



# Contribution à la synthèse de lois de commande pour la navigation relative entre aéronefs

Thierry Miquel

## ► To cite this version:

Thierry Miquel. Contribution à la synthèse de lois de commande pour la navigation relative entre aéronefs. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2004. Français. NNT : . tel-00933491

**HAL Id: tel-00933491**

**<https://theses.hal.science/tel-00933491>**

Submitted on 20 Jan 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**

**Préparée au  
Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS**

en vue de l'obtention du

**Titre de Docteur de l'Université Toulouse III**

Spécialité : Automatique et Recherche Opérationnelle

par

**Thierry MIQUEL**

Ingénieur d'Etudes et d'Exploitation de l'Aviation Civile

---

**Contribution à la synthèse de lois de  
commande pour la navigation relative  
entre aéronefs**

---

Soutenue le 15 octobre 2004 devant le jury :

|                    |                                                           |
|--------------------|-----------------------------------------------------------|
| Président          | <b>M. COURDESSES</b>                                      |
| Directeur de thèse | <b>F. MORA-CAMINO</b>                                     |
| Rapporteurs        | <b>L. SAYDY</b><br><b>J. SLAMA</b>                        |
| Examineurs         | <b>F. CASAUX</b><br><b>J. LEVINE</b>                      |
| Invités            | <b>G. GARCIA</b><br><b>E. HOFFMAN</b><br><b>P. MENARD</b> |

Rapport LAAS No. 04485



*La fourmi*

*Une fourmi de dix huit mètres  
Avec un chapeau sur la tête,  
Ça n'existe pas, ça n'existe pas.*

*Une fourmi traînant un char  
Plein de pingouins et de canards,  
Ça n'existe pas, ça n'existe pas.*

*Une fourmi parlant français,  
Parlant latin et javanais,  
Ça n'existe pas, ça n'existe pas.*

*Eh ! Pourquoi pas ?*

*Robert Desnos (1900-1945)*

*Et un petit train d'avions dans le ciel  
Du fait d'une avionique nouvelle ?*

*A Paul et Théo*



# Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été financés par le Centre d'Etudes de la Navigation Aérienne (CENA) et ont été effectués au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS) du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), dans le groupe Diagnostic, Supervision et Conduite qualitatifs (DISCO) du pôle Modélisation, Optimisation et Conduite des Systèmes (MOCOSY). Je remercie Alain Printemps, chef du Centre d'Etudes de la Navigation Aérienne, et Dominique Colin de Verdière, chef adjoint du CENA à Toulouse, pour avoir accepté de financer cette thèse, de même que les directeurs successifs du LAAS-CNRS, Jean-Claude Laprie et Malik Ghallab, pour m'avoir accueilli au sein de leur laboratoire, ainsi que les responsables successifs du groupe DISCO, Joseph Aguilar-Martin et Louise Trave-Massuyes pour m'avoir accueilli au sein de leur groupe.

J'exprime ma reconnaissance à Lahcen Saydy, professeur agrégé au département de génie électrique à l'école polytechnique de Montréal et à Jules Slama, directeur de recherche à l'université de Rio de Janeiro, pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail. Ces remerciements s'adressent aussi à Michel Courdresses, professeur à l'université Paul Sabatier, à Jean Lévine, directeur de recherche au centre automatique et systèmes de l'école des mines de Paris, à Francis Casaux, responsable de projet au CENA à Toulouse, à Germain Garcia, professeur et responsable du pôle MOCOSY au LAAS-CNRS, à Eric Hoffman, responsable de projet au Centre Expérimental d'Eurocontrol à Brétigny sur Orge (EEC) et à Philippe Ménard, responsable du département recherche sur les lois de pilotage à Airbus France (EYCDR) pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse. J'adresse de plus un remerciement particulier au professeur Jean Lévine pour sa disponibilité, sa gentillesse, et le soutien constant qu'il a su m'apporter.

J'exprime ma gratitude à mon directeur de thèse, le professeur Félix Mora-Camino, enseignant chercheur à l'Ecole Nationale de l'Aviation Civile (ENAC), pour avoir encadré ces travaux de recherche, pour son soutien constant et ses nombreux conseils avisés.

J'adresse un remerciement particulier à Rémi Lafage et Philippe Louyot, ingénieurs au Centre d'Etudes de la Navigation Aérienne, pour le support informatique qu'ils m'ont apporté et les échanges techniques que nous avons eu.

Un grand merci également à Stephan Chabert, Daniel Delahaye, Hervé Devrillon, Bernard Hasquenoph, Jean Paul Imbert, Jean-Marc Loscos, Gérard Monjaret, Christelle Pianetti, Yves Sagnier et Eric Vallauri du CENA, à Danielle Barthe, Marie Dominique Cabanne, André Monin, Christophe Prieur, Philippe Souères et Sophie Tarbouriech du LAAS-CNRS, à Bénédicte Pilotaz et à Véronique Villemur de l'Ecole Doctorale Système, à Frédéric Couderc et Claude Fortin de l'ENAC, à David Chabé, Jean Duprez, Daniel Ferro, Fabien Lavergne, Philippe Ménard, Guilhem Puyou, Philippe Pellerin et Fabrice Villaumé d'Airbus et à Eric Hoffman, Dan Ivanescu et Karim Zeghal d'EEC pour les discussions informelles que nous avons pu avoir et qui ont toujours été enrichissantes.

Je remercie l'ensemble des personnels du groupe DISCO, permanents et doctorants, et plus particulièrement Abdelkrim Achaibou, Ioana Bilegan, Michel Combacau, Andrei Doncescu, Eliane Dufour, Gilles Dumont d'Ayot, Sergio Gonzalez, Dragos Stoica, André Titli et Louise Trave-Massuyes dont j'ai pu apprécier les qualités humaines et scientifiques.

Enfin, je ne saurais conclure sans un chaleureux merci à mes enfants, Théo et Paul, à mon épouse, Sylvie, ainsi qu'à mes parents qui m'ont accompagné pendant ces trois années de thèse.



# Table des matières

|                                                                                                                            |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>CHAPITRE 1 INTRODUCTION GENERALE .....</b>                                                                              | <b>1</b>  |
| <b>CHAPITRE 2 CONTEXTE ET MOTIVATIONS.....</b>                                                                             | <b>3</b>  |
| 2.1 INTRODUCTION.....                                                                                                      | 3         |
| 2.2 CONTROLE DE LA CIRCULATION AERIENNE .....                                                                              | 3         |
| 2.2.1 Historique et cadre réglementaire.....                                                                               | 3         |
| 2.2.2 Les services de la circulation aérienne.....                                                                         | 4         |
| 2.2.3 Régimes de vol.....                                                                                                  | 4         |
| 2.2.4 Réalisation du service du contrôle .....                                                                             | 5         |
| 2.2.5 Répartition des compétences .....                                                                                    | 8         |
| 2.2.6 Pistes pour l'amélioration de la gestion du trafic aérien .....                                                      | 13        |
| 2.3 SURVEILLANCE DEPENDANTE AUTOMATIQUE EN MODE DIFFUSION .....                                                            | 14        |
| 2.3.1 Contenu des reports et performances minimales.....                                                                   | 14        |
| 2.3.2 Squitter long mode S.....                                                                                            | 15        |
| 2.3.3 VDL 4 (VHF Data Link mode 4).....                                                                                    | 16        |
| 2.3.4 UAT (Universal Access Transceiver) .....                                                                             | 17        |
| 2.3.5 Standardisation et choix technologiques .....                                                                        | 17        |
| 2.4 APPLICATIONS EMBARQUEES DE SURVEILLANCE.....                                                                           | 19        |
| 2.4.1 Présentation du concept ASAS.....                                                                                    | 19        |
| 2.4.2 Projets relatifs au guidage relatif entre aéronefs .....                                                             | 20        |
| 2.5 OBJECTIFS DE LA THESE .....                                                                                            | 22        |
| 2.6 CONCLUSION .....                                                                                                       | 23        |
| 2.7 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....                                                                                      | 24        |
| <b>CHAPITRE 3 ETAT DE L'ART SUR LES TECHNIQUES DE COMMANDE APPLIQUEES AU GUIDAGE RELATIF ENTRE AERONEFS.....</b>           | <b>26</b> |
| 3.1 INTRODUCTION.....                                                                                                      | 26        |
| 3.2 COMMANDE DE TYPE PROPORTIONNELLE, INTEGRALE ET DERIVEE .....                                                           | 26        |
| 3.2.1 Présentation.....                                                                                                    | 26        |
| 3.2.2 Application au vol en formation de drones.....                                                                       | 28        |
| 3.2.3 Vol en formation serrée de chasseurs.....                                                                            | 32        |
| 3.2.4 Application à la commande de la vitesse d'avions de transport commercial.....                                        | 32        |
| 3.3 COMMANDE PAR REGIME GLISSANT .....                                                                                     | 35        |
| 3.3.1 Présentation.....                                                                                                    | 35        |
| 3.3.2 Application au vol en formation de drones.....                                                                       | 38        |
| 3.4 COMMANDE PAR BOUCLAGE LINEARISANT.....                                                                                 | 41        |
| 3.4.1 Présentation.....                                                                                                    | 41        |
| 3.4.2 Application au vol en formation de drones.....                                                                       | 44        |
| 3.5 COMMANDE OPTIMALE.....                                                                                                 | 47        |
| 3.5.1 Présentation.....                                                                                                    | 47        |
| 3.5.2 Application au guidage de missiles .....                                                                             | 48        |
| 3.6 CONCLUSION .....                                                                                                       | 50        |
| 3.7 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....                                                                                      | 51        |
| <b>CHAPITRE 4 MODELE D'AVION POUR LA SYNTHESE DE LOIS DE GUIDAGE RELATIF – EQUATIONS D'ETAT DU MOUVEMENT RELATIF .....</b> | <b>53</b> |
| 4.1 INTRODUCTION.....                                                                                                      | 53        |
| 4.2 ELEMENTS DE MECANIQUE DU VOL .....                                                                                     | 53        |
| 4.2.1 Définitions des trièdres de référence.....                                                                           | 53        |
| 4.2.2 Forces agissant sur l'avion .....                                                                                    | 54        |
| 4.2.3 Notations, hypothèses et relations de passage.....                                                                   | 55        |
| 4.2.4 Equations des forces et des moments.....                                                                             | 57        |
| 4.3 SYSTEMES DE COMMANDE AUTOMATIQUE DE VOL .....                                                                          | 60        |
| 4.3.1 Objectifs.....                                                                                                       | 60        |
| 4.3.2 Systèmes de pilotage.....                                                                                            | 60        |
| 4.3.3 Boucle de pilotage et boucle de guidage .....                                                                        | 61        |
| 4.3.4 Boucle de pilotage : exemple de réalisation.....                                                                     | 62        |
| 4.3.5 Conduite des moteurs .....                                                                                           | 63        |
| 4.4 MODELE D'AVION POUR LE GUIDAGE .....                                                                                   | 64        |
| 4.4.1 Introduction .....                                                                                                   | 64        |

|                                                                                                                              |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.4.2 Rappel sur la commande à plusieurs échelles de temps.....                                                              | 64         |
| 4.4.3 Dynamique du guidage.....                                                                                              | 65         |
| 4.4.4 Hypothèses sur le modèle et simplifications.....                                                                       | 66         |
| 4.4.5 Schéma fonctionnel.....                                                                                                | 68         |
| 4.5 CINEMATIQUE DU MOUVEMENT RELATIF.....                                                                                    | 68         |
| 4.5.1 Notations.....                                                                                                         | 68         |
| 4.5.2 Equations de navigation.....                                                                                           | 69         |
| 4.5.3 Triangle des vitesses.....                                                                                             | 70         |
| 4.5.4 Cinématique du mouvement relatif dans le repère lié à l'avion suiveur.....                                             | 70         |
| 4.6 EQUATIONS D'ETAT DU MOUVEMENT RELATIF.....                                                                               | 71         |
| 4.7 CONCLUSION.....                                                                                                          | 72         |
| 4.8 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....                                                                                         | 73         |
| <b>CHAPITRE 5 SPECIFICATION DES MODES PROPRES – LOI DE GUIDAGE DE TYPE PROPORTIONNELLE ET DERIVEE.....</b>                   | <b>74</b>  |
| 5.1 INTRODUCTION.....                                                                                                        | 74         |
| 5.2 SPECIFICATIONS DES MODES PROPRES.....                                                                                    | 74         |
| 5.2.1 Dynamique attendue des sorties et choix de conception.....                                                             | 74         |
| 5.2.2 Modes propres du guidage longitudinal relatif.....                                                                     | 75         |
| 5.2.3 Modes propres du guidage latéral relatif.....                                                                          | 76         |
| 5.2.4 Modes propres du guidage vertical.....                                                                                 | 77         |
| 5.2.5 Environnement de simulation.....                                                                                       | 78         |
| 5.3 LOI DE GUIDAGE VERTICAL.....                                                                                             | 79         |
| 5.4 LOI DE GUIDAGE RELATIF DANS LE PLAN DE TYPE PROPORTIONNELLE ET DERIVEE.....                                              | 80         |
| 5.4.1 Linéarisation du modèle d'état.....                                                                                    | 80         |
| 5.4.2 Application au guidage relatif.....                                                                                    | 81         |
| 5.4.3 Cas particulier du vent nul.....                                                                                       | 83         |
| 5.4.4 Scénario de test.....                                                                                                  | 83         |
| 5.5 INADEQUATION DE L'EXPRESSION DE LA CINEMATIQUE DU MOUVEMENT RELATIF DANS LE REPERE LIE A LA TRAJECTOIRE DE CONSIGNE..... | 86         |
| 5.5.1 Expression de la cinématique du mouvement dans le repère lié à la position de consigne.....                            | 86         |
| 5.5.2 Résultats de simulation dans le repère lié à la position de consigne.....                                              | 87         |
| 5.6 CONCLUSION.....                                                                                                          | 88         |
| 5.7 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....                                                                                         | 89         |
| <b>CHAPITRE 6 SYNTHÈSE DE LOIS DE GUIDAGE RELATIF PAR LA TECHNIQUE DU BACKSTEPPING.....</b>                                  | <b>90</b>  |
| 6.1 INTRODUCTION.....                                                                                                        | 90         |
| 6.2 PRESENTATION DE LA TECHNIQUE DU BACKSTEPPING.....                                                                        | 90         |
| 6.2.1 Généralités.....                                                                                                       | 90         |
| 6.2.2 Exemple.....                                                                                                           | 91         |
| 6.2.3 Backstepping et passivité.....                                                                                         | 92         |
| 6.3 SYNTHÈSE DIRECTE.....                                                                                                    | 93         |
| 6.3.1 Description de la méthode de synthèse directe.....                                                                     | 93         |
| 6.3.2 Limitation de l'approche.....                                                                                          | 95         |
| 6.3.3 Cas particulier du vent nul : analogie avec la commande de type proportionnelle et dérivée.....                        | 95         |
| 6.4 LOI DE COMMANDE SIMPLIFIEE.....                                                                                          | 99         |
| 6.4.1 Méthode de synthèse.....                                                                                               | 99         |
| 6.4.2 Résolution des inégalités matricielles.....                                                                            | 101        |
| 6.4.3 Cas particulier du vent nul : analogie avec la commande de type proportionnelle et dérivée.....                        | 102        |
| 6.4.4 Evaluation qualitative.....                                                                                            | 103        |
| 6.5 CONCLUSION.....                                                                                                          | 104        |
| 6.6 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....                                                                                         | 105        |
| <b>CHAPITRE 7 BOUCLAGE LINEARISANT BASE SUR LA PROPRIETE DE PLATITUDE.....</b>                                               | <b>106</b> |
| 7.1 INTRODUCTION.....                                                                                                        | 106        |
| 7.2 PRESENTATION DE LA PROPRIETE DE PLATITUDE.....                                                                           | 107        |
| 7.2.1 Définition.....                                                                                                        | 107        |
| 7.2.2 Exemple : véhicule non holonome.....                                                                                   | 108        |
| 7.3 APPLICATION AU GUIDAGE RELATIF.....                                                                                      | 109        |
| 7.3.1 Identification des sorties plates.....                                                                                 | 109        |
| 7.3.2 Synthèse de la loi de commande par bouclage linéarisant.....                                                           | 114        |
| 7.4 EVALUATION QUALITATIVE.....                                                                                              | 116        |
| 7.4.1 Choix des matrices de gain.....                                                                                        | 116        |

|                                                                                                              |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 7.4.2 Evaluation sur le scénario de test.....                                                                | 117        |
| 7.5 CONCLUSION .....                                                                                         | 118        |
| 7.6 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....                                                                        | 119        |
| <b>CHAPITRE 8 APPLICATION A LA GESTION DES FLUX DE TRAFIC AERIEN.....</b>                                    | <b>120</b> |
| 8.1 INTRODUCTION.....                                                                                        | 120        |
| 8.2 HYPOTHESES .....                                                                                         | 120        |
| 8.3 ANALYSE QUALITATIVE .....                                                                                | 121        |
| 8.3.1 Scénario.....                                                                                          | 121        |
| 8.3.2 Effet des lois de guidage relatif.....                                                                 | 124        |
| 8.3.3 Référence horizontale de guidage relatif.....                                                          | 127        |
| 8.3.4 Effet des lois de guidage relatif avec référence de guidage .....                                      | 131        |
| 8.3.5 Estimation du temps et de la distance nécessaires à la rejointe de l'objectif de positionnement.....   | 136        |
| 8.4 ANALYSE STATISTIQUE .....                                                                                | 137        |
| 8.4.1 Construction des scénarios.....                                                                        | 137        |
| 8.4.2 Mesures réalisées .....                                                                                | 139        |
| 8.4.3 Evaluation statistique de l'effet des lois de guidage relatif.....                                     | 141        |
| 8.5 CONCLUSION .....                                                                                         | 145        |
| 8.6 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....                                                                        | 146        |
| <b>CHAPITRE 9 CONCLUSION GENERALE .....</b>                                                                  | <b>147</b> |
| <b>CHAPITRE 10 UNITES AERONAUTIQUES, ACRONYMES, PUBLICATIONS .....</b>                                       | <b>149</b> |
| 10.1 UNITES AERONAUTIQUES .....                                                                              | 149        |
| 10.2 ACRONYMES .....                                                                                         | 149        |
| 10.3 PUBLICATIONS.....                                                                                       | 151        |
| <b>CHAPITRE 11 NOTIONS D'ALTIMETRIE ET D'ANEMOMETRE .....</b>                                                | <b>153</b> |
| 11.1 NOTIONS D'ALTIMETRIE ET D'ANEMOMETRE .....                                                              | 153        |
| 11.1.1 Atmosphère standard.....                                                                              | 153        |
| 11.1.2 Altimétrie.....                                                                                       | 154        |
| 11.1.3 Anémomètre.....                                                                                       | 156        |
| 11.2 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....                                                                       | 159        |
| <b>CHAPITRE 12 RAPPELS SUR LES NOTIONS DE STABILITE AU SENS DE LYAPUNOV POUR LES SYSTEMES AUTONOME .....</b> | <b>160</b> |
| 12.1 DEFINITIONS.....                                                                                        | 160        |
| 12.2 METHODES D'ANALYSE.....                                                                                 | 161        |
| 12.2.1 Méthode directe de Lyapunov.....                                                                      | 161        |
| 12.2.2 Théorème de LaSalle-Krazovskii.....                                                                   | 162        |
| 12.2.3 Stabilité exponentielle globale.....                                                                  | 163        |
| 12.3 DERIVEE DE LIE .....                                                                                    | 164        |
| 12.4 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....                                                                       | 164        |

---

## Chapitre 1

### Introduction générale

---

Cette thèse se place dans le contexte de la croissance soutenue du trafic aérien. Elle concerne l'assistance automatisée au contrôle du trafic aérien qui vise à augmenter la capacité des secteurs de contrôle en transférant à l'équipage certaines tâches de nos jours dévolues au contrôleur aérien. Il s'agit plus particulièrement de renforcer la coopération entre l'équipage et le contrôleur aérien en vue de faciliter la tâche de régulation des flux de trafic aérien.

Le travail réalisé dans cette thèse est relatif à la mise en œuvre de techniques de commande des systèmes non linéaires à plusieurs échelles de temps. Il a été réalisé à l'initiative du Centre d'Etudes de La Navigation Aérienne (CENA) au LAAS du CNRS à Toulouse en collaboration avec l'Ecole Nationale de l'Aviation Civile (ENAC). De manière concrète, il consiste principalement en la synthèse et l'évaluation de lois de guidage permettant la navigation relative entre aéronefs. Ces lois de guidage pourraient être embarquées à bord des aéronefs afin d'aider le contrôleur aérien dans sa tâche de régulation des flux de trafic.

Au *chapitre II*, nous commençons par présenter le contexte actuel du contrôle du trafic aérien et les voies actuelles d'investigation dans le domaine de son automatisation. Cette présentation permet de distinguer deux types de guidage relatif : d'une part le guidage relatif en temps où l'aéronef suiveur vient se placer sur la position qu'occupait le leader quelques minutes plus tôt, et d'autre part le guidage relatif en distance où l'aéronef suiveur vient se placer à une distance donnée du leader.

Un état de l'art sur les lois de guidage relatif entre aéronefs est ensuite réalisé au *chapitre III*. Comme il existe très peu de références bibliographiques dédiées aux lois de commande pour le guidage relatif entre aéronefs de transport commercial, l'état de l'art s'est focalisé sur les lois de commande appliquées au vol en formation d'engins volants, dont le guidage relatif peut être considéré comme un cas particulier (il englobe en plus la phase de rejointe de la formation).

Un modèle de synthèse décrivant la dynamique de guidage d'un avion de transport commercial dont les fonctions de pilotage sont automatisées est ensuite proposé au *chapitre IV*. Ce modèle permet une synthèse hiérarchisée de lois de guidage relatif en s'appuyant sur les fonctions de pilotage classique de l'avion.

Après avoir envisagé l'utilisation de lois linéaires de type proportionnelle et dérivée et précisé les objectifs de commande en terme de spécification des modes propres au *chapitre V*, deux techniques de commande non linéaire sont alors mises en œuvre : le backstepping et le bouclage linéarisant basé sur la propriété de platitude.

Au *chapitre VI*, deux lois de guidage basées sur la technique du backstepping sont développées. Elles permettent de réaliser un guidage relatif en temps. L'utilisation de cette technique permet de contourner un problème de singularité des lois conçues par des méthodes de type bouclage linéarisant lorsque les écarts sont exprimés dans le repère lié à l'avion suiveur.

La loi de guidage basée sur la propriété de platitude du modèle de synthèse est développée au *chapitre VII*. Elle permet de réaliser un guidage relatif en distance. L'intérêt de cette approche est qu'elle permet de tenir compte de la contrainte d'espacement entre les aéronefs afin de renforcer la sécurité des manœuvres de guidage relatif.

Ces trois approches (loi proportionnelle et dérivée, backstepping et bouclage linéarisant basé sur la platitude) sont évaluées dans un dernier temps au *chapitre VIII* sur un jeu de scénarii réaliste d'un point de vue contrôle du trafic aérien.

Le *chapitre IX* apporte la conclusion générale à cette thèse : il fait le bilan des résultats obtenus et indique de nouvelles pistes d'investigation dans ce domaine.

---

## Chapitre 2

### Contexte et motivations

---

#### 2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les méthodes actuelles du contrôle du trafic aérien, ainsi que les nouveaux moyens techniques et les concepts opérationnels imaginés pour faire face au problème de la saturation des espaces aériens les plus fréquentés.

La première partie de ce chapitre est une présentation succincte des différents aspects du contrôle de la circulation aérienne tel qu'il est pratiqué actuellement en France. Nous présentons ensuite les différents moyens techniques qui pourraient être mis en œuvre pour la surveillance dépendante automatique en mode diffusion (*ADS-B : Automatic Dependent Surveillance-Broadcast*). L'*ADS-B* est une nouvelle fonction embarquée à bord d'un mobile (avion ou véhicule de surface) et qui lui permet d'émettre périodiquement et spontanément des informations relatives à sa navigation (identification, position, vitesse, intentions, etc.). Nous verrons enfin que les applications embarquées basées sur l'*ADS-B* et dont l'objectif est l'amélioration du contrôle de la circulation aérienne ont été regroupées en un concept unique, appelé *ASAS (Airborne Separation Assistance System)* : ces nouvelles applications sont à l'origine de nombreux projets de recherche et développement à travers le monde. Nous décrirons brièvement ceux qui abordent le guidage relatif entre aéronefs.

#### 2.2 Contrôle de la circulation aérienne

##### 2.2.1 Historique et cadre réglementaire

Historiquement, c'est à la fin de la seconde guerre mondiale qu'il est apparu nécessaire de standardiser au niveau international les moyens de navigation, de communication et de contrôle. Une convention relative à l'aviation civile internationale fut signée à Chicago le 7 décembre 1944. Dans le sillage de l'*ONU (Organisation des Nations Unies)*, une organisation internationale de l'aviation civile provisoire (*PICAO*) est créée en 1946. Elle devient officielle le 4 avril 1947 sous le nom d'Organisation de l'Aviation Civile Internationale (*OACI*). Cette date marque le début de l'époque moderne pour le transport aérien et pour le contrôle de la circulation aérienne [2-j].

Les activités de l'*OACI* sont relatives à l'élaboration des principes et des techniques de la navigation aérienne internationale (voies aériennes, aéroports, installations et services nécessaires au développement ordonné et sûr de l'aviation civile internationale) et à la promotion de la planification et du développement sûr, régulier, efficace et économique du transport aérien international (article 44 de la Convention). Début 2002, 187 états faisaient partie de l'*OACI*, dont le siège est situé à Montréal (Québec).

La réglementation de la circulation aérienne a été élaborée dans l'intérêt général des usagers de l'aéronautique. Les grands principes de la convention de Chicago sont les suivants :

- Souveraineté de chaque état dans son espace aérien : la seule loi applicable aux vols internationaux est la loi nationale du pays survolé ;
- Pas de discrimination dans la liberté de survol des pays, à condition que le pays dont l'aéronef porte la nationalité soit signataire de la Convention ;
- Obligation de simplifier et d'uniformiser les réglementations techniques, juridiques et économiques dans le but de faciliter le commerce et la navigation.

En France, la réglementation de la circulation aérienne dans le domaine civil s'appuie sur le code de l'aviation civile, dont les décrets d'application concernent les règles de l'air (*RCA1*) et les services de la circulation aérienne (*RCA2*). De plus, les arrêtés ministériels dans le domaine aviation civile fixent les procédures pour les organismes de la circulation aérienne générale (*RCA3*). La France étant membre de l'*OACI*, le tableau ci-après donne la correspondance entre les textes OACI et les textes français :

|                                                           | OACI                      | Textes français |
|-----------------------------------------------------------|---------------------------|-----------------|
| Règles de l'air                                           | Annexe 2                  | RCA 1 (décret)  |
| Services de la circulation aérienne                       | Annexe 11                 | RCA 2 (décret)  |
| Procédures pour les organismes de la circulation aérienne | Doc. OACI 4444 / PANS RAC | RCA 3 (arrêté)  |

*Tableau 2-1 Correspondance entre les textes OACI et les textes français*

## **2.2.2 Les services de la circulation aérienne**

Les différents services à la charge des organismes de contrôle de la circulation aérienne sont les suivants ([2-p]) :

- Information : ce service a pour objet de fournir des avis et renseignements utiles à l'exécution sûre et efficace des vols. Plus précisément, ce service fournit des informations météorologiques et aéronautiques (piste en service par exemple). Eventuellement, et sans responsabilité des services au sol, ce service fournit aussi des informations sur les autres vols qui évoluent à proximité et suggère des manœuvres d'évitement.
- Alerte : ce service a pour objet de prendre en compte les messages de détresse transmis par l'avion en cas de nécessité, de déclencher le cas échéant les recherches pour le sauvetage en alertant les organismes appropriés, et de prêter le concours nécessaire à ces organismes.
- Contrôle : ce service a pour objet de prévenir les abordages entre les aéronefs, et les collisions sur l'aire de manœuvre entre les aéronefs et les obstacles fixes ou mobiles ; il a aussi pour objet d'accélérer et d'ordonner la circulation aérienne.

Ces différents services sont rendus au profit des aéronefs civils soumis aux règles de la circulation aérienne générale (*CAG*). Les aéronefs militaires ou les vols d'essais sont soumis à d'autres règles, compatibles avec leur mission.

## **2.2.3 Régimes de vol**

Les règles de la circulation aérienne générale dépendent du régime de vol de l'avion ([2-a]) : on distingue les règles de vol à vue (*VFR : Visual Flight Rules*) et les règles de vol aux instruments (*IFR : Instrument Flight Rules*).

### **2.2.3.1 Règles de vol à vue**

Pour pouvoir voler suivant les règles de vol à vue, des conditions météorologiques minimales (visibilité horizontale, plafond) doivent être satisfaites. Ces conditions météorologiques minimales dépendent du type d'espace aérien dans lequel évolue l'aéronef.

La plupart du temps, un pilote qui vole suivant les règles de vol à vue navigue en suivant des repères visuels au sol. Mais il peut aussi naviguer au dessus d'une couche nuageuse (*on top*) en utilisant des moyens de radionavigation. Dans tous les cas, il assure de façon visuelle sa séparation (i.e. espacement minimal réglementaire) par rapport aux autres aéronefs et par rapport au sol.

En règle générale, un pilote qui vole suivant les règles de vol à vue ne bénéficie pas du service du contrôle : les pilotes volant suivant les règles *VFR* doivent appliquer entre eux les règles d'anti-abordage (priorité à droite pour les routes convergentes, dépassement par la droite, virage à droite pour les routes face à face, priorité à l'aéronef en vol par rapport à l'aéronef au sol sur un aérodrome). Dans certains espaces aériens (de plus en plus nombreux), accessibles sous certaines conditions de visibilité minimale et d'équipements (radio et transpondeur radar), les aéronefs volant en régime *VFR* peuvent bénéficier du service du contrôle. A contrario, certains espaces aériens contrôlés sont interdits aux vols *VFR*. Par contre, les services d'information et d'alerte peuvent être fournis aux vols *VFR* par les organismes de contrôle de la circulation aérienne dans les espaces contrôlés.

### **2.2.3.2 Règles de vol aux instruments**

Un pilote qui vole suivant les règles de vol aux instruments peut piloter et naviguer sans références visuelles extérieures. L'aéronef doit donc posséder un équipement *IFR* (système d'horizon artificiel, éclairage des instruments, radio-navigation, etc.) et le pilote doit posséder l'entraînement et les qualifications nécessaires.

Un pilote qui vole suivant les règles de vol aux instruments bénéficie du service du contrôle dans les espaces aériens contrôlés. En d'autres termes, une partie importante de la responsabilité relative à l'anticipation et à l'évitement des collisions avec les obstacles fixes et des abordages avec les autres vols est transférée aux organismes de contrôle au sol.

Les vols *IFR* s'effectuent sur la base d'un contrat, appelé plan de vol : celui-ci est déposé auprès des organismes de contrôle, et précise l'itinéraire suivi, les altitudes et les heures estimées de passage sur chacun des points significatifs.

Il est à noter que les vols *VFR* en espace contrôlé sont eux aussi soumis à un plan de vol : celui-ci est soit déposé avant le vol, soit transmis dans un format réduit lors du premier contact radio. De plus, les vols en régime *VFR* ont l'obligation de déposer un plan de vol avant le décollage, quelque soit l'espace traversé, dans des situations spécifiques comme les traversées maritimes, le passage de frontière ou les vols de nuit.

Lorsqu'il vole dans des espaces contrôlés, le commandant de bord doit être en permanence en contact par radiotéléphonie, sur des fréquences spécifiques, avec les organismes de contrôle qui autorisent la progression le long du plan de vol et la supervisent, assurant ainsi la sécurité de l'ensemble du trafic.

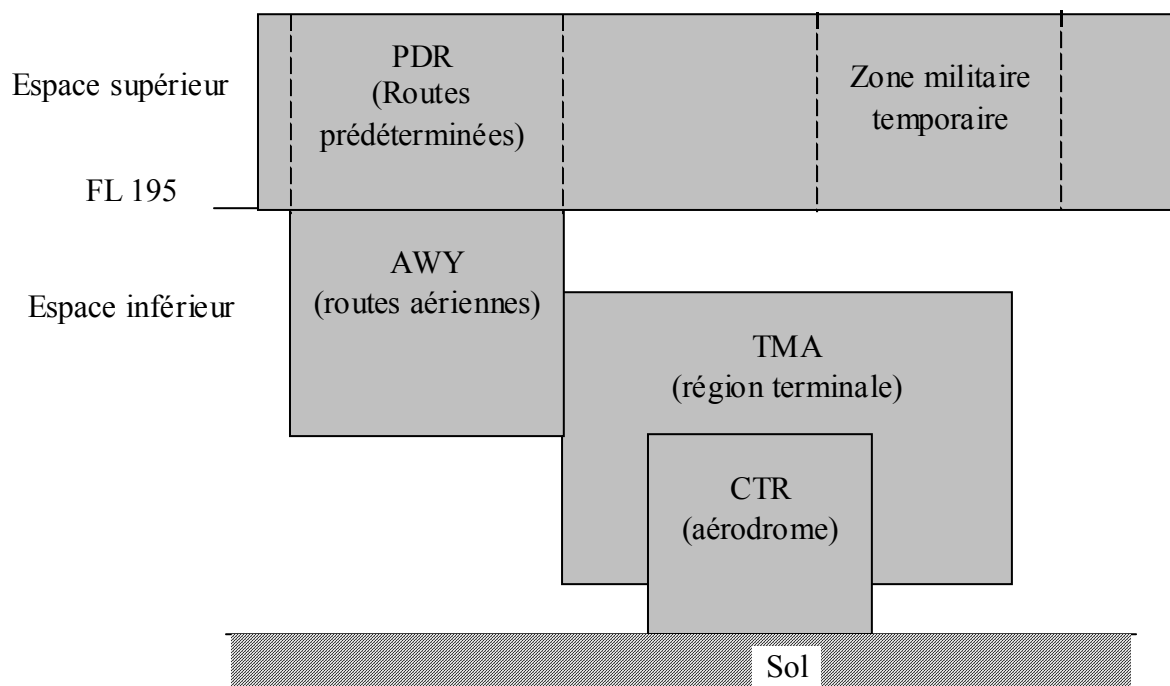
## **2.2.4 Réalisation du service du contrôle**

### **2.2.4.1 Organisation de l'espace**

Au dessous du niveau de vol FL195, l'espace n'est contrôlé qu'autour des voies aériennes (*AWY*), qui ont une largeur de 10 miles nautiques, dans les régions terminales de contrôle (*TMA*) et autour des aérodromes (*CTR*). Ailleurs, l'avion ne bénéficie que du service d'information de vol et d'alerte, mais pas du service du contrôle. Une partie de l'espace aérien est également occupée par des zones réservées aux militaires, dont la pénétration n'est possible que sur autorisation du gestionnaire de la zone.

Au dessus du niveau de vol FL195, l'espace est contrôlé partout. Il n'y a pas de voies aériennes, mais des routes prédéterminées (*PDR*). Les zones militaires occupent une grande partie de l'espace aérien à ces altitudes et sont franchissables par le trafic civil lorsqu'elles

ne sont pas actives. De plus, les vols militaires peuvent traverser les routes aériennes civiles sous guidage radar des centres de contrôle militaires qui en ont la charge.  
La figure ci-après représente l'organisation de l'espace aérien :



*Figure 2-1 Organisation de l'espace aérien*

#### 2.2.4.2 Classification des espaces aériens

L'espace aérien est divisé en sept catégories, de A à G, dont les principales caractéristiques dépendent du régime de vol et des services de la circulation aérienne rendus comme indiqué sur le tableau ci-après ([2-a]) :

| Classe d'espace | Vols admis | Services de la circulation aérienne                 |                    |        | Radio obligatoire | Qualité du vol |
|-----------------|------------|-----------------------------------------------------|--------------------|--------|-------------------|----------------|
|                 |            | Contrôle                                            | Information de vol | Alerte |                   |                |
| A               | IFR        | Séparation IFR/IFR                                  | oui                | oui    | oui               | contrôlé       |
| B               | IFR        | Séparation IFR/IFR et IFR/VFR                       | oui                | oui    | oui               | contrôlé       |
|                 | VFR        | Séparation VFR/IFR et VFR/VFR                       | oui                | oui    | oui               | contrôlé       |
| C               | IFR        | Séparation IFR/IFR et IFR/VFR                       | oui                | oui    | oui               | contrôlé       |
|                 | VFR        | Séparation VFR/IFR et Information de trafic VFR/VFR | oui                | oui    | oui               | contrôlé       |

|   |     |                                                                        |                          |     |     |                         |
|---|-----|------------------------------------------------------------------------|--------------------------|-----|-----|-------------------------|
| D | IFR | Séparation IFR/IFR et Information de trafic IFR/VFR                    | oui                      | oui | oui | contrôlé                |
|   | VFR | Séparation IFR/VFR spécial<br>Information de trafic VFR/IFR et VFR/VFR | oui                      | oui | oui | Contrôlé si VFR spécial |
|   |     |                                                                        |                          |     |     |                         |
| E | IFR | Séparation IFR/IFR                                                     | oui                      | oui | oui | contrôlé                |
|   | VFR | non                                                                    | oui                      | oui | non | non contrôlé            |
| F | IFR | non                                                                    | oui, service consultatif | oui | oui | non contrôlé            |
|   | VFR | non                                                                    | oui                      | oui | non | non contrôlé            |
| G | IFR | non                                                                    | oui                      | oui | oui | non contrôlé            |
|   | VFR | non                                                                    | oui                      | oui | non | non contrôlé            |

Tableau 2-2 Différentes catégories d'espace aérien

En France, tout l'espace aérien situé au dessus du niveau de vol FL195 (espace supérieur) est de classe A, tandis que les voies aériennes (*AWY*) situées dans l'espace inférieur contrôlé est de classe E. De plus, la vitesse indiquée est limitée à 250 nœuds (kts) en dessous du niveau de vol FL100, dans toutes les classes d'espace.

#### 2.2.4.3 Secteur de contrôle

Un secteur de contrôle est une entité responsable d'une partie de l'espace aérien. En effet, un aéronef est sous la responsabilité d'une unique équipe de contrôleurs aériens à chaque instant d'un vol. L'aéronef est transféré (*hand-off process*) de secteur de contrôle en secteur de contrôle, du début du roulage jusqu'à l'arrêt au point de stationnement en fin de vol. Le transfert de la responsabilité du contrôle fait l'objet d'un travail très important de la part des équipes de contrôle. Pendant cette opération, l'identification de l'aéronef, le transfert de la fréquence radio et la vérification du report d'altitude (lorsque l'aéronef est en vol) sont effectués. Le transfert est une opération délicate car des incompréhension ou des erreurs peuvent se produire, causant des pertes accidentelles de séparation.

Outre la liaison radio-téléphonique avec les avions pour laquelle chaque secteur dispose de sa propre fréquence, le contrôleur est en liaison téléphonique, le plus souvent directe, avec ses collègues du même centre qui occupent les positions de contrôle des autres secteurs, et avec les contrôleurs des centres adjacents pour les secteurs limitrophes. Il est aussi en liaison avec les organismes de défense militaire avec lesquels il peut être nécessaire de négocier l'autorisation de pénétrer dans une zone réservée.

#### 2.2.4.4 Méthodes de contrôle

Le service du contrôle peut être réalisé de deux manières, qui ne sont pas exclusives :

- Contrôle aux procédures : de manière historique, le service du contrôle est rendu grâce à un support papier qui représente la progression de chaque vol, appelé *strip* en anglais. La bande de progression de vol est constituée par une suite de points de reports pour lesquels une altitude et une heure de survol estimées sont disponibles :

|                     |       |      |           |      |       |       |       |       |       |    |
|---------------------|-------|------|-----------|------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| D L H 4 1 5 7<4016> | <180> | ↑    | 120       | LFLL | DANBO | BØESI | MABES | RØNLA | MØREG | LE |
| lufthansa           |       |      |           |      |       |       |       |       |       |    |
| B733 370 IFLL EDDF  |       |      |           |      |       |       |       |       |       |    |
| ok8 180             |       |      |           |      |       |       |       |       |       |    |
| 4583 ZIE            |       | DØUB |           | 27   | 32    | 35    | 37    | 38    | 42    | 14 |
| MØLUS280            | 1323  | GU   | CTØT 1337 | 13   | 13    | 13    | 13    | 13    | 13    | 01 |
|                     |       |      |           |      |       |       |       |       |       | 00 |
|                     |       |      |           |      |       |       |       |       |       | MS |

Figure 2-2 Bande de progression de vol (strip)

Le pilote a l'obligation de transmettre un message chaque fois qu'il survole un point de report. Le contrôleur aérien se sert de cette bande de progression pour organiser le trafic et séparer les avions les uns des autres sur chaque point de report d'un intervalle de temps de 5 à 10 minutes. Le contrôle aux procédures est possible dès qu'il existe un moyen de communication entre les avions et le sol. Le contrôle uniquement aux procédures est utilisé dans toutes les régions du monde où le trafic est faible et où aucun moyen technique de surveillance n'est disponible pour appréhender plus directement le trafic.

- Contrôle radar : le radar, apparu lors de la seconde guerre mondiale, permet d'obtenir une image quasi instantanée de la situation aérienne. L'image radar a été progressivement intégrée dans le contrôle aux procédures :

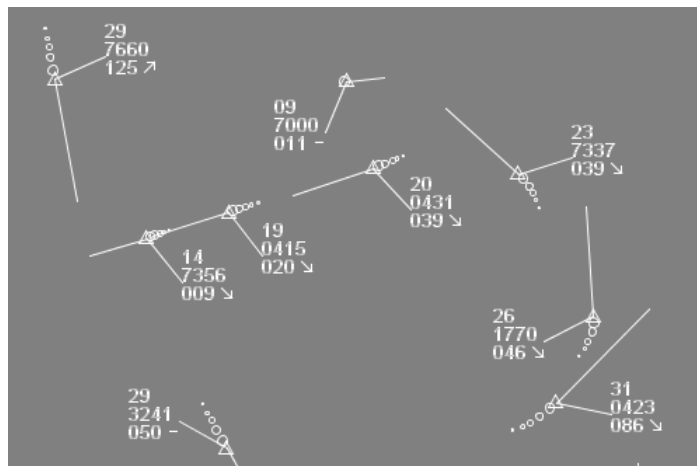


Figure 2-3 Image radar

En France, une équipe de contrôle chargée d'un secteur comprend généralement trois personnes : un contrôleur organique, anciennement contrôleur aux procédures, un contrôleur radar et un assistant. Le contrôleur organique se sert d'un tableau de *strips*, ou bandes de progression de vol en français, pour se souvenir des actions à accomplir, communiquer à son collègue radariste les conflits probables et négocier avec le secteur ou le centre précédent et le secteur ou le centre suivant les conditions d'entrée et de sortie (c'est à dire essentiellement les niveaux de vol auxquels les transferts des avions seront effectués). Le contrôleur radar surveille et sépare constamment les uns des autres les 15 à 25 avions qui sont à l'intérieur du secteur en leur donnant des caps pour dépasser ou croiser, en différant un début de descente jusqu'à ce qu'un avion croisant au niveau de vol en dessous soit passé, en changeant le niveau de vol ou en surveillant qu'une montée s'effectue correctement. Les normes de séparation sont de 1000 ou 2000 pieds dans le plan vertical pour des avions ayant un niveau de vol stable, ou 5 NM dans le plan horizontal (3 NM en approche).

## 2.2.5 Répartition des compétences

Dans cette partie, seul le régime de vol *IFR* est considéré. Ce régime de vol est en effet celui sous lequel les vols de transport commercial sont effectués.

### 2.2.5.1 Contrôle d'aérodrome

Le contrôle d'aérodrome s'occupe des pistes et de la circulation au sol sur la plate-forme. Dès que le trafic devient important, le contrôle du décollage et de l'atterrissage et le contrôle des mouvements au sol sont assurés par des personnes différentes sur des fréquences différentes. L'équipage d'un vol *IFR* demande sur la fréquence radio de la tour de contrôle l'autorisation de décoller environ 10 minutes avant l'heure de départ. Le contrôleur aérien délivre alors la *predeparture clearance* qui consiste en des informations relatives à la procédure de départ, la route à suivre, le niveau de vol attribué, le code du transpondeur radar à afficher ainsi que la fréquence permettant de contacter le contrôleur départ. L'équipage prend alors les dernières informations météorologiques et aéronautiques en réglant le récepteur radio sur la fréquence de l'*ATIS* (*Automatic Terminal Information Service*), puis contacte le contrôleur sol afin d'obtenir l'autorisation de roulage (*taxi clearance*). Une fois l'avion en bout de piste et prêt pour le décollage, le contrôleur aérien autorise l'avion au décollage, puis, une fois le décollage effectué, il demande à l'équipage de contacter le secteur départ du contrôle d'approche.

### 2.2.5.2 Contrôle d'approche

Le contrôle d'approche s'effectue dans un volume d'espace aérien de quelques dizaines de miles nautiques autour de l'aérodrome et s'étend en altitude jusqu'à environ 10 000 pieds. Le contrôle d'approche est assuré à partir d'une salle de contrôle située la plupart du temps sur l'aérodrome lui-même, mais distinct de la tour ; en effet, le contrôle d'approche s'effectue principalement au radar, et doit être réalisé en lumière atténuée.

Le contrôle d'approche recouvre le contrôle d'approche au départ et à l'arrivée sur l'aérodrome.

#### 2.2.5.2.1 Contrôle d'approche au départ

Les *SID* (*Standard Instrument Departure*) sont des itinéraires normalisés de départ pour les vols aux instruments (*IFR*), permettant d'assurer des séparations géographiques (séparations stratégiques) et des itinéraires antibruit.

Les séparations minimales au décollage sont les suivantes ([2-a]) :

- 1 minute entre deux décollages pour des routes divergentes à plus de 45° ;
- 2 minutes entre deux décollages sur la même route si la vitesse du premier aéronef est supérieure de 40 kt à celle du second ;
- 5 minutes sur la même route au moment de la traversée du niveau de vol du premier aéronef par le second.

Ces séparations peuvent être réduites par l'emploi du radar ou par la ségrégation géographique des flux de trafic (i.e. espacement stratégique).

Après le décollage, le profil de montée est en général basé sur la puissance maximale admissible de façon continue pour les moteurs jusqu'à l'altitude de croisière. Cependant, les procédures antibruit conduisent beaucoup d'aérodromes à imposer une réduction de puissance presque aussitôt après le décollage, et n'autorisent la reprise de puissance normale de montée qu'au-dessus d'une certaine altitude. De plus, la séparation entre les vols au départ par rapport aux vols à l'arrivée ou la coordination entre les secteurs de contrôle qui prennent successivement en charge l'avion peut conduire à des paliers intermédiaires. La pente de montée minimale requise pour le calcul des volumes de protection est de 3.3%.

Une fois l'itinéraire normalisé de départ réalisé, l'aéronef est transféré au contrôle en route.

## 2.2.5.2.2 Contrôle d'approche à l'arrivée

Sur un aéroport doté d'une procédure d'arrivée *IFR*, le pilote est pris en charge par les contrôleurs aériens qui lui garantissent une séparation avec les autres aéronefs. Une procédure d'arrivée *IFR* est basée sur des installations radioélectriques qui permettent au pilote de s'approcher de l'aéroport suivant des axes radiobalisés avec suffisamment de précision pour que l'aéronef puisse descendre sans voir le sol tout en évitant les obstacles ou le relief à proximité de l'aéroport.

Une procédure d'arrivée consiste en une série de manœuvres prédéterminées effectuées en utilisant uniquement les instruments de bord. Une carte d'approche aux instruments sur Toulouse Blagnac est reproduite sur la figure suivante :

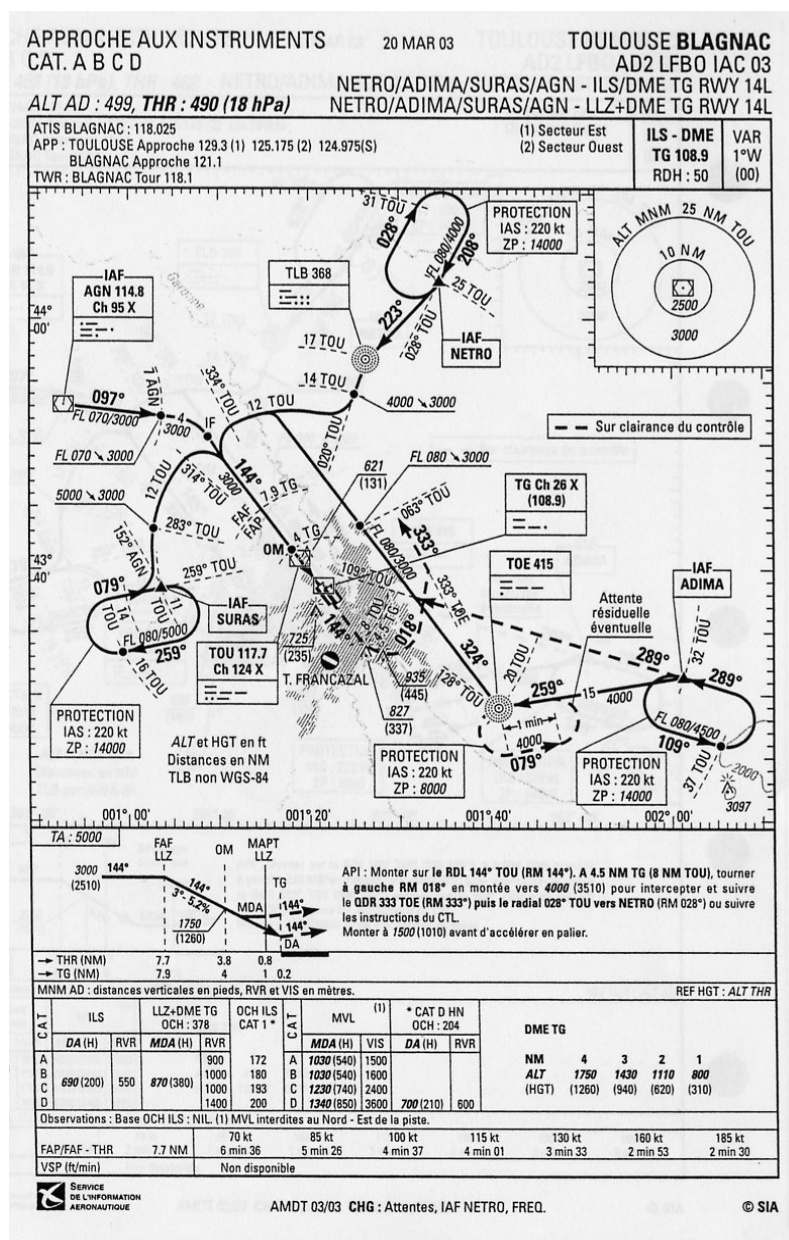


Figure 2-4 Carte d'approche aux instruments sur Toulouse Blagnac (source [2-s])

Les procédures d'arrivée sont en général établies dans un rayon de 30 NM autour du terrain (les routes d'arrivée sur Roissy-Charles de Gaulle débutent à 90 NM du terrain), et peuvent se décomposer en plusieurs phases ([2-e]) :

- Route d'arrivée, ou étape de rapprochement (*STAR : STandard ARival*), qui conduit à un point dénommé *IAF (Initial Approach Fix)* : ce point constitue le point de départ de la procédure d'approche ;
- Procédure d'attente : des circuits en hippodrome sont en général basés sur l'*IAF* et permettent à un ou plusieurs avions d'attendre éventuellement l'autorisation d'atterrir. Si plusieurs avions attendent dans l'hippodrome, ils sont distribués sur différents niveaux de vol.

Enfin, une procédure d'approche permet à l'avion de rejoindre la piste. Elle peut comporter jusqu'à quatre segments :

- Approche initiale : ce segment permet d'amener l'aéronef dans l'axe de percée à une altitude suffisante. Cette procédure conduit à un point dénommé *IF (intermediate Fix)*.
- Approche intermédiaire : ce segment permet d'adapter la vitesse et la configuration de l'avion. Durant l'approche intermédiaire, l'avion est en palier. Sa durée est d'environ 30 secondes. Entre 8 et 12 NM du seuil de piste, l'avion capture le faisceau radioélectrique d'alignement sur l'axe de piste (*LOC*) de l'*ILS (Instrument Landing System)*. La vitesse d'interception de l'*ILS* se situe autour de 180 kt pour les jets (minimum 160 kt), et entre 120 et 180 kt pour les autres types d'avion (turbo-propulseur et hélice). Une fois établi sur l'*ILS*, la vitesse se situe entre 140 et 160 kt pour les jets et entre 80 et 120 kt pour les turbo propulseurs et les avions à hélice. La fin de ce segment est matérialisée par un point dénommé *FAF (Final Approach Fix)*.
- Approche finale : ce segment permet l'interception et le suivi du plan de descente, l'alignement sur l'axe de piste et l'atterrissage ; après le passage du *FAF*, le pilote réduit sa vitesse vers la vitesse d'approche, appelée vitesse de référence. La pente nominale est de 5%, la pente maximale est de 6,5%. La longueur de ce segment est comprise entre 5 et 10 NM. Les différentes vitesses d'atterrissage permettent un classement des avions en cinq catégories :

| Catégorie | Vitesse atterrissage |
|-----------|----------------------|
| A         | Moins de 91 kt       |
| B         | De 91 kt à 120 kt    |
| C         | De 121 kt à 140 kt   |
| D         | De 141 kt à 165 kt   |
| E         | De 166 kt à 210 kt   |

*Tableau 2-3 Classification des avions pour l'approche finale (source [2-a])*

- Approche interrompue : ce segment permet d'interrompre l'approche en cas de nécessité, et de rejoindre une altitude suffisante pour se raccorder à une route d'arrivée, une procédure d'attente ou une procédure d'approche. La hauteur de décision (*DH*) est la hauteur minimale en deçà de laquelle une approche interrompue doit être engagée si la piste n'est pas en vue. La hauteur de décision dépend de la catégorie de l'*ILS* (*DH* = 200 feet si *ILS* de catégorie I, *DH* = 100 feet si *ILS* de catégorie II, *DH* < 100 feet si *ILS* de catégorie III).

Ces différentes phases sont résumées sur la figure ci-après :

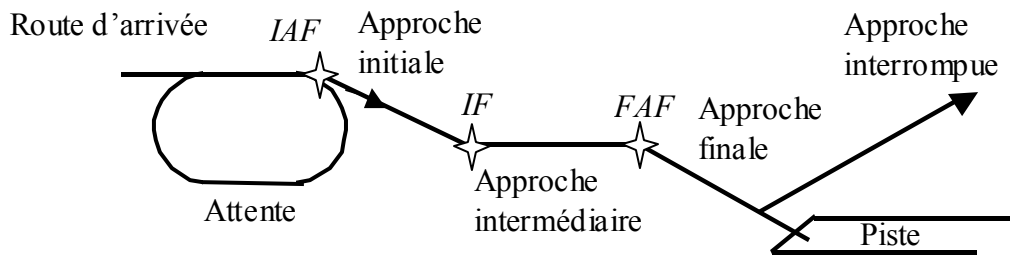


Figure 2-5 Procédure d'arrivée

Outre le maintien de la sécurité dans l'écoulement du trafic, le contrôle d'approche à l'arrivée a aussi pour but la mise en ordre des trafics afin d'obtenir un ordonnancement régulier des arrivées sur la piste. La cadence à la piste est fixée par le chef de la tour de contrôle, et est de l'ordre de 1,5 à 2 minutes à Roissy-Charles de Gaulle. Le travail de mise en ordre du trafic est partagé entre les contrôleurs des secteurs terminaux du centre de contrôle en route et les contrôleurs d'approche. En général, le transfert s'effectue sur un certain nombre de points spécifiés, à une altitude comprise entre 6 000 et 12 000 pieds. Lorsqu'il y a trop de trafic, les contrôleurs des secteurs terminaux placent les avions dans la procédure d'attente, d'où le contrôleur d'approche les extrait au fur et à mesure des possibilités.

Le contrôleur d'approche séquence les avions en provenance des différents points de transfert pour les amener en bon ordre sur l'axe de la piste avec une séparation de 3 à 6 NM suivant leur catégorie de turbulence de sillage qui dépend de la masse maximale certifiée au décollage. Pour arriver à ce résultat, il allonge ou raccourcit si nécessaire les trajectoires de certains avions en leur donnant des caps appropriés en utilisant la régulation de vitesse : c'est le guidage radar (*radar vectoring*). Les possibilités de régulation de vitesse sont limitées car l'équipage doit pendant la phase d'approche changer la configuration de l'aéronef : arrivé au point de transfert en configuration lisse et à 250 kt en dessous du niveau de vol FL100, il doit se trouver avec le train d'atterrissage et les volets sortis et à la vitesse proche de la vitesse d'atterrissage en approche finale. Par conséquent, c'est une phase de vol assez chargée pour l'équipage, et à chaque configuration correspond des plages de vitesse assez étroites. Le guidage radar s'achève au plus tard au point où l'avion peut intercepter l'axe d'approche finale avec un angle maximum de 45 degrés et faire un palier de 30 secondes avant d'intercepter le plan de descente nominal. L'avion poursuit alors son approche de manière autonome. Une finale radar exécutée à l'aide d'un radar de surveillance n'est pratiquée en France que par les organismes militaires.

| Séparation                  | Avion leader |       |       |
|-----------------------------|--------------|-------|-------|
| Avion suiveur               | Small        | Large | Heavy |
| Small ( $\leq 7\,000$ kg)   | 3 NM         | 4 NM  | 6 NM  |
| Large ( $< 136\,000$ kg)    | 3 NM         | 3 NM  | 5 NM  |
| Heavy ( $\geq 136\,000$ kg) | 3 NM         | 3 NM  | 4 NM  |

Tableau 2-4 Séparation entre avion selon la catégorie de turbulence de sillage (source [2-a])

### 2.2.5.3 Contrôle en route

Le long des voies aériennes en espace inférieur, et dans l'espace supérieur dans son ensemble, le contrôle en route est assuré par des centres spécialisés qui ne sont pas en général implantés sur les aérodromes. En France il y a cinq Centre Régional de la Navigation Aérienne (CRNA) qui sont situés à Brest, Athis-Mons, Reims, Bordeaux et Aix-en-Provence. Ces centres peuvent gérer jusqu'à une vingtaine de secteurs de contrôle,

comme celui d'Athis-Mons. En principe tous les contrôleurs d'un centre sont qualifiés sur tous les secteurs d'un centre, mais lorsque celui-ci devient trop grand cette qualification unique n'est plus possible et les équipes de contrôleur ne sont plus interchangeables.

#### **2.2.5.4 Contrôle océanique**

Le contrôle océanique s'occupe des régions qui n'appartiennent à l'espace aérien d'aucun pays, où les moyens de navigation au sol n'existent pas et où les communications radio-téléphoniques sont difficiles et ne permettent pas une communication certaine et instantanée entre le sol et l'avion. Le contrôle est confié à certains pays limitrophes des zones océaniques. Le contrôle est uniquement réalisé par des méthodes de contrôle aux procédures qui font suivre aux aéronefs des routes parallèles de degrés de latitude en degrés de latitude (60 NM d'espacement environ). Sur ces routes, les niveaux de vol FL280 à FL370 sont alloués (à l'exception du Concorde, qui effectuait des vols en croisière ascendante au fur et à mesure du délestage de carburant jusqu'au niveau de vol FL610). Les avions doivent fournir un compte rendu de position au passage des longitudes multiples de 10 degrés, et la séparation entre les avions est de 10 minutes. Actuellement, les avions équipés de l'avionique *Future Air Navigation System (FANS A* pour Airbus ou *FANS A* pour Boeing) et survolant l'océan Pacifique ou Atlantique reportent automatiquement leur position et leur vitesse grâce à un système de communication par satellite.

#### **2.2.6 Pistes pour l'amélioration de la gestion du trafic aérien**

Divers concepts ont été imaginés dans le but d'augmenter la capacité du système de gestion du trafic aérien tout en diminuant les retards et en assurant un niveau de sécurité acceptable. Ces concepts peuvent se diviser en deux grandes familles : concepts d'ordre organisationnel ou stratégique, et concepts d'ordre local ou tactique ([2-f]) :

- Concepts d'ordre organisationnel ou stratégique : ces concepts se focalisent sur de nouvelles organisations de l'espace aérien, et sont basés sur une meilleure précision de l'avionique dédiée à la localisation de l'avion. Ainsi, l'amélioration de la précision des moyens de positionnement (hybridation entre centrale inertielle, positionnement par satellite et/ou aides radio électriques au sol) a conduit à des procédures de cheminement qui peuvent être rendues indépendantes des aides radio électriques existantes au sol (procédures *RNAV : Area Navigation*). De même, l'amélioration de la précision des altimètres a conduit à la mise en place de niveaux de vol supplémentaires (*RVSM : Reduced Vertical Separation Minima*). Le concept consistant à permettre aux équipages de choisir librement leur cheminement dans un espace aérien dédié entre un point d'entrée et un point de sortie (concept *Free Route*) est actuellement à l'étude. Enfin, une gestion coopérative de l'espace aérien entre acteurs militaires et civils, en tentant de dépasser le cadre national, est une source d'études (*FUA : Flexible Use of Airspace*). De manière beaucoup plus futuriste, l'étude du transfert de la totalité de la responsabilité du contrôle du trafic aérien vers les équipages (concept *Free Flight*) est particulièrement active aux Etats-Unis.

- Concepts d'ordre local ou tactique : ces concepts reposent sur le renforcement de la coopération sol-bord et sont basés sur de nouvelles fonctionnalités que pourraient fournir l'avionique dédiée à la navigation. Le remplacement d'une partie des communications radio actuelles, très coûteuses en termes de disponibilité de fréquences, par une liaison de données air sol (*data link*) s'inscrit dans cette voie. Les applications envisagées sont pour le moment relatives aux informations météorologiques et aéronautiques (*ATIS : Air Traffic Information Service*) et à l'autorisation de départ (*Departure Clearance*). Il est envisagé qu'à plus long terme, les instructions de contrôle puissent transiter par ce nouveau média de communication. De plus, de nouveaux systèmes de surveillance, comme l'*ADS-B*, et les applications opérationnelles associées (*ASAS*) sont actuellement à l'étude.

Les paragraphes suivants présentent les notions de surveillance dépendante automatique en mode diffusion (*ADS-B*) et les applications embarquées de surveillance (*ASAS*).

## 2.3 Surveillance dépendante automatique en mode diffusion

### 2.3.1 Contenu des reports et performances minimales

La surveillance dépendante automatique en mode diffusion (*ADS-B : Automatic Dependent Surveillance- Broadcast*) est un moyen de communication embarqué à bord d'un aéronef ou d'un véhicule de surface qui lui permet d'émettre périodiquement et spontanément des informations relatives à sa navigation (identification, position, vitesse, intentions, etc.). Le système *ADS-B* n'a pas connaissance des destinataires (autres trafics, stations sol) des informations diffusées.

L'objectif de cette section est de présenter les principales caractéristiques de l'*ADS-B*. Une présentation détaillée de l'*ADS-B* peut être trouvée dans [2-k], tandis que les performances minimales attendues de ce système sont décrites dans le document [2-r].

Les reports *ADS-B* sont divisés en trois catégories :

- Vecteur d'état actuel (*SV : State Vector*) : ce sont des informations relatives à la position et à la vitesse actuelle de l'aéronef :
  - o Identification (callsign, adresse mode S, catégorie de poids) ;
  - o Position (latitude, longitude, altitude géodésique et barométrique) dans le repère *WGS-84* ;
  - o Vitesse sol (composantes par rapport au Nord et à l'Est), vitesse verticale (géodésique et barométrique) ;
  - o Remarque : la diffusion de la vitesse air n'est pas prévue dans les messages de type *SV* : celle ci fait partie d'un message de type *ARV (Air Reference Velocity)*, qui est transmis après 24 sec d'indisponibilité de la vitesse sol. Il en est de même pour le cap, lorsque l'aéronef n'est plus au sol ;
  - o Intégrité de la position (rayon du cercle à l'intérieur duquel une position transmise peut être erronée sans détection possible de cette erreur et probabilité associée) ;
  - o Précision de la position et de la vitesse.
  - o Les premières discussions au niveau des groupes de standardisation sur la période maximale de rafraîchissement des informations font apparaître une à la distance entre les avions, comme indiqué sur le tableau ci-après :

| Distance entre les avions                  | $\leq 10$ NM | $\leq 20$ NM | $\leq 40$ NM | $\leq 90$ NM |
|--------------------------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Période maximale de rafraîchissement (95%) | 3 sec        | 5 sec        | 7 sec        | 12 sec       |

Tableau 2-5 Période maximale de rafraîchissement des reports *ADS-B* (source [2-r])

- Etat visé (*TS : Target State*) : ces informations sont relatives aux modes engagés du pilote automatique, et donc relatives au segment courant de trajectoire. Il s'agit des informations suivantes :
  - o Altitude de consigne ;
  - o Cap ou la route de consigne ;

- o Remarque : la vitesse (air ou sol) de consigne et la vitesse verticale de consigne ne font pas partie des informations transmises.
- Contrôle de la trajectoire (*TC : Trajectory Control*) : ce sont des informations relatives à la gestion de la trajectoire et qui sont gérées par le *FMS (Flight Management System)*, et plus particulièrement aux *TCP (Trajectory Change Point)*.

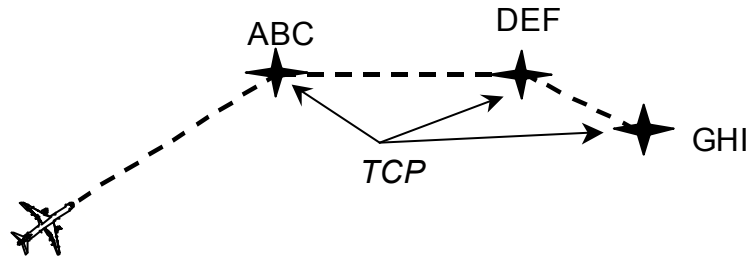


Figure 2-6 Informations relatives aux reports TS et TC (source [2-r])

Actuellement, trois alternatives technologiques sont en cours d'évaluation pour la mise en œuvre de l'*ADS-B*. Ce sont :

- Le squitter long mode S ;
- La *VDL 4 (VHF Data Link mode 4)* ;
- L'*UAT (Universal Access Transceiver)*.

Les paragraphes suivant présentent brièvement ces trois alternatives technologiques.

### 2.3.2 Squitter long mode S

Le *squitter* est une émission spontanée non sollicitée par une interrogation. Le *squitter* long mode S (*1090 MHz extended squitter*) est véhiculé par une modulation d'impulsion par position (*PPM*) à 1090 MHz, dont la bande passante est de 1.3 MHz et le débit de 1 Mégabits par seconde ([2-q]).

L'accès au canal de communication se fait de manière aléatoire. Chaque message est précédé d'un préambule de quatre impulsions pour la synchronisation du récepteur qui dure 8  $\mu$ sec. Le nombre de bits transmis est de 112 bits, et la portée maximale air/air est de l'ordre de 90 NM. Un exemple de codage d'une séquence est représenté sur la figure ci-après :

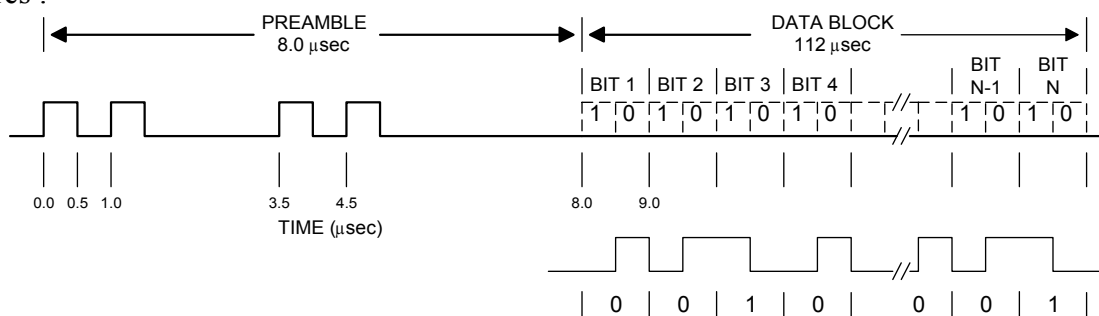


Figure 2-7 Exemple de codage de la séquence 0010...001

Le contenu des messages émis de manière spontanée est le suivant ([2-q]) :

- Position et vitesse : en vol toutes les 0.5 sec ;
- Identification de l'aéronef : toutes les 5 sec.

La structure d'un message est représentée sur la figure ci-après :

|                             |                           |                             |                   |
|-----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------|
| Champ de contrôle<br>8 bits | Adresse mode S<br>24 bits | Champ de données<br>56 bits | Parité<br>24 bits |
|-----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------|

Figure 2-8 Format des messages squitter long mode S

Les avantages de cette technique résident dans le fait qu'elle est interoperable avec l'ACAS (*Airborne Collision Avoidance System*) et les radar de surveillance mode S. En effet, les techniques de communication entre ces différents systèmes sont semblables. Par contre, sa limitation principale vient du fait que le nombre maximum d'aéronefs détectés dans la zone de couverture varie en sens inverse de la densité de trafic : ce problème est lié au *FRUIT* (*False Replies from Unsynchronised Interrogator Transmissions*).

### 2.3.3 VDL 4 (VHF Data Link mode 4)

Le système *VHF data link mode 4* (VDL mode 4) est développé par l'aviation civile suédoise depuis 1983. La *VDL mode 4* permet la réalisation des fonctionnalités *ADS-B* et liaisons de données sol – air.

La modulation utilisée est de type *GFSK* (*Gaussian Frequency Shift Keying*). Chaque canal de communication se situe dans la bande *VHF* (118 - 136.975 MHz). Le débit est de 19200 bps (bits par seconde), et la bande passante de 25 kHz.

Le protocole de communication est de type *STDMA* (*Self Organising Time Division Multiple Access*), et permet d'obtenir 4500 slots/min : cela représente 75 (4500 slots / 60 sec) aéronefs s'ils diffusent un slot toutes les secondes, ou 375 ( $5 \times 4500$  slots / 60 sec) aéronefs s'ils diffusent un slot toutes les cinq secondes. Chaque slot est constitué de 256 bits, dont 160 servent à la transmission de l'information. La synchronisation des messages occupe 24 bits, et est basée sur une horloge *GPS*.

Avant d'accéder au canal de communication, la station émettrice écoute les canaux réservés (*SC : Signalling channels*) jusqu'à réception complète d'une trame complète (*Superframe*), ce qui peut nécessiter jusqu'à une minute d'écoute. Pendant cette phase d'écoute, la station émettrice (aéronef ou véhicule) identifie les slots réservés. Ensuite, la station réserve (aléatoirement) des slots parmi les slots disponibles, ainsi que la durée de réservation (entre 3 et 8 minutes). En cas de surcharge, une station peut utiliser des slots réservés par les stations les plus éloignées.

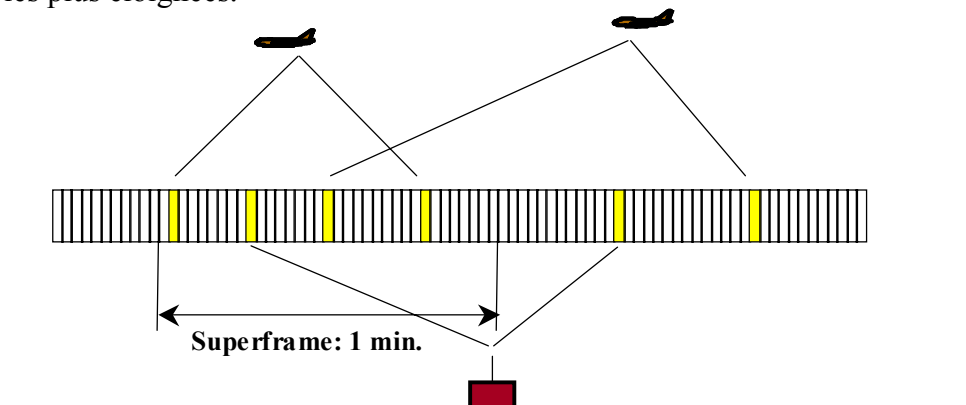


Figure 2-9 Principe de communication VDL mode 4

Deux canaux de communication assure une couverture globale (*GSC : Global Signaling channels*). Des canaux de communication supplémentaires peuvent être nécessaires si la densité du trafic est trop importante. Ces canaux de communication supplémentaires sont locaux. La portée de ce système est de l'ordre de 150 NM.

