

Propriétés combinatoires et arithmétiques de certaines suites automatiques et substitutives

Julien Albert

▶ **To cite this version:**

Julien Albert. Propriétés combinatoires et arithmétiques de certaines suites automatiques et substitutives. Combinatoire [math.CO]. Université Paris Sud - Paris XI, 2006. Français. NNT : . tel-00820430

HAL Id: tel-00820430
https://theses.hal.science/tel-00820430

Submitted on 4 May 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro D'ORDRE : 8335

UNIVERSITE PARIS XI
FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY
LABORATOIRE DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE

Thèse de Doctorat

Présentée pour obtenir

LE GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES

Discipline : INFORMATIQUE

Julien ALBERT

Propriétés combinatoires et arithmétiques de certaines suites automatiques et substitutives

Soutenue le 10 Juillet 2006 devant le jury composé de

Valérie BERTHE Luca ZAMBONI	Rapporteurs
Marie-Claude GAUDEL Jacques PEYRIERE	Examinateurs
Jean-Paul ALLOUCHE	Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens à remercier Jean-Paul Allouche aux côtés de qui j'ai découvert la théorie des automates et qui m'a encadré en DEA puis pendant ces années de thèse. Ses conseils, ses encouragements et tout simplement sa sympathie m'ont toujours été d'une grande aide. Je le remercie d'avoir su m'encadrer efficacement tout en me laissant une grande liberté dans ma recherche.

Je remercie Valérie Berthé et Luca Zamboni d'avoir accepté d'être mes rapporteurs. Leurs remarques, corrections et compléments m'ont été très utiles pour passer le dernier cap de la rédaction du mémoire.

J'adresse mes remerciements à Marie-Claude Gaudel et à Jacques Peyrière pour m'avoir fait l'honneur de s'intéresser à mon travail et avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier Boris Adamczewski pour les discussions que nous avons eu au LRI et ses indications.

Bien entendu, je suis reconnaissant envers tous les enseignants que j'ai rencontrés tout au long de ma scolarité et qui ont su me guider tout au long de ce parcours scientifique.

Enfin, je souhaite faire honneur à mes amis et à mes proches sans qui tout cela n'aurait sans doute pas été possible. Je remercie Ludovic, Anaïs, Olivier, Sylvie, Nabile, Sophéak, Jérôme, Anne, Antoine, Hélène, Guillaume, Cédric, Fabrice, Vincent, Hélène, Luc, Carl, mes parents, Frédéric, Sophie, et Delphine.

Table des matières

Table des matières **ii**

Introduction **1**

1 Substitutions et Arithmétique - Généralités **5**
1.1 Alphabets et morphismes - Généralités 6
1.1.1 Définitions 6
1.1.2 Homomorphismes - Substitutions. 7
1.1.3 Répétitions de mots - Puissances 10
1.1.4 Complexité 13
1.2 Arithmétique - Approximation Diophantienne 17
1.2.1 Approximation Diophantienne 17
1.2.2 Conjecture de Borel 21
1.2.3 Théorie de Kurt Mahler 23

2 Autour du théorème de Ferenczi-Mauduit **25**
2.1 Introduction 26
2.1.1 Résumé 26
2.1.2 Rappels des résultats 27
2.2 Croissance d'une substitution binaire 28
2.3 Mots de croissance maximale - Théorème de Ferenczi-Mauduit 32
2.4 Cas problématiques de substitutions binaires pour le théorème de Ferenczi-Mauduit 35
2.4.1 Premier exemple de substitution problématique 35
2.4.2 Sur la possibilité de tester les substitutions 38

3 Autour du théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca **41**
3.1 Croissance des substitutions - Transcendance 43
3.1.1 Étude de la croissance d'une substitution 43
3.1.2 Substitutions à croissance polynomiale 47
3.1.3 Longueurs des plages à croissance bornée 51
3.1.4 Croissance et critère de puissance $\alpha = 1 + \epsilon$ 57
3.2 Une autre propriété des plages bornées 59
3.3 Cas de certains réels non substitutifs 64
3.4 Conclusion - Partitions de l'ensemble des substitutions 71

4 Multiples rationnels et Homographies d'un réel de basse complexité **73**
4.1 Multiples rationnels d'un réel de basse complexité 74
4.1.1 Cas d'une écriture périodique 74

4.1.2 Cas d'une plage W^n de l'écriture b-adique d'un réel quelconque 77
4.1.3 Théorème principal 78
4.2 Images de fractions continues substitutives par une homographie rationnelle . . . 80
4.2.1 Quelques rappels sur l'algorithme de Raney 82
4.2.2 Cas d'une écriture périodique 85
4.2.3 Théorème principal 87

A Algorithme de Raney **91**
A.1 Les différentes étapes de l'algorithme de Raney : 92
A.2 Analyse et programmation de l'algorithme de Raney : 92
A.2.1 Quelques notations : 92
A.2.2 Calculer un mot à partir d'un nombre rationnel : 93

B Fonction $gap^{\mathcal{E}}$ et mise en évidence des "vagues" **105**

Bibliographie **i**

Introduction

En définissant au début du XXème siècle la notion de nombre absolument normal, Émile Borel définit rigoureusement la notion de hasard dans l'écriture d'un nombre réel en base entière. Depuis, la question de la normalité des constantes les plus connues telles que π, $\sqrt{2}$, ou le nombre d'or $\phi = (1+\sqrt{5})/2\ldots$ reste en suspend. Un nombre x est par exemple normal en base 10 si chaque groupe possible de n chiffres apparaît dans l'écriture de x en base 10 avec une fréquence limite de 10^{-n}. Par exemple, le chiffre 4 doit apparaître avec une fréquence 1/10, le nombre 24 avec une fréquence $1/100\ldots$ Il n'est pas encore prouvé aujourd'hui que l'écriture de $\sqrt{2}$ en base 10 contient une infinité de chiffres 4.

Et si nous savons depuis les travaux d'Émile Borel que presque tous les nombres réels sont des nombres absolument normaux (nombres normaux dans toutes les bases), la construction explicite de tels nombres semble extrèmement difficile : ce n'est qu'en 1916 que Waclaw Sierpinski exhibe le premier exemple d'un nombre absolument normal [Sie17]. En 1933, David G. Champernowne construit en concaténant les uns derrière les autres les entiers successifs, le nombre $0,123456789101112\ldots$, normal en base 10 [Cha33]. Un peu plus de dix ans plus tard, Arthur Herbert Copeland et Paul Erdös montrent que le nombre $0,23571113171923\ldots$ obtenu en concaténant les nombres premiers est également normal en base 10 [CE46]. En 1950, Émile Borel conjecture finalement que $\sqrt{2}$ est un nombre absolument normal [Bor50]. C'est également à lui qu'est attribuée la conjecture plus générale que tout irrationnel algébrique est absolument normal. En 1975, Gregory Chaitin montre que la constante Ω qui porte son nom est un nombre absolument normal. La constante Ω donne la probabilité qu'un programme informatique aléatoire s'arrête. Ce nombre réel est par définition non calculable : aucun algorithme ou machine de Turing n'est capable de déterminer son développement b-adique. En 2002, Veronica Becher et Santiago Figueira s'inspirent du résultat de Waclaw Sierpinski pour construire un nombre calculable absolument normal [BF02].

D'un autre côté, la conjecture de Borel laisse penser que si l'écriture b-adique d'un nombre réel est trop "régulière", ce nombre ne peut pas être un irrationnel algébrique. En 1997, Sébastien Ferenczi et Christian Mauduit obtiennent des premiers résultats allant dans ce sens. En 2004, Boris Adamczewski, Yann Bugeaud et Florian Luca améliorent ce résultat et montrent qu'un nombre réel dont l'écriture en base entière est obtenue grâce à un automate fini ne peut être irrationnel algébrique.

Plan de la thèse :

Nos travaux portent essentiellement sur l'étude combinatoire de l'écriture d'un nombre réel en base entière b ou sous forme d'une fraction continue.

Le premier chapitre rappelle les définitions et les notations les plus couramment utilisées tout au long du mémoire à propos de la combinatoire des mots et de l'approximation diophantienne. La majorité des définitions et des théorèmes énoncés peuvent être retrouvés dans le livre de J.-P. Allouche et J. Shallit [AS03].

Le deuxième chapitre commence par rappeller l'état des lieux des travaux en 2002 au début de la thèse. Le théorème de Ferenczi-Mauduit [FM97] avait permis de montrer la transcendance de certains nombres réels substitutifs (par exemple dans le cas d'une suite sturmienne, d'une suite automatique binaire primitive ou de longueur constante). Notre premier travail consistait à dessiner le contour des suites automatiques ou substitutives binaires auxquelles il était impossible d'appliquer ce théorème. Pour cela, nous nous sommes intéressé aux différents ordres de croissance des lettres et des mots sous l'action d'une substitution (sections **2.2** et **2.3**). Nous établissons une condition équivalente aux hypothèses du théorème de Ferenczi-Mauduit dans le cas des suites substitutives, ayant permis d'appliquer le théorème à une nouvelle famille de suites binaires substitutives (**Théorèmes 2.2.1 et 2.2.2**). Ce chapitre se termine sur l'étude d'une famille de nombres réels auxquels il n'est pas possible de l'appliquer (section **2.4**).

En 2004, B. Adamczewski, Y. Bugeaud et F. Luca ont considérablement amélioré le théorème de Férenczi-Mauduit en adaptant sous une forme combinatoire le théorème du sous-espace de W. Schmidt. Cette avancé spectaculaire a permis de prouver entre autres la transcendance de tous les nombres obtenus à l'aide d'une substitution binaire, englobant tous nos résultats partiels et toutes les suites binaires auxquelles nous ne pouvions pas appliquer Ferenczi-Mauduit. La condition du théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca porte sur la complexité de la suite : cette fonction $p(n)$ doit vérifier la condition $\liminf \frac{p(n)}{n} < \infty$. Or la complexité de certains nombres substitutifs sont de l'ordre de $n \log\log(n)$, $n \log(n)$ ou n^2. Parmi ces réels substitutifs, B. Adamczewski, Y. Bugeaud et F. Luca donne dans [ABL04] un exemple auquel ce théorème ne s'applique pas.

Nous prouvons dans la première partie du troisième chapitre que le théorème peut s'appliquer aux suites substitutives de complexité en $n \log\log(n)$ $n \log(n)$ et même à certaines suites de complexité en n^2 (**Théorème 3.1.1** et son corollaire). Nous exhibons dans ce théorème un nouveau critère d'application du théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca : l'ordre de croissance de la taille des itérés de la première lettre du point fixe par la substitution. Nous montrons que cette condition est équivalente à l'existence d'une lettre de croissance maximale sous l'action de la substitution apparaissant au moins deux fois dans le point fixe.

Dans la deuxième partie de ce chapite, nous approfondissons l'étude du phénomène empêchant l'application du théorème Adamczewski-Bugeaud-Luca au point fixe d'une substitution à croissance polynomiale. Nous montrons que la famille de suites substitutives problématiques vérifie une autre propriété combinatoire que nous utiliserons dans le chapitre 4 lors de l'étude de la fraction continue de l'image d'un réel substitutif par une homorgaphie rationnelle (section **3.2**). Dans la section **3.3**, nous exhibons une famille particulière de suites (pas forcément substitutives) auxquelles il est impossible d'appliquer le théorème de transcendance à cause d'une condition combinatoire décrite à l'aide d'une fonction $gap^{\mathcal{E}}$ que nous présentons.

Le quatrième chapitre étudie la conservation du critère combinatoire empêchant l'application du théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca lors d'une opération rationnelle sur d'un réel substitutif. Nous montrons dans ce chapitre que la famille de suites introduite à la fin du troisième chapitre est stable sous l'action de la multiplication ou l'addition d'un rationnel dans le cas d'une écriture b-adique (**Théorème 4.1.1**) ou sous l'action d'une homographie rationnelle dans le cas d'une écriture sous la forme d'une fraction continue(**Théorème 4.2.3**).

Enfin, en Annexe, nous mettons le code en langage Maple d'une procédure nous ayant permis de calculer "plus rapidement" que la procédure standard, les coefficients de la fraction continue de l'image par une homographie rationnelle d'un nombre réel dont la fraction continue est donnée

(par exemple par le point fixe d'une substitution). Ce code est la traduction de l'algorithme de Raney [Ran73].

Chapitre 1

Substitutions et Arithmétique - Généralités

1.1 Alphabets et morphismes - Généralités

1.1.1 Définitions

Ce chapitre est une introduction à la théorie de la combinatoire des mots. Nous commençons par définir l'alphabet (un ensemble fini de symboles ou lettres) sur lequel nous travaillons. Un mot est une succession de lettres concaténées de la gauche vers la droite de manière naturelle. Nous introduisons ensuite les homomorphismes entre deux monoïdes libres pour la loi de concaténation dont les ensembles générateurs respectifs sont deux alphabets. Certains de ces homomorphismes, appelés aussi substitutions, permettent de construire des mots infinis par récurrence et à partir d'un nombre fini de règles simples.

Définition 1.1.1. *Un alphabet est un ensemble fini non vide, souvent noté $\mathcal{A}$. Ses éléments sont des symboles appelés lettres.*

Dans tout ce qui suit, les lettres sont désignées par des entiers naturels. De plus, les alphabets que nous utilisons sont de la forme $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, (b-1)\}$ ou $\mathcal{A}' = \{1, \ldots, b\}$ pour un entier $b \in \mathbb{N}^*$. Plus précisément, un alphabet du type $\mathcal{A}$ est utilisé lors de l'étude de l'écriture d'un nombre réel en base entière $b \geq 2$, tandis qu'un alphabet du type $\mathcal{A}'$ est utilisé lors de l'étude de l'écriture d'une fraction continue à coefficients bornés.

Définition 1.1.2. *Un mot w est une suite finie ou infinie à droite de lettres de $\mathcal{A}$.*
Son écriture et sa lecture se font toujours de la gauche vers la droite :

$$w = a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

Le mot vide, noté ϵ, est également considéré comme un mot (fini) pour tout alphabet $\mathcal{A}$. L'adjectif "propre" est employé pour qualifier un mot différent du mot vide.

L'ensemble des mots finis de l'alphabet $\mathcal{A}$ (y compris le mot vide) est désigné par $\mathcal{A}^*$. En ajoutant des lettres indéfiniment à droite, nous obtenons un élément appelé mot infini à droite. L'ensemble de ces mots infinis $\mathbf{w} = a_1 a_2 \ldots$ est noté $\mathcal{A}^\omega$. Enfin, la réunion des mots finis et des mots infinis à droite est notée $\mathcal{A}^\infty$.

L'ensemble $\mathcal{A}^*$ est également le monoïde libre engendré par l'ensemble $\mathcal{A}$ pour la loi interne '.' de concaténation, définie de la manière suivante.

Définition 1.1.3. *Pour deux mots finis $w_1 = (a_1 a_2 \ldots a_n)$ et $w_2 = (b_1 b_2 \ldots b_m)$ de $\mathcal{A}^*$, le mot concaténé de w_1 et w_2 est le mot*

$$w_1.w_2$$

s'écrivant de gauche à droite comme la succession des lettres de w_1 puis de w_2 :

$$(a_1 a_2 \ldots a_n).(b_1 b_2 \ldots b_m) = (a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m).$$

Par exemple, posons $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $w_1 = 0010$ et $w_2 = 1010$. La concaténation de w_1 et w_2 est

$$w = w_1.w_2 = w_1 w_2 = 00101010.$$

Cette loi est associative mais en général n'est pas commutative (dans l'exemple précédent, $w_1 w_2 \neq w_2 w_1$). Le mot vide ϵ est l'élément neutre pour cette opération interne '.' de concaténation.

Définition 1.1.4. *La longueur d'un mot fini w de $\mathcal{A}^*$ est égale au nombre de lettres qui composent le mot w. Cette quantité est notée $|w|$.*

Dans le cas du mot vide, $|\epsilon| = 0$. Lorsque a est une lettre de $\mathcal{A}$, $|a| = 1$ et pour un mot composé $w = w_1 w_2$,

$$|w| = |w_1| + |w_2|.$$

En outre, cette notion de longueur peut être naturellement étendue dans le cas d'un mot infini à droite $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^\omega$ en posant $|\mathbf{w}| = \infty$.

Définition 1.1.5. *Pour w dans $\mathcal{A}^*$ et a une lettre de $\mathcal{A}$, la quantité $|w|_a$ compte le nombre d'occurences de la lettre a dans le mot w.*

Ainsi, pour les mots w_1 et w_2 de l'exemple précédent,

$$|w_1|_0 = 3, |w_1|_1 = 1 \text{ et } |w_2|_0 = 2, |w_2|_1 = 2.$$

Définition 1.1.6. *Si v est un mot de $\mathcal{A}^*$ et w un mot de $\mathcal{A}^\infty$, nous dirons que v est un facteur de w lorsqu'il existe deux mots x de $\mathcal{A}^*$ et y de $\mathcal{A}^\infty$ tels que*

$$w = xvy.$$

Dans le cas où le mot x est vide ($w = vy$), v est un préfixe de w tandis que dans le cas où le mot y est vide ($w = xv$), v est un suffixe de w. Nous noterons $Pre(w), Suf(w)$ et $Fac(w)$ les ensembles respectifs des préfixes, suffixes et facteurs du mot w.

Parfois, pour décrire une lettre ou un facteur dans un mot $w \in \mathcal{A}^\infty$, nous indiquerons la distance à laquelle cette lettre ou ce facteur apparaît dans w.

Définition 1.1.7. *Soit $w = a_1 a_2 \dots a_n \dots$ et $1 \leq i \leq n$. La $i^{ème}$ lettre de w est notée*

$$w[i] = a_i.$$

Plus généralement, pour $1 \leq i \leq j \leq n$, le mot $a_i a_{i+1} \dots a_j$ formé des lettres entre la $i^{ème}$ et la $j^{ème}$ place est noté

$$w[i..j] = a_i a_{i+1} \dots a_j$$

Remarque Lorsque $j < i$, le mot $w[i..j]$ est vide ($w[i..j] = \epsilon$).

1.1.2 Homomorphismes - Substitutions.

L'ensemble des mots finis est muni d'une structure de monoïde pour la loi de concaténation. Une application entre deux ensembles $\mathcal{A}^*$ et $\mathcal{B}^*$ qui préserve leurs structures de monoïdes est un homomorphisme.

Définition 1.1.8. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux alphabets finis. Un homomorphisme de monoïdes libres h de l'ensemble $\mathcal{A}^*$ dans l'ensemble $\mathcal{B}^*$ est une application telle que pour tous w_1 et w_2 de $\mathcal{A}^*$,*

$$h(w_1.w_2) = h(w_1).h(w_2).$$

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. De plus, comme il n'y aura pas d'ambiguïté possible, nous appellerons "morphisme" ou plus souvent "substitution", un homomorphisme de monoïdes libres.

L'ensemble $\mathcal{A}^*$ est engendré par l'alphabet $\mathcal{A}$ pour la loi de concaténation. Ainsi, un morphisme est défini de manière unique sur $\mathcal{A}^*$, lorsqu'il est défini sur l'alphabet $\mathcal{A}$ (ou sur tout autre ensemble générateur de $\mathcal{A}^*$). Ainsi un morphisme h est caractérisé par la donnée de l'ensemble des images des lettres de $\mathcal{A}$ par h.

Lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, nous pouvons itérer le morphisme h en partant de la lettre a : on pose alors $h^0(a) = a$ et $h^n(a) = h(h^{n-1}(a)$ pour tout $n \geq 1$. Pour plus de détails sur les morphismes et leurs applications, voir par exemple [AS03]. Certains morphismes possèdent des propriétés particulières.

• Pour un morphisme non effaçant, aucun mot non vide n'a pour image le mot ϵ.

Définition 1.1.9. *Un morphisme non effaçant est un morphisme h tel que :*

$$h(w) = \epsilon \Leftrightarrow w = \epsilon.$$

Tous les morphismes envisagés dans la suite sont des morphismes non effaçants.

• Un morphisme "d'itérations" est un morphisme que nous allons pouvoir itérer sur une lettre de manière à construire un mot $h^\infty(a)$.

Définition 1.1.10. *Un morphisme $h : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ est un morphisme d'itérations lorsqu'il existe une lettre a qui est un préfixe de son image par h :*

$$\exists\ a \in \mathcal{A}, h(a)[1] = a.$$

Dans ce cas, un raisonnement par récurrence sur n montre que $h^{n-1}(a)$ est un préfixe de $h^n(a)$. Si $h(a) = aw$ pour w dans $\mathcal{A}^* \setminus \{\epsilon\}$, la suite des mots a, $h(a)$, $h^2(a)$ ... "converge" vers le mot

$$h^\infty(a) := a\ w\ h(w)\ h^2(w) \dots$$

qui est infini en particulier lorsque h est non effaçant puisque $|h^k(w)| \geq 1$.
Ce mot est par ailleurs un point fixe du morphisme h. Il vérifie la relation :

$$h(h^\infty(a)) = h^\infty(a).$$

Pour plus de détails sur la notion de "convergence" évoquée dans la construction du mot $h^\infty(a)$, nous renvoyons au paragraphe **1.2** de [AS03].

• Les morphismes uniformes et primitifs jouent un rôle particulier. Pour un tel morphisme, l'ordre de croissance de la suite des tailles des itérés successifs de n'importe quel mot fini est le même.

Définition 1.1.11. *Le morphisme h est dit uniforme si toutes les images des lettres de $\mathcal{A}$ sont des mots de même longueur. Si l désigne cette longueur commune à toutes les images des lettres de $\mathcal{A}$, h est qualifié de morphisme de longueur l.*

Dans ce cas, la longueur de la $n^{\text{ème}}$ itération de h à partir de n'importe quelle lettre a de $\mathcal{A}$ se calcule par récurrence : $|h^n(a)| = l^n$. De la même manière, pour des mots finis $v_1, v_2 \in \mathcal{A}^*$,

$$|h^n(v_i)| = |v_i| l^n \text{ donc } \frac{|h^n(v_1)|}{|h^n(v_2)|} = \frac{|v_2|}{|v_1|} \text{ est constant.}$$

Les points fixes des morphismes d'itérations l-uniforme pour un entier $l \geq 2$ ont la propriété de correspondre exactement aux suites l-automatiques.

Définition 1.1.12. *Une suite $\mathbf{w}$ est l-automatique si et seulement s'il existe un morphisme d'itérations l-uniforme h, une lettre a de $\mathcal{A}$ et un code τ (un morphisme 1-uniforme) tels que :*

$$\mathbf{w} = \tau(h^\infty(a)).$$

Cette définition des suites automatiques n'est pas la définition habituelle : pour une définition plus classique et plus de détails sur l'équivalence de la définition précédente, voir [Cob72] ou [AS03], théorème **6.3.2**.

Définition 1.1.13. *Le morphisme h est dit primitif lorsqu'il existe un entier N tel que pour tout couple de lettres (a, b) de $\mathcal{A}^2$, la lettre a apparaît dans le mot $h^N(b)$.*

Dans ce cas, la matrice de transition associée au morphisme h^N :

$$A^N = \begin{pmatrix} |h^N(0)|_0 & |h^N(1)|_0 & \dots & |h^N(b)|_0 \\ |h^N(0)|_1 & |h^N(1)|_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ |h^N(0)|_b & |h^N(1)|_b & \dots & |h^N(b)|_b \end{pmatrix}$$

est une matrice strictement positive (la matrice de transition A de la substitution h est une matrice primitive).
Le théorème de Perron-Frobénius (voir par exemple [Gan60]) permet alors de montrer que le comportement asymptotique de la suite des tailles des mots $h^n(v)$ ne dépend pas du mot fini v fixé au départ :

$$\forall (v_1, v_2) \in \mathcal{A}^*, \exists\, C_{v_1,v_2}, \frac{|\sigma^n(v_1)|}{|\sigma^n(v_2)|} = C_{v_1,v_2}.$$

• Enfin, un morphisme croissant est un morphisme pour lequel les longueurs des itérés d'aucune lettre ne restent bornées.

Définition 1.1.14. *Nous appelons morphisme croissant un morphisme h tel que pour toute lettre a de $\mathcal{A}$, la suite $|h^n(a)|$ tend vers l'infini.*

C'est le cas pour tout morphisme uniforme de longueur $l \geq 2$ ou tout morphisme primitif sur un alphabet de plus de deux lettres. Dans ces deux cas particuliers, l'ordre de croissance de la suite $|h^n(a)|$ est indépendant de la lettre a. L'étude de J.-J. Pansiot [Pan84] montre que ce n'est pas toujours le cas. Au chapitre **3**, nous verrons que pour tout morphisme croissant (aucune lettre n'étant à croissance bornée) l'ordre de croissance de la suite des longueurs des itérés de n'importe quelle lettre est au moins exponentiel : en effet, l'existence d'une lettre à croissance polynomiale (**Définition 3.1.2**) entraîne l'existence d'une lettre à croissance bornée (voir **Lemme 14**).

Exemples

Morphisme de Thue-Morse Posons $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \{0, 1\}$ et

$$\mu(0) = 01$$
$$\mu(1) = 10$$

C'est un morphisme d'itérations non effaçant, uniforme de longueur 2 et primitif et croissant.

Morphisme 2 Posons $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$ et

$$h(0) = 012$$
$$h(1) = 12$$
$$h(2) = 2$$

Ce morphisme est un morphisme d'itérations non effaçant, ni uniforme, ni primitif, ni croissant.

