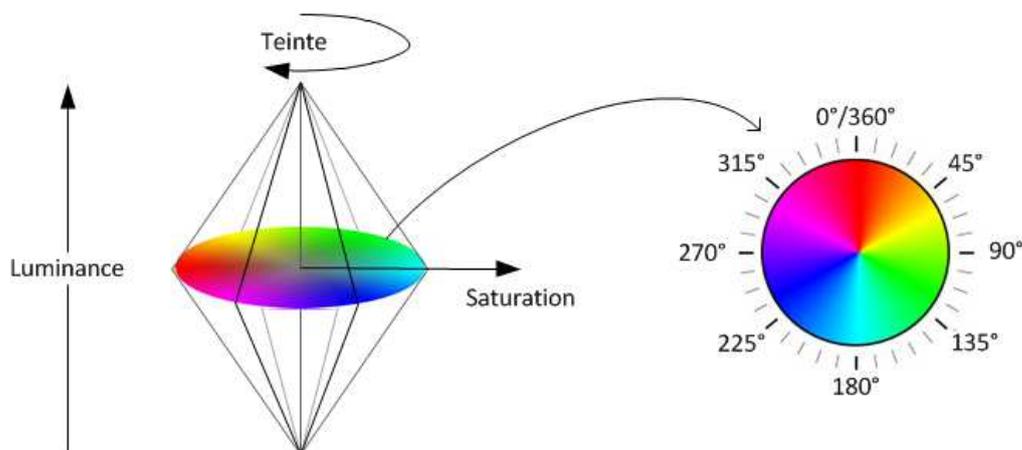


FIGURE 2.15 – Espace HLS et le cercle des teintes associé.

La séparation de la luminance et de la saturation implique également la séparation de

l'information de teinte. Dans le contexte de la morphologie mathématique, la composante teinte entraîne des complications pour l'ordonnement. La teinte est définie par un angle sur le cercle unité et est 2π -périodique (figure 2.15). La notion de teinte minimale/maximale n'est donc pas naturelle.

La solution adoptée pour extraire un minimum/maximum dans un ensemble de teintes consiste à utiliser la distance angulaire [62, 12]. Cependant, comme il existe deux teintes différentes se situant à la même distance de la teinte de référence, une contrainte supplémentaire doit être ajoutée. Ainsi, la teinte supérieure sera celle qui aura la valeur d'angle maximal en considérant la teinte de référence comme l'origine du cercle chromatique.

Différentes solutions ont été utilisées pour fixer cette notion de teinte de référence.

La première solution est de fixer la teinte de référence manuellement. Par exemple, lors d'un traitement sur un objet coloré, le choix peut se porter sur la teinte de l'objet. Mais cette solution nécessite l'intervention de l'utilisateur.

Certains auteurs ont développé des solutions non-supervisées. Hanbury [52] propose d'utiliser la teinte du pixel central de l'élément structurant ou encore d'utiliser des « données circulaires groupées ». Lopez [4] dans le même esprit définit la teinte dominante et anti-dominante, respectivement pour les opérateurs de dilatation et d'érosion.

Pour le dernier type de solution, Lopez définit deux types de teinte de référence, une globale (pour toute l'image) et une locale (définie par le support de l'élément structurant). L'approche locale, pose cependant problème pour certaines définitions, comme celle d'associativité $\delta(\delta(F, H), G) \neq \delta(\delta(H, G), F)$, puisque la teinte de référence dépend de l'environnement et les supports changent en fonction des priorités imposées par les parenthèses. Elle entraîne également l'apparition de bruit dans l'image dû au changement de la teinte de référence pour chaque pixel (figure 2.16)

2.2.2 Points forts et limites des approches de la littérature

Dans cette partie nous allons regrouper les points forts et limites des différentes approches. Pour simplifier la lecture nous allons séparer l'analyse en trois parties. Nous commencerons par analyser les ordres marginaux puis les ordres réduits et enfin les ordres totaux.

Les ordres marginaux ont comme point fort d'être faciles à mettre en œuvre. En contrepartie, ils possèdent de nombreuses limites. Ils ne prennent pas en compte l'intercorrélation entre les composantes du vecteur. Ils entraînent l'apparition des fausses couleurs. Finalement, leur coût calculatoire augmente avec le nombre de composantes constituant le vecteur.

Les ordres partiels, comme leur nom l'indique, ne permettent pas d'établir un ordre total. Ils ne peuvent donc pas théoriquement convenir dans le contexte de la morphologie mathématique.

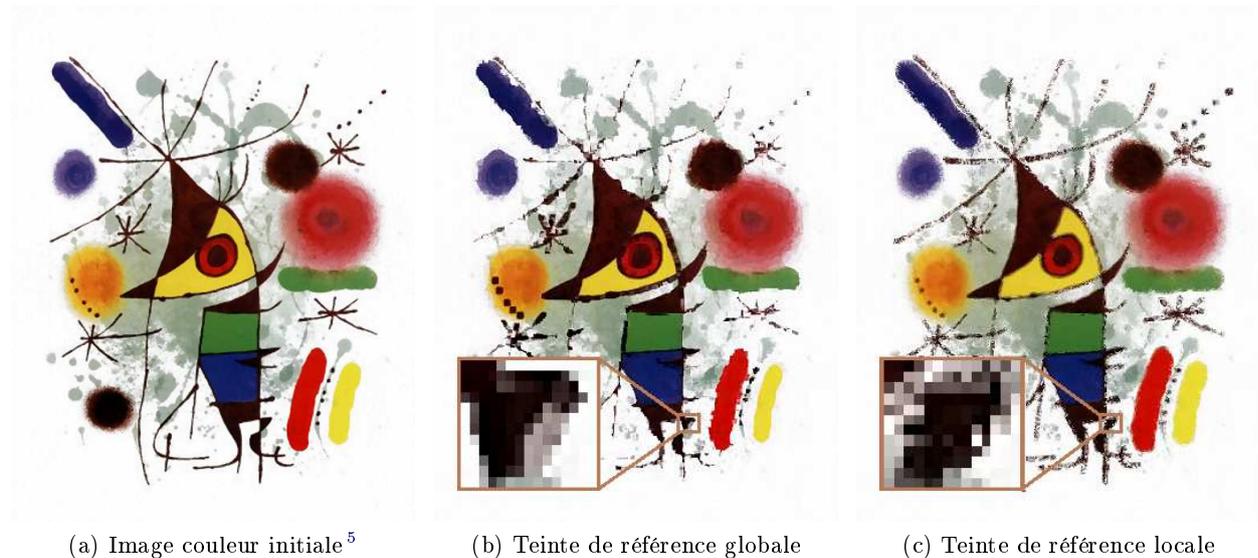


FIGURE 2.16 – Dilatation avec l'ordre lexicographique $H \rightarrow S \rightarrow L$ et élément structurant plat carré de taille 5×5 , la teinte de référence est calculée soit globalement, soit localement.

Les ordres réduits permettent de prendre en compte l'information vectorielle dans son ensemble. Cependant, malgré quelques exceptions comme l'utilisation de l'entrelacement de bits, les ordres réduits n'aboutissent pas à un ordre total.

Les ordres conditionnels ont l'avantage d'être totalement ordonnés ce qui est nécessaire pour la morphologie mathématique. Dans ce cadre, l'ordre lexicographique est le principal ordonnancement utilisé dans la littérature permettant de construire un ordre total. Toutefois, cet ordonnancement possède quelques limites.

Ce type d'ordonnancement donne la priorité à la composante mise en première position. Les solutions d'assouplissement mises en place par certains auteurs annulent la construction de l'ordre total établi avec l'ordre lexicographique initial. L'utilisation d'espaces corrélés comme les espaces de primaires ne sont donc pas adaptés à ce type d'ordonnancement, il faut leur préférer des espaces où les informations d'intensité et de chrominance sont séparées. Malheureusement, ces espaces posent problème lors de l'ordonnancement de la teinte.

Par ailleurs, cet ordonnancement induit une non linéarité perceptuelle. Comme la figure 2.17 l'illustre, l'ordre lexicographique entraîne la succession de couleurs qui ne sont pas proches perceptuellement. La distance $\Delta 2$ est plus grande que $\Delta 1$, pourtant les couleurs aux extrémités de $\Delta 2$ semblent visuellement plus proches que celles de $\Delta 1$. En utilisant un ordre avec l'intensité au premier niveau, les effets de la non linéarité sont atténués mais restent toujours présents (figure 2.17c). De par leur non linéarité perceptuelle, ces approches présentent une forte sensibilité au bruit, un léger écart d'une unité sur un canal

5. Source de l'image : <http://www.001galerie.com/repro-joan-miro-chanteur-p-342.html>

change complètement le comportement local et donc global dans un schéma itératif.

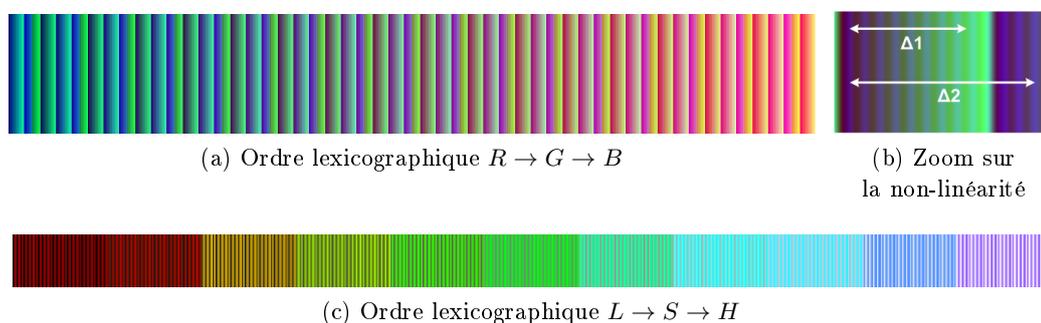


FIGURE 2.17 – Exemple de non linéarité des ordres lexicographiques.

Les ordres hybrides Les ordres hybrides ont la particularité de combiner plusieurs familles d'ordres. Cette combinaison permet, dans la plupart des cas, de compenser les limites d'un ordre par les points forts de l'ordre associé. Si tous les problèmes posés précédemment semblent résolus par ce type de construction, il faut cependant la considérer comme une construction conditionnelle. La qualité de l'ordre obtenu sera liée au taux d'usage de la première partie, l'utilisation de la seconde partie entraînant une non-linéarité du comportement.

Limite commune aux approches de morphologie mathématique couleur Au début de ce chapitre, nous avons vu que l'écriture des opérateurs niveaux de gris ne se limite pas à la recherche d'un extremum. Pourtant, quelque soit l'approche de morphologie mathématique couleur ou multi/hyperspectrale utilisée, elles se focalisent uniquement sur l'ordonnement d'un ensemble vectoriel. L'utilisation de l'élément structurant non-plat apporte pourtant un gain pour certains algorithmes. Nous détaillerons cet apport pour deux applications du traitement d'image : l'analyse de textures fractales (section 3.2.2) et la détection d'objets (chapitre 6).

2.3 Un nouveau cadre générique

L'état de l'art de la morphologie mathématique couleur met en avant les limites des méthodes existantes à prendre en compte les particularités de la couleur. Elles sont, soit construites dans des espaces inadaptés pour les calculs couleur, soit ne vont pas au bout de l'intégration des particularités de la couleur en incluant un ordre lexicographique. Ces constructions induisent des problèmes de non-linéarité d'ordonnement qui ont un impact sur les résultats de traitement. Nous proposons donc un cadre de conception basé uniquement sur des fonctions de distances perceptuelles normalisées par la CIE.

En partant du lien étroit existant entre le concept d'ordonnement de paire de couleurs utilisé pour construire les espaces couleur perceptuels et celui de l'ordonnement nécessaire à la morphologie mathématique, nous proposons et décrivons dans la suite de ce chapitre une nouvelle méthode appelée « Convergence Color Mathematical Morphology » (CCMM). Nous allons expliquer les différentes étapes de sa construction en commençant par la définition des coordonnées de convergence. Nous illustrerons la méthode par quelques résultats. Nous terminerons par la définition des éléments structurants couleur non-plats.

2.3.1 Notre proposition de morphologie mathématique couleur perceptuellement linéaire

2.3.1.1 Principe de construction

Nos opérateurs couleur sont construits à partir du concept de convergence. Nous avons vu que pour les images niveaux de gris, les images convergent vers le noir (valeur minimale) pour l'érosion et le blanc (valeur maximale) pour la dilatation. Cependant, dans le contexte de la couleur, la convergence vers ces deux couleurs ne devrait être qu'un cas particulier. Nous définissons ainsi des coordonnées de convergence couleur pouvant prendre toutes les valeurs de l'espace de représentation choisi. Elles sont notées $O^{-\infty}$ et $O^{+\infty}$ et sont respectivement les coordonnées de convergence de l'érosion et de la dilatation.

Afin de construire notre méthode sur ce principe, les couleurs devront converger vers ces coordonnées. Pour cela, les extrema sont extraits en fonction de leur distance aux points de convergence. Ainsi, la couleur C_x sera plus petite que la couleur C_y , si elle vérifie :

$$C_x \preceq C_y \Leftrightarrow \|\overrightarrow{C_x O^{-\infty}}\| \leq \|\overrightarrow{C_y O^{-\infty}}\| \quad (2.25)$$

Cette relation est utilisée pour l'érosion afin de faire converger les couleurs vers $O^{-\infty}$. De la même façon, pour la dilatation, le supremum entre deux couleurs C_x et C_y est donné par :

$$C_x \succeq C_y \Leftrightarrow \|\overrightarrow{C_x O^{+\infty}}\| \leq \|\overrightarrow{C_y O^{+\infty}}\| \quad (2.26)$$

Nous avons établi la base d'une nouvelle méthode fondée sur un concept de convergence en utilisant une fonction de distance. Cependant, le choix de la fonction de distance est très important. Pour cela, nous nous appuyons sur l'étude des espaces couleur effectuée précédemment où il est ressorti qu'il existe un nombre de métriques valides limité. Notre choix s'oriente vers l'espace CIELAB et sa famille de distances ΔE . La norme du vecteur

est calculée à l'aide de la métrique ΔE^6 :

$$\|\overrightarrow{C_i C_j}\| = \Delta E(C_i, C_j) \quad (2.27)$$

Les bases de la CCMM sont posées. L'ordonnancement choisi est donc un ordre utilisant une fonction de distance par rapport à une coordonnée de référence. Cependant nous avons vu précédemment que ce type d'ordre est un ordre réduit et n'est pas un ordre total. Pour être un ordre total, les conditions de réflexivité (équation 2.28), de transitivité (équation 2.29) et d'anti-symétrie (équation 2.30) doivent être respectées.

$$\text{réflexivité : } A \preceq A \quad (2.28)$$

$$\text{transitivité : } A \preceq B \quad , \quad B \preceq C \Rightarrow A \preceq C \quad (2.29)$$

$$\text{anti-symétrie : } A \preceq B \quad , \quad B \preceq A \Rightarrow A = B \quad (2.30)$$

Nous pouvons d'emblée affirmer que notre construction respecte la propriété de réflexivité :

$$\|\overrightarrow{C_i C_r}\| \leq \|\overrightarrow{C_i C_r}\|$$

Par ailleurs, comme le montre la figure 2.18a, la propriété de transitivité est également vérifiée grâce aux propriétés des fonctions de distance :

$$\|\overrightarrow{C_i C_r}\| \leq \|\overrightarrow{C_j C_r}\| \quad , \quad \|\overrightarrow{C_j C_r}\| \leq \|\overrightarrow{C_k C_r}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{C_i C_r}\| \leq \|\overrightarrow{C_k C_r}\|$$

Par contre, la relation d'anti-symétrie n'est elle pas vérifiée :

$$\|\overrightarrow{C_i C_r}\| \leq \|\overrightarrow{C_j C_r}\| \quad , \quad \|\overrightarrow{C_j C_r}\| \leq \|\overrightarrow{C_i C_r}\| \not\Rightarrow \|\overrightarrow{C_i C_r}\| = \|\overrightarrow{C_j C_r}\|$$

En effet, il existe une infinité de couleurs situées à la même distance d'un point, ces couleurs formant une sphère dans un espace euclidien tri-dimensionnel. La figure 2.18b illustre ce fait. La relation proposée initialement n'est donc pas anti-symétrique. Face à cette difficulté, la plupart des auteurs ont choisi de résoudre cette limite dans le cadre d'un ordre hybride en combinant l'ordre réduit avec un ordre conditionnel sur plan couleur. Dans notre travail, nous avons choisi de rester dans le cadre d'un ordonnancement basé sur des fonctions de distance conservant ainsi le sens perceptuel de la méthode avec les contraintes supplémentaires.

Nous devons donc adapter notre construction pour obtenir un ordre total. La suite de cette section décrit la construction permettant d'aboutir à un ordre total.

2.3.1.2 Construction pour aboutir à un ordre total

Dans cette partie, nous allons expliquer les conditions supplémentaires que nous imposons pour construire un ordre total. Nous détaillons l'expression permettant l'extraction de l'extremum dans le cas de la dilatation. Mais avant de poursuivre l'explication de notre

6. Dans 3.2.1 nous verrons pourquoi cette métrique est choisie plutôt que ΔE_{94} ou ΔE_{2000}

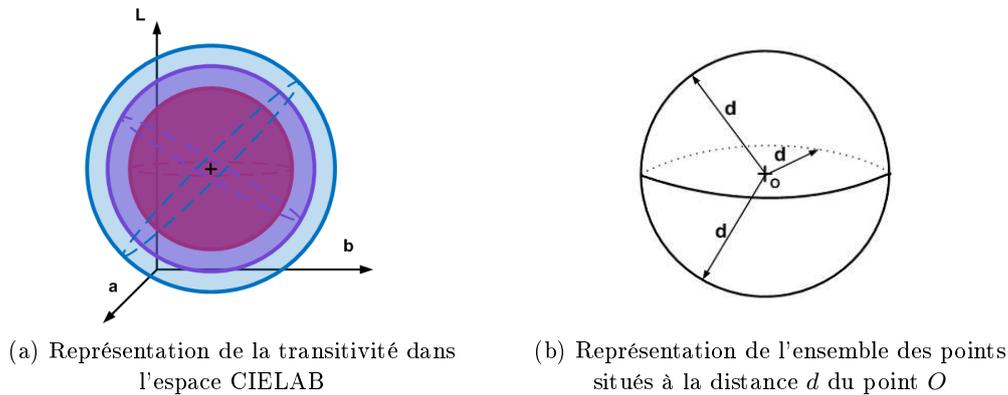


FIGURE 2.18 – Propriétés nécessaires à l'obtention d'un ordre total. Ces propriétés sont illustrées dans le cas de l'utilisation d'une distance par rapport à une coordonnée de référence.

méthode, nous indiquons sur la figure 2.19 les différents éléments permettant de comprendre la construction de nos opérateurs.

Les axes du repère, Λ , α et β sont respectivement les axes L^* , a^* et b^* après un changement d'espace de codage. Ce changement de repère permet de respecter la propriété de dualité que nous détaillons dans le chapitre 3. Les détails de ce changement d'espace de codage sont expliqués dans l'Annexe C.1. Nous retrouvons les coordonnées de convergence $O^{-\infty}$ et $O^{+\infty}$. Enfin, l'ensemble de points C_y est l'ensemble des coordonnées situées sur le support de l'élément structurant lorsque son origine est le pixel i .

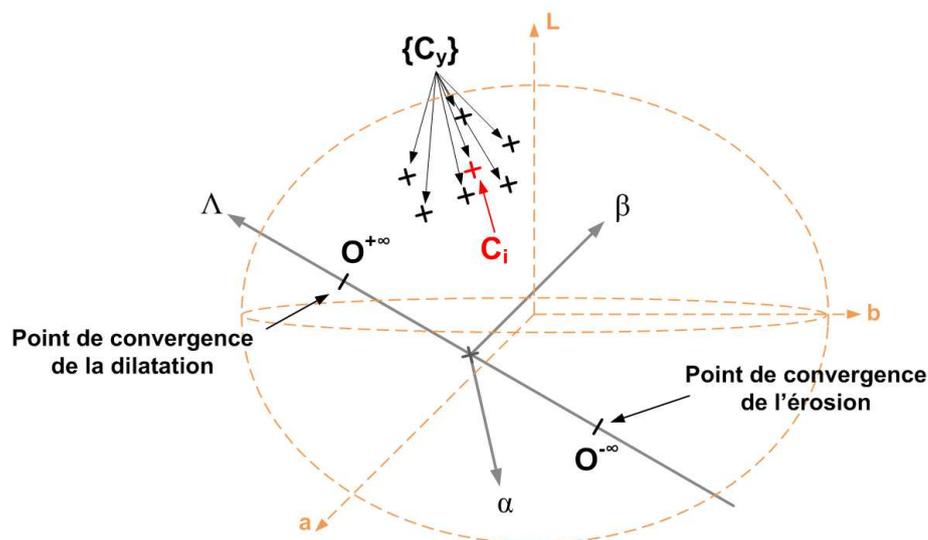


FIGURE 2.19 – Espace de représentation et ensemble des coordonnées de notre méthode.

Les conditions additionnelles sont basées sur des fonctions de distance et des coordonnées couleur de référence. Pour cette condition supplémentaire, la coordonnée de référence est celle située à l'origine spatiale de l'élément structurant, elle est notée C_i . Cette condition assure le choix d'un extremum le plus éloigné de cette coordonnée et donc une plus grande

vitesse de croissance de l'ensemble des couleurs vers l'extremum global. L'équation 2.31 traduit l'intersection de deux ensembles, ce qui reste très proche des constructions initiales de la morphologie mathématique. Comme telle, informatiquement elle peut être vue comme une expression conditionnelle mise en œuvre si l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{D}_1}$ comporte plus d'un maximum.

$$\begin{aligned} \bigvee_{x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)} \{f(x)\} &= \mathcal{S}_{\mathcal{D}_2} = \left\{ C_y \mid \|\overrightarrow{C_y C_i}\| = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_1}} \{\|\overrightarrow{C_x C_i}\|\} \right\}; \\ \text{avec } \mathcal{S}_{\mathcal{D}_1} &= \left\{ C_y \mid \|\overrightarrow{C_y O^{+\infty}}\| = \bigwedge_{\forall x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)} \{\|\overrightarrow{C_x O^{+\infty}}\|\} \right\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Cependant, la seconde condition reste insuffisante. Comme le montre la figure 2.20a, la nouvelle condition de distance forme une seconde sphère. Or, l'intersection de deux sphères peut être l'ensemble vide, un point ou un cercle contenant une infinité de points ou même être la même sphère en prenant le cas de configuration où la coordonnée de convergence et la coordonnée C_i sont confondues. La démonstration de l'intersection entre deux sphères se trouve en Annexe C.3.1. La condition d'anti-symétrie n'est donc pas respectée à ce stade de la construction.

Nous proposons alors d'ajouter une nouvelle condition afin d'assurer la propriété d'anti-symétrie. Pour cela, nous considérons que les deux opérations de base, l'érosion et la dilatation, doivent respecter la propriété de dualité (voir 3.1.2.2). La troisième condition est donc choisie en fonction de la coordonnée de convergence de l'opérateur dual. L'extremum sera donc la coordonnée, appartenant à l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{D}_2}$, la plus éloignée de la coordonnée de convergence de l'opérateur dual si elle est unique (équation 2.32).

$$\begin{aligned} \bigvee_{x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)} \{f(x)\} &= \mathcal{S}_{\mathcal{D}_3} = \left\{ C_y \mid \|\overrightarrow{C_y O^{-\infty}}\| = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_2}} \{\|\overrightarrow{C_x O^{-\infty}}\|\} \right\}; \\ \text{avec } \mathcal{S}_{\mathcal{D}_2} &= \left\{ C_y \mid \|\overrightarrow{C_y C_i}\| = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_1}} \{\|\overrightarrow{C_x C_i}\|\} \right\}; \\ \text{et } \mathcal{S}_{\mathcal{D}_1} &= \left\{ C_y \mid \|\overrightarrow{C_y O^{+\infty}}\| = \bigwedge_{\forall x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)} \{\|\overrightarrow{C_x O^{+\infty}}\|\} \right\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Cette nouvelle condition, utilisant une distance par rapport à une coordonnée de référence, construit elle aussi une sphère. Cependant, l'intersection de trois sphères présente ici encore plusieurs solutions. Nous pouvons néanmoins éliminer la configuration où les trois sphères sont confondues puisque les deux coordonnées de convergence sont toujours différentes.

Lorsque deux sphères sont confondues, l'intersection est un cercle. Si toutes les sphères ont des origines distinctes (figure 2.20b), l'intersection peut être un ensemble de deux points, un point ou l'ensemble vide. Les démonstrations sont en Annexe C.3.2 et C.3.3. Nous n'avons donc pas obtenu la propriété de dualité à cette étape de construction.

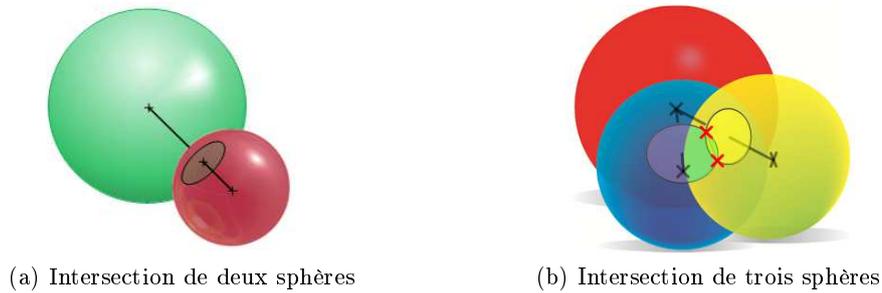


FIGURE 2.20 – Intersections entre des sphères.

Nous posons donc l'hypothèse suivante :

L'intersection des trois sphères ne peut conduire à un disque qu'à la condition unique que les trois centres de sphères soient alignés, ce qui est quasiment improbable, néanmoins pour assurer l'unicité théorique des extrema et donc la propriété d'ordre total, nous devons ajouter un nouvel ensemble de conditions.

En considérant l'hypothèse précédente, nous imposons deux conditions supplémentaires de type lexicographique. Nous choisissons les deux axes antagonistes α , β .

Ces deux conditions construisent deux plans perpendiculaires entre eux. Le premier plan est parallèle au plan formé par les axes Λ et β (figure 2.21a) et le second est parallèle au plan formé par les axes Λ et α (figure 2.21b). Ces deux conditions permettent d'aboutir à un ordre total. En effet, l'intersection entre trois sphères et deux plans donne bien un unique point (voir démonstration, en Annexe C.3.4 et C.3.5).

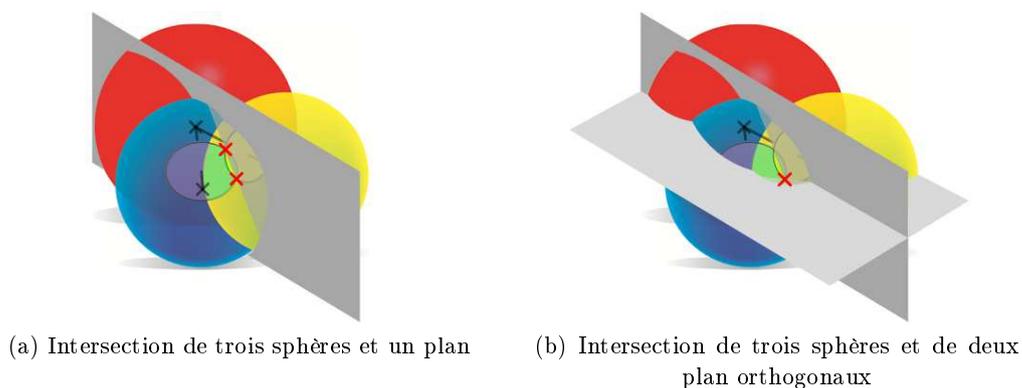


FIGURE 2.21 – Intersections entre des sphères et des plans.

La relation d'ordre ainsi proposée est anti-symétrique, elle valide donc toutes les propriétés pour obtenir un ordre total. L'ordonnancement peut donc être utilisé pour la morphologie mathématique couleur. L'expression finale de l'extraction du maximum, utilisé pour la

dilatation, est donc la suivante :

$$\begin{aligned}
\bigvee_{x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)} \{f(x)\} &= \mathcal{S}_{\mathcal{D}_5} = \left\{ C_y \mid C_y^\beta = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_4}} \{C_x^\beta\} \right\} \\
\text{avec } \mathcal{S}_{\mathcal{D}_4} &= \left\{ C_y \mid C_y^\alpha = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_3}} \{C_x^\alpha\} \right\}; \\
\mathcal{S}_{\mathcal{D}_3} &= \left\{ C_y \mid \|\overrightarrow{C_y O^{-\infty}}\| = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_2}} \{\|\overrightarrow{C_x O^{-\infty}}\|\} \right\}; \quad (2.33) \\
\mathcal{S}_{\mathcal{D}_2} &= \left\{ C_y \mid \|\overrightarrow{C_y C_i}\| = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_1}} \{\|\overrightarrow{C_x C_i}\|\} \right\}; \\
\text{et } \mathcal{S}_{\mathcal{D}_1} &= \left\{ C_y \mid \|\overrightarrow{C_y O^{+\infty}}\| = \bigwedge_{\forall x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)} \{\|\overrightarrow{C_x O^{+\infty}}\|\} \right\}
\end{aligned}$$

De la même manière que l'ordonnancement pour extraire le maximum, celui permettant d'extraire le minimum respecte les propriétés de reflexivité, transitivité et d'anti-symétrie. L'ordre obtenu est donc total, le minimum est donc unique. L'expression finale de l'extraction du minimum, utilisé pour l'érosion, est donc la suivante :

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)} \{f(x)\} &= \mathcal{S}_{\mathcal{D}_5} = \left\{ C_y \mid C_y^\beta = \bigwedge_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_4}} \{C_x^\beta\} \right\} \\
\text{avec } \mathcal{S}_{\mathcal{D}_4} &= \left\{ C_y \mid C_y^\alpha = \bigwedge_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_3}} \{C_x^\alpha\} \right\}; \\
\mathcal{S}_{\mathcal{D}_3} &= \left\{ C_y \mid \|\overrightarrow{C_y O^{+\infty}}\| = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_2}} \{\|\overrightarrow{C_x O^{+\infty}}\|\} \right\}; \quad (2.34) \\
\mathcal{S}_{\mathcal{D}_2} &= \left\{ C_y \mid \|\overrightarrow{C_y C_i}\| = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_1}} \{\|\overrightarrow{C_x C_i}\|\} \right\}; \\
\text{et } \mathcal{S}_{\mathcal{D}_1} &= \left\{ C_y \mid \|\overrightarrow{C_y O^{-\infty}}\| = \bigwedge_{\forall x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)} \{\|\overrightarrow{C_x O^{-\infty}}\|\} \right\}
\end{aligned}$$

2.3.1.3 Résultats

Nous montrons ici quelques résultats obtenus en utilisant nos opérateurs morphologiques couleur. La possibilité de choisir des coordonnées de convergence différents du noir et blanc permet de faire ressortir des détails de couleur particulière. La figure 2.22 illustre les différences engendrées par le choix des coordonnées de convergence. Lors des différentes érosions, les éléments dont la couleur est proche de la coordonnée de convergence $O^{-\infty}$ ont bien été étendus; les éléments noirs pour la figure 2.22e, les rouges pour la figure 2.22f et les bleus foncés pour la figure 2.22g. Pour les dilatations, ce sont les éléments dont la couleur est proche de la coordonnée de convergence $O^{-\infty}$ qui sont agrandis; les éléments blancs pour la figure 2.22h, les verts pour la figure 2.22i et les bleus clairs pour la figure 2.22j.

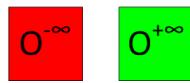


(a) Image initiale, partie de l'image food0007 de la base Vistex (254×167 pixels).

Coordonnées de convergence ($O^{-\infty}$ pour l'érosion et $O^{+\infty}$ pour la dilatation)



(a)



(b)



(c)

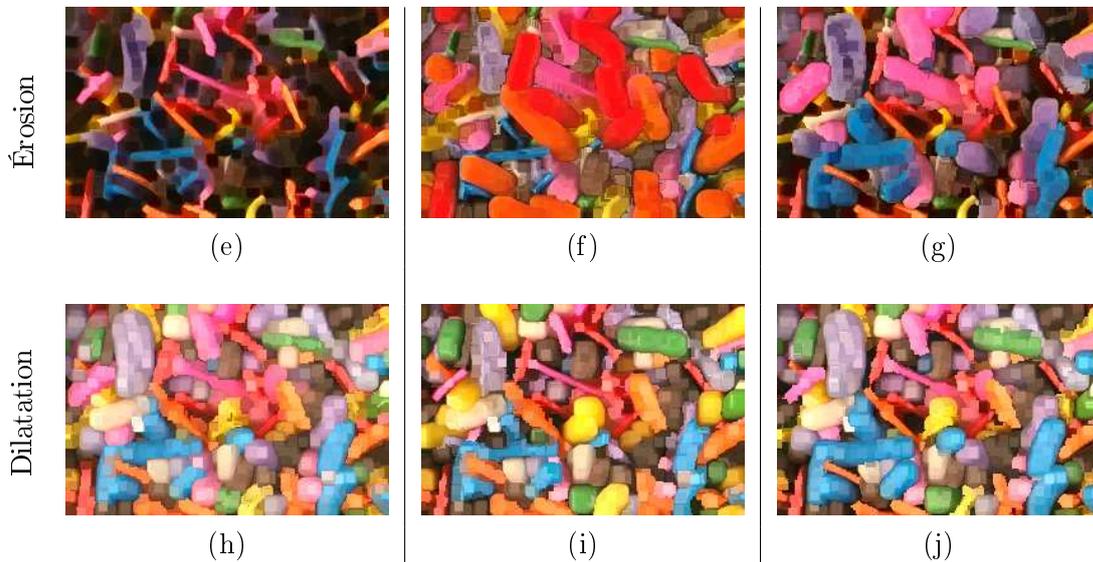


FIGURE 2.22 – Exemple d'érosion et de dilatation avec différentes coordonnées de convergence. L'élément structurant est de forme carré symétrique et de taille 3×3 pixels.

Ces premiers résultats ont pour objectif de montrer le comportement de notre méthode. Nous présenterons de nouveaux résultats et un travail de comparaison face aux méthodes de la littérature dans le chapitre suivant.

2.3.2 Un élément structurant non-plat pour nos opérateurs couleur

L'élément structurant pour la morphologie mathématique binaire est un ensemble. Les pixels qui le composent prennent seulement deux valeurs caractérisant leur appartenance à son ensemble de définition spatial. En ce qui concerne l'écriture de la morphologie mathématique niveaux de gris, elle prend en compte deux types d'éléments structurants, les éléments structurants plats et non-plats. Nous allons, dans un premier temps, expliquer leur

différence de construction. Puis, dans un second temps, nous allons présenter la construction couleur adaptée à notre opérateur de morphologie mathématique couleur.

2.3.2.1 Etat de l'art

La morphologie mathématique niveaux de gris, bien qu'elle se soit développée par deux voies différentes, aboutit à une unique construction des opérateurs. Les opérateurs sont fondés sur la recherche d'un minimum/maximum dans un ensemble de valeurs définies par le domaine de définition spatial D_g de l'élément structurant 2.35. Mais, l'écriture des opérateurs morphologiques induit également l'application d'une addition/soustraction.

$$\varepsilon_n(f, g)(x) = \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x + y) - g(y)) \quad (2.35)$$

$$\delta_n(f, g)(x) = \bigvee_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x + y) + g(y)) \quad (2.36)$$

Cette construction engendre la définition de deux types d'éléments structurants : les éléments structurants plats (ESP) et les éléments structurants non-plats (ESNP). La différence entre ces deux types d'éléments structurants se trouve dans l'attribution des valeurs le composant. En binaire, un élément structurant est composé uniquement de deux valeurs définissant l'appartenance ou non au domaine de définition spatial. En niveaux de gris, le premier type d'élément structurant est l'extension directe de cette construction. Il contient deux valeurs : '0' pour les pixels appartenant au domaine de définition spatial D_g et ' $-\infty$ ' pour ceux n'appartenant pas à D_g [136] :

$$g(y) = \begin{cases} y \in D_g & \Rightarrow g(y) = 0 \\ y \notin D_g & \Rightarrow g(y) = -\infty \end{cases} \quad (2.37)$$

Les opérateurs morphologiques utilisant les éléments structurants plats sont réduits à la recherche d'un extremum. Les valeurs contenues dans l'élément structurant n'entraînent pas de modification à l'ensemble des valeurs.

La différence entre l'élément structurant plat et le non plat, appelé aussi élément structurant volumique, est qu'il peut prendre des valeurs réelles finies différentes de '0'. La définition devient donc :

$$g(y) = \begin{cases} y \in D_g & \Rightarrow g(y) \neq \pm\infty \\ y \notin D_g & \Rightarrow g(y) = -\infty \end{cases} \quad (2.38)$$

La figure 2.23 montre un exemple d'érosion et de dilatation sur une fonction 1D avec un élément structurant plat. Lors de l'érosion, la fonction diminue et toute la fonction est égale à son minimum après un nombre d'itérations suffisant. Lors de la dilatation, la fonction augmente et toute la fonction est égale à son maximum après un nombre d'itérations suffisant.

La figure 2.24 est un exemple d'érosion et de dilatation utilisant un élément structurant plat carré de taille 5×5 pixels sur une image niveaux de gris. Toutes les parties sombres

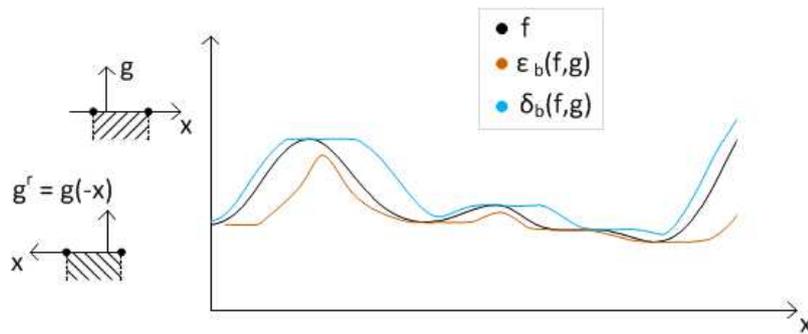
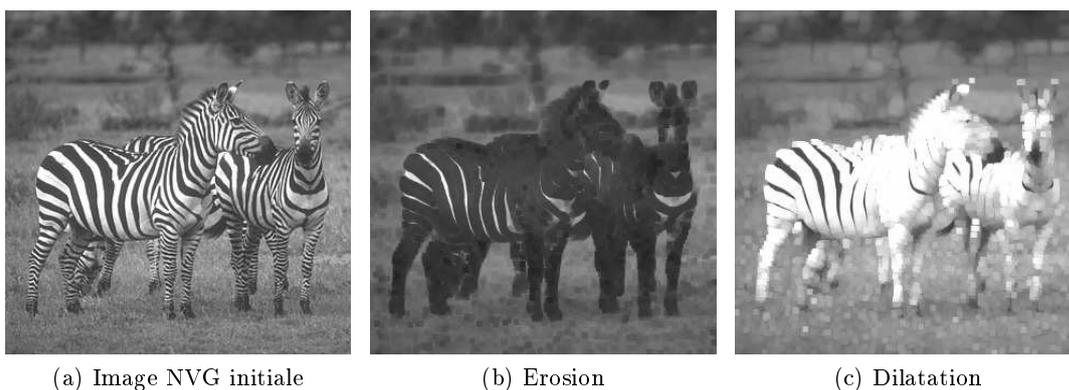


FIGURE 2.23 – Érosion et dilatation d'une fonction 1D avec un élément structurant plat.

de l'image s'étendent lors de l'érosion, tandis que les parties claires de l'image s'étendent lors de la dilatation. Au bout d'un nombre d'itération suffisant, l'image aura un seul niveau de gris qui sera le niveau de gris minimum (réciproquement le maximum) de l'image pour l'érosion (réciproquement la dilatation).

FIGURE 2.24 – Érosion et dilatation d'une image niveaux de gris par un élément structurant plat carré de taille 5×5 pixels.

La figure 2.25 montre un exemple d'érosion et de dilatation sur une fonction 1D avec un élément structurant non-plat. Lors de l'érosion, la fonction diminue et contrairement à l'érosion avec élément structurant plat, la fonction continue à diminuer tout au long des itérations si les valeurs de l'élément structurant sont positives. Lors de la dilatation, la fonction augmente et contrairement à la dilatation avec élément structurant plat, la fonction continue à augmenter tout au long des itérations si les valeurs de l'élément structurant sont positives.

La figure 2.26 est un exemple d'érosion et de dilatation utilisant un élément structurant non-plat carré de taille 5×5 pixels (équation 2.39) sur une image niveaux de gris. Toutes les parties sombres de l'image s'étendent lors de l'érosion, tandis que les parties claires de l'image s'étendent lors de la dilatation. Cependant, contrairement à la dilatation et à l'érosion avec élément structurant plat, l'utilisation d'éléments structurants non-plats

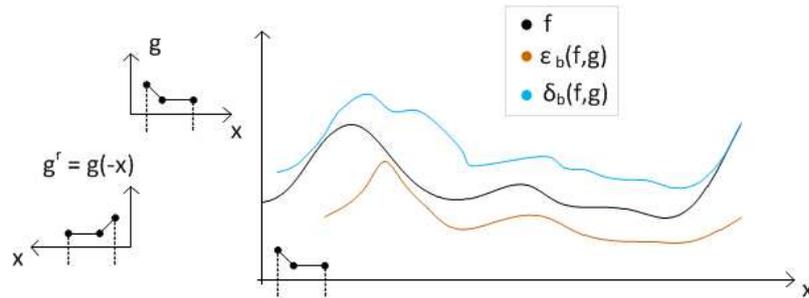


FIGURE 2.25 – Érosion et dilatation d'une fonction 1D avec un élément structurant non-plat.

permet de donner un poids particulier aux pixels. L'impact des poids peut être observé en comparant les figures 2.24b et 2.26b. Avec l'élément structurant plat, l'image devient de plus en plus uniforme, tandis qu'avec l'élément structurant non-plat, les détails sont mieux conservés. La seconde différence se trouve dans la convergence des couleurs de l'image. Même au bout d'un nombre d'itération tendant vers l'infini, l'image ne converge pas vers une image contenant un seul niveau de gris, lorsque les valeurs de l'élément structurant sont positives, mais à chaque itération les niveaux de gris convergent vers la valeur $-\infty$ (réciproquement $+\infty$) pour l'érosion (réciproquement pour la dilatation).

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$



(a) Image NVG initiale

(b) Erosion

(c) Dilatation

FIGURE 2.26 – Erosion et dilatation d'une image niveaux de gris par un élément structurant non-plat carré de taille 5×5 pixels (équation 2.39).

Maragos [81, 82, 80] a consacré une partie de son travail à l'étude des éléments structurants non-plats lors de processus de filtrage. Il fait notamment ressortir le lien entre les opérateurs d'érosion/dilatation et la fonction de corrélation. Cependant, les éléments struc-

turants non-plats ont rapidement été délaissés face aux travaux de Soille [123] et Shih [121] qui ont montré l'équivalence des résultats obtenus sur des images binarisées. Néanmoins dans le domaine de la couleur, la binarisation n'est pas envisageable dans notre contexte. D'une part la binarisation entrainerait un coût combinatoire trop important et d'autre part, elle ne permet pas de prendre en compte les particularités de la couleur.

2.3.2.2 Construction couleur

L'élément structurant non-plat peut être assimilé à un filtre morphologique qui sera appliqué à l'image. Cependant son usage implique la définition d'opérateurs d'addition/soustraction et l'extension de cette opération pour les opérateurs couleur n'est ni naturelle, ni standardisé par la CIE, ni validé par des expérimentations physiques ou perceptuelles.

L'extension des ESNP au contexte couleur ouvre de nombreuses perspectives, avec le choix de l'amplitude et de l'orientation des vecteurs de l'ESNP. Cependant, depuis Soille et Shih peu de travaux ont eu lieu sur l'usage des ESNP. À ce niveau de connaissances, sur les possibilités offertes par les ESNP, nous choisissons de réduire le potentiel offert à une évolution basée uniquement sur l'amplitude des ESNP, l'orientation étant imposée par les coordonnées de convergence.

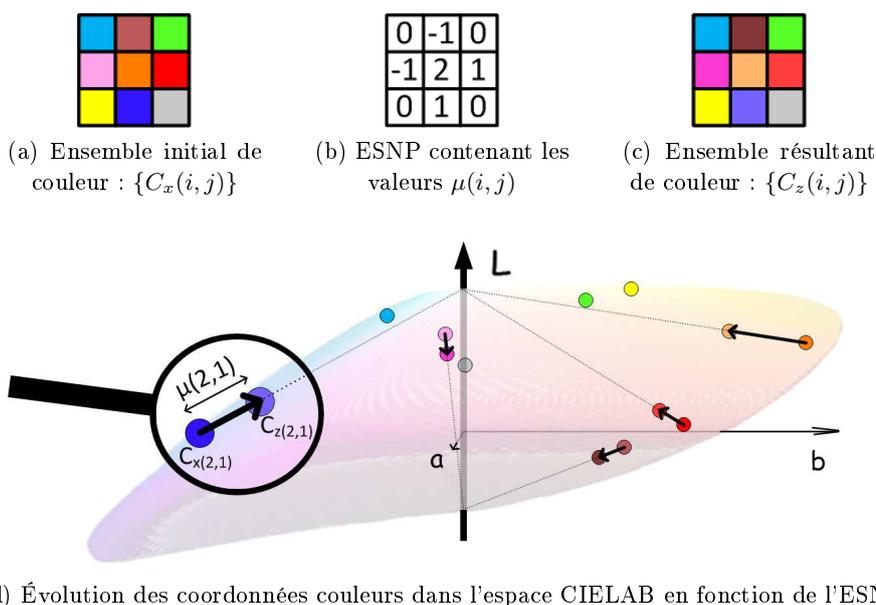


FIGURE 2.27 – Exemple des déplacements des coordonnées couleur en fonction de l'ESNP. La coordonnée de convergence est le blanc ($O^{+\infty}$: direction des vecteurs couleur pour l'addition) et la coordonnée de divergence est le noir ($O^{-\infty}$: direction des vecteurs couleur pour la soustraction)

Ainsi lors d'une addition, les coordonnées couleur $C_x(i, j)$ seront déplacées vers la coordonnée de convergence de la dilatation $O^{+\infty}$ (équation 2.40), tandis que pour la soustraction, elles seront dirigées vers celle de l'érosion $O^{-\infty}$ (équation 2.41). La norme du déplacement est paramétrée par l'ensemble des valeurs contenues dans l'élément structurant $\mu(i, j)$. La figure 2.27 illustre l'application d'un élément structurant non-plat sur un ensemble de couleurs. D'une manière générale, les valeurs contenues dans l'élément structurant appartiennent à l'ensemble des réels, néanmoins pour faciliter la compréhension de l'exemple de la figure 2.27, les valeurs appartiennent à l'ensemble des entiers relatifs.

$$\text{addition : } \overrightarrow{OC_z(i, j)} = \overrightarrow{OC_x(i, j)} + \mu(i, j) \frac{\overrightarrow{C_x(i, j)O^{+\infty}}}{\left\| \overrightarrow{C_x(i, j)O^{+\infty}} \right\|} \quad (2.40)$$

$$\text{soustraction : } \overrightarrow{OC_z(i, j)} = \overrightarrow{OC_x(i, j)} + \mu(i, j) \frac{\overrightarrow{C_x(i, j)O^{-\infty}}}{\left\| \overrightarrow{C_x(i, j)O^{-\infty}} \right\|} \quad (2.41)$$

avec $\mu(i, j)$ la norme du vecteur déplacement exprimé en ΔE et $\overrightarrow{C_x(i, j)O^{+\infty}}$ le vecteur directeur du déplacement.

2.4 Bilan

Au cours de notre travail, nous avons choisi d'être au plus près des particularités de l'information couleur. Ce choix a permis de confronter les différentes techniques d'ordonnement de la littérature en fonction de leur respect de cette information.

Dans ce chapitre, nous avons introduit la notion de linéarité de comportement de l'ordonnement face à l'information couleur. Cette notion n'est pas décrite comme nécessaire par Barnett, ni par aucun autre auteur. Cependant, dans l'objectif de construire des opérateurs et attributs morphologiques de plus haut niveau, elle semble indispensable pour améliorer la précision ou le comportement de ceux-ci.

Suivant ce principe, nous avons proposé une construction d'ordonnement basée uniquement sur des fonctions de distance et des intersections d'ensembles. Cette construction résout les problèmes posés par les approches hybrides basées distance. Cependant, pour assurer une preuve théorique, elle reprend une partie de cette construction dans sa version complète (ordre lexicographique sur les plans α et β). Néanmoins, les trois premiers niveaux de notre méthode rendent statistiquement ce recours à un ordre lexicographique inutile. Ce faisant, la construction n'induit pas les non-linéarités typiques des autres ordres.

Ce travail pouvant s'inscrire dans la production d'un ordre supplémentaire, l'étape suivante est naturellement la comparaison de notre méthode avec celles de la littérature. Les figures 2.28 et 2.29 sont des exemples d'érosion et de dilatation appliquées en utilisant différentes méthodes de la littérature et notre méthode. Comme nous pouvons le voir, il existe visuellement des différences entre les résultats des différentes méthodes. Cependant, le choix d'une méthode à partir d'un simple critère visuel n'est pas objectif.

L'identification de critères permettant de comparer les différentes structures d'ordonnement, ainsi que l'intérêt des éléments structurants dans les traitements morphologiques nous semblent donc indispensables. Ces questions font l'objet du chapitre suivant.

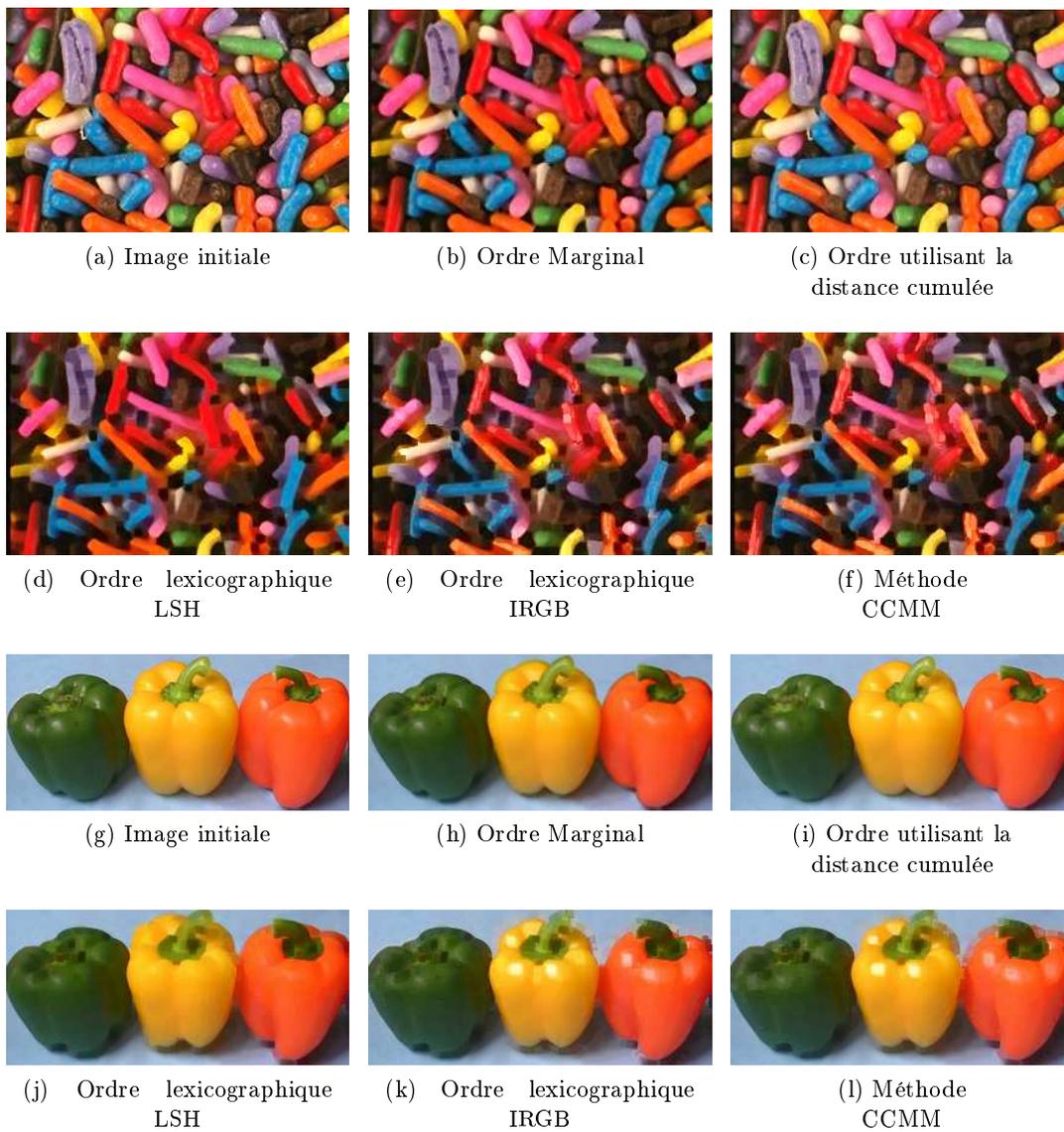


FIGURE 2.28 – Résultats d'érosion obtenus avec différentes méthodes et un élément structurant carré de taille 5×5 pixels.



FIGURE 2.29 – Résultats de dilatation obtenus avec différentes méthodes et un élément structurant carré de taille 5×5 pixels.

Comparaisons et critères de choix

Sommaire

3.1 Critères de choix basés sur les propriétés théoriques	48
3.1.1 Complémentaire couleur	48
3.1.2 Dualité	51
3.1.2.1 Dualité pour les images binaire et niveaux de gris	51
3.1.2.2 Dualité pour les images couleur	54
3.1.2.3 Validation numérique	63
3.1.3 Intérêt des critères théoriques	66
3.2 Critères d'incertitude	67
3.2.1 Incertitude d'ordonnancement	68
3.2.2 Exactitude sur critère morphologique de texture	72
3.2.3 Intérêt des critères d'incertitude	78
3.3 Critère d'efficacité numérique	80
3.3.1 Etude de la vitesse de convergence	84
3.3.2 Etude du chemin de convergence	86
3.3.3 Intérêt des critères d'efficacité numérique	90
3.4 Bilan sur les critères	91

Un nombre important d'écritures morphologiques couleur ont été proposées et régulièrement de nouvelles apparaissent et fournissent des résultats de traitement, sans certitude de la robustesse des traitements ou de la précision des attributs calculés. De façon parallèle, dans le cadre de traitements applicatifs, le choix de l'approche la plus adaptée est important.

Dans ce chapitre, nous proposons différents critères de sélection, puis nous évaluons leur impact sur quelques techniques d'ordonnancement. Nous avons choisi trois catégories de critères afin d'évaluer les méthodes de morphologie mathématique. La première famille est celle des critères basés sur le respect des propriétés des opérateurs de base, le complémentaire et la propriété de dualité, qui assurent la stabilité des traitements. Dans la seconde famille, nous trouvons les critères basés sur l'incertitude et l'exactitude des opérations d'ordonnancement et morphologiques. Plus précisément, nous étudions la capacité d'ordonnancement des dégradés et la capacité des approches morphologiques à caractériser les textures complexes dans des schémas itératifs. La dernière famille contient les critères d'efficacité de calcul qui évaluent les coûts combinatoires et la convergence des opérateurs.

3.1 Critères de choix basés sur les propriétés théoriques

La morphologie mathématique est fondée sur la construction de deux opérateurs duaux que sont la dilatation et l'érosion. Sans cette propriété de dualité, les opérateurs plus complexes tels que l'ouverture et la fermeture morphologiques ne peuvent avoir une construction valide. Il nous paraît important de vérifier cette propriété pour les opérateurs couleur. Nous allons donc étudier la propriété de dualité pour différentes méthodes de morphologie mathématique couleur. La notion de dualité étant associée à la définition du complémentaire, nous allons commencer par définir le complémentaire couleur pour les différentes méthodes.

3.1.1 Complémentaire couleur

La propriété de dualité est liée au complémentaire qui doit alors être défini pour la couleur. En niveaux de gris, deux définitions ont été proposées pour la fonction de complémentaire. La première détermine le complémentaire comme la différence entre le maximum et la valeur de niveaux de gris (équation 3.1). Cette écriture est la plus couramment utilisée lorsque la donnée à traiter est une image. Elle permet de conserver le même intervalle de valeurs, afin de pouvoir afficher le résultat. La seconde écriture (équation 3.2) est utilisée dans le cadre d'opérations mathématiques (addition, soustraction, ...) en dehors de toute notion d'affichage d'images. Ces deux expressions sont extraites de différents ouvrages ([115], p.430 ; [123], p.27 ; [121], p.32) et sont écrites avec les notations utilisées dans cette thèse.

$$f^{c_1} = \{m - f(x) | x \in \mathcal{D}_f\}, \quad m = \vee(f) \quad (3.1)$$

$$f^{c_2} = \{-f(x) | x \in \mathcal{D}_f\} \quad (3.2)$$

Dans la littérature, le complémentaire de données multivariées se définit habituellement par une construction marginale¹ à partir de l'écriture niveaux de gris (3.1) :

$$\begin{aligned} (C_i)^c &= (C_{i,1}^{c_1}, C_{i,2}^{c_1}, \dots, C_{i,p}^{c_1}) \\ &= (m_1 - C_{i,1}, m_2 - C_{i,2}, \dots, m_p - C_{i,p}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où m_1, m_2, \dots, m_p sont les valeurs maximales de chaque canal (habituellement 255 pour des valeurs 8 bits en RGB). Cette écriture permet de définir un complémentaire couleur dans l'ensemble des valeurs tolérées par l'espace de représentation. La figure 3.3 présente un exemple de complémentaire couleur dans l'espace RGB. Cependant, cette définition du complémentaire couleur est purement numérique. Elle n'a aucun lien physique ou perceptuel avec la couleur.

Il existe pourtant de nombreux travaux conçus par des scientifiques mais également par des artistes pour définir le complémentaire couleur [113]. La définition du complémentaire couleur qui en résulte est fondée sur le principe de mélange de couleurs. Le terme de « mélange » n'est pas valide s'il n'est pas associé à une représentation particulière des couleurs.

1. Une construction marginale est par définition un processus appliqué indépendamment sur chaque canal couleur contrairement au processus vectoriel qui prend en compte l'information vectoriel dans son ensemble.

En effet, les couleurs peuvent se combiner de différentes manières. L'addition de lumières colorées donne lieu au « mélange additif ». Le mélange de pigments (peinture, encre, ...) donne lieu au « mélange soustractif ». Il existe également un dernier type de mélange fondé sur l'illusion d'optique qu'induit le système visuel humain et appelé « mélange optique ».

Ces différents types de mélange donnent lieu à une définition légèrement différente de la couleur complémentaire. Deux couleurs sont alors dites « complémentaires » lorsque leur mélange engendre le blanc pour le mélange additif, le noir pour le mélange soustractif et le gris pour le mélange optique. Cette définition se généralise en réduisant la couleur obtenue par le mélange à une couleur achromatique, c'est-à-dire un niveau de gris.

Certains espaces couleur permettent d'exprimer ce complémentaire couleur. Notamment, pour les espaces de type Teinte-Luminance-Saturation, la couleur complémentaire est définie comme la couleur opposée sur le cercle chromatique (figure 3.1). Cette représentation est utilisée conjointement par les artistes et les scientifiques. Nous pouvons également trouver une caractérisation du complémentaire dans l'espace xyz. Cette représentation exprime la couleur complémentaire comme la couleur résultant de l'intersection de la courbe des couleurs pures (le « spectrum locus ») et de la droite passant par la couleur en question et le blanc de référence (voir [22] p.70).

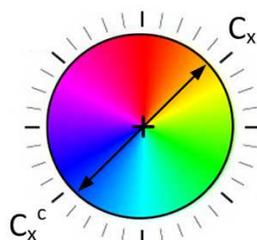


FIGURE 3.1 – Représentation de la couleur complémentaire C_x^c construite par opposition à la couleur C_x dans le cercle chromatique.

L'espace CIELAB (CIELUV) est le seul à posséder une fonction de distance couleur valide d'un point de vue perceptuel. De plus, il est fondé à partir de l'espace XYZ par une transformation non linéaire et est construit sur la représentation antagoniste, séparant ainsi l'information luminance et chrominance. Sa représentation cylindrique permet ainsi l'utilisation du cercle de chromaticité. Il se prête donc naturellement à l'expression d'un complémentaire couleur valide perceptuellement. À partir de ces différentes remarques, nous proposons de définir un complémentaire couleur dans l'espace CIELAB en utilisant l'écriture (3.2) du complémentaire niveau de gris. Notre définition du complémentaire couleur se définit ainsi :

Définition 3.1.1. En prenant le centre \mathcal{O} du vecteur $\overrightarrow{O^{-\infty}O^{+\infty}}$, où $O^{-\infty}$ et $O^{+\infty}$ sont respectivement les coordonnées de convergence de l'érosion et de la dilatation (voir 2.3.1.2), le complémentaire de la couleur C_x est défini comme la couleur symétrique par rapport à \mathcal{O} , tel que :

$$(C_x)^c = (\overrightarrow{OC_x})^c = -\overrightarrow{OC_x} \quad (3.4)$$

La figure 3.2 illustre cette définition. Pour faciliter l'écriture du complémentaire couleur, nous effectuons un changement de repère. Ce changement de repère consiste à orienter l'axe L^* de l'espace CIELAB selon l'axe $\overline{O^{-\infty}O^{+\infty}}$ en plaçant l'origine du nouveau repère au milieu du segment $[O^{-\infty}O^{+\infty}]$. Après ce changement de repère, l'axe L^* devient l'axe Λ , les axes a^* et b^* deviennent respectivement les axes α et β . Le détail de ce changement de repère est décrit en Annexe C.1.

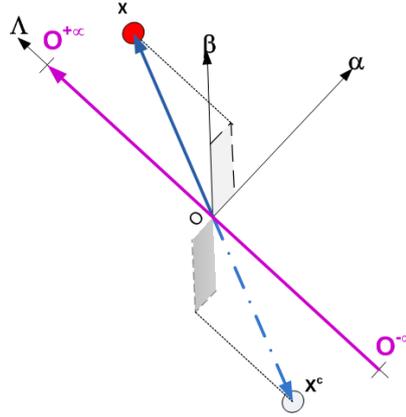


FIGURE 3.2 – Construction du complémentaire couleur C_x^c de C_x dans l'espace CIELAB en fonction des coordonnées de convergence $O^{-\infty}$ et $O^{+\infty}$.

Notre définition du complémentaire couleur possède un sens perceptuel en s'appuyant sur des notions de distances perceptuelles. De plus, le mélange de deux couleurs complémentaires se traduit par l'addition des vecteurs couleur dans l'espace et cette addition vectorielle permet d'obtenir l'origine du repère. Lorsque les coordonnées de convergence sont le noir et le blanc, l'origine du repère se situe sur l'axe achromatique de l'espace. Notre définition du complémentaire dans l'espace couleur répond donc bien à la définition générale de la couleur complémentaire.

La figure 3.3 illustre les différents complémentaires couleur dans les espaces RGB et HLS en utilisant le miroir au blanc (équation 3.3) et dans l'espace CIELAB avec notre construction (équation 3.4). Afin de rendre comparable les résultats, le complémentaire dans l'espace CIELAB est calculé en choisissant le noir et le blanc comme coordonnées de convergence respectives de l'érosion et de la dilatation. Cependant, une comparaison subjective ne permet pas de conclure sur la méthode perceptuellement exacte, d'autant que les différences portent essentiellement sur la luminance et la saturation des images.

Nos opérateurs morphologiques peuvent cependant être construits en utilisant des coordonnées de convergence différentes du noir et du blanc. La convergence vers des couleurs différentes du noir et blanc peut déplacer l'origine vers des couleurs chromatiques. Cependant, les différentes définitions du complémentaire couleur résultent d'un mélange physique des couleurs. Or, notre complémentaire couleur est fondé sur les particularités perceptuelles de la couleur. Notre définition du complémentaire couleur apporte un degré de liberté sup-

plémentaire, répondant au besoin de nos opérateurs morphologiques, qui n'existe pas dans les autres approches limitées par un complémentaire calculé en miroir au blanc (coordonnée maximale). De plus, l'écriture de notre complémentaire couleur étant définie à partir des distances couleurs dans l'espace CIELAB, nous conservons la validité perceptuelle de notre complémentaire couleur quelles que soient les coordonnées de convergence.

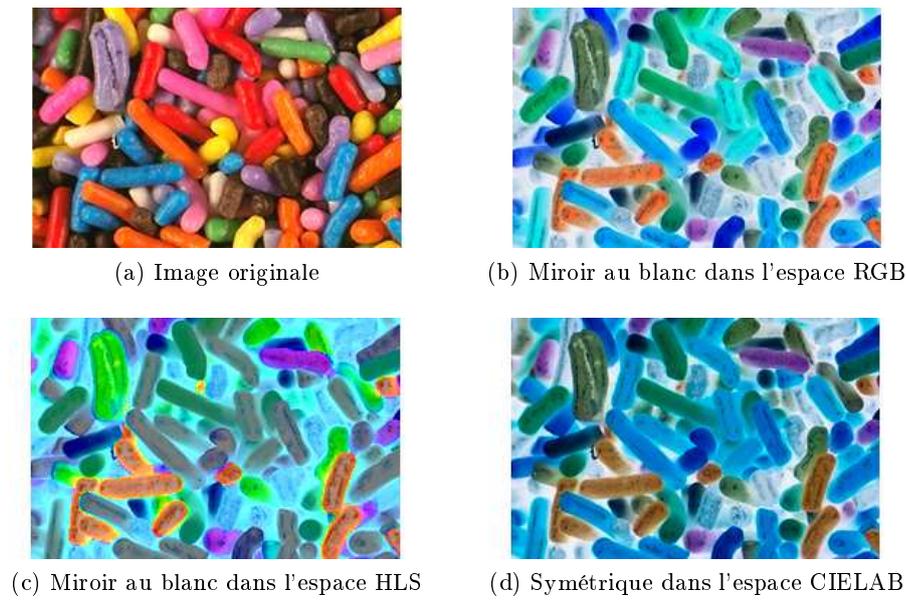


FIGURE 3.3 – Complémentaire couleur d'une image dans différents espaces couleur.

Les différentes définitions de complémentaires couleur ainsi posées, nous allons maintenant nous intéresser à la propriété de dualité des opérateurs morphologiques.

3.1.2 Dualité

Dans la littérature, les auteurs prouvent rarement que leurs opérateurs répondent à la propriété de dualité. Cette propriété essentielle est pourtant utilisée conjointement avec la définition de l'opérateur d'érosion pour définir l'opérateur de dilatation [115, 125]. Pour comprendre la propriété de dualité, nous allons tout d'abord revenir sur la notion de dualité en binaire puis en niveaux de gris et terminer par la dualité pour les opérateurs morphologiques couleur.

3.1.2.1 Dualité pour les images binaire et niveaux de gris

La propriété de dualité exprime la relation entre les opérateurs de dilatation et d'érosion. Elle découle de la loi de De Morgan et permet de trouver le résultat d'un opérateur par deux chemins possibles. Le premier chemin est direct, le second utilise le complémentaire et son opérateur dual. Ainsi, l'érodé d'une image est égal au complémentaire du dilaté du complémentaire. La figure 3.4 montre les deux chemins possibles pour obtenir l'érodé d'une image. Mathématiquement, la dualité des opérateurs s'exprime par le biais des équations

suivantes :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_b(F, G)^c &= \delta_b(F^c, G) \\
 \delta_b(F, G)^c &= \varepsilon_b(F^c, G) \\
 \varepsilon_b(F^c, G)^c &= \delta_b(F, G) \\
 \delta_b(F^c, G)^c &= \varepsilon_b(F, G)
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

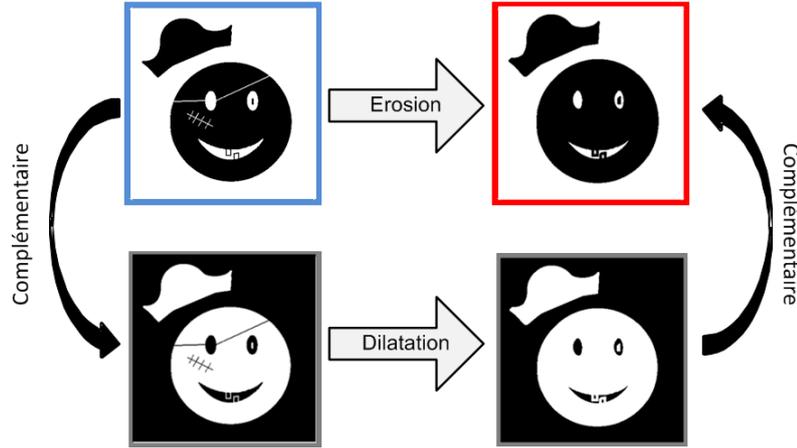


FIGURE 3.4 – Dualité entre les opérateurs d'érosion et de dilatation en binaire.

La démonstration de la dualité (équation 3.6) des opérateurs morphologiques binaires est peu souvent présentée. Afin de faciliter les démonstrations écrites dans la suite de ce chapitre dans un cadre couleur, nous la reformulons ici avec une notation homogène aux expressions données par Serra [119] ou Soille [123]. Elle s'appuie sur les définitions de l'érosion (équation 2.6) et de la dilatation (équation 2.7) et aussi d'une propriété de la théorie des ensembles ($F \cap G = F^c \cup G^c$). Cette démonstration s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_b(F^c, G)^c &= \left(\bigcap_{y \in D_g} (F)_{-y}^c \right)^c \\
 &= \bigcup_{y \in D_g} (F)_{-y} \\
 &= \delta_b(F, G)
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

où F_y est la translation de l'ensemble F par les éléments y . \square

La dualité des opérateurs binaires étant démontrée, nous nous intéressons maintenant à la preuve de la dualité en niveaux de gris pour les opérateurs niveaux de gris (figure 3.5). Ainsi, pour deux signaux f et g , les relations suivantes doivent être validées :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_g(f^c, g)^c &= \delta_g(f, g) \\
 \delta_g(f^c, g)^c &= \varepsilon_g(f, g) \\
 \varepsilon_g(f, g)^c &= \delta_g(f^c, g) \\
 \delta_g(f, g)^c &= \varepsilon_g(f^c, g)
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

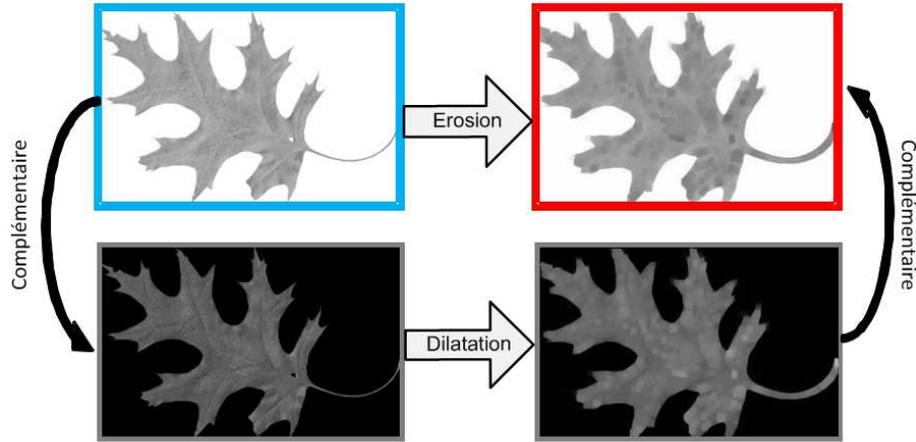


FIGURE 3.5 – Relation de dualité entre une image et son complémentaire

La démonstration de la dualité a été proposée dans différents écrits [58, 123, 121]. Ici, nous avons choisi celle proposée par Heijmans [58] qui s'appuie sur la notion de treillis et sur la propriété de Birkhoff [21] :

Propriété 3.1.1. Si (E, \vee, \wedge, \leq) est un treillis, alors son treillis dual est (E, \wedge, \vee, \geq) . Plus précisément d'après le théorème de dualité : Si un théorème T est vrai pour tous les treillis alors le théorème dual de T, obtenu en remplaçant toutes les occurrences de \vee par \wedge (et réciproquement) et toutes les occurrences de \leq par \geq (et réciproquement) est un théorème vrai pour tous les treillis.

$$\wedge (P)^c = (\vee P)^c \quad \text{et} \quad \vee (P)^c = (\wedge P)^c \quad (3.8)$$

La démonstration de la dualité des opérateurs niveaux de gris, en utilisant la propriété de Birkhoff, s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{b}}(f, g)^c &= \left(\bigvee_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x+y) + g(y)) \right)^c \\ &= \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x+y) + g(y))^c \\ &= \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} -(f(x+y) + g(y)) \\ &= \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} (-f(x+y) - g(y)) \\ &= \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x+y)^c - g(y)) \\ &= \varepsilon_{\mathbf{b}}(f^c, g) \end{aligned} \quad (3.9) \quad \square$$

3.1.2.2 Dualité pour les images couleur

La validation de la dualité est intimement liée à la validité de l'opérateur de complémentation (propriété de Birkhoff). Prouver théoriquement la dualité à partir de méthodes disposant d'un complémentaire est donc possible et nécessaire. Nous commencerons cette démonstration de la dualité pour les méthodes utilisant l'écriture du complémentaire basées sur une valeur miroir au blanc (équation 3.3). Puis nous présenterons celle liée à notre nouvelle écriture de morphologie mathématique couleur utilisant le symétrique par rapport au centre des coordonnées couleur de convergence de l'équation (3.4).

Preuve de la dualité dans le cas d'un complémentaire par miroir au blanc

Nous commençons par prouver la dualité pour la méthode utilisant la distance cumulée. Puis nous analysons dans un même temps les méthodes marginales et lexicographiques.

Distance cumulée :

Cette méthode n'a qu'une relation de distance à analyser pour savoir si la dualité est respectée. La recherche du minimum/maximum, pour l'ordonnancement utilisant la distance cumulée, se fait par la recherche de la distance cumulée minimale/maximale calculée entre un pixel et son voisinage délimité par l'élément structurant (équation 3.10).

$$C_y = \wedge \{C_x | x \in D_f \cap D_g\} \quad (3.10)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{x \in D_f \cap D_g} \overrightarrow{\|C_y C_x\|} = \wedge \left\{ \sum \overrightarrow{\|C_x C_z\|} \mid x \in D_f \cap D_g, z \in D_f \cap D_g \right\} \quad (3.11)$$

Cette technique utilise généralement une distance de Minkowski d'ordre 2 :

$$\forall C_y, C_x \in \mathbb{R}^p, \overrightarrow{\|C_y C_x\|} = \sqrt{[(C_y^1 - C_x^1)^2 + \dots + (C_y^p - C_x^p)^2]}$$

En utilisant les couleurs complémentaires de l'équation 3.3, on obtient la distance suivante :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\|C_y^c C_x^c\|} &= \sqrt{[((m_1 - C_y^1) - (m_1 - C_x^1))^2 + \dots + ((m_p - C_y^p) - (m_p - C_x^p))^2]} \\ &= \sqrt{[(C_x^1 - C_y^1)^2 + \dots + (C_x^p - C_y^p)^2]} \\ &= \overrightarrow{\|C_x C_y\|} \\ &= \overrightarrow{\|C_y C_x\|} \end{aligned} \quad (3.12)$$

La relation suivante démontre que la méthode utilisant la distance cumulée n'est pas duale :

$$\begin{aligned} \wedge(C_y^c, C_x^c) &= \wedge_{x,y,z \in D_f \cap D_g} \left(\wedge \left\{ \sum \overrightarrow{\|C_y^c C_z^c\|} \right\}, \wedge \left\{ \sum \overrightarrow{\|C_x^c C_z^c\|} \right\} \right) \\ &= \wedge_{x,y,z \in D_f \cap D_g} \left(\wedge \left\{ \sum \overrightarrow{\|C_y C_z\|} \right\}, \wedge \left\{ \sum \overrightarrow{\|C_x C_z\|} \right\} \right) \quad \text{avec (3.12)} \\ &= \wedge(C_y, C_x) \neq \vee(C_y, C_x) \end{aligned}$$

Ordres marginaux et lexicographiques :

Pour analyser le comportement dual de ces derniers ordres, chaque plan pour l'ordre marginal ou chaque « condition » pour les ordres lexicographiques doit respecter la dualité. Dans un premier temps, il faut vérifier que chaque plan ou chaque condition donne lieu à un ordre total. Si l'ordre pour un plan/condition noté P est total, alors l'équivalence suivante peut s'écrire :

$$P_{C_y} = \wedge \{P_{C_x} | x \in D_f \cap D_g\} \quad (3.13)$$

$$\Leftrightarrow -P_{C_y} = \vee \{-P_{C_x}^\alpha | x \in D_f \cap D_g\} \quad (3.14)$$

Pour l'ordre marginal, chaque plan constitue un ordre total. La dualité est donc respectée sur chacun des plans et l'ordre respecte dans sa globalité la propriété de dualité.

Pour les ordres lexicographiques, deux espaces sont utilisés ; le premier est l'ordre IRGB qui est construit à partir de l'espace RGB et le second est l'ordre LSH qui est construit à partir de l'espace HLS. L'ordre lexicographique IRGB respecte lui aussi, pour chacune de ses conditions, la dualité.

Le cas des espaces de type polaire, comme HLS est particulier avec une spécification du complémentaire adapté à l'usage d'un angle de teinte. Le complémentaire de la teinte correspond à la teinte opposée sur le cercle des teintes, c'est-à-dire une teinte avec une différence de 180° avec la teinte initiale. Cette notion de complémentaire de teinte respecte la définition de couleur complémentaire définie sur le cercle de chromaticité que nous avons vu au début du chapitre (figure 3.1). Avec cette modification, la couleur avec la distance minimale correspond à la couleur complémentaire ayant la distance maximale. La dualité est alors théoriquement respectée.

Bilan :

En dehors d'approches simplistes telles que la distance cumulée, qui ne respecte ni la propriété d'ordre total ni la dualité, les approches existantes respectent la dualité au sens mathématique. Nous allons maintenant étudier la dualité pour nos opérateurs morphologiques utilisant le symétrique par rapport au centre des coordonnées couleur de convergence comme définition du complémentaire couleur.

Preuve de la dualité pour la méthode CCMM

Pour prouver la propriété de dualité pour nos opérateurs CCMM, nous allons montrer la relation de la figure 3.6. Cette relation implique que le résultat d'un opérateur morphologique doit être identique à celui obtenu par son chemin dual.

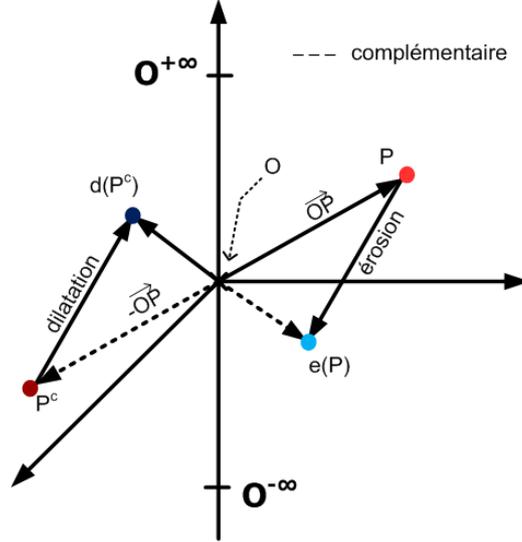


FIGURE 3.6 – Relation de dualité entre un pixel couleur et son complémentaire.

Dans le chapitre 2, nous avons montré la possibilité de construction d'éléments structurants non-plats. Les opérateurs de la méthode CCMM se décomposent alors en deux catégories. La première catégorie utilise les éléments structurants plats; l'application des opérateurs morphologiques se limite alors à la recherche du minimum/maximum (équations 3.15 et 3.16).

$$\delta_c(f, g)(x) = \bigvee_{x \in D_f, y \in D_g} \{f(x - y)\} \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_c(f, g)(x) = \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} \{f(x - y)\} \quad (3.16)$$

La seconde catégorie utilise les éléments structurants non-plats, ce qui consiste à appliquer une soustraction/addition couleur avant la recherche du minimum/maximum (équations 3.17 et 3.18).

$$\delta_c(f, g)(x) = \bigvee_{x \in D_f, y \in D_g} \{f(x - y) \underset{c}{-} g(y)\} \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_c(f, g)(x) = \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} \{f(x - y) \underset{c}{+} g(y)\} \quad (3.18)$$

Notre démonstration de la dualité se décompose alors en deux parties.

Preuve de la dualité pour la méthode CCMM avec ES plat :

Les opérateurs morphologiques utilisant des éléments structurants plats se limitent à la recherche d'un minimum/maximum dans un ensemble de couleurs. La démonstration dans ce contexte doit alors simplement montrer la relation de dualité entre le minimum de l'érosion et le maximum de la dilatation.

La démonstration doit prendre en compte les différentes conditions permettant de trouver ces extrema. Nous allons donc démontrer la dualité des opérateurs en montrant que le résultat de la dilatation, pour chacune de ces conditions (équations 3.19 à 3.23), est le même qu'en utilisant son chemin dual utilisant le complémentaire et le même étage de condition de l'opérateur d'érosion.

L'expression du minimum/maximum est effectuée par deux types de conditions, celles utilisant la distance et celles utilisant directement les composantes. En conséquence, nous décomposons la démonstration en deux parties.

$$\bigvee_{x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)} \{f(x)\} = \left\{ C_y \mid C_y^\beta = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_4}} \{C_x^\beta\} \right\} \quad (3.19)$$

$$\text{avec } \mathcal{S}_{\mathcal{D}_4} = \left\{ C_y \mid C_y^\alpha = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_3}} \{C_x^\alpha\} \right\}; \quad (3.20)$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}_3} = \left\{ C_y \mid \overrightarrow{\|C_y O^{-\infty}\|} = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_2}} \left\{ \overrightarrow{\|C_x O^{-\infty}\|} \right\} \right\}; \quad (3.21)$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}_2} = \left\{ C_y \mid \overrightarrow{\|C_y C_i\|} = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_1}} \left\{ \overrightarrow{\|C_x C_i\|} \right\} \right\}; \quad (3.22)$$

$$\text{et } \mathcal{S}_{\mathcal{D}_1} = \left\{ C_y \mid \overrightarrow{\|C_y O^{+\infty}\|} = \bigwedge_{\forall x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)} \left\{ \overrightarrow{\|C_x O^{+\infty}\|} \right\} \right\} \quad (3.23)$$

Pour réaliser notre démonstration, un changement de repère a été effectué. Il permet de prendre en compte la construction du complémentaire couleur définie dans le cadre de la méthode CCMM.

Ce changement de repère déplace l'axe principal L^* selon le vecteur passant par les deux coordonnées de convergence $\overrightarrow{O^{-\infty} O^{+\infty}}$ et une translation pour que la nouvelle origine soit placée au centre du segment formé par les deux coordonnées de convergence $[O^{-\infty} O^{+\infty}]$. Les axes L^* , a^* et b^* deviennent respectivement les axes Λ , α et β . La seule contrainte sur les axes est que Λ , α et β soient orthogonaux. La figure 2.19 du chapitre 2 illustre ce changement de repère.

1. Dualité pour les expressions basées distance (équations 3.23 à 3.21) :

La première partie de l'extraction du maximum pour la dilatation (3.23), détermine

la coordonnée la plus proche de $O^{+\infty}$ comme le maximum de l'ensemble si elle est unique. Cette condition revient à dire que les distances entre $O^{+\infty}$ et les couleurs de tous les pixels appartenant au support de l'élément structurant utilisé sont calculées ($\{x|x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)\}$). Si une seule couleur C_y est retenue, cela signifie qu'elle est la plus proche de $O^{+\infty}$:

$$\Delta E(O^{+\infty}, C_y) = \wedge \{\Delta E(O^{+\infty}, C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)\} \quad (3.24)$$

Or il est possible de montrer que :

$$\begin{aligned} \Delta E(O^{+\infty}, C_y) &= \wedge \{\Delta E(O^{+\infty}, C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)\} \\ \Leftrightarrow \Delta E(O^{-\infty}, -C_y) &= \wedge \{\Delta E(O^{-\infty}, -C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Après le changement de repère, le point $O^{+\infty}$ est l'opposé du point $O^{-\infty}$ sur le nouvel axe Λ . De plus la distance entre deux points est égale à la distance entre leur complémentaires. En effet :

$$\Delta E(C_u, C_t) = \sqrt{[(\Lambda_{C_u} - \Lambda_{C_t})^2 + (\alpha_{C_u} - \alpha_{C_t})^2 + (\beta_{C_u} - \beta_{C_t})^2]} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \Delta E(-C_u, -C_t) &= \sqrt{[(-\Lambda_{C_u} + \Lambda_{C_t})^2 + (-\alpha_{C_u} + \alpha_{C_t})^2 + (-\beta_{C_u} + \beta_{C_t})^2]} \\ &= \sqrt{[(\Lambda_{C_u} - \Lambda_{C_t})^2 + (\alpha_{C_u} - \alpha_{C_t})^2 + (\beta_{C_u} - \beta_{C_t})^2]} \\ &= \sqrt{[(\Lambda_{C_u} - \Lambda_{C_t})^2 + (\alpha_{C_u} - \alpha_{C_t})^2 + (\beta_{C_u} - \beta_{C_t})^2]} \\ &= \Delta E(C_u, C_t) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Les égalités suivantes peuvent ainsi être écrites :

$$\Delta E(O^{+\infty}, C_y) = \Delta E(-O^{+\infty}, -C_y) = \Delta E(O^{-\infty}, -C_y) \quad (3.28)$$

$$\Delta E(O^{+\infty}, C_y) = \wedge \{\Delta E(O^{+\infty}, C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)\} \quad (3.29)$$

$$(3.28) \text{ et } (3.29) \Rightarrow \Delta E(O^{-\infty}, -C_y) = \wedge \{\Delta E(O^{+\infty}, C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)\} \quad (3.30)$$

La condition imposée pour l'érosion étant de prendre la couleur la plus proche de $O^{-\infty}$, la couleur trouvée pour la dilatation d'un ensemble de couleurs est bien la couleur opposée à celle obtenue pour l'érosion de l'ensemble de couleurs opposées. La figure 3.7 illustre la dualité pour cette partie.

De la même façon que pour la partie (3.23) de l'extraction de la couleur maximale, la dualité pour les parties (3.22) et (3.21) est démontrable en suivant le même cheminement.

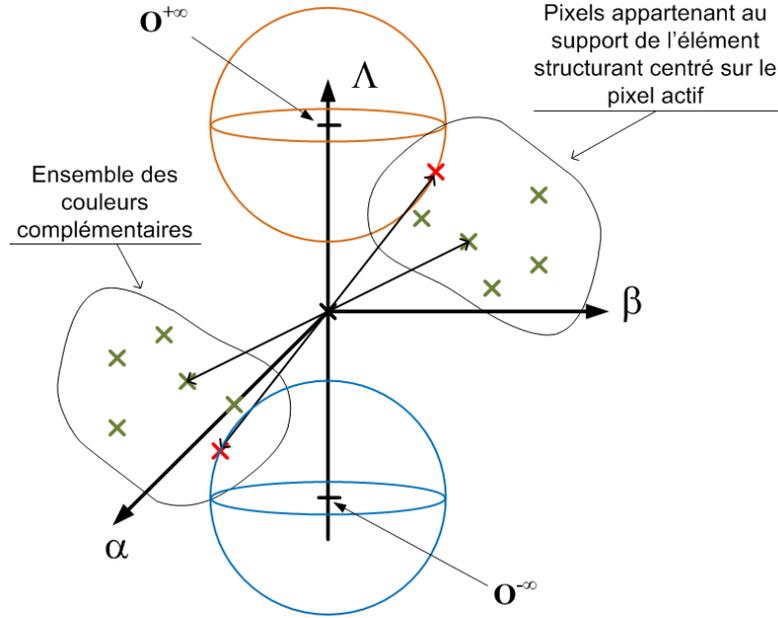


FIGURE 3.7 – Le maximum d'un ensemble de couleurs est le minimum de l'ensemble des couleurs complémentaires, en fonction de la distance aux coordonnées de convergence.

2. Dualité pour les expressions dépendant de la valeur des axes (équations 3.20 à 3.19) :

La quatrième partie de l'extraction du maximum pour la dilatation (3.20) consiste à prendre la couleur ayant la valeur de α maximum. Cette condition équivaut à dire que la couleur C_y retenue, si elle est unique, sera celle dont la valeur de α sera maximum.

$$C_y^\alpha = \wedge \{C_x^\alpha | C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}3}\} \quad (3.31)$$

La composante α étant organisée selon un ordre total, l'équivalence suivante peut s'écrire :

$$C_y^\alpha = \wedge \{C_x^\alpha | C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}3}\} \quad (3.32)$$

$$\Leftrightarrow -C_y^\alpha = \vee \{-C_x^\alpha | C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}3}\} \quad (3.33)$$

Or si u a pour coordonnées colorimétriques $C_u = (\Lambda_u; \alpha_u; \beta_u)$, alors les coordonnées colorimétriques opposées sont $-C_u = (-\Lambda_u; -\alpha_u; -\beta_u)$. Ainsi l'équivalence de l'équation 3.32 montre que si la couleur C_y est retenue pour la dilatation, comme l'érosion retient le pixel ayant la couleur dont la composante α est minimum, son opposé sera retenu pour l'érosion des opposés. La figure 3.8 illustre cette partie de la dualité.

Enfin pour la dernière partie (3.19) en fonction de la valeur de β , la dualité peut être prouvée de la même manière que pour la valeur α .

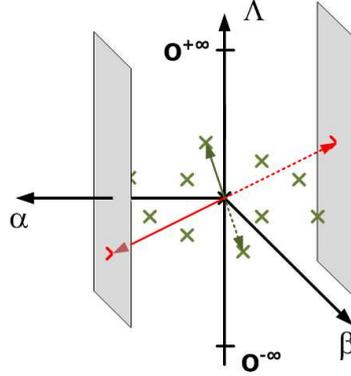


FIGURE 3.8 – Le maximum d’un ensemble de couleurs est le minimum de l’ensemble des couleurs complémentaires, en fonction de la valeur α

3. Démonstration totale :

Ainsi la dualité entre la dilatation et l’érosion de toutes les parties des expressions 2.33 et 2.34 a été prouvée. Cette preuve est détaillée en ANNEXE C.2. Les opérateurs de dilatation et d’érosion pour la méthode de CCMM sont donc duaux.

Preuve de la dualité pour la méthode CCMM avec ES non-plat :

Dans le chapitre 2 (voir 2.3.2) nous avons défini l’écriture de l’élément structurant non-plat. Cette définition entraîne la modification de l’ensemble de couleur et donc nécessite la vérification de la dualité lors de l’utilisation de ce type d’élément structurant. La seule modification entraînée par l’application de l’élément structurant non-plat est la modification de l’ensemble des couleurs lié à l’addition/soustraction couleur.

Comme le montre la démonstration de la dualité pour les opérateurs niveaux de gris (équation 3.34), la dualité est valide si le niveau de gris maximum parmi l’ensemble des niveaux de gris après addition des valeurs de l’élément structurant est le complémentaire du niveau de gris minimum parmi l’ensemble des niveaux de gris complémentaire après soustraction des valeurs de l’élément structurant. Pour valider la propriété de dualité, il est donc nécessaire que l’ensemble des couleurs après déplacement soit l’ensemble des couleurs complémentaires après déplacement opposé. Nous allons donc étudier les modifications subies par l’ensemble des couleurs.

La démonstration de la dualité pour les signaux niveaux de gris est la suivante :

$$\begin{aligned}
 \delta_{\mathbf{b}}(f, g)^c &= \left(\bigvee_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x+y) + g(y)) \right)^c \\
 &= \dots \\
 &= \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x+y)^c - g(y)) \\
 &= \varepsilon_{\mathbf{b}}(f^c, g)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Lors de l'addition, le déplacement des couleurs est porté par un vecteur orienté vers la coordonnée de convergence de la dilatation, et lors de la soustraction, le vecteur est orienté vers la coordonnée de convergence de l'érosion. De plus, la couleur complémentaire est la couleur symétrique par rapport à l'origine du nouveau repère. La figure 3.9 illustre les déplacements d'un ensemble de couleurs et de son ensemble de couleurs symétriques. Comme nous pouvons le voir l'ensemble de couleurs obtenues après déplacements (\mathbf{x}) de l'ensemble de couleurs initiales (\mathbf{x}) est bien l'ensemble complémentaire des couleurs obtenues après déplacements (\mathbf{x}) des couleurs complémentaires (\mathbf{x}).

Même si la figure 3.9 identifie les déplacements comme symétriques, nous allons le démontrer mathématiquement pour une couleur quelconque modifiée par une addition par un réel noté μ qui sera alors la norme du vecteur déplacement. La figure 3.10 montre les différentes couleurs et vecteurs utilisés pour la démonstration.

Démonstration. La couleur complémentaire de C_x se définit comme suit :

$$(C_x)^c = (\overrightarrow{OC_x})^c = -\overrightarrow{OC_x} \quad (3.35)$$

Les coordonnées de convergence vérifient la relation suivante :

$$(O^{+\infty})^c = O^{-\infty} \quad \Rightarrow \quad (\overrightarrow{OO^{+\infty}})^c = -\overrightarrow{OO^{+\infty}} = \overrightarrow{OO^{-\infty}} \quad (3.36)$$

Nous posons C_z et C_w respectivement les couleurs obtenues après déplacement des couleurs C_x et C_x^c . La couleur C_z est un déplacement de la couleur C_x suite à une addition. La couleur C_w est donc un déplacement de la couleur C_x^c suite à une soustraction. Les vecteurs de ces deux couleurs sont donc les suivants :

$$C_z = \overrightarrow{OC_x} + \mu \overrightarrow{C_x O^{+\infty}} \quad (3.37)$$

$$C_w = \overrightarrow{OC_x^c} + \mu \overrightarrow{C_x^c O^{-\infty}} \quad (3.38)$$

Nous avons donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} C_z^c &= \left(\overrightarrow{OC_x} + \mu \overrightarrow{C_x O^{+\infty}} \right)^c \\ &= - \left(\overrightarrow{OC_x} + \mu \overrightarrow{C_x O^{+\infty}} \right) \\ &= -\overrightarrow{OC_x} - \mu \overrightarrow{C_x O^{+\infty}} \\ &= \overrightarrow{OC_x^c} - \mu (\overrightarrow{C_x} \overrightarrow{O} + \overrightarrow{OO^{+\infty}}) \\ &= \overrightarrow{OC_x^c} + \mu (-\overrightarrow{C_x} \overrightarrow{O} - \overrightarrow{OO^{+\infty}}) \\ &= \overrightarrow{OC_x^c} + \mu (\overrightarrow{C_x^c} \overrightarrow{O} + \overrightarrow{OO^{-\infty}}) \\ &= \overrightarrow{OC_x^c} + \mu \overrightarrow{C_x^c O^{-\infty}} \\ &= C_w \end{aligned} \quad \square$$

Les couleurs après addition/soustraction sont bien des couleurs complémentaires. La propriété de dualité pour les opérateurs couleur est alors valide dans le cas d'utilisation d'éléments structurants non-plats.

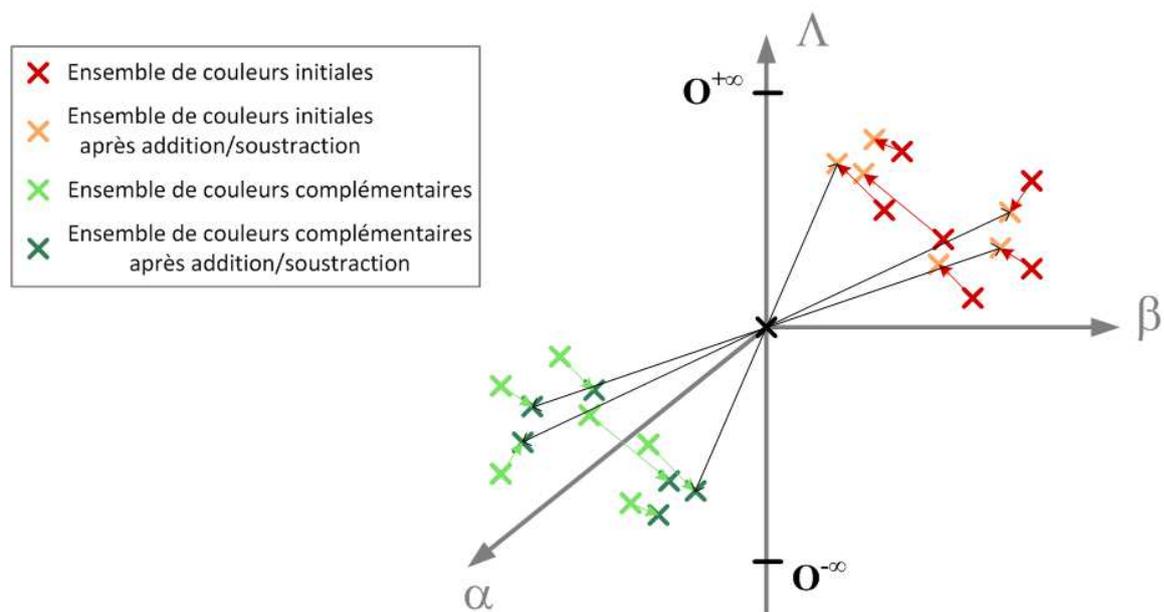


FIGURE 3.9 – Symétrisation des déplacements des couleurs par rapport aux déplacements des couleurs complémentaires.

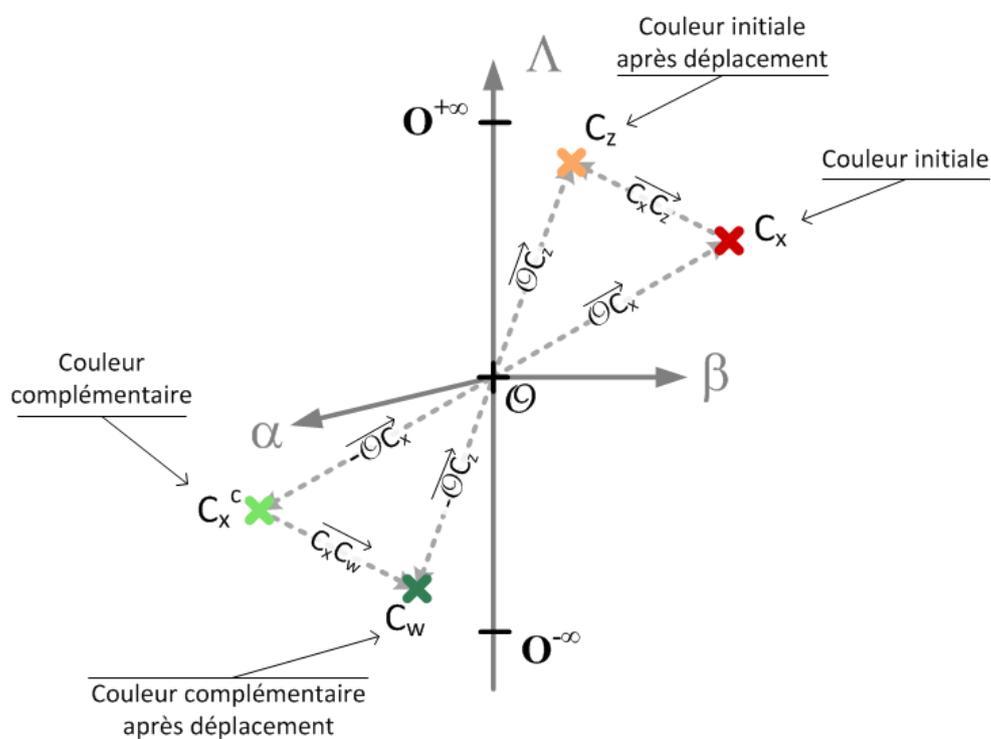


FIGURE 3.10 – Représentation des vecteurs pour la démonstration des déplacements des couleurs.

3.1.2.3 Validation numérique

Nous venons d'étudier théoriquement la dualité des différentes approches de la morphologie mathématique et prouvé qu'elles étaient toutes duales à l'exception de la méthode utilisant la distance cumulée. Il est donc possible de développer des traitements morphologiques couleur en exploitant soit l'érosion soit, son opérateur dual, la dilatation couleur. Cependant, comme bien souvent en traitement d'images, la mise en application concrète d'un traitement peut conduire à des divergences entre le comportement théorique d'un algorithme et son comportement réel du fait d'approximations numériques successives.

Typiquement l'approche développée dans [108] dispose d'une preuve théorique valide et d'une construction couleur valide perceptuellement mais induit un trop grand nombre de changements d'espaces couleur. Lors de ces changements successifs, des approximations numériques apparaissent et conduisent à la perte de la propriété de la dualité. Cet exemple simple montre qu'il est nécessaire de compléter la validation théorique de la dualité par une validation pratique lors de la mise en œuvre de l'algorithme.

Nous utilisons les méthodes pour lesquelles nous avons précédemment étudié la propriété théorique de dualité, c'est-à-dire l'ordre marginal noté Marg, l'ordre basé sur la distance cumulée noté D_{cum} , l'ordre lexicographique LSH d'Hanbury et l'ordre lexicographique IRGB de Lopez et la méthode CCMM.

Nous définissons respectivement le noir et le blanc comme points de convergence pour l'érosion et la dilatation de la méthode CCMM. Le choix de ces deux couleurs est lié au comportement de la majorité des méthodes de la littérature qui convergent naturellement vers le blanc et le noir. Ainsi nous pourrons comparer de façon cohérente les résultats.

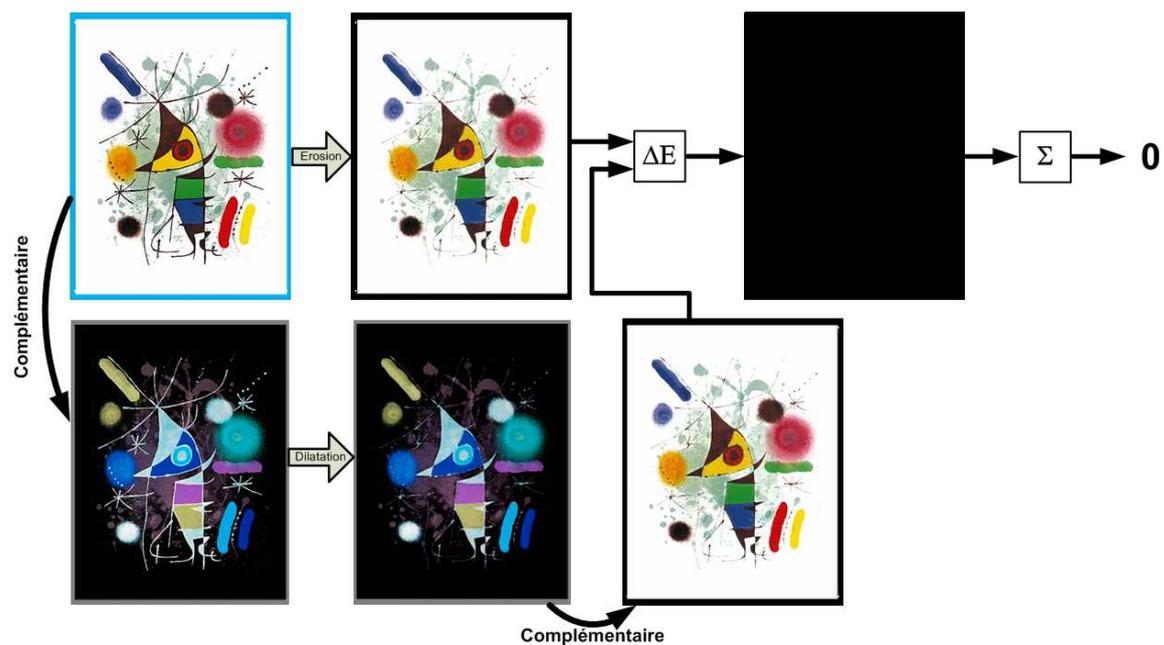


FIGURE 3.11 – Schéma de calcul des différences entre les images 1 et 2 initiales.

Le schéma utilisé pour illustrer la validation numérique est celui de la figure 3.11. Le principe est basé sur le calcul des différences pixel à pixel entre les images 1 et 2 obtenues par les deux chemins différents. La distance entre pixels est obtenue avec la métrique ΔE . La figure 3.12 illustre les différences entre les images obtenues par les deux chemins duaux pour chacune des méthodes. Sur ces images, le blanc indique qu'il n'y a pas de différence entre les images obtenues par chemins duaux. La somme cumulée des différences est indiquée en dessous de chaque image.

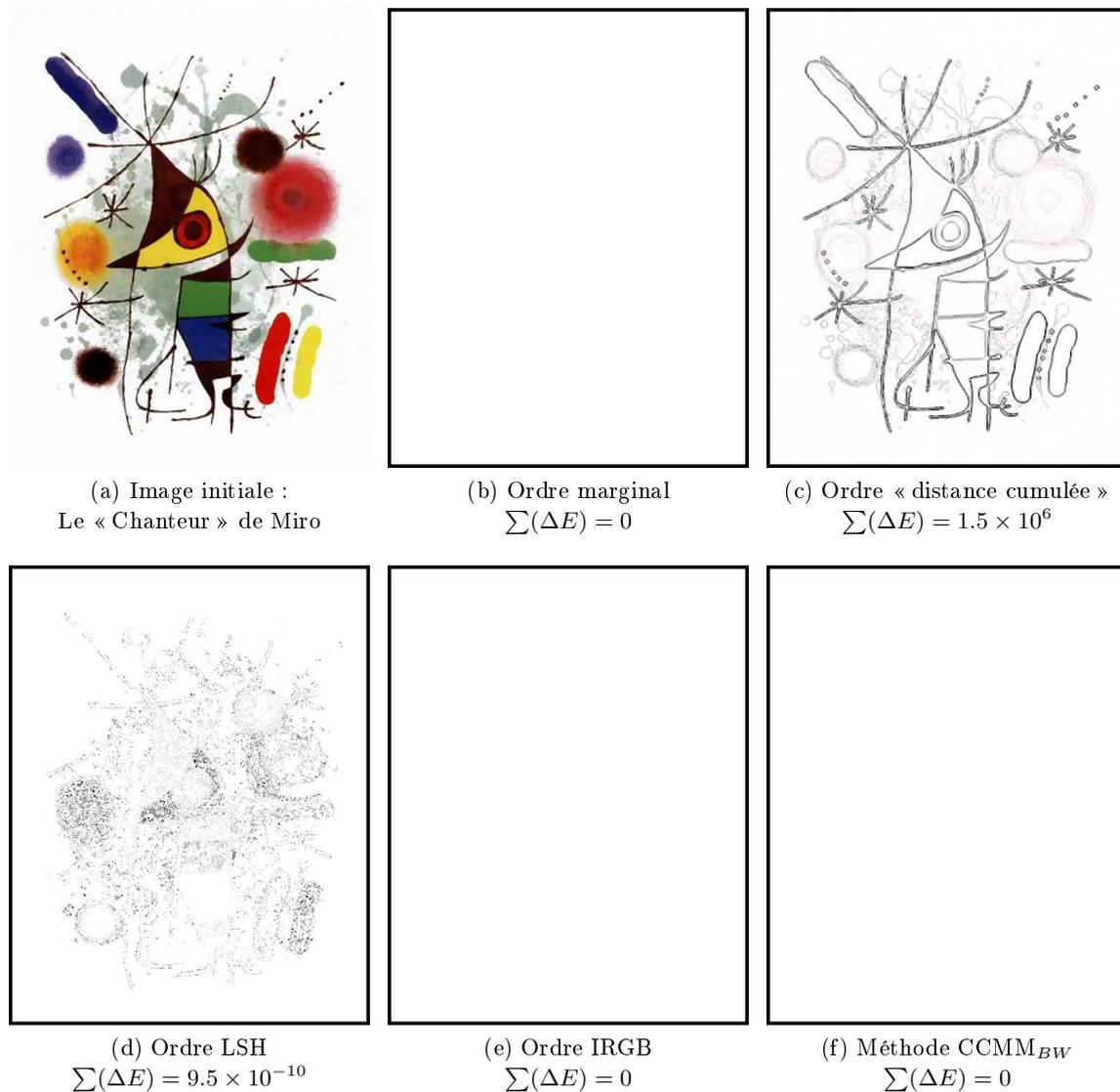


FIGURE 3.12 – Résultat de la validation numérique de la propriété de dualité. Les images sont les images de différences (obtenues avec la métrique ΔE) entre l'image dilatée et l'image obtenue par le chemin dual en utilisant un élément structurant croix de taille 3x3 pixels.