La fréquence de réception des messages est variable selon le lieu et la phase de vol :

- En route : toutes les 10 sec ;
- Zones terminales (TMA) : toutes les 5 sec ;
- Mouvements au sol : toutes les 1.5 sec.

Les difficultés de ce système de communication résident dans la faible disponibilité des fréquences *VHF*. De plus l'emport de deux antennes supplémentaires, découplées des autres antennes déjà présentes sur le fuselage, peut s'avérer difficile sur de petits aéronefs comme l'Airbus A318.

La commission européenne favorise son développement au travers de divers projets internationaux comme *NEAN* (*North European ADS-B Program*) et *NUP* (*NEAN Update Program*). De plus, la fédération de Russie et la Suède ont promulgué un programme de mise en œuvre prévoyant l'utilisation de la *VDL 4* pour exploiter l'*ADS-B* ([2-o]).

### 2.3.4 UAT (Universal Access Transceiver)

Ce système de communication a été développé aux Etats Unis à partir de 1995 par la *MITRE/CAASD* (*Center for Advanced Aviation System Development*). L'*UAT* est le concurrent technologique américain de la *VDL mode 4* européenne. En effet, l'*UAT* permet comme la *VDL mode 4* de réaliser les fonctionnalités *ADS-B* et liaison de données montante sol-air.

Le protocole de communication combine accès synchrone et accès aléatoire (3200 slots/sec). La modulation utilisée est une modulation de fréquence binaire autour de 966 MHz (non définitif), avec une bande passante 312 KHz.

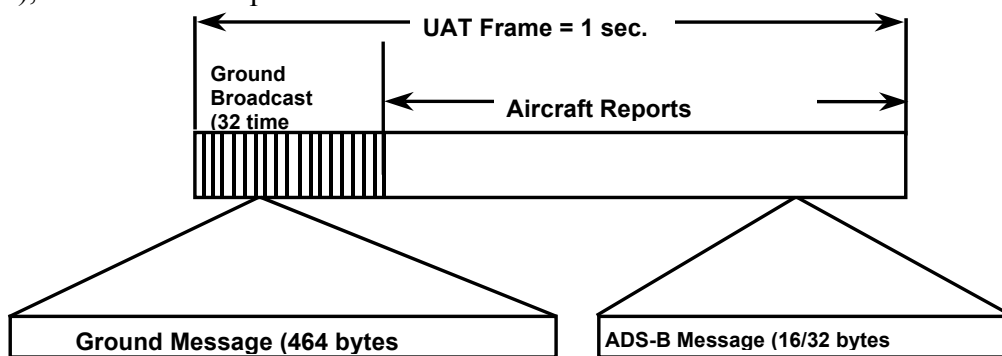


Figure 2-10 Principe de communication UAT

En moyenne, un message par seconde est transmis, ce qui assure un débit de 1 Mégabits par seconde. La fréquence et le contenu des messages sont les suivants :

- Vecteur d'état et identification du vol : une fois toutes les 4 sec ;
- Vecteur d'état associé aux deux futurs points de changement de trajectoire : une fois toutes les 2 sec ;
- Vecteur d'état associé à des informations variables (en cours de définition) : une fois toutes les 4 sec.

La synchronisation des horloges est réalisée grâce au *GPS*. Un seul canal de communication est pour le moment disponible. Cette technique est actuellement mise en œuvre aux Etats-Unis, dans le cadre du projet *SF21* (Safe Flight 21) à Capstone.

### 2.3.5 Standardisation et choix technologiques

Au niveau de l'*OACI*, ce sont les normes et les pratiques qui sont spécifiées dans les *SARPs* (*Standards And Recommended Practices*) et les guides matériels (*guidance material*). Les groupes de travail au niveau de l'*EUROCAE* (*European Organisation for*

Civil Aviation Equipment) et du RTCA (Radio Technical Commission for Aeronautics) américain s'occupent des performances minimales attendues (MOPS : Minimum Operational Performance Standards et MASPS : Minimum Aviation System Performance Standards). Le processus de standardisation de systèmes aéronautiques est résumé sur la figure ci-après :

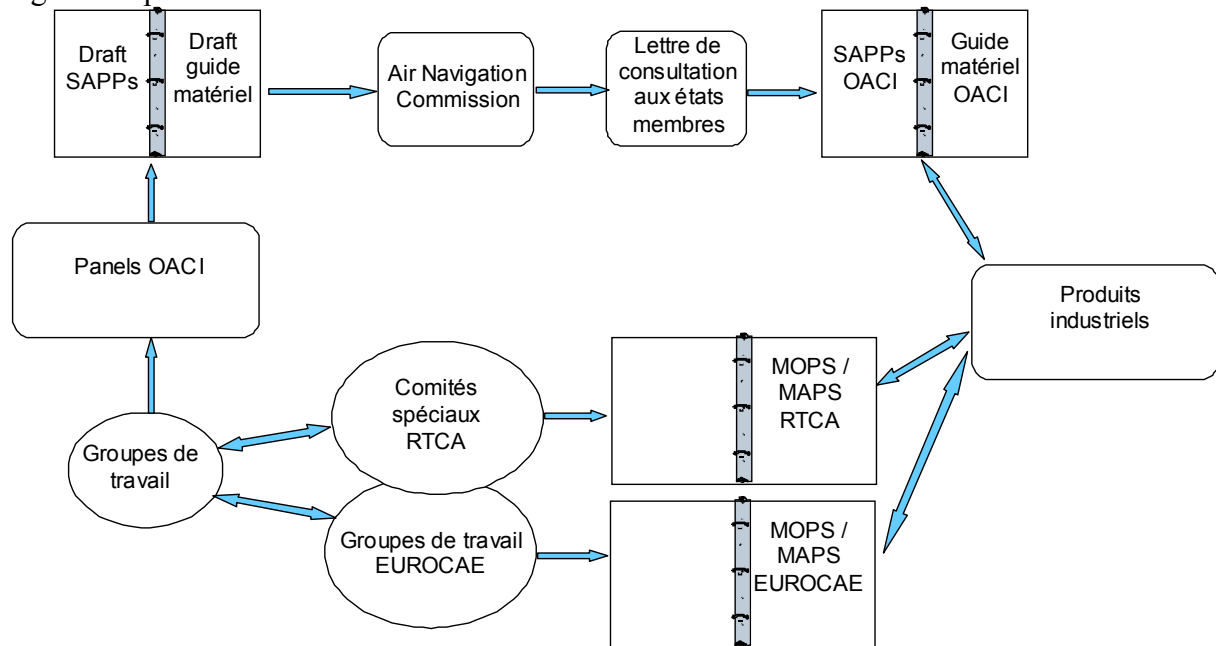


Figure 2-11 Processus de standardisation de produits industriels aéronautiques

Une première version du document relatif aux performances minimales attendues de l'ADS-B a été rédigée par le RTCA ([2-r]). En 2003, l'état d'avancement de la standardisation des différents moyens ADS-B était le suivant ([2-g]) :

- Squitter long mode S : cette technologie est déjà standardisée au niveau de l'OACI au travers des SAPPs. De plus, les MOPS ont été publiées conjointement par le RTCA américain et l'EUROCAE durant l'année 2000.
- VDL mode 4 : les MOPS ont été publiées par l'EUROCAE durant l'année 2001. Au niveau de l'OACI, les SAPPs ont été publiés.
- UAT : les MOPS ont été publiés par le RTCA américain durant l'année 2002. Au niveau de l'OACI, le travail de développement des SAPPs a débuté.

L'Europe (Eurocontrol) et les Etats-Unis incitent à l'utilisation du squitter long mode S afin de favoriser l'interopérabilité au niveau mondial. Cette incitation est basée sur le fait que le squitter long mode S est la seule technologie de liaison de données ADS-B normalisée par l'OACI pour laquelle il existe actuellement une attribution de fréquences radioélectriques et des assignations de canaux pour une exploitation mondiale. Airbus et Boeing ont annoncé qu'ils prévoyaient d'équiper les nouveaux aéronefs de transport commercial de transpondeurs mode S prenant en charge la transmission du squitter long mode S ([2-m]). Cependant, d'autres technologies de liaison de données favorisant une première mise en œuvre des applications ADS-B peuvent être utilisées à titre facultatif sur une base locale ou régionale, soit en complément soit en remplacement du squitter long mode S ([2-m]).

## 2.4 Applications embarquées de surveillance

### 2.4.1 Présentation du concept ASAS

En 1995, une alternative aux utilisations déplacées du système anticollision *ACAS* (*Airborne Collision Avoidance System*) installé à bord des avions a été proposée par le CENA (Francis Casaux) au niveau d'un groupe de travail de l'*OACI*. Il s'agissait d'un concept de système d'assistance embarqué pour la séparation (*ASAS : Airborne Separation Assistance System*).

Depuis, ce concept a mûri et regroupe désormais l'ensemble des applications embarquées de surveillance, de telle sorte que l'acronyme initial peut prêter à confusion lorsqu'il est pris au pied de la lettre. Un acronyme moins ambigu pourrait être *Airborne Surveillance Applications System*, comme suggéré dans [2-g].

Le concept *ASAS* est lié au rôle plus important que pourrait jouer l'avionique dédiée à la navigation dans l'amélioration de la gestion du trafic aérien. De manière plus précise, le concept *ASAS* fait référence à l'avionique embarquée basée sur la surveillance *l'ADS-B* et qui aide l'équipage à assurer la séparation de son aéronef par rapport aux autres aéronefs.

Le concept *ASAS* consiste à déléguer à l'équipage une ou plusieurs tâches actuellement dévolues aux services du contrôle de la circulation aérienne, le cas échéant sous réserve de l'accord réciproque des deux parties. L'*ASAS* prend en charge une partie des fonctions de gestion des conflits et d'ordonnancement des flux de la circulation aérienne ([2-n]).

Quatre catégories d'applications *ASAS* sont envisagées : amélioration de la conscience de la situation de la circulation aérienne, espacement embarqué, séparation embarquée et auto-séparation embarquée ([2-i]) :

- Applications relatives à la *conscience de la situation aérienne* (*Airborne Traffic Situational Awareness applications*) : l'objectif est l'amélioration de la conscience de la situation de la circulation aérienne pour l'équipage grâce à la présentation des trafics avoisinants sur un écran. Ce type d'application pourrait permettre à l'équipage l'aide à l'acquisition visuelle des trafics avoisinants.
- Applications de type *espacement embarqué* (*Airborne spacing applications*) : dans ce type d'applications, le contrôleur aérien utilise de nouvelles instructions de contrôle pour demander à l'équipage d'acquiescer et de maintenir une séparation avec un avion désigné. Le contrôleur aérien est tenu de surveiller le bon déroulement de l'instruction, et intervient si l'espacement passe en dessous des normes comme il le ferait par exemple lorsqu'il demande une stabilisation en niveau de vol. Il s'agit par exemple de maintenir une certaine séparation derrière un autre avion, ou de dépasser un avion tout en maintenant une séparation.
- Applications de type *séparation embarquée* (*Airborne separation applications*) : contrairement aux applications de type *espacement*, les applications de type *séparation* impliquent que la séparation avec le trafic désigné dans l'instruction de contrôle est à la charge de l'équipage pendant la réalisation de l'instruction. En effet, le contrôleur n'est pas tenu de surveiller le bon déroulement de l'instruction pendant sa réalisation (délégation limitée et ponctuelle de responsabilité). De nouvelles normes de séparation sont à définir pour ce type d'application.
- Applications de type *auto séparation embarquée* (*Airborne Self-separation applications*) : ces applications consistent en la délégation à l'ensemble des équipages de la tâche de séparation de son aéronef par rapport aux autres aéronefs. Ces applications nécessitent la définition de nouvelles normes de séparation et de nouvelles règles de vol. Elles sont envisagées dans une zone géographique dédiée, et s'apparentent au concept *Free Flight* américain.

Les difficultés de mise en œuvre de telles applications sont multiples. Nous citerons en particulier : définition précise du besoin opérationnel, difficultés institutionnelles liées au transfert de responsabilité du contrôleur vers le pilote, gains limités si l'équipement de la flotte est partiel, risque d'une mauvaise utilisation du système par les pilotes/contrôleurs (facteurs humains), problèmes de certification (architecture bord, surveillance embarquée) et établissement d'une séparation réglementaire dédiée à ces applications embarquées.

En ce qui concerne les applications de type *auto séparation embarquée*, il ne resterait uniquement coté sol que le service d'information de vol et le service d'alerte. Les difficultés de mise en œuvre de telles applications, en plus de celles évoquées précédemment, sont relatives à la complexité du système embarqué (e.g. surveillance des autres trafics, planification des trajectoires, résolution des conflits et coordination) permettant d'assurer un niveau acceptable de sécurité. Ce type d'applications sous-entend le passage d'un service du contrôle géographiquement centralisé (le secteur de contrôle) à un service reparté (les équipages). Enfin, il s'agit d'assurer une gestion correcte de la transition entre les zones *FFAS* (*Free Flight AirSpace*, qui peut être dynamique) et *MAS* (*Managed AirSpace*).

Les applications *ASAS* qui semblent le plus faciles à réaliser au niveau technique dans un horizon de 5 à 10 ans et qui présentent un intérêt pour le contrôle du trafic aérien sont décrites dans le document *ASAS-Package I* ([2-h]) adopté par Eurocontrol en 2002. On y trouve en particulier les applications relatives à la *conscience de la situation aérienne* et les applications de type *espacement embarqué* relatives à l'évitement entre aéronefs (*crossing and passing operations*) et à l'organisation du trafic (*sequencing and merging operations*) auquel le guidage relatif entre aéronefs peut se rattacher.

L'objectif des applications de type *espacement embarqué* est de permettre une meilleure répartition des rôles et une meilleure efficacité dans la gestion du trafic aérien grâce à une nouvelle allocation des tâches. Insistons sur le fait que les applications de type *espacement* ne consistent pas à transférer les problèmes du sol vers le bord, ni à donner plus de liberté aux aéronefs. De plus, ces applications doivent s'écarter le moins possible des méthodes de travail actuelles des pilotes et des contrôleurs pour être acceptées de manière opérationnelle.

La figure ci-après présente les espaces aériens susceptibles de tirer le meilleur parti des différentes catégories d'applications *ASAS* ([2-b]) :

|                 |                                                                                        |                         |                                 |                                 |                                        |
|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------------------|
| <b>En-Route</b> | Enhancement of current operations (surface, airborne and visual separation procedures) | Sequencing procedures   | Crossing and passing procedures |                                 | Autonomous aircraft operations in FFAS |
| <b>TMA</b>      |                                                                                        |                         | -                               |                                 | -                                      |
| <b>Surface</b>  |                                                                                        | -                       | -                               |                                 | -                                      |
|                 | <b>Airborne Traffic Situational Awareness</b>                                          | <b>Airborne Spacing</b> | <b>Airborne Separation</b>      | <b>Airborne Self-Separation</b> |                                        |

*Figure 2-12 Application ASAS et espace aériens (source[2-b])*

## 2.4.2 Projets relatifs au guidage relatif entre aéronefs

L'objet de cette section est de faire une rapide présentation des projets nationaux ou internationaux qui abordent le concept *ASAS* au travers d'applications mettant en œuvre le guidage relatif entre aéronefs.

#### 2.4.2.1 NUP

*NUP (NEAN Update Program, [2-l])* est un projet de la commission européenne qui fait suite au projet *NEAN (North European ADS-B Network)*. L'objectif du projet *NEAN* était l'implantation de stations *VDL mode 4* en Europe du Nord (Danemark, Suède, Allemagne), et a duré de 1995 à 1998. A partir de 1999, le projet *NUP* a pris la suite. Ce projet devrait durer jusqu'en 2005. L'objectif du projet *NUP* est l'étude d'applications basées sur l'*ADS-B*. Parmi les applications envisagées, l'application de maintien de position relative (*station keeping*) étudiée en Suède consiste à faire manœuvrer un aéronef de telle sorte qu'il se place à une certaine distance (ou un certain temps) derrière un aéronef leader. Des expérimentations où l'aéronef suiveur est guidé à vue par l'équipage sans l'aide de système automatique ont eu lieu en Suède (Malmö) en 2002 ([2-l]).

#### 2.4.2.2 DAG-TM

*DAG-TM (Distributed Air-Ground Traffic Management, [2-d])* est un projet américain mené depuis 1999 par la *NASA (National Aeronautics and Space Administration)* dans les centres de Ames, Glenn et Langley. L'objectif est d'améliorer la flexibilité et l'efficacité de la gestion du trafic aérien aux Etats-Unis grâce à une meilleure coopération entre les contrôleurs aériens et les équipages. Parmi les applications envisagées, l'application *Self-spacing for merging and in-trail separation* se concentre sur le développement des procédures et des technologies permettant aux équipages de réduire en toute sécurité les séparations prises par les contrôleurs aériens lors de la phase d'approche finale. Cette réduction des marges implique une réduction de l'incertitude sur la position relative entre les aéronefs, et donc une meilleure utilisation de la capacité horaire de la piste.

L'outil *ATAAS (Advanced Terminal Area Approach Spacing Tool)* utilise des données *ADS-B* de l'avion leader ainsi qu'une vitesse d'approche de référence et la vitesse du vent pour présenter au niveau d'un écran de pilotage (*PFD : Primary Flight Display*) la vitesse de consigne pour l'avion suiveur. L'équipage rejoint cette position de consigne grâce à un directeur de vol (qui pourrait être couplé à la manette de gaz) qui donne la vitesse de consigne. La figure suivante présente l'écran de pilotage associé à l'outil *ATAAS* :

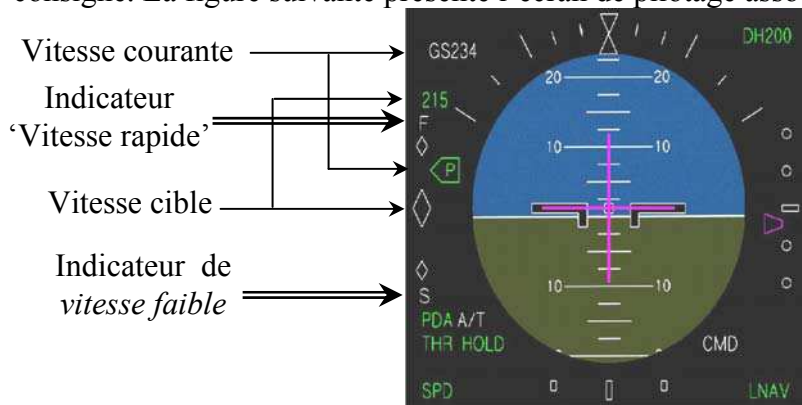


Figure 2-13 Ecran de pilotage (PFD) associé à l'ATAAS (source [2-d])

#### 2.4.2.3 CoSpace

Le projet *CoSpace ([2-c])* est un projet mené par le centre expérimental d'Eurocontrol depuis 1998 et financé par Eurocontrol et la commission européenne. Il s'agit d'évaluer la faisabilité opérationnelle et les bénéfices potentiels dans l'utilisation d'instructions d'espacement. L'application principale consiste en la mise en œuvre de nouvelles instructions de positionnement relatif sur des points de rendez-vous, comme l'illustre l'exemple suivant d'une communication pilote-contrôleur ([2-c]) :

- Contrôleur : "AZA324, select target 2443"

- Pilote : "AZA324, target 2443 identified, 3 o'clock, 30 miles"
- Contrôleur : "AZA324, behind target merge to INKAK to be 8 miles behind"

La figure suivante illustre les aspects contrôle radar (vision sol) et écran de navigation (vision bord) du projet CoSpace.



Figure 2-14 Projet CoSpace : vision sol (à gauche) et vision bord (à droite) (source [2-c])

## 2.5 Objectifs de la thèse

L'objectif principal de la thèse est le développement de méthodes de synthèse et l'évaluation de lois de guidage permettant la navigation relative entre aéronefs. Comme nous l'avons vu, ces lois embarquées à bord des aéronefs pourraient aider le contrôleur aérien dans sa tâche de régulation des flux de trafic.

Selon la nature des contraintes de séparation, le guidage relatif entre aéronefs peut être envisagé de plusieurs manières différentes :

- Guidage relatif en distance : l'aéronef suiveur se place à une distance donnée du leader. La distance relative souhaitée entre les deux aéronefs peut être précisée par rapport à l'aéronef leader ou par rapport à l'aéronef suiveur, comme illustré sur la figure suivante :

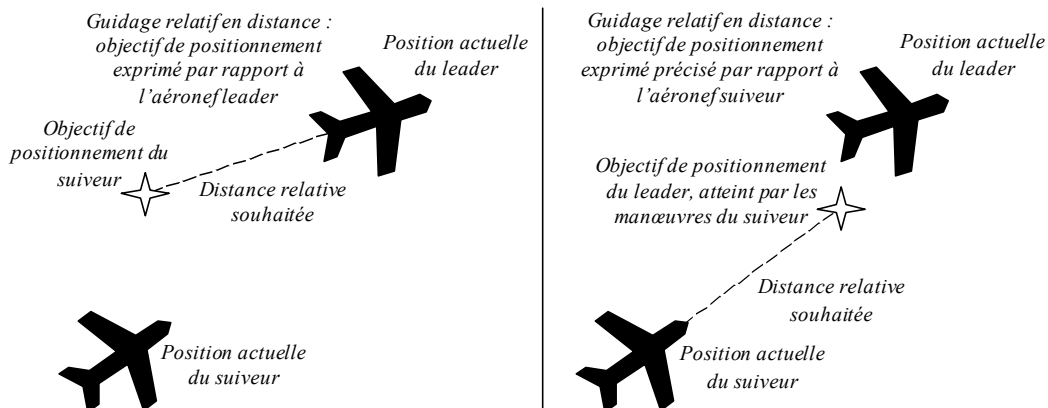


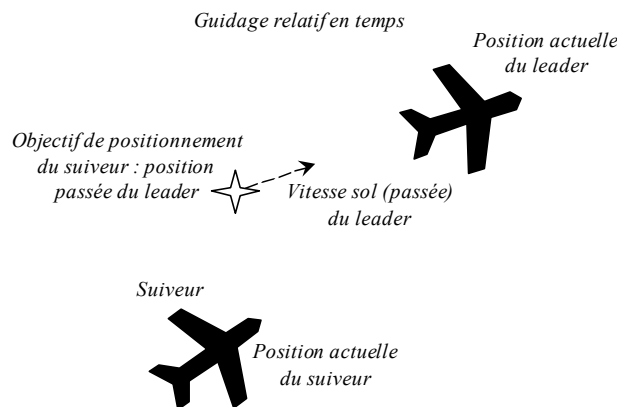
Figure 2-15 Guidage relatif en distance : distance relative souhaitée exprimée par rapport à l'aéronef leader ou par rapport à l'aéronef suiveur

Dans le cas où la distance relative souhaitée est exprimée par rapport à l'aéronef leader, l'objectif de positionnement pour le suiveur est placé derrière le leader, dans la direction de

la vitesse sol du leader, et à une distance égale à la distance relative souhaitée. L'inconvénient de ce choix est qu'il induit une manœuvre initiale indésirable qui s'apparente à un démarrage en opposition de phase. En effet, supposons que le leader tourne à droite : l'objectif de positionnement du suiveur se déplace alors de telle sorte que l'aéronef suiveur doit tourner à gauche pour le rejoindre, c'est à dire à l'opposé du sens du virage du leader.

A l'opposé, dans le cas où la distance relative souhaitée est exprimée par rapport à l'aéronef suiveur, c'est l'objectif de positionnement pour le leader qui est précisé : celui-ci est placé dans la direction de la vitesse sol du suiveur, et à une distance égale à la distance relative souhaitée. Comme le leader évolue de manière autonome, il s'agit alors pour le suiveur de manœuvrer de telle sorte que l'objectif de positionnement coïncide avec la position mesurée du leader. Contrairement au cas précédent, ce type de positionnement ne présente pas d'effet de démarrage en opposition de phase.

- **Guidage relatif en temps** : étant donné un délai  $\Delta T$  de quelques minutes (de 1 à 3 minutes par exemple), l'objectif pour l'aéronef suiveur à l'instant  $t$  est de se placer sur la position qu'occupait le leader à l'instant  $t - \Delta T$ . Ce type de guidage suppose que le suiveur connaisse à chaque instant la position occupée par le leader quelques minutes plus tôt. Il correspond à un guidage relatif en distance, où la distance relative souhaitée est nulle par rapport à une position passée du leader :



*Figure 2-16 Guidage relatif en temps*

L'intérêt du positionnement relatif en distance est que le critère de distance relative peut être directement mis en correspondance avec les normes de séparation entre avions, édictées par l'OACI. De plus, l'avionique embarquée n'a pas besoin de mémoriser les positions passées du leader. Par contre, le positionnement relatif en temps est adapté à la gestion des flux d'avions à l'arrivée, qui est dimensionné par le cadencement des avions à la piste (exprimé en secondes). Ce type de guidage nécessite cependant de vérifier que la distance entre la position passée visée et la position courante du leader est compatible avec les normes de séparation entre avions, édictées par l'OACI.

Cette thèse présentera des lois de commande pour les deux types de guidage relatif.

## **2.6 Conclusion**

Nous avons présenté dans ce chapitre le contexte dans lequel s'inscrit le présent travail de thèse : il s'agit du contrôle du trafic aérien, dont nous avons présenté le fonctionnement actuel. Les motivations du travail de recherche sont relatives à l'amélioration de l'écoulement du trafic aérien grâce à la mise en œuvre de nouveaux concepts technologiques (ADS-B) et opérationnels (ASAS).

Nos travaux s'inscrivent plus particulièrement dans le cadre du guidage relatif entre aéronefs, qui fait actuellement l'objet d'un grand nombre de projets d'études, aussi bien outre Atlantique (*DAG-TM*) qu'en Europe (CoSpace, *NUP*).

Notre sentiment est que le guidage relatif entre aéronefs ne pourra réellement apporter des gains pour le contrôle du trafic aérien qu'à la condition qu'il soit bien accepté par les équipages : pour cela, sa charge de travail ne doit pas être rendue prohibitive. De plus, les trajectoires suivies par les aéronefs lors du guidage relatif doivent avoir un certain degré de prédictibilité afin que l'équipage et le contrôleur aérien puissent les comprendre et le cas échéant les corriger. Ces deux constats militent en faveur de la conception d'un système automatique dédié à cette fonction.

L'objectif de cette thèse est de fournir les principaux éléments techniques en vue de la réalisation de lois embarquées dédiées au guidage relatif entre aéronef. Nous englobons dans le terme guidage relatif la phase de rejointe de l'aéronef leader et la phase de maintien de la position relative. La mise en œuvre opérationnelle de telles lois pourrait se placer dans un avenir de l'ordre de quelques dizaines d'années.

## **2.7 Références Bibliographiques**

- [2-a] *Casanova D., Carme P., Vacher P., Réglementation aérienne, Editions Cepadues, 1996*
- [2-b] *Casaux F., European ASAS applications, Third ASAS TIM - 21-23 October 2002 – NASA/Ames*
- [2-c] *CoSpace - Towards the use of spacing instructions*  
*<http://www.eurocontrol.fr/projects/freer/>*
- [2-d] *DAG-TM - Distributed Air/Ground Traffic Management ,*  
*<http://www.asc.nasa.gov/aatt/dag.html>*
- [2-e] *Dumaitre P., Contrôle de la circulation aérienne et technique d'utilisation, cours ENAC, 1993*
- [2-f] *Eurocontrol, ATM Strategy for 2000+, Volume II issues 2.0, May 1998*
- [2-g] *Eurocontrol, Package I and ASAS presentation, 2001*
- [2-h] *Eurocontrol, Joint Co-ordination Board, Description of a first package of GS/AS applications, version 2.2, September 2002*
- [2-i] *FAA-Eurocontrol cooperative R&D, Principles of operations for the use of ASAS, June 2001*
- [2-j] *Maignan G., Le contrôle de la circulation aérienne, Presse universitaire de France, 1991*
- [2-k] *Miquel T., Louyot P., Hasquenoph B., ADS-B et concept ASAS, Mastère ENAC Exploitation aéronautique, Module 'systèmes de conduite du vol', CENA, 2004*
- [2-l] *NEAN Update Program, <http://www.nup.nu/>*
- [2-m] *OACI, Onzième conférence de la Navigation aérienne, Stratégie pour l'interopérabilité mondiale de la surveillance dépendante automatique en mode diffusion (ADS-B), AN-Conf/11-WP/104, Montréal, septembre 2003*

- [2-n] *OACI, Onzième conférence de la Navigation aérienne, Système embarqué d'aide à la séparation (ASAS), AN-Conf/11-WP/64, Montréal, septembre 2003*
- [2-o] *OACI, Onzième conférence de la Navigation aérienne, Recommandation européenne sur la sélection d'une liaison de données ADS-B, AN-Conf/11-WP/137, Montréal, septembre 2003*
  
- [2-p] *Puy de Goyne T., Plays Y., Lepourry P., Besse J., Initiation à l'aéronautique, Editions Cepadues, 2000*
- [2-q] *RTCA (Radio Technical Commission for Aeronautics) Free Flight Select Committee, Safe Flight 21 Steering Committee, Eurocontrol ADS Programme, ADS-B Technical Link Assessment Team (TLAT), Technical link Assessment report, March 2001*
- [2-r] *RTCA (Radio Technical Commission for Aeronautics), Minimum Aviation System Performance Standards (MASPS) for Automatic Dependent Surveillance Broadcast, Draft version, DO-242A, March 2002*
- [2-s] *Service de l'information aéronautique (SIA), <http://www.sia.aviation-civile.gouv.fr/>*

---

## Chapitre 3

# Etat de l'art sur les techniques de commande appliquées au guidage relatif entre aéronefs

---

### 3.1 Introduction

Le guidage relatif entre aéronefs militaires est un sujet d'étude depuis de nombreuses années. En effet, dès 1965 un rapport de l'armée américaine ([3-v]) insistait déjà sur l'intérêt d'une loi de guidage permettant le maintien automatique d'un vol en formation afin de diminuer la charge de travail des pilotes. Par contre, l'intérêt de telles lois est relativement récent dans l'aviation civile (~1995, cf. [3-l]), et peu d'études relatives aux aspects techniques sont disponibles.

Comme il existe très peu de références bibliographiques dédiées aux lois de commande pour le guidage relatif entre aéronefs de transport commercial, l'état de l'art réalisé dans ce chapitre se focalise sur les lois de commande appliquées au vol en formation d'engins volants, dont le guidage relatif peut être considéré comme un cas particulier (il englobe en plus la phase de rejointe de la formation, comme nous l'avons mentionné au chapitre précédent).

Un large éventail de techniques d'analyse et de synthèse de lois de commande existe pour les systèmes linéaires et invariants. En ce qui concerne les systèmes présentant des non linéarités importantes, une importante activité de recherche se consacre encore de nos jours aux méthodologies de synthèse de lois de commande ([3-n]).

Nous présenterons dans les paragraphes qui suivent les commandes de type proportionnelle, intégrale et dérivée, par régime glissant, par bouclage linéarisant et optimale. Ces différentes techniques ont en effet été utilisées dans la littérature spécialisée dans le cadre d'applications en relation avec le vol en formation d'engins volants. *L'annexe C* rappelle quelques notions mathématiques concernant les systèmes dynamiques sur lesquelles la plupart des techniques de commande non linéaire présentées par la suite sont basées.

### 3.2 Commande de type proportionnelle, intégrale et dérivée

#### 3.2.1 Présentation

La commande de type proportionnelle, intégrale et dérivée est une technique classique pour la commande des systèmes linéaires et invariants. Une description détaillée de ce type de commande peut par exemple être trouvée dans [3-b] et [3-p]. Nous n'en reprenons ici que les éléments de base.

D'une manière générale, la problématique qui apparaît souvent en commande des systèmes est la suivante : une fois le système identifié et caractérisé par un modèle mathématique (représentation d'état, fonction de transfert, etc.), et étant données des mesures  $\underline{y}$  disponibles en temps réel sur le système, il s'agit de déterminer un signal de commande  $\underline{u}$  de telle sorte que les variables  $\underline{z}$  à contrôler suivent *au mieux* un signal de référence  $\underline{r}$  malgré les perturbations  $\underline{w}$  agissant sur le système.

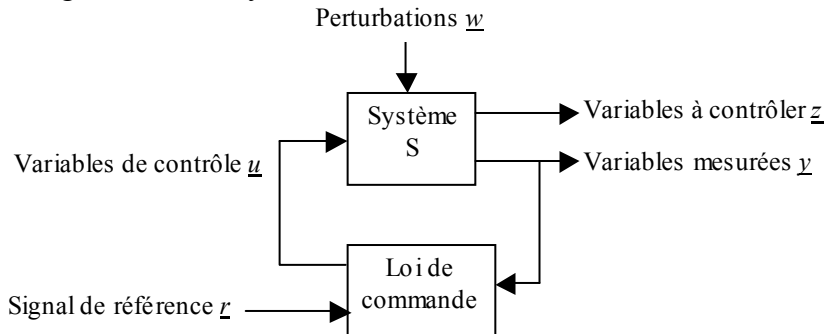


Figure 3-1 Problématique de la commande

Dans le cas particulier du guidage relatif entre aéronefs, le système  $S$  peut représenter l'avion suiveur (en fait son modèle), et dans ce cas le signal de référence  $r$  est la trajectoire de l'avion leader. Nous supposons que l'avion leader est autonome dans le sens où sa trajectoire est indépendante des manœuvres de l'avion suiveur (sauf dans les cas où la sécurité pourrait être mise en jeu, mais cela sort du cadre de ce mémoire).

Le minimum attendu d'une loi de commande est de stabiliser le système autour d'un point d'équilibre, appelé aussi point de fonctionnement lorsque le signal de référence est constant (problème de régulation). Il est aussi souvent utile de pouvoir s'assurer de la stabilité d'un système autour d'une trajectoire : il s'agit alors d'un problème de poursuite. En effet dans le cas contraire où le système est instable, sa pérennité n'est pas assurée et il serait vain de chercher à satisfaire d'autres propriétés importantes telles que la robustesse vis-à-vis des erreurs de modélisation et des perturbations, des performances minimales en termes de temps de réponse et de précision, etc.

Nous noterons  $e(t)$  la différence entre le signal de référence  $r(t)$  et la valeur mesurée de la sortie  $y(t)$ , comme indiqué sur la Figure 3-1 :

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (3-1)$$

Dans le cas d'un système mono-entrée et mono-sortie, un régulateur de type proportionnel, intégral et dérivé calcule la commande  $u(t)$  à partir de trois termes : un terme proportionnel à l'erreur  $e(t)$ , un terme proportionnel à l'intégrale de l'erreur et un terme proportionnel à la dérivée de l'erreur :

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \dot{e}(t) \quad (3-2)$$

Les paramètres du régulateur sont le gain proportionnel  $k_p$ , le gain intégral  $k_i$ , et le gain dérivatif  $k_d$ .

Pour les systèmes décrits par des modèles linéaires, il existe de nombreuses méthodes analytiques ou graphiques qui permettent de choisir les paramètres de la loi de commande de type proportionnelle, intégrale et dérivée afin de stabiliser le système où d'accroître sa stabilité, d'augmenter sa précision (en particulier de diminuer l'erreur statique) et de diminuer le temps de réponse ([3-b]).

En ce qui concerne les systèmes décrits par des modèles non linéaires, peu de résultats sont connus quant aux propriétés stabilisantes d'une telle loi de commande. Notons cependant

que [3-r] montre que pour des systèmes non linéaires de la forme suivante (e.g. modèle dynamique d'un bras articulé de robot) :

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u \quad (3-3)$$

où  $g(q)$  est telle que :

$$\|g(y) - g(x)\| \leq \alpha \|y - x\| \quad \forall (x, y) \quad (3-4)$$

alors une loi de commande du type ( 3-2 ) peut stabiliser le système ( 3-3 ) autour du point  $q = q_d$  s'il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$\begin{cases} \frac{k_d}{\varepsilon} > H(q_d) \\ k_p - \alpha > \frac{k_i}{\varepsilon} > 0 \end{cases} \quad (3-5)$$

## 3.2.2 Application au vol en formation de drones

### 3.2.2.1 Contrôle des mouvements dans le plan

Dans [3-q], le vol en formation de drones (*UAV : Unmanned Aerial Vehicle*) dans le plan horizontal est considéré. Il est supposé que chaque drone est équipé d'un système de pilotage automatique qui assure la tenue de cap et de vitesse. Ces deux modes du système de pilotage automatique sont supposés découplés et la dynamique qui en résulte pour le cap et la vitesse est modélisée par une équation différentielle du premier ordre. En désignant par  $\tau_\psi$  et  $\tau_V$  les constantes de temps caractérisant respectivement les modes de tenue de cap et de tenue de vitesse, les relations reliant la valeur de consigne (indice  $c$ ) et la valeur observée du cap  $\psi$  et de la vitesse  $V$  sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{\psi_c - \psi}{\tau_\psi} \\ \dot{V} = \frac{V_c - V}{\tau_V} \end{cases} \quad (3-6)$$

Le cap et la vitesse du leader sont considérés comme des entrées exogènes. Le système de contrôle du vol en formation du drone suiveur commande les variable  $\psi_c$  et  $V_c$ .

Soient  $tk_s(t)$  l'abscisse de la position du leader dans le repère lié au suiveur (écart longitudinal, ou *along track distance* en anglais) et  $x tk_s(t)$  l'ordonnée de la position du leader dans le repère lié au suiveur (écart latéral, ou *cross track distance* en anglais) :

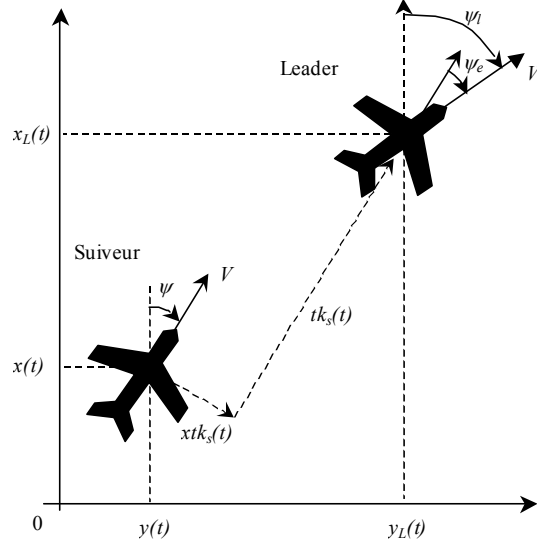


Figure 3-2 Distance relative longitudinale et latérale

La dynamique des distances longitudinale et latérale est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{tk}_s = \dot{\psi} \cdot xtk_s - V + V_l \cdot \cos(\psi_l - \psi) \\ \dot{xtk}_s = -\dot{\psi} \cdot tk_s + V_l \cdot \sin(\psi_l - \psi) \end{cases} \quad (3-7)$$

En supposant que l'écart de cap  $\psi_e = \psi_l - \psi$  est suffisamment faible, le système précédent peut être approché par :

$$\begin{cases} \dot{tk}_s = \dot{\psi} \cdot xtk_s - V + V_l \\ \dot{xtk}_s = -\dot{\psi} \cdot tk_s + V_l \cdot (\psi_l - \psi) \end{cases} \quad (3-8)$$

En posant  $V = V_0 + \delta V$ ,  $tk_s = tk_0 + \delta tk$ , etc., où l'indice 0 désigne la valeur de la variable à la position de référence et  $\delta x$  une variation sur la variable  $x$ , le système précédent peut être linéarisé sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \delta \dot{tk} = \delta \dot{\psi} \cdot xtk_0 - \delta V + \delta V_l \\ \delta \dot{xtk} = -\delta \dot{\psi} \cdot tk_0 + V_{l_0} (\delta \psi_l - \delta \psi) \end{cases} \quad (3-9)$$

Finalement, l'association des équations (3-6) et (3-9) donne la représentation d'état suivante (l'indice  $l$  indique des paramètres relatifs au leader) :

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_1 \\ \dot{\underline{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \cdot \underline{u} + \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \cdot \underline{z} \quad (3-10)$$

avec :

$$\begin{cases} \underline{x}_1 = [\delta tk \quad \delta V \quad \delta V_l]^T \\ \underline{x}_2 = [\delta xtk \quad \delta \psi \quad \delta \psi_l]^T \end{cases} \quad (3-11)$$

$$\begin{cases} \underline{u} = [\delta \psi_c \quad \delta V_c]^T \\ \underline{z} = [\delta V_{lc} \quad \delta \psi_{lc}]^T \end{cases} \quad (3-12)$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1/\tau_V & 0 \\ 0 & 0 & -1/\tau_{l_V} \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -x_{tk_0}/\tau_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & tk_0/\tau_\psi - V_{l_0} & V_{l_0} \\ 0 & -1/\tau_\psi & 0 \\ 0 & 0 & -1/\tau_{l_\psi} \end{bmatrix} \\ B_1 = \begin{bmatrix} x_{tk_0}/\tau_\psi & 0 \\ 0 & 1/\tau_V \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -tk_0/\tau_\psi & 0 \\ 1/\tau_\psi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\tau_{l_V} \end{bmatrix} \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\tau_{l_\psi} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3-13)$$

L'écriture ci dessus fait clairement apparaître que le vecteur d'état  $\underline{x}_2 = [\delta x_{tk} \ \delta \psi \ \delta \psi_l]^T$  est découplé du vecteur d'état  $\underline{x}_1 = [\delta tk \ \delta V \ \delta V_l]^T$ .

La référence [3-q] propose alors de constituer un signal d'erreur, noté  $e_{tk}$  pour la distance relative longitudinale et  $e_{x_{tk}}$  pour la distance relative latérale. Ces signaux d'erreur, composés à partir des mesures disponibles, sont alors utilisés pour contrôler le cap et la vitesse de consigne du suiveur par des lois de type proportionnel-intégral (PI) :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{x_{tk}} = k_{x_{tk}} \cdot \delta x_{tk} + k_\psi \cdot \delta \psi \\ \psi_c = k_{P_\psi} \cdot e_{x_{tk}} + k_{I_\psi} \cdot \int_0^t e_{x_{tk}} \cdot dt \end{array} \right. \quad (3-14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{tk} = k_{tk} \cdot \delta tk + k_V \cdot \delta V \\ V_c = k_{P_V} \cdot e_{tk} + k_{I_V} \cdot \int_0^t e_{tk} \cdot dt \end{array} \right. \quad (3-15)$$

Ce type de loi de guidage permet de réaliser un maintien en formation dans le plan. Il utilise le principe de la commande à plusieurs échelles de temps. En effet, ce sont les fonctions de pilotage du drone qui permettent de commander la déflexion des gouvernes et le régime moteur pour atteindre le cap et la vitesse de consigne élaborés par la loi ( 3-15 ) de maintien de la formation. Cependant le domaine de validité d'une telle loi de commande est celui du modèle linéarisé sur lequel elle est construite.

### 3.2.2.2 Contrôle des mouvements horizontaux et verticaux

Dans [3-h], le cas du vol en formation dans les trois dimensions est considéré. Le point de départ de l'article est l'application du théorème de Coriolis dans le repère lié à l'avion suiveur. En se reportant à la *Figure 3-2*, et en notant par  $\cdot|_S$  un vecteur exprimé dans le repère lié à l'avion suiveur et par  $\cdot|_I$  un vecteur exprimé dans le repère lié au repère inertiel, il vient :

$$\left. \frac{d\vec{SL}}{dt} \right|_I = \left. \frac{d\vec{OL}}{dt} \right|_I - \left. \frac{d\vec{OS}}{dt} \right|_I = R_S^{-1} \cdot \left( \left. \frac{d\vec{SL}}{dt} \right|_S + \vec{w}_S \times \vec{SL} \right|_S \quad (3-16)$$

- La matrice  $R_S$  est la matrice de rotation permettant de passer du vecteur position exprimé dans le repère lié à l'avion suiveur à celui exprimé dans le repère inertiel. En désignant respectivement par  $C_x$  et  $S_x$  les fonction  $\sin(x)$  et  $\cos(x)$ , la matrice  $R_S$  s'exprime sous la forme suivante :

$$\left. \vec{OL} \right|_S = R_S \cdot \left. \vec{OL} \right|_I \quad (3-17)$$

$$R_S = \begin{bmatrix} C_\gamma C_\psi & C_\gamma S_\psi & -S_\gamma \\ (S_\phi S_\gamma C_\psi - C_\phi S_\psi) & (S_\phi S_\gamma S_\psi + C_\phi C_\psi) & S_\phi C_\gamma \\ (C_\phi S_\gamma C_\psi + S_\phi S_\psi) & (C_\phi S_\gamma S_\psi - S_\phi C_\psi) & C_\phi C_\gamma \end{bmatrix} \quad (3-18)$$

- La vitesse angulaire  $w_S$  dans le repère lié à l'avion suiveur est exprimée en fonction de celle relative au repère inertiel par les relations classiques suivantes (relations d'Euler), où  $\phi$  représente l'inclinaison latérale de l'avion,  $\gamma$  sa pente et  $\psi$  son cap :

$$\vec{w}_S = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\gamma) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \cdot \cos(\gamma) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \cdot \cos(\gamma) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

Finalement, la relation ( 3-16 ) se met sous la forme suivante, où  $h$  représente la hauteur du drone :

$$\left. \frac{d \vec{SL}}{dt} \right|_S = \begin{bmatrix} \dot{tk}_s \\ x \dot{tk}_s \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot xtk_s - q \cdot h \\ p \cdot h - r \cdot tk_s \\ q \cdot tk_s - p \cdot xtk_s \end{bmatrix} + R_S \cdot V_L \cdot \begin{bmatrix} \cos(\gamma_l) \cos(\psi_l) \\ \cos(\gamma_l) \sin(\psi_l) \\ -\sin(\gamma_l) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

A ces trois équations sont ajoutées celles issues de la mécanique du vol, l'avion étant considéré comme une masse ponctuelle de masse constante, notée  $m$ , de portance  $L$ , de traînée  $D$ , de poussée  $T$  et ayant une incidence nulle ( $\alpha = 0$ ) :

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{T-D}{m} - g \cdot \sin(\gamma) \\ \dot{\gamma} = \frac{L}{mV} \cdot \cos(\phi) - \frac{g}{V} \cdot \cos(\gamma) \\ \dot{\psi} = L \cdot \frac{\sin(\phi)}{mV \cos(\gamma)} \end{cases} \quad (3-21)$$

Enfin l'approximation suivante est faite pour les faibles pentes :

$$\dot{\phi} \approx p \quad (3-22)$$

En supposant une dépendance parabolique entre la traînée  $D$  et la portance  $L$  (i.e.  $D \propto L^2$ ), une représentation d'état est obtenue, où le vecteur d'état, noté  $\underline{x}$ , est de dimension sept et le vecteur de commande, noté  $\underline{u}$ , de dimension trois :

$$\begin{cases} \psi_e = \psi_L - \psi \\ \underline{x} = [V \quad \gamma \quad \phi \quad \psi_e \quad tk_s \quad xtk_s \quad h]^T \end{cases} \quad (3-23)$$

$$\underline{u} = [L \quad T \quad p]^T \quad (3-24)$$

Dans cette représentation, la pente  $\gamma_1$ , le cap  $\psi_1$  et la vitesse  $V_1$  du drone leader sont considérées comme des variables exogènes.

La référence [3-h] propose alors le contrôle des variables de commande par des lois de type proportionnelle, intégrale et dérivée basées sur l'erreur de position de la forme suivante

$$\begin{cases} e_{tk} = tk_c - tk_s \\ e_{xtk} = xtk_c - xtk_s \\ e_h = h_c - h \end{cases} \quad (3-25)$$

$$\begin{cases} \delta T = K_{T_p} \cdot e_{tk} + K_{T_D} \cdot \dot{e}_{tk} + K_{T_I} \cdot \int_0^t e_{tk} dt \\ \delta L = K_{L_p} \cdot e_h + K_{L_D} \cdot \dot{e}_h + K_{L_I} \cdot \int_0^t e_h dt \\ \delta p = K_{p_p} \cdot e_{xtk} + K_{p_\psi} \cdot \psi_e + K_{p_D} \cdot \dot{e}_{xtk} + K_{p_{DD}} \cdot \ddot{e}_{xtk} + K_{p_I} \cdot \int_0^t e_{xtk} dt \end{cases} \quad (3-26)$$

Ce type de loi de guidage permet de réaliser le maintien en formation de drones dans l'espace. Cependant, son application aux avions de transport commercial n'est pas aisée car deux des trois variables de commande (la portance  $L$  et la poussée  $T$ ) ne sont pas directement accessibles au travers des lois de pilotage. De plus, l'extension d'une telle loi de commande à la phase de rejointe du vol en formation est rendue délicate du fait de l'action intégrale de la loi de commande. En effet, cette action intégrale dont le rôle est de compenser les erreurs statiques induit des risques de battement en cas de saturation, inévitable lors de la phase de rejointe car les aéronefs sont alors assez éloignés les uns des autres. La compensation de ce phénomène est généralement réalisée par des techniques d'*anti-windup*, décrites dans [3-w] par exemple.

### 3.2.3 Vol en formation serrée de chasseurs

Une importante activité de recherche militaire se concentre sur le vol en formation très serrée de chasseurs, où la turbulence de sillage de l'aéronef leader est utilisée pour diminuer la traînée de l'aéronef suiveur. Les lois de commande utilisées sont souvent de type proportionnelle, intégrale et dérivée, comme dans [3-d]. Des tests en vol impliquant deux chasseurs F18 de la NASA ont été réalisés durant l'année 2002 ([3-i]). Durant ces tests, les lois de commande de type proportionnelle, intégrale et dérivée permettaient le contrôle des mouvements verticaux et latéraux de l'avion suiveur, le contrôle de la vitesse étant laissé sous l'autorité du pilote. De plus, certaines équipes s'intéressent à l'élaboration d'une stratégie de reconfiguration des liaisons de données entre les avions en cas de défaillance de l'une d'elle (liaison point à point), comme [3-k] par exemple.

### 3.2.4 Application à la commande de la vitesse d'avions de transport commercial

#### 3.2.4.1 Guidage relatif en approche

Dans le cadre du projet *CoSpace* présenté au chapitre précédent, le centre expérimental d'Eurocontrol à Brétigny sur Orge déploie une activité importante dans la promotion des instructions de contrôle pour le positionnement relatif entre aéronefs à une balise en vue de l'amélioration de l'efficacité du contrôle du trafic aérien :

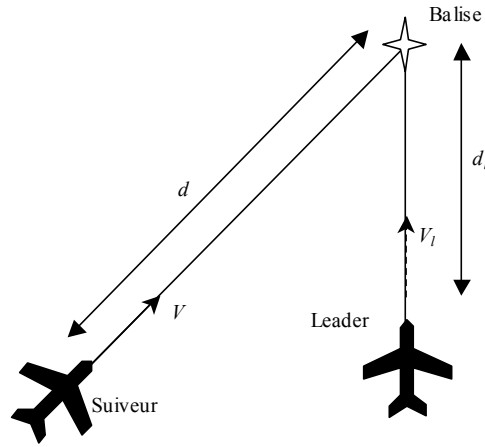


Figure 3-3 Rendez-vous à une balise

Dans [3-j], plusieurs lois permettant de commander la vitesse d'un avion de transport commercial afin de le positionner à une certaine distance d'un avion leader au moment du passage au dessus de la balise sont proposées. Elles se divisent entre lois de guidage basée sur la distance (*distance based guidance law*) et lois de guidage basée sur la vitesse (*speed based guidance law*) :

- Dans le premier cas (*distance based guidance law*), l'erreur estimée  $e_{db}$  à la balise entre la position de l'avion suiveur et celle de l'avion leader mesurée par rapport à la balise a la forme suivante, où  $d_c$  représente l'espacement désiré à la balise :

$$e_{db} = d - d_l - d_c \quad (3-27)$$

- Dans le second cas (*speed based guidance law*), l'erreur estimée  $e_{sb}$  à la balise est affinée en tenant compte du rapport entre la vitesse du suiveur et celle du leader. En effet, en supposant que le leader vole à vitesse constante, le temps qu'il met pour rejoindre la balise est :

$$t_l = \frac{d_l}{V_l} \quad (3-28)$$

La distance parcourue pendant ce temps par le suiveur, supposé lui aussi évoluer à vitesse constante est :

$$d = V \cdot t_l = V \cdot \frac{d_l}{V_l} \quad (3-29)$$

Dans ces conditions, l'erreur estimée  $e_{sb}$  entre les avions à la balise est donnée par :

$$e_{sb} = d - d_l \frac{V}{V_l} - d_c \quad (3-30)$$

Les lois de commande proposées dans [3-j] régulent alors autour de zéro l'erreur estimée à la balise. La forme de la loi est indépendante du choix pour l'erreur estimée. Elle a la forme suivante dans le domaine de Laplace ( $s$  désigne la variable de Laplace), où  $e_b$  désigne indifféremment l'erreur estimée  $e_{db}$  ou l'erreur  $e_{sb}$  et  $\delta V_c$  la variation de vitesse commandée :

$$\delta V_c = k_p \left( 1 + \frac{k_i}{s} \right) \left( e_b \cdot w_0^2 + \frac{s + 2mw_0}{1 + \tau s} (V_l - V) \right) \quad (3-31)$$

Enfin, deux modes de fonctionnement pour ces lois de commande sont proposés : un mode de *capture*, lorsque l'erreur  $e_b$  est *importante*, et un mode de *maintien*, lorsque l'erreur  $e_b$

Contribution à la synthèse de lois de commande pour la navigation relative entre aéronefs est faible. Les valeurs des paramètres pour ces deux modes sont présentés sur le tableau suivant :

|        | distance based guidance law |               | speed based guidance law |               |
|--------|-----------------------------|---------------|--------------------------|---------------|
|        | Mode capture                | Mode maintien | Mode capture             | Mode maintien |
| $k_p$  | 12                          | 30            | 60                       | 80            |
| $k_i$  | 0.15 rad/sec                | 0.15 rad/sec  | 0.15 rad/sec             | 0.15 rad/sec  |
| $m$    | 1.2                         | 1.2           | 1.2                      | 1.2           |
| $w_0$  | 0.05 rad/sec                | 0.01 rad/sec  | 0.02 rad/sec             | 0.01 rad/sec  |
| $\tau$ | 0.06 sec                    | 0.06 sec      | 0.06 sec                 | 0.06 sec      |

Tableau 3-1 Valeur des paramètres pour les lois de commande de vitesse (source [3-j])

Les lois de commande proposées dans [3-j] ont pour objectif l'amélioration de l'efficacité du contrôle du trafic aérien. Elles utilisent le principe de la commande à plusieurs échelles de temps. Seule la vitesse de l'avion suiveur est commandée, les mouvements latéraux et verticaux étant sous le contrôle de systèmes de pilotage classiques indépendants du mouvement relatif de l'avion suiveur par rapport à l'avion leader. Enfin, notons que la loi (3-31) est une loi de type proportionnelle, intégrale et dérivée modifiée : elle résulte d'une approche du problème du guidage relatif par tests successifs, ce qui entraîne des modifications dans l'expression habituelle d'une loi de commande de type proportionnelle, intégrale et dérivée.

### 3.2.4.2 Guidage relatif en finale

Dans le cadre du projet *DAG-TM* présenté au chapitre précédent, une loi de commande de la vitesse pour le guidage relatif en temps de l'avion suiveur jusqu'à l'atterrissage est décrite dans [3-a]. Le synoptique de cette loi de commande est représenté sur la figure ci-après dans laquelle  $T$  représente le retard désiré par rapport à l'avion leader. Afin d'éviter des oscillations importantes de la vitesse, les variations de celle-ci sont limitées à  $\pm 10\%$  autour de la vitesse de référence  $V_r$ .

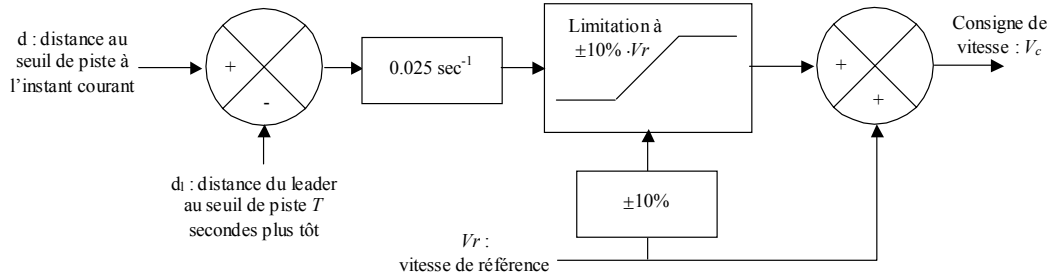


Figure 3-4 Loi de commande de vitesse pour le guidage relatif en temps (source [3-a])

De manière formelle, la vitesse commandée s'écrit sous la forme suivante, où  $sat(x)$  représente la fonction saturation ( $sat(x) = x \quad \forall |x| \leq 1$  ;  $sat(x) = -1 \quad \forall x < -1$  ;  $sat(x) = +1 \quad \forall x > +1$ ) :

$$V_c = V_r + 0.1 \cdot V_r \cdot sat\left(\frac{0.025 \cdot (d - d_1)}{0.1 \cdot V_r}\right) \quad (3-32)$$

La vitesse de référence  $V_r$  représente le profil de vitesse normalement suivi par l'avion suiveur en phase d'approche finale.

Bien que très simple, cette loi de commande a été expérimentée avec succès lors d'essais en vol incluant trois avions (un piper Chieftain, un Sabreliner et un Boeing 757 de la NASA spécialement équipés) et effectués autour de l'aéroport de Chicago ([3-o]).

### 3.3 Commande par régime glissant

#### 3.3.1 Présentation

Une description détaillée de la commande par régime glissant (*sliding mode control*) peut par exemple être trouvée dans [3-u] ou [3-e]. Nous n'en reprenons ici que les éléments de base.

##### 3.3.1.1 Calcul de la commande

D'une manière générale, soit un système non linéaire autonome mis sous forme affine en la commande :

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}) + g(\underline{x}) \cdot \underline{u} \quad (3-33)$$

où  $\underline{x} \in \mathcal{H}^n$ ,  $\underline{u} \in \mathcal{H}^m$  et  $g \in \mathcal{H}^{n \times m}$ . Les opérateurs  $f$  et  $g$  sont supposés continus ; de plus, leurs dérivées par rapport à  $\underline{x}$  sont supposées continues et bornées.

Dans le cas plus général d'un système de la forme :

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{v}) \quad (3-34)$$

il est toujours possible de se ramener au cas d'un système non linéaire affine en la commande en posant :

$$\dot{\underline{v}} = \underline{u} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\underline{x}, \underline{v}) \\ \underline{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{1} \end{bmatrix} \cdot \underline{u} \quad (3-35)$$

Soit  $S$  une variété différentielle, c'est à dire une surface définie comme l'intersection de  $m$  surfaces (autant de surfaces que de commandes) et de dimension  $(n-m)$  :

$$S = \{ \underline{x} \in \mathcal{H}^{n+1} \mid \sigma(\underline{x}) = 0 \} \quad (3-36)$$

$$\sigma(\underline{x}) = [\sigma_1(\underline{x}) \quad \dots \quad \sigma_m(\underline{x})]^T = 0 \quad (3-37)$$

La synthèse d'une commande par régime glissant se fait alors en deux phases :

- La première phase consiste à définir la variété différentielle  $S$ , appelée surface de commutation, de telle sorte que le système restreint à cette surface possède les propriétés désirées (stabilité, régulation, poursuite). La commande  $\underline{u}$  sur la surface  $S$  se déduit en remarquant que sur cette surface  $\sigma(\underline{x}) = 0$ , ce qui implique  $d\sigma(\underline{x})/dt = 0$  ; cette dérivée s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{d\sigma(\underline{x})}{dt} = \frac{\partial \sigma(\underline{x})}{\partial \underline{x}^T} \cdot \dot{\underline{x}}(t) \quad (3-38)$$

En se servant de (3-33), cette équation devient :

$$\frac{d\sigma(\underline{x})}{dt} = \frac{\partial \sigma(\underline{x})}{\partial \underline{x}^T} (f(\underline{x}) + g(\underline{x}) \cdot \underline{u}) = L_f \sigma + L_g \sigma \cdot \underline{u} \quad (3-39)$$

où  $L_f \sigma$  est la dérivée de Lie de l'opérateur  $\sigma$  dans la direction  $f$  (cf. annexe A).

En imposant une valeur nulle à cette dérivée, on obtient la valeur de la commande  $\underline{u}$  sur la variété différentielle  $S$ , notée  $\underline{u}_S$ . En choisissant la surface  $\sigma(\underline{x})$  de telle sorte que la matrice  $L_g \sigma$  soit inversible, la commande  $\underline{u}_S$  est alors donnée par :

$$L_f \sigma + L_g \sigma \cdot \underline{u}_S = \underline{0} \Rightarrow \underline{u}_S = -(L_g \sigma)^{-1} \cdot L_f \sigma \quad (3-40)$$

- La seconde phase consiste à concevoir une commande  $\underline{u}(\underline{x})$  permettant de ramener vers la surface  $S$  le vecteur d'état  $\underline{x}$ . Cette seconde phase est réalisée en choisissant une fonction candidate de Lyapunov appropriée (cf. annexe A), notée  $V(\underline{x}, \sigma)$ , en la dérivant par rapport au

temps de manière à faire explicitement apparaître la commande  $\underline{u}$ , et en ajustant les degrés de liberté de  $\sigma(\underline{x})$  de telle sorte que cette dérivée soit négative.

Le plus souvent, la fonction candidate de Lyapunov est une forme quadratique en  $\sigma(\underline{x})$ , où  $W$  est une matrice de pondération symétrique et définie positive :

$$V(\sigma(\underline{x})) = \frac{1}{2} \sigma^T(\underline{x}) \cdot W \cdot \sigma(\underline{x}) \quad (3-41)$$

Il est aussi possible de prendre d'autres expressions, comme par exemples :

$$\begin{cases} V(\sigma(\underline{x})) = \text{sgn}(\sigma(\underline{x}))^T \cdot \sigma(\underline{x}), \text{ ou bien} \\ V(\sigma(\underline{x})) = \ln(1 + \sigma(\underline{x})^T \cdot \sigma(\underline{x})) \\ \dots \end{cases} \quad (3-42)$$

En dérivant ( 3-41 ) par rapport au temps, il vient :

$$\frac{dV(\sigma(\underline{x}))}{dt} = \sigma^T(\underline{x}) \cdot W \cdot \dot{\sigma}(\underline{x}) \quad (3-43)$$

L'expression de  $d\sigma/dt$  est obtenue à partir de ( 3-39 ). La commande  $\underline{u}$  est alors choisie sous la forme suivante :

$$\underline{u} = \underline{u}_S + \underline{u}_N \quad (3-44)$$

En remarquant que  $\underline{u}_S$  annule  $d\sigma/dt$  sur la variété  $S$  (i.e.  $L_f\sigma + L_g\sigma \cdot \underline{u}_S = 0$ ), la condition permettant de rendre  $dV/dt$  négative s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{dV(\sigma(\underline{x}))}{dt} = \sigma^T(\underline{x}) \cdot W \cdot L_g\sigma \cdot \underline{u}_N < 0 \quad (3-45)$$

La matrice  $L_g\sigma$  étant supposée inversible, il est commode d'utiliser la commande  $\hat{\underline{u}}_N$  plutôt que la commande  $\underline{u}_N$  :

$$\hat{\underline{u}}_N = L_g\sigma \cdot \underline{u}_N \Leftrightarrow \underline{u}_N = (L_g\sigma)^{-1} \cdot \hat{\underline{u}}_N \quad (3-46)$$

La condition ( 3-45 ) se met alors sous la forme suivante :

$$\sigma^T(\underline{x}, t) \cdot W \cdot \hat{\underline{u}}_N < 0 \quad (3-47)$$

La commande  $\hat{\underline{u}}_N$  est choisie de manière à satisfaire l'inégalité ( 3-47 ). Plusieurs alternatives sont alors possibles :

$$\begin{cases} \hat{\underline{u}}_N = -P \cdot \sigma(\underline{x}) \text{ avec } P = P^T > 0, \text{ ou bien} \\ \hat{\underline{u}}_N = -\rho \cdot \sigma(\underline{x}) / \|\sigma(\underline{x})\| \text{ avec } \rho > 0 \quad \forall \sigma \neq 0, \text{ et } 0 \text{ sinon} \\ \dots \end{cases} \quad (3-48)$$

Dans les expressions précédentes, les paramètres  $\alpha$  et  $P$  sont laissés au libre choix du concepteur, ainsi que le paramètre  $\rho$  lorsqu'il n'y a pas d'incertitude sur le modèle de synthèse. Dans le cas contraire, nous verrons au paragraphe suivant comment le paramètre  $\rho$  est choisi.

La première alternative permet d'obtenir une dynamique exponentielle au prix d'une sollicitation plus importante des actionneurs.

La seconde alternative présente l'avantage de solliciter assez faiblement les actionneurs. Dans le cas scalaire, la loi de commande issue de cette alternative se présente sous la forme suivante :

$$\hat{u}_N = -\rho \cdot \text{sgn}(\sigma(\underline{x})) \quad \text{avec } \rho > 0 \quad \forall \sigma \neq 0, \text{ et } 0 \text{ sinon} \quad (3-49)$$

Cependant, la commande issue de cette seconde alternative présente un risque de battement (*chattering*). Ces battements peuvent exciter des dynamiques à haute fréquence non modélisées et qui peuvent être gênantes. Une solution pour éviter ces battements est de commuter de loi de commande en fonction de l'éloignement à la surface  $S$ . En désignant par  $\varepsilon$  une épaisseur définie de part et d'autre de la surface  $S$ , une possibilité pour l'expression de la loi de commande est alors la suivante :

$$\underline{u} = \begin{cases} \underline{u}_S + \underline{u}_N & \forall \|\sigma\| \geq \varepsilon \\ \underline{u}_S + p(\sigma, \underline{x}) & \forall \|\sigma\| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (3-50)$$

où la fonction  $p(\sigma, \underline{x})$  est une fonction continue vérifiant :

$$\begin{cases} p(0, \underline{x}) = 0 \\ p(\sigma, \underline{x}) = \underline{u}_N \quad \text{pour } \|\sigma\| = \varepsilon \end{cases} \quad (3-51)$$

Cette seconde alternative est à la base de commandes robustes, comme illustré dans le paragraphe suivant

### 3.3.1.2 Robustesse

La commande par régime glissant présente des propriétés de robustesse vis à vis des incertitudes paramétriques et non paramétriques. En effet, supposons que le système incertain puisse être décrit par une équation d'état de la forme suivante, où  $\xi$  est un vecteur de fonctions représentant des incertitudes (bruit, paramètres incertains) qui vient s'ajouter à la commande  $\underline{u}$  (*matching condition*) :

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}) + g(\underline{x}) \cdot [\underline{u} + \xi(\underline{x}, t, \underline{d}, \underline{u})] \quad (3-52)$$

La dérivée par rapport au temps de la fonction candidate de Lyapunov ( 3-41 ) pour le système incertain s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\frac{dV(\sigma(\underline{x}))}{dt} = \sigma^T(\underline{x}) \cdot W \cdot \frac{\partial \sigma(\underline{x})}{\partial \underline{x}^T} \cdot g(\underline{x}) \cdot [\underline{u}_N + \xi(\underline{x}, t, \underline{d}, \underline{u})] \quad (3-53)$$

Nous supposons qu'il existe une fonction  $\rho(\underline{x})$  connue, positive continue et bornée vérifiant :

$$\|\xi(\underline{x}, t, \underline{d}, \underline{u})\| \leq \rho(\underline{x}) \quad (3-54)$$

Il est alors toujours possible de construire une commande  $\underline{u}_N$  telle que l'expression ( 3-53 ) soit négative. En notant  $\alpha(\underline{x})$  est une fonction positive, on peut par exemple choisir :

$$\underline{u}_N = \begin{cases} -\frac{g^T \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \underline{x}^T} \right]^T W^T \sigma}{\left\| g^T \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \underline{x}^T} \right]^T W^T \sigma \right\|} (\rho(\underline{x}) + \alpha(\underline{x})) & \forall \sigma \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3-55)$$

Pour montrer ce résultat, il faut partir de l'inégalité de Schwartz :

$$\left( \sigma^T(\underline{x}) \cdot W \cdot \frac{\partial \sigma(\underline{x})}{\partial \underline{x}^T} \cdot g(\underline{x}) \right) \cdot \xi(\underline{x}, t, \underline{d}, \underline{u}) \leq \left\| \sigma^T(\underline{x}) \cdot W \cdot \frac{\partial \sigma(\underline{x})}{\partial \underline{x}^T} \cdot g(\underline{x}) \right\| \cdot \|\xi(\underline{x}, t, \underline{d}, \underline{u})\| \quad (3-56)$$

Il vient alors :

$$\frac{dV(\sigma(\underline{x}))}{dt} \leq \left( \sigma^T(\underline{x}) \cdot W \cdot \frac{\partial \sigma(\underline{x})}{\partial \underline{x}^T} \cdot g(\underline{x}) \right) \cdot \underline{u}_N + \left\| \sigma^T(\underline{x}) \cdot W \cdot \frac{\partial \sigma(\underline{x})}{\partial \underline{x}^T} \cdot g(\underline{x}) \right\| \cdot \rho(\underline{x}) \quad (3-57)$$

En notant  $a^T \cdot a = \|a\|^2$ , l'application de la loi ( 3-55 ) dans le cas où  $\sigma$  est non nulle conduit à :

$$\frac{dV(\sigma(\underline{x}))}{dt} \leq - \left\| g^T \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \underline{x}^T} \right]^T W^T \sigma \right\| \cdot \alpha(\underline{x}) \quad \forall \sigma \neq 0 \quad (3-58)$$

Comme  $\alpha(\underline{x})$  est une fonction positive, l'expression ci-dessus est négative, ce qui assure la stabilité asymptotique du système au prix cependant du phénomène de battement.

Notons de plus que dans le cas scalaire, le terme  $g^T \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \underline{x}^T} \right]^T W^T \sigma / \left\| g^T \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \underline{x}^T} \right]^T W^T \sigma \right\|$  qui

apparaît dans l'expression ( 3-55 ) n'est rien d'autre que la fonction signe.