1.1.3 Répétitions de mots - Puissances

La principale propriété combinatoire dont il est question dans ce mémoire est la question de l'existence ou non dans un mot infini, de répétitions entières ou fractionnaires w^α dont on peut à la fois contrôler la taille $|w|$, la puissance α et la distance à laquelle apparaît ce terme w^α. Ces répétitions seront aussi appelées "puissances". Nous parlerons dans le paragraphe suivant des liens existant entre la complexité du mot (en termes de facteurs) et l'apparition de telles puissances.

Définition 1.1.15. *Répétitions "entières". Soient $w \in \mathcal{A}^*$ un mot fini et $p \geq 1$ un entier.*
La puissance w^p désigne le mot $w \dots w$, obtenu en concaténant le mot w à p reprises.

Lorsque $p = 2$, le mot ww est appelé carré (si $p = 3$, www est un cube).

Définition 1.1.16. *Répétitions "fractionnaires". Soient $w \in \mathcal{A}^*$ un mot fini et $\alpha > 1$ un nombre réel.*
Notons $\lceil \alpha \rceil$ la partie entière supérieure et $\lfloor \alpha \rfloor$ la partie entière inférieure du réel α.
La puissance w^α désigne le mot $w^{\lfloor \alpha \rfloor} w'$, où w' est le préfixe de w de longueur

$$\lceil (\alpha - \lfloor \alpha \rfloor)|w| \rceil.$$

Le chevauchement sur la lettre a du mot awa est le mot $awawa$ où a est une lettre de $\mathcal{A}$ et w un mot (éventuellement vide) de $\mathcal{A}^*$. Plus généralement, un chevauchement est un mot VVV' pour V un mot fini non vide et V' un préfixe non vide de $V = V'W$:

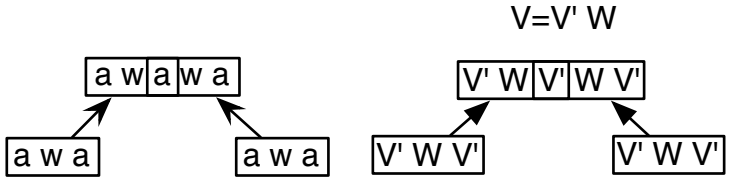


FIG. 1.1 – **chevauchements**

Dans le cas particulier de l'alphabet binaire $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, nous rappellons le résultat suivant de J. Berstel et P. Séébold [BS93] sur lequel nous reviendrons au chapitre 2 :

Théorème 1.1.1. *Si w, point fixe d'un morphisme h non trivial ne contient aucun chevauchement, il existe un entier k tel que $h = \mu^k$ où μ désigne le morphisme de Thue-Morse. Alors $w = \mu^\infty(0)$ ou $w = \mu^\infty(1)$.*

Le lecteur pourra aussi trouver la démonstration de ce théorème dans [AS03] (**Théorème 1.7.7** et **Corollaire 1.7.9**).

De manière similaire, un bégaiement (notion introduite par B. Adamczewski, Y. Bugeaud et F. Luca dans [ABL04]) est un mot de la forme VV' où V' est un préfixe non vide du mot fini V.

Dans les chapitres 2 et 3, nous nous intéresserons à des mots du type $UVVV'$ ou UVV' pour V' un préfixe non vide de V et U fini. Nous appellerons respectivement ces mots chevauchement et bégaiement par abus de langage puisque VVV' est un chevauchement et VV' est un bégaiement.

Définition 1.1.17. *Pour un mot w (fini ou infini), l'exposant critique $e(w)$ de w est le plus petit nombre réel tel que le mot w ne possède aucun facteur qui soit une puissance strictement supérieure à $e(w)$:*

$$e(w) = \sup\{\alpha \ ; \ \exists v \in Fac(w), v^\alpha \in Fac(w)\}$$

Remarque 1 Nous avons défini une puissance α comme étant un mot du type $x^{\lfloor\alpha\rfloor}x'$ tel que $|x'| = \lceil(\alpha - \lfloor\alpha\rfloor)|w|\rceil$. Ainsi, le mot 001 001 0 peut être vu comme $001^{2+\epsilon}$ pour tout $0 < \epsilon \leq \frac{7}{3}$. Cette notion de puissance fractionnaire vient de F. Dejean (voir [Dej72]).

Nous pourrions définir une puissance α-exacte comme étant un mot du type w^α, le préfixe de $w^{\lceil\alpha\rceil}$ de longueur $|w^\alpha| = \alpha|w|$. Pour cela, il est nécessaire que $\alpha|w|$ soit un entier positif, donc que $\alpha = \frac{p}{q}$ avec q qui divise $|w|$. Par exemple, le mot 001 001 0 est la puissance $\frac{7}{3}$-exacte de 001.

Remarque 2 Dans le cadre de la première définition, si le mot w contient une puissance α_1 et si $\alpha_2 < \alpha_1$, le mot w contient également une puissance α_2. En effet, si $w^{\lfloor\alpha_1\rfloor}w'$ avec $|w'| = \lceil(\alpha_1 - \lfloor\alpha_1\rfloor)|w|\rceil$ est un facteur de w, et si $\alpha_2 < \alpha_1$, le mot $w^{\lfloor\alpha_2\rfloor}w''$ avec $|w''| = \lceil(\alpha_2 - \lfloor\alpha_2\rfloor)|w|\rceil$ est un facteur de w car $|w''| \leq |w'|$. Ainsi, nous avons vu que le mot 001 001 0 contient une puissance α pour tout $1 < \alpha \leq \frac{7}{3}$.

Cet ensemble de puissances α est continu.

En revanche, dans le cadre de la deuxième définition d'une puissance α-exacte, le mot 001 001 0 ne contient que la puissance $\frac{4}{3}$ avec 001 0 et 100 1, la puissance $\frac{5}{3}$ avec 001 00 et 010 01 et 100 10 la puissance 2 avec 00 et 001 001, la puissance 3/2 avec 01 0 et la puissance $\frac{7}{3}$ avec 001 001 0.

Cet ensemble de puissances α-exactes est un ensemble discret. De plus, lorsque le mot w est fini, les nombres α peuvent tous s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $q = |w|$. L'ensemble des puissances α-exactes est donc formé de points isolés.

Remarque 3 Dans le cadre de la première définition de puissance α, l'exposant critique vérifie la propriété suivante :

$$\begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha < e(w), \exists v \in Fac(w), v^\alpha \in Fac(w) \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > e(w), \forall v \in Fac(w), v^\alpha \notin Fac(w). \end{cases}$$

Dans ce cas, que le mot soit fini ou infini, l'exposant critique est toujours un point d'accumulation de l'ensemble des puissances α (puisque cet ensemble est continu). Il est toujours atteint dans le cas d'un mot fini mais peut ne pas l'être dans le cas d'un mot infini (comme celui de Fibonacci, voir [MP92]).

En revanche, dans le cadre de la deuxième définition de puissance α-exacte, l'exposant critique vérifie le propriété :

$$\begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha < e(w), \exists \beta \geq \alpha, \exists v \in Fac(w), v^\beta \in Fac(w) \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > e(w), \forall v \in Fac(w), v^\alpha \notin Fac(w). \end{cases}$$

Dans ce cas, lorsque le mot w est fini, l'exposant critique est atteint. Mais l'ensemble des puissances α-exactes est un ensemble de points isolés de $\mathbb{R}$. Le nombre $e(w)$ est donc isolé, comme dans le cas du mot 001 001 0.

Lorsque le mot w est infini, l'exposant critique peut ne pas être atteint (comme dans la suite de Fibonnacci.). De plus, lorsqu'il existe des puissances α_0 pour des mots v de longueurs aussi grandes que l'on souhaite, le point α_0 est un point d'accumulation dans l'ensemble des puissances α-exactes existant dans le mot w.

En ce qui nous concerne, outre le problème de savoir quelles sont les plus grandes puissances apparaissant dans la suite infinie $\mathbf{w}$, nous nous demandons pour chaque α inférieur à l'exposant critique $e(\mathbf{w})$, de quelles longueurs sont les facteurs v de $\mathbf{w}$ qui apparaissent à la puissance α et à quelle distance minimale dans l'écriture de la suite apparaissent ces puissances v^α.

Définition 1.1.18. *Lorsque UV^α est un préfixe de la suite $\mathbf{w}$, nous disons que la puissance V^α apparaît à la distance $|U|$.*

De manière à quantifier ces deux choses, nous introduisons un critère de puissance α.

Définition 1.1.19. *Critère de puissance α. Soit $\mathbf{w}$ une suite infinie sur l'alphabet $\mathcal{A}$. Soit $\alpha > 1$. Nous dirons que la suite $\mathbf{w}$ vérifie le critère de puissance α s'il existe des suites de mots finis $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que les conditions suivantes soient réalisées :*
- *les mots $U_nV_n^\alpha$ sont des préfixes de $\mathbf{w}$,*
- *la suite des longueurs $(|V_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini,*
- *la suite $(\frac{|U_n|}{|V_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

Ce critère assure d'une part le fait que l'exposant critique $e(\mathbf{w})$ de la suite $\mathbf{w}$ est supérieur à α, d'autre part le fait qu'il existe une infinité de α-répétitions de longueurs de plus en plus longues et à distances contrôlées (à un coefficient près) par la longueur du mot qui se répète.

Dans le cadre d'étude des puissance α correspondant à la **Définition 1.1.16**, si $1 < \alpha_2 \leq \alpha_1$ et si le mot infini à droite $\mathbf{w}$ vérifie le critère de puissance α_1, alors, $\mathbf{w}$ vérifie le critère de puissance α_2.

Exemple 1 Suite de Thue-Morse. Soit $\mathbf{w}$ le point fixe du morphisme μ de Thue-Morse. Comme $\mathbf{w} = 0\ 11\ 0\ldots$, le mot 11 étant un carré, l'exposant critique $e(\mathbf{w}) \geq 2$. Mais nous avons déjà mentionné que cette suite ne possédait aucune puissance pour $\alpha > 2$ (**Théorème 1.1.1**).
Donc l'exposant critique de la suite de Thue-Morse est : $e(\mathbf{w}) = 2$.

Par ailleurs, pour tout entier $n > 0$, $|\mu^n(1)| = 2^n$ et le mot $\mu^n(1)\mu^n(1)$ est un facteur de $\mathbf{w}$. D'autre part, il apparaît (entre autres) à la distance de $2^n = |\mu^n(0)|$. En effet, pour tout n entier, le mot $\mathbf{w}$ s'écrit : $\mathbf{w} = \mu^n(0)\mu^n(1)\mu^n(1)\ldots$ (récurrence immédiate sur l'entier n).
La suite de Thue-Morse vérifie donc le critère de puissance α si et seulement si $1 \leq \alpha \leq 2$.

Exemple 2 Posons h le morphisme sur $\{0, 1, 2\}$ tel que : $h(0) = 012$, $h(1) = 12$ et $h(2) = 2$. Soit $\mathbf{w}$ le point fixe de ce morphisme obtenu en itérant h en partant de 0 :

$$w = 0\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 2\ 2\ 2\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 1\ldots$$

Remarquons que pour tout entier n, le mot 2^n est un facteur de $\mathbf{w}$. Ce point fixe contient donc une puissance α pour tout $\alpha > 1$ (par exemple, si $\alpha \leq 5/3$, le mot 2 2 2 2 2 peut être vu comme $222^{5/3} = 222\ 22$).
Son exposant critique est donc $e(\mathbf{w}) = +\infty$.
En revanche, nous montrerons au chapitre 3 (**Théorème 3.1.1**) que ce mot ne vérifie aucun critère de puissance $\alpha > 1$, le morphisme h étant à croissance polynomiale.

Exemple 3 Posons h' le morphisme sur $\{0,1\}$ tel que : $h'(0) = 0\ 1\ 0\ 1$ et $h(1) = 1$. Soit $\mathbf{w}'$ le point fixe de ce morphisme obtenu en itérant h' en partant de 0 :

$$\mathbf{w}' = 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ldots$$

Ce point fixe $\mathbf{w}'$ contient également une puissance α pour tout rationnel $\alpha > 1$: en effet, 1 est un suffixe de $h'(0)$, 11 est un suffixe de $h'^2(0)\ldots$ et par récurrence, 1^n est un suffixe de $h'^n(0) = h'^{n-1}(0)1h'^{n-1}(0)1$. Son exposant critique est donc $e(\mathbf{w}') = \infty$.
Ce mot vérifie également le critère de puissance α pour $1 \leq \alpha \leq 2$. En effet $\mathbf{w}' = 0101\ldots$ vérifie un critère de puissance 2 : pour tout entier $n \geq 1$, le mot $h^n(01)h^n(01)$ est un préfixe de $\mathbf{w}'$. Il suffit donc de poser $U = \epsilon$ et $V_n = V'_n = h^n(01)$. En revanche, nous montrerons au chapitre 2 (paragraphe **2.4**) que ce mot ne vérifie aucun critère de puissance $\alpha > 2$.

1.1.4 Complexité

L'étude des différents facteurs d'un mot infini $\mathbf{w}$ permet d'estimer le désordre existant dans la suite $\mathbf{w}$, dans une échelle allant des mots les plus réguliers (les mots périodiques) aux plus chaotiques (typiquement, un mot aléatoire). La fonction complexité de la suite $\mathbf{w}$ est définie de manière à répondre à la question suivante : combien de facteurs distincts de longueur n apparaissent dans $\mathbf{w}$?

Définition 1.1.20. *Soit $\mathcal{A}$ un alphabet de cardinal b. Soit $\mathbf{w}$ dans $\mathcal{A}^\omega$. La fonction complexité $p_{\mathbf{w}}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est telle que :*

$$p_{\mathbf{w}}(n) = Card\{v\ ;\ v \text{ est un facteur de } \mathbf{w} \text{ et } |v| = n\}.$$

Ce nombre vérifie pour tout entier $n \geq 0$ les inégalités

$$1 \leq p_{\mathbf{w}}(n) \leq b^n.$$

Par exemple, posons $\mathbf{w} = 123\ 123\ \overline{123}$ où $\overline{123}$ signifie que le mot 123 est répété indéfiniment. Ce mot infini périodique (qualifié de "simple") possède 3 facteurs de longueur 1 (les mots 1,2, et 3), 3 facteurs de longueur 2, les mots 12, 23 et 31, et ainsi de suite,... 3 facteurs de longueur n, les mots $123\ldots$, $231\ldots$ et $312\ldots$

Au contraire, $\mathbf{w}' = 012345678910111213\ldots$ peut être qualifié de complexe. Par construction, tous les mots finis de l'alphabet $\mathcal{A} = \{0,1,2,3,\ldots,9\}$ sont des facteurs de $\mathbf{w}'$.
Par conséquent, $\mathbf{w}'$ possède 10 facteurs de longueur 1, 100 facteurs de longueur 2, et ainsi de suite, 10^n facteurs de longueur n.

Pour plus de détails sur cette fonction complexité, le lecteur est renvoyé par exemple à l'article [All94]. Cette fonction permet en particulier d'isoler les suites ultimement périodiques : en effet, pour toute suite ultimement périodique, $p(n)$ devient constant lorsque n tend vers l'infini [CH73] [MH38].
En revanche, dans le cas de presque tous les mots (typiquement un mot pris "au hasard"), ce nombre est maximal pour tout n.

Théorème 1.1.2. *Pour presque toute suite $\mathbf{w}$ construite sur un alphabet fini $\mathcal{A}$ de cardinal b, la complexité est maximale :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_{\mathbf{w}}(n) = b^n.$$

Pour la démonstration, voir par exemple dans [AS03]. En réalité, ce résultat est un corollaire du résultat d'É. Borel assurant que presque tout réel est absolument normal [Bor09].

Définition 1.1.21. *Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Nous disons que f se comporte comme g à un facteur borné près lorsqu'il existe une constante M strictement positive vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{M}\ g(n) \leq f(n) \leq Mg(n).$$

L'ensemble des points fixes d'un morphisme est formé de mots de basse (ou faible) complexité en vertu du résultat suivant de J.-J. Pansiot [Pan84].

Théorème 1.1.3. *Soit h un morphisme de $\mathcal{A}^*$ et a une lettre de $\mathcal{A}$ tels que $h(a)[1] = a$. Posons $\mathbf{w} = h^\infty(a)$.*

Alors, la fonction $p_{\mathbf{w}}(n)$ se comporte à un facteur borné près comme l'une des cinq fonctions suivantes : 1, n, $n\log(\log(n))$, $n\log(n)$ ou n^2.

Parmi les suites de basse complexité, certains cas particuliers sont à signaler :

Suites Sturmiennes : elles sont définies comme étant les suites de complexité

$$p_{\mathbf{w}}(n) = n + 1.$$

Ce sont les suites de plus basse complexité après les suites ultimement périodiques : en effet, s'il existe un entier n_0 tel que $p_{\mathbf{w}}(n_0) < n_0 + 1$, alors la suite $\mathbf{w}$ est ultimement périodique et sa complexité ultimement constante (voir [CH73] [MH38] et pour une démonstration, voir par exemple [AS03], théorème **10.2.6**).

Points fixes de morphisme primitif ou uniforme
Pour $\mathbf{w} = h^\infty(a)$ avec h un morphisme primitif ou de longueur constante,

$$p_{\mathbf{w}}(n) = O(n).$$

Ce résultat a permis à B. Adamczewski, Y. Bugeaud et F. Luca [ABL04] de montrer la transcendance des réels automatiques.
Le chapitre 3, étudie entre autres des propriétés combinatoires de certains morphismes dont les points fixes sont de complexité quadratique.

Il est logique de penser que limiter la complexité d'une suite entraîne l'apparition de nombreuses répétitions et par conséquent l'existence de facteurs élevés à de grandes puissances. C'est en particulier pour cela qu'un mot de complexité inférieure à celle d'une suite sturmienne finit inéluctablement par devenir périodique.

Lorsqu'un mot est de trop basse complexité, nous sommes en mesure de montrer qu'il vérifie des critères de puissance α. L'argument principal des démonstrations est le principe des tiroirs de Dirichlet.

Le lemme suivante établit un lien entre ces deux notions combinatoires.

Lemme 1. *Soit $\mathcal{A}$ un alphabet, et $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^\infty$.*

- *Supposons qu'il existe un entier $M_0 > 0$ tel que $\liminf(p_{\mathbf{w}}(n)) < M_0$.*
  Alors pour tout $\alpha > 1$, $\mathbf{w}$ vérifie le critère de puissance α.

– *Supposons qu'il existe un entier* $M_1 > 0$ *tel que* $\lim(p_{\mathbf{w}}(n) - n) < M_1$.
Alors il existe $\alpha > 2$ *tel que* $\mathbf{w}$ *vérifie le critère de puissance* α.

– *Supposons qu'il existe un entier* $M_2 > 0$ *tel que* $\liminf(\frac{p_{\mathbf{w}}(n)}{n}) < M_2$.
Alors il existe $\alpha > 1$ *tel que* $\mathbf{w}$ *vérifie le critère de puissance* α.

Démonstration :

• D'après les hypothèses, pour une infinité d'entiers n_k, $p_{\mathbf{w}}(n_k) < M_0$. Soit $\alpha > 1$ fixé. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Il existe un entier n_k tel que $n_k > N\alpha M_0$. Comme $p_{\mathbf{w}}(n_k) < M_0$, le préfixe $\mathbf{w}[1..M_0+n_k]$ contient au plus M_0 facteurs distincts de longueur n_k.
Il existe donc un mot $\overline{w} = \overline{w_1 w_2} \dots \overline{w_{n_k}}$ qui apparaît au moins deux fois dans $\mathbf{w}[1..M_0 + n_k]$. Ces deux occurences de $\overline{w}$ se chevauchent de la manière suivante :

$$\exists s, t, i \in \mathbb{N}^*, 0 \leq s < t < i \leq M_0 + 1$$

$$\mathbf{w}[1..M_0 + n_k] = \begin{array}{l|l|l|l} w_1 w_2 \dots w_s\ \overline{w}_1 \overline{w}_2 \dots & \overline{w}_{i-1} & \overline{w}_i & \overline{w}_{i+1} \dots \overline{w}_{n_k}\ w_{s+n_k+1} \dots \\ w_1 w_2 \dots w_s\ w_{s+1} \dots & w_t & \overline{w}_1 & \overline{w}_2 \dots \overline{w}_{i-1} \overline{w}_i \overline{w}_{i+1} \dots \overline{w}_{n_k}\ w_{t+n_k+1} \dots \end{array}$$

Finalement,

$$\mathbf{w}[1..M_0 + n_k] = w_1 w_2 \dots w_s\ (\overline{w}_1 \overline{w}_2 \dots \overline{w}_{i-1})^P \dots \text{ avec } P(i-1) = n_k$$

L'entier i est supérieur à 2. Le mot $\overline{w}' = \overline{w}_1 \dots \overline{w}_{N(i-1)}$ est donc de longueur $|\overline{w}'| \geq N$. Enfin, il apparaît au moins à la puissance fractionnaire $P \geq \frac{n_k}{N(i-1)} \geq \frac{n_k}{NM_0} \geq \alpha$, et cela, à une distance maximale de M_0 bornée.
Le préfixe $\mathbf{w}[1..M_0 + n_k]$ a comme facteur une α-puissance $U\overline{w}'^{\alpha}$ pour $|U| \leq M_0$ et $|\overline{w}'| \geq N$ arbitrairement grand. Le mot $\mathbf{w}$ vérifie bien le critère de puissance α pour tout $\alpha > 1$.

• Le deuxième point est démontré dans [All00] en utilisant le fait qu'une telle suite s'écrit à partir d'un rang comme l'image par un morphisme d'une suite sturmienne, vérifiant un critère de puissance $\alpha > 2$ d'après l'étude de S. Ferenczi et C. Mauduit dans [FM97].

• Le troisième point est démontré par B. Adamczewski, Y. Bugeaud et F. Luca dans [AB06]. Nous rappelons ici l'idée de leur démonstration, similaire à celle du premier point. Pour une infinité d'entiers n_k, $p_{\mathbf{w}}(n_k) < M\ n_k$.

Donc dans le prefixe $\mathbf{w}[1..(M+1)\ n_k]$, il y a au plus $n_k M$ facteurs distincts de longueur n_k. Il existe donc un mot W de longueur n_k qui apparaît au moins deux fois dans $\mathbf{w}[1..(M+1)\ n_k]$.

– Si ces deux occurences ne se chevauchent pas, $\mathbf{w}[1..(M+1)\ n_k] = AWBWD$ et WBW est une α-puissance avec $\alpha > 1 + \epsilon$.
– Si les deux occurences se chevauchent, il existe un mot W' tel que $|W'| > |W|/2$ qui apparaît à deux endroits différents sans se chevaucher.
Le préfixe
$$\mathbf{w}[1..(M+1)\ n_k] = AW'B'W'C'$$
et $W'B'W'$ est une α-puissance avec $\alpha > 1 + \epsilon$.

De plus, dans tous les cas, $|W| \geq |W'| \geq k|A|$ pour une constante $k > 0$. □

Ainsi, un mot $\mathbf{w}$ ne vérifiant aucun critère de puissance $\alpha = 1 + \epsilon$ doit avoir une complexité vérifiant $\lim(\frac{p_{\mathbf{w}}(n)}{n}) = \infty$ [ABL04].

Dans le cas d'un point fixe d'un morphisme, la structure substitutive sous-jacente permet d'améliorer les hypothèses sur la complexité de la suite considérée permettant de conclure à l'existence de chevauchements ou de bégaiements.

Ainsi, nous montrerons au chapitre 3 (section **3.4**) qu'un point fixe w d'une substitution de complexié $p_{\mathbf{w}}(n) = O(n\log(n))$ vérifie encore un critère de puissance $\alpha = 1 + \epsilon$.

Il est montré dans [AZ98] que tout point fixe d'une substitution binaire primitive ou de longueur constante autre que la suite de Thue-Morse vérifie un critère de puissance $\alpha = 2 + \epsilon$ (même pour des complexités du même ordre que n)

D'autre part, nous montrerons au chapitre 3 (section **3.4**) que le point fixe de la substitution :

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & 0 & \rightarrow & 001 \\ & 1 & \rightarrow & 12 \\ & 2 & \rightarrow & 2 \end{array}$$

est une suite de complexité quadratique qui vérifie un critère de puissance $\alpha = 2$.

En revanche, nous verrons également que le point fixe de la substitution :

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & 0 & \rightarrow & 012 \\ & 1 & \rightarrow & 12 \\ & 2 & \rightarrow & 2 \end{array}$$

est une suite de complexité quadratique qui ne vérifie aucun critère de puissance $\alpha > 1$.

De manière à mieux cerner la famille de substitutions ne vérifiant aucun critère de puissance $\alpha > 1$, le chapitre 3 relie cette notion combinatoire à un autre élément que la complexité de la suite. Bien que toutes deux de complexité quadratique (voir chapitre 3 ou [Pan84]), la suite des longueurs des itérés $(|\sigma^n(0)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est à croissance exponentielle, tandis que la suite $(|\lambda^n(0)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est à croissance polynomiale. Cette partition de l'ensemble des points fixes en partant de 0 selon la croissance de la suite des longueurs des itérés de 0 par la substitution correspond exactement à la partition de l'ensemble des points fixes vérifiant un critère de puissance $\alpha > 1$ (et donc auxquels il est possible d'appliquer le théorème de transdendance de B. Adamczewski, Y. Bugeaud et F. Luca).