Blanc = pas de différence ; Noir = la plus grande différence possible.

Pour cette image, nous pouvons ainsi voir que l'ordre marginal respecte la dualité. En effet, la dualité est respectée sur chaque plan couleur, après reconstruction de l'image, les images obtenues par les deux chemins duaux sont identiques. Pour la méthode basée sur la distance cumulée, la dualité n'est pas respectée, ce qui confirme notre étude théorique. Enfin, nous constatons que l'ordre lexicographique LSH ne satisfait pas la dualité mais obtient cependant un nombre d'erreurs beaucoup moins important que la méthode utilisant la distance cumulée. L'ordre lexicographique IRGB et la construction $CCMM_{BW}$ respectent numériquement la dualité pour cette image. Ces premiers résultats donnent une idée du comportement des méthodes face à la dualité, cependant nous ne pouvons nous limiter à l'analyse marginale d'une seule image et d'une seule taille d'élément structurant.

Pour obtenir un critère donnant un réel indice de satisfaction de la propriété de dualité, il convient de valider le comportement sur un nombre plus conséquent d'images avec une variabilité de contenu suffisante. Nous proposons ici d'effectuer ce test sur la base Vistex [102] constituée de 167 images. Cette base présente suffisamment de configurations différentes pour explorer l'espace couleur, avec des variations de fréquences spatiales permettant d'explorer la dynamique locale d'extraction d'extrema.

Les résultats obtenus en utilisant un élément structurant carré de taille 3×3 pixels sont exprimés dans le tableau 3.1. L'observation de ces résultats montre que l'ordre marginal valide toujours la dualité. À l'inverse, l'ordre basé sur la distance cumulée ne respecte numériquement jamais la dualité. Ici, nous pouvons constater que l'ordre lexicographique IRGB, malgré un nombre d'erreurs nul sur certaines images, ne valide pas numériquement la dualité sur l'ensemble des images de la base. L'ordre lexicographique LSH est mis en défaut de façon encore plus importante que l'ordre lexicographique IRGB. Pour les deux méthodes d'ordre lexicographique, les erreurs sont directement liées à la construction. La construction du complémentaire n'est pas naturelle pour ces méthodes et génère des artefacts. La construction CCMM, quant à elle, valide bien numériquement la dualité, que ce soit en utilisant un élément structurant plat ou non plat.

Méthodes	Marg	D_{cum}	LSH	IRGB	CCMM (ESP)	CCMM (ESNP)
Minimum	0	1.8×10^6	3.17×10^{-11}	0	0	0
Moyenne	0	8.4×10^6	13.78	1.52	0	0
Maximum	0	1.64×10^7	482.55	67.64	0	0
Écart type	0	3.76×10^6	56.76	8.32	0	0

TABLE 3.1 – Différences entre les images obtenues par les deux chemins duaux pour les images de la base Vistex. Les éléments structurants utilisés sont de taille 3×3 , de forme croix pour l'élément structurant plat et de forme diamant pour l'élément structurant non-plat (voir équation 3.41).

3.1.3 Intérêt des critères théoriques

Il existe un nombre important de techniques d'ordonnancements de données vectorielles et nombre d'entre elles ont été adaptées au contexte de la couleur. La recherche de critères de validation des propriétés théoriques a pour objet de fournir des preuves de stabilité et de robustesse numériques, indépendamment des contenus couleurs et des complexités des images. Ce critère est important dans le sens où l'apparition d'artefacts numériques peut altérer les résultats lors de l'utilisation simultanée des opérateurs d'érosion et de dilatation, comme le calcul de gradient de Beucher ou le calcul de la transformée en tout-ou-rien.

La première remarque sur cette question porte sur la validation théorique, qui dépend de la construction de l'ordre total et d'une définition du complémentaire associée aux opérateurs. En dehors des approches basées sur les distances cumulées, toutes les autres approches respectent en théorie ce critère au sens mathématique. Cependant, lors de la validation numérique de la dualité, seule la méthode marginale et la méthode CCMM valident la dualité. Les résultats obtenus pour la distance cumulée confirment le fait que cette méthode ne peut construire des opérateurs duaux. Enfin, les ordres lexicographiques embarquent une définition du complémentaire couleur non valide au sens de l'information couleur invalidant par ce fait le respect de la propriété de dualité théoriquement et entraînant l'apparition d'artefact numérique.

Les résultats numériques obtenus montrent bien qu'une validation mathématique indépendante de la spécificité de l'information physique, ici la couleur, n'est pas suffisante pour valider un opérateur de traitement. Notre hypothèse de travail, basée sur l'écriture d'opérateurs valides au sens de la couleur perceptuellement ou physiquement, a induit la construction d'un opérateur de complémentarité particulier. La preuve de validation théorique et numérique de la dualité vient valider *de-facto* cette construction.

Le tableau 3.2 résume les différents résultats obtenus pour les opérateurs morphologiques pour les différents critères théoriques. Le score final correspond au nombre de critères validés par les méthodes. En conclusion dans notre contexte de travail, la méthode CCMM est l'unique méthode qui valide théoriquement et numériquement la propriété de dualité pour les opérateurs d'érosion et de dilatation tout en ayant un complémentaire valide au sens perceptuel. Elle obtient donc le score maximal de 3/3.

Méthodes	Espace couleur	Validité perceptuelle du complémentaire couleur	Preuve théorique de la dualité	Preuve numérique de la dualité	Total
Marginale	RGB	NON	OUI	OUI	2/3
Distance cumulée	RGB	NON	NON	NON	0/3
Lexicographique IRGB	RGB	NON	OUI	NON	1/3
Lexicographique LSH	HLS	uniquement sur la teinte	OUI	NON	1,3/3
CCMM avec ESP	CIELAB	OUI	OUI	OUI	3/3
CCMM avec ESNP	CIELAB	OUI	OUI	OUI	3/3

TABLE 3.2 – Synthèse des résultats pour les critères théoriques.

3.2 Critères d'incertitude

L'exploitation d'attributs numériques pour des tâches de dénombrements, de mesure ou de classification s'effectue en général de façon directe et en boucle ouverte [14, 39]. Dans les techniques utilisant un apprentissage, il est cependant courant d'utiliser une mesure de « pertinence » permettant de caractériser la capacité de l'attribut numérique à représenter un ensemble d'individus (images ou parties d'images), avec l'hypothèse que celle-ci est de variabilité faible entre deux individus.

En parallèle, de ces approches purement numériques, le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) travaille sur l'identification, l'amélioration et la standardisation des processus de métrologie et la prise en compte des biais de mesure [20]. Ce propos générique s'appuie sur le fait que toute mesure est biaisée par différents processus inhérents au contenu analysé ou au processus de mesure. Différentes notions de base sont donc associées à toute mesure : la fidélité, la justesse, l'exactitude, etc. Dans un contexte métrologique classique, ces « propriétés » associées à la mesure ne sont accessibles qu'à partir de données statistiques mesurant la reproductibilité de la mesure d'objets étalons afin de séparer les biais propres aux outils de mesures (biais systématiques) des biais inhérents à la variabilité des propriétés mesurés sur les objets d'analyse.

Dans [109, 122], il a été proposé la définition de l'exactitude numérique permettant de prendre en compte la capacité de l'attribut à représenter l'objet mesuré² et l'apport de cette mesure en combinaison de la pertinence pour la classification d'objets. Ces premiers travaux montrent la nécessité de rapprocher le traitement et l'analyse d'images de la métrologie.

Cette section rentre donc dans cet esprit en proposant pour la morphologie des critères d'évaluation des performances devant servir d'une part à sélectionner l'approche d'ordonnement et/ou de traitement morphologique la plus adaptée et d'autre part à disposer de propriétés utilisables lors des traitements en boucle ouverte ou fermée. Le propos de cette

2. L'exactitude numérique diffère de la pertinence, qui mesure la capacité d'un attribut à discriminer une catégorie des autres catégories d'objets.

thèse est de tendre vers une exploitation des opérateurs du traitement d'images plus proche de la métrologie que du traitement de données théoriques indépendantes de la physique ou de la perception. La contrainte associée est de rester centré sur le propos des ordonnancements vectoriels et de la morphologie mathématique couleur et spectrale. Ainsi, nous choisissons de considérer les critères proposés en tant que « critères d'incertitude ».

Nous considérerons un premier critère intrinsèque à la morphologie vectorielle et portant sur les erreurs d'ordonnement. Puis afin de nous rapprocher des objectifs d'un traitement d'images prenant en compte les biais de mesure, nous proposons un critère d'estimation de l'incertitude de mesure d'un critère texture. Ce second critère a vocation à définir le nombre de chiffres significatifs d'un attribut, telle que la dimension fractale utilisée par exemple. Alors que le premier critère va porter sur la linéarité des ordonnancements et la capacité en toutes régions de l'espace à ordonner correctement des séquences d'ordre connu, le second critère va mesurer l'impact des biais introduits dans un attribut plus facilement interprétable par l'expert du domaine de travail.

3.2.1 Incertitude d'ordonnement

Toute technique d'ordonnement vectoriel ordonne les vecteurs selon la relation définie lors de sa construction, en respectant les propriétés théoriques associées à l'approche. Cependant cette construction n'implique pas nécessairement le respect de la linéarité de cet ordonnancement face à des propriétés physiques ou perceptuelles.

La notion de linéarité d'un ordonnancement n'a pas été étudiée jusqu'à présent, pourtant elle est naturelle dans l'esprit même des approches morphologiques. L'extension des relations d'ordre aux fonctions unidimensionnelles ou images en niveau de gris s'appuie sur un ordre qui respecte par construction cette notion : une séquence de valeurs scalaires séparées par une même différence est naturellement ordonnée de la plus petite à la plus grande. De façon similaire, nous attendons qu'une séquence de valeurs vectorielles composant un dégradé partant d'une valeur v_0 et allant à une valeur v_p soit ordonnée de façon linéaire à ce dégradé par toute technique d'ordonnement correcte au sens du dégradé considéré. L'application du propos pour la perception couleur engendre qu'un dégradé de couleur est une séquence ordonnée au sens de la perception.

Un tel critère appartient à la famille des « incertitudes de mesures » ([20] p 25) *qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées à un mesurande, à partir des informations utilisées*. Néanmoins la particularité des erreurs introduites, différentes en chaque couleur en fonction de la technique d'ordonnement, n'appartient à aucun cas connu du BIPM (l'erreur n'est pas dans le rang associé à une couleur, mais dans le fait que la séquence ne soit pas bien ordonnée, cette erreur pouvant être différente entre deux dégradés). Les erreurs d'ordonnement ou de linéarité d'ordonnement ne peuvent être associées directement à l'exactitude, la fidélité ou la justesse, le terme d'incertitude est ainsi le plus adapté.

Cette hypothèse de linéarité n'est pas nouvelle en soi puisqu'utilisée par la CIE pour les expérimentations qui ont conduit à la construction des espaces perceptuels et des fonctions

de distance perceptuelles entre couleurs. Ces expérimentations se sont basées sur des comparaisons de paires couleurs et de l'ordonnement en fonction de distances entre paires plus ou moins grandes. Le critère d'incertitude d'ordonnement que nous proposons est basé sur l'évaluation statistique de la capacité d'une technique d'ordonnement à ordonner correctement une séquence de couleurs issues d'un dégradé entre deux couleurs. Afin de disposer d'un critère objectif, les dégradés seront établis dans différents espaces couleurs sur un nombre de couleurs significatifs, les couleurs extrêmes étant établies de façon aléatoire. Un nombre de tirages suffisant est utilisé pour parcourir tout l'espace de génération avec des dégradés entre extrêmes distants de faible à très grande distance.

L'étude de ce critère a deux objectifs : comparer les qualités respectives des différentes techniques d'ordonnement et choisir la fonction de distance perceptuelle la plus adaptée pour la CCMM.

Protocole

Nous mettons en place un algorithme construisant un dégradé à partir de deux coordonnées couleur. L'algorithme possède un paramètre permettant de choisir le nombre de couleurs du dégradé. À partir de ce nombre, le dégradé est construit linéairement dans l'espace couleur de génération en imposant un écart identique entre chaque couleur du dégradé. Pour que le test soit exhaustif, les couleurs des extrémités des dégradés sont tirées aléatoirement afin de parcourir tout l'espace couleur. Pour tester les ordonnancements, nous générons 500 000 dégradés dans chaque espace. Chaque dégradé est constitué de 20 couleurs.

Deux types de configurations peuvent se produire lors de la construction aléatoire des dégradés. La première apparaît lorsque la projection de la couleur de référence sur l'axe du dégradé est à l'extérieur de ce dégradé. Dans ce cas, le dégradé doit pouvoir être ordonné en un seul bloc. Lorsque la projection de la couleur de référence est à l'intérieur du segment correspondant au dégradé, alors 2 dégradés apparaissent autour du minimum. Le dégradé est alors séparé en deux parties qui sont ordonnées séparément l'une de l'autre. La figure 3.13 illustre ces deux situations dans le cas de l'utilisation d'une fonction de distance.

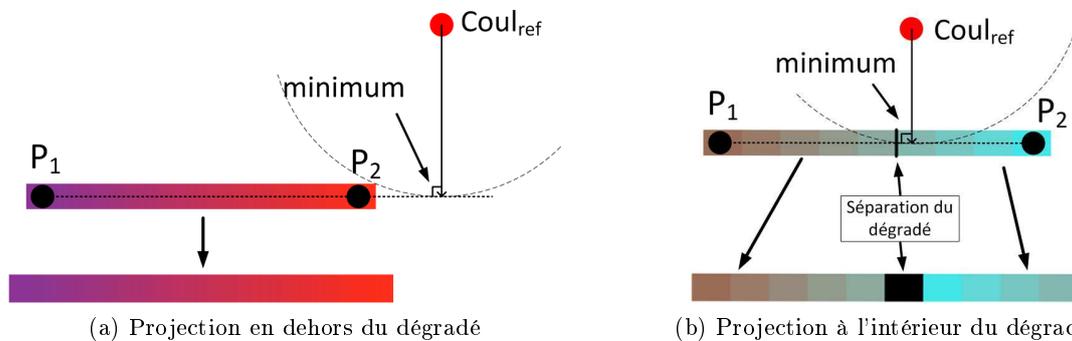


FIGURE 3.13 – Projection de la couleur de référence sur la droite construite par le dégradé couleur. Deux configurations sont possibles pour le réordonnement du dégradé.

Le test final compare chaque partie réordonnée du dégradé avec le dégradé généré. Il prend en compte toutes les configurations que le dégradé ordonné peut obtenir. La figure 3.14 illustre les différentes configurations possibles. La figure 3.15 montre quelques exemples de configurations de dégradés obtenus après ordonnancement.

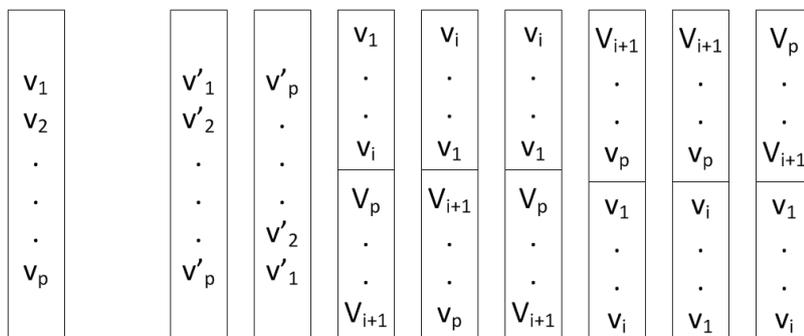


FIGURE 3.14 – Les différentes configurations testées lors de la comparaison entre le dégradé généré et le dégradé ordonné. La position i des vecteurs correspond à la séparation due au minimum trouvé.

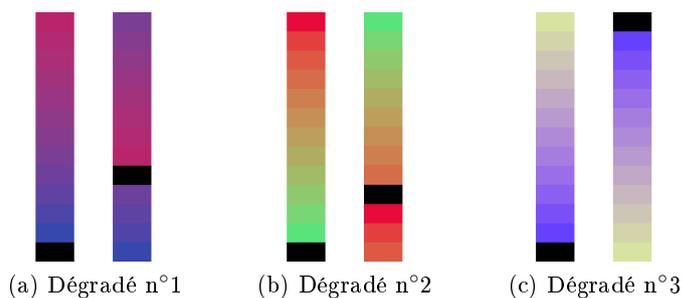


FIGURE 3.15 – Exemples de configurations obtenues après ordonnancement en utilisant la méthode CCMM et le noir comme coordonnée de convergence. Le dégradé généré se trouve à gauche et le résultat de l'ordonnancement à droite.

Résultats

Nous ne montrons pas ici les résultats pour les méthodes d'ordre marginal et de distance cumulée. En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, l'ordonnancement marginal entraîne l'apparition de nouvelles couleurs. Dans la majorité des cas, il ne pourra donc pas obtenir le dégradé généré ni même une simple inversion de couleur. Pour la méthode utilisant la distance cumulée, les images étudiées précédemment ont montré son instabilité pour la dilatation, c'est-à-dire pour extraire le maximum d'un ensemble de couleurs. Elle entraîne donc dans la majorité des cas de gros problèmes d'ordonnancement pour les dégradés couleur.

Les méthodes testées dans ce protocole sont donc les méthodes de priorité par plan des espaces HLS et RGB que sont les ordres lexicographiques LSH, SLH et IRGB et la méthode

CCMM utilisant d'une part la métrique ΔE et d'autre part ΔE_{2000} . Nous utilisons le noir et le blanc comme coordonnées de convergence pour la méthode CCMM pour obtenir des résultats cohérents avec les autres méthodes. Nous notons $CCMM_{BW}$ la méthode lors de l'utilisation de ces deux coordonnées de convergence. Le tableau 3.3 montre les résultats obtenus avec les différentes méthodes.

		IRGB	LSH	SLH	$CCMM_{BW}$ ΔE	$CCMM_{BW}$ ΔE_{2000}
Niveaux de gris		0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Espaces couleur de génération	RGB	62 %	42 %	69 %	0.7 %	10.5 %
	HSL	63 %	0.4 %	0.5 %	36 %	41 %
	CIELAB	75 %	66 %	81 %	0 %	0 ³

TABLE 3.3 – Pourcentage d'erreurs pour chacune des méthodes d'ordonnement pour 500000 dégradés couleurs de 20 couleurs. Nous comptons une erreur dès qu'une différence apparaît entre le dégradé généré et le dégradé ordonné.

Dans un premier temps, nous testons le cas particulier où les 20 points du dégradé sont des valeurs de niveaux de gris. Dans ce cas, toutes les méthodes ordonnent correctement les dégradés. Les niveaux de gris sont simplement un changement d'intensité, chaque méthode ordonne correctement les dégradés avec le plan L pour les méthodes LSH et SLH, I pour la méthode IRGB et la distance par rapport au blanc pour la méthode $CCMM_{BW}$.

Pour les dégradés couleur, il ressort que les méthodes IRGB, LSH et SLH n'obtiennent pas de bons résultats. Les méthodes LSH et SLH obtiennent un faible pourcentage d'erreurs lors de l'ordonnement de dégradé dans l'espace HLS, cependant cet espace n'est ni un espace d'affichage ni un espace de comparaison. De plus, les résultats pour les dégradés générés dans les autres espaces ne sont pas satisfaisants. Seule la méthode $CCMM_{BW}$ obtient des pourcentage d'erreurs faibles dans tous les espaces et plus particulièrement les espaces RGB et CIELAB qui sont respectivement des espaces d'affichage et de comparaison des couleurs.

	Espaces couleur de génération		
	RGB	HLS	CIELAB
CCMM (ΔE)	0.7%	36%	0%
CCMM (ΔE_{2000})	13%	38%	11%

TABLE 3.4 – Pourcentage d'erreurs pour la méthode CCMM avec coordonnées de convergence aléatoires et 500000 dégradés couleurs construits à partir de 20 couleurs.

Afin de compléter l'analyse de l'ordonnement pour la méthode CCMM, les coordonnées de convergence ne sont plus limitées au noir et blanc mais sont choisies aléatoirement

3. si $\Delta E_{2000} < 35$

dans l'espace RGB. Comme nous le montre le tableau 3.4, même avec des coordonnées de convergence quelconques, la méthode CCMM obtient de bons résultats d'ordonnement. La métrique ΔE ordonne toujours correctement les dégradés dans les espaces RGB et CIELAB et donne de meilleurs résultats que la métrique ΔE_{2000} . Nous choisissons donc d'utiliser la métrique ΔE pour la méthode CCMM dans la suite de nos travaux.

3.2.2 Exactitude sur critère morphologique de texture

L'incertitude d'ordonnement permet d'avoir une indication de la capacité d'une technique à ordonner différentes séquences couleurs correctement. Ce critère essentiel pour valider une technique n'est pas suffisant pour permettre de valider un attribut de traitement d'images, surtout s'il est multi-échelle. Notre hypothèse pour ce critère est la suivante : les erreurs d'ordonnement induisent des erreurs dans les traitements morphologiques. Ces erreurs, qui ont un impact imperceptible sur une seule échelle, s'amplifient et s'accumulent dans un traitement multi-échelle. Comme nous pouvons le voir sur la figure 3.16, les artefacts présents à la première itération (figure 3.16c) sont amplifiés au cours des itérations successives (figure 3.16d) si les dégradés ne sont pas ordonnés correctement. L'application d'outils d'analyse multi-échelles en utilisant des méthodes produisant des dégradés altérés pourront alors fausser les opérateurs multi-itérations tels que ceux utilisés pour l'analyse de texture. De fait, l'analyse statistique de la qualité des dégradés couleur devient alors une étape nécessaire pour choisir efficacement la méthode morphologique couleur.

Dans l'esprit d'une approche plus près de la métrologie, nous souhaitons un critère de « précision » associé à l'attribut morphologique. Nous proposons un critère d'exactitude numérique pour l'estimation de la complexité d'une texture. Cette complexité est ici captée par le biais de la dimension fractale calculée par une approche morphologique (covering blanket). Comme nous le verrons dans le chapitre 5, cette approche permet également d'établir la signature fractale qui est un attribut qui appartient à la catégorie des pattern-spectra. L'exactitude établie est donc une propriété qui pourrait être associée plus tard à ces spectres spatiaux de textures.

L'utilisation de l'algorithme de calcul de la dimension fractale est appuyée par plusieurs remarques. La première est que l'utilisation de textures complexes de type fractales permettent d'évaluer l'impact des erreurs d'ordonnement en présence de faibles variations et également de forte variations de texture (maîtrise de la complexité dans les échelles). La seconde est que la construction de telles images permet d'obtenir des variations de texture parcourant l'ensemble de l'espace couleur de façon stochastique. Enfin, le modèle théorique de complexité étant connu, la mesure de précision se base sur la capacité à retrouver le paramètre de complexité : la dimension fractale générée.

Initialement, la dimension fractale a été introduite par Mandelbrot [79] et permet de caractériser des objets complexes dont la structure est invariante par changement d'échelle. Les nuages, les montagnes ou encore les côtes maritimes sont des exemples naturels d'objets fractals.

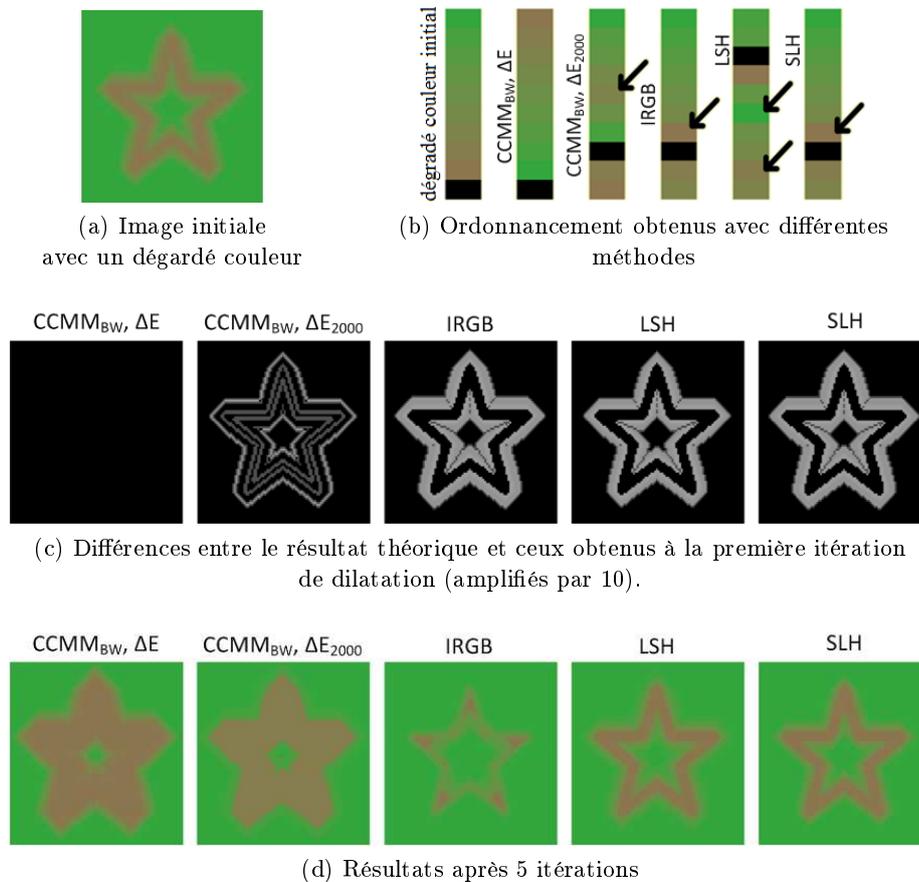


FIGURE 3.16 – Influence de l'ordonnancement sur un processus itératif de dilatation. L'élément structurant utilisé est de type croix et de taille 3x3 pixels.

Il existe plusieurs méthodes d'estimation de la dimension fractale utilisant les opérateurs morphologiques comme celle du « comptage de boîtes », l'approximation fréquentielle, le « covering blanket », ... [36, 98, 83]. Parmi toutes ces méthodes existantes pour estimer la dimension fractale nous utilisons celle du covering blanket [97]. Cet algorithme est basé sur le calcul de la dimension de Boulingan-Minkowski. Le choix de cette méthode vient de la stabilité de cette mesure [83] et de sa proximité numérique avec l'exemple théorique de Serra [115]. La figure 3.17 illustre pour une fonction 1D, la méthode connue sous le nom de « saucisse de Minkowski ». Cette méthode estime le volume entre une surface supérieure et inférieure pour différents niveaux (taille) de i . Le calcul de ces surfaces est équivalent à l'application des opérateurs de dilatation et d'érosion.

Dans le domaine des niveaux de gris, une image f est considérée comme une surface où l'altitude est définie par la valeur des niveaux de gris. À un niveau i , l'algorithme du covering-blanket construit une « couverture » épaisse de $2i$ qui recouvre la surface de l'image. Cette couverture est délimitée par une surface inférieure L_i et une surface supérieure U_i définies

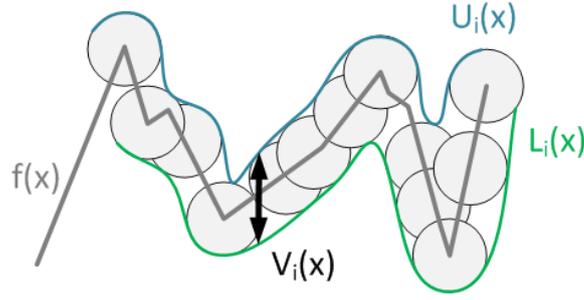


FIGURE 3.17 – Principe du covering-blanket : le volume V_i est limité par les surfaces inférieure et supérieure. Les surfaces sont calculées respectivement avec les opérateurs d'érosion et de dilatation.

comme suit :

$$L_i(x) = \bigwedge \{L_{i-1}(x) - 1, \bigwedge_{|x-y| \leq 1} L_{i-1}(y)\} \quad (3.39)$$

$$U_i(x) = \bigvee \{U_{i-1}(x) + 1, \bigvee_{|x-y| \leq 1} U_{i-1}(y)\} \quad (3.40)$$

Les définitions de ces surfaces sont équivalentes à celles de la dilatation et de l'érosion en utilisant l'élément structurant g_{diam} diamant non-plat de taille 3×3 (équation 3.41).

$$g_{diam} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\infty & 0 & -\infty \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline -\infty & 0 & -\infty \\ \hline \end{array} \quad (3.41)$$

Les écritures (3.39) et 3.40 deviennent alors :

$$L_i(x) = \varepsilon_{\mathbf{g}}(f, ig_{diam})(x) \quad (3.42)$$

$$= \bigwedge_{x \in \mathcal{D}_f, y \in \mathcal{D}_{ig_{diam}}} (f(x+y) - ig_{diam}(y)) \quad (3.43)$$

$$U_i(x) = \delta_{\mathbf{g}}(f, ig_{diam})(x) \quad (3.44)$$

$$= \bigvee_{x \in \mathcal{D}_f, y \in \mathcal{D}_{ig_{diam}}} (f(x+y) + ig_{diam}(y)) \quad (3.45)$$

où \mathcal{D}_f et \mathcal{D}_g sont respectivement le domaine spatial de l'image f et de l'élément structurant g et i la taille de l'élément structurant. Dans le cas où $i = 0$ alors les deux surfaces \mathcal{L}_i et \mathcal{U}_i sont égales à l'image ($L_0 = U_0 = f$).

À partir de ces surfaces, le volume V_i situé entre ces deux surfaces est calculé ainsi :

$$V_i = \sum_x (U_i(x) - L_i(x)) \quad (3.46)$$

Enfin la dimension de Boulingand-Minkowski d_{bm} est calculée comme l'évolution du volume V en fonction des itérations i :

$$d_{bm} = \lim_{i \rightarrow 0} \left(d - \frac{\log(\mathcal{S}_i)}{\log(i)} \right) \quad (3.47)$$

où \mathcal{S}_i est la différence de volume entre chaque itération i :

$$\mathcal{S}_i = \frac{V_i - V_{i-1}}{2} \quad (3.48)$$

Dans cette étude, nous voulons comparer les méthodes de morphologie mathématique couleur en étudiant leur capacité à estimer la dimension fractale d'une image. L'algorithme niveaux de gris présenté précédemment doit être adapté à la couleur.

L'extension de l'algorithme d'estimation de la dimension fractale aux images couleur est directe dans la mesure où nous disposons d'opérateurs de morphologie mathématique couleur permettant l'écriture d'éléments structurants non-plats et d'un calcul de volume couleur. Parmi les méthodes étudiées, seule la méthode CCMM permet l'utilisation d'un élément structurant non-plat. Pour pouvoir comparer les méthodes, nous allons dans un premier temps nous restreindre à la version réduite de l'algorithme de Soille et Rivest [125, 101] utilisant un élément structurant plat.

Pour pouvoir évaluer la précision des méthodes dans l'évaluation de la dimension fractale, nous devons disposer d'une base d'images fractales pour lesquelles la dimension fractale théorique est connue. Pour cela, nous utilisons l'algorithme de « midpoint displacement » développé par Ivanovici et Richard [64]. Pour caractériser la complexité des images, le paramètre H est utilisé. H est la dimension de Hausdorff et est égale à $d_{bm} = d + 1 - H$, où d est la dimension topologique. La dimension de Hausdorff prend des valeurs dans l'intervalle $]0, 1[$, plus sa valeur est faible, plus la texture de l'image est complexe. L'initialisation de l'algorithme pour construire les images requiert l'initialisation des couleurs des 4 coins de l'image, dans le but de parcourir tout l'espace couleur, ces couleurs seront choisies aléatoirement.

La troisième ligne de la figure 3.20 contient des exemples d'images fractales pour lesquelles la dimension de Hausdorff augmente progressivement de gauche à droite. Pour ce critère, la base de test est composée de 50 images pour chaque dimension théorique. Les dimensions évoluent entre 0 (forte complexité) et 1 (faible complexité) avec un pas de 0,1. La base contient ainsi un total de 550 images.

Pour ce critère, nous comparons les méthodes de morphologie mathématique basées sur l'ordonnancement marginal, sur l'ordonnancement utilisant la distance cumulée, les méthodes lexicographiques d'Hanbury (LSH) et de Lopez (IRGB) et la méthode CCMM.

Les courbes des figures 3.18a à 3.18e sont les résultats obtenus pour ces méthodes. La courbe pleine et bleue est la moyenne, pour les 50 images, de la dimension fractale obtenue

en fonction de la dimension théorique. La courbe rouge pointillée représente le résultat expérimental idéal.

L'étude de cette unique courbe n'est pas satisfaisante pour obtenir une comparaison complète, d'autres paramètres sont étudiés pour évaluer la précision :

- Le coefficient de corrélation entre la courbe réelle et la courbe théorique (pointillé rouge) afin de donner une estimation de la relation entre les dimensions théoriques et les dimensions estimées.
- Le coefficient de détermination de la courbe de régression linéaire (tirets noir) R^2 pour connaître le degré de ressemblance entre la courbe moyenne et une ligne droite ;
- L'équation de la courbe de régression linéaire. L'équation théorique est : $y = x$;
- Le paramètre de « séparabilité » D_y qui caractérise la différence entre la valeur de l'écart-type et l'écart entre deux valeurs successives (figure 3.19). Lorsque D_y est positif, alors les images pourront être classifiées en fonction de leur dimension. Si D_y est négatif, les classes se recouvrent à leurs extrémités et ne peuvent pas être séparées.

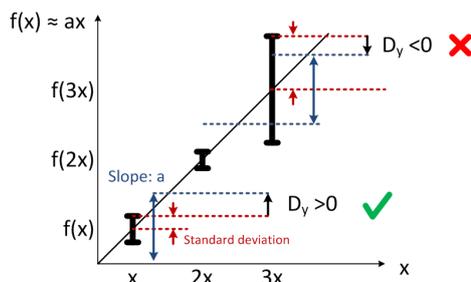


FIGURE 3.19 – Illustration du paramètre de « séparabilité » D_y sur une courbe $f(x) = ax$.

Le tableau 3.5 résume les résultats pour les méthodes étudiées. Pour commencer, le coefficient de corrélation de toutes les méthodes est très proche de 1, la méthode la mieux corrélée est la méthode marginale. Cette méthode donne également les résultats ayant la meilleure linéarité néanmoins toutes les méthodes obtiennent un coefficient de détermination de la courbe de régression linéaire R^2 élevé. La méthode CCMM se démarque des autres méthodes par le résultat de l'équation de sa courbe moyenne qui est la plus proche de celle de la courbe « idéale ». Enfin, pour le paramètre de « séparabilité » D_y seule la méthode LSH obtient une valeur négative qui ne permet pas de l'utiliser dans un schéma de classification.

	R^2	Cor	equation	D_y
Marg	0.9979	0.999	$y = 0.756x + 2.09$	0.0336
D_{cum}	0.9961	0.998	$y = 0.578x + 2.07$	0.018
LSH (Hanbury)	0.9905	0.9955	$y = 0.777x + 0.18$	-0.0015
IRGB (Lopez)	0.9907	0.9952	$y = 0.955x + 0.12$	0.01
CCMM avec ESP ⁴	0.9835	0.9917	$y = 0.973x + 0.06$	0.008
CCMM avec ESNP ⁵	0.9916	0.9958	$y = 0.963x + 0.06$	0.0069

TABLE 3.5 – Tableau des différents paramètres obtenus pour chacune des méthodes.

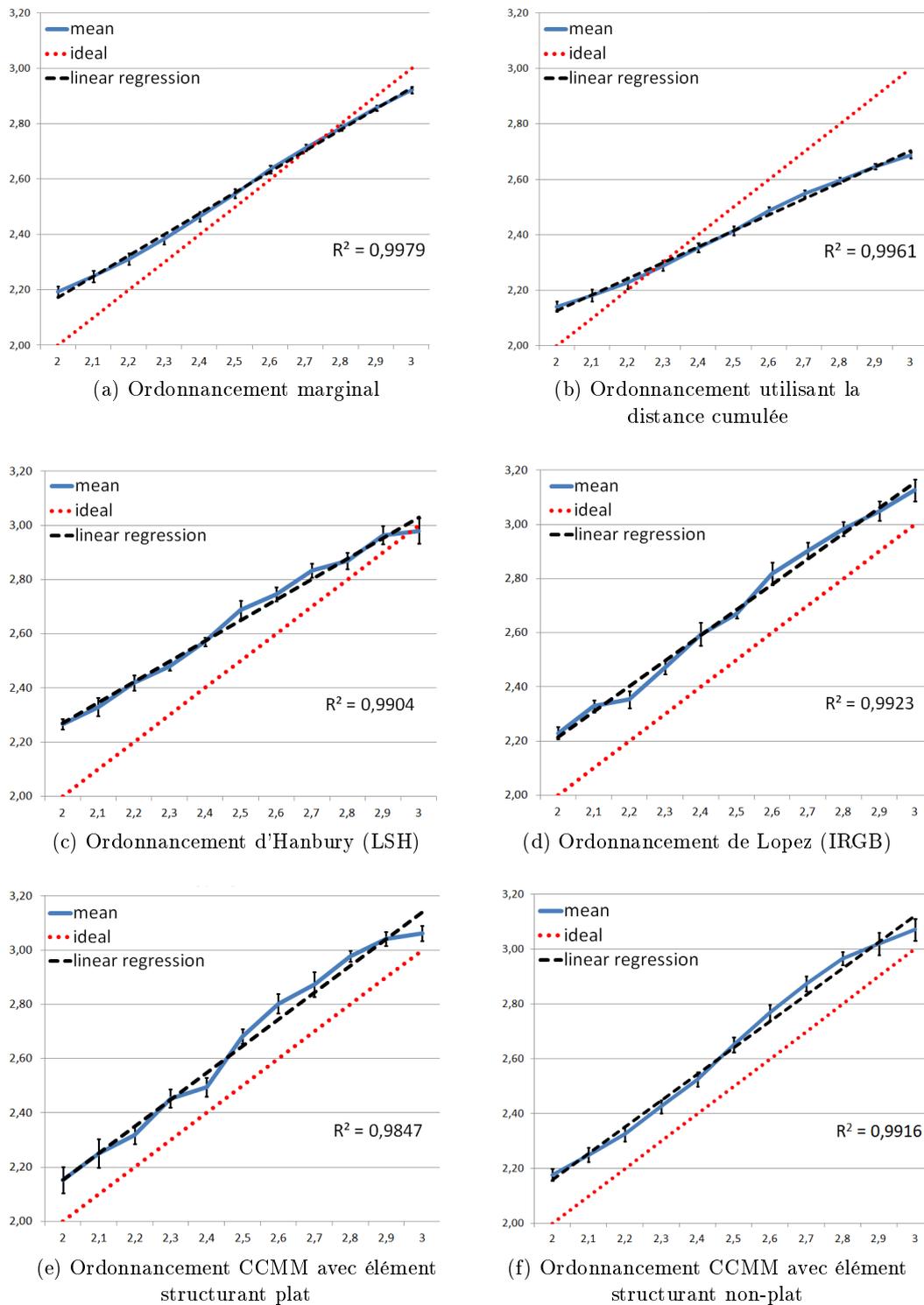


FIGURE 3.18 – Estimation de la dimension fractale en fonction de la dimension fractale théorique.

D'après ces premiers résultats, les méthodes d'ordonnement marginal et celle basée sur la distance cumulée obtiennent de bons résultats. Ce qui s'explique notamment par le fait que l'espace d'ordonnement de ces 2 méthodes est celui de génération des images fractales de notre base de test. De plus, le procédé de génération des images fractales se fait de façon marginale. Les autres méthodes présentent également de très bons résultats.

Il serait possible de conclure à ce niveau avec ces résultats. Cependant l'algorithme initial du covering blanket utilise un élément structurant non-plat et non un élément structurant plat. L'utilisation d'élément structurant plat induit une perte de précision.

La figure 3.18f et la dernière ligne du tableau 3.5 sont les résultats obtenus pour l'utilisation d'un élément structurant non-plat avec la méthode CCMM. Dans ce cas de configuration, les résultats obtenus ne sont pas les meilleurs. La méthode marginale et celle utilisant la distance cumulée conservent de meilleurs résultats. Pour les raisons citées précédemment, les résultats de ces deux méthodes sont cohérents et liés à la méthode de génération et d'analyse des images fractales qui sont proches. Cependant, la méthode CCMM avec élément structurant non-plat obtient de meilleurs résultats que les méthodes lexicographiques, largement utilisées dans la littérature.

À ce niveau, il convient également de revenir sur les images fractales de test. Actuellement, elles sont générées de façon marginale dans l'espace RGB. Un nouveau générateur vectoriel est en cours de construction avec la possibilité de générer ces images dans des espaces polaires (CIELUV, HLS) ou « scalaire » (RGB, CIELAB, ...). L'impact de la qualité de ces images sur la valeur du résultat est évident et doit ainsi permettre d'améliorer la qualité de discrimination de ce type de critère.

3.2.3 Intérêt des critères d'incertitude

Les deux critères d'incertitude proposés sont directement liés aux besoins des techniques de traitement d'images. Ils permettent de choisir une approche avec une estimation des biais induits par les opérateurs de bas niveau. Le critère fondé sur l'ordonnement de dégradés est direct dans son évaluation et dans l'analyse de son impact sur la morphologie. Il permet une évaluation macroscopique du comportement dans l'espace couleur considéré. Le critère basé sur l'estimation de la dimension fractale est très proche des besoins des attributs d'analyse de texture ou des approches multi-échelles de segmentation. Il permet directement de déterminer le nombre de chiffres significatifs nécessaire pour utiliser les attributs considérés.

Le tableau 3.6 synthétise les résultats obtenus pour les critères d'incertitude. Les scores obtenus pour les incertitudes d'ordonnement sont obtenus par cumul des scores des différentes approches sur les trois espaces de génération de dégradés couleur. L'approche la plus performante obtenant un score de 4 et la moins performante un score de 1. Le ratio est donc de 12. Les scores des méthodes du critère d'exactitude pour l'analyse de texture correspond à la somme des classements des six méthodes testées pour les quatre paramètres, ce qui donne un ratio de 24. Le score total est la moyenne des scores des deux critères.

4. ESP : Élément structurant plat

5. ESNP : Élément structurant non-plat

Pour l'incertitude d'ordonnement, les méthodes de la littérature sont mises en défaut par les non-linéarités induites par leur construction. La méthode CCMM en utilisant la distance ΔE ressort comme la meilleure des méthodes testées (score de 0.77).

Pour l'exactitude lors de l'analyse de textures fractales, les bons résultats obtenus par la méthode marginale et la méthode basée sur la distance cumulée sont liés à la génération des images dans l'espace RGB. La génération marginale des images favorise également la méthode marginale qui obtient alors la première place (score de 20/24). Les autres méthodes de la littérature (IRGB et LSH) obtiennent des résultats proches de notre méthode CCMM.

Finalement, notre méthode utilisant la distance perceptuelle ΔE et éléments structurants plats permet d'atteindre le meilleur score (0.59) pour cette famille de critères. En complément de ces résultats, nous avons une preuve de l'intérêt des éléments structurants non-plats avec le gain en précision obtenu dans l'estimation d'un critère texture. Notre méthode est la seule autorisant la construction de ce type d'éléments structurants, ce qui lui permet d'obtenir une meilleure précision que les méthodes lexicographiques.

Méthodes	Incertitude d'ordonnement	Exactitude pour l'analyse de textures	Total
Marginale	0/12 (apparition de fausses couleurs)	20/24	0,42
Distance cumulée	0/12 (instabilité)	16/24	0,33
Lexicographique IRGB	3/12	13/24	0,40
Lexicographique LSH et SLH	8/12	9/24	0,52
CCMM avec ΔE	ESP	11/24	0,69
		ESNP	15/24
CCMM avec ESP et ΔE_{2000}	8/12	0/24 (abandonnée lors de l'évaluation de l'incertitude d'ordonnement)	0,33

TABLE 3.6 – Score de satisfaction pour les critères d'incertitude

3.3 Critère d'efficacité numérique

Les approches morphologiques sont réputées gourmandes en temps calcul. Le passage à la couleur ou aux images multivaluées complexifie encore un peu plus les algorithmes. Les critères d'efficacité numérique permettent d'effectuer des comparaisons des approches d'ordonnement de façon objective en relation directe avec le traitement des images.

L'évaluation de ces critères est basée sur le fait que lors d'un schéma itératif de morphologie mathématique en niveaux de gris avec l'utilisation d'éléments structurants plats, l'image va tendre vers une image unie (généralement sombre pour l'érosion et claire pour la dilatation). Nous appelons cette notion « convergence » ; tous les pixels convergent vers une unique couleur appelée « coordonnée de convergence ». Nous proposons d'appeler la couleur obtenue lorsque tous les pixels de l'image sont identiques « couleur idempotente ». Nous appelons cette couleur ainsi puisque en appliquant un opérateur morphologique (érosion ou dilatation) de nouveau sur l'image, le résultat restera toujours identique. Ainsi, ces équations 3.49 et 3.50 définissent les couleurs idempotentes lors de l'érosion $C^{-\infty}$ et lors de la dilatation $C^{+\infty}$, dans le cas de l'utilisation d'éléments structurants plats.

$$C^{-\infty} = \bigwedge_{x \in D_f} C_x \quad (3.49)$$

$$C^{+\infty} = \bigvee_{x \in D_f} C_x \quad (3.50)$$

où D_f D_g sont respectivement le domaine de définition spatial de l'image et de l'élément structurant. Ces couleurs sont obtenues dans deux cas de configuration, le premier lorsque l'intersection entre le domaine de définition spatial de l'image et celui de l'élément structurant est supérieur au domaine de définition spatial de l'image, et le second lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini.

La couleur idempotente et la coordonnée de convergence sont deux notions différentes tout comme le minimum/maximum et l'infimum/supremum. L'image ne contient pas forcément la coordonnée de convergence ; la couleur idempotente est donc la couleur la plus proche de la coordonnée de convergence mais elle n'est pas forcément identique.

En niveaux de gris, le chemin emprunté par les valeurs de niveau de gris de l'image pour aboutir à la couleur d'idempotence est unique. De plus, ce chemin emprunté par les valeurs de niveaux de gris est toujours convergent. En effet, à chaque itération, l'ensemble des couleurs de l'image est plus proche de la couleur d'idempotence.

Dans le cas de la couleur, le chemin emprunté par les coordonnées couleur n'est pas unique et dépend du schéma d'ordonnement utilisé.

Pour évaluer ces différents schémas d'ordonnement, nous nous basons donc sur deux hypothèses tirées de l'observation du comportement en niveaux de gris. La première hypothèse est qu'une approche valide converge toujours vers une couleur unique ; elle ne diverge pas. La seconde hypothèse est que la méthode doit converger vers cette couleur avec un nombre minimum d'itérations. L'impact de ces hypothèses est important dans la construc-

tion d'attributs multi-échelles, puisqu'elles traitent de la capacité des ordonnancements à concentrer l'information sur un nombre réduit d'échelles.

En prenant le cas de l'analyse de texture, plus le chemin diverge et plus le nombre d'itérations est important pour obtenir la couleur d'idempotence. Ces biais locaux apparaissent ensuite par l'utilisation de l'opération d'intégration conduisant aux pattern-spectra, analyse granulométrique, etc.

À partir des hypothèses précédentes, plusieurs paramètres vont être observés. Tout d'abord, pour comparer la vitesse de convergence, nous étudions le nombre d'itérations nécessaires et suffisantes pour obtenir la couleur d'idempotence. Ensuite, pour comparer la convergence de chaque méthode, nous calculons la somme des distances par rapport à la coordonnée de convergence. Si la méthode converge, cette distance devra toujours être décroissante au cours des itérations.

Différents types d'images sont utilisés pour l'évaluation de la convergence. La figure 3.20 montre les quinze images utilisées pour les mesures. Afin que les mesures soient comparables, toutes ces images sont de taille 129×129 pixels. Les cinq premières images sont issues de la base d'images Outex [94], les cinq suivantes sont issues de la base d'images Corel [84] et les cinq dernières sont des images fractales synthétiques de complexité connue [64].

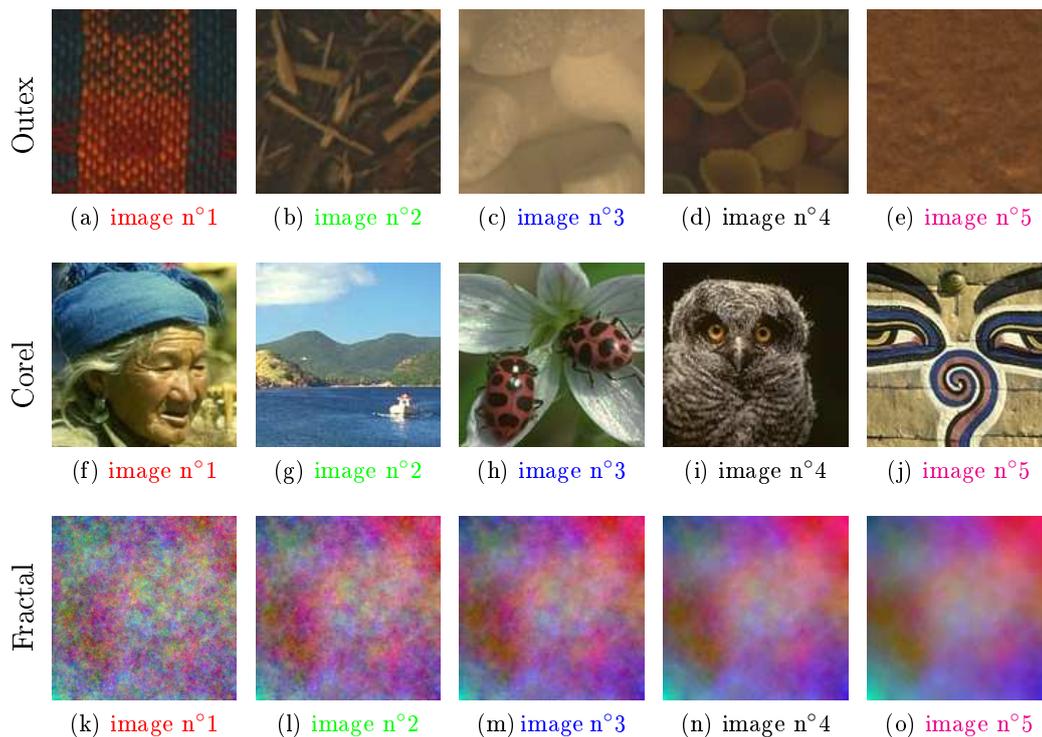


FIGURE 3.20 – Images utilisées pour les critères d'efficacité numérique. Les images extraites des différentes bases de données sont tronquées ou générées afin d'obtenir une taille identique et égale à 129×129 pixels. La couleur de la légende de chaque image correspond à la couleur utilisée pour les courbes du chemin de convergence que nous allons aborder par la suite (figures 3.25 et 3.26).

La figure 3.21 montre les histogrammes couleur des 15 images dans l'espace RGB. La base d'images Outex contient des images avec un faible gamut de couleur. Le chemin emprunté par les couleurs sera alors proche du linéaire. Nous pouvons faire l'hypothèse que la convergence sera plus rapide pour cette méthode, cependant la texture présente dans ces images implique un parcours de ce nuage par de petites « distances » complexifiant dès lors le chemin à suivre pour aboutir à la convergence. La base d'images Corel présente des images moins texturées, la distance entre les couleurs sera plus grande que pour la base Outex. Cependant l'augmentation du volume de l'histogramme entre la base Outex et Corel n'autorise pas à cette étape de faire une hypothèse sur la différence de vitesse de convergence obtenue avec ces deux bases. Enfin la base d'images fractales contient des images dont la complexité de texture varie. Plus la complexité est faible moins le chemin emprunté par les couleurs pour obtenir l'idempotence est direct. Nous devons donc obtenir une augmentation de la vitesse de convergence avec l'augmentation de dimension fractale.

Pour ce critère, nous comparons l'ordre marginal, l'ordre lexicographique LSH, l'ordre lexicographique IRGB et notre méthode CCMM. Les opérateurs construits avec l'ordre utilisant la distance cumulée ne peuvent être utilisés pour ces critères. L'utilisation d'un tel ordre ne permet pas d'atteindre une image unie à cause de l'instabilité de la dilatation et de la réciprocité entre l'érosion et un filtre médian.

Les deux critères d'efficacité numérique étudient le comportement de chaque méthode dans l'obtention de la couleur d'idempotence. Cependant, selon l'espace couleur utilisé, la priorisation engendrée par l'ordre lexicographique, l'apparition de fausses couleurs dans le cas marginal, etc., l'ensemble des couleurs convergent différemment vers la couleur de convergence. Cette disparité dans la convergence des couleurs peut engendrer des couleurs idempotentes différentes en fonction de l'approche utilisée (figure 3.22).

Nous pouvons observer une plus grande différence pour les couleurs d'idempotence obtenues par les différentes méthodes pour la base d'images Fractal. Contrairement aux images de la bases Fractal, les images de la base Outex et Corel ont des histogrammes couleur pour la grande majorité linéaires (figure 3.21) ce qui limite la variation entre les couleurs d'idempotence obtenues pour ces bases.

La distance entre les couleurs d'idempotence et la couleur de convergence montre que malgré la construction de nouvelles couleurs, la méthode marginale n'est pas forcément la méthode qui obtient la plus faible distance. Nous pouvons également voir que par son expression, la méthode CCMM obtient la plus faible distance à la couleur de convergence en obtenant une couleur d'idempotence appartenant à l'ensemble des couleurs initiales.

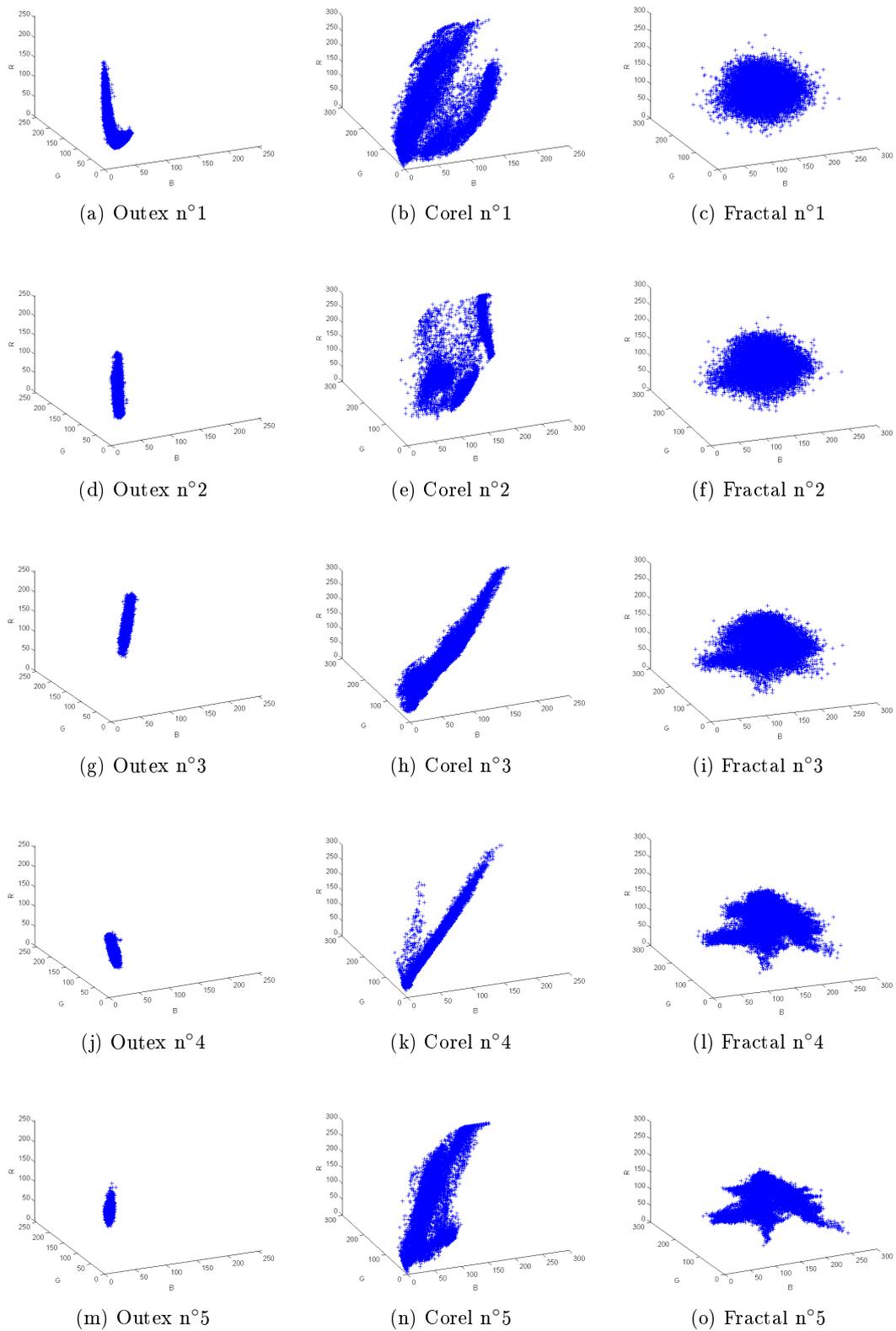


FIGURE 3.21 – Histogramme couleur des 15 images dans l'espace RGB.

		Outex					Corel					Fractal				
		n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5
Marg	δ_c	71,4	56	41	66,1	62,5	22,7	0	5,6	11,7	0	0	0	0	0	0
	ε_c	11,2	16,5	41,7	18,7	34,6	4,2	21,3	6,4	4,9	0,9	0	0	0	0	0
LSH	δ_c	82	57,6	41	67,9	63,8	22	1	5,6	11,3	0	32,1	42,2	44,9	79,1	74,2
	ε_c	12,1	20,2	42	20,1	35	3,8	33,5	7,2	4,9	0,9	53,3	52,7	53,2	51	52,2
IRGB	δ_c	82,4	59,2	45,3	71,1	63,8	57	52,3	15,7	63	38,9	78	74,6	69,7	66,6	68,3
	ε_c	12,3	15,4	40,1	16,8	33,3	3,8	19,3	7,2	4,9	0,9	32,9	31,5	34,3	36,1	37,7
CCMM	δ_c	70,4	56,1	40,5	68	62,4	19,9	1	5,6	11,3	0	21,5	25,2	31,5	34,4	37,3
	ε_c	12,1	15,3	40,1	16,8	33,3	3,8	19,3	7,2	4,9	0,9	31,9	31,5	34,3	35,7	36,2

FIGURE 3.22 – Couleurs idempotentes obtenues pour chacune des images après application des opérateurs d'érosion et de dilatation des différentes méthodes. La distance (exprimée en ΔE dans l'espace CIELAB) à la coordonnée de convergence (noir pour l'érosion et blanc pour la dilatation) est indiquée pour chacune des couleurs obtenues.

3.3.1 Etude de la vitesse de convergence

Nous nous intéressons ici au nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la couleur d'idempotence des opérateurs d'érosion et de dilatation. Ce paramètre est important pour les processus multi-itératifs tels que l'analyse de texture. La capacité à concentrer l'information de texture dans les premières itérations permet non seulement d'obtenir des algorithmes moins coûteux en temps calculatoire mais également de ne pas avoir d'artefacts dans les résultats. Lorsque le nombre d'itérations est important, le chemin emprunté par les couleurs pour aboutir à la couleur de convergence ne sera pas le plus direct. L'information obtenue pourra alors être perturbée par ce chemin sinueux.

Dans un premier temps, nous étudions le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre une image unicolore pour les images de la figure 3.20. L'historgramme de la figure 3.23 contient ces premiers résultats. L'utilisation de ces 15 images permet de mettre en avant la corrélation entre le nombre d'itérations et le contenu de l'image.

Les images Outex sont des images de textures avec une variation de couleurs plus faible que dans le cas des 2 autres bases (1ère colonne de la figure 3.21). Cependant, l'aspect texturé induit des variations plus fines des couleurs dans un proche voisinage. Les biais d'ordonnement locaux sont donc plus susceptibles d'être captés par le nombre total d'itérations nécessaires pour atteindre la couleur d'idempotence. De plus, les conditions de prise de vue de la base Outex induisent l'absence de spéularités, le maximum est donc proche de la couleur moyenne. En revanche dans ces images texturées, certaines zones non illuminées induisent des minimums faibles plus éloignés des valeurs médianes. Le nombre

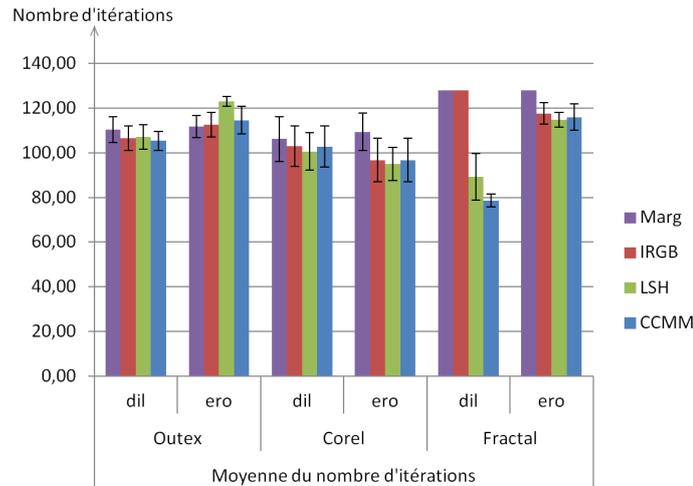


FIGURE 3.23 – Nombre d'itérations pour chacune des méthodes, pour chaque base de données et pour les deux opérations de base de la morphologie mathématique.

d'itérations est donc plus important pour les érosions que pour les dilatations.

Pour cette base d'image, aucune différence significative n'apparait entre les approches pour les dilatations. En revanche, dans le cas des érosions les approches de type LSH se trouvent légèrement défavorisées. La faible variation existant dans les couleurs sombres ne permet pas d'utiliser seulement le plan luminance et entraîne des non-linéarités avec l'utilisation des plans saturation et teinte. La méthode IRGB n'a pas le même comportement puisqu'elle combine l'information de luminance et de teinte dans sa composante I.

Comme nous pouvons le voir à partir des histogrammes de la 2ème colonne de la figure 3.21, la base Corel est composée d'images ayant une grande variation colorimétrique et donc une grande distance entre la couleur moyenne et la couleur d'idempotence. Si des différences locales de comportement existent, elles ne sont pas perceptibles par le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la couleur d'idempotence. Nous n'observons donc que peu de différences entre les approches (quelques unités), ce qui est peu significatif. La méthode marginale obtient néanmoins un nombre d'itérations supérieur aux autres méthodes. La composition colorimétrique de ces images entraîne l'apparition de fausses couleurs éloignées de l'ensemble initial des couleurs de l'image augmentant ainsi le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir la couleur idempotente.

Les images fractales ont été générées dans l'espace RGB avec différents niveaux de complexité mais excitant l'intégralité du spectre spatio-colorimétrique de l'image (3ème colonne de la figure 3.21). La conséquence est une très grande variété de couleurs dans l'enveloppe des couleurs initiales des images. Cette richesse des variations n'est pas accessible par les images des 2 autres bases. Le nombre de couleurs explorées est quasiment le même dans les 5 cas, mais le volume les contenant diminue avec la complexité de la texture.

Les différences obtenues entre le nombre d'itérations de l'érosion et de la dilatation sont dues à la position de la couleur d'idempotence. La génération des images s'effectue à partir

des couleurs situées dans les coins. Pour avoir uniquement une variation de la texture, ces 5 images sont générées avec les mêmes couleurs initiales. La position des zones de couleurs claires et sombres est donc inchangée. La zone sombre se situe sur le bord de l'image tandis que la zone claire se situe au centre de l'image. La couleur d'idempotence de la dilatation se situant au centre de l'image se propagera plus vite que la couleur d'idempotence de l'érosion située sur le bord.

La méthode IRGB obtient le nombre d'itérations maximum pour chaque image fractale dilatée du fait que la couleur d'idempotence pour cette méthode se trouve être une des couleurs d'initialisation se situant dans un coin de l'image.

Pour cette base d'images, la méthode marginale obtient également un nombre d'itérations supérieur aux autres méthodes du fait de la grande variation des couleurs composant les images.

Pour obtenir une comparaison plus approfondie sur des images variées en couleurs et en texture, nous proposons ici d'effectuer ce test sur la base Vistex [102] constituée de 167 images.

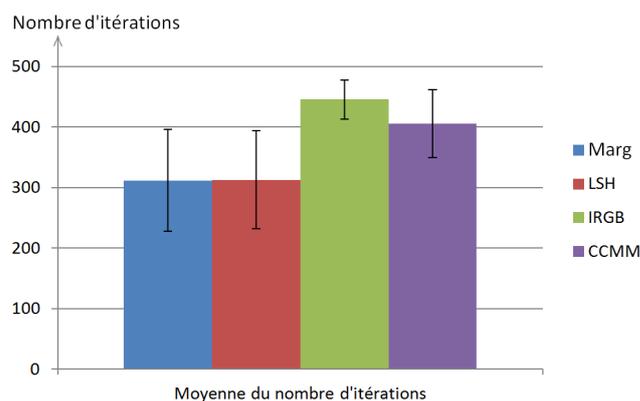


FIGURE 3.24 – Nombre d'itérations nécessaire pour obtenir la couleur d'idempotence lors de dilatations et pour chacune des méthodes en utilisant la base d'images Vistex.

La faiblesse de l'approche IRGB ressort nettement, les contenus Vistex souvent traités avec des approches en niveaux de gris sont bien adaptés à un ordonnancement LSH. Dans ce contexte, une approche IRGB aurait pu apparaître équivalente, ce que conteste ce résultat qui est lié aux non-linéarités d'ordonnancement couleur sous-jacent à cette approche. L'approche CCMM est moins efficace que l'approche IRGB sur ces images où l'information couleur n'est pas forcément déterminante.

3.3.2 Etude du chemin de convergence

Le deuxième paramètre pour étudier la convergence des méthodes est le calcul de la distance cumulée entre tous les pixels de l'image et la couleur de « référence ». Nous étudions ce paramètre en utilisant deux couleurs de « référence », la première est la couleur de convergence qui n'appartient pas forcément à l'ensemble des couleurs de l'image et la seconde est la couleur d'idempotence. Pour les 4 méthodes testées, la couleur de convergence

est le blanc pour la dilatation et le noir pour l'érosion. Les couleurs d'idempotence sont différentes en fonction de l'image et de la méthode (voir tableau 3.22).

Ce paramètre permet de voir si le chemin emprunté par les couleurs est convergent de la même manière que pour les images niveaux de gris.

Les figures 3.25 et 3.26 montrent respectivement les résultats pour l'érosion et la dilatation des images des différentes bases. Les couleurs des courbes associées à chaque image sont indiquées dans la figure 3.20 en dessous de chacune des images.

La figure 3.26a montre l'évolution de la distance à la couleur de convergence lors de la dilatation pour la base Outex. L'approche CCMM présente toujours les courbes les plus basses indiquant une meilleure convergence. Dans le cas de la première image (courbe rouge), les approches LSH et IRGB n'obtiennent pas une convergence stricte ; la distance entre les couleurs de l'image dilatée et la couleur de convergence. Cette image présente différentes textures colorées de haute fréquence qui mettent à mal ces deux techniques d'ordonnement. Pour l'érosion (figure 3.25a), seule la méthode LSH obtient un comportement non strictement convergent, confirmant ainsi la remarque précédente : la faible variation existant dans les couleurs sombres ne permet pas d'utiliser seulement le plan luminance et entraîne des non-linéarités avec l'utilisation des plans saturation et teinte.

Pour la base Corel et dans le cas de la distance cumulée à la couleur de convergence de la dilatation (figure 3.26c), l'approche IRGB ne converge pas strictement pour 4 des 5 images. Le chemin emprunté par les couleurs caractérise les non-linéarités de comportement de cette méthode. De plus, la couleur d'idempotence obtenue dans cette situation est très éloignée de la couleur de convergence contrairement aux autres méthodes. Les approches marginale, LSH et CCMM présentent un comportement de convergence stricte et ne sont pas différentiables. De même lors de l'érosion (figure 3.25c), toutes les méthodes ont un comportement strictement convergent, à l'exception de la méthode LSH pour la 2ème image de la base.

Les images fractales ont des textures complexes excitant toutes les fréquences du spectre avec une énergie fonction de l'inverse de la dimension fractale. Nous pouvons voir sur la figures 3.26e que l'approche IRGB entraîne localement une convergence vers des couleurs s'écartant de la couleur d'idempotence. La méthode LSH diverge jusqu'à obtenir la couleur d'idempotence. Lorsque la résolution couleur devient importante, c'est-à-dire pour les images de faible dimension fractale plus à droite dans la figure 3.20, les approches séparant teinte et saturation ne sont plus adaptées et induisent des biais s'accumulant et empêchant une convergence stricte (figure 3.25e). Finalement seule l'approche CMM assure une convergence stricte dans tous les cas de figure, même si les images ont été générées dans RGB.

Dans le cas de la distance cumulée à la couleur d'idempotence (2ème colonne des figures 3.25 et 3.26), seule la méthode marginale obtient un comportement strictement convergent. Seulement, cette méthode fait apparaître des couleurs qui n'appartiennent pas à l'ensemble de couleurs initial. Les non-linéarités des méthodes IRGB et LSH sont principalement mises en avant lors de la dilatation des images de la base fractale. Seule, la

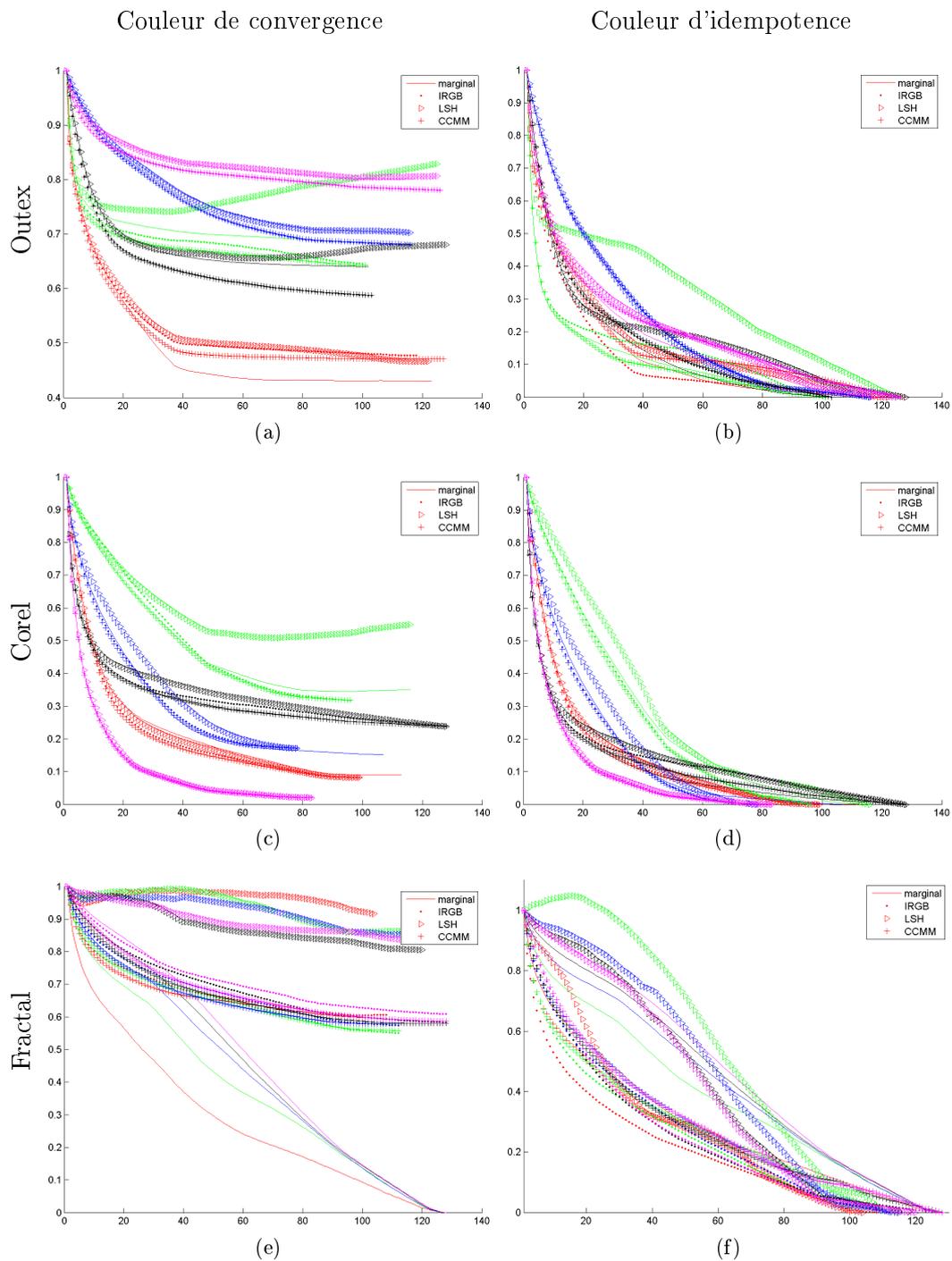


FIGURE 3.25 – Courbes d'évolution de la distance cumulée en fonction des itérations. L'opération utilisée est l'érosion. La distance est calculée par rapport au blanc pour la 1ère colonne et par rapport à la couleur d'idempotence pour la 2ème colonne.

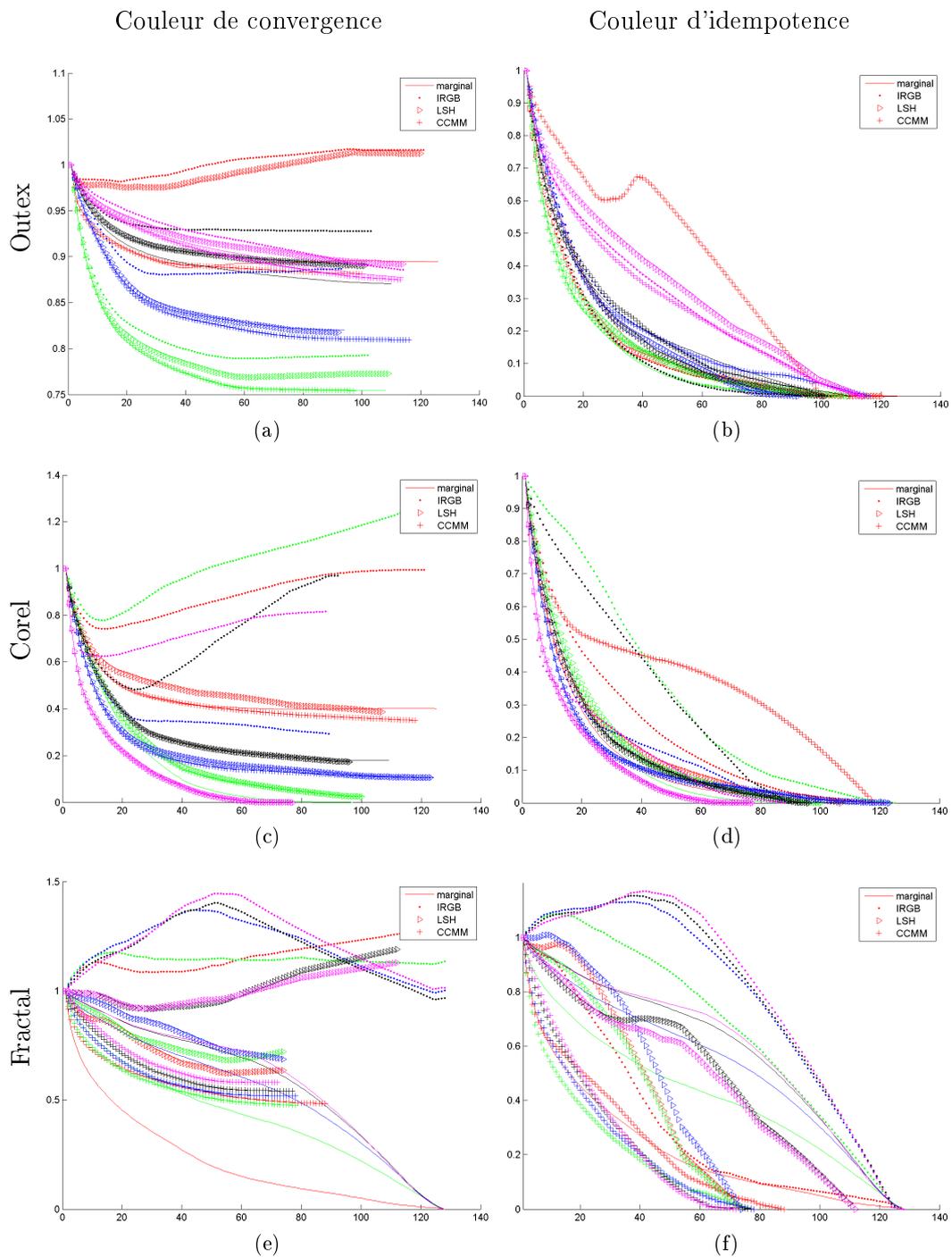


FIGURE 3.26 – Courbes d'évolution de la distance cumulée en fonction des itérations. L'opération utilisée est la dilatation. La distance est calculée par rapport au blanc pour la 1ère colonne et par rapport à la couleur d'idempotence pour la 2ème colonne.

méthode CCMM obtient une convergence stricte mise à part la première image de la base Outex. Ce comportement s'explique par la forme en croissant du nuage de points obligeant alors les couleurs à s'éloigner de la couleur d'idempotence avant de pouvoir l'atteindre.

En conclusion, la seule méthode qui suit un chemin strictement convergent dans la totalité des cas, sauf une exception s'expliquant par la forme du nuage de points, est notre méthode CCMM. Cette convergence est vérifiée que ce soit par rapport à la couleur d'idempotence mais surtout à la couleur de convergence. Pour ce paramètre, nous pouvons dire que la méthode CCMM est donc celle qui respecte le mieux le critère de chemin convergent. De plus, nous pouvons constater que pour toutes les images, la méthode CCMM est la méthode qui obtient la couleur la plus proche de la coordonnée de convergence en utilisant seulement les couleurs présentes dans l'image initiale.

3.3.3 Intérêt des critères d'efficacité numérique

Les critères d'efficacité numérique ne permettent pas à eux seuls de choisir la meilleure méthode mais permettent de mettre en avant les comportements non-linéaires induisant des biais dans les schémas multi-échelles. Le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une image uniforme dépend principalement du contenu de l'image même si quelques différences apparaissent permettant de mettre en avant certains défauts des méthodes. Néanmoins, le critère de la distance cumulée entre tous les pixels de l'image et la couleur maximale permet de voir que toutes les méthodes n'ont pas un chemin convergent vers la couleur maximale. Ce dernier critère est donc important lorsque l'application à mettre en œuvre est un processus d'analyse de texture multi-itératif. Les méthodes qui convergent strictement vers la couleur de référence (convergence ou idempotence) n'induisent pas d'artefacts dans le résultat d'un tel processus et peuvent alors être utilisées dans ce contexte.

Méthodes	Distance à la coordonnée de convergence	Vitesse de convergence	Chemin de convergence	Total
Marginale	3/4	1/4	14/15 + 15/15	0,66
Distance cumulée	pas de convergence			0
Lexicographique IRGB	1/4	2/4	3/15 + 11/15	0,41
Lexicographique LSH	2/4	3/4	2/15 + 11/15	0,56
CCMM	3/4	3/4	15/15 + 14/15	0,82

TABLE 3.7 – Score des méthodes pour les critères d'efficacité numérique.

La table 3.7 résume les différents résultats obtenus pour les critères d'efficacité numérique. Les scores obtenus pour les critères de distance à la coordonnée de convergence et de vitesse de convergence correspondent aux scores des méthodes. Le score obtenu est l'inverse du classement des méthodes (note de 4 pour la meilleure et de 1 pour la plus faible). Le score obtenu pour le chemin de convergence correspond au nombre de chemin convergents pour les 15 images en utilisant la coordonnée de convergence et la coordonnée d'idempotence. Le

score total est la moyenne des trois critères.

Les approches IRGB sont gênées par une forte complexité colorimétrique, apparaissant notamment dans les textures fines (hautes fréquences). Pour des images de complexité limitée les approches LSH donnent un résultat globalement satisfaisant dans des coûts réduits, mais sans gage de précision (possibilité de convergence non stricte). Seule l'approche CCMM assure systématiquement cette convergence et par retombée la précision des attributs qui découlent du traitement.

3.4 Bilan sur les critères

Le tableau 3.8 synthétise les différents apports des critères testés dans ce chapitre.

	Bilan
Critères de choix basés sur les propriétés théoriques	Discriminant en imposant une contrainte supplémentaire sur le complémentaire et le sens de celui-ci face à l'information couleur
Critères d'incertitude	Mise en avant des non-linéarités lors de l'ordonnement de dégradés et de l'importance de l'utilisation des ESNP pour l'analyse de textures fractales.
Critères d'efficacité numérique	Mise en avant des non-linéarités des méthodes d'ordonnement face à la complexité des textures couleur

TABLE 3.8 – Synthèse des résultats pour les critères.

En ce qui concerne l'évaluation des critères, la validation des propriétés théoriques est importante mais ne permet pas de discriminer une méthode plutôt qu'une autre ; exception faite de certaines méthodes ne correspondant pas au fonctionnement classique de la morphologie mathématique (ordonnement à partir de la distance cumulée). Cependant, notre contexte de travail nous contraint à prendre en compte le comportement du système visuel humain et nous autorise alors l'élimination des méthodes ne respectant pas cette contrainte, notamment parce qu'elles ne pourront pas combiner des opérateurs duaux.

Cette famille de critères pourra également être utilisée pour la validation des opérateurs d'ouverture/fermeture en utilisant la propriété d'idempotence. Cette propriété est indispensable pour utiliser les opérateurs d'ouverture/fermeture dans des opérations de filtrage.

Les critères de précision et de vitesse de convergence sont liés entre eux, les premiers parlent directement des biais de mesure, alors que les seconds mesurent la capacité à atteindre un objectif final le plus efficacement possible. Les résultats des critères de précision concordent avec ceux de vitesse de convergence. Même si l'interprétation est plus compliquée, l'approche estimant la vitesse de convergence par rapport à la couleur de convergence ou d'idempotence est la plus fiable. En effet, la production du critère de convergence ne né-

cessite pas d'autre processus pouvant gêner l'analyse des résultats. La courbe des distances cumulées à la couleur de convergence/idempotence permet, à elle seule, d'identifier des non-linéarités de convergence. Alors que l'analyse de textures complexes par le biais d'attributs morphologiques exige de résoudre les questions sur le calcul de volumes et aires couleur, sur la mesure de pente des évolutions log-log, mais surtout de disposer d'images fractales couleur générées vectoriellement et avec la même précision quelle que soit la complexité de la texture.

Ces dernières remarques donnent une partie des perspectives naturelles de ce travail, avec la question de l'intégration couleur et celle de générateurs fractals vectoriels plus adaptés au contexte de la couleur.

Pour finir, nous résumons les scores des méthodes d'ordonnement testées dans ce chapitre (tableau 3.9). Le score final est la somme des scores des trois familles de critères.

Méthodes	Critère sur les propriétés théoriques	Critères d'incertitude	Critère d'efficacité numérique	Note finale
Marginale	2/3	0,42	0,66	1,75/3
Distance cumulée	0/3	0,33	0	0,33/3
Lexicographique IRGB	1/3	0,4	0,41	1,14/3
Lexicographique LSH	1,3/3	0,52	0,56	1,51/3
CCMM	3/3 (avec ESP et ESNP)	0,77	0,82	2,59/3

TABLE 3.9 – Score final des méthodes face aux critères testés.

La méthode marginale obtient la validation de la propriété de dualité théoriquement et numériquement. Cependant, le complémentaire couleur utilisé n'a pas de sens perceptuel. Les résultats obtenus pour l'analyse de textures fractales sont supérieurs aux autres méthodes mais les images sont générées dans l'espace RGB ce qui la favorise. Le point le plus important est l'apparition de fausses couleurs qui entraîne une dégradation des dégradés couleur.

L'approche par distance cumulée ne valide pas théoriquement la dualité, ce qui est confirmé par l'application numérique des opérateurs. Le complémentaire couleur qu'elle utilise n'a également pas de sens perceptuel. Tout comme la méthode marginale, elle obtient de bons résultats pour l'analyse de textures fractales du fait qu'elle travaille dans l'espace de génération des images. Cependant, son coût calculatoire est très élevé en comparaison aux autres méthodes. Sa dilatation est très instable et son érosion est équivalente à un filtre médian. Nous ne pouvons donc pas utiliser l'ordonnement basé sur la distance cumulée

dans le cadre de la morphologie mathématique.

Les ordres lexicographiques IRGB et LSH sont également valides théoriquement au sens mathématique mais numériquement ils obtiennent quelques erreurs. Le complémentaire couleur utilisé est ici aussi un miroir au blanc qui n'a pas de sens perceptuel d'où les problèmes induits lors du test numérique. Ces méthodes engendrent ainsi des non-linéarités dans leurs ordonnancements qui se traduisent par une non-convergence des nuages de couleurs ainsi que la détérioration des dégradés couleur après ordonnancement. Les résultats obtenus pour l'analyse de textures fractales ne sont pas les meilleurs mais restent néanmoins satisfaisants, expliquant ainsi leur popularité actuelle.

Enfin la méthode CCMM est la seule à valider la propriété de dualité théoriquement et numériquement en utilisant une écriture du complémentaire couleur valide perceptuellement. Lors de l'ordonnement de dégradés, elle obtient les meilleurs résultats. Les critères d'efficacité numérique permettent de mettre en avant sa stabilité de convergence face aux autres méthodes de la littérature. Finalement ses résultats pour l'analyse de textures fractales sont légèrement supérieurs aux autres méthodes. La possibilité d'utiliser les éléments structurants non-plats, et donc d'obtenir une construction au plus proche de l'algorithme niveaux de gris, la rend plus précise et donc plus performante.

Bien que l'objectif de ce chapitre n'était pas celui-ci, nous pouvons quand même conclure que l'approche CCMM est la plus adaptée pour nos besoins de traitements morphologiques. Ce chapitre nous montre surtout les éléments fondamentaux attendus dans une construction d'ordre et l'impact qu'ils peuvent avoir sur les traitements. Les critères de mesure sont produits par la spécification du sens que nous voulons donner à l'analyse du résultat. Dans ce manuscrit le sens est essentiellement perceptuel, d'où l'usage des fonctions de distance ad-hoc, et physique dans le cadre spectral avec des distances à définir. La validation des critères passe par la définition d'un complémentaire valide et de façon inattendue à une linéarité d'ordonnement au sens de l'information considérée, ici la couleur.

Extension aux images multivaluées/multispectrales

Sommaire

4.1	Opérateurs morphologiques multi/hyperspectraux	98
4.1.1	Extension de la méthode CCMM au domaine multi/hyperspectral	98
4.1.2	Contraintes, hypothèses et premiers éléments de réponse	98
4.1.2.1	Ordre total et conjoncture sur la complexité du propos	98
4.1.2.2	La fonction de distance	100
4.1.2.3	Élément structurant non-plat multi/hyperspectral	110
4.2	Premiers résultats	110
4.2.1	Érosion et dilatation	110
4.2.2	Gradient de Beucher	113
4.2.3	Discussion	113
4.3	Bilan	113

Le propos métrologique qui nous guide en arrière plan de ce travail nous a amené à spécifier des traitements valides au sens perceptuel ou physique. Suivant ce chemin, nos travaux sont basés sur les fonctions de distances perceptuelles pour le développement d'opérateurs couleur. La validation physique passe par les notions d'énergie et de fréquences, soit l'imagerie spectrale (multi ou hyper). Dans ce chapitre, nous proposons une extension de notre méthode générique pour construire des opérateurs adaptés à ce type de données.

L'acquisition d'images multi/hyperspectrales connaît un essor depuis une vingtaine d'années. Ce type d'images est utilisé dans divers domaines scientifiques ; nous pouvons citer entre autres le domaine de l'écologie avec l'étude de l'évolution de la surface terrestre ou de la végétation [85, 129] ou le domaine militaire avec la détection de cible [107]. Pour tous ces domaines, l'objectif principal est la télédétection, souvent ramenée à une question de segmentation.

Diverses solutions sont utilisées pour la segmentation comme les réseaux de neurones [46], les Support Vector Machines (SVM) [88] ou encore les forêts d'arbres décisionnels [51]. Le principal problème de ces classifications est la non prise en compte de l'information spatiale. Les pixels sont traités comme une liste de mesures spectrales sans organisation spatiale. Ketig et Landgrebe [69] furent les premiers à développer un classifieur prenant en compte les caractéristiques spatiales des pixels. Pour cela ils utilisent un algorithme de recherche d'objets basé sur un partitionnement de l'image. Différentes techniques prenant en compte

l'information spatiale succèdent comme les méthodes de division/fusion [130], l'utilisation de marqueur [128], l'utilisation de profils morphologiques [18], la ligne de partage des eaux [91], etc.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons particulièrement aux algorithmes morphologiques. De nombreuses approches utilisant les opérateurs morphologiques ont déjà été développées dans le contexte du traitement d'images multi/hyperspectrales tels que la ligne de partage des eaux [91], la granulométrie [2], les profils morphologiques [74], la transformée en tout-ou-rien [137]. Cependant ces méthodes se confrontent à une principale limite. La majorité des approches ne prend pas en compte l'information vectorielle. Les approches passent principalement par des réductions du nombre de bandes pour, soit récupérer une image en fausses couleurs, soit une image niveaux de gris. Nous pouvons aussi trouver certaines approches qui utilisent directement une méthode marginale. De plus la validité des opérateurs n'est pas prouvée.

La non-prise en compte de l'information vectorielle des images multi/hyperspectrale est due à la grande dimension des données. En effet ce type d'images à l'avantage de fournir pour chaque pixel de l'image une information précise et quasi continue de son spectre électromagnétique (figure 4.1). Mais cette précision spectrale passe par l'acquisition de 100 voire 300 bandes spectrales pour les systèmes les plus performants. La taille conséquente des données rend alors les calculs lourds et coûteux en espace de stockage et en temps de calcul [106]. De plus, lors de traitements de données de grandes dimensions, il existe un phénomène appelé *malédiction de la dimension* ou plus communément appelé *phénomène de Hughes* [60]. Ce phénomène se traduit par une précision de plus en plus faible dès lors que la dimension des données croît [42].

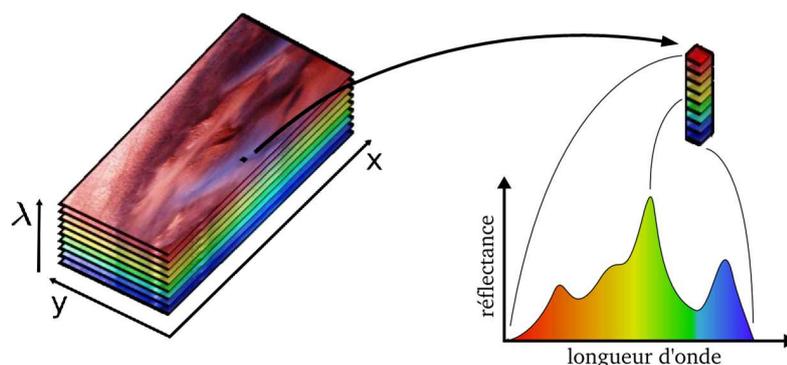


FIGURE 4.1 – Construction d'une image hyperspectrale.

La plupart des auteurs réduisent donc la dimension des images spectrales avant tout traitement pour palier aux contraintes précédentes. Pour justifier leur choix, ces auteurs se basent sur deux remarques. La première porte sur le fait que la réduction de la dimension tend à rendre les distributions gaussiennes lors de projections linéaires [50]. Cette caractéristique permet, par exemple, d'utiliser des classifications fondées sur l'hypothèse de normalité.

La seconde porte sur l'observation de la redondance d'information entre bandes adjacentes lors de l'acquisition d'un nombre important de longueur d'ondes [106, 72].

Différents processus de réduction de données sont utilisés. Certains réduisent le nombre de bandes en sélectionnant les bandes considérées comme les plus importantes [120, 35, 86]. D'autres auteurs regroupent les bandes adjacentes qui se ressemblent fortement avant d'effectuer une réduction à une bande sur chacun des groupes obtenus [43]. Pour finir la majorité des auteurs utilisent un processus de projection dans un espace de dimension inférieur comme l'Analyse en Composantes Principales (ACP) [67], l'Analyse Factorielle (AF) [91], l'Analyse en Composantes Indépendantes (ACI) [1], l'Analyse Discriminante de Fisher (ADF) [127], des réductions à l'aide d'ondelettes [66, 24], etc. Après ce changement d'espace, les auteurs conservent soit seulement la première composante [32] soit plusieurs composantes [65].

Malgré qu'une grande partie de la communauté scientifique soit axée sur une réduction de la dimension des données avant tout traitement sur des images multi/hyperspectrales, certains auteurs critiquent cette réduction [47]. Deux raisons sont données, d'une part les résultats obtenus par réduction de bandes ne donnent pas forcément de bons résultats et d'autre part pour pouvoir comparer deux images, le traitement doit être précis et surtout reproductible. Or, l'espace obtenu après réduction dépend du contenu de l'image, il ne sera donc pas identique pour toutes les images après une réduction de dimension.

Notre objectif de travail étant d'obtenir des traitements robustes d'un point de vue métrologique, nous nous consacrons donc à l'extension pleine bandes de nos opérateurs morphologiques. Ce processus permettra d'obtenir un traitement reproductible et donc de comparer les images traitées dans les mêmes conditions. Pour cela, nous utilisons les opérateurs de notre méthode CCMM développés dans le chapitre 2.

L'extension des opérateurs morphologiques doit répondre à plusieurs contraintes. Quelles que soit les valeurs d'entrée, la morphologie mathématique est fondée sur la théorie des treillis, la première contrainte est donc la construction d'un ordre total adapté aux données spectrales. La seconde contrainte est liée à l'écriture de nos opérateurs morphologiques. Notre méthode CCMM est fondée sur l'utilisation d'une fonction de distance, nous devons donc choisir ou définir la distance la plus adaptée dans ce contexte. Le choix de cette distance est important dans notre contexte pour prendre en compte le sens perceptuel ou physique de l'information traitée. Ce choix est d'autant plus important que toutes les méthodes de réduction de données et de classification utilisent une fonction de distance ou de similarité [68, 139]. Enfin, la dernière contrainte concerne la construction d'un élément structurant non-plat adapté aux opérateurs multi/hyperspectraux. Nous avons vu dans le chapitre 2 que la construction d'éléments structurant non-plats est possible en utilisant la distance ΔE dans l'espace CIELAB. Dans le chapitre 3, il est montré que l'utilisation de ce type d'éléments structurants augmentait la précision des opérateurs dans un processus d'analyse de texture. Pour les données multispectrales, la distance utilisée est différente. Une nouvelle construction doit donc être effectuée.

4.1 Opérateurs morphologiques multi/hyperspectraux

Les opérateurs multi/hyperspectraux que nous définissons dans ce chapitre sont construits sur le même principe que nos opérateurs de la CCMM. Nous allons donc dans un premier temps rappeler les points essentiels de la construction. Puis nous détaillerons les différentes contraintes et hypothèses nécessaires pour valider la construction des opérateurs. Pour chaque contrainte, nous donnons des premières pistes de réponse.

4.1.1 Extension de la méthode CCMM au domaine multi/hyperspectral

Nous avons vu précédemment que les méthodes de morphologie mathématique existantes pour le domaine multi/hyperspectral n'utilisent pas l'information dans son ensemble mais passent généralement par une réduction de la dimension. Notre but étant de valider nos opérateurs morphologiques d'un point de vue perceptuel ou physique, nous utilisons l'information pleine bande pour nos opérateurs multi/hyperspectraux. Cette extension est possible en adaptant l'écriture couleur développée précédemment. En effet l'utilisation de coordonnées de convergence et d'une fonction de distance rend l'écriture de nos opérateurs CCMM générique.

Les coordonnées de convergence des opérateurs multispectraux se notent également $\overrightarrow{O^{-\infty}}$ et $\overrightarrow{O^{+\infty}}$, cependant elles appartiennent à l'espace de représentation \mathbb{R}^n où n est le nombre de bandes spectrales. La relation entre deux coordonnées spectrales C_1 et C_2 se définit par une fonction de distance notée $\|\rightarrow\|$. La coordonnée C_x est définie comme plus petite que C_y pour l'érosion, en fonction de la coordonnée de convergence $\overrightarrow{O^{-\infty}}$ si :

$$C_x \preceq C_y \Leftrightarrow \|\overrightarrow{C_x O^{-\infty}}\| \leq \|\overrightarrow{C_y O^{-\infty}}\| \quad (4.1)$$

De la même manière la coordonnée C_x est plus grande que C_y , pour la dilatation en fonction de la coordonnée de convergence $\overrightarrow{O^{+\infty}}$ quand :

$$C_x \succeq C_y \Leftrightarrow \|\overrightarrow{C_x O^{+\infty}}\| \leq \|\overrightarrow{C_y O^{+\infty}}\| \quad (4.2)$$

Le principe de base pour étendre les opérateurs aux données multi/hyperspectrales est posé. Néanmoins, cette construction est insuffisante à ce stade pour obtenir un ordre total.

4.1.2 Contraintes, hypothèses et premiers éléments de réponse

4.1.2.1 Ordre total et conjoncture sur la complexité du propos

Comme pour la construction de l'ordonnancement couleur, l'utilisation d'une distance à une coordonnée de référence n'engendre pas un ordre total pour des données à plus d'1 dimension.

Ordre total

En utilisant la construction générique de notre méthode, l'obtention de l'ordre total passe par l'ajout de conditions supplémentaires. Le nombre de conditions augmente avec la dimension des données. En couleur, nous avons vu qu'il est nécessaire d'avoir trois conditions basées sur une fonction de distance et deux conditions basées sur l'ordre lexicographique. Pour des données de dimension nD , le nombre de conditions nécessaire est de $n + 2$ (équation 4.3). Plus le nombre de conditions à ajouter augmente, plus le choix de la condition appropriée est délicat.

$$\begin{aligned}
 \bigvee_{x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)} \{f(x)\} &= \mathcal{S}_{\mathcal{D}_{n+2}} = \left\{ C_y : \text{condition sur } C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_{n+1}} \right\} & (4.3) \\
 &\dots \\
 \mathcal{S}_{\mathcal{D}_3} &= \left\{ C_y : \overrightarrow{\|C_y O^{-\infty}\|} = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_2}} \left\{ \overrightarrow{\|C_x O^{-\infty}\|} \right\} \right\}; \\
 \mathcal{S}_{\mathcal{D}_2} &= \left\{ C_y : \overrightarrow{\|C_y C_i\|} = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_1}} \left\{ \overrightarrow{\|C_x C_i\|} \right\} \right\}; & (4.4) \\
 \text{et } \mathcal{S}_{\mathcal{D}_1} &= \left\{ C_y : \overrightarrow{\|C_y O^{+\infty}\|} = \bigwedge_{\forall x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)} \left\{ \overrightarrow{\|C_x O^{+\infty}\|} \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

Conjecture de réduction de complexité

Malgré la contrainte théorique pour obtenir l'ordre total, numériquement la comparaison en utilisant la distance à une coordonnée de référence est suffisante dans la majorité des cas (tableau 4.1). Dans le tableau 4.1, nous pouvons observer le cas de l'image « Le Chanteur » des valeurs dans la colonne « identiques », ces valeurs représentent le nombre de couleurs identiques ($\forall C_x, C_y \in \mathbb{R}^n, C_x^i = C_y^i, i = 1..n$). L'obtention de ces valeurs est dû au choix de construction de notre algorithme. Notre algorithme ne vérifie pas que deux couleurs sont égales avant de les ordonner. Nous avons choisi de construire l'algorithme ainsi en considérant que dans le cas d'images de scènes naturelles, le cas particulier où deux couleurs sont identiques est rare. Ce point pourra être discuté mais ne remet pas en cause la suffisance de la première condition pour discriminer deux couleurs.

Partant du constat précédent, nous proposons la conjecture suivante :

L'acquisition des images entraîne un bruit sur les différentes valeurs et ce bruit est caractérisé par une occupation spectrale particulière et différente à chaque réalisation. Ainsi, plus le nombre de bandes spectrales de représentation est important, plus la probabilité que deux distributions différentes soient confondues comme un même extremum décroît (équation 4.5).

$$\text{prob}\left(\#\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} Sd_i\right) > 1\right) > \text{prob}\left(\#\left(\bigcap_{i=1}^k Sd_i\right) > 1\right) \quad (4.5)$$

image	nombre de pixels	taille de l'ES	nombre de comparais	choix					
				1	2	3	4	5	identiques
lena	512x512	carré 3x3 : 0 0 0 0 0 0 0 0 0	2097152	2097152	0	0	0	0	0
mandrill	512x512		2097152	2097152	0	0	0	0	0
food0007	512x512		2097152	2097152	0	0	0	0	0
fractal H=0	513x513		2105352	2105352	0	0	0	0	0
fractal H=5	513x513		2105352	2105352	0	0	0	0	0
fractal H=10	513x513		2105352	2105352	0	0	0	0	0
bark0004	512x512		2097152	2097152	0	0	0	0	0
Le_Chanteur	500x644		2576000	1579821	0	0	0	0	996179
US_M102Z02T00	400x400		1280000	1280000	0	0	0	0	0
FR_M109Z02T00	400x400		1280000	1280000	0	0	0	0	0

TABLE 4.1 – Utilisation des différentes parties de la construction pour obtenir théoriquement l'ordre total dans le cas de nos opérateurs morphologiques de la CCMM.

avec Sd_i la contrainte $n^{\circ}i$ permettant d'obtenir l'ordre total.

Cette conjecture induit que la propriété d'ordre total est accessible *quasi* directement sur le premier niveau de notre construction ensembliste. Le tableau 4.1 vient confirmer cette conjecture, sans en apporter une preuve formelle. À partir de cette conjecture, dans la suite de ce chapitre nous utilisons seulement la contrainte de distance à une coordonnée de convergence pour construire nos opérateurs spectraux. Ce travail nécessite néanmoins d'être approfondi pour trouver les contraintes adaptées et nécessaires pour obtenir théoriquement l'ordre total.

4.1.2.2 La fonction de distance

L'écriture des opérateurs morphologiques développés dans ce chapitre nécessite la définition d'une fonction de distance adaptée aux données spectrales. Le choix de cette fonction de distance n'est pas seulement régi par sa capacité à prendre en compte des données de grande dimension, il doit également tenir compte des propriétés théoriques de la morphologie mathématique. Notre volonté de valider les opérateurs morphologiques nous a amené à tester la propriété de dualité des opérateurs. Ce critère est important pour valider la stabilité des opérateurs. Or, le choix de la distance dans ce contexte impacte sur la propriété de dualité. La dualité exploite la symétrie de la distance, il est donc nécessaire de travailler avec une distance qui respecte la symétrie ($\|\overrightarrow{C_x C_y}\| = \|\overrightarrow{C_y C_x}\|$) et l'inégalité triangulaire ($\|\overrightarrow{C_x C_y}\| \leq \|\overrightarrow{C_x C_z}\| + \|\overrightarrow{C_z C_y}\|$) et pas simplement une métrique ou divergence.

La seconde contrainte pour choisir la fonction de distance est liée à notre contexte de travail. Notre objectif est de construire des opérateurs valides au sens de la perception ou de la physique. La distance utilisée pour les opérateurs couleur permet de valider le sens perceptuel des opérateurs en utilisant la distance ΔE validée par la Commission Internationale de l'Éclairage d'un point de vue perceptuel. Pour le domaine multi/hyperspectral, la littérature montre qu'il existe un nombre important de métriques permettant de comparer deux distributions mais aucune n'est validée perceptuellement ou physiquement. Nous allons donc dans la suite de ce chapitre construire un protocole de test pour sélectionner la distance la plus appropriée.

À travers le choix de la distance, l'objectif est de produire des outils de traitement d'images complexes comme l'extraction d'attributs de texture vectorielle. Nous choisissons donc d'orienter notre analyse des distances sur leur précision et leur comportement linéaire face aux changements de contenu et d'acquisition.

Comparaison face à des distributions synthétiques

Le protocole utilisé est simple et basé sur la simulation de l'augmentation de la clarté de la scène et d'un changement de teinte. Pour cela, nous utilisons deux distributions synthétiques que nous modifions ainsi :

- Pour simuler l'augmentation de la clarté, nous changeons l'amplitude de la seconde distribution en multipliant la première distribution par un entier. Sur la figure 4.2a, nous pouvons voir un exemple d'augmentation d'amplitude. La distribution initiale est en rouge et la seconde distribution qui est amplifiée est en bleu.
- Pour simuler un changement de teinte, nous translatons la seconde distribution par rapport à la première. Sur la figure 4.2b, nous pouvons voir un exemple de translation. La distribution initiale est en rouge et la seconde distribution qui est translatée est en bleu.

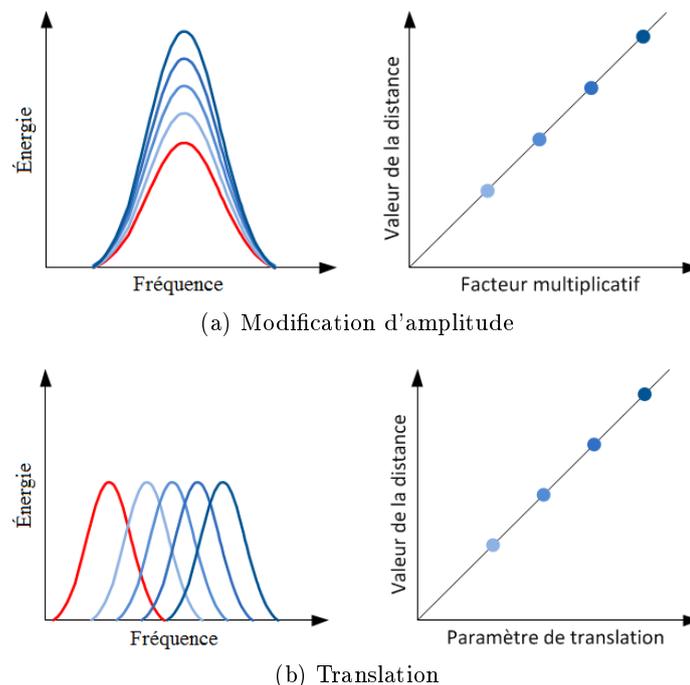


FIGURE 4.2 – Modifications spatiales appliquées aux distributions gaussiennes avec l'évolution de la distance « idéale » associée. La distribution initiale est en rouge et les distributions ayant subi les modifications sont en bleu.