### 3.3.2 Application au vol en formation de drones

Dans [3-t], la dynamique décrite par l'équation ( 3-20 ) est reprise. La dynamique du mouvement relatif est exprimée dans un *repère simplifié* lié à l'aéronef suiveur, le terme *repère simplifié* indiquant le fait que l'inclinaison latérale  $\phi$  de ce repère par rapport au trièdre local terrestre est nulle. En reportant cette simplification dans l'équation ( 3-19 ), il vient :

$$\begin{cases} p = -\dot{\psi} \cdot \sin(\gamma) \\ q = \dot{\gamma} \\ r = \dot{\psi} \cdot \cos(\gamma) \end{cases} \quad (3-59)$$

De plus, l'hypothèse  $\phi = 0$  reportée dans ( 3-18 ) conduit à :

$$R_s = \begin{bmatrix} \cos(\gamma)\cos(\psi) & \cos(\gamma)\sin(\psi) & -\sin(\gamma) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ \sin(\gamma)\cos(\psi) & \sin(\gamma)\sin(\psi) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \quad (3-60)$$

L'équation ( 3-20 ) de la dynamique du mouvement relatif peut alors s'exprimer sous la forme condensée suivante :

$$\dot{\underline{p}} = f(V_l, \gamma, \gamma_l, \psi - \psi_l) + B_1(tk_s, xtk_s, h) \cdot \underline{w} \quad (3-61)$$

$$\begin{cases} \underline{p} = [tk_s \quad xtk_s \quad h]^T \\ \underline{w} = [V \quad \dot{\psi} \quad \dot{\gamma}]^T \end{cases} \quad (3-62)$$

$$f(V_l, \gamma, \gamma_l, \psi - \psi_l) = V_l \cdot \begin{bmatrix} \cos(\gamma)\cos(\gamma_l)\cos(\psi - \psi_l) + \sin(\gamma)\sin(\gamma_l) \\ -\cos(\gamma_l)\sin(\psi - \psi_l) \\ \sin(\gamma)\cos(\gamma_l)\cos(\psi - \psi_l) - \cos(\gamma)\sin(\gamma_l) \end{bmatrix} \quad (3-63)$$

$$B_1(tk_s, xtk_s, h) = \begin{bmatrix} -1 & xtk_s \cdot \cos(\gamma) & -h \\ 0 & -(tk_s \cdot \cos(\gamma) + h \cdot \sin(\gamma)) & 0 \\ 0 & xtk_s \cdot \sin(\gamma) & tk_s \end{bmatrix} \quad (3-64)$$

Afin de tenir compte des termes perturbateurs liés à la turbulence de sillage de l'avion leader, des fonctions  $d_{1,2,3}$  inconnues sont ajoutées aux équations de ( 3-21 ) relatives à la mécanique du vol :

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{T-D}{m} - g \cdot \sin(\gamma) - d_1 \\ \dot{\gamma} = \frac{L}{mV} \cdot \cos(\phi) - \frac{g}{V} \cdot \cos(\gamma) + d_2 \\ \dot{\psi} = L \cdot \frac{\sin(\phi)}{mV \cos(\gamma)} + d_3 \end{cases} \quad (3-65)$$

Le vecteur d'état, noté  $\underline{x}$ , est de dimension huit et le vecteur de commande, noté  $\underline{u}$ , est de dimension trois :

$$\underline{x} = [tk_s \quad xtk_s \quad h \quad V \quad \psi \quad \gamma \quad L \quad \phi]^T \quad (3-66)$$

$$\underline{u} = [T \quad \dot{\phi} \quad \dot{L}]^T \quad (3-67)$$

En dérivant une fois par rapport au temps ( 3-61 ) et en se servant de ( 3-65 ), il vient l'équation suivante, où  $\Delta g$  et  $\Delta B_{12}$  sont des termes inconnus liés à la turbulence de sillage de l'avion leader :

$$\ddot{\underline{p}} = \underline{g} + \Delta \underline{g} + (B_{12} + \Delta B_{12}) \cdot \underline{u} \quad (3-68)$$

$$B_{12} = B_1(tk_s, xtk_s, h) \cdot B_2(L, \phi, V, \gamma) \quad (3-69)$$

$$B_2(L, \phi, V, \gamma) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ \frac{-L \cdot \sin(\phi)}{m^2 V^2 \cos(\gamma)} & \frac{L \cdot \cos(\phi)}{mV \cos(\gamma)} & \frac{\sin(\phi)}{mV \cos(\gamma)} \\ \frac{m \cdot g \cdot \cos(\gamma) - L \cdot \cos(\phi)}{m^2 V^2} & \frac{-L \cdot \sin(\phi)}{mV} & \frac{\cos(\phi)}{mV} \end{bmatrix} \quad (3-70)$$

Le produit des deux matrices  $B_1$  et  $B_2$  est inversible à condition que son déterminant soit non-nul, soit :

$$tk_s \cdot \left( \frac{tk_s \cdot \cos(\gamma) + h \cdot \sin(\gamma)}{\cos(\gamma)} \right) \cdot L \neq 0 \quad (3-71)$$

Dans ces conditions, le vecteur de commande  $\underline{u}$  peut être déterminé. C'est une technique de commande par régime glissant qui est proposée dans [3-t]. La surface de commutation, notée  $\underline{s}$ , est définie à partir de l'erreur  $\underline{e}$  entre la position relative actuelle, notée  $\underline{p}$ , et la position relative commandée, notée  $\underline{p}_c$ , sous la forme suivante :

$$\underline{e} = \underline{p} - \underline{p}_c \quad (3-72)$$

$$\underline{s} = \dot{\underline{e}} + 2 \cdot \xi \cdot w_n \cdot \underline{e} + w_n^2 \cdot \int_0^t \underline{e}(\tau) d\tau \quad (3-73)$$

L'objectif est alors de trouver la commande  $\underline{u}$  telle que le vecteur d'état  $\underline{x}$  converge vers la surface  $\underline{s} = 0$ . Pour cela, l'équation ( 3-73 ) est dérivée une fois par rapport au temps :

$$\dot{\underline{s}} = \ddot{\underline{p}} - \ddot{\underline{p}}_c + 2 \cdot \xi \cdot w_n \cdot \dot{\underline{e}} + w_n^2 \cdot \underline{e} \quad (3-74)$$

Posons :

$$\underline{a} = \underline{g} - \underline{\ddot{p}}_c + 2 \cdot \xi \cdot w_n \cdot \dot{\underline{e}} + w_n^2 \cdot \underline{e} \quad (3-75)$$

il vient alors, en se servant de ( 3-68 ) et de ( 3-75 ) :

$$\dot{\underline{s}} = \underline{a} + \Delta \underline{g} + (B_{12} + \Delta B_{12}) \cdot \underline{u} \quad (3-76)$$

Cette équation est semblable à ( 3-52 ).

La fonction de Lyapunov candidate suivante est alors considérée :

$$W = \sum_{i=1}^3 |s_i| \quad (3-77)$$

En dérivant une fois par rapport au temps cette fonction il vient :

$$\dot{W} = [\text{sgn}(s_1) \quad \text{sgn}(s_2) \quad \text{sgn}(s_3)]^T \cdot (\underline{a} + \Delta \underline{g} + (B_{12} + \Delta B_{12}) \cdot \underline{u}) \quad (3-78)$$

La commande  $\underline{u}$  est alors choisie de la forme suivante :

$$\underline{u} = B_{12}^{-1} \cdot (-\underline{a} - c \cdot \underline{s} - k \cdot [\text{sgn}(s_1) \quad \text{sgn}(s_2) \quad \text{sgn}(s_3)]^T) \quad (3-79)$$

La dérivée ( 3-78 ) est toujours négative ( $\dot{W} \leq -k_0 \quad \forall s_i \neq 0, \forall t \in [0; +\infty)$ ) si les conditions suivantes sont vérifiées, où  $k$  et  $c$  sont des constantes positives :

$$\begin{cases} k \geq (1 - \delta_0)^{-1} \cdot (k_0 + \delta_2) > 0 \\ k_0 > 0 \\ c > 0 \end{cases} \quad (3-80)$$

Les paramètres  $\delta_0$  et  $\delta_2$  vérifient les inégalités suivantes, où en notant  $R=(r_{ij})$  la matrice de coefficients  $r_{ij}$ ,  $\|\cdot\|$  désigne la norme 2 induite et  $\|\cdot\|_\infty$  est égal à  $\max(\sum_j |r_{ij}|)$  :

$$\begin{cases} 0 \leq \max(\| \Delta B_{12} \cdot B_{12}^{-1} \|, \| \Delta B_{12} \cdot B_{12}^{-1} \|_\infty) \leq \delta_1(x, t) \leq \delta_0 < 1 \\ 0 \leq \| \Delta \underline{g} + \Delta B_{12} \cdot B_{12}^{-1} \cdot \underline{a} \| < \delta_2(x, t) \end{cases} \quad (3-81)$$

Remarque : la justification de la première inégalité de ( 3-80 ) peut se faire de la manière suivante : en tenant compte de ( 3-79 ) dans ( 3-78 ) et en supposant le système de dimension un, il vient :

$$\dot{W} = \text{sgn}(s_1) \cdot [\Delta \underline{g} - c \cdot \underline{s} - k \cdot \text{sgn}(s_1) - \Delta B_{12} \cdot B_{12}^{-1} \cdot (\underline{a} + c \cdot \underline{s} + k \cdot \text{sgn}(s_1))] \quad (3-82)$$

D'autre part, l'inégalité suivante est toujours vérifiée :

$$\text{sgn}(s_1) \cdot [c \cdot \underline{s} + k \cdot \text{sgn}(s_1)] \geq k \quad (3-83)$$

En utilisant ( 3-81 ), il vient alors :

$$\begin{aligned} 0 \leq \delta_0 < 1 &\Rightarrow \text{sgn}(s_1) \cdot [-(1 - \delta_0) \cdot (c \cdot \underline{s} + k \cdot \text{sgn}(s_1))] \leq -(1 - \delta_0) \cdot k \\ &\Leftrightarrow \text{sgn}(s_1) \cdot [\delta_2 - (1 - \delta_0) \cdot (c \cdot \underline{s} + k \cdot \text{sgn}(s_1))] \leq \text{sgn}(s_1) \cdot \delta_2 - (1 - \delta_0) \cdot k \end{aligned} \quad (3-84)$$

Nous avons de plus :

$$0 \leq \delta_2 \Rightarrow \text{sgn}(s_1) \cdot \delta_2 \leq \delta_2 \quad (3-85)$$

Il vient par conséquent :

$$\begin{aligned} \text{sgn}(s_1) \cdot [\delta_2 - (1 - \delta_0) \cdot (c \cdot \underline{s} + k \cdot \text{sgn}(s_1))] &\leq \delta_2 - (1 - \delta_0) \cdot k \\ &\Leftrightarrow \dot{W} \leq \delta_2 - (1 - \delta_0) \cdot k \end{aligned} \quad (3-86)$$

Enfin, la condition  $\dot{W} \leq -k_0$  conduit à :

$$\dot{W} \leq \delta_2 - (1 - \delta_0) \cdot k \leq -k_0 \Rightarrow k \geq (\delta_2 + k_0) \cdot (1 - \delta_0)^{-1} \quad (3-87)$$

Nous retrouvons ainsi la première inégalité formulée dans ( 3-80 ).

□

La loi de commande robuste présentée dans [3-t] permet de réaliser le maintien en formation de drones dans les trois dimensions. Cependant, son application aux avions de transport commercial n'est pas aisée car deux des trois variables de commande (la dérivée de la portance  $L$  et la poussée  $T$ ) ne sont pas directement accessibles au travers des lois de pilotage. De plus, le déterminant ( 3-71 ) est nul lorsque l'écart longitudinal  $tk_s$  est nul. Par conséquent, la loi de commande ( 3-79 ) est singulière en ce point et ne peut être utilisée pour un guidage relatif en temps.

## 3.4 Commande par bouclage linéarisant

### 3.4.1 Présentation

Une description détaillée de la commande par bouclage linéarisant peut par exemple être trouvée dans [3-f]. Nous n'en reprenons ici que les éléments de base.

Soit un système non linéaire affine en la commande défini par la relation suivante, où  $\underline{x}$  représente le vecteur d'état,  $\underline{u}$  le vecteur de commande et  $\underline{y}$  le vecteur de sortie :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + \sum_{i=1}^p g_i(\underline{x}) \cdot u_i \\ \underline{y} = h(\underline{x}) \end{cases} \quad (3-88)$$

On supposera par la suite que le système ( 3-88 ) possède  $n$  états (dimension du vecteur  $\underline{x}$ ) et un nombre  $m$  de commandes (ou entrées) égal au nombre  $p$  de sorties (i.e. système carré).

Pour un tel système, la dérivée première par rapport au temps d'une sortie  $y_i$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$ , s'écrit sous la forme :

$$\dot{y}_i = \dot{h}_i(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i(x_j)}{\partial x_j} \cdot \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i(x_j)}{\partial x_j} \cdot \left( f_j(\underline{x}) + \sum_{k=1}^p g_{jk}(\underline{x}) \cdot u_k \right) \quad (3-89)$$

L'opérateur dérivée de Lie dans la direction du champ de vecteurs  $f$ , noté  $L_f$  est défini par :

$$L_f = \sum_{j=1}^n f_j(\underline{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (3-90)$$

Les conventions d'écriture suivantes seront utilisées :

$$\begin{cases} L_f^0 h_i(\underline{x}) = h_i(\underline{x}) \\ L_f(L_f h_i(\underline{x})) = L_f^2 h_i(\underline{x}) \end{cases} \quad (3-91)$$

Le système ( 3-89 ) se met alors sous la forme compacte suivante :

$$\dot{y}_i = L_f h_i(\underline{x}) + \sum_{k=1}^p L_{g_k} h_i(\underline{x}) \cdot u_k \quad (3-92)$$

En supposant que  $L_{g_k} h_i(\underline{x}) = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}$ , la dérivée seconde de la sortie  $y_i$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\ddot{y}_i = L_f(L_f h_i(\underline{x})) + \sum_{k=1}^p L_{g_k}(L_f h_i(\underline{x})) \cdot u_k = L_f^2 h_i(\underline{x}) + \sum_{k=1}^p L_{g_k} L_f h_i(\underline{x}) \cdot u_k \quad (3-93)$$

En supposant à nouveau que  $L_{g_k} L_f h_i(\underline{x}) = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}$ , et en itérant les dérivations jusqu'à ce qu'une commande du système apparaisse de manière explicite, il vient pour une dérivation à l'ordre  $l$  ( $l \geq 2$ ) :

$$L_{g_k} L_f^{l-2} h_i(\underline{x}) = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, p\} \Rightarrow y_i^{(l)} = L_f^l h_i(\underline{x}) + \sum_{k=1}^p L_{g_k} L_f^{l-1} h_i(\underline{x}) \cdot u_k \quad (3-94)$$

L'indice caractéristique (ou degré relatif) de la sortie  $y_i$ , noté  $\rho_i$   $i \in \{1, \dots, p\}$ , est le nombre minimum de dérivations de la sortie  $y_i$  permettant de faire apparaître de manière explicite une commande du système :

$$\rho_i = \min \{ l > 0 \text{ tq } L_{g_k} L_f^{l-1} h_i(\underline{x}) \neq 0, k \in \{1, \dots, p\} \} \quad (3-95)$$

Le vecteur  $\zeta(\underline{x})$  et la matrice  $\Delta(\underline{x})$  sont alors définis de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} y_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ y_p^{(\rho_p)} \end{bmatrix} = \zeta(\underline{x}) + \Delta(\underline{x}) \cdot \underline{u} \quad (3-96)$$

$$\begin{cases} \zeta(\underline{x}) = \begin{bmatrix} L_f^{\rho_1} h_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_p} h_p(\underline{x}) \end{bmatrix} \\ \Delta(\underline{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(\underline{x}) & \dots & L_{g_p} L_f^{\rho_1-1} h_1(\underline{x}) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_p-1} h_p(\underline{x}) & \dots & L_{g_p} L_f^{\rho_p-1} h_p(\underline{x}) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3-97)$$

Dans ces conditions, si (et seulement si) il existe un sous-espace de  $\mathfrak{R}^n$ , noté  $M_0$ , dans lequel la matrice  $\Delta(\underline{x})$  est inversible, i.e. :

$$\text{rang}(\Delta(\underline{x})) = p \quad (p = \text{nombre de sorties} = \text{nombre d'entrées}) \quad (3-98)$$

alors le retour d'état suivant permet de découpler la dynamique des sorties du système (3-88) dans  $M_0$  :

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \alpha(\underline{x}) + \beta(\underline{x}) \cdot \underline{v} \\ \begin{cases} \alpha(\underline{x}) = -\Delta^{-1}(\underline{x}) \cdot \zeta(\underline{x}) \\ \beta(\underline{x}) = \Delta^{-1}(\underline{x}) \end{cases} \end{aligned} \quad (3-99)$$

Le vecteur  $\underline{v}$  définit un nouveau vecteur de commande et il vient :

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ y_p^{(\rho_p)} \end{bmatrix} \quad (3-100)$$

De plus, il existe un difféomorphisme (changement de coordonnées locales)  $\Phi_i : \underline{x} \rightarrow \underline{z}_i$  défini par :

$$\underline{z}_i = \Phi_i(\underline{x}) = \begin{bmatrix} h_i(\underline{x}) \\ L_f h_i(\underline{x}) \\ \dots \\ L_f^{\rho_i-1} h_i(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad \dim\{\underline{z}_i\} = \rho_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad (3-101)$$

Dans le nouveau système de coordonnées, le système bouclé s'écrit de manière canonique sous la forme suivante (dite forme de Brunovsky, ou forme découplée) :

$$\dot{\underline{z}}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{z}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot v_i \quad (3-102)$$

$$y_i = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \cdot \underline{z}_i \quad (3-103)$$

$$v_i = y_i^{(\rho_i)} = L_f^{\rho_i} h_i(\underline{x}) + \sum_{k=1}^p L_{g_k} L_f^{\rho_i-1} h_i(\underline{x}) \cdot u_k \quad (3-104)$$

Dans le cas où la matrice  $\Delta(\underline{x})$  est de rang  $k$  inférieur à la dimension  $n$  du système (i.e.  $\sum_{i=1}^p \rho_i = k < n$ ), et dans le cas mono-entrée, mono-sortie ( $p = 1$ ), un difféomorphisme peut être construit de la manière suivante ([3-m]) :

$$\underline{z} = \Phi(\underline{x}) = \begin{bmatrix} h(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_f^{k-1} h_i(\underline{x}) \\ \psi_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ \psi_{n-k}(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad (3-105)$$

où les fonctions  $\psi_i(\underline{x})$  vérifient les conditions suivantes, et où  $\underline{x}_e$  est un point d'équilibre du système (3-88) (i.e.  $f(\underline{x}_e) = \underline{0}$ ) :

$$\begin{cases} \psi_i(\underline{x}_e) = 0 \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_i(\underline{x})}{\partial x_i} g_i(\underline{x}) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n-k\} \end{cases} \quad (3-106)$$

Dans ce cas, il convient de vérifier que la partie du processus non-observable (dynamique interne, appelée aussi dynamique des zéros, qui correspond à la dynamique des états  $\psi_1, \dots, \psi_{n-k}$  et qui est de dimension  $n-k$ ) est stable.

Il est aussi possible d'introduire une ou plusieurs intégrations sur certaines entrées sous la forme suivante :

$$u_i = \int v_i dt \Leftrightarrow \dot{u}_i = v_i \quad (3-107)$$

La variable  $u_i$  devient une nouvelle variable d'état tandis que  $v_i$  est la nouvelle commande : il s'agit alors d'un bouclage dynamique.

Exemple (issu de [3-m]) : soit le système décrit par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2} u \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_3 + u \\ y = x_2 \end{cases} \quad (3-108)$$

Le point d'équilibre de ce système est  $\underline{x}_e = \underline{0}$ . En dérivant deux fois la sortie  $y$  par rapport au temps, la commande  $u$  apparaît de manière explicite :

$$\begin{cases} \dot{y} = \dot{x}_2 = x_3 \\ \ddot{y} = \dot{x}_3 = x_1 x_3 + u \end{cases} \quad (3-109)$$

Par conséquent, le degré relatif de la sortie  $y$  est deux. Après avoir appliqué la relation (3-104), la nouvelle commande  $v$  s'exprime en fonction de la commande  $u$  sous la forme suivante :

$$v = \ddot{y} = L_f^2 h(\underline{x}) + L_{g_k} L_f h_i(\underline{x}) \cdot u = x_1 x_3 + u \quad (3-110)$$

Le changement de coordonnées locales  $\Phi_l : \underline{x} \rightarrow z_l$  défini par (3-101) s'explique sous la forme suivante :

$$\begin{cases} z_1 = h(\underline{x}) = x_2 \\ z_2 = L_f h(\underline{x}) = x_3 \end{cases} \quad (3-111)$$

Comme le degré relatif de la sortie  $y$  vaut deux, il est par conséquent inférieur à l'ordre du système, égal à trois. Il convient donc de vérifier que la partie non-observable du processus (dynamique des zéros) est stable. Cette dynamique est obtenue en fixant  $u = 0$  et en restreignant le vecteur d'état  $\underline{x}$  à  $\{x_2=0 ; x_3=0\}$ . Le processus se réduit alors au système stable suivant :

$$\dot{x}_1 = -x_1 \quad (3-112)$$

Enfin, il nous faut compléter les variables  $z_1$  et  $z_2$  pour construire un difféomorphisme. Nous pouvons par exemple utiliser la relation (3-106) :

$$z_3 = \psi(x_1, x_2, x_3) \text{ tq } \begin{cases} \psi(0,0,0) = 0 \\ \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} g_i(\underline{x}) = 0 \end{cases} \text{ où } \begin{cases} g_1(\underline{x}) = \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2} \\ g_2(\underline{x}) = 0 ; g_3(\underline{x}) = 1 \end{cases} \quad (3-113)$$

Il s'agit alors de résoudre l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{2+x_3^2}{1+x_3^2} \cdot \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0 \quad (3-114)$$

La résolution de cette équation par la méthode de la séparation des variables conduit à la solution suivante qui satisfait  $\psi(0,0,0) = 0$  :

$$z_3 = \psi(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_3 + \arctan(x_3) \quad (3-115)$$

Ce difféomorphisme permet alors d'exprimer le système (3-108) sous forme normale :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = v = z_2 \cdot (z_2 + \arctan(z_2) - z_3) + u \\ \dot{z}_3 = (z_2 + \arctan(z_2) - z_3) \cdot \left( 1 + \frac{2+z_2^2}{1+z_2^2} \cdot z_2 \right) \\ y = z_1 \end{cases} \quad (3-116)$$

### 3.4.2 Application au vol en formation de drones

Dans [3-s], les auteurs reprennent la dynamique décrite par (3-7), et deux lois de commande obtenues par bouclage linéarisant sont proposées : la première loi utilise une

inversion directe du modèle de synthèse, tandis que la seconde introduit un nouveau vecteur d'erreur. Dans les deux cas, la commande du cap et de la vitesse de l'avion est réalisée grâce à deux pilotes automatiques supposés découplés et dont la dynamique est modélisée par ( 3-6 ).

### 3.4.2.1 Inversion directe du modèle de synthèse

En tenant compte de ( 3-6 ), la dynamique décrite par ( 3-7 ) se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{tk}_s = \left( \frac{\psi_c - \psi}{\tau_\psi} \right) \cdot xtk_s - V + V_l \cdot \cos(\psi_l - \psi) \\ xtk_s = - \left( \frac{\psi_c - \psi}{\tau_\psi} \right) \cdot tk_s + V_l \cdot \sin(\psi_l - \psi) \end{cases} \quad (3-117)$$

Après avoir remarqué que la seconde équation ne dépend pas de la vitesse  $V$ , le cap de consigne  $\psi_c$  est obtenu par inversion de cette équation :

$$\psi_c = \psi + \frac{\tau_\psi}{tk_s} \cdot (V_l \cdot \sin(\psi_l - \psi) - xtk_s) \quad (3-118)$$

L'évolution du cap de consigne est alors complètement déterminée en fixant la dynamique de l'écart latéral  $xtk_s$ , où  $\tau_{XTK}$  et une constante de temps laissée au libre choix du concepteur :

$$xtk_s = \frac{xtk_c - xtk_s}{\tau_{XTK}} \quad (3-119)$$

En dérivant une fois par rapport au temps la première équation de ( 3-117 ), la commande de vitesse  $V_c$  apparaît au travers de la dérivée de la vitesse  $V$  et de la seconde équation de ( 3-6 ) :

$$\dot{tk}_s = \left( \frac{\dot{\psi}_c - \dot{\psi}}{\tau_\psi} \right) \cdot xtk_s + \left( \frac{\psi_c - \psi}{\tau_\psi} \right) \cdot xtk_s - \dot{V} + \dot{V}_l \cdot \cos(\psi_l - \psi) - V_l \cdot (\dot{\psi}_l - \dot{\psi}) \cdot \sin(\psi_l - \psi) \quad (3-120)$$

En inversant cette équation, il vient :

$$V_c = V + \tau_\psi \cdot \left[ \left( \frac{\dot{\psi}_c - \dot{\psi}}{\tau_\psi} \right) \cdot xtk_s + \dot{V}_l \cdot \cos(\psi_l - \psi) + \left( \frac{\psi_c - \psi}{\tau_\psi} \right) \cdot xtk_s - V_l \cdot (\dot{\psi}_l - \dot{\psi}) \cdot \sin(\psi_l - \psi) - \dot{tk}_s \right] \quad (3-121)$$

Les équations ( 3-118 ) et ( 3-119 ) permettent de calculer respectivement les dérivées par rapport au temps du cap de consigne  $\psi_c$  et de l'écart latéral  $xtk_s$ . L'évolution de la vitesse de consigne est alors complètement déterminée en fixant la dynamique de l'écart longitudinale  $tk_s$ , où  $\xi_{TK}$  et  $w_{TK}$  sont des constantes laissées au libre choix du concepteur :

$$\ddot{tk}_s = -2 \cdot \xi_{TK} \cdot w_{TK} \cdot \dot{tk}_s - w_{TK}^2 \cdot (tk_s - tk_c) \quad (3-122)$$

L'inconvénient principal de cette loi est qu'elle fournit des commandes qui deviennent infinies lorsque l'écart longitudinal  $tk_s$  s'approche de 0 ; en effet, l'équation ( 3-118 ) montre que  $\psi_c$  (et sa dérivée par rapport au temps qui intervient dans le calcul de  $V_c$ ) dépend de l'inverse de l'écart longitudinal.

### 3.4.2.2 Inversion par introduction d'un nouveau vecteur d'erreur

Afin d'éviter la singularité de la loi de commande, [3-s] propose de construire une loi de commande dont l'objectif est d'annuler le nouveau vecteur d'erreur  $\underline{e}$  défini comme suit (cf. Figure 3-2) :

$$\underline{e} = R(\psi) \cdot \begin{bmatrix} tk_s - tk_c \\ xtk_s - xtk_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_L - x \\ y_L - y \end{bmatrix} - R(\psi) \cdot \begin{bmatrix} tk_c \\ xtk_c \end{bmatrix} \quad (3-123)$$

La matrice  $R(\psi)$  est la matrice de rotation définie par :

$$R(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} \quad (3-124)$$

Une première dérivation par rapport au temps du vecteur d'erreur  $\underline{e}$  donne :

$$\dot{\underline{e}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_L - \dot{x} \\ \dot{y}_L - \dot{y} \end{bmatrix} - \dot{\psi} \cdot S(\psi) \cdot \begin{bmatrix} tk_c \\ xtk_c \end{bmatrix} \quad (3-125)$$

$$S(\psi) = \begin{bmatrix} -\sin(\psi) & -\cos(\psi) \\ \cos(\psi) & -\sin(\psi) \end{bmatrix} \quad (3-126)$$

Une seconde dérivation par rapport au temps donne :

$$\ddot{\underline{e}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_L - \ddot{x} \\ \ddot{y}_L - \ddot{y} \end{bmatrix} - \ddot{\psi} \cdot S(\psi) \cdot \begin{bmatrix} tk_c \\ xtk_c \end{bmatrix} + \dot{\psi}^2 \cdot R(\psi) \cdot \begin{bmatrix} tk_c \\ xtk_c \end{bmatrix} \quad (3-127)$$

D'autre part, sachant que :

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cdot \cos(\psi) \\ \dot{y} = V \cdot \sin(\psi) \end{cases} \quad (3-128)$$

il vient :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{V} \cdot \cos(\psi) - V \cdot \dot{\psi} \cdot \sin(\psi) \\ \ddot{y} = \dot{V} \cdot \sin(\psi) + V \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\psi) \end{cases} \quad (3-129)$$

En reportant ( 3-129 ) et ( 3-6 ) dans ( 3-127 ), l'expression suivante est obtenue :

$$\ddot{\underline{e}} = \underline{\eta} + G \cdot \begin{bmatrix} V_c \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3-130)$$

$$G = \begin{bmatrix} -\cos(\psi)/\tau_V & \sin(\psi) \cdot tk_c + \cos(\psi) \cdot xtk_c \\ -\sin(\psi)/\tau_V & -\cos(\psi) \cdot tk_c + \sin(\psi) \cdot xtk_c \end{bmatrix} \quad (3-131)$$

$$\underline{\eta} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_L + V \cdot \cos(\psi)/\tau_V + V \cdot \dot{\psi} \cdot \sin(\psi) + \dot{\psi}^2 \cdot (\cos(\psi) \cdot tk_c - \sin(\psi) \cdot xtk_c) \\ \ddot{y}_L + V \cdot \sin(\psi)/\tau_V - V \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\psi) + \dot{\psi}^2 \cdot (\sin(\psi) \cdot tk_c + \cos(\psi) \cdot xtk_c) \end{bmatrix} \quad (3-132)$$

Le déterminant de la matrice  $G$  a pour expression :

$$\det(G) = \frac{tk_c}{\tau_V} \quad (3-133)$$

Les commandes  $V_c$  et  $d^2\psi/dt^2$  peuvent être alors déterminées par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} V_c \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = G^{-1} \cdot (\ddot{\underline{e}} - \underline{\eta}) \quad (3-134)$$

La dynamique de l'erreur est fixée sous la forme suivante, les constantes  $\xi_x$ ,  $\xi_y$  et  $w_x$ ,  $w_y$  étant des constantes laissées au libre choix du concepteur :

$$\ddot{\underline{e}} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \xi_x \cdot w_x & 0 \\ 0 & 2 \cdot \xi_y \cdot w_y \end{bmatrix} \cdot \dot{\underline{e}} + \begin{bmatrix} w_x^2 & 0 \\ 0 & w_y^2 \end{bmatrix} \cdot \underline{e} \quad (3-135)$$

Par rapport au cas précédent, les commandes ne deviennent infinies que lorsque la consigne d'écart longitudinal  $tk_c$  s'approche de zéro.

Les bouclages linéarisants présentés dans [3-s] sont basés sur les écarts latéral et longitudinal exprimés dans le repère de l'aéronef suiveur. L'inconvénient principal des ces lois est qu'elles deviennent singulières lorsque l'écart longitudinal, observé ou de consigne, devient nul. Par conséquent, comme pour la loi de commande ayant illustré la commande par régime glissant, ces lois ne peuvent pas être utilisées pour un guidage relatif en temps.

## 3.5 Commande optimale

### 3.5.1 Présentation

Une description détaillée de la commande optimale peut par exemple être trouvée dans [3-c]. Nous n'en reprenons ici que les éléments de base.

Soit un système décrit par l'équation d'état suivante, où  $\underline{x}(t)$  est le vecteur d'état et  $\underline{u}(t)$  le vecteur de commande :

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad \forall t \geq t_0, \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \text{ connu} \quad (3-136)$$

Il s'agit alors de trouver la commande  $\underline{u}(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , de telle sorte que le critère de coût  $J$  soit minimisé :

$$J = \Phi(\underline{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\underline{x}, \underline{u}, t) dt \quad (3-137)$$

La théorie du calcul des variations permet de résoudre ce problème par l'intermédiaire de l'hamiltonien  $H$  défini par l'équation suivante :

$$H(\underline{x}, \underline{u}, t) = -L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \underline{\lambda}(t)^T \cdot f(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (3-138)$$

Les fonctions  $\underline{\lambda}(t)$  sont appelées multiplicateur de Lagrange ou variables adjointes du système.

Les conditions nécessaires (mais non suffisantes) d'optimalité de la commande  $\underline{u}(t)$  sont données par les équations d'Euler-Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \underline{x}^T} = -\dot{\underline{\lambda}} \\ \frac{\partial H}{\partial \underline{u}^T} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} \end{cases} \quad (3-139)$$

Si de plus, l'état final ou initial du système est imposé, alors la commande  $\underline{u}(t)$  doit aussi satisfaire les conditions suivantes de transversalité :

$$\left( H(t_f) + \frac{\partial \Phi}{\partial t_f} \right) \delta t_f + \left( -\underline{\lambda}^T(t_f) + \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}_f^T} \right) \delta \underline{x}_f - \left( H(t_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial t_0} \right) \delta t_0 + \left( \underline{\lambda}^T(t_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}_0^T} \right) \delta \underline{x}_0 = 0 \quad (3-140)$$

Pour un système et un critère invariants dans le temps (i.e.  $\partial \mathcal{J} / \partial t = \partial \mathcal{L} / \partial t = 0$ ) la troisième équation de (3-139) montre que l'hamiltonien  $H$  est constant le long de la trajectoire optimale (i.e.  $dH/dt = 0$ ). Si de plus l'instant final est libre et si  $\partial \Phi / \partial t_f$  est nul, alors les

conditions de transversalité ( 3-140 ) montrent que l'hamiltonien est nul le long de la trajectoire optimale.

### 3.5.2 Application au guidage de missiles

Dans [3-g], le problème traité est la synthèse d'une loi de commande permettant à un missile d'atteindre sa cible tout en minimisant un critère pondérant (paramètre  $k$ ) le temps d'interception et l'énergie nécessaire à la manœuvre :

$$\begin{cases} r(t_f) \leq R \\ J = \int_0^{t_f} (1 + ku^2) dt \end{cases} \quad (3-141)$$

La variable de contrôle  $u$  du missile est l'accélération normale, qui est réglée grâce aux gouvernes placées sur le missile. La vitesse  $V_p$  du missile et  $V_e$  de la cible étant supposées constantes, les équations du mouvement relatif sont les suivantes (cf. Figure 3-5) :

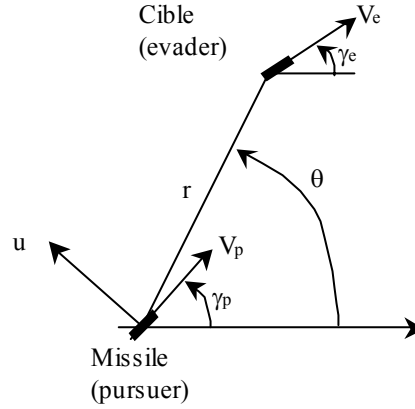


Figure 3-5 Variables d'état et de commande d'un missile poursuivant une cible

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{V_p \sin(\theta - \gamma_p) - V_e \sin(\theta - \gamma_e)}{r} \\ \dot{r} = V_e \cos(\theta - \gamma_e) - V_p \cos(\theta - \gamma_p) \\ \dot{\gamma}_p = \frac{u}{V_p} \end{cases} \quad (3-142)$$

L'Hamiltonien  $H$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} H = & -(1 + ku^2) + \lambda_\theta \cdot \left( \frac{V_p \sin(\theta - \gamma_p) - V_e \sin(\theta - \gamma_e)}{r} \right) \\ & + \lambda_r \cdot (V_e \cos(\theta - \gamma_e) - V_p \cos(\theta - \gamma_p)) + \lambda_\gamma \cdot \left( \frac{u}{V_p} \right) \end{aligned} \quad (3-143)$$

Les variables adjointes  $\lambda_\theta$ ,  $\lambda_r$ ,  $\lambda_\gamma$  et  $\lambda_c$  sont définies par :

$$\underline{\dot{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \underline{x}^T} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\lambda_\theta \cdot \left( \frac{V_p \cos(\theta - \gamma_p) - V_e \cos(\theta - \gamma_e)}{r} \right) \\ \quad + \lambda_r \cdot (V_e \sin(\theta - \gamma_e) - V_p \sin(\theta - \gamma_p)) \\ \dot{\lambda}_r = \frac{\partial H}{\partial r} = \lambda_\theta \cdot \left( \frac{V_p \sin(\theta - \gamma_p) - V_e \sin(\theta - \gamma_e)}{r^2} \right) \\ \dot{\lambda}_\gamma = \frac{\partial H}{\partial \gamma_p} = \lambda_\theta \cdot \frac{V_p \cos(\theta - \gamma_p)}{r} + \lambda_r \cdot V_p \sin(\theta - \gamma_p) \end{cases} \quad (3-144)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u^T} \Rightarrow 0 = \frac{\lambda_\gamma}{V_p} - 2ku \Rightarrow u = \frac{\lambda_\gamma}{2kV_p} \quad (3-145)$$

Comme l'instant final est libre et qu'il n'y a pas de contraintes à l'instant final sur  $\theta$  et  $\gamma$ , il faut ajouter à ces équations les équations de transversalité suivantes :

$$\begin{cases} H(t_f) = 0 \\ \lambda_\theta(t_f) = 0 \\ \lambda_\gamma(t_f) = 0 \end{cases} \quad (3-146)$$

Les deux premières équations du système ( 3-144 ) peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_\theta = \lambda_\theta \frac{\dot{r}}{r} - \lambda_r r \dot{\theta} \\ \dot{\lambda}_r = \lambda_\theta \frac{\dot{\theta}}{r} \end{cases} \quad (3-147)$$

En notant  $c_1$  et  $c_2$  deux constantes d'intégration, les solutions du système précédent sont données par (cf. [3-g]) :

$$\begin{cases} \lambda_\theta = c_1 r \cos(\theta + c_2) \\ \lambda_r = c_1 \sin(\theta + c_2) \end{cases} \quad (3-148)$$

Il s'agit maintenant de déterminer l'expression de  $\lambda_\gamma$  :

- En reportant ( 3-148 ) dans la troisième équation de ( 3-144 ), il vient :

$$\dot{\lambda}_\gamma = c_1 V_p \cos(\gamma_p + c_2) \quad (3-149)$$

- En combinant ( 3-145 ) et la dernière équation de ( 3-142 ), il vient :

$$\dot{\gamma}_p = \frac{\lambda_\gamma}{2kV_p^2} \quad (3-150)$$

Finalement, en divisant ( 3-149 ) par ( 3-150 ), l'expression suivante est obtenue :

$$\frac{d\lambda_\gamma}{d\gamma_p} = \frac{2V_p^3 k c_1 \cos(\gamma_p + c_2)}{\lambda_\gamma} \quad (3-151)$$

L'intégration de cette équation en tenant compte des conditions de transversalité ( 3-146 ) donne :

$$\lambda_\gamma^2 = 4V_p^3 k c_1 (\sin(\gamma_p + c_2) - \sin(\gamma_{p_f} + c_2)) \quad (3-152)$$

Les valeurs de  $c_1$  et  $c_2$  sont déterminées à partir de ( 3-148 ) en tenant compte des conditions de transversalité ( 3-146 ) :

$$\lambda_\theta(t_f) = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_f + n\pi \quad (3-153)$$

$$\begin{cases} H(t_f) = 0 \Rightarrow \lambda_{r_f} \dot{r}_f - 1 = 0 \Rightarrow c_1 = \pm 1 / \dot{r}_f \\ \dot{r}_f = V_e \cos(\theta_f - \gamma_{e_f}) - V_p \cos(\theta_f - \gamma_{p_f}) \end{cases} \quad (3-154)$$

Tous calculs faits, l'expression de la commande  $u$  est la suivante :

$$\begin{cases} u^2 = \frac{1}{k} \cdot \frac{V_p \cdot (\cos(\theta_f - \gamma_p) - \cos(\theta_f - \gamma_{p_f}))}{V_e \cos(\theta_f - \gamma_{e_f}) - V_p \cos(\theta_f - \gamma_{p_f})} \\ \text{sgn}(u) = \text{sgn}[\sin(\theta_f - \gamma_{p_f})] \end{cases} \quad (3-155)$$

L'interprétation géométrique de ce résultat est simple : en remarquant que la quantité  $V_p (\cos(\theta_f - \gamma_p) - \cos(\theta_f - \gamma_{p_f}))$  est la différence entre les projections des valeurs courante et finale de la vitesse du missile sur la ligne de visée, la loi de commande dirige le missile vers la ligne de visée ( $\text{sgn}[\sin(\theta_f - \gamma_{p_f})] > 0 \Leftrightarrow u > 0 \Leftrightarrow \gamma$  croît). L'inconvénient d'une telle approche est que la commande ne peut être déterminée qu'une fois la solution complète déterminée, puisqu'elle dépend des valeurs finales de  $\gamma$  et  $\theta$ .

Notons que d'une manière générale, l'objectif des lois de guidage des missiles est la rejointe au plus vite de la cible, sans aucune contrainte de stabilisation à une distance donnée de celle-ci. Ces lois ne conviennent donc pas au guidage relatif entre aéronefs.

### 3.6 Conclusion

L'élaboration de lois de commande pour le vol en formation de drones est un domaine de recherche ancien mais toujours actif dans le domaine militaire comme en témoignent les nombreuses publications sur le sujet qui s'étendent de nos jours à l'assistance automatisée au vol en formation d'avion de chasse.

Cependant, très peu d'études abordent la phase d'acquisition de la formation, lorsque l'avion suiveur rejoint l'avion leader. Les travaux pouvant se rapporter à cette phase concernent le guidage des missiles, mais dans ce contexte l'objectif est la rejointe au plus vite de la cible, sans aucune contrainte de stabilisation à une distance donnée de celle-ci.

En ce qui concerne le vol en formation d'aéronefs de transport commercial où l'objectif est l'amélioration de l'efficacité du contrôle du trafic aérien, l'activité de recherche est plus récente et les publications techniques moins nombreuses. Les lois d'assistance automatisée au guidage se concentrent essentiellement sur le contrôle de la vitesse.

L'enseignement principal retiré de l'analyse développée dans ce chapitre est que l'approche par la commande à plusieurs échelles de temps semble intéressante puisqu'elle permet de découpler les problèmes de pilotage de ceux de guidage. En effet, l'utilisation de la commande à plusieurs échelles de temps permet de faire reposer la loi de commande dédiée au guidage relatif sur des boucles de pilotage pré-existantes sur la plupart des avions de transport commercial.

Face à la diversité des modélisations et des méthodes de synthèse mises en œuvre essentiellement dans le domaine militaire, il s'agira au chapitre suivant de fixer un cadre de référence pour la synthèse des lois de guidage relatif entre avions de transport commercial.

### 3.7 Références Bibliographiques

- [3-a] *Abbott T. S., Speed Control Law for Precision terminal Area In-Trail Self Spacing, NASA/TM-2002-211742*
- [3-b] *Borne P., Dauphin-Tanguy G., Richard J. P., Rotella F., Zambettakis I., Analyse et régulation des processus industriels, tome 1 : régulation continue, éditions Technip, 1993*
- [3-c] *Bryson A. E., Ho Y. C., Applied Optimal Control : Optimization, Estimation, and Control, Hemisphere Pub, Revised edition (October 1981)*
- [3-d] *Chichka D. F., Speyer J. L., Park C. G., Peak-Seeking Control with Application to Formation Flight, Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, December 1999.*
- [3-e] *DeCarlo R. A., Zak S. H., Drakunov S. V., Variable structure sliding-mode controller design, The control handbook, W. S. Lévine (editor), CRC Press, 1996, pp941-951*
- [3-f] *Fossard A.J., Normand-Cyrot D., Systèmes non linéaires, volume 3 : commande, Editions Masson, Paris, 1995.*
- [3-g] *Fossard A.J., Foisneau J., Optimisation approchée, en boucle fermée, des systèmes non linéaires par la méthodologie des perturbations singulières, CERT-DERA, 1991*
- [3-h] *Hall J.K., Pachter M., Formation maneuver in three dimensions, AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Denver, CO, Aug. 2000, paper No. 2000-4372*
- [3-i] *Hanson C. E., Ryan J., Allen M. A., An overview of flight test results for a formation flight autopilot, NASA/TM-2002-210729*
- [3-j] *Hoffman E., Ivanescu D., Shaw C., Zeghal K., analysis of spacing guidance for sequencing aircraft on merging trajectories, 21st Digital Avionics Systems Conference, Irvine, California, October 2002*
- [3-k] *Innocenti M., Mancino G., Garofoli M., Napolitano M., Preliminary analysis of formation flight management, AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Portland, OR, Aug. 1999, paper No. 99-3984*
- [3-l] *Jenkinson L. R., Caves R. E., Rhodes D. P., Automatic formation flight : a preliminary investigation into the application to civil operations, Loughborough University of Technology, 1995*
- [3-m] *Khalil H.K., Nonlinear Systems, Prentice Hall, Third Edition, 2002*
- [3-n] *Kokotovic P., Arcak M., Constructive non linear control : a historical perspective, Automatica 37 (2001) 637-662*
- [3-o] *Lohr G., Oseguera-Lohr R., Abbott T., Flight Evaluation of a Time-Based Airborne Inter-Arrival Spacing Tool (Paper 56), 5<sup>th</sup> USA/Europe ATM seminar, Budapest, June 2003*
- [3-p] *Ogata K., Modern control engineering (4<sup>th</sup> edition), Prentice Hall, 2002*
- [3-q] *Pachter M., D'Azzo J.J., Dargan J.L., Automatic Formation Flight Control, Journal*

*Contribution à la synthèse de lois de commande pour la navigation relative entre aéronefs*  
*of Guidance, Control and Dynamics*, vol 17 (no. 6) : 1380-1383, 1994

- [3-r] *Pervozvanski A. A., Freidovich L. B., Robust stabilization of robotic manipulators by PID controllers, Dynamics and Control, 1999, vol.9, N.3, pp.203-222.*
- [3-s] *Sai-Ming Li, Jovan D. Boskovic, Raman K. Mehra, Globally stable automatic formation flight control in two dimensions, AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Montreal, Aug. 2001, paper No. 2001-4046*
- [3-t] *Singh S., Pachter M., Chandler P., Banda S., Rasmussen S., Shumacher C., Input-output invertibility and sliding mode control for close formation flying of multiple UAVs, International Journal of robust and nonlinear control, vol 10 : 779-797, 2000*
- [3-u] *Sira-Ramirez H., On the dynamical sliding mode control of nonlinear systems, International journal of control, 57(5), 1039-1061, 1993*
- [3-v] *Wellinger D., Army formation flight study : final report, contract No. DA-36-039-ACM-03367(E), Radio corporation of America, Burlington, Feb. 1965*
- [3-w] *Zaccarian L., Teel R. T., A common framework for anti-windup, bumpless transfer and reliable designs, Automatica 38 (2002) 1735-1744*

---

## **Chapitre 4**

### **Modèle d'avion pour la synthèse de lois de guidage relatif** **– Equations d'état du mouvement relatif**

---

#### **4.1 Introduction**

Un avion en vol est un système dynamique multivariable où les chaînes de commande de bas niveau sont couplées. Ainsi par exemple, une variation du braquage de la gouverne de profondeur provoque une variation de la vitesse de tangage, de l'assiette longitudinale, de l'incidence, de la pente, de la vitesse verticale et de l'altitude. Néanmoins, des lois de pilotage et de guidage automatique ont pu être mises au point en utilisant des méthodes de conception relativement simples grâce notamment à l'ordonnancement des variables à commander en fonction de leur vitesse de variation : c'est le principe de la commande à plusieurs échelles de temps.

L'objectif de ce chapitre est de présenter la modélisation de la dynamique de guidage qui sera adoptée dans ce mémoire. Nous rappellerons tout d'abord quelques éléments de mécanique du vol, puis nous décrirons brièvement les systèmes de commande automatique de vol d'un avion de transport commercial. Nous présenterons ensuite le modèle de synthèse retenu pour un avion dans le contexte général du guidage. Nous nous intéresserons ensuite à la cinématique du mouvement relatif entre l'avion leader et l'avion suiveur. Ces étapes successives nous conduiront finalement à la formulation des équations d'état pour la synthèse de lois le guidage relatif entre avions de transport commercial.

#### **4.2 Eléments de mécanique du vol**

##### **4.2.1 Définitions des trièdres de référence**

Les mouvements de l'avion peuvent être appréhendés par rapport à différents repères. Trois trièdres sont couramment utilisés : le trièdre avion, le trièdre aérodynamique et le trièdre terrestre.

###### **4.2.1.1 Trièdre avion**

Ce trièdre est lié rigidement au fuselage de l'avion lorsque celui-ci est envisagé comme un solide indéformable. L'origine de ce trièdre est un point fixe de l'avion. Il est souvent commode de prendre le centre de gravité comme origine. Il faut néanmoins se souvenir que le centre de gravité varie au cours du vol (vidange des réservoirs, variation de la position du train, des voiles, etc.), et qu'il est difficile d'en préciser expérimentalement la position. Les vitesses de rotation et les accélérations sont (en général) mesurées dans ce trièdre. Par conséquent, ce trièdre est intéressant pour évaluer les efforts inertiels qui s'exercent sur l'avion.

Les axes  $Ox_f$  et  $Oz_f$  de ce trièdre sont deux directions arbitraires du plan de symétrie. L'axe  $Ox_f$  est fréquemment pris parallèle à la corde de référence aérodynamique du profil et orienté vers l'avant. L'axe  $Oy_f$  est perpendiculaire au plan de symétrie et dirigé vers la droite du pilote. Enfin, l'axe  $Oz_f$  est orienté positivement vers le ventre de l'avion et complète le trièdre rectangle positif. Ces axes sont en général confondus avec les trois axes principaux d'inertie de l'avion. Nous supposons dans ce mémoire que l'axe  $Ox_f$  est parallèle au fuselage de l'avion.

#### 4.2.1.2 Trièdre aérodynamique

Ce trièdre est lié à la vitesse de l'avion. L'origine est un point fixe de l'avion, généralement le même que l'origine du trièdre avion. Ce trièdre permet d'exprimer de façon commode les différents efforts (forces et moments) aérodynamiques.

L'axe des abscisses  $Ox_a$  est porté par la vitesse et orienté positivement dans le sens de celle-ci. L'axe  $Oz_a$  est perpendiculaire à l'axe  $Ox_a$ , est situé dans le plan de symétrie de l'avion et est orienté positivement vers le ventre de l'avion. Enfin, l'axe  $Oy_a$  complète le trièdre rectangle direct.

#### 4.2.1.3 Trièdre terrestre

Cet un trièdre fixe par rapport à la terre, supposée plane : la direction des forces de pesanteur est supposée fixe et perpendiculaire à ce plan. Ce trièdre est intéressant pour la gestion de la position du centre de gravité de l'avion et est associé à la fonction de navigation.

L'axe  $Oz$  est l'axe vertical, orienté positivement vers le haut (i.e. dans la direction opposée au centre de la terre). Les axes  $Ox$  et  $Oy$  complètent ce trièdre rectangle direct, l'axe  $Ox$  étant arbitrairement choisi (orienté par exemple dans la direction du Nord).

### 4.2.2 Forces agissant sur l'avion

Un avion se déplace dans l'atmosphère sous l'action de la poussée des moteurs, de la pesanteur et de la résultante des forces et des moments aérodynamiques. C'est le braquage des gouvernes aérodynamiques et la variation de la poussée qui permettent de commander le mouvement de l'avion dans l'atmosphère.

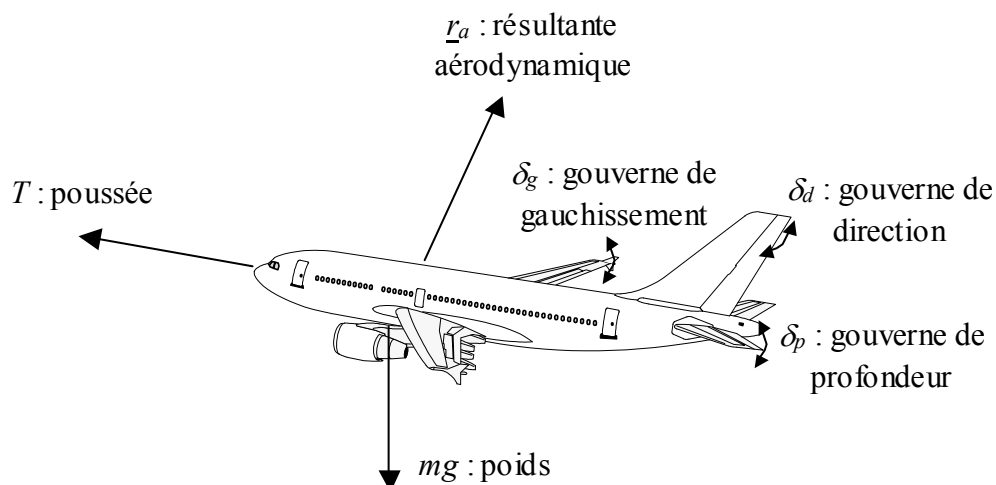


Figure 4-1 Forces agissant sur l'avion et gouvernes aérodynamiques

En plus de la commande moteur, les principales gouvernes à la disposition du pilote pour modifier la direction et l'intensité des moments et forces agissants sur l'avion sont les suivantes :

- La gouverne de profondeur : c'est un volet situé généralement à l'arrière de l'avion. Le braquage  $\delta_p$  de cette gouverne crée un moment de tangage qui tend à faire cabrer ou piquer l'avion.
- Les gouvernes de gauchissement : ce sont des volets situés au bord de fuite aux extrémités de la voilure, ou qui déplacent les spoilers qui ont pour rôle de détruire partiellement la portance sur l'une ou l'autre des demi voilure. Le braquage  $\delta_g$  de ces gouvernes crée un moment de roulis qui tend à incliner suivant son axe longitudinal.
- La gouverne de direction : c'est un volet situé au bord de fuite de la dérive. Le braquage  $\delta_d$  de cette gouverne crée un moment de lacet déplaçant l'avion suivant son axe vertical.

### 4.2.3 Notations, hypothèses et relations de passage

Par la suite, l'avion est supposé rigide et les accélérations d'entraînement ou de Coriolis résultant du mouvement de la Terre sont négligées. De plus, la masse, la position du centre de gravité et le tenseur d'inertie sont supposés constants.

Par la suite, nous utiliserons les variables suivantes :

- $m$  est la masse de l'avion et  $g$  l'accélération de la pesanteur.
- L'angle d'incidence  $\alpha$  est l'angle de l'axe  $Ox_f$  (référence fuselage) avec le plan  $Ox_a y_a$  du trièdre aérodynamique compté positivement lorsque l'axe  $Ox_f$  est situé au-dessus du plan  $Ox_a y_a$  : l'incidence est positive si la projection du vecteur vitesse, porté par  $Ox_a$ , sur l'axe  $Oz_f$  est positive.
- L'angle de dérapage  $\beta$  est l'angle de l'axe  $Ox_a$  avec le plan de symétrie  $Ox_f$  de l'avion. Cet angle est positif si l'air souffle du côté droit du fuselage : le dérapage est positif si la projection du vecteur vitesse  $V$  sur l'axe  $Oy$  est positive.

La figure suivante illustre la définition de ces angles, où  $(u, v, w)$  représentent les composantes du vecteur vitesse aérodynamique dans le trièdre avion ([4-k]) :

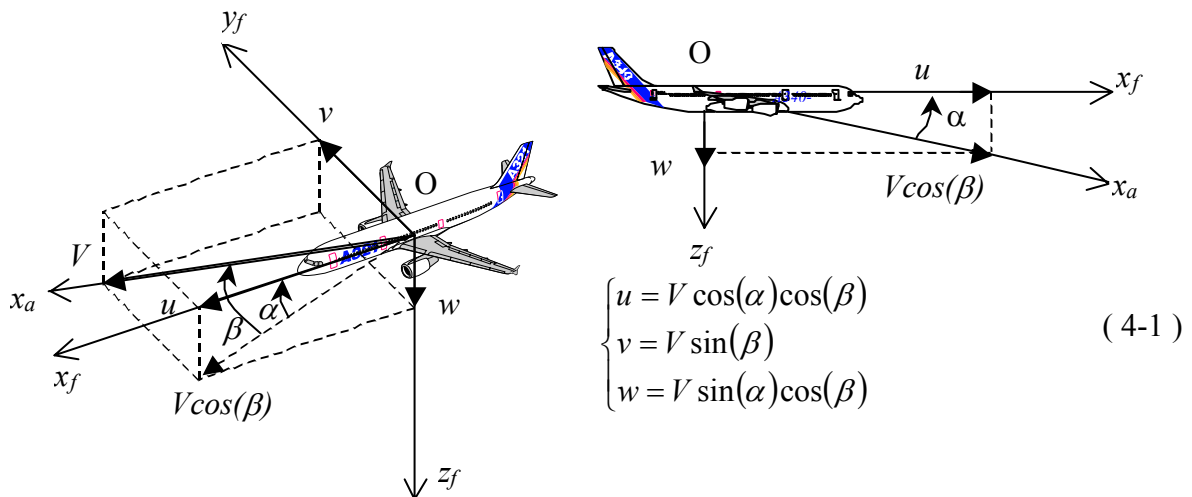


Figure 4-2 Définition de l'incidence et du dérapage

Le passage entre le trièdre aérodynamique et le trièdre avion s'effectue grâce à une matrice de rotation, notée  $\mathbf{R}_f^a(\alpha, \beta)$  (fuselage  $\rightarrow$  aérodynamique). En notant  $C_x = \cos(x)$  et  $S_y = \sin(y)$ , cette matrice a l'expression suivante :

$$\underline{x}_{aero} = \mathbf{R}_f^a(\alpha, \beta) \cdot \underline{x}_{avion} \quad (4-2)$$

$$\mathbf{R}_f^a(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta & S_\beta & S_\alpha C_\beta \\ -C_\alpha S_\beta & C_\beta & -S_\alpha S_\beta \\ -S_\alpha & 0 & C_\alpha \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

La matrice de rotation  $\mathbf{R}_f^a(\alpha, \beta)$  est une matrice orthogonale, c'est à dire qu'elle conserve la norme des vecteurs sur lesquels elle s'applique. La propriété d'orthogonalité s'exprime sous la forme suivante, où  $\mathbf{R}^T$  désigne la transposée de la matrice  $\mathbf{R}$  :

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad (4-4)$$

- $(p, q, r)$  sont les composantes du vecteur  $\underline{\Omega}$  des vitesses de rotation du trièdre avion par rapport au trièdre terrestre local, supposé inertiel :  $p$  est la vitesse de roulis suivant l'axe  $Ox_f$ ,  $q$  est la vitesse de tangage suivant l'axe  $Oy_f$  et  $r$  est la vitesse de lacet suivant l'axe  $Oz_f$  :

$$\underline{\Omega} = [p \quad q \quad r]^T \quad (4-5)$$

- $(\phi, \theta, \psi)$  sont les angles d'Euler : ils permettent d'orienter l'avion par rapport au trièdre terrestre local. Ils représentent respectivement les angles d'inclinaison latérale, d'assiette et de cap (azimut).

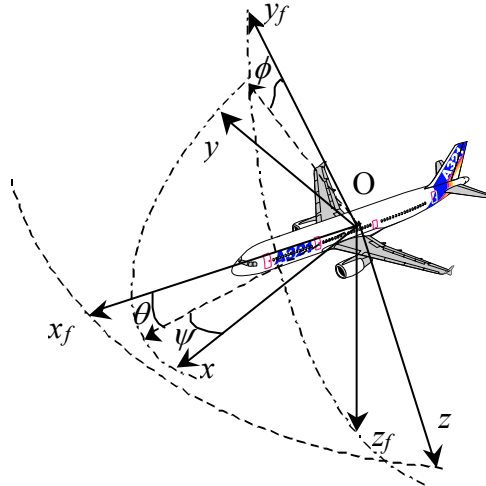


Figure 4-3 Orientation du trièdre avion par rapport au trièdre terrestre

Les angles d'Euler sont regroupés dans un vecteur noté  $\underline{\eta}_E$  :

$$\underline{\eta}_E = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T \quad (4-6)$$

Les équations d'attitude expriment les relations de passage entre la vitesse de variation des angles d'Euler et les composantes  $(p, q, r)$  du vecteur  $\underline{\Omega}$  des vitesses de rotation du trièdre avion par rapport au trièdre terrestre local ([4-i]) :

$$\dot{\underline{\eta}}_E = \mathbf{P}_f^t(\underline{\eta}_E) \cdot \underline{\Omega} \quad (4-7)$$

$$\mathbf{P}_f^t(\underline{\eta}_E) = \begin{bmatrix} 1 & \tan(\theta)\sin(\phi) & \tan(\theta)\cos(\phi) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

La matrice  $\mathbf{P}_f^t(\underline{\eta}_E)$  n'est pas orthogonale. De plus, elle n'est pas définie pour  $\theta = \pm 90$  degrés. Il est d'usage de considérer que l'assiette  $\theta$  et l'angle d'inclinaison latérale  $\phi$  sont suffisamment *faibles* pour pouvoir faire l'approximation suivante :

$$\dot{\underline{\eta}}_E \approx \underline{\Omega} \quad (4-9)$$

Enfin, la matrice  $\mathbf{R}_f^t(\underline{\eta})$  (fuselage  $\rightarrow$  terrestre) permet de passer du trièdre avion au trièdre local terrestre. Cette matrice a l'expression suivante, où  $C_x = \cos(x)$  et  $S_y = \sin(y)$  ([4-i]) :

$$\mathbf{R}_f^t(\underline{\eta}) = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & (S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi) & (C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi) \\ C_\theta S_\psi & (S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi) & (C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi) \\ -S_\theta & S_\phi C_\theta & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

- $(X, Y, Z)$  sont les composantes de la résultante  $\underline{r}_a$  des forces aérodynamiques dans le trièdre avion.
- $(-D, Y_a, -L)$  sont les composantes de la résultante  $\underline{r}_a$  des forces aérodynamiques dans le trièdre aérodynamique :  $D$  (*drag*) désigne la traînée de l'avion,  $L$  (*lift*) la portance et  $Y$  la force latérale :

$$\underline{r}_a = [-D \quad Y_a \quad -L]^T \quad (4-11)$$

Ces forces dépendent de la masse volumique  $\rho$  de l'air, du carré de la vitesse et de coefficients aérodynamiques, notés  $C_x$ ,  $C_y$  et  $C_z$  :

$$\begin{cases} D = 0.5 \rho S V^2 C_x \\ Y_a = 0.5 \rho S V^2 C_y \\ L = 0.5 \rho S V^2 C_z \end{cases} \quad (4-12)$$

La valeur des coefficients aérodynamiques dépend, entres autres, de la position des gouvernes de profondeur, de gauchissement et de direction ainsi que des angles d'incidence et de dérapage.

- $T$  est la poussée des moteurs, supposée parallèle à l'axe  $Ox_f$  (référence fuselage) du trièdre avion. La poussée varie en général avec l'altitude comme la masse volumique  $\rho$  de l'air ([4-n]).
- $\mathbf{I}_n$  est la matrice d'inertie dans le trièdre avion. Lorsque l'avion présente un plan de symétrie (ce qui est le cas de la plupart des avions), la matrice  $\mathbf{I}_n$  a la forme suivante :

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

- $(L, M, N)$  sont les composantes de la résultante  $\underline{m}$  des moments aérodynamiques dans le trièdre avion :

$$\underline{m} = [L \quad M \quad N]^T \quad (4-14)$$

#### 4.2.4 Equations des forces et des moments

Les théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique suggérés par Newton ([4-j]) et Leonhard Euler ([4-a]) sont appliqués dans le trièdre avion. L'avion est considéré

comme rigide. Nous rappelons que  $(u, v, w)$  représentent les composantes du vecteur vitesse aérodynamique dans le trièdre avion, et que  $(p, q, r)$  représentent les composantes du vecteur vitesse de rotation du trièdre avion par rapport au trièdre terrestre local. Cela conduit aux équations suivantes ([4-i]) :

- Equations des forces :

$$\begin{cases} m(\dot{u} + qw - rv) = X + T - mg \sin(\theta) \\ m(\dot{v} + ru - pw) = Y + mg \cos(\theta) \sin(\phi) \\ m(\dot{w} + pv - qu) = Z + mg \cos(\theta) \cos(\phi) \end{cases} \quad (4-15)$$

Lorsqu'elles sont exprimées dans le repère aérodynamique, les équations des forces se mettent sous la forme suivante ([4-k]), où la matrice  $\mathbf{R}_f^a(\alpha, \beta)$  est définie en (4-3) :

$$\begin{cases} m\dot{V} = T \cos(\alpha) \cos(\beta) - D + mg_1 \\ m(\dot{\beta}V + Vr_a) = -T \cos(\alpha) \sin(\beta) + Y_a + mg_2 \\ m(\dot{\alpha}V \cos(\beta) - Vq_a) = -T \sin(\alpha) - L + mg_3 \end{cases} \quad (4-16)$$

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_f^a(\alpha, \beta) \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

Dans les équations précédentes,  $r_a$  et  $q_a$  sont les vitesses angulaires de lacet et de tangage exprimées dans le repère aérodynamique.

- Equations des moments :

$$\begin{cases} I_x \dot{p} - I_{xz}(\dot{r} + qp) + (I_z - I_y)qr = L \\ I_y \dot{q} + I_{xz}(p^2 - r^2) + (I_x - I_z)pr = M \\ I_z \dot{r} - I_{xz}(\dot{p} - qr) + (I_y - I_x)pq = N \end{cases} \quad (4-18)$$

Les méthodes classiques de synthèse des lois de pilotage consiste à étudier le comportement local de l'avion autour de points d'équilibres : à cet effet, les équations (4-15) et (4-18) sont linéarisées autour des points d'équilibre définis par :

$$v_0 = w_0 = p_0 = q_0 = r_0 = \phi_0 = \psi_0 = 0 \quad (4-19)$$

En ne tenant compte que des termes les plus significatifs de la matrice jacobienne pour des avions conventionnels, les équations (4-15) et (4-18) se réduisent alors à deux ensemble d'équations découplées décrivant respectivement les petits mouvements longitudinaux et latéraux ([4-i]) :

- Equations des petits mouvements longitudinaux :

$$\begin{cases} \left( \frac{d}{dt} - X_u \right) \Delta u - X_w \Delta w + g \cos(\theta_0) \Delta \theta = X_{\delta p} \Delta \delta_p + X_{\delta T} \Delta \delta_T \\ -Z_u \Delta u + \left[ (1 - Z_{\dot{w}}) \frac{d}{dt} - Z_w \right] \Delta w - \left[ (u_0 + Z_q) \frac{d}{dt} - g \sin(\theta_0) \right] \Delta \theta = Z_{\delta p} \Delta \delta_p + Z_{\delta T} \Delta \delta_T \\ -M_u \Delta u + \left[ M_{\dot{w}} \frac{d}{dt} + M_w \right] \Delta w + \left( \frac{d^2}{dt^2} - M_q \frac{d}{dt} \right) \Delta \theta = M_{\delta p} \Delta \delta_p + M_{\delta T} \Delta \delta_T \end{cases} \quad (4-20)$$

Pour les avions conventionnels, les équations des petits mouvements longitudinaux présentent quatre modes propres complexes conjugués : deux modes propres longitudinaux rapides et deux modes propres longitudinaux lents (phugoïde) :

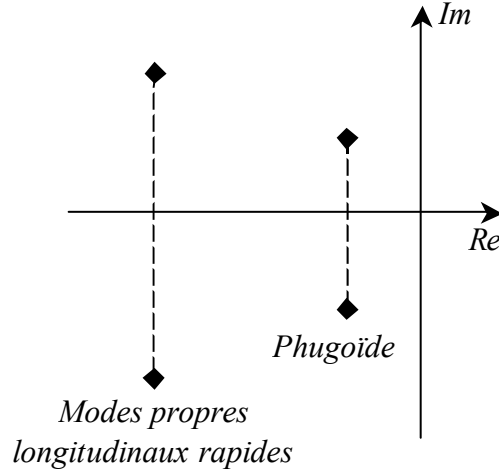


Figure 4-4 Modes propres des petits mouvements longitudinaux

- Equations des petits mouvements latéraux :

$$\begin{cases} \left( \frac{d}{dt} - Y_v \right) \Delta v - Y_p \Delta p + (u_0 - Y_r) \Delta r - g \cos(\theta_0) \Delta \phi = Y_{\delta d} \Delta \delta_d \\ -L_v \Delta v + \left( \frac{d}{dt} - L_p \right) \Delta p - \left( \frac{I_{xz}}{I_x} \frac{d}{dt} + L_r \right) \Delta r = L_{\delta g} \Delta \delta_g + L_{\delta d} \Delta \delta_d \\ -N_v \Delta v - \left( \frac{I_{xz}}{I_z} \frac{d}{dt} + N_p \right) \Delta p + \left( \frac{d}{dt} - N_r \right) \Delta r = N_{\delta g} \Delta \delta_g + N_{\delta d} \Delta \delta_d \end{cases} \quad (4-21)$$

Dans les équations précédentes,  $\delta_p$ ,  $\delta_d$  et  $\delta_g$  représentent respectivement le braquage des gouvernes de profondeur, de direction et de gauchissement, et  $\delta_r$  la commande de poussée. Les coefficients aérodynamiques  $X_u$ ,  $Y_v$ , ... relatifs aux forces aérodynamiques sont définis relativement à la masse de l'avion :

$$\begin{cases} X_u = \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial u} \\ Y_v = \frac{1}{m} \frac{\partial Y}{\partial v} \\ \dots \end{cases} \quad (4-22)$$

Enfin, les coefficients aérodynamiques  $L_p$ ,  $M_u$ , ... relatifs aux moments aérodynamiques sont définis par rapport aux moments d'inertie :

$$\begin{cases} L_p = \frac{1}{I_x} \frac{\partial L}{\partial p} \\ M_u = \frac{1}{I_y} \frac{\partial M}{\partial u} \\ \dots \end{cases} \quad (4-23)$$

Pour les avions conventionnels, les équations des petits mouvements latéraux présentent quatre modes propres : un mode propre réel rapide (roulis pur), deux modes propres réels conjugués (roulis hollandais) un mode propre réel lent (mode spirale) :

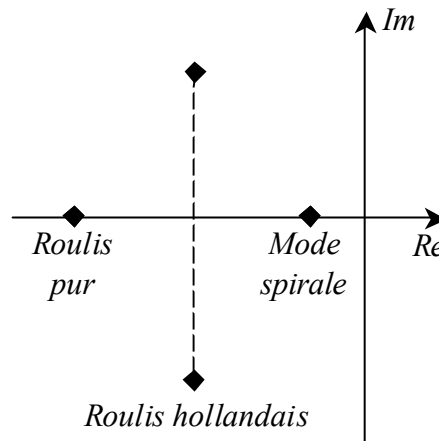


Figure 4-5 Modes propres des petits mouvements latéraux

## 4.3 Systèmes de commande automatique de vol

### 4.3.1 Objectifs

Les systèmes de commande automatique de vol à bord des aéronefs civils ont deux fonctions principales ([4-e]) :

- Amélioration des qualités de vol de l'avion naturel : il s'agit de ramener les qualités de vol de l'avion naturel à un comportement suffisamment standard pour l'équipage et supportable par l'ensemble des passagers. L'amélioration des qualités de vol de l'avion naturel est réalisée par un ensemble de systèmes dénommés stabilisateurs (*Stability Augmentation System*).
- Assistance au pilotage et au guidage : il s'agit de libérer le pilote de tâches fastidieuses ou délicates afin de ne pas altérer la vigilance du pilote. Ces tâches proviennent soit du fait qu'il ait à piloter longtemps (avion long courrier) ou du fait qu'elles exigent une très grande attention comme par exemple le pilotage par mauvaises conditions météorologiques ou l'atterrissage de nuit. L'assistance au pilotage et au guidage est réalisée par un ensemble de systèmes dénommés pilotes automatiques (*autopilot*).

D'une manière générale, les systèmes de commande automatique de vol permettent d'assurer une meilleure sécurité des vols à un moindre coût (i.e. amener les passagers à destination en temps voulu et à un prix acceptable).

### 4.3.2 Systèmes de pilotage

Les systèmes de pilotage permettent de faire évoluer de manière progressive l'avion d'une situation d'équilibre statique à une autre. Ainsi le premier principe utilisé dans la conception de lois de pilotage automatique est celui de la séparation des petits mouvements de l'avion autour d'une position d'équilibre dans son plan longitudinal et son plan latéral. Ceci conduit donc à considérer pour le pilote automatique des modes de fonctionnement longitudinaux et des modes de fonctionnement latéraux ([4-g]) :

- Modes de fonctionnement longitudinaux :
  - o commande de l'attitude longitudinale (pilote automatique longitudinal agissant sur la profondeur) ;

- o commande de la vitesse (auto-manette ou gestion de la vitesse à la profondeur).
- Modes latéraux :
  - o Commande de l'attitude latérale (pilote automatique latéral agissant sur les ailerons) ;
  - o Commande de lacet (stabilisateur et coordination des virages agissant sur la direction).

Les méthodes classiques de synthèse de lois de commande automatique de vol font appel à la théorie des asservissements linéaires à entrée et sortie uniques ([4-h]). Un avion étant un système dynamique complexe à plusieurs entrées (braquage des gouvernes et réglage des moteurs) et plusieurs sorties couplées (ainsi, par exemple, une variation du braquage de la gouverne de profondeur provoque une variation de la vitesse de tangage, de l'assiette longitudinale, de l'incidence, de la pente, de la vitesse verticale et de l'altitude), la théorie des asservissements linéaires à entrée et sortie uniques n'a pu être appliquée avec succès que grâce à l'ordonnancement des variables à commander en fonction de leur vitesse de variation et en tenant compte des relations de cause à effet existants entre elles. C'est le principe du découplage en fréquence, appelée aussi commande à plusieurs échelles de temps, qui se traduit dans le cas linéaire par une superposition des boucles d'asservissement : la réalisation dans un premier temps de l'asservissement des modes les plus rapides permet généralement dans un deuxième temps de réaliser l'asservissement des modes les plus lents.