Nous démontrons dans le chapitre 3 (**Théorème 3.1.1**) le résultat suivant :

Théorème *La suite $\sigma^\infty(0)$ vérifie un critère de puissance $\alpha > 1$ si et seulement si la suite $(|\sigma^n(0)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est à croissance exponentielle.*

1.2 Arithmétique - Approximation Diophantienne

1.2.1 Approximation Diophantienne

La théorie de l'approximation diophantienne étudie le caractère algébrique ou transcendant d'un nombre réel. Plus précisément, elle indique de quelle manière (en terme de vitesse de convergence) un nombre irrationnel peut être approché par des nombres rationnels. Nous nous attachons dans un premier temps à la mesure d'une forme de complexité des nombres rationnel puis à l'étude de la vitesse de convergence d'une suite de rationnels vers un nombre irrationnel.

Un nombre rationnel sera considéré comme plus ou moins "complexe" selon qu'il possède une pré-période et une période plus ou moins grandes. Ces tailles sont liées à la valeur de son dénominateur. Par exemple, les nombres rationnels 3, $\frac{22}{7}$ ou $\frac{355}{113}$ sont rangés par ordre croissant en fonction de leur complexité.

D'autre part, la vitesse de convergence d'une suite de rationnels $\frac{p_n}{q_n}$ vers un nombre irrationnel α est mesurée grâce à la suite des différences $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}|$ et son comportement autour de 0.

Lorsque nous travaillons en base b, nous estimerons cette différence de deux manières différentes en regardant :

- une majoration du type : $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < b^{-N_n}$, qui permet d'observer jusqu'à quelle décimale $\frac{p_n}{q_n}$ et α ont une écriture commune, permettant éventuellement de conclure que le nombre α vérifie une propriété combinatoire.

- une majoration du type : $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < q_n^{-s}$, qui permet de qualifier de bonne ou mauvaise l'approximation du nombre α par le rationnel $\frac{p_n}{q_n}$, en théorie de nombres.

La motivation principale de notre travail est l'étude des suites infinies d'entiers obtenues comme points fixes d'une substitution. De telles suites interviennent dans l'évaluation ou l'approximation d'un nombre réel. Dans le cas des entiers et des nombres rationnels, la decription ne pose aucun autre problème que celui de la mémoire nécessaire à l'écriture effective du nombre.

Les irrationnels peuvent être divisés en deux ensembles : ceux qui sont qualifiés de nombres déterministes (un algorithme permet de calculer la suite des entiers de l'écriture du réel en une base entière), et les autres qui peuvent seulement être approchés par une suite de rationnels et dont nous calculons les décimales en identifiant les chiffres après la virgule.

Par exemple, le nombre $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ est un nombre que nous qualifierons de déterministe tandis que $\sqrt{2}$ ne l'est pas.

Construction d'un nombre réel avec un élément de $\mathcal{A}^\omega$:

Les morphismes d'itérations permettent aussi de construire des nombres que nous qualifions de déterministes.

Soit $\mathbf{w}$ une suite infinie de $\mathcal{A}^\omega = \{0, 1 \ldots, b-1\}$. Nous pouvons associer à $\mathbf{w}$ un nombre réel x de diverses manières :

Écriture en base b Le mot infini $\mathbf{w} = w_1 w_2 \ldots$ est vu comme la suite des chiffres après la virgule du réel x écrit en base entière b :

$$x = 0, w_1 w_2 \ldots \text{ que nous écrirons aussi } x = 0, \mathbf{w}.$$

Écriture en fraction continuée Nous construisons à partir de l'entier $w_0 \in \mathbb{Z}$ et du mot infini $\mathbf{w} = w_1 w_2 \ldots$ construit sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{1, 2 \ldots, b\}$, le réel x

$$x = w_0 + \cfrac{1}{w_1 + \cfrac{1}{w_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

que nous écrirons aussi $x = [w_0; w_1, w_2, \ldots]$ ou $x = [w_0; \mathbf{w}]$.

La notion de "complexité" d'une suite infinie d'entiers peut être considérée comme une notion à cheval entre les mathématiques et l'informatique dont le sens doit être précisé dans chacun de ces domaines. Nous avons vu dans le paragraphe précédent la définition que nous emploierons dans le cadre d'une étude combinatoire.

Du point de vue mathématique, si nous regardons la construction des nombres réels, il peut sembler naturel de les classer de la manière suivante des plus simples aux plus complexes : en premiers, les entiers (naturels puis relatifs), puis les rationnels, les irrationnels algébriques et enfin les nombres transcendants.
Remarquons par exemple qu'il aura fallu attendre 1844 pour que Liouville explicite un premier nombre transcendant $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$.

Pourtant, une version "moderne" du théorème d'approximation rationnelle du même Liouville permet déjà de comprendre qu'un nombre irrationnel algébrique ne peut être si bien approché par une suite de rationnels que l'est le nombre λ de Liouville.

Théorème 1.2.1. ***Liouville*** *Pour tout nombre algébrique α de degré $n \geq 2$, il existe une constante strictement positive $C(\alpha)$ ne dépendant que de α telle que pour tout rationnel p/q,*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{C(\alpha)}{q^n}.$$

Ce théorème ainsi que le nombre λ de Liouville soulèvent alors un épineux problème pour ce qui est de la définition mathématique de la notion de complexité : certains nombres transcendants (comme λ) sont finalement plus simples à décrire (à comprendre dans le sens : "théoriquement" plus rapidement calculables) que n'importe quel irrationnel algébrique de part leur caractère déterministe.

Cette complexité reposant sur l'étude de l'approximation du nombre par des rationnels connaît un nouvel élan grâce à Thue, ramenant la borne pour un irrationnel algébrique de degré n à la valeur $1 + n/2$, puis Siegel à $2\sqrt{n}$ et finalement Roth [Rot55], qui posa 2 comme borne absolue en 1955 (plus petit est l'exposant, plus lente est l'approximation de α par des rationnels). Ces derniers théorèmes sont rassemblés ci-dessous.

Théorème 1.2.2. ***Théorème de Thue (1909) :*** *Pour tout nombre algébrique α de degré $n \geq 3$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C(\alpha, \epsilon)$ telle que :*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{C}{q^{\frac{n}{2}+1+\epsilon}}.$$

Théorème 1.2.3. ***Théorème de Siegel (1917) :*** *Pour tout nombre algébrique α de degré $n \geq 3$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C(\alpha, \epsilon)$ telle que :*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{C}{q^{2\sqrt{n}+\epsilon}}.$$

Théorème 1.2.4. ***Théorème de Roth (1955) :*** *Pour tout nombre algébrique α de degré $n \geq 2$ et pour tout $\epsilon > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels p/q, vérifiant l'inégalité suivante :*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}.$$

Rappelons que depuis Dirichlet, il est connu que pour tout nombre réel x il existe une infinité de rationnels p/q, vérifiant l'inégalité suivante : $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ (tout réel est "théoriquement" 2-approchable par les rationnels).

En posant la mesure d'irrationalité d'un réel x comme

$$\mu(x) = \inf\{\mu \in \mathbb{R} \; |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^\mu} \text{ n'a qu'un nombre fini de solutions entières } (p, q)\},$$

nous obtenons les "classes" suivantes de nombres réels :
- si $x \in \mathbb{Q}, \mu(x) = 1$.
- si x est irrationnel algébrique, $\mu(x) = 2$.
- si x est irrationnel transcendant, $\mu(x) \geq 2$.

La valeur ambiguë de $\mu(x)$ est 2 : le réel x peut alors être soit irrationnel algébrique, soit transcendant. Par contre, tout réel dont la mesure d'irrationalité est strictement supérieure à 2 est transcendant. C'est un raisonnement d'un genre similaire qui avait permit à Liouville de montrer la transcendance de λ dans [Lio44] (voir aussi [HW85]).

Le résultat de Roth fut par la suite amélioré par Ridout [Rid57]. Son théorème permet de prouver la transcendance d'un nombre irrationnel approché par des rationnels dont on contrôle les décompositions en facteurs premiers des numérateurs et dénominateurs. La condition de "vitesse" d'approche des rationnels est moins rigide que celle du théorème de Roth.

Théorème 1.2.5. ***Ridout*** *Pour tout réel algébrique α, s'il existe*
- *des constantes ρ, c_1, c_2, c_3 strictement positives, $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$,*
- *des entiers r' et r'' positifs,*
- *un ensemble fini $\{\omega_1, \ldots, \omega_{r'+r''}\}$ de nombres premiers distincts tels qu'il existe une infinité de fractions irréductibles $\frac{p_n}{q_n}$ vérifiant $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \leq c_1 |q_n|^{-\rho}$ et*

$$p_n = p'_n \Pi_{j=1}^{r'} \omega_j^{e_j(n)}, q_n = q'_n \Pi_{j=1}^{r'+r''} \omega_j^{e_j(n)},$$

si $0 < |p'_n| \leq c_2 |p_n|^\lambda$, $0 < |q'_n| \leq c_3 |q_n|^\mu$ pour tout $n \geq 0$, alors, $\rho \leq \lambda + \mu$.

Enfin, Schmidt [Sch72] améliore les théorèmes précédents en s'intéressant à l'approximation simultanée des nombres algébriques par des rationnels.

Pour un n-uplet $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{Z}^n$, nous définissons la norme

$$||x|| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

Théorème 1.2.6. ***Sous espace de Schmidt*** *Soient*

$$L_1 = \alpha_{11}X_1 + \ldots + \alpha_{1n}X_n, \ldots, L_n = \alpha_{n1}X_1 + \ldots + \alpha_{nn}X_n$$

des formes linéaires indépendantes aux coefficients algébriques α_{ij}.
Soient $c_1, \ldots, c_n$ des nombres réels tels que $c_1 + \ldots + c_n < 0$.

Alors il existe un nombre fini de sous espaces propres $(E_i)_{i=1,\ldots,s}$ de $\mathbb{Q}^n$ tels que toute solution $\boldsymbol{x}$ vérifiant le système d'inégalités

$$|L_i(\boldsymbol{x})| < ||\boldsymbol{x}||^{c_i}{}_{i=1,\ldots,n}$$

soit contenue dans la réunion

$$E_1 \cup \ldots \cup E_s.$$

Cet énoncé contient en particulier l'énoncé de Roth en posant $n = 2$, $L_1 = X_1 - \alpha X_2$, $L_2 = X_2$, $c_1 = -1 - \epsilon$ et $c_2 = 1$ (il contient également celui de Ridout).

Ce théorème fut exprimé en 1977 par Schlickewei [Sch77] sous une version p-adique et revu par J.-H. Evertse en 1996 [Eve96] .

Définition 1.2.1. *Pour α un nombre rationnel et p un nombre premier, la norme p-adique de α vaut $|\alpha|_p = p^{-r}$ où r est tel que p^r est la plus grande puissance de p divisant α.*
La norme $|.|_p$ définit une distance sur $\mathbb{Q}$. L'ensemble $\mathbb{Q}_p$ est la clôture de $\mathbb{Q}$ pour cette distance et $\mathbb{C}_p$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. La norme $|.|_p$ est étendue à l'ensemble $\mathbb{C}_p$.
La norme $|.|$ peut aussi être notée $|.|_\infty$ et $\mathbb{C}$ peut être notée $\mathbb{C}_\infty$ et ∞ représente le nombre premier "infini".

Le théorème de Schlickewei peut s'énoncer :

Théorème 1.2.7. ***Schlickewei*** *Pour p un nombre premier (fini ou infini), soient*

$$L_1(p) = \alpha_{11}(p)X_1 + \ldots + \alpha_{1n}(p)X_n, \ldots, L_n(p) = \alpha_{n1}(p)X_1 + \ldots + \alpha_{nn}(p)X_n$$

des formes linéaires indépendantes à coefficients algébriques $\alpha_{ij}(p)$ dans $\mathbb{C}_p$.
Soient aussi $c_i(p)$ pour $i = 1, \ldots, n$ tels que :

$$\sum_p \sum_{i=1}^{n} c_i(p) < 0.$$

Alors il existe un nombre fini de sous-espaces propres $(E_i)_{i=1,\ldots,s}$ de $\mathbb{Q}^n$ tels que toute solution $\boldsymbol{x}$ vérifiant le système d'inégalités

$$|L_i(p)(\boldsymbol{x})|_p < ||\boldsymbol{x}||^{c_i(p)}{}_{i=1,\ldots,n}$$

soit contenue dans la réunion

$$E_1 \cup \ldots \cup E_s.$$

1.2.2 Conjecture de Borel

Dans ce paragraphe, nous parlons des diverses techniques utilisées entre autre dans le but d'approcher la conjecture d'Émile Borel [Bor50]. Il s'agit de montrer que l'écriture d'un nombre irrationnel algébrique en base entière est "dans un certain sens" aléatoire.

Pour définir cette notion de hasard, il nous faut introduire la définition de la fréquence limite d'apparition d'un mot dans le développement b-adique d'un réel.

Définition 1.2.2. *Soit x un nombre réel et $b \geq 2$ un entier. Soit $a_0 a_1 \dots a_j, a_{j+1} a_{j+2} \dots$ l'écriture de x en base b. Les entiers a_i appartiennent à l'ensemble des chiffres de la base b, c'est à dire, l'ensemble $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, b-1\}$.*

Soit w un mot fini sur l'alphabet $\{0, 1, \dots, b-1\}$. Pour $n \geq 1$, on pose $N_w(n)$ le nombre de fois que le mot w apparaît dans l'écriture b-adique de x dans le mot $a_0 a_1 \dots a_n$.

La fréquence d'apparition (lorsqu'elle existe) du mot w dans le développement b-adique de x est alors donnée par la limite (lorsqu'elle existe) :

$$Freq_x(w) = \lim \frac{N_w(n)}{n}.$$

Définition 1.2.3. *Un nombre $x \in [0, 1]$ sera dit normal en base entière b si l'écriture $x = a_0 a_1 \dots$ de x en base b vérifie les propriétés suivantes :*

- *Pour tout mot w, la fréquence d'apparition de w dans le développement b-adique de x existe.*
- *Cette fréquence ne dépend que de la longueur du mot w : ainsi, chaque mot w de longueur $N \geq 1$ fixée doit apparaître avec la même fréquence qui est donc donnée par*

$$Freq_x(w) = \frac{1}{b^N}.$$

Exemples :

• Le nombre de Champernowne

$$x = 0,1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21\ 22\dots$$

est un nombre normal en base 10 (voir [Cha33]).

• La constante de Copeland-Erdös

$$x = 0,2\ 3\ 5\ 7\ 11\ 13\ 17\ 19\dots$$

obtenue en concaténant les termes de la suite des nombres premiers est un nombre normal en base 10 (voir [CE46]).

Nous pouvons maintenant définir un nombre normal dans toutes les bases entières. Certains parlent aussi de nombre absolument normal. Nous dirons simplement "nombre normal".

Définition 1.2.4. *Un réel x est dit normal si pour tout entier $b \geq 2$, x est un nombre normal en base b.*

À ce jour, il est connu que presque tous les réels (au sens de la mesure de Lebesgue) sont des nombre normaux (utilisation du lemme de Borel-Cantelli [Bor09]). Pourtant, il semble très délicat d'en expliciter des exemples : W. Sierpinski est le premier à en avoir donné un exemple explicite dans [Sie17]. G. Chaitin montre dans [Cha75] que la constante Ω portant son nom,

donnant la probabillité qu'un programme informatique s'arrête, est un nombre normal non calculable (aucune machine de Turing ne peut écrire ce nombre en base entière). Enfin, plus récemment, V. Becher et S. Figueira ont repris la preuve de Sierpinski de manière à exhiber un nombre normal calculable (voir [BF02]).
La conjecture de Borel laisse penser que $\sqrt{2}$ (et plus généralment tout irrationnel algébrique) en est un exemple.

D'autre part, remarquons que cette condition de normalité est plus forte que la condition de complexité maximale. En effet, si pour tout mot w, la fréquence limite d'apparition de w existe et est strictement positive, cela implique que chaque mot w apparaît une infinité de fois dans la suite des chiffres de x. Cette suite de chiffres est donc de complexité maximale. La réciproque est fausse comme l'illustre cet exemple.

Exemple : Pour qu'un nombre soit de complexité maximale sans être normal, il suffit en partant de l'écriture du nombre de Champernowne de biaiser la fréquence d'une lettre par exemple en la répétant plus souvent que n'importe quelle autre :

$y = 0,1\,1\,2\,1\,3\,1\,4\,1\,5\,1\,6\,1\,7\,1\,8\,1\,9\,1\,10\,11\,11\,11\,12\,11\,13\,11\,14\,11\,15\,11\,16\,11\,17\,11\,18\,11\,19\,11\,\ldots$

Dans cet exemple, il est clair que la complexité de y est maximale. En revanche, l'insertion des mots 1^k entre deux entiers successifs n et $n+1$ s'écrivant à l'aide de k chiffres, modifie la fréquence asymptotique de 1 qui vérifie alors

$$Freq_y(1) \geq 1/2.$$

La conjecture de Borel peut alors s'énoncer de la manière suivante :

Conjecture de Borel Tout irrationnel algébrique est un nombre normal (dans toutes les bases entières).

Ainsi, un irrationnel algébrique doit avoir une complexité maximale. La conjecture suivante découle de la conjecture de Borel :

Conjecture Tout irrationnel de complexité polynomiale ($p_w(n) = O(n^k)$) est transcendant.

Nous rappelons dans le chapitre 2 que le théorème de Ferenczi-Mauduit [FM97] permet de couvrir les cas $\lim(p_w(n) - n) < \infty$ (condition impliquant un critère de puissance $\alpha > 1$ d'après le **Lemme 1**) et dans le chapitre 3 que celui de Adamczewski-Bugeaud-Luca [ABL04] s'applique aux nombres réels vérifiant $\liminf \frac{p_w(n)}{n} < \infty$, donc en particulier au cas

$$p_w(n) = O(n).$$

Dans le cas d'un nombre réel substitutif, nous montrerons au chapitre 3 (**Théorème 3.1.1** et son corollaire) que ce résultat est encore vrai pour

$$p_w(n) = O(n \log(n)).$$

1.2.3 Théorie de Kurt Mahler

D'autres méthodes ont été employées dans le but de montrer la transcendance de nouveaux réels. Par exemple D. Bailey, J. Borwein, R. Crandall et C. Pomerance ont montré récemment [BBCP04] que la densité des 1 apparaissant dans le développement 2-adique d'un nombre algébrique x de degré D devait vérifier la condition :

$$||\lfloor 2^n x \rfloor||_1 > Cn^{1/D} \text{ pour une constante } C.$$

Ici, $||\lfloor 2^n x \rfloor||_1$ représente le nombre de 1 apparaissant parmi les n premièrs termes de l'écriture de x en base 2.

Ce résultat permet entre autres de retrouver la transcendance du nombre de Kempner-Mahler

$$\sum_{n\geq 0} 2^{-2^n}.$$

D'un autre côté, la théorie algébrique de K. Mahler a permis de compléter des résultats partiels (par exemple la transcendance du nombre de Thue-Morse) avant l'application récente du théorème du sous-espace de Schmidt à la combinatoire des irrationnels algébriques par Adamczewski, Bugeaud et Luca. Plutôt que de rechercher des approximations du réel étudié par des nombre rationnels, elle repose sur l'existence d'équations algébriques dites de Mahler. Ces équations ont été employées par Loxton et Van Der Poorten [LVdP82] et [LVdP88] dans le but partiellement atteint de prouver la transcendance des réels automatiques.

Nous donnons les grandes lignes de la démonstration de la transcendance du nombre de Thue-Morse comme illustration de cette méthode de K. Mahler (ce résultat est contenu dans le théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca que nous introduiront plus loin et qui utilise le théorème du sous-espace de Schmidt). La version complète de cette démonstration figure dans [Dek77] ou [AS03], chapitre **13.4**.

Théorème 1.2.8. *Soit a_n la suite de Thue-Morse sur $\mathcal{A} = \{-1, 1\}$. Soit $A(\boldsymbol{z}) = \sum_{n\geq 0} a_n \boldsymbol{z}^n$. Le nombre de Thue-Morse égal à $A(1/2)$ est transcendant.*

La démonstration repose sur l'existence d'une équation fonctionnelle vérifiée par la série $A(\mathbf{z})$. C'est la structure automatique de la suite qui permet de trouver cette équation : comme pour tout entier n, $a_{2n} = a_n$ et $a_{2n+1} = -a_n$, nous en déduisons que :

$$A(\mathbf{z}) = (1 - \mathbf{z})A(\mathbf{z}^2) = \Pi_{0\leq j\leq m-1}(1 - \mathbf{z}^{2^j})A(\mathbf{z}^2)A(\mathbf{z}^{2^m})$$

pour tout $\mathbf{z}$ tel que $|\mathbf{z}| < 1$.
Cette équation fonctionnelle mène à l'expression :

$$A(\mathbf{z}) = \Pi_{0\leq j}(1 - \mathbf{z}^{2^j})$$

puisque $A(0) = 1$. Grâce à quoi il est prouvé (par exemple dans [AS03]) dans un premier temps que $A(\mathbf{z})$ est transcendant dans $\mathbb{Q}(\mathbf{z})$ et dans un second temps que $A(\frac{1}{2})$ est transcendant.

Notre intérêt ici n'est pas de donner les détails de cette démonstration mais de rappeler que la structure automatique de la suite de Thue-Morse permet de trouver une "jolie" équation fonctionnelle vérifiée par la série formelle associée.

Chapitre 2

Autour du théorème de Ferenczi-Mauduit

2.1 Introduction

2.1.1 Résumé

Il est question dans ce chapitre des résultats de S. Ferenczi et C. Mauduit concernant la conjecture d'É. Borel [Bor50] sur le développement en base b d'un réel irrationnel algébrique.

Conjecture 1 : É. Borel *La suite des chiffres du développement en base entière b d'un nombre irrationnel algébrique est une suite* normale.

D'autres résultats plus faibles découlent de cette conjecture dont :

Conjecture 2 : *Si la complexité du développement en base entière b d'un réel vérifie*

$$\forall k \leq 0, p(k) < b^k,$$

alors ce nombre est rationnel ou transcendant.

Avant l'amélioration de B. Adamczewski, Y. Bugeaud et F. Luca en 2004 [ABL04], le critère combinatoire du théorème de S. Ferenczi et C. Mauduit [FM97] avait permis d'établir la transcendance des réels dont l'écriture b-adique était donnée par une suite sturmienne, par le point fixe d'une substitution primitive binaire ou contenant au moins un chevauchement, ou par le point fixe d'une substitution de longueur constante (voir aussi [AZ98] et le **Théorème 2.1.3**).

L'idée commune de ces deux théorèmes est d'exploiter l'apparition de motifs dans la suite $\mathbf{w}$ du développement b-adique d'un nombre réel (chevauchements pour Ferenczi-Mauduit et bégaiements pour Adamczewski-Bugeaud-Luca) en les traduisant en approximations du réel par des nombres rationnels. Si, en base entière b, le nombre x s'écrit $0, UV^\alpha$ pour $\alpha > 1$, alors en posant $r = 0, U\overline{V}$,

$$|x - r| \leq b^{-(|U|+\alpha|V|)}.$$

Le théorème de Ferenczi-Mauduit est une passerelle entre l'existence d'un critère $\alpha = 2 + \epsilon$ (basé sur des chevauchements) et la possibilité d'appliquer le théorème de Ridout.

En base 2, il avait été montré par Berstel et Séébold (voir [BS93] et [S85]) que seul le mot de Thue-Morse ne contenait aucun chevauchement.

D'autre part, la transcendance du réel de Thue-Morse $x = 0,01101001\ldots$ était connue depuis Mahler et redémontré par Dekking [Dek77] (voir aussi la démonstration de [AS03]).

Certaines parties de ce chapitres correspondent au début de notre étude, toujours avant le résultat de B. Adamczewski, Y. Bugeaud et F. Luca, durant laquelle nous nous sommes intéressé aux substitutions binaires sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ qui ne possèdent aucun chevauchement (donc auxquelles il est impossible d'appliquer le théorème de Ferenczi-Mauduit).

Nous introduisons les notions de croissance d'une lettre ou d'un mot de $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ sous l'application itérée d'une substitution (**section 2.2**). Cette première étude dans le cadre d'application du théorème de Ferenczi-Mauduit aux points fixes d'un morphisme binaire a été reprise et généralisée pour s'adapter au cadre du théorème de B. Admaczewski et Y. Bugeaud sur un alphabet quelconque (première partie du chapitre 3).

Nous montrons ensuite que la condition combinatoire de posséder une suite de chevauchements vérifiant les hypothèses du théorème de Ferenczi-Mauduit peut être remplacée de manière

équivalente dans le cas substitutif, par la condition de posséder un chevauchement $aWaWa$ pour une lettre a à croissance maximale sous l'action de la substitution (**section 2.3**).

L'exemple d'une famille de suites binaires substitutives ne vérifiant pas cette nouvelle hypothèse est présenté en guise de conclusion (**section 2.4**).

2.1.2 Rappels des résultats

Dans la majeure partie de ce qui suit, $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. L'application σ est une substitution d'itérations sur $\mathcal{A}$. Pour simplifier, nous supposerons que $\sigma(0)[1] = 0$ et désignerons par $\mathbf{w}$ le point fixe $\sigma^\infty(0)$. Nous supposerons que $\mathbf{w}$ est un mot infini à droite.
La matrice A de transition de la substitution est la matrice dont le terme général $a_{i,j}$ est définie par

$$a_{i,j} = |\sigma(j)|_i \text{ pour } i \text{ et } j \text{ dans } \mathcal{A}.$$

Alors, la substitution σ est primitive si et seulement s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que tous les termes de A^n sont strictement positifs.

Le théorème de Ferenczi-Mauduit, traduction combinatoire du théorème de Ridout, donne une condition suffisante sur l'écriture b-adique du réel x permettant de montrer que x est rationnel ou transcendant.