Notre hypothèse pour sélectionner la distance la plus adaptée est qu'elle doit avoir un comportement linéaire face à ces deux transformations. La figure 4.2 montre l'évolution que nous souhaitons obtenir pour la distance à utiliser en prenant séparément les deux transformations. La modification d'amplitude modifie la valeur de la distance de façon linéaire et proportionnelle. Il en est de même pour la translation. Dans la suite de ce chapitre nous allons utiliser une surface représentant une combinaison des changements d'amplitude et des translations. Ainsi, la fonction de distance adéquate aura une surface plane (figure 4.3) dont l'évolution est linéaire face aux changements d'amplitude, aux translations et à la combinaison des deux transformations.

Nous allons donc étudier différentes distances existantes afin d'étudier leur comportement face à ces transformations élémentaires.

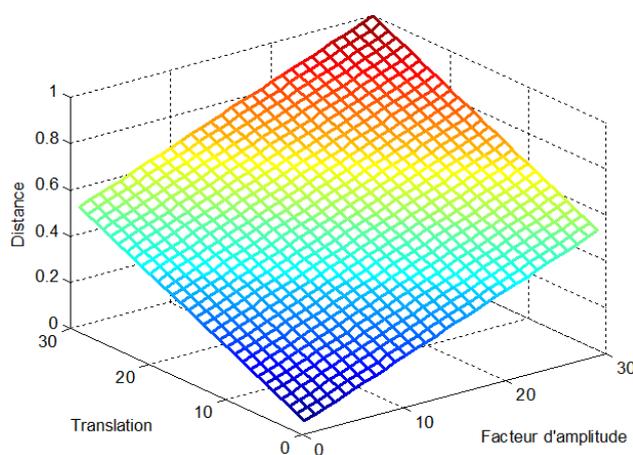


FIGURE 4.3 – Evolution de la distance idéale lors de la modification de l'amplitude combinée à la translation de la distribution.

Dans la littérature, nous trouvons trois principales familles de distance ou de similarité : les distances, les divergences et les transformations de coût. Pour chaque famille, trois types de constructions sont possibles. Le premier type est le calcul direct, comme les distances de Minkowski. Le second type passe par une pondération afin de gérer l'influence des petites variations pour les grandes valeurs face aux grandes variations pour les petites valeurs. Le dernier type est le calcul entropique afin de gérer le poids de chaque composante indépendamment les unes des autres.

Pour comparer ces distances nous utilisons deux distributions de forme gaussienne notées $h^1 = \{h_{ci}^1, i = 1..n\}$ et $h^2 = \{h_{ci}^2, i = 1..n\}$ avec un écart type de 10. Ces distributions appartiennent à R^n avec n représentant le nombre de bandes spectrales, ici n est fixé à 120.

Nous commençons par la distance de Minkowski d'ordre 2 qui est typiquement la distance euclidienne dans les espaces ad-hoc. Sa construction mathématique permet d'obtenir une évolution linéaire en fonction du changement d'amplitude (figure 4.4a), mais elle conduit également à une saturation avec la translation lorsque les deux distributions n'ont aucune intersection (figure 4.4a).

L'expression de la distance euclidienne est donnée par l'équation suivante :

$$d_{L_2}(h^1, h^2) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (h_{ci}^1 - h_{ci}^2)^2} \quad (4.6)$$

La distance suivante est celle de Geman-McClure. Ici aussi, la distance sature avec la translation lorsque les deux distributions n'ont aucune intersection (figure 4.4b). De plus la pondération appliquée conduit à un comportement non-linéaire lors de la modification d'amplitude (figure 4.4b).

L'expression de la distance de Geman-McClure est donnée par l'équation suivante :

$$d_{GMC}(h^1, h^2) = \sum_{i=1}^n \frac{(h_{ci}^1 - h_{ci}^2)^2}{1 + (h_{ci}^1 - h_{ci}^2)^2} \quad (4.7)$$

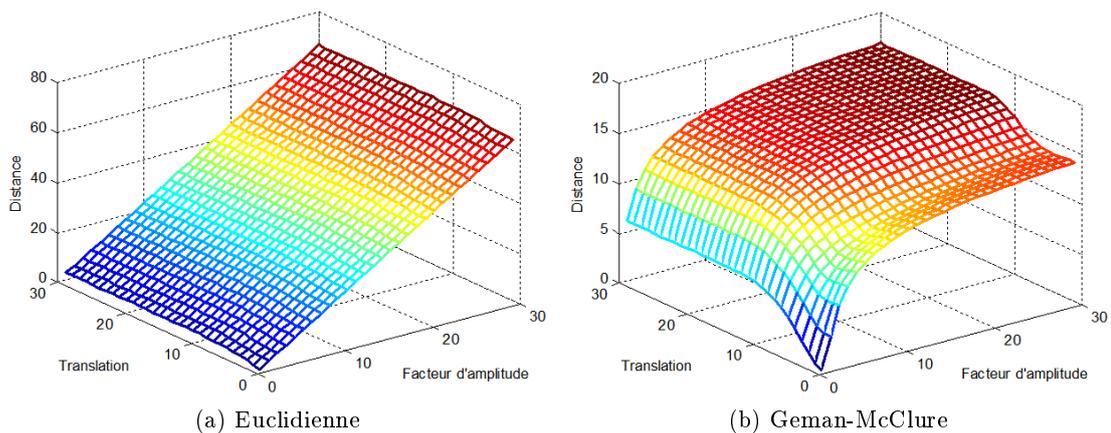


FIGURE 4.4 – Comportement des distances face aux changements d'amplitude et aux translations (Euclidienne et Geman-McClure)

Nous continuons avec la distance de Smith. Cette distance est une transformation de la métrique de Swain et Ballard afin de respecter la propriété de symétrie. Elle calcule une estimation du chevauchement entre deux histogrammes normalisés. Cette distance sature lors de la translation lorsque l'intersection entre les distributions est nulle, la valeur de saturation est de 1. Les modifications d'amplitude n'ont pas d'impact important, la distance étant basée sur la fonction minimum (figure 4.5a).

L'expression de la distance de Smith est donnée par l'équation suivante :

$$d_{Smi}(h^1, h^2) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \min(h_{ci}^1, h_{ci}^2)}{\min(\sum_{i=1}^n (h_{ci}^1), \sum_{i=1}^n (h_{ci}^2))} \quad (4.8)$$

Ensuite, nous aurions pu continuer avec la métrique de Kullback-Leibler, cependant tout comme la métrique de Swain et Ballard, celle-ci ne respecte pas la propriété de symétrie.

En revanche, la divergence de Jeffrey est une évolution de l'écriture de la métrique de Kullback-Leibler respectant les propriétés d'une distance. Elle mesure la probabilité d'une distribution à représenter la seconde. L'expérimentation montre qu'elle sature pendant les modifications d'amplitude lorsqu'il n'y a pas d'intersection (figure 4.5b). Cette distance obtient une évolution linéaire avec les modifications d'amplitude, à l'exception des faibles changements d'amplitude et petites translations.

L'expression de la divergence de Jeffrey est donnée par l'équation suivante :

$$D_J(h^1, h^2) = \sum_{i=1}^n \left(h_{ci}^1 \log \frac{2h_{ci}^1}{h_{ci}^1 + h_{ci}^2} + h_{ci}^2 \log \frac{2h_{ci}^2}{h_{ci}^1 + h_{ci}^2} \right) \quad (4.9)$$

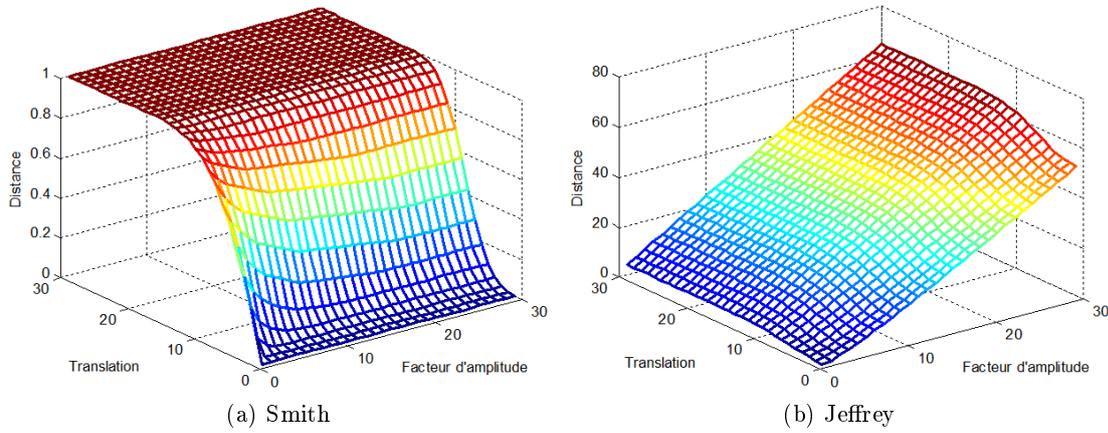


FIGURE 4.5 – Comportement des distances face aux changements d'amplitude et aux translations (Smith et Jeffrey)

Nous étudions maintenant la distance du χ^2 . L'hypothèse de départ de cette distance est que les distributions sont gaussiennes. Ce qui est respecté dans le cadre de ce test, mais difficile à valider dans un contexte réel. Sa construction mathématique conduit à une saturation face aux translations lorsque les deux distributions n'ont aucune intersection (figure 4.6a). Cette distance n'a pas de saturation lors des changements d'amplitude mais un affaiblissement des valeurs en raison de la pondération.

L'expression de la distance du χ^2 est donnée par l'équation suivante :

$$D_{\chi^2}(h^1, h^2) = \sum_{i=1}^n \frac{(h_{ci}^1 - h_{ci}^2)^2}{(h_{ci}^1 + h_{ci}^2)^2} \quad (4.10)$$

Les distances suivantes sont celles de Bhattacharyya (figure 4.6b), Divergence (figure 4.7a) et celle de Hellinger (figure 4.7b) qui ont des écritures similaires. Ces distances saturent lorsque les distributions n'ont pas d'intersection. De plus, elles n'ont aucune évolution pour les changements d'amplitude en raison de la normalisation. Les expressions sont composées de la norme des distributions $\|H^p\|$ qui s'exprime par : $d_{L_1}(H^p) = \sum_{i=1}^n (h_{ci}^p)$.

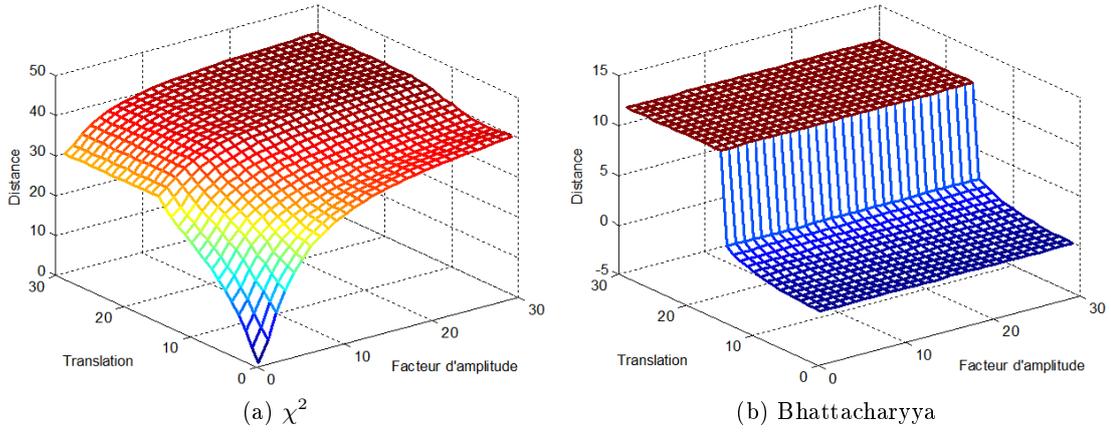


FIGURE 4.6 – Comportement des distances face aux changements d'amplitude et aux translations (χ^2 et Bhattacharyya)

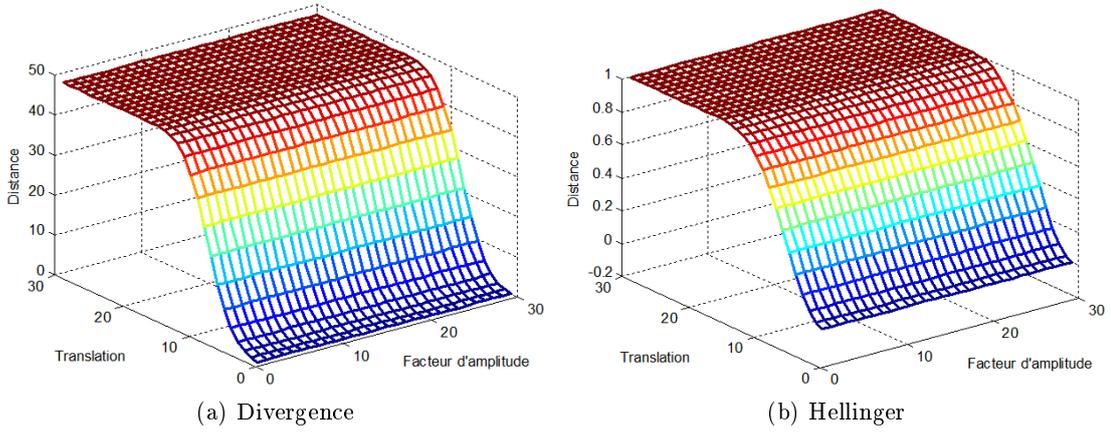


FIGURE 4.7 – Comportement des distances face aux changements d'amplitude et aux translations (Divergence et Hellinger)

L'expression de la distance de Bhattacharyya est donnée par l'équation suivante :

$$D_{Bha}(H^1, H^2) = -\log \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{h_{ci}^1 \cdot h_{ci}^2}{\|H^1\| \cdot \|H^2\|}} \right) \quad (4.11)$$

L'expression de la Divergence est donnée par l'équation suivante :

$$D_{Div}(H^1, H^2) = \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{h_{ci}^1}{\|H^1\|} - \frac{h_{ci}^2}{\|H^2\|} \right) \cdot \left(\log \frac{h_{ci}^1}{\|H^1\|} - \log \frac{h_{ci}^2}{\|H^2\|} \right) \right) \quad (4.12)$$

L'expression de la distance de Hellinger est donnée par l'équation suivante :

$$D_{Hel}(h^1, h^2) = 1 - \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{h_{ci}^1 \cdot h_{ci}^2}{\|h^1\| \cdot \|h^2\|}} \quad (4.13)$$

Une des distances souvent utilisées dans la littérature multispectrale est la distance SAM (Spectral angle mapper). Cette distance consiste à calculer l'angle formé par les deux vecteurs des distributions dans l'espace de représentation nD. Ce calcul d'angle rend cette métrique invariante aux changements d'amplitudes (figure 4.8a). De la même manière que les distances précédentes, la distance SAM sature lors des translations. L'expression de la distance SAM est donnée par l'équation suivante :

$$D_{SAM}(h^1, h^2) = \cos^{-1} \frac{\sum_{i=1}^n h_{ci}^1 \cdot h_{ci}^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (h_{ci}^1)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (h_{ci}^2)^2}} \quad (4.14)$$

La dernière distance étudiée est la distance EMD (Earth Mover's Distance). Elle est basée sur le coût minimal nécessaire pour transformer une distribution en une autre. Aucune restriction n'est imposée sur la nature des distributions et la dimension des deux distributions peut être différente. Le calcul de l'EMD nécessite la construction d'une matrice de coût D qui contient toutes les distances d entre deux composantes : $D_{ij} = d(h_i^1, h_j^2)$. Elle nécessite également la définition d'un flux F qui contient l'ensemble des déplacements f_{ij} nécessaires pour transformer une distribution en une autre. La distance EMD est finalement la minimisation de l'équation 4.15 soumise à une normalisation (équation 4.16).

L'expression de l'EMD est donnée par l'équation suivante :

$$eq_{EMD}(h^1, h^2, F) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n D_{ij} \cdot f_{ij} \quad (4.15)$$

$$D_{EMD}(h^1, h^2) = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n D_{ij} \cdot f_{ij}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij}} \quad (4.16)$$

Comme la translation entre les distributions est linéaire, l'évolution du coût de transport de l'énergie est linéaire en fonction de translation. Lorsque la distribution la plus faible est totalement remplie, le transport de l'énergie n'est plus possible et les changements d'amplitude ne produisent pas d'évolution. Toutefois, ce transport d'énergie n'est pas nul et diminue lorsque la translation est combinée avec les changements d'amplitude (voir figure 4.8b).

Pour résumer, la distance appropriée doit avoir une évolution linéaire en fonction de la translation et des changements d'amplitude pour répondre à nos hypothèses initiales. Seule la distance EMD tient compte des différences lors de la translation lorsque les distributions ne s'intersectent pas. Mais l'EMD n'augmente pas avec les changements d'amplitude contrairement à la distance euclidienne, de Geman-McClure et la divergence de Jeffrey. Toutefois, ces trois distances saturent lors des translations si les distributions n'ont aucune intersection.

Parmi ce premier panel de distances nous n'avons pas trouvé la distance appropriée. Nous pouvons donc nous interroger sur son existence. Dans le cas où aucune distance ne convient, nous devons en construire une nouvelle. Trois solutions pourront alors être envisagées. La première est de combiner plusieurs distances entre elles. La seconde est de modifier une distance existante. La dernière est de construire une distance sans se baser sur les distances déjà existantes.

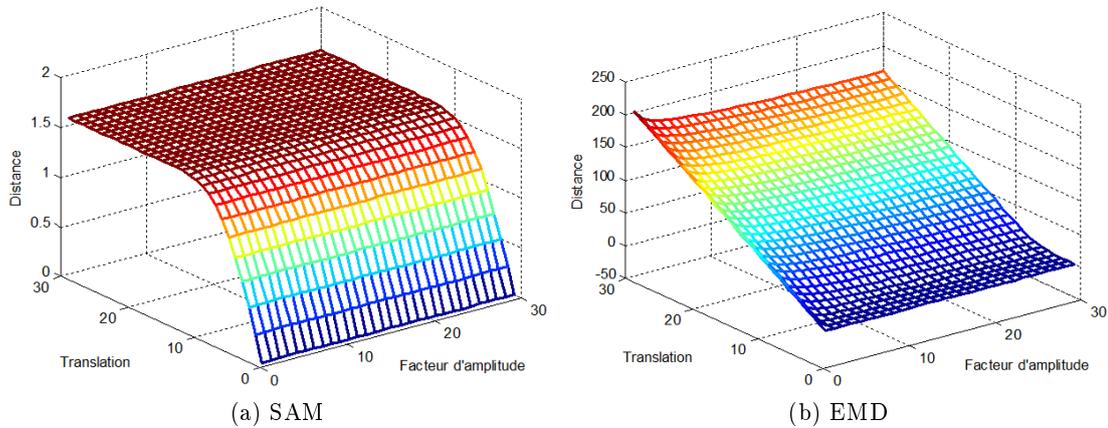


FIGURE 4.8 – Comportement des distances face aux changements d’amplitude et aux translations (SAM et EMD)

À ce stade de notre travail, nous proposons de développer une nouvelle distance appelée « EMD combinée ». Cette distance est une combinaison entre l’EMD et un calcul de différence d’énergie (équation 4.17).

L’expression de l’« EMD combinée » est donnée par l’équation suivante :

$$D_{NEMD}(h^1, h^2) = \alpha D_{EMD}(h^1, h^2) + (1 - \alpha) (||h^1|| - ||h^2||) \quad (4.17)$$

La figure 4.9a montre le comportement de cette nouvelle distance, elle évolue en fonction des deux transformations. Cependant la translation et les changements d’amplitude ont un impact différent sur l’évolution. Afin de pouvoir gérer l’influence de chaque partie de l’expression de l’« EMD combinée », nous avons introduit le paramètre α . En modifiant ce paramètre nous pouvons nous rapprocher du comportement de la distance appropriée (figures 4.9b et 4.9c), l’influence du changement d’amplitude diminue lorsque α augmente.

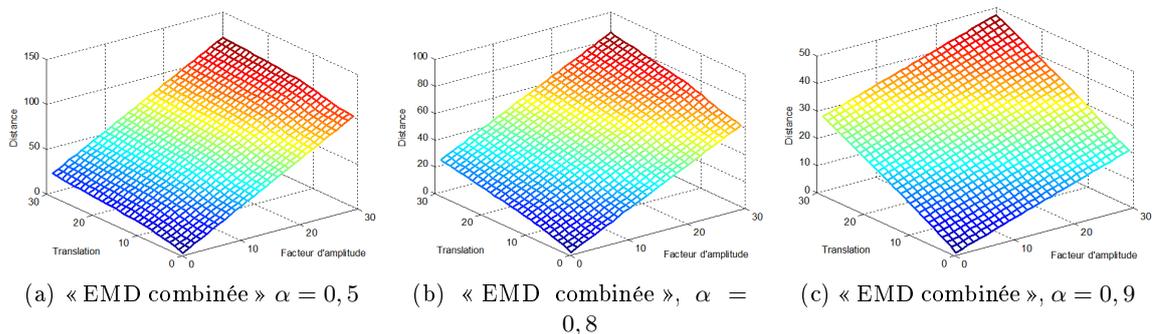


FIGURE 4.9 – Comportement de l’« EMD combinée » face aux changements d’amplitude et aux translations en utilisant différents paramètres

Pour conclure cette étude sur la distance, nous n’avons pas trouvé la distance répondant à nos hypothèses initiales parmi les distances de la littérature. Nous avons néanmoins pu

construire une nouvelle métrique combinant la métrique EMD, qui ne varie pas en fonction du changement d'amplitude, avec un calcul de différence d'énergie. D'autres auteurs ont également développé ce type de métrique en partant du même constat. Cette étude de distance n'est pas exhaustive. Néanmoins, elle vise à montrer la difficulté à trouver une distance adaptée au contexte multispectral tout en ayant un sens perceptuel ou physique. La perspective de cette étude est d'approfondir le travail de recherche ou de construction sur la métrique la plus adaptée. De plus, l'influence de la distance devra être évaluée dans des schémas morphologiques complets.

Comparaison face à des dégradés spectraux

Après avoir simulé des modifications de spectres avec des distributions synthétiques, nous évaluons maintenant le comportement des métriques face à des modifications de distributions réelles. Pour cela, nous les évaluons en utilisant des dégradés de spectres issus d'images multispectrales de la base de Finlayson, Hordley and Morovic [41]. Elles sont composées de 31 bandes allant de 400 à 700 nm tous les 10 nm. Pour visualiser l'image utilisée, elle est convertie en image couleur dans l'espace RGB.

Cette seconde étude repose donc sur le comportement des distances le long de trois dégradés spectraux extraits de l'image « CDREF31_15vanish » (Figure 4.10). Pour chaque dégradé, quatre colonnes sont extraites. La figure 4.11 montre l'évolution des spectres pour la première colonne de chaque dégradé. Nous pouvons voir que les extrémités des spectres sont bruitées. Afin de diminuer l'impact du bruit sur l'évolution des distances, par la suite nous utilisons le dégradé moyen en utilisant la moyenne des quatre colonnes du dégradé.

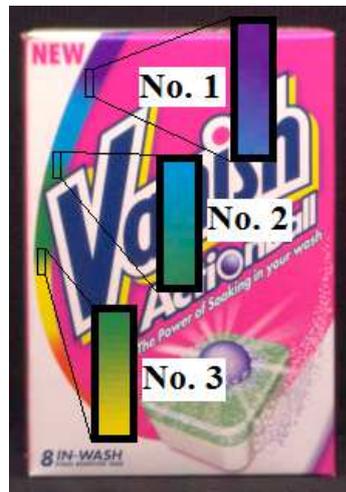


FIGURE 4.10 – Image spectrale avec trois dégradés. Chaque dégradé extrait est composé de quatre colonnes dont nous faisons la moyenne pour diminuer l'impact du bruit.

Les distances comparées ici sont la distance euclidienne, Geman Mc-Clure, χ^2 et l'« EMD combinée ». La figure 4.12 montre les évolutions des distances pour les trois dégradés en utilisant les spectres moyens. Les valeurs sont obtenues en calculant la distance entre le

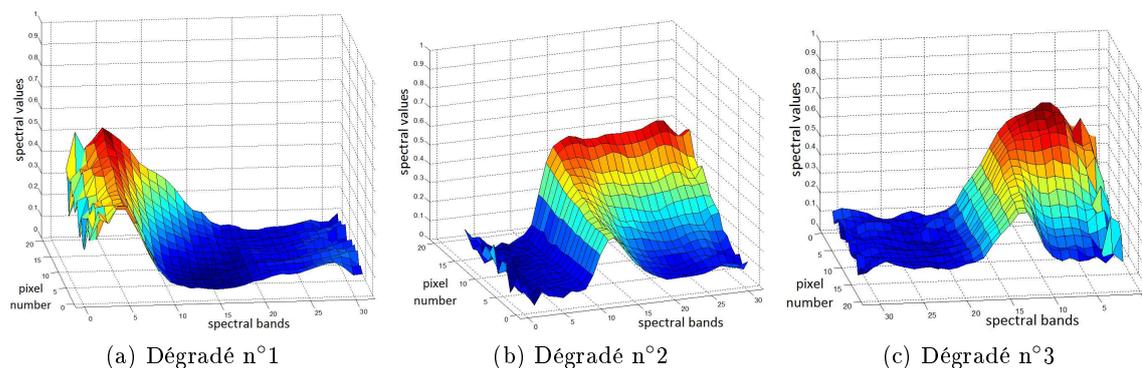


FIGURE 4.11 – Évolution spectrale d'une colonne des trois dégradés spectrales.

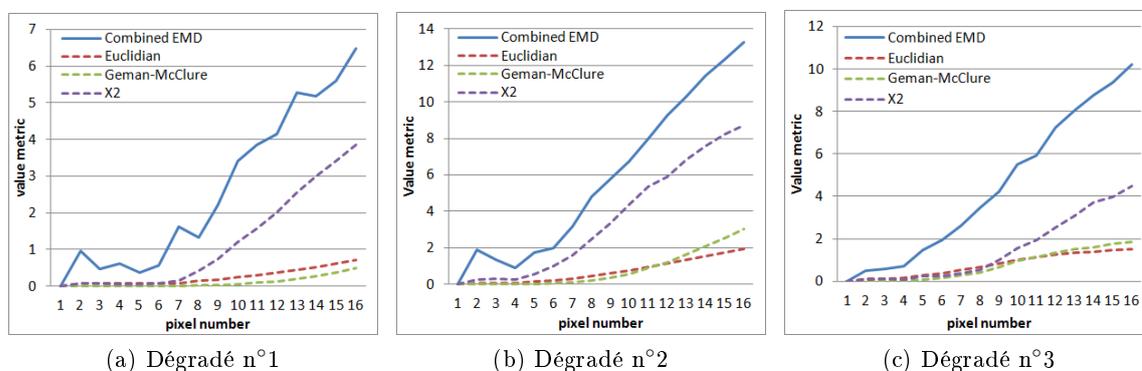


FIGURE 4.12 – Évolution des distances pour les différents dégradés. Pour chaque dégradé, l'évolution est calculée sur le spectre moyen des quatre colonnes.

premier spectre du dégradé et tous les autres spectres du dégradé.

Pour les trois dégradés, la distance « EMD combinée » et celle du χ^2 obtiennent la meilleure plage dynamique. Pour obtenir des paramètres plus précis sur l'évolution des distances, le paramètre de détermination R^2 et l'équation de la droite de régression linéaire de chaque dégradé pour chaque distance sont affichés dans le tableau 4.2. Même si le comportement linéaire du dégradé spectral peut être discuté, le coefficient de détermination de la régression linéaire est bon. Ainsi, ces résultats convergent pour sélectionner la distance « EMD combinée » comme la plus adaptée pour le calcul de distances spectrales pour la morphologie mathématique tout en ayant un sens physique.

4.1.2.3 Élément structurant non-plat multi/hyperspectral

Dans le chapitre 2, nous avons montré que la définition d'éléments structurants non-plats couleur était possible en utilisant notre construction CCMM. Cependant cette construction est réalisée dans l'espace CIELAB. Tout comme dans le domaine de la couleur, dans le domaine multi/hyperspectral il n'existe pas d'addition ou de soustraction valide. Pour construire des éléments structurants non-plats adaptés au domaine multi/hyperspectral,

	Dégradé n°1		Dégradé n°2		Dégradé n°3	
	R^2	équation	R^2	équation	R^2	équation
Euclidienne	0.88	$y=0.044x-0.11$	0.98	$y=0.13x-0.42$	0.94	$y=0.11x-0.2$
Geman-McClure	0.72	$y=0.027x-0.12$	0.94	$y=0.19x-0.84$	0.81	$y=0.14x-0.5$
χ^2	0.87	$y=0.027x-1$	0.89	$y=0.65x-2$	0.95	$y=0.31x-1.2$
« EMD combinée »	0.92	$y=0.44x-1.1$	0.977	$y=0.92x-2$	0.96	$y=0.73x-3.2$

TABLE 4.2 – Paramètre de détermination et équation de la droite de régression linéaire de l'évolution des distances face aux trois dégradés.

nous allons donc utiliser le même principe que celui développé pour les opérateurs couleur.

Ainsi, lors d'une addition la nouvelle coordonnée spectrale C_z est déplacée vers la coordonnées de convergence de la dilatation (équation 4.18). Tandis que pour la soustraction, la nouvelle coordonnée spectrale C_w est dirigée vers celle de l'érosion (équation 4.19). La norme du déplacement est paramétrée par la valeur $\mu(i, j)$ contenue dans l'élément structurant. À cette étape de travail, nous utilisons la distance euclidienne pour calculer la norme du vecteur.

$$\text{addition : } \overrightarrow{OC_z(i, j)} = \overrightarrow{OC_x(i, j)} + \mu(i, j) \frac{\overrightarrow{C_x(i, j)O^{+\infty}}}{\left\| \overrightarrow{C_x(i, j)O^{+\infty}} \right\|} \quad (4.18)$$

$$\text{soustraction : } \overrightarrow{OC_z(i, j)} = \overrightarrow{OC_x(i, j)} + \mu(i, j) \frac{\overrightarrow{C_x(i, j)O^{-\infty}}}{\left\| \overrightarrow{C_x(i, j)O^{-\infty}} \right\|} \quad (4.19)$$

avec $\mu(i, j)$ la norme du vecteur déplacement et $\overrightarrow{C_x(i, j)O^{+\infty}}$ (eq. 4.18) ou $\overrightarrow{C_x(i, j)O^{-\infty}}$ (eq. 4.19) les vecteurs directeurs du déplacement.

Nous utiliserons cette définition de l'élément structurant non-plat dans le chapitre 6 lors de l'application de l'algorithme de la transformée en tout-ou-rien multi/hyperspectrale.

4.2 Premiers résultats

Nous allons maintenant montrer quelques résultats d'opérateurs morphologiques de base. Les images multispectrales utilisées sont issues de la base Finlayson, Hordley and Morovic [41]. Elles sont composées de 31 bandes allant de 400 à 700 nm tous les 10 nm. Pour visualiser les résultats, les images sont converties en images couleurs dans l'espace RGB.

4.2.1 Érosion et dilatation

Dans un premier temps, nous appliquons les opérateurs d'érosion et de dilatation sur deux images spectrales (figures 4.13 et 4.14). Pour cela nous choisissons deux coordonnées de convergence appartenant à l'image. Celle de l'érosion est indiquée par une flèche et un

point vert, tandis que pour celle de la dilatation la flèche et le point sont en noir. Pour ces opérateurs, nous utilisons quatre distances dont nous avons fait l'analyse précédemment. Les résultats obtenus par les différentes distances sont très similaires.

Pour la figure 4.13 et dans le cas de l'érosion les régions dont le spectre est proche du rose s'étendent tandis que dans le cas de la dilatation ce sont les régions dont le spectre est proche du bleu foncé. Pour la figure 4.14 et dans le cas de l'érosion les régions dont le spectre est proche du orange s'étendent tandis que dans le cas de la dilatation ce sont les régions dont le spectre est proche du bleu foncé. Le comportement des opérateurs est celui attendu quelle que soit la distance utilisée. De plus, l'analyse visuelle sur ce type d'images est non seulement subjective mais est corrompue par la réduction de l'information pour l'affichage. Les différences existantes sont réduites en même temps que l'information nD.

4.2.2 Gradient de Beucher

Dans un second temps, nous calculons les gradients de Beucher sur une image spectrale en utilisant cinq distances différentes (figure 4.15). Ce gradient est la différence entre une érosion et une dilatation. La différence est calculée avec la distance utilisée pour obtenir les extrema des opérateurs morphologiques. Pour pouvoir visualiser les gradients tout en conservant des valeurs comparables, les résultats sont multipliés par un facteur 7. La première remarque porte sur la dynamique des valeurs obtenues. La distance χ^2 et la distance « EMD combinée » sont les plus sensibles, ce qui conforte l'étude précédente des dégradés. La distance χ^2 n'a pas une réponse linéaire ce qui réduit l'impact des faibles gradients et sature les plus forts. Nous pouvons observer cette différence de comportement entre le résultat de la distance χ^2 (Figure 4.15e) et la distance « EMD combinée » (figure 4.15f) dans la zone entourée en rouge. Ce comportement entraîne un lissage des textures faiblement contrastées.

La comparaison des distances en passant par les résultats de gradient est moins subjective mais n'est toujours pas une preuve objective.

4.2.3 Discussion

Les résultats d'érosion, de dilatation montre un comportement cohérent en fonction des coordonnées de convergence choisies. Cependant le critère visuel est subjectif et ne permet pas de choisir une distance plutôt qu'une autre. Les résultats de gradients permettent de mettre en évidence plus de différence entre les distances. Cependant, ici encore, le choix d'une distance par la seule observation des résultats n'est pas objectif. Les distances devront donc être comparées dans un processus plus complet tel qu'une classification de texture ou une segmentation d'images.

4.3 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons montré comment construire des opérateurs morphologiques multi/hyperspectraux pleines bandes. La construction utilise les opérateurs génériques de



FIGURE 4.13 – Exemple d'érosions et de dilatations sur l'image « CDREF31_15vanish » de la base Hordley-Finlayson en utilisant différentes métriques. Les coordonnées de convergence sont indiquées par des flèches et des points, en vert pour les coordonnées de convergence des érosions et en noir pour celles des dilatations.



FIGURE 4.14 – Exemple d'érosions et de dilatations sur l'image « CDREF31_08unclebens » de la base Hordley-Finlayson en utilisant différentes métriques. Les coordonnées de convergence sont indiquées par des flèches et des points, en vert pour les coordonnées de convergence des érosions et en noir pour celles des dilatations.

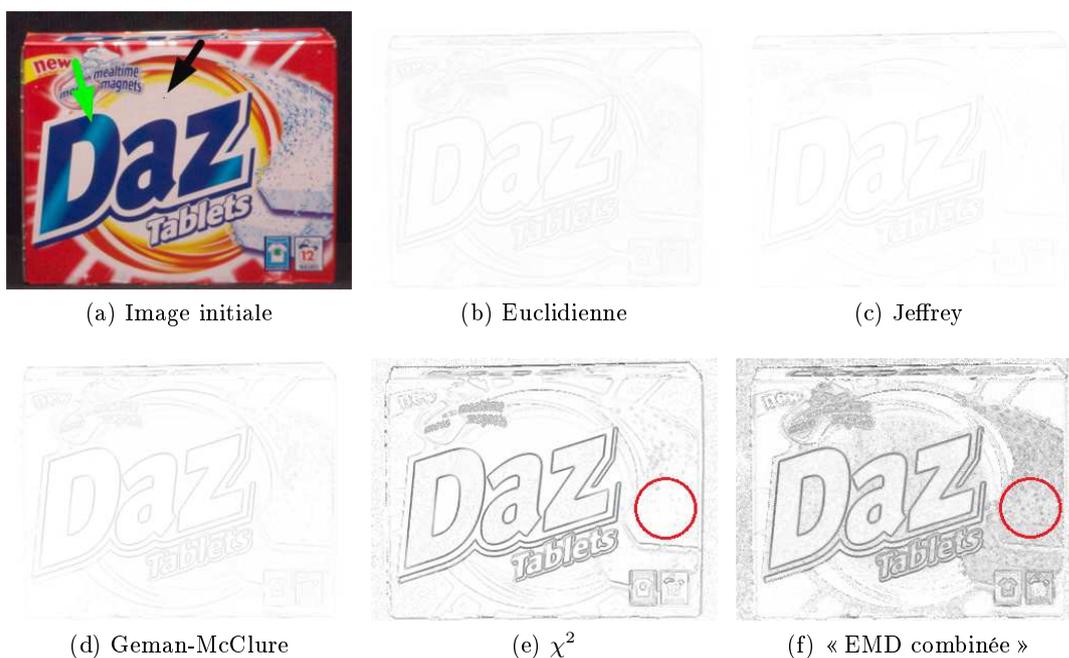


FIGURE 4.15 – Gradient de Beucher multispectral. Les coordonnées de convergence sont indiquées par un point et une flèche, en noir pour l'érosion et en jaune pour la dilatation. Chaque résultat est multiplié par 7.

notre méthode CCMM, en adaptant les coordonnées de convergence et la distance au domaine spectral. Cependant, les travaux engagés dans cette voie ne sont que des prémices et ouvrent de nombreuses perspectives afin de répondre aux différentes questions.

Tout d'abord, l'ordonnancement obtenu n'est théoriquement pas total, cette propriété est pourtant indispensable pour la morphologie mathématique couleur. Nous avons vu que numériquement la première contrainte est suffisante en couleur. De plus, plus le nombre de bandes augmente plus la probabilité d'obtenir deux spectres ayant la même distance à la coordonnée de convergence diminue. Nous avons traduit cette observation par une conjecture. Néanmoins cette question nécessite d'être approfondie.

Ensuite, nous avons analysé différentes fonctions de distance afin d'évaluer leur comportement face à des évolutions simples de spectres. Contrairement au domaine de la couleur, aucune fonction de distance n'est validée comme ayant un sens perceptuel ou physique. L'analyse que nous avons effectuée avait pour objectif de trouver la distance la plus adaptée. Parmi les distances étudiées, aucune ne répond aux hypothèses initiales. Une nouvelle métrique appelée « EMD combinée » a donc été construite. Cette distance permet d'obtenir un comportement proche de celui attendu. Cependant, toutes les distances existantes n'ont pas été testées, cette étude doit donc être étendue.

En dernier, nous avons étudié des résultats d'opérateurs de base de la morphologie mathématique. Les résultats obtenus tendent tous vers le comportement attendu. Malgré

l'observation de différences entre les résultats, nous ne pouvons déterminer la distance la plus appropriée. Comme pour les opérateurs couleur, les opérateurs multispectraux devront être soumis aux différents critères afin d'évaluer leurs performances en fonction des différentes distances. Cette question de critères de choix se trouve donc renforcée par le besoin de choisir la meilleure fonction de distance pour le traitement des images spectrales.

Finalement ce chapitre a pour objectif de montrer les possibilités d'étendre nos opérateurs morphologiques au domaine multi/hyperspectral. Ce travail ouvre de nombreuses questions scientifiques et met en avant certaines perspectives possibles de cette thèse.

Deuxième partie

Applications

Spectres de textures et de formes

Sommaire

5.1	Spectres morphologiques niveaux de gris	121
5.1.1	Définitions morphologiques préliminaires	122
5.1.1.1	Définition de la taille d'un objet	122
5.1.1.2	Ouverture et fermeture	124
5.1.2	Spectres morphologiques	131
5.1.2.1	Granulométrie et spectre de motifs	131
5.1.2.2	Covariance morphologique	134
5.1.2.3	Signatures fractales	135
5.1.3	Comparaison des méthodes face à des objets synthétiques	137
5.2	Spectres morphologiques couleur	148
5.2.1	Extension des outils d'analyse à la couleur	148
5.2.1.1	Besoins pour l'extension à la couleur	148
5.2.1.2	Intégrale couleur	149
5.2.1.3	Écritures des outils couleur	150
5.2.2	Étude des spectres couleur face à des objets synthétiques	152
5.3	Evaluation des spectres face à des textures réelles	155
5.3.1	Présentation de la base Outex	155
5.3.2	Étude sur quelques images	156
5.3.2.1	Spectres niveaux de gris	157
5.3.2.2	Spectres couleur	162
5.3.2.3	Synthèse	167
5.3.3	Résultats de classification	168
5.4	Bilan	177

Lors de l'observation de ce qui nous entoure, le système visuel humain intègre différents paramètres ; les couleurs, les formes ainsi que les textures. Sans la texture il est difficile d'analyser notre environnement. Il en est de même pour le traitement d'image ; sans l'analyse de la texture, il est difficile d'exécuter des tâches telles que la segmentation, la classification ou encore la détection de défauts.

De nos jours, il n'existe pas de définition unique pour la texture. Néanmoins, toutes les définitions se rejoignent sur le fait qu'une texture dépend de l'organisation spatiale d'éléments simples. La définition de la texture dépend également de l'échelle de ce qui est observé. Une texture n'existe que si l'objet observé est à une échelle supérieure à celle de la texture. Par exemple, lors d'une vue aérienne d'une forêt, la texture est composée par

les arbres. En se rapprochant et en observant seulement un arbre, ce sont les feuilles qui composent la texture. En se rapprochant encore plus près et en observant une feuille, se sont les aspérités de la feuille qui font la texture. Cet exemple pose les limites d'une définition multi-échelle de la texture.

Deux approches découlent de ce constat, l'observation macroscopique et l'observation microscopique. L'observation macroscopique caractérise une texture à grande échelle, par exemple l'observation d'un mur composé de briques. Dans ce contexte, l'élément de base (pour l'exemple utilisé ici : la brique) est appelé « primitive » [55] ou encore « texton » [23]. Tandis que l'observation microscopique caractérise le voisinage proche d'un pixel, par exemple les aspérités d'une brique du mur. La texture est alors caractérisée par la distribution des pixels. Pour analyser une texture, la détermination de la taille de la fenêtre d'observation et la résolution des images sont donc deux paramètres très importants. D'autres variations peuvent également modifier la texture comme l'éclairage de la scène (type de source, nombre de sources, angle d'éclairage, etc) ou la rotation de l'objet observé.

Pour limiter la taille de l'information liée à la texture, pour des raisons de stockage ou de transport de l'information, des attributs caractérisant la texture sont extraits. Il existe de nombreux attributs de textures mais également différentes techniques pour obtenir ces attributs. Néanmoins, nous nous intéressons ici aux attributs obtenus avec les opérateurs de la morphologie mathématique. La morphologie mathématique est bien adaptée à la description d'une texture, elle peut décrire les textures irrégulières comme les textures régulières. Deux types d'outils existent pour cela. Le premier type d'outils permet de caractériser la distribution d'une forme particulière en fonction de sa taille dans une image (ex : granulométrie, analyse fractale). Le second type caractérise la répétition d'un élément en fonction d'une distance et d'une direction donnée (ex : covariance morphologique). Ces deux descriptions sont donc facilement interprétables par l'utilisateur. Dans ce chapitre, nous détaillons leur fonctionnement afin de faciliter leur interprétation.

Mais avant cela, nous nous attardons sur une définition importante pour les outils caractérisant la distribution d'un objet dans une texture. En effet, pour ce type d'outil, le calcul d'un attribut de textures se rapproche de notions issues de la théorie de la mesure. L'objectif est de quantifier un volume à partir d'une unité de mesure. Dans notre contexte, cette unité est l'élément structurant. Elle est caractérisée par sa taille et son orientation dans certains cas. Nous commencerons donc ce chapitre par la définition de la taille d'un objet dans le contexte du traitement d'image.

Les outils utilisés ont d'abord été développés pour des images niveaux de gris. Mais de nos jours, l'intégration de l'information couleur est essentielle, elle permet d'améliorer les différents traitements utilisant la texture [59]. L'information couleur peut être intégrée à la texture de trois manières différentes. La première combine les attributs de textures niveaux de gris aux attributs de couleur calculés séparément. Cependant en séparant l'information colorimétrique de la texture, une perte de la complexité de la texture va être induite. Comme nous pouvons le voir sur la figure 5.1, l'image niveaux de gris n'a plus la même dynamique que lorsqu'elle est en couleur. La texture des feuilles est toujours présente mais l'image niveaux de gris atténue fortement les différences entre les régions où les feuilles sont

rouges et celles où elles sont vertes. Cette perte d'information peut induire des biais dans l'interprétation des attributs de textures obtenus. La deuxième manière intégrant la couleur est la méthode marginale (canal par canal), cependant la relation inter-composantes n'est pas prise en compte. La troisième est le calcul d'un attribut prenant en compte les relations inter-composantes. Dans cette thèse, nous nous efforçons de prendre en compte l'information vectorielle de la couleur et qui plus est son lien avec la perception du système visuel humain. C'est pourquoi, nous nous concentrons dans ce chapitre sur le calcul d'attributs vectoriels de textures. Pour cela, nous adaptons à la couleur les spectres morphologiques en utilisant les opérateurs morphologiques couleur de la CCMM développés dans le chapitre 2.

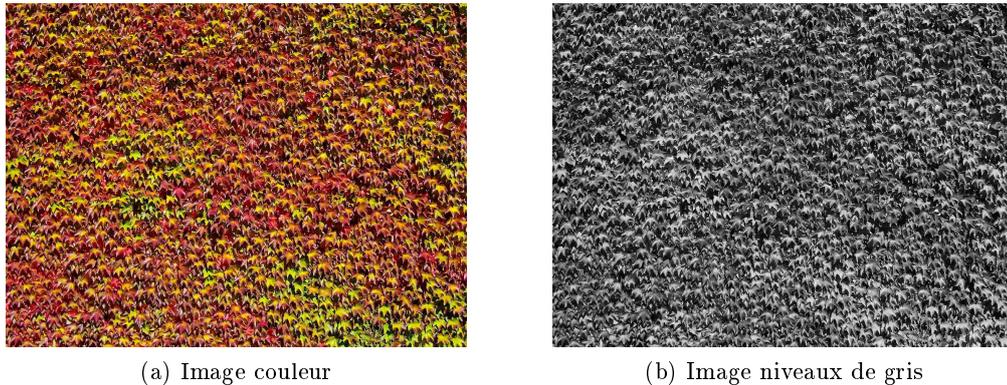


FIGURE 5.1 – Exemple de perte d'information entre une texture couleur et une texture niveaux de gris.

L'étude des attributs se fait dans un premier temps sur des images de synthèse pour chaque outil afin de comprendre le comportement des différents spectres face à un changement de taille, de fréquence, d'écart et d'intensité lumineuse. Ensuite nous utiliserons la base Outex pour étudier le comportement face à des textures réelles. Nous terminons l'étude par une classification des images de la base Outex en nous concentrant sur l'apport de la texture vectorielle.

5.1 Spectres morphologiques niveaux de gris

Dans cette section, nous étudions trois approches différentes d'analyse de textures utilisant des opérateurs morphologiques. Pour cela, nous commencerons par spécifier certaines définitions morphologiques élémentaires. Ensuite nous analyserons le comportement des différents spectres morphologiques obtenus à partir d'images de synthèse puis pour quelques images de la base Outex. Enfin nous comparerons chacune des méthodes lors d'un processus de classification.

Avant de détailler les différentes méthodes, nous rappelons que les définitions des différents outils de ce chapitre sont données pour des espaces discrets.

5.1.1 Définitions morphologiques préliminaires

5.1.1.1 Définition de la taille d'un objet

Deux types de spectres morphologiques existent dans la littérature. Le premier groupe construit son spectre à partir de l'évolution d'un volume en variant un paramètre de taille. Cette analyse permet de mesurer les différents objets présents dans l'image. La définition de la taille d'un objet est donc importante.

Nous commencerons par définir la taille d'un objet binaire mathématique puis dans le contexte général du traitement d'image et enfin nous ferons le lien avec la définition donnée par Minkowski dans le contexte de la morphologie mathématique.

Binaire

Définition mathématique :

La taille d'un ensemble est souvent défini par sa cardinalité, c'est-à-dire, le nombre d'éléments le composant. Cependant, cette définition pour de la mesure ne permet pas de prendre en compte la forme de l'objet.

Définition de Falconer :

Pour le traitement d'image et précisément pour la mesure, il existe une autre définition de la taille d'un ensemble [38]. Elle définit la taille m d'un ensemble G par son diamètre maximal (équation 5.1).

$$m = \vee \{ \|\overrightarrow{(x y)}\| \mid x, y \in G \} \quad (5.1)$$

Cette définition permet de prendre en compte séparément les paramètres de forme et de taille de l'ensemble.

Définition de Minkowski :

Dans le contexte de la morphologie mathématique, Minkowski [89] caractérise la taille d'un objet par l'utilisation de la dilatation de l'objet par lui même. Dans ce cas, un ensemble G appartenant à un espace discret et ayant une taille n sera noté nG et est défini comme l'ensemble G dilaté $(n - 1)$ fois, c'est-à-dire :

$$nG = \underbrace{\delta_{\mathbf{b}} \left(\delta_{\mathbf{b}} \left(\dots \left(\delta_{\mathbf{b}}(G, G) \dots \right), G \right)}_{n-1 \text{ fois}} \right)}_{n-1 \text{ fois}} \quad (5.2)$$

L'ensemble nG aura la même forme que l'ensemble initial G si et seulement si celui-ci est convexe¹, de plus si $n = 0$ alors $nG = \{(0, 0)\}$. La figure 5.2 illustre ce concept de taille sur trois objets binaires différents.

1. Un ensemble G est convexe si et seulement si tous les segments reliant les points de l'ensemble G appartiennent à l'ensemble G .

Relation entre les définitions de Falconer et Minkowski :

Ces deux définitions sont semblables. La seule différence est la référence de la mesure. Dans le premier cas, l'unité de la taille m est le pixel. Dans le second cas, n dépend de l'unité « taille initiale de l'objet ». Il est donc possible de lier les deux écritures en écrivant la relation suivante :

$$\frac{m-1}{2} = \frac{(T_{init}-1)}{2} \times n \quad (5.3)$$

où T_{init} est la taille de l'objet unitaire.

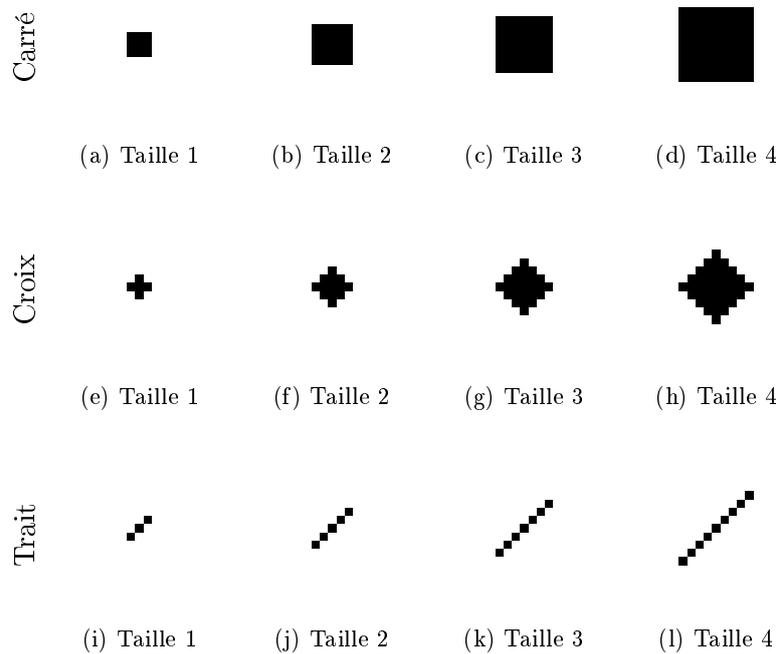


FIGURE 5.2 – Exemples de différents objets binaires avec une taille de Minkowski croissante. Pour plus de lisibilité, l'objet est en noir.

Niveaux de gris

La définition donnée par Minkowski permet d'étendre la définition aux objets niveaux de gris. Ainsi, si g est un signal convexe² alors ng est un signal 1D de même forme et de taille n et se définit :

$$ng = \underbrace{\delta_g \left(\delta_g \left(\dots \left(\delta_g(g, g) \dots \right) \right) \right)}_{n-1 \text{ fois}} \underbrace{\left(g, g \right)}_{n-1 \text{ fois}} \quad (5.4)$$

La figure 5.3 illustre ce concept de taille sur deux objets niveaux de gris couramment utilisés pour l'analyse de textures.

2. Un signal g est convexe si et seulement si son ombre est un ensemble convexe. La définition d'une

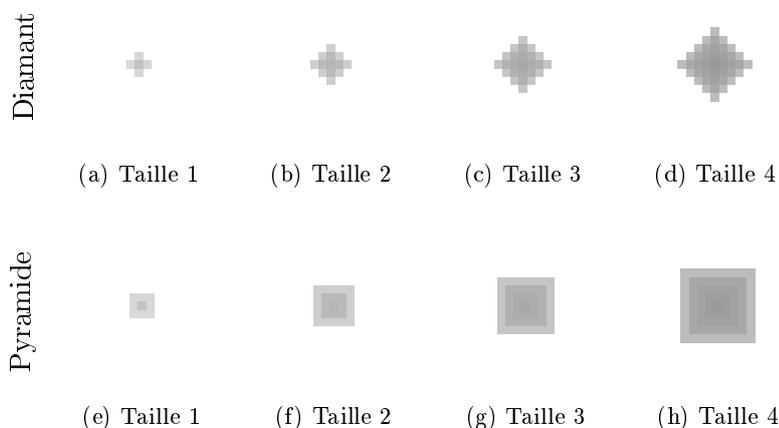


FIGURE 5.3 – Exemples de différents objets niveaux de gris avec une taille de Minkowski croissante. Pour plus de lisibilité, l'image est inversée.

5.1.1.2 Ouverture et fermeture

Les opérations d'ouverture et de fermeture sont des filtres morphologiques. Ils agissent comme un tamis en éliminant tous les objets de l'image plus petits qu'une certaine taille. Pour cela, ils sont construits à partir des opérateurs d'érosion et de dilatation.

Dans la littérature de la morphologie mathématique, différents types d'opérateurs existent. Les opérateurs algébriques ont d'abord été définis avant d'être étendus aux opérateurs géodésiques. Les opérateurs géodésiques améliorent la restitution ou l'analyse de certains détails de l'image. Enfin, les opérateurs d'aire sont calqués sur la définition mathématique de taille d'un objet, ils agissent sur les objets en fonction de leur cardinalité sans prendre en compte leur forme. Nous étudions donc le fonctionnement des ouvertures/fermetures en utilisant ces 3 types d'opérateurs afin de voir leurs différents avantages et inconvénients.

Ouverture et fermeture algébriques

Binaire :

En binaire, l'ouverture algébrique d'une image F par un élément structurant G se note $\gamma_b(F, G)$ et est définie comme la succession d'une érosion et d'une dilatation (équation 5.5).

$$\gamma_b(F, G) = \delta_b(\varepsilon_b(F, G), G^r) \quad (5.5)$$

L'ouverture supprime toutes les régions d'un ensemble qui sont trop petites pour contenir l'élément structurant. C'est-à-dire qu'elle élimine tous les objets ayant la forme de l'élément structurant et une taille plus petite. Cela revient généralement à adoucir les contours d'un objet, à éliminer les petites composantes connexes. La figure 5.4b montre les effets d'une ouverture par un élément structurant carré de dimension 5x5. L'œil et les dents sont supprimés.

ombre se trouve dans l'article de Sternberg [126].

La fermeture algébrique d'une image F par un élément structurant G se note $\varphi_b(F, G)$ et est définie comme la succession d'une dilatation et d'une érosion (équation 5.6).

$$\varphi_b(F, G) = \varepsilon_b(\delta_b(F, G), G^r) \quad (5.6)$$

La fermeture élimine les parties de l'image appartenant au fond ayant la forme de l'élément structurant et une taille plus petite. Elle tend donc à éliminer les trous plus petits que l'élément structurant et à souder les formes très proches. La figure 5.4c montre les effets de cette opération par un élément structurant carré de taille 5x5. La cicatrice et l'attache du cache œil sont supprimées.

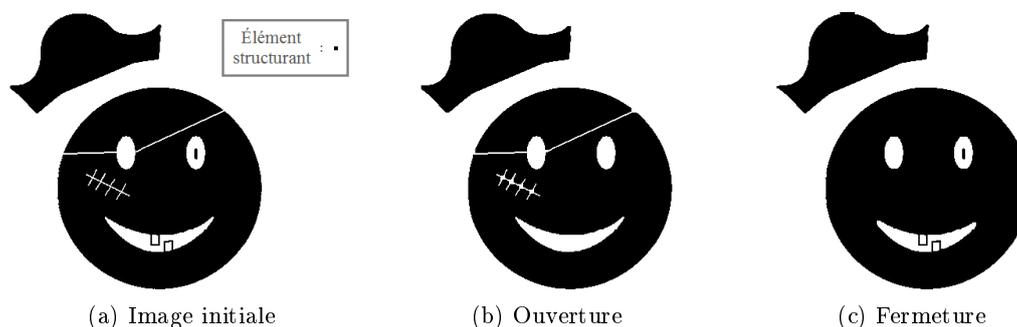


FIGURE 5.4 – Ouvertures et fermetures algébriques binaires. L'élément structurant utilisé est de forme carrée et de taille 5×5 et l'image est de taille 442×360. Pour plus de lisibilité l'objet est représenté par du noir sur un fond blanc.

Niveaux de gris :

Les opérations d'ouverture et de fermeture pour les images niveaux de gris sont la succession d'une dilatation et d'une érosion ou inversement (équation 5.7 et 5.8).

$$\gamma_g(f, g) = \delta_g(\varepsilon_g(f, g), g^r) \quad (5.7)$$

$$\varphi_g(f, g) = \varepsilon_g(\delta_g(f, g), g^r) \quad (5.8)$$

Les effets des opérateurs niveaux de gris sont un peu différents. L'ouverture et la fermeture homogénéisent l'image en supprimant les détails lumineux ou sombres. Si l'image est vue comme une surface où le blanc est considéré comme l'altitude la plus élevée, les opérateurs suppriment toutes les aspérités plus petites que l'élément structurant. L'ouverture supprime toutes les crêtes, elle assombrit donc l'image (figure 5.5b), tandis que la fermeture supprime toutes les vallées, elle éclaircit donc l'image (figure 5.5c).

Ouverture et fermeture géodésiques

L'ouverture et la fermeture géodésiques, également appelées ouverture et fermeture par reconstruction, sont construites à partir des opérations de dilatation et d'érosion géodésiques. Ces deux opérateurs sont d'abord décrits en binaire avant d'être étendus aux niveaux de gris.

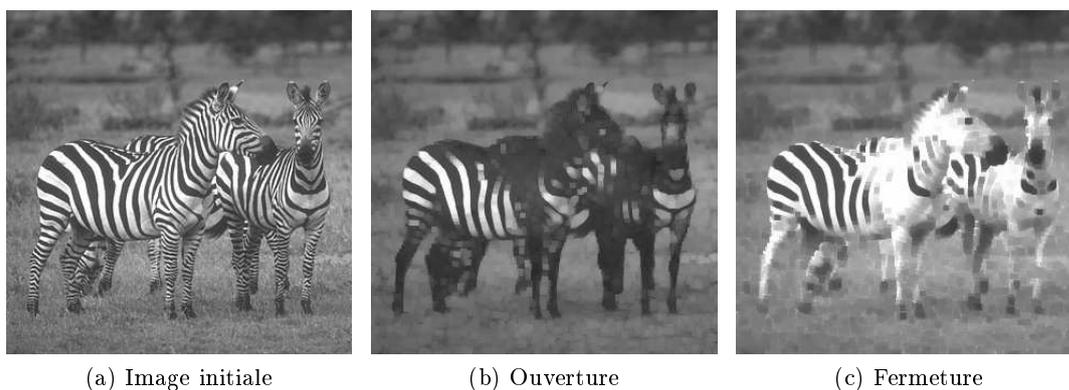


FIGURE 5.5 – Ouvertures et fermetures algébriques niveaux de gris. L'élément structurant utilisé est de forme carrée et de taille 5×5 pixels et l'image est de taille 321×321 pixels.

Binaire :

La dilatation et l'érosion géodésiques sont construites à l'aide de deux images, une image de marqueurs que nous noterons F et un masque que nous noterons H . Les deux images doivent respecter la condition d'inclusion suivante $F \subseteq H$. Ainsi la dilatation géodésique est l'intersection entre la dilatation algébrique de l'image de marqueurs et le masque (équation 5.9). Et l'érosion géodésique est l'intersection entre « l'érosion algébrique de l'union du complémentaire du masque et l'image de marqueurs » et « le masque » (équation 5.10). La figure 5.6 illustre le fonctionnement de la dilatation et de l'érosion géodésique.

$$\delta_b^H(F, G) = \delta_b(F, G) \cap H \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_b^H(F, G) = \varepsilon_b((H^c \cup F), G) \cap H \quad (5.10)$$

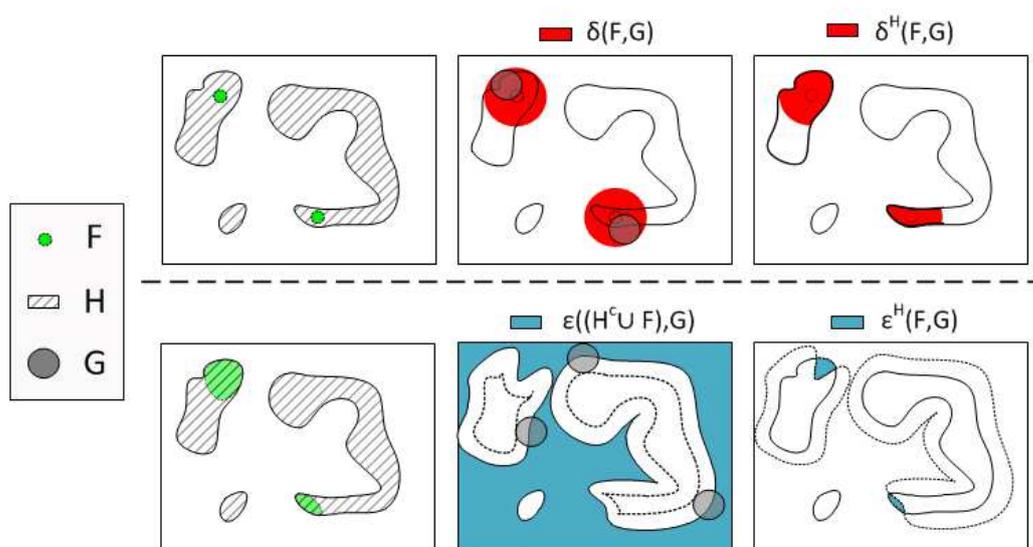


FIGURE 5.6 – Dilatation et érosion géodésiques binaires

À partir de ces deux opérateurs, l'ouverture et la fermeture géodésiques sont obtenues en itérant la dilatation et l'érosion géodésiques jusqu'à idempotence (équations 5.11 et 5.12). Ainsi il est possible de reconstruire entièrement certaines parties d'une image binaire sélectionnées par des marqueurs. Cette opération est très souvent utilisée pour supprimer les objets situés au bord de l'image en prenant le bord de l'image comme image de marqueurs et en soustrayant le résultat obtenu à l'image initiale. La figure 5.7 illustre un cas de reconstruction où seulement certaines cellules ont été sélectionnées. Les points verts correspondent à l'image de marqueurs, les cellules marquées par ces points ont bien été reconstruites entièrement tout en supprimant les autres cellules.

$$\gamma_b^{\delta, H}(F, G) = \delta_b^H(F, G)^{(i)} \quad (5.11)$$

$$\varphi_b^{\varepsilon, H}(F, G) = \varepsilon_b^H(F, G)^{(i)} \quad (5.12)$$

avec (i) l'itération telle qu'il y ait idempotence :

- $\varepsilon_b^H(F, G)^{(i)} = \varepsilon_b^H(F, G)^{(i-1)}$ et $\varepsilon_b^H(F, G)^{(i)} = \varepsilon_b^H(\varepsilon_b^H(F, G)^{(i-1)}, G)^{(1)}$
- $\delta_b^H(F, G)^{(i)} = \delta_b^H(F, G)^{(i-1)}$ et $\delta_b^H(F, G)^{(i)} = \delta_b^H(\delta_b^H(F, G)^{(i-1)}, G)^{(1)}$

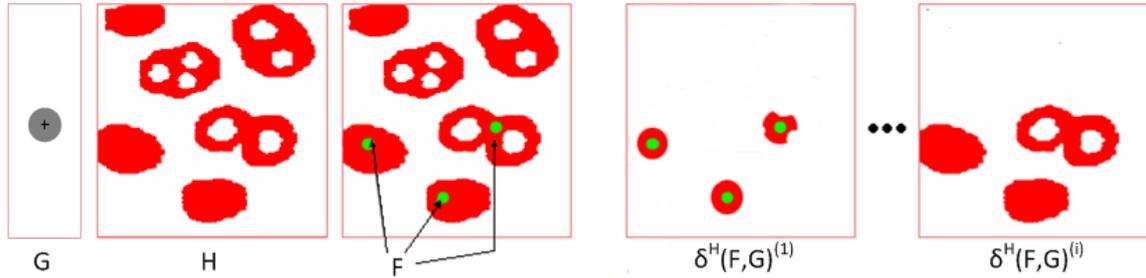


FIGURE 5.7 – Principe de la reconstruction géodésique binaire

L'ouverture et la fermeture géodésiques peuvent également être utilisées comme filtres en choisissant une image de marqueurs adaptée. Par exemple en prenant la dilatation comme image de marqueurs pour la fermeture géodésique, il est possible de filtrer les trous isolés dans un objet. L'exemple de la figure 5.8b illustre ce phénomène, la cicatrice est totalement supprimée tandis que le fil du cache œil est conservé puisqu'il est relié au fond de l'image. Il est également possible d'utiliser l'érosion comme image de marqueurs pour l'ouverture géodésique afin de filtrer les petites parties de l'objet isolé. Par exemple dans la figure 5.8c le point de l'œil disparaît totalement tandis que les dents reliées au reste de l'objet ne sont pas supprimées.

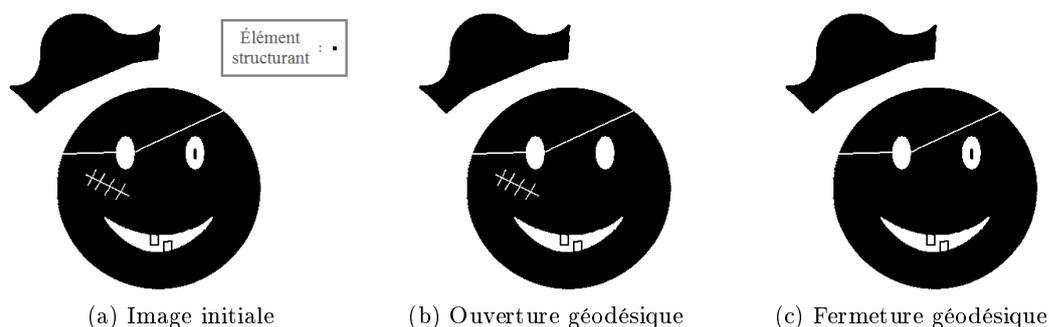


FIGURE 5.8 – Ouvertures et fermetures géodésiques binaires. L'élément structurant utilisé est de forme carrée et de taille 5×5 pixels et l'image est de taille 442×360 pixels. Pour plus de lisibilité l'objet est représenté par du noir sur un fond blanc.

Niveaux de gris :

Pour étendre la morphologie géodésique aux images niveaux de gris il existe deux possibilités. La première possibilité est l'application de l'algorithme binaire sur les images binarisées à chaque niveaux de gris, et de recomposer l'image. La deuxième possibilité est la construction des opérations de dilatation et d'érosion géodésiques directement adaptées aux images en niveau de gris. La première méthode découlant de la méthode binaire, le paragraphe suivant explique la seconde méthode.

Les définitions de la dilatation et de l'érosion géodésiques pour les images en niveaux de gris sont équivalentes aux définitions binaires. L'image de marqueurs est notée f et le masque noté h . Les deux images doivent respecter la condition d'ordre suivant $f \leq h$. La dilatation géodésique est alors la dilatation algébrique du signal f seuillée par le signal h (équation 5.13). Et l'érosion géodésique est l'érosion algébrique du signal f seuillée par le signal h (équation 5.14).

$$\delta_g^h(f, g) = \wedge(\delta_g(f), h) \quad (5.13)$$

$$\varepsilon_g^h(f, g) = \vee(\varepsilon_g(f), h) \quad (5.14)$$

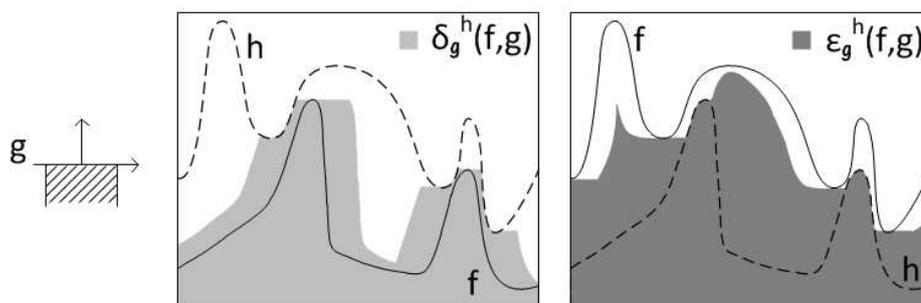


FIGURE 5.9 – Dilatation (à gauche) et érosion (à droite) géodésiques sur des signaux 1D.

De même que pour les opérations binaires, il est possible de définir les opérations d'ouverture et de fermeture par reconstruction avec la dilatation ou l'érosion géodésiques.

$$\gamma_{\mathbf{g}}^{\delta, h}(f, g) = \delta_{\mathbf{g}}^h(f, g)^{(i)} \quad (5.15)$$

$$\varphi_{\mathbf{g}}^{\varepsilon, h}(f, g) = \varepsilon_{\mathbf{g}}^h(f, g)^{(i)} \quad (5.16)$$

avec (i) l'itération telle qu'il y ait idempotence :

- $\varepsilon_{\mathbf{g}}^h(f, g)^{(i)} = \varepsilon_{\mathbf{g}}^h(f, g)^{(i-1)}$ et $\varepsilon_{\mathbf{g}}^h(f, g)^{(i)} = \varepsilon_{\mathbf{g}}^h(\varepsilon_{\mathbf{g}}^h(f, g)^{(i-1)}, g)^{(1)}$
- $\delta_{\mathbf{g}}^h(f, g)^{(i)} = \delta_{\mathbf{g}}^h(f, g)^{(i-1)}$ et $\delta_{\mathbf{g}}^h(f, g)^{(i)} = \delta_{\mathbf{g}}^h(\delta_{\mathbf{g}}^h(f, g)^{(i-1)}, g)^{(1)}$

Pour plus de lisibilité, la figure 5.9 montre une dilatation et une érosion géodésiques sur des signaux 1D. Les figures 5.10b et 5.10c montrent respectivement les résultats de filtrage en utilisant les images d'ouverture et de fermeture algébriques comme marqueurs. L'ouverture géodésique filtre les régions plus petites que l'élément structurant tout en conservant l'aspect général de l'image. L'ouverture géodésique filtre les régions plus petites que l'élément structurant tout en conservant l'aspect général de l'image. Les deux résultats montrent également que la forme de l'élément structurant a peu d'importance contrairement aux opérations algébriques.

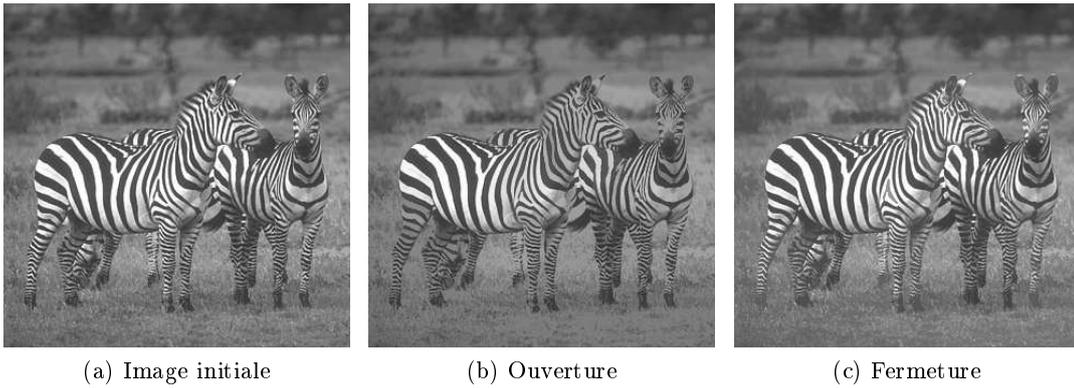


FIGURE 5.10 – Ouvertures et fermetures géodésiques niveaux de gris. L'élément structurant utilisé est de forme carrée et de taille 5×5 pixels et l'image est de taille 321×321 pixels.

Ouverture et fermeture d'aire

Binaire :

Les opérateurs d'ouverture et de fermeture d'aire appartiennent à la famille « attribute opening ». Pour les images binaires, le principe de l'ouverture d'aire est de calculer l'aire des éléments connectés et d'éliminer ceux qui ont une aire inférieure à un seuil λ donné (équation 5.17). Elle est donc fondée sur la définition de la taille des objets en fonction de leur cardinalité. La fermeture d'aire agit de la même manière sur le fond de l'image et s'obtient simplement par l'opération de dualité (équation 5.18).

$$\gamma_{\mathbf{b}, \#}(F, \lambda) = \{x \in F \mid \#(\mathcal{C}_x[F]) \geq \lambda\} \quad (5.17)$$

$$\varphi_{\mathbf{b}, \#}(F, \lambda) = \{x \in F^c \mid \#(\mathcal{C}_x[F^c]) \geq \lambda\} \quad (5.18)$$

où $\mathcal{C}_x[F]$ est l'ensemble des éléments de F connexes à x , F^c le complémentaire de F et l'opérateur $\#$ le cardinal de l'ensemble associé.

La figure 5.11b montre l'impact de l'ouverture d'aire binaire. La seule partie filtrée est l'intérieur de l'œil qui contient une partie de l'objet ayant une aire inférieure à 100 pixels. De la même manière, la figure 5.11c montre l'impact de la fermeture d'aire. Deux parties sont supprimées dans ce cas, l'intérieur des dents qui ont une aire inférieure à 100 pixels.

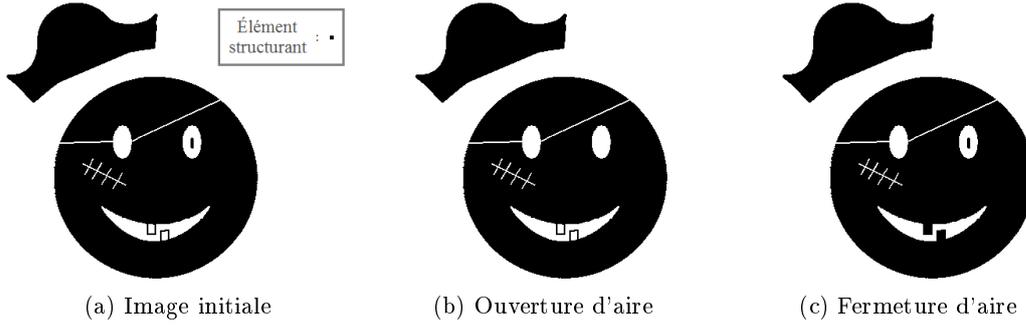


FIGURE 5.11 – Ouverture et fermeture d'aire binaires. Le seuil λ est de 100 pixels et l'image est de taille 442×360 pixels. Pour plus de lisibilité l'objet est représenté par du noir sur un fond blanc.

Niveaux de gris :

L'extension des fonctions d'ouverture et de fermeture d'aire aux images niveaux de gris passe par une binarisation. Pour tous les niveaux de gris, les opérations binaires sont appliquées puis toutes les images binaires résultantes sont sommées (équation 5.19 et 5.20).

$$\gamma_{g,\#}(f, \lambda) = \left(\sum_{l=0}^{255} \gamma_{b,\#}(\mathcal{T}(f, l), \lambda) \right) - 1 \quad (5.19)$$

$$\varphi_{g,\#}(f, \lambda) = \left(\sum_{l=0}^{255} \varphi_{b,\#}(\mathcal{T}(f, l), \lambda) \right) - 1 \quad (5.20)$$

avec $\mathcal{T}(f, l)$ l'image f seuillée au niveau de gris l . Les figures 5.12b et 5.12c sont respectivement les résultats d'ouverture et de fermeture d'aire. Les opérateurs d'aire agissent sur chaque niveau de gris et n'ont pas d'impact sur la forme des éléments supprimés. Leurs résultats sont alors proches de ceux des opérateurs géodésiques.

Comparaison des différentes ouvertures et fermetures

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu que les ouvertures et de fermetures peuvent être construites à partir de différentes formulations de dilatation et d'érosion. Ces différentes formulations dépendent de l'espace de représentation (binaire ou nvg) et dépendent d'un paramètre qui correspond à la taille d'un objet. Une des caractéristiques principales à retenir pour ces opérateurs est également la forte influence de la forme de l'élément structurant pour les opérateurs algébriques (figure 5.13b). La forme de l'élément structurant

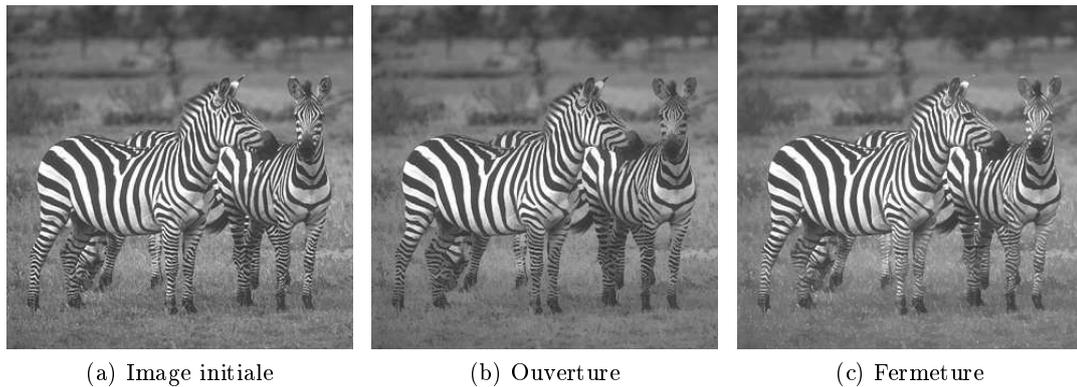


FIGURE 5.12 – Ouvertures et fermetures d’aire niveaux de gris. Le seuil λ est de 100 pixels et l’image est de taille 321×321 pixels.

a moins d’influence sur les opérations géodésiques. Comme pour les opérateurs algébriques, les objets ayant la même forme que l’ES et avec une taille inférieure sont supprimés. Par contre, les objets qui n’ont pas été supprimés retrouvent leur forme initiale (figure 5.13c). Enfin, les opérateurs d’aire suppriment les éléments qui ont une aire inférieure à un seuil, leur forme n’est pas du tout prise en compte (figure 5.13d).

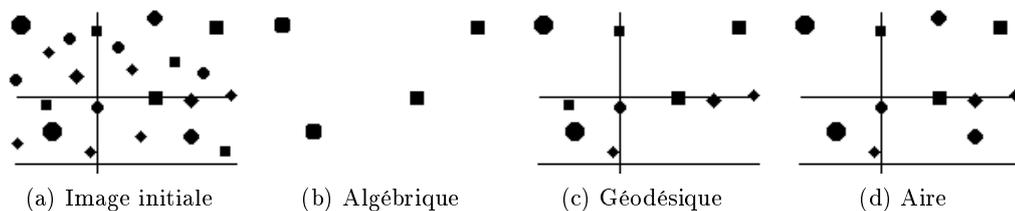


FIGURE 5.13 – Exemple d’ouvertures binaires. L’élément structurant utilisé est de forme carrée et de taille 7×7 pour les opérateurs algébriques et géodésiques. Le seuil λ est de 49 pixels pour les opérateurs d’aire. Pour plus de lisibilité, l’objet est représenté en noir.

5.1.2 Spectres morphologiques

Nous allons maintenant étudier les spectres morphologiques les plus utilisés de la littérature. Nous commencerons par étudier les spectres de motifs avec l’utilisation des différents types d’ouverture et de fermeture que nous venons de détailler. Puis nous analyserons la covariance morphologique. Enfin, nous expliquerons la construction des signatures fractales que nous avons développées.

5.1.2.1 Granulométrie et spectre de motifs

La granulométrie ou spectre de motifs³ a été développée pour analyser la distribution des tailles des différents objets présents dans une image. Ces outils ont été proposés par

3. Connue sous le nom de pattern spectrum.

Matheron [87] et étudiés par différents auteurs [61, 73].

La granulométrie est définie comme une famille d'ouvertures $\{\gamma_g(f, ng)_{n \geq 0}\}$ où n est la taille de l'élément structurant utilisé. De la même manière, l'anti-granulométrie (ou granulométrie par fermeture) est définie comme une famille de fermetures $\{\varphi_g(f, ng)_{n \geq 0}\}$. L'utilisation de ces familles d'opérateurs permet de supprimer successivement les objets en commençant par les plus petits en allant vers les plus grands. Cette suppression permet de connaître la répartition de la taille des objets dans une image. La caractéristique issue de ces deux familles est un vecteur représentant le volume normalisé de chaque élément de la famille (équations 5.21 et 5.22). Le volume est ici calculé comme la somme de toutes les valeurs des pixels contenus dans l'image et la normalisation se fait avec le volume de l'image initiale $\sum(f)$.

$$G_g(f, ng)_{n=0..\infty} = \frac{Vol(\gamma_g(f, ng))}{Vol(f)} \quad (5.21)$$

$$AG_g(f, ng)_{n=0..\infty} = \frac{Vol(\varphi_g(f, ng))}{Vol(f)} \quad (5.22)$$

$$\text{avec } Vol(f) = \sum_x (f(x)) \quad (5.23)$$

Les deux vecteurs issus de la granulométrie et de l'anti-granulométrie peuvent être mis bout à bout pour ne former qu'un seul vecteur caractéristique. Ce vecteur sera appelé vecteur caractéristique de la granulométrie et sera noté V_G . La granulométrie caractérise la suppression des objets foncés sur fond clair. Elle entraîne la diminution de l'énergie de l'image. L'anti-granulométrie caractérise la suppression des objets clairs sur fond foncé. Elle entraîne l'augmentation de l'énergie de l'image. La granulométrie et l'anti-granulométrie ont la même énergie lorsque $n = 0$, $G_g(f, 0) = AG_g(f, 0) = 1$, cette énergie est l'énergie totale de l'image initiale normalisée. Ainsi le vecteur V_G se compose de la manière suivante :

$$V_{G_g}(f, g) = [G_g(f, ng)_{n=\infty..1} , AG_g(f, ng)_{n=0..\infty}] \quad (5.24)$$

Les figures 5.14b à 5.14d sont des exemples de vecteurs caractéristiques V_G en utilisant les différents opérateurs d'ouverture et de fermeture présentés précédemment. Les trois vecteurs obtiennent le même comportement en 5 marches représentant les cinq carrés de tailles différentes. La partie granulométrie permet d'extraire les caractéristiques du carré blanc qui est plus clair que le fond de l'image et l'anti-granulométrie extrait les caractéristiques des quatre autres carrés plus sombres que le fond. La forme de l'élément structurant utilisée est importante pour la granulométrie utilisant les opérateurs algébriques.

La figure 5.15b montre les changements engendrés par l'utilisation d'un élément structurant de forme croix par rapport à la figure 5.14b où l'élément structurant est de forme carré. Le choix de la forme de l'élément structurant est donc crucial pour les opérateurs algébriques. La figure 5.15c est identique à la figure 5.14c, ce qui confirme que la forme de l'élément structurant joue un rôle moins important pour les opérateurs géodésiques que dans le cas des opérateurs algébriques. Pour ce cas particulier, nous obtenons une courbe

identique puisque malgré leur forme différente, les éléments structurants carrés et croix ont la même taille selon la définition de Falconer.

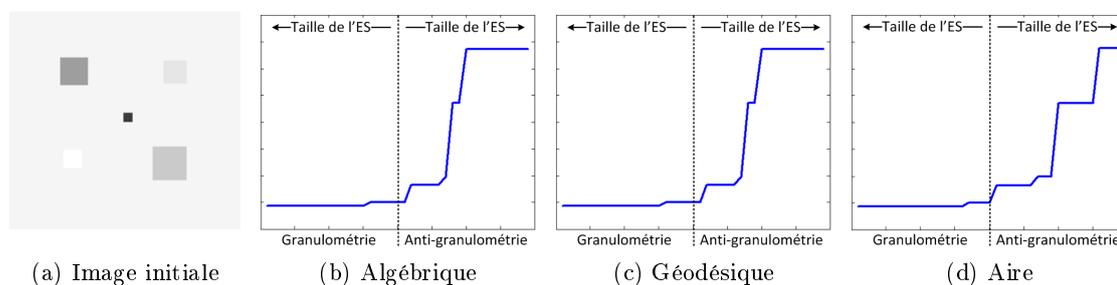


FIGURE 5.14 – Résultats des différentes granulométries sur une image niveaux de gris composée de carrés de différentes tailles (6×6 , 12×12 , 15×15 , 18×18 et 22×22). L'élément structurant utilisé est de forme carrée et de taille 3×3 pour les opérateurs algébriques et géodésiques. Le seuil λ est de 30 pixels pour les opérateurs d'aire et est doublé à chaque itération. Le nombre d'itérations est de 20.

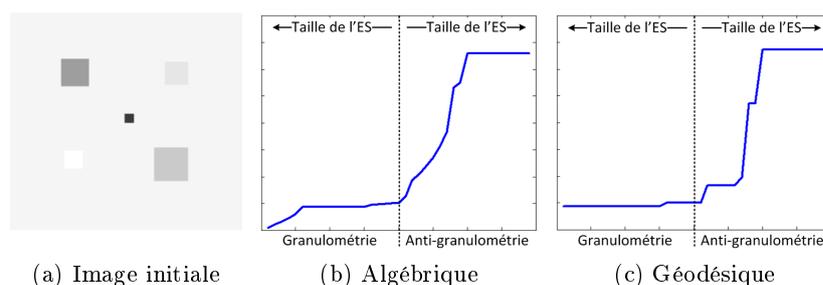


FIGURE 5.15 – Vecteurs caractéristiques des granulométries algébriques et géodésiques obtenus avec un élément structurant croix de taille 3×3 .

Le deuxième outil d'analyse de textures utilisant l'ouverture et la fermeture est le spectre de motifs. Il représente la dérivée du vecteur caractéristique de la granulométrie V_G (équation 5.25). La dérivée est généralement calculée avec un modèle d'ordre 1. Le spectre de motif permet de détecter les changements dans le vecteur caractéristique V_G , un pic correspond à un objet dont la taille correspond à sa position sur l'axe des abscisses. La figure 5.16 montre les courbes de spectres de motifs correspondant à l'image de carrés avec l'utilisation de l'élément structurant carré.

$$PS_g(f, g)(t) = V_{G_g}(f, g)(t+1) - V_{G_g}(f, g)(t) \quad (5.25)$$

Dans le domaine multi/hyper-spectral l'écriture du pattern spectrum a été dérivée par Pesaresi [100]. L'outil nommé « profil morphologique » a été développé pour connaître les liens d'un pixel avec son voisinage. La courbe du profil morphologique est la dérivée de l'évolution de la valeur du pixel lors d'ouverture/fermeture en fonction de la taille de l'élément structurant. Cependant cette écriture est utilisée pour faire de la segmentation et non de l'analyse de textures, elle ne sera donc pas plus approfondie.

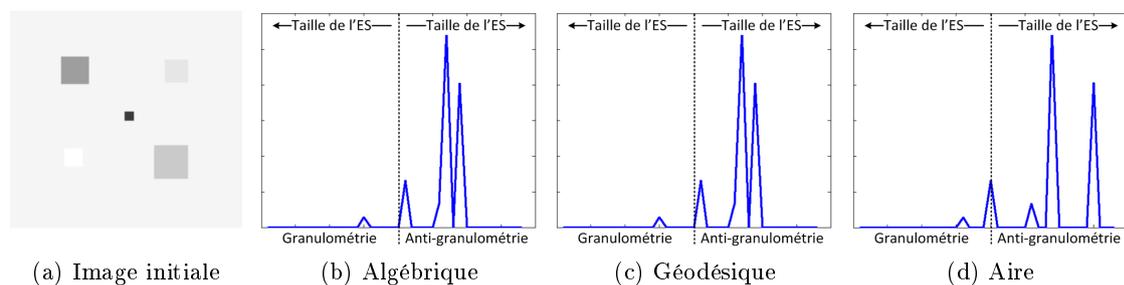


FIGURE 5.16 – Résultat des différentes granulométries sur une image niveaux de gris composée de carrés de différentes tailles. L'élément structurant utilisé est de forme carrée et de taille 3×3 pour les opérateurs algébriques et géodésiques. Le seuil λ est de 30 pixels pour les opérateurs d'aire. Le nombre d'itérations est de 20.

5.1.2.2 Covariance morphologique

Un autre outil issu de la morphologie mathématique est la covariance morphologique [115]. Cet outil permet également de caractériser une texture en analysant la fréquence à laquelle revient un motif dans une image. La covariance morphologique est calculée à partir d'une fonction ξ et d'une paire de points P_2 séparée par un vecteur \vec{v} (équation 5.26). La fonction ξ couramment utilisée est une érosion mais l'ouverture a également été utilisée [9]. L'écriture normalisée de la covariance morphologique la plus souvent utilisée est (équation 5.27) :

$$K_g(f, P_{2,v}) = Vol(\xi_g(f, P_{2,v})) \quad (5.26)$$

$$K_g^n(f, P_{2,v}) = \frac{Vol(\xi_g(f, P_{2,v}))}{Vol(f)} \quad (5.27)$$

Le vecteur \vec{v} peut prendre différentes directions et différentes longueurs. La courbe obtenue est alors la succession des $K(f, P_{2,v})$ avec les différentes configurations du vecteur \vec{v} . La figure 5.17 est un exemple de courbe obtenue avec un vecteur \vec{v} dont l'angle prend les valeurs 0, 45, 90 et 135 et dont la norme est comprise entre 0 et 50. La forme de la courbe n'a ici pas d'importance et n'est rattachée à aucune image. Nous montrons seulement le principe de lecture de la courbe.

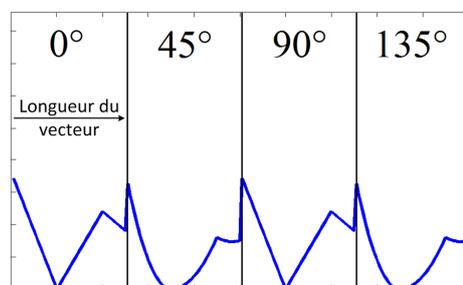


FIGURE 5.17 – Exemple de courbe obtenue pour la covariance morphologique

5.1.2.3 Signatures fractales

Le calcul de signature fractale est issu du calcul de dimension fractale introduite par Mandelbrot [79]. Elle permet de caractériser la complexité des objets dont la structure est invariante par changement d'échelle. Il existe plusieurs méthodes d'estimation de la dimension fractale utilisant les opérateurs morphologiques comme celle du « comptage de boîtes », l'approximation fréquentielle, le « covering blanket », ... [36, 98, 83]. Parmi toutes ces méthodes nous utilisons celle du covering blanket [97]. Cet algorithme est basé sur le calcul de la dimension de Boulingan-Minkowski. Le choix de cette méthode vient de la stabilité de cette mesure [83].

Son principe est d'évaluer l'évolution du volume entre deux surfaces enveloppant la surface de l'image à différentes échelles i (figure 5.18). Les deux surfaces sont appelées supérieure U et inférieure L et sont séparées de $2i$. Initialement ($i = 0$), pour une image $f(x)$ donnée, les surfaces sont égales à l'image ($f(x) = L_0(x) = U_0(x)$). Au fil des échelles, les surfaces se définissent comme suit :

$$L_i(x) = \bigwedge \{L_{i-1}(x) - 1, \bigwedge_{|x-y| \leq 1} L_{i-1}(y)\} \quad (5.28)$$

$$U_i(x) = \bigvee \{U_{i-1}(x) + 1, \bigvee_{|x-y| \leq 1} U_{i-1}(y)\} \quad (5.29)$$

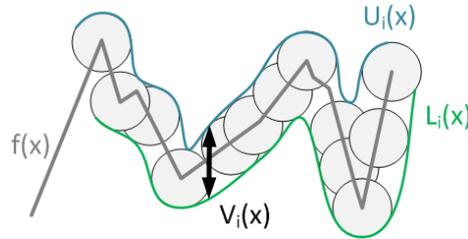


FIGURE 5.18 – Principe du covering blanket

La définition de ces surfaces est équivalente au calcul de la dilatation et de l'érosion en utilisant l'élément structurant diamant g_{diam} non-plat de taille 3×3 (équation 5.30).

$$g_{diam} = \begin{bmatrix} -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & 1 & 0 \\ -\infty & 0 & -\infty \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Les écritures (5.28) et 5.29 deviennent alors :

$$L_i(x) = \varepsilon_g(f, ig_{diam})(x) \quad (5.31)$$

$$= \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_{ig_{diam}}} (f(x+y) - ig_{diam}(y)) \quad (5.32)$$

$$U_i(x) = \delta_g(f, ig_{diam})(x) \quad (5.33)$$

$$= \bigvee_{x \in D_f, y \in D_{ig_{diam}}} (f(x+y) + ig_{diam}(y)) \quad (5.34)$$

Le volume Vol situé entre ces deux surfaces est alors calculé à partir des deux surfaces :

$$Vol_i = \sum_x (U_i(x) - L_i(x)) \quad (5.35)$$

Pour obtenir la définition telle que définie par Mandelbrot, la surface S découlant du volume précédent doit être calculée. Cette surface est la différence de volume entre deux échelles i successives (équation 5.36).

$$S_i = \frac{Vol_i - Vol_{i-1}}{2} \quad (5.36)$$

La dimension fractale est alors définie comme la pente approximative de l'évolution de S dans un plan log-log. Pour une image fractale, la pente p est constante et la dimension fractale est égale à $D = D_T - p$, D_T étant la dimension topologique et sa valeur est 2 pour une image.

Cependant, dans ce chapitre, nous nous intéressons aux spectres morphologiques. La méthode du covering blanket ne permet pas seulement de calculer la dimension fractale, elle permet également d'obtenir une courbe appelée signature fractale. Cette signature est définie par Peleg [97] comme la pente de l'évolution de S entre trois points successifs. Dans cette proposition, Peleg calcule ainsi une dérivée d'ordre 2. Pour faciliter la comparaison avec les approches précédentes, nous réduisons le calcul à une dérivée d'ordre 1.

Nous choisissons ici d'expliquer une construction de signature fractale différente de celle proposée par Peleg que nous avons construite afin d'obtenir des « pics » caractérisant les motifs présents dans l'image similaire à ceux obtenus par le spectre de motifs. Le processus pour obtenir la signature fractale passe par deux calculs de dérivée. A partir de la courbe Var_V , la courbe dérivée Var_S est obtenue de la manière suivante :

$$Var_{S_i} = S_i - S_{i-1} \quad (5.37)$$

La signature est alors obtenue par le calcul de la dérivée de Var_S :

$$Sign_i = Var_{S_i} - Var_{S_{i-1}} \quad (5.38)$$

Cette signature caractérise l'évolution des objets d'une image en fonction des échelles. Une caractérisation plus complète de l'évolution des objets peut être faite en fonction de leur intensité. En effet comme le décrit Peleg [97] dans son article, la signature fractale peut-être décomposée en deux signatures, une signature inférieure et une signature supérieure. Ces deux signatures sont obtenues par les mêmes calculs en remplaçant le volume Vol par les volumes inférieur Vol_{inf} (équation 5.39) et supérieur Vol_{sup} (équation 5.40).

$$Vol_{infi} = \sum_x (f(x) - L_i(x)) \quad (5.39)$$

$$Vol_{supi} = \sum_x (U_i(x) - f(x)) \quad (5.40)$$

La construction de ces signatures permet de caractériser les objets présents dans une image. La figure 5.19 est un exemple de courbe obtenue pour les signatures fractales. La courbe de gauche représente la signature inférieure et la courbe de droite représente la signature supérieure.

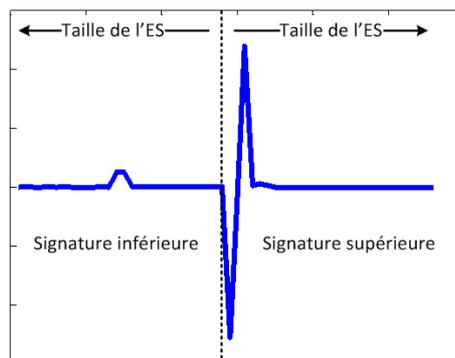


FIGURE 5.19 – Exemple de courbe obtenue pour les signatures fractales.

5.1.3 Comparaison des méthodes face à des objets synthétiques

Dans leurs articles, Maragos [80] puis Richard [110] montrent des exemples de spectres de motifs obtenus en fonction de différentes formes et en fonction de paramètres de taille. Dans le même esprit ce paragraphe illustre l'influence des dimensions et de la configuration des objets d'une image sur la forme des spectres de motifs. Pour cela nous construisons des images synthétiques contenant des carrés en utilisant les paramètres suivants :

- d : longueur des côtés des carrés
- h : contraste des carrés
- n : nombre de carrés par ligne
- e : écart entre les carrés.

Pour la comparaison des différents spectres, le paramètre d prend les valeurs [5, 10, 15, 20, 25] tout comme le paramètre e . Le contraste prend les valeurs [20, 40, 60, 80, 100]. Finalement le paramètre n prend les valeurs entières entre 2 et 6. La figure 5.20, montre l'évolution des images en fonction des paramètres.

Spectres de motifs

Les figures 5.21 à 5.24 illustrent le comportement des spectres de motifs obtenus en fonction des différents paramètres lorsque les carrés ont une intensité plus élevée que le fond. La variation de la taille des carrés entraîne un décalage du pic du côté granulométrie (figures 5.21). La position du pic est fonction de la taille des carrés. Lorsque l'écart entre les carrés varie (figures 5.22), seuls les spectres de motifs utilisant les opérateurs algébriques subissent un décalage du pic en fonction de la taille de l'écart du côté anti-granulométrie. La modification du contraste des carrés n'entraîne aucune modification à cause de la normalisation (figures 5.23). Enfin l'augmentation du nombre de carrés influence seulement sur les spectres de motifs utilisant les opérateurs algébriques dont l'amplitude du pic du côté anti-granulométrie varie (figures 5.24). Le tableau 5.1 résume les différentes modifications.

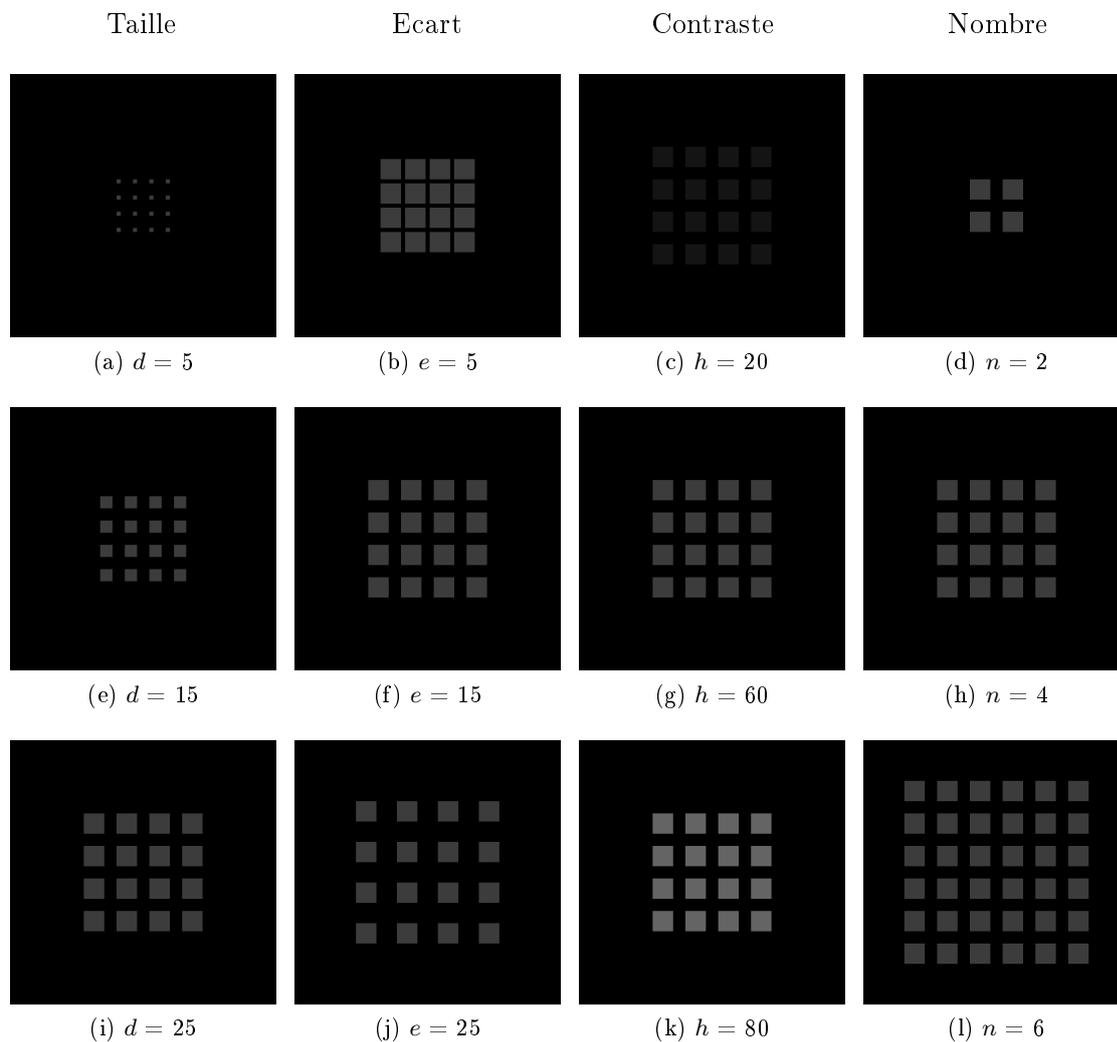
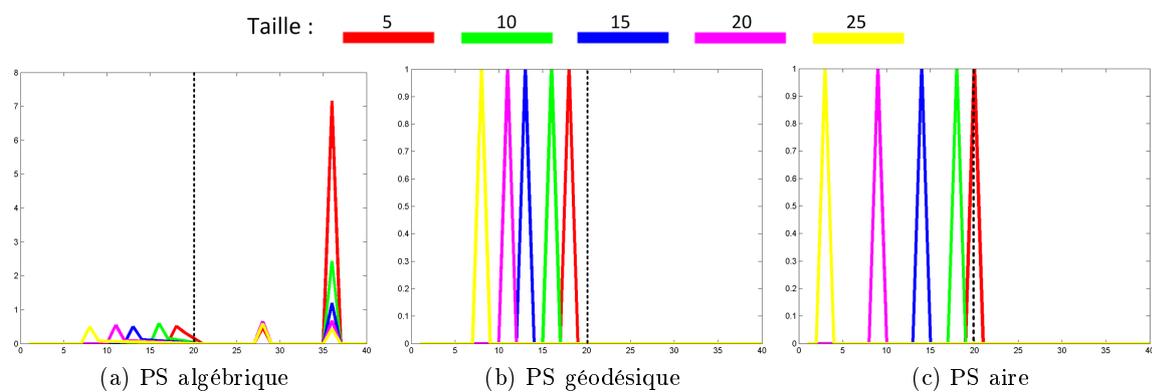


FIGURE 5.20 – Évolutions des carrés en fonction des paramètres.

FIGURE 5.21 – Influence de la taille des carrés d sur les spectres de motifs.

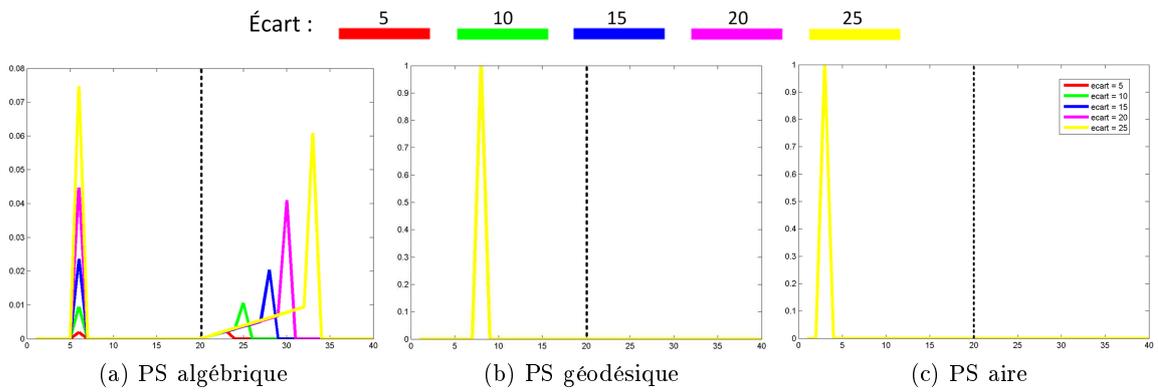


FIGURE 5.22 – Influence de l'écart e entre les carrés sur les spectres de motifs.

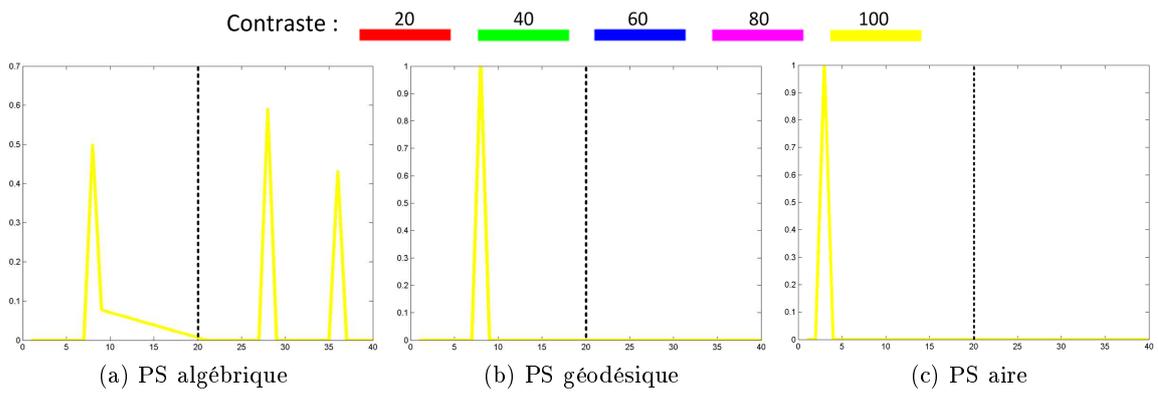


FIGURE 5.23 – Influence du contraste h des carrés sur les spectres de motifs.