### **4.3.3 Boucle de pilotage et boucle de guidage**

L'application du principe de superposition des boucles d'asservissement aux chaînes de commande de vol d'un avion de transport commercial conduit alors à l'organisation du pilote automatique en deux boucles principales ([4-h]) :

- La boucle de pilotage, appelée aussi boucle d'attitude ou petite boucle et qui est associée aux fonctions de pilotage. Cette boucle permet de fixer l'attitude de l'avion par rapport à son centre de gravité. Sur les avions de transport anciens, cette boucle commandait l'assiette longitudinale ( $\theta$ ) et l'assiette latérale de l'avion ( $\phi$ ). Sur les avions de transport récents (à partir de l'Airbus A320 ~ 1987), cette boucle (boucle *CDVE* : *Commande De Vol Electrique*) commande le facteur de charge longitudinal ( $n_z$ ) et le taux de roulis ( $p$ ).
- La boucle de guidage ou grande boucle. Cette boucle permet de fixer la trajectoire du centre de gravité dans l'espace. Elle permet donc l'acquisition ou le maintien d'une trajectoire. Pour les mouvements longitudinaux, ce sont le niveau de vol ( $z$ ), la vitesse verticale ( $V_z$ ), la pente ( $\gamma$ ) ou vitesse air ( $V$ ) qui sont commandés ; pour les mouvements latéraux, ce sont le cap ( $\psi$ ) ou la route ( $\chi$ ) qui sont commandés. Ces modes de guidage sont sélectionnés soit directement par le pilote au travers d'un boîtier de commande (*FCU* : *Flight Control Unit*), soit indirectement par le *FMS* (*Flight Management System*) de l'avion.

Ces deux boucles sont placées en amont du système de commande des actionneurs (boucle de gouverne et automanette), comme illustré sur la figure suivante :

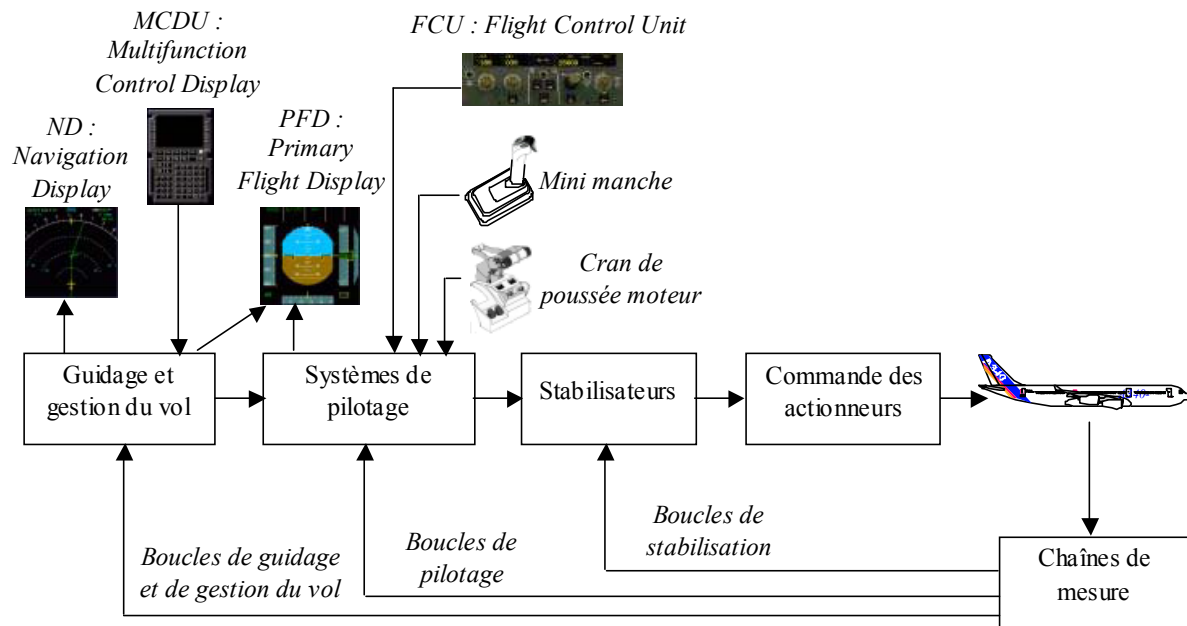


Figure 4-6 Systèmes de commande d'un avion de transport moderne

#### 4.3.4 Boucle de pilotage : exemple de réalisation

Les modes de base sont les modes par défaut qui assurent la commande de l'avion quand le pilote engage le pilote automatique sans sélectionner de mode particulier. Le mode de base relatif à la profondeur est le maintien d'assiette longitudinale (le cas échéant, maintien de vitesse verticale), celui relatif au gauchissement est le maintien d'assiette latérale (le cas échéant, maintien de cap ou de facteur de charge latéral).

Pour la famille Airbus A320/A340, les boucles de pilotage pour le contrôle des mouvements longitudinaux et latéraux ont la structure suivante ([4-1]) :

- Contrôle des mouvements longitudinaux :

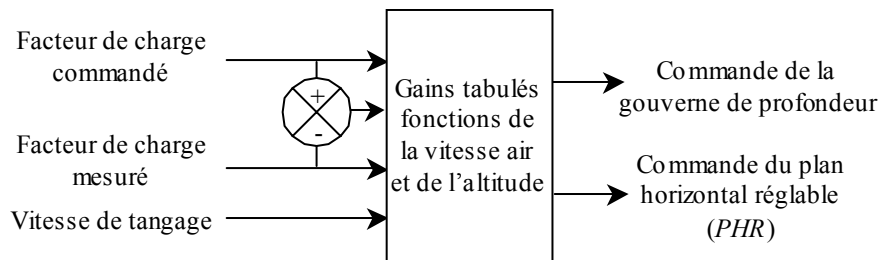


Figure 4-7 Boucle de pilotage longitudinale pour la famille Airbus A320/A340

- Contrôle des mouvements latéraux :

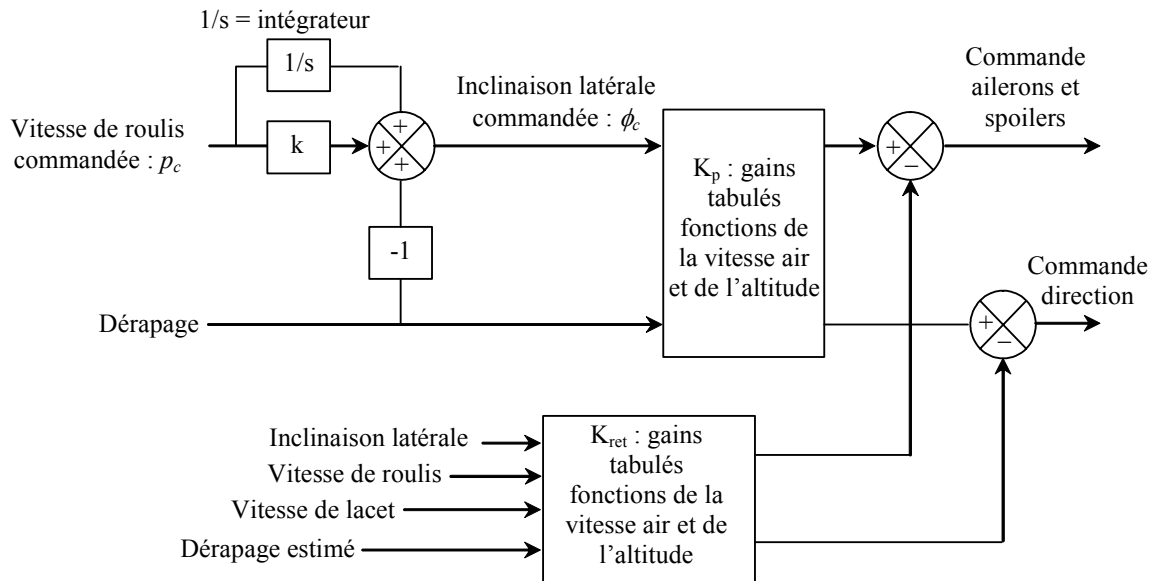


Figure 4-8 Boucle de pilotage latérale pour la famille Airbus A320/A340

### 4.3.5 Conduite des moteurs

Les variations de vitesse longitudinale de l'avion peuvent être obtenues de deux manières différentes ([4-h]) :

- Par action sur la gouverne de profondeur, lorsque le régime moteur est fixée (e.g. pleine poussée en montée, poussée réduite en approche). Il y a alors échange entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique de l'avion. Les profils de montée et de descente usuels sont définis à vitesse conventionnelle constante puis à Mach constant à partir d'une altitude dite de transition (cf. annexe B).
- Par action sur la poussée des moteurs, c'est à dire en agissant sur l'injection du carburant dans les moteurs.

La fonction du calculateur d'automanette (*ATHR : Auto throttle*) est de réguler l'arrivée de carburant de façon à modifier ou maintenir une vitesse indiquée ou un nombre de Mach. Le calculateur d'automanette offre deux modes principaux de régulation ([4-g]) :

- mode *SPEED / MACH* : maintien d'une vitesse ou d'un nombre de Mach ;
- mode *THRUST* : commande d'une poussée.

Les fonctionnements du pilote automatique et de l'automanette doivent être coordonnés de telle sorte qu'un même objectif de vitesse ne soit pas visé simultanément par ces deux chaînes de commande (risque de conflit ou d'instabilité).

Sur la famille Airbus A320/A340 l'automanette ne peut être active qu'en mode *SPEED / MACH* lorsqu'elle est engagée seule, sans mode de pilote automatique. Par contre, lorsqu'un mode de pilote automatique est engagé, le mode automanette actif est esclave du mode pilote automatique actif. Ainsi par exemple :

- Lorsque le mode *Pilote Automatique* actif est *OPEN CLB*, alors le mode automanette est *THRUST* (la consigne de vitesse est maintenue en commandant la profondeur).
- Lorsque le mode *Pilote Automatique* actif est *V/S (Vertical Speed)* alors le mode automanette est *SPEED* (la consigne de vitesse est maintenue en commandant les moteurs).

## 4.4 Modèle d'avion pour le guidage

### 4.4.1 Introduction

Le problème du guidage est un problème traitant de la trajectoire du centre de gravité de l'aéronef. La fonction de guidage relatif sera donc placée en amont des systèmes de pilotage, qui, comme nous l'avons vu, permettent de fixer la position de l'avion par rapport à son centre de gravité. Elle reçoit les informations relatives au vecteur d'état (position et vitesse) de l'avion via sa chaîne de mesure et de l'aéronef leader via les transmissions *ADS-B* (cf. chapitre II) :

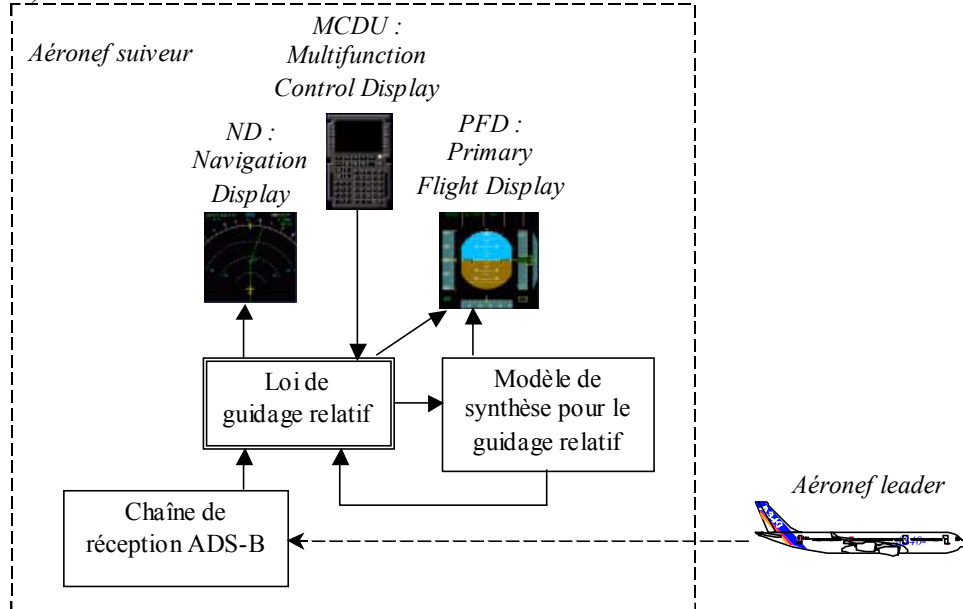


Figure 4-9 Position de la loi de guidage relatif dans la chaîne de commande

Pour étudier la loi de guidage relatif, nous appliquerons une commande à plusieurs échelles de temps dont le principe consiste à considérer que la boucle de pilotage présente un temps de réponse très rapide vis à vis de la dynamique du guidage relatif. L'intérêt de cette approche est de diminuer la dimension du problème de commande (principe de superposition des boucles d'asservissement par exemple) et de permettre l'intégration des différents modules consacrés soit au pilotage soit au guidage. Par la suite, nous considérerons donc que la boucle de pilotage est déjà réalisée de façon satisfaisante. De plus, cette approche nous permettra au chapitre suivant d'estimer l'ordre de grandeur des paramètres de réglage des lois de guidage relatif. Ils devront être ensuite affinés et validés par des simulations plus approfondies.

### 4.4.2 Rappel sur la commande à plusieurs échelles de temps

Nous reprenons ici les notions sur la commande à plusieurs échelles de temps présentées dans [4-f]. Nous considérerons pour simplifier un système de dimension deux mono-entrée de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g(x_2) \cdot u \end{cases} \quad (4-24)$$

Dans le cas particulier du guidage relatif,  $u$  représente la commande de bas-niveau (déflexion des gouvernes et commande moteur),  $x_1$  les variables d'états relatives à la boucle de pilotage et  $x_2$  celles relatives au guidage relatif.

Nous souhaitons que la variable  $x_2$  suive une trajectoire de référence  $x_2^*$  donnée (e.g. position et vitesse de l'avion désigné quelques minutes plus tôt), en restant dans un domaine où  $f_2(x_1, x_2)$  est borné et où  $g(x_2)$  n'est pas singulière.

Appliquons la commande à grand gain suivante, pour  $\varepsilon$  assez petit et  $k$  un réel positif fini :

$$u = -\frac{k}{\varepsilon \cdot g(x_2)}(x_2 - x_2^*) \quad (4-25)$$

Le système ( 4-24 ) devient, après avoir introduit le changement d'échelle de temps  $\tau = t / \varepsilon$  (temps *rapide*) :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = \mathcal{F}_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{d\tau} = \mathcal{F}_2(x_1, x_2) - k(x_2 - x_2^*) \end{cases} \quad (4-26)$$

Il est alors montré dans [4-f] que la commande ( 4-25 ) a la propriété de rendre invariante à l'ordre un en  $\varepsilon$  la variété d'équation :

$$x_2 = x_2^* + \frac{\varepsilon}{k} f_2(x_1, x_2) \quad (4-27)$$

De plus, comme la constante  $k$  est positive, cette variété est attractive et la dynamique lente qui en résulte est donnée par :

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \mathcal{F}_1(x_1, x_2^*) \Leftrightarrow \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2^*) \quad (4-28)$$

Par conséquent, la dynamique lente est commandée par la consigne  $x_2^*$ , qui devient ainsi une commande fictive du sous-système lent. Ainsi, le problème de commande d'un système de dimension deux a été transformé en deux problèmes de commande de sous-systèmes de dimension un en cascade.

Notons enfin que la boucle lente doit respecter l'échelle de temps lente pour conserver le découplage lent-rapide. Cette construction s'étend à des systèmes de dimension quelconque à condition qu'ils aient une structure triangulaire comparable à celle de ( 4-24 ).

Nous ne reviendrons pas sur les lois de pilotage, dont nous supposons l'ordre de grandeur des constantes de temps donné. Afin de pouvoir appliquer le principe de la commande à plusieurs échelles de temps, nous construirons par la suite la loi de guidage relatif de telle sorte que son échelle de temps soit lente vis-à-vis de celle des lois de pilotage.

### 4.4.3 Dynamique du guidage

Nous considérerons par la suite l'expression du théorème de la quantité de mouvement exprimée dans le repère aérodynamique, dans le cas où la force latérale  $Y_a$  compense parfaitement l'angle de dérapage  $\beta$  de sorte qu'ils sont négligés (cf. la deuxième équation du système ( 4-16 ) dans laquelle la force latérale  $Y_a$  est identifiée à  $mV\dot{\beta}$ ). Il vient dans ces conditions (i.e.  $\beta = 0, q_a \approx \dot{\theta}, r_a \approx \dot{\psi}$ ) les relations suivantes ([4-n]) :

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{T \cos(\alpha) - D}{m} - g[\sin(\theta)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\theta)\cos(\phi)] \\ V\dot{\psi} = g \cos(\theta)\sin(\phi) \\ V\dot{\gamma} = \frac{L + T \sin(\alpha)}{m} - g[\sin(\theta)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\cos(\theta)\cos(\phi)] \end{cases} \quad (4-29)$$

L'angle  $\gamma$  est l'angle de pente, c'est à dire l'angle entre le vecteur vitesse et le plan  $Ox_o y_o$  du trièdre terrestre local.

$$\gamma = \theta - \alpha \quad (4-30)$$

Les équations ( 4-29 ) sont les équations simplifiées (approximation ( 4-9 ) et pas de dérapage) relatives aux modes lents du déplacement du centre de gravité de l'avion ([4-d]) :

- La première et la troisième équation de ( 4-29 ) décrivent le mouvement longitudinal de l'avion, associé au tangage et à la variation de vitesse (phugoïde) ;
- La deuxième équation de ( 4-29 ) décrit le mouvement latéral de l'avion, associé au mouvement de lacet.

#### 4.4.4 Hypothèses sur le modèle et simplifications

Nous pouvons re-écrire les relations ( 4-29 ) représentant le modèle de l'avion suiveur pour la synthèse de lois de guidage relatif en tenant compte des entrées choisies et du fait que pour les avions de transport commercial :

- le produit  $T \sin(\alpha)$  est négligeable devant la portance  $L$  ;
- l'inclinaison latérale  $\phi$  est *faible* ;
- l'assiette  $\theta$  est *faible*.

Il vient dans ces conditions :

$$\begin{cases} \dot{V} \approx \frac{T \cos(\alpha) - D}{m} - g \sin(\gamma) \\ \dot{\gamma} \approx \frac{1}{V} \left( \frac{L}{m} - g \cos(\gamma) \right) \\ \dot{\psi} \approx \frac{g}{V} \phi \end{cases} \quad (4-31)$$

De plus, l'angle de pente  $\gamma$  est lui aussi *faible* pour ce type d'avion, de sorte que  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  peuvent être approchés par un développement limité au premier ordre. Il vient par conséquent tout simplement :

$$\begin{cases} \dot{V} \approx g(\gamma_t - \gamma) \\ \dot{\gamma} \approx \frac{g}{V}(n_z - 1) \\ \dot{\psi} \approx \frac{g}{V} \phi \end{cases} \quad (4-32)$$

Le modèle d'avion retenu pour la synthèse de lois de guidage relatif est non linéaire du fait de la dépendance de la vitesse de lacet  $\dot{\psi}$  et de la vitesse de la pente  $\dot{\gamma}$  avec l'inverse de la vitesse aérodynamique  $V$ .

Les trois entrées des équations d'état précédentes sont  $(\gamma_t, n_z, \phi)$  :

- La pente totale  $\gamma_t$  est définie de la manière suivante :

$$\gamma_t = \frac{T \cos(\alpha) - D}{mg} \quad (4-33)$$

Dans un souci de simplicité, le contrôle de la vitesse est basé sur une approche énergétique. Cette approche est similaire à celle développée dans [4-c] et permet d'éviter d'aborder les

problèmes liés à la complexité du fonctionnement des moteurs. Elle est basée sur l'équilibre entre le travail par unité de temps des forces qui dérivent d'une énergie (cinétique et potentielle) et celui des forces non-conservatrices ([4-b]) :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m V^2 + mgh \right) = (T \cos(\alpha) - D) \cdot V \quad (4-34)$$

La vitesse verticale dans le repère local terrestre est donnée par :

$$\frac{dh}{dt} = V \sin(\gamma) \quad (4-35)$$

La combinaison de ( 4-35 ) et ( 4-34 ) permet de retrouver la première équation de ( 4-29 ) dans le cas où l'inclinaison latérale  $\phi$  est faible :

$$\sin(\gamma) + \frac{\dot{V}}{g} = \frac{T \cos(\alpha) - D}{mg} \quad (4-36)$$

Compte tenu de ( 4-34 ) et ( 4-33 ) le vol est effectué à énergie constante si  $\gamma_t = 0$ .

Sur les avions de transport commercial, les ordres de grandeur pour les valeurs extrêmes de la pente totale  $\gamma_t$  sont les suivants ([4-b]) :

$$-0.06 \leq \gamma_t \leq +0.06 \quad (4-37)$$

- Le facteur de charge normal, noté  $n_z$ , est la résultante sur l'axe vertical du trièdre avion du vecteur facteur de charge  $\vec{n}$ . Ce vecteur est défini de la manière suivante ([4-m]) :

$$\vec{n} = \frac{1}{g} \cdot \left( \vec{g} - \frac{d\vec{V}}{dt} \right) \quad (4-38)$$

L'angle d'incidence des avions de transport commercial étant relativement faible, le facteur de charge normal peut être estimé comme le rapport entre la portance (i.e. le poids apparent sur l'axe vertical du trièdre aérodynamique) et le poids :

$$n_z = \frac{L}{mg} \quad (4-39)$$

Sur les avions de transport modernes équipés de commande de vol électrique, c'est le facteur de charge normal (verticale avion)  $n_z$  qui est commandé par l'intermédiaire du mouvement longitudinal du mini-manche.

Sur les avions de transport commercial, les ordres de grandeur pour les valeurs extrêmes du facteur de charge  $n_z$  sont les suivants ([4-b]) :

$$1 - 0.15 \leq n_z \leq 1 + 0.15 \quad (4-40)$$

- L'inclinaison latérale  $\phi$  n'est pas commandée par le mouvement du mini-manche dans les conditions normales d'utilisation d'un avion de transport de type Airbus. En effet lorsque l'inclinaison latérale est *faible* (inférieure à 33 degrés), le mouvement latéral du mini-manche commande sur ces avions une vitesse de roulis, notée  $p_c$  ([4-g]).

Sur les avions de transport commercial, les ordres de grandeur de la vitesse de roulis  $p$  pour les valeurs extrêmes de la vitesse de roulis  $p$  sont les suivants ([4-b]) :

$$-5 \text{ deg/sec} \leq p \leq +5 \text{ deg/sec} \quad (4-41)$$

Cependant, l'inclinaison latérale  $\phi_c$  peut être commandée par des boucles de pilotage automatique qui existent sur la plupart des avions de transport modernes, comme ceux de la famille Airbus (cf. Figure 4-8).

Enfin, nous considérerons que les performances des chaînes de mesure permettent de négliger les erreurs et les retards de mesure sur la vitesse  $V$ , la pente  $\gamma$  et la cap  $\psi$ .

#### 4.4.5 Schéma fonctionnel

Les considérations précédentes nous permettent de proposer un schéma fonctionnel pour la synthèse de lois de guidage relatif :

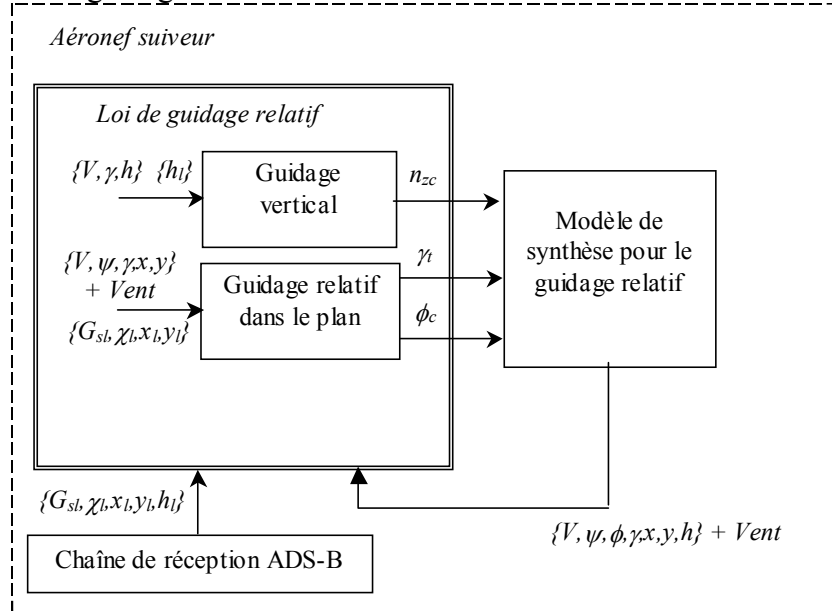


Figure 4-10 Schéma fonctionnel pour la synthèse de lois de guidage relatif

Comme indiqué sur la figure précédente, la loi de guidage relatif est composée de deux sous ensembles indépendants : le premier est dédié à la loi de guidage relatif vertical et le second est dédié à la loi de guidage relatif dans le plan :

- Les données en entrée de la loi de guidage vertical sont le niveau de vol  $h$ , la pente  $\gamma$  et la vitesse  $V$  de l'avion suiveur ainsi que le niveau de vol  $h_l$  de l'aéronef leader connue grâce au système embarqué de communications (ADS-B) ; celle ci calcule alors un facteur de charge de commande  $n_{zc}$  ;
- Les données en entrée de la loi de guidage relatif dans le plan sont la position  $\{x, y\}$  dans le plan local terrestre, la vitesse aérodynamique  $V$  et le cap  $\psi$  de l'avion suiveur ainsi que le vent. En ce qui concerne l'aéronef leader, les informations connues grâce au système embarqué de communications et utiles pour la loi de guidage relatif dans le plan sont la position  $\{x_l, y_l\}$  dans le plan local terrestre, la vitesse sol  $G_{sl}$  et la route  $\chi_l$ . La loi de guidage relatif dans le plan calcule alors une inclinaison latérale de consigne  $\phi_c$  et une pente totale  $\gamma_t$ .

### 4.5 Cinématique du mouvement relatif

Maintenant que le modèle d'avion pour le guidage est défini, nous allons nous intéresser à la cinématique du mouvement relatif que les lois de guidage devront contrôler.

#### 4.5.1 Notations

Le mouvement de l'avion par rapport au sol est caractérisé par sa position inertielle, notée  $(x, y, z)$ , par son vecteur vitesse sol, de module  $G_s$  et d'argument  $\chi$  et par sa pente notée  $\gamma$ . L'angle  $\chi$  représente l'angle de route du vecteur vitesse sol.

Nous désignerons par  $V$  la vitesse air de l'aéronef, par  $\gamma$  sa pente sol et par  $V_z$  sa vitesse verticale.

Les symboles  $(W, \psi_w)$  représentent respectivement la vitesse du vent et la direction d'où il vient (on ajoute 180 degrés pour obtenir la direction où il va) dans le plan  $(0x, 0y)$  du trièdre terrestre local.

La figure suivante représente ces différentes grandeurs :

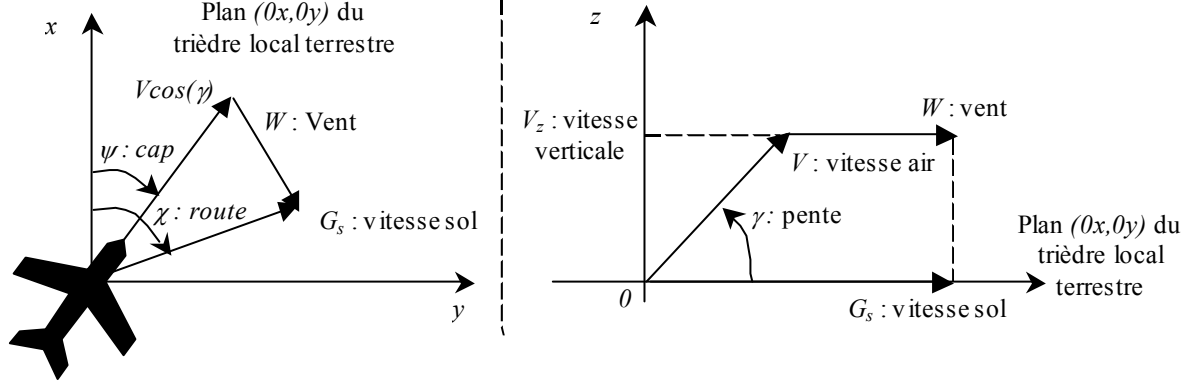


Figure 4-11 Angles de route et de cap, vitesse air, pente et vitesse sol

La matrice  $R(\chi)$  permet de passer du plan tangent au trièdre local terrestre local au plan orienté par la vitesse sol de l'avion. Il s'agit d'une matrice de rotation orthogonale (i.e.  $R^{-1} = R^T$ ) définie par :

$$R(\chi) = \begin{bmatrix} \cos(\chi) & \sin(\chi) \\ -\sin(\chi) & \cos(\chi) \end{bmatrix} \quad (4-42)$$

#### 4.5.2 Equations de navigation

Les équations de navigation expriment l'évolution du centre de gravité de l'avion par rapport au trièdre local terrestre.

Le niveau de vol  $h$  suit l'équation cinématique suivante :

$$\dot{h} = V \sin(\gamma) \approx V \cdot \gamma \quad (4-43)$$

Les équations de navigation dans le plan tangent au trièdre local terrestre s'expriment sous la forme suivante, où  $\underline{x} = (x, y)^T$  représente la position du centre de gravité de l'avion :

$$\begin{cases} \dot{x} = G_s \cos(\chi) = V \cos(\gamma) \cos(\psi) - W \cos(\psi_w) \\ \dot{y} = G_s \sin(\chi) = V \cos(\gamma) \sin(\psi) - W \sin(\psi_w) \end{cases} \quad (4-44)$$

Il vient sous forme matricielle :

$$\dot{\underline{x}} = (R(\chi))^T \cdot \begin{bmatrix} G_s \\ 0 \end{bmatrix} = (R(\psi))^T \cdot \begin{bmatrix} V \cos(\gamma) \\ 0 \end{bmatrix} + (R(\psi_w))^T \cdot \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-45)$$

Où :

$$R(\psi_w) = \begin{bmatrix} \cos(\pi + \psi_w) & \sin(\pi + \psi_w) \\ -\sin(\pi + \psi_w) & \cos(\pi + \psi_w) \end{bmatrix} \quad (4-46)$$

$$R(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} \quad (4-47)$$

### 4.5.3 Triangle des vitesses

La relation suivante exprime que la vitesse de l'avion par rapport au sol est la somme vectorielle de la vitesse de l'avion par rapport à l'air et de la vitesse du vent. De manière explicite, ( 4-45 ) conduit à :

$$\begin{cases} G_s \cos(\chi) = V \cos(\gamma) \cos(\psi) - W \cos(\psi_w) \\ G_s \sin(\chi) = V \cos(\gamma) \sin(\psi) - W \sin(\psi_w) \end{cases} \quad (4-48)$$

La manipulation de ( 4-48 ) conduit à :

$$\begin{cases} G_s(V, \psi) = \sqrt{V^2 + W^2 - 2VW \cos(\psi - \psi_w)} \\ \chi(V, \psi) = \arctan\left(\frac{V \sin(\psi) - W \sin(\psi_w)}{V \cos(\psi) - W \cos(\psi_w)}\right) \end{cases} \quad (4-49)$$

L'inversion de ( 4-49 ) conduit à :

$$\begin{cases} V(G_s, \chi) = \sqrt{G_s^2 + W^2 + 2G_s W \cos(\chi - \psi_w)} \\ \psi(G_s, \chi) = \arctan\left(\frac{G_s \sin(\chi) + W \sin(\psi_w)}{G_s \cos(\chi) + W \cos(\psi_w)}\right) \end{cases} \quad (4-50)$$

La dérivée des relations ( 4-49 ) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{G}_s \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \Delta(V, \psi) \cdot \begin{bmatrix} \dot{V} \\ V\dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4-51)$$

Où :

$$\Delta(V, \psi) = \frac{1}{G_s(V, \psi)} \begin{bmatrix} (V - W \cos(\psi - \psi_w)) & W \sin(\psi - \psi_w) \\ -W \sin(\psi - \psi_w) / G_s & (V - W \cos(\psi - \psi_w)) / G_s \end{bmatrix} \quad (4-52)$$

La matrice  $\Delta(V, \psi)$  est une matrice inversible tant que la vitesse sol n'est pas nulle. Son déterminant est unitaire.

### 4.5.4 Cinématique du mouvement relatif dans le repère lié à l'avion suiveur

Soit  $\underline{e}_s$  le vecteur désignant la position relative de position de consigne (i.e. la position de l'avion leader à l'instant courant, ou la position de l'avion leader quelques minutes avant l'instant courant) par rapport à l'avion suiveur, exprimé dans le plan  $(0x, 0y)$  du trièdre lié à l'avion suiveur :

$$\underline{e}_s = [tk_s \quad xtk_s]^T \quad (4-53)$$

- $tk_s$  représente l'abscisse de la position de consigne relativement au repère lié à l'avion suiveur, mesurée le long de l'axe *parallèle* à la vitesse sol de l'avion suiveur : c'est *l'écart longitudinal* ;
- $xtk_s$  représente l'ordonnée de la position de consigne relativement au repère lié à l'avion suiveur, mesurée le long de l'axe *perpendiculaire* à la vitesse sol de l'avion suiveur : c'est *l'écart latéral* ;

La figure suivante représente les grandeurs  $tk_s$  et  $xtk_s$  dans le plan horizontal lié au trièdre terrestre local :

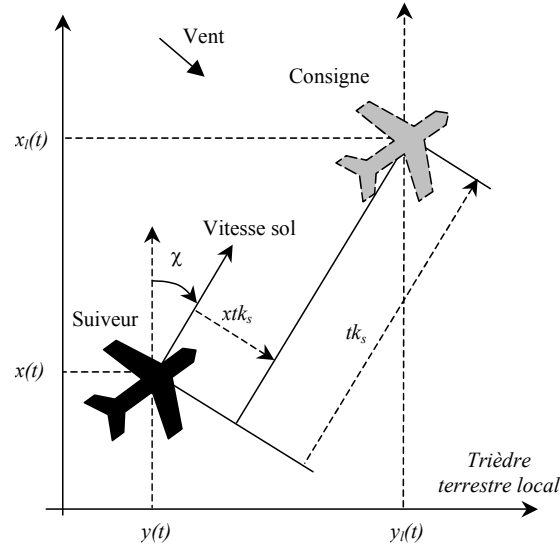


Figure 4-12 Position relative de la position de consigne par rapport à l'avion suiveur, exprimé dans le trièdre lié à la vitesse sol de l'avion suiveur

Le vecteur  $\underline{e}_s$  a l'expression suivante, où la matrice  $R(\chi)$  est définie en ( 4-42 ) :

$$\underline{e}_s = R(\chi) \cdot (\underline{x}_l - \underline{x}) \quad (4-54)$$

Après dérivation par rapport au temps, il vient :

$$\dot{\underline{e}}_s = R(\chi) \cdot (\dot{\underline{x}}_l - \dot{\underline{x}}) + \dot{R}(\chi) \cdot (\underline{x}_l - \underline{x}) \quad (4-55)$$

Après avoir noté que :

$$\begin{cases} R(\chi_l) \cdot \dot{\underline{x}}_l = [G_{sl} & 0]^T \\ R(\chi) \cdot \dot{\underline{x}} = [G_s & 0]^T \end{cases} \quad (4-56)$$

et calculé l'expression de  $\dot{R}(\chi)$ , où  $J$  est une matrice antisymétrique (i.e.  $J^T = -J$ ) :

$$\dot{R}(\chi) = J(\dot{\chi}) \cdot R(\chi) = R(\chi) \cdot J(\dot{\chi}) \quad (4-57)$$

$$J(\dot{\chi}) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\chi} \\ -\dot{\chi} & 0 \end{bmatrix} \quad (4-58)$$

Nous obtenons finalement :

$$\dot{\underline{e}}_s = J(\dot{\chi}) \cdot \underline{e}_s + \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) \quad (4-59)$$

$$\begin{cases} \underline{\tau} = [G_s & \chi]^T \\ \underline{\tau}_l = [G_{sl} & \chi_l]^T \end{cases} \quad (4-60)$$

$$\underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) = R(\chi) \cdot (R(\chi_l))^T \cdot \begin{bmatrix} G_{sl} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{sl} \cdot \cos(\chi - \chi_l) - G_s \\ -G_{sl} \cdot \sin(\chi - \chi_l) \end{bmatrix} \quad (4-61)$$

## 4.6 Equations d'état du mouvement relatif

Rappelons dans un premier temps que le modèle d'avion pour la synthèse des lois de guidage relatif développé précédemment est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{V} \approx g(\gamma_t - \gamma) \\ \dot{\gamma} \approx \frac{g}{V}(n_z - 1) \\ V\dot{\psi} \approx g\phi \end{cases} \quad (4-62)$$

D'autre part, désignons par  $\underline{\tau}$  le vecteur regroupant la vitesse sol  $G_s$  de l'avion et sa route  $\chi$ . La dynamique du vecteur  $\underline{\tau} = [G_s \ \chi]^T$  est obtenue en combinant ( 4-51 ) ainsi que la première et la dernière équations de ( 4-62 ). La pente  $\gamma$  et le facteur de charge  $n_z$  étant considérés comme des paramètres exogènes, il vient :

$$\dot{\underline{\tau}} = \begin{bmatrix} \dot{G}_s \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \Delta(V, \psi) \cdot \begin{bmatrix} \dot{V} \\ V\dot{\psi} \end{bmatrix} = g \cdot \Delta(V, \psi) \cdot \begin{bmatrix} -\gamma & 0 \end{bmatrix}^T + \underline{u} \quad (4-63)$$

$$\underline{u} = [\gamma_t \ \phi]^T \quad (4-64)$$

Par la suite, nous choisirons comme entrées équivalentes au vecteur  $\underline{u}$  le vecteur  $\underline{u}_{eq}$  défini par :

$$\underline{u}_{eq} = \begin{bmatrix} \dot{G}_s \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} \quad (4-65)$$

L'utilisation de l'entrée équivalente  $\underline{u}_{eq}$  permettra d'alléger les écritures lors de la synthèse des lois de guidage. Le passage de  $\underline{u}_{eq}$  à  $\underline{u}$  est obtenu en inversant la relation ( 4-63 ) :

$$\underline{u} = \frac{1}{g} \Delta(V, \psi)^{-1} \underline{u}_{eq} + [\gamma \ 0]^T \quad (4-66)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma_t \\ \phi \end{bmatrix} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} (V - W \cos(\psi - \psi_w)) & -W \sin(\psi - \psi_w) \\ W \sin(\psi - \psi_w)/G_s & (V - W \cos(\psi - \psi_w))/G_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{G}_s \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, les équations d'état retenues pour la synthèse sont les suivantes, où la matrice  $J(\dot{\chi})$  est définie en ( 4-58 ) et le champ de vecteurs  $\underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)$  en ( 4-61 ). Le vecteur  $\underline{\tau}_l = [G_{sl} \ \chi_l]^T$  est un vecteur exogène contenant la vitesse sol et l'angle de route de la trajectoire de consigne :

$$\begin{cases} \dot{\underline{e}}_s = J(\dot{\chi}) \cdot \underline{e}_s + \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) \\ \dot{\underline{\tau}} = \underline{u}_{eq} \end{cases} \quad (4-67)$$

$$\begin{cases} \underline{e}_s = [tk_s \ xtk_s]^T \\ \underline{\tau} = [G_s \ \chi]^T \end{cases} \quad (4-68)$$

Pour un guidage relatif dans les trois dimensions, il faut rajouter à ce modèle d'état l'équation ( 4-43 ) et la deuxième équation du modèle de synthèse ( 4-32 ) :

$$\begin{cases} \dot{h} \approx V \cdot \gamma \\ \dot{\gamma} \approx \frac{g}{V}(n_z - 1) \end{cases} \quad (4-69)$$

## 4.7 Conclusion

Le problème du guidage relatif entre aéronefs est un problème ayant trait au contrôle de la trajectoire suivie par le centre de gravité de l'aéronef. La fonction de guidage relatif sera

donc placée en amont des boucles de pilotage qui permettent de fixer la position de l'avion par rapport à son centre de gravité.

Pour établir les équations d'état du mouvement relatif, le principe de la commande à plusieurs échelles de temps a été adopté : il consiste à considérer que la boucle de pilotage présente un temps de réponse très faible vis à vis de la dynamique du guidage relatif. L'intérêt de cette approche est de diminuer la dimension du problème de commande (principe de superposition des boucles d'asservissement) et de séparer les modules de guidage et de pilotage afin d'assurer une plus grande modularité pour les fonctions de guidage possibles dans un avion moderne.

Pour mener à bien cette approche, les modes propres de la boucle lente doivent présenter une pulsation naturelle nettement inférieure à ceux de la boucle rapide. Ces considérations vont nous amener à établir des spécifications pour les modes propres de la loi de guidage relatif dans le chapitre suivant.

## 4.8 Références bibliographiques

- [4-a] *Euler Leonhard, 1707-1783, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitane*
- [4-b] *Eurocontrol Experimental Centre, User Manual for the Base of Aircraft Data (BADA) revision 3.5, EEC note No. 11/03, July 2003*
- [4-c] *Faleiro L., Lambregts A., Analysis and Tuning of a Total Energy Control System Control Law using Eigenstructure Assignment, Special Issue on Flight Control, Journal of Aerospace Science and Technology, Issue 3, pp. 127-140, 1999*
- [4-d] *George L., Vernet J. F., Wanner J. C., La mécanique du vol, performances des avions et des engins, Editions Dunod, 1969*
- [4-e] *Grossin J., Commande automatique du vol, cours ENSICA, 1981*
- [4-f] *Lévine J., Analyse et commande des systèmes non linéaires, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2004*
- [4-g] *Ménard P., Commande automatique du vol, Présentation ENAC, Novembre 2001*
- [4-h] *Mora-Camino F., Avionique Tome 2, cours pour navigants Cours ENAC, 1995*
- [4-i] *Nelson R. C., Flight Stability and Automatic Control, McGraw-Hill, 2nd edition, 1997*
- [4-j] *Newton Isaac, 1643-1727, Philosophia Naturalis Principia Mathematica*
- [4-k] *Stevens B. L., Lewis F. L., Aircraft control and simulation, Wiley Interscience, 1992*
- [4-l] *Tischler M., Advances in flight control, Taylor & Francis, 1996*
- [4-m] *Verrière J., Mécanique du vol - Performances, Tome 1, Chapitre 5, Cours ENSICA, 1997*
- [4-n] *Vinh N., Flight mechanics of high performance aircraft, Cambridge university press, 1993*

---

## Chapitre 5

### Spécification des modes propres – Loi de guidage de type proportionnelle et dérivée

---

#### 5.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de proposer des spécifications pour les modes propres de la loi de guidage relatif. Ces spécifications seront basées sur les conditions permettant de satisfaire le principe de la commande à plusieurs échelles de temps. L'intérêt de cette approche est de séparer les fonctions de guidage et de pilotage ce qui permet d'assurer une plus grande modularité entre ces fonctions. En effet, les modèles d'état des fonctions de pilotage présentent des modes propres que nous connaissons mal et qui varient suivant le type et la configuration de l'avion. La commande à plusieurs échelles de temps est une manière de synthétiser des lois de guidage robustes vis-à-vis des incertitudes sur les fonctions de pilotage.

Dans un second temps, deux lois de guidage relatif de type proportionnelle et dérivée et basées sur la linéarisation des équations d'état (approche par la linéarisation tangente) seront développées : la première permettra de gérer le mouvement relatif vertical tandis que la seconde permettra de gérer le mouvement relatif dans le plan horizontal. L'indépendance entre le guidage relatif vertical et dans le plan permet d'assurer une plus grande sécurité du vol. De plus, des lois de guidage permettant de capturer un niveau de vol existent déjà à bord de la plupart des avions de transport commercial.

Enfin, un scénario de test sera développé afin d'illustrer les propriétés des lois de guidage relatif qui ont été développées.

#### 5.2 Spécifications des modes propres

##### 5.2.1 Dynamique attendue des sorties et choix de conception

Rappelons que le modèle de l'avion suiveur pour la synthèse de lois de guidage relatif développé au chapitre précédent est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{V} \approx g(\gamma_t - \gamma) \\ \dot{\gamma} \approx \frac{g}{V}(n_z - 1) \\ \dot{\psi} \approx \frac{g}{V}\phi \end{cases} \quad (5-1)$$

La relation ( 5-1 ) exprime que le vecteur de commande  $(\gamma_t, \phi, n_z)$  du modèle de synthèse retenu agit directement sur les taux de variation des différentes composantes  $(\dot{V}, V\dot{\psi}, V\dot{\gamma})$ .



second ordre avec une pulsation naturelle de l'ordre de 0,2 rad/sec et un coefficient d'amortissement de l'ordre de 0.8 ([5-b]).

Un exemple de spécifications de la pulsation naturelle et du coefficient d'amortissement pour les modes propres du guidage longitudinal relatif est donc le suivant (cf. Figure 5-1) :

$$\begin{cases} w_{tk} \approx \frac{0.2}{10} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ rad/sec} \\ m_{tk} \approx 0.8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_{tk}^2 \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-2} \\ m_{tk} w_{tk} = 16 \cdot 10^{-3} \text{ sec}^{-1} \end{cases} \quad (5-3)$$

La consigne de vitesse aérodynamique (*TAS : True Air Speed*)  $V_c$  s'obtient alors à partir de la vitesse aérodynamique courante  $V$  et de la pente totale  $\gamma_t$  par la relation suivante :

$$V_c = V + \frac{g}{w_{tk}} \cdot \gamma_t \quad (5-4)$$

Cette consigne de vitesse aérodynamique est ensuite convertie en consigne de vitesse conventionnelle (*CAS : Calibrated Air Speed*). L'annexe B contient de plus amples informations sur les différentes vitesses utilisées en aéronautique.

La justification de la relation ( 5-4 ) est la suivante : nous avons vu que l'automanette en mode de capture de vitesse est approchée par un système second ordre qui présente des modes propres dépendants des paramètres  $w_0$  et  $m$  relativement incertains :

$$\ddot{V}^* = -2mw_0\dot{V}^* - w_0^2(V^* - V_c) \quad (5-5)$$

Afin d'être robuste vis-à-vis des incertitudes sur  $w_0$  et  $m$ , un modèle de vitesse de consigne qui approche le régime permanent de l'automanette en mode de capture de vitesse est créé :

$$\dot{V}_c = w_{tk}(V - V_c) + g \cdot \gamma_t \quad (5-6)$$

Il vient sous forme matricielle :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} V^* \\ \dot{V}^* \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -w_0^2 & -2mw_0 & w_0^2 \\ 0 & 0 & -w_{tk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V^* \\ \dot{V}^* \\ V_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{tk}V + g \cdot \gamma_t \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

Les valeurs des modes propres de ce système du troisième ordre sont données par la résolution en  $s$  de l'équation suivante :

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ w_0^2 & s + 2mw_0 & -w_0^2 \\ 0 & 0 & s + w_{tk} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (s + w_{tk})(s^2 + 2mw_0s + w_0^2) = 0 \quad (5-8)$$

En choisissant  $w_{tk}/(m \cdot w_0)$  d'ordre  $\varepsilon$  (ici, 1/10), nous pouvons alors faire l'approximation suivante :  $V^*$  converge vite vers le régime permanent  $V_c$ , de telle sorte que, sur l'échelle de temps lente :

$$\dot{V}^* \approx \dot{V}_c \approx 0 \quad (5-9)$$

En reportant cette égalité dans ( 5-6 ), l'expression ( 5-4 ) est obtenue.

### 5.2.3 Modes propres du guidage latéral relatif

Une analyse détaillée de la dynamique de l'écart latéral  $x_{tk_s}$  montre que sa dérivée seconde par rapport au temps dépend de l'inclinaison latérale  $\phi$ , (cf. le chapitre précédent) et non de la vitesse de roulis  $p$ . Le passage de l'inclinaison latérale de consigne à la vitesse de roulis de consigne se fera simplement par un filtre du premier ordre dont la pulsation propre est dix

fois plus faible que celle de la fonction de pilotage de la vitesse de roulis afin de respecter le découplage entre échelle de temps lente et rapide :

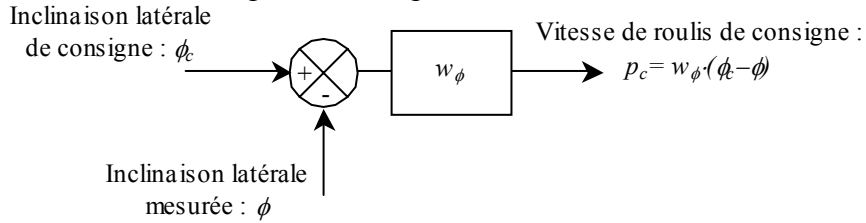


Figure 5-2 Passage de l'inclinaison latérale de consigne à la vitesse de roulis de consigne

Sur les avions de transport modernes de type Airbus A320, la boucle de pilotage du taux de roulis peut se présenter en première approximation comme un système du premier ordre avec un temps de réponse de l'ordre de 3 secondes (soit une constante de temps de l'ordre de 1 seconde pour le filtre équivalent du premier ordre, soit un mode propre d'environ 1 rad/sec ([5-b])). Il vient :

$$w_\phi \approx \frac{1}{10} \approx 0.1 \text{ rad/sec} \quad (5-10)$$

Les modes propres concernant le guidage latéral relatif (capture de l'ordonnée  $x_{tk_s}$ ) sont alors choisis à une pulsation naturelle  $w_{x_{tk}}$  nettement plus faible, par exemple cinq fois plus faible, que celle de la fonction de pilotage de l'inclinaison latérale, et avec un coefficient d'amortissement  $m_{x_{tk}}$  égal à 0.8.

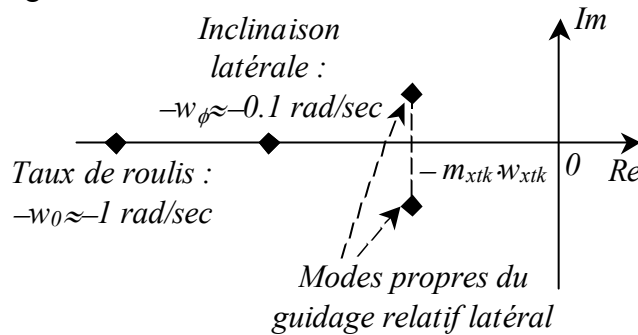


Figure 5-3 Modes propres du guidage relatif latéral

Compte tenu des considérations précédentes sur les modes propres de la boucle de pilotage du taux de roulis sur les avions de transport modernes de type Airbus A320, des spécifications possibles pour la pulsation naturelle et le coefficient d'amortissement du guidage latéral relatif sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} w_{x_{tk}} \approx \frac{w_\phi}{5} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ rad/sec} \\ m_{x_{tk}} \approx 0.8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_{x_{tk}}^2 \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-2} \\ m_{x_{tk}} w_{x_{tk}} \approx 16 \cdot 10^{-3} \text{ sec}^{-1} \end{cases} \quad (5-11)$$

La comparaison de ( 5-3 ) et ( 5-11 ) montre que les modes propres concernant les guidages relatifs longitudinaux et latéraux sont quasiment identiques.

## 5.2.4 Modes propres du guidage vertical

Enfin, les modes propres concernant le guidage relatif vertical (capture du niveau de vol  $h$ ) seront choisis à une pulsation naturelle  $w_h$  au moins dix fois plus faible que celle de la fonction de pilotage du facteur de charge, et avec un coefficient d'amortissement  $m_h$  égal à 0.8 :

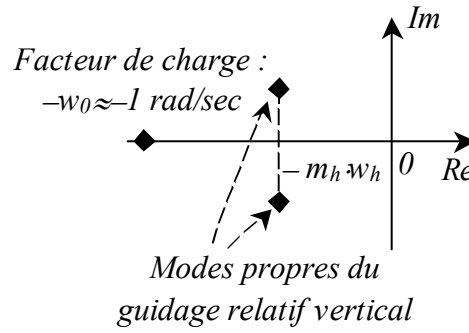


Figure 5-4 Modes propres du guidage vertical

Sur les avions de transport moderne de type Airbus A320, la boucle de pilotage en facteur de charge se présente en première approximation comme un système du premier ordre avec un temps de réponse de l'ordre de 3 secondes (soit une constante de temps de 1 seconde du filtre équivalent du premier ordre, soit un mode propre à 1 rad/sec, [5-b]). Un exemple de spécifications de la pulsation naturelle et du coefficient d'amortissement pour les modes propres du guidage vertical est donc le suivant :

$$\begin{cases} w_h \approx \frac{1}{10} \approx 0.1 \text{ rad/sec} \\ m_h \approx 0.8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_h^2 \approx 10^{-2} \text{ sec}^{-2} \\ m_h w_h \approx 8 \cdot 10^{-2} \text{ sec}^{-1} \end{cases} \quad (5-12)$$

### 5.2.5 Environnement de simulation

Les résultats présentés dans le présent chapitre et les chapitres qui suivent sont basés sur un modèle élémentaire d'évaluation, conforme aux ordres de grandeurs des lois de pilotage du taux de roulis et du facteur de charge et de l'automanette en mode capture de vitesse pour un avion de type Airbus A320 présentés au paragraphe 5.2.

Ces résultats ayant été satisfaisants, des tests ont été réalisés sur deux simulateurs d'évaluation du CENA qui disposent d'interfaces pour la navigation et de pilotage (*ND*, *PFD*, *MCDU*) : d'une part le simulateur léger *TOTOR* ([5-d]) modélisant plusieurs types d'avions à partir de tables de performances pré-enregistrées ([4-a]) et d'autre part le simulateur *SAM* ([5-c]) qui modélise de manière plus réaliste un Airbus A300 :

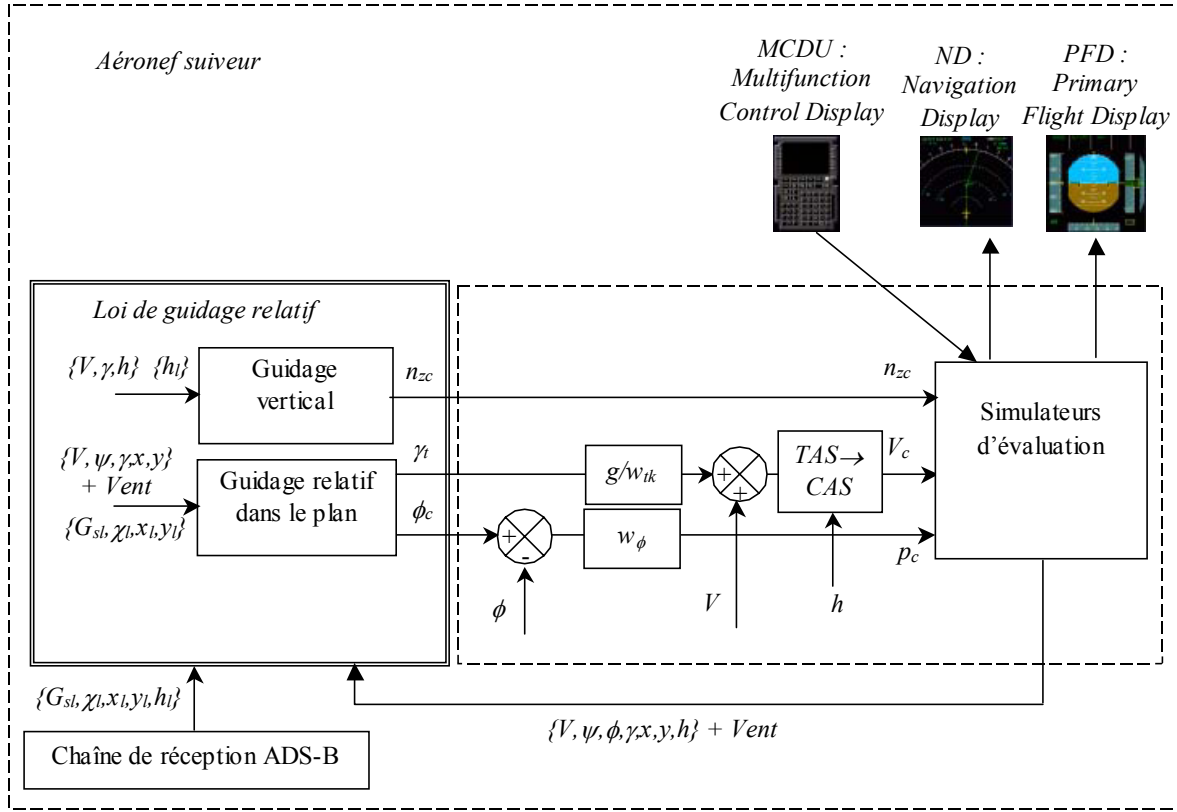


Figure 5-5 Environnement de simulation pour l'évaluation de lois de guidage relatif

### 5.3 Loi de guidage vertical

Rappelons que nous avons choisi de capturer le niveau de vol  $h$  de la cible plutôt que l'écart  $\Delta h$  entre le niveau de vol de la cible et celui de l'aéronef suiveur en vue d'assurer une plus grande sécurité du vol (découplage entre les mouvements verticaux et horizontaux) et parce des lois de guidage permettant de capturer un niveau de vol existant déjà à bord de la plupart des avions de transport commercial.

Le niveau de vol  $h$  suit l'équation cinématique suivante :

$$\dot{h} = V \sin(\gamma) \approx V \cdot \gamma \quad (5-13)$$

De plus, le modèle de synthèse décrit au chapitre précédent permet de relier la dérivée par rapport au temps de la pente  $\gamma$  au facteur de charge  $n_z$  :

$$\dot{\gamma} \approx \frac{g}{V} (n_z - 1) \quad (5-14)$$

Pour synthétiser une loi de guidage vertical, nous allons nous inspirer de la technique de la commande par mode glissant décrite au chapitre III. La surface de glissement est définie par la relation suivante, où  $\lambda$  est une constante réelle positive et  $h_c$  désigne le niveau de vol désirée (celle du leader ou celle choisie par l'équipage):

$$\sigma(h, \dot{h}) = \dot{h} + \lambda \cdot (h - h_c) \quad (5-15)$$

L'objectif de la loi de commande est de faire tendre  $\sigma$  vers zéro, de telle sorte que  $h$  tende vers  $h_l$  en suivant une dynamique du premier ordre.

En accord avec la commande par régime glissant, la fonction de Lyapunov candidate est choisie sous la forme suivante :

$$W(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^2 = \frac{1}{2} (\dot{h} + \lambda \cdot (h - h_c))^2 \quad (5-16)$$

Il vient après dérivation :

$$\dot{W}(\sigma) = (\dot{h} + \lambda \cdot (h - h_c)) \cdot (\ddot{h} + \lambda \cdot (\dot{h} - \dot{h}_c)) \quad (5-17)$$

soit, en utilisant ( 4-43 ) et ( 5-14 ) :

$$\dot{W}(\sigma) = (\gamma \cdot V + \lambda \cdot (h - h_c)) \cdot (g(n_z - 1) + \dot{V} \cdot \gamma + \lambda \cdot (\gamma \cdot V - \dot{h}_c)) \quad (5-18)$$

Le terme  $\dot{V} \cdot \gamma - \lambda \cdot \dot{h}_c$ , en général très faible, est considéré comme une *perturbation*. De plus, ce terme tend vers zéro lorsque les avions suiveur et suiveur stabilisent vitesse et niveau de vol. Nous les négligerons donc par la suite. L'expression suivante de la quantité  $g(n_z - 1)$  permet de rendre la partie *non perturbée* de ( 5-18 ) négative, où  $k$  est une constante réelle positive :

$$g(n_z - 1) = -(\lambda + k) \cdot \gamma \cdot V - \lambda \cdot k(h - h_c) \Rightarrow \dot{W}(\sigma) = -k \cdot (\gamma \cdot V + \lambda \cdot (h - h_c))^2 < 0 \quad (5-19)$$

Posons :

$$\begin{cases} \lambda_p = k \cdot \lambda \\ \lambda_d = k + \lambda \end{cases} \quad (5-20)$$

La loi de guidage vertical s'exprime bien alors sous la forme d'une loi de type proportionnelle et dérivée :

$$g(n_z - 1) = -\lambda_d \cdot \gamma \cdot V - \lambda_p \cdot (h - h_c) \quad (5-21)$$

Dans ces conditions, et toujours en négligeant le terme  $\dot{V} \cdot \gamma - \lambda \cdot \dot{h}_c$ , la dynamique du niveau de vol  $h$  est donnée par une équation différentielle linéaire du second ordre :

$$\ddot{h} \approx V\dot{\gamma} = g(n_z - 1) = -\lambda_d \cdot \dot{h} - \lambda_p \cdot (h - h_c) \quad (5-22)$$

Compte tenu des considérations sur les échelles de temps des boucles de pilotage et de guidage développées précédemment, nous prendrons :

$$\begin{cases} \lambda_d = m_h w_h \approx 8 \cdot 10^{-2} \text{ sec}^{-1} \\ \lambda_p = w_h^2 \approx 10^{-2} \text{ sec}^{-2} \end{cases} \quad (5-23)$$

## 5.4 Loi de guidage relatif dans le plan de type proportionnelle et dérivée

### 5.4.1 Linéarisation du modèle d'état

D'une manière générale, l'approche par la méthode du linéarisé tangent consiste à faire un développement limité au premier ordre du modèle de synthèse  $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$  autour du point d'équilibre  $(\underline{x}_e, \underline{u}_e)$  défini par  $\underline{f}(\underline{x}_e, \underline{u}_e) = \underline{0}$ . En posant :

$$\begin{cases} \tilde{\underline{x}} = \underline{x} - \underline{x}_e \\ \tilde{\underline{u}} = \underline{u} - \underline{u}_e \end{cases} \quad (5-24)$$

Il vient :

$$\dot{\tilde{\underline{x}}} = A \cdot \tilde{\underline{x}} + B \cdot \tilde{\underline{u}} \quad (5-25)$$

où :

$$\begin{cases} A = \frac{\partial f(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{x}^T} \bigg|_{\underline{x}_e, \underline{u}_e} \\ B = \frac{\partial f(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{u}^T} \bigg|_{\underline{x}_e, \underline{u}_e} \end{cases} \quad (5-26)$$

L'intérêt de cette approche est de faire apparaître un modèle d'état stationnaire et affine en l'état  $\underline{\tilde{x}}$  et en la commande  $\underline{\tilde{u}}$ .

### 5.4.2 Application au guidage relatif

Rappelons dans un premier temps le modèle d'état pour la synthèse de lois de guidage relatif dans le plan développé au chapitre précédent :

$$\begin{cases} \dot{\underline{e}}_s = J(\dot{\chi}) \cdot \underline{e}_s + \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) \\ \dot{\underline{\tau}} = \underline{u}_{eq} \end{cases} \quad (5-27)$$

$$\begin{cases} \underline{e}_s = [tk_s \quad xtk_s]^T \\ \underline{\tau} = [G_s \quad \chi]^T \end{cases} \quad (5-28)$$

$$J(\dot{\chi}) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\chi} \\ -\dot{\chi} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-29)$$

$$\underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) = R(\chi) \cdot (R(\chi_l))^T \cdot \begin{bmatrix} G_{sl} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{sl} \cdot \cos(\chi - \chi_l) - G_s \\ -G_{sl} \cdot \sin(\chi - \chi_l) \end{bmatrix} \quad (5-30)$$

Nous allons maintenant effectuer la linéarisation de ces équations autour du point d'équilibre  $\underline{e}_s = \underline{0}$  et  $\underline{u} = (\gamma, 0)$ . Notons qu'au point d'équilibre il est nécessaire que  $\underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) = \underline{0}$  pour que la dérivée de  $\underline{e}_s$  par rapport au temps soit nulle. Vue la structure de la fonction  $\underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)$ , cela implique  $\underline{\tau} = \underline{\tau}_l$ . Par conséquent, le leader et le suiveur ont la même vitesse air et le même cap (i.e.  $V = V_l$  et  $\psi = \psi_l$ ) au point d'équilibre lorsque le vent subit par l'avion suiveur et par l'avion leader est le même. Le modèle d'état linéarisé est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_1 = A_{12}(\underline{\tau}_l) \cdot \underline{x}_2 \\ \dot{\underline{x}}_2 = B_2(\underline{\tau}_w, \underline{\tau}_l) \cdot \underline{\tilde{u}} \end{cases} \quad (5-31)$$

où :

$$\begin{cases} \underline{\tau}_w = [W \quad \psi_w]^T \\ \underline{\tau}_l = [G_{sl} \quad \chi_l]^T \end{cases} \quad (5-32)$$

$$\begin{cases} \underline{x}_1 = \underline{e}_s = [tk_s \quad xtk_s]^T \\ \underline{x}_2 = \underline{\tau} - \underline{\tau}_l = [G_s - G_{sl} \quad \chi - \chi_l]^T \\ \underline{\tilde{u}} = \underline{u} - [\gamma \quad 0]^T = [\gamma_t - \gamma \quad \phi]^T \end{cases} \quad (5-33)$$

et

$$A_{12}(\underline{\tau}_l) = \frac{\partial \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}^T} \bigg|_{\underline{\tau}=\underline{\tau}_l} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -G_{sl} \end{bmatrix} \quad (5-34)$$

$$B_2(\underline{\tau}_w, \underline{\tau}_l) = \frac{g}{G_{sl}} \begin{bmatrix} (V_l - W \cos(\psi_l - \psi_w)) & W \sin(\psi_l - \psi_w) \\ -W \sin(\psi_l - \psi_w) & (V_l - W \cos(\psi_l - \psi_w)) / G_{sl} \end{bmatrix} \quad (5-35)$$

où, sous forme plus compacte :

$$\dot{\underline{x}} = A(\underline{\tau}_l) \cdot \underline{x} + B(\underline{\tau}_w, \underline{\tau}_l) \cdot \underline{\tilde{u}} \quad (5-36)$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (5-37)$$

$$A(\underline{\tau}_l) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & A_{12}(\underline{\tau}_l) \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (5-38)$$

$$B(\underline{\tau}_w, \underline{\tau}_l) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ B_2(\underline{\tau}_w, \underline{\tau}_l) \end{bmatrix} \quad (5-39)$$

Toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  sont nulles : lorsque les conditions initiales ne sont pas nulles, ce qui est le cas général, il y a instabilité du système en boucle ouverte.

Une manière de commander le système ( 5-31 ) est d'utiliser la commande modale. En dérivant une seconde fois par rapport au temps l'état  $\underline{x}_l$ , il vient :

$$\ddot{\underline{x}}_1 = A_{12}(\underline{\tau}_l) \cdot B_2(\underline{\tau}_w, \underline{\tau}_l) \cdot \underline{\tilde{u}} \quad (5-40)$$

où :

$$A_{12}(\underline{\tau}_l) \cdot B_2(\underline{\tau}_w, \underline{\tau}_l) = \frac{-g}{G_{sl}} \begin{bmatrix} (V_l - W \cos(\psi_l - \psi_w)) & W \sin(\psi_l - \psi_w) \\ -W \sin(\psi_l - \psi_w) & (V_l - W \cos(\psi_l - \psi_w)) \end{bmatrix} \quad (5-41)$$

Notons  $A_p$  et  $A_d$  deux matrices symétriques définies positives. La commande  $\underline{\tilde{u}}$  est alors calculée en imposant à  $\ddot{\underline{x}}_1$  une dynamique de la forme suivante :

$$\ddot{\underline{x}}_1 = -A_p \cdot \underline{x}_1 - A_d \cdot \dot{\underline{x}}_1 \quad (5-42)$$

Il vient, en identifiant ( 5-40 ) et ( 5-42 ) :

$$\underline{\tilde{u}} = -(A_{12}(\underline{\tau}_l) \cdot B_2(\underline{\tau}_w, \underline{\tau}_l))^{-1} \cdot (A_p \cdot \underline{x}_1 + A_d \cdot \dot{\underline{x}}_1) \quad (5-43)$$

où :

$$-(A_{12}(\underline{\tau}_l) \cdot B_2(\underline{\tau}_w, \underline{\tau}_l))^{-1} = \frac{1}{g \cdot G_{sl}} \begin{bmatrix} (V_l - W \cos(\psi_l - \psi_w)) & -W \sin(\psi_l - \psi_w) \\ W \sin(\psi_l - \psi_w) & (V_l - W \cos(\psi_l - \psi_w)) \end{bmatrix} \quad (5-44)$$

Nous obtenons pour l'entrée  $\underline{\tilde{u}}$  une commande de type proportionnelle et dérivée.

Comme la vitesse air  $V_l$  du leader et son cap  $\psi_l$  ne sont pas connus, ces quantités sont calculées à partir de la vitesse sol  $G_{sl}$  et de la route  $\chi_l$  du leader par les relations relatives au triangle des vitesses et développées au chapitre précédent :

$$\begin{cases} V(G_s, \chi) = \sqrt{G_s^2 + W^2 + 2G_s W \cos(\chi - \psi_w)} \\ \psi(G_s, \chi) = \arctan\left(\frac{G_s \sin(\chi) + W \sin(\psi_w)}{G_s \cos(\chi) + W \cos(\psi_w)}\right) \end{cases} \quad (5-45)$$

Ces relations nécessitent la connaissance de la vitesse  $W_l$  et de la direction  $\psi_{wl}$  du vent rencontré par le leader. Comme ces paramètres sont inconnus, ils sont remplacés par la

vitesse  $W$  et de la direction  $\psi_w$  du vent rencontré par le suiveur. Lorsque cette estimation du vent rencontré par le leader est erronée, alors les coefficients de la matrice  $(A_{12}(\underline{\tau}_l) \cdot B_2(\underline{\tau}_w, \underline{\tau}_l))^{-1}$  sont erronés. Comme ces termes sont multipliés par l'erreur sur la position relative et sa dérivée, ils modifient la manière dont la position relative converge vers zéro, mais n'affectent pas la convergence tant que le signe de  $V_l - W \cos(\psi_l - \psi_w)$  et  $W \sin(\psi_l - \psi_w)$  n'est pas modifié par l'estimation du vent. La loi de commande est donc relativement insensible aux erreurs sur l'estimation du vent rencontré par le leader.

Par la suite, les matrices  $A_p$  et  $A_d$  sont des matrices diagonales de la forme suivante :

$$\begin{cases} A_p = \text{diag}(\lambda_{p1}, \lambda_{p2}) \\ A_d = \text{diag}(\lambda_{d1}, \lambda_{d2}) \end{cases} \quad (5-46)$$

### 5.4.3 Cas particulier du vent nul

Notons que dans le cas où il n'y a pas de vent (i.e.  $W=0$ ), la relation ( 5-44 ) se réduit à :

$$W = 0 \Rightarrow G_s = V \Rightarrow -(A_{12}(\underline{\tau}_l) \cdot B_2(\underline{\tau}_w, \underline{\tau}_l))^{-1} = \frac{1}{g} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-47)$$

Ainsi, dans le cas où il n'y a pas de vent, la commande ( 5-43 ) se réduit à :

$$\underline{\tilde{u}} = \begin{bmatrix} \gamma_t - \gamma \\ \phi \end{bmatrix} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} \lambda_{p1} t k_s + \lambda_{d1} \dot{t} k_s \\ \lambda_{p2} x t k_s + \lambda_{d2} x \dot{t} k_s \end{bmatrix} \quad (5-48)$$

L'expression de  $\dot{t} k_s$  et  $x \dot{t} k_s$  est obtenue à partir la première équation de ( 5-31 ) et de ( 5-34 ). Il vient par conséquent :

$$\underline{\tilde{u}} = \begin{bmatrix} \gamma_t - \gamma \\ \phi \end{bmatrix} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} \lambda_{p1} t k_s + \lambda_{d1} (V_l - V) \\ \lambda_{p2} x t k_s + \lambda_{d2} V_l (\psi_l - \psi) \end{bmatrix} \quad (5-49)$$

Les matrices de gains  $A_p$  et  $A_d$  ont les valeurs suivantes, qui ont été justifiées au chapitre précédent (découplage entre boucle lente et boucle rapide) :

$$\begin{cases} A_p = \text{diag}(\lambda_{p1}, \lambda_{p2}) = \text{diag}(w_{tk}^2, w_{xtk}^2) = \text{diag}(4 \cdot 10^{-4}, 4 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-2}) \text{sec}^{-2} \\ A_d = \text{diag}(\lambda_{d1}, \lambda_{d2}) = \text{diag}(m_{tk} w_{tk}, m_{xtk} w_{xtk}) = \text{diag}(16 \cdot 10^{-3}, 16 \cdot 10^{-3}) \text{sec}^{-1} \end{cases} \quad (5-50)$$

Notons de plus qu'en utilisant la commande équivalente définie par :

$$\underline{u}_{eq} = \begin{bmatrix} \dot{G}_s & \dot{\chi} \end{bmatrix}^T \quad (5-51)$$

il vient :

$$\underline{\tilde{u}}_{eq} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{p1} t k_s + \lambda_{d1} (V_l - V) \\ \frac{\lambda_{p2}}{V_l} x t k_s + \lambda_{d2} (\psi_l - \psi) \end{bmatrix} \quad (5-52)$$

Cette expression nous servira de base de comparaison dans les chapitres suivants.