Théorème 2.1.1. *Soit x un nombre réel dans $[0, 1]$, dont l'écriture en base entière b vérifie un critère de puissance $\alpha > 2$. Autrement dit, il existe $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}, (V_n)_{n\in\mathbb{N}} et (V'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{*\mathbb{N}}$ telles que :*

- *le développement en base b du nombre x est de la forme : $x = 0, U_nV_nV_nV'_n...$*
- *le mot V'_n est un préfixe de V_n*
- *la suite $(|V_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini*
- $\liminf_n \frac{|V'_n|}{|V_n|} > 0$
- $\limsup_n \frac{|U_n|}{|V_n|} < \infty$.

Alors le nombre x est rationnel ou transcendant.

La démonstration de ce théorème et son lien avec le théorème de Ridout est détaillée dans [FM97] (voir aussi [All00]).

Dans le cas d'une substitution primitive ou de longueur constante, le théorème de Perron-Frobénius est d'une grande aide pour les deux dernières hypothèses du théorème précédent portant sur la comparaison des longueurs de U_n, V_n et V'_n.

Théorème 2.1.2. *Soit σ une substitution primitive ou de longueur constante $l \geq 2$ sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, b\}$.*

$$\exists \lambda > 1,\ \forall v \in \mathcal{A}^*,\ \exists\ c(v) > 0,\ \lim \frac{\sigma^n(v)}{\lambda^n} = c(v)$$

Nous en déduisons le résultat suivant :

Corollaire *Soit σ, une substitution d'itérations, primitive ou de longueur constante. Soit* $\mathbf{w}$ *son point fixe et* $x = 0, \mathbf{u}$.
Si $\mathbf{w}$ *possède un chevauchement* $UaWaWa$, *alors les suites*

$$\begin{aligned} U_n &:= \sigma^n(U) \\ V_n &:= \sigma^n(aW) \\ V'_n &:= \sigma^n(a) \end{aligned}$$

vérifient les conditions du théorème de Ferenczi-Mauduit donc le réel x est rationnel ou transcendant.

Démonstration (du corollaire) : Posons : $U_0 = U$, $V_0 = aW$, $V'_0 = a$ puis $U_n = \sigma^n(U_0)$, $V_n = \sigma^n(V_0)$, $V'_n = \sigma^n(V'_0)$.
Comme la substitution est primitive ou de longueur constante, il existe un réel $\lambda > 1$ et des constantes $c(U_0)$, $c(V_0)$ et $c(V'_0)$ strictement positives vérifiant :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma^n(U_0)|}{\lambda^n} = c(U_0), \ \lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma^n(V_0)|}{\lambda^n} = c(V_0), \ \lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma^n(V'_0)|}{\lambda^n} = c(V'_0).$$

Ainsi, $\limsup_n \frac{|U_n|}{|V_n|} = \frac{c(U_0)}{c(V_0)} < +\infty$ et $\liminf_n \frac{|V'_n|}{|V_n|} = \frac{c(V'_0)}{c(V_0)} > 0$.
Le théorème de Ferenczi-Mauduit s'applique pour le réel x. □

Dans le cas particulier où $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, il n'est plus besoin de vérifier l'existence d'un chevauchement : en effet, la seule suite binaire infinie (à l'interversion près des lettres 0 et1) n'admettant aucun chevauchement est la suite de Thue-Morse. Le nombre de Thue-Morse étant transcendant, le théorème suivant peut être énoncé (Allouche-Zamboni) :

Théorème 2.1.3. *Si le développement binaire d'un nombre réel est le point fixe d'une substitution primitive ou de longueur constante ≥ 2, ce nombre est rationnel ou transcendant.*

2.2 Croissance d'une substitution binaire

Dans ce paragraphe, nous ne nous intéressons qu'au cas substitutif sur un alphabet binaire $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Nous exhibons parmi les exemples qui ne sont ni primitifs ni de longueur constante, une famille de points fixes qui vérifient encore les hypothèses du théorème de Ferenczi-Mauduit.

Pour ces morphismes σ, les lettres 0 et 1 ont des croissances comparables.

L'étude du phénomène de croissance de lettres et de mots sous l'action de σ nous permet d'énoncer une hypothèse équivalente aux hypothèses du théorème de Ferenczi-Mauduit dans le cas d'une suite binaire substitutive. Cette famille de suites est strictement plus grosse que l'ensemble des suites binaires points fixes d'une substitution primitive ou de longueur constante : elle est formée des suites binaires pour lesquelles les lettres 0 et 1 ont même ordre de croissance sous l'action de σ.

Nous rappelons que ces suites ainsi que les suites substitutives binaires restantes (pour lesquelles l'ordre de croissance des deux lettres n'est pas la même) vérifient toutes le théorème de B. Adamczewski, Y. Bugeaud et F. Luca que nous introduirons dans le chapitre 3.

Lemme 2. *Sur un alphabet binaire $\{a, b\}$, une substitution d'itération qui n'est pas primitive est de la forme (à l'inversion près des lettres) :*

$$\begin{array}{rcl} \sigma : a & \rightarrow & aW \text{ pour } W \in \mathcal{A}^* \setminus \{\epsilon\} \\ b & \rightarrow & b^k \end{array}$$

Démonstration La matrice associée à la substitution σ est de la forme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \ , \ A, B, C, D \in \mathbb{N}.$$

La substitution σ n'étant pas primitive, la matrice $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} A^2 + BC & B(A+D) \\ C(D+A) & D^2 + BC \end{pmatrix}$ n'est pas strictement positive. Il faut donc que $B = 0$ ou $C = 0$ ou bien $A = D = 0$.

- Le cas $A = D = 0$ ne correspondant pas au cas d'un morphisme d'itération est exclu.
- Dans le cas $B = 0$, une récurrence sur n montre qu'aucune des matrices $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ C' & D' \end{pmatrix}$ n'est strictement positive pour $n \geq 1$.
- Le cas $C = 0$ correspond après inversion des lettres a et b au cas $B = 0$. □

Comme nous supposons $\sigma(0)[1] = 0$ de manière à étudier le point fixe $\sigma^\infty(0)$, nous nous plaçons dans tout ce qui suit dans le cas $B = |\sigma(1)|_0 = 0$.
Posons $n_0 = A = |\sigma(0)|_0$ et $n_1 = C = |\sigma(0)|_1$. Remarquons que $|\sigma(1)|_1 = k$.

La proposition suivante résume les résultats de croissance des mots formés en itérant la substitution au deux lettres 0 et 1.

Proposition 1. *Pour une substitution σ non primitive telle que $\sigma(0) = 0W$ avec $|W|_1 \neq 0$, les tailles des itérés successifs des lettres 0 et 1 sont données par :*

$$\begin{array}{lll} |\sigma^n(0)| & = n_0^n + n_1 \frac{n_0^n - k^n}{n_0 - k} & \text{si } k \neq n_0 \\ & = n_0^n + n n_1 n_0^{n-1} & \text{si } k = n_0 \\ |\sigma^n(1)| & = k^n & \text{pour tout } k. \end{array}$$

Démonstration La matrice de substitution associée à σ est égale à $A = \begin{pmatrix} n_0 & 0 \\ n_1 & k \end{pmatrix}$.
Alors, pour $V \in \mathcal{A}^*$, en posant $|V|_0 = u$ et $|V|_1 = v$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\sigma^n(V)|_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\ |\sigma^n(V)|_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, |\sigma^n(W)| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Par récurrence sur l'entier n,

$$\begin{array}{rcl} |\sigma^n(0)|_0 & = & n_0^n \\ |\sigma^n(0)|_1 & = & n_1(n_0^{n-1} + n_0^{n-2}k + .. + n_0 k^{n-2} + k^{n-1}) \\ |\sigma^n(1)|_0 & = & 0 \\ |\sigma^n(1)|_1 & = & k^n \\ & \text{et} & \\ |\sigma^n(0)| & = & n_0^n + n_1 \left(\frac{n_0^n - k^n}{n_0 - k} \right) \text{ ou } n_0^n + n n_1 n_0^{n-1} \\ |\sigma^n(1)| & = & k^n \ \square \end{array}$$

Remarque 1 : Il est donc possible de comparer les ordres de grandeur de $|\sigma^n(0)|$ et $|\sigma^n(1)|$ lorsque n tend vers l'infini :

$$\text{Si } k \leq n_0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma^n(1)|}{|\sigma^n(0)|} = 0$$

$$\text{Si } k > n_0,\ 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma^n(1)|}{|\sigma^n(0)|} = l < \infty$$

En effet, si $k < n_0$, $\frac{|\sigma^n(0)|}{|\sigma^n(1)|} = \frac{n_0^n + \frac{n_0^n - k^n}{n_0 - k}}{k^n} \geq \frac{n_0^n}{k^n} \to +\infty$.
Tandis que si $k = n_0$, $\frac{|\sigma^n(0)|}{|\sigma^n(1)|} = \frac{n_0^n + n n_1 n_0^{n-1}}{k^n} \geq 1 + \frac{n}{k} \to +\infty$.
Enfin, si $k > n_0$, $\frac{|\sigma^n(0)|}{|\sigma^n(1)|} = \frac{n_0^n + n_1 \frac{n_0^n - k^n}{n_0 - k}}{k^n} = \left(\frac{n_0}{k}\right)^n + n_1 \frac{\left(\frac{n_0}{k}\right)^n - 1}{n_0 - k} \to \frac{n_1}{k - n_0} > 0$ car $n_1 = |\sigma(0)|_1 \neq 0$.

• Rappelons que dans le cas d'une substitution primitive, le théorème de Perron-Frobénius donne le résultat suivant :

Il existe un réel $\lambda > 1$ tel que pour les lettres 0 et 1, il existe des constantes $c(0)$ et $c(1)$ strictement positives vérifiant :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma^n(0)|}{\lambda^n} = c(0),\ \lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma^n(1)|}{\lambda^n} = c(1) \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma^n(0)|}{|\sigma^n(1)|} = \frac{c(0)}{c(1)} (> 0).$$

• De même, si σ est de longueur constante,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma^n(0)|}{|\sigma^n(1)|} = 1 (> 0).$$

Dans les deux cas, les lettres de l'alphabet ont même ordre de croissance à l'infini (*i.e.* l'ordre de croissance de la suite des longueurs des itérés successifs de 0 et de 1 est le même).

Remarque 2 : Dans le cas $k \leq n_0$ (0 est la seule lettre dont la croissance est dominante), pour V_1 et V_2 deux mots binaires non vides :

$$|\sigma^n(V_1)| = |V_1|_0 |\sigma^n(0)| + |V_1|_1 |\sigma^n(1)| \text{ et } |\sigma^n(V_2)| = |V_2|_0 |\sigma^n(0)| + |V_2|_1 |\sigma^n(1)|$$

Donc, le rapport $\alpha_n = \dfrac{|\sigma^n(V_1)|}{|\sigma^n(V_2)|}$ vérifie :

$$\begin{aligned}
\alpha_n = \frac{|\sigma^n(V_1)|}{|\sigma^n(V_2)|} &= \frac{|V_1|_0 |\sigma^n(0)| + |V_1|_1 |\sigma^n(1)|}{|V_2|_0 |\sigma^n(0)| + |V_2|_1 |\sigma^n(1)|} \\
&= \frac{|\sigma^n(0)|}{|\sigma^n(0)|} \frac{|V_1|_0 + \dfrac{|V_1|_1 |\sigma^n(1)|}{|\sigma^n(0)|}}{|V_2|_0 + \dfrac{|V_2|_1 |\sigma^n(1)|}{|\sigma^n(0)|}} \\
&= \frac{|V_1|_0 + |V_1|_1 \dfrac{|\sigma^n(1)|}{|\sigma^n(0)|}}{|V_2|_0 + |V_2|_1 \dfrac{|\sigma^n(1)|}{|\sigma^n(0)|}}
\end{aligned}$$

Plusieurs cas se présentent alors :

- le mot V_1 contient un 0 et V_2 n'en contient pas, $\alpha_n \to +\infty$
- le mot V_1 ne contient pas de 0 et V_2 contient un 0, $\alpha_n \to 0$
- le mot V_1 et V_2 contiennent tous les deux un 0 ou aucun d'entre eux ne contient de 0, $\alpha_n \to L$ avec $0 < \max\{\frac{|V_1|_0}{|V_2|_0}, \frac{|V_1|_1}{|V_2|_1}\} = L < +\infty$

Remarque 3 : Lorsque $k > n_0$, 1 et 0 sont deux lettres dont la croissance des tailles des itérés sont du même ordre. En faisant un raisonnement similaire à celui de la remarque précédente, si V_1 et V_2 sont deux mots non vides, dans tous les cas, $\alpha_n \to L' = \frac{|V_1|_0 + l|V_1|_1}{|V_2|_0 + l|V_2|_1}$ tel que $0 < L' < +\infty$.

• Rappelons que dans le cas d'une substitution primitive, le théorème de Perron-Frobénius nous dit encore qu'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que pour les mots non vides V_1 et V_2, il existe des constantes $c(1)$ et $c(2)$ strictement positives vérifiant :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma^n(V_1)|}{\lambda^n} = c(1),\ \lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma^n(V_2)|}{\lambda^n} = c(2) \text{ et } \lim_n \frac{|\sigma^n(V_1)|}{|\sigma^n(V_2)|} = \frac{c(1)}{c(2)} (> 0).$$

• De même, si σ est de longueur constante, $\lim_n \frac{|\sigma^n(V_1)|}{|\sigma^n(V_2)|} = \frac{|V_1|}{|V_2|} (> 0)$.

Essayons de tirer un bilan des cas particuliers des suites substitutives binaires. Quitte à exclure le cas de la suite de Thue-Morse, il existe un chevauchement $U_0V_0V_0V_0'$ tel que

$$x = 0, U_0V_0V_0V_0'...$$

J.-P. Allouche et L. Zamboni [AZ98] ont souligné le fait que dans le cas d'une substitution primitive ou de longueur constante, les longueurs $|\sigma^n(U_0)|$, $|\sigma^n(V_0)|$ et $|\sigma^n(V_0')|$ sont comparables.

Notre étude de la croissance des mots permet d'ajouter également le cas des substitutions vérifiant $k > n_0$

Théorème 2.2.1. *Si le développement binaire d'un nombre réel est le point fixe $\sigma^\infty(0)$ (resp. $\sigma^\infty(1)$) d'une substitution vérifiant :*

$$|\sigma(0)|_0 \leq |\sigma(1)|,\ \textit{(resp. } |\sigma(1)|_1 \leq |\sigma(0)|),$$

ce nombre est rationnel ou transcendant.

Démonstration Supposons par exemple $x = 0, \mathbf{w}$ pour $\mathbf{w} = \sigma^\infty(0)$. Nous excluons le cas trivial $|\sigma(0)|_1 = 0$. Le cas d'une substitution primitive relève du théorème Allouche-Zamboni. Nous nous restreignons au cas non primitif. Alors, quitte à considérer $\sigma(U_0V_0V_0V_0') = \sigma(U_0)\sigma(V_0)\sigma(V_0)\sigma(V_0')$, nous pouvons supposer que $1 \in V_0'$ (et donc $1 \in V_0$ car V_0' est un préfixe de V_0).
D'après ce qui a été dit dans la **Remarque 3**, lorsque $k > n_0$, $\lim \frac{|\sigma^n(U_0)|}{|\sigma^n(V_0)|} = L_{U_0,V_0}$ finie et strictement positive. De même, $\lim \frac{|\sigma^n(V_0)|}{|\sigma^n(V_0')|} = L'_{V_0,V_0'}$ finie et strictement positive.

La suite des chevauchements $\sigma^n(U_0)\sigma^n(V_0)\sigma^n(V_0)\sigma^n(V_0')$ vérifie donc les hypothèses du théorème de Ferenczi-Mauduit. Dans ce cas x est un nombre rationnel ou transcendant. □

Dans le cas d'un point fixe $\sigma^\infty(0)$ d'une substitution telle que $k \leq n_0$, il est suffisant de supposer que V_0' contient un 0 pour pouvoir appliquer le théorème de Ferenczi-Mauduit à une suite de chevauchements du type $\sigma^n(U_0)\sigma^n(V_0)\sigma^n(V_0)\sigma^n(V_0')$.

Théorème 2.2.2. *Si le développement binaire d'un nombre réel est le point fixe $\sigma^\infty(0)$ (resp. $\sigma^\infty(1)$) d'une substitution possédant un chevauchement du type $U\,0W\,0W\,0$ (resp. $U\,1W\,1W\,1$), ce nombre est rationnel ou transcendant.*

Démonstration Prenons le cas du point fixe $\sigma^\infty(0)$. Le cas d'une substitution primitive relève du théorème Allouche-Zamboni. Nous pouvons donc supposer la substitution non primitive. D'après les **Remarques 2 et 3**, le chevauchement $UV_0V_0V_0'$ avec $V_0 = 0W$ et $V_0' = 0$ est tel que $\lim \dfrac{|\sigma^n(U)|}{|\sigma^n(V_0)|} = L_{U,V_0} > 0$ est finie et $\lim \dfrac{|\sigma^n(V_0)|}{|\sigma^n(V_0')|} = L'_{V_0,V_0'} > 0$ est finie.

La suite des chevauchements $\sigma^n(U)\sigma^n(V_0)\sigma^n(V_0)\sigma^n(V_0')$ vérifie donc les hypothèses du théorème de Ferenczi-Mauduit. □

Bien que toute suite binaire $\sigma^\infty(0)$ autre que la suite de Thue-Morse contienne un chevauchement, il n'est pas évident que ce chevauchement soit du type $0W0W0$ lorsque la substitution n'est plus primitive.

Dans la partie suivante, nous donnons l'exemple d'une suite n'ayant aucun tel chevauchement qualifié de "maximal" (dans lequel le mot V_0' est un mot d'ordre de croissance maximal parmi tous les mots de $\mathcal{A}^*$). Nous montrons que le théorème de Ferenczi-Mauduit n'est applicable ni à la suite en question, ni à toute la famille des suites substitutives binaires ne possédant aucun chevauchement maximal.

Cette condition combinatoire "la suite $\mathbf{w} = \sigma^\infty(a)$ possède un chevauchement maximal" est donc une condition équivalente aux conditions d'application du théorème de Ferenczi-Mauduit au réel $x = 0, \mathbf{w}$.

2.3 Mots de croissance maximale - Théorème de Ferenczi-Mauduit

Définition 2.3.1. *Soit σ une substitution non effaçante sur un alphabet quelconque $\mathcal{A}$. Une lettre x de $\mathcal{A}$ est dite σ-maximale (ou simplement maximale s'il n'y a pas d'ambiguïté)lorsque pour toute autre lettre y de $\mathcal{A}$, il existe M_y réel tel que :*

$$\limsup_n \frac{|\sigma^n(y)|}{|\sigma^n(x)|} = M_y < +\infty.$$

Exemple Définissons sur $\{0,1\}$, la substitution σ par :

$$\sigma : \begin{array}{l} 0 \to 0101 \\ 1 \to 1 \end{array}$$

Avec les notation du paragraphe précédent, $k = 1$ et $n_0 = 2$ donc

$$\limsup_n \frac{|\sigma^n(0)|}{|\sigma^n(1)|} = +\infty \text{ et } \limsup_n \frac{|\sigma^n(1)|}{|\sigma^n(0)|} = 0.$$

Donc 0 est la seule lettre à croissance maximale de $\mathcal{A}$.

Si σ est primitive ou de longueur constante, en vertu du théorème de Perron-Frobénius, toutes les lettres de $\mathcal{A}$ ont une croissance maximale.

Remarque Pour une substitution σ telle que $|\sigma^n(0)| \to \infty$, la longueur des itérés d'une lettre $x \in \mathcal{A}$ σ-maximale tend vers l'infini. En effet, $|\sigma^n(0)|$ tend vers l'infini et

$$\limsup_n \frac{|\sigma^n(0)|}{|\sigma^n(x)|} = M < +\infty.$$

Définition 2.3.2. *Un mot W de $\mathcal{A}$ est dit σ-maximal (ou simplement maximal s'il n'y a pas d'ambiguïté) s'il existe un entier n tel que $\sigma^n(W)$ contient une lettre à croissance σ-maximale.*

Exemple Définissons sur $\{0,1\}$, la substitution σ par :

$$\sigma : \begin{array}{l} 0 \to 0101 \\ 1 \to 1 \end{array}$$

Nous avons vu que 0 est la seule lettre à croissance maximale. Les mots σ-maximaux sont exactement les mots contenant un 0. En effet, tous les itérés d'un mot ne contenant que des 1 ne contiennent que des 1.

Remarques :

• Dans le cas d'une substitution primitive ou de longueur constante, tous les mots sont σ-maximaux.

• La longueur des itérés d'un mot σ-maximal tend vers l'infini car il contient une lettre σ-maximale.

Définition : *Soit σ une substitution binaire. Soit* **w** *un de ses points fixes. Nous dirons que le chevauchement $UVVV'$ dans* **w** *est σ-maximal (ou simplement maximal s'il n'y a pas d'ambiguïté) si et seulement si V' est un mot σ-maximal.*

Nous sommes maintenant près à réadapter le théorème de Ferenczi-Mauduit dans le cas de l'étude d'une suite binaire substitutive. La proposition suivante montre qu'alors, l'existence d'un chevauchement maximal est une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une suite de chevauchements vérifiant les conditions du théorème de Ferenczi-Mauduit.

Proposition 2. *Soit σ une substitution binaire et* **w** *un point fixe de σ. Le théorème de Ferenczi-Mauduit peut être appliqué à* **w** *si et seulement si* **w** *contient un chevauchement maximal.*

Démonstration

• Montrons d'abord que la condition est suffisante : Soit $UVVV'$ un chevauchement maximal dans **w**. Alors en posant $U_n = \sigma^n(U)$, $V_n = \sigma^n(V)$ et $V'_n = \sigma^n(V')$, la suite de chevauchements $U_nV_nV_nV'_n$ est telle que :

- la longueur $|V_n| \to +\infty$. En effet, $|V'_n| \to +\infty$ car V' est un mot maximal et V'_n est un préfixe de V_n.
- le rapport $\frac{|V'_n|}{|V_n|}$ tend vers une limite strictement positive car V'_n est un mot σ-maximal.
- le rapport $\frac{|V_n|}{|U_n|}$ tend vers une limite strictement positive car V_n est un mot σ-maximal au même titre que son préfixe V'_n. Donc, $\frac{|U_n|}{|V_n|}$ tend vers une limite finie.

Le théorème de Ferenczi-Mauduit s'applique à **w**.

• Montrons maintenant que la condition est nécessaire. Supposons qu'il n'existe pas de chevauchement maximal dans **w**. Nous allons montrer qu'aucune suite de chevauchements ne peut vérifier les hypothèses du théorème de Ferenczi-Mauduit.

Lorsque la substitution σ est une puissance de la substitution μ de Thue-Morse, les hypothèses du théorème de Fernczi-Mauduit ne sont pas vérifiées. Nous pouvons donc supposer

que $\sigma \neq \mu^k$. Donc σ possède au moins un chevauchement. Comme il n'existe aucun chevauchement maximal, la substitution σ n'est ni primitive ni de longueur constante.
La substitution σ s'écrit donc :

$$\begin{array}{rl} \sigma : & 0 \to 0^{i_1}1^{j_1}0^{i_2}1^{j_2}\dots 0^{i_r}1^{j_r} \\ & 1 \to 1^k \end{array}$$

où les $i_1, j_1, \dots i_r, j_r$ sont des entiers non nuls sauf éventuellement j_r.

Soit $U_nV_nV_nV_n'$ une suite quelconque de chevauchements telle que $|V_n'| \to \infty$.

La lettre 1 ne peut pas être une lettre σ-maximale. Dans le cas contraire, pour n'importe quel chevauchement $U_0V_0V_0V_0'$, le chevauchement $\sigma(U_0)\sigma(V_0)\sigma(V_0)\sigma(V_0')$ serait maximal puisque $\sigma(V_0')$ contient au moins un 1.
La substitution σ est donc de la forme

$$\begin{array}{rl} \sigma : & 0 \to 0W \text{ pour } W \neq \epsilon \\ & 1 \to 1^k \end{array} \quad \text{avec } k \leq |\sigma(0)|_0.$$

Tous les chevauchements de $\sigma^\infty(0)$ sont de la forme $UVVV'$ avec $V' = 1^s$ (sinon, l'un d'entre eux serait maximal). Nous allons montrer qu'un facteur de la forme 1^s n'apparaît pas suffisamment vite dans $\mathbf{w}$. En effet, nous allons voir que pour toute suite $U_nV_nV_n1^{s(n)}$ de chevauchements tels que $s(n)$ tend vers l'infini, la quantité $\frac{|V_n'|}{|U_n|}$ tend vers 0. Cela contredit l'une des deux hypothèses du théorème de Ferenczi-Mauduit :

- la quantité $\liminf_n \frac{|V_n'|}{|V_n|} > 0$.
- la quantité $\limsup_n \frac{|U_n|}{|V_n|} < \infty$

Nous illustrons le cas général en regardant ce qui se passe dans le cas "simple" $r = 2$:

$$\begin{array}{rl} \sigma_1 : & 0 \to 0^{i_1}1^{j_1}0^{i_2}1^{j_2} = 0W \\ & 1 \to 1^k \end{array}$$

avec éventuellement $j_2 = 0$ et $k \leq n_0$.
Dans ce qui suit, $M_{12} = \max(j_1, j_2)$ pour notre cas particulier σ_1 et $M_{1r} = \max(j_1, j_2, \dots, j_r)$ pour le cas général. Étudions la taille et la place des facteurs 1^s les plus longs apparaissant dans l'itération $\sigma_1^n(0)$ et $\sigma^n(0)$.