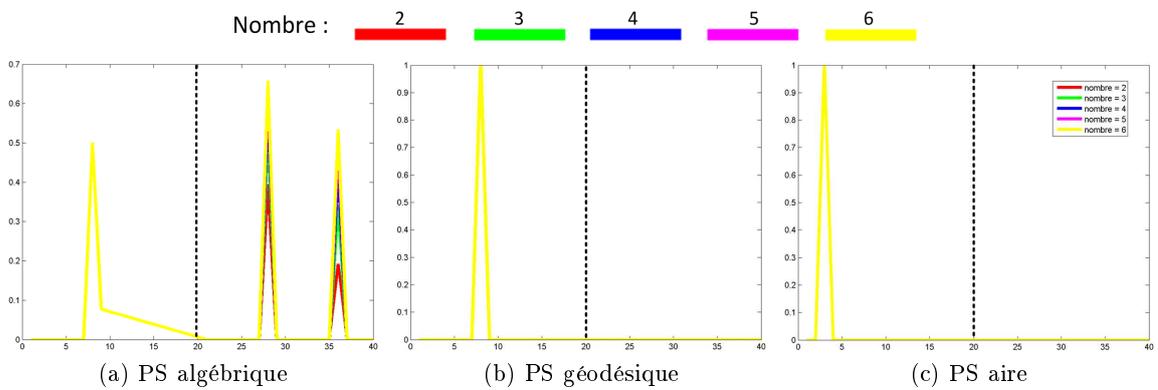


FIGURE 5.24 – Influence du nombre de carrés n sur les spectres de motifs.

		Taille	Écart	Contraste	Nombre
Variations	Algébrique	Translation	Translation	Aucune	Modification d'amplitude
	Géodésique	Translation	Aucune	Aucune	Aucune
	Aire	Translation	Aucune	Aucune	Aucune

TABLE 5.1 – Résumé des variations des spectres de motifs en fonction des différents paramètres de construction des images de carrés.

Covariance morphologique

La caractérisation des motifs de l'image est plus difficile à analyser avec la covariance morphologique. Néanmoins, de la même manière que pour le spectre de motif, les pics subissent un décalage en fonction de la taille des motifs (figure 5.25a) et de l'écart entre les carrés (figure 5.25b) et un changement d'amplitude en fonction du contraste et du nombre de motifs (figures 5.26a et 5.26b). Cependant, l'analyse des variations est complexe avec la covariance puisque l'amplitude est également modifiée pour les variations de taille et d'écart. Le tableau 5.2 résume les différentes modifications.

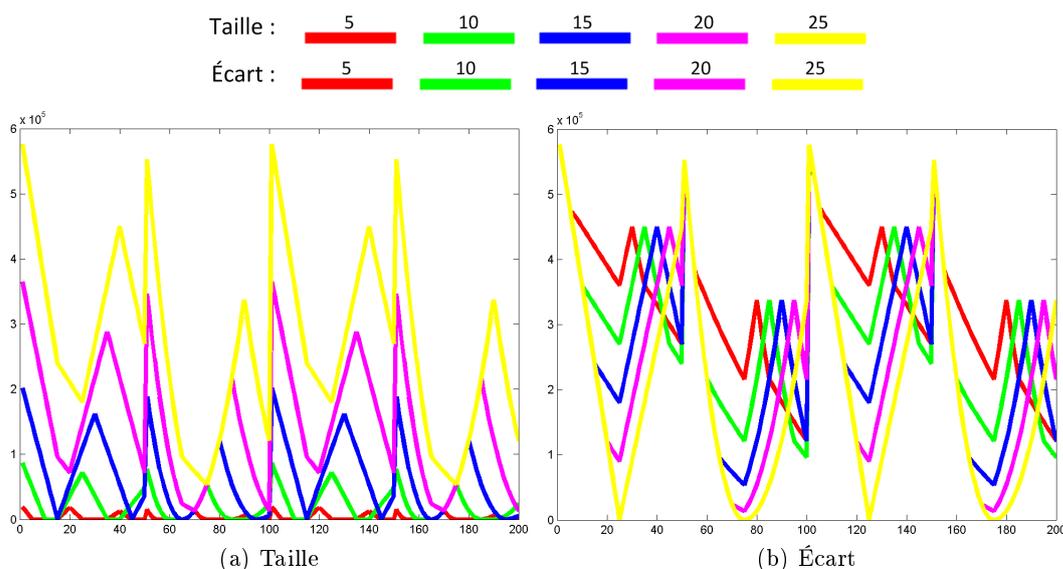


FIGURE 5.25 – Influence de la taille d des carrés et de l'écart e entre les carrés sur les spectres de motifs.

		Taille	Écart	Contraste	Nombre
Variations	Translation et modification d'amplitude	Translation et modification d'amplitude	Modification d'amplitude	Modification d'amplitude	

TABLE 5.2 – Résumé des variations de la covariance morphologique en fonction des différents paramètres de construction des images de carrés.

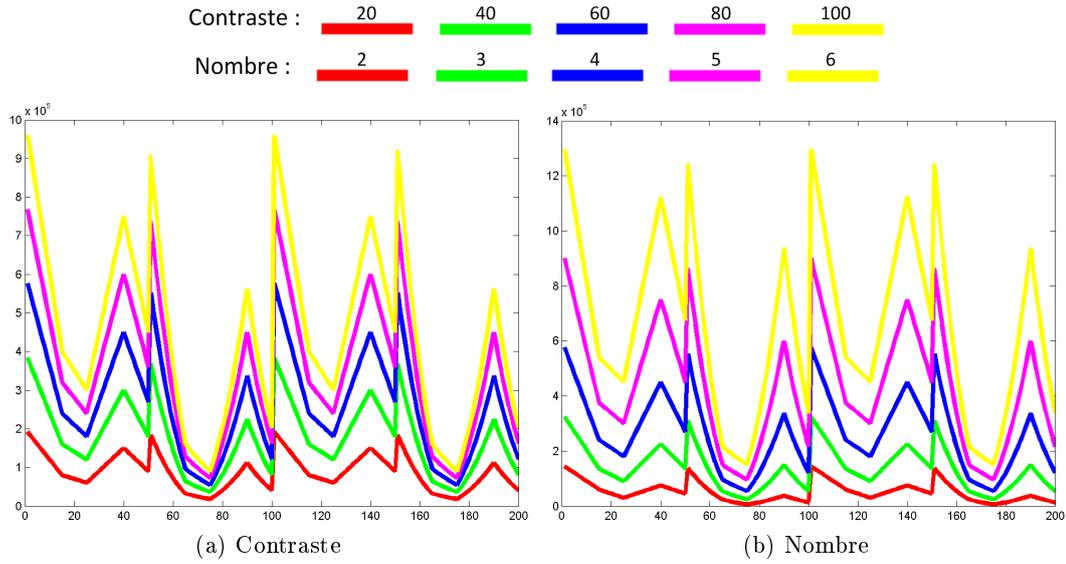


FIGURE 5.26 – Influence du contraste h et du nombre de carrés n sur la covariance morphologique.

Signatures fractales

Cet algorithme étant peu utilisé, nous allons démontrer mathématiquement l'influence des paramètres sur les signatures fractales en déterminant leur écriture mathématique en fonction des paramètres. Nous rappelons que les paramètres utilisés sont : n le nombre de carrés, d la taille des carrés, e l'écart entre les carrés et h le contraste entre les carrés et le fond. Pour aboutir sur l'écriture mathématique des signatures, la démonstration commence par l'écriture mathématique des volumes issus des dilations et des érosions. Pour cela, le paramètre i caractérise le nombre d'itérations et la fonction Heaviside $\mathcal{H}(x)$ est telle que :

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.41)$$

1. Calcul du volume généré par la surface dilatée :

(a) Dilatation du motif :

$$n^2 d^2 (h + i) \quad (5.42)$$

(b) Dilatation du fond :

$$\begin{aligned} & i \cdot \left(n^2 (e^2 + 2ed) - 4n^2 \sum_{j=1}^i (d + j - 1) + \mathcal{H}\left(i - \frac{e}{2}\right) \cdot 4n^2 \sum_{j=\frac{e}{2}+1}^i \left(d + 2 \cdot \left(j - \frac{e}{2} - 1\right)\right) \right) \\ & - \mathcal{H}(i - e - 1) \cdot i \cdot \left(n^2 (e^2 + 2ed) - 4n^2 \sum_{j=1}^i (d + j - 1) + 4n^2 \sum_{j=\frac{e}{2}+1}^i \left(d + 2 \cdot \left(j - \frac{e}{2} - 1\right)\right) \right) \end{aligned} \quad (5.43)$$

La fonction Heaviside $\mathcal{H}(x)$ permet de prendre en compte la superposition des éléments dilatés après $\frac{e}{2}$ dilatations et la suppression du fond après e dilatations.

(c) Pente intermédiaire :

La pente intermédiaire caractérise la surface en pente entre le haut du carré et le fond de l'image. Son évolution est assez complexe, elle forme une sorte de losange (figure 5.27) due à la forme diamant de l'élément structurant. Ce calcul se déroule en trois étapes pour caractériser la propagation de la pente. En premier lieu la pente s'étend jusqu'à atteindre la limite $\frac{e}{2}$, mais le calcul ne s'arrête pas ici puisqu'il reste alors des trous non comblés, il faut donc continuer d'étendre la pente tout en supprimant ce qui dépasse. Ensuite une fois que les trous sont comblés, il faut supprimer tout ce qui dépasse.

$$4n^2 \left(\sum_{j=1}^i (d+j-1) \cdot (h+i-j) - \mathcal{H}\left(i-\frac{e}{2}\right) \cdot \sum_{j=\frac{e}{2}+1}^i \left(d+2 \cdot \left(j-\left(\frac{e}{2}+1\right)\right)\right) \cdot (h+i-j) \right. \\ \left. + \mathcal{H}(i-e-1) \cdot \left(\sum_{j=e+1}^i \left(d+2 \cdot \left(j-\left(\frac{e}{2}+1\right)\right)\right) \cdot (h+i-j) - \sum_{j=e+1}^i (d+j-1) \cdot (h+i-j) \right) \right) \quad (5.44)$$

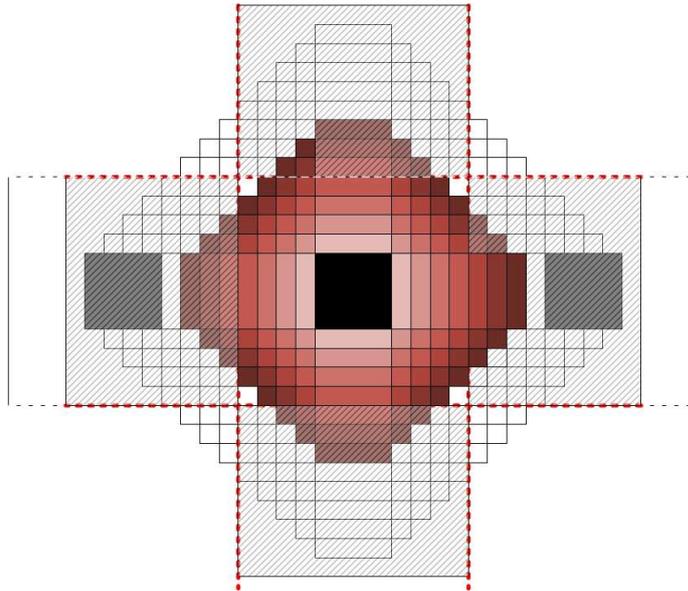


FIGURE 5.27 – Dilatation de la pente intermédiaire avec un ES diamant.

(d) Formule du volume dilaté Vol_d :

La formule totale de la dilatation est alors :

$$\begin{aligned}
Vol_d(i) = & -\frac{4}{3}n^2i^3 + \left(-2n^2d + 4n^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{2}\right) + 2n^2\right)i^2 + \left(n^2d^2 + \left(4n^2\left(-\frac{1}{2} + h\right) + 2n^2e\right)d + n^2e^2\right. \\
& + 4n^2\left(\frac{1}{3} - \frac{h}{2}\right)\left.)\right)i + n^2d^2h + \mathcal{H}\left(i - \frac{e}{2}\right)\left(\frac{8}{3}n^2i^3 + \left(2n^2d + 4n^2(-1 - e) - 4n^2\left(-\frac{e}{2} - 1 + h\right)\right)i^2\right. \\
& + \left(\left(-2n^2e - 4n^2\left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h\right)\right)d + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) + \frac{e}{2}\right) - 4n^2\left(e + \frac{5}{3} - eh\right.\right. \\
& + \left.\left.e\left(\frac{e}{2} + 1\right) - \left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - h\right)\right)i - 4n^2\left(h - \left(\frac{e}{2} + 1\right)h + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - \frac{e}{4} - \frac{1}{2}\right)d - 4n^2\left(\frac{4}{3} + \frac{2e}{3}\right. \\
& - 2\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 3\left(\frac{e}{2} + 1\right)h - 2h + \frac{2}{3}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^3 + \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right) - \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - h\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - eh + \left(\frac{e}{2} + 1\right)eh \\
& - \mathcal{H}\left(i - e - 1\right) \cdot \left(\frac{4}{3}n^2i^3 + \left(2n^2 + 4n^2(-1 - e) - 4n^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2}\right)\right)i^2 + \left(n^2e^2 + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2\right.\right. \\
& + \left.\left.1 + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) + \frac{e}{2}\right) - 4n^2\left(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e + 1)^2 - eh + e(e + 1)\right)\right)i - 4n^2\left(\frac{3}{2}(e + 1)h + \frac{2e}{3} + \frac{2}{3}\right. \\
& \left. + \frac{e}{2}(e + 1) - \frac{h}{2}(e + 1)^2 - h - (e + 1)^2 + \frac{1}{3}(e + 1)^3 - \frac{e}{2}(e + 1)^2 + (e + 1)eh - eh\right)
\end{aligned} \tag{5.45}$$

2. Calcul du volume généré par la surface érodée :

(a) Érosion du motif :

$$n^2(d - 2i)(h - i) \tag{5.46}$$

(b) Erosion du fond :

$$-i.(n^2.e^2 + 2.n.e.d) \tag{5.47}$$

(c) Pente intermédiaire :

$$4n^2\left(\sum_{j=1}^i (d - 2j + 1)(j - i) - \mathcal{H}\left(i - \frac{d}{2}\right)\sum_{j=\frac{d}{2}+1}^i (d - 2j + 1)(j - i)\right) \tag{5.48}$$

(d) Formule du volume erodé Vol_e :

$$\begin{aligned}
Vol_e(i) = & -\frac{8}{3}n^2i^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)i^2 + \left(-n^2d^2 + (-4n^2h + 2n^2 - 2n^2e)d - n^2e^2 + \frac{2}{3}n^2\right)i \\
& + n^2d^2h - \mathcal{H}\left(i - \frac{d}{2}\right)\left(-\frac{8}{3}n^2i^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)i^2 + \left((2n^2 - 4n^2h)d + \frac{2}{3}n^2\right)i - \frac{n^2}{6}d^3\right. \\
& \left. + \left(-\frac{n^2}{2} + n^2h\right)d^2 - \frac{n^2}{3}d\right)
\end{aligned} \tag{5.49}$$

3. Calcul de la signature (équation 5.38) :

À partir des volumes obtenus par la dilatation et l'érosion de l'image, nous obtenons la signature $Sign$ suivante :

$$\begin{aligned}
Sign(i) = & 8n^2 \\
& +\mathcal{H}\left(i-\frac{e}{2}\right)(16n^2) \\
& -\mathcal{H}(i-e-1)(8n^2) \\
& +\mathcal{H}\left(i-\frac{d}{2}\right)(-16n^2) \\
& +\mathcal{D}\left(i-\frac{e}{2}\right)(-16n^2) \\
& -\mathcal{D}(i-e-1)(-8n^2) \\
& +\mathcal{D}\left(i-\frac{d}{2}\right)(16n^2) \\
& -\mathcal{D}\left(i-1-\frac{e}{2}\right)((-2de+16+(-4+4h)d)n^2) \\
& +\mathcal{D}(i-e-2)((-4e+4h)n^2) \\
& -\mathcal{D}\left(i-1-\frac{d}{2}\right)((2d-4h-12)n^2) \\
& +\mathcal{D}\left(i-2-\frac{e}{2}\right)((4-2d)e+(-8+4d)h)n^2) \\
& +\mathcal{D}\left(i-2-\frac{d}{2}\right)((4h-2d)n^2)
\end{aligned} \tag{5.50}$$

4. Signatures supérieure et inférieure :

Il est également possible de trouver les écritures des signatures inférieure $Sign_{inf}$ et supérieure $Sign_{sup}$ en partant des écritures des volumes supérieure et inférieure :

$$\begin{aligned}
Sign_{inf}(i) = & 16n^2 \\
& +\mathcal{H}\left(i-\frac{d}{2}\right)(-16n^2) \\
& +\mathcal{D}\left(i-\frac{d}{2}\right)(16n^2) \\
& -\mathcal{D}\left(i-1-\frac{d}{2}\right)((2d-4h-12)n^2) \\
& +\mathcal{D}\left(i-2-\frac{d}{2}\right)((4h-2d)n^2)
\end{aligned} \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned}
Sign_{sup}(i) = & -8n^2 \\
& +\mathcal{H}\left(i-\frac{e}{2}\right)(16n^2) \\
& -\mathcal{H}(i-e-1)(8n^2) \\
& +\mathcal{D}\left(i-\frac{e}{2}\right)(-16n^2) \\
& -\mathcal{D}(i-e-1)(-8n^2) \\
& -\mathcal{D}\left(i-1-\frac{e}{2}\right)((-2de+16+(-4+4h)d)n^2) \\
& +\mathcal{D}(i-e-2)((-4e+4h)n^2) \\
& +\mathcal{D}\left(i-2-\frac{e}{2}\right)((4-2d)e+(-8+4d)h)n^2)
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Les écritures mathématiques définissent le comportement des signatures en fonction des différents paramètres. Nous pouvons voir (équation 5.51) que la position du pic dans la signature inférieure dépend du paramètre d . Le pic est composé de 3 parties et il est centré autour de la position de $\frac{d}{2} + 1$. Les 3 parties qui le composent définissent son amplitude en fonction du nombre de carrés n et du contraste h des carrés.

L'équation 5.52, montre que la position des éléments composant la signature supérieure dépend de l'écart e entre les carrés. Contrairement à la signature inférieure, la signature supérieure est composée de plusieurs pics. Les pics principaux sont au nombre de deux et sont eux-mêmes composés de différents éléments. Le premier se trouve autour de $\frac{e}{2} + 1$ et le second autour de $e + 1$. Ici également les amplitudes sont fonction du contraste h et du nombre de carrés n .

Ainsi en observant les différents pics des signatures fractales, il est possible de déterminer la taille des éléments composant l'image.

Les figures 5.28a à 5.29b sont des exemples de signatures obtenues en fonction des différents paramètres, lorsque les carrés ont une intensité plus élevée que le fond. Les signatures ont bien le comportement attendu en observant les équations 5.51 et 5.52. Le tableau 5.3 résume les différentes modifications.

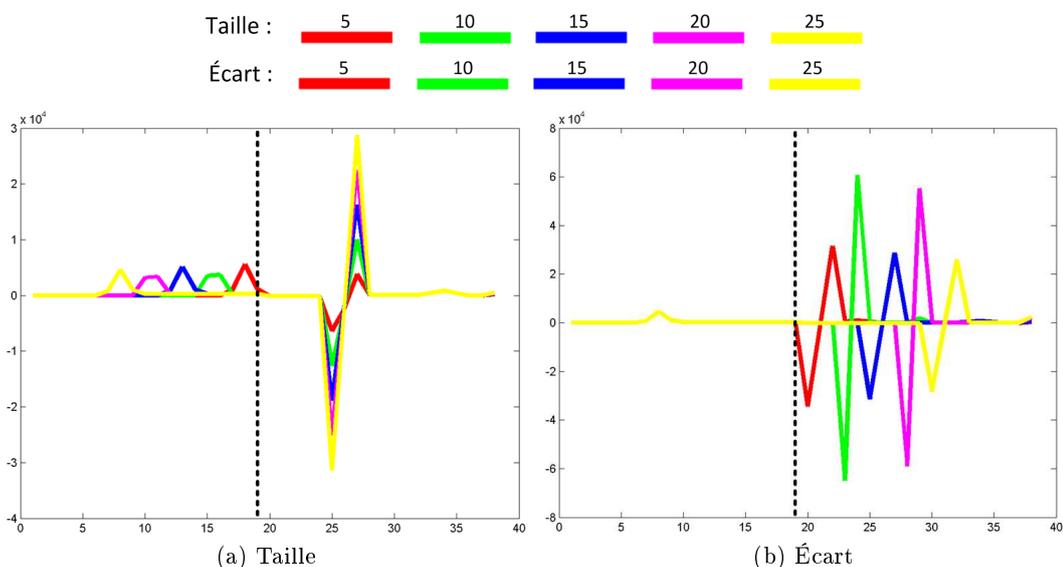


FIGURE 5.28 – Influence de la taille d des carrés et de l'écart e entre les carrés sur les signatures inférieures et supérieures.

Lorsque la taille des carrés varie (figures 5.28a), le pic de la signature inférieure varie en fonction de la taille des objets (maximum positionné en $\frac{d}{2} - 1$) et la signature supérieure ne change pas de position. Lorsque l'écart entre les carrés varie (figures 5.28b), la signature inférieure ne change pas de position et le minimum des pics de la signature supérieure varie en fonction de l'écart entre les objets (positionné en $\frac{e}{2} - 1$). Lorsque le contraste ou le nombre

des carrés variant (figures 5.29a et 5.29b), seules les amplitudes des signatures changent, leur position n'est pas modifiée.

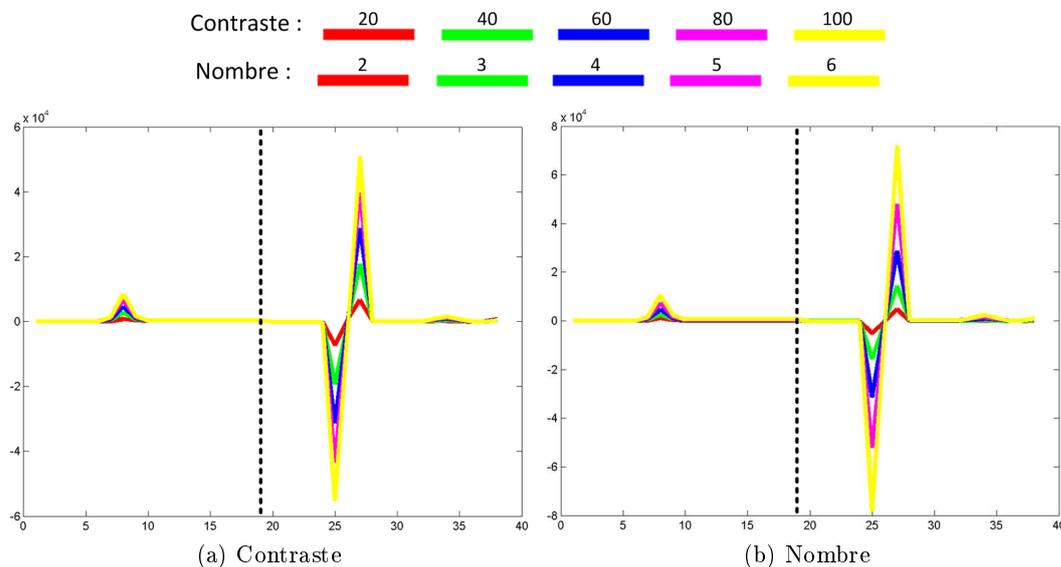


FIGURE 5.29 – Influence du contraste h et du nombre de carrés n sur les signatures inférieures et supérieures.

		Taille	Écart	Contraste	Nombre
Variations	Signature inférieure	Translation	Aucune	Modification d'amplitude	Modification d'amplitude
	Signature supérieure	Modification d'amplitude	Translation	Modification d'amplitude	Modification d'amplitude

TABLE 5.3 – Résumé des variations des signatures fractales en fonction des différents paramètres de construction des images de carrés.

Discussion Le tableau 5.4 synthétise les variations entraînées par la modification des paramètres de construction de l'image de carrés.

Les différents spectres morphologiques niveaux de gris utilisés ont chacun des formes particulières. En utilisant une image de synthèse nous avons pu voir la capacité de chacun de ces spectres à caractériser les particularités de la texture. En règle générale, la modification de la taille des carrés et de l'écart entre les carrés entraîne une translation des spectres. Le changement du nombre de carrés et du contraste entraîne une modification de l'amplitude des spectres sauf pour les spectres de motifs qui sont normalisés.

Les spectres de motifs obtiennent des résultats similaires selon le type d'opérateurs utilisés, néanmoins les opérateurs algébriques ont une sensibilité plus élevée que les autres

opérateurs face aux changements des images de synthèses.

Les variations obtenues avec la covariance sont plus complexe à analyser que les autres méthodes. En effet dans tous les cas, les spectres subissent une modification d'amplitude.

Les signatures fractales obtiennent un comportement proche de celui du spectre de motifs utilisant les opérateurs algébriques.

Pour les spectres de motifs et les signatures fractales, nous pouvons parfois observer deux pics du côté anti-granulométrie. Ces deux pics caractérisent la suppression de l'écart entre les carrés. La forme diamant de l'élément structurant utilisé entraîne dans un premier temps la suppression de l'écart situé entre deux carrés et dans un deuxième temps la suppression de l'écart situé entre les coins de 4 carrés voisins.

		Taille	Écart	Contraste	Nombre
Variations	PS Algébrique	Translation	Translation	Aucune	Modification d'amplitude
	PS Géodésique	Translation	Aucune	Aucune	Aucune
	PS Aire	Translation	Aucune	Aucune	Aucune
	Covariance	Modification d'amplitude et translation	Modification d'amplitude et translation	Modification d'amplitude	Modification d'amplitude
	Signature inférieure	Translation	Aucune	Modification d'amplitude	Modification d'amplitude
	Signature supérieure	Modification d'amplitude	Translation	Modification d'amplitude	Modification d'amplitude

TABLE 5.4 – Résumé des variations des différents spectres en fonction des différents paramètres de construction des images de carrés.

5.2 Spectres morphologiques couleur

Dans cette section nous procédons à l'extension couleur des méthodes d'analyse de textures. Pour commencer, nous déterminons les besoins et les contraintes liés au domaine de la couleur. Ensuite nous adaptons les algorithmes en tenant compte de ces besoins et contraintes. Pour terminer, nous observons l'évolution des spectres couleur lors de l'analyse d'objets de synthèse et d'images issues de la base Outex.

5.2.1 Extension des outils d'analyse à la couleur

5.2.1.1 Besoins pour l'extension à la couleur

Tout d'abord, les écritures des méthodes d'analyse nécessitent un calcul de volume couleur (équations 5.23, 5.27 et 5.35). Ce calcul de volume ou d'intégrale en niveaux de gris peut naturellement se simplifier à un calcul de somme de niveaux de gris. Cependant pour la couleur cette intégrale ne peut se réduire à un calcul de somme des « niveaux » colorimétriques puisque une couleur comprend trois dimensions. Le calcul d'intégrale doit alors se transformer en intégrale 5 dimensions, 2 dimensions pour la grille spatiale et 3 dimensions pour l'espace couleur. Nous aborderons par la suite une solution pour la construction d'une intégrale couleur.

Ensuite, pour obtenir les volumes, il est nécessaire de définir la différence entre deux images couleur. Naturellement la définition de la différence pourrait être un calcul de normes de vecteur différence pour chaque pixel de l'image. Cependant, le fil conducteur de cette thèse est la validation d'un point de vue perceptuel ou physique des opérateurs. Or, seuls les espaces CIELAB (ou CIELUV) permettent de valider la valeur de cette norme comme différence en termes de distance couleur perceptuelle. Pour obtenir les volumes couleurs, les calculs de normes seront donc obtenus dans les espaces CIELAB à l'aide de la métrique ΔE .

Nous avons vu que l'extension des opérateurs d'aire pour les images niveaux de gris nécessite un seuillage en chaque niveau de gris afin d'appliquer les opérateurs binaires. Cependant, cette solution serait très coûteuse en terme de temps calcul étant donné le nombre de couleurs existantes en utilisant un codage 8 bits traditionnel (16 777 216 couleurs). La sensibilité des résultats seraient également fortement liée à cette quantification couleur. Ce choix ne rentre donc pas dans nos objectifs.

Une autre solution pour effectuer la binarisation est d'utiliser la solution marginale en appliquant l'algorithme niveaux de gris sur chaque composante couleur. Toutefois, la méthode marginale entraîne l'apparition de fausses couleurs qui fausseraient l'analyse de la texture en ajoutant ou supprimant de la complexité.

D'une manière générale, les différentes méthodes pouvant être utilisées pour le seuillage d'une image couleur, afin d'appliquer les opérateurs d'aire, ne prennent pas en compte les particularités physiques ou perceptuelles de la couleur. Nous décidons donc de ne pas étendre ces opérateurs au domaine de la couleur pour la suite de ce chapitre.

Enfin, dans le cadre de la couleur, la construction des signatures fractales, nécessite l'écriture d'éléments structurants non-plats. En effet nous avons vu que la construction des

signatures fractales découlait de dilatations et d'érosions à l'aide de l'élément structurant diamant non-plat. Même si Soille et Rivest [125, 101] ont montré que l'utilisation d'éléments structurants plats permettait également de calculer la dimension fractale, nous avons montré dans la section 3.2.2 que l'utilisation d'éléments structurants non-plats améliorerait la précision des résultats de calcul de dimension fractale. Dans la suite de chapitre nous utilisons donc la méthode d'analyse fractale avec les éléments structurants non-plats développés dans le chapitre 2.

5.2.1.2 Intégrale couleur

Précédemment nous avons évoqué l'importance du calcul d'une intégrale couleur pour les outils d'analyse de textures. Comme nous pouvons le voir sur la figure 5.30 le calcul d'une aire en niveaux de gris peut se réduire à une approche simple d'ordre 1 (méthode des rectangles [111]). Dans ce cadre scalaire, en utilisant la méthode de l'intégration par rectangles (figure 5.30a) ou l'intégration par trapèze (figure 5.30b) le résultat obtenu pour l'image proposée est identique puisque la construction d'une image rend les aires des triangles égales à la moitié de l'aire du rectangle.

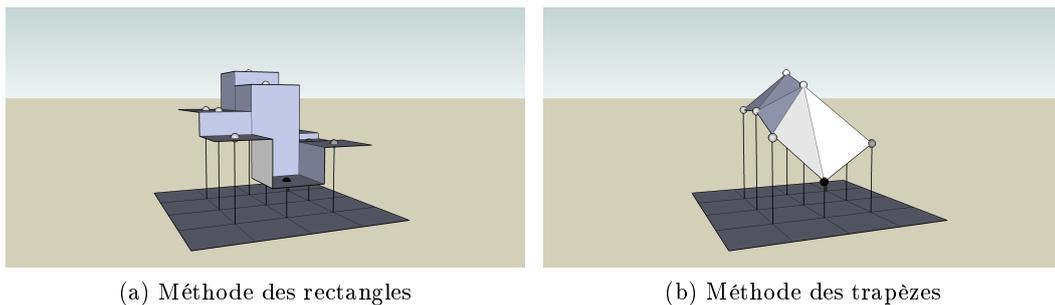


FIGURE 5.30 – Intégration d'une surface pour une image niveaux de gris.

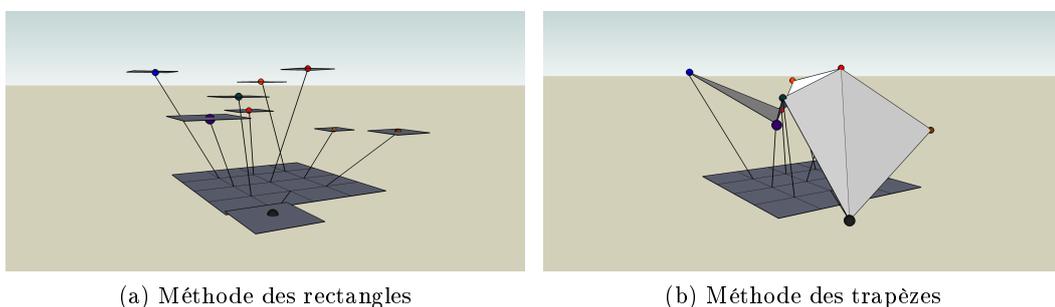


FIGURE 5.31 – Intégration d'une surface pour une image couleur.

En couleur, le problème devient plus complexe puisqu'il faut tenir compte de 5 dimensions (coordonnées spatiales et couleurs). Pour avoir la capacité de prendre en compte ces 5 dimensions, il faut considérer que la surface est une combinaison de l'information couleur et

de l'information spatiale. La méthode des rectangles n'est alors pas adaptée (figure 5.31a) contrairement à celle des trapèzes (Représentation en pseudo 3D, Figure 5.31b). Néanmoins, le calcul de volume d'un prisme en 5 dimensions est complexe. Toutefois, Peli [98] montre la possibilité de calculer la signature fractale en passant directement par le calcul de l'aire de la surface médiane sans calculer le volume. Ce propos peut être généralisé pour l'ensemble des signatures et spectres.

Le calcul de l'aire dans un espace à 5 dimensions s'établit en divisant la surface (l'image) en triangles. Néanmoins le choix de la division de l'aire en triangle n'est pas unique, comme l'indique la figure 5.32, il est possible de diviser la surface de l'image de plusieurs manières. De ce fait :

- Faut-il prendre les configurations 1 ou 2 pour l'image entière ?
- Faut-il s'adapter en fonction de la valeur de l'aire obtenue ? C'est-à-dire, choisir la configuration avec laquelle l'aire est maximum ou minimum pour chaque carré de pixels (choix entre la configuration 1 et 2)
- Faut-il choisir une division plus complexe (configuration 3) en divisant le carré en 4 triangles, sachant que la valeur "couleur" du point O n'est pas connue et qu'elle peut introduire des erreurs lors du calcul

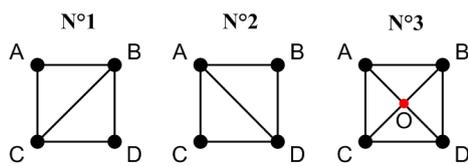


FIGURE 5.32 – Division de la surface délimitée par 4 pixels.

Les réponses aux questions précédentes ainsi que la quantification de l'apport de cette intégration font partie des perspectives de ce travail. Pour la suite de cette thèse, nous testons l'apport du calcul d'intégrale couleur en utilisant la configuration n°1. Le calcul vectoriel de l'aire de chaque triangle est ensuite établi par un produit vectoriel (équation 5.53).

$$Aire = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{BC}\| \quad (5.53)$$

5.2.1.3 Écritures des outils couleur

L'extension des méthodes de granulométrie, de covariance et de signatures fractales passe par l'extension des opérateurs morphologiques à la couleur. La sous-section précédente mentionne les différents critères à respecter pour pouvoir étendre ces opérateurs à la couleur. Dans le chapitre 2 (voir 2.3.2), nous avons vu que notre proposition d'écriture des opérateurs morphologiques basés distance (équation 2.34 et 2.33) développée dans cette thèse permet l'écriture d'éléments structurants non-plats. Ainsi ces opérateurs sont utilisés dans ce chapitre pour étendre les algorithmes à la couleur. Les équations (5.54) et (5.55) sont respectivement des rappels des écritures de la dilatation et de l'érosion couleur. Les équations (5.56) et (5.57) sont les écritures d'ouverture et de fermeture découlant des

équations (5.54) et (5.55).

$$\varepsilon_c(f, g)(x) = \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x + y) - g(y)) \quad (5.54)$$

$$\delta_c(f, g)(x) = \bigvee_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x + y) + g(y)) \quad (5.55)$$

$$\gamma_c(f, g) = \delta_c(\varepsilon_c(f, g), g) \quad (5.56)$$

$$\varphi_c(f, g) = \varepsilon_c(\delta_c(f, g), g) \quad (5.57)$$

Granulométrie et spectre de motifs

L'aire couleur est calculée avec la méthode décrite précédemment. En considérant nos opérateurs morphologiques couleur, les vecteurs de granulométrie G , d'anti-granulométrie AG ainsi que le vecteur caractéristique de la granulométrie V_G peuvent s'obtenir de la manière suivante :

$$G_c(f, ng)_{n=0..\infty} = \frac{\text{Aire}(\gamma_c(f, ng))}{\text{Aire}(f)} \quad (5.58)$$

$$AG_c(f, ng)_{n=0..\infty} = \frac{\text{Aire}(\varphi_c(f, ng))}{\text{Aire}(f)} \quad (5.59)$$

$$V_{G_c}(f, g) = [G_c(f, ng)_{n=\infty..1} \quad AG_c(f, ng)_{n=0..\infty}] \quad (5.60)$$

Les spectres de motifs utilisant les opérateurs géodésiques et d'aire ne sont pas étendus à la couleur. L'étude de ces spectres dans le domaine des niveaux de gris nous a montré que leur coût combinatoire est très élevé et la binarisation nécessaire pour les opérateurs d'aire n'est pas envisageable dans le domaine de la couleur. De plus, leurs résultats sont similaires voire moins performants dans la caractérisation des textures synthétiques.

Covariance morphologique

L'opérateur de covariance morphologique s'étend de la même manière en utilisant l'opérateur d'érosion couleur (équation 5.54). Pour calculer l'évolution de l'image en fonction de l'élément structurant appliqué, nous utilisons le calcul d'aire couleur expliqué précédemment (voir 5.2.1.2).

$$K_c(f, P_{2,v}) = \text{Aire}(\xi_c(f, P_{2,v})) \quad (5.61)$$

$$K_c^n(f, P_{2,v}) = \text{Aire}(\xi_c(f, P_{2,v}))/\text{Aire}(f) \quad (5.62)$$

Signatures fractales

En couleur, nous utilisons deux algorithmes différents pour obtenir les signatures fractales. Le premier utilise l'extension du calcul du volume par la méthode des rectangles en utilisant la métrique ΔE pour mesurer la différence entre les deux images. Le second utilise le calcul d'aire couleur expliqué précédemment (voir 5.2.1.2).

L'algorithme pour obtenir les signatures pour les images couleur subit une modification afin d'utiliser le calcul d'aire couleur. Après avoir obtenu les images (surfaces) supérieure et inférieure, l'étape suivante est directement le calcul de l'aire de ces surfaces, et non le volume compris entre ces images et l'image initiale. L'algorithme utilisé est alors le suivant :

$$L_i(x) = \varepsilon_c(f, ig_{diam})(x) \quad (5.63)$$

$$= \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_{ig_{diam}}} (f(x+y) - ig_{diam}(y)) \quad (5.64)$$

$$U_i(x) = \delta_c(f, ig_{diam})(x) \quad (5.65)$$

$$= \bigvee_{x \in D_f, y \in D_{ig_{diam}}} (f(x+y) + ig_{diam}(y)) \quad (5.66)$$

$$Aire_{inf,i} = Aire(L_i(x)) \quad (5.67)$$

$$Aire_{sup,i} = Aire(U_i(x)) \quad (5.68)$$

$$Var_{Sinf,i} = Aire_{inf,i} - Aire_{inf,(i-1)} \quad (5.69)$$

$$Var_{Ssup,i} = Aire_{sup,i} - Aire_{sup,(i-1)} \quad (5.70)$$

La signature est finalement obtenue pour l'algorithme couleur par le calcul de la dérivée de Var_S :

$$Sign_{inf,i} = Var_{Sinf,i} - Var_{Sinf,(i-1)} \quad (5.71)$$

$$Sign_{sup,i} = Var_{Ssup,i} - Var_{Ssup,(i-1)} \quad (5.72)$$

5.2.2 Étude des spectres couleur face à des objets synthétiques

De la même manière que lors de l'étude des spectres niveaux de gris, nous allons étudier le comportement des différents spectres face à des images synthétiques. Pour cela, nous utilisons une image couleur contenant des carrés et pour laquelle les différents paramètres sont modifiés. Ici nous utilisons seulement les paramètres de taille d , d'écart e et de contraste h . Le nombre de carrés agissant comme le contraste sur l'amplitude des signatures, nous ne l'étudions pas dans cette partie. Les images utilisées sont celles de la figure 5.33.

Les figures 5.34 à 5.37 montrent que l'extension des méthodes à la couleur permet également de caractériser les objets. Les changements sont similaires à ceux obtenus avec les méthodes niveaux de gris. Le tableau 5.5 synthétise les résultats obtenus.

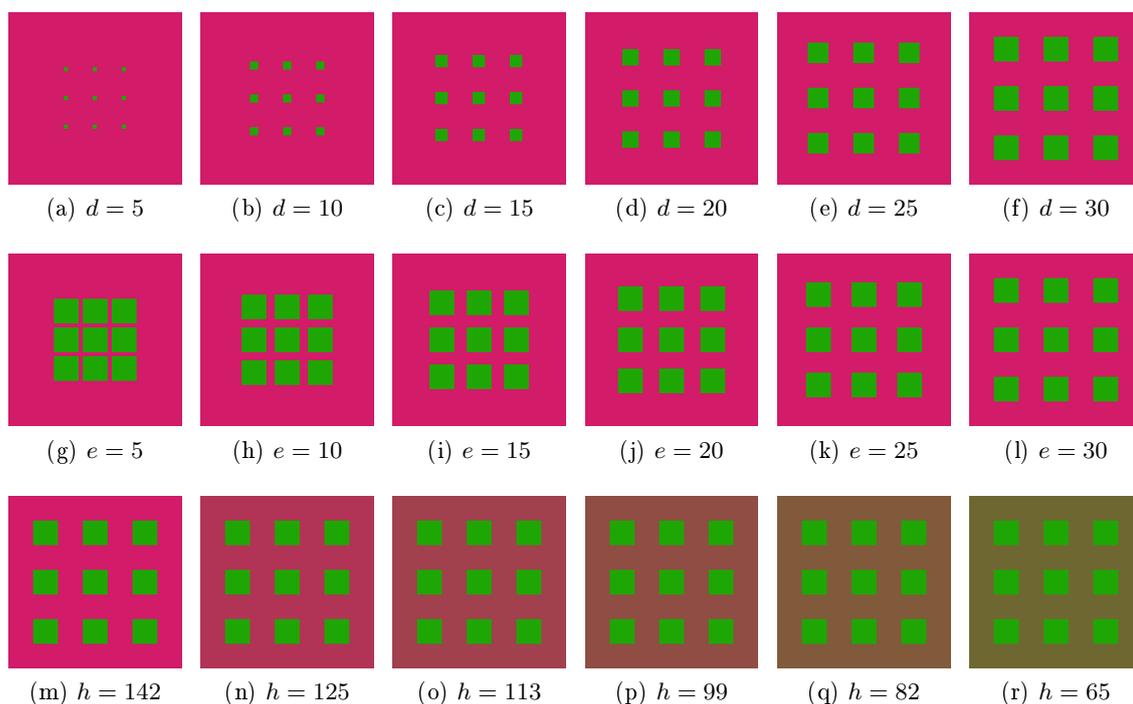


FIGURE 5.33 – Les différentes images couleur utilisées en fonction des paramètres.

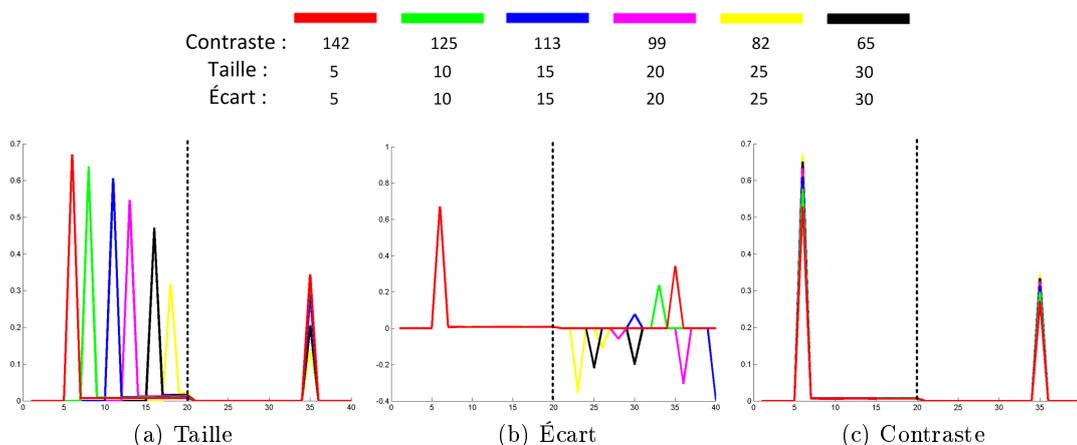


FIGURE 5.34 – Influence des paramètres sur les spectres de motifs.

Les spectres de motifs traduisent les modifications de taille et d'écart entre les carrés par des translations. Les modifications de contraste sont traduites par une modification d'amplitude. La covariance vectorielle obtient les mêmes types de variations que pour la covariance niveaux de gris. Les variations de tailles et d'écart entraînent des translations. Cependant, quelque soient les variations, les spectres subissent une modification d'amplitude. La covariance ne discrimine pas de manière simple les variations des objets dans une image, contrairement aux spectres de motifs et des signatures fractales. Finalement, les signatures fractales, avec ou sans le calcul utilisant l'aire couleur, obtiennent les mêmes types de variations

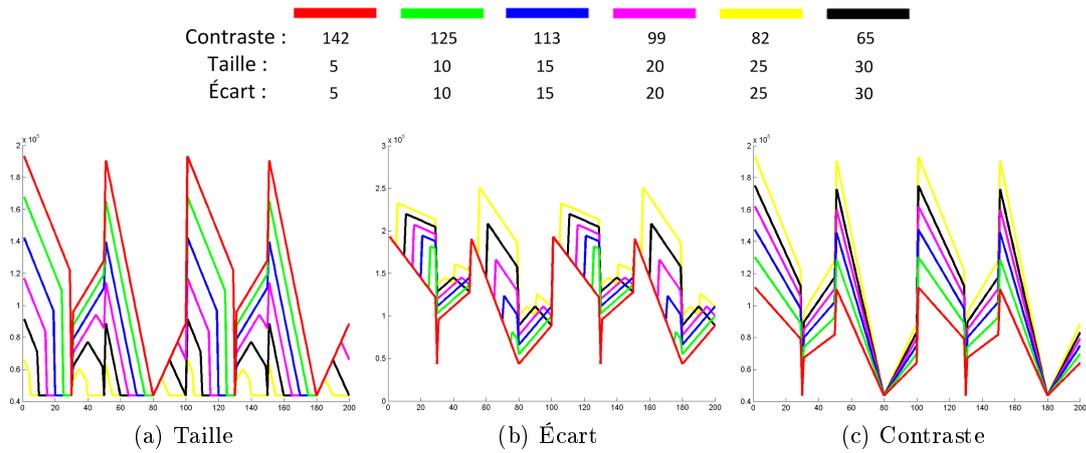


FIGURE 5.35 – Influence des paramètres sur la covariance morphologique.

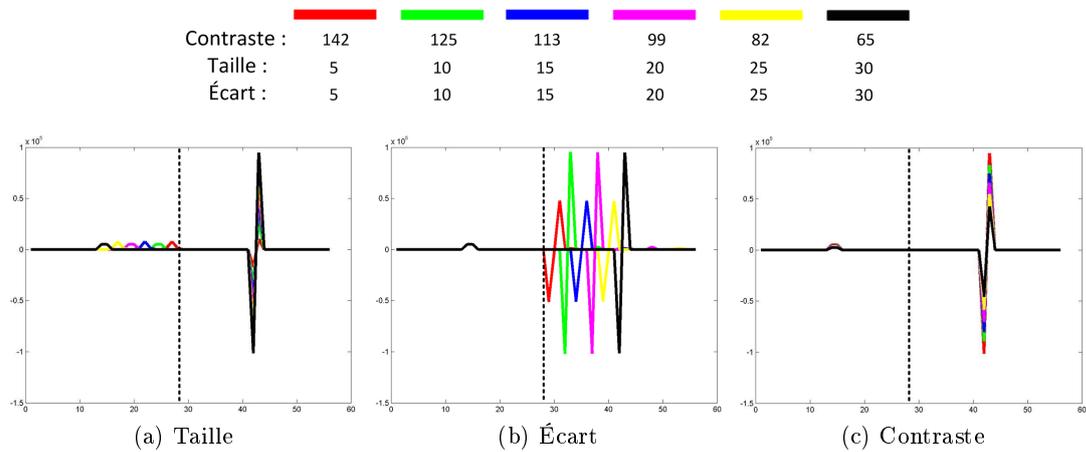


FIGURE 5.36 – Influence des paramètres sur les signatures fractales.

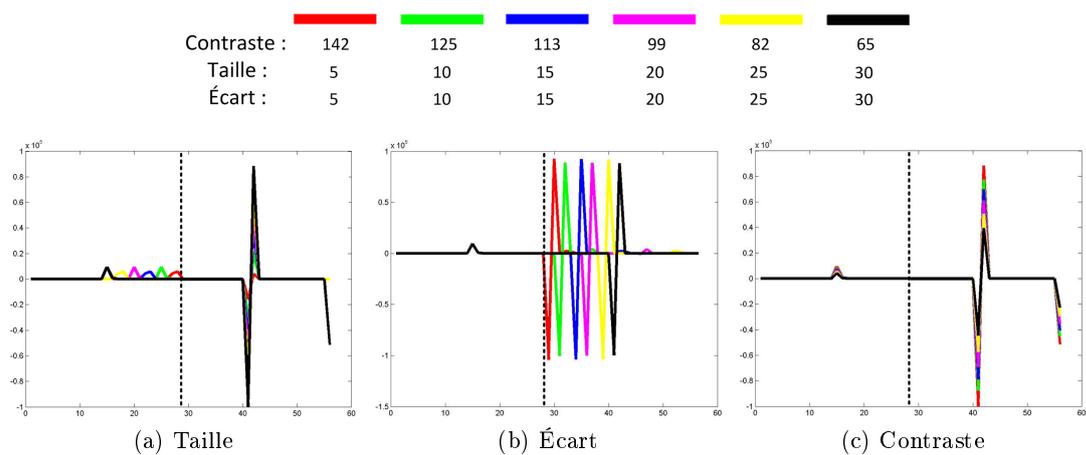


FIGURE 5.37 – Influence des paramètres sur les signatures fractales avec l'aire couleur.

en fonction des évolutions des carrés dans l'image.

		Taille	Écart	Contraste
Variations	PS Algébrique	Translation	Translation	Aucune
	Covariance	Modification d'amplitude et translation	Modification d'amplitude et translation	Modification d'amplitude
	Signature inférieure	Translation	Aucune	Modification d'amplitude
	Signature supérieure	Modification d'amplitude	Translation	Modification d'amplitude

TABLE 5.5 – Résumé des variations des différents spectres vectoriels en fonction des différents paramètres de construction des images couleur de carrés.

Pour voir si l'extension couleur apporte un gain, nous allons dans la section suivante comparer les méthodes niveaux de gris et couleur dans un processus de classification de textures. L'apport du calcul de l'intégrale couleur n'apporte pas plus de précision sur ce type d'image, elle donne néanmoins les mêmes variations en fonction des paramètres.

5.3 Evaluation des spectres face à des textures réelles

5.3.1 Présentation de la base Outex

La base Outex a été créée dans le but de tester les outils de classification et de segmentation [94]. Elle offre une grande collection de textures; textures de surfaces ou de scènes naturelles. Elle contient 29 classes de textures couleur contenant de 1 à 47 images.

Une des particularités de la base OuTex est la variété des conditions d'acquisition. Les images, de taille 746×538 pixels, sont obtenues avec trois types de sources lumineuses, six résolutions différentes (100, 120, 300, 360, 500 et 600 dpi⁴), et neuf orientations (0° , 5° , 10° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° et 90°).

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur la capacité des spectres à discriminer des textures avec les mêmes conditions d'acquisition. Pour cela nous utilisons le groupe d'images « Outex_TC_00013 » contenant 68 images; la source lumineuse est une lampe à incandescence (2856 K), la résolution est de 100 dpi et la rotation de 0° . Les images appartiennent à 12 catégories; *barleyrice* (11 images), *canvas* (15 images), *cardboard* (1 image), *carpet* (9 images), *foam* (2 images), *granite* (10 images), *paper* (1 image), *rubber* (1 image), *sandpaper* (8 images), *tile* (7 images), *wood* (1 image), *wool* (2 images). Face au nombre réduit d'images dans certaines catégories, une image est considérée comme une classe et est divisée en imquettes de taille 128×128 pixels [103, 14, 53].

4. Le DPI (Dots Per Inch) est une unité de mesure de la résolution. En français on parle de points par pouce (PPP) ou de pixels par pouce. Rappelons qu'un pouce (inch) vaut 2,54 cm.

Dans certains cas, la variation intra-catégorie est assez faible, les images ont une texture et une couleur similaire (figure 5.38a à 5.38c). Nous pouvons également trouver des variations inter-catégorie faibles, ainsi certaines textures qui appartiennent à deux catégories distinctes sont visuellement proches (figure 5.38g et 5.38h). Ces deux cas de configurations peuvent entraîner des erreurs de classification entre deux classes (images). Cependant, ces configurations ne sont pas générales à toute la base. Certaines catégories contiennent des images bien différentes en texture (figure 5.38d à 5.38f).

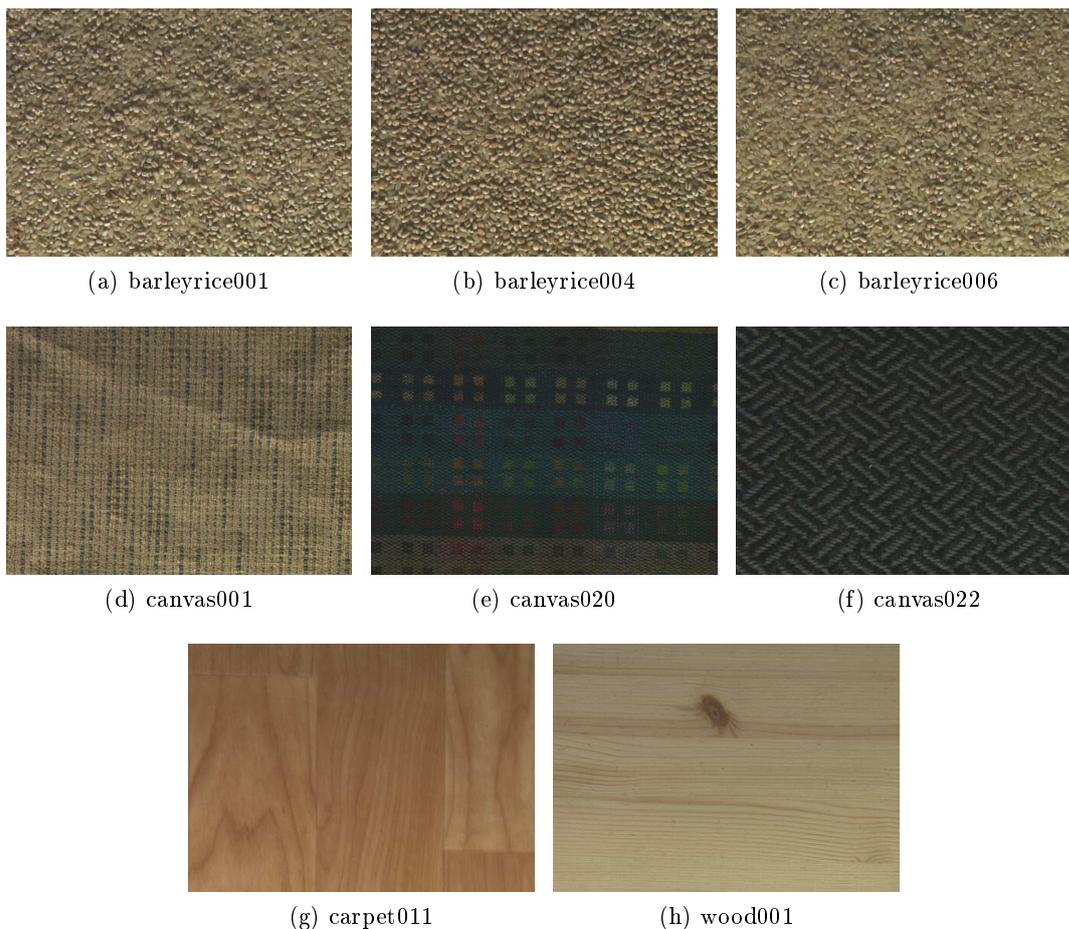


FIGURE 5.38 – Exemples d'images de la base Outex.

5.3.2 Étude sur quelques images

Cette première étude a pour objectif de déterminer le comportement des spectres intra-image, c'est-à-dire pour les imagerie appartenant à une même image. Pour cela, nous commençons par étudier la variabilité des différents spectres au sein d'une même image. Les spectres sont donc affichés de deux manières ; dans un premier temps nous affichons le spectre moyen ainsi que l'écart-type puis nous affichons les 20 courbes représentant les 20 imagerie dans une même figure.

5.3.2.1 Spectres niveaux de gris

Nous commençons par réduire les images de la base Outex aux niveaux de gris afin de tester les spectres niveaux de gris. L'étude de ces spectres permet de faire ressortir les principaux défauts et avantages des différentes méthodes.

Les spectres de motifs obtiennent d'importantes différences selon le type (algébrique, géodésique ou aire) d'opérateurs utilisés. Les spectres de motifs utilisant les opérateurs géodésiques sont fortement bruités (figures 5.40c, 5.42c, 5.44c et 5.46c). Ce bruit est induit par la reconstruction de l'image entre chaque itération. Ce comportement rend l'emploi des opérateurs géodésiques difficile dans un schéma de classification. De plus leur coût combinatoire est très élevé en comparaison aux opérateurs algébriques et d'aire.

Les spectres de motifs utilisant les opérateurs algébriques (figures 5.40b, 5.42b, 5.44b et 5.46b) et d'aire (figures 5.40d, 5.42d, 5.44d et 5.46d) ont un faible écart-type. La comparaison des spectres obtenus avec ces deux types d'opérateurs met en avant la différence de capacité à discriminer les textures. L'utilisation des opérateurs algébriques semble la plus adaptée. Malgré la faible valeur du paramètre λ pour les opérateurs d'aire (5 pixels pour obtenir un résultat comparable aux autres approches utilisant un élément structurant diamant de taille 3×3), le spectre algébrique contient plus de variations.

La covariance morphologique obtient un écart-type très important (figures 5.40e, 5.42e, 5.44e et 5.46e). Cependant, nous pouvons voir que l'écart-type n'est pas dû à un bruit mais à un déplacement de la moyenne des spectres (figures 5.39e, 5.41e, 5.43e et 5.45e). Ce déplacement de moyenne est dû à une variation de la clarté au sein de l'image. Avant d'utiliser un tel spectre dans un schéma de classification, la clarté moyenne des images devra alors être étudiée et réajustée si nécessaire.

Ce problème résolu nous pouvons observer la capacité de la covariance à détecter une répétition d'un motif dans une image. Les images de tissus (figures 5.39a et 5.45a) sont particulièrement adaptées pour ce type d'analyse. Nous pouvons observer une nette répétition du spectre pour la figure 5.39a et la figure 5.45a. La figure 5.40e montre un motif à une faible fréquence pour les angles 0° , 45° et 135° mettant en avant les motifs verticaux du tissu. Pour l'orientation de 90° ce sont les fibres du tissu qui sont mises en avant de la même manière que pour le tissu de la figure 5.46e pour les différentes orientations. Dans le cas de la figure 5.43a, les motifs ont une taille supérieure à ceux présents dans les images de tissus, la covariance est donc composée d'une seule variation pour les 4 directions. Finalement, dans les images de fines textures aléatoires (figure 5.41a), la covariance ne présente pas de variation.

La covariance morphologique est bien adaptée à la caractérisation de textures macroscopiques. La répétition des motifs est bien retranscrite par le spectre obtenu. Cependant, dans le cas de textures microscopiques, elle ne fait pas apparaître de variations.

Enfin, les signatures fractales se comportent de la même manière que les spectres de motifs utilisant les opérateurs algébriques. Ce constat semble naturel puisque les signatures fractales sont elles-mêmes obtenues à partir des opérateurs algébriques.

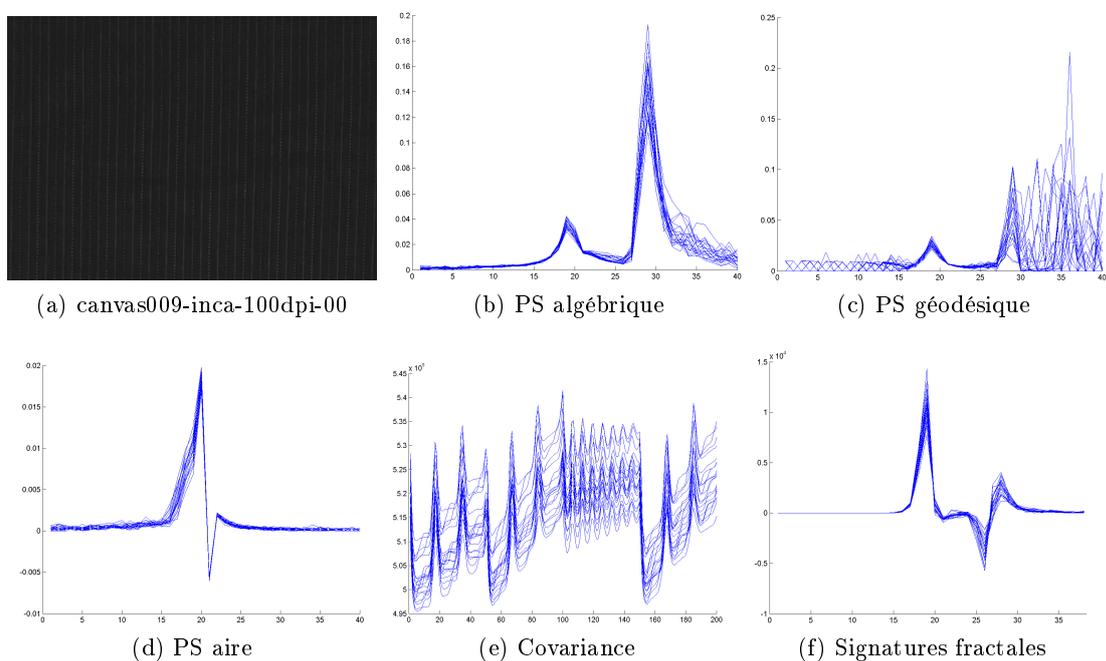


FIGURE 5.39 – Superposition des spectres des 20 imasettes de l'image « canvas009-inca-100dpi-00 » de la base Outex pour les différentes méthodes.

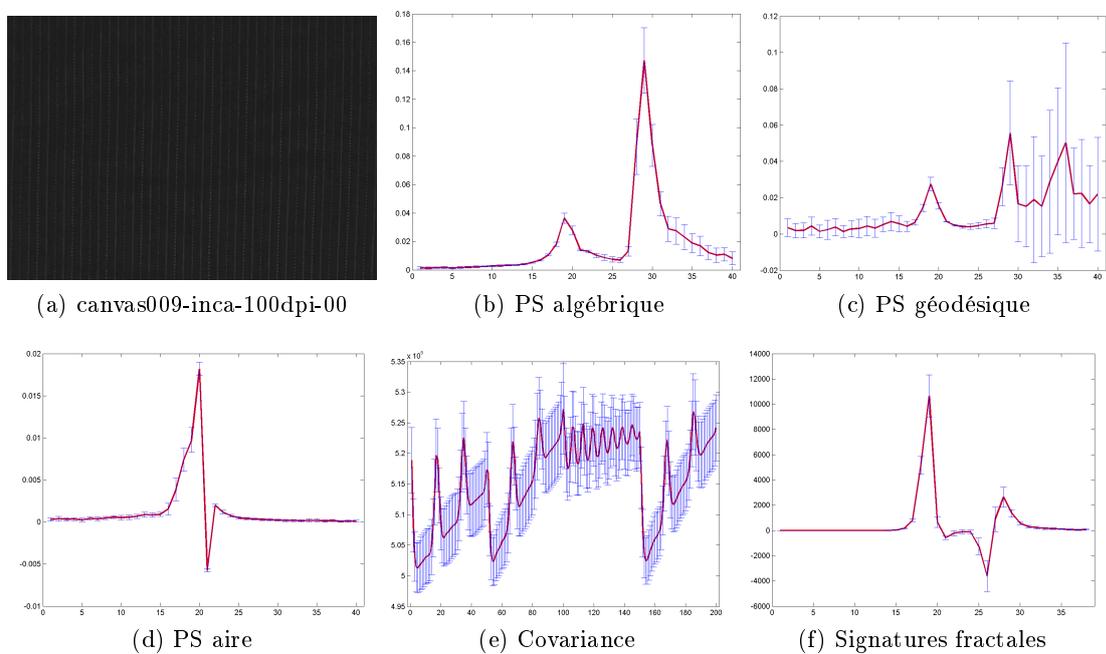


FIGURE 5.40 – Spectre moyen avec écart-type des 20 imasettes de l'image « canvas009-inca-100dpi-00 » de la base Outex pour les différentes méthodes.

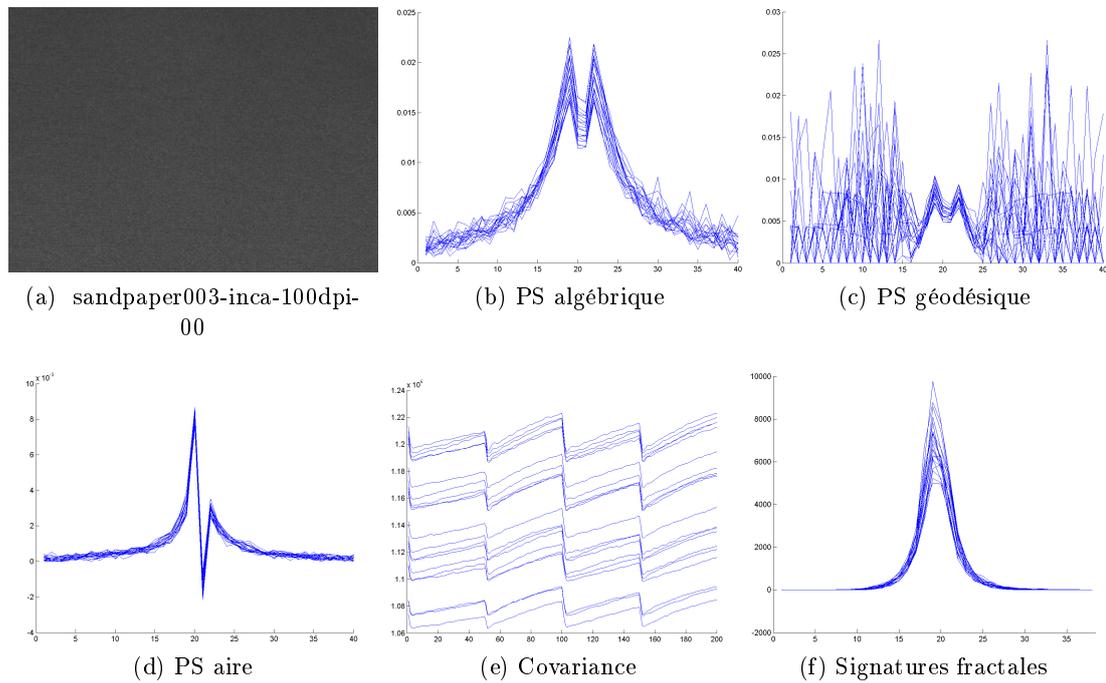


FIGURE 5.41 – Superposition des spectres des 20 imagettes de l'image « sandpaper003-inca-100dpi-00 » de la base Outex pour les différentes méthodes.

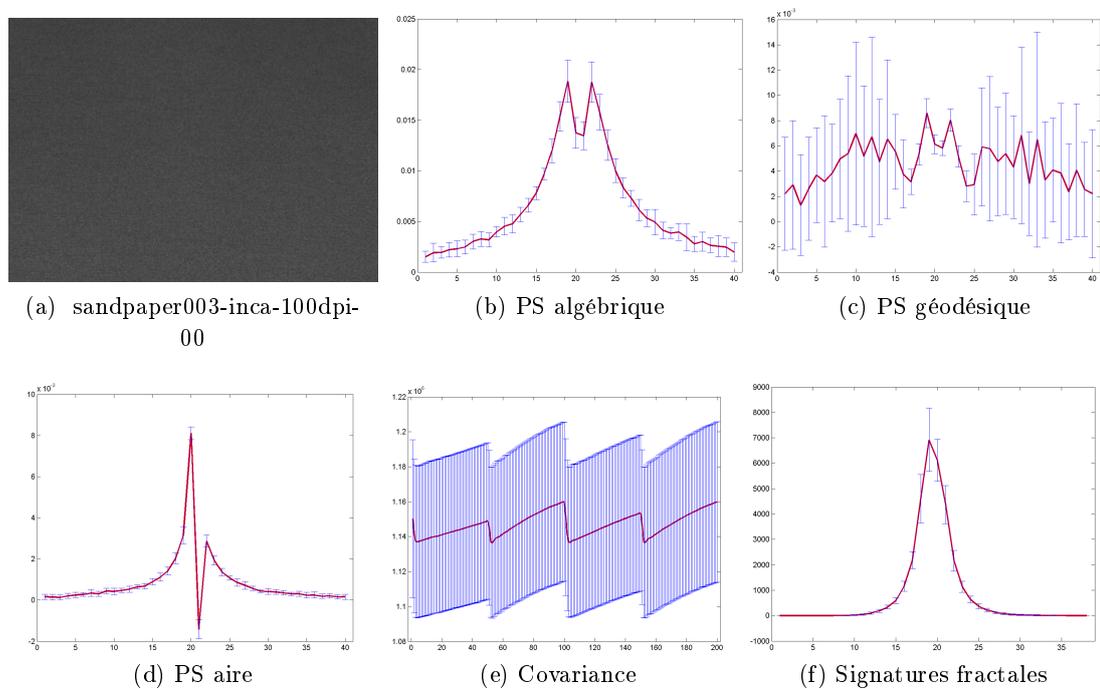


FIGURE 5.42 – Spectre moyen avec écart-type des 20 imagettes de l'image « sandpaper003-inca-100dpi-00 » de la base Outex pour les différentes méthodes.

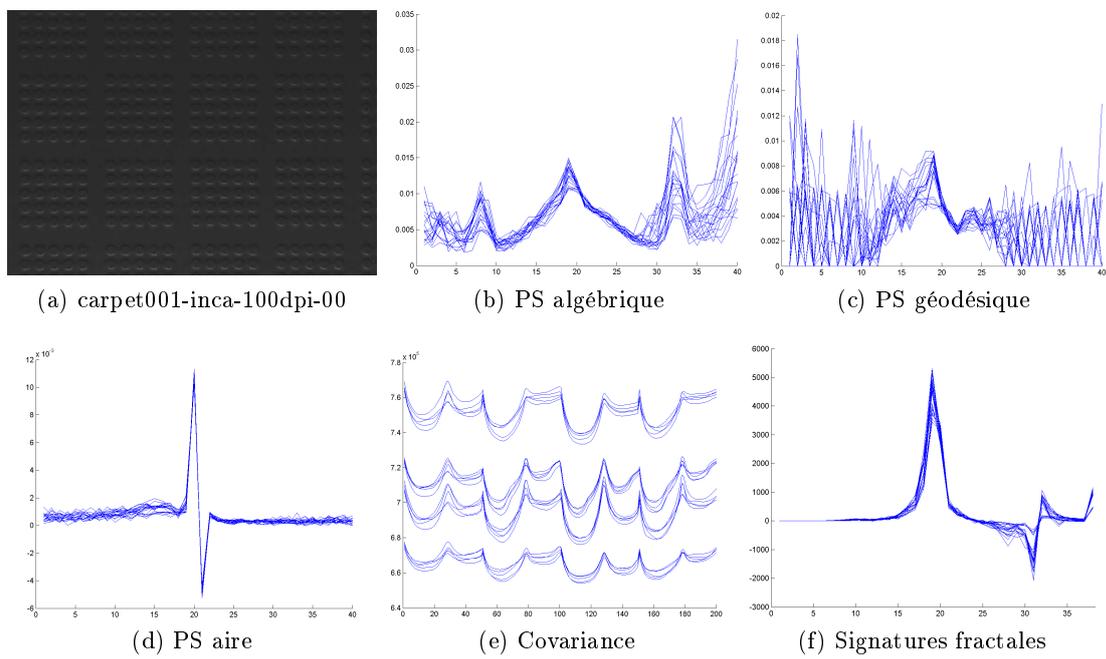


FIGURE 5.43 – Superposition des spectres des 20 imageries de l'image « carpet001-inca-100dpi-00 » de la base Outex pour les différentes méthodes.

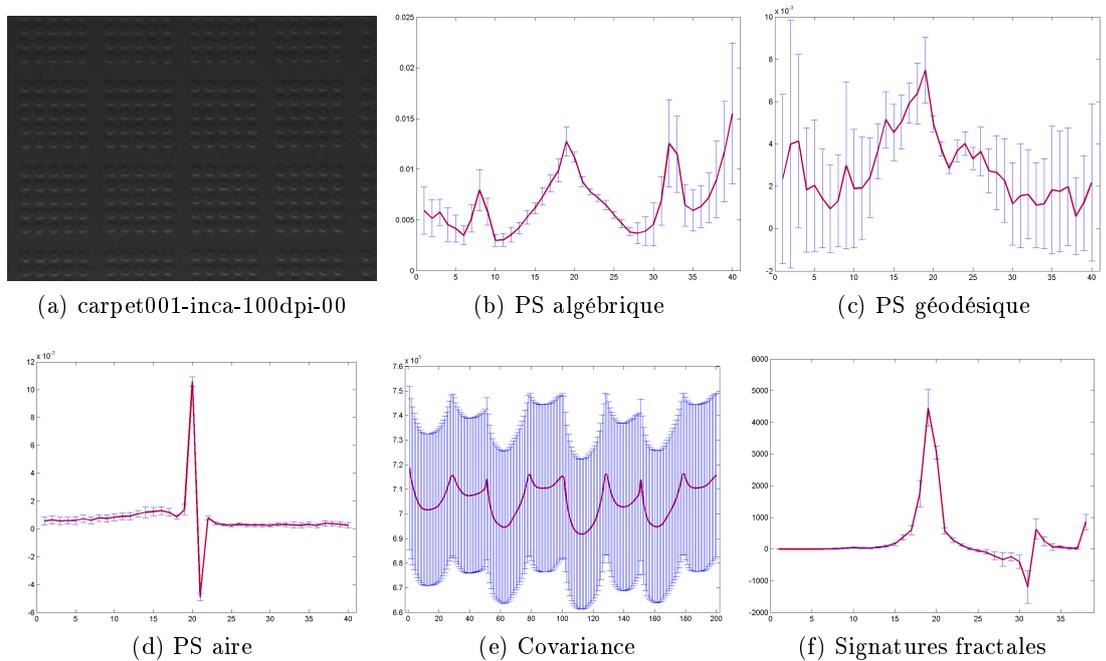


FIGURE 5.44 – Spectre moyen avec écart-type des 20 imageries de l'image « carpet001-inca-100dpi-00 » de la base Outex pour les différentes méthodes.

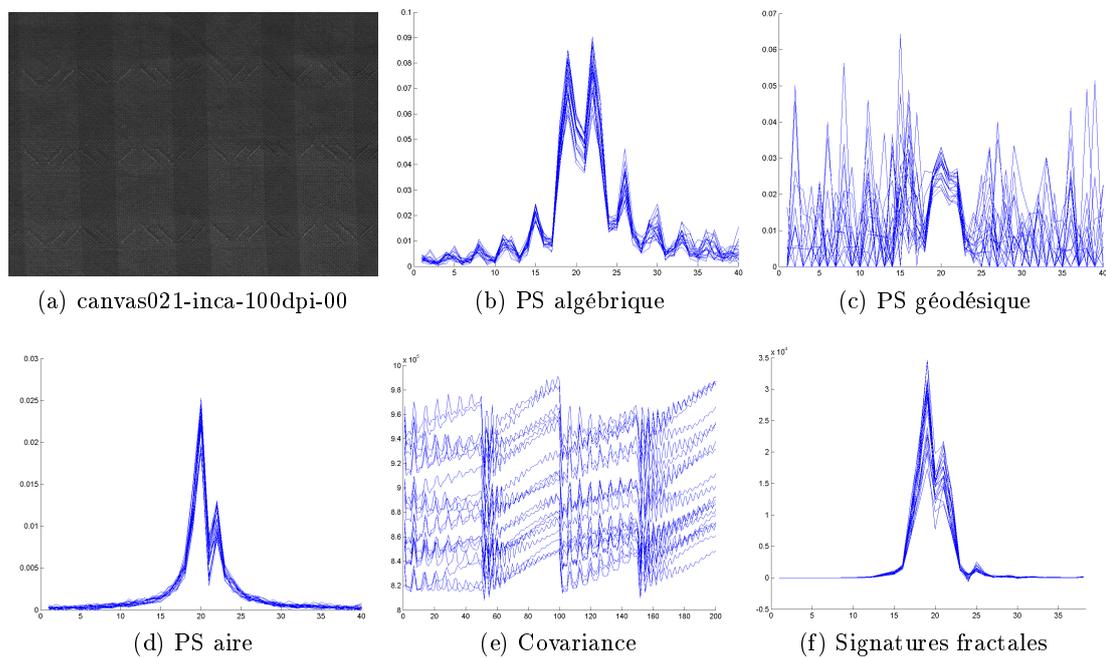


FIGURE 5.45 – Superposition des spectres des 20 imagerie de l'image « canvas021-inca-100dpi-00 » de la base Outex pour les différentes méthodes.

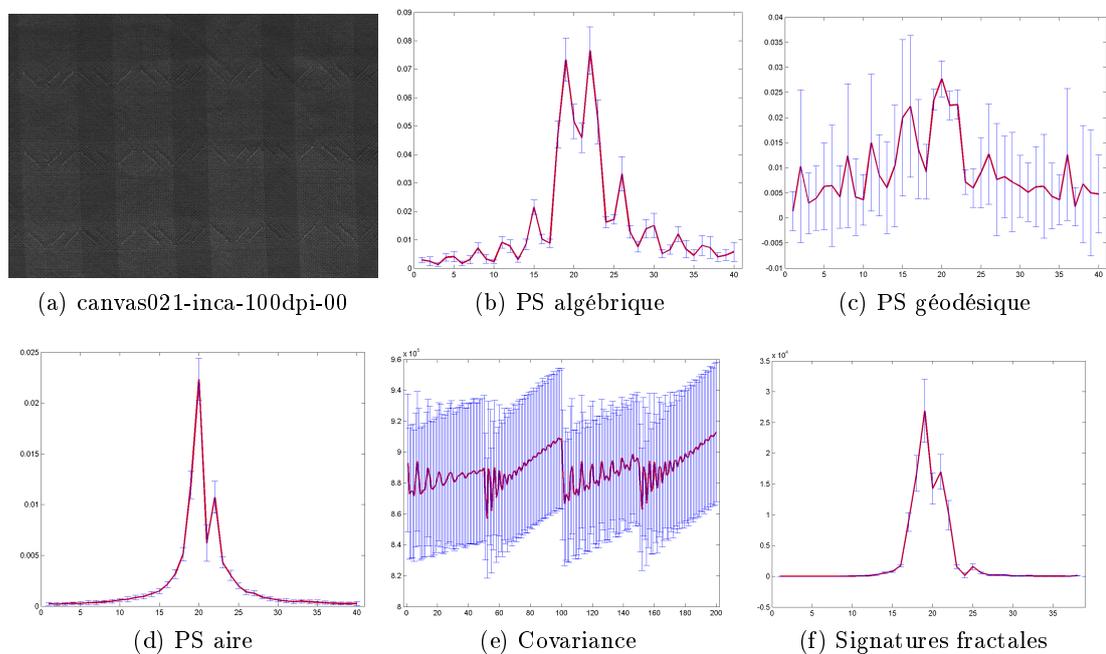


FIGURE 5.46 – Spectre moyen avec écart-type des 20 imagerie de l'image « canvas021-inca-100dpi-00 » de la base Outex pour les différentes méthodes.

À partir de cette première étude nous pouvons faire certaines hypothèses sur les capacités des différentes méthodes dans un schéma de classification.

L'utilisation des opérateurs géodésiques induit un bruitage très élevé des spectres, leur capacité de discrimination doit alors en être diminuée.

Les spectres de motifs en utilisant les opérateurs d'aire ont des variations très proches pour des textures différentes. Nous pouvons donc supposer que la discrimination des différentes textures sera difficile.

La covariance morphologique a une forte capacité à retranscrire la répétition de motifs dans une texture. Cependant elle est très sensible au changement d'illumination, les images devront alors subir une égalisation de la clarté avant d'être introduite dans le processus de classification par la covariance morphologique.

Les spectres de motifs utilisant les opérateurs algébriques et les signatures fractales ont des comportements similaires. Ces spectres ont un faible écart-type, ils sont donc peu sensibles aux variations de clarté et faiblement bruités. Ce comportement s'explique notamment par un traitement basé sur les contrastes plus que sur les valeurs absolues. De plus, ces spectres présentent des variations importantes et bien différentes en fonction des textures. Ces deux types de spectres devraient obtenir les meilleurs résultats de classification.

5.3.2.2 Spectres couleur

Nous allons maintenant étudier les différents spectres couleur dans leur représentation de textures réelles.

L'observation de ces différents spectres montre que la covariance souffre toujours du même problème de moyenne couleur. De plus, ce problème s'intensifie avec les images plus saturées. Pour les images peu saturées (figure 5.47a et 5.51a), la variance est faible contrairement aux images plus saturées (figure 5.49a et 5.53a). Néanmoins, elle capte toujours la répétition de motif pour les images de textures macroscopiques (figure 5.47a et 5.51a).

Les spectres de motifs couleur ont un faible écart-type, tout comme lors de son utilisation en niveaux de gris. Sa capacité à regrouper les imageries d'une même image semble donc importante. Cependant sa capacité à discriminer les textures semble moins importante que lors de l'analyse niveaux de gris, les spectres contiennent moins de variations dans le cas de l'étude couleur.

Les signatures fractales ont également toujours un faible écart-type malgré une augmentation de ce dernier lors du calcul de l'intégrale avec l'aire couleur. Cependant, l'utilisation de l'aire couleur semble apporter une meilleure capacité à capter les variations de textures (figure 5.47d et 5.47e).

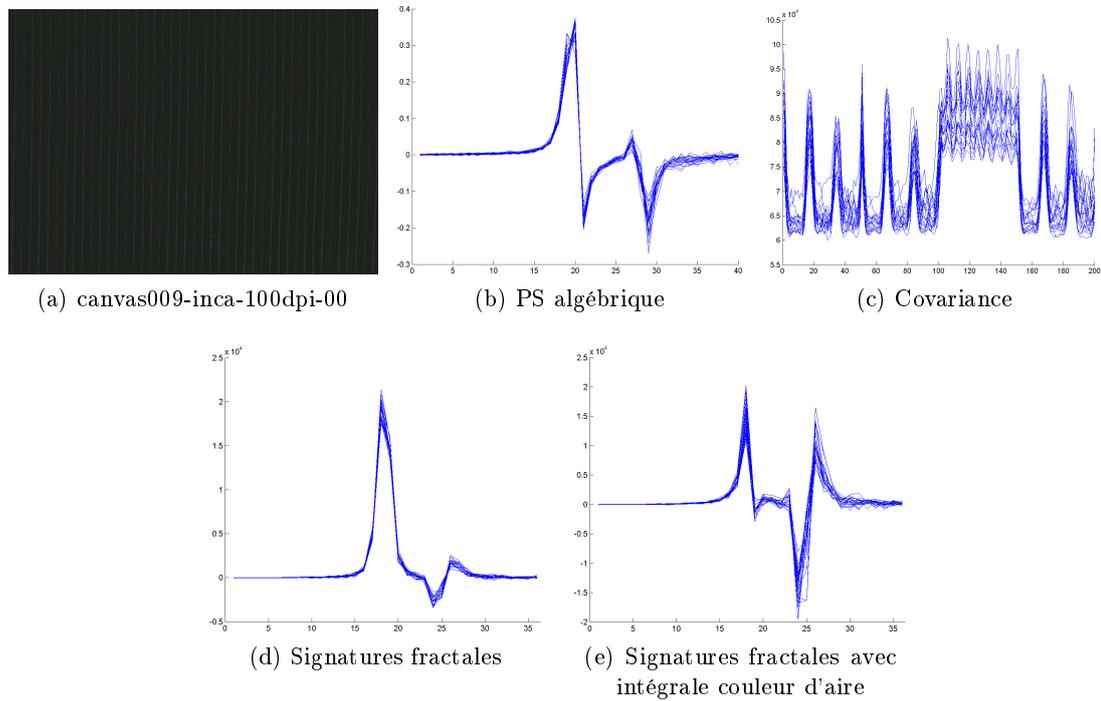


FIGURE 5.47 – Superposition des spectres des 20 imasettes de l'image « canvas009-inca-100dpi-00 » de la base Outex pour les différentes méthodes.

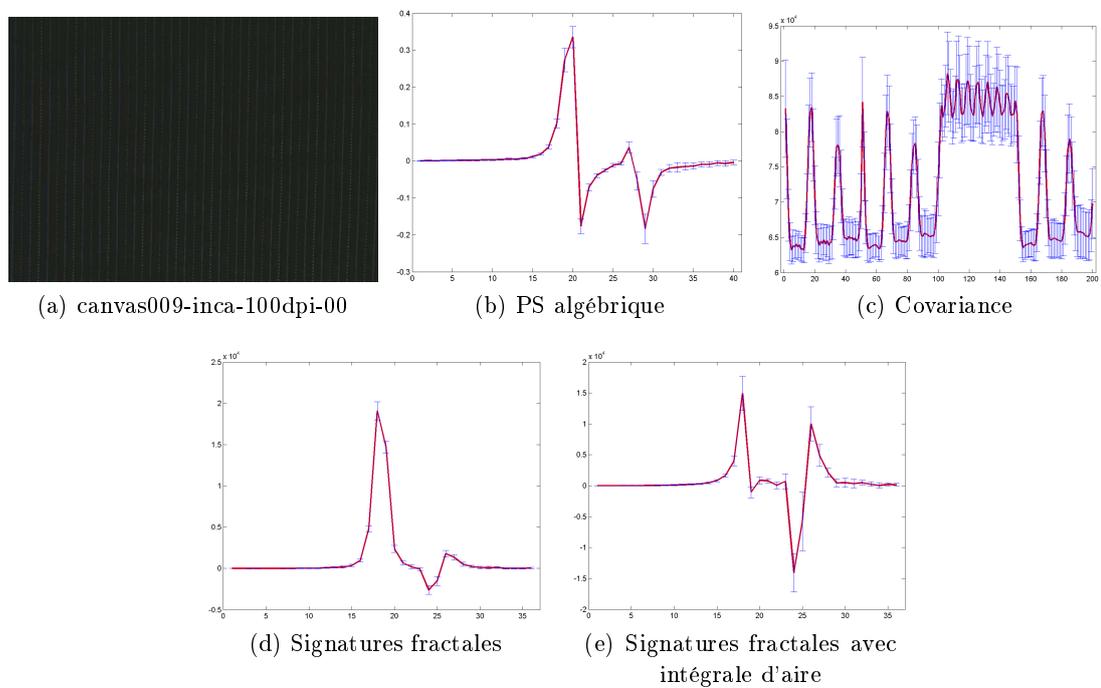


FIGURE 5.48 – Spectre moyen avec écart-type des 20 imasettes de l'image « canvas009-inca-100dpi-00 » de la base Outex pour les différentes méthodes.

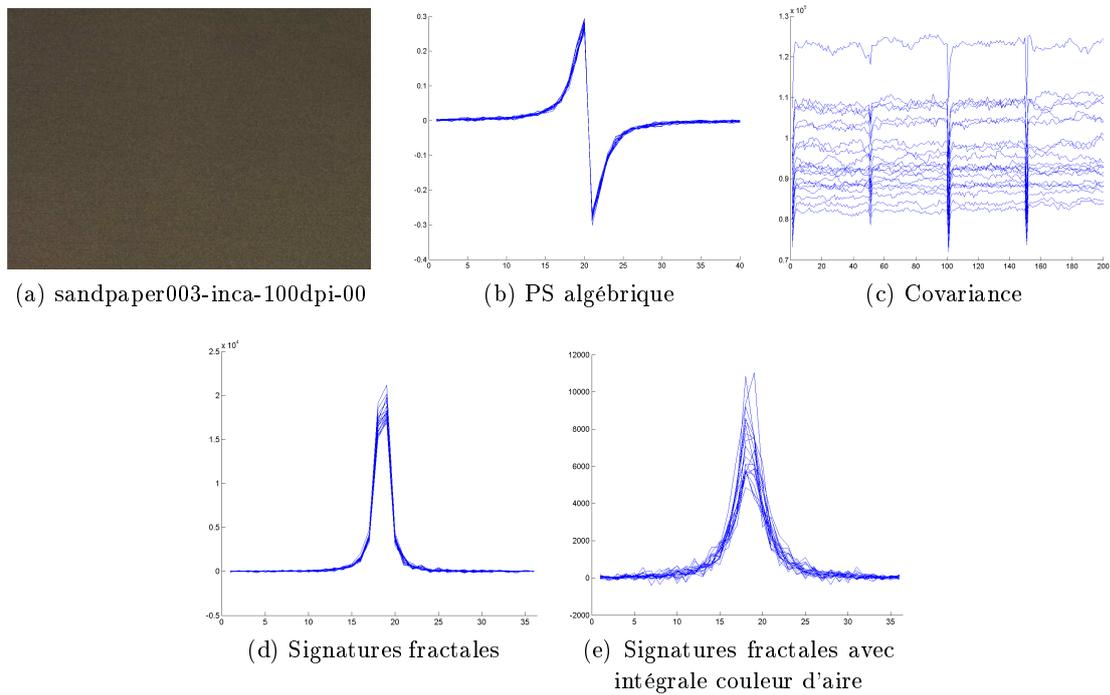


FIGURE 5.49 – Superposition des spectres des 20 imajettes de l'image « sandpaper003-inca-100dpi-00 » de la base Outex pour les différentes méthodes.

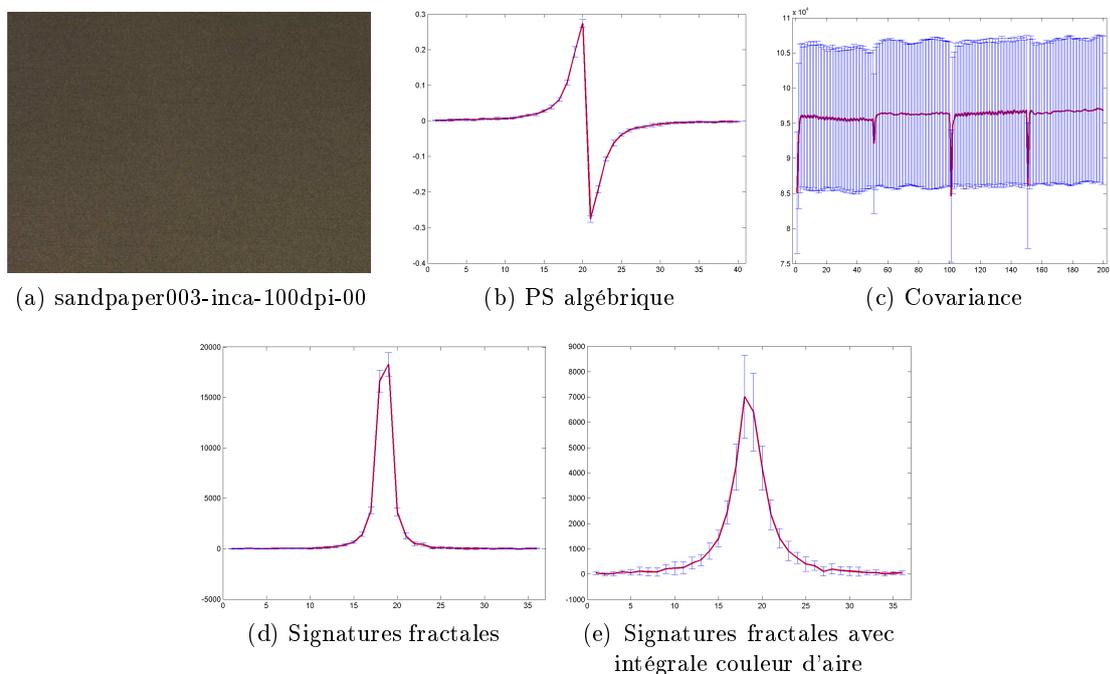


FIGURE 5.50 – Spectre moyen avec écart-type des 20 imajettes de l'image « sandpaper003-inca-100dpi-00 » de la base Outex pour les différentes méthodes.

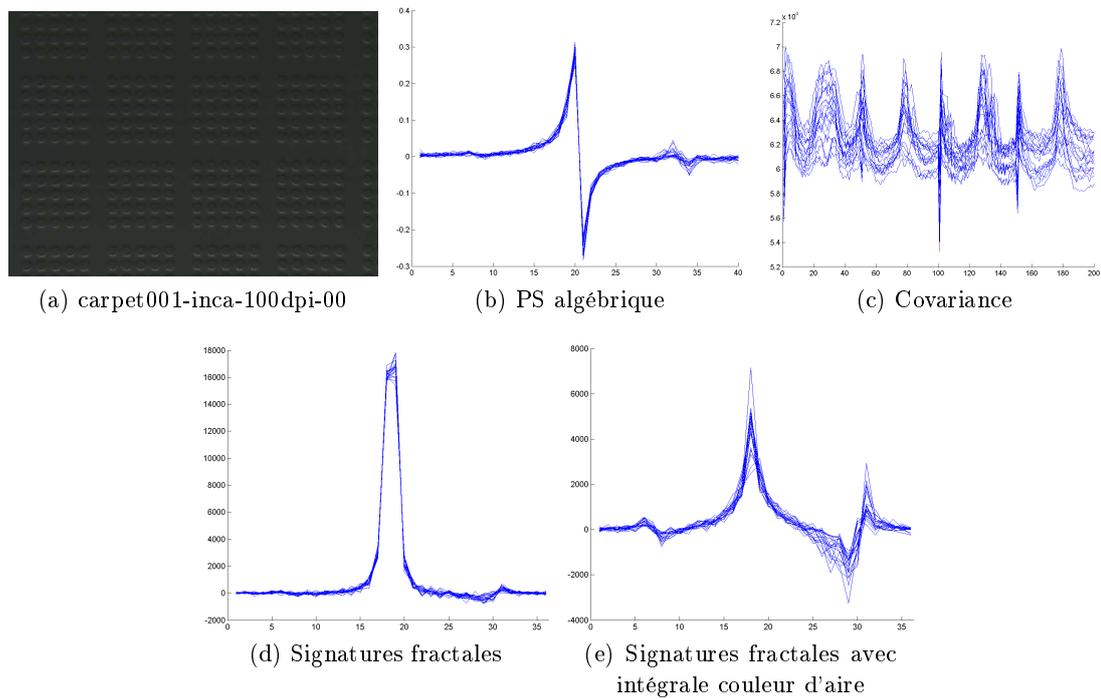


FIGURE 5.51 – Superposition des spectres des 20 imagerie de l'image « carpet001-inca-100dpi-00 » de la base Outex pour les différentes méthodes.

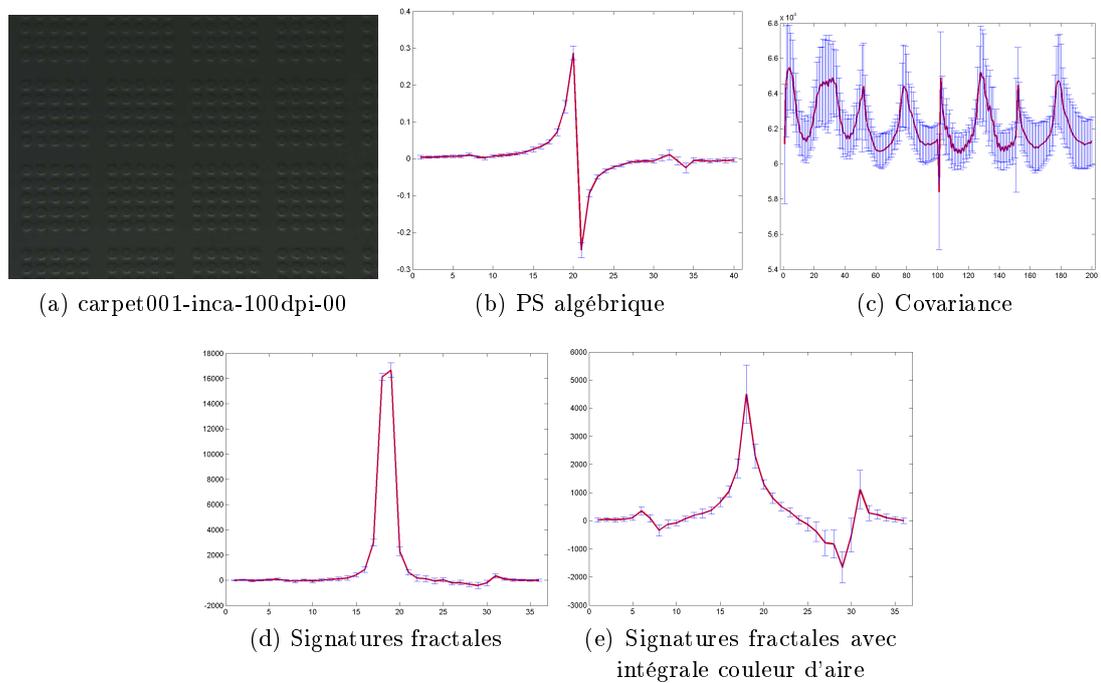


FIGURE 5.52 – Spectre moyen avec écart-type des 20 imagerie de l'image « carpet001-inca-100dpi-00 » de la base Outex pour les différentes méthodes.

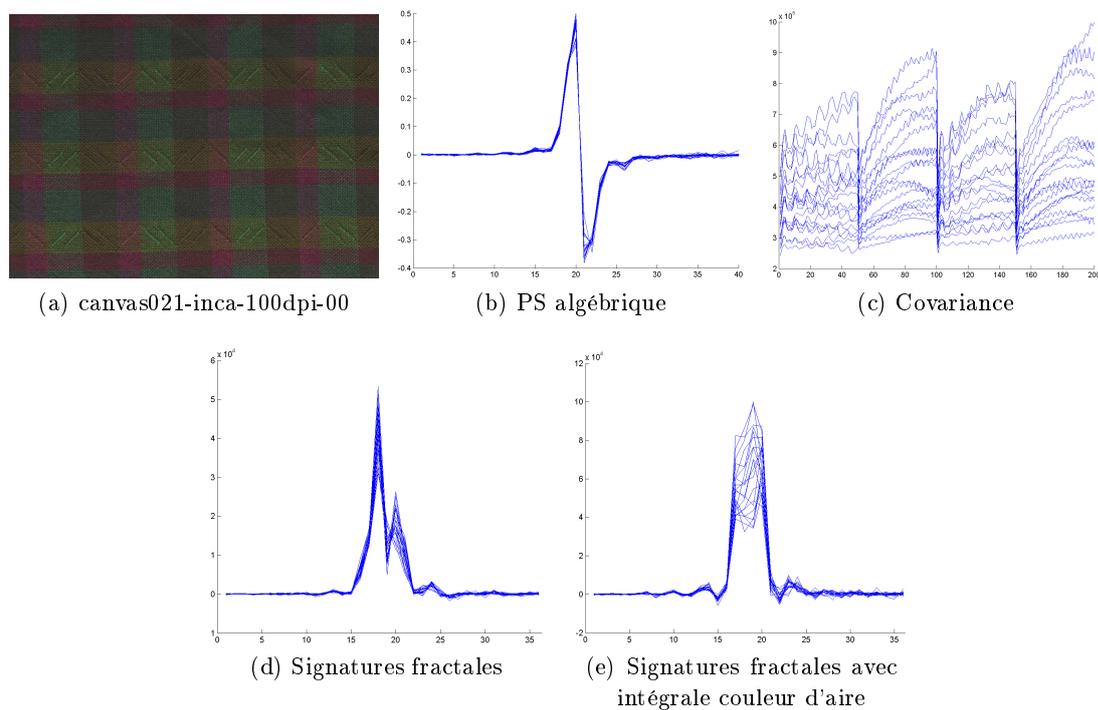


FIGURE 5.53 – Superposition des spectres des 20 imogettes de l'image « canvas021-inca-100dpi-00 » de la base Outex pour les différentes méthodes.

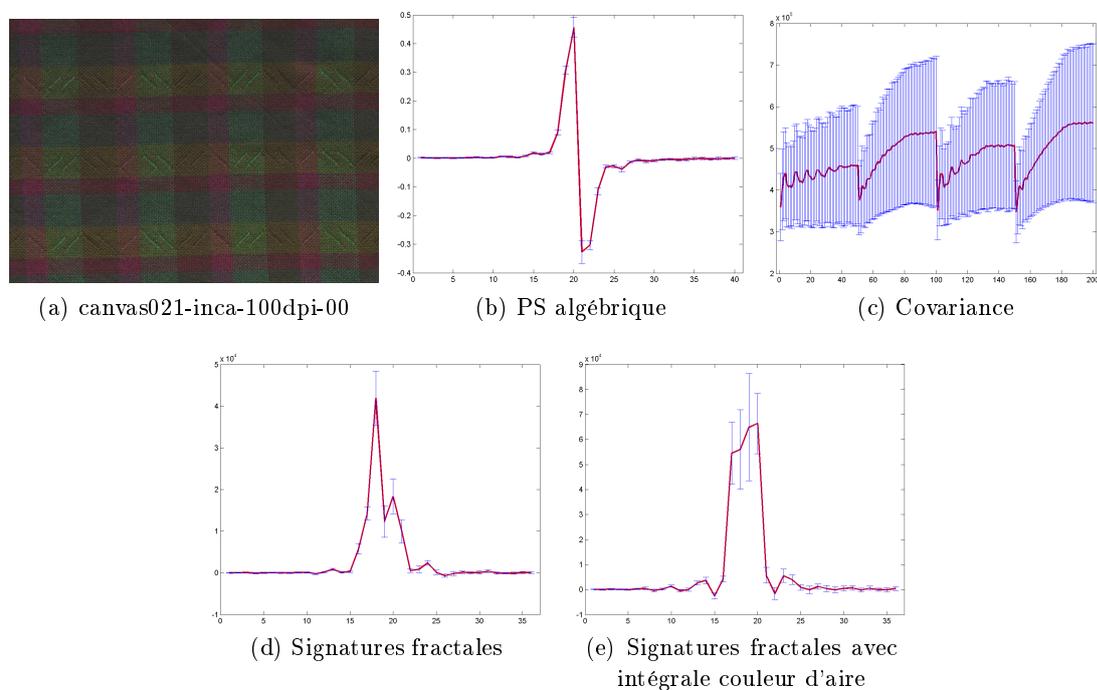


FIGURE 5.54 – Spectre moyen avec écart-type des 20 imogettes de l'image « canvas021-inca-100dpi-00 » de la base Outex pour les différentes méthodes.

5.3.2.3 Synthèse

Les différents spectres utilisés pour cette analyse ont des comportements similaires en niveaux de gris et en couleur. D'après l'étude des spectres niveaux de gris sur les quatre images de la base Outex et de l'étude sur les images de synthèse, nous avons éliminé les spectres de motifs utilisant les opérateurs géodésiques et d'aire. D'une part, ces opérateurs ont un coût combinatoire élevé de part leur nombre d'itérations ou leur binarisation. D'autre part, la binarisation nécessaire pour les opérateurs d'aire ne peut être effectuée dans le domaine de la couleur, le nombre de binarisations serait trop important et surtout l'information vectorielle de la couleur ne serait pas prise en compte.

Nous avons donc limité l'extension à la couleur aux spectres de motifs utilisant les opérateurs algébriques. Ces spectres ont une faible variance pour les différentes imagerie d'une image. Cependant, les spectres couleur semblent perdre en sensibilité face aux spectres niveaux de gris.

La covariance morphologique souffre de sa variance face aux changements de la moyenne couleur de la texture. Elle permet de capter les répétitions d'un motif dans une texture, elle est donc bien adaptée aux textures macroscopiques. Nous allons voir dans le processus de classification si elle est également robuste dans la discrimination de textures microscopique, du même type que la figure 5.49a.

Finalement, la comparaison entre les signatures fractales niveaux de gris et couleur pour ces quatre images montre deux particularités. La première est la faible variance obtenue, semblable à celle des spectres de motifs utilisant les opérateurs algébriques. La seconde est la sensibilité aux textures en fonction de la saturation de l'image. Les signatures fractales avec calcul de l'intégrale d'aire couleur permettent de retrouver la forme des signatures fractales niveaux de gris pour les images couleur très peu saturées. Tandis que les signatures fractales utilisant l'intégrale couleur simple (distance couleur entre chaque pixel) sont moins ressemblantes et surtout moins sensibles aux variations de la texture. Les signatures avec calcul de l'intégrale d'aire couleur ont également une variance plus importante qu'en utilisant l'intégrale couleur simple. Cependant cette variance reste négligeable face aux variations générales des signatures.

À partir de cette première étude, nous ne pouvons déterminer quel spectre sera le plus performant lors du processus de classification. Nous ne pouvons également pas déterminer si l'apport de l'information vectorielle de la couleur dans le calcul des spectres permet d'améliorer le taux de bonnes classifications. La suite de ce chapitre est donc consacré aux comparaisons dans le processus complet de classification.

5.3.3 Résultats de classification

Après avoir étudié le comportement des spectres sur quelques images de la base Outex, nous procédons maintenant à l'évaluation des différents spectres dans un processus de classification.

La démarche de classification ne vise pas à évaluer la performance des outils de classification mais à évaluer les attributs de textures utilisés. Nous utilisons donc un algorithme de classification simple basé sur celui proposé par Arvis [14]. Nous divisons le test de classification en trois parties. Le premier test vise à montrer l'impact des attributs dans un processus de classification utilisant la méthode des k-plus-proches voisins (KPPV), sans modification des attributs. Pour le second test, les vecteurs sont réduits à l'aide d'une AFD (Analyse Factorielle Discriminante) afin d'extraire l'information utile des vecteurs au sens de la discrimination. Ce test permet de ne conserver que les parties les plus utiles dans les spectres pour assurer cette tâche de classification. La conséquence de l'AFD à notre niveau est donc une réduction de la taille des spectres qui a pour objet d'améliorer le taux de bonne classification. Enfin, le dernier test consiste à ajouter l'attribut de moyenne couleur aux spectres conservés. Les spectres de textures couleur embarquent une partie de l'information couleur issue de la texture, cependant cette information est analysée en tant que contraste couleur. L'introduction de la moyenne couleur a ainsi pour objectif de différencier deux textures similaires mais de couleurs différentes. Il est également intéressant de voir si les attributs niveaux de gris sont aussi efficaces que les attributs couleur lors de l'ajout de la moyenne couleur.