### 5.4.4 Scénario de test

Le scénario de test qui suit est inspiré d'une procédure d'arrivée et comporte trois branches faisant entre elles un angle de 90 degrés. La trajectoire de l'avion leader présente les caractéristiques suivantes :

### Contribution à la synthèse de lois de commande pour la navigation relative entre aéronefs

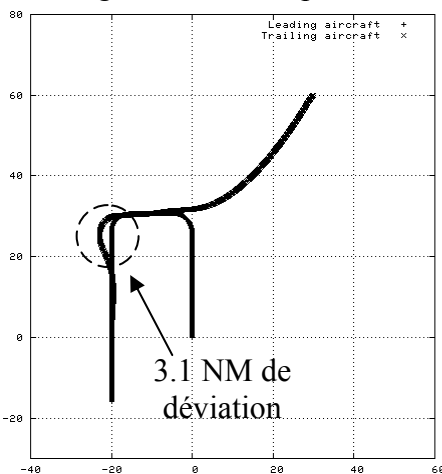
- Position initiale en  $(x_{0c}, y_{0c}) = (0\text{NM}, 0\text{NM})$ , niveau de vol FL140, vitesse aérodynamique de 306 kts (soit 250 kts de vitesse conventionnelle) et cap de 0 degré (cap au Nord) ;
- Après 120 secondes, la trajectoire du leader descend vers le niveau de vol 60 et la vitesse aérodynamique décroît vers 272 kts, ce qui correspond à une vitesse conventionnelle de 250 kts (la vitesse conventionnelle est constante durant toute la simulation) ;
- Après avoir passé le point (25NM, 0NM), la trajectoire du leader effectue un virage par la gauche pour prendre un cap de -90 degrés ;
- Après avoir passé le point (25NM, -15NM), la trajectoire du leader effectue un nouveau virage par la gauche pour prendre un cap 180 degrés.

L'aéronef suiveur arrive en suivant une branche différente de la procédure d'arrivée. Son cap initial est de -135 degrés (cap au Sud-Ouest). La position initiale de l'avion est située en (60NM, 30NM) et son niveau de vol est le FL200. Les limitations sur la loi de guidage relatif sont les suivantes :

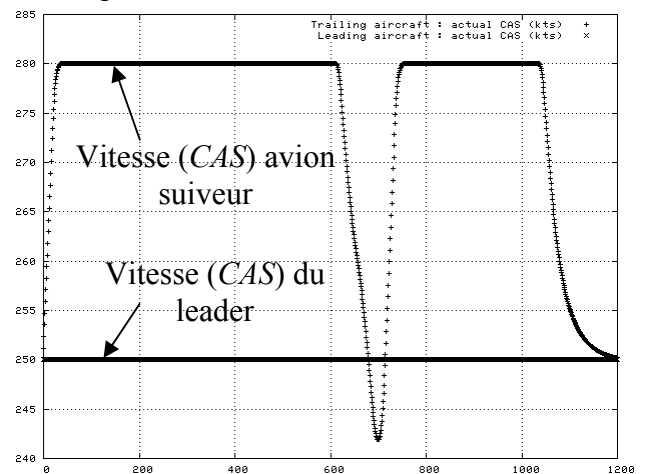
- la vitesse conventionnelle est limitée à  $\pm 30$  kts autour de celle de la trajectoire de consigne ;
- l'inclinaison est comprise entre  $\pm 15$  degrés (cette valeur correspond à l'inclinaison maximale pour les phases d'approche et d'atterrissage ([4-a]) ;
- le facteur de charge est limité à  $1 \pm 0.15$  ([5-b]).

Ce scénario de test simule 1200 secondes (20 minutes) de vol. L'objectif est de placer l'avion suiveur 90 secondes derrière l'avion leader.

La figure suivante représente l'évolution des paramètres pour ce scénario de test :

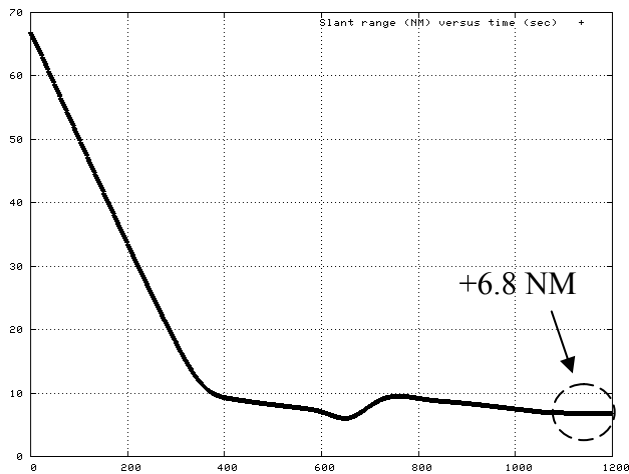


Evolution des trajectoires dans le plan horizontal  
(échelle orthonormée en NM)

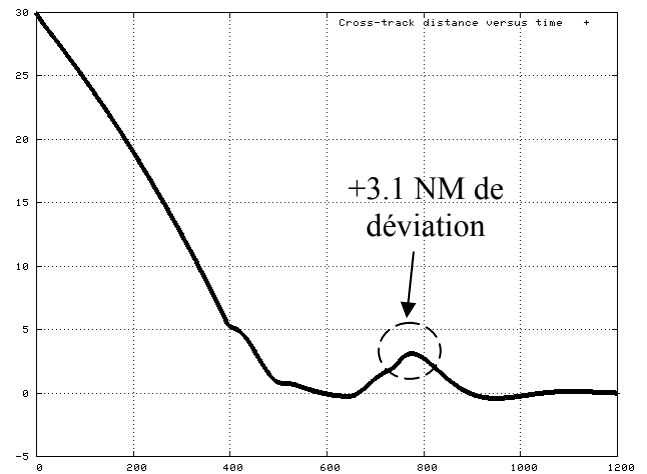


Vitesse conventionnelle (kts) en fonction du temps  
(sec)

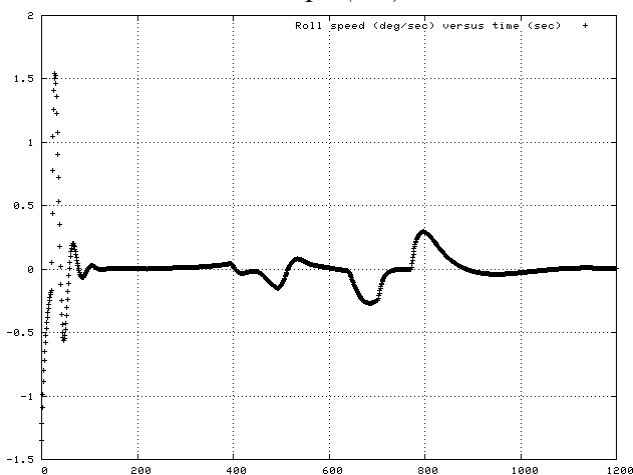
## Contribution à la synthèse de lois de commande pour la navigation relative entre aéronefs



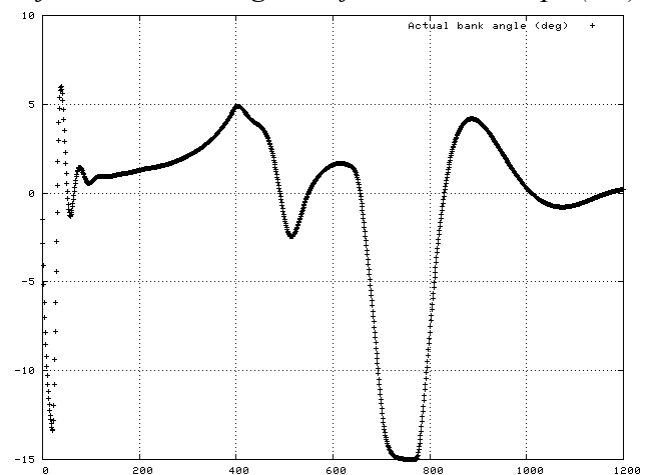
Distance entre les deux avions (NM) en fonction du temps (sec)



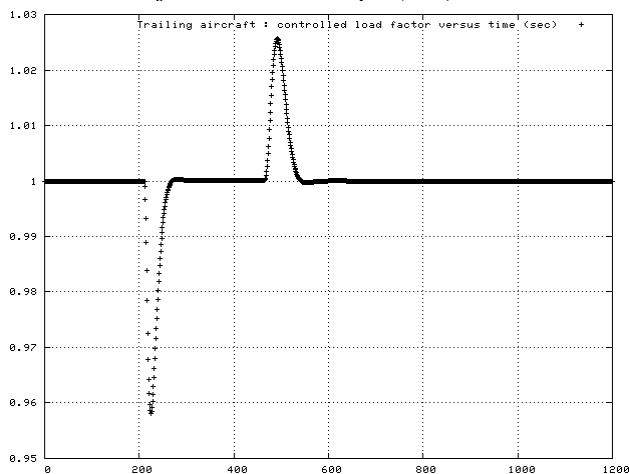
Écart latéral (NM) dans le repère de la trajectoire de consigne en fonction du temps (sec)



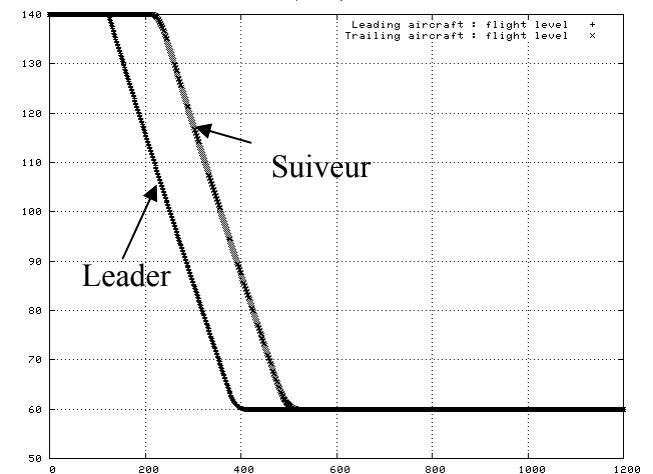
Vitesse de roulis commandée (deg/sec) en fonction du temps (sec)



Inclinaison latérale (degrés) en fonction du temps (sec)



Facteur de charge commandé (g)



Niveau de vol (FL) en fonction du temps (sec)

Figure 5-6 Evolution des paramètres pour le scénario de test

Pour ce scénario de test, la loi de commande de type proportionnel et dérivée engendre une déviation de 3.1 NM dans le dernier virage pour la trajectoire dans le plan horizontal.

L'évolution de la vitesse conventionnelle de l'avion suiveur fait apparaître un creux qui est dû au second virage de l'avion leader vers la gauche.

La distance entre les deux avions converge vers 6.8NM, ce qui correspond à la vitesse aérodynamique du leader (272 kts) multiplié par le retard de 90 sec.

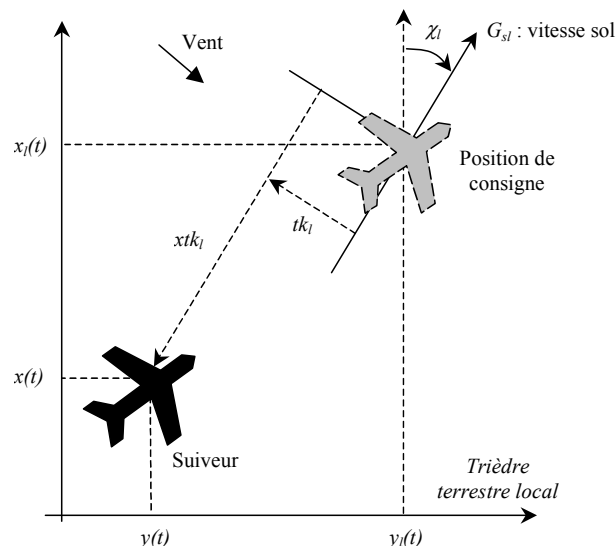
Afin d'accélérer l'action de la loi de commande et diminuer la déviation, il est possible d'augmenter la valeur des gains. Malheureusement, cette solution ne permet pas de conserver le découplage entre boucle lente et boucle rapide. Une autre solution que nous allons exploiter dans les chapitres qui suivent consiste à utiliser des techniques de synthèse qui tiennent compte de l'aspect non linéaire du problème.

De plus, il est commode de représenter les écarts par rapport au repère lié à la trajectoire de consigne, comme nous l'avons fait sur la *Figure 5-6* pour l'écart latéral entre les deux avions : ce repère permet en effet de représenter directement les écarts par rapport à la trajectoire de consigne. Il pourrait alors sembler intéressant d'exprimer le cinématique du mouvement relatif dans le repère lié à la trajectoire de consigne, plutôt que de l'exprimer dans le repère lié à l'avion suiveur comme nous l'avons fait précédemment. Nous allons montrer dans le paragraphe qui suit l'inadéquation d'un tel repère pour la synthèse de lois de guidage relatif.

## **5.5 Inadéquation de l'expression de la cinématique du mouvement relatif dans le repère lié à la trajectoire de consigne**

### **5.5.1 Expression de la cinématique du mouvement dans le repère lié à la position de consigne**

Le repère lié à l'avion suiveur est le repère naturel pour exprimer la cinématique du mouvement relatif. Il est cependant possible d'exprimer la cinématique du mouvement relatif dans d'autres repères, comme par exemple dans le repère lié à la position de consigne (i.e. la position du leader quelques minutes plus tôt) :



*Figure 5-7 Position relative de l'avion suiveur par rapport à la position de consigne, exprimé dans le trièdre lié à la position de consigne*

Les équations du mouvement relatif sont alors les suivantes (il suffit de changer la position de l'indice  $l$  (trajectoire de consigne) dans les équations ( 5-27 ) et ( 5-30 ) :

$$\begin{cases} \dot{tk}_l = \dot{\chi}_l \cdot xtk_l + G_s \cdot \cos(\chi_l - \chi) - G_{s_l} \\ xtk_l = -\dot{\chi}_l \cdot tk_l - G_s \cdot \sin(\chi_l - \chi) \end{cases} \quad (5-53)$$

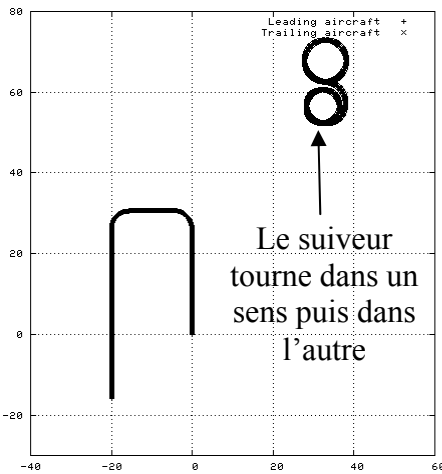
Nous allons montré que le choix de ce repère n'est pas approprié pour la synthèse des lois de guidage relatif. En effet, l'utilisation d'une loi de type proportionnelle et dérivée conduit à un mouvement circulaire de la part de l'avion suiveur s'il se trouve à une distance trop importante de la position de consigne (cette distance dépend des contraintes sur le modèle avion et des gains de la loi de guidage).

### 5.5.2 Résultats de simulation dans le repère lié à la position de consigne

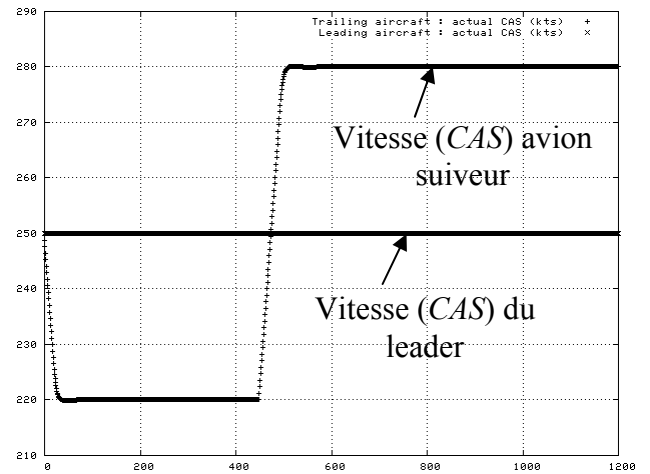
La loi testée pour le guidage relatif est une loi de type proportionnelle et dérivée ayant la forme suivante dans le repère lié à la position du suiveur :

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \gamma_t \\ \phi \end{bmatrix} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} -\lambda_{p1}tk_l + \lambda_{d1}(V_l - V) \\ (-\lambda_{p2}xtk_l + \lambda_{d2}V_l(\psi_l - \psi))/n_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-54)$$

La loi ( 5-54 ) diffère de la loi ( 5-49 ) simplement par le fait que  $-\lambda_{p1}tk_l$  a été remplacé par  $\lambda_{p1}tk_s$  et  $-\lambda_{p2}xtk_l$  par  $\lambda_{p2}xtk_s$ . Les matrices de gains  $A_p$  et  $A_d$  sont celles définies en ( 5-50 ). Les résultats de simulation pour le scénario de test sont les suivants :



Evolution des trajectoires dans le plan horizontal (en NM)



Vitesse conventionnelle (kts) en fonction du temps (sec)

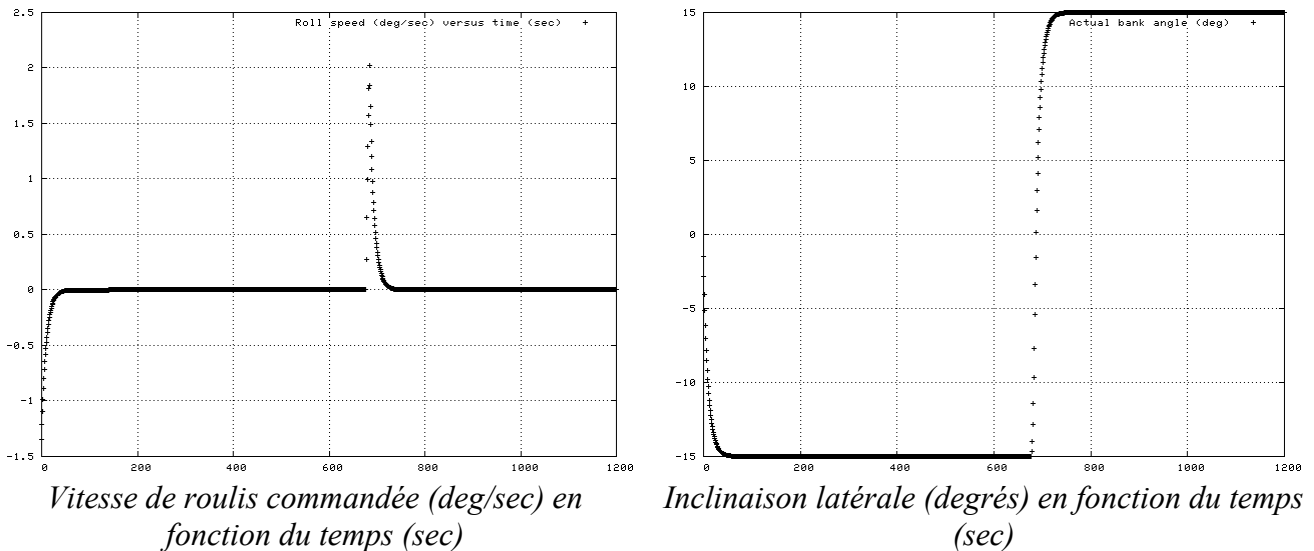


Figure 5-8 Loi de type proportionnelle et dérivée dans le repère lié à la position de consigne

Nous pouvons ainsi constater que l'inclinaison latérale reste bloquée autour des valeurs  $\pm 15$  degrés, et que l'avion suiveur ne parvient pas à rejoindre la trajectoire de consigne.

La cause d'un tel comportement est simple à comprendre : la référence de positionnement latéral se fait par rapport à l'axe passant par la position de consigne et orienté par sa vitesse sol. Par conséquent, si l'avion suiveur se trouve (par exemple) à gauche de cet axe, la loi de guidage commande un virage à droite : si celui-ci ne permet pas d'intercepter l'axe, l'avion suiveur continue indéfiniment son virage.

En conclusion, nous avons montré sur un exemple que l'expression de la cinématique du mouvement relatif dans le repère lié à la trajectoire de consigne pour la synthèse de lois de guidage relatif n'est pas adapté.

## 5.6 Conclusion

Ce chapitre a été l'occasion de proposer des spécifications pour les modes propres de la loi de guidage relatif. Ces spécifications sont basées sur les conditions permettant de satisfaire le principe de la commande à plusieurs échelles de temps.

De plus, une loi de guidage vertical de type proportionnel et dérivée a été développée. Nous avons choisi de commander le niveau de vol  $h$  de l'aéronef suiveur plutôt que l'écart  $\Delta h$  entre le niveau de vol de l'aéronef leader et celui de l'aéronef suiveur en vue d'assurer une plus grande sécurité du vol (indépendance entre le guidage relatif vertical et dans le plan) et parce des lois de guidage permettant de capturer un niveau de vol existant déjà à bord de la plupart des avions de transport commercial. Les chapitres qui suivent traitant du guidage dans le plan, nous ne reviendrons pas sur cette loi.

Nous avons vu sur un scénario particulier qu'une simple loi de type proportionnelle et dérivée exprimée dans le repère lié à l'avion suiveur et basée sur la linéarisation des équations d'état (approche par la linéarisation tangente) permet de réaliser un guidage relatif. Cependant, aucune preuve de la stabilité globale d'une telle loi n'a été apportée.

De plus, nous avons montré l'inadéquation du repère lié à la trajectoire de consigne pour résoudre le problème du guidage relatif en utilisant une loi de type proportionnelle et dérivée.

Les chapitres suivants se consacreront à la synthèse de lois de commande issues de la mise en œuvre de techniques de commande non linéaire. L'utilisation de ces techniques permettra de prouver la stabilité asymptotique des lois de commande lorsque les conditions initiales ne

sont pas dans un voisinage du point d'équilibre. De plus, nous verrons que ces lois se ramènent à une loi de type proportionnelle et dérivée lorsque le vecteur d'état à l'instant initial n'est pas *trop éloigné* de la trajectoire de consigne. Enfin, l'utilisation de ces techniques de synthèse qui tiennent compte de l'aspect non-linéaire du problème permettront d'accélérer l'action de la loi de commande (par rapport à celle issue d'une loi de type proportionnelle et dérivée), et par voie de conséquence diminueront les déviations par rapport à la trajectoire de consigne.

## **5.7 Références bibliographiques**

- [5-a] *Eurocontrol Experimental Centre, User Manual for the Base of Aircraft Data (BADA) revision 3.5, EEC note No. 11/03, July 2003*
- [5-b] *Ménard P., Commande automatique du vol, Présentation ENAC, Novembre 2001*
- [5-c] *Lafage R., De la simulation de cockpit au CENA, NT03-616, note CENA, 2003*
- [5-d] *Louyot P., TOTOR : démonstrateur ASAS/ACAS, NT03-573, note CENA, 2003*

---

## Chapitre 6

# Synthèse de lois de guidage relatif par la technique du backstepping

---

### 6.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de proposer une loi de commande permettant d'accélérer le comportement de la loi de guidage relatif pour le scénario de test (position initiale de l'aéronef suiveur éloignée de la trajectoire à suivre), tout en conservant le comportement de la loi de guidage de type proportionnel et dérivée au voisinage de l'équilibre.

L'accélération du comportement de la loi de guidage relatif peut être réalisée grâce à l'utilisation de techniques de synthèse qui prennent en compte l'aspect non-linéaire du problème de guidage relatif.

Nous traiterons dans ce chapitre le problème du guidage relatif en temps, où l'objectif pour l'aéronef suiveur à l'instant  $t$  est de se placer sur la position occupée par le leader à l'instant  $t - \Delta T$  ( $\Delta T$  est de l'ordre de 1 à 3 minutes). Par conséquent, les consignes d'écart longitudinal et latéral entre la position courante de l'avion suiveur et la position passée de l'avion leader sont nulles, et les écarts observés doivent tendre vers zéro.

Dans le chapitre dédié à l'état de l'art sur le guidage relatif, plusieurs techniques de commande non-linéaire ont déjà été présentées. Ainsi dans [6-k], c'est une technique par mode glissant qui a été utilisée. Malheureusement, cette technique conduit à une commande singulière lorsque l'écart longitudinal observé devient nul ( $tk_s \rightarrow 0$ ). Dans [6-i], c'est un bouclage linéarisant qui est utilisé. Cette fois, la loi de commande devient singulière lorsque la consigne d'écart longitudinal devient nulle. Il en résulte qu'aucune de ces deux lois n'est totalement adaptée au problème du guidage relatif en temps.

Nous développerons dans ce chapitre des lois de guidage basées sur la technique du backstepping, qui pourrait se traduire en français par ajout d'intégrateurs ([6-h]). Nous montrerons que cette technique permet de réaliser un guidage relatif en temps et permet de contourner le problème de la singularité des lois conçues par les méthodes de type bouclage linéarisant.

### 6.2 Présentation de la technique du Backstepping

#### 6.2.1 Généralités

La technique du backstepping est une technique relativement récente de commande des systèmes non linéaires. Elle est apparue à la fin des années 80 dans les travaux de [6-b]. La technique du backstepping est étendue au cas adaptatif dans [6-c].

Très brièvement, il s'agit d'une technique de commande pour les systèmes non-linéaires en cascade. Cette technique met à profit les relations causales successives pour construire de

manière itérative et systématique une loi de commande et une fonction de Lyapunov stabilisante. Pour qu'elle puisse s'appliquer, le système non-linéaire doit être sous forme *feedback* ([6-c]) : la dérivée de chaque composante du vecteur d'état doit être une fonction des composantes précédentes et dépendre additivement de la composante suivante.

De plus, et contrairement au bouclage linéarisant, le backstepping offre la possibilité de conserver dans le bouclage les non-linéarités stabilisantes.

## 6.2.2 Exemple

Nous allons présenter cette technique sur un cas très simple issu de [6-a]. Soit un système non-linéaire d'ordre deux décrit par les équations d'état suivantes, où les états  $x_1$  et  $x_2$  et la commande  $u$  sont pris dans  $\mathcal{R}$ , et où les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad (6-1)$$

L'objectif retenu ici est de concevoir une loi de commande de telle sorte que l'état  $x_1$  converge vers 0.

Nous pouvons observer que cette représentation d'état est sous forme *feedback* :  $x_2$  joue le rôle d'entrée pour la dynamique de  $x_1$ , celle de  $x_2$  étant commandée par l'entrée effective  $u$  du système.

Nous supposons dans un premier temps qu'il existe une loi de commande  $x_2 = \xi(x_1)$  de telle sorte que la première équation de (6-1) puisse être stabilisée autour de 0. Il existe alors ([6-d]) une fonction de Lyapunov  $V_1(x_1)$  et une fonction  $W(x_1)$  définie positive de telle sorte que :

$$\dot{V}_1(x_1) = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} (f(x_1) + g(x_1)\xi(x_1)) \leq -W_1(x_1) \quad (6-2)$$

En additionnant et en retranchant  $g(x_1)\xi(x_1)$  à la première équation de (6-1), il vient :

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)\xi(x_1) + g(x_1)(x_2 - \xi(x_1)) \quad (6-3)$$

Le changement de variable :

$$z = x_2 - \xi(x_1) \quad (6-4)$$

conduit alors à :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)\xi(x_1) + g(x_1)z \\ \dot{z} = u - \dot{\xi}(x_1) \end{cases} \quad (6-5)$$

La fonction candidate de Lyapunov pour le système complet est alors choisie de la manière suivante :

$$V(x_1, z) = V_1(x_1) + \frac{1}{2} z^2 \quad (6-6)$$

Il vient, après dérivation :

$$\dot{V}(x_1, z) = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} (f(x_1) + g(x_1)\xi(x_1)) + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} g(x_1)z + z\dot{z} \quad (6-7)$$

En utilisant l'inégalité (6-2) et la relation (6-5), il vient :

$$\dot{V}(x_1, z) \leq -W_1(x_1) + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} g(x_1)z + z(u - \dot{\xi}(x_1)) \quad (6-8)$$

Par conséquent, le choix suivant de  $u$  permet de rendre le système globalement asymptotiquement stable, où  $k$  est une constante positive :

$$u - \dot{\xi}(x_1) = -\frac{\partial V_1}{\partial x_1} g(x_1) - kz \quad (6-9)$$

Nous avons en effet dans ces conditions :

$$\dot{V}(x_1, z) \leq -W_1(x_1) - kz^2 \quad (6-10)$$

Les relations ( 6-1 ), ( 6-4 ) et ( 6-9 ) permettent de calculer l'expression de la commande  $u$  en fonction des états  $x_1$  et  $x_2$  :

$$u = \frac{\partial \xi(x_1)}{\partial x_1} (f(x_1) + g(x_1)x_2) - \frac{\partial V_1}{\partial x_1} g(x_1) - k(x_2 - \xi(x_1)) \quad (6-11)$$

D'une manière générale, la technique du backstepping permet de construire de manière itérative et systématique une loi de commande et une fonction de Lyapunov stabilisante pour des systèmes non-linéaires sous forme *feedback* ([6-j]).

### 6.2.3 Backstepping et passivité

Considérons un système à  $n$  états,  $p$  entrées et  $p$  sorties sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}) \\ \underline{y} = h(\underline{x}) \end{cases} \quad (6-12)$$

où la fonction  $f$  est localement Lipschitzienne en  $(\underline{x}, \underline{u})$ , et  $h$  est continue en  $\underline{x}$ , pour tout  $\underline{x} \in \mathcal{H}^n$  et  $\underline{u} \in \mathcal{H}^p$ . De plus, nous supposons que  $f(\underline{0}, \underline{0}) = \underline{0}$ , de telle sorte que l'origine  $\underline{x} = \underline{0}$  est un point d'équilibre en boucle ouverte, et que  $h(\underline{0}) = \underline{0}$ .

**Définition 1** ([6-g]) : le système ( 6-12 ) est passif s'il existe une fonction  $V$  semi définie positive et continûment différentiable, notée  $V(\underline{x})$ , de telle sorte que :

$$\dot{V} = \frac{\partial V(\underline{x})}{\partial \underline{x}^T} f(\underline{x}, \underline{u}) \leq \underline{u}^T \underline{y} \quad (6-13)$$

L'interprétation physique de cette définition est qu'un système passif est un système pour lequel l'énergie qu'il peut emmagasiner (terme  $\dot{V}$ ) est toujours inférieure à l'énergie que lui apporte son environnement (terme  $\underline{u}^T \underline{y}$ ). La différence entre ces deux termes constitue l'énergie dissipée.

**Théorème 1** : si le système ( 6-12 ) vérifie les deux conditions suivantes :

- aucune solution de  $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{0})$  ne peut identiquement rester dans l'ensemble  $h(\underline{x}) = \underline{0}$ , à l'exception de  $\underline{x}(t) \equiv \underline{0}$  (zero state observability) ;
- le système est passif, la fonction  $V$  (fonction de Lyapunov candidate) étant définie positive et radialement non bornée ;

alors l'origine  $\underline{x} = \underline{0}$  peut être asymptotiquement stabilisée par la loi  $\underline{u} = -\Phi(\underline{y})$ , où  $\Phi$  est une fonction localement Lipschitzienne telle que  $\Phi(\underline{0}) = \underline{0}$  et  $\underline{y}^T \Phi(\underline{y}) > 0$  pour tout  $\underline{y}$  non nul.

Démonstration : cf. [6-a].  $\square$

Ainsi dans l'exemple précédant, choisissons en nous inspirant de ( 6-9 ) une nouvelle entrée  $v$  définie par :

$$v = u - \dot{\xi}(x_1) + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} g(x_1) \quad (6-14)$$

L'inégalité ( 6-8 ) devient alors :

$$\dot{V}(x_1, z) \leq -W_1(x_1) + zv \quad (6-15)$$

Ce qui implique, comme la fonction  $W(x_1)$  est définie positive :

$$\dot{V}(x_1, z) \leq zv \quad (6-16)$$

Par conséquent, nous voyons sur cet exemple simple que la technique du backstepping a permis de rendre le système ( 6-1 ) passif par rapport à l'entrée  $v$  et à la sortie  $z$ .

## 6.3 Synthèse directe

### 6.3.1 Description de la méthode de synthèse directe

Dans le cas d'un guidage relatif où la consigne de séparation est exprimée en temps, il s'agit de faire coïncider la position courante de l'avion suiveur avec la position de l'aéronef leader quelques minutes plus tôt. Dans ce cas, la valeur souhaitée pour l'écart longitudinal  $tk_s$  et l'écart latéral  $x tk_s$  entre la position passée de l'avion leader et la position courante de l'avion suiveur est zéro.

Le modèle de synthèse pour le guidage relatif qui a été développé au chapitre précédent s'écrit sous forme condensée de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{\underline{e}}_s = J(\dot{\chi}) \cdot \underline{e}_s + \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) \\ \dot{\underline{z}} = \underline{u}_{eq} \end{cases} \quad (6-17)$$

où :

$$\begin{cases} \underline{e}_s = [tk_s \quad x tk_s]^T \\ \underline{\tau} = [G_s \quad \chi]^T \end{cases} \quad (6-18)$$

et :

$$J(\dot{\chi}) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\chi} \\ -\dot{\chi} & 0 \end{bmatrix} \quad (6-19)$$

$$\underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) = \begin{bmatrix} G_{sl} \cdot \cos(\chi - \chi_l) - G_s \\ -G_{sl} \cdot \sin(\chi - \chi_l) \end{bmatrix} \quad (6-20)$$

A l'exception du terme  $J(\dot{\chi}) \cdot \underline{e}_s$  qui apparaît dans l'expression de la dynamique de  $\underline{e}_s$ , les équations d'état ( 6-17 ) sont de type *feedback* (i.e. la dérivée de chaque composante du vecteur d'état est une fonction des composantes précédentes et dépend additivement de la composante suivante). Cette forme est nécessaire pour appliquer la technique du backstepping.

Nous allons montrer qu'en utilisant la propriété d'antisymétrie de la matrice  $J(\dot{\chi})$ , la technique du backstepping peut être appliquée sur le modèle de synthèse en utilisant dans un premier temps l'entrée virtuelle  $\underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)$  pour stabiliser l'erreur  $\underline{e}_s$  autour de zéro, puis l'entrée  $\underline{u}_{eq}$  pour stabiliser  $\underline{z} = \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) + \underline{A}_1 \underline{e}_s$  autour de zéro.

Dans un premier temps, définissons une nouvelle variable d'état  $\underline{z}$  de la manière suivante, où  $\underline{A}_1$  est une matrice symétrique définie positive et où  $\underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)$  est interprété comme une commande virtuelle permettant de stabiliser la première équation du système ( 6-17 ) :

$$\underline{z} = \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) + \underline{A}_1 \underline{e}_s \quad (6-21)$$

Comme  $\underline{\tau} = \underline{\tau}$  est la seule solution à l'équation  $\underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) = \underline{0}$ , l'équation précédente montre que faire converger  $\underline{e}_s$  vers  $\underline{0}$  et  $\underline{\tau}$  vers  $\underline{\tau}$  revient à faire converger  $\underline{e}_s$  vers  $\underline{0}$  et  $\underline{z}$  vers  $\underline{0}$ .

Choisissons ensuite une fonction candidate de Lyapunov définie sous la forme suivante, où  $k_l$  est une constante positive :

$$V_1 = \frac{k_1}{2} \underline{e}_s^T \underline{e}_s + \frac{1}{2} \underline{z}^T \underline{z} \quad (6-22)$$

En dérivant ( 6-22 ) par rapport au temps, en se servant de ( 6-17 ), de ( 6-21 ) et en utilisant la propriété d'antisymétrie de la matrice  $J(\dot{\chi})$  (i.e.  $\underline{x}^T J(\dot{\chi}) \underline{x} = 0 \quad \forall \underline{x}$ ), il vient :

$$\dot{V}_1 = -k_1 \underline{e}_s^T \underline{A}_1 \underline{e}_s + \underline{z}^T \left( k_1 \underline{e}_s + \underline{A}_1 \dot{\underline{e}}_s + \frac{\partial b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}^T} \cdot \underline{u}_{eq} + \frac{\partial b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}_l^T} \cdot \dot{\underline{\tau}}_l \right) \quad (6-23)$$

où  $\frac{\partial b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}^T}$  et  $\frac{\partial b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}_l^T}$  désignent respectivement les matrices jacobienues de  $b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)$  par rapport à  $\underline{\tau}$  et  $\underline{\tau}_l$  :

$$\frac{\partial b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}^T} = \begin{bmatrix} -1 & -G_{sl} \sin(\chi - \chi_l) \\ 0 & -G_{sl} \cos(\chi - \chi_l) \end{bmatrix} \quad (6-24)$$

$$\frac{\partial b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}_l^T} = \begin{bmatrix} \cos(\chi - \chi_l) & G_{sl} \sin(\chi - \chi_l) \\ -\sin(\chi - \chi_l) & G_{sl} \cos(\chi - \chi_l) \end{bmatrix} \quad (6-25)$$

La loi de commande définie par la relation suivante permet alors de stabiliser le système ( 6-17 ) autour de  $\underline{\tau} = \underline{\tau}_d$  et  $\underline{e}_s = \underline{0}$  pour toutes matrices  $\underline{A}_1$  et  $\underline{A}_2$  symétriques et définies positives et pour tout réel  $k_l$  positif :

$$\underline{u}_{eq} = - \left( \frac{\partial b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}^T} \right)^{-1} \left( k_1 \underline{e}_s + \underline{A}_1 \dot{\underline{e}}_s + \frac{\partial b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}_l^T} \cdot \dot{\underline{\tau}}_l + \underline{A}_2 \underline{z} \right) \quad (6-26)$$

En effet, la dérivée de la fonction candidate de Lyapunov définie en ( 6-23 ) est dans ces conditions négative :

$$\dot{V}_1 = -k_1 \underline{e}_s^T \underline{A}_1 \underline{e}_s - \underline{z}^T \underline{A}_2 \underline{z} < 0 \quad (6-27)$$

Notons que la matrice  $\frac{\partial b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}^T}$  est inversible tant que la différence  $(\chi - \chi_l)$  n'est pas égale à 90 degrés (modulo 180 degrés). Son expression est donnée par :

$$\left( \frac{\partial b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}^T} \right)^{-1} = \frac{1}{\cos(\chi - \chi_l)} \begin{bmatrix} -\cos(\chi - \chi_l) & \sin(\chi - \chi_l) \\ 0 & -1/G_{sl} \end{bmatrix} \quad (6-28)$$

Cette approche a été présentée dans [6-e]. Les matrices  $\underline{A}_1$  et  $\underline{A}_2$  ont la dimension d'une fréquence,  $k_l$  la dimension du carré d'une fréquence,  $\underline{z}$  la dimension d'une vitesse et  $V_1$  la dimension du carré d'une vitesse :

$$\begin{cases} \underline{A}_1 \propto \text{sec}^{-1} \\ \underline{A}_2 \propto \text{sec}^{-1} \\ k_l \propto \text{sec}^{-2} \\ \underline{z} \propto m/s \\ V_1 \propto (m/s)^2 \end{cases} \quad (6-29)$$

### 6.3.2 Limitation de l'approche

La limitation de l'approche précédente que nous avons appelé synthèse directe vient du fait que le terme  $\dot{e}_s$  qui apparaît à droite de l'égalité ( 6-26 ) dépend de la commande  $\underline{u}_{eq}$  au travers du terme  $\dot{\chi}$  comme le montre la relation ( 6-17 )

Cependant, comme le terme  $\Lambda_1 \dot{e}_s$  qui apparaît à droite de l'égalité ( 6-26 ) dépend linéairement de la commande  $\underline{u}_{eq}$ , nous allons montrer que la commande  $\underline{u}_{eq}$  peut être calculée de manière explicite en inversant cette relation.

Explicitons dans un premier temps l'égalité ( 6-26 ) en utilisant les relations ( 6-17 ) et ( 6-19 ), de manière à faire clairement apparaître que la composante  $\dot{\chi}$  du vecteur de commande  $\underline{u}_{eq}$  apparaît de part et d'autre de l'égalité :

$$\underline{u}_{eq} = \begin{bmatrix} \dot{G}_s \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = - \left( \frac{\partial b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}^T} \right)^{-1} \left( k_1 \underline{e}_s + \dot{\chi} \cdot \Lambda_1 \begin{bmatrix} x t k_s \\ - t k_s \end{bmatrix} + \Lambda_1 b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) + \frac{\partial b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}_l^T} \cdot \dot{\underline{\tau}}_l + \Lambda_2 \underline{z} \right) \quad (6-30)$$

Par la suite, les matrices  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont des matrices diagonales définies positives de la forme suivante :

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_x, \lambda_y) \\ \Lambda_2 = \text{diag}(\lambda_v, \lambda_w) \end{cases} \quad (6-31)$$

Développons l'expression  $[0 \ 1] \cdot \underline{u}_{eq}$  qui permet d'expliciter la commande  $\dot{\chi}$  :

$$\dot{\chi} = -[0 \ 1] \cdot \left( \frac{\partial b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}^T} \right)^{-1} \left( k_1 \underline{e}_s + \dot{\chi} \cdot \Lambda_1 \begin{bmatrix} x t k_s \\ - t k_s \end{bmatrix} + \Lambda_1 b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) + \frac{\partial b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}_l^T} \cdot \dot{\underline{\tau}}_l + \Lambda_2 \underline{z} \right) \quad (6-32)$$

En utilisant ( 6-28 ), ( 6-18 ), ( 6-19 ), ( 6-20 ) et ( 6-25 ), il vient :

$$\dot{\chi} = \frac{(k_1 + \lambda_y \lambda_w) x t k_s - (\lambda_y + \lambda_w) G_{sl} \sin(\chi - \chi_l) - \dot{G}_{sl} \sin(\chi - \chi_l) + G_{sl} \dot{\chi}_l \cos(\chi - \chi_l)}{G_{sl} \cos(\chi - \chi_l) + \lambda_y t k_s} \quad (6-33)$$

Maintenant que la commande  $\dot{\chi}$  est connue, la commande  $\dot{G}_s$  peut être calculée en développant l'expression  $[1 \ 0] \cdot \underline{u}_{eq}$  :

$$\dot{G}_s = -[1 \ 0] \cdot \left( \frac{\partial b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}^T} \right)^{-1} \left( k_1 \underline{e}_s + \dot{\chi} \cdot \Lambda_1 \begin{bmatrix} x t k_s \\ - t k_s \end{bmatrix} + \Lambda_1 b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) + \frac{\partial b(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}_l^T} \cdot \dot{\underline{\tau}}_l + \Lambda_2 \underline{z} \right) \quad (6-34)$$

Après développement, il vient finalement :

$$\begin{aligned} \dot{G}_s = & t k_s (k_1 + \lambda_x \lambda_w) + (\lambda_x + \lambda_w) (G_{sl} \cos(\chi - \chi_l) - G_s) \\ & + \dot{\chi} (\lambda_x x t k_s - G_{sl} \sin(\chi - \chi_l)) \\ & + \dot{G}_{sl} \cos(\chi - \chi_l) + G_{sl} \dot{\chi}_l \sin(\chi - \chi_l) \end{aligned} \quad (6-35)$$

### 6.3.3 Cas particulier du vent nul : analogie avec la commande de type proportionnelle et dérivée

Dans le cas où il n'y a pas de vent et où les variations de vitesse et d'angle de route sont négligées, les relations ( 6-33 ) et ( 6-35 ) se réduisent à :

$$\begin{cases} G_s = V \\ \chi = \psi \\ \dot{G}_{sl} = 0 \\ \dot{\chi}_l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{V} = tk_s(k_1 + \lambda_x \lambda_v) + (\lambda_x + \lambda_v)(V_l \cos(\psi - \psi_l) - V) \\ \dot{\psi}(\lambda_x xtk_s - V_l \sin(\psi - \psi_l)) \\ \dot{\psi} = \frac{(k_1 + \lambda_y \lambda_\psi) xtk_s - (\lambda_y + \lambda_\psi)V_l \sin(\psi - \psi_l)}{V_l \cos(\psi - \psi_l) + \lambda_y tk_s} \end{cases} \quad (6-36)$$

Au voisinage de  $\psi = \psi_l$  nous pouvons faire les approximations suivantes :

$$\begin{cases} \cos(\psi - \psi_l) \approx 1 \\ \sin(\psi - \psi_l) \approx \psi - \psi_l \end{cases} \quad (6-37)$$

De plus, en supposant que les approximations suivantes sont valides :

$$\begin{cases} \dot{\psi}(\lambda_x xtk_s - V_l \sin(\psi - \psi_l)) \approx 0 \\ V_l \cos(\psi - \psi_l) + \lambda_y tk_s \approx V_l \end{cases} \quad (6-38)$$

Nous obtenons ainsi une loi de commande de type proportionnelle et dérivée :

$$\underline{u}_{eq} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tk_s(k_1 + \lambda_x \lambda_v) + (\lambda_x + \lambda_v)(V_l - V) \\ \left( \frac{k_1 + \lambda_y \lambda_\psi}{V_l} \right) xtk_s - (\lambda_y + \lambda_\psi)(\psi - \psi_l) \end{bmatrix} \quad (6-39)$$

Au chapitre précédent, nous avons étudié une loi de commande de type proportionnelle et dérivée de la forme suivante :

$$\tilde{\underline{u}}_{eq} = \begin{bmatrix} \lambda_{p1} tk_s + \lambda_{d1}(V_l - V) \\ \frac{\lambda_{p2}}{V_l} xtk_s + \lambda_{d2}(\psi_l - \psi) \end{bmatrix} \quad (6-40)$$

Par conséquent, les deux lois sont comparables à condition de faire l'identification suivante :

$$\begin{cases} \lambda_{p1} = k_1 + \lambda_x \lambda_v \\ \lambda_{p2} = k_1 + \lambda_y \lambda_\psi \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \lambda_{d1} = \lambda_x + \lambda_v \\ \lambda_{d2} = \lambda_y + \lambda_\psi \end{cases} \quad (6-41)$$

Les relations ( 6-33 ) et ( 6-35 ) deviennent alors :

$$\dot{\chi} = \frac{\lambda_{p2} xtk_s - \lambda_{p2} G_{sl} \sin(\chi - \chi_l) - \dot{G}_{sl} \sin(\chi - \chi_l) + G_{sl} \dot{\chi}_l \cos(\chi - \chi_l)}{G_{sl} \cos(\chi - \chi_l) + \lambda_y tk_s} \quad (6-42)$$

et :

$$\begin{aligned} \dot{G}_s &= \lambda_{p1} tk_s + \lambda_{d1}(G_{sl} \cos(\chi - \chi_l) - G_s) \\ &+ \dot{\chi}(\lambda_x xtk_s - G_{sl} \sin(\chi - \chi_l)) \\ &+ \dot{G}_{sl} \cos(\chi - \chi_l) + G_{sl} \dot{\chi}_l \sin(\chi - \chi_l) \end{aligned} \quad (6-43)$$

### 6.3.3.1 Identification des paramètres

L'objectif de ce paragraphe est de montrer qu'une fois que les paramètres positifs  $\lambda_{pi}$  et  $\lambda_{di}$  sont connus, il est toujours possible de trouver les constantes positives  $k_1$ ,  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda_v$  et  $\lambda_\psi$  vérifiant les égalités ( 6-41 ), et donc de trouver une fonction candidate de Lyapunov permettant de réaliser la synthèse.

Le chapitre V consacré de la spécification des modes propres a conduit à des valeurs identiques pour les coefficients proportionnel et dérivée :

$$\begin{cases} \lambda_{p1} = \lambda_{p2} \\ \lambda_{d1} = \lambda_{d2} \end{cases} \quad (6-44)$$

Nous choisirons donc les constantes positives  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda_v$  et  $\lambda_\psi$  de telle sorte que :

$$\begin{cases} \lambda_x = \lambda_y \\ \lambda_v = \lambda_\psi \end{cases} \quad (6-45)$$

Par conséquent, les égalités ( 6-41 ) se réduisent à :

$$\begin{cases} \lambda_{p1} = k_1 + \lambda_x \lambda_v \\ \lambda_{d1} = \lambda_x + \lambda_v \end{cases} \quad (6-46)$$

La résolution de ce système d'équations par rapport à  $\lambda_x$  et  $\lambda_v$  conduit à une équation du second degré dont les solutions sont données par :

$$\{\lambda_x, \lambda_v\} = \frac{\lambda_{d1} \pm \sqrt{\lambda_{d1}^2 - 4(\lambda_{p1} - k_1)}}{2} \quad (6-47)$$

Sachant que les paramètres  $\lambda_{p1}$  et  $\lambda_{d1}$  sont positifs, les coefficients  $\lambda_x$  et  $\lambda_v$  seront positifs si la condition suivante est satisfaite :

$$\lambda_{d1}^2 - 4(\lambda_{p1} - k_1) > 0 \Leftrightarrow k_1 > \lambda_{p1} - \frac{\lambda_{d1}^2}{4} \quad (6-48)$$

Comme la constante  $k_1$  doit elle aussi être positive, elle sera choisie sous la forme suivante :

$$k_1 > \min\left(0; \lambda_{p1} - \frac{\lambda_{d1}^2}{4}\right) \quad (6-49)$$

### 6.3.3.2 Evaluation sur le scénario de test

Les matrices de gain  $A_p$  et  $A_d$  ont été fixées au *chapitre V* dans la partie traitant de la spécifications des modes propres (découplage entre boucle lente et boucle rapide) :

$$\begin{cases} A_p = \text{diag}(\lambda_{p1}, \lambda_{p2}) = \text{diag}(w_{tk}^2, w_{xtk}^2) = \text{diag}(4 \cdot 10^{-4}, 4 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-2}) \text{sec}^{-2} \\ A_d = \text{diag}(\lambda_{d1}, \lambda_{d2}) = \text{diag}(m_{tk} w_{tk}, m_{xtk} w_{xtk}) = \text{diag}(16 \cdot 10^{-3}, 16 \cdot 10^{-3}) \text{sec}^{-1} \end{cases} \quad (6-50)$$

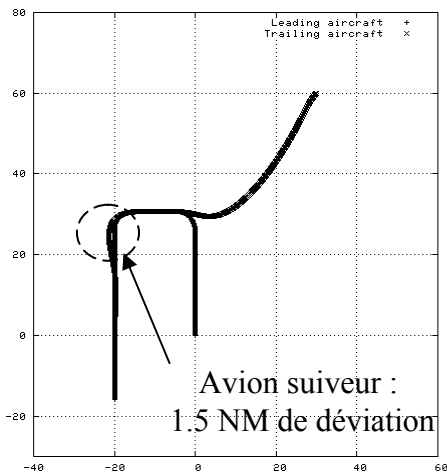
Les gains des matrices  $A_1$  et  $A_2$  sont alors calculés à partir de la relation ( 6-41 ). Nous avons de plus choisi pour les paramètres  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  qui apparaissent dans ( 6-42 ) et ( 6-43 ) les valeurs suivantes :

$$\lambda_x = \lambda_y = \frac{\lambda_{d1}}{2} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ sec}^{-1} \quad (6-51)$$

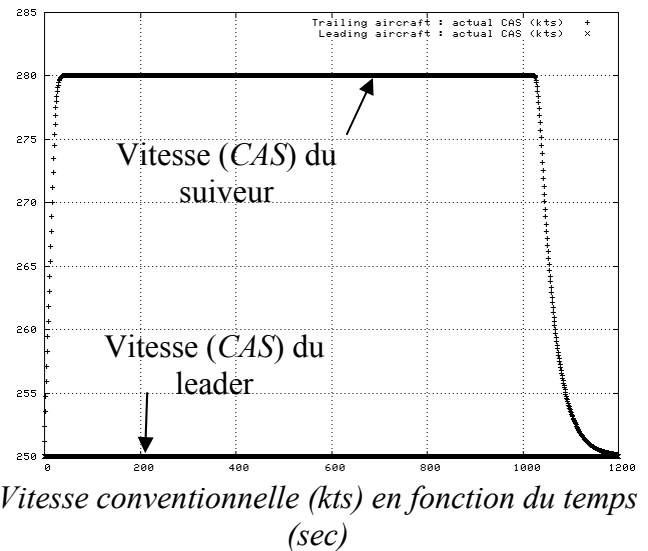
Nous avons vu au *chapitre II* qu'aucune information n'est transmise dans les reports *ADS-B* sur l'accélération de la vitesse sol et la vitesse de lacet par rapport à la route de l'avion leader. Ces paramètres pourraient être estimés grâce à un observateur. Cependant, comme ces paramètres ont une valeur qui reste relativement faible pour les avions de transport commercial, nous les avons considérés comme nuls. Les expressions ( 6-42 ) et ( 6-43 ) ont donc été simplifiées en supposant que le leader évolue à vitesse sol et à route stabilisées (i.e.  $\dot{G}_{sl} = \dot{\chi}_l = 0$ ).

Le scénario de test qui a été présenté au chapitre précédent est repris. Les résultats de simulation obtenus pour le scénario de test sont les suivants :

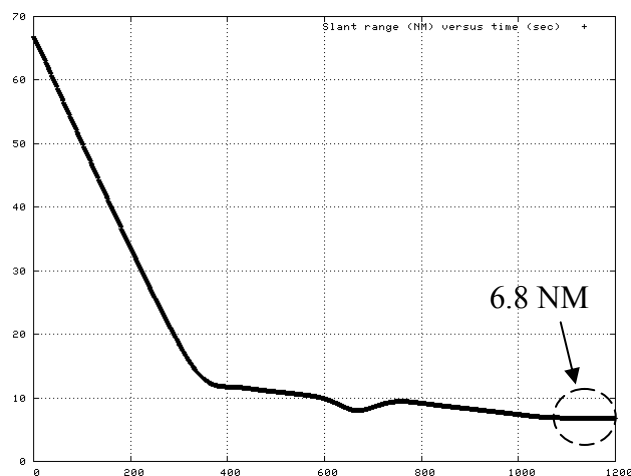
## Contribution à la synthèse de lois de commande pour la navigation relative entre aéronefs



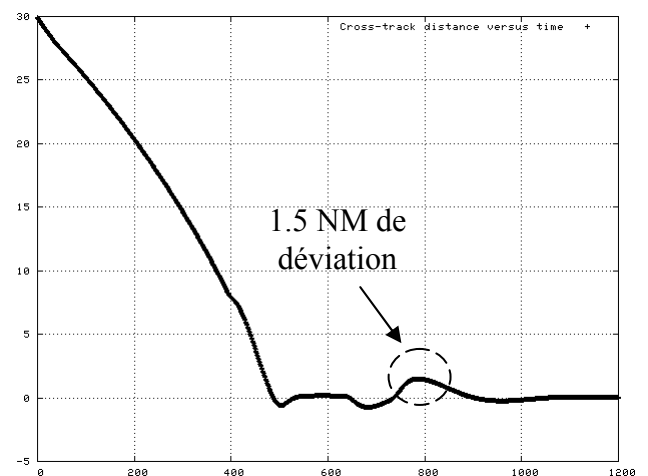
Evolution des trajectoires dans le plan horizontal (échelle orthonormée en NM)



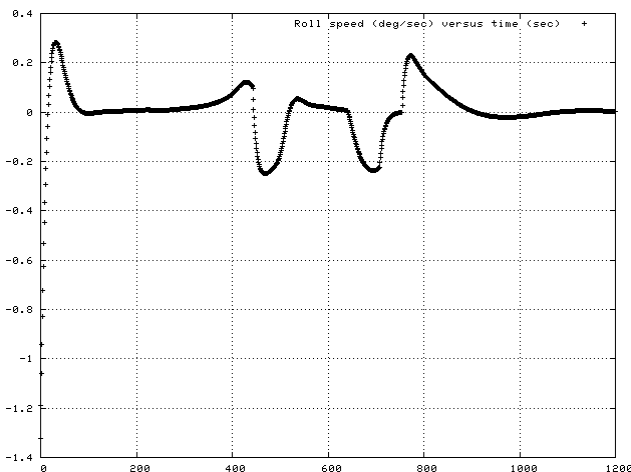
Vitesse conventionnelle (kts) en fonction du temps (sec)



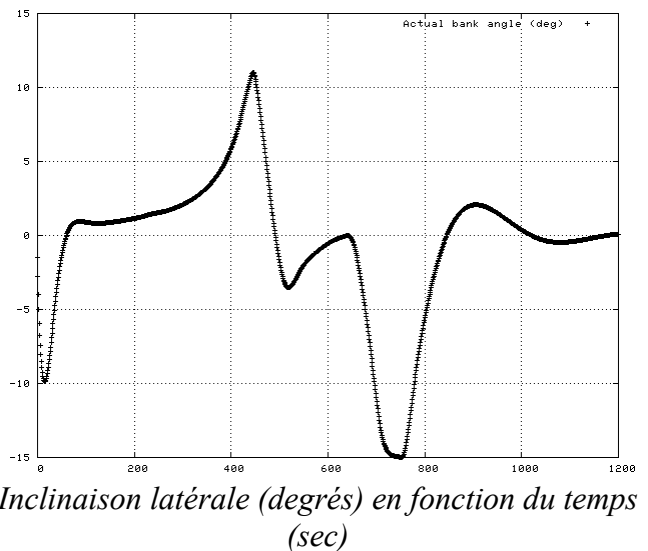
Distance entre les deux avions (NM) en fonction du temps (sec)



Écart latéral (NM) dans le repère de la trajectoire de consigne en fonction du temps (sec)



Vitesse de roulis commandée (deg/sec) en fonction du temps (sec)



Inclinaison latérale (degrés) en fonction du temps (sec)

Figure 6-1 Evolution des paramètres pour le scénario de test

Pour ce scénario de test, la loi de commande de type backstepping engendre une déviation de 1.5NM par rapport à la trajectoire de consigne dans plan horizontal (3.1NM pour la loi

proportionnelle et dérivée). De plus, l'évolution de la vitesse conventionnelle de l'avion suiveur est plus régulière comparativement à la loi proportionnelle et dérivée.

La distance entre les deux avions converge vers 6.8NM : cette distance correspond à la vitesse aérodynamique du leader (272 kts) multipliée par le retard de 90 sec.

Une autre approche conduisant à une loi de commande plus simple consiste à simplifier l'expression de la commande  $\underline{u}$  en utilisant l'inégalité de Young (appelée aussi inégalité triangulaire).

## 6.4 Loi de commande simplifiée

### 6.4.1 Méthode de synthèse

L'objectif de ce paragraphe est de proposer une méthode de synthèse permettant d'obtenir une loi de commande simplifiée dans laquelle la commande  $\underline{u}_{eq}$  apparaît de manière explicite dans les relations issues de la construction de la fonction de Lyapunov.

Le développement de ( 6-23 ) en tenant compte de ( 6-17 ) conduit à l'expression suivante, où  $I_2$  désigne la matrice unité dans  $\mathcal{R}^2$  et où  $\dot{\chi}$  est une des deux composantes du vecteur de commande  $\underline{u}_{eq}$  :

$$\dot{V}_1 = -k_1 \underline{e}_s^T \underline{A}_1 \underline{e}_s + \underline{z}^T (k_1 I_2 + \underline{A}_1 J(\dot{\chi})) \underline{e}_s + \underline{z}^T \left( \underline{A}_1 \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) + \frac{\partial \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}^T} \cdot \underline{u}_{eq} + \frac{\partial \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}_l^T} \cdot \underline{\dot{\tau}}_l \right) \quad (6-52)$$

Par la suite, nous prendrons pour les matrices  $\underline{A}_1$  et  $\underline{A}_2$  des matrices diagonales de la forme suivante :

$$\begin{cases} \underline{A}_1 = \text{diag}(\lambda_x, \lambda_y) \\ \underline{A}_2 = \text{diag}(\lambda_v, \lambda_\psi) \end{cases} \quad (6-53)$$

Dans le cas scalaire, l'inégalité de Young s'exprime sous la forme suivante : pour tout réel  $x$  et  $y$ , et pour n'importe quelle constante  $c$  positive, l'inégalité suivante est toujours vérifiée :

$$xy \leq \frac{1}{2c} x^2 + \frac{c}{2} y^2 \quad (6-54)$$

Cette inégalité est obtenue en développant l'inégalité suivante :

$$\left( \frac{x}{\sqrt{c}} - y\sqrt{c} \right)^2 \geq 0 \quad (6-55)$$

Développons le terme  $\underline{z}^T (k_1 I_2 + \underline{A}_1 J(\dot{\chi})) \underline{e}_s$  qui apparaît dans la relation ( 6-52 ). Il vient :

$$\underline{z}^T (k_1 I_2 + \underline{A}_1 J(\dot{\chi})) \underline{e}_s = \underline{z}^T \begin{bmatrix} k_1 & \lambda_x \dot{\chi} \\ -\lambda_y \dot{\chi} & k_1 \end{bmatrix} \underline{e}_s \quad (6-56)$$

Posons  $\underline{z} = (z_1, z_2)$  et  $\underline{e}_s = (e_1, e_2)$  et développons l'expression précédente :

$$\underline{z}^T (k_1 I_2 + \underline{A}_1 J(\dot{\chi})) \underline{e}_s = z_1 k_1 e_1 + z_1 \lambda_x \dot{\chi} e_2 - z_2 \lambda_y \dot{\chi} e_1 + z_2 k_1 e_2 \quad (6-57)$$

En appliquant l'inégalité de Young à chaque terme, et en désignant par  $(c_1, c_2, c_3, c_4)$  quatre constantes positives, il vient :

$$\begin{aligned} \underline{z}^T (k_1 I_2 + \underline{A}_1 J(\dot{\chi})) \underline{e}_s &\leq \frac{z_1^2}{2c_1} + \frac{c_1}{2} (k_1 e_1)^2 + \frac{z_1^2}{2c_2} + \frac{c_2}{2} (\lambda_x \dot{\chi} e_2)^2 \\ &\quad + \frac{z_2^2}{2c_3} + \frac{c_3}{2} (\lambda_y \dot{\chi} e_1)^2 + \frac{z_2^2}{2c_4} + \frac{c_4}{2} (k_1 e_2)^2 \end{aligned} \quad (6-58)$$

Contribution à la synthèse de lois de commande pour la navigation relative entre aéronefs  
soit, sous forme matricielle :

$$\underline{z}^T (k_1 I_2 + A_1 J(\dot{\chi})) \underline{e}_s \leq \frac{1}{2} \underline{z}^T D_z \underline{z} + \frac{1}{2} \underline{e}_s^T D_e \underline{e}_s \quad (6-59)$$

$$D_z = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \end{bmatrix} \quad (6-60)$$

$$D_e(\dot{\chi}) = \begin{bmatrix} c_1 k_1^2 + c_3 (\lambda_y \dot{\chi})^2 & 0 \\ 0 & c_4 k_1^2 + c_2 (\lambda_x \dot{\chi})^2 \end{bmatrix} \quad (6-61)$$

La valeur de  $\dot{\chi}$  étant bornée, il existe une constante positive  $\dot{\chi}_{\max}$  telle que :

$$\dot{\chi} \leq \dot{\chi}_{\max} \quad (6-62)$$

de sorte que :

$$D_e(\dot{\chi}) \leq D_e(\dot{\chi}_{\max}) \quad (6-63)$$

Par conséquent, la relation ( 6-52 ) peut être majorée :

$$\dot{V}_1 \leq -\underline{e}_s^T \left( k_1 A_1 - \frac{1}{2} D_e(\dot{\chi}_{\max}) \right) \underline{e}_s + \frac{1}{2} \underline{z}^T D_z \underline{z} + \underline{z}^T \left( A_1 \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) + \frac{\partial \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}^T} \cdot \underline{u}_{eq} + \frac{\partial \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}_l^T} \cdot \dot{\underline{\tau}}_l \right) \quad (6-64)$$

Choisissons  $\underline{u}_{eq}$  sous la forme suivante :

$$\underline{u}_{eq} = - \left( \frac{\partial \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}^T} \right)^{-1} \left( A_1 \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) + A_2 \underline{z} + \frac{\partial \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}_l^T} \cdot \dot{\underline{\tau}}_l \right) \quad (6-65)$$

L'inverse de la matrice  $\frac{\partial \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}^T}$  a été calculée dans la relation ( 6-28 ).

En tenant compte de ( 6-21 ), il vient :

$$\underline{u}_{eq} = - \left( \frac{\partial \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}^T} \right)^{-1} \left( (A_1 + A_2) \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l) + A_2 A_1 \underline{e}_s + \frac{\partial \underline{b}(\underline{\tau}, \underline{\tau}_l)}{\partial \underline{\tau}_l^T} \cdot \dot{\underline{\tau}}_l \right) \quad (6-66)$$

Comparée à l'expression ( 6-30 ), l'expression précédente ne fait plus apparaître la composante  $\dot{\chi}$  du vecteur de commande  $\underline{u}_{eq}$  à droite de l'égalité. L'expression de la loi de commande est donc simplifiée puisque l'étape de résolution de l'équation ( 6-30 ) permettant d'exprimer du vecteur de commande  $\underline{u}_{eq}$  a disparue.

L'introduction de la loi de commande ( 6-65 ) dans l'inégalité ( 6-64 ) conduit à :

$$\dot{V}_1 \leq -\underline{e}_s^T \left( k_1 A_1 - \frac{1}{2} D_e(\dot{\chi}_{\max}) \right) \underline{e}_s - \underline{z}^T \left( A_2 - \frac{1}{2} D_z \right) \underline{z} \quad (6-67)$$

Par conséquent, il y a convergence asymptotique globale si la constante positive  $k_1$  et les constantes positives  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  et  $c_4$  définissant les matrices  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $D_e$  et  $D_z$  sont choisies de telle sorte que :

$$\begin{cases} k_1 A_1 - \frac{1}{2} D_e(\dot{\chi}_{\max}) > 0 \\ A_2 - \frac{1}{2} D_z > 0 \end{cases} \quad (6-68)$$

Cette approche a été présentée dans [6-f].

### 6.4.2 Résolution des inégalités matricielles

L'objet de ce paragraphe est de montrer que les conditions sous lesquelles les inégalités matricielles ( 6-68 ) admettent des solutions sont toujours vérifiées.

Dans un premier temps, explicitons les égalités matricielles ( 6-68 ) :

$$\begin{cases} k_1 \lambda_x - \frac{1}{2} (c_1 k_1^2 + c_3 (\lambda_y \dot{\chi}_{\max})^2) > 0 \\ k_1 \lambda_y - \frac{1}{2} (c_4 k_1^2 + c_2 (\lambda_x \dot{\chi}_{\max})^2) > 0 \\ \lambda_v - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) > 0 \\ \lambda_\psi - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \right) > 0 \end{cases} \quad (6-69)$$

La partie du *chapitre V* consacrée à la spécification des modes propres a conduit à des valeurs identiques pour les coefficients proportionnel et dérivée :

$$\begin{cases} \lambda_{p1} = \lambda_{p2} \\ \lambda_{d1} = \lambda_{d2} \end{cases} \quad (6-70)$$

Nous choisirons donc les constantes positives  $c_1, c_2, c_3, c_4, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_v$  et  $\lambda_\psi$  de telle sorte que :

$$\begin{cases} \lambda_x = \lambda_y \\ \lambda_v = \lambda_\psi \end{cases} \text{ et } \begin{cases} c_1 = c_4 \\ c_2 = c_3 \end{cases} \quad (6-71)$$

Par conséquent, les quatre inégalités matricielles ( 6-69 ) se réduisent aux deux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} k_1 \lambda_x - \frac{1}{2} (c_1 k_1^2 + c_2 (\lambda_x \dot{\chi}_{\max})^2) > 0 \\ \lambda_v - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) > 0 \end{cases} \quad (6-72)$$

Nous supposons que les constantes réelles et positives  $\lambda_x, \lambda_v$  et  $k_1$  sont connues. On s'intéresse alors aux conditions sous lesquelles les constantes  $c_1$  et  $c_2$  sont positives.

Il vient après quelques manipulations, en supposant  $c_1$  et  $c_2$  positives :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \left( \frac{\lambda_x \dot{\chi}_{\max}}{k_1} \right)^2 < 2 \frac{\lambda_x}{k_1} \\ c_1 + c_2 - 2 \lambda_v c_1 c_2 < 0 \end{cases} \quad (6-73)$$

Posons :

$$\begin{cases} A = \left( \frac{\lambda_x \dot{\chi}_{\max}}{k_1} \right)^2 \\ B = 2 \frac{\lambda_x}{k_1} \end{cases} \quad (6-74)$$

La figure suivante représente les valeurs possibles pour  $c_1$  et  $c_2$  positives vérifiant les inégalités

( 6-72 ) :

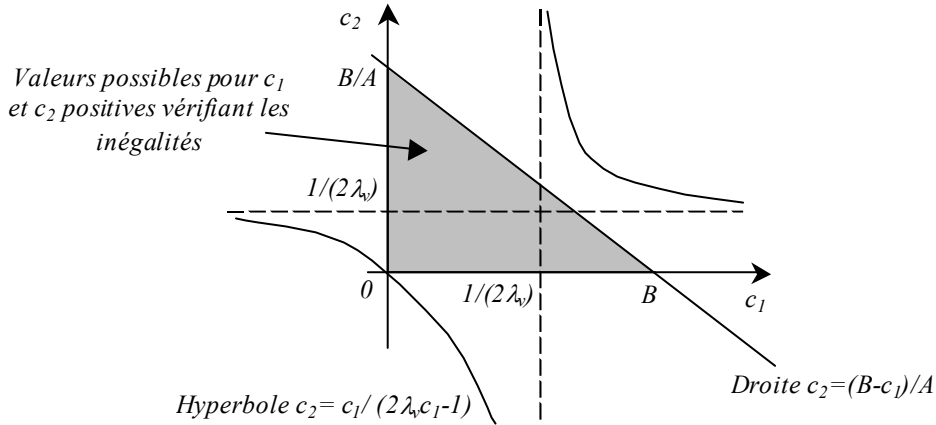


Figure 6-2 Graphes des domaines admissibles

Une condition suffisante pour qu'il existe des constantes positives  $c_1$  et  $c_2$  vérifiant les inégalités

( 6-72 ) est que  $B$  soit supérieur à zéro, ce qui est toujours vérifié car les constantes  $\lambda_x$  et  $k_l$  sont positives.

Par conséquent, les conditions sous lesquelles les inégalités matricielles ( 6-68 ) admettent des solutions sont toujours vérifiées.

### 6.4.3 Cas particulier du vent nul : analogie avec la commande de type proportionnelle et dérivée

Dans le cas où il n'y a pas de vent et où les variations de vitesse et d'angle de route sont négligées, la commande donnée par la relation ( 6-66 ) devient alors, en tenant compte de ( 6-20 ) :

$$\underline{u}_{eq} = \begin{bmatrix} \lambda_x \lambda_v tk + (\lambda_x + \lambda_v)(V_l \cdot \cos(\psi - \psi_l) - V) - \kappa(xtk, \psi, \psi_l, V_l) \cdot \tan(\psi - \psi_l) \\ \frac{V}{V_l \cos(\psi - \psi_l)} \kappa(xtk, \psi, \psi_l, V_l) \end{bmatrix} \quad (6-75)$$

$$\kappa(xtk, \psi, \psi_l, V_l) = \lambda_y \lambda_\psi xtk - (\lambda_y + \lambda_\psi) V_l \cdot \sin(\psi - \psi_l) \quad (6-76)$$

La loi de commande devient singulière pour  $(\psi - \psi_l) = 90$  degrés (modulo 180 degrés), c'est à dire lorsque les trajectoires de la position passée du leader et de la position courante du suiveur sont à angle droit. Cette singularité est passagère puisqu'elle ne correspond pas à un point d'équilibre où  $\psi = \psi_l$  mais conduit à la saturation de la commande d'inclinaison.