Dans $\sigma_1(0) = 0W$, la plus longue série de 1 est de longueur M_{12}.
Dans le cas général, elle est de longueur M_{1r}.

Dans $\sigma_1^2(0) = 0W\sigma_1(W)$, la plus longue série de 1 ne peut être plus grande que celle obtenue en concaténant les mots $\sigma(0)\sigma(1^{M_{12}})\sigma(0)$. Comme $\sigma(0)$ commence par la lettre 0 et termine par une puissance de 1 plus courte que $1^{M_{12}}$, cette plus longue série de 1 est de longueur inférieure à $kM_{12} + M_{12}$. Ce mot ne peut pas être un facteur de $\sigma(0)$ privé de la plus longue série de 1 apparaissant dans $\sigma(0)$. Donc un tel mot ne peut donc apparaître qu'à une distance minimale de $|\sigma(0)| - M_{12}$.
Dans le cas général, elle est de longueur inférieure à $M_{1r} + kM_{1r}$ et apparaîtrait au moins après le $(|\sigma(0)| - M_{1r})^{\text{ème}}$ terme.

Dans $\sigma_1^3(0) = 0W\sigma(W)\sigma^2(W)$, la plus longue série de 1 est de longueur inférieure à $M_{12}[1 + k + k^2]$. De plus, elle apparaît au moins après le $(|\sigma_1^2(0)| - M_{12}[1 + k])^{\text{ème}}$ terme.

Dans le cas général, elle serait de longueur inférieure à $M_{1r}[1+k+k^2]$, et apparaîtrait au moins après le $(|\sigma^2(0)| - M_{1r}[1+k])^{\text{ème}}$ terme.

De proche en proche, en itérant notre raisonnement, nous obtenons :

Dans $\sigma_1^n(0)$, la plus longue série de 1 est de longueur inférieure à $M_{12}[1+k+k^2+\ldots+k^{n-1}]$. De plus, elle apparaît au moins après le $(|\sigma_1(0)| - M_{12}[1+k+\ldots+k^{n-2}])^{\text{ème}}$ terme.
Dans le cas général, elle serait de longueur inférieure à $M_{1r}[1+k+k^2+\ldots+k^{n-1}]$ et et apparaîtrait au moins après le $(|\sigma^{n-1}(0)| - M_{1r}[1+k+\ldots+k^{n-2}])^{\text{ème}}$ terme.

Soit alors une suite de chevauchements $U_nV_nV_nV_n' = U_nV_nV_n1^s(n)$ apparaissant dans $\sigma^\infty(0)$. Supposons qu'il existe un entier N tel que $M_{1r}[1+k+k^2+\ldots+k^{N-2}] \leq s(n) \leq M_{1r}[1+k+k^2+\ldots+k^{N-1}]$. Alors une telle puissance $1^{s(n)}$ ne peut apparaître avant la place $|\sigma^{N-2}(0)| - j_r[1+k+\ldots+k^{N-3}]$.

Ainsi, lorsque $M_{1r}[1+k+k^2+\ldots+k^{N-2}] \leq |V_n'| \leq M_{1r}[1+k+k^2+\ldots+k^{N-1}]$, nous avons $|U_n| \geq |\sigma^{N-2}(0)| - j_r[1+k+\ldots+k^{N-3}]$.

Rappelons que $|\sigma^N(0)| \geq |\sigma(0)|_0^N$.

Ainsi, lorsque $s(n)$ tend vers l'infini, si $k \leq |\sigma(0)|_0$

$$\begin{aligned}
\frac{|V_n|}{|U_n|} &\leq \frac{s(n)}{|U_n|} \\
&\leq \frac{M_{1r}[1+k+k^2+\ldots+k^{N-1}]}{|\sigma^{N-1}(0)| - j_r[1+k+\ldots+k^{N-3}]} \\
&\leq M_{1r}\frac{k^{N-1}}{1-k}\frac{1}{|\sigma^{N-1}(0)|} \\
&\leq C\left(\frac{k}{|\sigma(0)|_0}\right)^{N-1} \to 0 \text{ lorsque } N \to \infty.
\end{aligned}$$

Comme $k \leq n_0 = |\sigma(0)|_0$, $\lim_n \frac{|V_n|}{|U_n|} = 0$.

La condition d'existence d'un chevauchement maximal est donc une condition nécessaire, ce qui achève la preuve de la proposition. □

Nous pourrions essayer de prolonger cette étude au cas général d'un alphabet quelconque (pas forcément binaire). Cependant, à cette étape de notre travail, le théorème de Adamczewski-Bugeaud-Luca a considérablement amélioré les hypothèses du théorème de Ferenczi-Mauduit : plutôt que de continuer à étudier une condition sur les chevauchements, nous ne sommes concentré sur les bégaiements. Dans la première partie du chapitre 3, cette étude sur la croissance des mots et l'existence de chevauchements maximaux dans une suite binaire substitutive sera reprise et généralisée dans un travail sur l'existence de bégaiements maximaux dans une suite substitutive construite à l'aide d'un alphabet quelconque.

Avant cela, nous donnons l'exemple d'une famille de suites substitutives binaires ne contenant aucun chevauchement maximal.

2.4 Cas problématiques de substitutions binaires pour le théorème de Ferenczi-Mauduit

2.4.1 Premier exemple de substitution problématique

Considérons la substitution suivante :

$$\sigma : \begin{array}{l} 0 \to 0101 \\ 1 \to 1 \end{array}$$

Le morphisme σ n'est ni primitif ni de longueur constante. Son point fixe $\mathbf{w} = \sigma^\infty(0)$ appartient à l'ensemble étudié dans la partie précédente : $|\sigma(1)| = k = 1 < 2 = n_0 = |\sigma(0)|_0$.

Dans ce paragraphe, nous montrons que le point fixe $\mathbf{w}$ de cette substitution n'admet aucun chevauchement "maximal". D'après la **Proposition 2** du paragraphe précédent, ce résultat est équivalent au fait qu'il soit impossible de trouver une suite de chevauchements vérifiant les hypothèses du théorème de Ferenczi-Mauduit, inefficace dans ce cas.

Rappelons que la transcendance de $x = 0, \mathbf{w}$ peut être montrée grâce au théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca (voir le corollaire du **Théorème 3.0.1**).

Observons les premiers termes de la suite $\mathbf{w}$ point fixe de σ.

$$u = 0101 - 101011 - 101011010111 - 10101101011101011010111 - 10101101011101011010\ldots$$

La suite $\mathbf{w}$ ne contient pas de blocs de 0 de longueur strictement plus grande que 1.

Étudions les longueurs successives des blocs de 1 séparés par les 0. Le premier bloc est de longueur 1, le deuxième de longueur 2, le troisième de longueur 1 etc.

Nous définissons la suite $(v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui pour un entier n mesure la longueur $v(n)$ du $n^{\text{ème}}$ bloc de 1 de la suite $\mathbf{w}$. Les premiers termes de la suite $\mathbf{v}$ sont :

$$v(1) = 1,\ v(2) = 2,\ v(3) = 1,\ v(4) = 3,\ v(5) = 1,\ v(6) = 2,\ v(7) = 1,\ v(8) = 4\ldots$$

Soit $(\phi_2(n))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $\phi_2(n)$ = la valuation 2-adique de n (*i.e.* la plus grande puissance de 2 qui divise n). Les premiers termes de ϕ_2 sont :

$$\phi_2(1) = 0, \phi_2(2) = 1, \phi_2(3) = 0, \phi_2(4) = 2, \phi_2(5) = 0, \phi_2(6) = 1, \phi_2(7) = 0, \phi_2(8) = 3\ldots$$

La suite $(\phi_2(n))_{n\in\mathbb{N}}$ possède les propriétés suivantes :

Lemme 3. *Soit $m < n$ deux entiers. Il existe un entier j_0 dans $[m, n]$ tel que*

$$\forall j \in [m, n], j \neq j_0\ \phi_2(j) < \phi_2(j_0).$$

Démonstration Soit j_0 tel que $\phi_2(j_0) = \max\{\phi_2(j); j \in [m, n]\}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $j_1 \in [m, n]$ tel que $\phi_2(j_1) = \phi_2(j_0)$. Alors, $j_0 = 2^s(2r_0 + 1)$ et $j_1 = 2^s(2r_1 + 1)$ avec par exemple $r_0 < r_1$. Il suffit alors de remarquer que $2^{s+1}(r_0 + 1) \in [m, n]$ □

Remarque : la valeur $\phi(j_0)$ apparaît donc une seule fois dans l'intervalle $[m, n]$.

Lemme 4. *La suite $(\phi_2(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne contient aucun carré non vide : il n'existe pas d'entiers $i \geq 1$ et $j \geq 1$ tels que*

$$\forall k \in [i, i + j - 1], v(k) = v(k + j).$$

(en se permettant un abus de langage, la suite ϕ_2 ne contient pas de facteur WW pour $W \neq \epsilon$).

Démonstration Si par l'absurde la suite contenait un carré $\phi_2(m)\phi_2(m+1)\ldots\phi_2(n)\phi_2(m)\phi_2(m+1)\ldots\phi_2(n)$, alors tout élément du carré apparaîtrait au moins deux fois. Cela contredirait l'existence d'après le **Lemme 3** d'un indice j_0 entre m et n tel que $\phi(j_0)$ n'apparaît qu'une seule fois. D'où le résultat □

Lemme 5. *Les suites* $(v(n))_{\mathbb{N}}$ *et* $(\phi_2(n))_{\mathbb{N}}$ *sont liées par la relation :*

$$v(n) = \phi_2(n) + 1.$$

En admettant pour l'instant le fait que $\phi_2(n) + 1 = v(n)$, nous avons donc la proposition suivante.

Proposition 3. *La suite* $\mathbf{w} = \sigma^\infty(0)$ *ne possède aucun chevauchement* σ*-maximal* $U_0V_0V_0V_0'$ *(tel que* V_0' *possède un* 0*).*

Démonstration Supposons le chevauchement $U_0V_0V_0V_0'$ σ-maximal. Le mot V_0' est donc σ-maximal. La lettre 0 appartient donc au mot V_0' puisque 0 est la seule lettre σ-maximale (pour la substitution σ, on rappelle que$k < n_0$).

Écrivons $V_0' = A0B$ où A et B sont deux mots finis (éventuellement vides). Comme V_0' est un préfixe de $V_0 = A0BW$, le chevauchement considéré s'écrit finalement :

$$U_0 \;\; A\ 0\ B\ W \;\; A\ 0\ B\ W \;\; A\ 0\ B.$$

Posons $\tilde{V} = 0\ B\ W\ A\ \ 0\ B\ W\ A\ \ 0$. Regardons la longueur des blocs de 1 dans $\tilde{V}$. Il correspond à $\tilde{V}$ un ensemble fini $\tilde{v_1}, \tilde{v_2}, .., \tilde{v_k}$ apparaissant quelque part dans la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\tilde{V} = 0\ BWA\ 0\ BWA\ 0$, le mot $\tilde{v_1}\tilde{v_2}..\tilde{v_k}$ est un carré.

Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\phi_2(n))_{n\in\mathbb{N}}$ devraient donc contenir un carré.
Cela contredit le **Lemme 4** ci-dessus et achève la démonstration de la proposition □

Il suffit donc de montrer le résultat annoncé dans le **Lemme** 5 :
Démonstration (Lemme 5) Soit n un entier strictement positif. Comme les blocs de 0 sont tous de longueur 1 dans $\mathbf{w}$, le $n^{\text{ième}}$ bloc de 1 est compris entre le $n^{\text{ième}}$ et le $(n+1)^{\text{ième}}$ 0 de la suite $\mathbf{w}$.

Faisons alors la constatation suivante : $\sigma(0)$ contient deux 0, $\sigma^2(0)$ contient quatre 0, ..., et $\sigma^n(0)$ contient 2^n 0. Ceci vient du fait qu'à chaque itération, chaque 0 est remplacé par un mot qui contient deux 0 tandis que 1 est remplacé par un mot qui n'en contient pas.

Donc, le $n^{\text{ième}}$ 0 apparaîtra à l'itération $\lfloor \log_2(n) \rfloor$.

Représentons maintenant la suite des itérations $\sigma^n(01)$ sous une forme bien particulière rappellant celle du triadique de Cantor :

0								1	$= 01$
0				10				11	$= \sigma(01)$
0		10		110		10		111	$= \sigma^2(01)$
0	10	110	10	1110	10	110	10	1111	$= \sigma^3(01)$
0	10110	101110	10110	1011110	10110	101110	10110	1011111	$= \sigma^4(01)$

Sur la $n^{\text{ème}}$ ligne est représenté $\sigma^{n-1}(01)$ et le passage d'une ligne à la ligne suivante s'effectue en "substituant" 0101 à 0 et 1 à 1...

Le choix de représenter $\sigma^n(01)$ plutôt que $\sigma^n(0)$ permet de voir les "véritables" blocs de 1 à droite. En effet, le chiffre suivant le dernier 1 de chaque ligne d'itération est le premier chiffre de $\sigma(0)$, c'est-à-dire un 0.

Comme $\sigma^n(01) = \sigma^{n-1}(01)\sigma^{n-1}(01)\sigma(1)$ et comme $\sigma(0)$ se termine par un 1, si $v(1)$, $v(2)$, $\ldots$, $v(2^n)$ sont les premiers termes de la suite v_n, alors

$$v(2^n + j) = v(j) \text{ pour } 1 \leq j \leq 2^n - 1$$

et

$$v(2^{n+1}) = v(2^n) + 1.$$

Il est facile de vérifier qu'il en est de même de la suite ϕ_2.

Enfin, en remarquant que $v(1) = \phi_2(1) + 1$, on en déduit que $v(n) = \phi_2(n) + 1$ pour tout n entier positif. □

Cela montre que la suite de chevauchements en question ne peut pas vérifier les hypothèses du théorème de Ferenczi-Mauduit et donc que ce dernier n'est pas utilisable pour montrer la transcendance de x.

Remarque Le même type de raisonnement s'applique à la substitution :

$$\begin{array}{ll} \sigma' & 0 \to 001 \\ & 1 \to 1 \end{array}$$

dont le point fixe est :

$$\mathbf{w}' = 0010011001001110010011001001111001001100100111001001100100...$$

Nous trouvons sensiblement le même point fixe (en fait les blocs 0 sont remplacés par les blocs 00).

2.4.2 Sur la possibilité de tester les substitutions

Étant donnée une substitution σ, le problème est donc maintenant de déterminer l'existence ou non d'un chevauchement maximal à l'intérieur du point fixe $\mathbf{w}$ de σ.

Une première idée est de regarder si le nombre d'itérations nécessaires pour voir apparaître un chevauchement maximal est uniformément borné par une constante C : il suffirait alors de "tester", les C premières itérations pour conclure ou non à l'existence d'un chevauchement maximal.

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'une telle constante n'existe pas puisqu'il est possible de construire des substitutions σ_m dont un point fixe $\mathbf{w}_m$ possède un chevauchement maximal qui n'apparaît qu'à la $m^{\text{ième}}$ itération.

Commençons par regarder le cas de la substitution :

$$\begin{array}{ll} \sigma : & 0 \to 01^{j_1}01^{j_2}01^{j_3} \\ & 1 \to 1 \end{array}$$

dont le point fixe est $\sigma^\infty(0) = 01^{j_1}01^{j_2}01^{j_3}01^{j_1}01^{j_2}01^{j_3+k.j_1}\ldots$

Alors, les premières valeurs de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des longueurs des blocs de 1 du point fixe de σ sont :

$$j_1,\ j_2,\ j_3 + k.j_1,\ j_1,\ j_2,\ j_3 + k.j_2,\ j_1,\ j_2,\ j_3[1+k] + j_1.k^2 \ldots,\ j_3[1+k] + j_1.k^2, \ldots$$

$$j_3[1+k+k^2]+j_1.k^3,\ldots,j_3[1+k+k^2]+j_2.k^3,\ldots$$
$$j_3[1+k+k^2+k^3]+j_1.k^4,\ldots$$

En posant $a_s^0=j_s$ et $a_r^s=j_3[1+k+\ldots+k^{s-1}]+j_r.k^s$, ces termes s'écrivent de manière "plus lisible" sous la forme :

$$a_1^0,a_2^0,a_1^1,a_1^0,a_2^0,a_2^1,a_1^0,a_2^0,a_1^2,a_1^0,a_2^0,a_1^1,a_1^0,a_2^0,a_2^1,a_1^0,a_2^0,a_2^2,\ldots$$

Posons alors $j_1=j_3=k=1$ et $j_2=m$, nous obtenons $a_1^0=1$, $a_2^0=m$, $a_1^s=s+1$ et $a_2^s=s+m$ et donc la suite :

Pour $j_2=2$, nous obtenons :

$$1,\mathbf{2,2},1,2,..$$

Dans ce cas, la suite associée ne comporte pas de chevauchement maximal avant la $2^{\text{ième}}$ itération.

En effet, rappelons que les chevauchements maximaux du type $0\ W\ 0\ W\ 0$ correspondent exactement aux carrés de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour $j_2=3$, nous obtenons :

$$1,3,2,1,3,4,1,\mathbf{3,3},1,3,2,..$$

Dans ce cas, la suite associée ne comporte pas de chevauchement maximal avant la $3^{\text{ième}}$ itération.

Pour $j_2=4$, nous obtenons :

$$1,4,2,1,4,5,1,4,3,1,4,2,1,4,5,1,4,6,1,4,2,1,4,5,1,\mathbf{4,4},1,4,2,..$$

Dans ce cas, la suite associée ne comporte pas de chevauchement maximal avant la $4^{\text{ième}}$ itération.

Pour $j_2=5$, nous obtenons :

$$1,5,2,1,5,6,1,5,3,1,5,2,1,5,6,1,5,7,1,5,2,1,5,6,1,5,4,..$$

$$1,5,2,1,5,6,1,5,3,1,5,2,1,5,6,1,5,7,1,5,2,1,5,6,1,5,8,..$$

$$1,5,2,1,5,6,1,5,3,1,5,2,1,5,6,1,5,7,1,5,2,1,5,6,1,\mathbf{5,5},1,5,2,..$$

Dans ce cas, la suite associée ne comporte pas de chevauchement maximal avant la $5^{\text{ième}}$ itération.

Plus généralement, en posant $j_2=m$, σ_m :

$$\sigma\quad\begin{array}{l}0\to 0101^m01\\ 1\to 1\end{array}$$

nous obtenons une suite qui ne comportent aucun chevauchement maximal avant la $m^{\text{ième}}$ itération.

Démonstration La suite $(v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ prend les valeurs suivantes

$$1,m,1+1,1,m,1+m,1,m,2+1,1,m,1+1,1,m,1+m,1,m,2+m,1,m\ldots$$

Pour comprendre comment est obtenue cette suite, considérons $W = 0101^m$: la partie de $(v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ correspondante au mot $W = 0101^m$ est $1, m$. Lors d'une itération, $\sigma(0) = 0101^m01$ et $\sigma(1) = 1$. Dans ce cas, la partie de $(v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ correspondante au mot $\sigma(W) = 0101^m0110101^m011^m$ est $1, m, 2, 1, m, m + 1$.

À chaque nouvelle itération du mot W, chaque bloc 01^k est transformé en un bloc 0101^m01^{k+1}. Du côté de la suite $(v(n))_{n\in\mathbb{N}}$, un mot $k_1k_2 \dots k_N$ sera donc transformé en un mot $1, m, k_1 + 1\ 1, m, k_2 + 1 \dots 1, m, k_N + 1$.

Ainsi, dans la suite $(v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ chaque élément k fait apparaître les éléments $1, m, k + 1$. Le début de la suite $(v(n))_{n\in\mathcal{N}}$ correspondant au mot $\sigma(01) = 0101^m01^2$ étant égal à $1, m, 2$, celui correspondant au mot $\sigma^2(01)$ sera donc $1, m, 2,\ 1, m, m+1,\ 1, m, 3$, celui correspondant au mot $\sigma^3(01)$ sera $1, m, 2,\ 1, m, m + 1,\ 1, m, 3,\ 1, m, 2,\ 1, m, m + 1,\ 1, m, m + 2,\ 1, m, 2,\ 1, m, m + 1,\ 1, m, 4 \dots$ comme l'illustre le tableau suivant :

																	1
								m									2
		1			m			$m+1$			1			m			3
1	m	2	1	m	$m+1$	1	m	$m+2$	1	m	2	1	m	$m+1$	1	m	4

Lorsque nous lisons les termes de ce tableau de la première ligne à la dernière ligne de gauche à droite, nous retrouvons les premiers termes de la suite $(v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ $1, m, 2, 1, m, m+1, 1, m, 3 \dots$. Les deux premières lignes correspondent aux premiers termes de $(v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ du mot $\sigma(01)$, les trois premières lignes aux termes de $\sigma^2(01) \dots$ et les $N + 1$ premières lignes aux termes de $\sigma^N(01)$.

Montrons maintenant que la suite $(v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne contient pas de carré avant la $m^{\text{ème}}$ ligne. Les valeurs $v(3^n)$ jouent un rôle particulier : $v(3^0) = 1$ et $v(3^{n+1}) = v(3^n)+1$. En effet, $v(3^n)$ est la longueur de la dernière puissance de 1 apparaissant dans $\sigma^n(01)$, puisqu'à chaque itération, un mot 01^k devient 0101^m01^{k+1}. Ainsi, d'une itération sur l'autre, le nombre de mots $1^p, p \geq 1$ est multiplié par 3. De plus, si $i < 3^n$, alors $v(i) < v(3^n)$ ou bien $v(i) \geq m$. En effet, la propriété est vraie pour $n = 1$ et le passage de n à $n + 1$ se comprend avec le tableau ci-dessus.

Ainsi, lorsque $n < m$, si V^2 est un carré de $\sigma^n(01)$, V^2 ne peut contenir aucun $v(3^k)$ car le dernier d'entre eux est à la fois inférieur à $n < m$ et strictement supérieur à tous les autres termes de V^2 inférieurs à m. Il ne peut donc pas apparaître 2 fois dans $\sigma^n(01)$.

Si V^2 est un carré de $\sigma^n(01)$, il doit donc apparaître strictement entre deux termes $v(3^k - 1)$ et $v(3^k)$ pour $k \leq n$. Or le mot m compris entre $v(3^0)$ et $v(3^1)$ ne contient pas de carré. De plus, si $a_1a_2 \dots a_k$ ne contient pas de carré pour $a_i > 0$ et $a_i \neq m - 1$, il en est de même de $1, ma_1 + 1, 1, m, a_2 + 1, \dots 1, m, a_k + 1$.

Finalement le mot $\sigma^{m-1}(01)$ ne contient pas de carré.

Au contraire, le mot $\sigma^m(01)$ se termine (voir tableau) par $\dots 01^m01^m$ (la lettre suivante étant un 0). Donc $v(3^m - 1) = v(3^m) = m$. Le mot $v(3^m - 1) = v(3^m)$ est le premier carré apparaissant dans la suite $(v(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Ce carré correspond au chevauchement 01^m01^m0 apparaissant dans $\sigma^m(01)$. □

Chapitre 3

Autour du théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca

En 2004, B. Adamczewski, Y. Bugeaud et F. Luca ont repris l'esprit du théorème de Ferenczi-Mauduit en exploitant le théorème du sous-espace de W. Schmidt (plus précisément sa version p-adique de Schlickewei) sous une forme combinatoire [ABL04] et [AB06]. Comme le théorème de Ridout est un cas particulier du théorème de Schmidt, celui de Ferenczi-Mauduit est contenu dans le résultat d'Adamczewski, Bugeaud et Luca : la condition d'existence d'un critère de puissance $\alpha = 2 + \epsilon$ est remplacée par un critère de puissance $\alpha = 1 + \epsilon$.

Si le théorème de Ferenczi-Mauduit avait permis de montrer la transcendance de nombres sturmiens, primitifs ou de substitution de longueur constante, parfois en base entière et parfois en base non entière dans [All00] [ADQZ01] [AZ98] [RZ00] [AC03] et [Ada04], cette énorme avancée permet entre autres de prouver la transcendance de tous les irrationnels substitutifs binaires et tous les réels automatiques en base entière.

Théorème 3.0.1. *Soit* $\mathbf{w} = (w_n)$ *une suite à valeurs dans* $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ *telle qu'il existe un réel* $\alpha > 1$ *et deux suites de mots finis* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfaisant aux conditions :*

- *pour tout* $n \geq 0$*, le mot* $U_n V_n^\alpha$ *est un préfixe de la suite* $\mathbf{w}$
- *la suite* $(\frac{|U_n|}{|V_n|})_{\mathbb{N}}$ *est bornée*
- *la suite* $(|V_n|)_{\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

Alors le réel $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{w_k}{b^k}$ *est rationnel ou transcendant.*

Corollaire En particulier, lorsque la suite $\mathbf{w}$ non ultimement périodique est le point fixe $\sigma^\infty(a)$ d'une substitution σ binaire quelconque, le réel $x = 0, \mathbf{w}$ est transcendant.