Plusieurs critères sont étudiés lors de la classification. Le premier est le pourcentage de bonne classification. Pour compléter ce critère d'erreur général, nous voulons disposer d'un critère évaluant la nature de ces erreurs. Le fait que les erreurs de classification pour une classe L_i soient uniformément réparties entre toutes les autres classes, n'a pas les mêmes conséquences que si ces mêmes erreurs sont concentrées uniquement sur la classe L_j . Dans le second cas, une combinaison intelligente d'attributs permettrait de lever simplement l'ambiguïté de décision. Pour la suite de ce chapitre, nous utiliserons le terme de *dispersion* pour caractériser le nombre de classes L_{ji} récupérant les erreurs de classification pour la classe L_i . Deux types de dispersions sont utilisés, la *dispersion totale* présentant le rapport entre le nombre total de classes L_{ji} et le nombre total de classes de la base (ici 68), et la *dispersion relative* présentant le rapport entre le nombre total de classes L_{ji} et le nombre total de classes L_i présentant des erreurs. Dans les deux cas, la dispersion idéale recherchée est nulle. Le tableau 5.7 présente ces résultats de dispersion et de nombre de classes présentant des erreurs de classification sur les 68 présentes dans la base OUTEX.

Les figures 5.55 à 5.63 présentent les spectres de textures (spectre de motifs, covariance et signature fractale) dans le cas de traitement en niveaux de gris et couleur. Pour chaque figure, les 20 spectres issus des 20 imagettes sont présentés, permettant de voir l'influence des variations locales de textures sur la représentativité du spectre.

Nous pouvons remarquer que les trois spectres de motifs niveaux de gris (algébrique, géodésique et d'aire) sont très différents. Les spectres de motifs d'aires sont ceux qui sont les

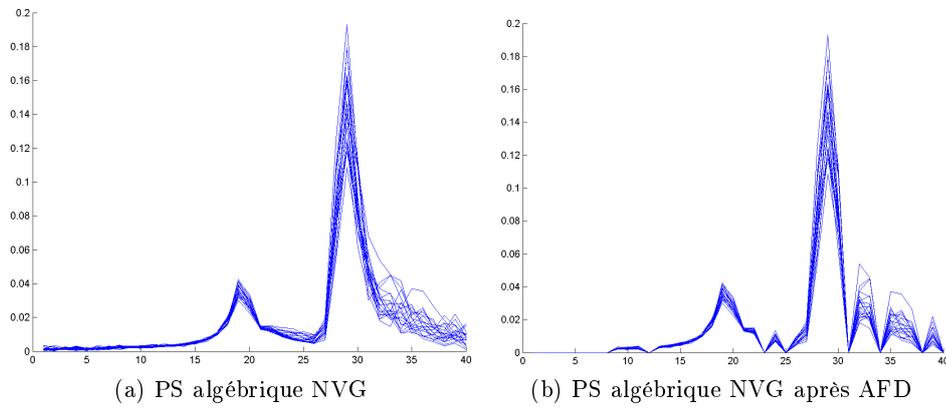


FIGURE 5.55 – Superposition des PS algébriques niveaux de gris initiaux des 20 imagettes de l'image « canvas009-inca-100dpi-00 » et après AFD.

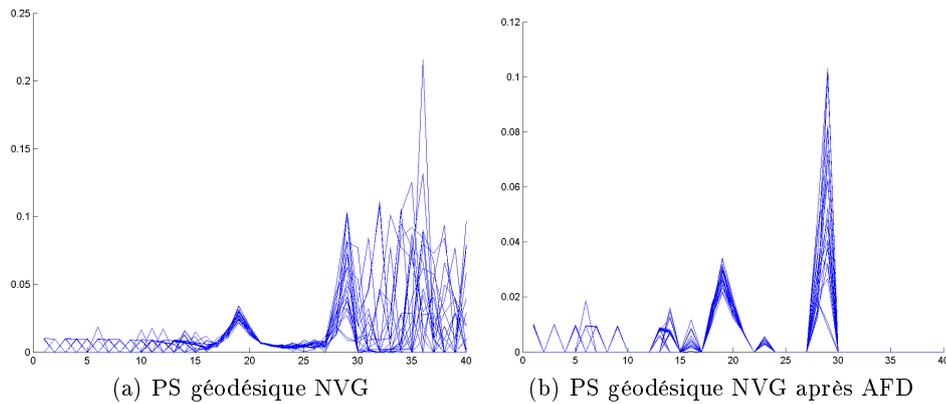


FIGURE 5.56 – Superposition des PS géodésiques niveaux de gris initiaux des 20 imagettes de l'image « canvas009-inca-100dpi-00 » et après AFD.

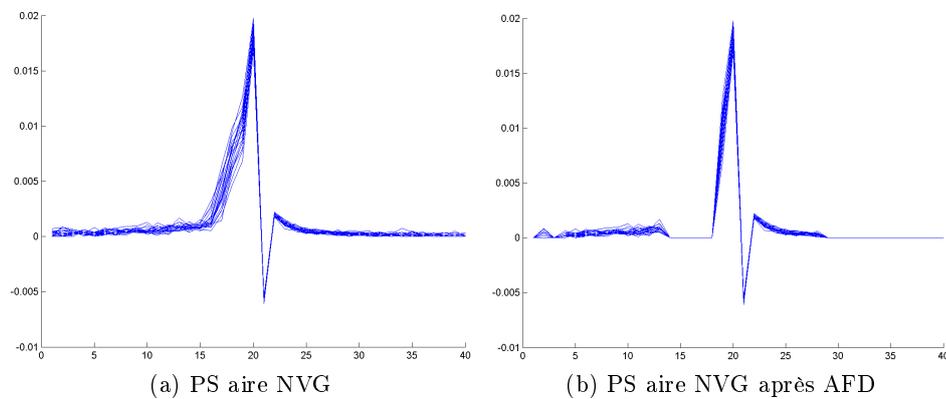


FIGURE 5.57 – Superposition des PS d'aire niveaux de gris initiaux des 20 imagettes de l'image « canvas009-inca-100dpi-00 » et après AFD.

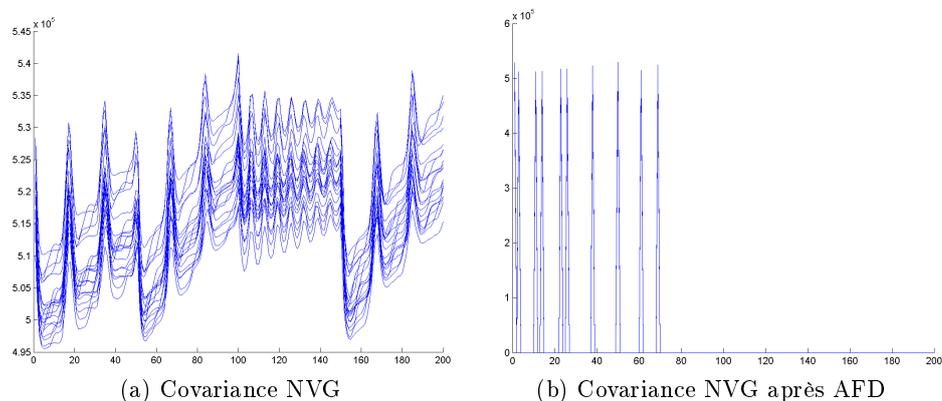


FIGURE 5.58 – Superposition des covariances niveaux de gris initiales des 20 imatettes de l'image « canvas009-inca-100dpi-00 » et après AFD.

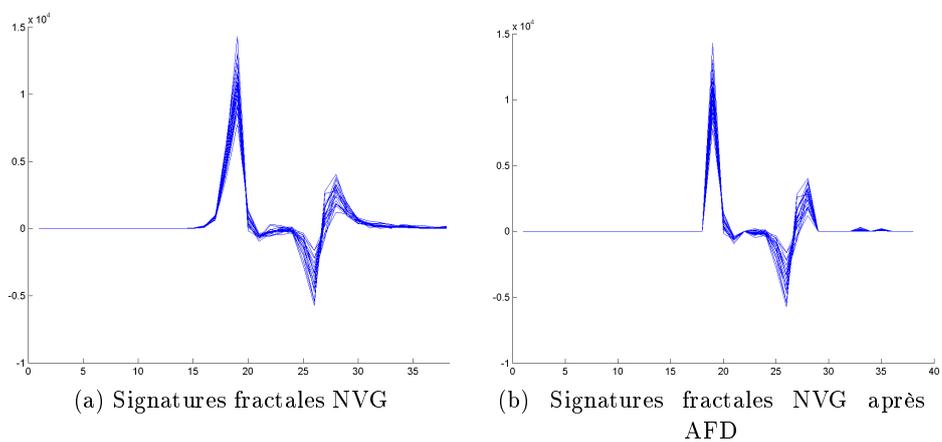


FIGURE 5.59 – Superposition des signatures fractales niveaux de gris initiales des 20 imatettes de l'image « canvas009-inca-100dpi-00 » et après AFD.

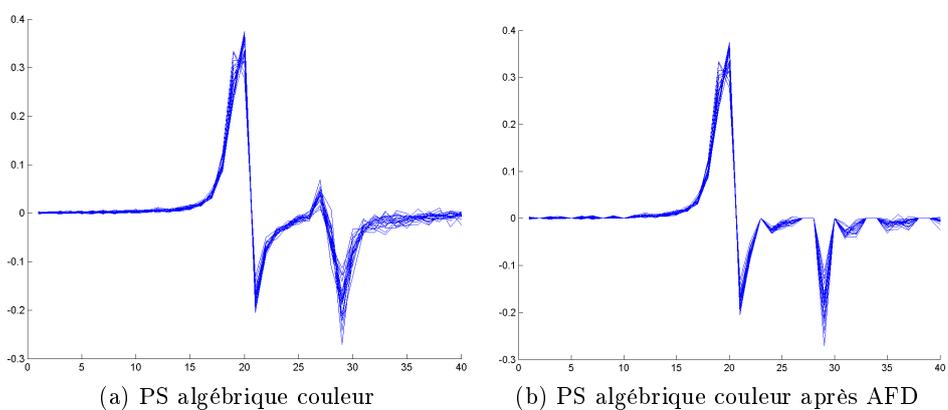


FIGURE 5.60 – Superposition des PS algébriques couleur initiaux des 20 imatettes de l'image « canvas009-inca-100dpi-00 » et après AFD.

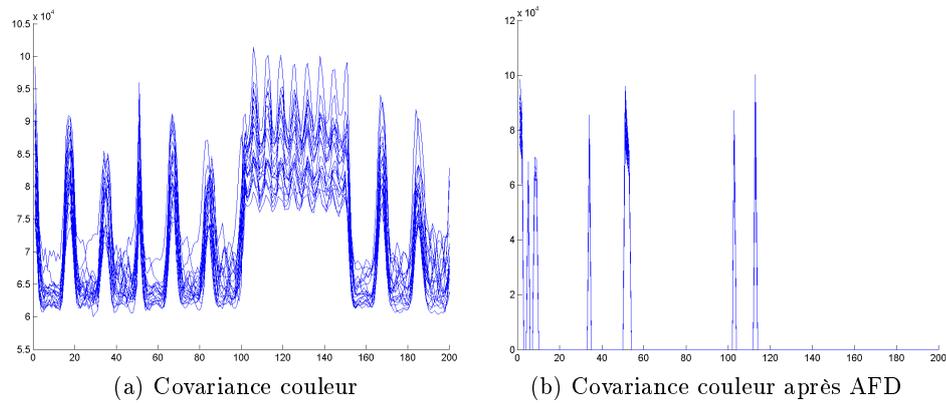


FIGURE 5.61 – Superposition des covariances couleur initiales des 20 imagettes de l'image « canvas009-inca-100dpi-00 » et après AFD.

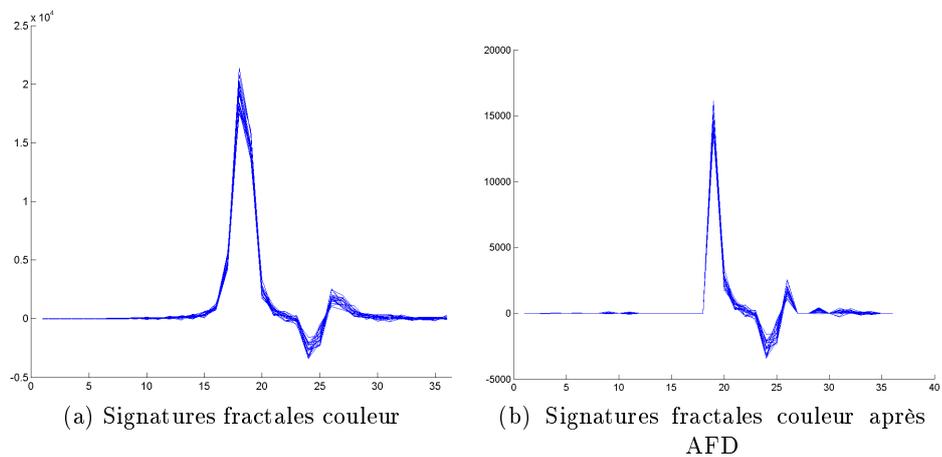


FIGURE 5.62 – Superposition des signatures fractales couleur initiales des 20 imagettes de l'image « canvas009-inca-100dpi-00 » et après AFD.

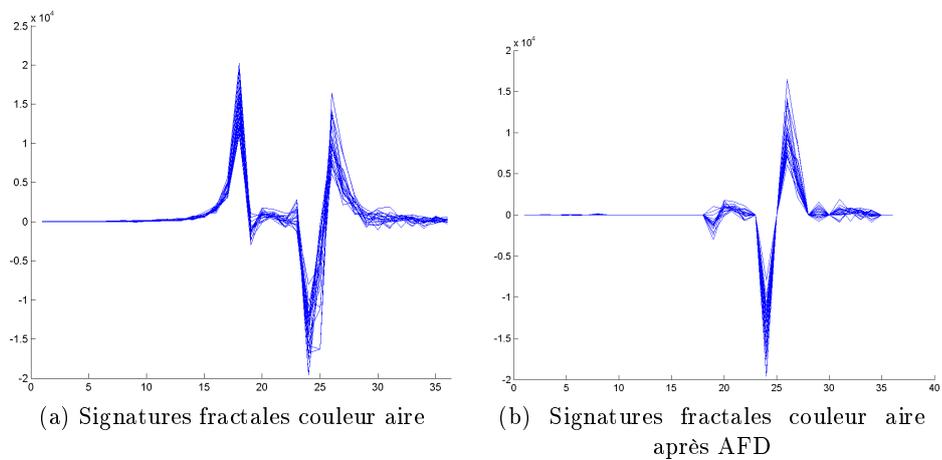


FIGURE 5.63 – Superposition des signatures fractales couleur initiales avec intégrale d'aire des 20 imagettes de l'image « canvas009-inca-100dpi-00 » et après AFD.

moins bruités ou tout du moins présentent les meilleures similarités entre les 20 imasettes donnant lieu aux 20 courbes superposées. Le spectre de covariance présente une complexité déjà discutée, mais qui trouve ici une grande variabilité entre les différentes courbes, ce qui induit les problèmes de classification rencontrés par cette méthode. Enfin, les deux signatures fractales (niveau de gris et couleur) sont très similaires dans leur aspect (figures 5.59a et 5.62a), en revanche la signature basée sur le calcul d'aire couleur présente des variations différentes sur la seconde partie (figure 5.62a et 5.63a). Le calcul d'aire a donc pris en compte des éléments particuliers, que nous ne pouvons pas détailler à ce niveau de l'analyse.

Classification KPPV

La classification mise en oeuvre a pour objectif d'estimer la capacité d'un spectre de textures (spectre de motifs, covariance, signature fractale) couleur ou niveau de gris à identifier l'image d'origine à partir d'un extrait de cette image (« l'imasette »). La première approche est élémentaire et basée sur la ressemblance locale aux exemples connus à partir d'une métrique euclidienne classique. La base d'apprentissage contient 50% des imasettes (10 imasettes) de chaque image, les 50% restant sont utilisées dans le processus de classification. Les résultats de classification obtenus avec la méthode des KPPV sont résumés dans les tableaux 5.6 et 5.7.

Méthodes	k=5	k=3	k=1
PS algébrique NVG	78.38	76.76	78.97
PS géodésique NVG	61.32	61.17	71.79
PS aire NVG	82.5	81.7	80
Covariance NVG	40.29	46.91	54.7
Signatures fractales NVG	73.82	72.35	74.41
PS algébrique couleur	72.35	73.08	71.91
Covariance couleur	33.5	36.02	43.3
Signatures fractales couleur	49.55	50.58	53.08
Signatures fractales couleur (aire)	49.7	51.47	51.32

TABLE 5.6 – Pourcentage de bonne classification, pour les différents attributs de textures niveaux de gris et vectoriels, avec la méthode des KPPV.

Tout d'abord, l'utilisation de la méthode des KPPV induit le choix du nombre de voisins à utiliser pour classer un individu (ici une imasette) dans la classe la plus appropriée (la classe de l'image initiale de l'imasette, au sens des tests de la base OUTEX). N'ayant pas d'*a priori* sur ce choix, nous effectuons plusieurs tests en utilisant successivement 1, 3 puis 5 voisins. En définitive, l'utilisation d'un seul voisin dans le processus de classification donne, dans la majorité des cas, le meilleur pourcentage de bonne classification (tableau 5.6).

La première constatation est que l'attribut de spectre de motifs utilisant les opérateurs d'aire obtient le meilleur pourcentage de bonnes classifications (tableau 5.6). Ce résultat est concordant avec l'analyse visuelle des spectres, celui-ci présentant le moins de variations

internes pour l'exemple choisi.

De façon plus générale, les bons résultats des approches en niveau de gris montrent les limites de la base d'images choisie face à la complexité couleur. Toutes les approches couleur présentent un taux de bonne classification inférieur à celui des approches en niveau de gris. Ceci confirme une partie des résultats obtenus dans le chapitre 3 : une complexité faible dans la construction spatio-colorimétrique d'une texture autorise de travailler essentiellement sur les axes Luminance ou Intensité, typiques d'une image en niveau de gris.

Même s'il obtient également le plus grand nombre de classes sans erreur d'ordonnement, le spectre de motifs utilisant les opérateurs d'aires n'obtient pas la plus faible valeur de dispersion (tableau 5.7). Il est très intéressant de noter que la signature fractale couleur présente la meilleure dispersion totale parmi toutes les méthodes présentées ; avec une dispersion relative inférieure à 2. Alors que son équivalent en niveau de gris présente un taux de bonnes classifications supérieur, le tableau 5.7 indique que les erreurs de classification sont plus dispersées que celles liées à l'approche couleur, pour laquelle en moyenne la dispersion porte sur moins de deux classes (dispersion relative : 1.72). Ce résultat peut en faire un bon candidat pour une combinaison d'attributs.

Méthodes	Nombre de classes mal classées	Dispersion totale	Dispersion relative
PS algébrique NVG	39	1.31	2.28
PS géodésique NVG	68	6.28	6.28
PS aire NVG	33	0.99	2.03
Covariance NVG	59	2.91	3.36
Signatures fractales NVG	40	1.56	2.65
PS algébrique couleur	44	1.65	2.55
Covariance couleur	63	3.93	4.24
Signatures fractales couleur	36	0.91	1.72
Signatures fractales couleur (aire)	47	2.12	3.06

TABLE 5.7 – Nombre de classes érronées et paramètres de dispersion total et relative pour la méthode des KPPV.

Classification KPPV + AFD

Les sections précédentes ont permis de confronter les différentes allures des spectres de textures couleur. Dans cette analyse, il apparaît que toutes les valeurs de ces spectres ne sont pas essentielles à la discrimination. L'utilisation d'une AFD (Analyse Factorielle Discriminante) permet d'une part de réduire la taille des spectres aux éléments nécessaires pour la discrimination, et donc de gagner en capacité de discrimination, et d'autre part d'analyser les choix effectués statistiquement par l'AFD.

Les figures 5.55 à 5.63 présentent des exemples de spectres obtenus après AFD pour une image (classe) de la base Outex, l'annexe D.2 fournit d'autres exemples de spectres après

AFD. Ces figures permettent de localiser les valeurs des spectres conservées. Le tableau 5.8 présente la réduction des spectres selon un critère de taille de vecteur et un pourcentage de valeurs conservées.

L'étude des spectres de motifs et des signatures fractales (figures 5.55, 5.56, 5.57, 5.59, 5.60, 5.62 et 5.63) montre que l'AFD a globalement effectué un sous-échantillonnage de ces spectres, tout en conservant l'allure des spectres. Cet aspect est confirmé par le tableau 5.8 au sein duquel, les taux de conservation sont compris entre 0.4 et 0.7. L'information conservée est principalement située au centre des spectres correspondant aux premières itérations de l'algorithme, donc aux variations hautes fréquences liés à la texture fine. Pour les spectres obtenus avec la covariance, l'information conservée se trouve principalement dans la partie correspondant à une recherche de répétition horizontale. À partir de ces observations, nous avons un critère potentiel pour définir la taille optimale d'un spectre de textures, et dans le cas des spectres de covariance du choix des angles d'analyse à conserver.

Méthodes	Taille vecteur initial	Taille vecteur après AFD	Taux de conservation
PS algébrique NVG	40	25	0.63
PS géodésique NVG	40	16	0.40
PS aire NVG	40	21	0.53
Covariance NVG	200	10	0.05
Signatures fractales NVG	38	23	0.61
PS algébrique couleur	40	28	0.70
Covariance couleur	200	12	0.06
Signatures fractales couleur	36	20	0.56
Signatures fractales couleur (aire)	36	18	0.50

TABLE 5.8 – Impact de l'AFD sur la taille des spectres et le taux de conservation de l'information conservée.

Les tableaux 5.9 et 5.10 présentent les résultats de classification obtenus avec la méthode des KPPV précédée d'une AFD. Une première analyse permet de comparer l'impact du taux de réduction de la taille des spectres. Trois approches profitent de cet étage de réduction de complexité, les deux approches par covariance et l'approche par signature fractale avec calcul des aires couleurs. En dehors de ces trois approches, les autres méthodes obtiennent des taux de bonne classification réduits. Le cas du spectre de covariance est symptomatique avec une réduction de dimension passant de 200 à moins de 12, concentrés uniquement sur le premier quadrant (analyse horizontale), pour une performance globale inférieure à toutes les autres. Les différences de comportement entre les deux types de signatures fractales couleurs semblent peu significatives et non justifiables à ce niveau par ces résultats.

La seconde remarque qui peut être apportée à partir du tableau 5.9 est que globalement la réduction de complexité proposée par l'AFD a réduit les performances de classification. Rappelons que dans l'approche proposée par Arvis et qui sert de support à ce contexte ex-

périmental, cette même réduction de complexité sur des attributs de cooccurrences couleurs ou niveau de gris améliore les résultats dans le cadre de cette même base d'images.

Cette seconde remarque est complétée par l'analyse des résultats du critère de dispersion pour lequel les résultats sont globalement plus mauvais que sans l'utilisation de l'AFD, en dehors du spectre de motif géodésique et des deux spectres de covariance. Comme ces spectres étaient ceux qui présentaient le plus de variations intra-classe avant l'AFD, et que celles-ci ont été réduites par l'AFD, le gain en taux de classification est bien cohérent. Par opposition, pour les autres spectres le sous-échantillonnage n'a pas réussi à réduire la variation intra-classe et donc ne peut améliorer le taux de bonne classification.

Méthodes	k=5	k=3	k=1
PS algébrique NVG	69.11	70	72.64
PS géodésique NVG	69.55	70.73	71.17
PS aire NVG	77.05	76.47	74.11
Covariance NVG	52.05	57.79	65.14
Signatures fractales NVG	72.5	72.05	72.64
PS algébrique couleur	71.32	70.44	68.38
Covariance couleur	42.52	46.35	48.32
Signatures fractales couleur	50.14	49.85	52.05
Signatures fractales couleur (aire)	51.47	52.2	51.91

TABLE 5.9 – Pourcentage de bonnes classifications, pour les différents attributs de textures niveaux de gris et vectoriels, avec la méthode des KPPV précédée d'une AFD.

Méthodes	Nombre de classes mal classées	Dispersion totale	Dispersion relative
PS algébrique NVG	40	1.47	2.50
PS géodésique NVG	66	4.75	4.89
PS aire NVG	44	1.46	2.25
Covariance NVG	49	2.15	2.98
Signatures fractales NVG	42	1.66	2.69
PS algébrique couleur	43	1.94	3.07
Covariance couleur	63	3.53	3.81
Signatures fractales couleur	58	3.13	3.67
Signatures fractales couleur (aire)	53	2.90	3.72

TABLE 5.10 – Nombre de classes erronées et paramètres de dispersion total et relative pour la méthode des KPPV précédée d'une AFD.

Classification KPPV + coordonnée couleur moyenne de l'image

Comme nous l'avons évoqué précédemment, l'analyse texture vectorielle est essentiellement une analyse de contraste vectoriel, axée dans le cas de notre construction vers les

coordonnées couleur de convergence. Une des questions posées porte donc sur la sensibilité de l'attribut utilisé à la couleur moyenne de l'image. Le vecteur attribut constitué pour chaque individu (« imagerie ») inclut donc, pour chaque méthode, le spectre de textures auquel est adjoint la coordonnée couleur moyenne de l'imagerie.

Les gains obtenus en terme de taux de bonne classification sont variables, les spectres de covariance étant ceux qui en bénéficient le plus (gain de 14% pour l'approche en niveau de gris et de 10% pour l'approche couleur). Ce gain confirme notre première analyse sur la variation de la covariance face à la moyenne couleur. L'ensemble des autres méthodes obtiennent un gain plus faible voir négatif. Ceci s'explique notamment par la nature des images de la base OUTEX et par la division des images en images. Ainsi les images utilisées pour l'expérimentation possèdent des teintes et des saturations très similaires, impliquant peu de diversité colorimétrique.

Méthodes	KPPV (k=1)	KPPV (k=1) + moyenne couleur
PS algébrique NVG	78.38	82.97
PS géodésique NVG	61.32	52.5
PS aire NVG	82.50	82.20
Covariance NVG	40.29	54.85
Signatures fractales NVG	73.82	74.1
PS algébrique couleur	72.35	83.38
Covariance couleur	33.50	43.23
Signatures fractales couleur	49.55	53.08
Signatures fractales couleur (aire)	49.70	51.4

TABLE 5.11 – Pourcentage de bonnes classifications, pour les différents attributs de textures niveaux de gris et vectoriels auxquels est ajoutée ou non la couleur moyenne de l'image, avec la méthode des KPPV.

Méthodes	Nombre de classes mal classées	Dispersion totale	Dispersion relative
PS algébrique NVG	32	1.03	2.19
PS géodésique NVG	62	2.69	2.95
PS aire NVG	36	1.13	2.14
Covariance NVG	59	2.91	3.36
Signatures fractales NVG	40	1.56	2.65
PS algébrique couleur	31	0.96	2.10
Covariance couleur	63	3.93	4.24
Signatures fractales couleur	57	3.03	3.61
Signatures fractales couleur (aire)	55	2.78	3.44

TABLE 5.12 – Nombre de classes erronées et paramètres de dispersion total et relative pour la méthode des KPPV en utilisant la moyenne couleur.

Quels bilans sur la classification de textures ?

La question de la classification de textures n'est pas essentielle dans le travail conduit, cependant produire un attribut vectoriel de textures était une question importante dans notre démarche. Le protocole que nous avons utilisé est tiré d'un article de Arvis qui essaye de comparer des approches textures en niveau de gris avec intégration d'informations couleurs en sus (moyenne et écart-type), et des méthodes tentant d'approcher la complexité spatio-colorimétrique dans les espaces RGB et HLS. Ses méthodes sont basées sur l'utilisation de matrices de cooccurrences résumées par des attributs de Haralick.

Parmi les conclusions de ces premiers résultats de classification de spectres de textures morphologiques vectoriels, nous pouvons constater que les spectres de motifs et les signatures fractales ont un bon comportement discriminatoire. L'analyse de l'apport entre les spectres niveaux de gris et couleur est limitée par l'utilisation de la base Outex. Ce constat corrobore les conclusions du chapitre 3. Une perspective de ce travail de classification est donc d'utiliser une base d'image dont la complexité, au sens spatio-colorimétrique, de textures est plus importante (type Vistex ou images fractales). Ainsi, une mesure réelle de l'intérêt/capacité de l'utilisation des spectres vectoriels de textures dans un processus de classification pourra être menée.

5.4 Bilan

Dans ce chapitre, l'objectif était de proposer des attributs vectoriels de textures morphologique prenant en compte toute la complexité spatiale mais également couleur d'une texture. En morphologie mathématique plusieurs attributs de textures existent ; les spectres de motifs, la covariance morphologique et les signatures fractales. Nous avons proposé une écriture de ces spectres adaptée au contexte de la couleur. Cette écriture permet de prendre en compte les particularités perceptuelles de la couleur en utilisant une fonction de distance perceptuelle, dans la construction de l'intégrale de surface et dans les opérateurs morphologiques (érosion et dilatation).

Une première étude inspirée de l'article de Maragos [80], utilisant des images de synthèse, nous a permis d'apprécier, pour chacun de ces spectres niveaux de gris et couleur, leurs capacités à extraire les caractéristiques géométriques de la texture. L'analyse des spectres face à des images de textures réelles de la base Outex montre que leur variations intra-classe est faible exceptée la covariance dont la variation semble être due à la couleur moyenne de l'image.

Pour compléter la première étude, nous avons étudié l'aspect discriminatoire des différents spectres, niveaux de gris et couleur, dans un processus de classification. Cette classification a pu mettre en avant le bon comportement des spectres de motifs et des signatures fractales. La faible valeur de dispersion pour ces spectres peut en faire un bon candidat pour une combinaison d'attribut. L'ajout de la moyenne couleur de l'image aux spectres permet de faire deux principales remarques. La première remarque porte sur le comportement de la covariance morphologique. Le gain obtenu après l'ajout de la moyenne couleur permet de confirmer la sensibilité de la covariance face à cette moyenne couleur. La se-

conde remarque porte sur l'apport couleur des méthodes. La faible complexité (au sens spatio-colorimétrique) des images de textures de la base Outex ne permet pas d'évaluer les capacités réelles des spectres vectoriels.

Ce chapitre est une première étude de l'extension des spectres morphologiques au domaine couleur. Les perspectives engendrées sont nombreuses. La suite de ce travail permettra notamment d'approfondir l'influence de la variation de l'intensité lumineuse ou de la moyenne couleur de l'image sur les spectres morphologiques, tout comme l'étude menée par Hanbury [53].

Nous avons également proposé une méthode de calcul d'intégrale couleur passant par le calcul d'une aire couleur intégrant une fonction de distance perceptuelle. Cette nouvelle écriture ouvre de nombreuses questions. Le choix du poids attribué pour combiner les valeurs spatiales et les valeurs colorimétriques est à approfondir. Le choix du découpage spatial de l'image est également un point à éclaircir.

Lors de la classification, nous employons l'algorithme des k plus proches voisins, celui-ci utilise une distance euclidienne. Tout comme dans le chapitre 4, le choix de la fonction de distance permettant de comparer deux spectres doit être étudié, même si celle-ci n'est pas contrainte d'intégrer les particularités de la couleur.

Transformée en tout-ou-rien (Hit-or-Miss Transform)

Sommaire

6.1	Transformée en niveaux de gris	181
6.1.1	Etat de l'art	181
6.1.1.1	Construction binaire	182
6.1.1.2	Construction niveaux de gris avec ESP	183
6.1.1.3	Construction niveaux de gris avec ESNP	184
6.1.1.4	Discussion	187
6.1.2	Transformée MOMP : sélectivité en forme et en contraste	189
6.1.2.1	Sélectivité en forme	189
6.1.2.2	Sélectivité en contraste	190
6.2	Transformée en couleur	194
6.2.1	Ecriture couleur	194
6.2.1.1	Spécification du gabarit spatio-colorimétrique	194
6.2.1.2	Comparaison avec les méthodes existantes	196
6.2.2	Résultats sur images réelles couleurs	200
6.2.2.1	Détection d'objets dans des images de peau	200
6.2.2.2	Détection de cellules mitotiques	207
6.3	Transformée en tout-ou-rien Hit-or-Miss Multispectral	212
6.3.1	Ecriture multispectrale	212
6.3.2	Premiers résultats sur images multispectrales	212
6.4	Bilan	215

La transformée en tout-ou-rien est un outil fondamental de la morphologie mathématique. Elle est le point de départ des développements de tous les opérateurs de la morphologie (figure 6.1). Cet outil a été initialement développé pour des images binaires par Matheron et Serra [115]. Sa fonction est la détection d'objets particuliers dans une image [140, 19]. La recherche d'un objet se fait par sa forme mais également la forme du fond de l'image qui l'entoure. Pour cela deux éléments structurants sont utilisés, le premier G' pour caractériser la forme de l'objet et le second G'' pour le fond. Ces deux éléments structurants sont regroupés dans l'ensemble G et doivent avoir une intersection nulle. La transformée en tout-ou-rien est l'intersection entre l'érosion de l'image par G' et une érosion de l'image complémentaire F^c par G'' (équation 6.1).

$$\eta_b(F, G) = \varepsilon_b(F, (G')^r) \cap \varepsilon_b(F^c, (G'')^r) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_b(F, G) = \bigcap_{x \in \mathcal{D}_F; y \in \mathcal{D}_G} F(x + y) \quad (6.1)$$

où F^c est le complémentaire de F ($F^c = \{x, x \notin F\}$) et G^r est le réfléchi de G ($G^r = G(-y)$). Le résultat est une image de marqueurs aux endroits où l'objet est trouvé.

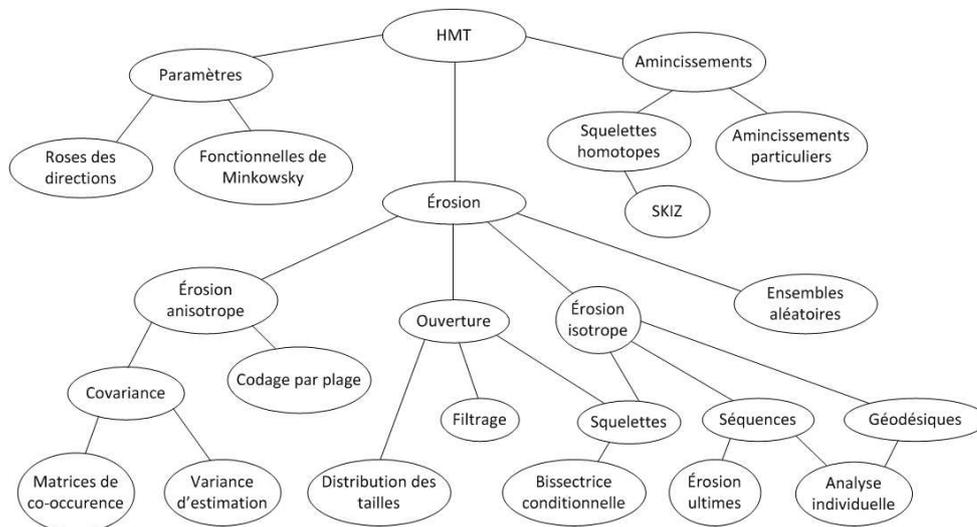


FIGURE 6.1 – Organigramme des classes de critères et algorithmes de la morphologie mathématique issu de l'article de Serra [116].

Ce détecteur d'objets binaires suscite un grand intérêt de part sa simplicité d'implémentation, rapidement suivi par une extension en niveaux de gris. Différentes voies ont été proposées pour obtenir une méthode adaptée aux images niveaux de gris. La première voie suivie passe par la binarisation de l'image pour appliquer l'opérateur binaire. La seconde voie utilise l'écriture d'une formulation dédiée aux images niveaux de gris. Pour chacune de ces voies, deux autres voies existent permettant de trouver soit des objets dont le contraste n'est pas constant soit des objets avec un contraste constant. Dans la suite, nous allons analyser chacune des méthodes afin de comparer leurs performances en suivant l'organigramme de la figure 6.2.

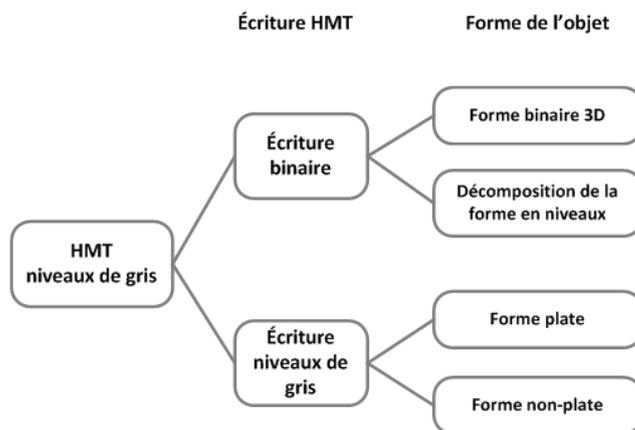


FIGURE 6.2 – Les différents types de transformée en tout-ou-rien.

6.1 Transformée en niveaux de gris

L'extension de la transformée en tout-ou-rien aux signaux niveaux de gris n'est pas unique. Certains auteurs transforment les signaux niveaux de gris en ensembles afin de leur appliquer l'algorithme binaire tandis que d'autres développent des écritures de la transformée spécifiques aux images niveaux de gris. Dans cette section nous allons étudier les principales méthodes de la littérature. Celles-ci sont présentées dans la figure 6.3.

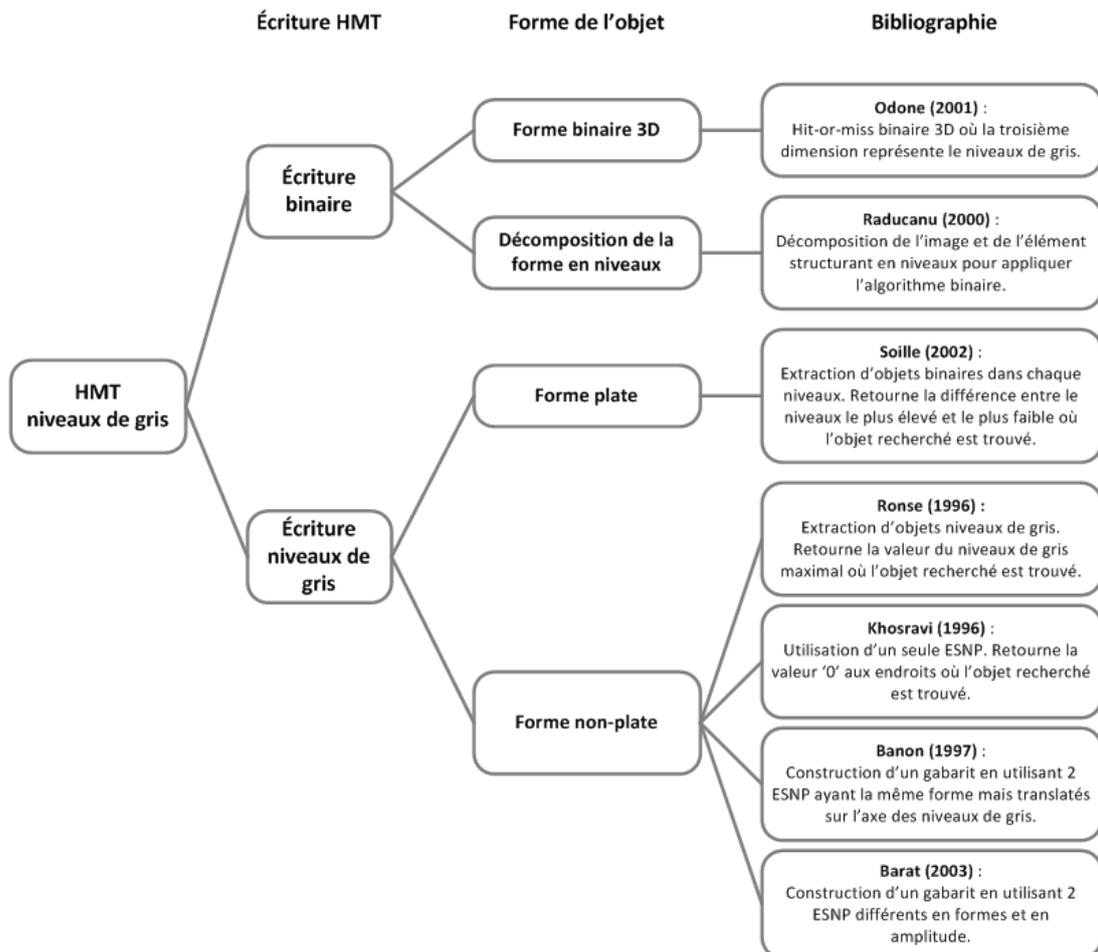


FIGURE 6.3 – Les principales approches existantes pour les images niveaux de gris.

6.1.1 Etat de l'art

Nous rapellons que le résultat obtenu pour chacune des méthodes est une image de marqueurs aux endroits où l'objet est trouvé. Dans cette thèse, l'objectif est d'appliquer les outils sur des images. Cependant, dans la majorité des cas nous sommes amenés à utiliser des signaux 1D pour illustrer les méthodes.

6.1.1.1 Construction binaire

Odone et al : Odone et al [92] transforment les signaux niveaux de gris en ensemble binaire tridimensionnel. Pour cela, la valeur de niveaux de gris devient la troisième dimension (figure 6.4). L'objet est ensuite trouvé lorsque l'intersection entre l'élément structurant et le signal dilaté est supérieure ou égale à l'élément structurant. La figure 6.4 montre la construction 3D de l'ensemble F et de l'élément structurant G .

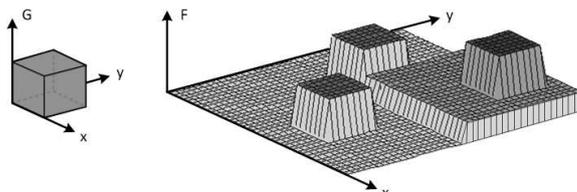


FIGURE 6.4 – Principe de la transformée binaire 3D développée par Odone sur un signal 2D.

Raducanu et al : Raducanu et al [105] seuillent l'image en chaque niveau de gris. Ensuite, ils appliquent l'opération binaire sur chaque image seuillée. Le résultat est ensuite le maximum des niveaux de gris ayant une valeur de '1' (figure 6.5).

$$RaHM(f, g)(x) = \sup_{k=0..n-1} \{x \in [\eta_b(\mathcal{T}[f, k], (\mathcal{T}[g, k])^r)]\} \quad (6.2)$$

où $\mathcal{T}[f, k]$ et $\mathcal{T}[g, k]$ sont respectivement les signaux f et g seuillés par k . $\mathcal{T}[f, g]$ est formé par l'élément structurant représentant l'objet (valeur '1') et par l'élément structurant représentant le voisinage de l'objet (valeur '0').

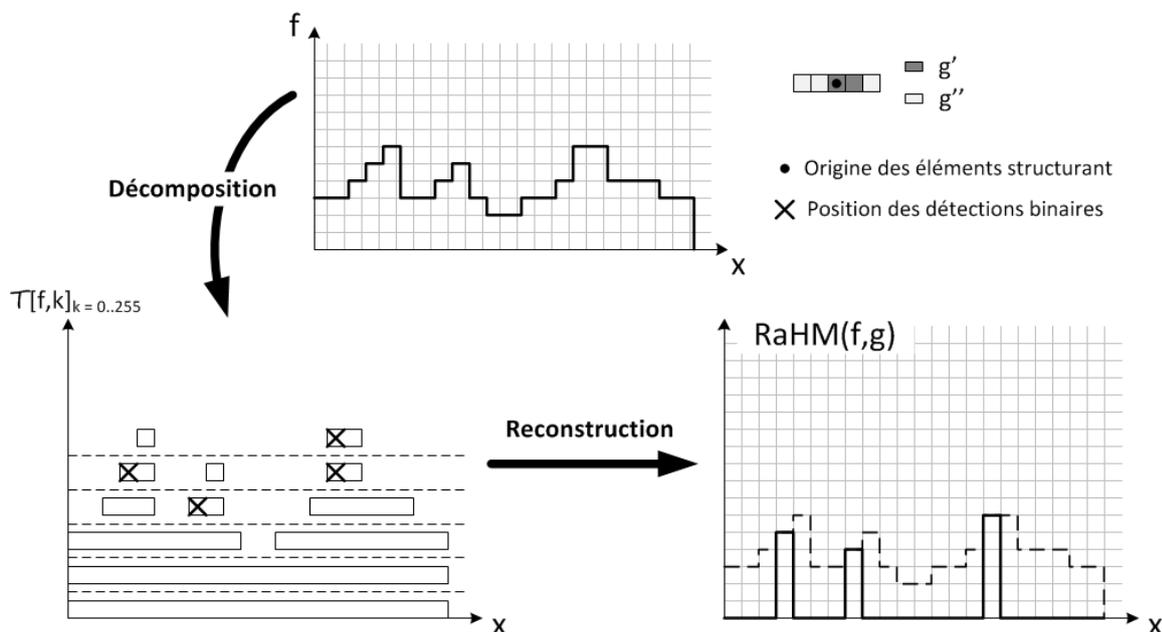


FIGURE 6.5 – Principe de décomposition pour la méthode de Raducanu sur un signal 1D.

6.1.1.2 Construction niveaux de gris avec ESP

Soille : Soille [124] développe deux méthodes à partir des opérateurs niveaux de gris. La première est appelée « Unconstrained Hit-or-Miss » (UHM) (équation 6.3). La figure 6.6 montre le résultat de la méthode UHM.

$$UHM(f,g)(x) = \begin{cases} \varepsilon_g(f, (g')^r)(x) - \delta_g(f, (g'')^r)(x) & \text{si } \varepsilon_g(f, (g')^r)(x) > \delta_g(f, (g'')^r)(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.3)$$

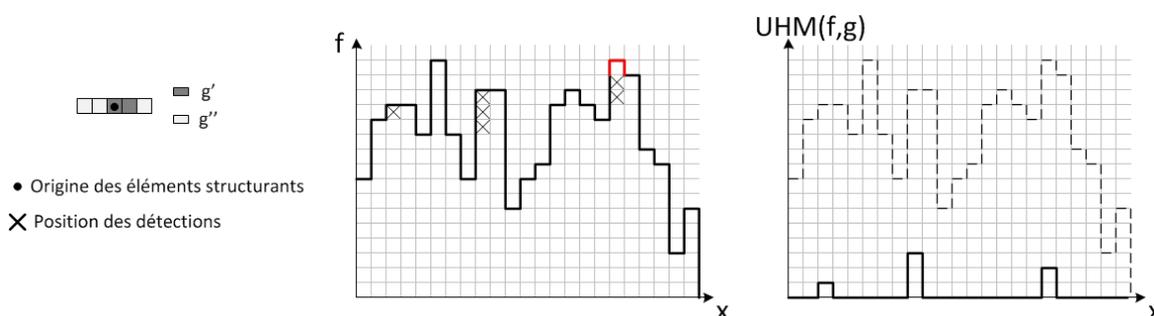


FIGURE 6.6 – Résultat de la transformée UHM de Soille sur un signal 1D.

La seconde est appelée « Constrained Hit-or-Miss » (CHM) pour laquelle au moins un des deux éléments structurants utilisés doit contenir l'origine. La contrainte ajoutée par rapport à la méthode UHM est que l'élément structurant contenant l'origine (g' ou g'') doit correspondre exactement à la forme qu'il décrit (le fond ou l'objet). La méthode CHM est donc plus restrictive dans sa recherche.

$$CHM(f,g)(x) = \begin{cases} f(x) - \delta_g(f, (g'')^r)(x) & \text{si } f(x) = \varepsilon_g(f, (g')^r)(x) \\ & \text{et } f(x) > \delta_g(f, (g'')^r)(x) \\ \varepsilon_g(f, (g')^r)(x) - f(x) & \text{si } f(x) = \delta_g(f, (g'')^r)(x) \\ & \text{et } f(x) < \varepsilon_g(f, (g')^r)(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.4)$$

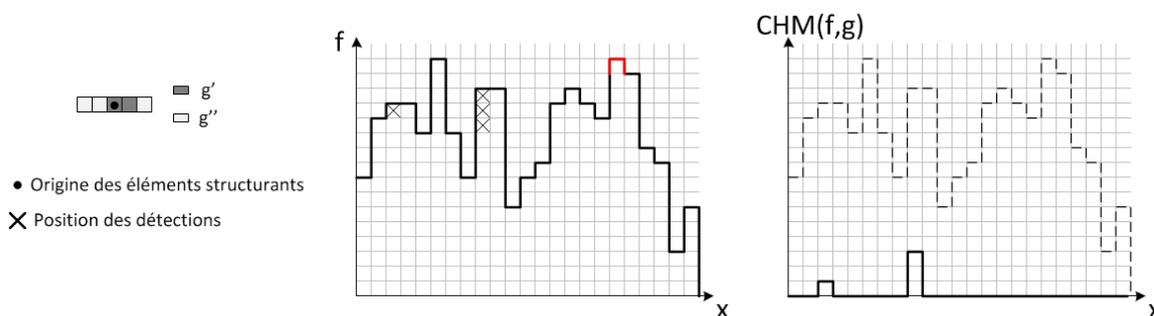


FIGURE 6.7 – Résultat de la transformée CHM de Soille sur un signal 1D.

Pour les deux méthodes, la valeur du résultat pour chaque pixel est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de niveau de gris où les deux éléments structurants sont inclus dans le signal. Les marqueurs s'obtiennent ensuite par un seuillage du résultat.

La figure 6.7 est un exemple de recherche d'objet en utilisant la même paire d'éléments structurants que la figure 6.6 pour la méthode UHM. La méthode UHM trouve un objet supplémentaire (objet le plus à droite) par rapport à la méthode CHM. Cet objet n'est pas trouvé avec la méthode CHM puisqu'il a une aspérité (en rouge sur la figure 6.7).

6.1.1.3 Construction niveaux de gris avec ESNP

Pour les méthodes qui suivent, l'élément structurant supérieur g'' est au-dessus du signal et l'élément structurant inférieur g' est en dessous. Les éléments structurants sont translatés le long du signal en étant au plus près du signal.

Ronse : Ronse [112] construit une formule à partir des opérateurs niveaux de gris :

$$RoHM(f, g)(x) = \begin{cases} \varepsilon_g(f, (g')^r)(x) & \text{si } \varepsilon_g(f, (g')^r)(x) \geq \delta_g(f, (g'')^r)(x) \\ & \text{et } \delta_g(f, (g'')^r)(x) \neq +\infty \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.5)$$

Le résultat est la valeur maximale de niveaux de gris où les deux éléments structurants correspondent au signal (figure 6.8). Contrairement à Soille, dans cette méthode, les éléments structurants peuvent être non-plats ce qui permet de choisir de détecter un objet avec un contraste particulier en chaque pixel le composant. Les approches de Soille et Ronse sont néanmoins similaires, une construction a alors été proposée pour les unifier [90].

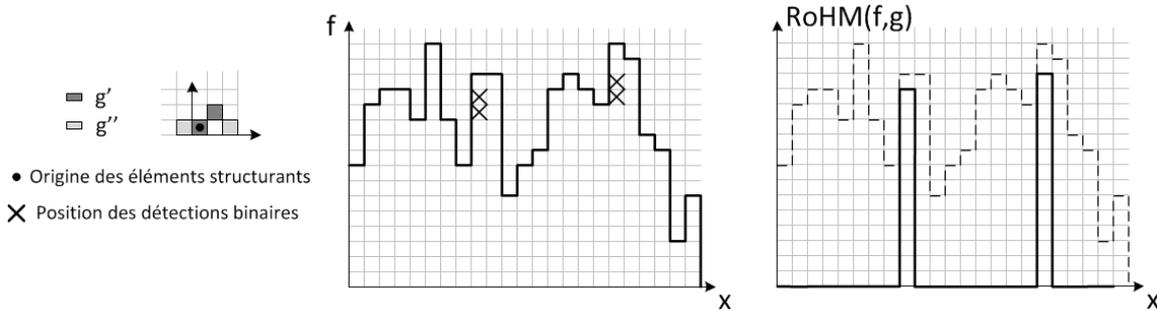


FIGURE 6.8 – Résultat de la méthode de Ronse sur un signal 1D.

Khosravi-Schafer : Khosravi et Schafer [70] utilisent un seul élément structurant non-plat g pour leur méthode.

$$KHM(f, g)(x) = \varepsilon_g(f, (g)^r)(x) + \varepsilon_g(-f, (-g)^r)(x) \quad (6.6)$$

$$= \varepsilon_g(f, (g)^r)(x) - \delta_g(f, (-g)^r)(x) \quad (6.7)$$

Lorsque l'élément structurant correspond exactement au signal alors le résultat est nul, l'objet est alors trouvé ; sinon le résultat est négatif (figure 6.9). Un seuillage permet d'autoriser une variation par rapport à l'objet recherché.

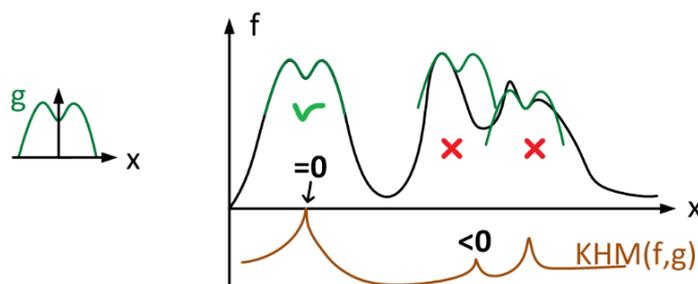


FIGURE 6.9 – Résultat de la méthode de Khosravi sur un signal 1D.

Banon et al : Le détecteur d'objet proposé par Banon [15] est la première méthode qui utilise une paire d'éléments structurants différents $g = \{g', g''\}$. Les deux éléments structurants ont la même forme spatiale mais ont des valeurs de niveaux de gris différentes. Ce déplacement le long de l'axe des niveaux de gris autorise une différence de niveaux de gris par rapport à l'objet recherché. La différence est réglée à l'aide de deux paramètres qui contrôlent la différence en dessous et au-dessus des valeurs de niveaux de gris de l'objet recherché. Banon modifie les opérateurs morphologiques afin d'obtenir son opérateur de transformée en tou-ou-rien (équation 6.8).

$$\begin{aligned}
 BanHM(f, g)(x) &= \sum_{i=1..n} \lambda^i(x) \\
 \text{avec } n &= \#(g') = \#(g'') \\
 \lambda^i(x) &= \varepsilon_{g'(y_i)}^i(x) \wedge \delta_{g''(y_i)}^i(x) \\
 \varepsilon_{g'(y_i)}^i(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } f(x + y_i) \geq g'(y_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 \delta_{g''(y_i)}^i(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } f(x + y_i) \leq g''(y_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Le résultat des opérateurs est une valeur correspondant au nombre d'éléments appartenant au domaine de définition spatial de l'image D_f et des éléments structurants D_g qui sont compris entre les deux éléments structurants (figure 6.10). Un seuillage est ensuite effectué en fonction de n afin de déterminer les lieux où se trouve l'objet recherché.

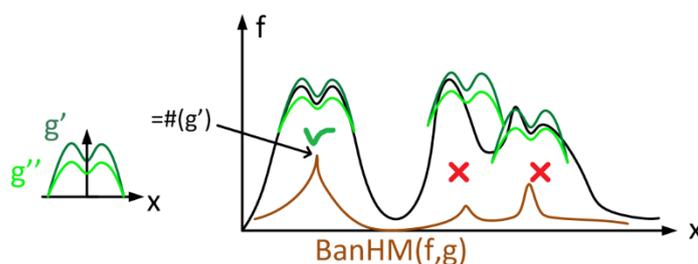


FIGURE 6.10 – Résultat de la méthode de Banon sur un signal 1D.

Barat et al : Barat [16] propose une méthode de transformée en tout-ou-rien basée sur un palpage de l'image à l'aide de deux éléments structurants non-plats. Lorsque la distance Δ_x entre les éléments structurants à la position x du signal est inférieure à Δ_0 alors l'objet est trouvé. Le paramètre Δ_0 est la distance à l'origine entre les deux éléments structurants au repos. En considérant la paire des éléments structurants $g = \{g', g''\}$ l'expression mathématique de la méthode de Barat s'écrit :

$$\text{BarHM}(f, g)(x) = \delta_g(f, (-g'')^r)(x) - \varepsilon_g(f, (g')^r)(x), \quad \text{avec } g(x)^r = g(-x) \quad (6.9)$$

$$\text{BarHM}(f, g)(x) = -\text{KHM}(f, g)(x), \quad \text{avec } g' = g'' \quad (6.10)$$

La transformée BHM possède toutes les propriétés d'une métrique et le résultat correspond à la distance entre les deux éléments structurants à leur origine. Il existe deux versions de la transformée : la transformée SOMP (Single Object Matching using Probing) qui utilise 2 éléments structurants identique ($g' = g''$) et la transformée MOMP (Multiple Objects Matching using Probing) qui est construite en utilisant 2 éléments structurants distincts. Les éléments structurants sont identiques pour la transformée SOMP contrairement à la transformée MOMP.

$$\text{SOMP}(f, g)(x) = \delta_g(f, (-g')^r)(x) - \varepsilon_g(f, (g')^r)(x) \quad (6.11)$$

$$\text{MOMP}(f, g)(x) = \delta_g(f, (-g'')^r)(x) - \varepsilon_g(f, (g')^r)(x) \quad (6.12)$$

La version SOMP se trouve alors limitée à la détection exacte de l'objet recherché ; l'objet est trouvé lorsque le résultat du SOMP est nul. Un seuillage peut être effectué pour autoriser une variation par rapport à l'objet recherché mais il permet seulement une variation du contraste (figure 6.11). L'utilisation de deux éléments structurants différents, pour la transformée MOMP, correspond à la construction d'un gabarit. Ce gabarit permet de contrôler les différences de contraste et de forme indépendamment. L'objet est ainsi détecté lorsque le résultat du MOMP est inférieur ou égal à la distance Δ_0 à l'origine séparant les éléments structurants au repos (figure 6.12).

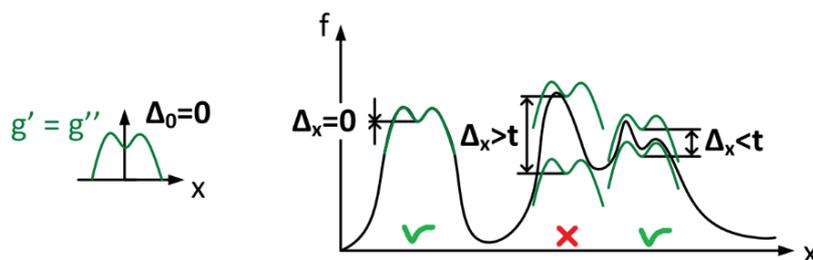


FIGURE 6.11 – Principe de la transformée SOMP de Barat sur un signal 1D. L'objet est trouvé lorsque la distance entre les deux éléments structurants translattés le long du signal est inférieure au seuil t .

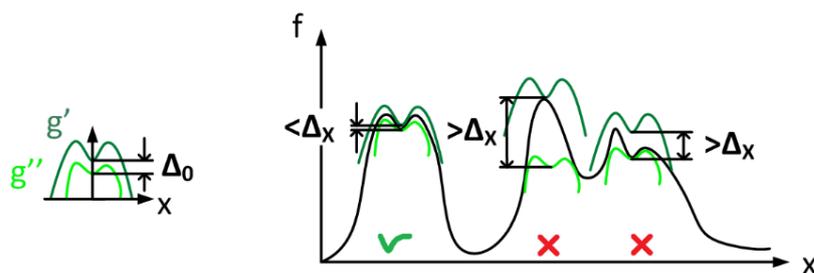


FIGURE 6.12 – Principe de la transformée MOMP de Barat sur un signal 1D. L’objet est trouvé lorsque la distance entre les deux éléments structurants translattés le long du signal est inférieure à Δ_0 ¹.

6.1.1.4 Discussion

Parmi toutes les méthodes étudiées précédemment, plusieurs éléments sont à retenir.

Les méthodes utilisant une binarisation de l’image ne peuvent être appliquées aux données vectorielles. Pour la méthode d’Odone et al, la construction d’ensembles à plus de 3 dimensions est complexe à mettre en œuvre pour ensuite appliquer l’algorithme binaire. Pour la méthode de Raducanu, le sens vectoriel de l’information ne serait pas pris en compte. De plus, le nombre de binarisations dans un espace d’au moins 3 dimensions augmenterait considérablement le coût combinatoire de la méthode.

Les méthodes de Soille, de Khosravi et le SOMP de Barat utilisent des éléments structurants plats ou un unique élément structurant non-plat. Elles fournissent donc la détection de l’objet recherché sans variation possible. Différentes techniques sont envisageables pour autoriser une variation entre l’objet recherché et l’objet détecté comme l’utilisation de filtres de rang ou d’un seuillage. Mais ces techniques ne permettent pas de contrôler le type (forme ou contraste) de variations autorisées.

Enfin les méthodes de Banon et le MOMP de Barat utilisent un couple d’éléments structurants formant un gabarit. Ce gabarit permet de contrôler les différences à autoriser. Mais la transformée MOMP de Barat [16] est la seule méthode à utiliser des éléments structurants distincts en forme et en contraste, permettant ainsi de choisir les écarts à autoriser pour rechercher l’objet à partir d’exemples ou de modèles.

Dans la littérature, il existe également différentes méthodes de transformée en tout-ou-rien adaptées au domaine de la couleur ou du multispectral. Le schéma de la figure 6.13 reprend et complète celui de la figure 6.3. Ce schéma montre les liens existants entre les méthodes couleur et les méthodes niveaux de gris utilisées pour étendre la transformée en tout-ou-rien à la couleur.

Certaines méthodes utilisent directement l’écriture binaire en l’adaptant à leur méthode d’ordonnancement couleur [133].

Les autres auteurs utilisent les méthodes niveaux de gris existantes pour étendre leur méthode. Certaines écritures sont à base de filtres de rang [10, 57]. D’autres écritures s’appliquent de façon marginale, l’élément structurant est alors adapté pour chaque bande

1. Δ_0 est la distance à l’origine entre les deux éléments structurants au repos

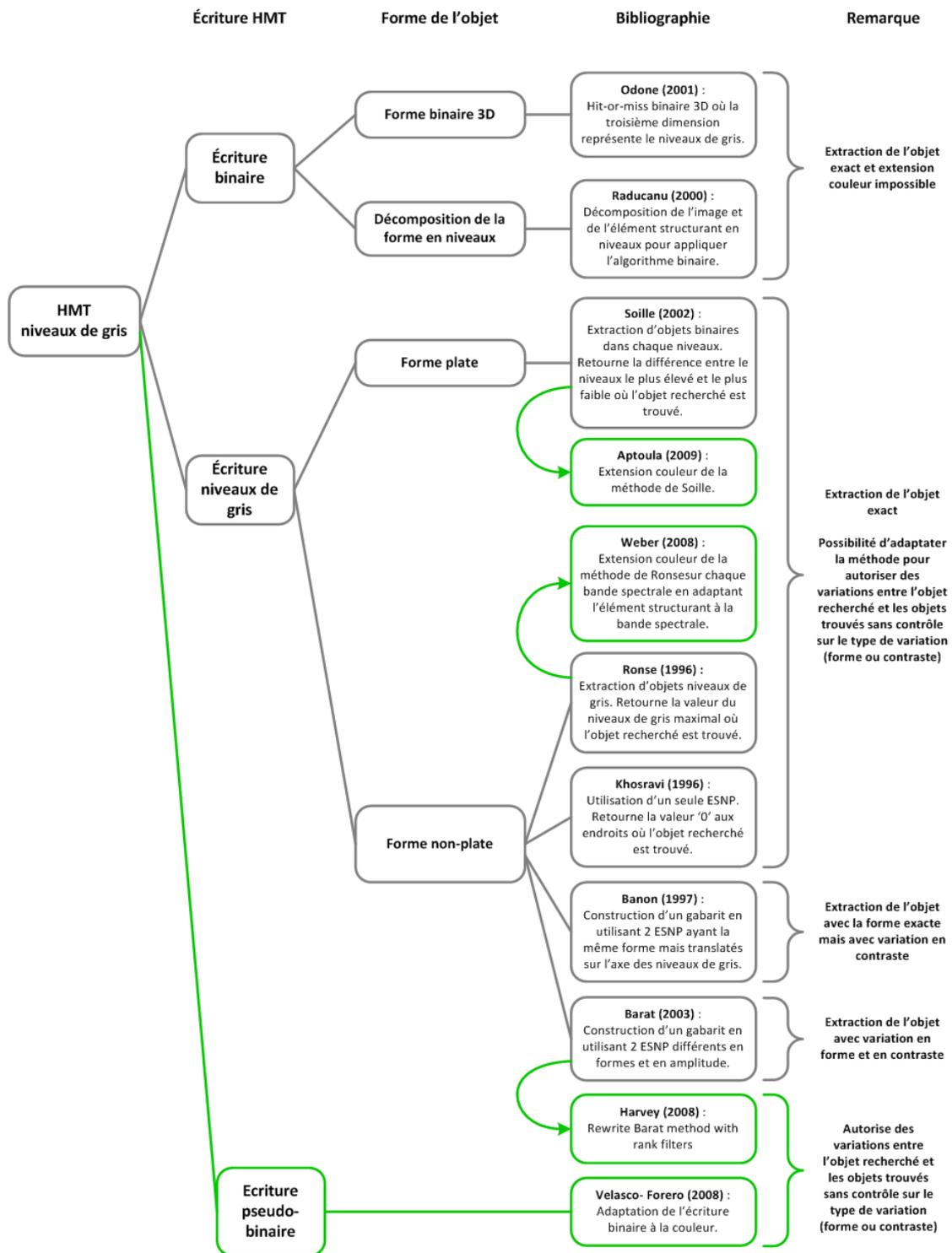


FIGURE 6.13 – Analyse des capacités des méthodes de HMT pour les images niveaux de gris et couleur.

spectrale [137].

Le point commun de toutes ces approches se trouve dans la recherche d'une technique permettant d'autoriser des variations, soit en utilisant des filtres de rang, soit en utilisant un seuillage.

Pour faire le bilan de cet état de l'art, seules les méthodes utilisant deux éléments structurants non-plats distincts peuvent autoriser des variations entre l'objet recherché et les objets trouvés. Mais surtout, de toutes les méthodes détaillées précédemment, seule la méthode de Barat permet de maîtriser les variations en forme séparément des variations en contraste.

De plus, toutes les méthodes couleur de transformée en tout-ou-rien développées jusqu'à présent sont construites à partir de méthodes utilisant des éléments structurants plats. Cette construction se justifie par le fait que les méthodes de morphologie mathématique couleur existantes ne permettent pas la construction d'éléments structurants non-plats.

Afin de palier aux limitations des méthodes existantes, nous proposons et détaillons dans la suite de ce chapitre un nouvel algorithme de transformée en tout-ou-rien fondée sur nos opérateurs morphologiques couleur. Avant d'expliquer notre algorithme de transformée en tout-ou-rien couleur, nous allons au préalable étudier la capacité de la méthode de Barat à tolérer les différents types de variations.

6.1.2 Transformée MOMP : sélectivité en forme et en contraste

La transformée MOMP permet de trouver dans une image des objets correspondant à un modèle. Les objets sont caractérisés par l'organisation spatiale de leurs pixels sur la « grille » de l'image mais également par le contraste entre leurs pixels. Pour des données niveaux de gris, le contraste est la différence de valeur entre deux pixels. Le gabarit de recherche doit donc être capable de sélectionner une forme particulière avec un contraste particulier.

6.1.2.1 Sélectivité en forme

La majeure partie des applications de détection d'objets nécessite de détecter des objets de différentes tailles ou avec des variations de forme. La transformée MOMP répond à cette double contrainte grâce à l'utilisation de son gabarit. Le gabarit est construit à partir de modèles ou d'exemples de l'objet recherché.

La figure 6.14 est un exemple de cette capacité avec l'extraction de lettres formées à partir d'un cercle, comme le 'o' ou le 'b', avec ou sans jambage². L'élément structurant inférieur est construit afin de trouver toutes les lettres formées d'un cercle. L'élément structurant supérieur permet d'autoriser tous les jambages possibles avec la seule condition que la lettre est un « trou » au centre. Les marqueurs obtenus correspondent à nos attentes. Toutes les lettres formées d'un cercle se trouvant dans le texte ('o', 'p', 'q', 'd') ont bien été détectées par la transformée MOMP. Toutes les autres lettres ne correspondant pas au

2. Trait vertical dans le dessin d'un caractère. La lettre n à 2 jambages.

critère de forme souhaitée n'ont pas été détectées.

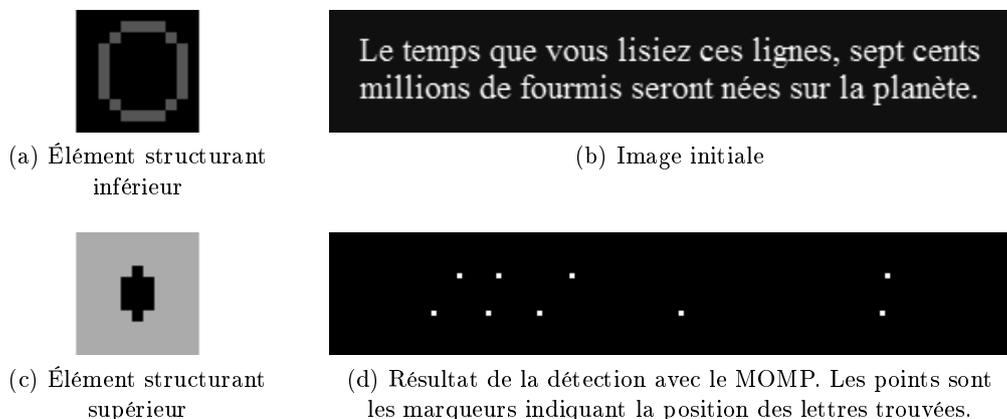


FIGURE 6.14 – Sélection des lettres formées d'un cercle avec ou sans jambage.

6.1.2.2 Sélectivité en contraste

Dans cette section, nous nous intéressons plus particulièrement à la sélectivité en contraste du MOMP. Utilisé pour la détection d'objets, les différents auteurs ne précisent pas comment régler les paramètres afin d'obtenir la sélectivité désirée. Dans cette partie, nous allons explicitement démontrer le lien entre l'amplitude des éléments structurants et le contraste niveaux de gris sélectionné.

Pour cela commençons par décrire les contraintes de construction des éléments structurants. Barat [16] définit deux contraintes pour la construction de la transformée MOMP. La première porte sur l'intersection des deux éléments structurants qui doit être nulle. La seconde impose que l'élément structurant g'' doit se trouver au dessus de g' . Pour faciliter la démonstration qui suit, nous ajoutons deux contraintes supplémentaires. La première impose aux deux éléments structurants d'avoir le même support spatial. La seconde réduit les éléments structurants à une forme convexe. Ces contraintes sont ajoutées dans le but de limiter la démonstration à l'étude du contraste sélectionné.

Considérant les contraintes précédentes et la définition de la transformée MOMP, un objet est détecté en un point lorsque le signal est inclus dans le gabarit en ce point. Le gabarit est composé des éléments structurants g' et g'' , où g' est plus petit que g'' . La valeur respective de g' et g'' à leur origine est notée $h_{g'}$ et $h_{g''}$. Ainsi la distance Δ_0 entre les deux éléments structurants à l'origine est $\Delta_0 = h_{g''} - h_{g'}$. Les figures 6.15b et 6.15c montrent deux cas de recherche d'un objet dans un signal 1D (courbe noire).

Ici nous cherchons seulement à déterminer l'intervalle de contraste sélectionné en fonction de l'amplitude des éléments structurants. Les motifs du signal ont par conséquent exactement la même organisation spatiale que le gabarit (figure 6.15a). La seule différence entre les motifs est donc leur contraste. La figure 6.15b illustre la recherche de l'objet lorsque

les motifs du signal ont un fort contraste tandis que pour la figure 6.15c les motifs ont un faible contraste.

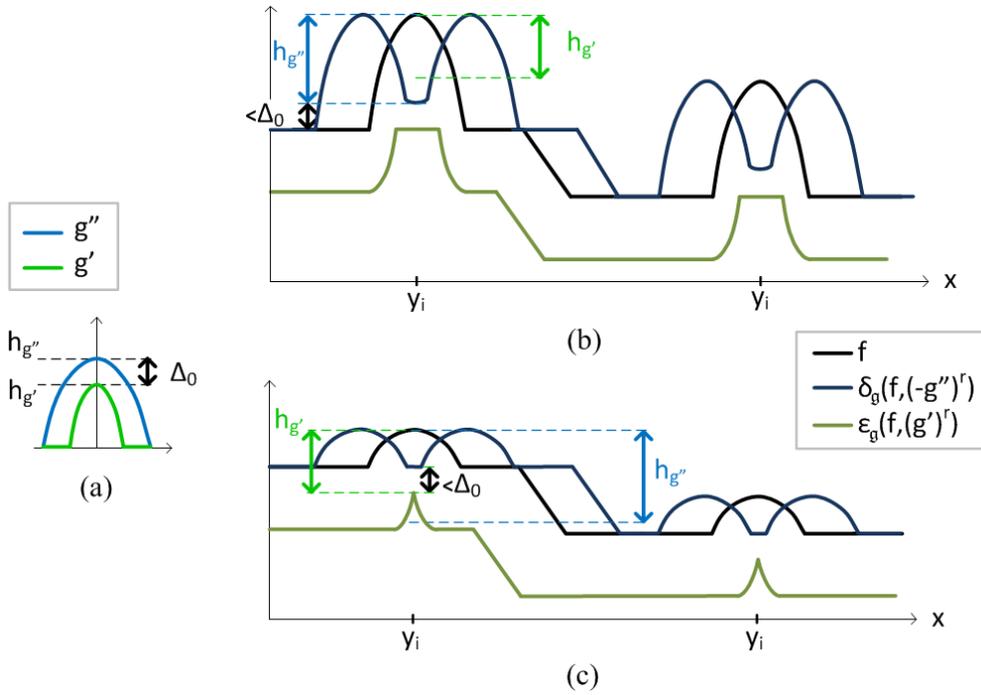


FIGURE 6.15 – (a) Gabarit ; (b) Calcul de la dilatation et de l'érosion du signal f composé de motifs à fort contraste ; (c) Calcul de la dilatation et de l'érosion du signal f composé de motifs à faible contraste.

Nous définissons le signal f comme la somme d'un fond $b(x)$ et d'un ensemble de N motifs M (équation 6.13). Chaque motif M est défini sur un domaine spatial \mathcal{D}_M tel que $M(x) = 0, \forall x \notin \mathcal{D}_M$. Ces motifs sont situés aux positions y_i du signal, la position y_i correspondant à l'origine du domaine spatial \mathcal{D}_M des motifs.

$$f(x) = b(x) + \bigcup_{i=1}^N M(x - y_i) \quad (6.13)$$

Pour qu'un motif soit détecté par la transformée MOMP, le domaine spatial du motif doit être identique à ceux des éléments structurants g' et g'' : $\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_{g'} = \mathcal{D}_{g''}$. Ainsi les domaines spatiaux étant identiques et le motif ayant la même organisation spatiale que les éléments structurants, l'étude de la détection se limite à celle des positions $x - y_i$. En s'appuyant sur toutes les contraintes précédentes, cette position est la seule où la soustraction entre l'anti-dilatation et l'érosion peut-être plus petite que Δ_0 . Nous allons donc calculer les résultats de l'anti-dilatation et de l'érosion du signal aux positions $x - y_i$. Pour faciliter l'écriture, un changement de variable est effectué en posant $x' = x - y_i$

La première partie de la transformée MOMP est l'anti-dilatation $\delta_{\mathbf{g}}(f, -(g'')^r)(x)$. L'élément structurant g'' a une forme convexe, centrée autour de l'origine du domaine spatial \mathcal{D}_M . À la position centrale y_i du motif (en x'), le résultat de l'anti-dilatation est :

$$\delta_{\mathbf{g}}(f, -(g'')^r)(x') = \begin{cases} f(x') - h_{g''} & \text{si } f(x') - h_{g''} \geq b''(x') \\ b''(x') & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.14)$$

Dans cette expression, $b''(x')$ est la valeur maximale du fond $b(x)$ lorsque g'' est centré sur le motif (à la position x') et $f(x')$ est la valeur du signal à cette position.

La seconde partie de la transformée MOMP est l'érosion $\varepsilon_{\mathbf{g}}(f, g')(x)$. À la position y_i ($x' = x - y_i$), centre du motif, le résultat de l'érosion est :

$$\varepsilon_{\mathbf{g}}(f, g')(x') = \begin{cases} b'(x') & \text{si } f(x') - h_{g'} \geq b'(x') \\ f(x') - h_{g'} & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.15)$$

Dans cette expression, $b'(x')$ est la valeur minimale du fond $b(x)$ lorsque g' est centré sur le motif (à la position x') et $f(x')$ est la valeur du signal à cette position.

D'après la transformée MOMP, un objet est détecté lorsque la différence entre l'anti-dilatation et l'érosion à la position du centre du motif x' est inférieure à Δ_0 :

$$\delta_{\mathbf{g}}(f, -(g'')^r) - \varepsilon_{\mathbf{g}}(f, g')(x') < \Delta_0 \quad (6.16)$$

Ainsi pour les motifs à fort contraste, nous pouvons exprimer le résultat de la transformée MOMP de la manière suivante :

$$\begin{cases} \delta_{\mathbf{g}}(f, -(g'')^r)(x') & = f(x') - h_{g''} \\ \varepsilon_{\mathbf{g}}(f, g')(x') & = b'(x') \end{cases} \quad (6.17)$$

$$\Rightarrow f(x') - h_{g''} - b'(x') < \Delta_0 \quad (6.18)$$

$$\Rightarrow f(x') - b'(x') < \Delta_0 + h_{g''} \quad (6.19)$$

De la même manière pour les motifs à faible contraste, le résultat est le suivant :

$$\begin{cases} \delta_{\mathbf{g}}(f, -(g'')^r)(x') & = b''(x') \\ \varepsilon_{\mathbf{g}}(f, g')(x') & = f(x') - h_{g'} \end{cases} \quad (6.20)$$

$$\Rightarrow b''(x') - (f(x') - h_{g'}) < \Delta_0 \quad (6.21)$$

$$\Rightarrow f(x') - b''(x') > h_{g'} - \Delta_0 \quad (6.22)$$

Dans une approximation, nous considérons que les valeurs maximale et minimale du fond sont égales ($b'(x - y_i) = b''(x - y_i)$). Cette approximation permet de focaliser la démonstration uniquement sur le contraste des objets. Si le fond a également des variations, c'est-à-dire si $b'(x - y_i) \neq b''(x - y_i)$, alors la sélectivité prendra en compte les variations en contraste du fond et de l'objet sans distinction.

Ainsi, avec h_{min} et h_{max} les valeurs maximale et minimale de contraste entre le motif et son fond, les équations (6.19) et (6.22) deviennent :

$$\begin{cases} h_{min} = h_{g'} - \Delta_0 \\ h_{max} = h_{g''} + \Delta_0 \end{cases} \quad \text{avec } \Delta_0 = h_{g''} - h_{g'} \quad (6.23)$$

Nous obtenons directement les caractéristiques pour gérer les amplitudes des éléments structurants :

$$\begin{cases} h_{g'} = \frac{2h_{min} + h_{max}}{3} \\ h_{g''} = \frac{h_{min} + 2h_{max}}{3} \end{cases} \quad (6.24)$$

En conclusion, la transformation MOMP peut détecter les motifs ayant un contraste qui se trouve dans la gamme $[h_{min}, h_{max}]$ en calculant les valeurs $h_{g'}$ et $h_{g''}$ à l'aide des égalités de l'expression (6.24). Nous pouvons également remarquer que la taille de l'intervalle est de 3Δ . Par la suite Δ est donc appelé le *paramètre de sélectivité* en contraste pour la transformée MOMP. La figure 6.16 est un exemple de sélectivité en contraste sur une image niveaux de gris. L'image contient des croix dont le contraste augmente dans le sens de la lecture en commençant par un contraste de 1 et augmentant par pas de 3. Le gabarit utilisé a la même forme de croix que le motif répété dans l'image. Lors de la modification de l'intervalle de contraste, les croix sélectionnées correspondent bien à celles attendues.

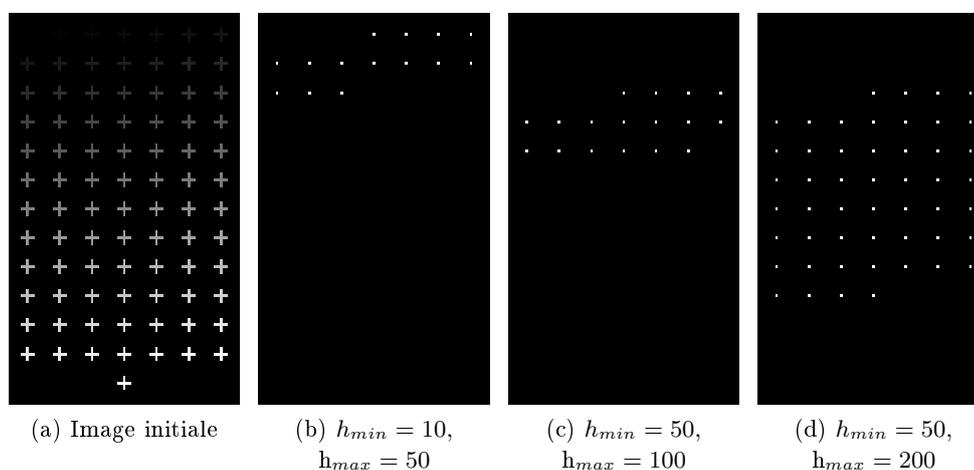


FIGURE 6.16 – Exemple de sélectivité en contraste pour une image contenant des croix avec un contraste augmentant de gauche à droite et de haut en bas. Les intervalles choisis sont indiqués sous la figure.

La capacité de modifier l'intervalle de contraste avec l'amplitude des éléments structurants non-plats n'est pas nouvelle. Cependant, nous avons proposé ici la relation précise entre les valeurs des amplitudes des éléments structurants non-plats et l'intervalle de contraste sélectionné. Cette relation n'a pas été proposée dans la littérature jusqu'à maintenant.

6.2 Transformée en couleur

Dans cette section, nous allons maintenant étendre la transformée en tout-ou-rien en utilisant la méthode MOMP de Barat dont nous avons évalué les capacités précédemment. Dans un premier temps, nous construisons l'écriture couleur à l'aide des opérateurs morphologique de notre méthode CCMM. Ensuite, nous présentons comment paramétrer le gabarit permettant de sélectionner l'objet vectoriel. Puis, nous comparons notre méthode à celle de la littérature face à des images synthétiques. Finalement, nous évaluons les capacités de notre transformée en tout-ou-rien couleur en utilisant deux bases d'images réelles avec vérité terrain.

6.2.1 Ecriture couleur

Pour pouvoir étendre la transformée en tout-ou-rien aux images couleur, les opérateurs d'érosion et de dilatation couleur doivent être déterminés. Nous avons vu que pour utiliser la transformée MOMP, les opérateurs doivent utiliser des éléments structurants non-plats. Dans la section 2.3, nous avons développé des opérateurs morphologiques couleur qui permettent la construction d'éléments structurants non-plats. Ainsi la transformée de Barat peut être étendue au domaine de la couleur en appliquant les opérateurs de la méthode CCMM.

Dans la suite, nous appelons « CMOMP » notre extension couleur de la transformée de Barat pour « Color + MOMP ». L'expression mathématique du CMOMP est alors la suivante :

$$\begin{aligned}
 CMOMP(f, g)(x) &= \delta_c(f, -(g'')^r)(x) - \varepsilon_c(f, (g')^r)(x) \\
 &= \bigvee_{x \in D_f, y \in D_g} \{f(x - y) \underset{c}{-} g''(y)\} \\
 &\quad - \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} \{f(x - y) \underset{c}{-} g'(y)\} \tag{6.25}
 \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant les opérateurs couleurs d'érosion (ε_c), de dilatation (δ_c) et de soustraction ($\underset{c}{-}$).

6.2.1.1 Spécification du gabarit spatio-colorimétrique

La transformée MOMP adaptée aux images niveaux de gris permet de sélectionner une forme particulière en fonction d'un gabarit autorisant des variations en contraste et en forme. L'extension de cet outil à la couleur est possible en utilisant la méthode de morphologie mathématique basée distance proposée dans cette thèse.

Le gabarit couleur peut être construit facilement à partir de modèle ou d'exemples. Il permet de contrôler la forme de l'objet et le contraste couleur³ désiré de manière indépendante à l'aide de trois paramètres (figure 6.17) :

3. Le contraste vectoriel est la distance entre deux coordonnées vectorielles. Pour la couleur, nous calculons le contraste à l'aide de la distance *DeltaE*.

- les éléments structurants utilisés, permettent d'une part de régler la forme générale de l'objet tout en autorisant des variations, d'autre part de gérer la différence de contraste voulu en chaque point de l'objet ;
- le paramètre de sélectivité Δ_0 se combine aux éléments structurants pour gérer l'écart global de contraste à autoriser entre les objets détectés ;
- les coordonnées de convergence définies à la fin du chapitre 2 contrôlent l'orientation du contraste couleur choisi.

De manière naturelle, nous proposons que les coordonnées de convergence soient la couleur de l'objet pour la dilatation et la couleur du fond entourant l'objet pour l'érosion. Ceci amène ici une preuve de la nécessité de pouvoir sélectionner les coordonnées de convergence de tout ordonnancement. À ce stade de nos travaux, les coordonnées de convergence sont choisies manuellement. Toutefois, un travail est actuellement en cours pour définir les coordonnées de convergence par une voie statistique [63].

Le paramètre de sélectivité Δ_0 permet de détecter les objets ayant des couleurs variant autour de la couleur de l'objet. La valeur du paramètre de sélectivité ne doit pas dépasser le double de la distance $\|\overrightarrow{O^{-\infty}O^{+\infty}}\|$ sinon tous les objets de la couleur du fond seront détectés. La figure 6.18 montre la relation entre le paramètre de sélectivité Δ_0 et le contraste couleur $\|\overrightarrow{O^{-\infty}O^{+\infty}}\|$. Lors du paramétrage Δ_0 sera alors déterminé comme un pourcentage de cette distance.

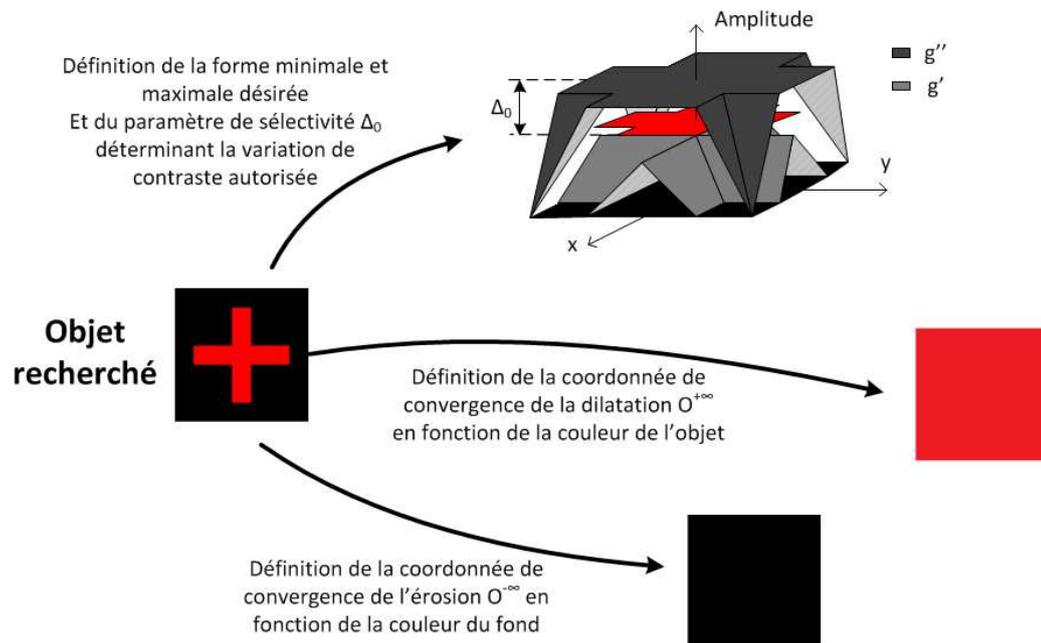


FIGURE 6.17 – Construction du gabarit vectoriel en fonction de l'objet recherché.

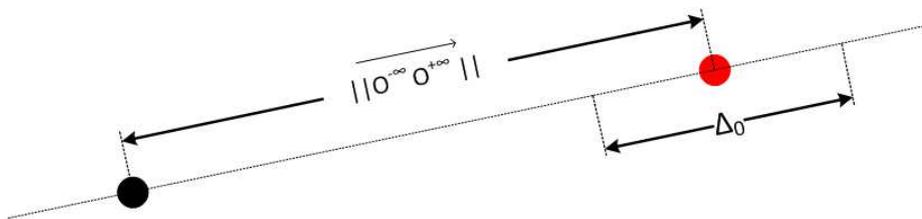


FIGURE 6.18 – Sélectivité du paramètre Δ_0 dans l'espace couleur en fonction des coordonnées de convergence

6.2.1.2 Comparaison avec les méthodes existantes

Dans cette section nous allons évaluer les performances du CMOMP face aux méthodes de la littérature. Afin d'obtenir une évaluation objective des paramètres de sélectivité, nous proposons un ensemble d'images de synthèse ; ces images sont toutes construites dans l'espace RVB. La méthode de la littérature utilisée pour la comparaison est celle décrite dans [137] qui est la combinaison de la transformée en tout-ou-rien de Soille associée à l'ordre lexicographique HSL de Lopez. Dans la suite cette méthode est appelée méthode « S+L HMT » pour « Soille + Lopez Hit-or-Miss Transform ». Cette méthode de transformée en tout-ou-rien couleur utilise les éléments structurants non-plats, elle permet donc de mettre en avant les défauts introduits par les différentes méthodes de la littérature utilisant ce type d'élément structurant.

Dans un premier temps, nous évaluons les capacités de sélectivité en contraste couleur des différentes méthodes. Pour cela nous utilisons la figure 6.19a qui est une image de synthèse composée de croix vertes sur un fond noir. Afin de tester la sélectivité en contraste, les croix ne sont pas composées du même vert. Elles sont construites à partir des coordonnées couleur [25 255 25] dans l'espace RVB auquel est ajouté un vecteur couleur aléatoire. Ce vecteur couleur peut prendre toutes les directions et sa norme dépend d'une loi gaussienne de moyenne nulle et dont l'écart-type est de 5.

Comme nous voulons sélectionner une couleur spécifique pour cette expérience, Δ_0 a une valeur faible pour la transformée MOMP. La figure 6.19b est une représentation en 3 dimensions du gabarit utilisé pour extraire les croix. Les coordonnées de convergence sont le vert pour la dilatation ($O^{+\infty}$) et le noir pour l'érosion ($O^{-\infty}$).

La méthode « S+L HMT » permet de déterminer la teinte désirée, ici nous voulons les croix vertes, la teinte choisie est donc de 120° .

Ces premiers résultats montrent les différences obtenues entre les deux méthodes.

La transformée CMOMP détecte le contraste couleur exact lorsque Δ_0 est égal à 0.01 et extrait les croix dans un intervalle de contraste couleur de plus en plus grand lorsque le paramètre Δ_0 augmente (figures 6.19d à 6.19f). Ce résultat de sélectivité est bien celui attendu pour la méthode CMOMP.

Alors que la méthode « S+L HMT » extrait toutes les croix qui ont une teinte plus

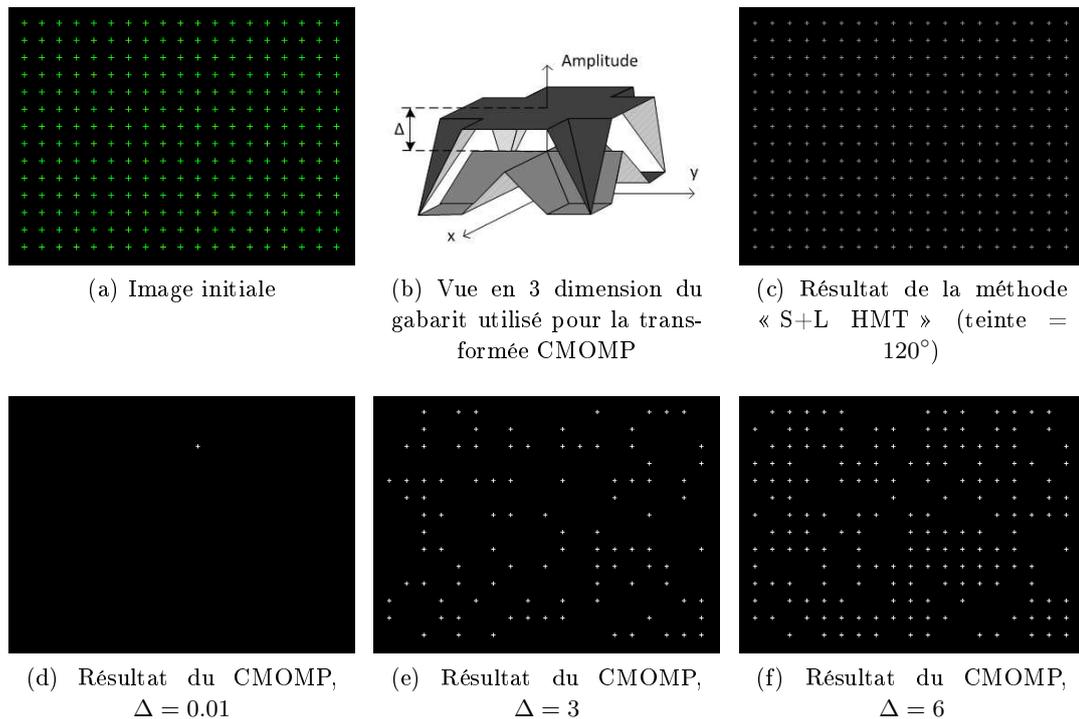


FIGURE 6.19 – Comparaison entre la méthode CMOMP et « S+L HMT » dans leur capacité de sélectivité en contraste couleur. Les croix qui composent l’image ont des coordonnées couleur légèrement différentes, de moyenne $[25 \ 255 \ 25]$ dans l’espace RVB. L’objectif est de sélectionner les croix de coordonnée couleur $[25 \ 255 \ 25]$ en autorisant une variation de couleur plus ou moins grande autour de cette valeur. Cette variation est possible en modifiant le paramètre Δ de la transformée CMOMP tandis qu’aucun paramètre ne le permet avec la méthode « S+L HMT ».

proche⁴ de 120° (teinte de référence) que la teinte du fond de l’image qui est de 0° pour la couleur noire. La méthode « S+L HMT » extrait donc les croix qui ont une teinte entre 0° et 240° . Ainsi toutes les croix vertes, sans exception, sont détectées par la méthode « S+L HMT » (figure 6.19c). Ce résultat confirme donc que ce type de méthode n’est pas adapté pour contrôler la sélectivité en contraste.

Ce problème de sélectivité est encore plus apparent avec la méthode « S+L HMT » (figure 6.20a). La figure 6.20a est composée d’un fond noir et d’objets de différentes tailles et de différentes couleurs. L’objectif, à partir de cette image, est de détecter les croix de taille supérieure ou égale à 5×5 pixels avec un contraste couleur particulier.

Pour la transformée CMOMP, le paramètre de sélectivité sera alors faible ($\Delta_0 = 1$). Le gabarit utilisé est celui de la figure 6.19b et les coordonnées de convergence sont le noir pour l’érosion et la couleur correspondant à celle de l’objet à détecter pour la dilatation. Pour la

4. La notion de proximité de teinte se fait par rapport à la distance angulaire sur le cercle unité des teintes. Par exemple, la teinte H_1 est plus proche de la teinte de référence H_r que la teinte H_2 lorsque : $d_\wedge(H_1, H_r) < d_\wedge(H_2, H_r)$. Pour la définition de la distance angulaire, voir [52]

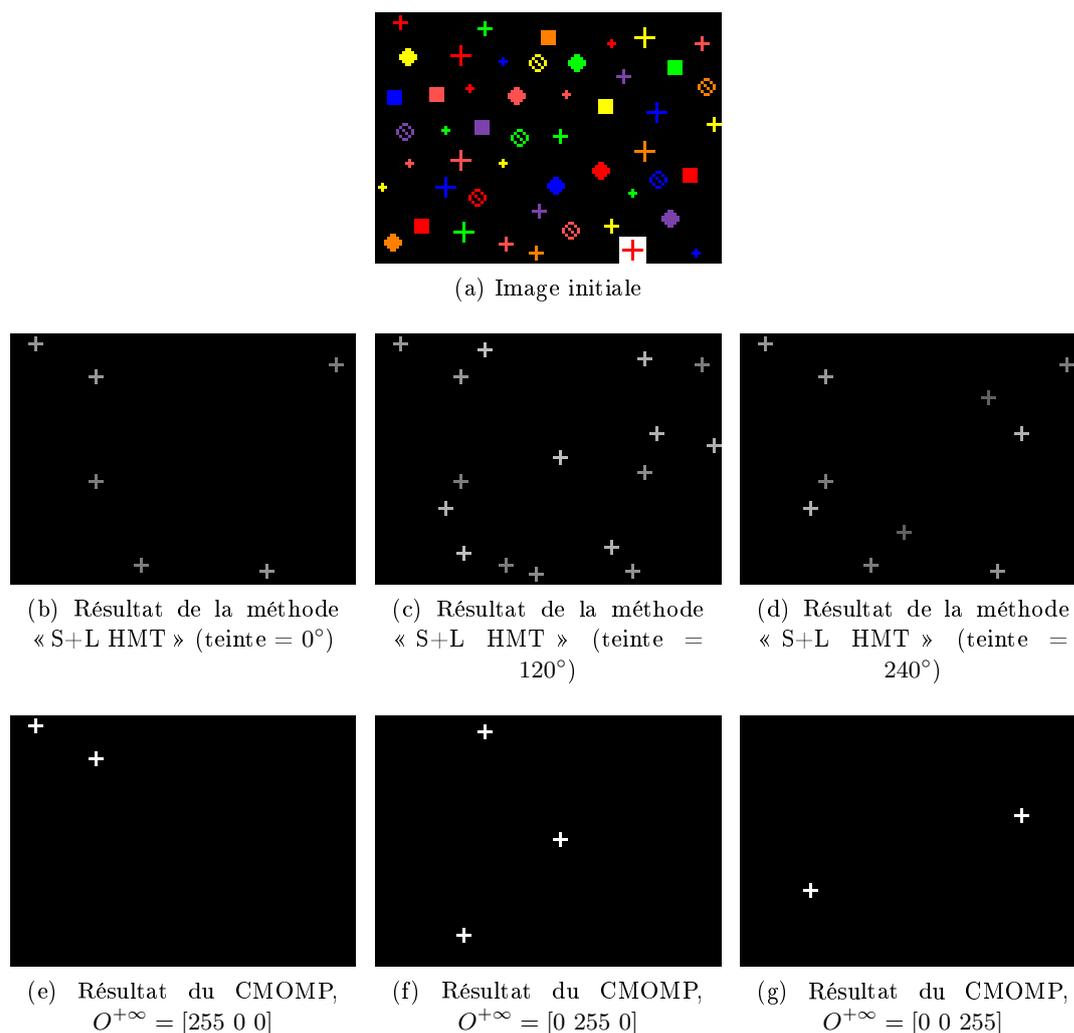


FIGURE 6.20 – Comparaison entre la méthode CMOMP et « S+L HMT » dans leur capacité de sélectivité en contraste couleur. L'objectif est de sélectionner les croix rouges, vertes puis bleues sur fond noir. La transformée CMOMP parvient, grâce à ces paramètres (coordonnées de convergence et paramètre de sélectivité en contraste couleur Δ), à sélectionner les croix recherchées contrairement à la méthode « S+L HMT ».

méthode « S+L HMT » la teinte de référence est choisie en fonction de la teinte de l'objet recherché.

La méthode « S+L HMT » (figures 6.20b à 6.20d) détecte toutes les croix ayant une teinte supérieure à celle du fond de l'image. De plus, la valeur finale ne dépend pas de la couleur recherchée, elle correspond à la distance entre la couleur de la croix et celle du fond. Ainsi, l'application d'un seuillage pour supprimer les détections de croix de la mauvaise couleur nécessite la connaissance de la distance entre la couleur de fond et la couleur de la croix à détecter, ce qui peut poser des problèmes lorsque le fond est texturé. Avec la transformée CMOMP (figures 6.20e à 6.20g) seules les croix de couleur recherchée ont bien été détectées.

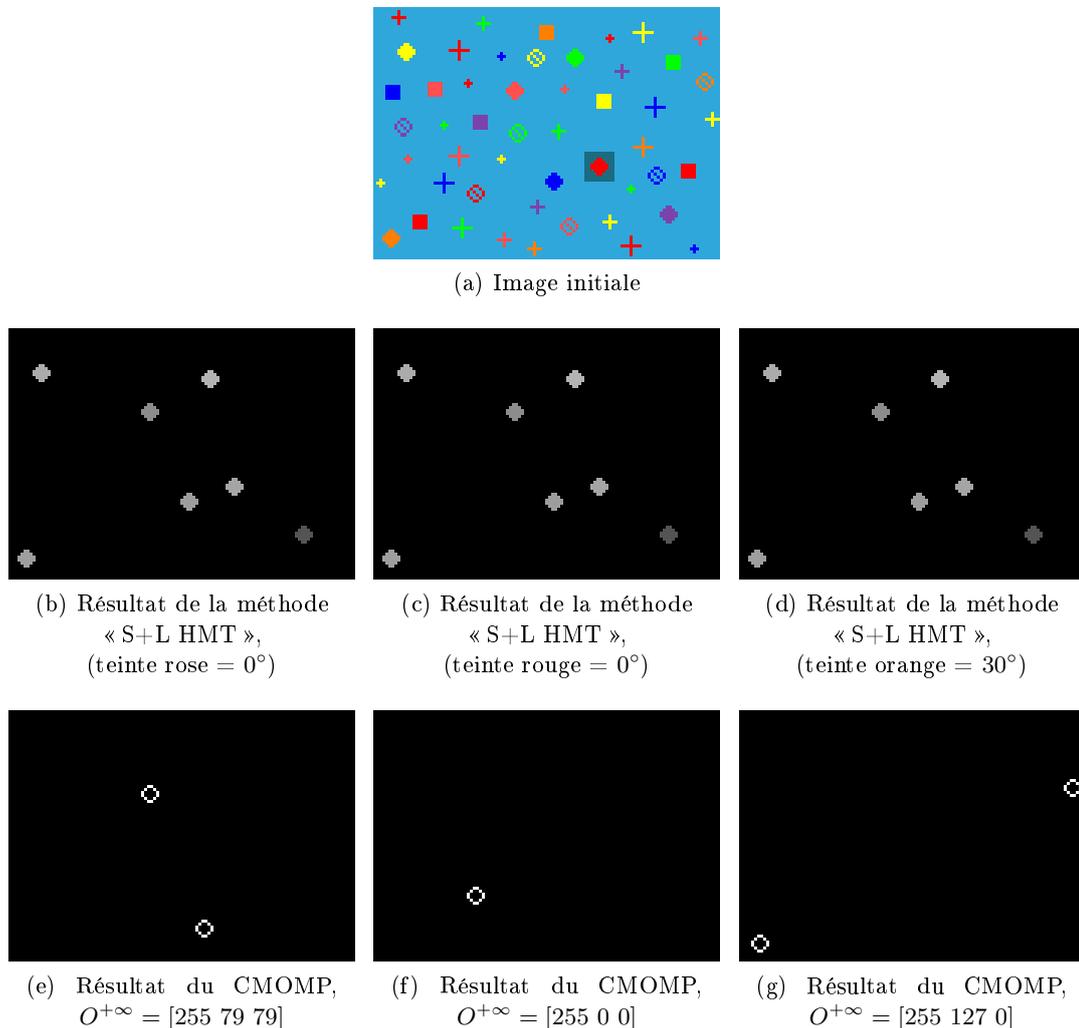


FIGURE 6.21 – Comparaison entre la méthode CMOMP et « S+L HMT » dans leur capacité de sélectivité en contraste couleur et en forme. L’objectif est de sélectionner les cercles et les disques roses, rouges puis oranges sur fond bleu clair. La transformée CMOMP parvient, grâce à ses paramètres (coordonnées de convergence, paramètre de sélectivité en contraste couleur Δ et gabarit) à sélectionner les objets correspondant à la forme et au contraste couleur recherché contrairement à la méthode « S+L HMT ».

La dernière figure de cette partie (figure 6.21a) permet de mettre en évidence la sélectivité en contraste et en forme de la transformée CMOMP. L’objectif est de détecter les cercles pleins ou vides de couleur rose, rouge puis orange sur un fond bleu clair. Malgré la proximité de ces trois couleurs, la transformée CMOMP est capable de détecter uniquement la couleur voulue (figures 6.21e à 6.21g). Pour cela la valeur du paramètre de sélectivité en contraste couleur doit être faible ($\delta = 0.01$). Dans ce cas de configuration, les valeurs de teintes utilisées par le « S+L HMT » pour détecter les trois objets sont proches voir identiques; les couleurs rouge et le rose ont toutes les deux une valeur de teinte de 0° et la

couleur orange une teinte de 30° . La méthode « S+L HMT » est donc incapable de les distinguer et donne le même résultat (figures 6.21b à 6.21d).

Les figures 6.21e à 6.21g montrent également la capacité à détecter des formes en géant les variations. Pour cette image, l'objectif est la détection des cercles et des disques. La transformée CMOMP obtient bien le résultat escompté en détectant les deux formes. Tandis que la méthode « S+L HMT » ne détecte qu'une de ces deux formes. L'utilisation de l'élément structurant plat ne permet pas de prendre en compte une variation de forme de l'objet à détecter. Nous sommes donc contraints de choisir de détecter l'une ou l'autre forme. Une des solutions possible et utilisée par différents auteurs [10, 137] est de faire plusieurs détections successives en utilisant des éléments structurants ayant des formes et des tailles différentes. L'extraction d'objets plus complexes est alors possible mais la description de l'objet peut devenir compliquée, de plus, le temps de calcul augmente considérablement.

Pour conclure, nos expériences ont montré que certaines méthodes de transformée en tout-ou-rien couleur peuvent autoriser une variation en contraste couleur ou de forme en utilisant la combinaison de plusieurs éléments structurants, un seuillage [133] ou encore des filtres de rang [10]. Cependant, quelle que soit la méthode de la littérature utilisée, il est impossible de détecter des objets en contrôlant les variations respectives de forme et de contraste souhaitées, indépendamment l'une de l'autre par l'utilisation d'un seul jeu de paramètres. Avec la transformée CMOMP ces variations de forme et de contraste peuvent être contrôlées grâce à la seule utilisation du gabarit.