Au voisinage de  $V = V_l$  et  $\psi = \psi_l$ , nous pouvons faire les approximations suivantes :

$$\begin{cases} \cos(\psi - \psi_l) \approx 1 \\ \kappa(xtk, \psi, \psi_l, V_l) \cdot \tan(\psi - \psi_l) \approx 0 \\ \kappa(xtk, \psi, \psi_l, V_l) \approx \lambda_y \lambda_\psi xtk - (\lambda_y + \lambda_\psi) V_l \cdot (\psi - \psi_l) \end{cases} \quad (6-77)$$

Nous obtenons ainsi une loi de commande de type proportionnelle et dérivée :

$$\underline{u}_{eq} \approx \begin{bmatrix} \lambda_x \lambda_v tk + (\lambda_x + \lambda_v)(V_l - V) \\ \lambda_y \lambda_\psi xtk + (\lambda_y + \lambda_\psi) V_l (\psi_l - \psi) \end{bmatrix} \quad (6-78)$$

Au chapitre précédant, nous avons étudié une loi de commande de la forme suivante :

$$\tilde{\underline{u}}_{eq} = \begin{bmatrix} \lambda_{p1}tk + \lambda_{d1}(V_l - V) \\ \lambda_{p2}xtk + \lambda_{d2}V_l(\psi_l - \psi) \end{bmatrix} \quad (6-79)$$

Par conséquent, les deux lois sont comparables à condition de faire l'identification suivante :

$$\begin{cases} \lambda_{p1} = \lambda_x \lambda_v \\ \lambda_{d1} = \lambda_x + \lambda_v \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \lambda_{p2} = \lambda_y \lambda_\psi \\ \lambda_{d2} = \lambda_y + \lambda_\psi \end{cases} \quad (6-80)$$

Dans ces conditions, les relations ( 6-75 ) et ( 6-76 ) deviennent alors :

$$\underline{u}_{eq} = \begin{bmatrix} \lambda_{p1}tk + \lambda_{d1}(V_l \cdot \cos(\psi - \psi_l) - V) - \kappa(xtk, \psi, \psi_l, V_l) \cdot \tan(\psi - \psi_l) \\ \frac{V}{V_l \cos(\psi - \psi_l)} \kappa(xtk, \psi, \psi_l, V_l) \end{bmatrix} \quad (6-81)$$

$$\kappa(xtk, \psi, \psi_l, V_l) = \lambda_{p2}xtk - \lambda_{d2}V_l \cdot \sin(\psi - \psi_l) \quad (6-82)$$

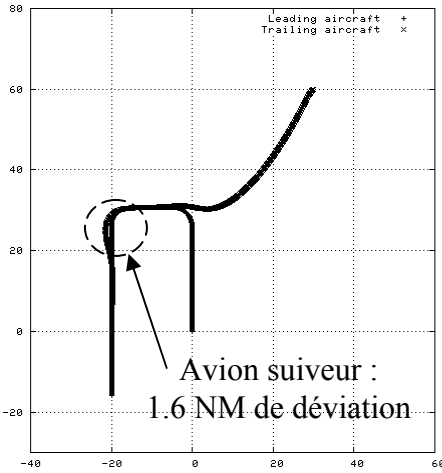
## 6.4.4 Evaluation qualitative

### 6.4.4.1 Evaluation sur le scénario de test

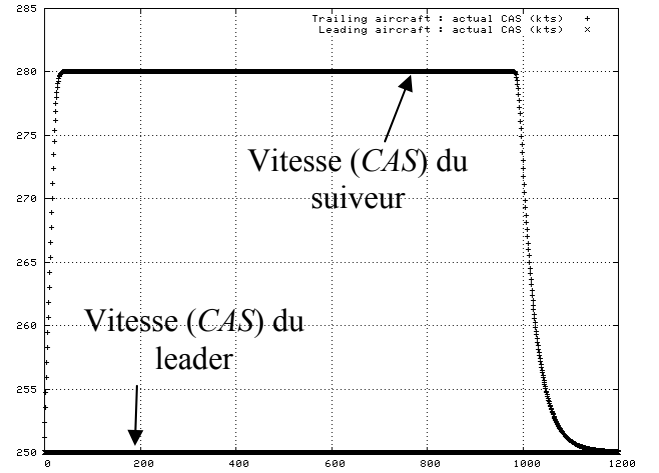
Comme aucune information n'est transmise dans les reports *ADS-B* sur l'accélération de la vitesse sol et la vitesse de lacet par rapport à la route de l'avion leader (cf. *chapitre II*), la loi de commande ( 6-66 ) a été simplifiée en supposant que le leader évolue à vitesse sol et à route stabilisées (i.e.  $\dot{G}_{sl} = \dot{\chi}_l = 0$ ).

Le scénario de test a été présenté au chapitre précédant. De plus, les matrices de gain  $A_p$  et  $A_d$  sont données par ( 6-50 ).

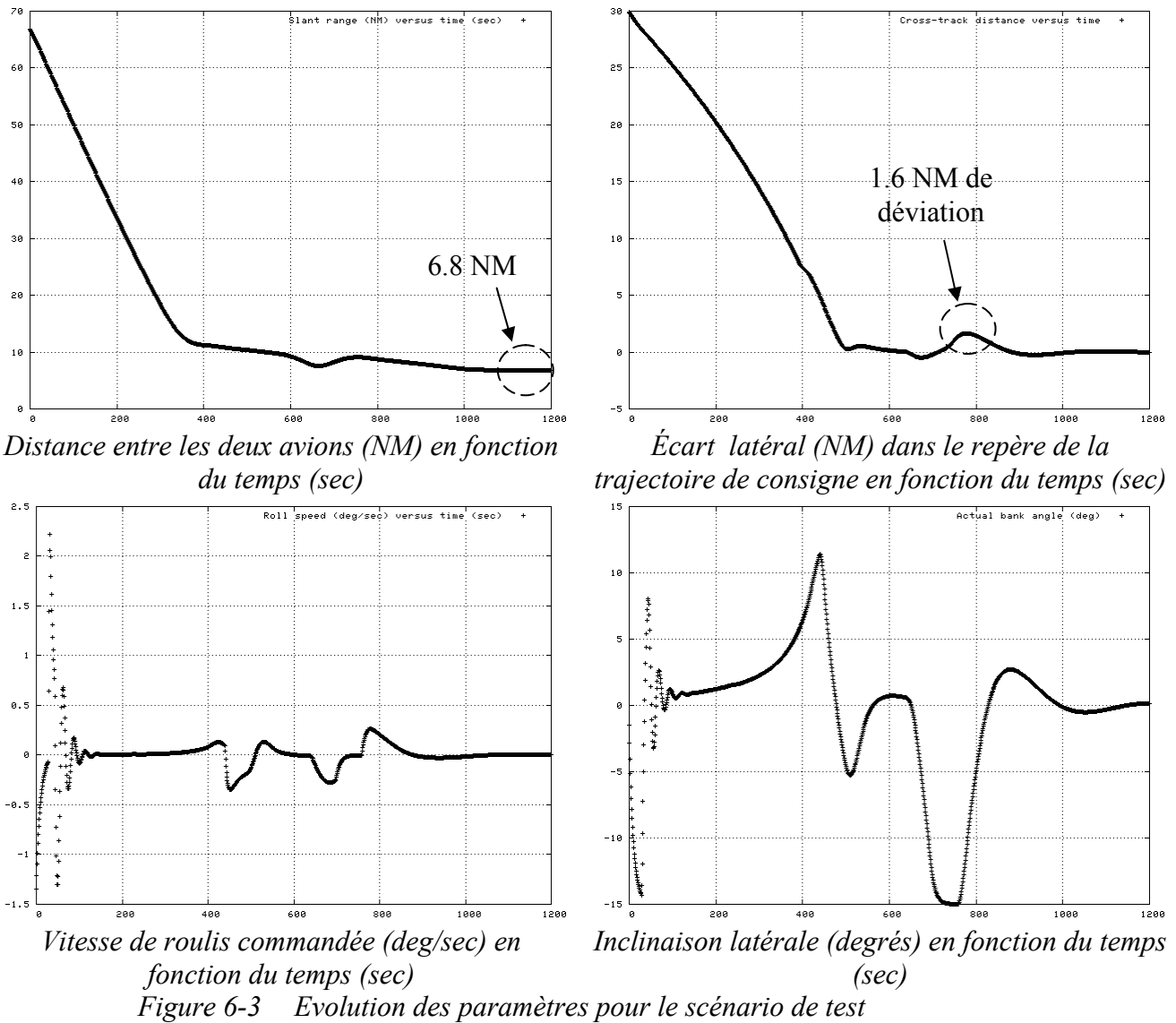
Les résultats de simulation obtenus pour le scénario de test sont les suivants :



Evolution des trajectoires dans le plan horizontal  
(échelle orthonormée en NM)



Vitesse conventionnelle (kts) en fonction du temps  
(sec)



Pour ce scénario de test, la loi de commande de type backstepping engendre une déviation de 1.6NM par rapport à la trajectoire de consigne dans plan horizontal : c'est pratiquement la moitié de celle observée avec la loi de type proportionnelle et dérivée (3.1NM). De plus, l'évolution de la vitesse conventionnelle de l'avion suiveur est plus régulière comparativement à la loi proportionnelle et dérivée. La distance entre les deux avions converge vers 6.8NM, ce qui correspond à la vitesse aérodynamique du leader (272 kts) multipliée par le retard de 90 sec. Les évolutions verticales ne sont pas représentées car elles sont identiques à celles du chapitre précédant (la loi de guidage vertical reste la même). Les résultats obtenus avec la loi de commande simplifiée sont comparables à ceux obtenus avec la loi de commande non simplifiée, mais l'expression de la loi de commande est plus simple dans ce cas.

## 6.5 Conclusion

Dans le cadre du guidage relatif, la commande par backstepping apparaît comme une généralisation de la commande de type proportionnelle et dérivée au cas non linéaire, au prix cependant d'une expression plus lourde de la loi de guidage. Comparativement aux techniques non-linéaires de type bouclage linéarisant basées sur les écarts exprimés dans le repère lié à l'avion suiveur et rappelées dans le chapitre consacré à l'état de l'art, la

technique du backstepping permet de contourner une singularité de la loi de guidage au point de positionnement relatif visé.

Malgré le fait que la dynamique du guidage relatif exprimée dans le repère lié à l'avion suiveur ne soit pas sous forme *feedback* (la composante  $\dot{\chi}$  du vecteur de commande apparaît dans toutes les équations d'état), la technique du backstepping a pu être appliquée en mettant à profit une propriété d'antisymétrie d'une matrice qui apparaît dans les équations d'état.

Au chapitre suivant, après avoir constaté que les lois de guidage de type proportionnelle et dérivée et de type backstepping conduisent à des trajectoires dans le plan qui peuvent être dangereuses du point de vue de la circulation aérienne, nous serons amené à exploiter une propriété de la dynamique du guidage relatif qui nous permettra de mieux maîtriser la distance entre les deux avions : il s'agit de la propriété de platitude.

## 6.6 Références bibliographiques

- [6-a] *Khalil H.K., Nonlinear Systems, Prentice Hall, Third Edition, 2002*
- [6-b] *Kokotovic P.V., Sussmann H.J., A Positive Real Condition for Global Stabilization of Nonlinear Systems, Systems and Control Letters, vol 13, pp 125-133, 1989*
- [6-c] *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V., Nonlinear and Adaptive Control Design, John Wiley and Sons Ltd., 1995*
- [6-d] *Kurzweil J., On the inversion of Ljapunov's second theorem on stability of motion, Ann. Math. Soc. Trans. Ser.2, 24, 19-77 (1956)*
- [6-e] *Miquel T., Mora Camino F., Casaux F., Positionnement relatif entre aéronefs, application du backstepping, Journées Doctorales d'Automatique (JDA'2003), Valenciennes (France), 25-27 Juin 2003, pp.461-466*
- [6-f] *Miquel T., Mora Camino F., Casaux F., Loscos J.M., A simplified backstepping design for 3-D time-based aircraft relative guidance, AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Providence (USA), 16-19 Août 2004*
- [6-g] *Praly L., An introduction to some Lyapunov designs of global asymptotic stabilizers, Banach summer school on mathematical control theory, Poland, September 2002*
- [6-h] *Praly L., Fonction de Lyapunov et stabilisation de point d'équilibre, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Centre Automatique et Systèmes, Mars 2004*
- [6-i] *Sai-Ming Li, Jovan D. Boskovic, Raman K. Mehra, Globally stable automatic formation flight control in two dimensions, AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Montreal, Aug. 2001, paper No. 2001-4046*
- [6-j] *Sepulchre R., Jankovic M., Kokotovic P.V., Constructive Nonlinear Control, Springer-Verlag, 1997*
- [6-k] *Singh S., Pachter M., Chandler P., Banda S., Rasmussen S., Shumacher C., Input-output invertibility and sliding mode control for close formation flying of multiple UAVs, International Journal of robust and nonlinear control, vol 10 : 779-797, 2000*

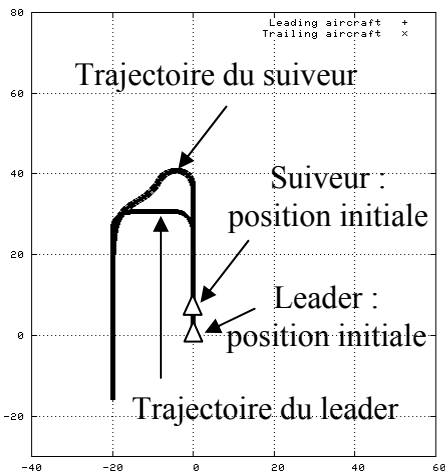
## Chapitre 7

### Bouclage linéarisant basé sur la propriété de platitude

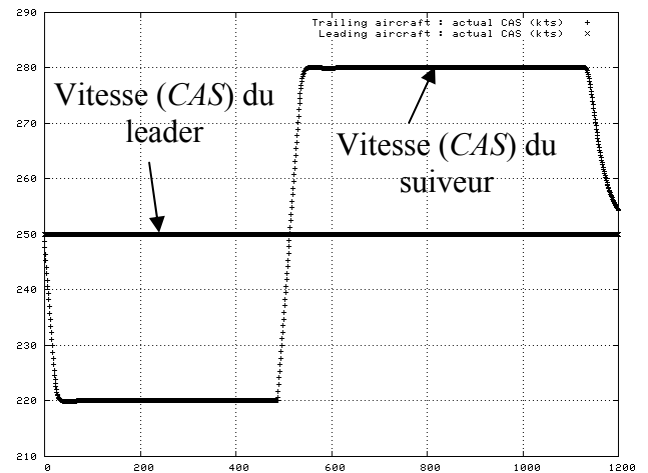
#### 7.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédant comment une technique de commande non-linéaire permet d'augmenter la rapidité de la loi de guidage relatif. Cependant, les lois de guidage relatif de type proportionnel et dérivée ou de type backstepping que nous avons synthétisées précédemment se contentent de faire suivre (*tracking*) à l'aéronef suiveur la position passée de l'aéronef leader, sans s'occuper de la distance séparant les positions actuelles des deux aéronefs.

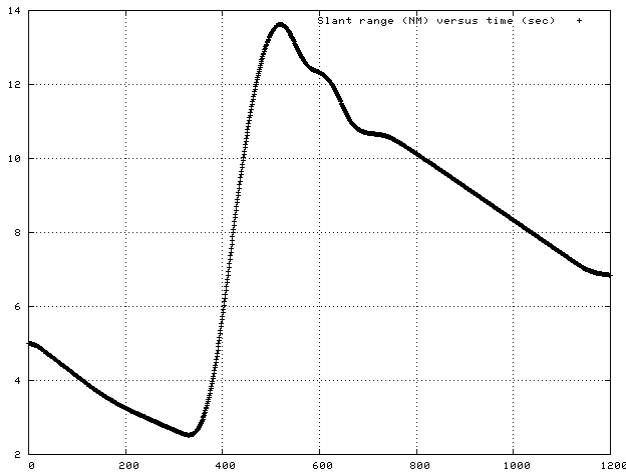
Ainsi par exemple, intéressons nous au scénario de test qui a été modifié de telle sorte que l'avion suiveur soit placé 5 NM devant l'avion leader, au cap 0 degré (cap au Nord) et au niveau de vol FL200. L'objectif est toujours de placer l'avion suiveur 90 secondes derrière l'avion leader. Clairement, la position initiale de l'avion suiveur est située devant l'avion leader, et la loi de guidage relatif doit gérer le positionnement de l'aéronef suiveur de telle manière à le placer à l'arrière de l'avion leader. Les simulations avec la loi de guidage relatif basée sur le backstepping donnent les résultats suivants :



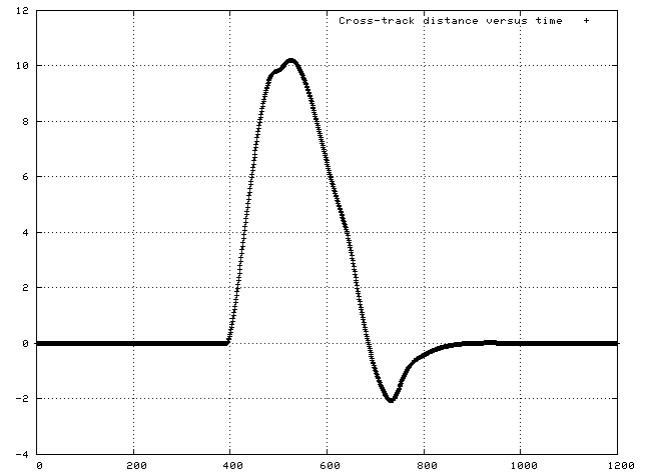
Evolution des trajectoires dans le plan horizontal  
(échelle orthonormée en NM)



Vitesse conventionnelle (kts) en fonction du temps  
(sec)



Distance entre les deux avions (NM) en fonction du temps (sec)



Écart latéral (NM) dans le repère de la trajectoire de consigne en fonction du temps (sec)

Figure 7-1 Comportement de la loi de guidage de type backstepping lors d'un dépassement de l'avion leader

Pour la loi de type backstepping, l'avion suiveur continue sa route cap au Nord tant que la trajectoire de l'avion leader retardée de 90 secondes n'a pas tournée à gauche. La vitesse décroît afin de permettre à l'avion leader de dépasser, puis croît à nouveau afin de rattraper le retard de l'avion suiveur provoqué par le virage à gauche de l'avion leader. La distance minimale entre les deux aéronefs est de 2.5NM, ce qui est inférieur à la séparation utilisée par le contrôle du trafic aérien pour assurer la sécurité (cf. *chapitre II*). Pour la loi de type proportionnelle et dérivée, les simulations donnent des résultats similaires. Pour les deux types de loi de guidage, la distance minimale entre les deux aéronefs est par conséquent incompatible avec la sécurité.

L'objectif de ce chapitre est de proposer une loi de guidage relatif permettant à l'aéronef suiveur de poursuivre la position passée de l'aéronef leader, tout en assurant un critère de sécurité entre les deux aéronefs : il s'agit en effet de faire en sorte que la distance entre les deux aéronefs ne soit jamais inférieure à une valeur minimale. Nous utiliserons pour cela la propriété de platitude associée à des sorties judicieusement choisies.

Nous commençons ce chapitre par la présentation de la propriété de platitude. Puis nous montrons que l'écart longitudinal et latéral pris comme sorties dans le chapitre précédent ne sont pas des sorties plates. Nous exhibons ensuite une couple de sorties plates possibles pour le système considéré, et nous montrons enfin sur un exemple le comportement de la loi de commande basée sur la platitude.

## 7.2 Présentation de la propriété de platitude

### 7.2.1 Définition

Nous reprenons ici les notions présentées dans [7-a]. Soit un système à  $m$  entrées regroupées dans un vecteur noté  $\underline{u}$  et dont le vecteur d'état, notés  $\underline{x}$ , est de dimension  $n$  :

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}) \quad (7-1)$$

**Définition 2 :** Le système ( 7-1 ) est explicitement différentiellement plat, ou plus brièvement plat, si et seulement si il existe une sortie  $\underline{y}$  de dimension  $m$ , appelée sortie plate, deux entiers  $r$  et  $s$  et des applications  $\psi$  de  $X \times (\mathcal{R}^m)^{s+1}$  dans  $\mathcal{R}^m$ , de rang  $m$  dans un ouvert convenable, et  $(\varphi_0, \varphi_1)$  de  $\mathcal{R}^{(m+2)r}$  dans  $\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m$ , de rang  $n+m$  dans un ouvert convenable tel

que  $\underline{y} = (y_1, \dots, y_m) = \psi(\underline{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}^{(s)})$  implique  $\underline{x} = \varphi_0(\underline{y}, \dot{\underline{y}}, \dots, \underline{y}^{(r)})$  et  $\underline{u} = \varphi_1(\underline{y}, \dot{\underline{y}}, \dots, \underline{y}^{(r+1)})$ , l'équation  $\dot{\varphi}_0 = f(\varphi_0, \varphi_1)$  étant identiquement vérifiée.

Le système ( 7-1 ) est dit alors être *Lie-Bäcklund équivalent* au système trivial suivant, où  $\underline{v}$  est une nouvelle entrée :

$$\underline{y}^{(r+1)} = \underline{v} \quad (7-2)$$

La propriété de platitude exprime que l'on peut obtenir toutes les variables du système en fonction de la sortie plate et de ses dérivées. Par conséquent, toute trajectoire  $t \rightarrow (\underline{x}(t), \underline{u}(t))$  du système ( 7-1 ) est l'image d'une trajectoire  $t \rightarrow (\underline{y}(t), \dots, \underline{y}^{(r+1)}(t))$  engendrée par la sortie plate et un nombre fini de ses dérivées.

Il n'y a pas unicité des sorties plates. Par exemple, [7-a] montre que si  $(y_1, y_2)$  est une sortie plate d'un système à deux entrées, alors  $(z_1, z_2) = (y_1 + y_2^{(k)}, y_2)$  est encore une sortie plate pour tout entier  $k$  quelconque.

### 7.2.2 Exemple : véhicule non holonome

Nous reprenons un exemple issu de [7-a]. Considérons un véhicule à trois roues roulant sans glisser sur un plan horizontal (un avion *au sol* par exemple). Dans le plan  $(\theta, X, Y)$ , nous noterons  $(x, y)$  les coordonnées du point  $P$ , milieu de l'essieu arrière,  $Q$  le point milieu de l'essieu avant,  $l$  la distance entre les points  $P$  et  $Q$ ,  $\psi$  l'angle entre l'axe du véhicule et l'axe  $OX$ , et  $\varphi$  l'angle de braquage des roues :

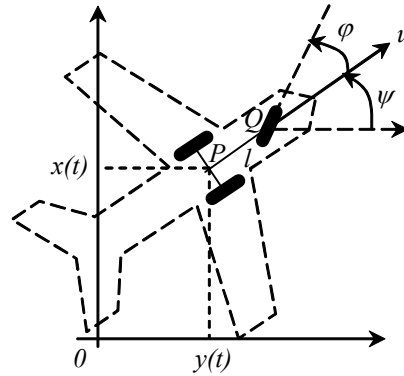


Figure 7-2 Véhicule roulant sans glisser sur un plan

Les conditions de roulement sans glissement s'expriment par le fait que  $\vec{dOP}/dt$  est parallèle à  $\vec{PQ}$ , et que  $\vec{dOQ}/dt$  est parallèle à la roue avant. Notons :

$$u = \left\| \frac{d\vec{OP}}{dt} \right\| \cdot \frac{\vec{PQ}}{\left\| \vec{PQ} \right\|} \quad (7-3)$$

Le calcul de la cinématique du mouvement conduit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos(\psi) \\ \dot{y} = u \sin(\psi) \\ \dot{\psi} = \frac{u}{l} \tan(\varphi) \end{cases} \quad (7-4)$$

Les équations précédentes ressemblent à celles de la dynamique de guidage d'un avion *en vol stabilisé* : cependant, ne sont pas exactement les mêmes. En effet, en identifiant  $u$  à la

Contribution à la synthèse de lois de commande pour la navigation relative entre aéronefs

vitesse de l'avion, et en notant  $\phi$  l'inclinaison latérale de celui-ci, la troisième équation de ( 7-4 ) doit être remplacée dans ce cas par  $\dot{\psi} = \frac{g}{u} \tan(\phi)$  (notons au passage que le fait de placer  $u$  au dénominateur empêche de mettre le système sous forme chaînée). Montrons que ce système est plat avec  $(x,y)$  comme sortie plate. Les deux premières équations donnent :

$$\begin{cases} \tan(\psi) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \\ u^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \end{cases} \quad (7-5)$$

En dérivant l'expression de  $\tan(\psi)$ , il vient :

$$\dot{\psi}(1 + \tan^2(\psi)) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (7-6)$$

Enfin, la troisième équation de ( 7-4 ) conduit à :

$$\tan(\phi) = \frac{l\dot{\psi}}{u} = l \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (7-7)$$

Par conséquent, toutes les variables du système (i.e.  $(x, y, \psi, \phi, u)$ ) s'expriment en fonction de  $(x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y})$ , ce qui prouve que le système ( 7-4 ) est plat avec  $(x,y)$  comme sortie plate.

## 7.3 Application au guidage relatif

### 7.3.1 Identification des sorties plates

#### 7.3.1.1 Abscisse et ordonnée de la position du leader exprimées dans le repère lié à l'avion suiveur

Nous allons montrer que les sorties  $tk_s$  et  $x tk_s$ , c'est à dire l'abscisse et l'ordonnée de la position du leader exprimées dans le repère lié à l'avion suiveur ne sont pas des sorties plates.

Rappelons dans un premier temps que, lorsque le vent est nul, les équations du mouvement relatif s'expriment sous la forme suivante, où  $\gamma_l$  et  $\phi$  sont les entrées du modèle,  $(\gamma, n_z)$  et  $(V_l, \psi_l)$  des paramètres exogènes variant lentement, et  $(tk_s, x tk_s, V, \psi)$  le vecteur d'état :  $tk_s$  est l'abscisse de la position de l'avion leader dans le repère lié au suiveur (écart longitudinal),  $x tk_s$  son ordonnée (écart latéral),  $V$  est la vitesse de l'avion suiveur et  $\psi$  son cap :

$$\begin{cases} \dot{tk}_s = \frac{g}{V} \phi \cdot x tk_s + V_l \cos(\psi - \psi_l) - V \\ x \dot{tk}_s = -\frac{g}{V} \phi \cdot tk_s - V_l \sin(\psi - \psi_l) \\ \dot{\psi} = \frac{g}{V} \phi \\ \dot{V} = g(\gamma_l - \gamma) \end{cases} \quad (7-8)$$

La combinaison de la seconde et de la troisième équation de ( 7-8 ) conduit à l'équation différentielle suivante identiquement vérifiée par le cap  $\psi$  :

$$\dot{\psi} + \frac{x\dot{t}k_s + V_l \sin(\psi - \psi_l)}{tk_s} = 0 \quad (7-9)$$

Cette équation indique que la connaissance des paramètres exogènes  $V_l$  et  $\psi_l$  (i.e. vitesse et cap de l'avion leader) et des sorties  $tk_s$ ,  $x\dot{t}k_s$  et de leurs dérivées permet de calculer  $\dot{\psi}$ , mais que le cap  $\psi$  ne peut pas être calculé sans intégrer (7-9). Par conséquent, les sorties  $tk_s$  et  $x\dot{t}k_s$  ne sont pas des sorties plates.

Puisque  $tk_s$  et  $x\dot{t}k_s$  ne sont pas des sorties plates, notons dès à présent que les lois de guidage qui seront synthétisées à partir des sorties plates seront intrinsèquement différentes de celles obtenues grâce à la technique du backstepping (elles ne seront pas *Lie-Bäcklund* équivalentes).

L'objet des paragraphes qui suivent est d'identifier des sorties plates possibles.

### 7.3.1.2 Coordonnées cartésiennes de la position de l'avion suiveur exprimées dans le repère lié à une position de référence

Soit  $\underline{e}_r$  le vecteur de composantes  $(tk_l, xtk_l)$  et représentant l'écart de l'avion suiveur par rapport à une position de référence, exprimé dans le repère lié à la position de référence :

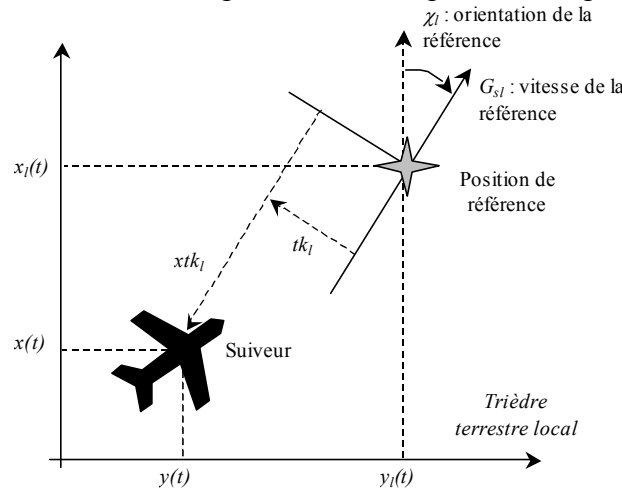


Figure 7-3 Position relative de l'avion suiveur par rapport à la position de référence, exprimé dans le trièdre lié à une position de référence

- $tk_l$  représente l'écart longitudinal, mesuré le long de l'axe parallèle à la vitesse de la position de référence ;
- $x\dot{t}k_l$  représente l'écart latéral, mesuré le long de l'axe perpendiculaire à la vitesse de la position de référence.

La position de référence peut représenter la position de l'avion leader quelques minutes plus tôt, comme dans le cas du guidage relatif en temps. Nous verrons au chapitre suivant qu'il peut aussi s'agir d'une position purement virtuelle permettant la construction d'une trajectoire de référence.

Nous allons montrer que si la trajectoire  $t \rightarrow (x_r, y_r)$  de la position de référence est connue, alors le vecteur  $\underline{e}_l = [tk_l; x\dot{t}k_l]^T$  est une sortie plate du système suivant, où les deux premières équations ont été obtenues au chapitre V dans le paragraphe *Expression de la cinématique du mouvement dans le repère lié à la position de consigne* :

$$\begin{cases} \dot{tk}_l = \dot{\chi}_l \cdot xtk_l + G_s \cdot \cos(\chi_l - \chi) - G_{sl} \\ x\dot{tk}_l = -\dot{\chi}_l \cdot tk_l - G_s \cdot \sin(\chi_l - \chi) \\ \dot{\chi} = u_1 \\ \dot{G}_s = u_2 \end{cases} \quad (7-10)$$

Notons dans un premier temps que le vecteur  $\underline{e}_l$  a l'expression suivante en fonction des coordonnées cartésiennes de l'avion suiveur ( $\underline{x}$ ), de la position de référence ( $\underline{x}_l$ ) et de la route de référence ( $\chi_l$ ) :

$$\underline{e}_l = [tk_l \quad xtk_l]^T = R(\chi_l) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_l) \quad (7-11)$$

$$R(\chi_l) = \begin{bmatrix} \cos(\chi_l) & \sin(\chi_l) \\ -\sin(\chi_l) & \cos(\chi_l) \end{bmatrix} \quad (7-12)$$

En supposant que la position  $\underline{x}_l$  et l'orientation  $\chi_l$  de la position de référence sont connues (paramètres exogènes), la relation ( 7-11 ) montre que la connaissance de  $\underline{e}_l$  permet d'en déduire la position  $\underline{x}$  de l'avion suiveur :

$$\underline{x} = \underline{x}_l + (R(\chi_l))^T \cdot \underline{e}_l \quad (7-13)$$

De plus, la manipulation des deux premières équations de ( 5-53 ) conduit à :

$$\begin{cases} G_s = \sqrt{(\dot{tk}_l - \dot{\chi}_l \cdot xtk_l + G_{sl})^2 + (x\dot{tk}_l + \dot{\chi}_l \cdot tk_l)^2} \\ \chi = \chi_l + \arctan\left(\frac{x\dot{tk}_l + \dot{\chi}_l \cdot tk_l}{\dot{tk}_l - \dot{\chi}_l \cdot xtk_l + G_{sl}}\right) \end{cases} \quad (7-14)$$

Par conséquent, l'écart  $\underline{e}_l$  et sa dérivée première par rapport au temps permettent de calculer la vitesse sol  $G_s$  et la route  $\chi$  de l'avion suiveur.

Il reste à exprimer la dérivée par rapport au temps de  $\chi$  et  $G_s$  en fonction de  $tk_l$ ,  $xtk_l$  et de leurs dérivées.

En dérivant une seconde fois par rapport au temps les expressions de  $\chi$  et  $G_s$  dans ( 5-53 ), nous obtenons :

$$\begin{cases} \ddot{tk}_l = \dot{G}_s \cos(\chi - \chi_l) - G_s \dot{\chi} \sin(\chi - \chi_l) + f_1 \\ x\ddot{tk}_l = \dot{G}_s \sin(\chi - \chi_l) + G_s \dot{\chi} \cos(\chi - \chi_l) + f_2 \end{cases} \quad (7-15)$$

où :

$$\begin{cases} f_1 = 2G_s \dot{\chi}_l \sin(\chi - \chi_l) - \dot{G}_{sl} + \ddot{\chi}_l xtk_l - \dot{\chi}_l^2 tk_l \\ f_2 = -2G_s \dot{\chi}_l \cos(\chi - \chi_l) - \ddot{\chi}_l tk_l - \dot{\chi}_l^2 xtk_l + \dot{\chi}_l G_{sl} \end{cases} \quad (7-16)$$

Soit, après inversion :

$$\underline{u}_{eq} = \begin{bmatrix} \dot{G}_s \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{G_s} \begin{bmatrix} G_s \cdot \cos(\chi_l - \chi) & -G_s \cdot \sin(\chi_l - \chi) \\ \sin(\chi_l - \chi) & \cos(\chi_l - \chi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{tk}_l - f_1 \\ x\ddot{tk}_l - f_2 \end{bmatrix} \quad (7-17)$$

D'où le résultat : les écarts  $tk_l$  et  $xtk_l$  par rapport à la position de référence sont des sorties plates pour le système ( 5-53 ).

L'utilisation de cette expression pour stabiliser l'écart ( $tk_l - tk_l^*(t)$ ) et ( $xtk_l - xtk_l^*(t)$ ) autour de zéro conduit au bouclage linéarisant suivant, où  $tk_l^*(t)$  et  $xtk_l^*(t)$  sont des trajectoires de référence et où  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont des matrices définies positives représentant les gains de la loi de commande :

$$\begin{bmatrix} \ddot{tk}_l \\ x\ddot{tk}_l \end{bmatrix} = -A_1 \begin{bmatrix} \dot{tk}_l - \dot{tk}_l^*(t) \\ x\dot{tk}_l - x\dot{tk}_l^*(t) \end{bmatrix} - A_2 \begin{bmatrix} tk_l - tk_l^*(t) \\ xtk_l - xtk_l^*(t) \end{bmatrix} \quad (7-18)$$

Dans le cas particulier où les variations de la vitesse sol  $G_{sl}$  et de l'orientation  $\chi_l$  de la trajectoire de la position de référence sont nuls (ou négligés), l'expression ( 7-17 ) se simplifie sous la forme suivante :

$$\underline{u}_{eq} = \begin{bmatrix} \dot{G}_s \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{G_s} \begin{bmatrix} G_s \cdot \cos(\chi_l - \chi) & -G_s \cdot \sin(\chi_l - \chi) \\ \sin(\chi_l - \chi) & \cos(\chi_l - \chi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{tk}_l \\ x\ddot{tk}_l \end{bmatrix} \quad (7-19)$$

Cette approche a été présentée dans [7-c]. Nous verrons au chapitre suivant comment une telle loi de commande peut être utilisée.

Le couple  $(tk_l, xtk_l)$  est intéressant pour le positionnement relatif vis à vis d'une trajectoire de référence. De plus, le bouclage linéarisant construit à partir de ces sorties plates n'est jamais singulier. Par contre, il ne fait pas intervenir directement des paramètres liés à la sécurité entre les avions. Comme d'autres couples de sorties plates existent, nous allons au paragraphe suivant en exhiber un qui est directement lié à la sécurité entre les avions.

### 7.3.1.3 Coordonnées polaires de la position du leader exprimées dans le repère lié à l'avion suiveur

Intéressons nous aux coordonnées polaires  $(\rho, \mu)$  de la position de l'avion leader exprimée dans le repère centré sur l'avion suiveur :

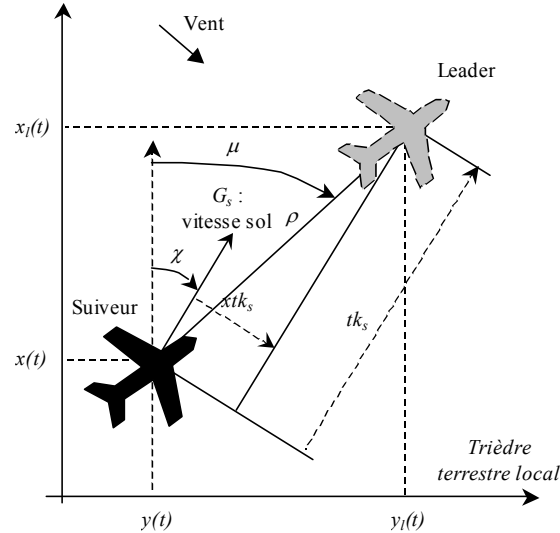


Figure 7-4 Coordonnées polaires de la position du leader exprimées dans le repère lié à l'avion suiveur

Nous allons montrer que si la trajectoire  $t \rightarrow (x_l, y_l)$  de l'avion leader est connue, alors  $(\rho, \mu)$  est une sortie plate du système suivant, qui s'identifie au système ( 7-8 ) lorsque le vent est nul (i.e.  $\chi = \psi$ ,  $G_s = V$ ) :

$$\begin{cases} \dot{tk}_s = u_1 \cdot xtk_s + G_{sl} \cos(\chi - \chi_l) - G_s \\ x\dot{tk}_s = -u_1 \cdot tk_s - G_{sl} \sin(\chi - \chi_l) \\ \dot{\chi} = u_1 \\ \dot{G}_s = u_2 \end{cases} \quad (7-20)$$

D'après la Figure 7-4, nous avons :

$$\begin{cases} tk_s = \rho \cdot \cos(\mu - \chi) \\ xtk_s = \rho \cdot \sin(\mu - \chi) \end{cases} \quad (7-21)$$

et :

$$\begin{cases} x_l - x = \rho \cdot \cos(\mu) \\ y_l - y = \rho \cdot \sin(\mu) \end{cases} \quad (7-22)$$

En utilisant le fait que  $\mu = (\mu - \chi) + \chi$  dans ( 7-22 ), nous déduisons :

$$\begin{cases} x_l - x = \rho \cdot \cos(\mu - \chi) \cos(\chi) - \rho \cdot \sin(\mu - \chi) \sin(\chi) = tk_s \cos(\chi) - xtk_s \sin(\chi) \\ y_l - y = \rho \cdot \sin(\mu - \chi) \cos(\chi) + \rho \cdot \cos(\mu - \chi) \sin(\chi) = tk_s \sin(\chi) + xtk_s \cos(\chi) \end{cases} \quad (7-23)$$

La dérivation de ( 7-22 ) par rapport au temps conduit à :

$$\begin{cases} G_{sl} \cos(\chi_l) - G_s \cos(\chi) = \dot{\rho} \cdot \cos(\mu) - \rho \dot{\mu} \cdot \sin(\mu) \\ G_{sl} \sin(\chi_l) - G_s \sin(\chi) = \dot{\rho} \cdot \sin(\mu) + \rho \dot{\mu} \cdot \cos(\mu) \end{cases} \quad (7-24)$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{cases} \chi = \arctg \left( \frac{G_{sl} \sin(\chi_l) - \dot{\rho} \cdot \sin(\mu) - \rho \dot{\mu} \cdot \cos(\mu)}{G_{sl} \cos(\chi_l) - \dot{\rho} \cdot \cos(\mu) + \rho \dot{\mu} \cdot \sin(\mu)} \right) \\ G_s = \sqrt{(G_{sl} \sin(\chi_l) - \dot{\rho} \cdot \sin(\mu) - \rho \dot{\mu} \cdot \cos(\mu))^2 + (G_{sl} \cos(\chi_l) - \dot{\rho} \cdot \cos(\mu) + \rho \dot{\mu} \cdot \sin(\mu))^2} \end{cases} \quad (7-25)$$

Soit, après développement :

$$\begin{cases} \chi = \arctg \left( \frac{G_{sl} \sin(\chi_l) - \dot{\rho} \cdot \sin(\mu) - \rho \dot{\mu} \cdot \cos(\mu)}{G_{sl} \cos(\chi_l) - \dot{\rho} \cdot \cos(\mu) + \rho \dot{\mu} \cdot \sin(\mu)} \right) \\ G_s = \sqrt{G_{sl}^2 + \dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\mu})^2 - 2G_{sl}(\rho \cos(\chi_l - \mu) + \rho \dot{\mu} \sin(\chi_l - \mu))} \end{cases} \quad (7-26)$$

Notons :

$$\begin{cases} N = f_1(G_{sl}, \chi_l, \rho, \dot{\rho}, \mu, \dot{\mu}) = G_{sl} \sin(\chi_l) - \dot{\rho} \cdot \sin(\mu) - \rho \dot{\mu} \cdot \cos(\mu) \\ D = f_2(G_{sl}, \chi_l, \rho, \dot{\rho}, \mu, \dot{\mu}) = G_{sl} \cos(\chi_l) - \dot{\rho} \cdot \cos(\mu) + \rho \dot{\mu} \cdot \sin(\mu) \end{cases} \quad (7-27)$$

Nous avons ainsi :

$$\begin{cases} \cos(\chi) = \frac{D}{G_s} \\ \sin(\chi) = \frac{N}{G_s} \\ G_s = \sqrt{N^2 + D^2} \end{cases} \quad (7-28)$$

Nous pouvons alors déduire de ( 7-22 ) et ( 7-23 ) :

$$\begin{cases} tk_s = (x_l - x) \cos(\chi) + (y_l - y) \sin(\chi) = \rho \cdot \cos(\mu) \cdot \frac{D}{G_s} + \rho \cdot \sin(\mu) \cdot \frac{N}{G_s} \\ xtk_s = -(x_l - x) \sin(\chi) + (y_l - y) \cos(\chi) = -\rho \cdot \cos(\mu) \cdot \frac{N}{G_s} + \rho \cdot \sin(\mu) \cdot \frac{D}{G_s} \end{cases} \quad (7-29)$$

Soit, après réduction :

$$\begin{cases} tk_s = \frac{\rho}{G_s} (G_{sl} \cos(\chi_l - \mu) - \dot{\rho}) \\ xtk_s = \frac{\rho}{G_s} (-G_{sl} \sin(\chi_l - \mu) + \rho \dot{\mu}) \end{cases} \quad (7-30)$$

où la vitesse sol  $G_s$  est donnée en fonction de  $(G_{sl}, \chi_l, \rho, \dot{\rho}, \mu, \dot{\mu})$  par ( 7-26 ).

Il reste à exprimer la dérivée par rapport au temps de  $\chi$  et  $G_s$  en fonction de  $\rho, \mu$  et leurs dérivées.

En dérivant l'expression de  $\chi$  et  $G_s$  dans ( 7-28 ), nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{\chi} = \frac{\dot{N}D - N\dot{D}}{G_s^2} \\ \dot{G}_s = \frac{N\dot{N} + D\dot{D}}{G_s} \end{cases} \quad (7-31)$$

Inversement,  $\rho$  et  $\mu$  peuvent s'exprimer en fonction des variables  $(tk_s, xtk_s, \chi)$  en inversant les relations ( 7-21 ) :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{tk_s^2 + xtk_s^2} \\ \mu = \chi + \arctg\left(\frac{xtk_s}{tk_s}\right) \end{cases} \quad (7-32)$$

D'où le résultat : les coordonnées polaires  $(\rho, \mu)$  de la position de l'avion leader exprimée dans le repère centré sur l'avion suiveur sont des sorties plates du système ( 7-20 ).

L'intérêt du couple  $(\rho, \mu)$  est qu'il fait apparaître directement la distance  $\rho$  entre les deux avions qui est liée à la sécurité entre eux.

### 7.3.2 Synthèse de la loi de commande par bouclage linéarisant

Une conséquence de la platitude du système ( 7-20 ) est qu'il est *Lie-Bäcklund équivalent* au système trivial suivant, où  $(v_1, v_2)$  sont les nouvelles entrées :

$$\begin{cases} \ddot{\rho} = v_1 \\ \ddot{\mu} = v_2 \end{cases} \quad (7-33)$$

En dérivant deux fois les expressions de  $\rho$  et  $\mu$  dans ( 7-32 ), nous obtenons :

$$\begin{cases} v_1 = \ddot{\rho} = -\frac{xtk_s \cdot G_s}{\sqrt{tk_s^2 + xtk_s^2}} u_1 - \frac{tk_s}{\sqrt{tk_s^2 + xtk_s^2}} u_2 + f_3(G_{sl}, \dot{G}_{sl}, \chi_l, \dot{\chi}_l, tk_s, \dot{tk}_s, xtk_s, \dot{xtk}_s) \\ v_2 = \ddot{\mu} = -\frac{tk_s \cdot G_s}{tk_s^2 + xtk_s^2} u_1 + \frac{xtk_s}{tk_s^2 + xtk_s^2} u_2 + f_4(G_{sl}, \dot{G}_{sl}, \chi_l, \dot{\chi}_l, tk_s, \dot{tk}_s, xtk_s, \dot{xtk}_s) \end{cases} \quad (7-34)$$

avec :

$$f_3(G_{sl}, \dot{G}_{sl}, \chi_l, \dot{\chi}_l, tk_s, \dot{tk}_s, xtk_s, \dot{x}tk_s) = \frac{\dot{G}_{sl}(tk_s \cos(\chi_l - \chi) + xtk_s \sin(\chi_l - \chi))}{\sqrt{tk_s^2 + xtk_s^2}} \quad (7-35)$$

$$+ \frac{G_s^2 + G_{sl}^2 - 2G_s G_{sl} \cos(\chi_l - \chi)}{\sqrt{tk_s^2 + xtk_s^2}} - \frac{G_{sl} \dot{\chi}_l (tk_s \sin(\chi_l - \chi) - xtk_s \cos(\chi_l - \chi))}{\sqrt{tk_s^2 + xtk_s^2}}$$

$$- \frac{(G_{sl}(tk_s \cos(\chi_l - \chi) + xtk_s \sin(\chi_l - \chi)) - tk_s G_s)^2}{(tk_s^2 + xtk_s^2)^{3/2}}$$

et :

$$f_4(G_{sl}, \dot{G}_{sl}, \chi_l, \dot{\chi}_l, tk_s, \dot{tk}_s, xtk_s, \dot{x}tk_s) = \frac{\dot{G}_{sl}(tk_s \sin(\chi_l - \chi) - xtk_s \cos(\chi_l - \chi))}{tk_s^2 + xtk_s^2} \quad (7-36)$$

$$+ \frac{G_{sl} \dot{\chi}_l (tk_s \cos(\chi_l - \chi) + xtk_s \sin(\chi_l - \chi))}{tk_s^2 + xtk_s^2}$$

$$- \frac{(G_{sl}(tk_s \sin(\chi_l - \chi) - xtk_s \cos(\chi_l - \chi)) + xtk_s G_s)(G_{sl}(tk_s \cos(\chi_l - \chi) + xtk_s \sin(\chi_l - \chi)) - tk_s G_s)}{(tk_s^2 + xtk_s^2)^2}$$

La résolution du système ( 7-34 ) par rapport à  $\underline{u}_{eq} = [u_2; u_1]^T$  conduit à l'expression suivante :

$$\underline{u}_{eq} = \begin{bmatrix} \dot{G}_s \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{tk_s}{\sqrt{tk_s^2 + xtk_s^2}} & xtk_s \\ -\frac{xtk_s}{G_s \cdot \sqrt{tk_s^2 + xtk_s^2}} & -\frac{tk_s}{G_s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\rho} - f_3 \\ \ddot{\mu} - f_4 \end{bmatrix} \quad (7-37)$$

Cette expression peut être alors utilisée pour stabiliser l'écart  $(\rho - \rho^*(t))$  et  $(\mu - \mu^*(t))$  autour de zéro grâce au bouclage linéarisant suivant, où  $\rho^*(t)$  et  $\mu^*(t)$  sont des trajectoires de référence et où  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont des matrices définies positives représentant les gains de la loi de commande :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\rho} \\ \ddot{\mu} \end{bmatrix} = -\Lambda_1 \begin{bmatrix} \dot{\rho} - \dot{\rho}^*(t) \\ \dot{\mu} - \dot{\mu}^*(t) \end{bmatrix} - \Lambda_2 \begin{bmatrix} \rho - \rho^*(t) \\ \mu - \mu^*(t) \end{bmatrix} \quad (7-38)$$

Nous nous limiterons par la suite au cas où les trajectoires de référence  $\rho^*(t)$  et  $\mu^*(t)$  se réduisent aux valeurs de consignes  $\rho_c$  et  $\mu_c$ .

Le calcul des valeurs de consigne  $\rho_c$  et  $\mu_c$  est réalisé à partir des consignes de positionnement relatif  $tk_c$  et  $xtk_c$ . Lorsque  $xtk_c$  est nul (i.e. le suiveur doit se placer derrière leader), alors les relations ( 7-30 ) conduisent en régime stabilisé ( $G_{sl} = G_s$ ) aux relations suivantes, où  $tk_c$  est l'écart longitudinal de consigne fixé par l'équipage :

$$\begin{cases} \rho_c = |tk_c| \\ \mu_c = \chi_l \end{cases} \quad (7-39)$$

Notons que la loi de guidage relatif ( 7-34 ) devient singulière lorsque  $\sqrt{tk_s^2 + xtk_s^2} = 0$  : elle n'est donc pas adaptée à une loi de guidage relatif en temps, lorsque la distance souhaitée entre la position de l'avion leader  $\Delta t$  secondes plus tôt et la position courante de l'avion suiveur est la valeur nulle. Par contre, cette loi de guidage relatif est adaptée à un guidage relatif en distance, lorsque la distance souhaitée entre la position courante de l'avion leader

et la position courante de l'avion suiveur est égale à la distance entre la position de l'avion leader  $\Delta t$  secondes plus tôt et la position courante de l'avion leader.

Cette approche a été présentée dans [7-d].

## 7.4 Evaluation qualitative

### 7.4.1 Choix des matrices de gain

L'objet de ce paragraphe est de fixer la valeur des matrices de gain  $A_l$  et  $A_2$  qui apparaissent dans la loi de guidage relatif ( 7-38 ). Pour cela, nous nous placerons au voisinage d'un point d'équilibre et nous identifierons la loi obtenue à une loi de type proportionnelle et dérivée.

Tout d'abord, notons que des matrices de gain  $A_p$  et  $A_d$  ont été fixées au *chapitre V* relatif à la spécifications des modes propres (découplage entre boucle lente et boucle rapide) :

$$\begin{cases} A_p = \text{diag}(\lambda_{p1}, \lambda_{p2}) = \text{diag}(w_{tk}^2, w_{xtk}^2) = \text{diag}(4 \cdot 10^{-4}, 4 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-2}) \text{sec}^{-2} \\ A_d = \text{diag}(\lambda_{d1}, \lambda_{d2}) = \text{diag}(m_{tk} w_{tk}, m_{xtk} w_{xtk}) = \text{diag}(16 \cdot 10^{-3}, 16 \cdot 10^{-3}) \text{sec}^{-1} \end{cases} \quad (7-40)$$

Dans ce paragraphes, les sorties manipulées ne sont pas  $tk_s$  et  $xtk_s$  mais la distance  $\rho$  entre les deux avions et l'angle de gisement relatif  $\mu$ . Les relations ( 7-30 ) conduisent en régime stabilisé ( $G_{sl} = G_s$  ;  $tk_s = tk_c$  ;  $xtk_s = xtk_c$ ) aux relations suivantes :

$$\begin{cases} tk_c = \rho \cos(\chi_l - \mu) \\ xtk_c = -\rho \sin(\chi_l - \mu) \end{cases} \quad (7-41)$$

L'inversion de la relation précédente conduit à :

$$\underline{y} = [\rho \quad \mu]^T = \underline{g}(\underline{e}_s) = \left[ \sqrt{tk_s^2 + xtk_s^2} \quad \chi_l + \arctg\left(\frac{xtk_s}{tk_s}\right) \right]^T \quad (7-42)$$

où :

$$\underline{e}_s = [tk_s \quad xtk_s]^T \quad (7-43)$$

En prenant un développement limité au premier ordre de la relation suivante autour de la position d'équilibre  $\underline{e}_c = [tk_c; xtk_c]^T$ , il vient :

$$\underline{y} - \underline{y}_c = \frac{d\underline{g}(\underline{e}_s)}{d\underline{e}_s^T} \Big|_{\underline{e}_s = \underline{e}_c} \cdot (\underline{e}_s - \underline{e}_c) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \rho - \rho_c \\ \mu - \mu_c \end{bmatrix} = \frac{d\underline{g}(\underline{e}_s)}{d\underline{e}_s^T} \Big|_{\underline{e}_s = \underline{e}_c} \cdot \begin{bmatrix} tk_s - tk_c \\ xtk_s - xtk_c \end{bmatrix} \quad (7-44)$$

où :

$$\frac{d\underline{g}(\underline{e}_s)}{d\underline{e}_s^T} \Big|_{\underline{e}_s = \underline{e}_c} = \frac{1}{\rho_c^2} \cdot \begin{bmatrix} \rho_c \cdot tk_c & \rho_c \cdot xtk_c \\ -xtk_c & tk_c \end{bmatrix} \quad (7-45)$$

Après dérivation par rapport au temps, il vient :

$$\dot{\underline{y}} = \frac{d\underline{g}(\underline{e}_s)}{d\underline{e}_s^T} \Big|_{\underline{e}_s = \underline{e}_c} \cdot \dot{\underline{e}}_s \quad (7-46)$$

En fixant la dynamique de la dérivée seconde du vecteur de sortie  $\underline{e}_s$ , les relations précédentes nous permettent d'établir celle du nouveau vecteur de sortie  $\underline{y}$  :

$$\ddot{\underline{e}}_s = -\Lambda_d \cdot \dot{\underline{e}}_s - \Lambda_p \cdot (\underline{e}_s - \underline{e}_c) \quad (7-47)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{dg(\underline{e}_s)}{d\underline{e}_s^T} \bigg|_{\underline{e}_s=\underline{e}_c} \right)^{-1} \ddot{\underline{y}} = -\Lambda_d \cdot \left( \frac{dg(\underline{e}_s)}{d\underline{e}_s^T} \bigg|_{\underline{e}_s=\underline{e}_c} \right)^{-1} \dot{\underline{y}} - \Lambda_p \cdot \left( \frac{dg(\underline{e}_s)}{d\underline{e}_s^T} \bigg|_{\underline{e}_s=\underline{e}_c} \right)^{-1} (\underline{y} - \underline{y}_c)$$

où :

$$\left( \frac{dg(\underline{e}_s)}{d\underline{e}_s^T} \bigg|_{\underline{e}_s=\underline{e}_c} \right)^{-1} = \frac{1}{\rho_c} \cdot \begin{bmatrix} tk_c & -\rho_c \cdot xtk_c \\ xtk_c & \rho_c \cdot tk_c \end{bmatrix} \quad (7-48)$$

Il vient par conséquent :

$$\ddot{\underline{y}} = - \left( \frac{dg(\underline{e}_s)}{d\underline{e}_s^T} \bigg|_{\underline{e}_s=\underline{e}_c} \right)^{-1} \cdot \Lambda_d \cdot \left( \frac{dg(\underline{e}_s)}{d\underline{e}_s^T} \bigg|_{\underline{e}_s=\underline{e}_c} \right)^{-1} \cdot \dot{\underline{y}} - \left( \frac{dg(\underline{e}_s)}{d\underline{e}_s^T} \bigg|_{\underline{e}_s=\underline{e}_c} \right)^{-1} \cdot \Lambda_p \cdot \left( \frac{dg(\underline{e}_s)}{d\underline{e}_s^T} \bigg|_{\underline{e}_s=\underline{e}_c} \right)^{-1} \cdot (\underline{y} - \underline{y}_c) \quad (7-49)$$

Dans le cas particulier (qui est le cas traité) où l'écart latéral de consigne  $xtk_c$  est nul et où les matrices  $\Lambda_p$  et  $\Lambda_d$  sont diagonales, la relation précédente se simplifie sous la forme suivante :

$$\ddot{\underline{y}} = -\Lambda_d \cdot \dot{\underline{y}} - \Lambda_p \cdot \underline{y} \quad (7-50)$$

Soit, après identification avec ( 7-38 ) :

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \Lambda_d \\ \Lambda_2 = \Lambda_p \end{cases} \quad (7-51)$$

Ainsi, les matrices de gain sont identiques à celles définies au chapitre V.

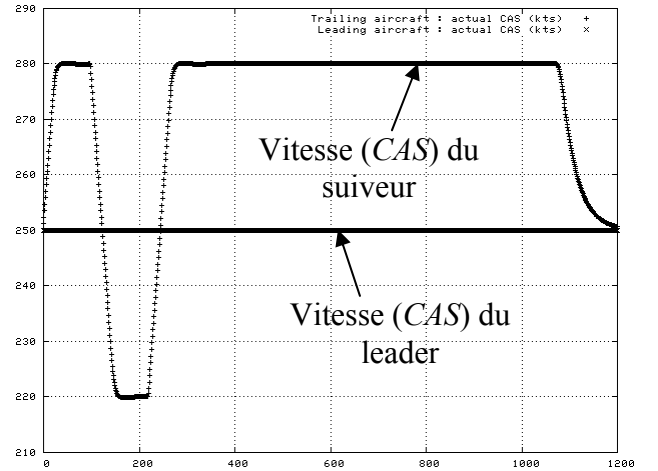
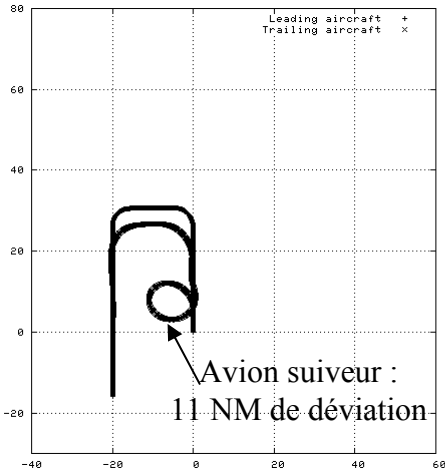
## 7.4.2 Evaluation sur le scénario de test

Le scénario de test présenté au chapitre V et modifié comme indiqué en introduction de ce chapitre est repris.

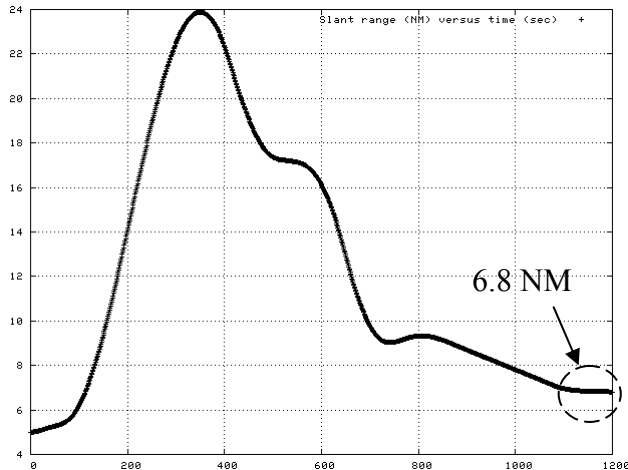
Comme aucune information n'est transmise dans les reports ADS-B sur l'accélération de la vitesse sol et la vitesse de lacet par rapport à la route de l'avion leader (cf. chapitre II), mais que ces paramètres sont relativement faibles pour les avions de transport commercial, les expressions

( 7-35 ) et ( 7-36 ) ont été simplifiées en supposant que le leader évolue à vitesse sol et à route stabilisées (i.e.  $\dot{G}_{sl} = \dot{\chi}_l = 0$ ).

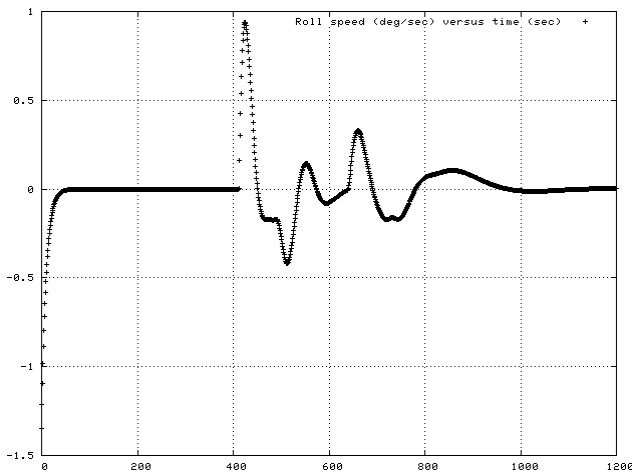
Les résultats de simulation sont les suivants :



Evolution des trajectoires dans le plan horizontal  
(échelle orthonormée en NM)

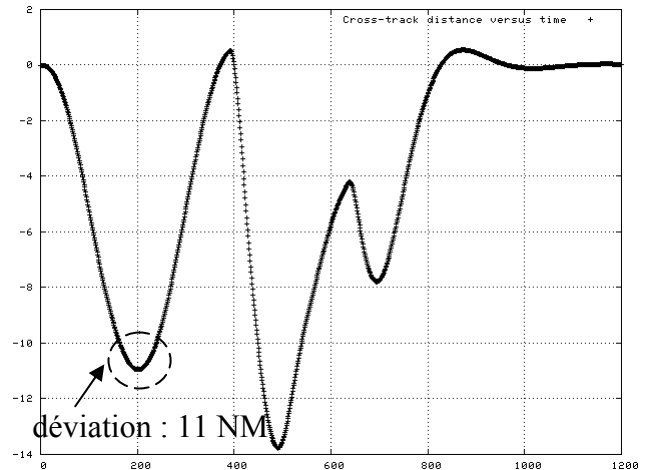


Distance entre les deux avions (NM) en fonction du temps (sec)

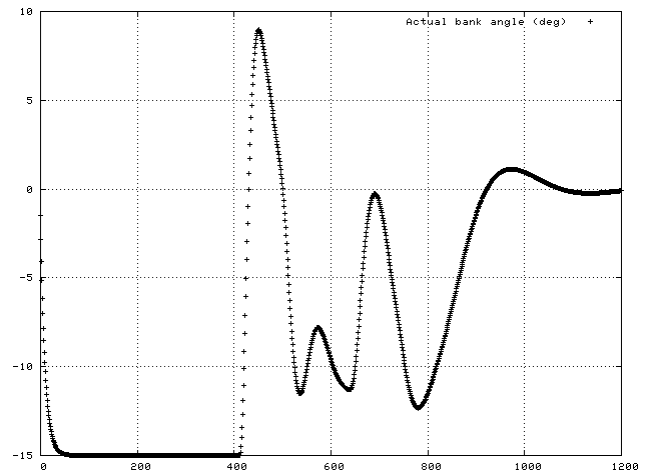


Vitesse de roulis commandée (deg/sec) en fonction du temps (sec)

Vitesse conventionnelle (kts) en fonction du temps (sec)



Écart latéral (NM) dans le repère de la trajectoire de consigne en fonction du temps (sec)



Inclinaison latérale (degrés) en fonction du temps (sec)

Figure 7-5 Evolution des paramètres pour le scénario de test

Pour ce scénario de test, la loi de commande basée sur la platitude engendre une déviation de 11NM par rapport à la trajectoire de consigne dans plan horizontal : cette déviation a pour origine le virage à 360 degrés et 15 degrés d'inclinaison.

La vitesse conventionnelle décroît vers sa valeur minimale lorsque la différence entre le cap du leader et le cap du suiveur est supérieure à 180 degrés.

La distance entre les deux avions commence par croître lorsque l'avion suiveur s'engage dans le virage à 360 degrés, contrairement aux résultats observés avec les lois de type proportionnelle et dérivée et backstepping. Elle converge vers 6.8NM, ce qui correspond à la vitesse aérodynamique du leader (272 kts) multipliée par le retard de 90 sec.

Les évolutions verticales ne sont pas représentées car elles sont identiques à celles du chapitre V (la loi de guidage vertical reste la même).

## 7.5 Conclusion

Nous avons introduit dans ce chapitre les notions de base sur la platitude des systèmes dynamiques.

Nous avons ensuite démontré que les sorties  $tk_s$  et  $xtk_s$ , c'est à dire l'abscisse et l'ordonnée de la position du leader exprimées dans le repère lié à l'avion suiveur, ne sont pas des sorties plates, puis nous avons montré que la distance  $\rho$  et le gisement  $\mu$  entre les deux avions sont des sorties plates. Puisque  $tk_s$  et  $xtk_s$  ne sont pas des sorties plates, mais que  $\rho$  et  $\mu$  le sont, nous pouvons en déduire que la loi de guidage relatif qui a été synthétisée à partir des sorties plates n'est pas *Lie-Bäcklund* équivalente à celle obtenue au chapitre précédant grâce à la technique du backstepping.

Un bouclage linéarisant a alors été proposé afin de stabiliser l'écart  $(\rho - \rho_c)$  et  $(\mu - \mu_c)$  autour de zéro, où  $\rho_c$  et  $\mu_c$  sont les valeurs de consignes calculées à partir des consignes de positionnement relatif  $tk_c$  et  $xtk_c$ , et où  $A_1$  et  $A_2$  sont des matrices définies positives représentant les gains de la loi de commande. Les matrices de gains  $A_1$  et  $A_2$  ont pu être fixées numériquement en se plaçant au voisinage d'un point d'équilibre et en identifiant la loi basée sur les sorties plates à une loi de type proportionnelle et dérivée.

D'autres couples de sorties plates existent : citons en particulier le couple  $(tk_l, xtk_l)$  qui représente les écarts longitudinal et latéral de l'avion suiveur exprimé dans le repère lié à la position de consigne. Un tel couple conduit à un bouclage linéarisant qui ne présente pas de singularité.

L'intérêt du couple  $(\rho, \mu)$  est qu'il fait apparaître directement la distance  $\rho$  qui est liée à la sécurité entre les deux avions, mais le bouclage linéarisant qui en résulte est singulier lorsque la distance entre l'avion suiveur et la position de consigne est nulle, ce qui ne permet pas son utilisation pour un guidage relatif en temps.

Nous verrons dans le chapitre qui suit comment les lois de guidage relatif qui ont été synthétisées jusqu'à là peuvent être appliquées à la gestion des flux de trafic aérien.

## 7.6 Références bibliographiques

- [7-a] *Lévine J., Analyse et commande des systèmes non linéaires, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2004*
- [7-b] *Martin P., Murray R., Rouchon P., Flat systems, equivalence and feedback, Advances in the Control of Nonlinear Systems, Lecture Notes Control Information Science, Springer, Vol 264, pp 5-32, 2000*
- [7-c] *Miquel T., Mora Camino F., Relative guidance of aircraft : analysis and comparison of two control approaches, 2002 SAE World Aviation Congress & Display (WAC'2002), Phoenix (USA), 5-7 Novembre 2002*
- [7-d] *Miquel T., Mora Camino F., Levine J., Aircraft relative guidance: a flatness synthesis of a new autopilot mode, 5th USA/Europe Seminar on Air Traffic Management Research and Development, Budapest (Hongrie), 23-27 Juin 2003*

---

## Chapitre 8

### Application à la gestion des flux de trafic aérien

---

#### 8.1 Introduction

La principale motivation à l'utilisation de lois de guidage relatif pour la gestion des flux de trafic aérien est d'accroître la disponibilité du contrôleur aérien à travers une nouvelle répartition des tâches entre le contrôleur aérien et le pilote. Le but n'est pas de transférer des problèmes à l'équipage, ni de lui laisser plus de liberté de manœuvre, mais d'obtenir une répartition des tâches plus efficace et plus bénéfique aux deux parties ([8-c]).

Dans le cas particulier où deux avions convergent vers un même point, puis suivent la même route, le contrôleur aérien doit s'assurer que l'espacement entre les avions est toujours maintenu (sécurité) tout en assurant un cadencement aussi régulier que possible (gestion des flux de trafic) au point de transfert vers la position ou le secteur de contrôle suivant. Actuellement, cela suppose qu'il suive en permanence la situation et qu'il donne si nécessaire une ou plusieurs instructions de vitesse ou de cap. La présence de lois de guidage relatif embarquées à bord des avions pourrait permettre d'aider le contrôleur aérien dans l'accomplissement de ces deux tâches. Cependant certaines conditions de mise en œuvre doivent être respectées afin que ces lois fonctionnent correctement, comme la compatibilité des vitesses entre les avions (ne pas demander à un avion rapide de suivre un avion lent) et une distance suffisante pour permettre de réaliser le positionnement relatif.

Dans ce chapitre, les lois de guidage relatif qui ont été synthétisées dans les chapitres précédents sont appliquées à la gestion d'un flux de trafic à deux avions : nous procédons d'abord à une analyse qualitative basée sur un seul scénario, puis à une analyse statistique basée sur un grand nombre de scénarii.

#### 8.2 Hypothèses

Nous étudierons par la suite des scénarii où deux avions convergent vers une même balise, appelée balise de convergence, puis suivent la même route vers une même balise dite de mesure du cadencement. Les hypothèses suivantes seront faites :

- La balise de convergence et la balise de mesure du cadencement sont communes au plan de vol des deux avions ;
- La consigne de positionnement relatif est une consigne de positionnement en temps : l'objectif est de positionner l'avion suiveur  $\Delta T$  secondes derrière de l'avion leader. Le positionnement relatif doit être achevé au plus tard à la balise de mesure du cadencement ;
- Une seule instruction est donnée par le contrôleur aérien : '*Avion suiveur suivez avion leader  $\Delta T$  secondes derrière...*'.

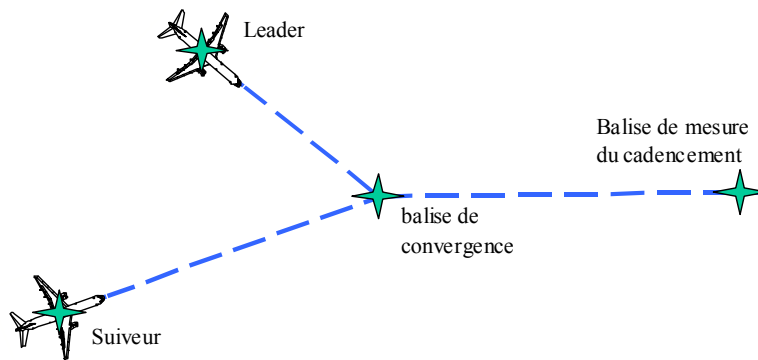


Figure 8-1 Scénario pour l'étude du guidage relatif appliqué à la gestion des flux de trafic aérien

En ce qui concerne la compatibilité des vitesses, la différence entre les vitesses conventionnelles (*CAS*) de l'avion leader et de l'avion suiveur doit être inférieure à 30 *kts*. Cette restriction permet de modérer la sollicitation des moteurs.

## 8.3 Analyse qualitative

### 8.3.1 Scénario

Le scénario pour l'analyse qualitative est basé sur des balises faisant partie de procédures réelles de circulation aérienne :

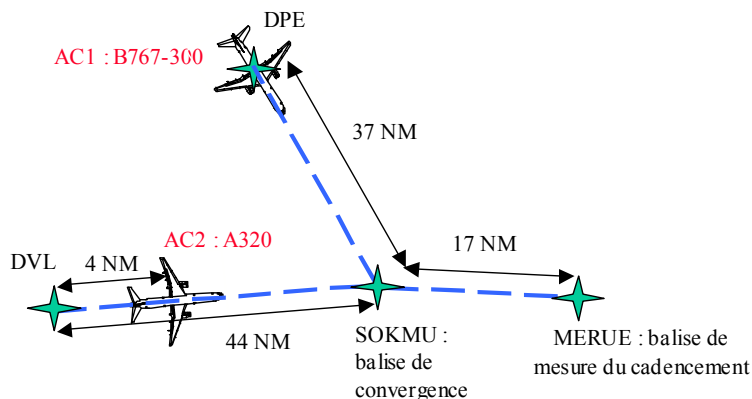


Figure 8-2 Scénario de simulation pour l'analyse qualitative à trois avions

Sa description est la suivante :

- A l'instant  $t = 0$  l'avion leader, un Boeing B767-300, part de la verticale de la balise Dieppe (*DPE*) au niveau de vol FL200 et avec une vitesse conventionnelle (*CAS*) de 310 *kts*, soit 413 *kts* de vitesse aérodynamique (*TAS*). Il converge au cap 163 degrés en descente vers la balise *SOKMU*, qu'il survole à  $t = 469$  secondes au niveau de vol stabilisé FL100, puis se dirige au cap 95 degrés vers la balise *MERUE* qu'il survole à la vitesse conventionnelle (*CAS*) de 250 *kts*, soit 289 *kts* de vitesse aérodynamique (*TAS*).
- A l'instant  $t = 0$  l'avion suiveur, un Airbus A320, part 4 NM après la verticale de la balise Deauville (*DVL*) au niveau de vol FL240 et avec une vitesse conventionnelle (*CAS*) de 300 *kts*, soit 425 *kts* de vitesse aérodynamique (*TAS*). Il converge au cap 87 degrés en descente vers la balise *SOKMU*, qu'il survole au niveau de vol stabilisé FL100, puis se dirige au cap 95 degrés vers la balise *MERUE* qu'il survole à la vitesse conventionnelle (*CAS*) de 250 *kts*, soit 289 *kts* de vitesse aérodynamique (*TAS*).