Démonstration En effet, si $\mathbf{w}$ n'est pas ultimement périodique, la lettre a qui est une lettre σ-maximale apparaît autre part qu'en première place. Il existe donc un bégaiement aWa qui est un préfixe de la suite $\mathbf{w}$. La suite de bégaiements $U_n V_n V_n'$, avec $U_n = \epsilon$, $V_n = \sigma^n aW$ et $V_n' = \sigma^n a$ vérifie donc les hypothèses du **théorème** 3.0.1 (car a est une lettre σ-maximale). Le réel x est donc transcendant. □

D'après ce qui a été rappelé concernant les liens entre la complexité d'une suite et les critères de puissance α dans le premier chapitre (voir **Lemme 1**) et dans [ABL04] [AB06], ce théorème assure donc qu'un irrationnel algébrique doit avoir une complexité $p_{\mathbf{w}}(n)$ vérifiant :

$$\lim \frac{p_{\mathbf{w}}(n)}{n} = +\infty.$$

Comme un réel x automatique possède une complexité en $O(n)$, il est rationnel ou transcendant.

Lorsque l'écriture en base b de x est point fixe d'une substitution, nous rappelons que x possède une complexité en $O(n)$, $O(n \log\log n)$, $O(n \log(n))$ ou bien en $O(n^2)$.

La rigidité de la structure substitutive permet en fait de conclure de la transcendance de x dans les cas d'une complexité en $O(n \log(n))$ et dans certains cas de complexité en $O(n^2)$. En fait, nous exhibons dans ce chapitre une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir appliquer le **Théorème 3.0.1** à une suite substitutive. Cette condition s'exprime en terme d'ordre de croissance de la suite $|\sigma^n(0)|$ et nous donne une nouvelle condition suffisante sur la substitution pour montrer la transcendance du réel $x = 0, \mathbf{w}$ où $\mathbf{w} = \sigma^\infty(0)$.

Théorème *Soit* σ *une substitution et* $a \in \mathcal{A}$ *tels que* $\sigma(a) = aW$*. Si la suite* $(|\sigma^n(a)|)_{n\in\mathbb{N}}$ *a un ordre de croissance exponentiel vers l'infini, i.e.* $\exists A > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |\sigma^n(a)| \geq A^n$*, alors le réel* $x = 0, \mathbf{w}$ *pour* $\mathbf{w} = \sigma^\infty(a)$ *est rationnel ou transcendant.*

Corollaire *Soit* $\mathbf{w} = \sigma^\infty(0)$ *une suite substitutive. Si* $\limsup \dfrac{p_{\mathbf{w}}(n)}{n\log(n)} < \infty$, *alors le nombre réel* $x = 0, \mathbf{w}$ *est rationnel ou transcendant.*

Dans la première partie de ce chapitre (**paragraphe 3.1.1**), nous généralisons l'étude de la croissance des mots faite dans le chapitre 2 dans le cas binaire (**paragraphe 2.2**) au cas d'une substitution quelconque. Nous étudions plus en détails le cas des substitutions à croissance polynomiale et nous proposons un test permettant de déterminer l'ordre de croissance de la substitution (**paragraphe 3.1.2**). Nous montrons ensuite le théorème cité plus haut (**paragraphe 3.1.4**).

Dans la seconde partie de ce chapitre (**paragraphe 3.2**), nous établissons une propriété combinatoire empêchant l'existence d'un critère $\alpha > 1$ que nous utiliserons au chapitre 4 avant de conclure en comparant les résultats obtenus avec ceux de J.-J. Pansiot [Pan84].

3.1 Croissance des substitutions - Transcendance

3.1.1 Étude de la croissance d'une substitution

Dans toute la suite, σ est un morphisme d'itération non effaçant sur un alphabet fini $\mathcal{A}$ que nous supposons égal à l'ensemble $\{0, 1 \ldots, b-1\}$ pour un entier $b \geq 2$.

Nous supposons que la suite des itérés $(\sigma^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'ensemble des suites infinies à droite vers une suite $\mathbf{w} = \sigma^\infty(0)$ point fixe de la substitution σ. L'étude suivante s'inspire largement des résultats de J.-J. Pansiot [Pan84] qui permettent de classer les substitutions selon leur complexité.

Nous divisons d'abord l'ensemble des substitutions en deux sous ensembles : d'une part les substitutions dont la taille des itérés successifs de 0 est donnée par une fonction exponentielle (substitutions "à croissance exponentielle") et d'autre part les substitutions dont la taille des itérés de 0 est donnée par une fonction polynomiale (substitutions "à croissance polynomiale").

Lemme 6. *Étant donné une substitution* σ *sur un alphabet fini* $\mathcal{A} = \{0, 1, ..., b-1\}$, *il existe pour chaque lettre* i *des constantes* $k_1 \geq 0$ *et* $k_2 \geq 1$ *telles que,*

$$\exists A, B > 0, \forall n \geq 0, An^{k_1}k_2^n \leq |\sigma^n(i)| \leq Bn^{k_1}k_2^n$$

$$\textit{ce que nous notons} \quad |\sigma^n(i)| \asymp n^{k_1}k_2^n.$$

De plus, pour tout entier m, *la croissance du mot* $\sigma^m(i)$ *est comparable à et du même ordre de grandeur que la croissance de la lettre* i.

Démonstration Le premier point est montré dans [Pan84] et le deuxième point vient du fait que pour toute lettre i, pour tout entier $m \geq 1$ fixé,

$$|\sigma^n(\sigma^m(i))| = |\sigma^{n+m}(i)| \asymp (n+m)^{k_1}k_2^{n+m} \asymp n^{k_1}k_2^n \ \square$$

Définition 3.1.1. *Une lettre à croissance maximale parmi les lettres de* $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ *est une lettre* i *de* $\mathcal{A}'$ *telle que pour toute autre lettre* j *de* $\mathcal{A}'$, *il existe une constante positive* M_{ij} *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{|\sigma^n(j)|}{|\sigma^n(i)|} \leq M_{ij}.$$

Lemme 7. *Si W est un mot de $\mathcal{A}^* \setminus \{\epsilon\}$ et i_0 est une lettre à croissance maximale parmi les lettres de W, les croissances des suites $(|\sigma^n(W)|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|\sigma^n(i_0)|)_{n\in\mathbb{N}}$ sont comparables et du même ordre :*

$$|\sigma^n(W)| \asymp |\sigma^n(i_0)|.$$

Démonstration Soit $W \in \mathcal{A}^* \setminus \{\epsilon\}$. Si i_0 est une lettre de W à croissance maximale parmi les lettres de W,

$$\begin{aligned}
|\sigma^n(W)| &= \sum_{i\in W} |W|_i |\sigma^n(i)| \\
&= |\sigma^n(i_0)| \sum_{i\in W} \frac{|W|_i |\sigma^n(i)|}{|\sigma^n(i_0)|} \\
&\leq |\sigma^n(i_0)|. \sum_{i\in W} |W|_i M_{i_0,i} \text{ car chaque } \frac{|\sigma^n(i)|}{|\sigma^n i_0|} \leq M_{i_0,i} \\
&\leq |\sigma^n(i_0)|.|W|. \max(M_{i_0,i}) \\
&\leq M|\sigma^n(i_0)| \text{ pour un certain } M \geq 0
\end{aligned}$$

D'autre part, il est évident que $|\sigma^n(i_0)| \leq |\sigma^n(W)|$. Ainsi :

$$|\sigma^n(i_0)| \leq |\sigma^n(W)| \leq M|\sigma^n(i_0)| \ \square$$

Lemme 8. *Supposons que $\sigma : i \to W$ pour un mot W de $\mathcal{A}^* \setminus \{\epsilon\}$. Supposons que j soit une lettre à croissance maximale parmi les lettres de W.*

Alors i et j sont des lettres à croissances comparables et de même ordre :

$$|\sigma^n(i)| \asymp |\sigma^n(j)| \asymp |\sigma^n(W)|.$$

Démonstration La propriété $|\sigma^n(j)| \asymp |\sigma^n(W)|$ vient du **Lemme 6** et $|\sigma^n(i)| \asymp |\sigma^n(\sigma(i))|$ vient du **Lemme 7** $\square$

Corollaire *Si $\sigma : 0 \to 0W$ pour un mot W, la lettre 0 est toujours une lettre à croissance maximale parmi les lettres de $\sigma^\infty(0)$.*

Lemme 9. *Soit x dans $\mathcal{A}$ et $VW \in \mathcal{A}^* \setminus \{\epsilon\}$ tels que*

$$\sigma(x) = VxW.$$

Si i est une lettre à croissance maximale parmi les lettres du mot VW, alors

$$|\sigma^n(x)| \asymp \sum_{k=0}^{n-1} |\sigma^k(i)|.$$

Remarque D'après le **Lemme 8**, lorsque $x \notin \sigma(x)$, si i est une lettre à croissance maximale parmi les lettres de $\sigma(x)$, alors

$$|\sigma^n(x)| \asymp |\sigma^n(i)|.$$

Démonstration Supposons que $\sigma : x \to VxW$. Alors

$$\sigma^n(x) = \sigma^{(n-1)}(V) \dots \sigma(V)VxW\sigma(W) \dots \sigma^{(n-1)}(W).$$

$$\begin{aligned}
|\sigma^n(x)| &= \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} |\sigma^j(V)| + 1 + \sum_{j=0}^{n-1} |\sigma^j(W)| \\
&\asymp \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} |\sigma^j(V)| + |\sigma^j(W)|
\end{aligned}$$

Supposons par exemple que la croissance de W est supérieure à celle de V :

$$\frac{|\sigma^j(V)|}{|\sigma^j(W)|} \leq M.$$

Alors

$$\sum_{j=0}^{n-1} |\sigma^j(V)| + |\sigma^j(W)| \asymp \sum_{j=0}^{n-1} |\sigma^j(W)|.$$

Si i est une lettre à croissance maximale parmi les lettres de W, la lettre i est aussi à croissance maximale parmi celles du mot VW.
Comme $0 \leq |\sigma^j(W)| \asymp |\sigma^j(i)|$, nous avons

$$\sum_{j=0}^{n-1} |\sigma^j(W)| \asymp \sum_{j=0}^{n-1} |\sigma^j(i)|.$$

Ainsi,

$$|\sigma^n(x)| \asymp \sum_{j=0}^{n-1} |\sigma^j(i)| \ \square$$

Exemple : Si $\sigma : 0 \to 0W$ pour $W \neq \epsilon$, supposons que la lettre i soit une lettre à croissance maximale parmi les lettres de W telle que $|\sigma^n(i)| = n^{k_1}k_2^n$, alors :

$$|\sigma^n(0)| \asymp n^{k_1}k_2^n \text{ si } k_2 > 1 \text{ (en particulier, } |\sigma^n(0)| \asymp |\sigma^n(i)|).$$

$$|\sigma^n(0)| \asymp n^{(k_1+1)} \text{ si } k_2 = 1 \text{ (en particulier, } |\sigma^n(0)| \gg |\sigma^n(i)|).$$

Définition 3.1.2. *Dans le premier cas, la croissance de la lettre 0 est dite d'ordre exponentiel, tandis que dans le second, elle est d'ordre polynomial.*

Dans le cas polynomial, 0 est la seule lettre à croissance maximale puisque pour toute autre lettre $i \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$, $|\sigma^n(0)| \gg |\sigma^n(i)|$.

Définition 3.1.3. *Dans tout ce qui suit, lorsque la croissance de 0 est exponentielle, nous dirons que la substitution σ est à croissance exponentielle. Sinon, nous dirons que la substitution σ est à croissance polynomiale.*

Lorsque la substitution est à croissance polynomiale, toutes les lettres de $\mathcal{A}$ ont un ordre de croissance polynomial. En revanche, nous faisons un abus de langage en disant que la substitution est à croissance exponentielle : par exemple, la substitution définie par $\sigma(0) = 001$ et $\sigma(1) = 1$ est à croissance exponentielle car $|\sigma^n(0)| \asymp 2^n$ mais la lettre 1 ne l'est pas (elle est à croissance bornée).

Les lemmes suivants découlent de ce qui vient d'être dit. Ils relient la croissance d'une substitution et l'apparition d'une lettre à croissance maximale à deux endroits différents.

Lemme 10. *Supposons que $\sigma : 0 \to 0W$ pour $W \in \mathcal{A}^* \setminus \{\epsilon\}$. Si 0 réapparaît ailleurs qu'en première place dans $\sigma^\infty(0)$, la suite $|\sigma^n(0)|$ est à croissance exponentielle.*

Démonstration Si la lettre 0 réapparaît autre part qu'en première place, quitte à remplacer σ par σ^k tel que $\sigma^k(0) = 0V0V'$, nous pouvons supposer que $\sigma(0) = 0V0V'$. En posant $W = V0V'$, la lettre 0 est une lettre à croissance maximale parmi celles de W d'après le **Corollaire** du

Lemme 8 . Si $|\sigma^n(0)|$ est à croissance polynomiale, disons $|\sigma^n(0)| \asymp n^M$, d'après le **Lemme 9**, nous devrions avoir :

$$|\sigma^n(0)| \asymp \sum_{k=0}^{n-1} |\sigma^k(0)| \asymp n^{M+1} \gg n^M \asymp |\sigma^n(0)|, \text{ ce qui est absurde.}$$

La lettre 0 est donc à croissance exponentielle. □

Lemme 11. *Plus généralement, si une lettre i à croissance maximale parmi les lettres de $\sigma^\infty(0)$ se répète, alors 0 est une lettre à croissance exponentielle.*

Démonstration Quitte à considérer une puissance de σ, nous pouvons supposer que $\sigma : 0 \to 0W$ où W contient toutes les lettres $i \neq 0$ de $\sigma^\infty(0)$. Si $|\sigma^n(0)|$ est à croissance polynomiale de l'ordre de n^k, la suite $|\sigma^n(W)|$ a une croissance d'ordre strictement inférieur, donc au plus de l'ordre de n^{k-1}.

Toutes les lettres de W ont une croissance inférieure à celle de W, elle même à croissance strictement inférieure à celle de 0. La lettre 0 est donc la seule à croissance maximale. Le lemme précédent assure que 0 ne se répète pas.
Donc si i est une lettre maximale qui se répète, la suite $|\sigma^n(0)|$ est à croissance exponentielle. □

Lemme 12. *Réciproquement, si 0 est à croissance exponentielle, il existe une lettre i à croissance du même ordre que celle de 0 qui se répète.*

Démonstration Le résultat est vérifié si la lettre 0 se répète.
Sinon, posons $\sigma(0) = 0W$. D'après ce qui précède, $|\sigma^n(W)| \asymp |\sigma^n(0)|$ et $|\sigma^n(W)| \asymp |\sigma^n(i_1)|$, pour i_1 à croissance maximale parmi les lettes de W. Donc $i_1 \neq 0$ est une lettre à croissance maximale pour σ.
Si i_1 se répète dans une puissance $\sigma^k(i_1)$, le résultat est vérifié. Sinon,

- lorsque $i_1 \notin \sigma(i_1) = W_1$, soit i_2 est une lettre maximale de W_1,

$$|\sigma^n(i_2)| \asymp |\sigma^n(W_1)| \asymp |\sigma^n(i_1)| \asymp |\sigma^n(0)|$$

  donc $i_2 \notin \{0, i_1\}$ est encore à croissance maximale pour σ.
- lorsque $i_1 \in \sigma(i_1)$, posons $\sigma(i_1) = W_1\ i_1 W_1'$ avec W_1 et W_1' deux mots éventuellement vides. D'après les lemmes précédents, la croissance exponentielle de

$$|\sigma^n(i_1)| = |\sigma^{n-1}(W_1) \dots \sigma^2(W_1)\sigma(W_1)W_1\ i_1\ W_1'\sigma(W_1')\sigma^2(W_1') \dots \sigma^{n-1}(W_1'))|$$

  est en fait du même ordre que $|\sigma^n(i_2)|$ pour une lettre i_2 maximale parmi les lettres de W_1W_1'. Donc $i_2 \notin \{0, i_1\}$ est encore à croissance maximale pour σ.

En itérant ce raisonnement jusqu'à épuisement des lettres de $\mathcal{A}$, nous finissons par trouver une lettre ayant la même croissance que 0 qui se répète. □

Nous venons donc de montrer l'équivalence suivante :

Proposition 4. *Les substitutions pour lesquelles il existe une lettre à croissance maximale qui se répète sont exactement les substitutions à croissance exponentielle.*

3.1.2 Substitutions à croissance polynomiale

Dans ce paragraphe, nous étudions les substitutions à croissance polynomiale.

Nous montrons que si une telle substitution σ vérifie $|\sigma^n(0)| \asymp n^k$ pour k entier, il existe au moins une lettre a_i pour chaque entier i, $0 \leq i \leq k$ telle que $|\sigma^n(a_i)| \asymp n^i$ (en particulier, il existe au moins une lettre bornée).

Nous montrons ensuite que si W est un mot dont toutes les puissances entières W^n sont des facteurs de $\sigma^\infty(0)$, W est un mot à croissance bornée.

Cela nous permet de montrer finalement que pour un tel mot W, il existe un entier K tel que si W^n est un facteur de $\sigma^N(0)$, le mot W^{n+1} est facteur de $\sigma^{N+K}(0)$. Ce résultat nous permettra de montrer le **Théorème 3.1.1**.

Dans toute la suite de cette partie, σ désigne une substitution à croissance polynomiale sur l'alphabet $\mathcal{A}$:

$$\sigma : 0 \to 0W \text{ pour } W \neq \epsilon \text{ et } |\sigma^n(0)| \asymp n^k.$$

Lemme 13. *Pour tout entier i, $0 \leq i \leq k$, il existe une lettre $a \in \mathcal{A}$ telle que $|\sigma^n(a)| \asymp n^i$.*

Démonstration Soit $a_1 \in \mathcal{A}$. Supposons d'abord que $|\sigma^n(a_1)| \asymp n^j$ pour $0 \leq j \leq k$.

- lorsque pour $m \geq 1$, $\sigma^m(a_1) = Va_1W$, il existe a_2 à croissance maximale parmi les lettres du mot VW. Nous avons vu au **Lemme 9** que $|\sigma^n(a_2)| \asymp n^{j-1}$.
- lorsque $a_1 \notin \sigma^m(a_1)$ pour tout $m \geq 1$, posons $W = \sigma(a_1)$. Il existe $a_2 \neq a_1$ à croissance maximale parmi les lettres de W. Alors d'après le **Lemme 8** $|\sigma^n(a_2)| \asymp |\sigma^n(a_1)|$.
  De plus $a_1 \notin \sigma^m(a_2)$ pour tout $m \geq 0$ (aucun itéré de a_2 ne contient la lettre a_1).

En itérant ce processus en partant de la lettre 0, nous obtenons toutes les lettres a_i de $\sigma^\infty(0)$ par ordre décroissant d'ordre de croissance : $n^k, n^{k-1}, n^{k-2} \dots n^{k_{min}}$.

Pour conclure, il suffit de montrer que $k_{min} = 0$.
Pour $k \geq 0$, posons $\mathcal{A}_k = \{x \in \mathcal{A} \text{ tel que } |\sigma^n(x)| \asymp n^k\}$.
Soit $k \geq 1$, et $a_1 \in \mathcal{A}_k$. Si a_1 ne réapparaît dans aucun $\sigma^n(a_1)$, il existe d'après ce qui précède, une lettre $a_2 \in \mathcal{A}_k \setminus \{a_1\}$. Comme $\mathcal{A}_k$ est fini, ce processus doit s'arrêter sur une lettre $a_i \in \mathcal{A}_k$ telle qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ pour lequel

$$\sigma^m(a_i) = Va_iW \text{ avec } VW \neq \epsilon.$$

Si l est une lettre à croissance maximale parmi celles du mot VW, d'après le **Lemme 9**, la lettre l est dans l'ensemble $\mathcal{A}_{k-1}$, qui n'est donc pas vide.
Cela montre que $k_{min} = 0$ et achève la preuve du lemme. □

Remarques

• En adaptant la preuve du lemme, nous obtenons un résultat un peu plus général.

Lemme 14. *Soit $a \in \mathcal{A}$ et σ une substitution quelconque. Supposons que $|\sigma^n(a)| \asymp n^k$. Soit*

$$\mathcal{A}_a = \{x \in \mathcal{A} \text{ tel que } \exists\ m \geq 0, x \in \sigma^m(a)\}.$$

Alors pour tout entier i, $0 \leq i \leq k$, il existe une lettre $b \in \mathcal{A}_a$ telle que $|\sigma^n(b)| \asymp n^i$.

En particulier, pour $a \in \mathcal{A}$, il existe $m \geq 0$ et une lettre à croissance bornée $b \in \mathcal{B}$ telle que $b \in \sigma^m(a)$.

D'autre part, si $k \geq 1$ et $a \in \mathcal{A}_k$,

$$\exists\ m_1, m_2 \geq 1, \exists c \in \mathcal{A}_k \cap \sigma^{m_1}(a), \exists VW \in \mathcal{A}^* \setminus \{\epsilon\}, \sigma^{m_2}(c) = VcW.$$

Alors si d est une lettre maximale parmi les lettres de VW, $d \in \mathcal{A}_{k-1}$.

• Nous pouvons déduire de ce lemme un "test" rapide permettant de savoir si une substitution est à croissance polynomiale ou exponentielle. Lorsque σ est une substitution définie sur $\mathcal{A}$ et lorsque $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, on définie la restriction σ' de σ à l'alphabet $\mathcal{A}'$ en "supprimant" les lettres de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$.
Par exemple, si $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$ et $\mathcal{A}' = \{0, 1\}$. Si $\sigma(0) = 012$, $\sigma(1) = 102$ et $\sigma(2) = 02$, on définit $\sigma' = \sigma_{|\mathcal{A}'}$ par $\sigma'(0) = 01$ et $\sigma'(1) = 10$ (la lettre 2 a été supprimée).

Dans le cas d'une substitution à croissance polynomiale, le deuxième point du **Lemme 14** assure l'existence d'une lettre à croissance bornée $b \in \mathcal{A}$. De plus, si σ est une substitution à croissance polynomiale, $\sigma' = \sigma_{|\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}}$ est encore à croissance polynomiale. Pour une telle substitution, nous pouvons donc "retirer" les lettres bornées. Par exemple, si

$$\sigma : \begin{array}{l} 0 \to 012 \\ 1 \to 12 \\ 2 \to 2 \end{array},$$

il n'existe qu'une lettre bornée : $\mathcal{B} = \{2\}$. Alors, posons :

$$\sigma_{|\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} = \sigma' : \begin{array}{l} 0 \to 01 \\ 1 \to 1 \end{array}$$

et ainsi de suite...

Puisque nous enlevons toutes les lettres bornées à chaque étape, en appliquant cette réduction à une substitution σ à croissance polynomiale d'ordre n^k, nous obtenons une substitution σ' à croissance d'ordre polynomial n^{k-1} (chaque lettre voit la puissance de son ordre de croissance décroître de 1). Finalement, en itérant cette opération k fois, nous finissons par tomber sur une substitution à croissance bornée.

Le test est donc le suivant : la procédure σ étant à croissance polynomiale, il doit exister au moins une lettre b (bornée) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |\sigma(b)| = 1$. En effet, si en revanche, pour toute lettre a de $\mathcal{A}$, il existe un entier N_a tel que $|\sigma^{N_a}(a)| \geq 2$, posons $N = \max\{N_a; a \in \mathcal{A}\}$. Alors, pour toute lettre $a \in \mathcal{A}$, $|\sigma^n(a)| \geq 2^n$. La substitution est donc à croissance exponentielle.

Pour une lettre b telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |\sigma(b)| = 1$, par le principe des tiroirs de Dirichlet, il existe deux entiers $1 \leq i < j \leq Card(\mathcal{A}) + 1$ et une lettre b', tels que $\sigma^i(b) = \sigma^j(b) = b'$. Réciproquement, si un tel triplet (i, j, b') existe, il est facile de voir que la lettre b est bien une lettre bornée (son orbite sous l'action de σ est ultimement périodique et les longueurs de ses itérés valent toutes 1).

Nous programmons donc une procédure calculant la longueur de $\sigma^{Card(\mathcal{A})+1}(a)$ pour chaque lettre $a \in \mathcal{A}$. lorsque cette longueur vaut 1, la lettre a est une lettre bornée. Nous calculons alors à chaque étape la substitution restreinte à $\mathcal{A} \setminus \{a\}$ avant de recommencer le processus sur cette substitution restreinte.

Si au bout de $Card(\mathcal{A})$ itérations de ce processus, il ne nous reste plus de lettre dans l'alphabet, la substitution était à croissance polynomiale. En revanche, s'il reste une lettre, la substitution était à croissance exponentielle (et il reste toutes les lettres à croissance exponentielle de l'alphabet).