6.2.2 Résultats sur images réelles couleurs

Les limites des approches de la littérature ayant été mises en avant dans l'étude précédente face à des images de synthèse, nous allons nous limiter par la suite à l'évaluation de notre approche face à des bases d'images réelles. Pour cela nous commençons par la détection d'objets dans des images de peau. Nous finissons par la détection de cellules mitotiques dans des images de tissus de tumeur de seins.

6.2.2.1 Détection d'objets dans des images de peau

Contexte L'objectif de traitement pour ces images de peaux est de créer un algorithme d'aide au diagnostic dans le domaine de la dermatologie/cosmétologie. L'analyse des images permet de connaître l'impact des produits appliqués sur la peau en analysant le type d'objets supprimés ou non. Ces images sont préalablement analysées par des experts (plus de 30) afin d'évaluer par un paramètre de « sévérité » chaque objet (pores, poils, rides, couperoses, ...) pouvant être présent dans une image de peau.

Ce type d'analyse, appliquée sur ces images, est confronté à deux problèmes majeurs. Le premier problème est dû à la complexité de la texture. Les images contiennent un nombre important de variations de couleur et d'artefacts dus aux maladies et au vieillissement de la peau. À cette complexité de texture s'ajoute une concentration des couleurs dans une petite partie de l'espace couleur. Cela implique qu'il y a peu de différences colorimétriques entre

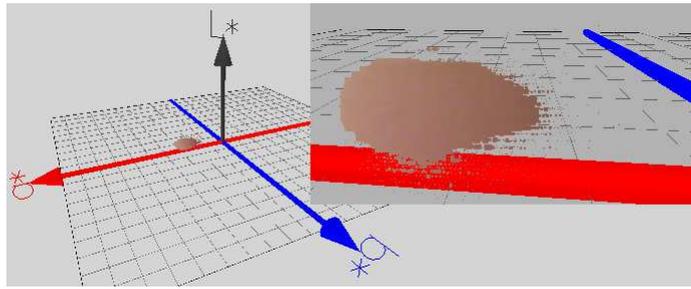


FIGURE 6.22 – Histogramme d'une image de peau dans l'espace CIELAB

un objet et le fond de la peau. Leur séparation par un simple critère colorimétrique semble impossible à l'observation de l'histogramme couleur (figure 6.22). Un second problème est lié au contexte d'aide au diagnostic dans lequel nous nous situons. Les décisions des experts sont associées à des mécanismes complexes liant à la fois l'expérience des experts et leur analyse visuelle. Or le système visuel humain est un système non linéaire. Si nous souhaitons parvenir à une méthode d'aide au diagnostic pertinente pour ce type de données, il est important de tenir compte de ces non-linéarités dans les outils mis en œuvre.



FIGURE 6.23 – Exemples d'images de la base de données.

Base d'images et vérité terrain La base d'images utilisée pour l'analyse de peau contient 358 images de peaux, et regroupant différentes tendances ethniques : « peau française », « peau japonaise » et « peau américaine ». Les images présentent donc des variations de couleur et de teinte importantes. Toutes ces images contiennent ou non différents type d'objets comme des pores, des grains de beautés, des rides, ... La figure 6.23 montre quelques exemples d'images de peaux différentes appartenant à cette base.

Pour chacune de ces images, les experts ont évalué la présence et l'importance des objets par un paramètre de gravité allant de 0 à 5. Toutes les données sont classées dans un tableau. La figure 6.24 en est un extrait.

Image	Taches	Pores normaux	Pores cicatrisés	Rougeur diffuse	Couperose	Rougeur cicatrisée	Duvet	...
FR_M104Z02T00.jpg	2	0,5	0	0,5	1,5	0	1	...
FR_M66Z02T00.jpg	0	0	0	1	2	0	0	...
FR_M85Z02T00.jpg	4	1	0	0	0	0	1	...
JP_M26Z02T00.jpg	0	2	1	0,5	0	1	1	...
JP_M41Z02T00.jpg	3	0,5	0,5	1	1	0,5	0	...
US_M03Z02T00.jpg	1	1	0,5	0,5	2	0	0	...
US_M102Z02T00.jpg	0	0	0	0	0	0	0	...
US_M107Z02T00.jpg	0,5	0,5	1	3	0	1	0	...
...

FIGURE 6.24 – Extrait du tableau contenant les valeurs de sévérité pour chacun des objets.

Détection de pores Dans un premier temps, nous allons étudier la capacité de notre outil CMOMP à détecter des pores. Pour cela, le gabarit est conçu à partir d'exemples prélevés dans la base d'images. La démarche suivie pour déterminer chaque paramètre est résumé dans la figure 6.25.

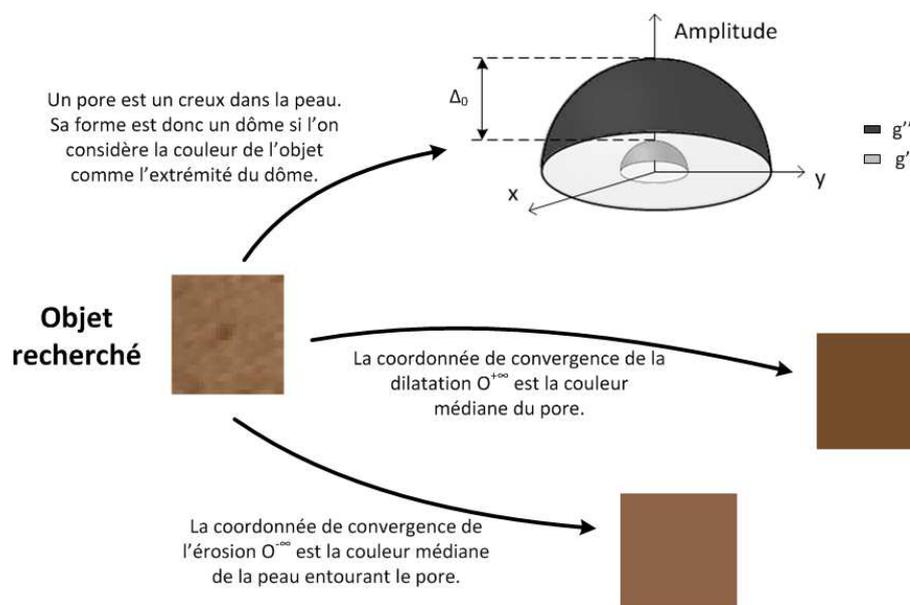


FIGURE 6.25 – Construction du gabarit vectoriel pour la recherche de pores.

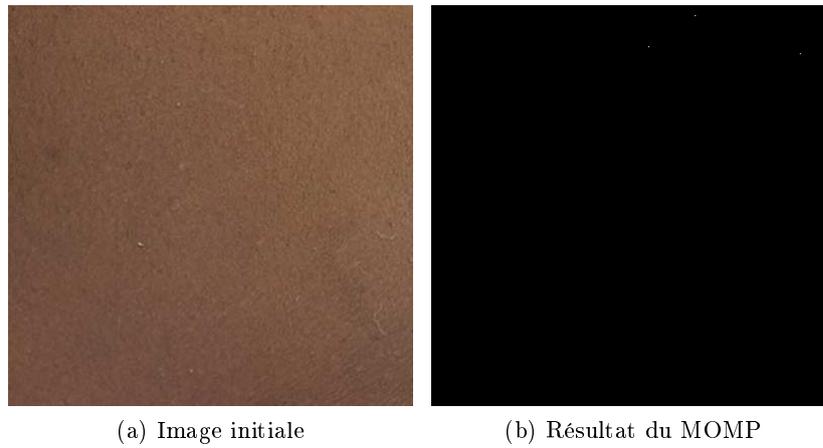


FIGURE 6.26 – Résultats du CMOMP sur une image de pores de sévérité 0.

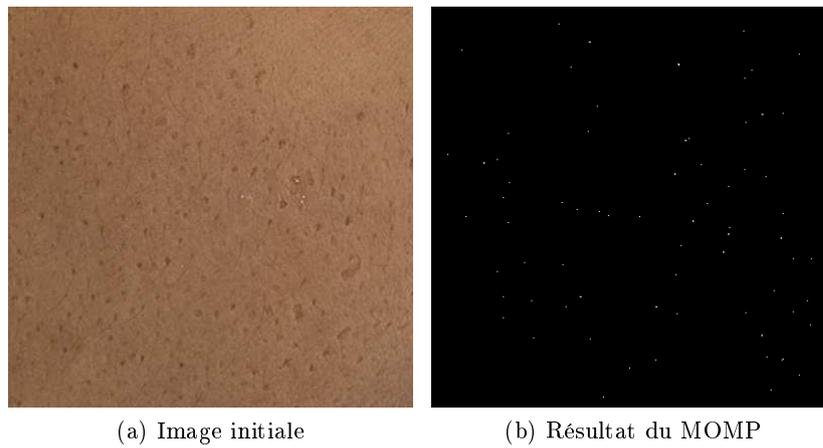


FIGURE 6.27 – Résultats du CMOMP sur une image de pores de sévérité 1.

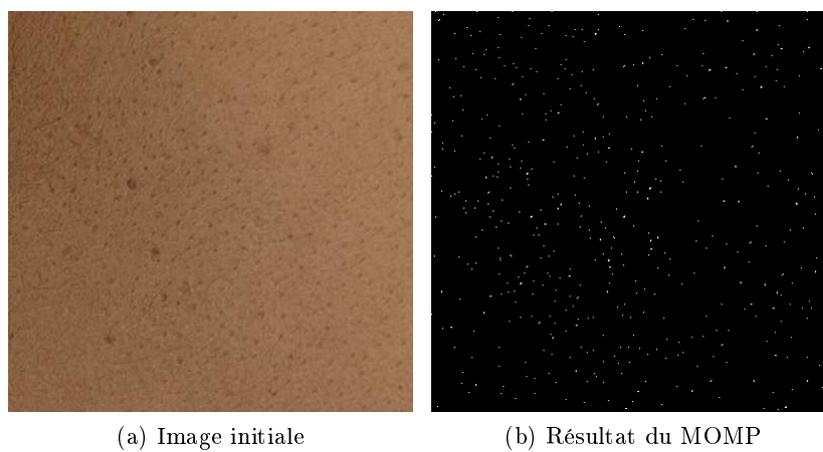


FIGURE 6.28 – Résultats du CMOMP sur une image de pores de sévérité 2.

À partir des exemples, nous définissons la forme que doit prendre chacun des éléments structurants. Les pores sont des trous dans la peau, les éléments structurants ont donc une forme de dôme. Les diamètres des deux éléments structurants sont fixés à 3 pixels pour l'ES inférieur et à 7 pixels pour l'ES supérieur. La taille des éléments structurants est fonction de la résolution des images, elle doit donc être adaptée en conséquence. L'écart de diamètre permet d'autoriser une petite variation de taille entre les pores. Ensuite, pour orienter le dôme dans l'espace couleur, la coordonnée de convergence pour la dilatation (l'objet) est déterminée à partir de la couleur médiane située au centre des pores. La coordonnée de convergence de l'érosion permet de compléter l'orientation du gabarit avec la couleur médiane de la peau située autour des pores. Enfin, le paramètre de sélectivité Δ_0 est défini comme $\frac{1}{4}$ de la distance entre les deux coordonnées de convergence.

Afin de comparer nos résultats aux évaluations des experts, nous commençons par détecter les pores en utilisant les paramètres définis précédemment. Les figures 6.26 à 6.28 sont des exemples de résultats obtenus pour des images ayant une sévérité croissante. Ensuite nous comptons le nombre d'objets détectés dans l'image afin de le confronter à la sévérité estimée par les experts. Le tableau 6.1 contient les résultats pour 3 des images présentées. Ces résultats sont généralisables à toute la base d'images. Comme nous pouvons le voir, les résultats de détection sont cohérents. Plus le niveau de sévérité est élevé plus le nombre d'objets détectés est important.

	CMOMP result
figure 6.26 (sévérité = 0)	3
figure 6.27 (sévérité = 1)	73
figure 6.28 (sévérité = 2)	478

TABLE 6.1 – Nombre d'objets « pores » détectés en fonction du niveau de sévérité

Détection de couperoses Ici nous allons étudier la capacité de notre algorithme à détecter des couperoses dans les images de peau. La forme de ces objets est plus complexe que celle des pores. En effet la couperose est un réseau sanguin. Elle est donc composée de morceaux de segments ayant différentes orientations. Nous devons donc détecter des segments avec ces différentes orientations. Un des grands avantages des opérateurs morphologiques est qu'ils n'induisent pas de déphasage spatial. En conséquence, nous pouvons rechercher parallèlement chaque direction des segments. Le résultat final sera l'union des résultats obtenus (figure 6.29).

Pour détecter les différents segments, nous utilisons les paramètres de la figure 6.30. Les coordonnées de convergence sont choisies en fonction de la couleur de la peau et de la couperose. Le paramètre de sélectivité Δ_0 est fixé à $\frac{1}{2}$ de la distance entre les deux coordonnées de convergence. La forme du gabarit permet de trouver un bout de segment ayant une orientation particulière. Nous appliquons la détection avec 8 directions différentes.

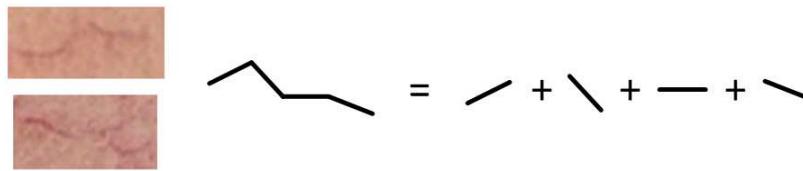


FIGURE 6.29 – Exemple de composition de la couperose en fonction de différentes orientations de segments.

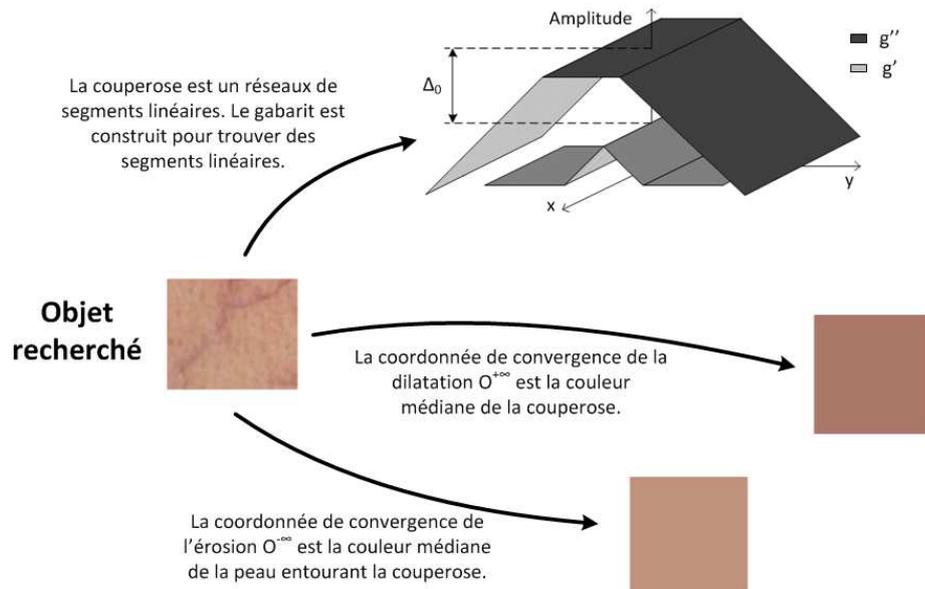


FIGURE 6.30 – Construction du gabarit vectoriel pour la recherche de couperose.

Les figures 6.31 à 6.34 sont des résultats de détection de couperoses obtenues pour différents niveaux de sévérité. Le résultat de la détection est normalement un unique point. Pour reconstruire la couperose, nous construisons un segment avec son orientation lorsque l'objet est détecté. Ainsi sur les différents résultats nous pouvons observer la construction de réseaux.

La recherche de petits segments permet bien d'obtenir les réseaux de la couperose, cependant d'autres petits objets (pores, poils,...) apparaissent. Pour conserver la couperose tout en supprimant les petits objets, nous appliquons un post-traitement. Ce post-traitement consiste à supprimer tout les objets connectés (8-connextité) qui contiennent moins de 10 pixels. La figure 6.31c est un exemple de filtrage pour une image ayant une couperose de forte sévérité. Nous pouvons voir que les résultats obtenus sont cohérents avec les images initiales. Cependant, que ce soit avant ou après filtrage des images, l'objectif est de comparer le nombre d'objets détectés avec la sévérité. Le tableau 6.2 regroupe ces résultats. Le nombre de pixels appartenant à la couperose est bien corrélé au paramètre de sévérité de l'image que ce soit avant ou après filtrage.

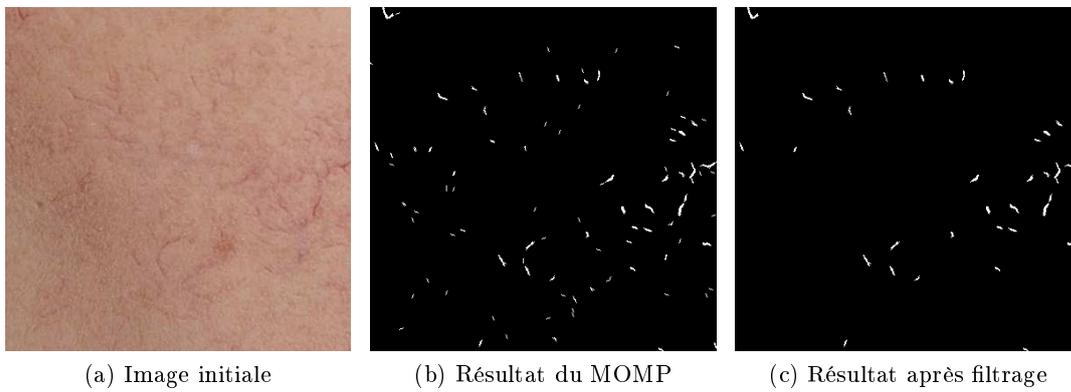


FIGURE 6.31 – Résultats du CMOMP sur une image de couperose de sévérité 3.

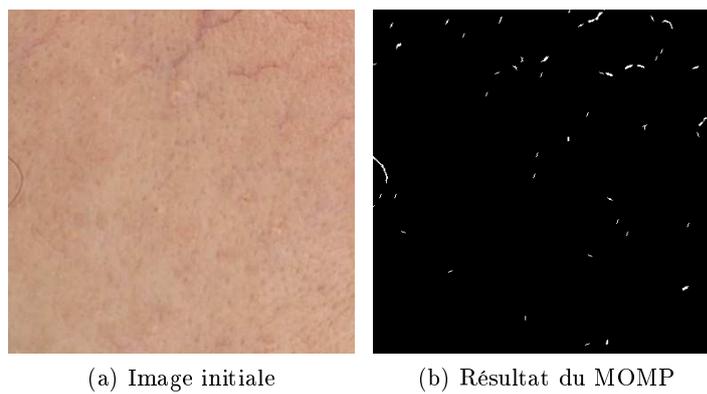


FIGURE 6.32 – Résultats du CMOMP sur une image de couperose de sévérité 2.

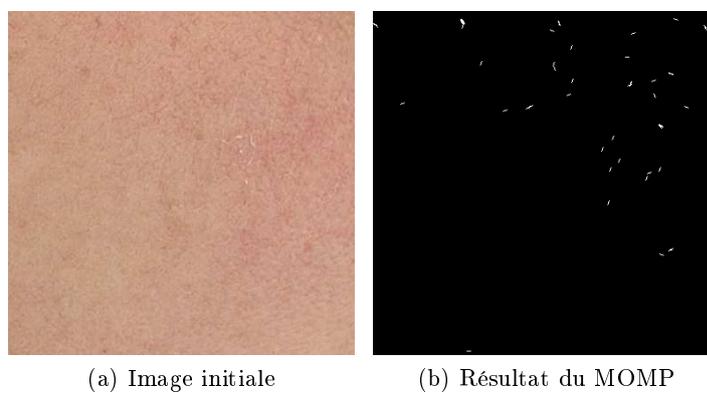


FIGURE 6.33 – Résultats du CMOMP sur une image de couperose de sévérité 1.

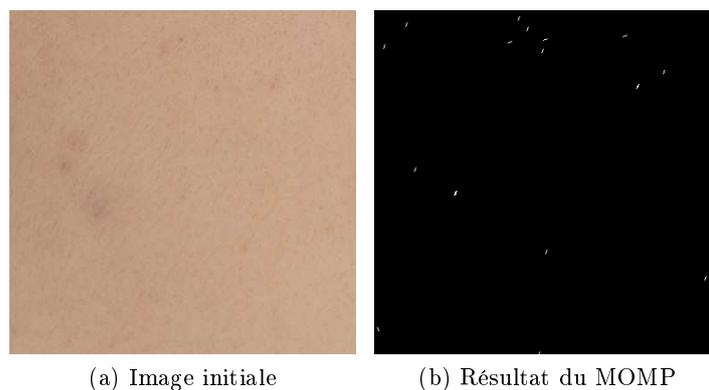


FIGURE 6.34 – Résultats du CMOMP sur une image de couperose de sévérité 0.

	CMOMP	CMOMP + filtrage
figure 6.31 (sévérité = 0)	10	0
figure 6.32 (sévérité = 1)	233	48
figure 6.33 (sévérité = 2)	518	297
figure 6.34 (sévérité = 3)	1073	722

TABLE 6.2 – Nombre de pixels appartenant à la couperose détectés en fonction de la sévérité

Discussion Dans ce contexte d'aide au diagnostic, les données à analyser sont complexes. La différence colorimétrique entre les objets et le fond de la peau est très faible. Néanmoins, les résultats obtenus pour la détection d'objets dans les images de peau sont satisfaisants. Les différentes structures sont détectées grâce aux gabarits construits. Lors de la détection de couperose, nous avons mis en évidence la possibilité de rechercher différentes orientations d'objets puis de réunir les résultats dans une même image. Cette union des résultats est possible par le fait que les opérateurs de morphologie mathématique n'induisent pas de déphasage spatial. Les résultats sont corrélés avec le niveau de sévérité des objets.

Cependant, nous ne pouvons contrôler la précision de détection des objets sur ce type de base d'images. Nous connaissons uniquement les valeurs de sévérité des objets présents dans l'image mais nous ne disposons d'aucune information quant à leur position et leur nombre.

Afin de compléter notre étude sur le CMOMP, la prochaine application choisie permet d'évaluer la précision du CMOMP. La base d'image utilisée est associée à une vérité terrain de segmentation des objets.

6.2.2.2 Détection de cellules mitotiques

Contexte Ce travail se place dans un contexte médical sur l'étude du cancer du sein. De nos jours, le dépistage du cancer du sein est très fréquent. Mais la mesure de sévérité, qui est essentielle pour compléter l'analyse après la détection d'une tumeur, n'est pas automatique

et surtout complexe.

Pour effectuer cette évaluation, des experts analysent les tissus extraits de la région de la tumeur et produisent des lames histologiques. À partir de ces lames, plusieurs critères sont évalués dont le principal est le dénombrement des cellules mitotiques. Une cellule mitotique est une cellule en train de se dupliquer. En analysant ce taux de duplication il est possible d'évaluer l'évolution de la tumeur. Pour obtenir ce taux, les experts comptent le nombre de cellules mitotiques manuellement à partir des lames.

L'objectif est donc de construire un détecteur pour ces cellules mitotiques afin d'aider les spécialistes.

Base d'images et vérité terrain Dans ce contexte, un travail commun a été ouvert pour lequel une base de données a été créée, elle se nomme « MITOS dataset » [131]. Cette base de données contient les images issues de 5 patientes. Pour chaque patiente, 10 images sont extraites. La base contient donc 50 images contenant plus de 300 cellules mitotiques. Chaque image est associée à une seconde image contenant la segmentation de toutes les cellules mitotiques. La figure 6.35 est un exemple d'image avec l'image de segmentation associée.

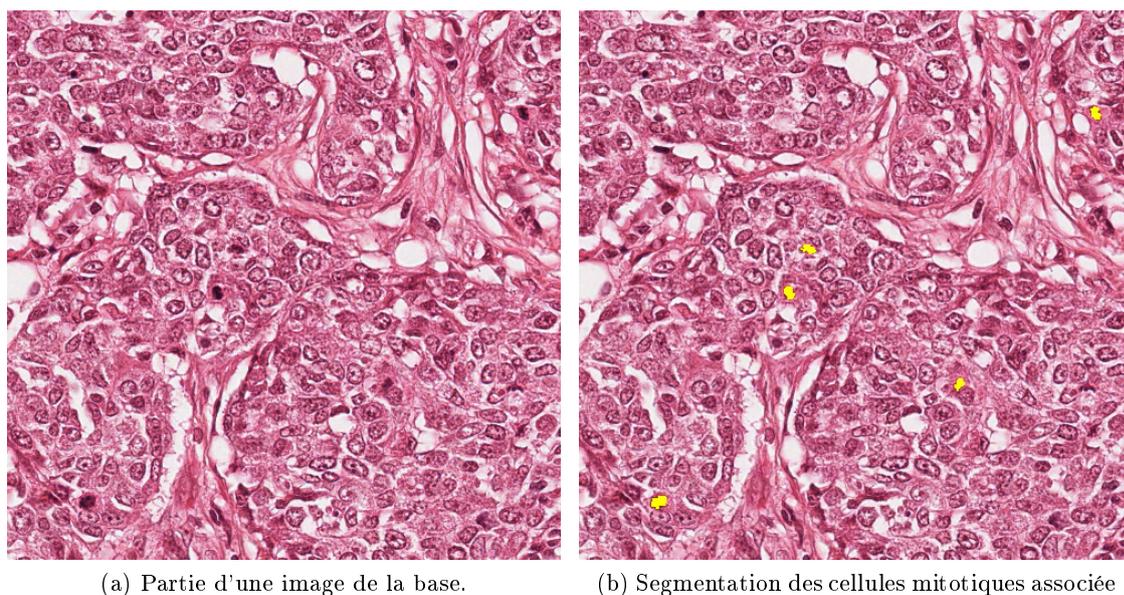


FIGURE 6.35 – Exemple d'une partie d'image avec la vérité terrain associée (en jaune).

Spécification du gabarit spatio-colorimétrique Comme nous l'avons vu précédemment, une cellule mitotique est une cellule qui est dans un processus de duplication. Durant ce processus, la cellule passe par différentes phases. La figure 6.36 montre les quatre phases principales de la mitose.

Comme nous pouvons le voir, les cellules prennent plusieurs formes lors de la mitose : rondes ou allongées. À la fin du processus, elles sont constituées de deux parties. Elles

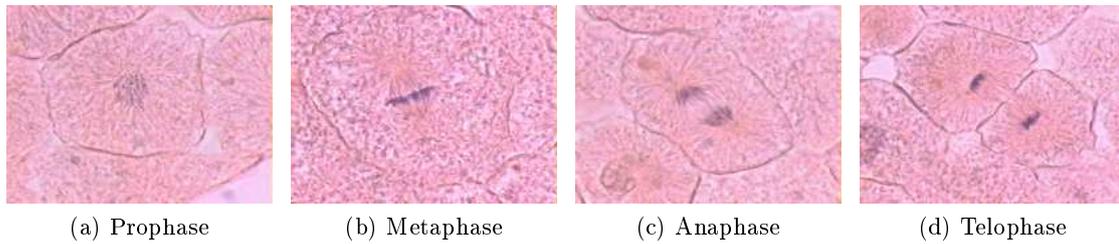


FIGURE 6.36 – Les quatre principales phases de la mitose.

peuvent également avoir des tailles différentes. Pour construire un gabarit adapté à la recherche des cellules mitotiques (figure 6.37), nous nous appuyons sur l'observation d'une partie d'entre elles (figure 6.38). Les coordonnées de convergence sont fixées en fonction des couleurs médianes présentes dans les cellules en mitose et autour de ces cellules. Le gabarit utilisé permet de détecter des cellules mitotiques de différentes tailles et formes. Le paramètre de sélectivité Δ_0 est fixé à $\frac{1}{2}$ de la distance entre les deux coordonnées de convergence afin de tolérer les différences de texture à l'intérieur des cellules.

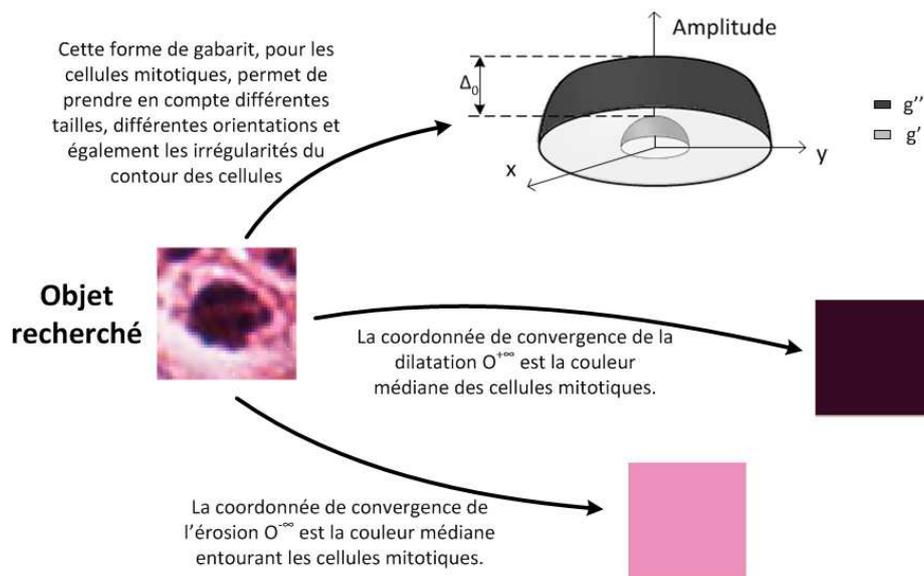


FIGURE 6.37 – Construction du gabarit vectoriel pour la recherche de cellules mitotiques.



FIGURE 6.38 – Exemple de cellules mitotiques « MITOS dataset »

Discussion L'objectif pour cette application est de détecter les cellules mitotiques dans un cadre d'aide au diagnostic. Ainsi, il est indispensable que les outils développés permettent la détection de l'ensemble des cellules. La stratégie adoptée est alors de privilégier les sur-détections (fausses alarmes) aux non-détections. Des étapes de raffinement devront alors être mises en place pour affiner les prises de décisions. Pour cela, le gabarit décrit précédemment permet de détecter différentes tailles mais aussi différentes textures de cellules.

Le taux de bonnes détections (vrais positifs) obtenu est satisfaisant (tableau 6.3), néanmoins quelques cellules ne sont pas détectées. Nous rencontrons quelques cas particuliers de cellules ayant soit une taille trop importante (figures 6.39a à 6.39b) soit une forme atypique (figures 6.39c à 6.39d). Nous trouvons entre autre des cellules dont le noyau à une forme de cercle, ou encore un noyau éclaté en plusieurs parties.

	Pourcentage d'objets détectés		
	« Color MOMP »	« Color MOMP » + filtrage	MOMP + filtrage
Faux positifs	11236 %	4449 %	4221 %
Vrais positifs	90,42 %	90,42 %	88.63 %
Faux négatifs	9,58 %	9,58 %	11.37 %

TABLE 6.3 – Pourcentage de détection des objets avec le « Color MOMP » puis suivi d'un filtrage.

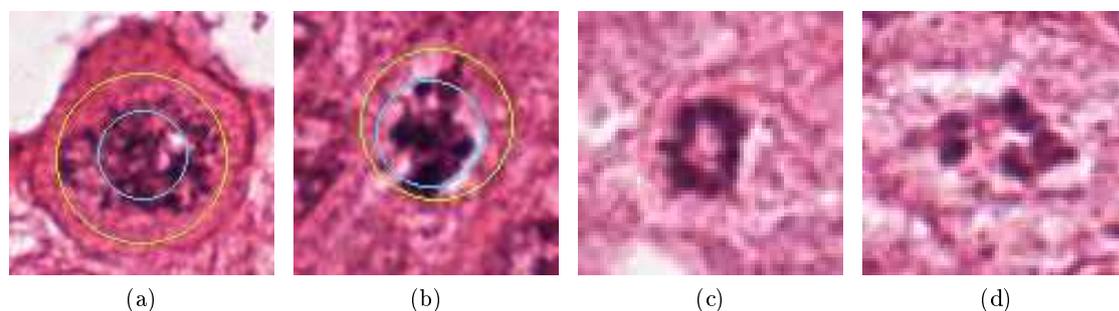


FIGURE 6.39 – Exemple de cellules mitotiques non détectées. Les 2 premières ont une trop grande taille pour être détectées. Le cercle bleu représente la taille maximale du gabarit et le cercle vert la taille de la cellule. Les 2 dernières cellules ont une forme très particulière.

Le produit de contraste (colorant) utilisé pour faire ressortir les cellules mitotiques met également en avant les jeunes cellules. En combinant la ressemblance des cellules mitotiques et des jeunes cellules à la faible sélectivité du gabarit, nous obtenons un nombre très important de faux positifs (tableau 6.3). Néanmoins, le diamètre de l'élément structurant inférieur étant faible pour accepter toutes les tailles de cellules, plusieurs détections spatialement proches correspondent à une même cellule, ce qui augmente également le nombre de faux positifs. Afin de prendre en compte cette sur-détection, un post-traitement est mis en place afin de regrouper les détections proches. Les résultats après application du filtrage sont indiqués dans la deuxième colonne du tableau 6.3.

La dernière remarque sur cette application porte sur l'apport de la couleur. Le produit de contraste utilisé réduit la palette de couleur à des nuances de rose. Les images peuvent donc être réduites à des images niveaux de gris (figure 6.40). Pour appuyer ce constat nous utilisons l'algorithme MOMP sur les images niveaux de gris en utilisant la luminance de l'image. Ainsi, comme le montre la dernière colonne du tableau, les résultats entre les algorithmes niveaux de gris et couleur sont très proches. L'apport de la couleur pour cette application est donc faible mais non négligeable dans un cadre d'aide au diagnostic.

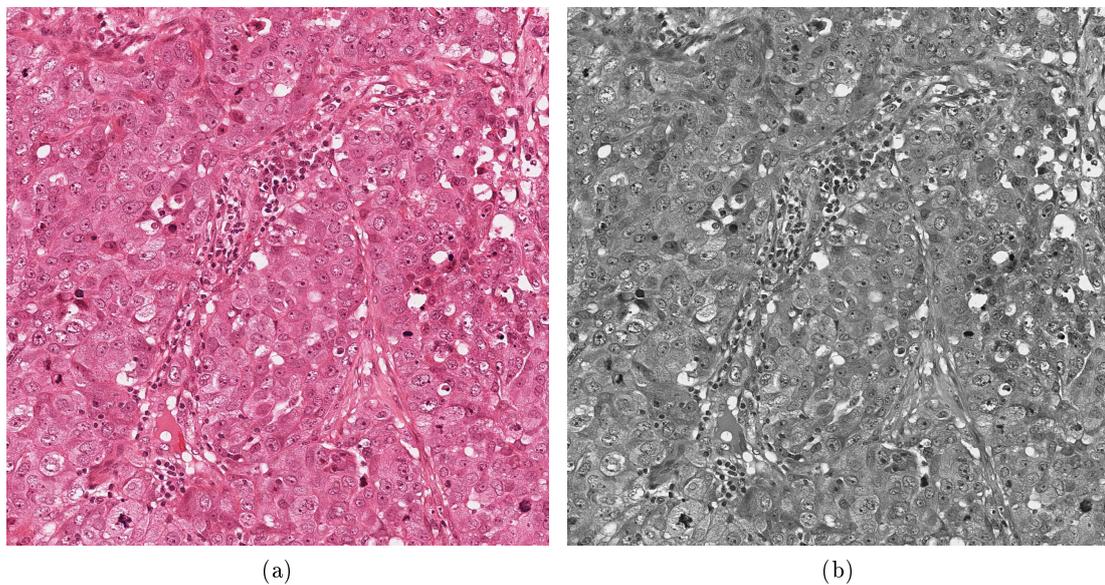


FIGURE 6.40 – Exemple d'une image de la base MITOS avant et après réduction de la couleur aux niveaux de gris.

Le travail engagé pour cette application n'est pas terminé. Nous avons plusieurs perspectives, la première étant d'utiliser plusieurs gabarits afin de sélectionner les cellules ayant différentes tailles. Pour cela, l'algorithme sera itéré avec les différents gabarits puis le résultat final sera une union des résultats des différentes itérations. Cette construction permettra dans un premier temps de détecter les cellules dont la taille ne permettait pas la détection avec le gabarit actuel et dans un second temps d'avoir une forte sélectivité ce qui devrait limiter le nombre de faux positifs.

La seconde perspective est d'utiliser un post-traitement permettant de séparer les cellules mitotiques des jeunes cellules. Les cellules mitotiques sont théoriquement plus texturées et plus difformes que les jeunes cellules. Une classification selon des critères de forme et de texture devrait ainsi permettre d'extraire seulement les cellules mitotiques recherchées.

6.3 Transformée en tout-ou-rien Hit-or-Miss Multispectral

De nos jours, les applications de détection d'objets ne sont pas limitées à l'utilisation d'images couleur. Nous allons donc dans la suite de ce chapitre proposer une écriture de la transformée MOMP adaptée au domaine multi/hyperspectral.

6.3.1 Ecriture multispectrale

La transformée de Barat nécessite la définition d'opérateurs morphologiques multi/hyperspectraux intégrant la définition d'éléments structurants non-plats. Dans le chapitre 4, nous avons montré la possibilité d'étendre nos opérateurs morphologiques ainsi que la définition d'éléments structurants non-plats associés au domaine multi/hyperspectral. Ainsi, nous proposons une extension de la transformée MOMP et nous appelons « MMOMP » cette extension au domaine multi/hyperspectral pour « Multi/hyperspectral + MOMP ». L'expression mathématique du MMOMP est alors la suivante :

$$\begin{aligned}
 MMOMP(f, g)(x) &= \delta_m(f, -(g'')^r)(x) - \varepsilon_m(f, (g')^r)(x) \\
 &= \bigvee_{x \in D_f, y \in D_g} \left\{ f(x - y) \underset{m}{-} g''(y) \right\} \\
 &\quad - \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} \left\{ f(x - y) \underset{m}{-} g'(y) \right\}
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Dans le cas du multi/hyperspectral, le gabarit spatial est défini de la même manière que dans le cadre de la couleur, tout comme le paramètre de sélectivité. En revanche, les coordonnées de convergence s'adaptent à la dimension des données de l'image.

6.3.2 Premiers résultats sur images multispectrales

Dans la suite du chapitre, nous allons montrer quelques résultats de détection d'objets.

Détection de lettres Dans un premier temps, nous avons testé notre algorithme MMOMP sur des images de la base de Finlayson, Hordley and Morovic [41]. Pour plus de détails sur la construction de cette base, nous vous invitons à vous reporter au chapitre 4 (4.2). Cette base d'image n'ayant pas de vérité terrain, nous choisissons de tester la détection de lettres.

La figure 6.41 montre la recherche du point sur la lettre i. Les deux coordonnées utilisées sont un spectre caractérisant une couleur orange (figure 6.41a) pour la coordonnée de convergence de l'érosion (indiqué par un point bleu dans l'image initiale) et un spectre caractérisant une couleur blanche (figure 6.41b) pour celle de la dilatation (indiqué par un point rouge dans l'image initiale). Le diamètre de l'élément structurant inférieur est de 3 pixels et celui de l'élément structurant supérieur est de 5 pixels. Le paramètre de sélectivité est fixé à la moitié de la distance (euclidienne) entre les deux spectres de convergence. Avec ces paramètres, le point sur le i a bien été trouvé.

La figure 6.42 illustre la recherche d'un objet plus complexe qu'un point. L'objectif est de trouver les lettres o dans le mot « colour ». Les deux coordonnées utilisées sont un

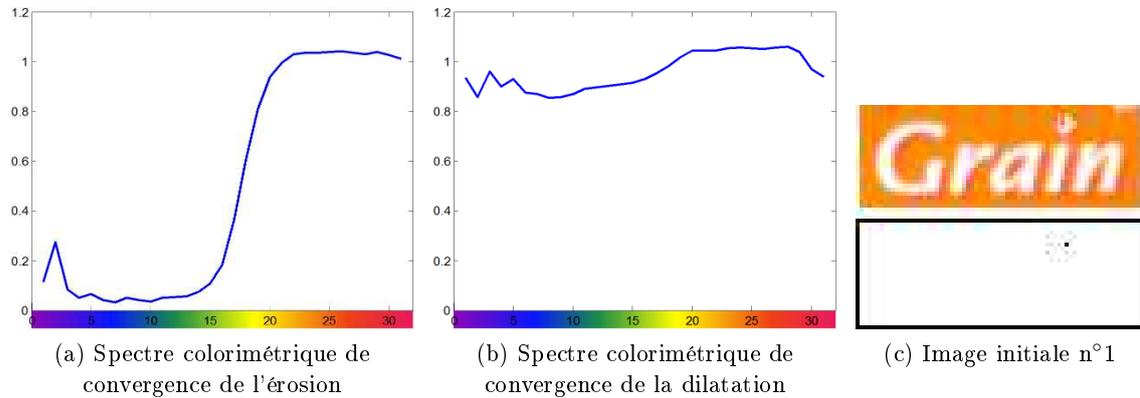


FIGURE 6.41 – Détection du point sur le *i*. Les coordonnées de convergence sont indiquées par un point bleu pour l'érosion et un point rouge pour la dilatation.

spectre caractérisant une couleur violet pâle (figure 6.42a) pour la coordonnée de convergence de l'érosion et un spectre caractérisant une couleur violet foncé (figure 6.42b) pour celle de la dilatation. Les localisations spatiales des coordonnées de référence choisies dans l'image sont également indiquées par un point bleu et rouge. Le gabarit utilisé présente une forme similaire à un tore avec un diamètre intérieur de 1 pixel et un diamètre extérieur de 3 pixels. Le paramètre de sélectivité est fixé à la moitié de la distance (euclidienne) entre les deux spectres de convergence. Avec ces paramètres, les deux lettres *o* ont bien été trouvées.

Ces résultats mettent en avant la capacité de détection de notre algorithme MMOMP. Nous pouvons observer que le détecteur détecte des objets simples comme le point sur le *i* dans le cas de la figure 6.41c mais également des objets plus complexes comme le *o*, qui est un objet non convexe⁵, dans le cas de l'image 6.42c.

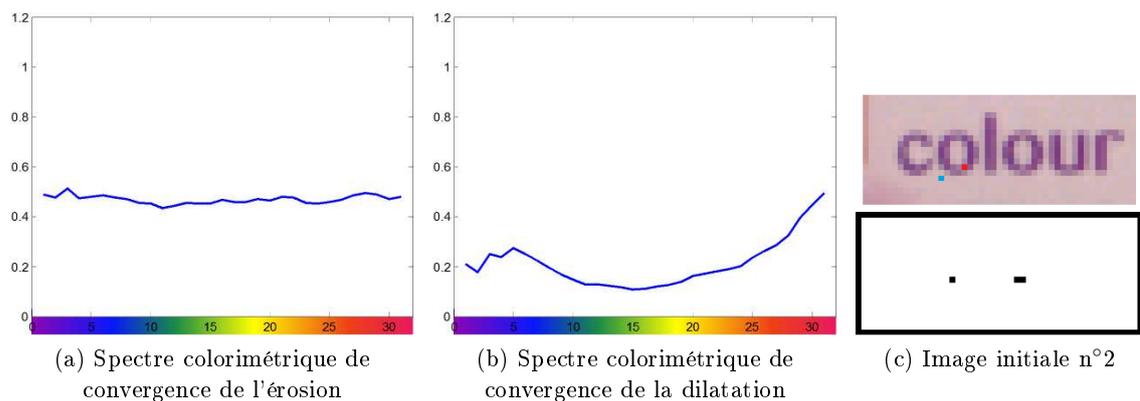


FIGURE 6.42 – Détection de la lettre *o*. Les coordonnées de convergence sont indiquées par un point bleu pour l'érosion et un point rouge pour la dilatation.

5. Un signal est convexe si et seulement si son ombre est un ensemble convexe. La définition d'une ombre se trouve dans l'article de Sternberg [126].

Détection de cellules mitotiques Dans la partie couleur, nous avons appliqué notre transformée CMOMP sur la base d'images « MITOS dataset » [131]. L'objectif est de détecter les cellules mitotiques dans des images de tissus de cancer du sein. Cette base est également composée des images acquises à l'aide d'un microscope multispectral. Cet appareil effectue des acquisitions sur 10 bandes spectrales dont certaines sont corrélées (figure 6.43). Afin d'obtenir un spectre caractérisant au mieux le spectre colorimétrique réel, nous choisissons d'utiliser uniquement les bandes spectrales n° 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 et 0.

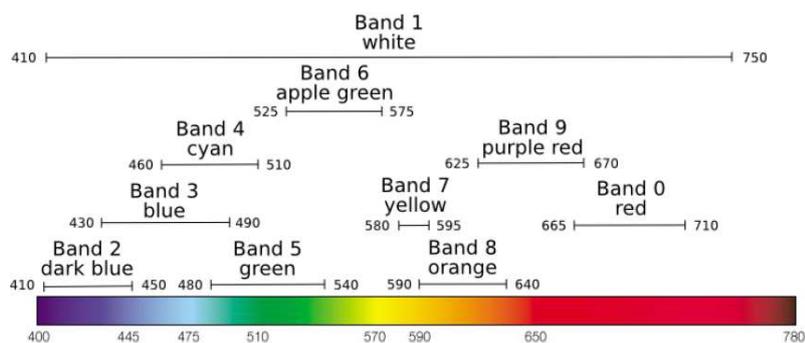


FIGURE 6.43 – Bandes spectrales acquises par le microscope.

Pour détecter les cellules mitotiques, nous utilisons les paramètres de la figure 6.44. Le gabarit utilisé est le même que dans le cas de la couleur tout comme le paramètre de sélectivité qui conserve la valeur de la moitié de la distance (euclidienne) entre les deux coordonnées de convergence. En revanche, la dimension des coordonnées de convergence s'adapte à la dimension des valeurs de l'image.

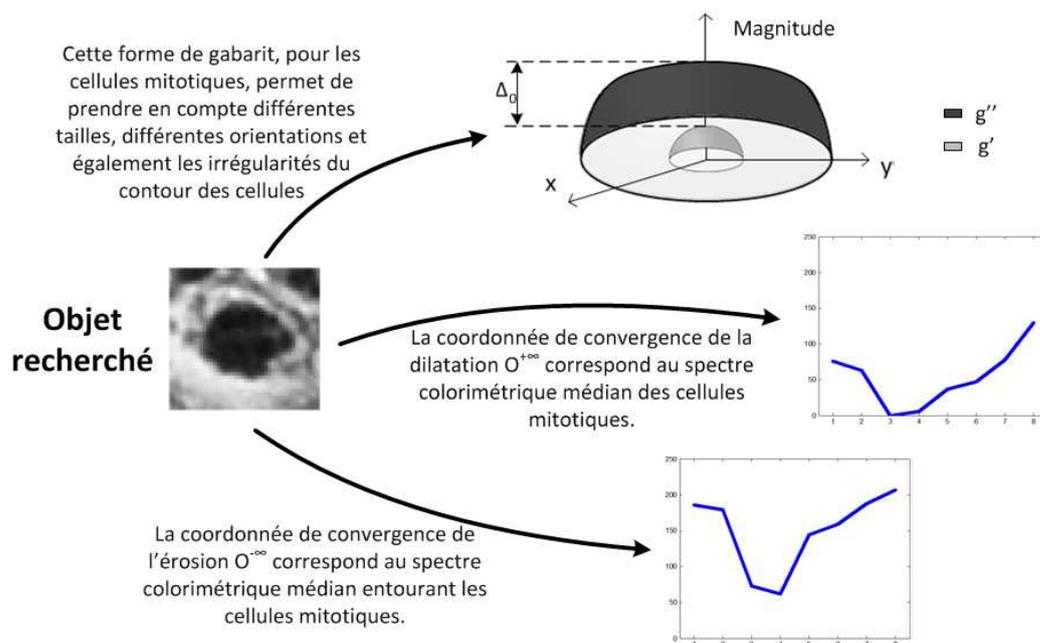


FIGURE 6.44 – Construction du gabarit multispectral pour la recherche de cellules mitotiques.

L'image 6.45 montre un premier résultat de détection de cellules mitotiques. Les opérateurs multispectraux développés dans le chapitre 4 n'étant pas validés, nous nous sommes limités dans cet exemple à vérifier la détection des cellules mitotiques dans une partie de l'image ne contenant qu'une seule cellule. Ce premier résultat montre néanmoins que notre détecteur est capable de s'adapter à un cas de détection réel dans un contexte multispectral.

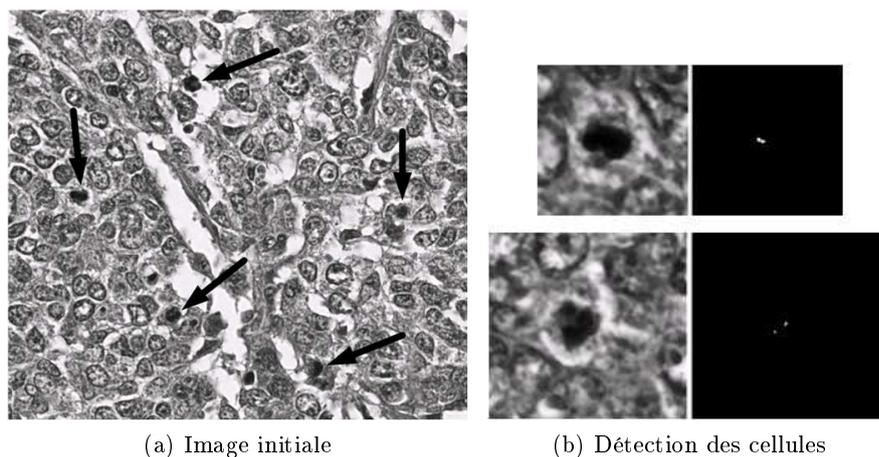


FIGURE 6.45 – Exemple de détection de cellules mitotiques.

6.4 Bilan

L'état de l'art des différentes transformées niveaux de gris en tout-ou-rien a mis en avant l'intérêt d'utiliser les éléments structurants non-plats. L'utilisation d'éléments structurants non-plats permet de détecter des objets pour lesquels le contraste couleur avec le fond est, soit connu par le biais d'exemples, soit défini par l'expertise humaine. De plus, l'utilisation de deux éléments structurants non-plats permet de construire un gabarit autorisant certaines variations entre l'objet recherché et les objets détectés, l'amplitude de ces variations étant encadrée par le paramètre de sélectivité.

La transformée MOMP de Barat [16] est ressortie comme ayant les meilleures capacités pour détecter des objets dans des images niveaux de gris. Elle est la seule méthode utilisant deux éléments structurants non-plats distincts en forme et en contraste permettant ainsi de contrôler séparément les différents types (forme et contraste) de variations entre les objets.

Pour étendre la transformée MOMP aux images couleur, nous utilisons la méthode de morphologie mathématique couleur CCMM permettant la définition d'éléments structurants non-plats (voir chapitre 2). Nous avons appelé cette nouvelle transformée « Color MOMP ».

La transformée « Color MOMP » est facilement paramétrable à l'aide de trois familles de paramètres agissant chacun séparément sur une variation donnée entre les objets détectés et l'objet recherché. Les formes des deux ESNP gèrent les différences spatiales. Le

paramètre de sélectivité gère l'écart de contraste couleur en agissant sur les amplitudes des ESNP. Enfin, les coordonnées de convergence déterminent l'orientation du contraste couleur ; elles sont choisies en fonction de la couleur de l'objet et de la couleur autour de l'objet.

La comparaison de la transformée « Color MOMP » avec les méthodes de la littérature montre également l'intérêt d'utiliser des éléments structurants non-plats pour les algorithmes couleur. L'écriture des méthodes de morphologie mathématique couleur, développées jusqu'à présent, contraignent les transformées couleur de la littérature à l'utilisation d'éléments structurants plats. Cette contrainte oblige les auteurs à trouver des solutions afin que leurs algorithmes autorisent des variations. Cependant, les différentes techniques utilisées augmentent le coût calculatoire de leur algorithme. De plus, le type de variations autorisées n'est pas contrôlé et relève en générale de l'heuristique.

Contrairement aux autres méthodes, la transformée « Color MOMP » est capable de sélectionner des formes différentes, de gérer la sélectivité et de choisir un contraste particulier en chaque pixel de l'objet à l'aide d'un unique gabarit.

La partie applicative montre que malgré la complexité des images utilisées dans le contexte de l'aide au diagnostic, l'utilisation de la transformée « Color MOMP » donne des premiers résultats satisfaisants.

Finalement, grâce à l'utilisation de l'écriture des opérateurs morphologiques multispectraux définis dans le chapitre 4, nous avons également montré les possibilités d'extension de l'opérateur MOMP au domaine multi/hyperspectral . Néanmoins cette extension dépend de l'aboutissement et de la validation de nos opérateurs multi/hyperspectraux, ce qui fait partie des perspectives naturelles de ce travail.

Conclusion et Perspectives générales

L'objectif de cette thèse était de se rapprocher du contexte métrologique dans la mise en œuvre d'opérateurs de traitement et d'analyse d'images. Ce rapprochement est lié à la capacité de mesurer l'écart entre la valeur obtenue par traitement avec celle obtenue théoriquement ou dans un cadre expérimental. Dès lors, nous avons défini que cette validation ne pouvait être réalisée que selon un sens perceptuel ou selon un sens physique de l'information couleur. En fonction de ces *a priori*, nous avons choisi de travailler dans le contexte de la morphologie mathématique en raison de la grande similarité de conception des espaces couleur, et des distances perceptuelles associées, avec les notions d'ordre requis par la morphologie mathématique.

Dans les domaines du binaire et des niveaux de gris, la morphologie mathématique dispose d'un important panel d'outils de traitement et d'analyse d'images. Cependant, son extension au domaine de la couleur ou du multi/hyperspectral n'est ni élémentaire, ni unique. Les possibilités d'ordonnements vectoriels combinés aux espaces couleur existants permettent d'engendrer une quasi infinité d'ordonnements couleur et un grand nombre d'auteurs ont proposé des méthodes dans le contexte de la morphologie mathématique. Néanmoins, leurs propositions sont focalisées sur la résolution mathématique du propos et ne prennent pas en compte le sens perceptuel ou physique de la couleur. De plus, les développements de la littérature se limitent à l'utilisation d'éléments structurants plats. Ce fait hérite des travaux de Shih et de Soille qui démontrent que les traitements avec éléments structurants plats sur les images binarisées obtenues après seuillage sur différents niveaux de gris donnent les mêmes résultats et sont moins coûteux qu'en utilisant des éléments structurants non-plats.

Au cours de cette thèse, il est également apparu que malgré le grand nombre d'approches développées depuis une vingtaine d'années, les critères utilisés pour évaluer et comparer les méthodes étaient majoritairement des critères visuels induisant des commentaires subjectifs sur les qualités d'une approche par rapport aux autres. Dans l'orientation métrologique que nous proposons, il nous semblait important que des critères de robustesse, de stabilité ou de précision soient établis.

Apports

Au cours de ce travail, nous avons analysé et commenté les principales approches de la littérature face à la prise en compte des particularités de l'information couleur, en particulier l'aspect perceptuel. Au final, nous pouvons conclure qu'en dehors des espaces et distances normalisées par la CIE, il est difficile de respecter l'aspect perceptuel de la couleur. Ce

constat a conduit à une nouvelle proposition d'ordonnement basée sur les fonctions de distance de la CIE. Cette méthode s'appuie également sur la notion de convergence des opérations morphologiques en utilisant des coordonnées de référence appelées coordonnées de convergence. Un des intérêts majeurs d'une construction basée sur une fonction de distance à une coordonnée de référence est d'être générique. Nous avons montré cette caractéristique avec l'extension de notre approche au cas des images multivaluées, en particulier des images spectrales. Cette extension permet de tendre vers des opérateurs dont il serait possible de valider le sens physique des traitements, en passant par les particularités énergétiques et fréquentielles de la couleur.

Lors du développement de notre nouvelle approche couleur, nous avons choisi de nous pencher sur la notion d'éléments structurants non-plats couleur. Pour les images niveaux de gris, si l'obtention de résultats identiques en passant par des traitements sur images binarisées est possible, en revanche la binarisation sur des images couleur est beaucoup plus difficile à atteindre et générerait des coûts combinatoires prohibitifs. Le développement d'éléments structurants non-plats couleur nécessite la spécification et la validation d'opérations d'addition et de soustraction couleur. Or, jusqu'à présent, il n'existait pas d'opérateurs d'addition ou de soustraction valides au sens de la perception ou de la physique de la couleur. Notre choix, face à ce manque, a été de nous appuyer sur le développement de nos opérateurs morphologiques et d'utiliser le principe de convergence. Ainsi, nous avons proposé une définition des opérations de soustraction et d'addition intégrant les particularités perceptuelles de la couleur.

Dès lors, il était intéressant de s'interroger sur l'apport des éléments structurants non-plats couleur face à la complexité de leur définition. Les différents outils issus de nos développements ont permis de confirmer cet intérêt lors du calcul d'attributs de textures et de la détection d'objets.

Jusqu'à présent, peu de travaux en morphologie couleur avaient abordé l'étude et l'analyse pleine bande des textures vectorielles, sans modification de l'espace de représentation des images nD pour le calcul des attributs vectoriels de textures (par l'intermédiaire d'ACP par exemple). Or, l'utilisation des opérateurs morphologiques et des éléments structurants non-plats que nous avons proposés dans ce travail, nous ont permis d'obtenir des spectres prenant en compte la complexité vectorielle de la texture. Nous avons également démontré le gain en exactitude (« précision ») lors de l'obtention de l'attribut « dimension fractale » face aux méthodes utilisant des éléments structurants plats.

Grâce aux éléments structurants non-plats couleur, nous avons parallèlement conçu pour la première fois un détecteur spatio-chromatique d'objets. Ce détecteur autorise la spécification simplifiée des objets recherchés par le biais d'un gabarit définissant le support spatial et le contraste vectoriel attendus. Les paramètres construisant le gabarit permettent de régler indépendamment les variations en forme et en contraste couleur autorisées entre l'objet recherché et les objets détectés. Plus intéressant, le formalisme générique basé sur une fonction de distance a permis l'extension directe au contexte spectral.

Afin de valider notre approche et de la comparer de manière objective aux méthodes de la littérature, nous avons proposé plusieurs critères de sélection. Nous avons classé ces

critères en trois familles afin de vérifier le respect des propriétés théoriques, des propriétés métrologiques et l'efficacité numérique des opérateurs.

La majorité des approches de la littérature respecte théoriquement la propriété de dualité. Néanmoins, cette propriété repose sur la définition même du complémentaire couleur. Or, dans la littérature, la construction mathématique ou numérique des opérateurs engendre une écriture du complémentaire couleur par une fonction miroir à la valeur maximale, loin des réalités perceptuelles ou physiques de la couleur. Ce type d'écriture marginale ne permet pas de valider théoriquement une propriété de dualité vectorielle. La conséquence directe est le non respect numérique de cette propriété, induisant les problèmes d'instabilités rencontrés dans des traitements de plus haut niveau. Face à ce problème, nous avons proposé une nouvelle définition du complémentaire couleur prenant en compte le sens perceptuel de la couleur en intégrant une fonction de distance perceptuelle. Nous avons ainsi démontré que nos opérateurs respectent théoriquement et numériquement les propriétés d'ordre total, tout en validant le sens perceptuel de la couleur.

Les deux dernières familles de critères sont liées. Elles font principalement ressortir les problèmes de non-linéarités des méthodes. Ces problèmes de non-linéarités que nous avons mis en avant lors de l'ordonnement de dégradés sont directement embarqués dans le calcul d'attributs de textures et provoquent des biais.

Finalement, les différents critères liés aux contraintes de notre contexte de travail ont mis en évidence que notre méthode de CCMM développée dans cette thèse est la plus adaptée.

Suites possibles de ce travail

De nombreuses questions découlent des propositions et choix effectués tout au long de cette thèse. Nous les organisons en cinq parties : celles liées à la construction d'un ordonnancement vectoriel valide perceptuellement ou physiquement, celles liées au basculement dans le domaine spectral, celles liées à la capacité des opérations mathématiques à prendre en compte l'information couleur, celles liées à la validation expérimentale et enfin une vaste question sur les possibilités de filtrage non-linéaire.

L'ordonnement vectoriel

La morphologie mathématique repose sur l'obtention d'un ordre total. Nous avons proposé une nouvelle approche fondée sur l'utilisation d'une fonction de distance. Notre approche est celle qui respecte le mieux la contrainte de linéarité de comportement perceptuel de la couleur. Néanmoins, il est possible d'écrire de nombreuses autres constructions basées sur ce principe.

Au delà de la construction de l'ordre, nous avons étudié l'impact de différentes fonctions de distance couleur et spectrales. Les travaux sur ces questions restent actifs, avec la recherche de métriques toujours plus sensibles aux faibles écarts couleur. Dans le contexte perceptuel, une des limites atteintes est liée à la fonction de distance utilisée. Même si les résultats sont intéressants et permettent déjà d'atteindre un certain niveau de « précision », les résultats obtenus sont limités par le fait que la distance perceptuelle utilisée a été va-

idée¹ pour la comparaison de motifs couleur unis de tailles égales à deux ou dix degrés d'angle visuel. La question de l'impact de la texture environnante, de la prise en compte du contexte local du pixel et du contexte global de l'image n'est pas intégrée. Les perspectives sur ces questions sont de considérer le point de vue développé au sein de la théorie des modèles d'apparence couleur notamment et de valider expérimentalement les nouvelles fonctions de distances qui en découleraient.

En parallèle, de nouveaux espaces ont été définis dans la littérature, tel que l'espace LMS. Cet espace est intéressant puisqu'il tente de reproduire les signaux reçus dans l'œil grâce aux trois types de cônes présents dans la rétine. Ces espaces nécessiteraient d'être explorés, néanmoins, des fonctions de distance adaptées à ces espaces seront nécessaires. Nos travaux peuvent permettre de valider certaines caractéristiques de ces distances.

L'extension au contexte spectral

L'extension de notre approche au contexte spectral réside dans la capacité à valider physiquement le propos dans un contexte d'énergie et de fréquence. Nous avons montré que l'extension au multi/hyperspectral était possible et permettait d'aboutir directement à des traitements pleine-bande pour obtenir des gradients vectoriels, des détecteurs d'objets ou des attributs spectraux de textures. Néanmoins, cette étude soulève un nombre important de questions.

La première question porte sur la complexité à ordonner des valeurs spectrales à l'aide de notre approche. L'extension du propos au contexte des images multi-valuées montre la généralité de notre approche, tout en dévoilant une limite liée à l'exploitation de la fonction de distance. Afin d'assurer théoriquement l'unicité de l'extremum, la distance aux coordonnées de convergence est requise, mais celle-ci n'est pas suffisante et par conséquent d'autres coordonnées de référence sont nécessaires. Pour une image composée de n canaux, l'écriture aboutit ainsi théoriquement à $n + 2$ intersections d'ensembles. Une analyse du problème permet d'aboutir à une conjecture induisant qu'une telle complexité n'est sans doute pas nécessaire. Néanmoins, elle ne permet pas de définir pour le moment la construction optimale, les résultats actuels indiquent que le premier niveau serait suffisant mais aucune validation théorique ou numérique ne vient corroborer ce fait.

La seconde question est liée à la définition d'un complémentaire spectral. Pour appliquer nos opérateurs, nous avons défini un complémentaire couleur à partir d'additions/soustractions en utilisant la distance. Pour les valeurs spectrales, plusieurs pistes sont possibles pour exprimer un complémentaire. Les notions d'addition ou de soustraction d'énergie sont une des solutions possibles, intégrant ainsi correctement le sens physique de la couleur.

Opérations mathématiques valides dans le domaine de la couleur

La définition des éléments structurants non-plats, ainsi que la recherche d'attributs vectoriels de textures ont mis en évidence le manque d'opérations mathématiques couleur valides ou standards. Dans cette thèse, nous avons proposé des opérateurs réduits d'addition

1. La distance perceptuelle est validée par la Commission Internationale de l'Éclairage.

et de soustraction et également donné quelques pistes pour l'établissement de l'intégrale de surface d'une image couleur. Néanmoins, les définitions de tels opérateurs sont à affiner.

Les opérations de soustraction et d'addition peuvent utiliser différentes fonctions de distance mais également s'adapter à une future approche morphologique dans l'objectif de s'approcher au mieux du sens perceptuel ou physique de la couleur.

L'intégrale de surface est l'opération qui ouvre le plus de questions. La surface d'une image couleur ou spectrale s'exprime dans un espace avec deux types de dimensions, les dimensions spatiales qui sont la position du pixel dans l'image et les dimensions correspondant à l'information couleur ou spectrale. Le choix du poids régissant l'influence de l'information spatiale face à l'information colorimétrique reste à étudier. Le choix sur la division de la surface est important, cette division caractérise l'unité de mesure permettant d'obtenir l'aire. Nous pouvons également parler du produit scalaire utilisé dont le sens perceptuel ou physique de la couleur reste à vérifier dans son expression angulaire (et distance selon le contexte).

Validations expérimentales

Dans ce travail, il était envisagé de développer des expérimentations permettant de valider une partie des résultats. Face au besoin de justifier une nouvelle construction morphologique et la prise de position sur la contrainte perceptuelle, nous avons choisi de développer des critères de comparaison et des opérateurs de haut niveau démontrant l'intérêt de l'approche. Néanmoins, la validation par des expérimentations psychovisuelles pour les aspects perceptuels et des expérimentations physiques pour les aspects spectraux complèteraient les critères de comparaison. Ce travail permettrait également de développer ou de valider une fonction de distance prenant en compte les particularités physiques de la couleur afin d'obtenir une fonction de distance normalisée dans le domaine spectral.

Le travail sur la notion de textures vectorielles ou spectrales induit lui aussi de nombreuses questions essentielles pour progresser sur le développement et la validation d'attributs efficaces pour les traitements. Même si les résultats sur la base OUTEX ne sont pas probants, notamment parce que l'information couleur n'est pas essentielle dans les tâches de classification proposées, le traitement vectoriel montre un fort potentiel. Persévérer sur ce travail avec d'autres bases d'images et d'autres tâches de classification devraient permettre d'affiner ce potentiel. Il pourrait également être intéressant de construire de nouvelles bases d'images couleur et spectrales pour lesquelles les conditions d'acquisitions mais également les informations physiques et/ou perceptuelles des textures seraient fournies.

La morphologie mathématique couleur et le filtrage

Pour terminer, l'introduction d'éléments structurants non-plats pose des questions sur les ouvertures apportées par l'usage de ces éléments comme filtres non-linéaires en complément des filtres de rang. Alors que le développement de filtres linéaires n'est pas sans poser de nombreux problèmes de complexité, celui des filtres non-linéaires est direct comme le montre le travail sur la transformation CMOMP ou la signature fractale. Ce dernier point n'a jamais été exploré dans le domaine de la couleur et donne lieu à de nombreuses perspectives.

Publications

Articles dans une revue internationale avec comité de lecture

A. Ledoux, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé, C. Fernandez-Maloigne (2013). *Perceptual color hit-or-miss transform : application to dermatological image processing*. Signal, Image and Video Processing (SIVP), Springer, p.1-11

A. Ledoux, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé, M. Ivanovici, C. Fernandez-Maloigne (2013) *Which criteria for choosing the correct ordering for Color Mathematical Morphology?*. Pattern Recognition, soumis.

Chapitre de livre

A. Ledoux, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé (2012). *Limitations et comparaisons d'ordonnement utilisant des distances couleur*. Chapitre 2, Livre « De la perception à l'analyse numérique de la couleur », sous la direction de F. Ghorbel, F. Chaeib, E. Zagrouba, éditions arts-II, p. 67-98.

Articles dans une revue nationale avec comité de lecture

A. Ledoux, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé (2012). *Limitations et comparaisons d'ordonnement utilisant des distances couleur*. Traitement du Signal (TS), Lavoisier, vol. 29, p. 65-82.

Conférences internationales avec comité de lecture

A. Ledoux, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé (2011). *Limitations et comparaisons d'ordonnement utilisant des distances couleur*. Atelier Traitement et Analyse des Images, Méthodes et Applications (TAIMA). **Article sélectionné comme meilleur papier lors de la conférence TAIMA pour une version étendue dans la revue Traitement du Signal (TS) et en tant que chapitre de livre.**

A. Ledoux, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé (2012). *The fractal estimator : A validation criterion for the colour mathematical morphology*. Proceedings of the 6th European Conference on Colour in Graphics, Imaging and Vision (CGIV), p. 206-210.

A. Ledoux, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé, C. Fernandez-Maloigne (2012). *Color Hit-or-Miss Transform on Dermatological Image*. Twentieth Color and Imaging Conference (CIC), p. 164-169.

A. Ledoux, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé (2012). *Color Hit-or-Miss Transform (CMOMP)*. 20th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), p. 2048-2052.

A. Ledoux, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé, C. Fernandez-Maloigne (2013). *Colour Pattern Detection : Evaluation from the Mitosis detection contest in histological images*. Color and Imaging Conference (CIC).

A. Ledoux, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé (2013). *How to specify or identify the most accurate multispectral distance function for mathematical morphology?* Colour and Visual Computing Symposium (CVCS).

A. Ledoux, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé (2013). *Mitosis extraction with a new color object detector*. Atelier Traitement et Analyse des Images, Méthodes et Applications (TAIMA). *Article sélectionné pour soumission d'une version étendue dans la revue Ingénierie et Recherche BioMédicale (IRBM)*.

N. Richard, **A. Ledoux**, A.S. Capelle-Laizé, C. Fernandez-Maloigne (2013). *Toward a Valid Image Processing System Through Colour Standards*. CIE Midterm and Centenary Conference.

R. Goutali, N. Richard, **A. Ledoux**, N. Ellouze (2013). *Problématique de l'idempotence pour les images couleurs et multi-valuées*. Atelier Traitement et Analyse des Images, Méthodes et Applications (TAIMA).

M. Rodriguez, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé, **A. Ledoux** (2013). *Renormalisation couleur d'une image de peau pour l'imagerie dermatologique*. Atelier Traitement et Analyse des Images, Méthodes et Applications (TAIMA).

Congrès nationaux à comité de lecture

A. Ledoux, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé, C. Fernandez-Maloigne (2011). *Validation et limitation de métriques couleur pour l'ordonnancement*. GRETSI.

A. Ledoux, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé, C. Fernandez-Maloigne (2013). *Nouveau détecteur d'objets couleur et nD, application à l'extraction de cellules mitotiques*. GRETSI.

Communication à des journées thématiques nationales

A. Ledoux, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé (2011). *Comment valider une méthode de morphologie mathématique couleur ?*. GDR ISIS : Thème B - Image et Vision, Journée « Analyse d'images couleur et multispectrales en biologie et médecine ».

A. Ledoux, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé (2012). *Construction d'une morphologie mathématique multispectrale basée distance*. GDR ISIS : Thème B - Image et Vision, Journée « Imagerie multi/ hyperspectrale : problématiques et nouveaux domaines d'applications ».

A. Ledoux, N. Richard, A.S. Capelle-Laizé (2013). *Problème du choix de la distance pour la morphologie mathématique multispectrale basée distance*. GDR ISIS : Thème B - Image et Vision, Journée « Modélisation et similarités des images Multicomposantes, outils mathématiques et perceptuels ».

Fondement de la morphologie mathématique

Sommaire

A.1 Fondements de la Morphologie Mathématique	i
A.1.1 Morphologie mathématique binaire	i
A.1.1.1 Érosion et dilatation	iii
A.1.1.2 Ouverture et fermeture	iv
A.1.2 Morphologie mathématique en niveaux de gris	v
A.1.2.1 Érosion et dilatation en niveaux de gris	vi
A.1.2.2 Ouverture et fermeture	x
A.2 Propriétés des opérateurs binaires	xii
A.2.1 Propriétés de la dilatation et de l'érosion	xii
A.2.2 Propriétés de l'ouverture et de la fermeture	xiv
A.2.2.1 Croissance	xiv
A.2.2.2 Extensivité	xv
A.2.2.3 Dualité	xv
A.2.2.4 Idempotence	xvi
A.3 Propriétés des opérateurs niveaux de gris	xviii
A.3.1 Dualité	xviii
A.3.1.1 Dilatation/érosion	xviii
A.3.1.2 Ouverture/fermeture	xix
A.3.2 Idempotence	xix

Dans cette annexe, nous rapellons les définitions et les propriétés des opérateurs morphologiques. Nous commençons par l'application aux signaux binaires puis niveaux de gris.

A.1 Fondements de la Morphologie Mathématique

A.1.1 Morphologie mathématique binaire

Pour la morphologie mathématique appliquée aux images binaires, les ensembles appartiennent à \mathbb{Z}^3 . Chaque élément d'une image (pixel) est un vecteur 2D dont les coordonnées sont l'abscisse et l'ordonnée de l'élément dans son domaine spatial et sa valeur binaire. La valeur binaire d'un pixel détermine son appartenance à l'objet. Par convention un élément appartenant à l'objet prendra la valeur de '1' sinon il prendra la valeur de '0'. Lorsqu'un élément appartient à l'objet, il fait partie de son domaine de définition spatial, par exemple

pour l'ensemble F son domaine de définition spatial est D_F

Avant de définir les principaux opérateurs de la morphologie mathématique que sont l'érosion et la dilatation, nous allons revenir sur les définitions d'opérations ensemblistes de base.

Union et intersection : Ces deux opérations sont respectivement définies par :

$$F \cup G = \{x | x \in D_F \text{ ou } x \in D_G\} \quad (\text{A.1})$$

$$F \cap G = \{x | x \in D_F \text{ et } x \in D_G\} \quad (\text{A.2})$$

Translation : La translation d'un ensemble F par un vecteur y , notée F_y , est l'opération suivante :

$$F_y(x) = F(x - y) \quad (\text{A.3})$$

Complémentaire : Le complémentaire d'un ensemble F , noté F^c , est l'ensemble contenant tous les éléments n'appartenant pas à F :

$$F^c(x) = \{x | x \notin D_F\} \quad (\text{A.4})$$

Symétrique ou réfléchi : Le symétrique d'un ensemble F , noté F^r , est l'ensemble ayant subi une rotation autour de son origine de 180° (Figure A.1) :

$$F^r(x) = F(-x) \quad (\text{A.5})$$

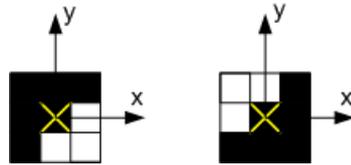


FIGURE A.1 – À gauche un ensemble F et à droite son symétrique F^r

Opérations de Minkowski : Les opérations de Minkowski sont l'addition et la soustraction d'ensembles développées par Minkowski [89, 49]. L'addition de Minkowski est l'union de toutes les translations de F par les éléments de G . En binaire, elle s'écrit :

$$F \oplus_b G = \{x + y | x \in D_F, y \in D_G\} \quad (\text{A.6})$$

$$= \bigcup_{y \in G} F_y \quad (\text{A.7})$$

La soustraction de Minkowski est l'intersection de toutes les translations de F par les éléments de G :

$$F \ominus_b G = \{x - y | x \in D_F, y \in D_G\} \quad (\text{A.8})$$

$$= \bigcap_{y \in G} F_y \quad (\text{A.9})$$

A.1.1.1 Érosion et dilatation

Les opérations de bases de la morphologie mathématiques sont l'érosion ε et la dilatation δ développées par Matheron et Serra [87, 115]. Elles nécessitent la définition d'un sous-ensemble \mathbb{Z}^2 appelé élément structurant et que nous noterons G . Les éléments qui le composent ont une valeur de '1', ils appartiennent au support spatial D_G de l'élément structurant. L'élément structurant est repéré par son origine (qu'il peut contenir ou non). Il peut posséder différentes formes et tailles. La figure A.2 présente quelques exemples d'éléments structurants binaires possibles.

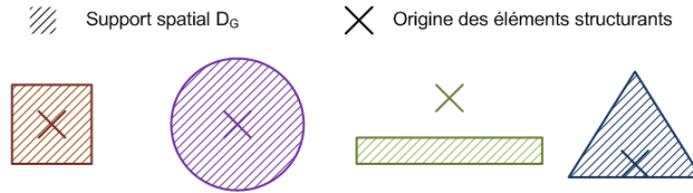


FIGURE A.2 – Exemples d'éléments structurants binaires

L'érosion est définie comme l'intersection de l'ensemble de toutes les translations de F par les éléments de G :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_b(F, G) &= \{x + y | \forall y \in D_G, x + y \in D_F\} \\
&= \{x | F_y \subset F, x \in D_F, y \in D_G\} \\
&= \bigcap_{y \in D_G} F_{-y}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

La dilatation est définie comme l'union des translations de F par les éléments de G :

$$\begin{aligned}
\delta_b(F, G) &= \{x + y | x \in D_F, y \in D_G\} \\
&= \{x | F_y \cap F \neq \emptyset, x \in D_F, y \in D_G\} \\
&= \bigcup_{y \in D_G} F_{-y}
\end{aligned} \tag{A.11}$$

La figure A.3 illustre bien l'augmentation de la surface de l'objet après application d'une dilatation et la diminution de la surface après application d'une érosion.

Relation avec les opérations de Minkowski : Les opérations de Minkowski et les opérations de dilatation et d'érosion sont différentes. Toutefois, il est possible d'exprimer l'érosion et la dilatation à partir des opérations de Minkowski. Dans ce cas, l'écriture fait appel à l'élément structurant symétrique G^r comme le montre la formule A.12. Ce jeu d'écriture est illustré par les figures A.4 et A.5.

$$\begin{aligned}
\delta_b(f, g) &= f \oplus_b g^r \\
\varepsilon_b(f, g) &= f \ominus_b g^r
\end{aligned} \tag{A.12}$$

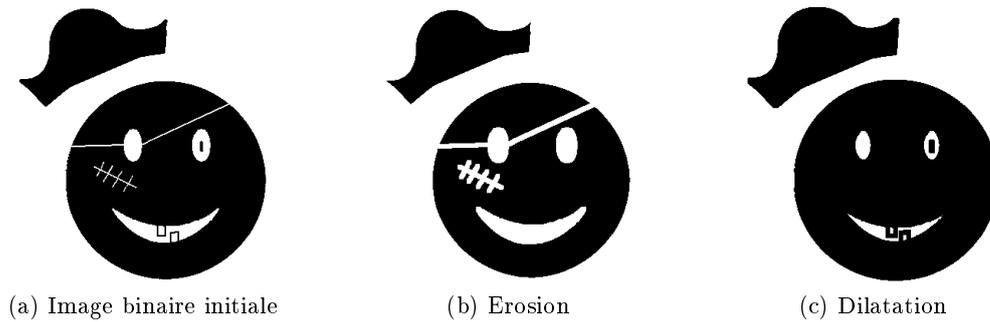


FIGURE A.3 – Erosion et dilatation d’une image binaire par un élément structurant carré 5×5 pixels. Pour plus de lisibilité, le noir représente les pixels ayant une valeurs de '1'.

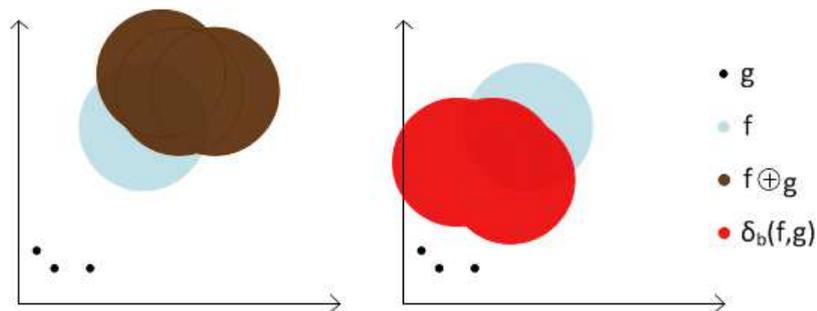


FIGURE A.4 – Illustration de la différence entre l’addition de Minkowski et la dilatation

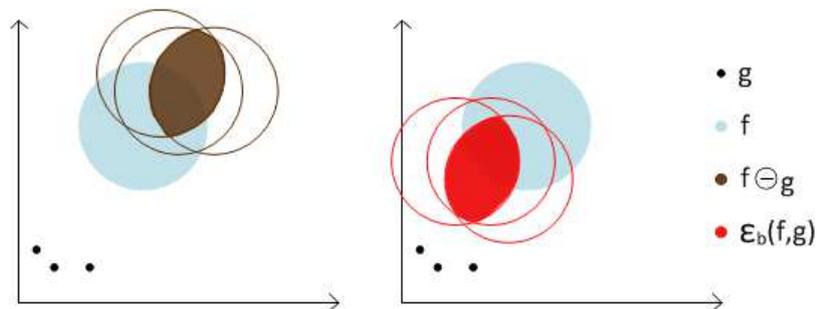


FIGURE A.5 – Illustration de la différence entre la soustraction de Minkowski et l’érosion

A.1.1.2 Ouverture et fermeture

À partir de ces opérations de base de la morphologie, deux autres opérateurs combinant la dilatation et l’érosion peuvent être construits. Les opérateurs d’ouverture, réciproquement de fermeture, sont définis comme la succession d’une dilatation et d’une érosion, réciproquement par la succession d’une érosion et d’une dilatation. En traitement d’images, l’intérêt de tels opérateurs est en particulier d’éliminer des détails d’une image plus petits que l’élément structurant.

L’ouverture d’une image F par un élément structurant G se note par $\gamma_b(F, G)$ et est

définie de la manière suivante :

$$\gamma_b(F, G) = \delta_b(\varepsilon_b(F, G), G^r) \quad (\text{A.13})$$

L'ouverture supprime toutes les régions d'un ensemble qui sont trop petites pour contenir l'élément structurant. Cela revient généralement à adoucir les contours d'un objet, ou à éliminer les petites composantes connexes. La figure A.6b montre les effets d'une ouverture par un élément structurant carré de dimension 5×5 pixels. L'œil et les dents qui sont des éléments plus petit que l'élément structurant et qui appartiennent à l'ensemble sont supprimés.

La fermeture d'une image F par un élément structurant G , notée $\varphi_b(F, G)$, est définie de la manière suivante :

$$\varphi_b(F, G) = \varepsilon_b(\delta_b(F, G), G^r) \quad (\text{A.14})$$

La fermeture tend à éliminer les trous plus petits que l'élément structurant et à souder les formes très proches. La figure A.6c montre les effets de cette opération par un élément structurant carré de taille 5×5 pixels. La cicatrice et l'attache du cache œil, qui sont des éléments qui n'appartiennent pas à l'ensemble et qui sont plus petit que l'élément structurant, sont supprimées.

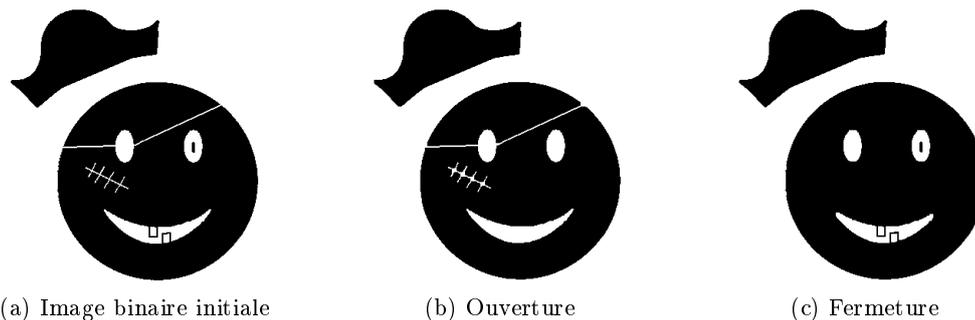


FIGURE A.6 – Ouverture et fermeture d'une image binaire par un élément structurant carré 5×5 pixels. Pour plus de lisibilité, le noir représente les pixels ayant une valeurs de '1'.

A.1.2 Morphologie mathématique en niveaux de gris

Dans cette partie les opérateurs de base de la morphologie, la dilatation et l'érosion, sont étendus aux images niveaux de gris. Dans ce contexte, les éléments sont des vecteurs 3D appartenant à \mathbb{Z}^3 . Deux des coordonnées correspondent toujours à la position du pixel dans l'image et la troisième est la valeur de niveaux de gris du pixel. L'image est notée f et son support spatial D_f

Les définitions de la translation et du symétrique sont les mêmes pour les fonctions en niveaux de gris puisque ces opérations modifient seulement l'aspect spatial des fonctions. Par contre, le complémentaire doit être redéfini puisqu'il modifie la valeur du pixel. L'élément structurant doit également être redéfini pour être appliqué aux images niveaux de gris.

Le complémentaire : Dans la littérature, plusieurs écritures du complémentaire sont proposées. La première détermine le complémentaire comme la différence entre le maximum et la valeur de niveaux de gris (équation A.15). Cette écriture est la plus couramment utilisée lorsque la donnée à traiter est une image. Elle permet de conserver le même intervalle de valeurs, afin de pouvoir afficher le résultat. La seconde écriture est l’opposée de la valeur de niveaux de gris (équation A.16) qui est utilisée pour des fonctions quelconques. Ces deux écritures sont extraites de différents ouvrages ([115], p.430 ; [123], p.27 ; [121], p.32) et sont écrites avec les notations utilisées dans cette thèse.

$$f^{c1} = \{m - f(x) | x \in \mathcal{D}_f\}, \quad m = \vee(f) \quad (\text{A.15})$$

$$f^{c2} = \{-f(x) | x \in \mathcal{D}_f\} \quad (\text{A.16})$$

Élément structurant : Dans la littérature, deux types d’éléments structurants sont possibles pour les images niveaux de gris : plats et non plats. L’élément structurant plat (ESP) est le plus utilisé, sa matrice est binaire, les éléments appartenant au support spatial D_g de l’élément structurant g ont une valeur de ‘0’, les autres éléments ont une valeur de $-\infty$ [136] (équation A.17, figure A.7a).

$$g(y) = \begin{cases} y \in D_g & \Rightarrow g(y) = 0 \\ y \notin D_g & \Rightarrow g(y) = -\infty \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

L’élément structurant non plat (ESNP), appelé aussi élément structurant volumique, peut quant à lui prendre des valeurs réelles finies différentes de ‘0’ (équation A.18, figure A.7b). Néanmoins dans le contexte de l’image les valeurs prises appartiennent à l’ensemble \mathbb{Z} .

$$g(y) = \begin{cases} y \in D_g & \Rightarrow g(y) \neq \pm\infty, \quad g(y) \in \mathbb{Z} \\ y \notin D_g & \Rightarrow g(y) = -\infty \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

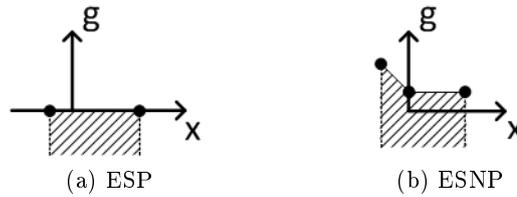


FIGURE A.7 – Exemple d’élément structurant plat et non plat.

A.1.2.1 Érosion et dilatation en niveaux de gris

Dans la littérature plusieurs approches ont été développées pour obtenir les opérateurs d’érosion et de dilatation adaptés aux images en niveaux de gris. Les écritures en niveaux de gris des opérateurs sont obtenues soit par l’utilisation d’“ombre” de fonction [126] soit par l’utilisation de “graphe” [58]. Quelque soit la méthode de calcul de l’érosion (ombre ou graphe), l’ensemble des auteurs se retrouvent sur l’écriture de l’érosion. Ce qui n’est pas le

cas concernant la dilatation. La différence se trouve dans l'utilisation de l'élément structurant symétrique.

L'extension en niveaux de gris peut également se faire en utilisant les deux types d'éléments structurants du paragraphe A.1.2. Ces deux extensions sont expliquées dans les deux prochains paragraphes.

Érosion et dilatation avec élément structurant plat L'extension des opérateurs d'érosion et de dilatation en utilisant un élément structurant plat se fait naturellement en remplaçant dans les définitions tous les concepts ensemblistes par leurs équivalents fonctionnels :

$$\begin{aligned} \cap &\Rightarrow \wedge (\text{min}) & ; & \cup &\Rightarrow \vee (\text{max}) & \quad (\text{A.19}) \\ \subset &\Rightarrow \leq (\text{inférieur ou égal}) & ; & \supset &\Rightarrow \geq (\text{supérieur ou égal}) \end{aligned}$$

Ainsi, les écritures de dilatation et d'érosion pour les images en niveaux de gris sont :

$$\varepsilon_n(f, g) = \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_{g^r}} f(x - y) = \bigwedge_{x \in D_f, -y \in D_g} f(x - y) = \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} f(x + y) \quad (\text{A.20})$$

$$\delta_n(f, g) = \bigvee_{x \in D_f, y \in D_{g^r}} f(x - y) = \bigvee_{x \in D_f, -y \in D_g} f(x - y) = \bigvee_{x \in D_f, y \in D_g} f(x + y) \quad (\text{A.21})$$

Les figures A.8 et A.9 sont des exemples d'érosion et de dilatation sur une fonction 1D avec un élément structurant plat. Lors de l'érosion la fonction diminue et toute la fonction est égale à son minimum après un nombre d'itérations suffisant. Lors de la dilatation la fonction augmente et toute la fonction est égale à son maximum après un nombre d'itérations suffisant.

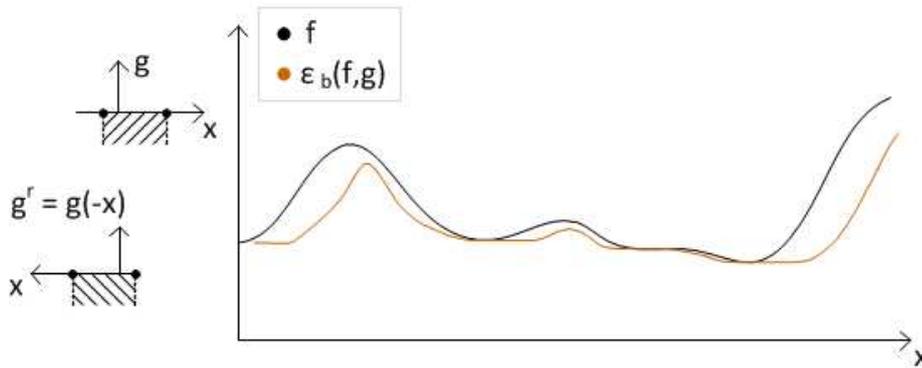


FIGURE A.8 – Erosion d'une fonction 1D avec un élément structurant plat.

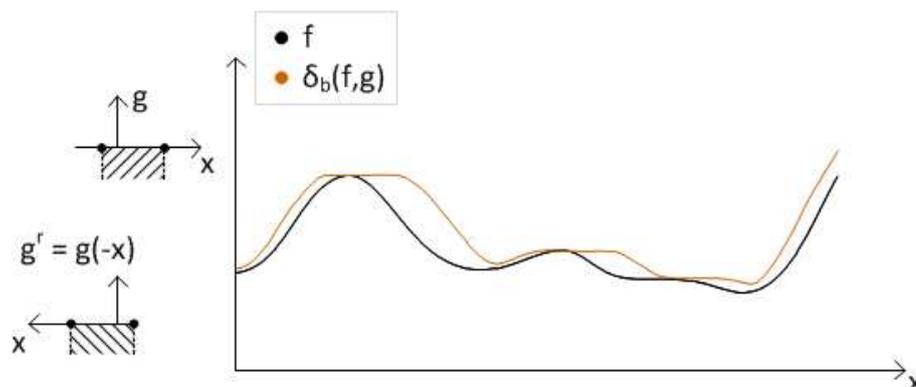
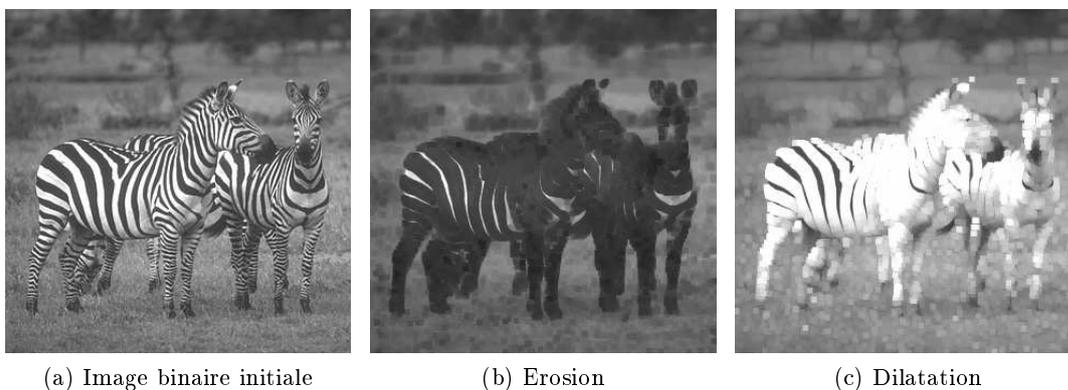


FIGURE A.9 – Dilatation d'une fonction 1D avec un élément structurant plat.

La figure A.10 est un exemple d'érosion et de dilatation utilisant un élément structurant plat carré de taille 5×5 pixels sur une image niveaux de gris. Toutes les parties sombres de l'image s'étendent lors de l'érosion, tandis que les parties claires de l'image s'étendent lors de la dilatation. Au bout d'un nombre d'itération suffisant, l'image aura un seul niveau de gris qui sera le niveau de gris minimum (réciproquement le maximum) de l'image pour l'érosion (réciproquement la dilatation).



(a) Image binaire initiale

(b) Érosion

(c) Dilatation

FIGURE A.10 – Érosion et dilatation d'une image niveaux de gris par un élément structurant plat carré de taille 5×5 pixels.

Érosion et dilatation avec élément structurant non plat L'extension des opérateurs d'érosion et de dilatation en utilisant un élément structurant non-plat est plus complexe. La méthode choisie est l'utilisation des écritures des opérateurs de soustraction et d'addition de Minkowski étendues aux image en niveaux de gris (équations A.22 et A.23).

$$(f \ominus g)_n(x) = \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} \{f(x) - g(y - x)\} \quad (\text{A.22})$$

$$(f \oplus g)_n(x) = \bigvee_{x \in D_f, y \in D_g} \{f(x) + g(y - x)\} \quad (\text{A.23})$$

La différence entre les opérateurs de Minkowski et les opérateurs de la morphologie mathématique se trouve dans l'utilisation de l'élément structurant symétrique. Ainsi pour obtenir les opérateurs d'érosion et de dilatation, il suffit de remplacer l'élément structurant par son symétrique. Les définitions de l'érosion et la dilatation sont les suivantes :

$$\varepsilon_n(f, g)(x) = \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x) - g(-(y - x))) = \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x + y) - g(y)) \quad (\text{A.24})$$

$$\delta_n(f, g)(x) = \bigvee_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x) + g(-(y - x))) = \bigvee_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x + y) + g(y)) \quad (\text{A.25})$$

Les figures A.11 et A.12 sont des exemples d'érosion et de dilatation sur une fonction 1D avec un élément structurant non-plat. Lors de l'érosion la fonction diminue et contrairement à l'érosion avec élément structurant plat, la fonction continue à diminuer tout au long des itérations si les valeurs de l'élément structurant sont positive. Lors de la dilatation la fonction augmente et contrairement à la dilatation avec élément structurant plat, la fonction continue à augmenter tout au long des itérations si les valeurs de l'élément structurant sont positives.

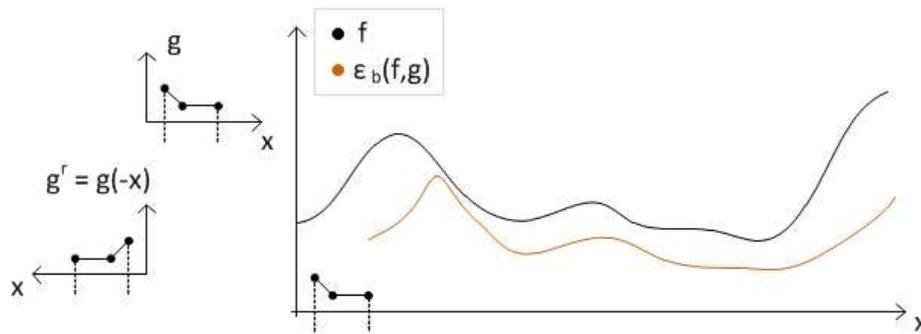


FIGURE A.11 – Érosion d'une fonction 1D avec un élément structurant non plat.

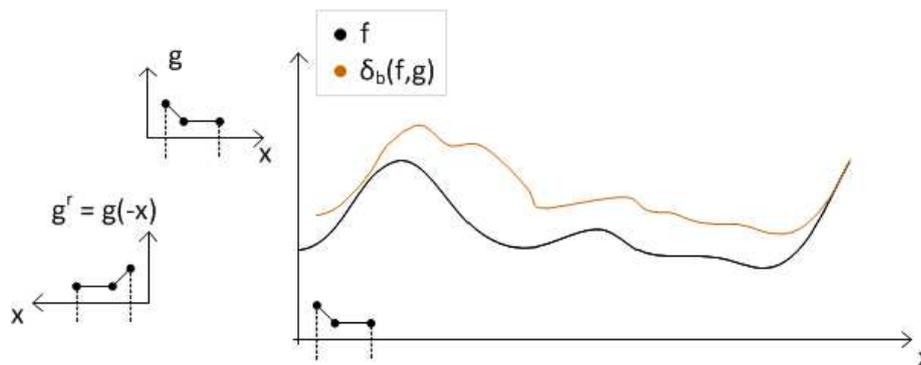


FIGURE A.12 – Dilatation d'une fonction 1D avec un élément structurant non plat.

La figure A.13 est un exemple d'érosion et de dilatation utilisant un élément structurant non-plat carré de taille 5×5 pixels (équation 2.39) sur une image niveaux de gris. Toutes

les parties sombres de l'image s'étendent lors de l'érosion, tandis que les parties claires de l'image s'étendent lors de la dilatation. Cependant contrairement à la dilatation et à l'érosion avec élément structurant plat, l'utilisation d'élément structurant non-plat permet de donner un poids particulier aux pixels. L'impact des poids peut être observé en comparant les figures A.10b et A.13b. Avec l'élément structurant plat, l'image devient de plus en plus uniforme, tandis qu'avec l'élément structurant non-plat, les détails sont mieux conservés. La seconde différence se trouve dans la convergence des couleurs de l'image. Même au bout d'un nombre d'itération tendant vers l'infini, l'image ne converge pas vers une image contenant un seul niveau de gris, lorsque les valeurs de l'élément structurant sont positives, mais à chaque itération les niveaux de gris convergent vers la valeur $-\infty$ (réciproquement $+\infty$) pour l'érosion (réciproquement pour la dilatation).

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

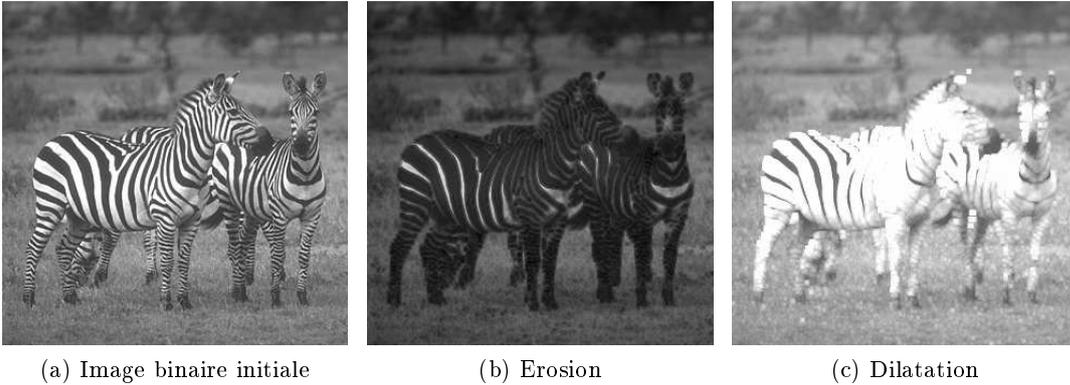


FIGURE A.13 – Erosion et dilatation d'une image niveaux de gris par un élément structurant non-plat carré de taille 5×5 pixels (équation 2.39).

A.1.2.2 Ouverture et fermeture

Les opérations d'ouverture et de fermeture pour les images niveaux de gris sont la succession d'une dilatation et d'une érosion ou inversement (équation A.27 et A.28). Les effets des opérateurs niveaux de gris sont un peu différents. L'ouverture et la fermeture homogénéisent l'image en supprimant les détails lumineux ou sombres. Si l'image est vue comme une surface où le blanc est considéré comme l'altitude la plus élevée, les opérateurs suppriment toutes les aspérités plus petites que l'élément structurant. L'ouverture supprime tous les crêtes, elle assombrit donc l'image (Figure A.14b), tandis que la fermeture supprime

toutes les vallées, elle éclaircit donc l'image (Figure A.14c).

$$\gamma_{\mathbf{g}}(f, g) = \delta_{\mathbf{g}}(\varepsilon_{\mathbf{g}}(f, g), g^T) \quad (\text{A.27})$$

$$\varphi_{\mathbf{g}}(f, g) = \varepsilon_{\mathbf{g}}(\delta_{\mathbf{g}}(f, g), g^T) \quad (\text{A.28})$$



(a) Image initiale

(b) Ouverture

(c) Fermeture

FIGURE A.14 – Résultat de l'ouverture et de la fermeture niveaux de gris. L'élément structurant utilisé est de forme carrée et de taille 5×5 .

A.2 Propriétés des opérateurs binaires

Soient F, G, H, O des sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 .

A.2.1 Propriétés de la dilatation et de l'érosion

Propriétés de la dilatation

1. Extensivité : Une transformation \mathfrak{T} est extensive si son résultat $\mathfrak{T}(F)$ contient l'original, c'est-à-dire si $F \subseteq \mathfrak{T}(F)$.

Si l'élément structurant G contient l'origine du repère alors la dilatation est extensive :

$$F \subseteq \delta_b(F, G)$$

Pour une image, cette propriété signifie que si une dilatation est appliquée, alors l'objet résultat contient l'objet initial.

2. Commutativité : $\delta_b(F, G) = \delta_b(G, F)$;
3. Associativité : $\delta_b(\delta_b(F, G), H) = \delta_b(F, \delta_b(G, H))$
4. Invariance en translation : $\delta_b(F_z, G) = \delta_b(F, G)_z$; $\delta_b(F_z, G_{-z}) = \delta_b(F, G)$
5. Croissance : Une fonction croissante \mathfrak{T} d'un ensemble ordonné dans un ensemble ordonné est une fonction qui conserve l'ordre, c'est-à-dire pour deux ensemble F et H tel que $F \subseteq H$ l'application de la fonction \mathfrak{T} conserve l'ordre :

$$\forall F, H, F \subseteq H \leftarrow \mathfrak{T}(F) \subseteq \mathfrak{T}(H)$$

Appliqué à la dilatation : $F \subseteq H$, alors $\delta_b(F, G) \subseteq \delta_b(H, G)$

Pour une image, si un objet est inclus dans un second alors le résultat de la dilatation du premier sera inclus dans le résultat de la dilatation du second.

6. $\delta_b((F \cap G), H) \subseteq \delta_b(F, H) \cap \delta_b(G, H)$
7. Distributivité par rapport à l'union : $\delta_b((F \cup G), H) = \delta_b(F, H) \cup \delta_b(G, H)$

Propriétés de l'érosion

1. Anti-extensivité : Une transformation \mathfrak{T} est anti-extensive si son résultat $\mathfrak{T}(F)$ est plus petit que l'original, c'est-à-dire si $\mathfrak{T}(F) \subseteq F$.

Si G contient l'origine du repère alors l'érosion est anti-extensive :

$$\varepsilon_b(F, G) \subseteq F$$

Pour une image, cette propriété signifie que si une érosion est appliquée, alors l'objet initial contient l'objet résultat.

2. Invariance en translation : $\varepsilon_b(F_x, G) = \varepsilon_b(F, G)_x$
3. Croissance : Si $F \subseteq H$, alors $\varepsilon_b(F, G) \subseteq \varepsilon_b(H, G)$
4. Distributivité par rapport à l'intersection : $\varepsilon_b((F \cap H), G) = \varepsilon_b(F, G) \cap \varepsilon_b(H, G)$
5. $\varepsilon_b((F \cup H), G) \supseteq \varepsilon_b(F, G) \cup \varepsilon_b(H, G)$
6. $\varepsilon_b(F, (H \cup G)) = \varepsilon_b(F, H) \cap \varepsilon_b(F, G)$
7. $\varepsilon_b(F, (H \cap G)) \supseteq \varepsilon_b(F, H) \cup \varepsilon_b(F, G)$

Relation entre la dilatation et l'érosion

1. $\varepsilon_b((\varepsilon_b(F, H)), G) = \varepsilon_b(F, (\delta_b(H, G)))$;
2. $\delta_b(F, (\varepsilon_b(H, G))) \subseteq \varepsilon_b(\delta_b(F, H), G)$
3. Adjonction : $F \subseteq (\varepsilon_b(H, G)) \Leftrightarrow (\varepsilon_b(F, G)) \subseteq H$

Démonstration [118] :

$$\begin{aligned}
F \subseteq \varepsilon_b(H, G) &\Leftrightarrow F \subseteq \bigcap_{F \in D_G} H_{-x} \\
&\Leftrightarrow F \subseteq \bigcap_{x \in D_{G^r}} H_x \\
&\Leftrightarrow \{x \in F \mid G_x^r \subseteq H\} \\
&\Leftrightarrow \bigcup \{G_x^r \mid x \in F\} \subseteq H \\
&\Leftrightarrow \bigcup_{x \in D_F} G_x^r \subseteq H \\
&\Leftrightarrow \bigcup_{x' \in D_{G^r}} F_{x'} \subseteq H \\
&\Leftrightarrow (\delta_b(F, G)) \subseteq H
\end{aligned}$$

4. Dualité : Toute involution qui permute le supremum et l'infimum engendre une dualité. L'involution appliquée aux ensembles est le complémentaire. L'érosion et la dilatation sont duales :

$$\begin{aligned}
(\delta_b(F, G))^c &= \varepsilon_b(F^c, G) \\
(\varepsilon_b(F, G))^c &= \delta_b(F^c, G)
\end{aligned}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_b(F^c, G)^c &= \left(\bigcap_{b \in G} (F)_{-b}^c \right)^c \\
&= \bigcup_{b \in G} (F)_{-b} \\
&= \delta_b(F, G)
\end{aligned} \tag{A.29}$$

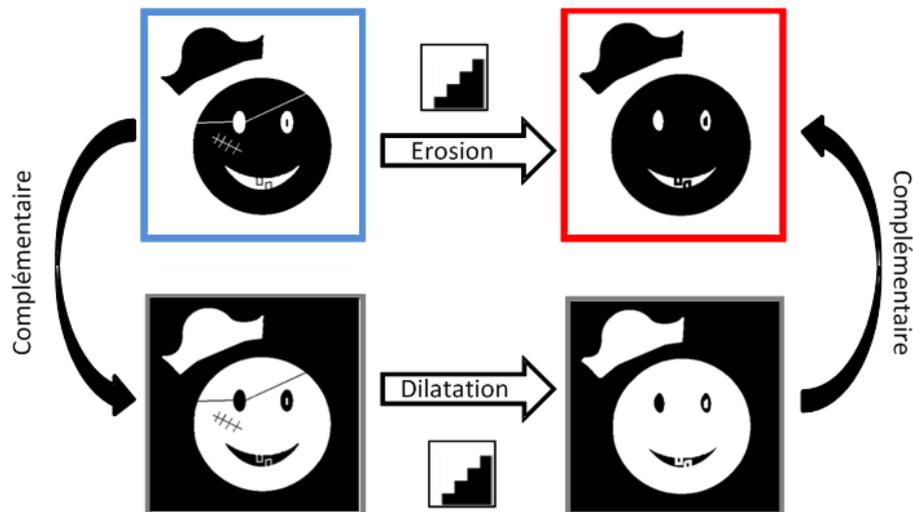


FIGURE A.15 – Relation de dualité entre une image et son complémentaire en binaire

A.2.2 Propriétés de l'ouverture et de la fermeture

Les opérations d'ouverture et de fermeture possèdent comme la dilatation et l'érosion plusieurs propriétés énoncées ci-dessous.