Notons que lorsque l'Airbus A320 part à l'instant initial de la verticale de la balise Deauville, le retard entre les avions à *MERUE* est de  $-81$  secondes. Le retard visé entre les deux avions étant de  $-90$  secondes, le guidage relatif est donc peu utile dans cette situation. Nous avons donc décalé l'Airbus A320 de 4 NM vers *SOKMU*, ce qui provoque un retard entre les deux avions à *MERUE* sans utilisation de lois de guidage relatif de  $-36$  secondes : l'Airbus A320 doit donc perdre 54 ( $90 - 36$ ) secondes.

Les niveaux de vol choisis correspondent à des niveaux de vol observés dans des enregistrements radar. La simulation s'achève lorsque l'Airbus A320 passe à la verticale de la balise *MERUE*. Le scénario simule environ dix minutes de vol.

La vitesse initiale des deux avions correspond à celle données dans les tables de performances BADA 3.4 ([8-a]). La consigne de vitesse conventionnelle passe à 250 kts dès que le niveau de vol FL140 est franchi en descente. Cette vitesse de 250 kts correspond à la limitation réglementaire de vitesse conventionnelle en dessous du niveau de vol FL100 (cf. *chapitre II*). La valeur maximale de la décélération est  $-0.06g$  (cf. *chapitre IV*).

Le choix des types d'avions a été fait de la manière suivante : l'Airbus A320 est le type d'avion qui vole le plus en Europe ([7-a]). Le Boeing B767-300 est un type d'avion très courant et dont les performances sont différentes mais compatibles avec celles de l'A320 (vitesse conventionnelle dans la fourchette  $\pm 30$  kts par rapport à celle de l'A320).

Le retard  $\Delta t$  entre l'avion leader et l'avion suiveur est calculé hors ligne pour chacune des positions de l'avion suiveur. Il correspond à la différence entre le temps associé à la position de l'avion suiveur et le temps associé à la position la plus proche de l'avion leader, comme indiqué sur la figure suivante :

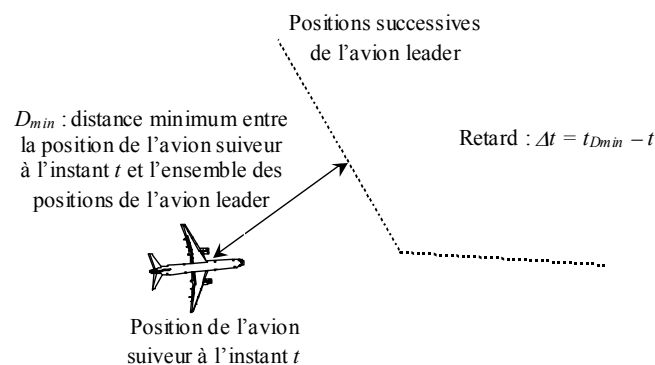
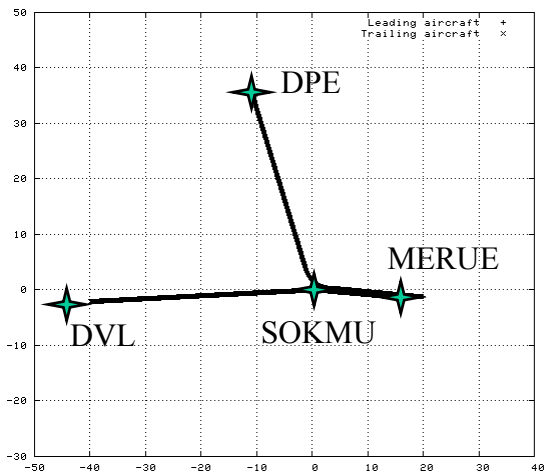


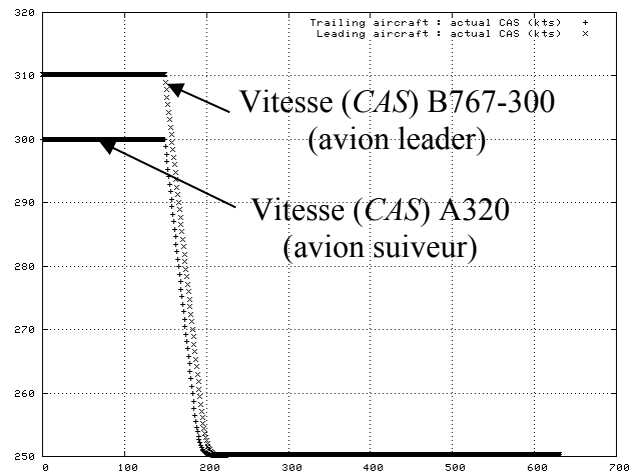
Figure 8-3 Calcul du retard entre l'avion leader et l'avion suiveur

Les figures suivantes représentent l'évolution des paramètres utiles pour l'analyse :

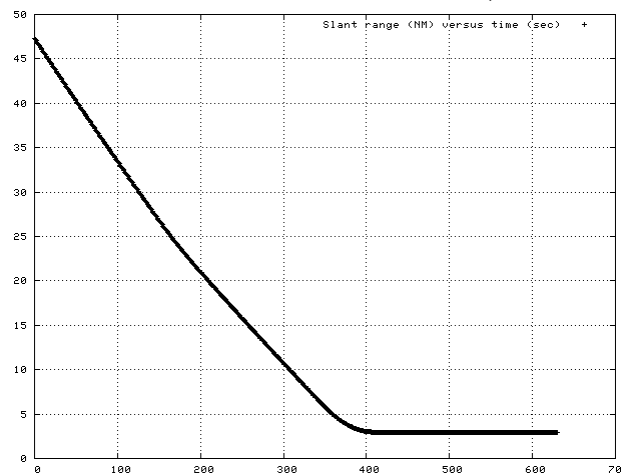
## Contribution à la synthèse de lois de commande pour la navigation relative entre aéronefs



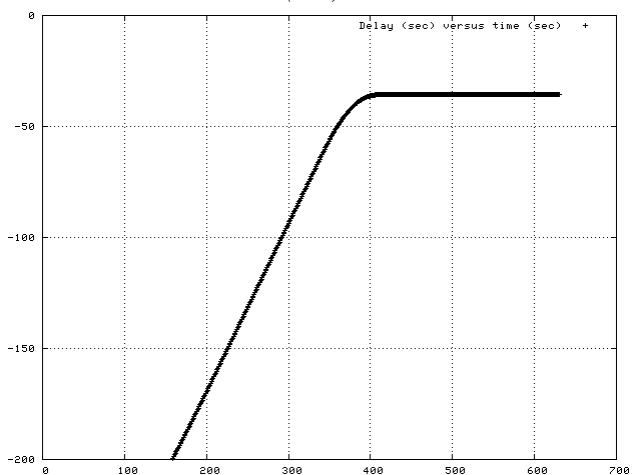
Trajectoires dans le plan (abscisse et ordonnée en NM, échelle orthonormée)



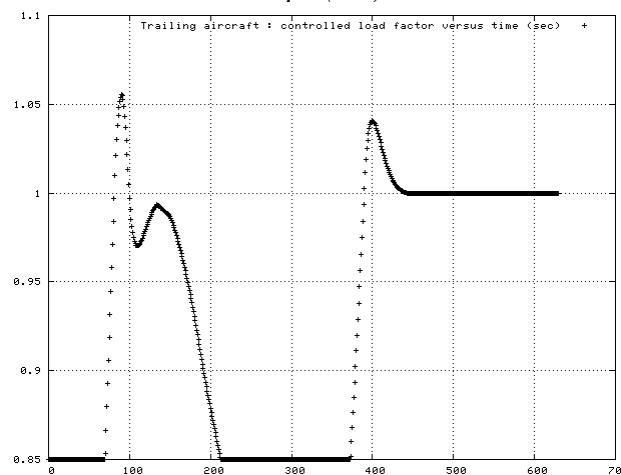
Vitesse conventionnelle (kts) en fonction du temps (sec)



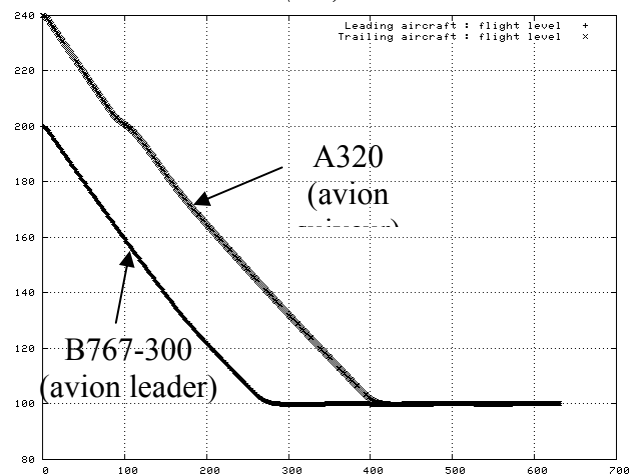
Distance entre les avions (NM) en fonction du temps (sec)



Retard entre les avions (sec) en fonction du temps (sec)



Facteur de charge commandé (g) en fonction du temps (sec)



Niveau de vol (FL) en fonction du temps (sec)

Figure 8-4 Evolution des paramètres pour le scénario d'analyse qualitative

Comme les deux avions stabilisent leur vitesse à 250 kts en fin de scénario, la distance entre les avions converge vers une valeur constante de 2.9 NM, ce qui équivaut à un retard entre les deux avions de -36 secondes (2.9 NM divisé par 289 kts de vitesse aérodynamique)

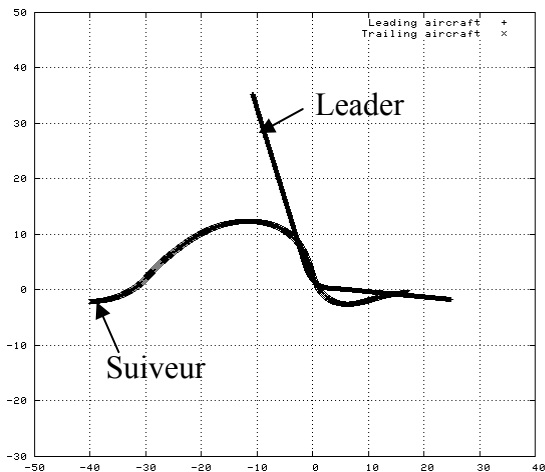
(TAS). La Figure 8-4 indique que le retard est toujours négatif, ce qui indique que l'AC1 (B767-300) est toujours devant l'AC2 (A320).

### 8.3.2 Effet des lois de guidage relatif

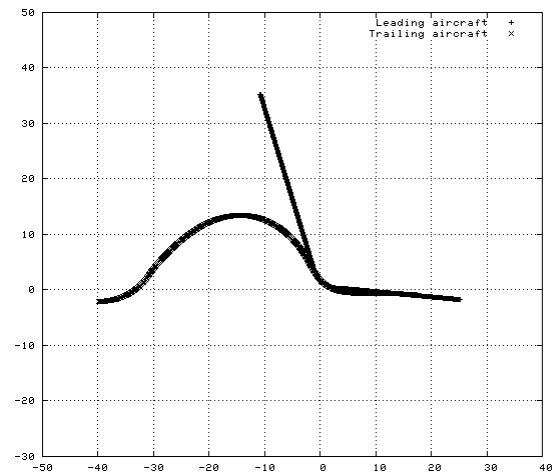
Dans les simulations qui suivent, l'objectif est de placer l'AC2 avec un retard en temps  $\Delta T = 90$  secondes derrière l'AC1 en utilisant les lois de guidage relatif décrites dans les chapitres précédents : loi de type proportionnelle et dérivée, loi simplifiée basée sur le backstepping et bouclage linéarisant basé sur la platitude. Les résultats de simulation font l'objet des paragraphes qui suivent.

#### 8.3.2.1 Trajectoires dans le plan

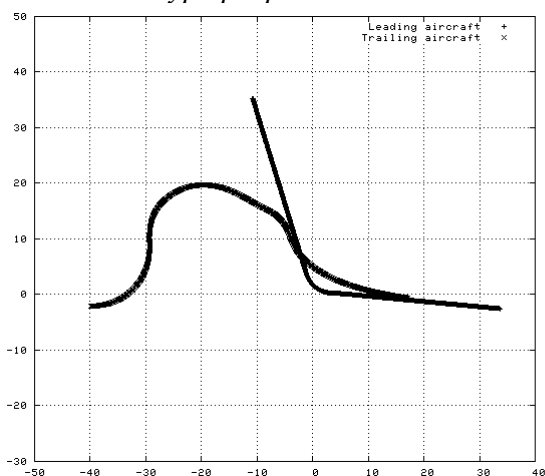
Les figures suivantes représentent l'évolution des trajectoires dans le plan des deux avions :



Loi de type proportionnelle et dérivée



Loi simplifiée basée sur le backstepping



Bouclage linéarisant basé sur la platitude

Figure 8-5 Evolution des trajectoires dans le plan horizontal (abscisse et ordonnée en NM, échelle orthonormée)

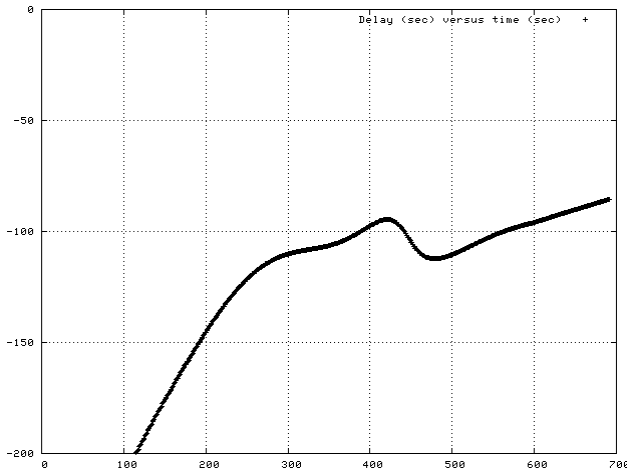
La trajectoire suivie par l'avion suiveur s'écarte du plan de vol pour rejoindre la trace de l'avion leader. Sur ce scénario, la loi de type proportionnelle et dérivée provoque une ondulation de la trajectoire de l'avion suiveur après la balise SOKMU. Le bouclage linéarisant basé sur la platitude conduit à un virage à gauche beaucoup plus accentué que celui observé pour les deux autres lois.

La solution couramment adoptée par le contrôleur aérien pour faire perdre du temps à l'avion suiveur est de rallonger sa trajectoire en créant une ouverture (changement de cap) et en effectuant un guidage radar. Les lois de guidage relatif ont un effet similaire dans ce cas,

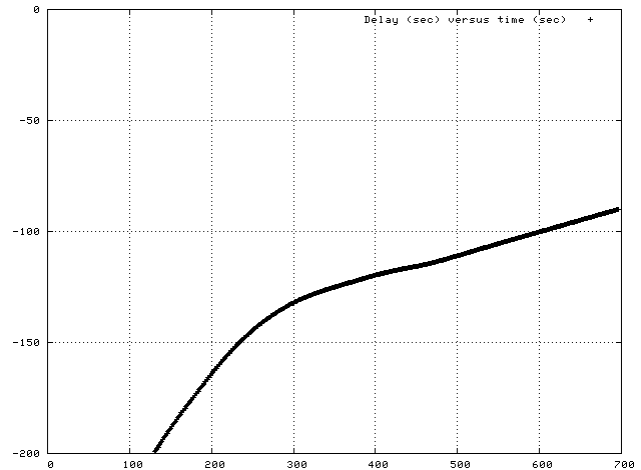
à la différence importante que le contrôleur aérien ne maîtrise plus l'ouverture de la trajectoire de l'avion suiveur et que celle-ci s'oriente vers celle de l'avion leader, ce qui peut être pénalisant en terme de sécurité.

### 8.3.2.2 Retard entre les avions

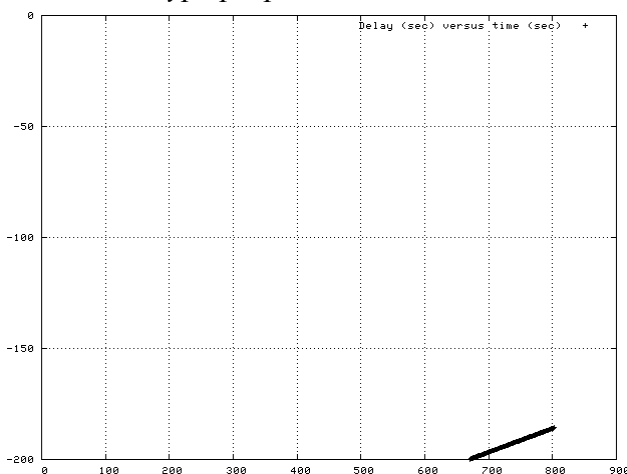
Les figures suivantes représentent l'évolution du retard de l'avion suiveur par rapport à l'avion leader :



*Loi de type proportionnelle et dérivée*



*Loi simplifiée basée sur le backstepping*



*Bouclage linéarisant basé sur la platitude*

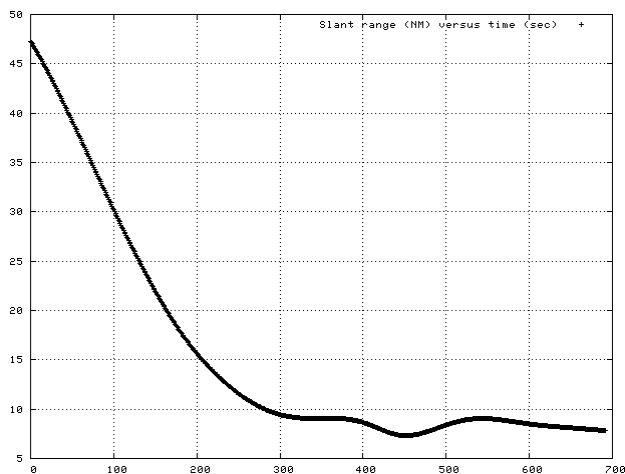
*Figure 8-6 Retard entre les avions (sec) en fonction du temps (sec)*

Le retard à la balise de mesure du cadencement (*MERUE*) est de  $-85$  secondes pour la loi de type proportionnelle et dérivée, et de  $-90$  secondes pour la loi basée sur le backstepping. Cependant, le retard n'est pas stabilisé à la valeur souhaitée de  $-90$  secondes (la pente n'est pas nulle). Par contre, le bouclage linéarisant basé sur la platitude induit un retard important ( $-197$  secondes) entre les avions à la balise de mesure du cadencement.

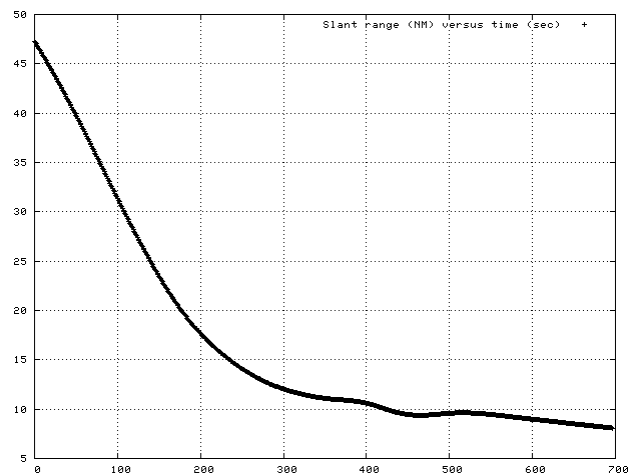
### 8.3.2.3 Distance entre les avions

Les figures suivantes représentent l'évolution de la distance entre les deux avions :

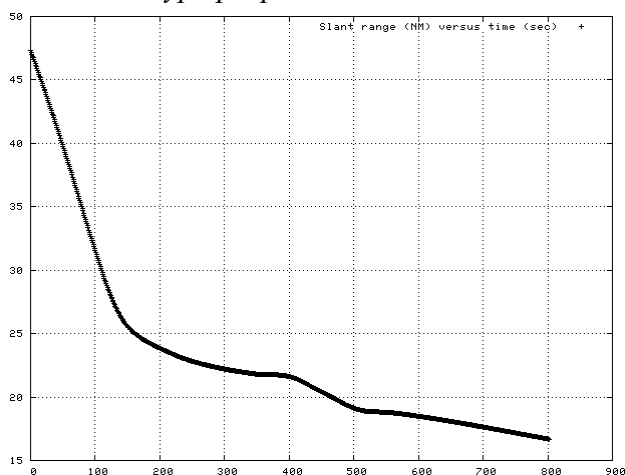
## Contribution à la synthèse de lois de commande pour la navigation relative entre aéronefs



*Loi de type proportionnelle et dérivée*



*Loi simplifiée basée sur le backstepping*



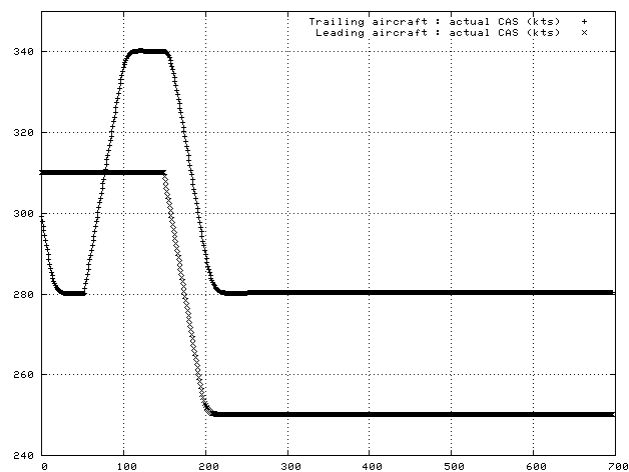
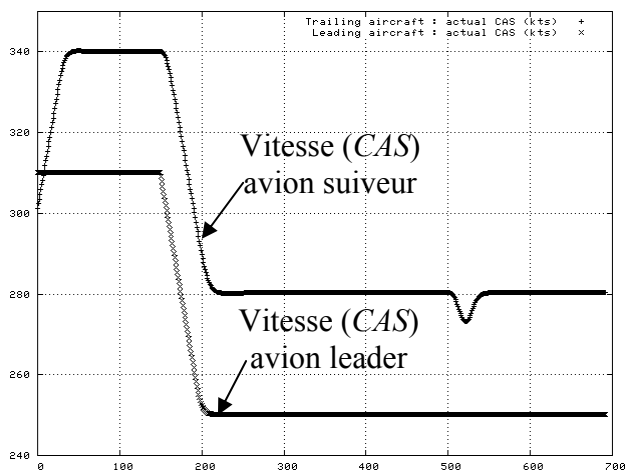
*Bouclage linéarisant basé sur la platitude*

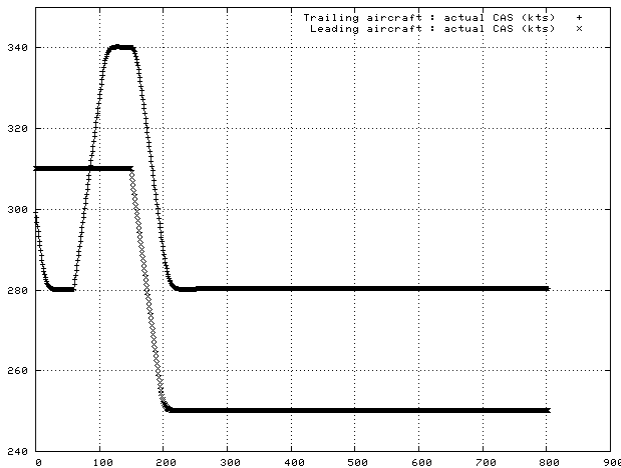
*Figure 8-7 Distance entre les avions (NM) en fonction du temps (sec)*

Pour les trois types de loi, la distance entre les avions reste supérieure à 5 NM, qui est une séparation utilisée par le contrôle du trafic aérien pour assurer la sécurité (cf. *chapitre II*). Par contre, la distance n'a pas le temps de se stabiliser autour de 7.2NM, soit la vitesse aérodynamique du leader (289 kts) multiplié par 90 secondes.

### 8.3.2.4 Vitesses conventionnelle

Les figures suivantes représentent l'évolution de la vitesse conventionnelle (CAS) des deux avions :





Bouclage linéarisant basé sur la platitude

Figure 8-8 Vitesse conventionnelle (kts) en fonction du temps (sec)

La vitesse conventionnelle se stabilise à 280kts mais n'a pas le temps de décroître vers 250 kts, ce qui indique encore une fois le retard visé de  $-90$  secondes n'est pas atteint avant la balise de mesure du cadencement (*MERUE*). Cette tendance des lois de guidage relatif à *trop allonger* la trajectoire de l'avion suiveur (de telle sorte que sa vitesse augmente afin de compenser *l'excès de retard*) est due au fait qu'à chaque instant c'est la position passée de l'avion leader qui est visée et non l'instant de passage à la balise de mesure du cadencement.

### 8.3.3 Référence horizontale de guidage relatif

Afin d'accélérer le mouvement vers la balise de convergence et de ne pas trop perturber le contrôleur aérien dans la surveillance de la situation aérienne, il est apparu nécessaire de faire en sorte que l'avion suiveur se positionne relativement à l'avion leader soit en ne s'écartant *pas trop* de son plan de vol, soit en suivant une trajectoire que le contrôleur aérien peut anticiper.

Pour cela, une référence de guidage relatif pour l'avion suiveur a été construite. Cette trajectoire de référence dépend du type de loi utilisée pour le guidage relatif.

#### 8.3.3.1 Référence de guidage pour la loi de type proportionnelle et dérivée et pour la loi simplifiée basée sur backstepping

Pour la loi de type proportionnelle et dérivée et pour la loi simplifiée basée sur backstepping, la position de la cible est celle de l'avion leader  $\Delta T$  plus tôt par rapport à l'instant courant. La référence de guidage pour l'avion suiveur est construite de la manière suivante :

- Phase de rejointe : lorsque la position de la cible se situe avant la balise de convergence, le guidage relatif s'effectue par rapport à la position de la cible *reportée sur le plan de vol de l'avion suiveur* ;
- Phase de maintien de la position relative : lorsque la position de la cible se situe après le point de convergence, le guidage relatif s'effectue par rapport à la position de la cible.

L'objectif pour l'avion suiveur est alors de se placer sur l'objectif de positionnement :

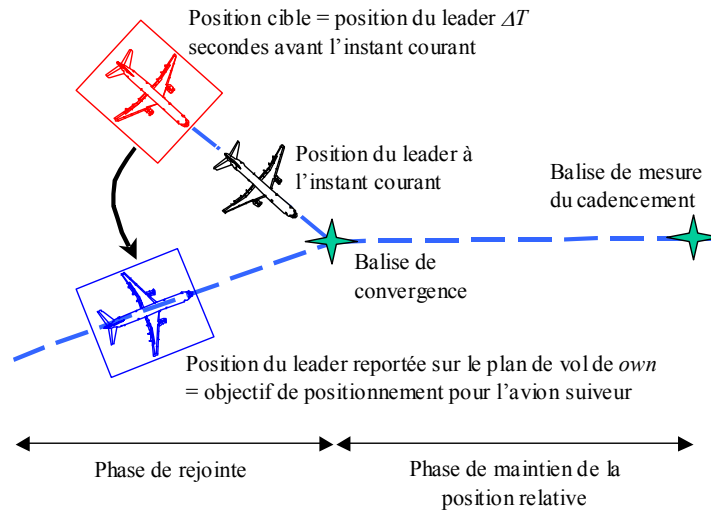


Figure 8-9 Référence de guidage relatif pour les lois de type proportionnelle et dérivée et backstepping

La cassure dans la direction de la trajectoire de référence couplée au fait que les lois de guidage relatif ont des temps de réponse relativement longs (ce qui est la conséquence de la synthèse utilisant le principe de la commande à plusieurs échelles de temps) peuvent induire une oscillation non négligeable de la trajectoire du suiveur autour de la balise de convergence.

Afin d'atténuer cet effet, différentes solutions sont possibles. Nous avons choisi d'atténuer la cassure dans la direction de la trajectoire de référence en prenant la moyenne entre la direction de rejointe de la balise de convergence et la direction d'éloignement lorsque le leader se trouve à une distance de la balise inférieure à  $R = 3NM$ . Le pivot pour le report se situe alors à la distance  $R$  de la balise de convergence, dans la direction de la balise de mesure du cadencement :

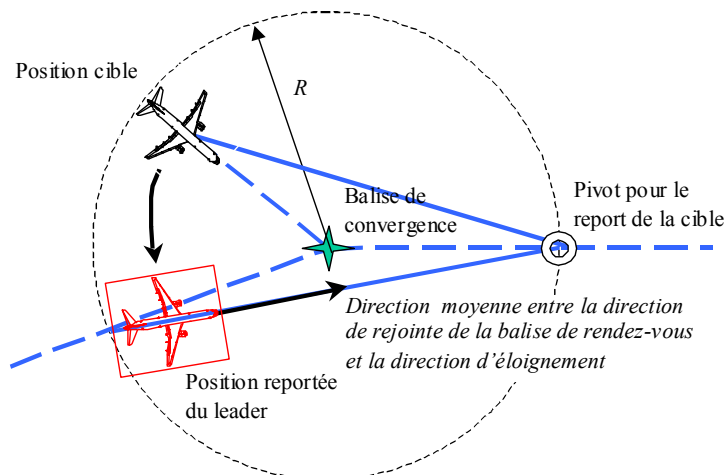
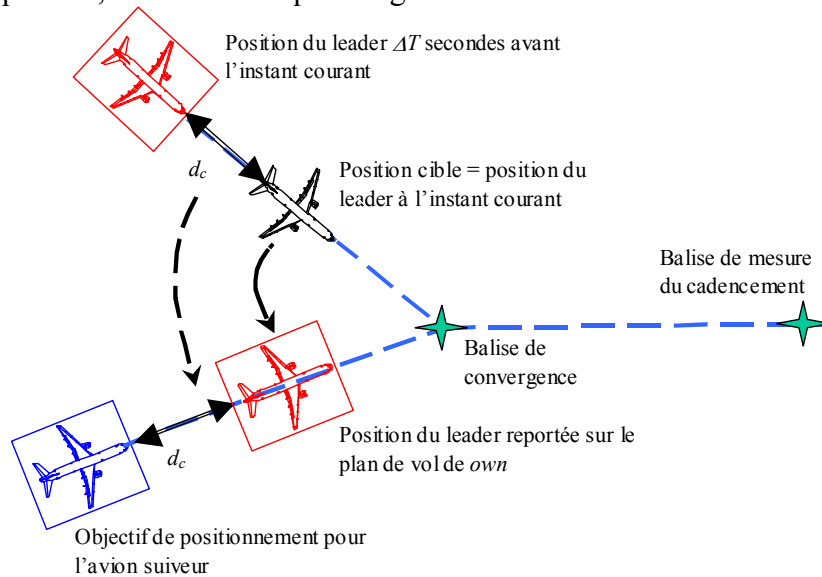


Figure 8-10 Atténuation de la cassure de la trajectoire de référence au point de convergence

### 8.3.3.2 Référence de guidage pour le bouclage linéarisant basé sur la platitude

Lors de la phase de rejointe, lorsque la position reportée de l'avion leader sur le plan de vol de l'avion suiveur se situe devant la position courante de l'avion suiveur, l'avion suiveur doit accélérer et c'est le bouclage linéarisant basé sur la platitude des sorties  $(\rho, \mu)$  qui est utilisé.

Nous avons vu au chapitre précédent que le bouclage linéarisant basé sur les coordonnées polaires  $(\rho, \mu)$  de la position du leader exprimées dans le repère lié à l'avion suiveur est singulier lorsque la distance relative est nulle. Cette singularité n'est pas gênante en prenant comme position cible la position de l'avion leader à l'instant courant, et comme objectif d'écart longitudinal la distance  $d_c$  entre la position courante de l'avion leader et sa position  $\Delta T$  secondes plus tôt, comme l'indique la figure suivante :



*Figure 8-11 Référence de guidage relatif pour le bouclage linéarisant basé sur la platitude*

Par contre, lorsque la position reportée de l'avion leader sur le plan de vol de l'avion suiveur se situe derrière la position courante de l'avion suiveur, alors celui-ci ralentit. Un résultat similaire aurait pu être obtenu en allongeant la trajectoire de l'avion suiveur, et en maintenant sa vitesse quasiment constante.

D'autre part, la distance oblique  $\rho$  entre la position courante de l'avion suiveur et la position courante de l'avion leader reportée sur le plan de vol de l'avion suiveur n'a pas de sens du point de vue de la sécurité entre les deux avions. De plus, nous avons remarqué au chapitre précédent que les coordonnées cartésiennes  $(tk_l, xtk_l)$  de la position de l'avion suiveur exprimées dans le repère lié à une position de référence sont aussi des sorties plates et que le bouclage linéarisant basé sur ces sorties ne présente pas de singularité, contrairement au bouclage linéarisant basé sur les sorties  $(\rho, \mu)$ .

Lors de la phase de rejointe et lorsque la position reportée de l'avion leader sur le plan de vol de l'avion suiveur se situe derrière la position courante de l'avion suiveur, ces considérations nous ont amené à construire une trajectoire de référence à partir de ses sorties plates lors de la phase de rejointe de l'avion suiveur et à utiliser le bouclage linéarisant basé sur les sorties  $(tk_l, xtk_l)$ . Cette trajectoire de référence est basée sur une fonction de type sinusoïdale. Son objectif est d'allonger la trajectoire de l'avion suiveur afin de lui éviter une décélération, comme indiqué sur la figure ci-après :

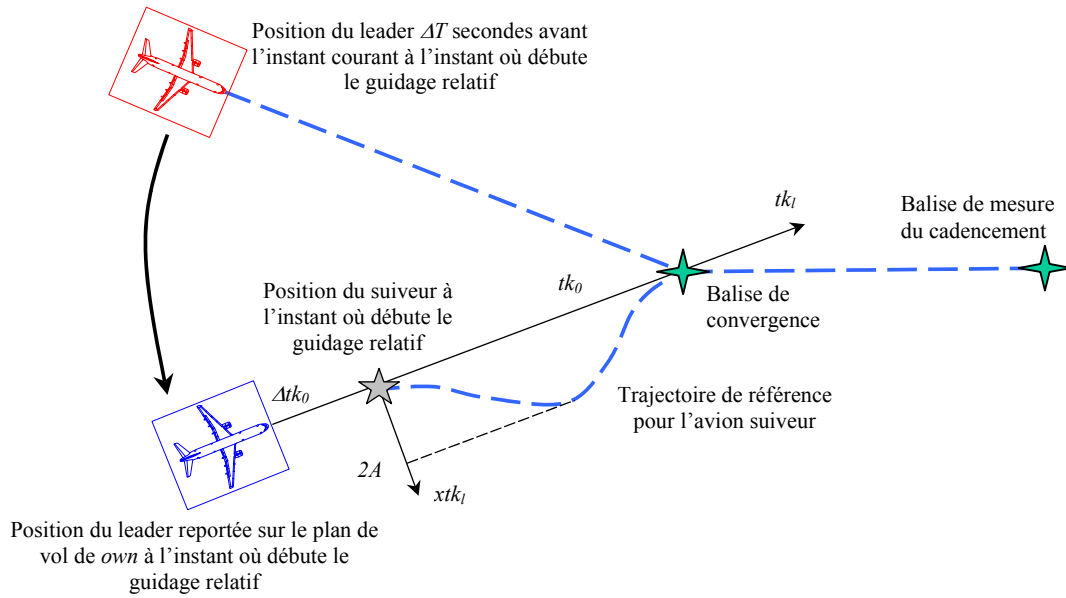


Figure 8-12 Construction de la trajectoire de référence lors de la phase de rejointe pour le bouclage linéarisant basé sur la platitude

Dans le repère lié à la position de l'avion suiveur à l'instant où débute la guidage relatif, l'expression de la trajectoire de référence est la suivante, où  $tk_0$  représente la distance entre la position du suiveur à l'instant où commence le guidage relatif et la balise de convergence :

$$x_{tk_l}^*(tk_l^*(t)) = A \left( 1 - \cos \left( 2\pi \frac{tk_l^*(t)}{tk_0} \right) \right) \quad (8-1)$$

L'amplitude  $A$  est ajustée de telle sorte que la longueur  $L$  de la courbe  $x_{tk_l}^*(tk_l^*(t))$ , pour  $tk_l^*$  variant de zéro à  $tk_0$ , soit égale à la distance entre la position du leader reportée sur le plan de vol de *own* et la balise de convergence (i.e.  $tk_0 + \Delta tk_0$ ). Comme le calcul de la longueur  $L$  de la courbe fait intervenir une intégrale elliptique, sa valeur a été approchée par l'expression suivante ([8-e]) :

$$L = \frac{tk_0}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left( \frac{2\pi A}{tk_0} \sin(x) \right)^2} dx \approx \frac{tk_0}{2} \left( 1.5 \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2\pi A}{tk_0} \right)^2} \right) - \left( 1 + \left( \frac{2\pi A}{tk_0} \right)^2 \right)^{1/4} \right) \quad (8-2)$$

Le temps nécessaire  $T$  à la position retardée du leader pour rejoindre la balise de convergence est estimé en supposant que la vitesse du leader décroît de manière linéaire avec l'altitude (ce n'est qu'une approximation pour une descente à vitesse conventionnelle constante) :

$$\begin{cases} T \approx \int_0^{tk_0 + \Delta tk_0} \frac{(z_f - z_0) \cdot dt_{k_l}(z)}{(V_f - V_0) \cdot (z - z_0) + (z_f - z_0) \cdot V_0} \\ tk_l(z) \approx \left( \frac{tk_0 + \Delta tk_0}{z_f - z_0} \right) \cdot (z - z_0) \end{cases} \quad (8-3)$$

Il vient, après intégration :

$$T \approx (tk_0 + \Delta tk_0) \cdot \int_{z_0}^{z_f} \frac{dz}{(V_f - V_0) \cdot (z - z_0) + (z_f - z_0) \cdot V_0} \approx \left( \frac{tk_0 + \Delta tk_0}{V_f - V_0} \right) \cdot \ln \left( 1 + \frac{V_f - V_0}{V_0} \right) \quad (8-4)$$

La vitesse moyenne le long de la trajectoire de référence est ensuite calculée comme le rapport entre la longueur  $L$  et l'estimation  $T$ . Ce rapport associé à la dérivation par rapport au temps de l'équation ( 8-1 ) permettent de calculer la vitesse le long de l'axe de rejointe de la balise de convergence, et de générer la trajectoire de référence :

$$\frac{L}{T} = \sqrt{(\dot{tk}_l^*)^2 + (xt\dot{k}_l^*)^2} \Rightarrow \dot{tk}_l^*(tk_l^*(t)) = \frac{L}{T \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{2\pi A}{tk_0} \cdot \sin\left(2\pi \frac{tk_l^*(t)}{tk_0}\right)\right)^2}} \quad (8-5)$$

La loi de commande est alors celle décrite au chapitre précédent et basée sur la platitude des sorties  $tk_l$  et  $xtk_l$  :

$$\underline{u}_{eq} = \begin{bmatrix} \dot{G}_s \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{G_s} \begin{bmatrix} G_s \cdot \cos(\chi_l - \chi) & -G_s \cdot \sin(\chi_l - \chi) \\ \sin(\chi_l - \chi) & \cos(\chi_l - \chi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{tk}_l \\ \ddot{xtk}_l \end{bmatrix} \quad (8-6)$$

où :

$$\begin{bmatrix} \ddot{tk}_l \\ \ddot{xtk}_l \end{bmatrix} = -A_1 \begin{bmatrix} \dot{tk}_l - \dot{tk}_l^*(t) \\ xt\dot{k}_l - xt\dot{k}_l^*(t) \end{bmatrix} - A_2 \begin{bmatrix} tk_l - tk_l^*(t) \\ xtk_l - xtk_l^*(t) \end{bmatrix} \quad (8-7)$$

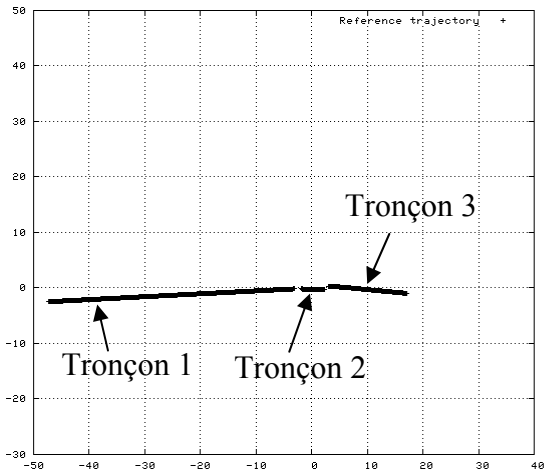
Lors de la phase de maintien de la position relative, c'est à dire lorsque la position de la cible se situe après le point de convergence, c'est le bouclage linéarisant basé sur la platitude des sorties  $(\rho, \mu)$  qui est utilisé afin d'assurer la sécurité entre les avions. La position cible est alors la position de l'avion leader à l'instant courant, et l'objectif d'écart longitudinal est la distance  $d_c$  entre la position courante de l'avion leader et sa position  $\Delta T$  secondes plus tôt.

### 8.3.4 Effet des lois de guidage relatif avec référence de guidage

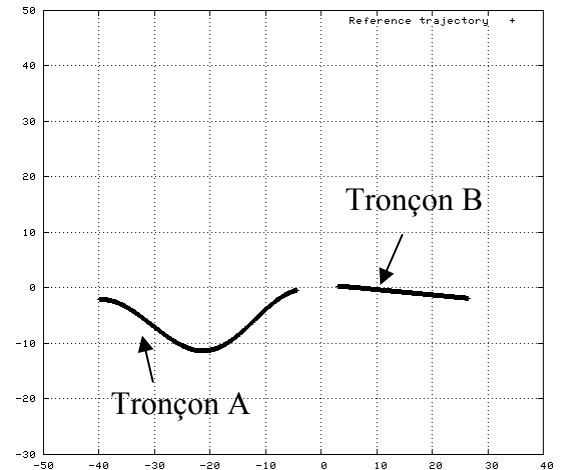
Dans les simulations qui suivent, l'objectif est de placer l'AC2 avec un retard en temps  $\Delta T = 90$  secondes derrière l'AC1 en alimentant les lois de guidage relatif avec la trajectoire de référence. La présentation et l'analyse des résultats font l'objet des paragraphes qui suivent.

#### 8.3.4.1 Trajectoire de référence pour l'avion suiveur

Les figures suivantes permettent de distinguer distinctement les différents tronçons pour la construction de la trajectoire de référence de l'avion suiveur :



Loi proportionnelle et dérivée et backstepping



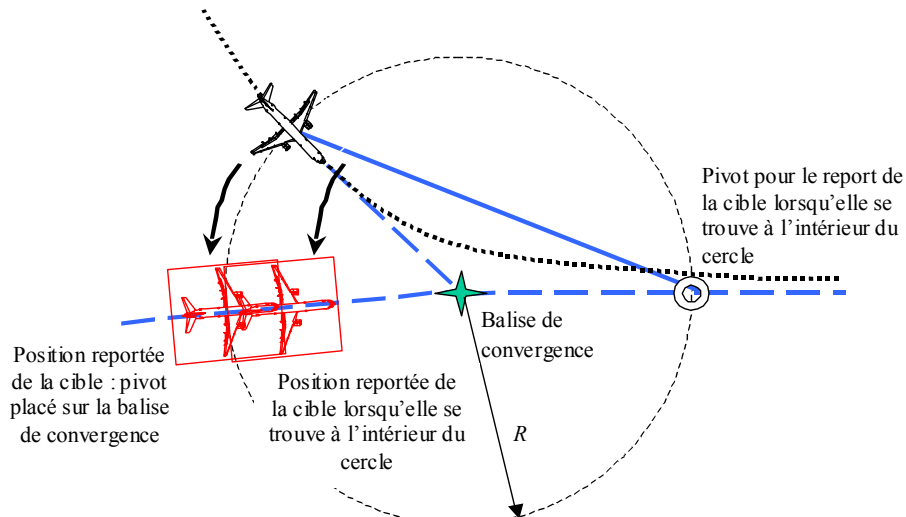
Bouclage linéarisant basé sur la platitude

Figure 8-13 Trajectoire de référence pour l'avion suiveur (abscisse et ordonnée en NM, échelle orthonormée)

Pour les lois de type proportionnelle et dérivée et basée sur le backstepping, nous pouvons distinguer trois tronçons, qui sont construits à partir de la position retardée de l'avion leader :

- Tronçon 1 (phase de convergence) : avant la balise de convergence et lorsque la distance de la cible à cette balise est supérieure au seuil  $R$ , la position de l'avion leader est *reportée* sur le plan de vol de l'avion suiveur ;
- Tronçon 2 : lorsque la distance de la cible à la balise de convergence est inférieure au seuil  $R$ , la direction de la trajectoire de référence est égale à la moyenne entre la direction de rejointe de la balise de convergence et la direction d'éloignement ; ce tronçon permet d'adoucir la cassure de la trajectoire de référence ;
- Tronçon 3 (phase de maintien de la position relative) : après le point de convergence et lorsque la distance de la cible à cette balise est supérieure au seuil  $R$ , le guidage relatif s'effectue par rapport à la position de l'avion leader.

La discontinuité de la jonction entre le premier et le second tronçon est due au changement de la position du pivot pour le report de la position cible lorsque l'avion leader arrive sur le cercle de rayon  $R$ . La discontinuité de la jonction entre le second et le troisième tronçon est due au fait que l'avion leader ne suit pas exactement la ligne dont la direction est la moyenne entre la direction de rejointe de la balise de convergence et la direction d'éloignement lorsque la cible se trouve à l'intérieur du cercle. La figure suivante illustre ces phénomènes de discontinuité :



*Figure 8-14 Discontinuité de la jonction entre les trois tronçons*

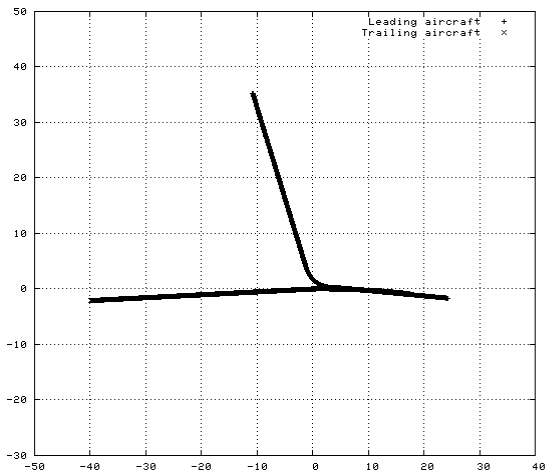
Par contre, la trajectoire de référence dédiée au bouclage linéarisant basé sur la platitude ne présente que deux tronçons :

- Tronçon A (phase de convergence) : avant la balise de convergence, la trajectoire de référence est construite selon l'expression ( 8-1 ). La loi de guidage relatif utilisée est la loi basée sur les coordonnées cartésiennes ( $tk_i, xtk_i$ ) de la position de l'avion suiveur exprimées dans le repère lié à la position de l'avion suiveur à l'instant où commence le guidage relatif ;
- Tronçon B (phase de maintien de la loi basée sur position relative) : après le point de convergence, le guidage relatif est réalisé par rapport à la position courante de l'avion leader. la loi de guidage relatif utilisée est le bouclage linéarisant basé sur les coordonnées polaires ( $\rho, \mu$ ) de la position du leader à l'instant courant exprimées dans le repère lié à l'avion suiveur.

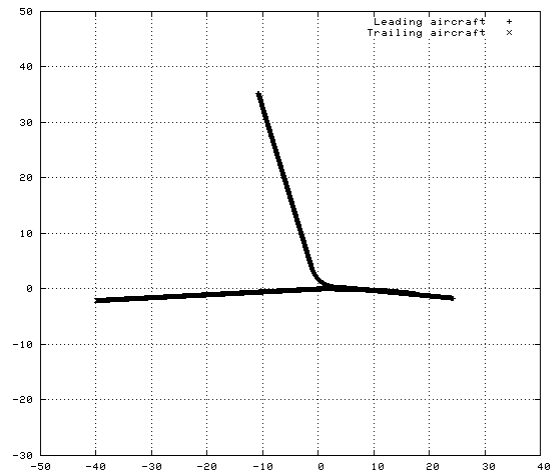
La discontinuité entre les deux tronçons correspond à la distance séparant la position de l'avion leader et la position de l'avion leader  $\Delta T$  plut tôt (ici 90 secondes) au moment de la commutation des lois.

### 8.3.4.2 Trajectoires dans le plan

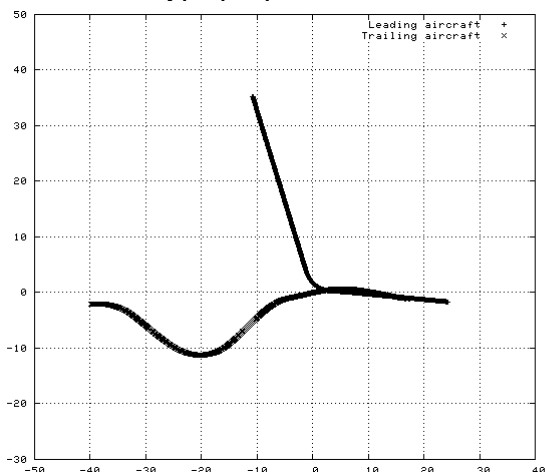
Les figures suivantes représentent l'évolution des trajectoires dans le plan des deux avions :



*Loi de type proportionnelle et dérivée*



*Loi simplifiée basée sur le backstepping*



*Bouclage linéarisant basé sur la platitude*

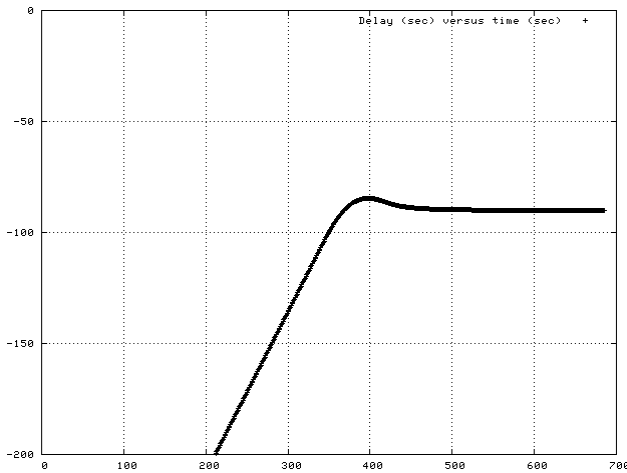
*Figure 8-15 Evolution des trajectoires dans le plan horizontal (abscisse et ordonnée en NM, échelle orthonormée)*

La comparaison entre les figures précédentes et la *Figure 8-5* montre que l'utilisation d'une trajectoire de référence permet un meilleur suivi du plan de vol par l'avion suiveur jusqu'à la balise de convergence en ce qui concerne les lois de type proportionnelle et dérivée et basée sur le backstepping, ou une altération de trajectoire compatible avec la sécurité entre les avions en ce qui concerne le bouclage linéarisant basé sur la platitude.

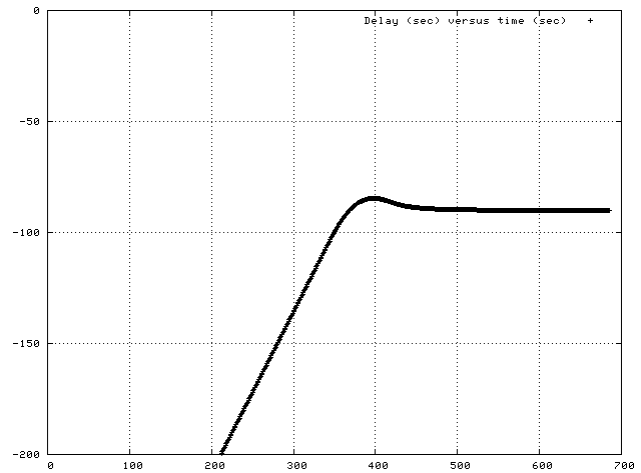
De plus, la loi basée sur le bouclage linéarisant correspond mieux à l'attitude d'un contrôleur aérien : ouvrir la trajectoire et maintenir la vitesse de l'avion constante jusqu'à la balise de convergence, comme nous le verrons sur la *Figure 8-18* qui suit.

### 8.3.4.3 Retard entre les avions

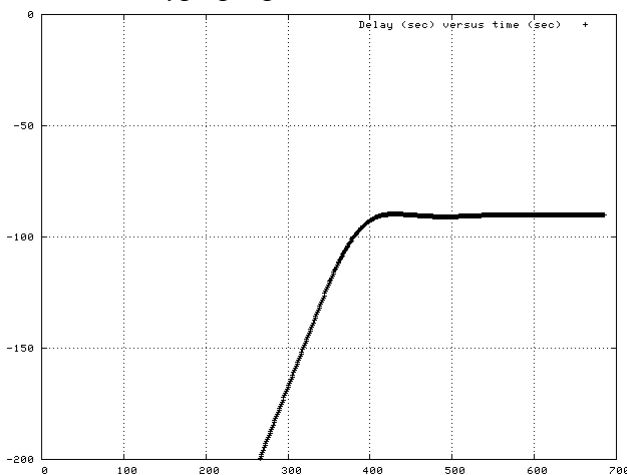
Les figures suivantes représentent l'évolution du retard de l'avion suiveur par rapport à l'avion leader :



*Loi de type proportionnelle et dérivée*



*Loi simplifiée basée sur le backstepping*



*Bouclage linéarisant basé sur la platitude*

*Figure 8-16 Retard entre les avions (sec) en fonction du temps (sec)*

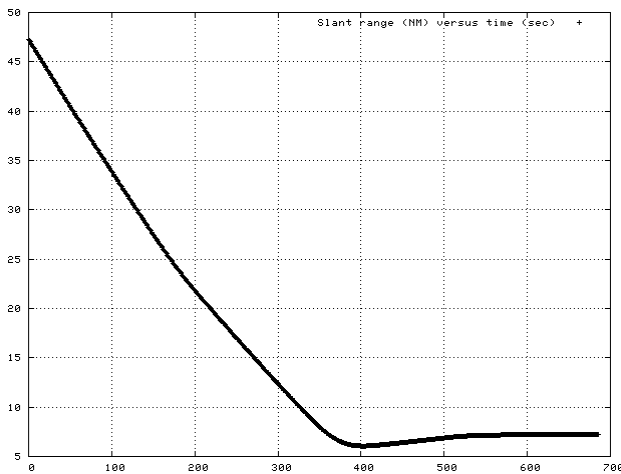
Dans tous les cas de figure, le retard de 90 secondes est atteint avant la balise de mesure du cadencement (*MERUE*).

La loi proportionnelle et dérivée et la loi de type backstepping ont des performances comparables pour ce scénario. En effet, la trajectoire de référence reste proche de la trajectoire du suiveur, ce qui gomme l'apport de la synthèse non linéaire.

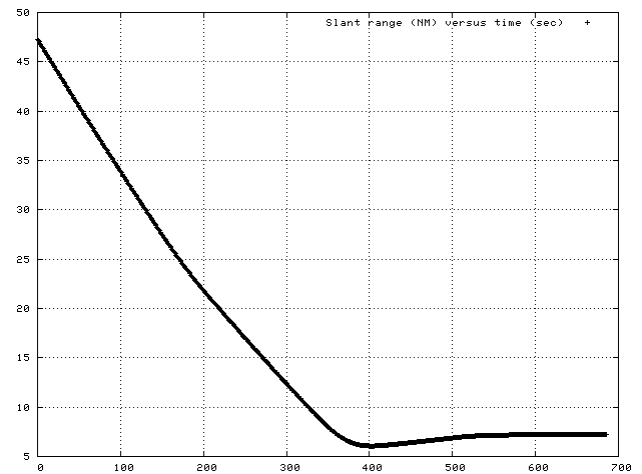
La loi basée sur la platitude ne présente pratiquement pas de dépassement, contrairement aux lois proportionnelles et dérivée et de type backstepping.

### 8.3.4.4 Distance entre les avions

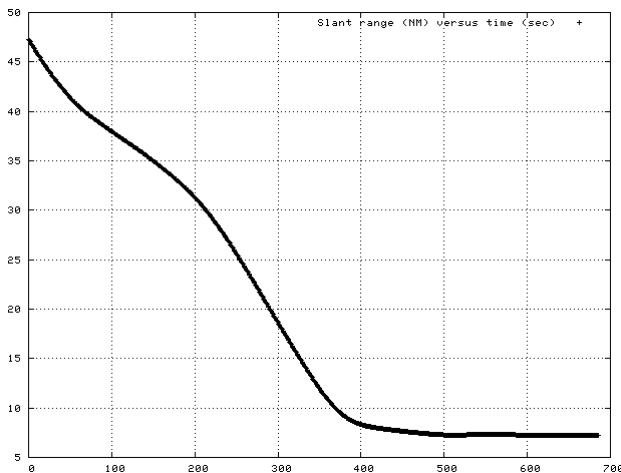
Les figures suivantes représentent l'évolution de la distance entre les deux avions :



*Loi de type proportionnelle et dérivée*



*Loi simplifiée basée sur le backstepping*



*Bouclage linéarisant basé sur la platitude*

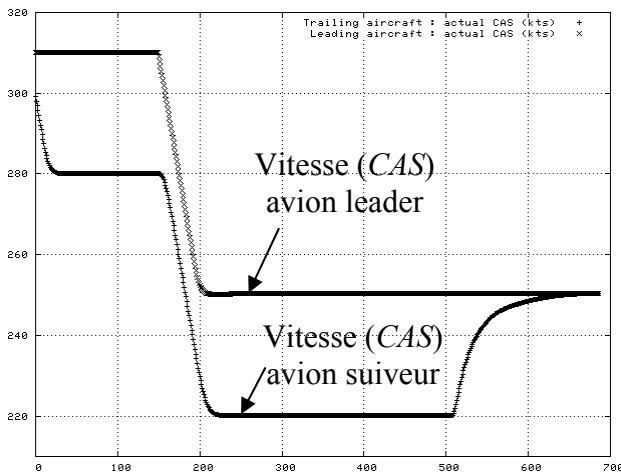
*Figure 8-17 Distance entre les avions (NM) en fonction du temps (sec)*

Pour la loi proportionnelle et dérivée et la loi de type backstepping, la distance entre les avions passe par un minimum supérieur à 5 NM (séparation utilisée par le contrôle du trafic aérien pour assurer la sécurité, cf. *chapitre II*) avant de se stabiliser à 7.2NM, soit la vitesse aérodynamique du leader (289 kts) multiplié par 90 secondes.

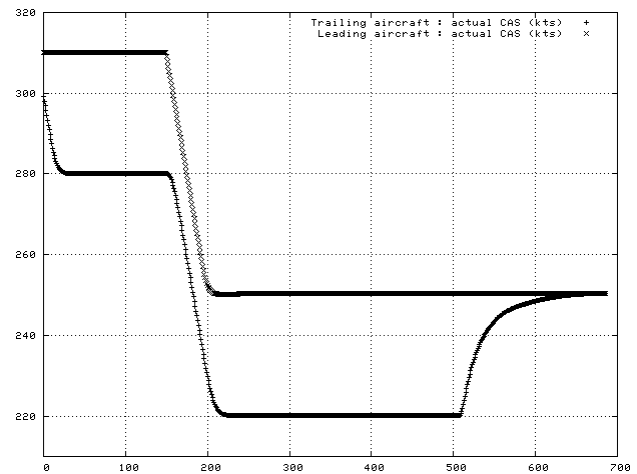
Pour la loi basée sur la platitude, la distance entre les avions ne passe pas par un minimum mais décroît de façon continue.

#### 8.3.4.5 Vitesses conventionnelle

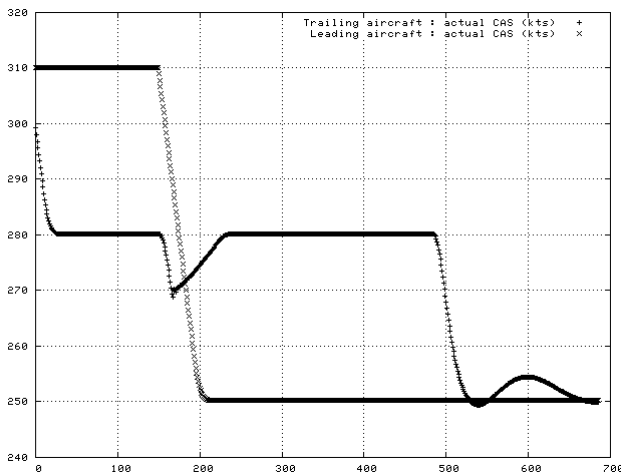
Les figures suivantes représentent l'évolution de la vitesse conventionnelle (CAS) des deux avions :



Loi de type proportionnelle et dérivée



Loi simplifiée basée sur le backstepping



Bouclage linéarisant basé sur la platitude

Figure 8-18 Vitesse conventionnelle (kts) en fonction du temps (sec)

Pour la loi proportionnelle et dérivée et la loi de type backstepping, la vitesse conventionnelle décroît vers sa valeur minimale afin de retarder l'avion suiveur. Le retour vers la vitesse conventionnelle (CAS) de l'avion leader (250 kts) se fait pratiquement sans dépassement.

Pour la loi basée sur la platitude, l'évolution de la vitesse est différente : la référence de guidage relatif nous a permis de construire une trajectoire où la vitesse conventionnelle reste pratiquement constante autour de 280 kts, avant de décroître vers 250 kts.

### 8.3.5 Estimation du temps et de la distance nécessaires à la rejoinde de l'objectif de positionnement

L'objectif de ce paragraphe est d'estimer le temps et de la distance nécessaire à la rejoinde de l'objectif de positionnement par l'avion suiveur. Ces estimations sont utiles car elles peuvent permettre de détecter a priori la non applicabilité d'une manœuvre de positionnement relatif. Sachant que l'écart initial entre les deux avions est de 3 NM (40 – 37 NM), et qu'à un retard de 90 secondes correspond une distance de 7.2 NM (la TAS du leader est de 289 kts au FL100), la distance à perdre par le suiveur est de 4.2 NM (7.2 – 3 NM). Au niveau de vol FL100, une différence de vitesse conventionnelle (CAS) de 30 kts correspond à une différence de vitesse aérodynamique (TAS) de 35 kts. Le temps minimum nécessaire pour que le suiveur se place sur la position souhaitée est donc d'environ 430 secondes (4.2 NM divisé par 35 kts).

D'une manière plus générale, le temps minimum  $t_n$  nécessaire à la manœuvre de positionnement relatif peut être estimé de la manière suivante, où  $L_l$  désigne la longueur du segment séparant le leader de la balise de mesure du cadencement,  $L_s$  la longueur du segment séparant le suiveur de la balise de mesure du cadencement,  $V_l$  la vitesse aérodynamique (TAS) du leader,  $\Delta T$  le retard souhaité à la balise de mesure du cadencement et  $\Delta V$  l'écart maximum entre la vitesse du leader et celle du suiveur :

$$t_n \approx \left| \frac{L_l + \Delta T \cdot V_l - L_s}{\Delta V} \right| \quad (8-8)$$

Une estimation de la distance minimum  $d_n$  parcourue par le suiveur est alors donnée par :

$$d_n \approx \left| \frac{L_l + \Delta T \cdot V_l - L_s}{\Delta V} \right| \cdot (V_l - \Delta V \cdot \text{sgn}(L_l + \Delta T \cdot V_l - L_s)) \quad (8-9)$$

Par conséquent, une condition nécessaire pour que la manœuvre de positionnement relatif soit possible avant la balise de mesure du cadencement est que l'estimation de la distance nécessaire minimum  $d_n$  soit inférieure à la longueur du segment  $L_s$  séparant le suiveur de la balise de mesure du cadencement :

L'application de cette relation dans le cas où le Boeing 767-300 est suiveur et l'Airbus A320 leader donne :

$$\begin{cases} L_l = 40 + 17 = 57 NM \\ \Delta T \cdot V_l = 90 \text{ sec} \times 289 kts = 7.2 NM \\ L_s = 37 + 17 = 54 NM \\ \Delta V \approx 35 kts \end{cases} \Rightarrow d_n \approx 74 NM \quad (8-10)$$

En comparant cette distance à la distance du suiveur (ici le B767-300) à la balise de mesure du cadencement au moment du déclenchement de la manœuvre (37+17=54NM), on en déduit qu'il n'est pas possible de placer le Boeing 767-300 derrière l'Airbus A320 avant la balise de mesure du cadencement.

Par contre, pour la scénario analysé où l'Airbus A320 est suiveur et le Boeing 767-300 est leader, nous avons :

$$\begin{cases} L_l = 37 + 17 = 54 NM \\ \Delta T \cdot V_l = 90 \text{ sec} \times 289 kts = 7.2 NM \\ L_s = 40 + 17 = 57 NM \\ \Delta V \approx 35 kts \end{cases} \Rightarrow d_n \approx 30 NM \quad (8-11)$$

En comparant cette distance à la distance du suiveur (ici l'A320) à la balise de mesure du cadencement au moment du déclenchement de la manœuvre (40+17=57NM), on en déduit que la manœuvre de positionnement relatif est possible avant la balise de mesure du cadencement.

La différence entre les deux résultats provient du fait que dans le premier cas, nous avons  $L_l + \Delta T \cdot V_l - L_s = 10.2 NM$ , alors que dans le second cas  $L_l + \Delta T \cdot V_l - L_s = 4.2 NM$ .

## 8.4 Analyse statistique

### 8.4.1 Construction des scénarios

Pour l'analyse quantitative, un très grand nombre de scénarii ont été construits en faisant varier l'angle entre les branches convergeant à la balise de convergence, la distance des branches et le type des avions :

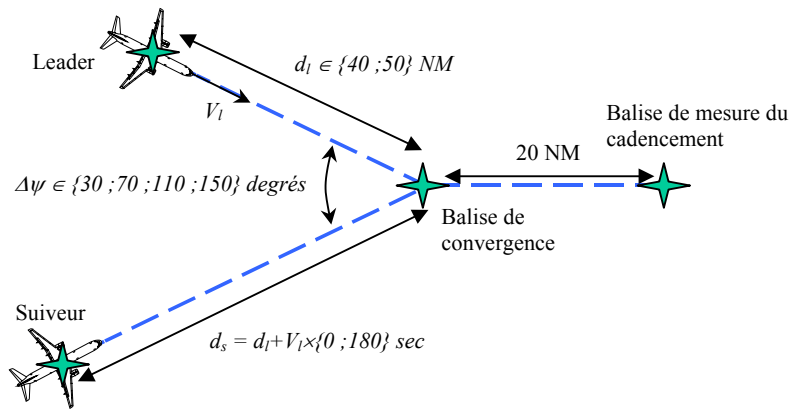


Figure 8-19 Scénario de simulation pour l'analyse qualitative à trois avions

- Les types d'avions sont choisis parmi les six types suivants : ATR42/72, SAAB2000, A320, B767-300, A340, B747-400. Ces six types d'avions représentent un éventail assez complet des différents types de propulsion, de catégorie de vitesse pour l'approche finale (cf. *chapitre II*) et de catégorie de turbulence de sillage (cf. *chapitre II*) qui existent dans l'aviation civile commerciale ([8-d]) :

| Type avion            | ATR42/72 | SAAB2000 | A320   | B767-300 | A340  | B747-400 |
|-----------------------|----------|----------|--------|----------|-------|----------|
| Propulsion            | Turbo    | Turbo    | Jet    | Jet      | Jet   | Jet      |
| Catégorie vitesse     | B        | B        | C      | C        | D     | D        |
| Turbulence de sillage | Medium   | Medium   | Medium | Heavy    | Heavy | Heavy    |

Tableau 8-1 Types d'avions pour les scenarii d'analyse quantitative (source [8-d])

- Les deux avions débutent leur trajectoire en descente à un niveau de vol compris entre le FL100 et FL260, sous réserve que chacun des avions puissent voler à ces niveaux ([8-a]). Ils se stabilisent au niveau de vol FL100. Le niveau de vol initial de l'avion suiveur est le même que celui de l'avion leader.
- Les vitesses aérodynamiques des avions sont celles données dans les tables de performances BADA 3.4 ([8-a]) : elles varient entre 266 kts et 492 kts.
- L'angle  $\Delta\psi$  entre les deux branches varie entre 30 degrés et 150 degrés par pas de 40 degrés ;
- La distance  $d_l$  entre la position initiale du leader et la balise de convergence est choisie parmi les valeurs {40 ; 50} NM ;
- L'objectif est de placer l'avion suiveur 90 secondes derrière l'avion leader. La position initiale du suiveur est placée sur la branche de convergence à  $\pm 90$  secondes de celle du leader retardée de 90 secondes : pour cela, la distance  $d_s$  entre la position initiale du suiveur et la balise de convergence est choisie dans l'ensemble  $d_l + V_l \times \{0 ; 180\}$  sec, où  $V_l$  désigne la vitesse aérodynamique (TAS) du leader. Comme l'objectif est de placer l'avion suiveur 90 secondes derrière l'avion leader, les lois de guidage relatif auront donc systématiquement un retard ou une avance de 90 secondes à compenser.
- Un scénario n'est généré que si les conditions de compatibilité des vitesses conventionnelle (valeur absolue de l'écart des vitesses conventionnelle (CAS) de l'avion leader et de l'avion suiveur inférieure à 30 kts) et de compatibilité des distances sont satisfaites. La condition de compatibilité des distances fait référence à la relation ( 8-9 ) dans laquelle l'estimation  $d_n$  de la distance nécessaire pour rejoindre la position cible est

comparée à la distance  $L_s = d_s + 20NM$  séparant la position initiale du suiveur de la balise de mesure du cadencement.

Ces considérations ont conduit à la génération de 1408 scénarii. Notons que la condition de compatibilité des distances filtre 1136 (2544 – 1408) scénarii. La répartition des scénarii par type d'avion est la suivante :

| Leader   | Suiveur  |          |      |          |      |          |
|----------|----------|----------|------|----------|------|----------|
|          | ATR42/72 | SAAB2000 | A320 | B767-300 | A340 | B747-400 |
| ATR42/72 | 128      | 16       | 16   | 16       | 16   | 16       |
| SAAB2000 | 16       | 32       | 32   | 32       | 32   | 32       |
| A320     | 16       | 48       | 48   | 48       | 48   | 48       |
| B767-300 | 16       | 48       | 48   | 48       | 48   | 48       |
| A340     | 16       | 48       | 48   | 48       | 48   | 48       |
| B747-400 | 16       | 48       | 48   | 48       | 48   | 48       |

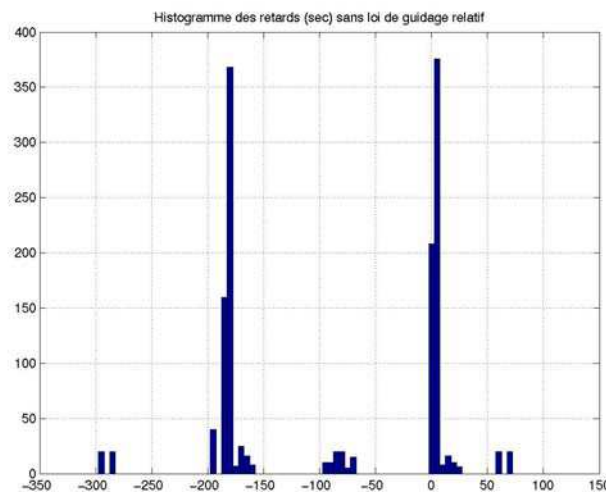
*Tableau 8-2 Répartition des types d'avion pour les scénarii d'analyse quantitative*

Le tableau précédent n'est pas symétrique car la relation ( 8-9 ) de compatibilité des distances ne fait pas intervenir la vitesse du suiveur.