Le programme suivant permet à Maple de tester l'ordre de croissance d'une substitution :

Test d'ordre de croissance sous Maple

```
> Reduce:= proc(M)
> local i,test,init,j,k,init2,a,n,L:
> L:=[]; n:=nops(M);
> for i from 1 to n do
> test:=1:
> init:=[i-1]:
> j:=1:
> while j <= 4 do
> k:=1: init2:=[]:
> while k <= nops(init) do
> a:=init[k] :
> init2:= [op(init2),op(M[a+1])]: k:=k+1:
> end do;
> init:=init2;
> if nops(init)=1 then j:=j+1 else j:=5 :test:=0 :end if:
> end do;
> if test<>0 then L:=[op(L),i]: end if:
> end do;
> end:
```

```
> Test:=proc(M)
> local L,N1,Mprim,i,Nprim,stoppe,stoppe1,j,k:
> L:=Reduce(M);
> N1:=nops(M):
> Mprim:=[]:
> for i from 1 to N1 do
> Nprim:=[]:
> stoppe:=0:
> for k from 1 to nops(L) do
> if i=L[k] then stoppe:=1 : end if:
> end do:
> if stoppe=0 then
> for j from 1 to nops(M[i]) do
> stoppe1:=0:
> for k from 1 to nops(L) do
> if M[i][j]=L[k]-1 then stoppe1:=1: end if:
> end do:
> if stoppe1=0 then
> Nprim:=[op(Nprim),M[i][j]]:
> end if:
> end do:
> Mprim:=[op(Mprim),Nprim]:
> else
> Mprim:=[op(Mprim),M[i]]:
> end if:
> end do:
> Mprim;
> end:
> CroissSub:=proc(N)
> local i,M,stoppe:
> M:=N:
> for i from 1 to nops(N)+1 do
> M:=Test(M): print(M):
> end do:
> stoppe:=0:
> for i from 1 to nops(M) do
> if nops(M[i])<>1 then stoppe:=1: end if :end do:
> if stoppe=0 then print("croissance polynomiale"):
> else print("croissance exponentielle"):end if:
> end:
```

Exemple : Testons le programme sur la substitution : σ : $0 \to 0123$, $1 \to 123$, $2 \to 23$, $3 \to 34$, $4 \to 4$

```
> CroissSub([[0,1,2,3],[1,2,3],[2,3],[3,4],[4]]);
```

$[[0,1,2,3],[1,2,3],[2,3],[3],[4]]$ (le programme a supprimé la lettre 4 : $\sigma(3) = 3$)
$[[0,1,2],[1,2],[2],[3],[4]]$ (le programme a supprimé la lettre 3 : $\sigma(2) = 2$)
$[[0,1],[1],[2],[3],[4]]$ (le programme a supprimé la lettre 2 : $\sigma(1) = 1$)
$[[0],[1],[2],[3],[4]]$ (le programme a supprimé la lettre 1 : $\sigma(0) = 0$)
$[[0],[1],[2],[3],[4]]$
$[[0],[1],[2],[3],[4]]$ (finalement, la substitution est triviale)
‘‘croissance polynomiale’’

Exemple : Testons le programme sur la substitution : σ : $0 \to 0123$
$1 \to 0123$
$2 \to 23$
$3 \to 34$
$4 \to 4$

```
> CroissSub([[0,1,2,3],[0,1,2,3],[2,3],[3,4],[4]]);
```

$[[0,1,2,3],[0,1,2,3],[2,3],[3],[4]]$ (le programme a supprimé la lettre 4 : $\sigma(3) = 3$)
$[[0,1,2],[0,1,2],[2],[3],[4]]$ (le programme a supprimé la lettre 3 : $\sigma(2) = 2$)
$[[0,1],[0,1],[2],[3],[4]]$ (le programme a supprimé la lettre 2 : $\sigma(1) = 01$)
$[[0,1],[0,1],[2],[3],[4]]$ finalement, le programme n'a plus rien à simplifier
$[[0,1],[0,1],[2],[3],[4]]$
$[[0,1],[0,1],[2],[3],[4]]$la substitution n'est pas triviale.
`‘‘croissance exponentielle’’`

3.1.3 Longueurs des plages à croissance bornée

Nous déduisons du **Lemme 14** les résultats suivants :

Proposition 5. *Soit σ une substitution telle que $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$.*
Alors $\sigma^\infty(0)$ contient des facteurs à croissance bornée arbitrairement longs,

$$Fact(\sigma^\infty(0)) \cap \mathcal{B}^* \text{ est infini .}$$

Démonstration Soit $a \in \mathcal{A}_1$. Il existe une lettre $c \in \mathcal{A}_1$ telle que $\sigma^k : c \to VcW$ en vertu du troisième point du **Lemme 14**. Alors VW est un mot non vide (car $c \in \mathcal{A}_1$) et à croissance bornée et

$$\sigma^{kn}(c) = \sigma^{n-1}(V)\dots\sigma(V)VcW\sigma(W)\dots\sigma^{n-1}(W) \text{ est à croissance linéaire.}$$

Pour conclure, il suffit de voir par exemple que si W n'est pas vide, le mot $W\sigma(W)\dots\sigma^{n-1}(W)$ est à croissance bornée et que

$$|W\sigma(W)\dots\sigma^{n-1}(W)| \geq n \ \square$$

Corollaire *Si σ est une substitution à croissance polynomiale non triviale, $\sigma^\infty(0)$ contient des facteurs à croissance bornée arbitrairement longs,*

$$Fact(\sigma^\infty(0)) \cap \mathcal{B}^* \text{ est infini .}$$

Démonstration Si σ est à croissance polynomiale, le **Lemme 13** assure que $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$. $\square$

Remarquons que si b est une lettre bornée, $(\sigma^n(b))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans un ensemble fini. Il existe donc $n_1 < n_2$ deux entiers tels que $\sigma^{n_1}(b) = \sigma^{n_2}(b)$. Donc la suite $(\sigma^n(b))_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement périodique et il existe $N_b \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall i \geq 1, \forall k \in [1\dots N_b]\sigma^{iN_b+n_1+k}(b) = \sigma^{n_1+k}(b).$$

Ainsi, quitte à considérer une puissance entière de σ, nous pouvons supposer que :

$$\forall b \in \mathcal{B}, \forall i \geq 1, \sigma^i(b) = \sigma(b).$$

et donc

$$\forall B \in \mathcal{B}^*, \forall i \geq 1, \sigma^i(B) = \sigma(B).$$

C'est ce que nous ferons dans tout ce qui suit.

Lemme 15. *Soit σ une substitution telle que $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$. Il existe un mot $W \neq \epsilon$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le mot W^n est un facteur de $\sigma^\infty(0)$.*

Démonstration Comme $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$, d'après la **Proposition 5**, il existe $c \in \mathcal{A}_1$ et $VW \neq \epsilon$ tel que le mot $\sigma^{n-1}(V)\dots\sigma(V)VcW\sigma(W)\dots\sigma^{n-1}(W)$ est un facteur de $\sigma^\infty(0)$. Comme $\sigma^k(V) = \sigma(V)$ et $\sigma^k(W) = \sigma(W)$ pour $k \geq 1$, le mot $\sigma(V)^{n-1}VcW\sigma(W)^{n-1}$ est un facteur de $\sigma^\infty(0)$. Finalement, si par exemple $W \neq \emptyset$, le mot W^n est un facteur de $\sigma^\infty(0)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. □

Corollaire *Si σ est une substitution à croissance polynomiale, il existe $W \neq \epsilon$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le mot W^n est un facteur de $\sigma^\infty(0)$.*

Nous supposons dorénavant que la substitution est à croissance polynomiale. Nous allons montrer que les seuls mots W apparaissant à toutes les puissances possibles sont des mots à croissance bornée.

Proposition 6. *Soit σ une substitution à croissance polynomiale. Alors la distance maximale entre deux lettres consécutives à croissance bornée est bornée.*

Démonstration D'après le **Lemme 14**,pour toute lettre $a \in \mathcal{A}$ il existe $K_a \geq 1$ tel que le mot $\sigma^{K_a}(a)$ contient une lettre bornée. Soit $K = \max\{K_a; a \in \mathcal{A}\}$. Alors, si a et b sont deux lettres quelconques, $\sigma^K(a)\sigma^K(b)$ contient au moins deux lettres de $\mathcal{B}$. La distance entre deux lettres consécutives de $\mathcal{B}$ ne peut donc être plus grande que

$$2M = 2\max_{x\in\mathcal{A}}(|\sigma^K(x)|) \ \square$$

Proposition 7. *Soit σ une substitution à croissance polynomiale. Il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que si W ne contient aucune lettre bornée et si W^m est un facteur de $\sigma^\infty(0)$, alors $m \leq K$.*

Démonstration Le mot W^m est un facteur sans lettre bornée. Il ne peut donc pas être plus long que la distance maximale entre deux lettres bornées consécutives. Ainsi, comme $|W| \geq 1$, $m \leq 2\max_{x\in\mathcal{A}}(|\sigma^K(x)|)$. □

Cette **Proposition 7** établit le fait qu'il ne peut pas apparaître de puissances arbitrairement grandes d'un mot ne contenant aucune lettre bornée. Il en est en fait de même pour n'importe quel mot contenant au moins une lettre croissante.

Proposition 8. *Soit σ une substitution à croissance polynomiale. Soit W un mot contenant une lettre a croissante. Il existe $K \geq 1$ tel que si W^m est un facteur de $\sigma^\infty(0)$, alors $m \leq K$.*

Démonstration En adaptant la démonstration de la **Proposition 5**, nous pourrions montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $a \in \mathcal{C} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, il existe un entier $K'_{a,n} \geq 1$ tel que

$$\sigma^{K'_{a,n}}(a) \text{ contient un mot à croissance bornée } B \text{ de longueur } |B| \geq n.$$

Soit $K'_n = \max\{K'_{a,n}; a \in \mathcal{A}\}$
Posons alors $n = 2|W|$. Si a et $b \in \mathcal{C}$, le mot $\sigma^{K'_n}(a)\sigma^{K'_n}(b)$ contient au moins deux facteurs à croissance bornée B_1 et B_2 de longueur $|B_1| \geq 2|W|$ et $|B_2| \geq 2|W|$. La distance maximale entre deux mots bornés de longueurs plus grandes que $2|W|$ est donc plus petite que $2M'$ où $M' = \max_{a\in\mathcal{A}}(|\sigma^{K'_n}(a)|)$.

Alors, si W^m est un facteur de $\sigma^\infty(0)$, il est nécessaire que $|W^m| \leq 2M'$ car W contient une lettre croissante. Ainsi, $m \leq 2M'$ □

Corollaire *Soit σ une substitution à croissance polynomiale. Si pour un mot W et une infinité d'entiers n, W^n est un facteur de $\sigma^\infty(0)$, le mot W a une croissance bornée.*

Croissance des plages bornées - Substitutions à croissance polynomiale

Dans la section suivante, nous appliquerons aux substitutions polynomiales les résultats contenus dans ce paragraphe. Pourtant, ces résultats sont vrais pour toute substitution. Afin de ne pas dire de trivialités, ces résultats ne sont cependant intéressants que dans le cas d'une substitution telle que $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$.

Nous nous intéressons à la formation de plages à croissance bornée B^n pour $B \in \mathcal{B}^*$ et n arbitrairement grand.

Considérons un mot $B \in \mathcal{B}^*$ éventuellement vide, facteur de $\sigma^\infty(0)$ apparaissant entre deux lettres croissantes c et d. Les mots $\sigma^n(cBd)$ sont alors des facteurs de $\sigma^\infty(0)$. En appliquant à cBd les puissances successives de σ, il se forme autour des itérés de B une plage de lettres bornées.
En effet, si $B_c(n)$ (resp. $B_d(n)$) représente le plus grand suffixe (resp. préfixe) à croissance bornée de $\sigma^n(c)$ (resp. $\sigma^n(d)$), le mot $B_c(n)\sigma^n(B)B_d(n)$ est un facteur de $\sigma^n(cBd)$.
De plus, comme $B_c(n)$ et $B_d(n)$ sont supposés maximaux, le facteur $B_c(n)\sigma^n(B)B_d(n)$ est encadré par deux lettres à croissance non bornée c_n et d_n. La suite des couples $(c_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans l'ensemble fini $\mathcal{C}^2$ avec $\mathcal{C} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$.

Lemme 16. *Pour tout couple (c, d), il existe un entier $N_{cd} \leq Card(\mathcal{C})^2 + 1$ tel que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, (c_{kN_{cd}}, d_{kN_{cd}}) = (c_{N_{cd}}, d_{N_{cd}}).$$

Démonstration En effet, il existe deux entiers distincts $i < j \leq Card(\mathcal{C})^2 + 1$ tel que $(c_i, d_i) = (c_j, d_j)$. Comme chaque c_n (resp. d_n) ne dépend que de c_{n-1} (resp. d_{n-1}), la suite (c_n, d_n) est donc périodique à partir de l'indice i. L'entier $j - i$ est une de ses périodes.
Enfin, comme $j - i \leq Card(\mathcal{C})^2 + 1 - i$, il existe un multiple N_{cd} de l'entier $j - i$ tel que

$$i \leq N_{cd} \leq Card(\mathcal{C})^2 + 1.$$

Pour cet entier comme pour tous ses multiples,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, (c_{kN_{cd}}, d_{kN_{cd}}) = (c_{Ncd}, d_{N_{cd}}). \ \square$$

Corollaire *Pour toute substitution σ, il existe un entier N tel que pour tout couple (c,d) de lettres croissantes et tout mot (éventuellement vide) $B \in \mathcal{B}^*$, la suite (c_n, d_n) des lettres croissantes encadrant les plages de lettres à croissance bornée autour des itérés de B vérifie la propriété :*

$$(c_{kN}, d_{kN}) = (c_N, d_N).$$

Démonstration Il suffit de poser

$$N = \text{ppcm}\{N_{cd} \mid (c,d) \in \mathcal{C}^2\}. \ \square$$

Dans tout ce qui suit, nous posons $N = \text{ppcm}\{N_{cd}\}_{(c,d)\in\mathcal{A}^2}$ et nous écrirons σ à la place de σ^N.

La proposition suivante montre que l'ordre de croissance de la longueur d'une telle plage (à croissance bornée encadrée par deux lettres croissante) est affine.

Proposition 9. *Pour toute substitution σ, la suite des longueurs des itérés par une puissance de σ d'une plage de lettres à croissance bornée encadrée par deux lettres croissantes est donnée par une fonction affine (éventuellement nulle).*

Démonstration Pour σ une substitution, nous écrirons σ pour désigner σ^N avec N défini comme dans le corollaire de la proposition précédente.

Supposons que cBd soit un facteur de $\sigma^\infty(0)$ pour $(c,d) \in \mathcal{C}^2$ et $B \in \mathcal{B}^*$. Nous venons de voir que :

$$\sigma(cBd) = \sigma(c)\ \sigma(B)\ \sigma(d) = (U_1 c_1 B')\ \sigma(B)\ (B'' d_1 V_1) = U_1 c_1\ B_1\ d_1 V_1,$$

$$\sigma^2(cBd) = U_2\ c_1\ B_c\ \sigma(B_1)\ B_d\ d_1\ U_2 = U_2\ c_1\ B_2\ d_2\ U_2 \text{ et}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma^n(cBd) = U_n c_1\ B_n\ d_1 V_n$$

pour des lettres c_1 et $d_1 \in \mathcal{C}$ et des mots $B_i \in \mathcal{B}^*$ contenant les images successives de B.

En rappelant que $\sigma^i(B) = \sigma(B)$ pour tout mot $B \in \mathcal{B}^*$, les mots B_c et B_d sont tels que les itérations successives du mot $c_1 B_1 d_1$ donnent naissance aux plages suivantes entre les deux lettres c_1 et d_1 :

$c_1\ B_1\ d_1$	est un facteur de	$\sigma(cBd)$
$c_1\ B_c\ \sigma(B_1)\ B_d\ d_1$	”	$\sigma^2(cBd)$
$c_1\ B_c\ \sigma(B_c)\ \sigma(B_1)\ \sigma(B_d)\ B_d\ d_1, \ldots$	”	$\sigma^3(cBd)$
$c_1\ B_c\ \sigma(B_c)^n\ \sigma(B_1)\ \sigma(B_d)^n\ B_d\ d_1 \ldots$	”	$\sigma^{n+2}(cBd)$

Pour chaque facteur cBd de $\sigma^\infty(0)$, les mots B_c et B_d ne dépendent que de c et d. Ils sont éventuellement vides. Le mot B_1 dépend de B et du couple (c,d). Ces mots sont tels que la longueur de la plage à croissance bornée contenant le $k^{ième}$ itéré de B par la substitution σ est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} |\sigma(B_1)| + (k-2)(|\sigma(B_c)| + |\sigma(B_d)|) + |B_c| + |B_d| &= |\sigma(B_1)B_c B_d| + (k-2)(|\sigma(B_c B_d)|) \\ &= k|\sigma(B_c B_d)| + (|B_c B_d| - 2|\sigma(B_c B_d)|) + |\sigma(B_1)| \\ &= kM_{c,d} + L_{c,d} + L_{c,d,B} \end{aligned}$$

avec $M_{cd} = \max\{|\sigma(B_c)|, |\sigma(B_d)|\}$ (dépendant de c et d), $L_{cd} = 2\max\{|B_c|, |B_d|\}$ (dépendant de c et d) et $L_{c,d,B} = |\sigma(B_1)|$ (dépendant de c, d et B).
Lorsque le mot B_cB_d est vide, cette suite de longueurs est constante. Sinon, elle est à croissance affine □

Corollaire 1 *Soit*

$$M = \max_{a\in\mathcal{A}}\{|B|, B \in Fact(\sigma(a)) \cap \mathcal{B}^*\}.$$

Pour $B \in \mathcal{B}^*$ et deux lettres c et d croissantes, la longueur de la plage bornée de $\sigma^k(cBd)$ contenant le $k^{ème}$ itéré de B par la substitution est inférieure à $2M^2(k+1) + |\sigma(B)|$.

Démonstration Pour tout mot B, le mot B_1 s'écrit $B'\sigma(B)B''$ avec B' et B'' des éléments de $\{Fact(\sigma(a)) \cap \mathcal{B}^*\}_{a\in\mathcal{A}}$, et le mot $\sigma(B_1)$ s'écrit $\sigma(B')\sigma(B)\sigma(B'')$, donc :

$$|B_1| \leq 2M + |\sigma(B)| \text{ et } |\sigma(B_1)| \leq 2M.M + |\sigma(B)| = 2M^2 + |\sigma(B)|.$$

D'après les calculs de la **Proposition 9**, et comme $|B_cB_d| - 2|\sigma(B_cB_d)| \leq 0$,

$$|\sigma^k(cBd)| = k|\sigma(B_cB_d)| + |\sigma(B_1)| + (|B_cB_d| - 2|\sigma(B_cB_d)|) \leq kM_{cd} + |\sigma(B_1)|.$$

Or B_c et B_d appartiennent à $\{Fact(\sigma(a)) \cap \mathcal{B}^*\}_{a\in\mathcal{A}}$, donc $M_{cd} = 2\max\{|\sigma(B_c)|, |\sigma(B_d)|\} \leq 2M^2$ et :

$$\begin{aligned} |\sigma^k(cBd)| &\leq 2kM^2 + |\sigma(B_1)| \\ &\leq 2kM^2 + 2M^2 + |\sigma(B)| \\ &\leq 2M^2(k+1) + |\sigma(B)|. \end{aligned}$$

Corollaire 2 *Soit $k \in \mathbb{N}$. Si B' est un facteur borné de $\sigma^\infty(0)$ tel que $|B'| > 2M^2(k+1) + M$, il existe un mot B tel que $|B| \leq M$ et deux lettres c et d tels que B' est un facteur de $\sigma^m(cBd)$ pour $m \geq (k+1)$.*
De surcroît, le mot B' ne peut pas apparaître avant la $(k+1)^{ème}$ itération.

Démonstration Soit $B' \in Fac(\sigma^\infty(0) \cap \mathcal{B}^*)$ tel que $|B'| \geq 2M^2 + M$. Alors pour tout $a \in \mathcal{A}$, B' n'est pas un facteur de $\sigma(a)$. Il existe B_1 tel que $|B_1| \leq |B'|$ et c_1, $d_1 \in \mathcal{C}$ tels que B est un facteur borné de $c_1B_1d_1$. De plus, B' est un facteur de la plage bornée qui s'étend autour de $\sigma(B_1)$. Cela implique entre autres que la distance séparant le début de la suite de B_1 est strictement inférieure à celle séparant le début de la suite de B : B_1 apparaît strictement avant B.

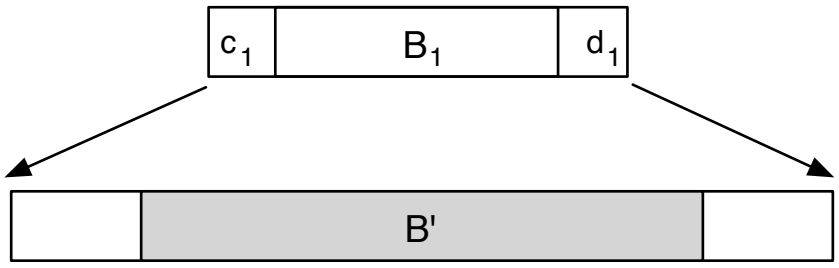


FIG. 3.1 –

Si $|B_1| \leq M$, nous avons trouvé cBd tel que $|B| \leq M$ et B' est un facteur de $\sigma(cBd)$.

En revanche, si $|B_1| > M$, nous faisons le même raisonnement pour le mot B_1. Nous construisons ainsi de proche en proche une suite de mots B_n tels que $|B_{n+1}| \leq |B_n|$ et B_{n+1} apparaît strictement avant B_n.

Cette processus doit s'arrêter après un maximum de N opérations si N désigne la distance séparant la première lettre de $\sigma^\infty(0)$ de la première lettre de B'. Il existe donc $B \in \mathcal{B}^*$, $c, d \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $|B| \leq M$ et B' est un facteur de $\sigma^n(cBd)$.

Le fait que le mot B' ne peut pas apparaître avant la $(k+1)^{ème}$ itération vient alors de l'inégalité de la proposition que nous venons de démontrer. □

Proposition 10. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Si B' est un facteur borné de $\sigma^\infty(0)$ tel que $|B'| > 2M^2(k+1)+M$, il existe un mot W tel que $|W| \leq M$ et W^k est un facteur de B'.*

Démonstration D'après le **Corollaire 2** précédent, B' est un facteur de $\sigma^n(cBd)$ pour $n \geq k+1$. Or d'après la **Proposition 9**, la plage bornée $\sigma^n(cBd)$ contenant B' est de la forme $c_1 B_c \sigma^{n-2}(B_c)\sigma(B)\sigma^{n-2}(B_d)B_d d_1$.

Comme $|B'| > 2M^2(k+1) + M > M^2 = \max\{\sigma(B); |B| \leq M\}$, le mot $B_c B_d \neq \epsilon$. Donc $B_c \neq \epsilon$ ou $B_d \neq \epsilon$. Par exemple, le mot B_c^{k-1} est un facteur de $\sigma^{k+1}(cBd)$.

D'autre part, $|B_c B_d| \leq 2M$. Donc le mot B' et le mot $\sigma^{n-2}(B_c)\sigma(B)\sigma^{n-2}(B_d)$ se chevauchent sur un facteur de longueur supérieure à $|B'| - 2M \geq 2M^2(k+1) + M - 2M = 2M^2(k+1) - M$. Le mot B' et l'un des deux mots $\sigma^{n-2}(B_c)$ ou $\sigma^{n-2}(B_d)$ se chevauchent donc sur une longueur supérieure à $2M^2(k+1) - M - |B| \geq 2M^2(k+1) - 2M$.

Comme $\max\{\sigma^{n-2}(B_c), \sigma^{n-2}(B_d)\} \leq M^2$, la puissance de l'un de ces deux mots apparaissant dans B' est supérieure à $\frac{2M^2(k+1)-2M}{2M^2} \geq (k+1) - 1/2 \geq k$. □

Lemme 17. *Soit σ une substitution. Si pour $W \in \mathcal{B}^*$ et c_1, c_2 des lettres croissantes, le mot $c_1 W c_2$ est un facteur de $\sigma^\infty(0)$, il existe un facteur cBd de $\sigma^\infty(0)$ pour un mot $B \in \{Fact(\sigma(a)) \cap \mathcal{B}^*\}_{a \in \mathcal{A}}$ (éventuellement vide) et des lettres $c, d \in \mathcal{C}$ tels que W est un facteur de l'extension de B dans le mot $\sigma^n(cBd)$ pour un entier n.*

Démonstration Lorsque $W \in \mathcal{B}^* \cap Fac(\sigma^\infty(0))$ est tel que $|W| \leq M$, le mot $B = W$ convient.

Lorsque $|W| > M = \max\{|B| \mid B \in Fac(\sigma(a)) \cup B*\}$, le mot W est forcément l'image de plus d'une lettre, donc fait partie de l'extension d'un mot B encadré par des lettres croissantes c et d. Donc $W \in Fac(\sigma(cBd))$. En itérant ce raisonnement, nous finissons par exhiber B, c, d et n tels que $|B| \leq M$ et W est un facteur de l'extension de B dans $\sigma^n(cBd)$. □

Proposition 11. *Soit σ une substitution. Soit $W \neq \epsilon$ un mot à croissance borné dont toutes les puissances entières sont des facteurs de $\sigma^\infty(0)$. Il existe un entier K_W tel que lorsque*

$$W^n \in Fact(\sigma^N(cBd))$$

pour un entier n assez grand et $N \in \mathbb{N}$, alors

$$W^{n+1} \in Fact(\sigma^{N+K_W}(cBd)).$$

Démonstration Supposons que W soit un mot borné tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, W^n est un facteur de $\sigma^\infty(0)$. Pour n assez grand, $|W^n| \geq 4M^2 + M$, d'après la **Proposition 10**, le mot W^n appartient à un facteur à croissance borné encadré par deux lettres c_n et d_n croissantes dont la taille augmente strictement d'une itération sur l'autre.

Si $|W^n| \geq 2M^2(k+1) + M$, d'après les **Propositions 9** et **10**, le mot W^n a un facteur de la forme B_c^k ou B_d^k. De plus, la puissance de B_c^k et B_d^k augmente strictement à chaque itération.