A.2.2.1 Croissance

L'ouverture et la fermeture sont croissantes :

$$F \subseteq H \Rightarrow \gamma_b(F, G) \subseteq \gamma_b(H, G) \quad \text{et} \quad F \subseteq H \Rightarrow \varphi_b(F, G) \subseteq \varphi_b(H, G) \quad (\text{A.30})$$

La démonstration s'appuie sur ([115] p.52) et les propriétés n°5 de la dilatation et n°3 de l'érosion qui définissent la dilatation et l'érosion comme étant croissantes alors :

$$\begin{aligned} F &\subseteq H \\ \varepsilon_b(F, G) &\subseteq \varepsilon_b(H, G) \\ \delta_b(\varepsilon_b(F, G), G^r) &\subseteq \delta_b(\varepsilon_b(H, G), G^r) \\ \gamma_b(F, G) &\subseteq \gamma_b(H, G) \end{aligned}$$

La démonstration pour l'ouverture est identique. La figure A.16 illustre la croissance de l'ouverture.

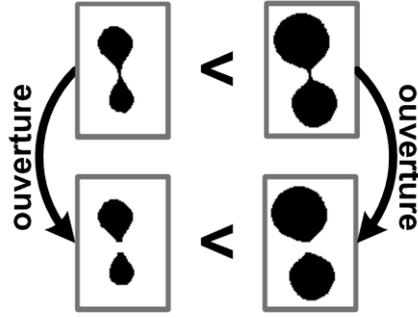


FIGURE A.16 – Illustration de la croissance de l’ouverture

A.2.2.2 Extensivité

L’ouverture est anti-extensive alors que la fermeture est extensive ([115] p.52) :

$$F \supseteq \gamma_b(F, G) \quad \text{et} \quad F \subseteq \varphi_b(F, G) \quad (\text{A.31})$$

La démonstration se base sur l’adjonction de la dilatation et de l’érosion :

$$\begin{aligned} F &\subseteq \varepsilon_b(H, G) \\ H &\supseteq \delta_b(F, G) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} F &\subseteq \varepsilon_b(H, G^r) \\ H &\supseteq \delta_b(F, G^r) \end{aligned} \right\} \text{ si } \begin{aligned} F &= \varepsilon_b(H, G) \\ H &= \delta_b(F, G) \end{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} F &\subseteq \varepsilon_b(\delta_b(F, G), G^r) \\ H &\supseteq \delta_b(\varepsilon_b(H, G), G^r) \end{aligned} \right.$$

La figure A.17 illustre l’extensivité de la fermeture et l’anti-extensivité de l’ouverture.

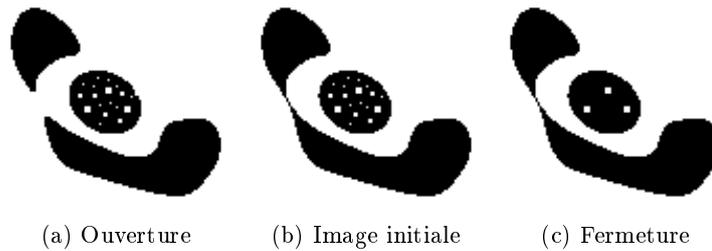


FIGURE A.17 – De gauche à droite les objets ont une taille croissante

A.2.2.3 Dualité

L’ouverture et la fermeture sont duales :

$$\varphi_b(F, G)^c = \gamma_b(F^c, G) \quad \text{et} \quad \gamma_b(F, G)^c = \varphi_b(F^c, G) \quad (\text{A.32})$$

Les opérateurs dilatation et érosion étant duaux, Il est possible de démontrer la dualité de

la fermeture et de la fermeture de la façon suivante ([115] p.51 et [123] p.110) :

$$\begin{aligned}
 \gamma_b(F, G)^c &= [\delta_b(\varepsilon_b(F, G), G^r)]^c \\
 &= \varepsilon_b(\varepsilon_b(F, G)^c, G^r) \\
 &= \varepsilon_b(\delta_b(F^c, G), G^r) \\
 &= \varphi_b(F^c, G)
 \end{aligned}$$

La figure A.18 illustre cette dualité.

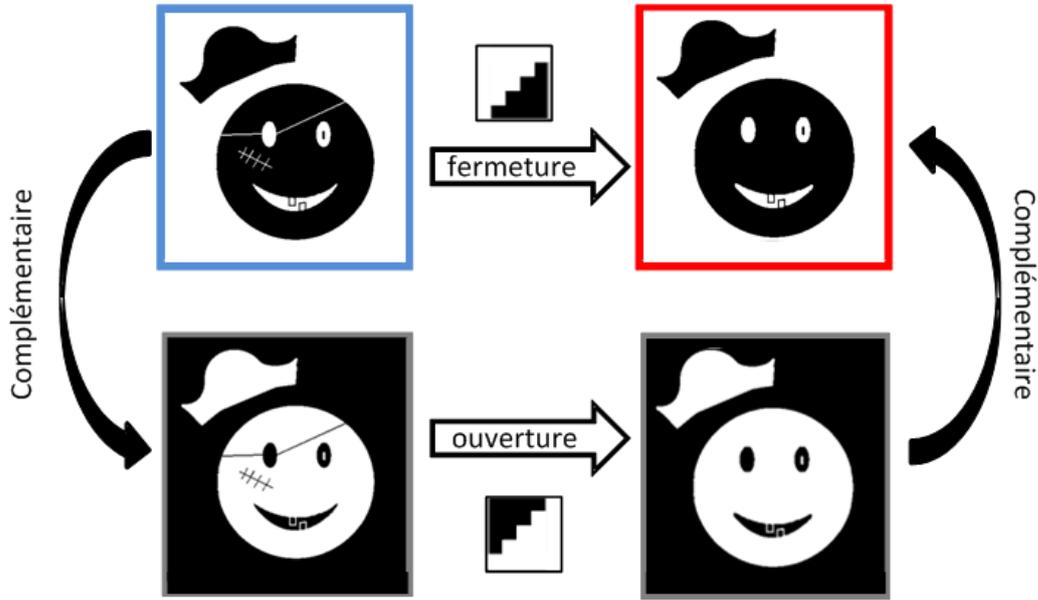


FIGURE A.18 – Dualité des opérateurs d'ouverture et de fermeture

A.2.2.4 Idempotence

L'idempotence signifie que l'application d'une transformation \mathfrak{T} une ou plusieurs fois ne modifie pas le résultat :

Soit \mathfrak{T} une application, \mathfrak{T} est idempotente si et seulement si : $\forall F \in \mathbb{Z}^2, \mathfrak{T}(\mathfrak{T}(B)) = \mathfrak{T}(B)$

En traitement d'image le résultat d'un traitement idempotent est identique à l'image obtenue en appliquant n fois ce même traitement ($n \geq 2$).

Serra [115] p.52, Soille [123] p.111 et Maragos [81] p.12 démontrent l'idempotence de l'ouverture et de la fermeture de la manière suivante :

L'ouverture est anti-extensive :

$$\gamma_b(\gamma_b(F, G), G) \subseteq \gamma_b(F, G) \quad (\text{A.33})$$

Le développement de l'ouverture de l'ouverture de F par G s'écrit :

$$\gamma_b(\gamma_b(F, G), G) = \delta_b(\varepsilon_b(\delta_b(\varepsilon_b(F, G), G^r), G), G^r) \quad (\text{A.34})$$

La partie rouge de l'équation A.34 est aussi la fermeture de l'érosion de F par G :

$$\varepsilon_b(\delta_b(\varepsilon_b(F, G), G^r), G) = \varphi(\varepsilon_b(F, G))$$

Or, la fermeture étant extensive :

$$\varphi(\varepsilon_b(F, G)) \supseteq \varepsilon_b(F, G)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \gamma_b(\gamma_b(F, G), G) &\supseteq \delta_b(\varepsilon_b(F, G), G^r) \\ \gamma_b(\gamma_b(F, G), G) &\supseteq \gamma_b(F, G) \end{aligned} \tag{A.35}$$

En combinant les équations A.33 et A.35, l'idempotence de l'ouverture est bien prouvée :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_b(\gamma_b(F, G), G) &\supseteq \gamma_b(F, G) \\ \gamma_b(\gamma_b(F, G), G) &\subseteq \gamma_b(F, G) \end{aligned} \right\} \gamma_b(\gamma_b(F, G), G) = \gamma_b(F, G)$$

Par dualité la même démonstration peut être établie pour la fermeture. En binaire l'ouverture et la fermeture sont donc idempotentes. La figure A.19 illustre l'idempotence de l'ouverture. Les figures A.19b et A.19c sont identiques malgré l'application d'une ouverture supplémentaire pour la seconde image.

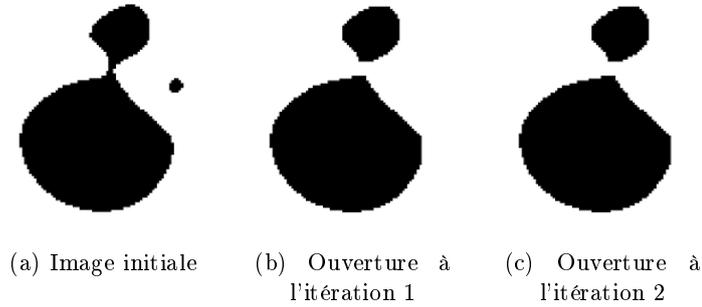


FIGURE A.19 – Illustration de l'idempotence.

A.3 Propriétés des opérateurs niveaux de gris

Avant de donner les propriétés principales pour les opérateurs niveaux de gris, quelques rappels sont nécessaires :

- Ici le complémentaire f^c d'une image niveaux de gris f est l'image pour laquelle tous les niveaux de gris sont négatifs : $f^c = -f$ (voir figure A.20).
Néanmoins pour l'affichage, les valeurs de l'image complémentaire sont ramenées dans l'ensemble de définition des images en niveaux de gris, le complémentaire sera défini ainsi : $f^c = m - f$, avec m la valeur maximale que peut prendre une image (255 pour une image 8 bits).
- Le complémentaire du complémentaire d'une image est l'image : $(f^c)^c = f$
- Le symétrique g^r de l'élément structurant g est défini comme suit : $g^r(x) = g(-x)$
- Les niveaux de gris sont ordonnés selon un ordre total.

D'après [21], si (E, \vee, \wedge, \leq) est un treillis, alors son treillis dual est (E, \wedge, \vee, \geq) .

D'après le théorème de dualité : Si un théorème T est vrai pour tous les treillis alors le théorème dual de T, obtenu en remplaçant toutes les occurrences de \vee par \wedge (et réciproquement) et toutes les occurrences de \leq par \geq (et réciproquement) est un théorème vrai pour tous les treillis.

$$\wedge (P)^c = (\vee P)^c \quad \text{et} \quad \vee (P)^c = (\wedge P)^c \quad (\text{A.36})$$

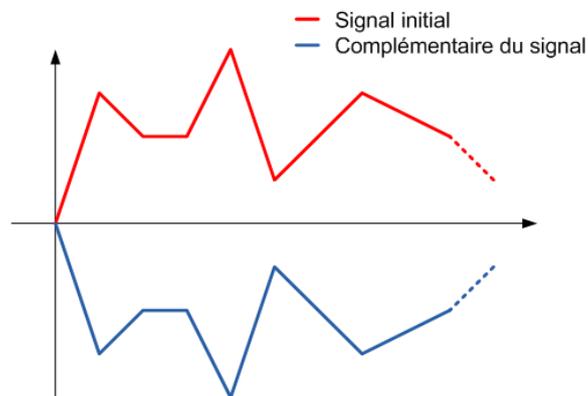


FIGURE A.20 – Signal en niveaux de gris et son complémentaire

A.3.1 Dualité

A.3.1.1 Dilatation/érosion

Les opérations de dilatation et d'érosion sont duales, c'est-à-dire qu'elles respectent les relations suivantes :

$$\delta_b(f, g)^c = \varepsilon_b(f^c, g) \quad (\text{A.37})$$

$$\varepsilon_b(f, g)^c = \delta_b(f^c, g) \quad (\text{A.38})$$

Démonstration de la dualité :

$$\begin{aligned}
 \delta_{\mathbf{b}}(f, g)^c &= \left(\bigvee_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x+y) + g(y)) \right)^c \\
 &= \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x+y) + g(y))^c \\
 &= \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} -(f(x+y) + g(y)) \\
 &= \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} (-f(x+y) - g(y)) \\
 &= \bigwedge_{x \in D_f, y \in D_g} (f(x+y)^c - g(y)) \\
 &= \varepsilon_{\mathbf{b}}(f^c, g)
 \end{aligned}$$

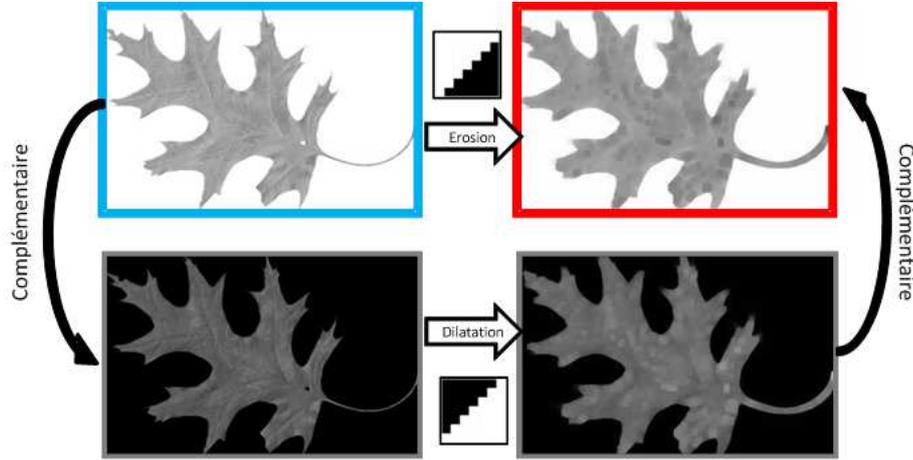


FIGURE A.21 – Relation de dualité entre une image et son complémentaire

A.3.1.2 Ouverture/fermeture

La démonstration de la dualité de la dilatation et de l'érosion étant faite, la démonstration de la dualité de l'ouverture et de la fermeture est :

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\mathbf{g}}(f, g)^c &= [\delta_{\mathbf{g}}(\varepsilon_{\mathbf{g}}(f, g), g^r)]^c \\
 &= \varepsilon_{\mathbf{g}}(\varepsilon_{\mathbf{g}}(f, g)^c, g^r) \\
 &= \varepsilon_{\mathbf{g}}(\delta_{\mathbf{g}}(f^c, g), g^r) \\
 &= \varphi_{\mathbf{g}}(f^c, g)
 \end{aligned}$$

A.3.2 Idempotence

Les niveaux de gris sont organisés selon un ordre total. En procédant au remplacement de l'équation A.19, nous obtenons la démonstration de l'idempotence suivante :

L'ouverture est anti-extensive :

$$\gamma_{\mathfrak{g}}(\gamma_{\mathfrak{g}}(f, g), g) \leq \gamma_{\mathfrak{g}}(f, g) \quad (\text{A.39})$$

Le développement de l'ouverture de l'ouverture de f par g s'écrit :

$$\gamma_{\mathfrak{g}}(\gamma_{\mathfrak{g}}(f, g), g) = \delta_{\mathfrak{g}}(\varepsilon_{\mathfrak{g}}(\delta_{\mathfrak{g}}(\varepsilon_{\mathfrak{g}}(f, g), g^r), g), g^r) \quad (\text{A.40})$$

La partie rouge de l'équation A.40 est aussi la fermeture de l'érosion de f par g :

$$\varepsilon_{\mathfrak{g}}(\delta_{\mathfrak{g}}(\varepsilon_{\mathfrak{g}}(f, g), g^r), g) = \varphi(\varepsilon_{\mathfrak{g}}(f, g))$$

Or, la fermeture étant extensive :

$$\varphi(\varepsilon_{\mathfrak{g}}(f, g)) \geq \varepsilon_{\mathfrak{g}}(f, g)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathfrak{g}}(\gamma_{\mathfrak{g}}(f, g), g) &\geq \delta_{\mathfrak{g}}(\varepsilon_{\mathfrak{g}}(f, g), g^r) \\ \gamma_{\mathfrak{g}}(\gamma_{\mathfrak{g}}(f, g), g) &\geq \gamma_{\mathfrak{g}}(f, g) \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

En combinant les équations A.39 et A.41, l'idempotence de l'ouverture est bien prouvée :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\mathfrak{g}}(\gamma_{\mathfrak{g}}(f, g), g) &\geq \gamma_{\mathfrak{g}}(f, g) \\ \gamma_{\mathfrak{g}}(\gamma_{\mathfrak{g}}(f, g), g) &\leq \gamma_{\mathfrak{g}}(f, g) \end{aligned} \right\} \gamma_{\mathfrak{g}}(\gamma_{\mathfrak{g}}(f, g), g) = \gamma_{\mathfrak{g}}(f, g)$$

Par dualité la même démonstration peut être établie pour la fermeture. En binaire l'ouverture et la fermeture sont donc idempotentes. La figure A.19 illustre l'idempotence de l'ouverture. Les figures A.19b et A.19c sont identiques malgré l'application d'une ouverture supplémentaire pour la seconde image.

Métriques couleurs

B.1 Les métriques couleurs

Les travaux de la CIE¹ ont conduit à la production d'espaces dédiés au calcul de distances couleur et permis des formulations de plus en plus précises au sens des panels d'évaluateurs testés. La première recommandation importante fût produite en 1976 avec l'adoption de l'espace *CIELAB* et de la métrique ΔE . Pour deux couleurs (L_1^*, a_1^*, b_1^*) et (L_2^*, a_2^*, b_2^*) la différence ΔE est une distance euclidienne :

$$\Delta E = \sqrt{(L_1^* - L_2^*)^2 + (a_1^* - a_2^*)^2 + (b_1^* - b_2^*)^2} \quad (\text{B.1})$$

Bien que cet espace ait été créé à l'origine pour fournir un modèle perceptuellement uniforme, il est loin de l'être totalement [22]. Pour palier ce problème, plusieurs évolutions lui succédèrent afin d'affiner les capacités de discrimination entre couleurs proches.

La première évolution est la métrique ΔE_{94} [27] :

$$\Delta E_{94} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{K_L S_L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{K_C S_C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{K_H S_H}\right)^2} \quad (\text{B.2})$$

où ΔL , ΔC et ΔH sont respectivement les différences de clarté, de chromaticité et de teinte. Les paramètres K_L , K_C et K_H pondèrent la formule en fonction des conditions d'observation, généralement $K_L = K_C = K_H = 1$. Les fonctions S_L , S_C et S_H ajustent la différence de couleur proportionnellement aux valeurs de chroma des couleurs considérées. La valeur S_L est généralement à 1. Attention, il existe deux variantes de l'écriture de la formule ΔE_{94} . La première (équation [B.3]) donne une métrique non-symétrique, où les poids S_C et S_H sont en fonction de C_{ref} , la couleur de référence. La seconde (équation [B.4]) utilise la moyenne géométrique de chromaticité, mais est moins robuste que la première.

$$S_C = 1 + K_1 C_{ref} \quad S_H = 1 + K_2 C_{ref} \quad (\text{B.3})$$

$$S_C = 1 + K_1 (C_{ref} * C_{sample})^{\frac{1}{2}} \quad S_H = 1 + K_2 (C_{ref} * C_{sample})^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.4})$$

$$\text{avec} \quad C_{ref} = \sqrt{a_{ref}^2 + b_{ref}^2} \quad C_{sample} = \sqrt{a_{sample}^2 + b_{sample}^2}$$

La seconde évolution est la métrique ΔE_{2000} [28] :

$$\Delta E_{2000} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L'}{K_L S_L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C'}{K_C S_C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H'}{K_H S_H}\right)^2 + R_T \left(\frac{\Delta C'}{K_C S_C}\right) \left(\frac{\Delta H'}{K_H S_H}\right)} \quad (\text{B.5})$$

1. Commission Internationale de l'Éclairage

Les paramètres K_L , K_C et K_H sont les mêmes que ceux utilisés avec la métrique ΔE_{94} . Les termes ajoutés permettent les corrections suivantes :

- S_L : Compensation pour la clarté, corrige le fait que ΔE donne des valeurs plus grande que la sensation visuelle pour les couleurs claires ou sombres ;
- S_C : Compensation pour la chromaticité, atténue l'allongement significatif de l'ellipse avec la chromaticité ;
- S_H : Compensation pour la teinte, corrige le grossissement des ellipses avec la chromaticité et la teinte ;
- R_T : Prise en compte de la rotation de l'ellipse dans le bleu.

En parallèle, d'autres métriques virent le jour au sein de commissions internationales. La métrique CMC(1 :c) [30] développée principalement pour l'industrie textile et qui est comme ΔE_{94} non-symétrique. La métrique DIN99 [45] qui modifie les valeurs des composantes CIELAB avant de calculer une distance euclidienne.

Démonstrations

Sommaire

C.1	Changement de repère	xxiii
C.1.1	Changement de repère de CIELAB vers le nouveau repère	xxiii
C.1.1.1	Détails du déroulement de la rotation	xxiv
C.1.1.2	Détails de la translation	xxv
C.1.2	Changement de repère du nouveau repère vers CIELAB	xxvi
C.2	Preuve dualité complète	xxvii
C.3	Démonstrations géométriques	xxxiv
C.3.1	Intersection de deux sphères	xxxiv
C.3.2	Intersection de trois sphères alignées	xxxv
C.3.3	Intersection de trois sphères non alignées	xxxvi
C.3.4	Intersection entre un cercle et un plan orthogonal	xxxvii
C.3.5	Intersection entre deux points et un plan orthogonal	xxxvii

C.1 Changement de repère

Cette annexe a pour but d'expliquer comment le changement de repère servant à adapter notre méthode à n'importe quelle paire de points de convergence a été effectué.

C.1.1 Changement de repère de CIELAB vers le nouveau repère

Pour résumer le déroulement de ce changement, une translation du repère vers la nouvelle origine succède à une rotation de l'axe \vec{L} vers le nouvel axe (C_1, C_2) . Voici une figure illustrant le but de ce changement de repère.

Pour que l'axe \vec{L} ait la même orientation que l'axe (C_1, C_2) il faut procéder de la manière suivante :

1. tourner le repère autour de l'axe \vec{L} : calculer l'angle dans le plan des vecteurs \vec{a} et \vec{b} puis effectuer la rotation
2. tourner le repère autour de l'axe \vec{a} : calculer l'angle dans le plan des vecteurs \vec{L} et \vec{b} puis effectuer la rotation
3. tourner le repère autour de l'axe \vec{b} : calculer l'angle dans le plan des vecteurs \vec{L} et \vec{a} puis effectuer la rotation

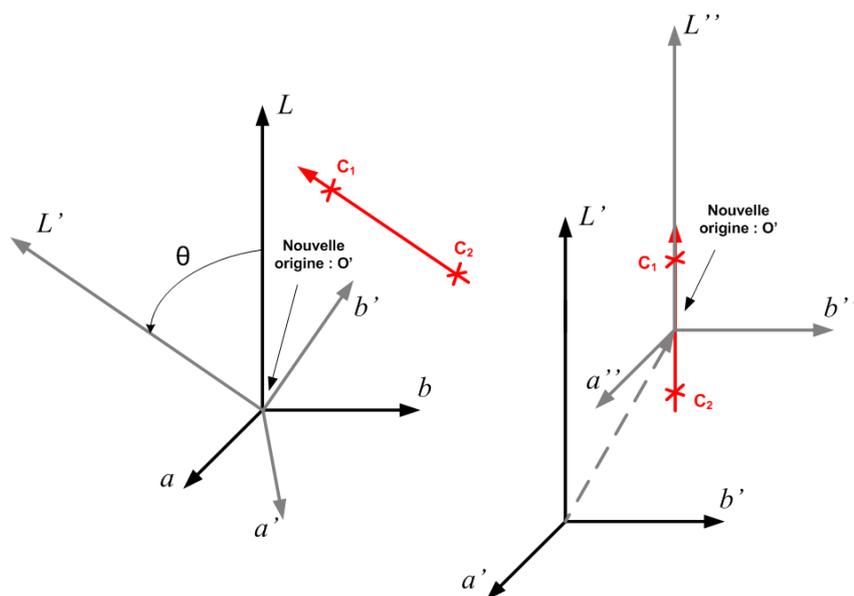


FIGURE C.1 – déroulement du changement de repère

C.1.1.1 Détails du déroulement de la rotation

1. Rotation autour de \vec{L} :

Le but étant d'orienter le vecteur \vec{L} selon le vecteur $\overrightarrow{(C_1, C_2)}$, cette étape n'a pas d'effet sur la rotation du repère. En effet la projection du vecteur \vec{L} sur le plan défini par les vecteurs \vec{a} et \vec{b} est égal au vecteur nul $\vec{0}$ et l'angle entre n'importe quel vecteur et $\vec{0}$ est nul. Cette étape peut alors être supprimée.

2. Rotation autour de \vec{a} :

Afin de calculer l'angle entre le vecteur \vec{L} et le vecteur $\overrightarrow{(C_1, C_2)}$ dans le plan défini par les vecteurs \vec{L} et \vec{b} il est nécessaire de projeter le vecteur $\overrightarrow{(C_1, C_2)}$ sur ce plan et de le normaliser pour avoir les mêmes propriétés que dans le cercle trigonométrique (figure C.2a). Ensuite l'angle est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= x_{C_1} \\ \sin(\beta) &= z_{C_1} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)}\right) \end{aligned}$$

La matrice de rotation autour de l'axe \vec{a} se fait ensuite avec la matrice A :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

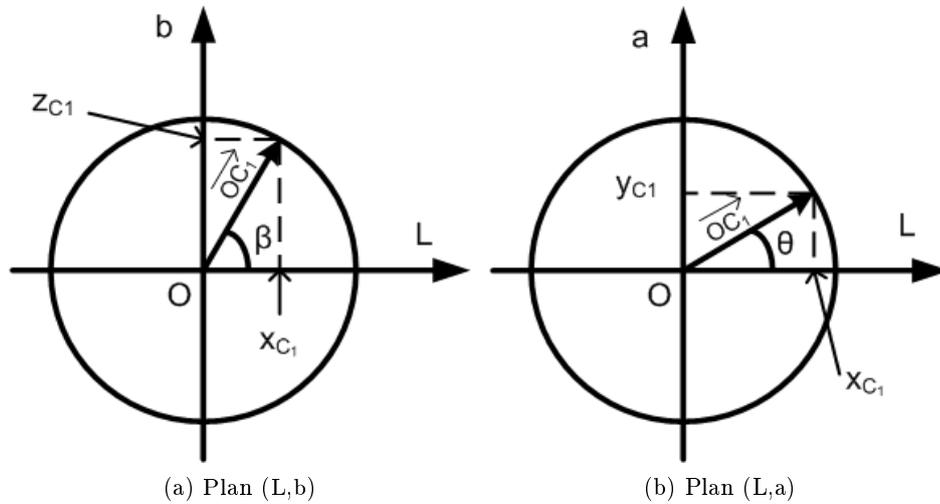


FIGURE C.2 – Cercle trigonométrique dans le plan (L,b) et dans le plan (L,a).

3. Rotation autour de \vec{b} :

L'angle entre les vecteurs \vec{L} et $\overrightarrow{(C_1, C_2)}$ dans le plan défini par les vecteurs \vec{L} et \vec{a} (figure C.2b) est calculé après projection et normalisation comme suit :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= x_{C_1} \\ \sin(\theta) &= y_{C_1} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) \end{aligned}$$

La matrice de rotation autour de l'axe \vec{b} se fait ensuite avec la matrice B :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

C.1.1.2 Détails de la translation

Ensuite pour procéder à la translation il suffit simplement de soustraire les coordonnées de la nouvelle origine O' à tous les points qui se trouvent dans le repère initial. Pour un point P de coordonnées (x, y, z) les nouvelles coordonnées (x', y', z') deviennent :

$$\begin{aligned} x' &= x - x_{O'} \\ y' &= y - y_{O'} \\ z' &= z - z_{O'} \end{aligned}$$

O' étant l'origine après rotation des points C_1 et C_2 afin de prendre en compte le décalage entraîné par la celle-ci. Le calcul donne :

$$O' = \left(\frac{L_{C_1} + L_{C_2}}{2}, \frac{a_{C_1} + a_{C_2}}{2}, \frac{b_{C_1} + b_{C_2}}{2} \right)$$

C.1.2 Changement de repère du nouveau repère vers CIELAB

Le changement de repère inverse est simplement la manoeuvre inverse de ce qui précède. Il faut faire la translation de la nouvelle origine vers l'origine initiale (repère CIELAB) suivi de la rotation du repère dans le sens contraire. Ainsi pour la translation d'un point P de coordonnées (x, y, z) les nouvelles coordonnées (x', y', z') deviennent :

$$\begin{aligned} x' &= x + x_{O'} \\ y' &= y + y_{O'} \\ z' &= z + z_{O'} \end{aligned}$$

avec O' les même coordonnées que pour le changement de repère direct.

La rotation se fait ensuite :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) & 0 \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Puis

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\beta) & 0 & \sin(-\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

avec β et θ les angles du changement de repère direct

C.2 Preuve dualité complète

Les opérateurs morphologiques utilisant des éléments structurants plats se limitent à la recherche d'un minimum/maximum dans un ensemble de couleurs. La démonstration dans ce contexte doit alors simplement montrer la relation de dualité entre le minimum de l'érosion et le maximum de la dilatation.

La démonstration doit prendre en compte les différentes conditions permettant de trouver ces extrema. Nous allons donc démontrer la dualité des opérateurs en montrant que le résultat de la dilatation, pour chacune de ces conditions (équations C.1 à C.5), est le même qu'en utilisant son chemin dual utilisant le complémentaire et le même étage de condition de l'opérateur d'érosion.

L'expression du minimum/maximum est effectué par deux types de conditions, celles utilisant la distance et celles utilisant directement les composantes. En conséquence, nous décomposons la démonstration en deux parties.

$$\bigvee_{x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)} \{f(x)\} = \left\{ C_y, C_y^\beta = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_4}} \{C_x^\beta\} \right\} \quad (\text{C.1})$$

$$\text{avec } \mathcal{S}_{\mathcal{D}_4} = \left\{ C_y | C_y^\alpha = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_3}} \{C_x^\alpha\} \right\}; \quad (\text{C.2})$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}_3} = \left\{ C_y | \overrightarrow{\|C_y O^{-\infty}\|} = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_2}} \left\{ \overrightarrow{\|C_x O^{-\infty}\|} \right\} \right\}; \quad (\text{C.3})$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}_2} = \left\{ C_y | \overrightarrow{\|C_y C_i\|} = \bigvee_{\forall C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_1}} \left\{ \overrightarrow{\|C_x C_i\|} \right\} \right\}; \quad (\text{C.4})$$

$$\text{et } \mathcal{S}_{\mathcal{D}_1} = \left\{ C_y | \overrightarrow{\|C_y O^{+\infty}\|} = \bigwedge_{\forall x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)} \left\{ \overrightarrow{\|C_x O^{+\infty}\|} \right\} \right\} \quad (\text{C.5})$$

Pour réaliser notre démonstration, un changement de repère a été effectué. Il permet de prendre en compte la construction du complémentaire couleur définie dans le cadre de la méthode CCMM.

Ce changement de repère déplace l'axe principal L selon le vecteur passant par les deux coordonnées de convergence $\overrightarrow{O^{-\infty} O^{+\infty}}$ et une translation pour que la nouvelle origine soit placée au centre du segment formé par les deux coordonnées de convergence $[O^{-\infty} O^{+\infty}]$. Les axes L , a et b deviennent respectivement les axes Λ , α et β . La seule contrainte sur les axes est que Λ , α et β soient orthogonaux. La figure C.3 illustre ce changement de repère.

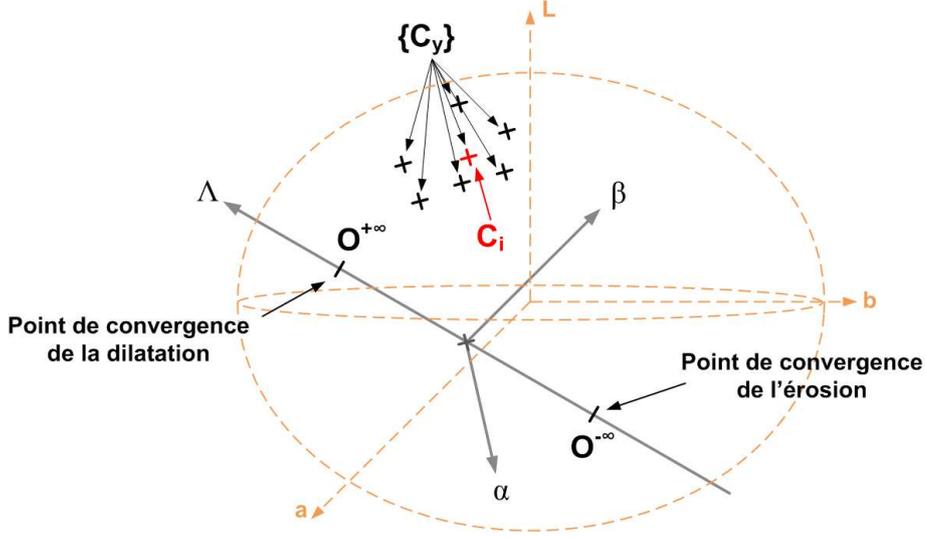


FIGURE C.3 – Espace de représentation et ensemble des coordonnées de notre méthode.

Dualité pour les expressions basées distance (équations C.5 à C.3)

1. Dualité pour la première condition (équation C.5) :

La première condition de l'extraction du maximum pour la dilatation, détermine la coordonnée la plus proche de $O^{+\infty}$ comme le maximum de l'ensemble si elle est unique. Cette condition revient à dire que les distances entre $O^{+\infty}$ et les couleurs de tous les pixels appartenant au support de l'élément structurant utilisé sont calculées ($\{x|x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)\}$). Si une seule couleur C_y est retenue, cela signifie qu'elle est la plus proche de $O^{+\infty}$:

$$\Delta E(O^{+\infty}, C_y) = \wedge \{\Delta E(O^{+\infty}, C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)\} \quad (\text{C.6})$$

Or il est possible de montrer que :

$$\begin{aligned} \Delta E(O^{+\infty}, C_y) &= \wedge \{\Delta E(O^{+\infty}, C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)\} \\ \Leftrightarrow \Delta E(O^{-\infty}, -C_y) &= \wedge \{\Delta E(O^{-\infty}, -C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)\} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Après le changement de repère, le point $O^{+\infty}$ est l'opposé du point $O^{-\infty}$ sur le nouvel axe Λ . De plus la distance entre deux points est égale à la distance entre leur opposé. En effet :

$$\Delta E(C_u, C_t) = \sqrt{[(\Lambda_{C_u} - \Lambda_{C_t})^2 + (\alpha_{C_u} - \alpha_{C_t})^2 + (\beta_{C_u} - \beta_{C_t})^2]} \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} \Delta E(-C_u, -C_t) &= \sqrt{[(-\Lambda_{C_u} + \Lambda_{C_t})^2 + (-\alpha_{C_u} + \alpha_{C_t})^2 + (-\beta_{C_u} + \beta_{C_t})^2]} \\ &= \sqrt{[(\Lambda_{C_u} - \Lambda_{C_t})^2 + (\alpha_{C_u} - \alpha_{C_t})^2 + (\beta_{C_u} - \beta_{C_t})^2]} \\ &= \sqrt{[(\Lambda_{C_u} - \Lambda_{C_t})^2 + (\alpha_{C_u} - \alpha_{C_t})^2 + (\beta_{C_u} - \beta_{C_t})^2]} \\ &= \Delta E(C_u, C_t) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Les égalités suivantes peuvent ainsi être écrites :

$$\Delta E(O^{+\infty}, C_y) = \Delta E(-O^{+\infty}, -C_y) = \Delta E(O^{-\infty}, -C_y) \quad (C.10)$$

$$\Delta E(O^{+\infty}, C_y) = \wedge \{ \Delta E(O^{+\infty}, C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \} \quad (C.11)$$

$$(C.10) \text{ et } (C.11) \Rightarrow \Delta E(O^{-\infty}, -C_y) = \wedge \{ \Delta E(O^{+\infty}, C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \} \quad (C.12)$$

La condition imposée pour l'érosion étant de prendre la couleur la plus proche de $O^{-\infty}$, la couleur trouvée pour la dilatation d'un ensemble de couleurs est bien la couleur opposée à celle obtenue pour l'érosion de l'ensemble de couleurs opposées. La figure C.4 illustre la dualité pour cette partie.

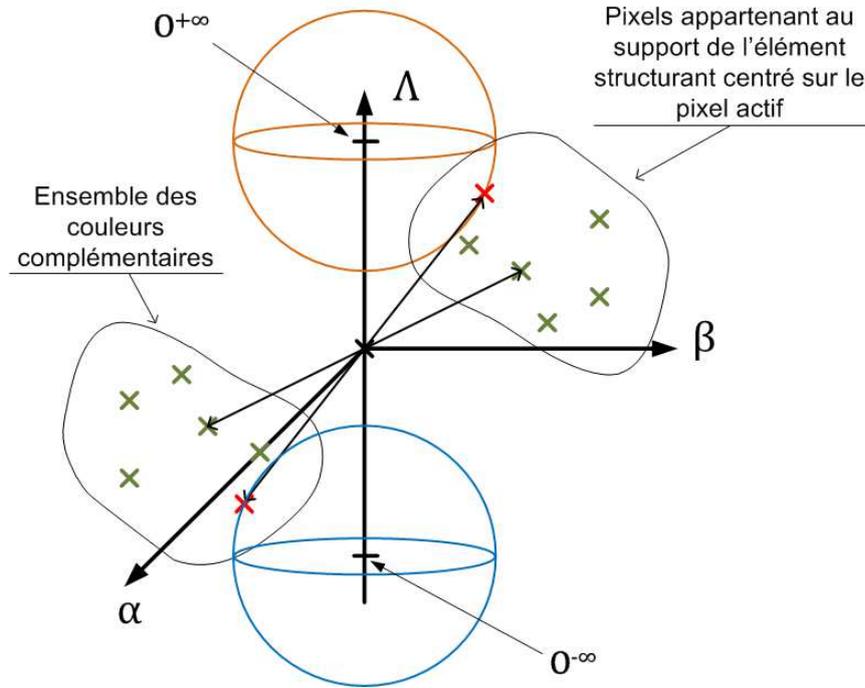


FIGURE C.4 – Le maximum d'un ensemble de couleurs est le minimum de l'ensemble des couleurs complémentaires, en fonction de la distance aux coordonnées de convergence.

2. Dualité pour la seconde condition (équation C.4) :

La seconde condition de l'extraction du maximum pour la dilatation, détermine la coordonnée la plus éloignée de C_i (la coordonnée située à l'origine de l'élément structurant) comme le maximum de l'ensemble si elle est unique. Cette condition revient à dire que les distances entre C_i et les couleurs de tous les pixels appartenant au support de l'élément structurant utilisés sont calculées ($\{x | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)\}$). Si une seule couleur C_y est retenue, cela signifie qu'elle est la plus proche de C_i :

$$\Delta E(C_i, C_y) = \vee \{ \Delta E(C_i, C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \} \quad (C.13)$$

Or, en utilisant les équations C.8 et C.9 il est possible de montrer que :

$$\begin{aligned} \Delta E(C_i, C_y) &= \vee \{ \Delta E(C_i, C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \} \\ \Leftrightarrow \Delta E(C_i^c, -C_y) &= \vee \{ \Delta E(C_i^c, -C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \} \end{aligned} \quad (C.14)$$

Les égalités suivantes peuvent ainsi être écrites :

$$\Delta E(C_i, C_y) = \Delta E(-C_i, -C_y) = \Delta E(C_i^c, -C_y) \quad (C.15)$$

$$\Delta E(C_i, C_y) = \vee \{ \Delta E(C_i, C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \} \quad (C.16)$$

$$(C.10) \text{ et } (C.11) \Rightarrow \Delta E(C_i^c, -C_y) = \vee \{ \Delta E(C_i, C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \} \quad (C.17)$$

La condition imposée pour l'érosion étant de prendre la couleur la plus éloignée de C_i , la couleur trouvée pour la dilatation d'un ensemble de couleurs est bien la couleur opposée à celle obtenue pour l'érosion de l'ensemble de couleurs opposées. La figure C.5 illustre la dualité pour cette partie.

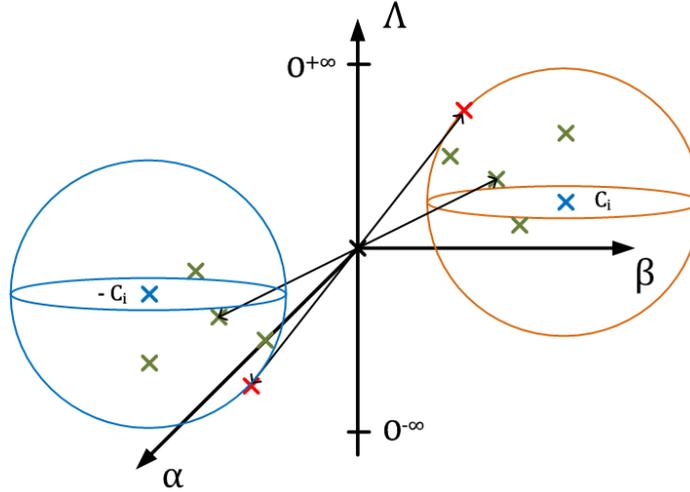


FIGURE C.5 – Le maximum d'un ensemble de couleurs est le minimum de l'ensemble des couleurs complémentaires, en fonction de la distance à la coordonnée situé à l'origine de l'élément structurant.

3. Dualité pour la troisième condition (équation C.3) :

La troisième condition de l'extraction du maximum pour la dilatation, détermine la coordonnée la plus éloignée de $O^{-\infty}$ comme le maximum de l'ensemble si elle est unique. Cette condition revient à dire que les distances entre $O^{-\infty}$ et les couleurs de tous les pixels appartenant au support de l'élément structurant utilisé sont calculées ($\{x | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)\}$). Si une seule couleur C_y est retenue, cela signifie qu'elle est la plus éloignée de $O^{-\infty}$:

$$\Delta E(O^{-\infty}, C_y) = \vee \{ \Delta E(O^{-\infty}, C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \} \quad (C.18)$$

Or, en utilisant les équations C.8 et C.9 il est possible de montrer que :

$$\begin{aligned} \Delta E(O^{-\infty}, C_y) &= \vee \{ \Delta E(O^{-\infty}, C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \} \\ \Leftrightarrow \Delta E(O^{+\infty}, -C_y) &= \vee \{ \Delta E(O^{+\infty}, -C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Les égalités suivantes peuvent ainsi être écrites :

$$\Delta E(O^{-\infty}, C_y) = \Delta E(-O^{-\infty}, -C_y) = \Delta E(O^{+\infty}, -C_y) \quad (\text{C.20})$$

$$\Delta E(O^{-\infty}, C_y) = \vee \{ \Delta E(O^{-\infty}, C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \} \quad (\text{C.21})$$

$$(\text{C.10}) \text{ et } (\text{C.11}) \Rightarrow \Delta E(O^{+\infty}, -C_y) = \vee \{ \Delta E(O^{-\infty}, C_x) | x \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \} \quad (\text{C.22})$$

La condition imposée pour l'érosion étant de prendre la couleur la plus éloignée de $O^{+\infty}$, la couleur trouvée pour la dilatation d'un ensemble de couleurs est bien la couleur opposée à celle obtenue pour l'érosion de l'ensemble de couleurs opposées. La figure C.6 illustre la dualité pour cette partie.

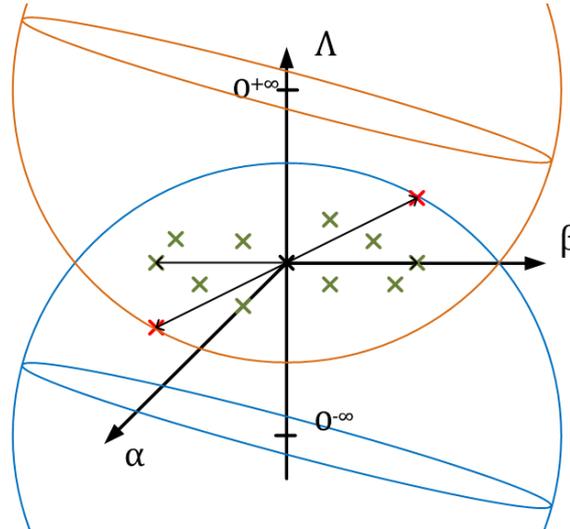


FIGURE C.6 – Le maximum d'un ensemble de couleurs est le minimum de l'ensemble des couleurs complémentaires, en fonction de la distance aux coordonnées de convergence de l'opérateur dual.

Dualité pour les expressions dépendant de la valeur des axes (équations C.2 à C.1)

1. Dualité pour la quatrième condition (équation C.2) :

La quatrième partie de l'extraction du maximum pour la dilatation consiste à prendre la couleur ayant la valeur de α maximum. Cette condition équivaut à dire que la couleur C_y retenue, si elle est unique, sera celle dont la valeur de α sera maximum.

$$C_y^\alpha = \wedge \{ C_x^\alpha | C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_3} \} \quad (\text{C.23})$$

La composante α étant organisée selon un ordre total, l'équivalence suivante peut s'écrire :

$$C_y^\alpha = \wedge\{C_x^\alpha | C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}3}\} \quad (\text{C.24})$$

$$\Leftrightarrow -C_y^\alpha = \vee\{-C_x^\alpha | C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}3}\} \quad (\text{C.25})$$

Or si u a pour coordonnées colorimétriques $C_u = (\Lambda_u; \alpha_u; \beta_u)$, alors les coordonnées colorimétriques opposées sont $-C_u = (-\Lambda_u; -\alpha_u; -\beta_u)$. Ainsi l'équivalence de l'équation C.24 montre que si la couleur C_y est retenue pour la dilatation, comme l'érosion retient le pixel ayant la couleur dont la composante α est minimum, son opposé sera retenu pour l'érosion des opposés. La figure C.7 illustre cette partie de la dualité.

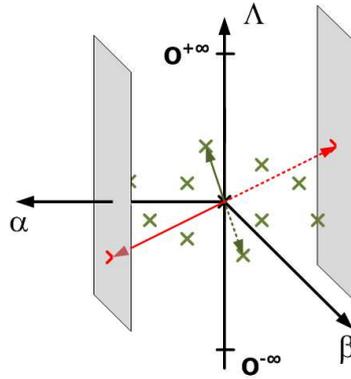


FIGURE C.7 – Le maximum d'un ensemble de couleurs est le minimum de l'ensemble des couleurs complémentaires, en fonction de la valeur de la composante α .

2. Dualité pour la cinquième condition (équation C.1) :

La cinquième partie de l'extraction du maximum pour la dilatation consiste à prendre la couleur ayant la valeur de β maximum. Cette condition équivaut à dire que la couleur C_y retenue, si elle est unique, sera celle dont la valeur de β sera maximum.

$$C_y^\beta = \wedge\{C_x^\beta | C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}3}\} \quad (\text{C.26})$$

Tout comme la composante α , la composante β étant organisée selon un ordre total, l'équivalence suivante peut s'écrire :

$$C_y^\beta = \wedge\{C_x^\beta | C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}3}\} \quad (\text{C.27})$$

$$\Leftrightarrow -C_y^\beta = \vee\{-C_x^\beta | C_x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}3}\} \quad (\text{C.28})$$

Or si u a pour coordonnées colorimétriques $C_u = (\Lambda_u; \alpha_u; \beta_u)$, alors les coordonnées colorimétriques opposées sont $-C_u = (-\Lambda_u; -\alpha_u; -\beta_u)$. Ainsi l'équivalence de l'équation C.27 montre que si la couleur C_y est retenue pour la dilatation, comme l'érosion

retient le pixel ayant la couleur dont la composante β est minimum, son opposé sera retenu pour l'érosion des opposés. La figure C.8 illustre cette partie de la dualité.

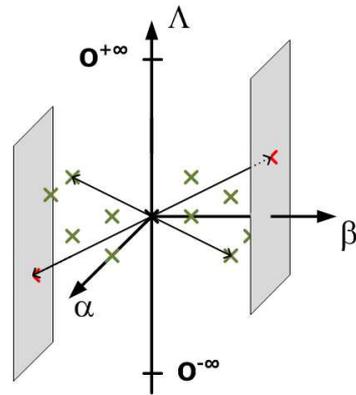


FIGURE C.8 – Le maximum d'un ensemble de couleurs est le minimum de l'ensemble des couleurs complémentaires, en fonction de la valeur de la composante β .

Démonstration totale

Ainsi la dualité entre la dilatation et l'érosion de toutes les parties des expressions 2.33 et 2.34 a été prouvée. Cette preuve est détaillée en ANNEXE C.2. Les opérateurs de dilatation et d'érosion pour la méthode de CCMM sont donc duaux.

C.3 Démonstrations géométriques

C.3.1 Intersection de deux sphères

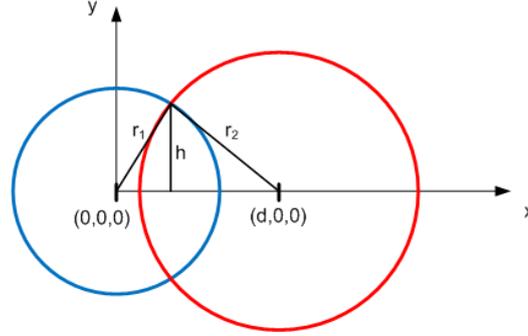


FIGURE C.9 – intersection de deux sphères, vue en coupe

L'équation d'une sphère dans \mathbb{R}^3 est $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, celles des deux sphères centrée pour la première sur l'origine $(0, 0, 0)$ et sur l'axe des abscisses en $(d, 0, 0)$ pour la seconde sont alors :

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = r_a^2 \quad (\text{C.29})$$

$$(x - d)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = r_b^2 \quad (\text{C.30})$$

Le résultat de la soustraction entre les deux équations est :

$$x = [d^2 - r_b^2 + r_a^2]/2d \quad (\text{C.31})$$

En remplaçant le résultat x (C.31) dans l'équation (C.29), le résultat est le suivant :

$$y^2 + z^2 = [4d^2r_a^2 - (d^2 - r_b^2 + r_a^2)^2]/4d^2 \quad (\text{C.32})$$

L'équation C.32 à la forme de l'équation d'un cercle de rayon h avec :

$$h^2 = [4d^2r_a^2 - (d^2 - r_b^2 + r_a^2)^2]/4d^2 \quad (\text{C.33})$$

Avec l'équation C.33 la preuve à été faite que l'intersection des deux sphères peut être un cercle. Pour montrer qu'elle peut aussi être un point il suffit de poser $d = r_1 + r_2$ et de recalculer h . Ainsi :

$$\begin{aligned} h^2 &= [4d^2r_a^2 - (d^2 - r_b^2 + r_a^2)^2]/4d^2 \\ &= [4(r_a + r_b)^2r_a^2 - ((r_a + r_b)^2 - r_b^2 + r_a^2)^2]/4(r_a + r_b)^2 \\ &= [4r_a^2(r_a^2 + r_b^2 + 2r_ar_b) - (r_a^2 + r_b^2 + 2r_ar_b - r_b^2 + r_a^2)^2]/4(r_a + r_b)^2 \\ &= [4r_a^4 + 4r_a^2r_b^2 + 8r_a^3r_b - (4r_a^4 + 8r_a^3r_b + 4r_a^2r_b^2)]/4(r_a + r_b)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

h existe et est égal à 0, l'intersection est donc bien un point si $d = r_a + r_b$. Et si $d > r_a + r_b$, lorsque les deux sphères sont éloignées alors il est facilement visible que l'intersection des deux sphères est nulle. De même si les deux sphères sont identiques, elles formeront une seule et unique sphère.

C.3.2 Intersection de trois sphères alignées

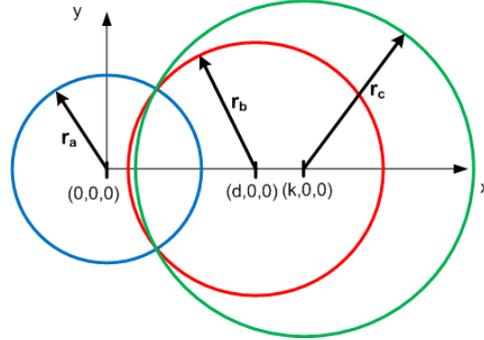


FIGURE C.10 – intersection de trois sphères alignées, vue en coupe

Les équations des trois sphères centrée sur l'origine $(0, 0, 0)$ pour l'une, sur l'axe des abscisses en $(d, 0, 0)$ pour l'autre et sur l'axe des abscisses en $(k, 0, 0)$ pour la dernière sont les suivantes :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_a^2 \quad (\text{C.34})$$

$$(x - d)^2 + y^2 + z^2 = r_b^2 \quad (\text{C.35})$$

$$(x - k)^2 + y^2 + z^2 = r_c^2 \quad (\text{C.36})$$

Les équations C.35 et C.36 donnent en les combinant :

$$\begin{aligned} -(x - d)^2 + r_b^2 &= r_c^2 - (x - k)^2 \\ -x^2 + 2xd - d^2 + r_b^2 &= r_c^2 - x^2 + 2xk - k^2 \\ x(2d - 2k) &= d^2 - r_b^2 + r_c^2 - k^2 \\ x &= \frac{d^2 - r_b^2 + r_c^2 - k^2}{2d - 2k} \end{aligned}$$

L'équation C.34 devient alors :

$$y^2 + z^2 = r_a^2 - x^2 \quad (\text{C.37})$$

$$y^2 + z^2 = r_a^2 - \left(\frac{d^2 - r_b^2 + r_c^2 - k^2}{2d - 2k} \right)^2 \quad (\text{C.38})$$

L'équation obtenue est l'équation d'un cercle :

$$y^2 + z^2 = m^2, \quad \text{avec} \quad m^2 = r_a^2 - \left(\frac{d^2 - r_b^2 + r_c^2 - k^2}{2d - 2k} \right)^2$$

C.3.3 Intersection de trois sphères non alignées

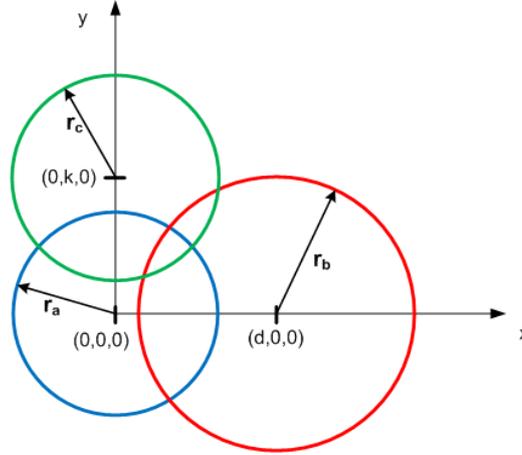


FIGURE C.11 – intersection de trois sphère non alignées, vue en coupe

Les équations des trois sphères centrée sur l'origine $(0, 0, 0)$ pour la première, sur l'axe des abscisses en $(d, 0, 0)$ pour la deuxième et sur l'axe des ordonnées $(0, k, 0)$ pour la troisième sont les suivantes :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_a^2 \quad (\text{C.39})$$

$$(x - d)^2 + y^2 + z^2 = r_b^2 \quad (\text{C.40})$$

$$x^2 + (y - k)^2 + z^2 = r_c^2 \quad (\text{C.41})$$

En soustrayant les équations C.39 et C.40, x devient :

$$\begin{aligned} x^2 - (x - d)^2 &= r_a^2 - r_b^2 \\ x^2 - x^2 + 2xd - d^2 &= r_a^2 - r_b^2 \\ x &= \frac{r_a^2 - r_b^2 + d^2}{2d} \end{aligned}$$

De la même façon en soustrayant les équations C.39 et C.41, y devient :

$$\begin{aligned} y^2 - (y - k)^2 &= r_a^2 - r_c^2 \\ y^2 - y^2 + 2yk - k^2 &= r_a^2 - r_c^2 \\ y &= \frac{r_a^2 - r_c^2 + k^2}{2k} \end{aligned}$$

En remplaçant x et y dans C.39, z devient :

$$\begin{aligned} z^2 &= r_a^2 - x^2 - y^2 \\ z^2 &= r_a^2 - \left(\frac{r_a^2 - r_b^2 + d^2}{2d} \right)^2 - \left(\frac{r_a^2 - r_c^2 + k^2}{2k} \right)^2 \\ z^2 &= \text{var} \quad \text{avec} \quad \text{var} = r_a^2 - \left(\frac{r_a^2 - r_b^2 + d^2}{2d} \right)^2 - \left(\frac{r_a^2 - r_c^2 + k^2}{2k} \right)^2 \\ z^2 &= -\sqrt{\text{var}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\text{var}} \end{aligned}$$

Etant donné que x et y ont tous les deux des valeurs uniques, alors l'intersection de trois sphères non alignées peut donner 2 points ou 1 point ou pas d'intersection (ensemble vide).

C.3.4 Intersection entre un cercle et un plan orthogonal

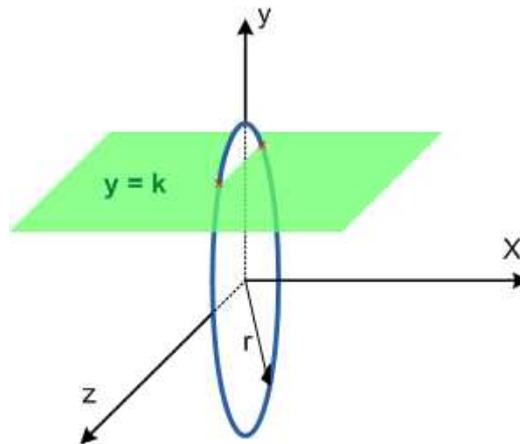


FIGURE C.12 – intersection d'un cercle et d'un plan orthogonal, vue 3D

L'équation du cercle est la suivante :

$$y^2 + z^2 = r^2 \quad (\text{C.42})$$

et celle du plan est $y = k$. En remplaçant y dans l'équation C.42 l'équation devient :

$$z^2 = r^2 - k^2 \quad \text{ou} \quad z = \pm \sqrt{r^2 - k^2}$$

Ce résultat montre que l'ensemble solution peut au maximum contenir deux coordonnées.

C.3.5 Intersection entre deux points et un plan orthogonal

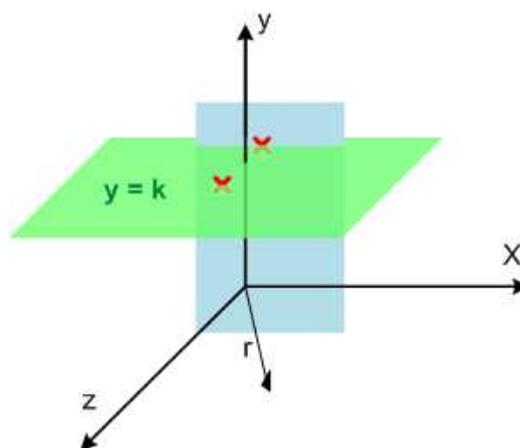


FIGURE C.13 – intersection d'un cercle et d'un plan orthogonal, vue 3D

Prenons les deux points précédents qui se trouvent dans le plan $y = k$ avec pour coordonnées :

$$P1 = (0, k, h)$$

$$P2 = (0, k, g)$$

Le plan d'équation $z = m$ permet de ne conserver qu'un seul et unique point puisque les points $P1$ et $P2$ n'ont pas la même valeur de z .

Sommaire

D.1 Fractals	xxxix
D.1.1 Algorithmes utilisés pour obtenir les signatures fractales	xxxix
D.2 Exemples de spectres après application de l'AFD	lxii
D.3 Matrice de confusions obtenues pour la classification	lxxi

D.1 Fractals**D.1.1 Algorithmes utilisés pour obtenir les signatures fractales**

Algorithme pour les images en niveaux de gris (intégration par la méthode des rectangles)

- Initialisation : $U_0 = L_0 = f$ et $g = [-\infty \ 0 \ -\infty; 0 \ 1 \ 0; -\infty \ 0 \ -\infty]$
- Itérations :
 1. Calcul des couches supérieure U et inférieure L :

$$U(i) = U(i-1) \oplus_n g$$

$$L(i) = L(i-1) \ominus_n g$$

2. Calcul de l'évolution du volume total, supérieur et inférieur :

$$V_{tot}(i) = \sum_i \sum_j (U(i)(i, j) - L(i)(i, j))$$

$$V_{sup}(i) = \sum_i \sum_j (U(i)(i, j) - f(i, j))$$

$$V_{inf}(i) = \sum_i \sum_j (f(i, j) - L(i)(i, j))$$

3. Calcul de l'évolution de l'aire totale, supérieure et inférieure :

$$A_{tot}(i) = \frac{V_{tot}(i) - V_{tot}(i-1)}{2}$$

$$A_{sup}(i) = \frac{V_{sup}(i) - V_{sup}(i-1)}{2}$$

$$A_{inf}(i) = \frac{V_{inf}(i) - V_{inf}(i-1)}{2}$$

4. Calcul de la variation de l'aire totale, supérieure et inférieure :

$$\begin{aligned} Var A_{tot}(i) &= A_{tot}(i) - A_{tot}(i+1) \\ Var A_{sup}(i) &= A_{sup}(i) - A_{sup}(i+1) \\ Var A_{inf}(i) &= A_{inf}(i) - A_{inf}(i+1) \end{aligned}$$

5. Calcul de la signature supérieure et inférieure :

$$\begin{aligned} Sign_{tot}(i) &= Var A_{tot}(i) - Var A_{tot}(i+1) \\ Sign_{sup}(i) &= Var A_{sup}(i) - Var A_{sup}(i+1) \\ Sign_{inf}(i) &= Var A_{inf}(i) - Var A_{inf}(i+1) \end{aligned}$$

- Calcul de la dimension fractale :
 - Calcul du polynome approximatif de la variation du volume (V_{tot}) dans un plan Log-Log.
 - Calcul du coefficient directeur $coef$ du polynome sur les premières valeurs.
 - $D = 3 - coef$

Algorithme pour les images couleurs (intégration par la méthode des rectangles)

- Initialisation : $U_0 = L_0 = f$ et $g = [-\infty \ 0 \ -\infty; 0 \ 1 \ 0; -\infty \ 0 \ -\infty]$
- Itérations :
 1. Calcul des couches supérieure U et inférieure L :

$$\begin{aligned} U(i) &= U(i-1) \oplus_{\mathbf{c}} g \\ L(i) &= L(i-1) \ominus_{\mathbf{c}} g \end{aligned}$$

2. Calcul de l'évolution du volume total, supérieur et inférieur :

$$\begin{aligned} V_{tot}(i) &= \sum_i \sum_j \Delta E(U_i(i, j) - L_i(i, j)) \\ V_{sup}(i) &= \sum_i \sum_j \Delta E(U_i(i, j) - f(i, j)) \\ V_{inf}(i) &= \sum_i \sum_j \Delta E(f(i, j) - L_i(i, j)) \end{aligned}$$

3. Calcul de l'évolution de l'aire totale, supérieure et inférieure :

$$\begin{aligned} A_{tot}(i) &= \frac{V_{tot}(i) - V_{tot}(i-1)}{2} \\ A_{sup}(i) &= \frac{V_{sup}(i) - V_{sup}(i-1)}{2} \\ A_{inf}(i) &= \frac{V_{inf}(i) - V_{inf}(i-1)}{2} \end{aligned}$$

4. Calcul de la variation de l'aire totale, supérieure et inférieure :

$$\begin{aligned} Var A_{tot}(i) &= A_{tot}(i) - A_{tot}(i+1) \\ Var A_{sup}(i) &= A_{sup}(i) - A_{sup}(i+1) \\ Var A_{inf}(i) &= A_{inf}(i) - A_{inf}(i+1) \end{aligned}$$

5. Calcul de la signature supérieure et inférieure :

$$\begin{aligned} \text{Sign}_{tot}(i) &= \text{Var}A_{tot}(i) - \text{Var}A_{tot}(i+1) \\ \text{Sign}_{sup}(i) &= \text{Var}A_{sup}(i) - \text{Var}A_{sup}(i+1) \\ \text{Sign}_{inf}(i) &= \text{Var}A_{inf}(i) - \text{Var}A_{inf}(i+1) \end{aligned}$$

- Calcul de la dimension fractale :
 - Calcul du polynome approximatif de la variation du volume (V_{tot}) dans un plan Log-Log.
 - Calcul du coefficient directeur *coef* du polynome sur les premières valeurs.
 - $D = 3 - coef$

D.1.2 Preuves signatures image de carrés

D.1.2.1 Paramètres et fonction utilisée

Les paramètres utilisés pour construire les images de carrés sont les suivants :

- d : longueur des côtés des motifs
- h : hauteur des motifs clairs
- n : nombre de motifs par ligne (noir et blanc)
- e : écart entre les carrés.

La figure A.17 est un exemple d'image en utilisant la paramétrisation suivante : $n = 3$, $d = 10$, $e = 16$ et $h = 20$.

L'algorithme de covering blanket utilise l'élément structurant diamant de taille 3x3 pixels :

$$\begin{array}{ccc} -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & 1 & 0 \\ -\infty & 0 & -\infty \end{array}$$

La fonction $H(x)$ est la fonction Heaviside tel que :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < 0 \\ 1 & \text{si } i \geq 1 \end{cases}$$

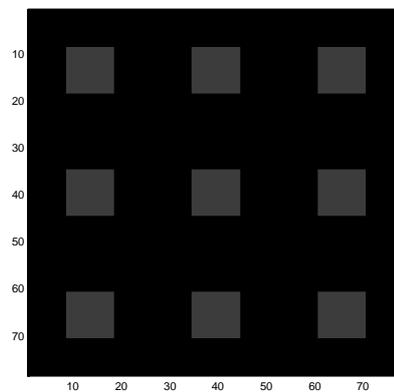


FIGURE D.1 - Image de carrés avec 3 motifs, de taille 10 pixels et un niveaux de gris de 20, par ligne séparés de 16 pixels.

D.1.2.2 Image dilatée et érodée

1. Calcul du volume généré par la surface dilatée

a) Dilatation du motif

$$n^2 d^2 (h + i)$$

b) Dilatation du fond

$$i \cdot \left(n^2(e^2 + 2ed) - 4n^2 \sum_{j=1}^i (d + j - 1) + H\left(i - \frac{e}{2}\right) \cdot 4n^2 \sum_{j=\frac{e}{2}+1}^i \left(d + 2 \cdot \left(j - \frac{e}{2} - 1\right)\right) \right) \\ - H(i - e - 1) \cdot i \cdot \left(n^2(e^2 + 2ed) - 4n^2 \sum_{j=1}^i (d + j - 1) + 4n^2 \sum_{j=\frac{e}{2}+1}^i \left(d + 2 \cdot \left(j - \frac{e}{2} - 1\right)\right) \right)$$

La fonction Heaviside $H(x)$ permet de prendre en compte la superposition des éléments dilatés après $\frac{e}{2}$ dilatations et la suppression du fond après e dilatations.

c) Pente intermédiaire

L'évolution de la pente est assez complexe, la pente intermédiaire forme une sorte de losange (Figure A.18) qui se propage du à la forme diamant de l'élément structurant. Le calcul se déroule en plusieurs étapes. En premier lieu la pente s'étend jusqu'à atteindre la limite $\frac{e}{2}$, mais le calcul ne s'arrête pas ici puisqu'il reste alors des trous non comblés, il faut donc continuer d'étendre la pente tout en supprimant ce qui dépasse. Ensuite une fois que les trous sont comblés, on peut supprimer tout ce qui dépasse. Ainsi on obtient l'équation suivante :

$$4n^2 \left(\sum_{j=1}^i (d + j - 1) \cdot (h + i - j) - H\left(i - \frac{e}{2}\right) \cdot \sum_{j=\frac{e}{2}+1}^i \left(d + 2 \cdot \left(j - \left(\frac{e}{2} + 1\right)\right)\right) \cdot (h + i - j) \right) \\ + H(i - e - 1) \cdot \left(\sum_{j=e+1}^i \left(d + 2 \cdot \left(j - \left(\frac{e}{2} + 1\right)\right)\right) \cdot (h + i - j) - \sum_{j=e+1}^i (d + j - 1) \cdot (h + i - j) \right)$$

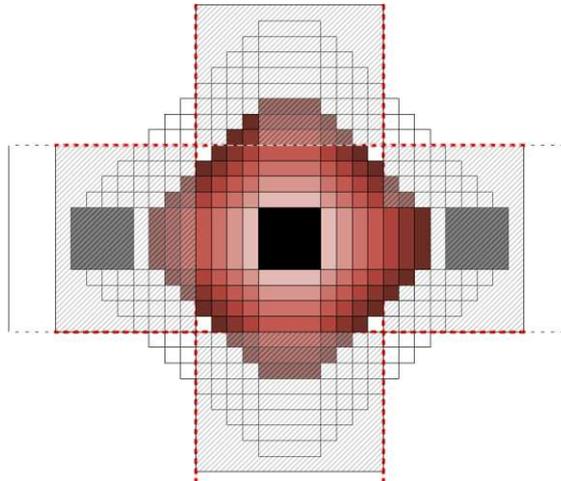


FIGURE D.2 - Dilatation de la pente intermédiaire avec un ES diamant.

d) Formule du volume dilaté

La formule totale de la dilatation est alors :

$$\begin{aligned}
Vd(i) &= n^2 d^2 (h+i) + i \cdot \left(n^2 (e^2 + 2ed) - 4n^2 \sum_{j=1}^i (d+j-1) + H\left(i - \frac{e}{2}\right) \cdot 4n^2 \sum_{j=\frac{e}{2}+1}^i \left(d + 2 \cdot \left(j - \frac{e}{2} - 1 \right) \right) \right) \\
&\quad - H(i - e - 1) \cdot i \cdot \left(n^2 (e^2 + 2ed) - 4n^2 \sum_{j=1}^i (d+j-1) + 4n^2 \sum_{j=\frac{e}{2}+1}^i \left(d + 2 \cdot \left(j - \frac{e}{2} - 1 \right) \right) \right) \\
&\quad + 4n^2 \left(\sum_{j=1}^i (d+j-1) \cdot (h+i-j) - H\left(i - \frac{e}{2}\right) \cdot \sum_{j=\frac{e}{2}+1}^i \left(d + 2 \cdot \left(j - \left(\frac{e}{2} + 1 \right) \right) \right) \cdot (h+i-j) \right) \\
&\quad + H(i - e - 1) \cdot \left(\sum_{j=e+1}^i \left(d + 2 \cdot \left(j - \left(\frac{e}{2} + 1 \right) \right) \right) \cdot (h+i-j) - \sum_{j=e+1}^i (d+j-1) \cdot (h+i-j) \right) \\
Vd(i) &= n^2 d^2 (h+i) + i \cdot n^2 (e^2 + 2ed) - i \cdot 4n^2 \sum_{j=1}^i (d+j-1) + 4n^2 \sum_{j=1}^i (d+j-1) \cdot (h+i-j) \\
&\quad + H\left(i - \frac{e}{2}\right) \cdot i \cdot 4n^2 \sum_{j=\frac{e}{2}+1}^i \left(d + 2 \cdot \left(j - \frac{e}{2} - 1 \right) \right) - 4n^2 \cdot \sum_{j=\frac{e}{2}+1}^i \left(d + 2 \cdot \left(j - \left(\frac{e}{2} + 1 \right) \right) \right) \cdot (h+i-j) \\
&\quad - H(i - e - 1) \cdot i \cdot \left(n^2 (e^2 + 2ed) - 4n^2 \sum_{j=1}^i (d+j-1) + 4n^2 \sum_{j=\frac{e}{2}+1}^i \left(d + 2 \cdot \left(j - \frac{e}{2} - 1 \right) \right) \right) \\
&\quad - 4n^2 \left(\sum_{j=e+1}^i \left(d + 2 \cdot \left(j - \left(\frac{e}{2} + 1 \right) \right) \right) \cdot (h+i-j) - \sum_{j=e+1}^i (d+j-1) \cdot (h+i-j) \right) \\
Vd(i) &= -\frac{4}{3} n^2 i^3 + \left(-2n^2 d + 4n^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{2} \right) + 2n^2 \right) i^2 \\
&\quad + \left(n^2 d^2 + \left(4n^2 \left(-\frac{1}{2} + h \right) + 2n^2 e \right) d + n^2 e^2 + 4n^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{h}{2} \right) \right) i + n^2 d^2 h \\
&\quad + H\left(i - \frac{e}{2}\right) \left(\frac{8}{3} n^2 i^3 + \left(2n^2 d + 4n^2 (-1 - e) - 4n^2 \left(-\frac{e}{2} - 1 + h \right) \right) i^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(-2n^2 e - 4n^2 \left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h \right) \right) d + 4n^2 \left(-\left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 1 + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) + \frac{e}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 4n^2 \left(e + \frac{5}{3} - eh + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) - \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 - h \right) \right) i \right. \\
&\quad \left. - 4n^2 \left(h - \left(\frac{e}{2} + 1 \right) h + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 - \frac{e}{4} - \frac{1}{2} \right) d \right. \\
&\quad \left. - 4n^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{2e}{3} - 2 \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 3 \left(\frac{e}{2} + 1 \right) h - 2h + \frac{2}{3} \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^3 + \frac{e}{2} \left(\frac{e}{2} + 1 \right) - \frac{e}{2} \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - h \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 - eh + \left(\frac{e}{2} + 1 \right) eh \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -H(i - e - 1) \cdot \left(\frac{4}{3} n^2 i^3 + \left(2n^2 + 4n^2(-1 - e) - 4n^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2} \right) \right) i^2 \right. \\
& \quad + \left(n^2 e^2 + 4n^2 \left(-\left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 1 + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) + \frac{e}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. \left. - 4n^2 \left(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2} (e + 1)^2 - eh + e(e + 1) \right) \right) i \right. \\
& \quad \left. - 4n^2 \left(\frac{3}{2} (e + 1)h + \frac{2e}{3} + \frac{2}{3} + \frac{e}{2} (e + 1) - \frac{h}{2} (e + 1)^2 - h - (e + 1)^2 + \frac{1}{3} (e + 1)^3 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{e}{2} (e + 1)^2 + (e + 1)eh - eh \right) \right)
\end{aligned}$$

e) Evolution du volume dilaté

La figure A.19 est un exemple de volume généré par la surface dilatée en fonction du nombre d'itérations, en utilisant l'image de carrés initiale (avec $n = 3$, $d = 10$, $h = 20$, $e = 16$).

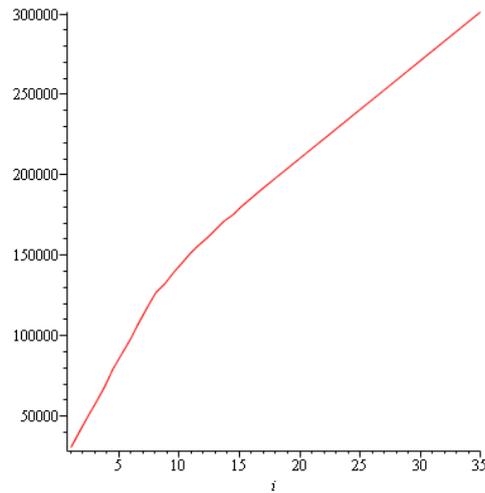


FIGURE D.3 - Evolution du volume de l'image dilatée au cours des itérations.

2. Calcul du volume généré par la surface érodée

a) Erosion du motif

$$n^2 (d - 2i)^2 (h - i)$$

b) Erosion du fond

$$-i \cdot (n^2 \cdot e^2 + 2 \cdot n^2 \cdot e \cdot d)$$

c) Pente intermédiaire

$$4n^2 \left(\sum_{j=1}^i (d-2j+1)(j-i) - H\left(i - \frac{d}{2}\right) \sum_{j=\frac{d}{2}+1}^i (d-2j+1)(j-i) \right)$$

d) Formule du volume érodé

$$\begin{aligned} Ve(i) &= n^2(d-2i)^2(h-i) - i.(n^2.e^2 + 2.n^2.e.d) + 4n^2 \sum_{j=1}^i (d-2j+1)(j-i) \\ &\quad - H\left(i - \frac{d}{2}\right) \left(4n^2 \sum_{j=\frac{d}{2}+1}^i (d-2j+1)(j-i) + n^2(d-2i)^2(h-i) \right) \\ Ve(i) &= -\frac{8}{3}n^2i^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)i^2 + \left(-n^2d^2 + (-4n^2h + 2n^2 - 2n^2e)d - n^2e^2 + \frac{2}{3}n^2\right)i + n^2d^2h \\ &\quad - H\left(i - \frac{d}{2}\right) \left(-\frac{8}{3}n^2i^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)i^2 + \left((2n^2 - 4n^2h)d + \frac{2}{3}n^2\right)i - \frac{n^2}{6}d^3 + \left(-\frac{n^2}{2} + n^2h\right)d^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{n^2}{3}d \right) \end{aligned}$$

e) Evolution du volume érodé

La figure A.20 est un exemple de l'évolution du volume généré par la surface érodée en fonction du nombre d'itérations, en utilisant l'image de carrés initiale (avec $n = 3$, $d = 10$, $h = 20$, $e = 16$).

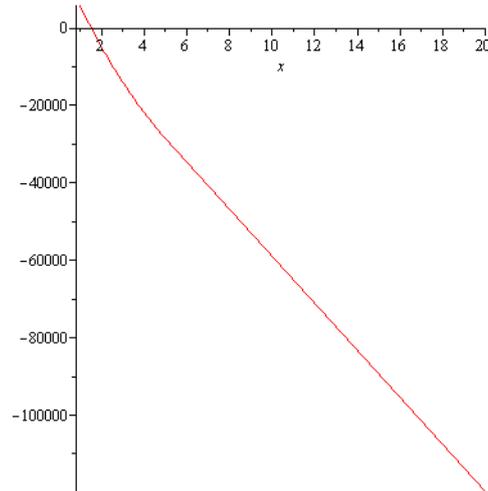


FIGURE D.4 - Evolution du volume de l'image érodée au cours des itérations.

3. Volume total

a) Calcul du volume total

Le volume total est égal au volume compris entre la surface dilatée et la surface érodée, il se calcul donc de la manière suivante :

$$V(i) = Vd(i) - Ve(i)$$

Avec :

$$\begin{aligned} Vd(i) = & -\frac{4}{3}n^2i^3 + \left(-2n^2d + 4n^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{2}\right) + 2n^2\right)i^2 \\ & + \left(n^2d^2 + \left(4n^2\left(-\frac{1}{2} + h\right) + 2n^2e\right)d + n^2e^2 + 4n^2\left(\frac{1}{3} - \frac{h}{2}\right)\right)i + n^2d^2h \\ & + H(i - e/2)\left(\frac{8}{3}n^2i^3 + (2n^2d + 4n^2(-1 - e) - 4n^2\left(-\frac{e}{2} - 1 + h\right))i^2 + ((-2n^2e - 4n^2\left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h\right))d \right. \\ & \quad \left. + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) + \frac{e}{2}\right) - 4n^2(e + 5/3 - eh + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) - \left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 \right. \\ & \quad \left. - h\right)i - 4n^2\left(h - \left(\frac{e}{2} + 1\right)h + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - \frac{e}{4} - \frac{1}{2}\right)d - 4n^2\left(\frac{4}{3} + \frac{2e}{3} - 2\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 3\left(\frac{e}{2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 1\right)h - 2h + \frac{2}{3}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^3 + \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right) - \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - h\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - eh + \left(\frac{e}{2} + 1\right)eh\right) \\ & - H(i - e - 1)\left(\frac{4}{3}n^2i^3 + (2n^2 + 4n^2(-1 - e) - 4n^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2}\right))i^2 + (n^2e^2 + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 1\right) + \frac{e}{2}\right) - 4n^2\left(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e + 1)^2 - eh + e(e + 1)\right)i - 4n^2\left(\frac{3}{2}(e + 1)h + \frac{2e}{3} + \frac{2}{3} \right. \\ & \quad \left. + \frac{e}{2}(e + 1) - \frac{h}{2}(e + 1)^2 - h - (e + 1)^2 + \frac{1}{3}(e + 1)^3 - \frac{e}{2}(e + 1)^2 + (e + 1)eh - eh\right) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} Ve(i) = & -\frac{8}{3}n^2i^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)i^2 + \left(-n^2d^2 + (-4n^2h + 2n^2 - 2n^2e)d - n^2e^2 + \frac{2}{3}n^2\right)i + n^2d^2h \\ & - H\left(i - \frac{d}{2}\right)\left(-\frac{8}{3}n^2i^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)i^2 + \left((2n^2 - 4n^2h)d + \frac{2}{3}n^2\right)i - \frac{n^2}{6}d^3 + \left(-\frac{n^2}{2} + n^2h\right)d^2 - \frac{n^2}{3}d\right) \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} V(i) = & -\frac{4}{3}n^2i^3 + \left(-2n^2d + 4n^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{2}\right) + 2n^2\right)i^2 \\ & + \left(n^2d^2 + \left(4n^2\left(-\frac{1}{2} + h\right) + 2n^2e\right)d + n^2e^2 + 4n^2\left(\frac{1}{3} - \frac{h}{2}\right)\right)i + n^2d^2h \\ & + H(i - e/2)\left(\frac{8}{3}n^2i^3 + (2n^2d + 4n^2(-1 - e) - 4n^2\left(-\frac{e}{2} - 1 + h\right))i^2 + ((-2n^2e - 4n^2\left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h\right))d \right. \\ & \quad \left. + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) + \frac{e}{2}\right) - 4n^2(e + 5/3 - eh + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) - \left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 \right. \\ & \quad \left. - h\right)i - 4n^2\left(h - \left(\frac{e}{2} + 1\right)h + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - \frac{e}{4} - 1/2\right)d - 4n^2\left(\frac{4}{3} + \frac{2e}{3} - 2\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 3\left(\frac{e}{2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 1\right)h - 2h + \frac{2}{3}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^3 + \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right) - \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - h\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - eh + \left(\frac{e}{2} + 1\right)eh\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -H(i - e - 1) \cdot \left(\frac{4}{3}n^2i^3 + (2n^2 + 4n^2(-1 - e) - 4n^2(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2}))i^2 + (n^2e^2 + 4n^2(-\frac{e}{2} + 1)^2 + 1 + e(\frac{e}{2} + 1) + \frac{e}{2}) - 4n^2(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e + 1)^2 - eh + e(e + 1)))i - 4n^2(\frac{3}{2}(e + 1)h + \frac{2e}{3} + \frac{2}{3} + \frac{e}{2}(e + 1) - \frac{h}{2}(e + 1)^2 - h - (e + 1)^2 + \frac{1}{3}(e + 1)^3 - \frac{e}{2}(e + 1)^2 + (e + 1)eh - eh) \right) \\
& - \left(-\frac{8}{3}n^2i^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)i^2 + (-n^2d^2 + (-4n^2h + 2n^2 - 2n^2e)d - n^2e^2 + \frac{2}{3}n^2)i + n^2d^2h \right) \\
& - H\left(i - \frac{d}{2}\right) \left(-\frac{8}{3}n^2i^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)i^2 + \left((2n^2 - 4n^2h)d + \frac{2}{3}n^2 \right) i - \frac{n^2}{6}d^3 + \left(-\frac{n^2}{2} + n^2h \right) d^2 - \frac{n^2}{3}d \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(i) &= \frac{4}{3}n^2i^3 + \left(-4n^2d + 4n^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{2}\right) + 4n^2 - 4n^2h \right) i^2 \\
&+ \left(2n^2d^2 + \left(4n^2\left(-\frac{1}{2} + h\right) + 4n^2e + 4n^2h - 2n^2 \right) d + 4n^2\left(\frac{1}{3} - \frac{h}{2}\right) + 2n^2e^2 - \frac{2}{3}n^2 \right) i \\
&+ H(i - e/2) \left(\frac{8}{3}n^2i^3 + (2n^2d + 4n^2(-1 - e) - 4n^2(-\frac{e}{2} - 1 + h))i^2 + ((-2n^2e - 4n^2(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h))d + 4n^2(-\frac{e}{2} + 1)^2 + 1 + e(\frac{e}{2} + 1) + \frac{e}{2}) - 4n^2(e + 5/3 - eh + e(\frac{e}{2} + 1) - (\frac{e}{2} + 1)^2 - h))i \right. \\
&- 4n^2(h - (\frac{e}{2} + 1)h + \frac{1}{2}(\frac{e}{2} + 1)^2 - \frac{e}{4} - 1/2)d - 4n^2(\frac{4}{3} + \frac{2e}{3} - 2(\frac{e}{2} + 1)^2 + 3(\frac{e}{2} + 1)h - 2h + \frac{2}{3}(\frac{e}{2} + 1)^3 + \frac{e}{2}(\frac{e}{2} + 1) - \frac{e}{2}(\frac{e}{2} + 1)^2 - h(\frac{e}{2} + 1)^2 - eh + (\frac{e}{2} + 1)eh) \left. \right) \\
&- H(i - e - 1) \cdot \left(\frac{4}{3}n^2i^3 + (2n^2 + 4n^2(-1 - e) - 4n^2(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2}))i^2 + (n^2e^2 + 4n^2(-\frac{e}{2} + 1)^2 + 1 + e(\frac{e}{2} + 1) + \frac{e}{2}) - 4n^2(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e + 1)^2 - eh + e(e + 1)))i - 4n^2(\frac{3}{2}(e + 1)h + \frac{2e}{3} + \frac{2}{3} + \frac{e}{2}(e + 1) - \frac{h}{2}(e + 1)^2 - h - (e + 1)^2 + \frac{1}{3}(e + 1)^3 - \frac{e}{2}(e + 1)^2 + (e + 1)eh - eh) \right) \\
&+ H\left(i - \frac{d}{2}\right) \left(-\frac{8}{3}n^2i^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)i^2 + \left((2n^2 - 4n^2h)d + \frac{2}{3}n^2 \right) i - \frac{n^2}{6}d^3 + \left(-\frac{n^2}{2} + n^2h \right) d^2 - \frac{n^2}{3}d \right)
\end{aligned}$$

b) Evolution du volume total

La figure A.21 est un exemple de l'évolution du volume compris entre la surface érodée et la surface dilatée en fonction du nombre d'itérations, en utilisant l'image de carrés initiale (avec $n = 3$, $d = 10$, $h = 20$, $e = 16$).

4. Variation du volume

a) Calcul de la variation du volume

$$\text{Var}_V(i) = V(i) - V(i - 1)$$

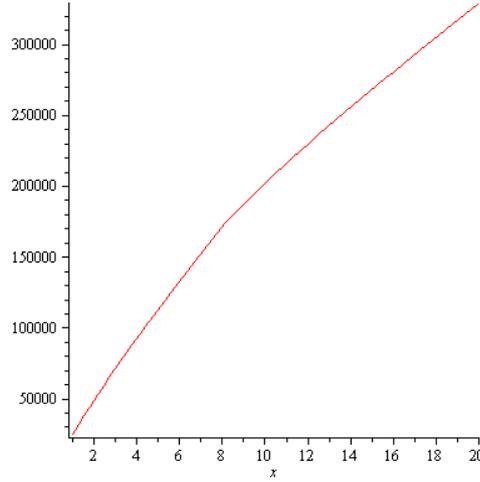


FIGURE D.5 - Evolution du volume compris entre la surface érodée et la surface dilatée au cours des itérations.

Donc :

$$\begin{aligned}
 \text{Var}_V(i) &= \frac{4}{3}n^2i^3 + \left(-4n^2d + 4n^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{2}\right) + 4n^2 - 4n^2h\right)i^2 \\
 &\quad + \left(2n^2d^2 + \left(4n^2\left(-\frac{1}{2} + h\right) + 4n^2e + 4n^2h - 2n^2\right)d + 4n^2\left(\frac{1}{3} - \frac{h}{2}\right) + 2n^2e^2 - \frac{2}{3}n^2\right)i \\
 &+ H(i - e/2) \left(\frac{8}{3}n^2i^3 + (2n^2d + 4n^2(-1 - e) - 4n^2(-\frac{e}{2} - 1 + h))i^2 + ((-2n^2e - 4n^2(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h))d \right. \\
 &\quad + 4n^2(-\frac{e}{2} + 1)^2 + 1 + e(\frac{e}{2} + 1) + \frac{e}{2}) - 4n^2(e + 5/3 - eh + e(\frac{e}{2} + 1) - (\frac{e}{2} + 1)^2 - h))i \\
 &\quad - 4n^2(h - (\frac{e}{2} + 1)h + \frac{1}{2}(\frac{e}{2} + 1)^2 - \frac{e}{4} - 1/2)d - 4n^2(\frac{4}{3} + \frac{2e}{3} - 2(\frac{e}{2} + 1)^2 + 3(\frac{e}{2} + 1)h - 2h \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3}(\frac{e}{2} + 1)^3 + \frac{e}{2}(\frac{e}{2} + 1) - \frac{e}{2}(\frac{e}{2} + 1)^2 - h(\frac{e}{2} + 1)^2 - eh + (\frac{e}{2} + 1)eh)\right) \\
 &- H(i - e - 1) \cdot \left(\frac{4}{3}n^2i^3 + (2n^2 + 4n^2(-1 - e) - 4n^2(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2}))i^2 + (n^2e^2 + 4n^2(-\frac{e}{2} + 1)^2 + 1 + e(\frac{e}{2} + 1) + \frac{e}{2}) \right. \\
 &\quad \left. - 4n^2(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e + 1)^2 - eh + e(e + 1)))i - 4n^2(\frac{3}{2}(e + 1)h + \frac{2e}{3} + \frac{2}{3} + \frac{e}{2}(e + 1) - \frac{h}{2}(e \right. \\
 &\quad \left. + 1)^2 - h - (e + 1)^2 + \frac{1}{3}(e + 1)^3 - \frac{e}{2}(e + 1)^2 + (e + 1)eh - eh)\right) \\
 &+ H\left(i - \frac{d}{2}\right) \left(-\frac{8}{3}n^2i^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)i^2 + \left((2n^2 - 4n^2h)d + \frac{2}{3}n^2\right)i - \frac{1}{6}n^2d^3 + \left(-\frac{1}{2}n^2 + n^2h\right)d^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{3}n^2d\right) \\
 &- \left(\frac{4}{3}n^2(i - 1)^3 + \left(-4n^2d + 4n^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{2}\right) + 4n^2 - 4n^2h\right)(i - 1)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(2n^2d^2 + \left(4n^2\left(-\frac{1}{2} + h\right) + 4n^2e + 4n^2h - 2n^2\right)d + 4n^2\left(\frac{1}{3} - \frac{h}{2}\right) + 2n^2e^2 - \frac{2}{3}n^2\right)(i - 1)\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -H(i-1-\frac{e}{2})\left(\frac{8}{3}n^2(i-1)^3 + (2n^2d + 4n^2(-1-e) - 4n^2(-\frac{e}{2}-1+h))(i-1)^2 + ((-2n^2e - 4n^2(-\frac{e}{2}-\frac{1}{2} \right. \\
& \quad \left. + h))d + 4n^2(-(\frac{e}{2}+1)^2 + 1 + e(\frac{e}{2}+1) + \frac{e}{2}) - 4n^2(e + 5/3 - eh + e(\frac{e}{2}+1) - (\frac{e}{2}+1)^2 \right. \\
& \quad \left. - h))(i-1) - 4n^2(h - (\frac{e}{2}+1)h + \frac{1}{2}(\frac{e}{2}+1)^2 - \frac{e}{4} - 1/2)d - 4n^2(\frac{4}{3} + \frac{2e}{3} - 2(\frac{e}{2}+1)^2 + 3(\frac{e}{2} \right. \\
& \quad \left. + 1)h - 2h + \frac{2}{3}(\frac{e}{2}+1)^3 + \frac{e}{2}(\frac{e}{2}+1) - \frac{e}{2}(\frac{e}{2}+1)^2 - h(\frac{e}{2}+1)^2 - eh + (\frac{e}{2}+1)eh) \right) \\
& + H(i-e-2) \cdot \left(\frac{4}{3}n^2(i-1)^3 + (2n^2 + 4n^2(-1-e) - 4n^2(-\frac{1}{2}-\frac{e}{2}+\frac{h}{2}))(i-1)^2 + (n^2e^2 + 4n^2(-\frac{e}{2}+1)^2 \right. \\
& \quad \left. + 1 + e(\frac{e}{2}+1) + \frac{e}{2}) - 4n^2(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e+1)^2 - eh + e(e+1))\right)(i-1) - 4n^2(\frac{3}{2}(e \right. \\
& \quad \left. + 1)h + \frac{2e}{3} + \frac{2}{3} + \frac{e}{2}(e+1) - \frac{h}{2}(e+1)^2 - h - (e+1)^2 + \frac{1}{3}(e+1)^3 - \frac{e}{2}(e+1)^2 + (e \right. \\
& \quad \left. + 1)eh - eh) \right) \\
& - H\left(i-1-\frac{d}{2}\right)\left(-\frac{8}{3}n^2(i-1)^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)(i-1)^2 + \left((2n^2 - 4n^2h)d + \frac{2}{3}n^2\right)(i-1) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{6}n^2d^3 + \left(-\frac{1}{2}n^2 + n^2h\right)d^2 - \frac{1}{3}n^2d\right)
\end{aligned}$$

De plus :

$$H\left(i-1-\frac{d}{2}\right) = H\left(i-\frac{d}{2}\right) - \delta\left(i-\frac{d}{2}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\text{Var}_V(i) &= 4n^2i^2 + \left(4n^2 - 8n^2d + 8n^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{2}\right) - 8n^2h\right)i + 2n^2d^2 + \left(4n^2\left(-\frac{1}{2} + h\right) + 4n^2e + 4n^2h + 2n^2\right)d \\
& \quad - \frac{10}{3}n^2 + 4n^2\left(\frac{1}{3} - \frac{h}{2}\right) + 2n^2e^2 - 4n^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{2}\right) + 4n^2h \\
& + H\left(i-\frac{e}{2}\right)\left(8n^2i^2 + \left(-8n^2 + 4n^2d + 8n^2(-1-e) - 8n^2\left(-\frac{e}{2}-1+h\right)\right)i \right. \\
& \quad \left. + \left(-2n^2e - 4n^2\left(-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}+h\right) - 2n^2\right)d + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2}+1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2}+1\right) + \frac{e}{2}\right) \right. \\
& \quad \left. - 4n^2\left(e + \frac{5}{3} - eh + e\left(\frac{e}{2}+1\right) - \left(\frac{e}{2}+1\right)^2 - h\right) + \frac{8}{3}n^2 - 4n^2(-1-e) + 4n^2\left(-\frac{e}{2}-1+h\right)\right) \\
& - H(i-e-1)\left(4n^2i^2 + \left(8n^2(-1-e) - 8n^2\left(-\frac{1}{2}-\frac{e}{2}+\frac{h}{2}\right)\right)i + n^2e^2 + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2}+1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2}+1\right) + \frac{e}{2}\right) \right. \\
& \quad \left. - 4n^2\left(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e+1)^2 - eh + e(e+1)\right) - \frac{2}{3}n^2 - 4n^2(-1-e) + 4n^2\left(-\frac{1}{2}-\frac{e}{2}+\frac{h}{2}\right)\right) \\
& + H\left(i-\frac{d}{2}\right)\left(-8n^2i^2 + (4n^2 + 4n^2d + 8n^2h)i - 4n^2hd - 4n^2h\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +f\left(i - \frac{e}{2}\right) \left(\frac{8}{3}n^2(i-1)^3 + \left(2n^2d + 4n^2(-1-e) - 4n^2\left(-\frac{e}{2} - 1 + h\right) \right) (i-1)^2 \right. \\
& \quad + \left(\left(-2n^2e - 4n^2\left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h\right) \right) d + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) + \frac{e}{2}\right) \right. \\
& \quad \left. \left. - 4n^2\left(e + \frac{5}{3} - eh + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) - \left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - h\right) \right) (i-1) \right. \\
& \quad - 4n^2\left(h - \left(\frac{e}{2} + 1\right)h + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - \frac{e}{4} - \frac{1}{2}\right) d \\
& \quad \left. - 4n^2\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}e - 2\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 3\left(\frac{e}{2} + 1\right)h - 2h + \frac{2}{3}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^3 + \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right) - \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - h\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - eh + \left(\frac{e}{2} + 1\right)eh \right) \right) \\
& -f(i - e - 1) \left(\frac{4}{3}n^2(i-1)^3 + \left(2n^2 + 4n^2(-1-e) - 4n^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2}\right) \right) (i-1)^2 \right. \\
& \quad + \left(n^2e^2 + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) + \frac{e}{2}\right) \right. \\
& \quad \left. \left. - 4n^2\left(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e+1)^2 - eh + e(e+1)\right) \right) \right) (i-1) \\
& \quad - 4n^2\left(\frac{3}{2}(e+1)h + \frac{2}{3}e + \frac{2}{3} + \frac{e}{2}(e+1) - \frac{h}{2}(e+1)^2 - h - (e+1)^2 + \frac{1}{3}(e+1)^3 - \frac{e}{2}(e+1)^2 \right. \\
& \quad \left. \left. + e(e+1)h - eh \right) \right) \\
& +f\left(i - \frac{d}{2}\right) \left(-\frac{8}{3}n^2(i-1)^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)(i-1)^2 + \left((2n^2 - 4n^2h)d + \frac{2}{3}n^2 \right) (i-1) - \frac{n^2}{6}d^3 \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{n^2}{2} + n^2h \right) d^2 - \frac{n^2}{3}d \right)
\end{aligned}$$

b) Evolution de la variation du volume

La figure A.22 est un exemple de l'évolution de la variation du volume compris entre la surface érodée et la surface dilatée en fonction du nombre d'itérations, en utilisant l'image de carrés initiale (avec $n = 3$, $d = 10$, $h = 20$, $e = 16$).

5. Variation de surface

a) Calcul de la variation de surface

$$\text{Var}_S(i) = \text{Var}_V(i) - \text{Var}_V(i-1)$$

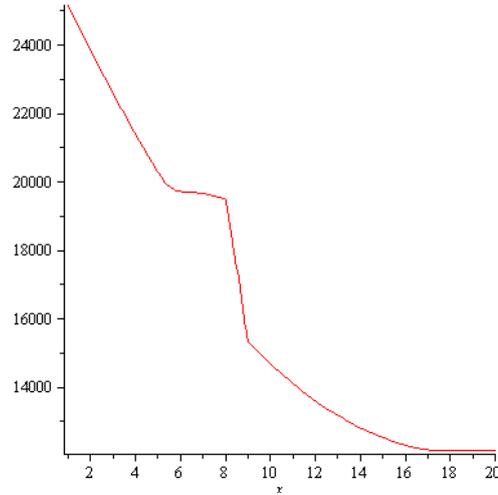


FIGURE D.6 - Evolution de la variation du volume compris entre la surface érodée et la surface dilatée au cours des itérations.

Donc :

$$\begin{aligned}
 \text{Var}_S(i) = & 4n^2i^2 + \left(4n^2 - 8n^2d + 8n^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{2}\right) - 8n^2h\right)i + 2n^2d^2 + \left(4n^2\left(-\frac{1}{2} + h\right) + 4n^2e + 4n^2h + 2n^2\right)d \\
 & - \frac{10}{3}n^2 + 4n^2\left(\frac{1}{3} - \frac{h}{2}\right) + 2n^2e^2 - 4n^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{2}\right) + 4n^2h \\
 + H\left(i - \frac{e}{2}\right) & \left(8n^2i^2 + \left(-8n^2 + 4n^2d + 8n^2(-1 - e) - 8n^2\left(-\frac{e}{2} - 1 + h\right)\right)i \right. \\
 & + \left(-2n^2e - 4n^2\left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h\right) - 2n^2\right)d + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) + \frac{e}{2}\right) \\
 & \left. - 4n^2\left(e + \frac{5}{3} - eh + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) - \left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - h\right) + \frac{8}{3}n^2 - 4n^2(-1 - e) + 4n^2\left(\frac{e}{2} - 1 + h\right)\right) \\
 - H(i - e - 1) & \left(4n^2i^2 + \left(8n^2(-1 - e) - 8n^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2}\right)\right)i + n^2e^2 + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) + \frac{e}{2}\right) \right. \\
 & \left. - 4n^2\left(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e + 1)^2 - eh + e(e + 1)\right) - \frac{2}{3}n^2 - 4n^2(-1 - e) + 4n^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2}\right)\right) \\
 + H\left(i - \frac{d}{2}\right) & \left(-8n^2i^2 + (4n^2 + 4n^2d + 8n^2h)i - 4n^2hd - 4n^2h\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +f\left(i - \frac{e}{2}\right) \left(\frac{8}{3}n^2(i-1)^3 + \left(2n^2d + 4n^2(-1-e) - 4n^2\left(-\frac{e}{2} - 1 + h\right) \right) (i-1)^2 \right. \\
& \quad + \left(\left(-2n^2e - 4n^2\left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h\right) \right) d + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) + \frac{e}{2}\right) \right. \\
& \quad \left. \left. - 4n^2\left(e + \frac{5}{3} - eh + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) - \left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - h\right) \right) (i-1) \right. \\
& \quad - 4n^2\left(h - \left(\frac{e}{2} + 1\right)h + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - \frac{e}{4} - \frac{1}{2}\right) d \\
& \quad \left. - 4n^2\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}e - 2\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 3\left(\frac{e}{2} + 1\right)h - 2h + \frac{2}{3}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^3 + \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right) - \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - h\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - eh + \left(\frac{e}{2} + 1\right)eh \right) \right) \\
& -f(i - e - 1) \left(\frac{4}{3}n^2(i-1)^3 + \left(2n^2 + 4n^2(-1-e) - 4n^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2}\right) \right) (i-1)^2 \right. \\
& \quad + \left(n^2e^2 + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) + \frac{e}{2}\right) \right. \\
& \quad \left. \left. - 4n^2\left(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e+1)^2 - eh + e(e+1)\right) \right) (i-1) \right. \\
& \quad - 4n^2\left(\frac{3}{2}(e+1)h + \frac{2}{3}e + \frac{2}{3} + \frac{e}{2}(e+1) - \frac{h}{2}(e+1)^2 - h - (e+1)^2 + \frac{1}{3}(e+1)^3 - \frac{e}{2}(e+1)^2 \right. \\
& \quad \left. \left. + e(e+1)h - eh \right) \right) \\
& +f\left(i - \frac{d}{2}\right) \left(-\frac{8}{3}n^2(i-1)^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)(i-1)^2 + \left((2n^2 - 4n^2h)d + \frac{2}{3}n^2 \right) (i-1) - \frac{n^2}{6}d^3 \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{n^2}{2} + n^2h \right) d^2 - \frac{n^2}{3}d \right) \\
& -\left(4n^2(i-1)^2 + \left(4n^2 - 8n^2d + 8n^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{2}\right) - 8n^2h \right) (i-1) + 2n^2d^2 + \left(4n^2\left(-\frac{1}{2} + h\right) + 4n^2e + 4n^2h + 2n^2 \right) d \right. \\
& \quad \left. - \frac{10}{3}n^2 + 4n^2\left(\frac{1}{3} - \frac{h}{2}\right) + 2n^2e^2 - 4n^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{2}\right) + 4n^2h \right) \\
& -H\left(i - 1 - \frac{e}{2}\right) \left(8n^2(i-1)^2 + \left(-8n^2 + 4n^2d + 8n^2(-1-e) - 8n^2\left(-\frac{e}{2} - 1 + h\right) \right) (i-1) \right. \\
& \quad + \left(-2n^2e - 4n^2\left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h\right) - 2n^2 \right) d + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) + \frac{e}{2}\right) \\
& \quad \left. - 4n^2\left(e + \frac{5}{3} - eh + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) - \left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - h\right) + \frac{8}{3}n^2 - 4n^2(-1-e) + 4n^2\left(\frac{e}{2} - 1 + h\right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +H(i-e-2) \left(4n^2(i-1)^2 + \left(8n^2(-1-e) - 8n^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2} \right) \right) (i-1) + n^2e^2 \right. \\
& \quad + 4n^2 \left(-\left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 1 + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) + \frac{e}{2} \right) - 4n^2 \left(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e+1)^2 - eh + e(e+1) \right) \\
& \quad \left. - \frac{2}{3}n^2 - 4n^2(-1-e) + 4n^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2} \right) \right) \\
& -H \left(i-1 - \frac{d}{2} \right) (-8n^2(i-1)^2 + (4n^2 + 4n^2d + 8n^2h)(i-1) - 4n^2hd - 4n^2h) \\
& -f \left(i-1 - \frac{e}{2} \right) \left(\frac{8}{3}n^2(i-2)^3 + \left(2n^2d + 4n^2(-1-e) - 4n^2 \left(-\frac{e}{2} - 1 + h \right) \right) (i-2)^2 \right. \\
& \quad + \left(\left(-2n^2e - 4n^2 \left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h \right) \right) d + 4n^2 \left(-\left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 1 + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) + \frac{e}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - 4n^2 \left(e + \frac{5}{3} - eh + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) - \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 - h \right) \right) (i-2) \\
& \quad - 4n^2 \left(h - \left(\frac{e}{2} + 1 \right) h + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 - \frac{e}{4} - \frac{1}{2} \right) d \\
& \quad - 4n^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}e - 2 \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 3 \left(\frac{e}{2} + 1 \right) h - 2h + \frac{2}{3} \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^3 + \frac{e}{2} \left(\frac{e}{2} + 1 \right) - \frac{e}{2} \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 \right. \\
& \quad \left. - h \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 - eh + \left(\frac{e}{2} + 1 \right) eh \right) \\
& +f(i-e-2) \left(\frac{4}{3}n^2(i-2)^3 + \left(2n^2 + 4n^2(-1-e) - 4n^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2} \right) \right) (i-2)^2 \right. \\
& \quad + \left(n^2e^2 + 4n^2 \left(-\left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 1 + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) + \frac{e}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - 4n^2 \left(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e+1)^2 - eh + e(e+1) \right) \right) (i-2) \\
& \quad - 4n^2 \left(\frac{3}{2}(e+1)h + \frac{2}{3}e + \frac{2}{3} + \frac{e}{2}(e+1) - \frac{h}{2}(e+1)^2 - h - (e+1)^2 + \frac{1}{3}(e+1)^3 - \frac{e}{2}(e+1)^2 \right. \\
& \quad \left. + e(e+1)h - eh \right) \\
& -f \left(i-1 - \frac{d}{2} \right) \left(-\frac{8}{3}n^2(i-2)^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)(i-2)^2 + \left((2n^2 - 4n^2h)d + \frac{2}{3}n^2 \right) (i-2) - \frac{n^2}{6}d^3 \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{n^2}{2} + n^2h \right) d^2 - \frac{n^2}{3}d \right)
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\text{Var}_S(i) &= 8n^2i - 8n^2d + 8n^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{2}\right) - 8n^2h \\
&+ H\left(i - \frac{e}{2}\right)\left(16n^2i - 16n^2 + 4n^2d + 8n^2(-1 - e) - 8n^2\left(-\frac{e}{2} - 1 + h\right)\right) \\
&- H(i - e - 1)\left(8n^2i + 8n^2(-1 - e) - 8n^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2}\right) - 4n^2\right) \\
&+ H\left(i - \frac{d}{2}\right)(-16n^2i + 12n^2 + 4n^2d + 8n^2h) \\
&+ f\left(i - \frac{e}{2}\right)\left(\frac{8}{3}n^2i^3 + \left(2n^2d + 4n^2(-1 - e) - 4n^2\left(-\frac{e}{2} - 1 + h\right)\right)i^2\right. \\
&\quad + \left(-16n^2 + \left(-2n^2e - 4n^2\left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h\right)\right)d + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) + \frac{e}{2}\right)\right. \\
&\quad \left.- 4n^2\left(e + \frac{5}{3} - eh + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) - \left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - h\right)\right)i \\
&\quad + \left(-4n^2 - 4n^2\left(h - \left(\frac{e}{2} + 1\right)h + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - \frac{e}{4} - \frac{1}{2}\right)\right)d + 16n^2 \\
&\quad - 4n^2\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}e - 2\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 3\left(\frac{e}{2} + 1\right)h - 2h + \frac{2}{3}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^3 + \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right) - \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2\right. \\
&\quad \left.- h\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - eh + e\left(\frac{e}{2} + 1\right)h\right) - 8n^2(-1 - e) + 8n^2\left(-\frac{e}{2} - 1 + h\right) \\
&- f(i - e - 1)\left(\frac{4}{3}n^2i^3 + \left(2n^2 + 4n^2(-1 - e) - 4n^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2}\right)\right)i^2\right. \\
&\quad + \left(-8n^2 + n^2e^2 + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) + \frac{e}{2}\right)\right. \\
&\quad \left.- 4n^2\left(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e + 1)^2 - eh + e(e + 1)\right)\right)i + 4n^2 - 8n^2(-1 - e) \\
&\quad + 8n^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2}\right) \\
&\quad - 4n^2\left(\frac{3}{2}(e + 1)h + \frac{2}{3}e + \frac{2}{3} + \frac{e}{2}(e + 1) - \frac{h}{2}(e + 1)^2 - h - (e + 1)^2 + \frac{1}{3}(e + 1)^3\right. \\
&\quad \left.- \frac{e}{2}(e + 1)^2 + e(e + 1)h - eh\right) \\
&+ f\left(i - \frac{d}{2}\right)\left(-\frac{8}{3}n^2i^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)i^2 + \left(\frac{50}{3}n^2 + (2n^2 - 4n^2h)d\right)i - \frac{n^2}{6}d^3 + \left(-\frac{n^2}{2} + n^2h\right)d^2\right. \\
&\quad \left.- \frac{13}{3}n^2d - 12n^2 - 8n^2h\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -f\left(i-1-\frac{e}{2}\right)\left(\frac{8}{3}n^2(i-2)^3 + \left(2n^2d + 4n^2(-1-e) - 4n^2\left(-\frac{e}{2}-1+h\right)\right)(i-2)^2\right. \\
& \quad + \left(\left(-2n^2e - 4n^2\left(-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}+h\right)\right)d + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2}+1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2}+1\right) + \frac{e}{2}\right)\right. \\
& \quad - 4n^2\left(e + \frac{5}{3} - eh + e\left(\frac{e}{2}+1\right) - \left(\frac{e}{2}+1\right)^2 - h\right)(i-2) \\
& \quad - 4n^2\left(h - \left(\frac{e}{2}+1\right)h + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}+1\right)^2 - \frac{e}{4} - \frac{1}{2}\right)d \\
& \quad - 4n^2\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}e - 2\left(\frac{e}{2}+1\right)^2 + 3\left(\frac{e}{2}+1\right)h - 2h + \frac{2}{3}\left(\frac{e}{2}+1\right)^3 + \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2}+1\right) - \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2}+1\right)^2\right. \\
& \quad \left. - h\left(\frac{e}{2}+1\right)^2 - eh + e\left(\frac{e}{2}+1\right)h\right) \\
& + f(i-e-2)\left(\frac{4}{3}n^2(i-2)^3 + \left(2n^2 + 4n^2(-1-e) - 4n^2\left(-\frac{1}{2}-\frac{e}{2}+\frac{h}{2}\right)\right)(i-2)^2\right. \\
& \quad + \left(n^2e^2 + 4n^2\left(1 - \left(\frac{e}{2}+1\right)^2 + e\left(\frac{e}{2}+\frac{3}{2}\right)\right)\right. \\
& \quad \left. - 4n^2\left(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e+1)^2 - eh + e(e+1)\right)\right)(i-2) \\
& \quad - 4n^2\left(\frac{3}{2}(e+1)h + \frac{2}{3}e + \frac{2}{3} + \frac{e}{2}(e+1) - \frac{h}{2}(e+1)^2 - h - (e+1)^2 + \frac{1}{3}(e+1)^3\right. \\
& \quad \left. - \frac{e}{2}(e+1)^2 + e(e+1)h - eh\right) \\
& - f\left(i-1-\frac{d}{2}\right)\left(-\frac{8}{3}n^2(i-2)^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)(i-2)^2 + \left((2n^2 - 4n^2h)d + \frac{2}{3}n^2\right)(i-2) - \frac{n^2}{6}d^3\right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{n^2}{2} + n^2h\right)d^2 - \frac{n^2}{3}d\right)
\end{aligned}$$

b) Evolution de la variation de surface

La figure A.23 est un exemple de l'évolution de la variation de surface compris entre la surface érodée et la surface dilatée en fonction du nombre d'itérations, en utilisant l'image de carrés initiale (avec $n = 3$, $d = 10$, $h = 20$, $e = 16$).