## 8.4.2 Mesures réalisées

Afin d'analyser de manière quantitative l'effet des lois de guidage relatif, trois indicateurs sont calculés sur les résultats de simulation :

- Le premier indicateur est le retard entre l'avion suiveur et l'avion leader à la balise de mesure du cadencement. L'histogramme de cet indicateur pour les 1408 scénarii retenus sans loi de guidage relatif est le suivant :



*Figure 8-20 Histogramme des retards à la balise de mesure du cadencement sans loi de guidage relatif*

Sans loi de guidage relatif, le retard varie entre -297 secondes et +71 secondes. Les pics de retards se concentrent autour des valeurs 0 et -180 secondes qui sont les valeurs de retard choisies pour calculer la position initiale de l'avion suiveur. Les variations autour de ces valeurs sont dues aux différences de vitesses entre le leader et le suiveur. La moyenne du retard est -89 secondes, et l'écart type est de 97 secondes.

- Le second indicateur est la distance minimale mesurée entre les avions sur la durée totale de la simulation. L'histogramme de cet indicateur pour les scénarii retenus sans loi de guidage relatif est le suivant :

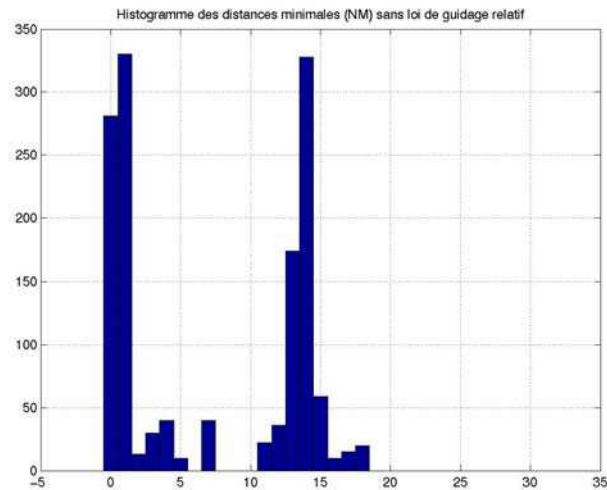


Figure 8-21 Histogramme des distances minimales sans loi de guidage relatif

La distance minimale varie entre 0 et 18 NM. Les deux pics correspondent à la concentration des retards autour des valeurs 0 et -180 secondes. La valeur moyenne de la distance minimale est de 7.2 NM, et son écart type vaut 6.4 NM. Il y a 694 scénarii pour lesquels la distance minimale est inférieure à 4.5 NM, et 624 scénarii pour lesquels la distance minimale est inférieure à 2.5 NM.

- Le troisième indicateur est relatif à la dispersion de la différence entre les vitesses conventionnelles (CAS) du leader et du suiveur à la balise de mesure du cadencement. Comme la vitesse conventionnelle est constante durant tout le scénario sans loi de guidage relatif, cet histogramme est aussi celui de la différence entre les vitesses conventionnelles du leader et du suiveur au début de scénario :

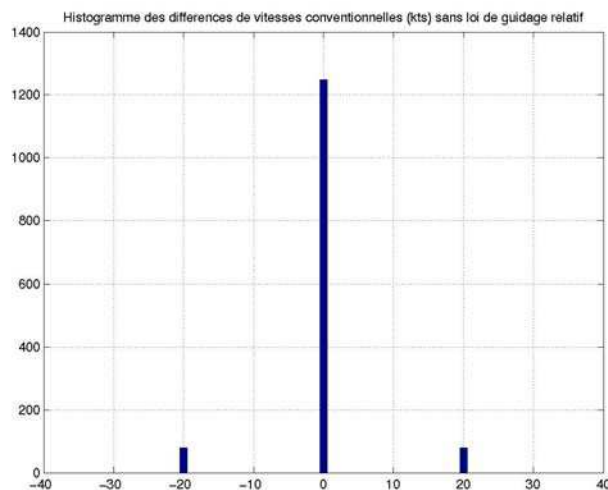


Figure 8-22 Histogramme de la différence entre les vitesses conventionnelles (CAS) du leader et du suiveur à la balise de mesure du cadencement

La majorité des scénarii présentent une différence de vitesse conventionnelle nulle, ce qui indique que les deux avions volent pratiquement à la même vitesse conventionnelle.

### 8.4.3 Evaluation statistique de l'effet des lois de guidage relatif

#### 8.4.3.1 Retard entre l'avion suiveur et l'avion leader à la balise de mesure du cadencement

L'histogramme du retard entre l'avion suiveur et l'avion leader à la balise de mesure du cadencement pour les différentes lois de guidage est représenté sur les figures suivantes :

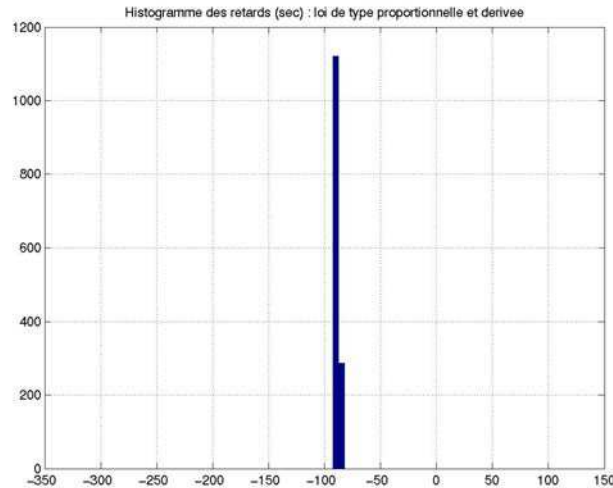


Figure 8-23 Histogramme des retards à la balise de mesure du cadencement pour la loi de type proportionnelle et dérivée

Pour la loi de type proportionnelle et dérivée, le retard varie entre -91 secondes et -84 secondes. Sa moyenne est de -88.6 secondes et l'écart type vaut 1.6 secondes.

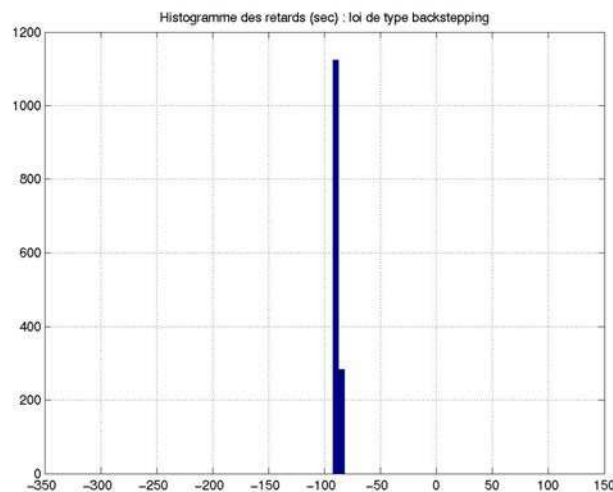


Figure 8-24 Histogramme des retards à la balise de mesure du cadencement pour la loi de type backstepping

Pour la loi de type backstepping, le retard varie entre -91 secondes et -84 secondes. Sa moyenne est de -88.8 secondes et l'écart type vaut 2 secondes.

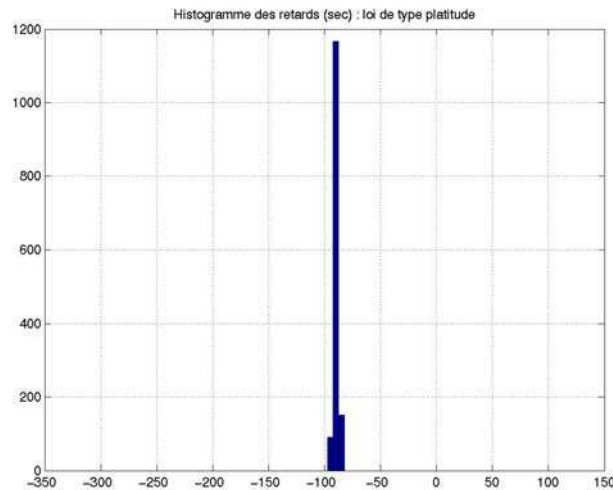


Figure 8-25 Histogramme des retards à la balise de mesure du cadencement pour le bouclage linéarisant basé sur la platitude

Pour le bouclage linéarisant basé sur la platitude, le retard varie entre -97 secondes et -84 secondes. Sa moyenne est de -89.5 secondes et l'écart type vaut 2 secondes.

Pour les trois types de loi, l'objectif des 90 secondes de retard à la balise de mesure du cadencement est obtenu avec une très faible dispersion.

#### 8.4.3.2 Distance minimale entre les avions

L'histogramme de la distance minimale entre les avions pour les différentes lois de guidage relatif est représenté sur les figures suivantes :

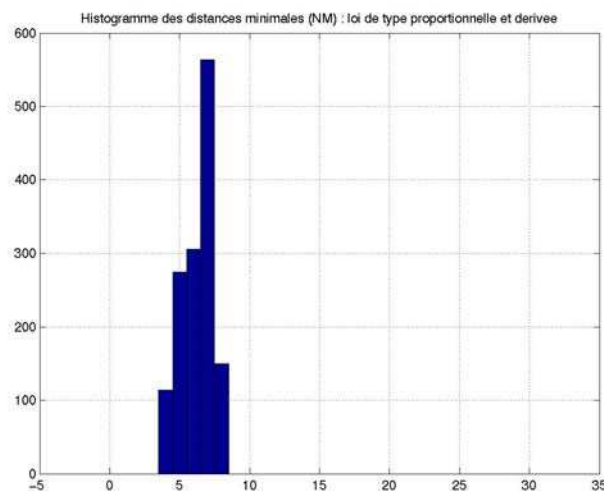


Figure 8-26 Histogramme de la distance minimale pour la loi de type proportionnelle et dérivée

Pour la loi de type proportionnelle et dérivée, la distance minimale varie entre 4 et 8.2 NM. Sa moyenne est de 6.3 NM et l'écart type vaut 1.1 NM. Le pic de l'histogramme se situe dans la classe des distances minimales comprises entre 6.5 et 7.5 NM. C'est dans cette classe en effet que se situe la séparation correspondant à une vitesse aérodynamique de 288 kts (soit 250 kts de vitesse conventionnelle au FL100, ce qui est la procédure habituelle pour les jets qui composent la majorité des rencontres) multiplié par le retard visé de 90 sec (ce qui donne 7.2 NM). Il y a 114 scénarii pour lesquels la distance minimale se situe entre 3.5 et 4.5 NM.

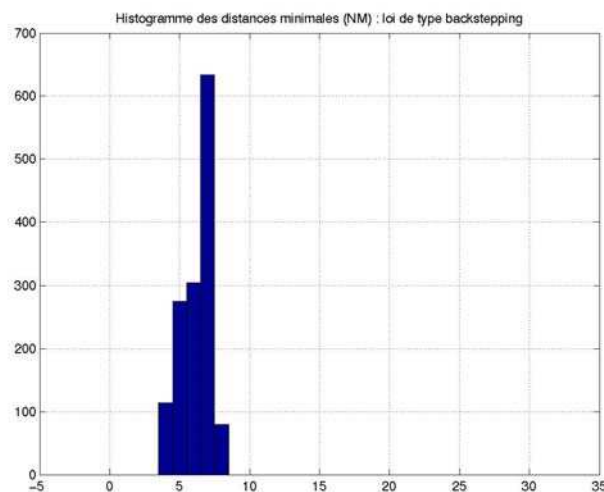


Figure 8-27 Histogramme de la distance minimale pour la loi de type backstepping

Pour la loi de type backstepping, la distance minimale varie entre 4 et 7.9 NM. Sa moyenne est de 6.3 NM et l'écart type vaut 1 NM. Il y a 114 scénarii pour lesquels la distance minimale se situe entre 3.5 et 4.5 NM.

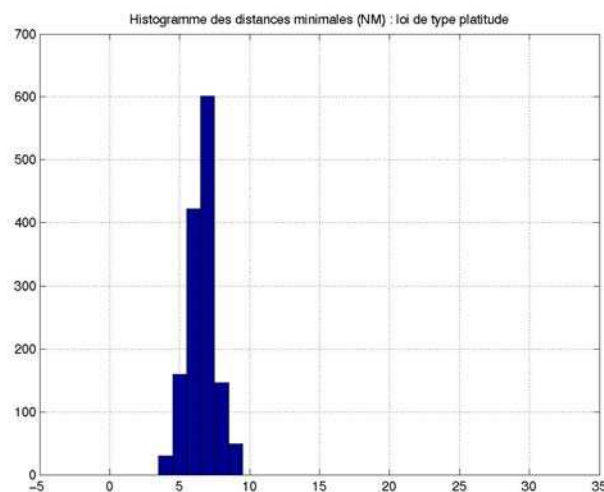


Figure 8-28 Histogramme de la distance minimale pour le bouclage linéarisant basé sur la platitude

Pour le bouclage linéarisant basé sur la platitude, la distance minimale varie entre 3.8 et 8.7 NM. Sa moyenne est de 6.6 NM et l'écart type vaut 0.95 NM. Il y a 30 scénarii pour lesquels la distance minimale se situe entre 3.5 et 4.5 NM.

Les lois de type proportionnelle et dérivée et de type backstepping présentent à peu près les mêmes caractéristiques du point de vue de la distance minimale.

Le bouclage linéarisant basé sur la platitude présente des caractéristiques plus intéressantes du point de vue de la sécurité : en effet, ce type de loi permet de diviser par 3.8 (114 divisé par 30) le nombre de scénarii pour lesquels la distance minimale se situe entre 3.5 et 4.5 NM.

#### 8.4.3.3 Différence de vitesse à la balise de mesure du cadencement

L'historique de la différence de vitesse conventionnelle entre les deux avions à la balise de mesure du cadencement pour les différentes lois est représenté sur les figures suivantes :

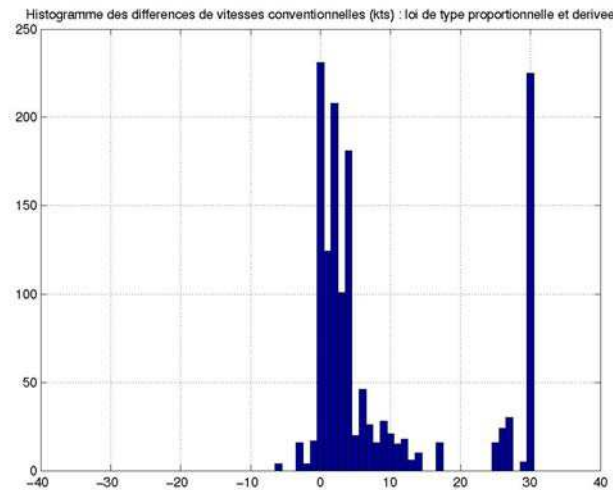


Figure 8-29 Histogramme de la différence de vitesse conventionnelle (CAS) à la balise de mesure du cadencement pour la loi de type proportionnelle et dérivée

Pour la loi de type proportionnelle et dérivée, il y a 225 scénarii pour lesquels la différence de vitesse est de +30 kts (i.e. la vitesse conventionnelle de l'avion suiveur est supérieure de 30 kts à celle de l'avion leader à la balise de mesure du cadencement), ce qui indique que la manœuvre de positionnement relatif n'est pas complètement achevée (vitesse non stabilisée). Pour 355 scénarii, la différence de vitesse est inférieure à 1.5 kts.

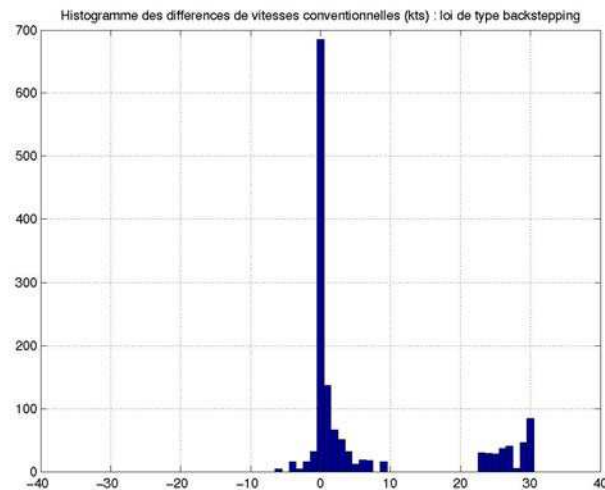


Figure 8-30 Histogramme de la différence de vitesse conventionnelle (CAS) à la balise de mesure du cadencement pour la loi de type backstepping

Pour la loi de type backstepping, il y a 84 scénarii pour lesquels la différence de vitesse est de +30 kts, ce qui indique que la manœuvre de positionnement relatif n'est pas complètement achevée (vitesse non stabilisée). Pour 822 scénarii, la différence de vitesse est inférieure à 1.5 kts.

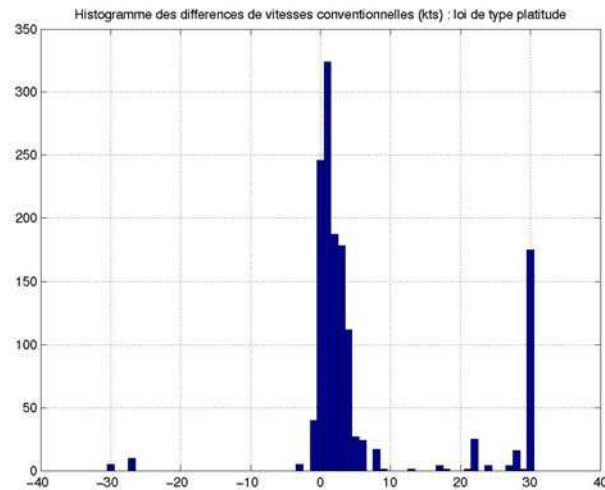


Figure 8-31 Histogramme de la différence de vitesse conventionnelle (CAS) à la balise de mesure du cadencement pour le bouclage linéarisant basé sur la platitude

Pour le bouclage linéarisant basé sur la platitude, il y a 180 scénarii pour lesquels la différence de vitesse est de  $\pm 30$  kts, ce qui indique que la manœuvre de positionnement relatif n'est pas complètement achevée (vitesse non stabilisée). Pour 610 scénarii, la différence de vitesse est inférieure à 1.5 kts.

La loi de guidage relatif basée sur le backstepping permet d'obtenir le plus grand nombre de scénarii pour lesquels la différence de vitesse est inférieure à 1.5 kts à la balise de mesure du cadencement. Par conséquent, la loi de guidage relatif basée sur le backstepping favorise la rapidité des manœuvres de positionnement relatif qui s'achèvent plus rapidement que celles obtenues avec les lois de type proportionnelle et dérivée et de type bouclage linéarisant basé sur la platitude.

La loi de type bouclage linéarisant basé sur la platitude permet d'obtenir de meilleurs résultats que ceux issus de la loi de type proportionnelle et dérivée.

## 8.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une évaluation des performances des lois de guidage qui ont été synthétisées lors des chapitres précédents a été réalisée par simulations sur un très grand nombre de scénarii réalistes d'un point de vue contrôle du trafic aérien.

L'utilisation de trajectoires de référence nous a permis soit d'éviter de trop grands écarts de la trajectoire suivie par l'avion suiveur par rapport à son plan de vol, soit d'obtenir une trajectoire relativement naturelle pour le contrôleur aérien (l'avion suiveur s'écarte puis rejoint la balise de convergence).

Les retards à la balise de mesure du cadencement qui ont été observés avec les trois types de lois utilisées (lois de type proportionnelle et dérivée, de type backstepping et de type bouclage linéarisant basé sur la platitude sur le jeu réduit de scénarii) sont très comparables et présentent une très faible dispersion.

Dans tous les cas, les lois de guidage relatif basées sur les techniques de commande non linéaire (backstepping, platitude) permettent d'obtenir des performances meilleures que celles obtenues avec la loi de type proportionnelle et dérivée : la loi basée sur le backstepping favorise la rapidité des manœuvres de positionnement relatif, alors que le bouclage linéarisant basé sur la platitude favorise la sécurité des manœuvres. Ces meilleures performances ont été obtenues au prix d'une complexification relativement réduite de l'expression des lois de guidage par rapport à celle de type proportionnelle et dérivée.

## **8.6 Références bibliographiques**

- [8-a] *Aircraft Performance Summary Tables for the Base of Aircraft Data (BADA) Revision 3.4, Eurocontrol Experimental Centre, EEC Note No. 06/02, June 2002*
- [8-b] *Coverage of 2001 European Air traffic for the Base of Aircraft Data (BADA) Revision 3.4, Eurocontrol Experimental Centre, EEC Note No. 09/02, June 2002*
- [8-c] *Grimaud I., Hoffman E., Rognin L., Zeghal K., Améliorer la gestion du trafic aérien : étude d'une nouvelle coopération contrôleurs - pilotes, Pilote de ligne, n°37, mars - avril - mai 2003*
- [8-d] *IAPA project, Work Package 04 : case study report, Eurocontrol ACAS programme, October 2003*
- [8-e] *Stöcker H., Toutes les mathématiques, Dunod, 1999*

---

## Chapitre 9

### Conclusion générale

---

Cette thèse s'articule autour de la synthèse de lois de guidage relatif dédiées à des avions de transport commercial et appliquées à la régulation des flux de trafic aérien. Elle apporte une contribution à l'élaboration d'un système de contrôle du trafic aérien caractérisé par une coopération plus étroite entre l'équipage et le sol. La démarche suivie est une démarche de recherche appliquée dont le but est de permettre l'émergence de ce type de systèmes sur les avions de transport commercial de la prochaine génération.

Le principe du guidage relatif entre aéronefs a été introduit, développé et mis en équation. Le problème de la synthèse de lois de commande permettant de maîtriser une dynamique de guidage fortement non linéaire et soumise à la contrainte de séparation minimale entre avions s'est alors posé. Afin de favoriser l'intégration d'une fonction de guidage relatif auprès des systèmes embarqués actuels et sa robustesse vis-à-vis des incertitudes sur les systèmes de pilotage, une approche à deux échelles de temps a été considérée :

- la première échelle de temps correspond aux dynamiques rapides de l'avion autour de ses axes et est supposée traitée de façon satisfaisante par les modes de contrôle automatique d'un système de pilotage conventionnel ;
- la seconde échelle de temps correspond aux dynamiques lentes associées à la position du centre de gravité de l'avion et à sa vitesse.

Nous avons alors développé une nouvelle fonction de guidage dont les modes propres au voisinage de la position d'équilibre (i.e. maintien de la position relative) satisfont aux principes de la commande à plusieurs échelles de temps.

L'applicabilité de méthodes de type proportionnelle et dérivée pour la synthèse de lois de guidage relatif a d'abord été évaluée. Ces méthodes sont en effet largement utilisées pour d'autres modes de guidage plus classiques dans le domaine de l'aviation commerciale.

Les travaux de recherche se sont ensuite orientés vers des méthodes de synthèse de commande non linéaires afin d'améliorer les performances observées sur un scénario d'évaluation : backstepping et commande des systèmes plats.

La mise en œuvre de ces techniques a naturellement conduit à plusieurs contributions dans le cadre de l'automatique. D'une part, une propriété d'antisymétrie a été mise à profit pour appliquer la méthode du backstepping et contourner une singularité qui apparaît avec des méthodes de type bouclage linéarisant lorsque les écarts sont exprimés dans le repère lié à l'avion suiveur. D'autre part, la méthode basée sur la platitude a permis de favoriser la sécurité des manœuvres pour la rejointe de la formation.

Une évaluation des performances a été réalisée par simulations sur un très grand nombre de scénarii réalistes d'un point de vue contrôle du trafic aérien. Dans tous les cas, les lois de

guidage relatif basées sur les techniques de commande non linéaire (backstepping, platitude) permettent d'obtenir des performances meilleures que celles obtenues avec la loi de type proportionnelle et dérivée : la loi basée sur le backstepping favorise la rapidité des manœuvres de positionnement relatif, alors que le bouclage linéarisant basé sur la platitude favorise la sécurité des manœuvres. Ces meilleures performances ont été obtenues au prix d'une complexification réduite par rapport à la loi de type proportionnelle et dérivée.

D'un point de vue opérationnel, les lois de guidage relatif peuvent être utilisées sans avoir recours à une trajectoire de référence pour compenser une avance vis à vis d'un autre avion. Cette compensation se fait en s'écartant franchement du plan de vol. Utilisées avec une trajectoire de référence, ces lois de guidage relatif permettent de compenser un retard (accélération) ou une avance (décélération) plus réduit (de l'ordre de 1 à 2 minutes), mais en restant relativement proche du plan de vol de l'avion et des pratiques actuelles du contrôle du trafic aérien. De plus, l'utilisation d'une trajectoire de référence permet à l'équipage d'anticiper la trajectoire future de l'aéronef.

Sur le plan prospectif, plusieurs lignes d'action peuvent être envisagées, aussi bien sur le plan méthodologique qu'industriel :

- Etude complémentaire de la robustesse vis-à-vis des perturbations extérieures (i.e. vent, mesures) ;
- Génération de trajectoires de référence intégrant les limitations du domaine de vol ;
- Evaluation des risques, et le cas échéant réévaluation des normes de séparation entre avions ;
- Etude de situations plus complexes : train de plusieurs avions, cadencement de plusieurs flux de trafic ;
- Etude de l'impact de tels systèmes sur la charge de travail de contrôleurs aériens et sur la capacité des secteurs de contrôle.

A moyen terme, l'intégration de tels systèmes dans l'avionique dédiée aux fonctions de guidage de l'avion devra être envisagée. De plus, il s'agira de définir pour le contrôleur aérien une couche de supervision afin de lui fournir les éléments d'aide à la décision lui permettant de détecter et d'anticiper les situations propices à la réalisation de manœuvres de guidage relatif, de les déclencher et de les gérer.

---

## Chapitre 10

### Unités aéronautiques, acronymes, publications

---

#### 10.1 Unités aéronautiques

|            |                                     |
|------------|-------------------------------------|
| <i>FL</i>  | <i>Flight Level : 1FL = 100 ft</i>  |
| <i>ft</i>  | <i>feet : 1 ft = 0.3048 m</i>       |
| <i>kts</i> | <i>knot : 1kt = 1 NM/h</i>          |
| <i>NM</i>  | <i>Nautical Mile : 1NM = 1852 m</i> |

#### 10.2 Acronymes

|                |                                                                   |
|----------------|-------------------------------------------------------------------|
| <i>ACAS</i>    | <i>Airborne Collision Avoidance System</i>                        |
| <i>ADC</i>     | <i>Air Data Computer</i>                                          |
| <i>ADS-B</i>   | <i>Automatic Dependent Surveillance- Broadcast</i>                |
| <i>ASAS</i>    | <i>Airborne Separation Assistance System</i>                      |
| <i>ATAAS</i>   | <i>Advanced Terminal Area Approach Spacing Tool</i>               |
| <i>ATIS</i>    | <i>Automatic Terminal Information Service</i>                     |
| <i>AWY</i>     | <i>Airways (voies aériennes situées en dessous du niveau 195)</i> |
| <i>CADV</i>    | <i>Commande Automatique De Vol</i>                                |
| <i>CAG</i>     | <i>Circulation Aérienne Générale</i>                              |
| <i>CAS</i>     | <i>Calibrated Air Speed</i>                                       |
| <i>CDVE</i>    | <i>Commande De Vol Electrique</i>                                 |
| <i>GS</i>      | <i>Ground Speed</i>                                               |
| <i>CTR</i>     | <i>Région de contrôle d'aérodrome</i>                             |
| <i>DAG-TM</i>  | <i>Distributed Air-Ground Traffic Management</i>                  |
| <i>DH</i>      | <i>Hauteur de décision</i>                                        |
| <i>DV</i>      | <i>Directeur de Vol</i>                                           |
| <i>EAS</i>     | <i>Equivalent Air Speed</i>                                       |
| <i>EUROCAE</i> | <i>European Organisation for Civil Aviation Equipment</i>         |
| <i>FAA</i>     | <i>Federal Aviation administration</i>                            |
| <i>FAF</i>     | <i>Final Approach Fix</i>                                         |
| <i>FANS</i>    | <i>Future Air Navigation System</i>                               |

|              |                                                                                                                                   |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>FCU</i>   | <i>Flight Control Unit</i>                                                                                                        |
| <i>FFAS</i>  | <i>Free Flight AirSpace</i>                                                                                                       |
| <i>FMS</i>   | <i>Flight Management System</i>                                                                                                   |
| <i>FPA</i>   | <i>Flight Path Angle</i>                                                                                                          |
| <i>GPS</i>   | <i>Global Positioning System</i>                                                                                                  |
| <i>HDG</i>   | <i>Heading</i>                                                                                                                    |
| <i>IAF</i>   | <i>Initial Approach Fix</i>                                                                                                       |
| <i>IAS</i>   | <i>Indicated Air Speed</i>                                                                                                        |
| <i>IF</i>    | <i>Intermediate Fix</i>                                                                                                           |
| <i>IFR</i>   | <i>Instrument Flight Rules</i>                                                                                                    |
| <i>ILS</i>   | <i>Instrument Landing System</i>                                                                                                  |
| <i>IRS</i>   | <i>Inertial Reference System</i>                                                                                                  |
| <i>JAA</i>   | <i>Joint Aviation Authorities</i>                                                                                                 |
| <i>MAS</i>   | <i>Managed AirSpace</i>                                                                                                           |
| <i>MASPS</i> | <i>Minimum Aviation System Performance Standards</i>                                                                              |
| <i>MMO</i>   | <i>Mach Maximum Opération</i>                                                                                                     |
| <i>MCDU</i>  | <i>Multifunction Control Display Unit</i>                                                                                         |
| <i>MOPS</i>  | <i>Minimum Operational Performance Standards</i>                                                                                  |
| <i>NASA</i>  | <i>National Aeronautics and Space Administration</i>                                                                              |
| <i>NEAN</i>  | <i>North European ADS-B Network</i>                                                                                               |
| <i>NUP</i>   | <i>NEAN Update Program</i>                                                                                                        |
| <i>OACI</i>  | <i>Organisation de l'Aviation Civile Internationale</i>                                                                           |
| <i>ONU</i>   | <i>Organisation des Nations Unies</i>                                                                                             |
| <i>PA</i>    | <i>Pilote Automatique</i>                                                                                                         |
| <i>PDR</i>   | <i>Routes PRédéterminées</i>                                                                                                      |
| <i>PFD</i>   | <i>Primary Flight Display</i>                                                                                                     |
| <i>RCA</i>   | <i>Réglementation de la Circulation Aérienne</i>                                                                                  |
| <i>RTCA</i>  | <i>Radio Technical Commission for Aeronautics</i>                                                                                 |
| <i>SARPs</i> | <i>Standards And Recommended Practices</i>                                                                                        |
| <i>SID</i>   | <i>Standard Instrument Departure</i>                                                                                              |
| <i>STAR</i>  | <i>STandard ARrival</i>                                                                                                           |
| $tk_s$       | <i>along track distance : abscisse de la position de l'avion leader dans le repère lié à l'avion suiveur (écart longitudinal)</i> |
| <i>TAS</i>   | <i>True Air Speed</i>                                                                                                             |
| <i>TCP</i>   | <i>Trajectory Change Point</i>                                                                                                    |
| <i>TMA</i>   | <i>Région terminales de contrôle</i>                                                                                              |
| <i>TRK</i>   | <i>Track</i>                                                                                                                      |
| <i>UAT</i>   | <i>Universal Access Transceiver</i>                                                                                               |
| <i>UAV</i>   | <i>Unmanned Aerial Vehicle</i>                                                                                                    |

*VDL 4*      *VHF Data Link mode 4*

*VFR*        *Visual Flight Rules*

*VHF*        *Very High Frequency*

*VMO*        *Vitesse Maximum Opération*

*V/S*        *Vertical Speed*

*VOR*        *Radiophare omnidirectionnel VHF (VHF Omnidirectional Range)*

*x<sub>tk<sub>s</sub></sub>*      *cross track distance : ordonnée de la position de l'avion leader dans le repère  
lié à l'avion suiveur (écart latéral)*

## 10.3 Publications

- A simplified backstepping design for 3-D time-based aircraft relative guidance (04023)  
T.MIQUEL, F.MORA CAMINO, F.CASAU, J.M.LOSCOS  
Rapport LAAS No04023  
AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Providence (USA), 16-19 Août 2004
- Minimum time trajectory generation for relative guidance of aircraft (04014)  
F.MORA CAMINO, A.ACHAIBOU, T.MIQUEL, R.FAYE, B.OUATTARA, S.SAWADOGO  
Rapport LAAS No04014  
Inverse Problems, Design and Optimization Symposium, Rio de Janeiro (Brésil), 17-19 Mars 2004
- Design of a supervised flight control system for aircraft relative guidance (03383)  
T.MIQUEL, F.MORA CAMINO, J.M.LOSCOS, A.ACHAIBOU  
Rapport LAAS No03383  
22nd Digital Avionics Systems Conference (DASC), Indianapolis (USA), 12-16 Octobre 2003
- A nonlinear control approach for relative guidance of commercial aircraft (03298)  
T.MIQUEL, F.MORA CAMINO, J.G.SLAMA, A.ACHAIBOU  
Rapport LAAS No03298  
2o Congresso Tematico de Dinamica, Controle e Aplicações (DINCON'2003), Sao Jose dos Campos (Brésil), 18-22 Août 2003
- Positionnement relatif entre aéronefs. Application du backstepping (03264)  
T.MIQUEL, F.MORA CAMINO, F.CASAU  
Rapport LAAS No03264  
Journées Doctorales d'Automatique (JDA'2003), Valenciennes (France), 25-27 Juin 2003, pp.461-466  
4eme Congrès de l'Ecole Doctorale Systèmes (EDSYS), Toulouse (France), 23-24 Octobre 2003
- Aircraft relative guidance: a flatness synthesis of a new autopilot mode (03082)  
T.MIQUEL, F.MORA CAMINO, J.LEVINE  
Rapport LAAS No03082  
5th USA/Europe Seminar on Air Traffic Management Research and Development, Budapest (Hongrie), 23-27 Juin 2003

- A feedback linearizing controller for relative guidance between commercial aircraft (03081)

T.MIQUEL, F.MORA CAMINO, A.ACHAIBOU

Rapport LAAS No03081

AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Austin (USA), 11-14 Août 2003

- Relative guidance of aircraft: analysis and comparison of two control approaches (02410)

T.MIQUEL, F.MORA CAMINO

Rapport LAAS No02410

2002SAE World Aviation Congress & Display (WAC'2002), Phoenix (USA), 5-7 Novembre 2002

---

## Chapitre 11

### Notions d'altimétrie et d'anémomètre

---

#### 11.1 Notions d'altimétrie et d'anémomètre

L'objet de cette annexe est de donner quelques précisions sur les notions d'altimétrie et d'anémomètre utilisées en aéronautique. Ces notions sont liées aux paramètres atmosphériques, en particulier la température et la pression de l'air ambiant. Les informations présentées dans cette annexe proviennent essentiellement des références [4-d] et [11-b].

##### 11.1.1 Atmosphère standard

L'état de l'atmosphère varie avec l'altitude, et à altitude donnée, varie avec le lieu et les conditions météorologiques. Un modèle d'atmosphère standard a été établi par l'OACI ([11-c]). La définition de l'atmosphère standard repose sur le modèle suivant :

- L'air est assimilé à un gaz parfait : la relation entre la pression  $p$ , la température  $T$  et la masse volumique de l'air  $\rho$  est la suivante, où  $r$  est constante des gaz parfaits ( $r = 287.04 \text{ m}^2/\text{Ks}^2$ ) :

$$p = \rho r T \quad (11-1)$$

où :

$$r = 287.04 \text{ m}^2 / ^\circ\text{Ks}^2 \quad (11-2)$$

- L'atmosphère étant au repos par rapport au sol, sa distribution verticale satisfait à l'équation d'équilibre hydrostatique (équation de Laplace) où  $p$  est la pression,  $\rho$  la masse volumique de l'air,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $h$  l'altitude :

$$dp = -\rho g dh \quad (11-3)$$

La masse volumique de l'air à l'altitude nulle et l'accélération de la pesanteur  $g$  sont données par :

$$\begin{cases} \rho_0 = 1.225 \text{ kg} / \text{m}^3 \\ g = 9.81 \text{ m} / \text{s}^2 \end{cases} \quad (11-4)$$

- Loi des températures : au niveau zéro, la température est fixée par convention à  $288.15^\circ\text{K}$  ( $15^\circ\text{C}$ ). Elle décroît linéairement de  $6.5^\circ\text{C}$  par 1000 mètres jusqu'à 11000 mètres. Cette altitude définit la tropopause. Au delà de la tropopause, la température est constante, égale à  $216.65^\circ\text{K}$  ( $-56.5^\circ\text{C}$ ), entre 11000 et 20000 mètres. Au delà de 20000 mètres, la variation de la

température est linéaire croissante jusqu'à 47000 mètres, puis à constante jusqu'à 52000 mètres, et enfin décroissante. Une définition de l'atmosphère jusqu'à 20000 mètres est suffisante pour les besoins des aéronefs commerciaux actuels.

$$\begin{cases} T = T_0 + k_T h & \forall h \leq 11000 \text{ mètres (tropopause)} \\ T = T_{trop} & \forall 11000 \text{ mètres} \leq h \leq 20000 \text{ mètres} \end{cases} \quad (11-5)$$

où :

$$\begin{cases} T_0 = 288.15^\circ K \\ k_T = -0.0065^\circ K / m \\ T_{trop} = 216.65^\circ K \end{cases} \quad (11-6)$$

Dans ces conditions, la loi reliant la masse volumique de l'air  $\rho$  exprimée en  $\text{kg/m}^3$ , la température  $T$  exprimée en  $^\circ K$  et l'altitude  $h$  exprimée en mètres est la suivante :

- En dessous de la tropopause ( $h \leq 11000$  mètres) :

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{-\left( \frac{g}{k_T r} + 1 \right)} \quad (11-7)$$

où :

$$\begin{cases} k_T = -0.0065^\circ K \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{g}{k_T r} + 1 \approx 4.25864 \quad (11-8)$$

- Au dessus de la tropopause et jusqu'à une altitude de 20000 mètres :

$$\rho = \rho_{trop} \exp \left( - \frac{g \cdot (h - 11000)}{r \cdot T_{trop}} \right) \quad (11-9)$$

où :

$$\rho_{trop} = \rho_0 \left( \frac{T_{trop}}{T_0} \right)^{-\left( \frac{g}{k_T r} + 1 \right)} \quad (11-10)$$

## 11.1.2 Altimétrie

### 11.1.2.1 Altitude géopotentielle et altitude géométrique

Dans les hypothèses de définition de l'atmosphère standard, l'équation de Laplace est intégrée en supposant que l'attraction de la pesanteur  $g$  est constante. Cela signifie que le travail dépensé pour élever une masse  $m$  de l'altitude zéro à l'altitude  $h$  est  $mgh$ . Cette altitude est dite géopotentielle (l'énergie potentielle de la masse  $m$  à l'altitude  $h$  est  $mgh$ ) : c'est celle qui intervient dans les calculs de la mécanique du vol.

Cependant, il faut noter que l'altitude géopotentielle est différente de l'altitude géométrique. En effet, l'attraction de la pesanteur diminuant avec l'altitude, une masse  $m$  n'acquiert l'énergie  $mgh$  qu'en s'élevant à une altitude géométrique  $h'$  supérieure à  $h$ . Le tableau suivant, issu de [4-d], donne la correspondance entre altitude géopotentielle et altitude géométrique, exprimées en mètres:

|                         |   |      |       |       |
|-------------------------|---|------|-------|-------|
| Altitude géopotentielle | 0 | 5000 | 11000 | 20000 |
| Altitude géométrique    | 0 | 5004 | 11019 | 20063 |

Tableau 11-1 Correspondance entre altitudes géopotentielle et géométrique

Dans le domaine de vol des avions de transport commerciaux, l'erreur commise est négligeable en confondant les deux notions.

### 11.1.2.2 Altitude pression

Un altimètre est un simple baromètre dont la graduation n'est pas exprimée en unité de pression mais en unité de longueur, la correspondance entre pression et longueur étant la loi de l'atmosphère standard. La grandeur ainsi mesurée s'appelle altitude-pression : elle n'est égale à l'altitude géopotentielle que dans le cas fortement improbable où l'atmosphère est standard : ainsi par exemple, lorsqu'un pilote annonce avoir atteint l'altitude de 11000 mètres, cela signifie qu'il a atteint une altitude où règne une pression de 22631 pascals.

Les calculs de performances des avions se font généralement en atmosphère standard. Néanmoins, pour tenir compte des variations atmosphériques, les calculs sont en général repris en supposant que pour chaque altitude-pression donnée, la température diffère d'une valeur  $\Delta T$  de la température standard (par exemple  $\pm 15^\circ\text{C}$ ). Il faut prendre garde alors que l'altitude pression n'est alors plus égale à l'altitude géopotentielle. En effet, en reprenant la loi de température au dessous de la tropopause donnée par ( 11-5 ) et en intégrant l'équation de Laplace ( 11-3 ), il vient :

$$p = p_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{-g}{k_T r}} = p_0 \left( 1 + \frac{k_T}{T_0} h \right)^{\frac{-g}{k_T r}} \quad (11-11)$$

La loi de graduation de l'altimètre s'obtient en inversant la relation précédente :

$$h = \frac{T_0}{k_T} \left( \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{-k_T r}{g}} - 1 \right) \approx \frac{288.15 \cdot 10^3}{6.5} \left( 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{0.19} \right) \quad (11-12)$$

Lorsque la loi de température diffère d'un écart  $\Delta T$  par rapport à l'atmosphère standard, il vient :

$$T = T_0 + k_T h + \Delta T \quad (11-13)$$

La relation entre altitude géopotentielle et pression est alors :

$$h' = \frac{T_0 + \Delta T}{k_T} \left( \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{-k_T r}{g}} - 1 \right) \approx \frac{(288.15 + \Delta T) \cdot 10^3}{6.5} \left( 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{0.19} \right) \quad (11-14)$$

A la pression  $p$  correspond l'altitude pression  $h$  donnée par ( 11-12 ), et à cette même pression correspond l'altitude géopotentielle  $h'$  donnée par ( 11-14 ) en atmosphère standard décalée d'un écart de température  $\Delta T$ . La relation reliant l'altitude pression  $h$  et l'altitude géopotentielle  $h'$  pour un écart de température  $\Delta T$  est alors la suivante :

$$h' \approx h \left( 1 + \frac{\Delta T}{288.15} \right) \quad (11-15)$$

Par conséquent, à une altitude pression  $h$  donnée l'avion vole à une altitude géopotentielle  $h'$  d'autant plus élevée que l'écart de température  $\Delta T$  par rapport à l'atmosphère standard est élevé.

### 11.1.2.3 Distances verticales utilisées en aéronautique

En aéronautique, plusieurs notions de distance verticale sont utilisées. On distingue :

- La hauteur : c'est la distance verticale par rapport au niveau de l'aérodrome. La hauteur est mesurée par rapport à la pression régnant au niveau de l'aérodrome, appelée *QFE*.
- L'altitude : il s'agit de la distance verticale par rapport au niveau de la mer. L'altitude est mesurée par rapport à la pression régnant au niveau de la mer, appelée *QNH*. Le *QNH* est obtenu en ramenant la pression *QFE* au niveau de la mer par l'intermédiaire d'une table d'atmosphère standard. L'altitude est utilisée lors des phases de décollage et d'atterrissage, et dans un volume limité (100 à 150 km sur le plan horizontal, quelques centaines de mètres sur le plan vertical) autour du point de mesure du *QNH*.
- Le niveau de vol : c'est l'altitude pression par rapport à la surface isobare 1013,25 hPa. Le niveau de vol est utilisé en dehors des phases de décollage et d'atterrissage. Le changement de calage altimétrie (*QNH* ↔ 1013,25 hPa) se fait en général entre 3000 et 6000 ft. Suivre un niveau de vol constant correspond à suivre une surface isobare, qui n'est pas forcément parallèle au sol. Malgré le fait que le niveau de vol ne représente pratiquement jamais l'altitude réelle de l'avion, son intérêt réside dans le fait qu'il permet d'effectuer des séparations verticales. En effet, le niveau de vol étant mesurée par rapport à un calage altimétrique identique pour tous les avions (1013,25 hPa), la différence entre les niveaux de vol des deux avions est pratiquement indépendante des conditions atmosphériques (cf. ( 11-15 )). Ceci permet des croisements en toute sécurité (en général 1000 ft).

Les différentes notions de distance verticale sont résumées sur la figure suivante :

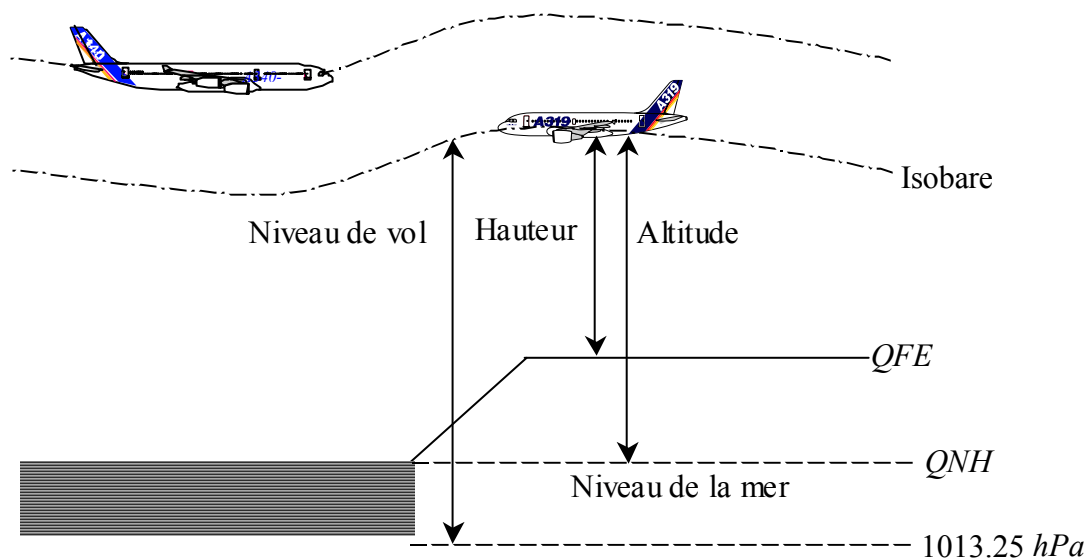


Figure 11-1 Distances verticales utilisées en aéronautique

## 11.1.3 Anémomètre

### 11.1.3.1 Nombre de Mach

Le nombre de Mach représente le rapport entre la vitesse propre et la célérité du son, qui est une fonction de la racine carrée de la température  $T$ , exprimée en degrés Kelvin :

$$M = \frac{V}{\sqrt{\gamma T}} \quad (11-16)$$

Dans le cas de l'air, le coefficient d'expansion isentropique  $\gamma$  est donné par :

$$\begin{cases} \gamma = 1.4 \\ \sqrt{\gamma} = 20.046 \text{ m/s} \sqrt{^\circ K} \end{cases} \quad (11-17)$$

Le nombre de Mach est le paramètre permettant la prise en compte de la compressibilité : pour un nombre de Mach faible ( $M < 0.4$ ), l'air peut être considéré comme un fluide incompressible. Au delà, cette simplification n'est plus valide et les phénomènes liés à la compressibilité seront d'autant plus marqués que le nombre de Mach est élevé. Voler à nombre de Mach constant permet ainsi de se prémunir des phénomènes dangereux liés à la compressibilité de l'air.

### 11.1.3.2 Vitesse conventionnelle

La vitesse conventionnelle (*CAS : Calibrated Air Speed*) est la vitesse qui serait mesurée par un anémomètre parfait à partir de la mesure de la différence entre pression statique et pression dynamique dans d'un tube Pitot. La relation entre vitesse conventionnelle et pression est la loi de Saint-Venant en subsonique (loi de Lord Rayleigh en supersonique). Cette relation (en subsonique) est obtenue en combinant deux équations :

- L'équation d'Euler relative à la conservation de l'énergie pour un écoulement sans apport d'énergie :

$$VdV + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (11-18)$$

- La relation entre pression et température pour un écoulement isentropique (i.e. adiabatique (pas d'apport de chaleur) et réversible) :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{Constante} \quad (11-19)$$

En combinant ( 11-18 ) et ( 11-19 ) puis en intégrant, il vient :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \text{Constante} \quad (11-20)$$

La valeur de la constante d'intégration est obtenue par la mesure de la pression statique  $p_0$  et de la masse volumique  $\rho_0$  au point d'arrêt (i.e.  $V_0 = 0$ ) lorsque le fluide est ralenti de manière isentropique : on obtient ainsi une relation entre la vitesse propre  $V$ , la pression dynamique  $p$  et la pression statique  $p_0$  au point d'arrêt :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \quad (11-21)$$

De plus, l'équation ( 11-19 ) permet d'écrire :

$$\rho_0 = \rho \left( \frac{p_0}{p} \right)^{1/\gamma} \quad (11-22)$$

La prise en compte de ( 11-22 ) et ( 11-1 ) dans ( 11-21 ) permet d'écrire la relation suivante, où

$\Delta p = p_0 - p$  est la pression différentielle, c'est à dire la différence entre pression statique et pression dynamique :

$$V^2 = \frac{2\gamma T}{\gamma-1} \left( \left( \frac{\Delta p}{p} + 1 \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \quad (11-23)$$

La vitesse conventionnelle  $V_c$  (CAS) est obtenue en graduant l'anémomètre mesurant la pression différentielle  $\Delta p$  non pas en unité de pression mais en unité de vitesse. Ce calcul est réalisé en prenant les pressions et températures régnant au sol en atmosphère standard, soit :

$$\begin{cases} p_0 = 1013.25 \text{ hPa} \\ T_0 = 288.15^\circ \text{K} \end{cases} \quad (11-24)$$

La loi de graduation de l'anémomètre parfait en subsonique est donc la suivante :

$$V_c^2 = \frac{2\gamma T_0}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{\Delta p}{p_0} + 1 \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \quad (11-25)$$

Ainsi, un anémomètre parfait n'indique la vitesse aérodynamique qu'à la condition de fonctionner dans des conditions ambiantes identiques en pression et en température à celles qui règnent au sol en atmosphère standard.

L'intérêt de la vitesse conventionnelle réside dans le fait que le phénomène de décrochage de l'avion se produit à vitesse conventionnelle constante (à poids constant et à nombre de Mach inférieur à 0.4), indépendante de la température et de l'altitude : c'est donc une indication précieuse pour le pilotage. De plus, la charge aérodynamique sur la structure sont proportionnelles à  $\Delta p$  : les avions sont donc limités à une vitesse conventionnelle maximale qui traduit la charge aérodynamique maximale que la structure est capable de supporter.

#### 11.1.3.3 Equivalent de vitesse

L'équivalent de vitesse ( $EAS$  : *Equivalent Air Speed*) est obtenu par un développement limité au premier ordre de (11-23). En effet, lorsque le rapport  $\Delta p / p$  est suffisamment faible, le développement limité au premier ordre de (11-23), associé à la prise en compte de (11-1), conduit à la formule de Bernoulli, qui est une approximation de la formule de Saint-Venant :

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (11-26)$$

Le même type de développement limité réalisé dans (11-25) conduit à la relation suivante, où la vitesse conventionnelle  $V_c$  a été remplacée par l'équivalent de vitesse, noté  $EV$  :

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho_0 (EV)^2 \quad (11-27)$$

Il vient par conséquent :

$$\rho V^2 = \rho_0 (EV)^2 \quad (11-28)$$

L'équivalent de vitesse est donc une approximation au premier ordre de vitesse conventionnelle. Elle est valable en pratique tant que le nombre de Mach ne dépasse pas 0.4. Pour tous les avions lents dont le nombre de Mach ne dépasse pas cette valeur (dont les avions de tourisme), la vitesse indiquée au pilote est l'équivalent de vitesse.

L'équivalent de vitesse est utile chaque fois que la vitesse propre  $V$  et l'altitude  $h$  interviennent au travers du groupement  $\rho(h)V^2$ .

#### 11.1.3.4 Vitesses utilisées en aéronautique

En plus du nombre de Mach, de la vitesse conventionnelle et de l'équivalent de vitesse, les autres vitesses utilisées en aéronautique sont les suivantes :

- la vitesse vraie ( $TAS$  : *True Air Speed*) : c'est la vitesse de l'avion par rapport à la masse d'air dans laquelle il évolue ;

- la vitesse indiquée (*IAS : Indicated Air Speed*) : c'est la vitesse lue sur l'anémomètre de l'avion. Elle représente la vitesse conventionnelle (ou l'équivalent de vitesse pour les avions lents) entachée de l'erreur instrumentale ;
- la vitesse propre : c'est la projection de la vitesse vraie dans le plan tangent à l'ellipsoïde terrestre ;
- la vitesse sol (*GS : Ground Speed*) : c'est la vitesse propre de l'avion à laquelle on ajoute la vitesse de déplacement de la masse d'air dans laquelle il évolue (vent effectif).

## **11.2 Références bibliographiques**

- [11-a] *La mécanique du vol, performances des avions et des engins*, L. George, J.F. Vernet, J.C. Wanner, Editions Dunod, 1969
- [11-b] *Technique du vol*, Y. Plays, Editions Cépadués, 1991
- [11-c] *Manual of the ICAO Standard Atmosphere*, ICAO document No. 7488, 1964

## Chapitre 12

### Rappels sur les notions de stabilité au sens de Lyapunov pour les systèmes autonome

#### 12.1 Définitions

L'objet de cette section est de rappeler quelques résultats classiques relatifs à la stabilité des systèmes autonomes. Une étude plus détaillée peut par exemple être trouvée dans [4-d].

Nous considérons un système non linéaire invariant dans le temps défini par :

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) \quad (12-1)$$

où  $\underline{x} \in \mathcal{R}^n$  et  $f$  est une application de  $\mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  de classe  $C^1$ .

Notons  $\underline{x}_e$  le point d'équilibre de (12-1) défini par :

$$f(\underline{x}_e) = \underline{0} \quad (12-2)$$

Pour des raisons de simplicité dans la présentation des notions qui suivent, nous choisirons l'origine en un point d'équilibre. Pour tout point d'équilibre différent de l'origine, une translation d'amplitude  $\underline{x}_e$  permet de prendre l'origine comme point d'équilibre. Ce point d'équilibre particulier n'enlève donc rien à la généralité des définitions suivantes.

Nous rappelons ci-après quelques définitions concernant différentes notions relatives à la stabilité des systèmes autonomes.

**Définition 3 :**  $\underline{x}(t)$  étant la trajectoire solution de (12-1), le point d'équilibre  $\underline{x}_e = \underline{0}$  est uniformément **stable** (au sens de Lyapunov) si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$  tel que :

$$\|\underline{x}(0)\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|\underline{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (12-3)$$

Cette notion de stabilité exprime le fait que si l'état initial est proche du point d'équilibre, il en sera de même de la trajectoire future. La trajectoire  $\underline{x}(t)$  peut donc être maintenue arbitrairement proche du point d'équilibre lorsque les conditions initiales sont suffisamment proches de celui-ci, comme illustré sur la figure suivante :

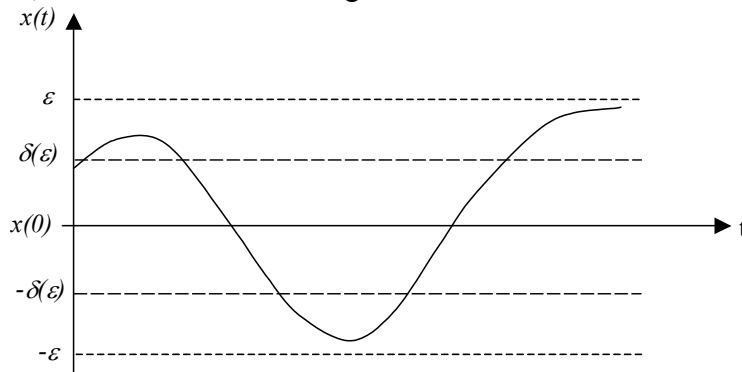


Figure 12-1 Stabilité au sens de Lyapunov

**Définition 4 :**  $\underline{x}(t)$  étant la trajectoire solution de ( 12-1 ), le point d'équilibre  $\underline{x}_e=0$  est **globalement stable** si elle est stable  $\forall \underline{x}(0) \in \mathcal{R}^n$ . En d'autres termes, le domaine d'attraction d'un système globalement stable est  $\mathcal{R}^n$ . Par conséquent,  $\delta(\varepsilon)$  peut être choisi de telle sorte que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \delta(\varepsilon) = \infty \quad (12-4)$$

**Définition 5 :**  $\underline{x}(t)$  étant la trajectoire solution de ( 12-1 ), le point d'équilibre  $\underline{x}_e=0$  est **uniformément attractif** si  $\forall r > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists T(r, \varepsilon) > 0$  tel que :

$$\|\underline{x}(0)\| < r \Rightarrow \|\underline{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq T(r, \varepsilon) \quad (12-5)$$

L'attractivité exprime le fait que si l'état initial est suffisamment proche du point d'équilibre, alors la trajectoire future reviendra nécessairement vers le point d'équilibre au bout d'un temps suffisant. Par conséquent, l'attractivité n'implique pas la stabilité, et réciproquement.

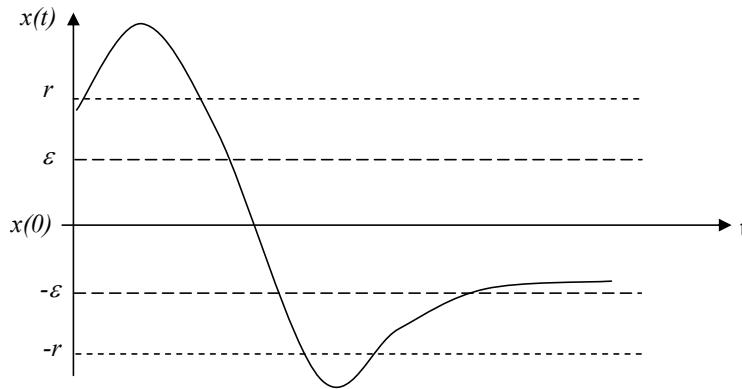


Figure 12-2 Attractivité

Par contre, l'attractivité implique la convergence :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = 0 \quad (12-6)$$

**Définition 6 :**  $\underline{x}(t)$  étant la trajectoire solution de ( 12-1 ), le point d'équilibre  $\underline{x}_e=0$  est **asymptotiquement stable** si elle est stable et attractive.

La stabilité asymptotique exprime le fait que le système perturbé ne s'éloignera pas trop du point d'équilibre (stabilité), et y reviendra après un certain temps (attractivité).

**Définition 7 :**  $\underline{x}(t)$  étant la trajectoire solution de ( 12-1 ), le point d'équilibre  $\underline{x}_e=0$  est **exponentiellement stable** si  $\exists \alpha, \lambda$  et  $r$ , constantes positives, telles que :

$$\|\underline{x}(0)\| < r \Rightarrow \|\underline{x}(t)\| < \alpha \cdot \|\underline{x}(0)\| \cdot \exp(-\lambda t) \quad \forall t \geq 0 \quad (12-7)$$

**Définition 8 :**  $\underline{x}(t)$  étant la trajectoire solution de ( 12-1 ), le point d'équilibre  $\underline{x}_e=0$  est **globalement exponentiellement stable** si elle est exponentiellement stable et si le domaine d'attraction est  $\mathcal{R}^n$  (i.e.  $r = \infty$  dans la définition 5 précédente).

## 12.2 Méthodes d'analyse

### 12.2.1 Méthode directe de Lyapunov

L'idée sous jacente à l'analyse de la stabilité par la méthode directe de Lyapunov réside dans la constatation physique du fait que si l'énergie d'un système est dissipée de manière continue, alors celui-ci tend vers son point d'équilibre. Par conséquent, la propriété de

stabilité d'un système peut être établie grâce à l'examen d'une seule fonction scalaire, appelée fonction de Lyapunov.

**Définition 9 :** l'application  $f$  est **Lipschitzienne** sur un domaine  $D$  si pour tout  $\underline{x} \in D \subset \mathcal{R}^n$ , il existe un voisinage  $D_0 \in D$  tel que :

$$\|f(\underline{x}) - f(\underline{y})\| \leq L \|\underline{x} - \underline{y}\| \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in D_0 \quad (12-8)$$

Où  $L$  est la constante de Lipschitz sur  $D_0$ . Cette propriété exprime le fait que la croissance de  $f$  en  $\underline{x}$  est au plus linéaire. Notons que la propriété Lipschitzienne entraîne la continuité.

**Théorème 2 :** soit  $\underline{x}_e = \underline{0}$  un point d'équilibre de (12-1) (i.e.  $f(\underline{0}) = \underline{0}$ ), où  $f(\underline{x})$  est supposée Lipschitzienne en  $\underline{x}$ . Soit  $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}_+$  une fonction continûment différentiable (i.e. de classe  $C^1$ ), appelée fonction candidate de Lyapunov et vérifiant :

- $\forall \underline{x} \neq \underline{0} \quad V(\underline{x}) > 0$  (définie positive) et  $V(\underline{0}) = 0$  ;
- $\dot{V}(\underline{x}) = \frac{\partial V(\underline{x})}{\partial \underline{x}} f(\underline{x}) \leq -W(\underline{x}) \leq 0$  dans un voisinage  $\Omega$  de l'origine ;

Alors le point d'équilibre  $\underline{x}_e = \underline{0}$  est stable dans le voisinage  $\Omega$  si  $W(\underline{x}) \geq 0$  (semi définie positive), et asymptotiquement stable dans le voisinage  $\Omega$  si  $W(\underline{x}) > 0$  (définie positive)  $\forall \underline{x} \neq \underline{0}$ .

Si de plus  $V(\underline{x}) \rightarrow \infty$  lorsque  $\|\underline{x}\| \rightarrow \infty$  (radialement non bornée) et que le voisinage  $\Omega$  de l'origine où  $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0$  s'étend à  $\mathcal{R}^n$ , alors la stabilité est globale.

Démonstration : cf. [4-d].  $\square$

Exemple ([12-a]) : soit le système non linéaire autonome défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2) + 4x_2x_1^2 \end{cases} \quad (12-9)$$

L'origine est un point d'équilibre pour ce système. Choisissons comme fonction candidate de Lyapunov la fonction  $V(\underline{x})$  suivante :

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad (12-10)$$

Il vient alors :

$$\dot{V}(\underline{x}) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 2) \quad (12-11)$$

D'après le théorème précédent, le système (12-9) est asymptotiquement stable dans le voisinage  $\Omega$  défini par :

$$\Omega = \{(x_1, x_2) / x_1^2 + x_2^2 < 2\} \quad (12-12)$$

De plus, le système est instable par rapport à l'origine pour toutes conditions initiales situées à l'extérieur de l'équipotentielle délimitée par  $V(\underline{x}) = 4$ . En effet, un domaine délimité par une équipotentielle de Lyapunov où  $\dot{V}(\underline{x})$  est positive est un domaine de conditions initiales pour lesquelles l'origine n'est pas (asymptotiquement) stable.

### 12.2.2 Théorème de LaSalle-Krazovskii

Le théorème de LaSalle-Krazovskii permet de vérifier si un système non linéaire autonome est globalement asymptotiquement stable dans le cas où  $\dot{V}(\underline{x})$  est semi définie négative.

**Théorème 3 :** soit  $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}_+$  une fonction continûment différentiable (i.e. de classe  $C^1$ ), appelée fonction candidate de Lyapunov et vérifiant :

- $V(\underline{x}) \rightarrow \infty$  lorsque  $\|\underline{x}\| \rightarrow \infty$  (radialement non bornée) ;
- $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0 \quad \forall \underline{x}$  ;

D'autre part, soit  $\Omega$  l'ensemble des points où  $\dot{V}(\underline{x}) = 0$  :

$$\Omega = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n / \dot{V}(\underline{x}) = 0\} \quad (12-13)$$

Et soit  $M$  le plus grand ensemble invariant contenu dans  $\Omega$ , de telle sorte que toutes les trajectoires  $\underline{x}(t)$  convergent vers  $M$ . Si  $M = \{\underline{0}\}$ , alors le point d'équilibre  $\underline{0}$  est globalement asymptotiquement stable.

Démonstration : cf. [12-d].  $\square$

### 12.2.3 Stabilité exponentielle globale

**Théorème 4 :** soit  $\underline{x}_e = \underline{0}$  le point d'équilibre de (12-1), où  $f(\underline{x})$  est supposée localement Lipschitzienne en  $\underline{x}$ . Soit  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continûment différentiable (i.e. de classe  $C^1$ ) et radialement non bornée vérifiant :

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T P \underline{x} > 0 \quad \forall \underline{x} \neq \underline{0} \quad (12-14)$$

et :

$$\dot{V}(\underline{x}) \leq -\underline{x}^T Q \underline{x} < 0 \quad \forall \underline{x} \neq \underline{0} \quad (12-15)$$

où  $P = P^T$  et  $Q = Q^T$  sont des matrices définies positives. Alors le point d'équilibre  $\underline{0}$  est globalement exponentiellement stable et vérifie :

$$\|\underline{x}(t)\|_2 \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right) \|\underline{x}(0)\|_2 \quad (12-16)$$

où :

$$\alpha = \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})} \quad (12-17)$$

Démonstration : la démonstration de ce théorème peut par exemple être trouvée dans [4-d].

Comme elle est concise, nous la reprenons ci-après.

D'après la définition (12-14) de  $V(\underline{x})$ , il vient :

$$0 < \lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|\underline{x}(t)\|_2^2 \leq V(\underline{x}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\underline{x}(t)\|_2^2 \quad \forall \underline{x} \neq \underline{0} \Rightarrow -\|\underline{x}(t)\|_2^2 \leq -\frac{V(\underline{x})}{\lambda_{\max}} \quad (12-18)$$

De manière similaire, il vient à partir de (12-15) :

$$\dot{V}(\underline{x}) \leq -\underline{x}^T Q \underline{x} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\underline{x}(t)\|_2^2 \leq -\frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})} V(\underline{x}) \quad (12-19)$$

Soit, après intégration de  $\dot{V}(\underline{x})$  :

$$V(\underline{x}(t)) \leq \exp(-\alpha t) V(\underline{x}(0)) \quad (12-20)$$

Enfin, l'utilisation de (12-18) conduit à :

$$\|\underline{x}(t)\|_2 \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right) \|\underline{x}(0)\|_2 \quad (12-21)$$

$\square$

## 12.3 Dérivée de Lie

Nous reprenons ici les définitions données dans [12-e] :

**Définition 10** : étant donné une application différentiable  $\Phi$  de  $\mathcal{R}^n$  dans  $\mathcal{R}^{n-p}$  ( $0 \leq p < n$ ), nous supposons qu'il existe au moins une solution  $\underline{x}_0$  de l'équation implicite  $\Phi(\underline{x}_0)=0$  et que l'application linéaire  $D\Phi(\underline{x})$ , aussi appelée matrice jacobienne de  $\Phi$  et dont l'élément de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  est  $\partial\Phi_i/\partial\Phi_j(\underline{x})$ , est de rang plein  $(n-p)$  dans un voisinage  $V$  de  $\underline{x}_0$ . Nous appellerons **variété différentielle** de dimension  $p$  l'ensemble  $X$  défini par l'équation implicite :

$$X = \{\underline{x} \text{ tq } \Phi(\underline{x})=0\} \quad (12-22)$$

**Définition 11** : un **champ de vecteur** sur  $X$  est une application qui à tout  $\underline{x} \in X$  fait correspondre le vecteur  $f(\underline{x})$  appartenant au noyau de  $D\Phi(\underline{x})$  :

$$D\Phi(\underline{x}) \cdot f(\underline{x}) = 0 \quad (12-23)$$

**Définition 12** : une **courbe intégrale** du champ de vecteur  $f$  est une solution locale de l'équation différentielle :

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) \quad (12-24)$$

**Définition 13** : soit  $h$  une fonction de classe  $C^1$  de  $\mathcal{R}^n$  dans  $\mathcal{R}$ . Nous appellerons **dérivée de Lie** de  $h$  dans la direction  $f$ , notée  $L_f h$ , la dérivée de  $h$  le long de la courbe intégrale de  $f$  :

$$L_f h(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(\underline{x}) \frac{\partial h}{\partial x_i}(\underline{x}) \quad (12-25)$$

Par cette formule, un champ de vecteur  $f$  quelconque est identifié à l'opérateur différentiel linéaire du premier ordre :

$$L_f = \sum_{i=1}^n f_i(\underline{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (12-26)$$

**Définition 14** : le **crochet de Lie** des champs de vecteurs  $f$  et  $g$  est le champ de vecteur défini par :

$$L_{[f,g]} = L_f L_g - L_g L_f = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (12-27)$$

## 12.4 Références bibliographiques

- [12-a] Arzelier D., Peaucelle D., *Systèmes et asservissement non linéaires, notes de cours, CNAM*
- [12-b] Fossard A.J., Normand-Cyrot D., *systèmes non linéaires, tome 3 : commande, Masson, 1993*
- [12-c] Khalil H.K., *Nonlinear systems, Prentice-Hall, 1996*
- [12-d] LaSalle J. P., *Stability theory for ordinary differential equations, Journal of Differential Equations, (4) 57-65, 1966*

- [12-e] *Lévine J., Analyse et commande des systèmes non linéaires, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2004*

## **Contribution à la synthèse de lois de commande pour la navigation relative entre aéronefs**

Cette thèse se place dans le contexte de la croissance soutenue du trafic aérien. Elle concerne l'assistance automatisée au contrôle du trafic aérien qui vise à augmenter la capacité des secteurs de contrôle en transférant à l'équipage certaines tâches de nos jours dévolues au contrôleur aérien. Il s'agit plus particulièrement de renforcer la coopération entre l'équipage et le contrôleur aérien en vue de faciliter la tâche de régulation des flux de trafic aérien.

Le contexte actuel du contrôle du trafic aérien et les voies actuelles d'investigation dans le domaine de son automatisation sont présentés, puis un état de l'art sur les lois de guidage relatif entre aéronefs est réalisé. Un modèle de synthèse décrivant la dynamique de guidage d'un avion de transport commercial dont les fonctions de pilotage sont automatisées est ensuite proposé. Ce modèle permet une synthèse de lois de guidage relatif en s'appuyant sur les fonctions de pilotage classique de l'avion.

Après avoir envisagé l'utilisation de lois linéaires de type proportionnelle et dérivée et précisé les objectifs de commande en terme de spécification des modes propres, deux techniques de commande non linéaire sont alors mises en œuvre : le backstepping et le bouclage linéarisant basé sur la propriété de platitude. Ces trois approches (loi proportionnelle et dérivée, backstepping et platitude) sont évaluées de façon exhaustive sur un jeu de scénarii réaliste d'un point de vue contrôle du trafic aérien.

**Mots clés** : contrôle du trafic aérien, dynamique du vol, guidage automatique, commande non linéaire, backstepping, platitude.

## **Contribution to the synthesis of relative guidance control laws between airliners**

The context of this thesis is the sustained growth of air traffic. It deals with automatic assistance of air traffic control in order to increase the sector capacity through the delegation to the flight crew of some tasks currently performed by air traffic controller. More specifically, the key idea is to strengthen the cooperation between the flight crew and the air traffic controller in order to facilitate the regulation of air traffic flow.

The current context of air traffic control and the current studies in the field of its automation are firstly presented, then a state of the art analysis dealing with aircraft relative guidance control law is provided. A synthesis model describing the guidance dynamics of a jetliner with autopilot functions is proposed. This model allows for a design of relative guidance control laws by using classical autopilot functions onboard airliners.

After the presentation of a linear proportional and derivative control law, the goal of the design in terms of pole placement is specified, and two nonlinear techniques are then applied: backstepping and feedback linearization based on flatness. Those three design (proportional and derivative control law, backstepping, feedback linearization based on flatness) are finally evaluated on realistic scenarii from an air traffic control point of view.

**Key words** : air traffic control, flight dynamics, automatic guidance, nonlinear control, backstepping, flatness.