6. Signature

a) Calcul de la signature

$$\text{Sign}(i) = \text{Var}_S(i) - \text{Var}_S(i-1)$$

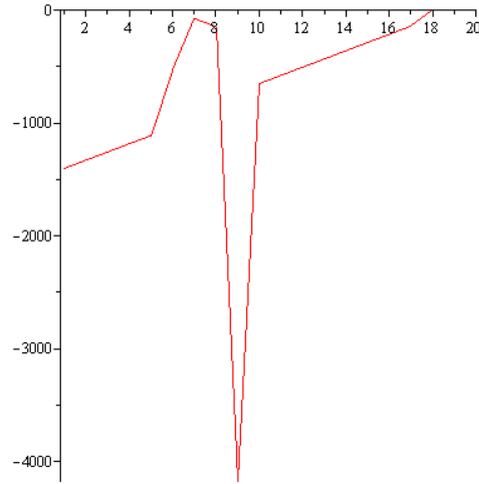


FIGURE D.7 - Evolution de la variation de surface compris entre la surface érodée et la surface dilatée au cours des itérations.

Donc :

$$\text{Sign}(i) = 8n^2$$

$$\begin{aligned}
& +H\left(i - \frac{e}{2}\right)(16n^2) - H(i - e - 1)(8n^2) + H\left(i - \frac{d}{2}\right)(-16n^2) \\
& +f\left(i - \frac{e}{2}\right)\left(\frac{8}{3}n^2i^3 + \left(2n^2d + 4n^2(-1 - e) - 4n^2\left(-\frac{e}{2} - 1 + h\right)\right)i^2\right. \\
& \quad + \left(-16n^2 + \left(-2n^2e - 4n^2\left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h\right)\right)d + 4n^2\left(-\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) + \frac{e}{2}\right)\right. \\
& \quad \left. - 4n^2\left(e + \frac{5}{3} - eh + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) - \left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - h\right)\right)i \\
& \quad - 4n^2\left(h - \left(\frac{e}{2} + 1\right)h + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - \frac{e}{4} - \frac{1}{2}\right)d \\
& \quad - 4n^2\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}e - 2\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 3\left(\frac{e}{2} + 1\right)h - 2h + \frac{2}{3}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^3 + \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right) - \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2\right. \\
& \quad \left. - h\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 - eh + e\left(\frac{e}{2} + 1\right)h\right) + 16n^2(i - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -f(i - e - 1) \left(\frac{4}{3} n^2 i^3 + \left(2n^2 + 4n^2(-1 - e) - 4n^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2} \right) \right) i^2 \right. \\
& \quad + \left(-8n^2 + n^2 e^2 + 4n^2 \left(-\left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 1 + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) + \frac{e}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. \left. - 4n^2 \left(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2} (e + 1)^2 - eh + e(e + 1) \right) \right) i \right. \\
& \quad \left. - 4n^2 \left(\frac{3}{2} (e + 1)h + \frac{2}{3} e + \frac{2}{3} + \frac{e}{2} (e + 1) - \frac{h}{2} (e + 1)^2 - h - (e + 1)^2 + \frac{1}{3} (e + 1)^3 - \frac{e}{2} (e + 1)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + e(e + 1)h - eh \right) + 8n^2(i - 1) \right) \\
& + f\left(i - \frac{d}{2}\right) \left(-\frac{8}{3} n^2 i^3 + (2n^2 d - 2n^2 + 4n^2 h) i^2 + \left(\frac{50}{3} n^2 + (2n^2 - 4n^2 h) d \right) i - \frac{n^2}{6} d^3 + \left(-\frac{n^2}{2} + n^2 h \right) d^2 - \frac{n^2}{3} d \right. \\
& \quad \left. - 16n^2(i - 1) \right) \\
& - f\left(i - 1 - \frac{e}{2}\right) \left(\left(\left(-2n^2 e - 4n^2 \left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h \right) \right) d + 4n^2 \left(-\left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 1 + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) + \frac{e}{2} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 4n^2 \left(e + \frac{5}{3} - eh + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) - \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 - h \right) \right) i \right. \\
& \quad + \left(4n^2 e + 8n^2 \left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h \right) - 8n^2 \left(h - \left(\frac{e}{2} + 1 \right) h + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 - \frac{e}{4} - \frac{1}{2} \right) - 4n^2 \right) d \\
& \quad + \frac{8}{3} n^2 (i - 2)^3 + 2n^2 d + 4n^2(-1 - e) - 4n^2 \left(-\frac{e}{2} - 1 + h \right) (i - 2)^2 - 16n^2 \\
& \quad + \left(-2n^2 e - 4n^2 \left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h \right) \right) d + 4n^2 \left(-\left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 1 + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) + \frac{e}{2} \right) \\
& \quad - 4n^2 \left(e + \frac{5}{3} - eh + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) - \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 - h \right) (i - 1) - 8n^2 \left(-\left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 1 + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) + \frac{e}{2} \right) \\
& \quad + 8n^2 \left(e + \frac{5}{3} - eh + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) - \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 - h \right) + 2n^2 d + 4n^2(-1 - e) \\
& \quad - 4n^2 \left(-\frac{e}{2} - 1 + h \right) (i - 1)^2 \\
& \quad - 8n^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3} e - 2 \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 3 \left(\frac{e}{2} + 1 \right) h - 2h + \frac{2}{3} \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^3 + \frac{e}{2} \left(\frac{e}{2} + 1 \right) - \frac{e}{2} \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 \right. \\
& \quad \left. - h \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 - eh + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) h \right) + \frac{8}{3} n^2 (i - 1)^3 - 8n^2(-1 - e) + 16n^2 + 8n^2 \left(-\frac{e}{2} - 1 + h \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +f(i-e-2) \left(\frac{4}{3}n^2i^3 + \left(-6n^2 + 4n^2(-1-e) - 4n^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2} \right) \right) i^2 \right. \\
& \quad + \left(8n^2 + n^2e^2 + 4n^2 \left(-\left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 1 + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) + \frac{e}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - 4n^2 \left(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e+1)^2 - eh + e(e+1) \right) - 16n^2(-1-e) + 16n^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2} \right) \right) i \\
& \quad + \frac{4}{3}n^2 + 8n^2(-1-e) - 8n^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2} \right) - 2n^2e^2 - 8n^2 \left(-\left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 1 + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) + \frac{e}{2} \right) \\
& \quad + 8n^2 \left(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e+1)^2 - eh + e(e+1) \right) \\
& \quad - 8n^2 \left(\frac{3}{2}(e+1)h + \frac{2}{3}e + \frac{2}{3} + \frac{e}{2}(e+1) - \frac{h}{2}(e+1)^2 - h - (e+1)^2 + \frac{1}{3}(e+1)^3 - \frac{e}{2}(e+1)^2 \right. \\
& \quad \left. + e(e+1)h - eh \right) + \frac{4}{3}n^2(i-1)^3 + \left(2n^2 + 4n^2(-1-e) - 4n^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2} \right) \right) (i-1)^2 \\
& \quad + \left(-8n^2 + n^2e^2 + 4n^2 \left(-\left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 1 + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) + \frac{e}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - 4n^2 \left(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e+1)^2 - eh + e(e+1) \right) \right) (i-1) \\
& -f \left(i-1-\frac{d}{2} \right) \left(-\frac{8}{3}n^2(i-2)^3 + (2n^2d - 2n^2 + 4n^2h)(i-2)^2 + \left((2n^2 - 4n^2h)d + \frac{2}{3}n^2 \right) (i-2) - \frac{1}{6}n^2d^3 \right. \\
& \quad + \left(-\frac{n^2}{2} + n^2h \right) d^2 - \frac{n^2}{3}d - \frac{8}{3}n^2(i-1)^3 + 2n^2d - 2n^2 + 4n^2h((i-1)^2) + \frac{50}{3}n^2 \\
& \quad \left. + (2n^2 - 4n^2h)d(i-1) - \frac{n^2}{6}d^3 + \left(-\frac{n^2}{2} + n^2h \right) d^2 - \frac{13}{3}n^2d - 12n^2 - 8n^2h \right) \\
& +f \left(i-2-\frac{e}{2} \right) \left(\frac{8}{3}n^2(i-3)^3 + 2n^2d + 4n^2(-1-e) - 4n^2 \left(-\frac{e}{2} - 1 + h \right) (i-3)^2 \right. \\
& \quad + \left(-2n^2e - 4n^2 \left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + h \right) \right) d + 4n^2 \left(-\left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 1 + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) + \frac{e}{2} \right) \\
& \quad - 4n^2 \left(e + \frac{5}{3} - eh + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) - \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 - h \right) (i-3) \\
& \quad - 4n^2 \left(h - \left(\frac{e}{2} + 1 \right) h + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 - \frac{e}{4} - \frac{1}{2} \right) d \\
& \quad - 4n^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}e - 2 \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 + 3 \left(\frac{e}{2} + 1 \right) h - 2h + \frac{2}{3} \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^3 + \frac{e}{2} \left(\frac{e}{2} + 1 \right) - \frac{e}{2} \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 \right. \\
& \quad \left. - h \left(\frac{e}{2} + 1 \right)^2 - eh + e \left(\frac{e}{2} + 1 \right) h \right) \left. \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -f(i-e-3) \left(\frac{4}{3}n^2(i-3)^3 + 2n^2 + 4n^2(-1-e) - 4n^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{h}{2} \right) ((i-3)^2) + n^2e^2 \right. \\
& \quad + 4n^2 \left(-\left(\frac{e}{2} + 1\right)^2 + 1 + e\left(\frac{e}{2} + 1\right) + \frac{e}{2} \right) \\
& \quad - 4n^2 \left(\frac{5}{6} + e - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}(e+1)^2 - eh + e(e+1) \right) (i-3) \\
& \quad - 4n^2 \left(\frac{3}{2}(e+1)h + \frac{2}{3}e + \frac{2}{3} + \frac{e}{2}(e+1) - \frac{h}{2}(e+1)^2 - h - (e+1)^2 + \frac{1}{3}(e+1)^3 \right. \\
& \quad \left. - \frac{e}{2}(e+1)^2 + e(e+1)h - eh \right) \left. \right) \\
& + f\left(i-2-\frac{d}{2}\right) \left(-\frac{8}{3}n^2(i-3)^3 + 2n^2d - 2n^2 + 4n^2h((i-3)^2) + (2n^2 - 4n^2h)d + \frac{2}{3}n^2(i-3) - \frac{n^2}{6}d^3 \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{n^2}{2} + n^2h \right) d^2 - \frac{n^2}{3}d \right)
\end{aligned}$$

b) Evolution de la signature

La figure A.23 est un exemple de l'évolution de la signature en fonction du nombre d'itérations, en utilisant l'image de carrés initiale (avec $n = 3$, $d = 10$, $h = 20$, $e = 16$).

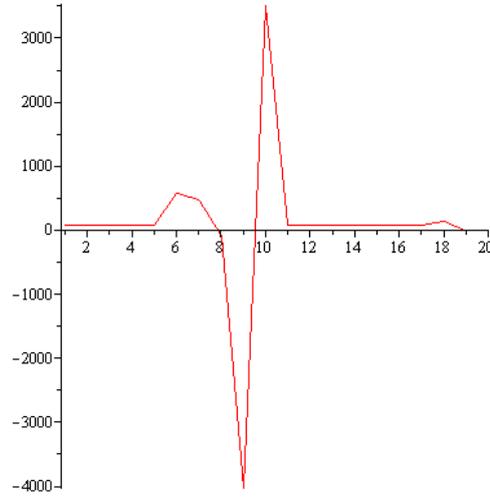


FIGURE D.8 - Evolution de la variation de la signature au cours des itérations.

c) Réduction de l'écriture

$$\begin{aligned}
\text{Sign}(i) &= 8n^2 + H\left(i-\frac{e}{2}\right)(16n^2) - H(i-e-1)(8n^2) + H\left(i-\frac{d}{2}\right)(-16n^2) + f\left(i-\frac{e}{2}\right)(-16n^2) \\
& - f(i-e-1)(-8n^2) + f\left(i-\frac{d}{2}\right)(16n^2) - f\left(i-1-\frac{e}{2}\right)((-2de+16+(-4+4h)d)n^2) \\
& + f(i-e-2)((-4e+4h)n^2) - f\left(i-1-\frac{d}{2}\right)((2d-4h-12)n^2) \\
& + f\left(i-2-\frac{e}{2}\right)((4-2d)e+(-8+4d)h)n^2 + f\left(i-2-\frac{d}{2}\right)((4h-2d)n^2)
\end{aligned}$$

d) Signatures supérieure et inférieure

D'après l'écriture finale, il est possible de déduire l'écriture de la signature supérieure Sign_{sup} et inférieure Sign_{inf} . En effet, pour la signature inférieure la position des pics dépend de la taille des objets. Alors que pour la signatures supérieure elle dépend de l'écart entre objets.

$$\begin{aligned} \text{Sign}_{\text{inf}}(i) = & 16n^2 + H\left(i - \frac{d}{2}\right)(-16n^2) + f\left(i - \frac{d}{2}\right)(16n^2) - f\left(i - 1 - \frac{d}{2}\right)((2d - 4h - 12)n^2) \\ & + f\left(i - 2 - \frac{d}{2}\right)((4h - 2d)n^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sign}_{\text{sup}}(i) = & -8n^2 + H\left(i - \frac{e}{2}\right)(16n^2) - H(i - e - 1)(8n^2) + f\left(i - \frac{e}{2}\right)(-16n^2) - f(i - e - 1)(-8n^2) \\ & - f\left(i - 1 - \frac{e}{2}\right)((-2de + 16 + (-4 + 4h)d)n^2) + f(i - e - 2)((-4e + 4h)n^2) \\ & + f\left(i - 2 - \frac{e}{2}\right)((4 - 2d)e + (-8 + 4d)h)n^2 \end{aligned}$$

e) Evolution des signatures inférieure et supérieure

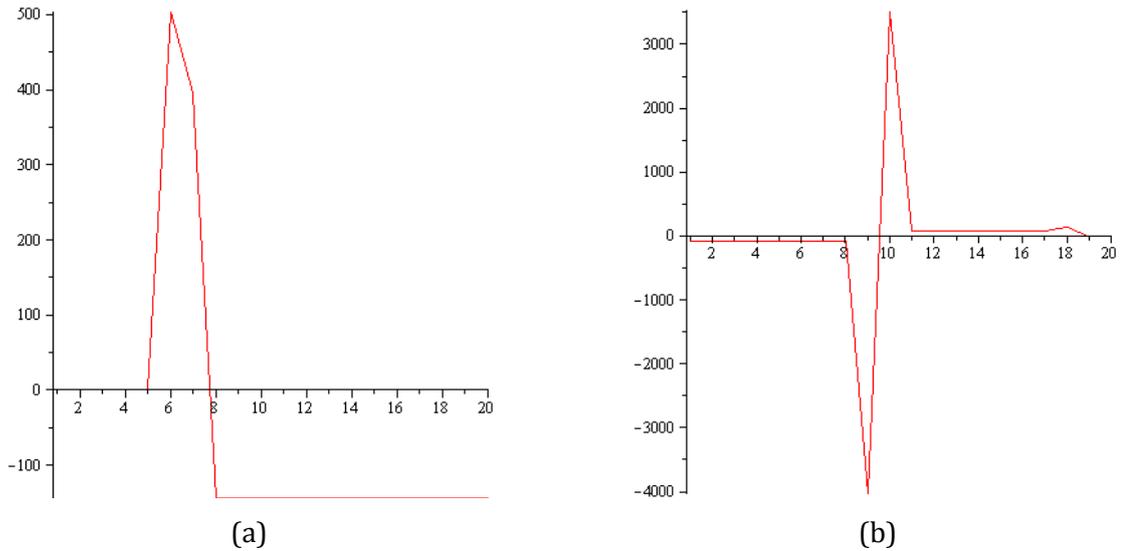


FIGURE D.9 - Evolution de la variation des signatures inférieure (a) et supérieure (b) au cours des itérations.

D.2 Exemples de spectres après application de l'AFD

Les figures D.1 à D.9 présentent une réduction par une AFD (Analyse Factorielle Discriminante) des spectres de textures niveaux de gris et couleur obtenu lors de l'étude de la classification des images de la base Outex (voir 5.3.3).

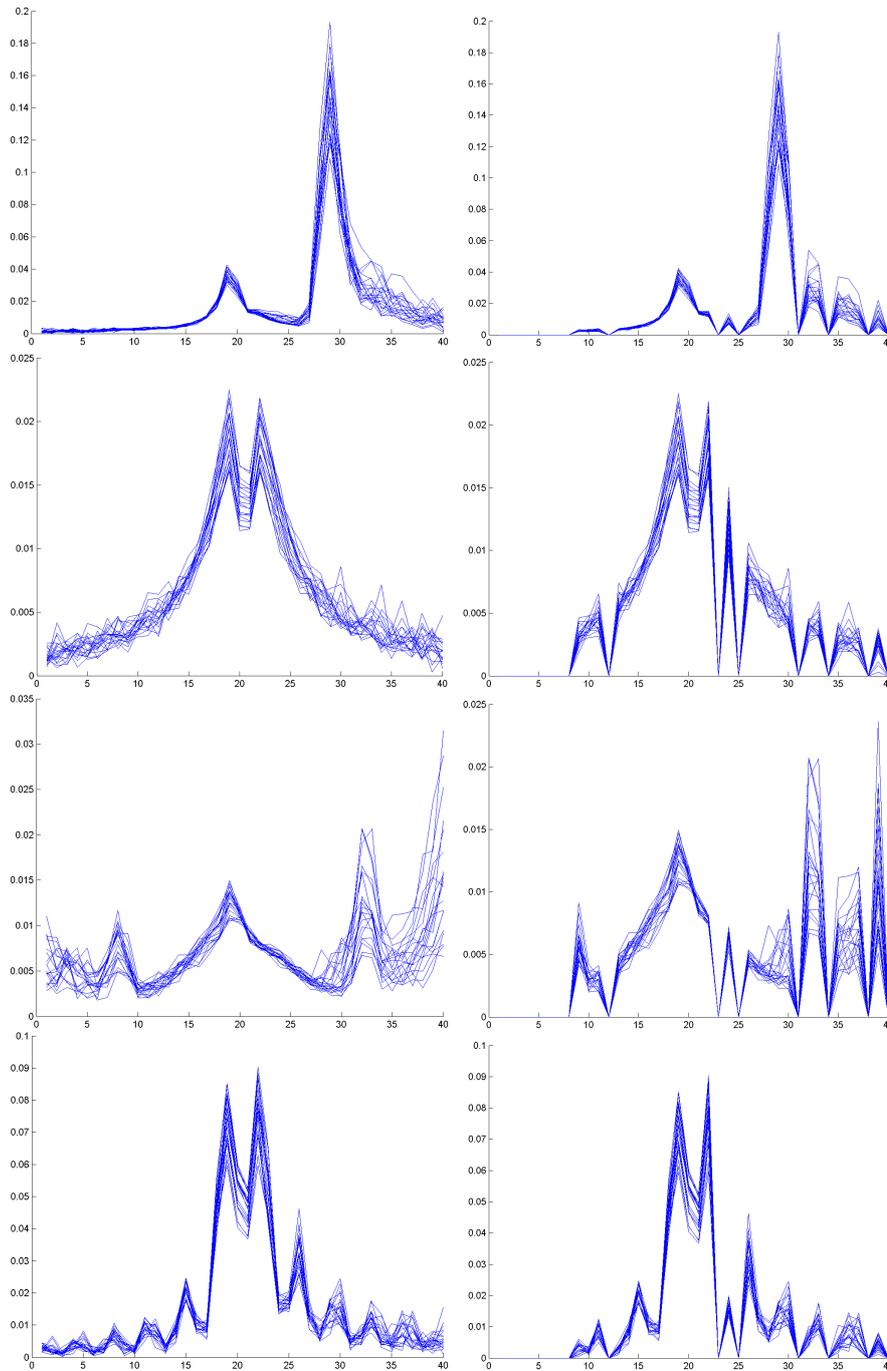


FIGURE D.1 – Superposition des PS algébriques niveaux de gris initiaux des 20 imagettes.

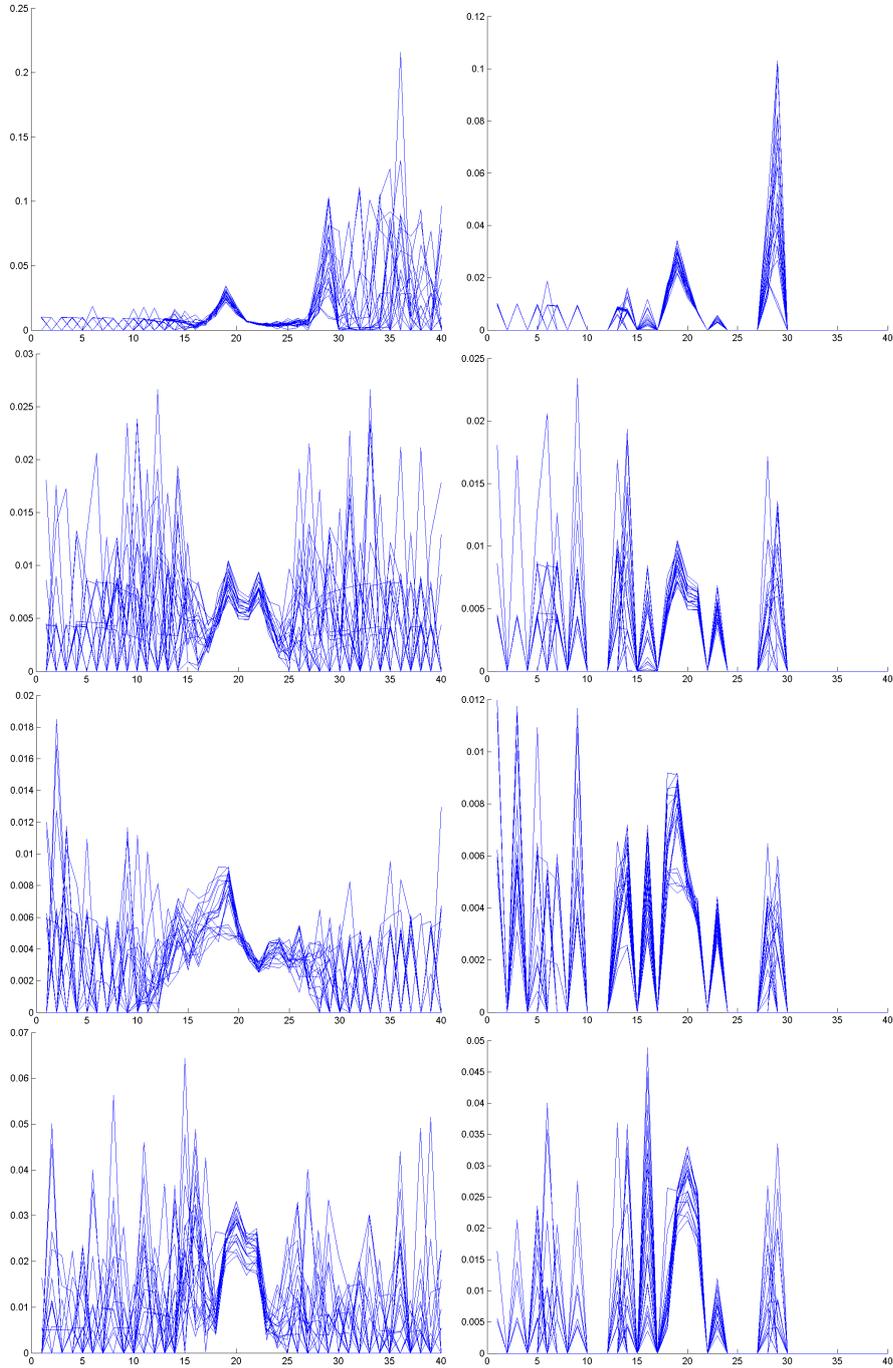


FIGURE D.2 – Superposition des PS géodésiques niveaux de gris initiaux des 20 imagettes.

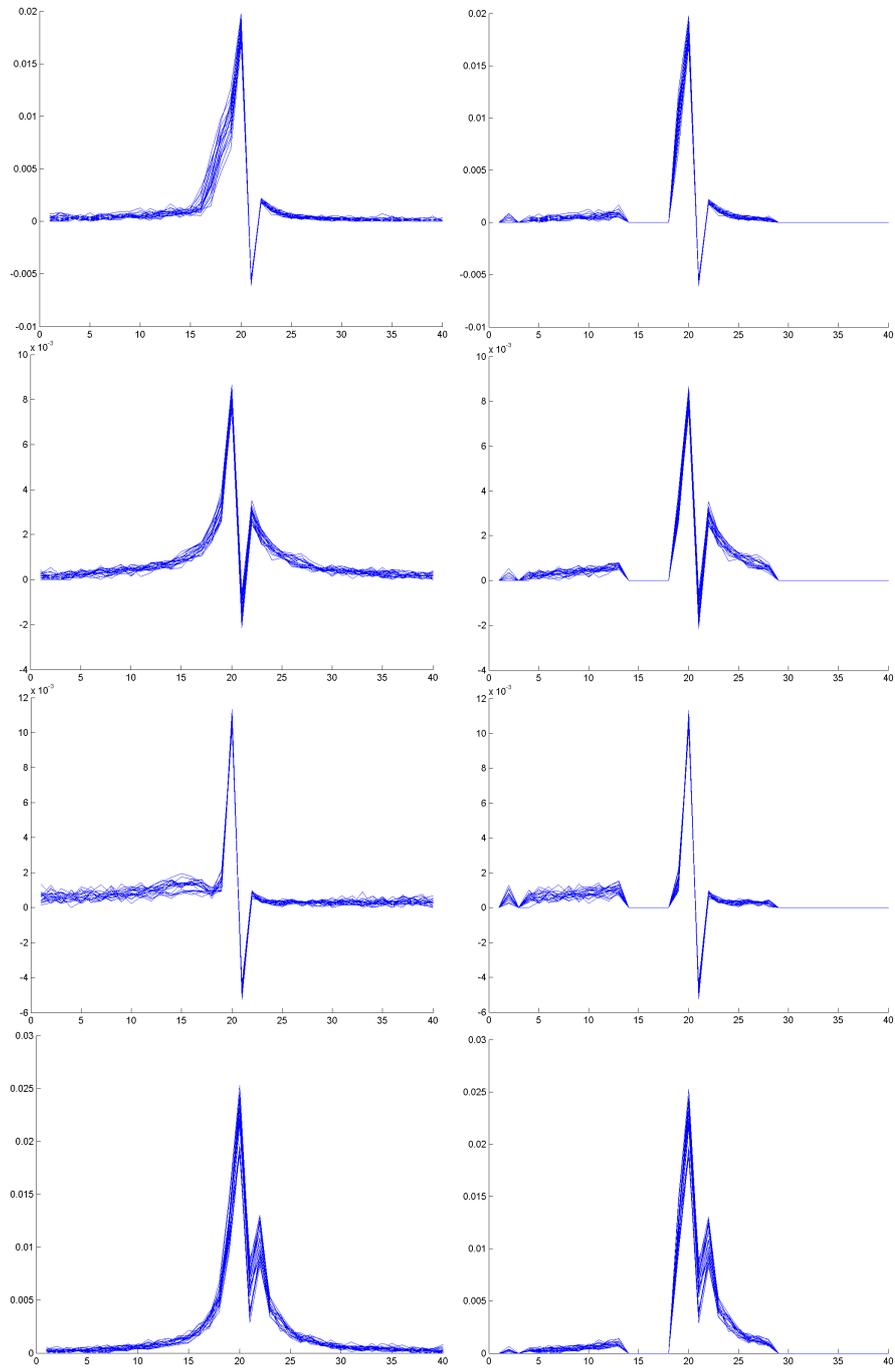


FIGURE D.3 – Superposition des PS d'aire niveaux de gris initiaux des 20 imagettes.

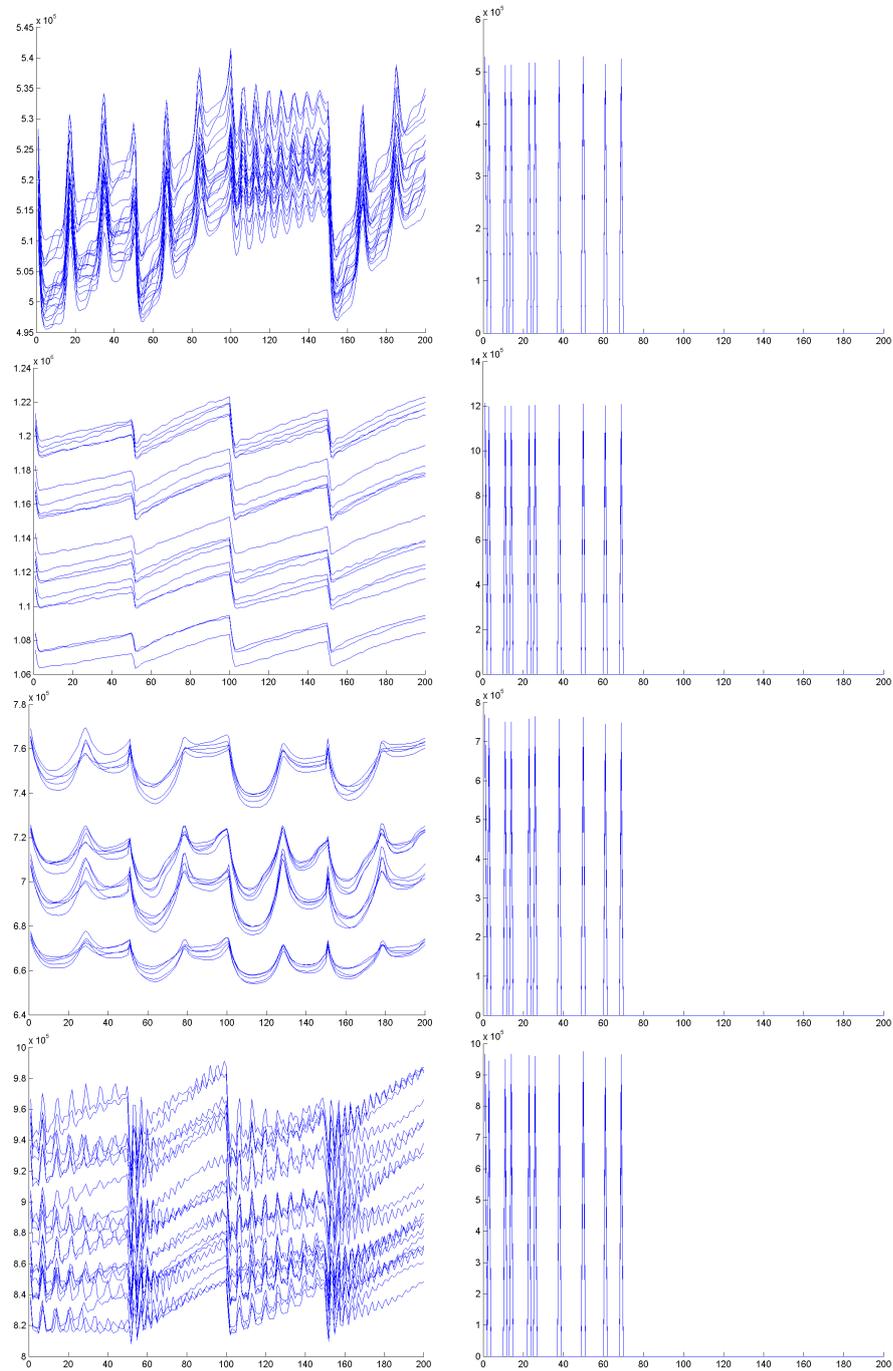


FIGURE D.4 – Superposition des covariances niveaux de gris initiales des 20 imgettes.

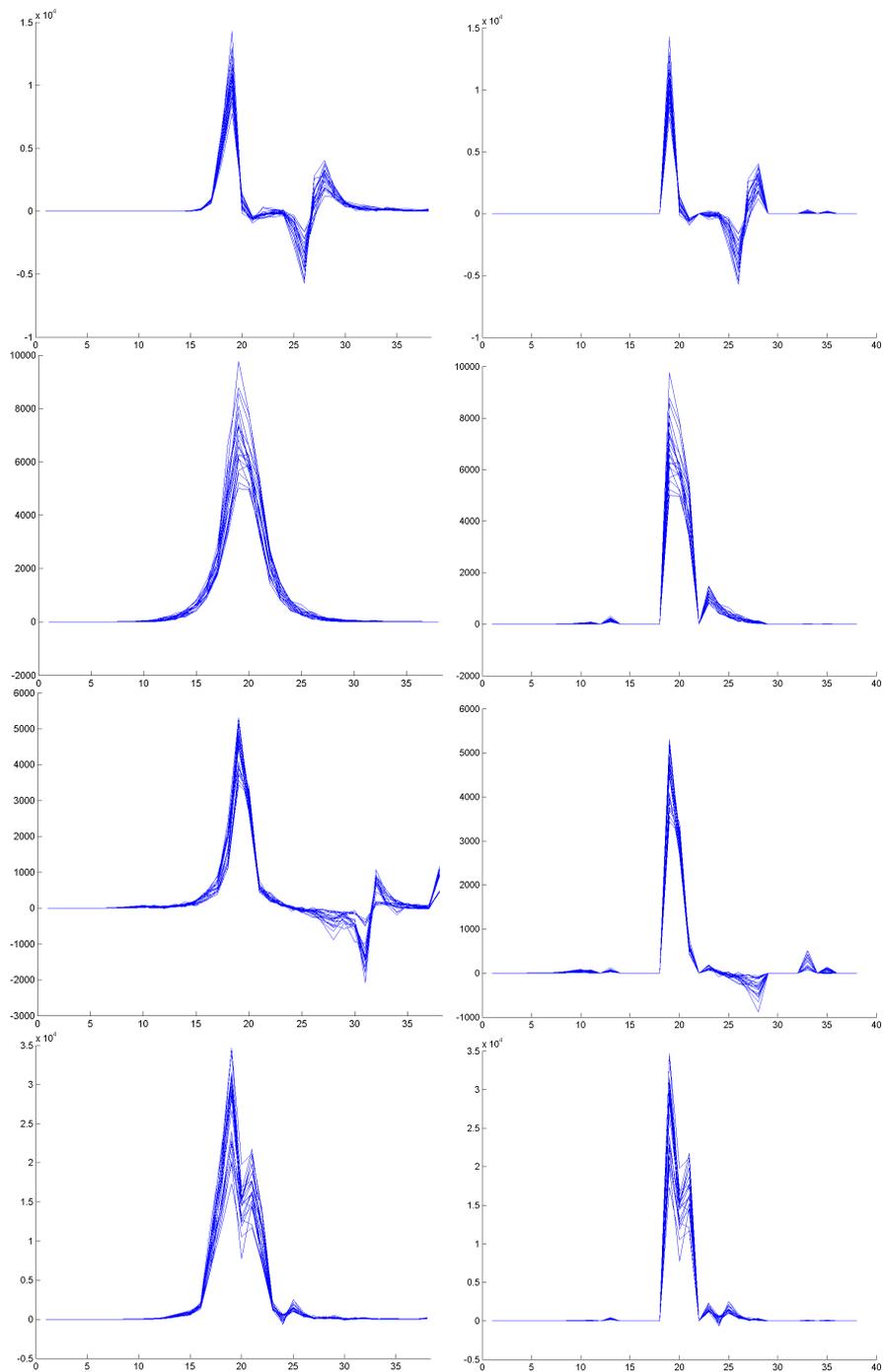


FIGURE D.5 – Superposition des signatures fractales niveaux de gris initiales des 20 images.

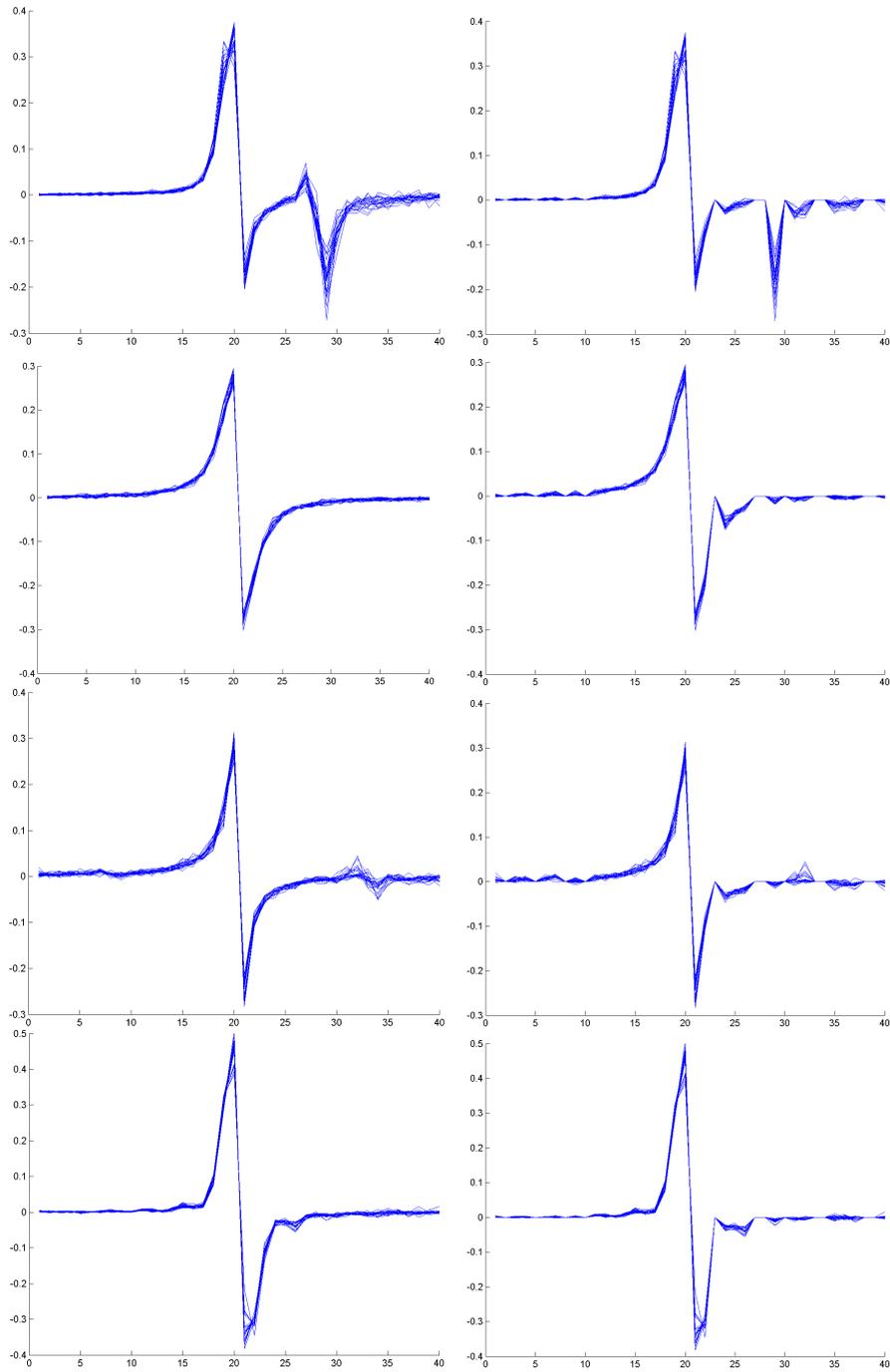


FIGURE D.6 – Superposition des PS algébriques couleur initiaux des 20 imagettes.

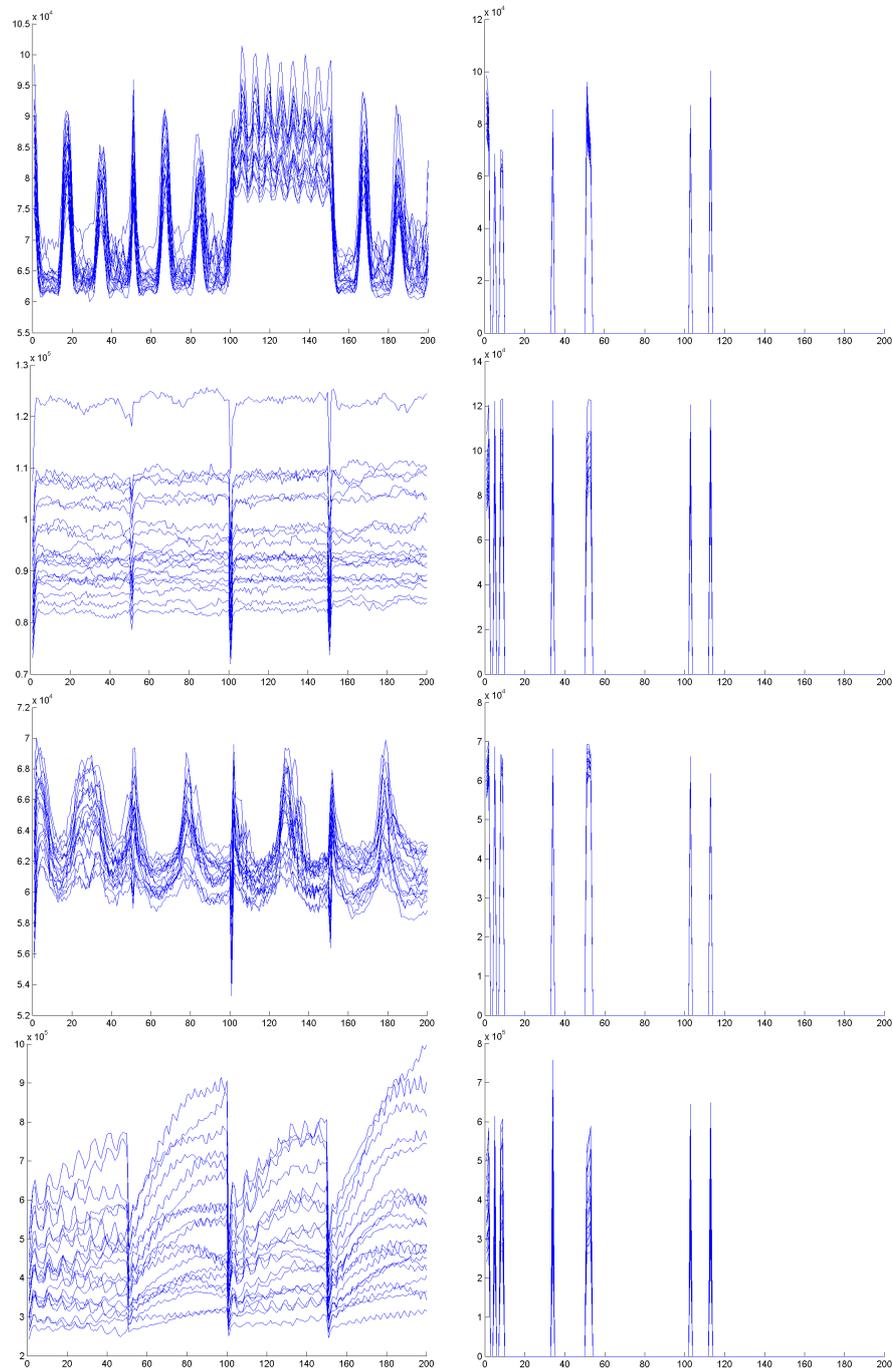


FIGURE D.7 – Superposition des covariances couleur initiales des 20 imagettes.

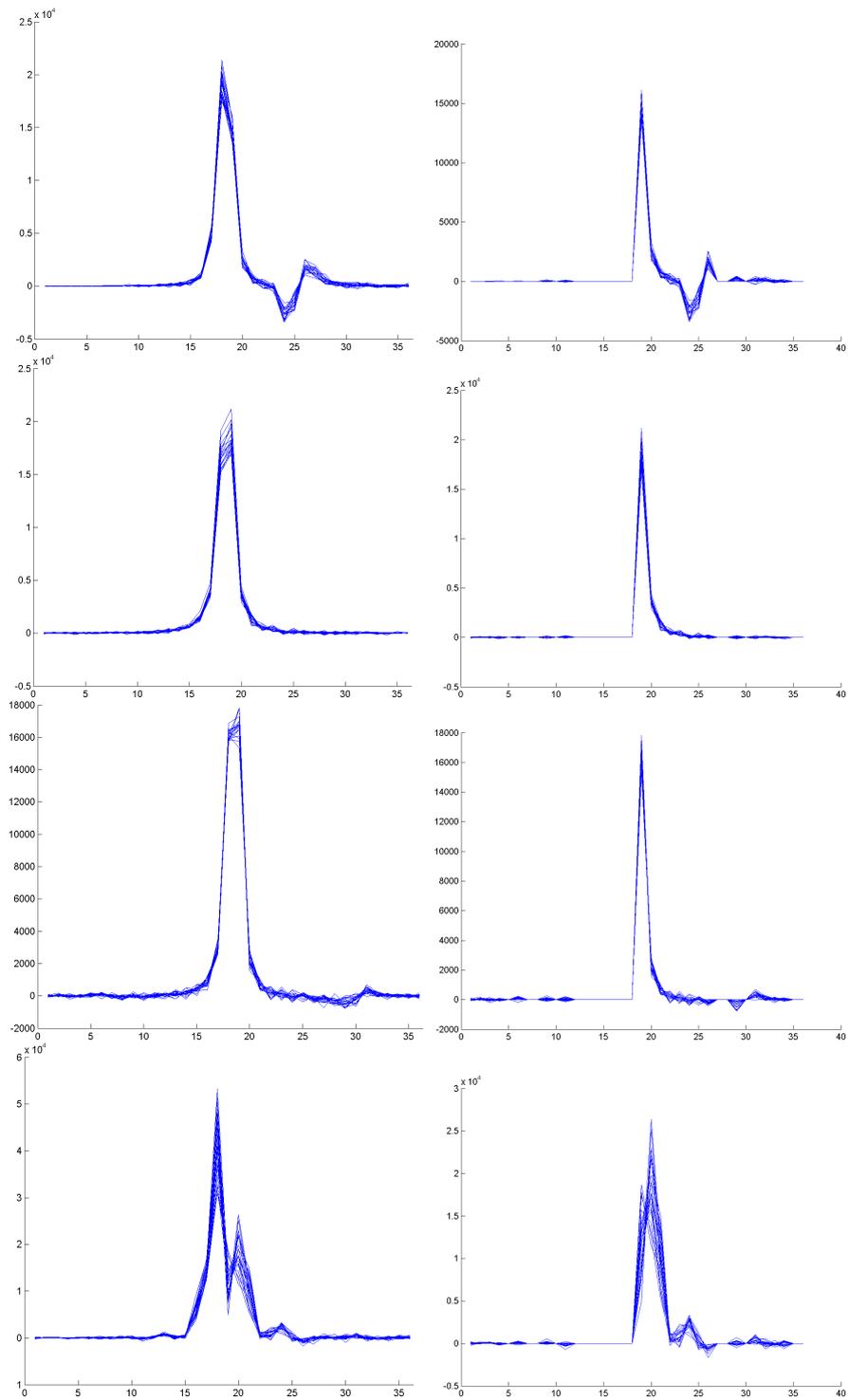


FIGURE D.8 – Superposition des signatures fractales couleur initiales des 20 imagettes.

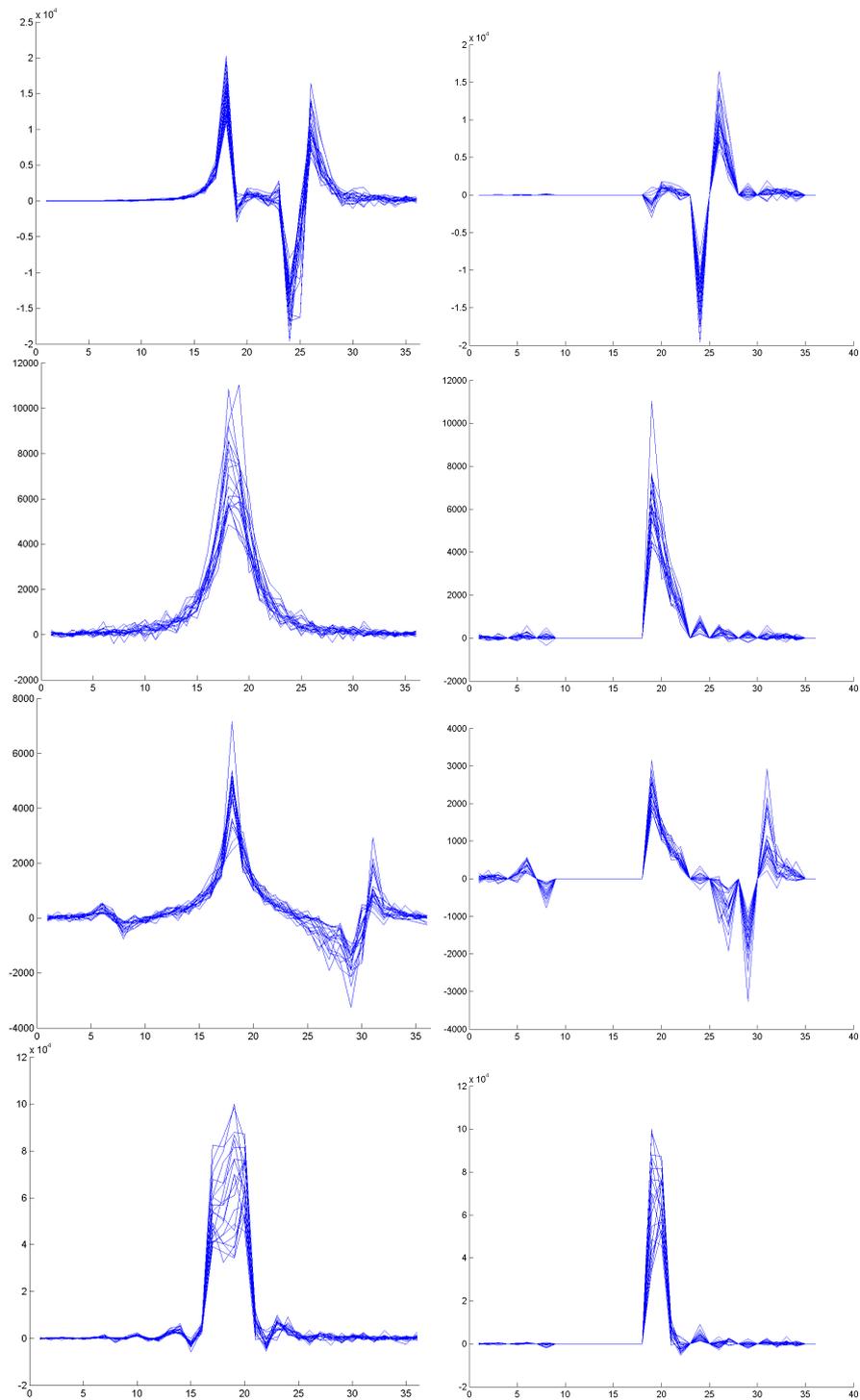


FIGURE D.9 – Superposition des signatures fractales couleur initiales avec intégrale d'aire des 20 imagettes.

D.3 Matrice de confusions obtenues pour la classification

Les figures D.10 à D.15 montrent les matrices de confusion obtenues lors de la classification du chapitre 5 (voir 5.3.3).

Classification KPPV

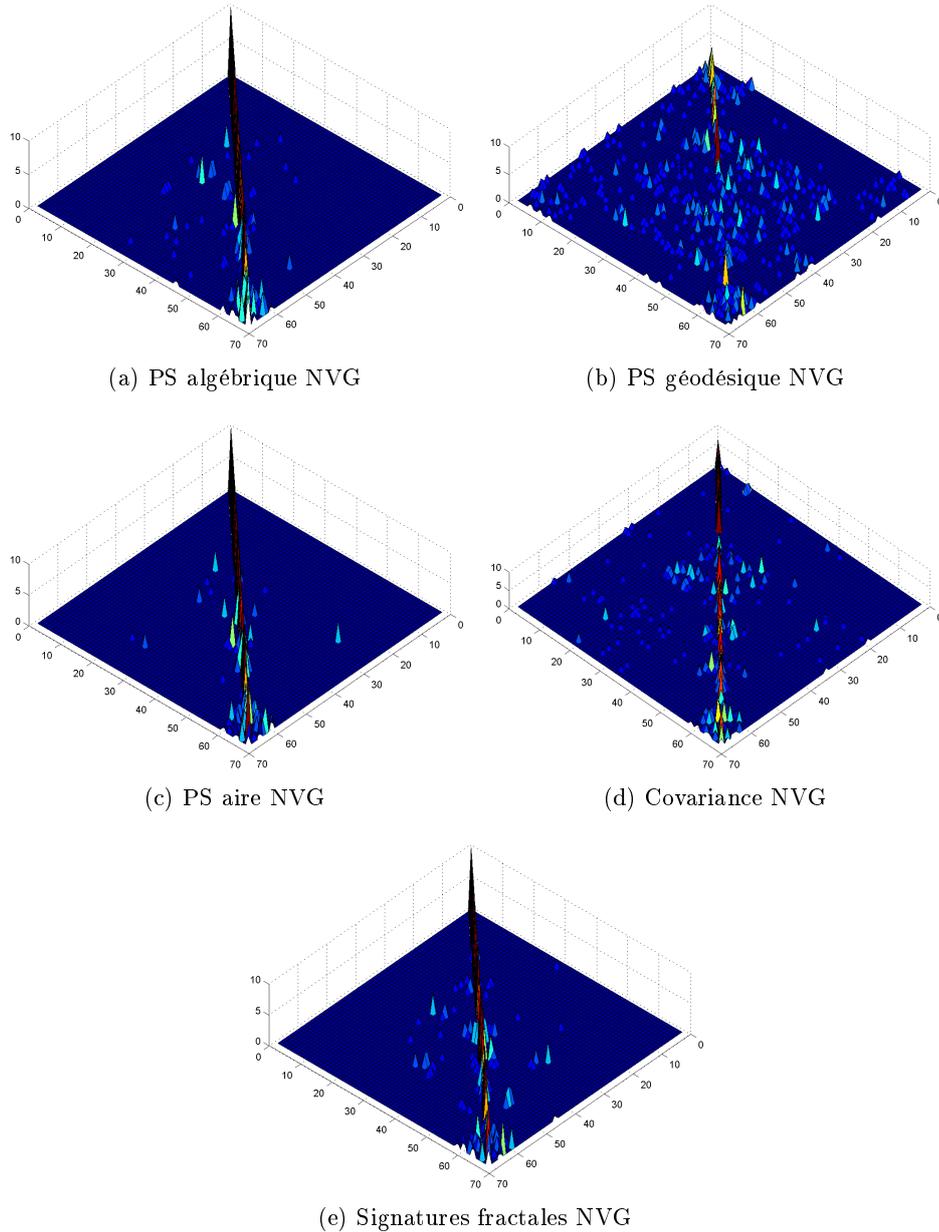


FIGURE D.10 – Matrices de confusion pour les spectres niveaux de gris pour la méthode des KPPV ($k=1$).

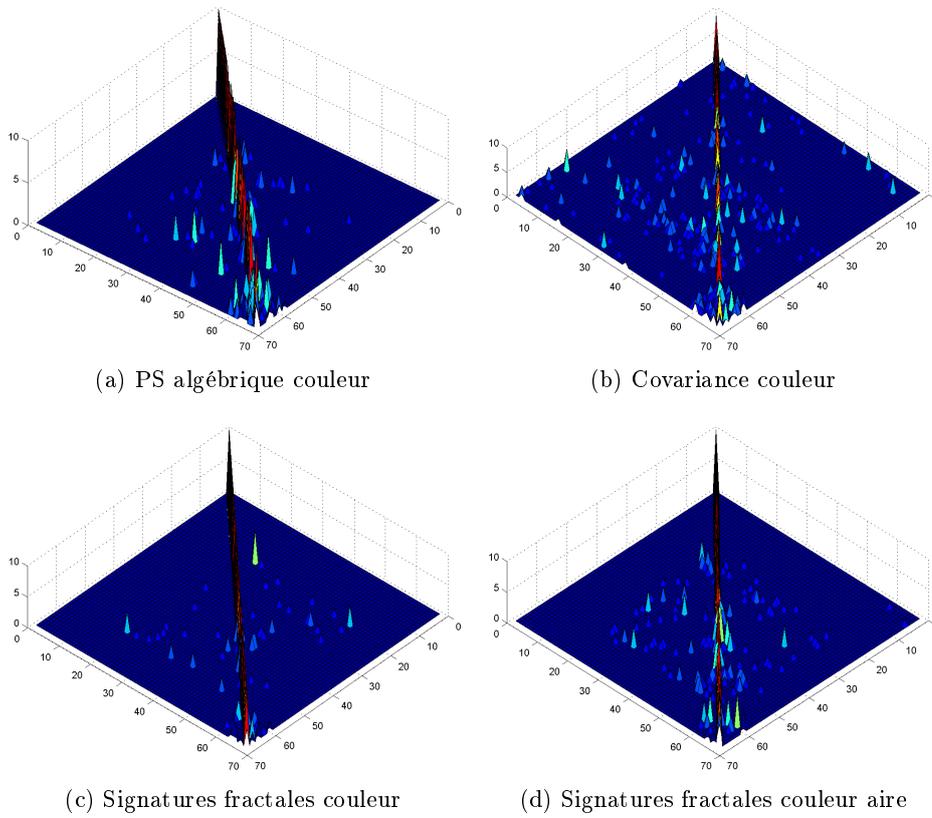
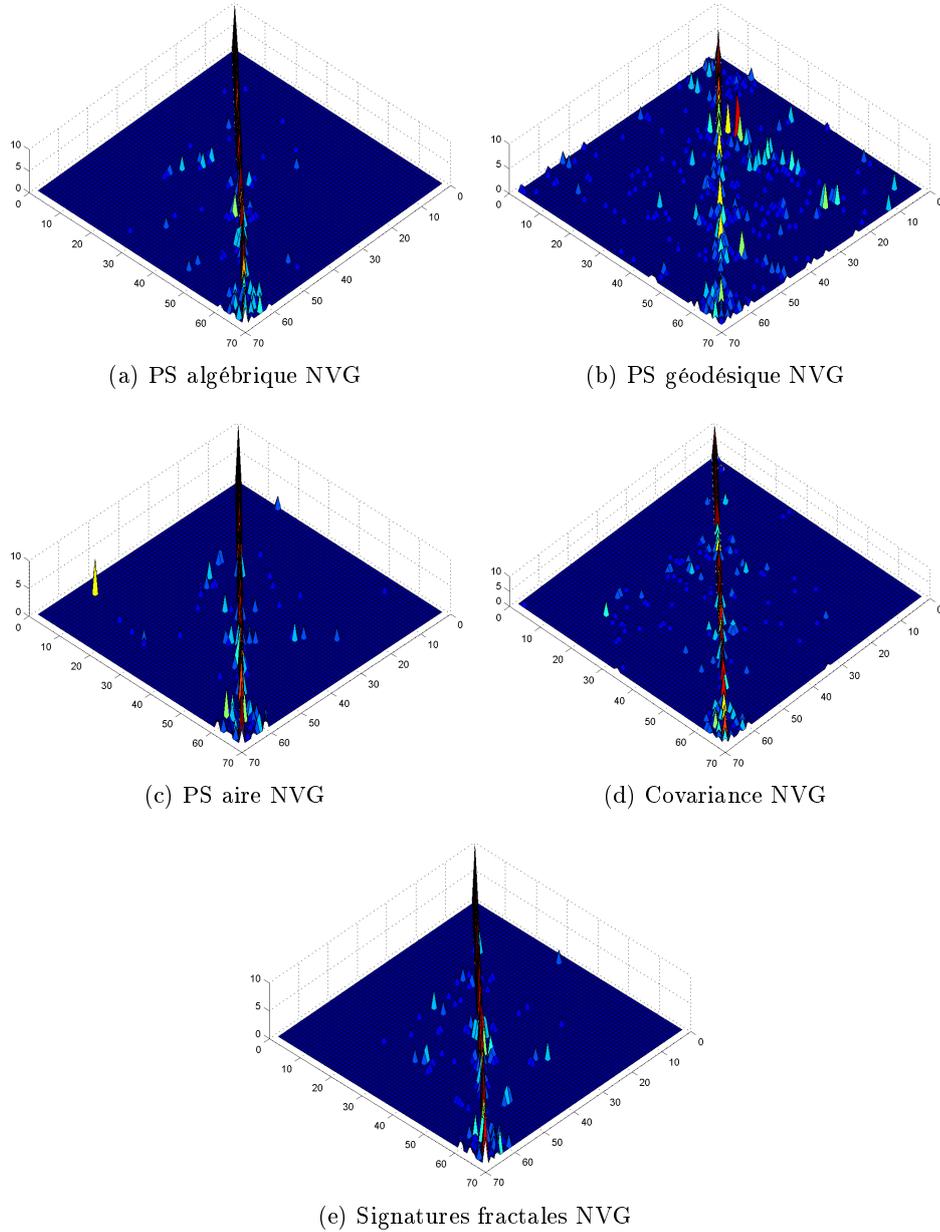


FIGURE D.11 – Matrices de confusion pour les spectres couleur pour la méthode des KPPV ($k=1$).

Classification KPPV + AFD

FIGURE D.12 – Matrices de confusion pour les spectres niveaux de gris pour la méthode des KPPV ($k=1$) précédé d'une AFD.

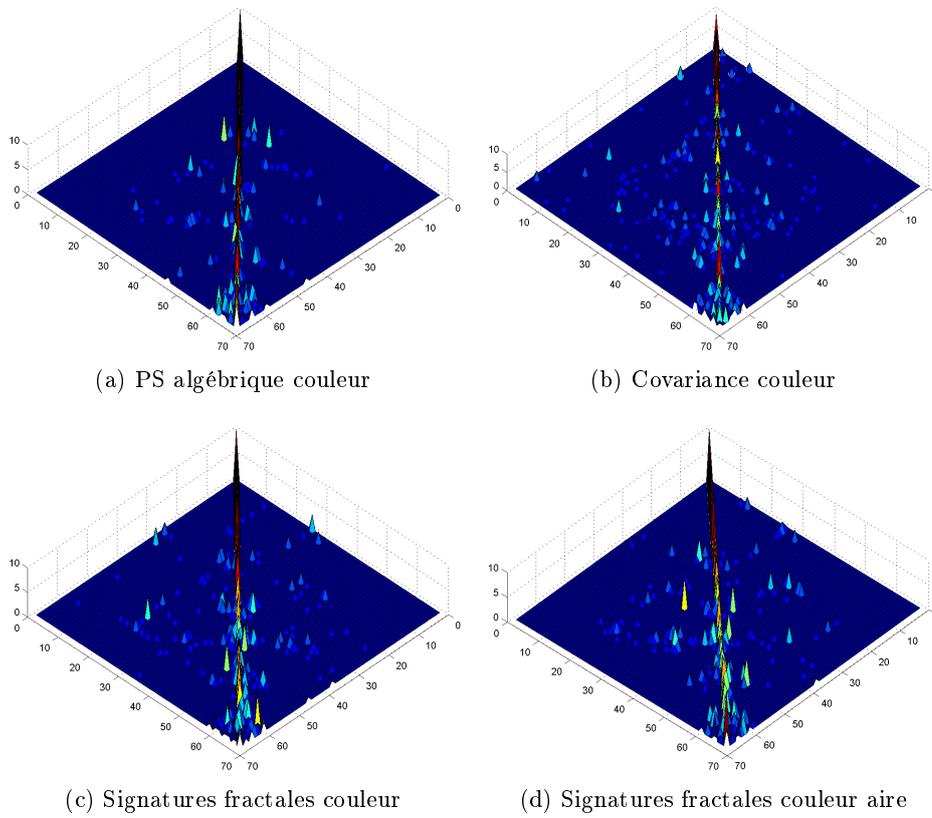


FIGURE D.13 – Matrices de confusion pour les spectres couleur pour la méthode des KPPV ($k=1$) précédé d'une AFD.

Classification KPPV + mean

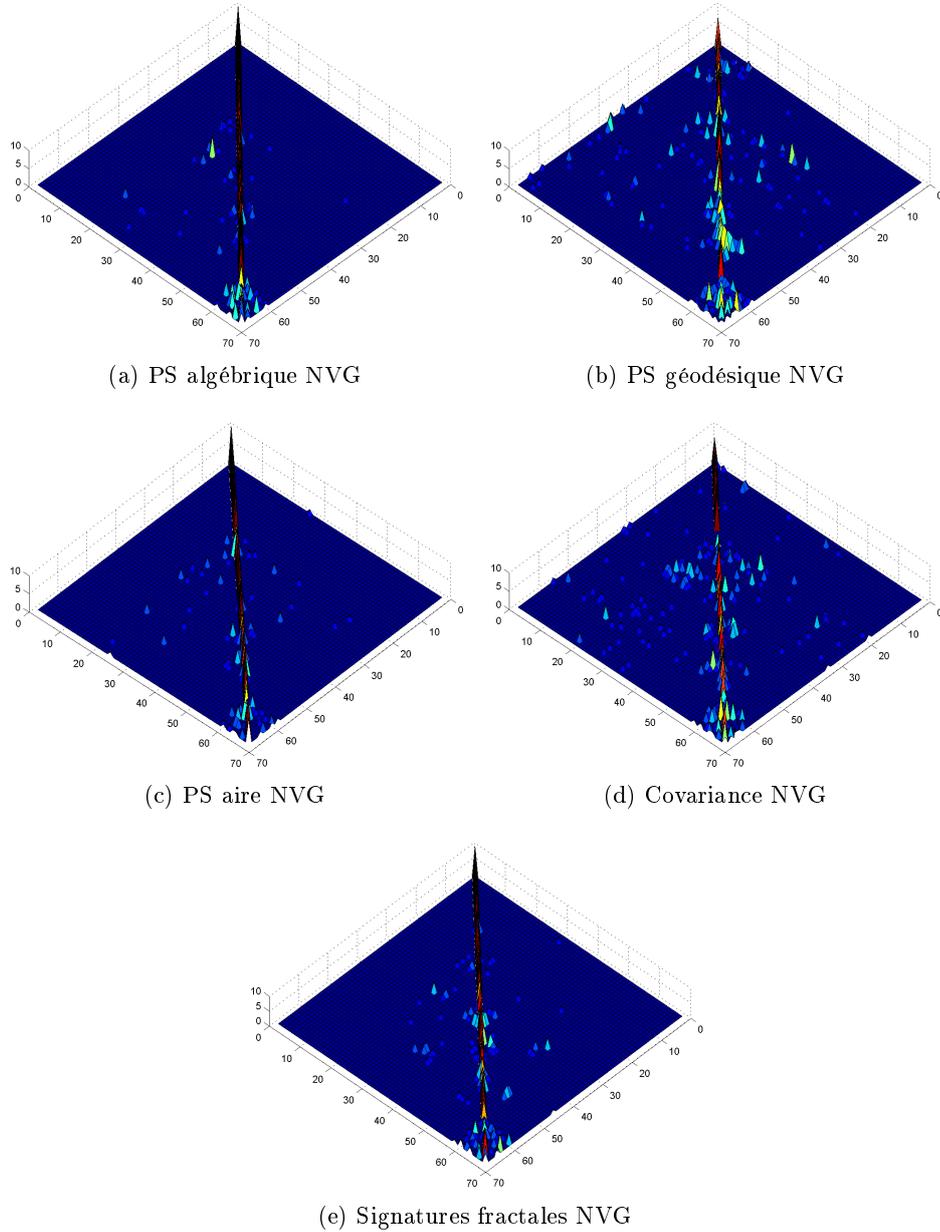


FIGURE D.14 – Matrices de confusion pour les spectres niveaux de gris auxquels est ajoutée la moyenne couleur de l'image pour la méthode des KPPV ($k=1$).

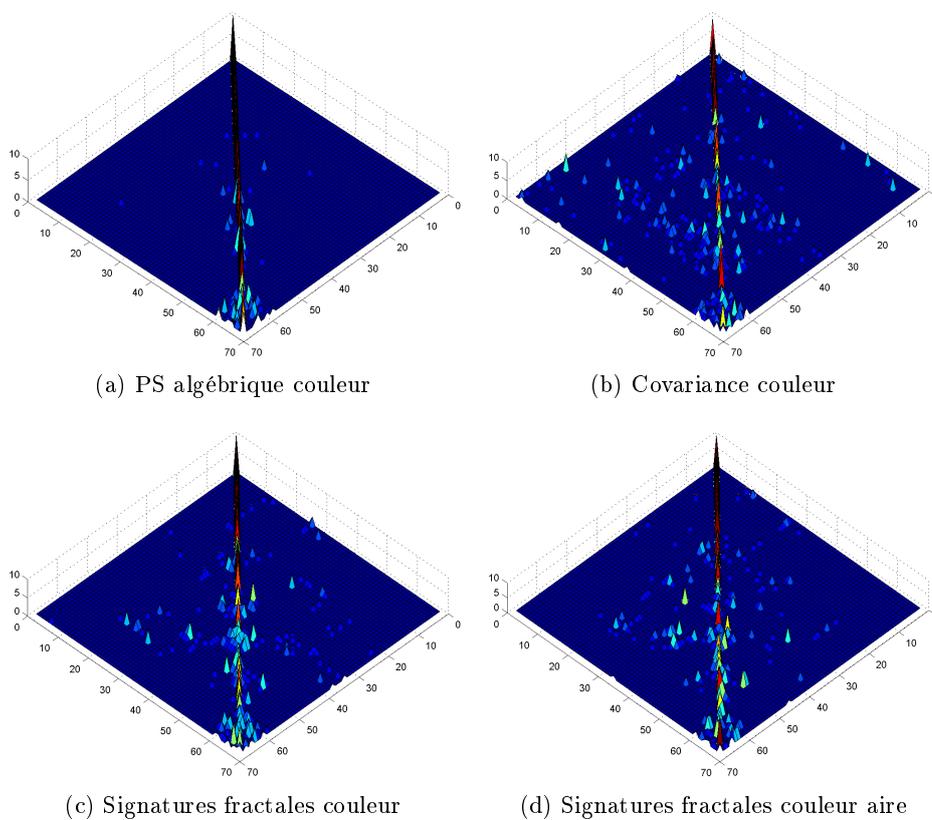


FIGURE D.15 – Matrices de confusion pour les spectres couleur auxquels est ajoutée la moyenne couleur de l'image pour la méthode des KPPV ($k=1$).

Bibliographie

- [1] J. Lee A, C. Jutten, and M. Verleysen. Non-linear ica by using isometric dimensionality reduction. In *Independent Component Analysis and Blind Signal Separation*, pages 710–717. Springer, 2004. (p. 97.)
- [2] H. Akçay and S. Aksoy. Automatic detection of geospatial objects using multiple hierarchical segmentations. *Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 46(7) :2097–2111, 2008. (p. 96.)
- [3] H.M. Al-Otum. Morphological operators for color image processing based on mahalanobis distance measure. *Optical Engineering*, 42(9) :2595–2606, 2003. (p. 21.)
- [4] J. Angulo-Lopez. *Morphologie mathématique et indexation d'images couleur. Application à la microscopie en biomédecine*. PhD thesis, Ecole de Mines de Paris, Paris, Decembre 2003. (p. 8, 28 et 29.)
- [5] J. Angulo-Lopez. Morphological color processing based on distances. application to color denoising and enhancement by centre and contrast operators. In *Proc. of VIIP*, pages 314–319, 2005. (p. 23 et 27.)
- [6] J. Angulo-Lopez. Geometric algebra colour image representations and derived total orderings for morphological operators - part 1 : Colour quaternions. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 21(1) :33–48, January 2010. (p. 27.)
- [7] J. Angulo-Lopez and J. Serra. Morphological coding of color images by vector connected filters. In *Seventh International Symposium on Signal Processing and Its Applications*, volume 1, pages 69–72. IEEE, 2003. (p. 27.)
- [8] E. Aptoula. *Analyse d'images couleur par morphologie mathématique, application à la description, l'annotation et la recherche d'images*. PhD thesis, Univ. L. Pasteur, Strasbourg, 2008. (p. 26.)
- [9] E. Aptoula. Comparative study of moment based parameterization for morphological texture description. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2012. (p. 134.)
- [10] E. Aptoula, S. Lefèvre C., and Ronse. A hit-or-miss transform for multivariate images. *Pattern Recognition Letters*, 30(8) :760–764, 2009. (p. 187 et 200.)
- [11] E. Aptoula and S. Lefèvre. A comparative study on multivariate mathematical morphology. *Pattern Recognition*, 40 :2914–292, 2007. (p. 8.)
- [12] E. Aptoula and S. Lefèvre. On the morphological processing of hue. *Image and Vision Computing*, 27(9) :1394–1401, 2009. (p. 29.)
- [13] E. Aptoula, S. Lefèvre, C. Collet, et al. Mathematical morphology applied to the segmentation and classification of galaxies in multispectral images. In *Proceedings of the EURASIP European Signal Processing Conference*, 2006. (p. 22.)
- [14] V. Arvis, C. Debain, M. Berducat, and A. Benassi. Generalization of the cooccurrence matrix for colour images : application to colour texture classification. *Image Analysis and Stereology*, 23(1) :63–72, 2004. (p. 67, 155 et 168.)

- [15] G.J.F. Banon and S.D. Faria. Morphological approach for template matching. In *Computer Graphics and Image Processing, 1997. Proceedings., X Brazilian Symposium on*, pages 171–178. IEEE, 1997. (p. 185.)
- [16] C. Barat, C. Ducottet, et al. Pattern matching using morphological probing. In *Image Processing, 2003. ICIP 2003. Proceedings. 2003 International Conference on*, volume 1, pages I–369. IEEE, 2003. (p. viii, 186, 187, 190 et 215.)
- [17] V. Barnett. The ordering of multivariate data. *Journal of the Royal Statistical Society A*, 139(3) :318–354, 1976. (p. 8 et 20.)
- [18] J.A. Benediktsson, M. Pesaresi, and K. Amason. Classification and feature extraction for remote sensing images from urban areas based on morphological transformations. *Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 41(9) :1940–1949, 2003. (p. 96.)
- [19] P. Bhattacharya, W. Zhu, and K. Qian. Shape recognition method using morphological hit-or-miss transform (journal paper). *optical engineering*, 34(06) :1718–1725, 1995. (p. 179.)
- [20] IEC BIPM, ILAC IFCC, IUPAP IUPAC, and OIML ISO. International vocabulary of metrology—basic and general concepts and associated terms (vim), 3rd edn. jcgmm 200, 2008. (p. 67 et 68.)
- [21] G. Birkhoff. Théorie et applications des treillis. *Annales de l'I.H.P.*, 11(5) :227–240, 1949. (p. 53 et xviii.)
- [22] P. Bonton, C. Fernandez-Maloigne, and A. Tremeau (ouvrage collectif). *Image Numérique Couleur : de l'acquisition au traitement*. Dunod, 2004. (p. 13, 19, 24, 49 et xxi.)
- [23] P. Brodatz. *Textures : a photographic album for artists and designers*, volume 66. Dover New York, 1966. (p. 120.)
- [24] L.M. Bruce, C.H. Koger, and J. Li. Dimensionality reduction of hyperspectral data using discrete wavelet transform feature extraction. *Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 40(10) :2331–2338, 2002. (p. 97.)
- [25] L. Busin, N. Vandenbroucke, and L. Macaire. *volume 151 of Advances in Imaging and Electron Physics*, chapter 2 : Color spaces and image segmentation, pages 65–168. Number ISSN : 1076-5670 in ISI Web of Knowledge, IF 0.426 (2006 JCR Science Edition). Elsevier Inc., Orlando (FL -USA), 2008. (p. 8.)
- [26] J. Chanussot and P. Lambert. Total ordering based on space filling curves for multi-valued morphology. In *4th International Symposium on Mathematical Morphology and its Applications (ISMM'98)*, pages 51–58, Amsterdam(The Netherlands), June 1998. (p. 8, 24 et 25.)
- [27] Commission Internationale de l'Éclairage CIE. Industrial colour-difference evaluation. Technical Report 116, CIE Publication, 1995. (p. xxi.)
- [28] Commission Internationale de l'Éclairage CIE. Technical Report : Improvement to Industrial Colordifference Evaluation. Technical Report 142, CIE Publication, 2001. (p. xxi.)
- [29] Commission Internationale de l'Éclairage CIE. Colorimetry - part 4 : Cie 1976 l*a*b* colour spaces. Technical report, CIE Publication, december 2008. (p. 17.)

- [30] F.J.J. Clarke, R. McDonald, and D. Rigg. Modification to the jpc 79 colour difference formula. *Journal of Society of Dyers Colour*, 100(4) :128–132, 1984. (p. xxii.)
- [31] M.L Comer and E.J. Delp. Morphological operations for color image processing. *Journal of Electronic Imaging*, 8(3) :279–289, July 1999. (p. 23 et 24.)
- [32] F. Dell’Acqua, P. Gamba, A. Ferrari, J.A. Palmason, J.A Benediktsson, and K. Arnanon. Exploiting spectral and spatial information in hyperspectral urban data with high resolution. *Geoscience and Remote Sensing Letters*, 1(4) :322–326, 2004. (p. 97.)
- [33] B.H. Dhandra and R. Hegadi. Classification of abnormal endoscopic images using rgb color and morphological watershed segmentation. In *Thirteenth International Conference on Advanced Computing and Communications*, pages 14–17, 2005. (p. 16.)
- [34] M. Cordeiro d’Ornellas and J.A.T. Borges da Costa. Color mathematical morphology based on partial ordering of spectra. In *Symposium on Computer Graphics and Image Processing*, pages 37–44. IEEE, 2007. (p. 22.)
- [35] H. Du, H. Qi, X. Wang, R. Ramanath, and W.E. Snyder. Band selection using independent component analysis for hyperspectral image processing. In *Applied Image Pattern Recognition (AIPR) Workshop*, pages 93–98. IEEE Computer Society, 2003. (p. 97.)
- [36] B. Dubuc, SW Zucker, C. Tricot, JF Quiniou, and D. Wehbi. Evaluating the fractal dimension of surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 425(1868) :113–127, 1989. (p. 73 et 135.)
- [37] M.D. Fairchild. *Color appearance models*. John Wiley & Sons, 2005. (p. 16.)
- [38] K.J. Falconer. *Fractal geometry : Mathematical foundations and applications*, 1990. (p. 122.)
- [39] C. Fernandez-Maloigne. *Advanced color image processing and analysis*. Springer, 2013. (p. 67.)
- [40] C. Fernandez-Maloigne, F. Robert-Inacio, L. Macaire, et al. *Couleur numérique : acquisition, perception, codage et rendu*. Hermès science publications-Lavoisier, 2012. (p. 19.)
- [41] G.D. Finlayson, S.D. Hordley, and P. Morovic. Multispectral image database. <http://www2.cmp.uea.ac.uk/Research/compvis/MultiSpectralDB.htm>. (p. 108, 110 et 212.)
- [42] F. Flitti. *Techniques de réduction de données et analyse d’images multispectrales astronomiques par arbres de Markov*. PhD thesis, Université Louis Pasteur-Strasbourg I, 2005. (p. 96.)
- [43] F. Flitti, C. Collet, and F. Bonnarel. Acp et aci pour la réduction de données en imagerie astronomique multispectrale. In *19° Colloque sur le traitement du signal et des images*. G.Roupe d’Etudes du Traitement du Signal et des Images (GRETSI), 2003. (p. 97.)
- [44] F. Flórez-Revuelta. Ordering of the rgb space with a growing self-organizing network. application to color mathematical morphology. In *Artificial Neural Networks : Biological Inspirations–ICANN*, pages 385–390. Springer, 2005. (p. 8 et 25.)

- [45] DIN Deutsches Institut für Normung. 6176. Farbmétrische Bestimmung von Farbabständen bei Körperfarben nach der DIN99-Formel (Colorimetric evaluation of colour differences of surface colours according to DIN99 formula—available in English), Burggrafenstraße 6, 10787 Berlin, Germany. (p. xxii.)
- [46] S. Subramanian and N. Gat, M. Sheffield, J. Barhen, and N. Toomarian. Methodology for hyperspectral image classification using novel neural network. In *AeroSense*, pages 128–137. International Society for Optics and Photonics, 1997. (p. 95.)
- [47] D.D. Gomez, L.H. Clemmensen, B.K. Ersbøll, and J.M. Carstensen. Precise acquisition and unsupervised segmentation of multi-spectral images. *Computer Vision and Image Understanding*, 106(2) :183–193, 2007. (p. 97.)
- [48] J. Goutsias, H.J. Heijmans, and K. Sivakumar. Morphological operators for image sequences. *Computer Vision and Image Understanding*, 62(3) :326–346, 1995. (p. 21.)
- [49] H. Hadwiger. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, volume 93. Springer Berlin, 1957. (p. ii.)
- [50] P. Hall and K.C. Li. On almost linearity of low dimensional projections from high dimensional data. *The Annals of Statistics*, pages 867–889, 1993. (p. 96.)
- [51] J. Ham, Y. Chen, M.M. Crawford, and J. Ghosh. Investigation of the random forest framework for classification of hyperspectral data. *Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 43(3) :492–501, 2005. (p. 95.)
- [52] A. Hanbury. *Morphologie mathématique sur le cercle unité*. PhD thesis, ENSM, Paris, Mars 2002. (p. 29 et 197.)
- [53] A. Hanbury, U. Kandaswamy, and D.A. Adjeroh. Illumination-invariant morphological texture classification. In *40 Years On Mathematical Morphology*, pages 377–386. Springer, 2005. (p. 155 et 178.)
- [54] A. Hanbury and J. Serra. Morphological operators on the unit circle. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(12) :1842–1850, December 2001. (p. 8 et 28.)
- [55] R.M. Haralick. Statistical and structural approaches to texture. In *Proceedings of IEEE*, volume 67, pages 786–804, May 1979. (p. 120.)
- [56] R.M. Haralick, S.R. Sternberg, and X. Zhuang. Image analysis using mathematical morphology. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 9(4) :532–550, July 1987. (p. 8.)
- [57] N.R. Harvey, R. Porter, and J. Theiler. Ship detection in satellite imagery using rank-order grayscale hit-or-miss transforms. In *SPIE Defense, Security, and Sensing*, pages 770102–770102. International Society for Optics and Photonics, 2010. (p. 187.)
- [58] H.J.A.M. Heijmans and C. Ronse. The algebraic basis of mathematical morphology : I. dilations and erosions. *CVGIP*, 50(3) :245–295, June 1990. (p. 8, 11, 53 et vi.)
- [59] O.J. Hernandez, J. Cook, M. Griffin, C. De Rama, and M. McGovern. Classification of color textures with random field models and neural networks. *Journal of Computer Science & Technology*, 5, 2005. (p. 120.)
- [60] G. Hughes. On the mean accuracy of statistical pattern recognizers. *Transactions on Information Theory*, 14(1) :55–63, 1968. (p. 96.)

- [61] T.T. Ignace. *Pattern Spectra Algorithms for Pattern Recognition*. PhD thesis, Tshwane University of Technology, 2006. (p. 132.)
- [62] R.A. Peters II. Mathematical morphology for angle-valued images. In *Electronic Imaging*, pages 84–94. International Society for Optics and Photonics, 1997. (p. 29.)
- [63] M. Ivanovici, A. Caliman, N. Richard, and C. Fernandez-Maloigne. Towards a multivariate probabilistic morphology for colour images. *6th European Conference on Colour in Graphics, Imaging, and Vision*, 2012. (p. 195.)
- [64] M. Ivanovici and N. Richard. Fractal dimension of colour fractal images. *IEEE TRansactions on Image Processing*, PP(99) :DOI : 10.1109/TIP.2010.2059032, July 2010. (p. 75 et 81.)
- [65] L. Jimenez and D. Landgrebe. High dimensional feature reduction via projection pursuit. In *International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS). Surface and Atmospheric Remote Sensing : Technologies, Data Analysis and Interpretation*, volume 2, pages 1145–1147. IEEE, 1994. (p. 97.)
- [66] S. Kaewpijit, J. Le Moigne, and T. El-Ghazawi. Automatic reduction of hyperspectral imagery using wavelet spectral analysis. *Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 41(4) :863–871, 2003. (p. 97.)
- [67] N. Kambhatla and T.K. Leen. Dimension reduction by local principal component analysis. *Neural Computation*, 9(7) :1493–1516, 1997. (p. 97.)
- [68] N. Keshava. Distance metrics and band selection in hyperspectral processing with applications to material identification and spectral libraries. *Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 42(7) :1552–1565, 2004. (p. 97.)
- [69] R.L. Kettig and D.A. Landgrebe. Classification of multispectral image data by extraction and classification of homogeneous objects. *Transactions on Geoscience Electronics*, 14(1) :19–26, 1976. (p. 95.)
- [70] M. Khosravi and R.W. Schafer. Template matching based on a grayscale hit-or-miss transform. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 5(6) :1060–1066, 1996. (p. 184.)
- [71] P. Lambert and S. Gaspard. Enhancement and registration of multichannel images based on vector order filter. In *10th European Signal Processing Conference (EUSIP-CO'2000)*, pages 1357–1360, Tampere (Finland), september 2000. (p. 21 et 24.)
- [72] D.A. Landgrebe. *Signal theory methods in multispectral remote sensing*, volume 29. Wiley-Interscience, 2005. (p. 97.)
- [73] A. Ledda. *Mathematical Morphology in image processing*. PhD thesis, Ghent university, Faculty of sciences, Department of telecommunications and information processing, Belgique, 2007. (p. 25 et 132.)
- [74] S. Lefèvre. Extending morphological signatures for visual pattern recognition. In *IAPR Int. Workshop on Pattern Recognition in Information Systems (PRIS)*, pages 79–88, 2007. (p. 96.)
- [75] O. Lezoray, C. Meurie, and A. Elmoataz. A graph approach to color mathematical morphology. In *Symposium on Signal Processing and Information Technology*, pages 856–861. IEEE, 2005. (p. 25.)

- [76] J. Li and Y. Li. Multivariate mathematical morphology based on principal component analysis : initial results in building extraction. In *Proceedings of the 20th ISPRS*, volume 35, pages 1168–1173, 2004. (p. 25.)
- [77] G. Louverdis, M. I. Vardavoulia, I. Andreadis, and Ph. Tsalides. A new approach to morphological color image processing. *Pattern Recognition*, 35(8) :1733–1741, August 2002. (p. 28.)
- [78] D.L. MacAdam. Visual sensitivities to color differences in daylight. *JOSA*, 32(5) :247–273, 1942. (p. 16.)
- [79] B.B. Mandelbrot. *Fractals : Form, Chance, and Dimension*. W.H. Freeman and Company, 1977. (p. 72 et 135.)
- [80] P. Maragos. Pattern spectrum and multiscale shape representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7) :701–716, July 1989. (p. 8, 41, 137 et 177.)
- [81] P. Maragos and R.W. Schafer. Morphological filters - part i : Their set-theoretic analysis and relations to linear shift-invariant filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ASSP'87)*, 35(8) :1153, 1169 1987. (p. 8, 41 et xvi.)
- [82] P. Maragos and R.W. Schafer. Morphological filters - part ii : Their relations to median, order-statistic, and stack filter. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ASSP'87)*, 35(8) :1170, 1184 1987. (p. 41.)
- [83] P. Maragos and F.K. Sun. Measuring the fractal dimension of signals : morphological covers and iterative optimization. *IEEE Transactions on signal Processing*, 41(1) :108–121, Janvier 1993. (p. 73 et 135.)
- [84] D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal, and J. Malik. A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics. In *Proc. 8th Int'l Conf. Computer Vision*, volume 2, pages 416–423, July 2001. (p. 81.)
- [85] M.E. Martin, S.D. Newman, J.D. Aber, and R.G. Congalton. Determining forest species composition using high spectral resolution remote sensing data. *Remote Sensing of Environment*, 65(3) :249–254, 1998. (p. 95.)
- [86] A. Martínez-Usó, F. Pla, J.M. Sotoca, and P. García-Sevilla. Clustering-based hyperspectral band selection using information measures. *Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45(12) :4158–4171, 2007. (p. 97.)
- [87] G. Matheron. *Random sets and integral geometry*. John Wiley & Sons Inc, New-York, February 1975. (p. 7, 132 et iii.)
- [88] F. Melgani and L. Bruzzone. Classification of hyperspectral remote sensing images with support vector machines. *Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 42(8) :1778–1790, 2004. (p. 95.)
- [89] H. Minkowski. Volumen und oberfläche. *Mathematische Annalen*, 57(4) :447–495, 1903. (p. 122 et ii.)
- [90] B. Naegel, N. Passat, and C. Ronse. Grey-level hit-or-miss transforms—part i : Unified theory. *Pattern Recognition*, 40(2) :635–647, 2007. (p. 184.)

- [91] G. Noyel, J. Angulo, and D. Jeulin. Morphological segmentation of hyperspectral images. *Image Analysis & Stereology*, 26(3) :101–109, 2007. (p. 96 et 97.)
- [92] F. Odone, E. Trucco, and A. Verri. General purpose matching of grey level arbitrary images. *Visual Form 2001*, pages 573–582, 2001. (p. 182.)
- [93] Y.I. Ohta, T. Kanade, and T. Sakai. Color information for region segmentation. *Computer graphics and image processing*, 13(3) :222–241, 1980. (p. 17.)
- [94] T. Ojala, T. Maenpaa, M. Pietikainen, J. Viertola, J. Kyllonen, and S. Huovinen. Outex-new framework for empirical evaluation of texture analysis algorithms. In *Pattern Recognition*, volume 1, pages 701–706. IEEE, 2002. (p. 81 et 155.)
- [95] F. Ortiz and F. Torres. Vectorial morphological reconstruction for brightness elimination in colour images. *Real Time Imaging*, 10(6) :379–387, December 2004. (p. 28.)
- [96] F. Ortiz, F. Torres, J. Angulo-Lopez, and S. Puente. Comparative study of vectorial morphological operations in different color spaces. *Proceedings of Intelligent robots and computer vision XX : Algorithms, Techniques, and Active Vision*, 4572 :259–268, 2001. (p. 26.)
- [97] S. Peleg, J. Naor, R. Hartley, and D. Avnir. Multiple resolution texture analysis and classification. *IEEE PAMI*, 6 :518–523, Juillet 1984. (p. 73, 135 et 136.)
- [98] T. Peli. Multiscale fractal theory and object characterization. *Journal of Optical Society of America*, 7(6) :1101–1112, Juin 1990. (p. 73, 135 et 150.)
- [99] J. Pers, G. Vuckovic, S. Kovacic, and B. Dezman. A low-cost real-time tracker of live sport events. In *2nd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis*, pages 362–365. IEEE, 2001. (p. 16.)
- [100] M. Pesaresi and J.A. Benediktsson. A new approach for the morphological segmentation of high-resolution satellite imagery. *Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 39(2) :309–320, 2001. (p. 133.)
- [101] M. Petrou and P.G. Sevilla. *Image Processing : Dealing with texture*. John Wiley & Sons, Ltd, 2006. (p. 75 et 149.)
- [102] R. Picard, C. Graczyk, S. Mann, J. Wachman, L. Picard, and L. Campbell. Vistex benchmark database of color textured images. <http://vismod.media.mit.edu/vismod/imagery/VisionTexture/vistex.html> (accessed March 2010), 1995. Vision and Modeling Group of the MIT Media Laboratory, Cambridge, Massachusetts. (p. 65 et 86.)
- [103] M. Pietikäinen, T. Mäenpää, and J. Viertola. Color texture classification with color histograms and local binary patterns. In *Workshop on Texture Analysis in Machine Vision*, pages 109–112. Citeseer, 2002. (p. 155.)
- [104] A. Plaza, P. Martinez, R. Perez, and J. Plaza. A new approach to mixed pixel classification of hyperspectral imagery based on extended morphological profiles. *Pattern Recognition*, 37(6) :1097–1116, 2004. (p. 24.)
- [105] B. Raducanu and M. Grana. A grayscale hit-or-miss transform based on level sets. In *Image Processing, International Conference on*, volume 2, pages 931–933. IEEE, 2000. (p. 182.)

- [106] G. Rellier. *Analyse de textures dans l'espace hyperspectral par des méthodes probabilistes*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, 2002. (p. 96 et 97.)
- [107] H. Ren and C.I. Chang. Automatic spectral target recognition in hyperspectral imagery. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, 39(4) :1232–1249, 2003. (p. 95.)
- [108] N. Richard, A.S. Capelle, and C. Fernandez-Maloigne. A complete scheme for colour morphology with perceptual integration-. In *SPIE09, special session on Signal and Image Processing*, page à compléter, San-José (USA), Aout 2009. (p. 63.)
- [109] N. Richard, A.S. Capelle-Laizé, and S. Desbouchages. Combinaison dynamique d'attributs d'images selon un critère d'exactitude. In *Cotation des Informations : Théorie et Applications, Ingénierie des Connaissances*, Juin 2010. (p. 67.)
- [110] N. Richard, M. Léard, and V. Legeay. Classification of roadway asphalt by use of fractal signature. In *QCAV99*, pages 57–62, Quebec (Canada), Mai 1999. (p. 137.)
- [111] B. Riemann. *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*. In der Dieterichschen Buchhandlung, 1867. (p. 149.)
- [112] C. Ronse. A lattice-theoretical morphological view on template extraction in images. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 7(3) :273–295, 1996. (p. 184.)
- [113] G. Roque. Les couleurs complémentaires : un nouveau paradigme/complementary colours : a new paradigm. *Revue d'histoire des sciences*, 47(3) :405–434, 1994. (p. 48.)
- [114] L.J. Sartor and A.R Weeks. Morphological operations on color images. *Journal of Electronic Imaging*, 10(2) :548–559, 2001. (p. 23 et 27.)
- [115] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, volume I. Academic Press, 1982. (p. 7, 48, 51, 73, 134, 179, iii, vi, xiv, xv et xvi.)
- [116] J. Serra. Introduction to mathematical morphology. *Computer vision, graphics, and image processing*, 35(3) :283–305, 1986. (p. 180.)
- [117] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology : Theoretical advances*, volume II. Academic Press, 1988. (p. 7.)
- [118] J. Serra. Cours de morphologie mathématique, chapitre ii : Dilatation, érosion. <http://cmm.ensmp.fr/serra/cours/pdf/fr/ch2fr.pdf>, consulté le 5 avril 2010. (p. xiii.)
- [119] J. Serra and L. Vincent. Lecture notes on morphological filtering. *Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique*, 8, June 1989. (p. 52.)
- [120] C. Sheffield. Selecting band combinations from multispectral data. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 51 :681–687, 1985. (p. 97.)
- [121] F.Y Shih. *Image Processing and mathematical morphology fundamentals and applications*. CRC Press, 2009. (p. 42, 48, 53 et vi.)
- [122] S. Sochacki. *De la combinaison/compétition de classifieurs vers la sélection dynamique d'opérateurs de traitement d'image*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2011. (p. 67.)
- [123] P. Soille. *Morphological Image Analysis : Principles and Applications*. Springer-Verlag, 1999. (p. 42, 48, 52, 53, vi et xvi.)

- [124] P. Soille. Advances in the analysis of topographic features on discrete images. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 271–296. Springer, 2002. (p. 183.)
- [125] P. Soille and J.-F. Rivest. On the validity of fractal dimension measurements in image analysis. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 7(3) :217–229, September 1996. (p. 51, 75 et 149.)
- [126] S.R. Sternberg. Grayscale morphology. *CVGIP*, 35(3) :333–355, 1986. (p. 8, 11, 124, 213 et vi.)
- [127] M. Sugiyama. Dimensionality reduction of multimodal labeled data by local fisher discriminant analysis. *The Journal of Machine Learning Research*, 8 :1027–1061, 2007. (p. 97.)
- [128] Y. Tarabalka, J. Chanussot, and J.A. Benediktsson. Segmentation and classification of hyperspectral images using minimum spanning forest grown from automatically selected markers. *Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics*, 40(5) :1267–1279, 2010. (p. 96.)
- [129] P.S. Thenkabail, J.G. Lyon, and A. Huete. *Hyperspectral remote sensing of vegetation*. CRC Press, 2012. (p. 95.)
- [130] J.C. Tilton, Y. Tarabalka, P.M. Montesano, and E. Gofman. Best merge region-growing segmentation with integrated nonadjacent region object aggregation. *Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 50(11) :4454–4467, 2012. (p. 96.)
- [131] IPAL UMI CNRS TRIBVN Pitié-Salpêtrière Hospital The Ohio State University. “mitosis detection in breast cancer histological images (mitos dataset)”. <http://ipal.cnrs.fr/ICPR2012/>. (p. 208 et 214.)
- [132] N. Vandenbroucke. *Segmentation d’images couleur par classification de pixels dans des espaces d’attributs colorimétriques adaptés. Application à l’analyse d’images de football*. PhD thesis, UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE 1, U.F.R. d’Informatique, Electronique, Electrotechnique et Automatique, December 2000. (p. 17 et 18.)
- [133] S. Velasco-Forero and J. Angulo. Hit-or-miss transform in multivariate images. In *Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems*, pages 452–463. Springer, 2010. (p. 187 et 200.)
- [134] C. Vertan, M. Malciu, V. Buzuloiu, and V. Popescu. Median filtering techniques for vector valued signals. In *International Conference on Image Processing (ICIP’96*, volume 1, pages 977–980, Lausanne (Switzerland), September 1996. (p. 21 et 24.)
- [135] C. Vertan, M. Zamfir, E. Zaharescu, V. Buzuloiu, and C. Fernandez-Maloigne. Non-linear color image filtering by color to planar shape mapping. In *International Conference on Image Processing*, volume 1, pages I–885–I–888, 2003. (p. 25.)
- [136] A. Elmoataz V.T. Ta and O. Lézoray. *Mathematical Morphology and Eikonal Equations on Graphs for Nonlocal Image and Data Processing*. 2009. (p. 39 et vi.)
- [137] J. Weber and S. Lefèvre. Spatial & spectral morphological template matching. *Image and Vision Computing*, 2012. (p. 96, 187, 196 et 200.)

- [138] M. Wheeler and M.A. Zmuda. Processing color and complex data using mathematical morphology. In *Proceedings of National Aerospace and Electronics Conference*, pages 618–624. IEEE, 2000. (p. 25.)
- [139] A. Wismüller, M. Verleysen, M. Aupetit, and J.A. Lee. Recent advances in nonlinear dimensionality reduction, manifold and topological learning. In *18th European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN)*, pages 247–252, 2010. (p. 97.)
- [140] D. Zhao and D.G. Daut. Morphological hit-or-miss transformation for shape recognition. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2(3) :230–243, 1991. (p. 179.)

Résumé

L'extension de la morphologie mathématique au domaine de la couleur ou du multi/hyperspectral en traitement et analyse d'images n'est pas élémentaire. La majorité des approches se sont focalisées sur la formulation mathématique des opérateurs sans prendre en compte le sens physique ou perceptuel de l'information couleur/spectrale.

Les outils développés dans ce travail s'inscrivent dans un nouveau formalisme générique basé sur une fonction de distance. Cette construction permet d'utiliser les opérateurs morphologiques dans le domaine de la couleur ou du multi/hyperspectral en adaptant la fonction de distance. De plus, le choix de la fonction de distance rend les opérateurs valides au sens de la perception ou de la physique.

Face au nombre croissant d'approches existantes, des critères de sélection ont été développés afin de les comparer les différentes écritures de morphologie mathématique. Ces critères sont basés sur le respect des propriétés théoriques des opérateurs, sur les propriétés métrologiques et sur l'efficacité numérique.

Grâce à un formalisme prenant en compte l'information perceptuelle de la couleur et intégrant une définition valide des éléments structurants non-plats, deux types d'opérateurs de plus haut niveau ont été définis. Le premier est un détecteur d'objets spatio-colorimétrique passant par la définition d'un gabarit spatial et vectoriel. Le second, est le calcul de spectres de textures vectoriels. L'extension des deux propos au spectral a été réalisé et ouvre de nouvelles questions scientifiques.

Mots clés : Morphologie mathématique, couleur, spectral, distance, élément structurant non-plat, métrologie, critères, texture

Abstract

Mathematical morphology extension to colour or multi/hyperspectral domain in image processing is not straightforward. Most approaches have focused on the mathematical translation of the operators without taking into account the physical or perceptual sense of colour/spectral information.

The developed tools in this work are part of a new generic formalism based on a distance function. This construction allows using morphological operators in colour or multi/hyperspectral domain by adapting the distance function. Moreover, the distance function choice validates the operators in the perceptual or physical sense.

In front of the increasing number of existing approaches, selection criteria are developed in order to compare the different mathematical morphology constructions. These criteria are based on the validation of the theoretical properties of operators, on the metrological properties and the computational efficiency.

With a formalism taking into account the perceptual information of colour and integrating a valid definition of non-flat structuring elements, two kinds of highest level operators are defined. The first is a spatial-colorimetric object detector through the definition of a vectorial and spacial template. The second is the computation of vectorial texture spectra. The spectral extension for both tools is made and opens new scientific questions.

Keywords : Mathematical morphology, colour, spectral, distance, non-flat structuring element, metrology, criteria, texture