Au bout de K_W itérations, elles auront suffisamment augmenté pour que le mot W^{n+1} soit un facteur de $\sigma^{N+K_W}(0)$. □

Soit σ une substitution. D'après les **Propositions 9 10** et **11** , si un mot W est tel que W^n est un facteur de $\sigma^\infty(0)$ pour tout entier n, ce mot est en fait formé principalement de la puissance B^k pour un mot $B \in Fact(\sigma(a)) \cap \mathcal{B}^*\}_{a\in\mathcal{A}}$. Or, pour une substitution σ, il existe un nombre fini de mots primitifs à croissance bornée B_p dont toutes les puissances entières sont des facteurs de $\sigma^\infty(0)$: ce sont les mots $\sigma(B_c)$ et $\sigma(B_d)$ pour l'ensemble des lettres c et $d \in \mathcal{C}$.

Corollaire *Soit σ une substitution. Il existe un entier K ne dépendant que de σ tel que, pour tout mot primitif à croissance bornée W dont toutes les puissances entières sont des facteurs de $\sigma^\infty(0)$, lorsque*

$$W^n \in Fact(\sigma^N(cBd))$$

pour n assez grand et $N \in \mathbb{N}$, alors

$$W^{n+1} \in Fact(\sigma^{N+K}(cBd))$$

Démonstration Il suffit de prendre le maximum des K_{B_p} pour les mots B_p à croissance bornée, primitifs et dont toutes les puissances sont des facteurs du mot $\sigma^\infty(0)$. □

Nous avons montré, dans un corollaire de la **Proposition 5**, qu'il existait dans $\sigma^\infty(0)$ certains mots W qui apparaissaient à toutes les puissances entières possibles. Nous avons montré dans ce paragraphe que de tels mots sont forcément des mots à croissance bornée et que les plages W^r s'allongent strictement à chaque itération, et ce de manière affine.

Ce résultat va nous permettre dans le paragraphe suivant de montrer, en écrivant :

$$\sigma^n(0) = \sigma^{n-1}(0M) = \sigma^{n-1}(0)\sigma^{n-1}(M) = M_1M_2,$$

qu'il existe un facteur de M_2 qui n'est pas un facteur du mot M_1 (il se créé à chaque itération un nouveau facteur).

Nous montrerons dans la première partie du chapitre 4 que cette propriété se conserve lors de la multiplication et l'addition d'un rationnel au nombre $x = 0, \sigma^\infty(0)$.

Nous montrerons au paragraphe 3.2 que les points fixes d'une substitution à croissance polynomiale vérifient une autre propriété combinatoire qui nous servira dans la deuxième partie du chapitre 4.

3.1.4 Croissance et critère de puissance $\alpha = 1 + \epsilon$

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que le théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca est applicable à un irrationnel x dont le développement b-adique est donné par le point fixe de la substitution σ si et seulement si σ est une substitution à croissance exponentielle. Nous en déduisons le **Théorème 3.1.1** et son corollaire annoncé au début de ce chapitre, permettant de prouver la transcendance de nombre réel substitutifs dont la complexité est inférieure à $n\log(n)$.

Rappelons que pour pouvoir appliquer le théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca, il suffit de trouver une suite de bégaiements $U_nV_nV_n'$ telle que V_n' est un préfixe de V_n, $|V_n| \to \infty$, $|U_n|/|V_n|$ est bornée et $|V_n|/|V_n'|$ est bornée.

Soit σ une substitution à croissance polynomiale au moins quadratique. Nous avons montré dans le paragraphe précédent qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ ne dépendant que de σ tel que si W^n est un facteur de $\sigma^\infty(0)$ pour tout n, si W^k est un facteur de $\sigma^N(0)$ pour k assez grand, alors W^{k+1} est facteur de $\sigma^{N+K}(0)$.

Lemme 18. *Soit* $\mathbf{w}$ *une suite telle qu'il existe* $W_1, W_2 \dots W_n \dots$ *une suite de mots tels que :*
- $\mathbf{w} = W_1W_2...W_n....$
- *Pour tout* $i \in \mathbb{N}$*, il existe un facteur de* W_i *qui ne soit pas un facteur de* $W_1W_2...W_{i-1}$ *:*

$$Fact(W_i) \setminus Fact(W_1W_2...W_{i-1}) \neq \emptyset.$$

- *Les longueurs* $|W_n| \asymp n^k$ *pour un* $k \geq 1$.

Alors $\mathbf{w}$ *ne possède aucun bégaiement permettant d'appliquer le théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca au réel* $x = 0, \mathbf{w}$.

Démonstration En effet, si UVV' est un bégaiement quelconque avec V' (préfixe de V) un mot commençant par une lettre de W_i, alors V est un facteur de $W_1W_2...W_i$. Comme V' est un préfixe (donc facteur) de V, V' ne peut pas être plus long que $|W_iW_{i+1}|$: en effet, V' ne peut avoir comme facteur aucun élément de $Fact(W_{i+1}) \setminus Fact(W_1W_2...W_i)$.
Donc pour toute suite de bégaiements telles que $|V'_n| \to \infty$, lorsque

$$|W_1W_2...W_i| \geq |U_nV_n| \geq |W_1W_2...W_{i-1}| \asymp i^{k+1}, \text{ nous devons avoir}$$

$$|V'_n| \leq |W_iW_{i+1}| \asymp i^k.$$

Ainsi, dans tous les cas, lorsque $n \to 0$, $|V_n| > |V'_n| \to \infty$ donc $i \to \infty$. Alors $\dfrac{|V'_n|}{|U_nV_n|} \to 0$.
Une telle suite de bégaiements ne vérifie donc pas les hypothèses du théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca. □

Proposition 12. *Le théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca s'applique à un irrationnel substitutif* $x = 0, \mathbf{w}$ *pour* $\mathbf{w} = \sigma^\infty(a)$ *si et seulement si le mot* $\sigma^\infty(a)$ *est à croissance exponentielle.*

Démonstration Supposons que a soit à croissance exponentielle. Nous avons montré qu'il existe une lettre i de $\mathcal{A}$ à croissance maximale qui se répète. Donc $\sigma^\infty(a) = UiWi\dots$

Si on considère la suite $U_n = \sigma^n(U)$, $V_n = \sigma^n(iW)$ et $V'_n = \sigma(i)$, comme i est à croissance maximale, il existe deux constantes A et B telles que $\dfrac{|U_n|}{|V_n|} \geq A > 0$ et $\dfrac{|V_n|}{|V'_n|} \leq B$. Cela suffit pour conclure de la transcendance de $x = 0, \sigma^\infty(a)$ grâce au théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca.

En revanche, pour σ à croissance polynomiale (au moins quadratique car x est irrationnel), il existe un mot W tel que W^n est un facteur de $\sigma^\infty(a)$ pour tout n entier (**Lemme 15**).

Soit alors K tel que si W^n est un facteur de $\sigma^N(a)$, le mot W^{n+1} est facteur de $\sigma^{N+K}(a)$.

Posons $W_0 = a$ et $W_j = \sigma^{Ki}(a) \setminus W_{j-1}$. Remarquons que $|W_j| \asymp j^k$ pour k entier et que $\sigma^\infty(a) = W_1W_2...W_j...$ donc $|W_1W_2...W_j| \asymp j^{k+1}$.

Soit alors pour j entier, $e_W(j) = \max\{n \in \mathbb{N} | W^n \text{ est un facteur de } W_j\}$.

D'après la **Proposition 11**, $(e_W(j))_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante. En effet, si $W^{e_W(j)}$ est un facteur de $\sigma^{Kj}(a)$, alors $W^{e_W(j)+1}$ est un facteur de $\sigma^{(K+1)j}(a)$.

Donc $W^{e_W(j)+1} \in Fact(W_{j+1}) \setminus Fact(W_1W_2...W_j)$. En appliquant le lemme précédent, on en déduit qu'il est impossible d'appliquer le théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca au réel $x = 0, \mathbf{w}$ où $\mathbf{w} = \sigma^\infty(a)$. □

Théorème 3.1.1. *Soit* σ *une substitution et* $a \in \mathcal{A}$ *tels que* $\sigma(a) = aW$*. S'il existe* $A > 0$ *telle que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, $|\sigma^n(a)|) \geq A^n$*, le réel* $x = 0, \mathbf{w}$ *pour* $\mathbf{w} = \sigma^\infty(a)$ *est rationnel ou transcendant.*

Démonstration La condition $|\sigma^n(a)|) \geq A^n$ signifie que la substitution est à croissance exponentielle. Le théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca s'applique donc à x qui est rationnel ou transcendant. □

De ce théorème, nous déduisons le corollaire suivant améliorant la condition sur la complexité de la suite dans le cas d'un nombre réel substitutif.

Corollaire *Soit σune substitution et $a \in \mathcal{A}$ tels que $\sigma(a) = aW$. Si la complexité du mot infini $\mathbf{w} = \sigma^\infty(a)$* vérifie

$$\limsup \frac{p_{\mathbf{w}}(n)}{n \log(n)} < \infty,$$

le réel $x = 0, \mathbf{w}$ pour $\mathbf{w} = \sigma^\infty(a)$ est rationnel ou transcendant.

Démonstration D'après les travaux de J.-J. Pansiot (voir [Pan84]), les points fixes de substitutions ont une complexité quadratique si et seulement si ils possèdent des facteurs à croissance bornée de taille arbitrairement grande. Ainsi, lorsque la complexité de $\mathbf{w} = \sigma^\infty(a)$ vérifie

$$\limsup \frac{p_{\mathbf{w}}}{n \log(n)} < \infty,$$

le mot $\mathbf{w}$ ne contient que des facteurs à croissance bornée de taille bornée. D'après le corollaire de la **proposition 5**, σ est à croissance exponentielle. D'après le **Théorème 3.1.1**, x est rationnel ou transcendant. □

Si nous avons développé une preuve de ce résultat autour de l'existence d'une suite croissante de mots bornés W^n, c'est que cette propriété empêchant la formation de bégaiements satisfaisant aux hypothèses du théorème d'Adamczewski Bugeaud et Luca est conservée par certaines manipulations du réel x (multiplication par des rationnels), ce qui fait l'étude de la première partie du chapitre 4.

3.2 Une autre propriété des plages bornées

Dans tout ce qui suit, σ est une substitution à croissance polynomiale. Nous notons $W \cap \mathcal{A}_k$ l'ensemble des lettres de W qui sont à croissance polynomiale d'ordre n^k comptées avec répétitions.

Exemple Supposons que $\sigma(0) = 02$, $\sigma(1) = 12$ et $\sigma(2) = 2$, $\mathcal{A}_1 = \{0, 1\}$. Si par exemple $W = 010220$, alors $W \cap \mathcal{A}_1 = \{0, 1, 0, 0\}$.

Lemme 19. *Soit $c \in \mathcal{A}_k$ une lettre à croissance du même ordre de grandeur que n^k pour $k \geq 1$. Le nombre de lettres de $\mathcal{A}_k$ apparaissant dans les puissances $\sigma^n(c)$ (comptées avec répétitions) est borné :*

$$\exists C > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ Card(\sigma^n(c) \cap \mathcal{A}_k) \leq C.$$

Toutes les autres lettres sont dans la réunion

$$\bigcup_{i \leq k-1} \mathcal{A}_i.$$

Démonstration Posons $u_c(n) = Card(\sigma^n(c) \cap \mathcal{A}_k)$. Supposons que $\sigma^n(c) \cap \mathcal{A}_k \neq \emptyset$. Pour chaque $x_i \in \sigma^n(c) \cap \mathcal{A}_k$, il existe une lettre x'_i dans $\sigma(x_i) \cap \mathcal{A}_k$ d'après le **Lemme 14**. Chaque $x'_i \in \sigma(x_i)$ apparaît dans $\sigma^{n+1}(c)$. Donc si $\sigma^n(c) \cap \mathcal{A}_k = \{x_i\}_{i \in I}$ (avec répétitions), $\{x'_i\}_{i \in I} \subset \sigma^{n+1}(c) \cap \mathcal{A}_k$. Finalement, $Card(\sigma^{n+1}(c) \cap \mathcal{A}_k) \geq Card(\sigma^n(c) \cap \mathcal{A}_k)$. La suite $\mathbf{u}_c = (u_c(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite croissante. Montrons qu'elle est majorée.

Pour x une lettre de $\mathcal{A}_k$, il existe une alternative :

• soit x réapparaît dans une puissance du type $\sigma^N(x) = V_N x W_N$. Dans ce cas, $V_N W_N$ est un mot à croissance strictement inférieure à celle de x (**Lemme 9**). Donc $\sigma^N(x) \cap \mathcal{A}_k = 1$ (il n'y a qu'une seule lettre dans $V_N x W_N \cap \mathcal{A}_k$).
Alors, pour tout entier $n \geq 1$, $\sigma^{nN}(x) = V_{nN} x W_{nN}$ avec $V_{nN} W_{nN} \in \mathcal{A}^*_{j \leq k-1}$, ce qui entraîne $u_x(nN) = 1$ (il n'y a qu'une seule lettre dans $\sigma^{nN}(x) = V_n x W_n \cap \mathcal{A}_k$).
Comme la suite $\mathbf{u}_x$ est croissante, elle est constante égale à 1.

• soit pour tout entier $N \geq 1$, $x \notin \sigma^N(x)$ et il existe un nombre fini de lettres $x_1, \ldots, x_j$ dans $\sigma(x) \cap \mathcal{A}_k$ telles que pour tout $i \in [1, j]$, $x_i \neq x$ (nous avons supprimé la lettre x de l'ensemble $\mathcal{A}_k$ des candidats possibles).

Dans ce dernier cas, cette alternative existe pour chaque lettres x_i. À chaque itération de ce raisonnement, nous supprimons une nouvelle lettre de l'ensemble $\mathcal{A}_k$ des candidats possibles.

En partant d'une lettre $c \in \mathcal{A}_k$ et après un maximum de $Card(\mathcal{A}_k)$ itérations ($\mathcal{A}_k$ est fini), nous obtenons un entier $P_c > 0$ tel que le mot $\sigma^{P_c}(c)$ ne contient que des lettres de $\mathcal{A}_k$ réapparaissant dans une de leurs puissances :

$$\sigma^{P_c}(c) = L_1 c_1 \ldots L_j c_j L_{j+1}$$

avec $L_1 \ldots L_j \in \mathcal{A}^*_{i \leq k-1}$ et $\sigma^{N_i}(c_i) = V_i c_i W_i$ pour $N_i \in \mathbb{N}^*$ et $V_i W_i \in \mathcal{A}^*_{i \leq k-1}$. Le premier point s'applique donc à chaque c_i et pour ses itérés $Card(\sigma^n(c_i) \cap \mathcal{A}_k) = 1$. Comme les itérés de $L_1 \ldots L_j$ ne contiennent aucune lettre de $\mathcal{A}_k$,

$$\forall n \geq P_c,\ Card(\sigma^n(c) \cap \mathcal{A}_k) = j.$$

La suite $(u_c(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, donc ultimement constante. Nous avons montré qu'elle le devient au moins à partir du rang P_c. □

Remarque Au passage, nous avons montré qu'il existe une puissance P_c dépendant de c telle que :

$$\sigma^{P_c}(c) = L_1 c_1 L_2 c_2 \ldots L_j c_j L_{j+1}$$

pour des lettres c_i de $\mathcal{A}_k$ qui réappaissent dans une de leur puissance ($\sigma^{N_i}(c_i) = V_i c_i W_i$) et des mots L_i éventuellement vides de $\bigcup_{j \leq k-1} \mathcal{A}^*_j$.

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ l'ensemble des lettres croissantes de l'alphabet $\mathcal{A}$. Dans tout ce qui suit, nous écrirons σ pour désigner en fait sa puissance σ^N pour $N = \text{ppcm}\{P_c \mid c \in \mathcal{C}\}$. Ainsi, pour toute lettre croissante $c \in \mathcal{C}$,

$$\sigma(c) = L_1^1\ \mathbf{c_1}\ L_2^1\ \mathbf{c_2} \ldots L_p^1\ \mathbf{c_p}\ L_{p+1}^1 \text{ avec } \sigma(c_i) = V_i^1 c_i V_i^2.$$

Rappel Il est aussi possible quitte à prendre une puissance de σ de supposer que pour tout mot $B \in \mathcal{B}^*$, $\sigma^n(B) = \sigma(B)$ pour tout $n \geq 1$.

Lemme 20. *Soit σ une substitution à croissance polynomiale (avec les notations de la remarque précédente) et $c \in \mathcal{C} \cap \mathcal{A}_n$. Il existe un ensemble fini $\{c_1, c_2 \dots c_p\} \subset \mathcal{A}_n$ et des mots $L_i^j \in \mathcal{A}_{k \leq n-1}^*$ tel que les itérés successifs de c sont de la forme :*

$$\sigma(c) = L_1^1 \ \mathbf{c_1} \ L_2^1 \ \mathbf{c_2} \dots L_p^1 \ \mathbf{c_p} \ L_{p+1}^1$$

$$\sigma^2(c) = L_1^2 \ \mathbf{V_1^1 c_1 V_1^2} \ L_2^2 \ \mathbf{V_2^1 c_2 V_2^2} \ \dots L_p^2 \ \mathbf{V_p^1 c_1 V_p^2} \ L_{p+1}^2$$

$$\sigma^3(c) = L_1^3 \ \sigma(\mathbf{V_1^1}) \mathbf{V_1^1 c_1 V_1^2} \sigma(\mathbf{V_1^2}) \ L_2^3 \ \sigma(\mathbf{V_2^1}) \mathbf{V_2^1 c_2 V_2^2} \sigma(\mathbf{V_2^2}) \dots L_p^3 \ \sigma(\mathbf{V_p^1}) \mathbf{V_p^1 c_p V_p^2} \sigma(\mathbf{V_p^2}) L_{p+1}^3$$

$$\sigma^n(c) = L_1^n \ \sigma^{\mathbf{n-2}}(\mathbf{V_1^1}) \dots \mathbf{V_1^1 c_1 V_1^2} \dots \sigma^{\mathbf{n-2}}(\mathbf{V_1^2}) \ L_2^n \ \sigma^{\mathbf{n-2}}(\mathbf{V_2^1}) \dots \mathbf{V_2^1 c_2 V_2^2} \dots \sigma^{\mathbf{n-2}}(\mathbf{V_2^2})$$
$$\dots L_p^n \ \sigma^{\mathbf{n-2}}(\mathbf{V_p^1}) \dots \mathbf{V_p^1 c_p V_p^2} \dots \sigma^{\mathbf{n-2}}(\mathbf{V_p^2}) \ L_{p+1}^n$$

Démonstration La première égalité découle de la remarque précédente. Le reste vient du fait que pour tout $i \in \{1 \dots p\}$, lorsque $\sigma(c_i) = V_i^1 c_i V_i^2$,

$$\sigma^n(c_i) = \ \sigma^{\mathbf{n-1}}(\mathbf{V_i^1}) \dots \mathbf{V_i^1 c_i V_i^2} \dots \sigma^{\mathbf{n-1}}(\mathbf{V_i^2})$$

Posons $L_i^j = \sigma^{j-1}(L_i^1) \in \mathcal{A}_{k \leq n-1}^*$. Ces mots $L_i^1 \in \mathcal{A}_{k \leq n-1}^*$ d'après le lemme précédent. □

Remarque 1 La taille de chaque plage en gras augmente de plus en plus vers l'infini : en effet, même si pour chaque entier $i \in [1, p]$, V_i^1 ou V_i^2 est éventuellement vide, le mot $V_i^1 V_i^2$ ne peut pas l'être car sinon $\sigma^n(c_i) = \ \sigma^{\mathbf{n-1}}(\mathbf{V_i^1}) \dots \mathbf{V_i^1 c_i V_i^2} \dots \sigma^{\mathbf{n-1}}(\mathbf{V_i^2}) = c_i$. Or c_i n'est pas à croissance bornée.

Remarque 2 Si une lettre c est à croissance linéaire, il en est de même des lettres c_i définies dans le lemme précédent. Le mot $V_i^1 V_i^2$ est donc un mot à croissance bornée (non vide). Alors pour tout entier $n \geq 1$, $\sigma^n(V_i^1) = \sigma(V_i^1)$ et $\sigma^n(V_i^2) = \sigma(V_i^2)$. Chaque plage autour des c_i est donc de la forme :

$$\sigma^n(c_i) = \ \sigma(\mathbf{V_i^1})^{\mathbf{n-1}} \mathbf{V_i^1 c_i V_i^2} \sigma(\mathbf{V_i^2})^{\mathbf{n-1}}$$

De même, les mots L_i^j sont aussi des mots à croissance bornée. Donc si $j \geq 2$, $L_i^j = L_i^2 = \sigma(L_i^1)$.

Lemme 21. *Soit c une lettre à croissance linéaire pour une substitution σ. Il existe un ensemble fini de mots éventuellement vides $\{V_0, V_1, V_2 \dots, V_{f-1}, V_f, W_1, W_2, \dots W_f\}$ tels que :*

$$\forall n \geq 2, \ \sigma^n(c) = V_0 W_1^{n-2} V_1 W_2^{n-2} V_2 \dots W_f^{n-2} V_f.$$

Démonstration D'après le dernier lemme et la dernière remarque :

$$\forall n \geq 2, \sigma^n(c) = \sigma(L_1^1) \ \sigma(V_1^1)^{n-2} V_1^1 c_1 V_1^2 \sigma(V_1^2)^{n-2} \dots \sigma(L_p^1) \ \sigma(V_p^1)^{n-2} V_p^1 c_p V_p^2 \sigma(V_p^2)^{n-2} \ \sigma(L_{p+1}^1).$$

Il suffit pour chaque entier i, $1 \leq i \leq p$, de poser $W_{2i-1} = \sigma(V_i^1)$ et $W_{2i} = \sigma(V_i^2)$ (à croissance bornée) et de désigner par V_j le mot qui sépare W_j de W_{j+1} pour tout entier j, $1 \leq i \leq 2p-1$, $V_0 = \sigma(L_1^1)$ et $V_2 p = \sigma(L_{p+1}^1)$. □

Remarque Lorsque j est pair, le mot $V_j = \sigma(L_{1+j/2}^1)$ est un mot à croissance bornée éventuellement vide. Lorsque j est impair, le mot $V_j = V_{(j+1)/2}^1 c_{(j+1)/2} V_{(j+1)/2}^2$ est non vide et à croissance linéaire, comme $c_{(j+1)/2}$.

Proposition 13. *Si σ est une substitution à croissance quadratique, son point fixe est de la forme :*

$$\sigma^\infty(0) = 0\ \overline{W}\ \overline{W_2}\ \overline{W_3}\dots\overline{W_n}\dots$$

avec $\overline{W}$ un mot fini et $(\overline{W_i})_{i\geq 2}$ une suite de mots dont les longueurs sont données par une suite à croissance linéaire. Chaque mot $\overline{W_i}$ est de la forme :

$$\overline{W_i} = V_0 W_1^{i-2} V_1 W_2^{i-2} V_2 \dots W_f^{i-2} V_f$$

pour des mots V_s (resp. W_s) ne dépendant que de W, à croissance au plus linéaire (resp. à croissance bornée).

Démonstration Soit $\sigma(0) = 0\tilde{W}$ et $\sigma^2(0) = 0W$. Alors $\sigma^n(0W) = 0W\sigma^2(\tilde{W})\dots\sigma^{n-1}(\tilde{W})$.
Or $\tilde{W} = B_0c_1B_1c_2B_2\dots B_ic_iB_{i+1}$ est un mot à croissance linéaire contenant un nombre fini de lettres $c_1\dots c_i \in \mathcal{A}_1$. D'après le lemme précédent, chacune de ces lettres vérifie :

$$\forall n \geq 2, \sigma^n(c_j) = V_0 W_1^{n-2} V_1 W_2^{n-2} V_2 \dots W_f^{n-2} V_f.$$

Quitte à remplacer $i \times f$ par f et à modifier les mots V_j au niveau des charnières entre les mots V_0 et V_f successifs (voir figures), nous avons :

$$\begin{aligned}\overline{W_j} &= \sigma^i(B_0c_1B_1\dots B_{i-1}c_iB_i) \text{ pour } c_j \in \mathcal{A}_1, B_j \in \mathcal{B}^* \\ &= \sigma(B_0)\sigma^i(c_1)\sigma(B_1)\dots\sigma(B_{i-1})\sigma^j(c_i)\sigma(B_i) \\ &= V_0 W_1^{j-2} V_1 W_2^{j-2} V_2 \dots W_f^{j-2} V_f.\ \square\end{aligned}$$

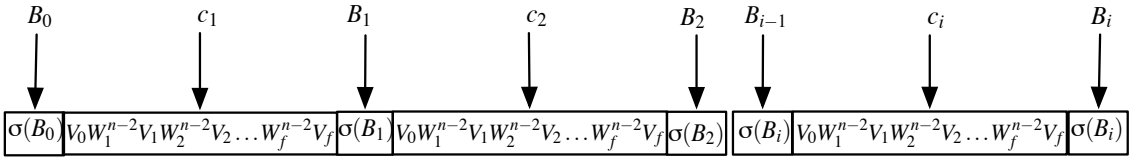


FIG. 3.2 –

Exemple C'est par exemple le cas de la substitution

$$\begin{aligned}\sigma :\ & 0 \to 012 \\ & 1 \to 12 \\ & 2 \to 2,\end{aligned}$$

dont un point fixe de croissance quadratique est

$$\sigma^\infty(0) = 012\ 122\ 1222\ 12222\ \dots\ 12^n\dots$$

Dans cet exemple, $\overline{W} = 12122$, $\overline{W}_2 = 1222\dots$ et $\overline{W_n} = 12^{n+1}$.

De manière un peu plus générale que le **Lemme 21**, pour un mot à croissance linéaire $\overline{W}$, nous avons le lemme suivant :

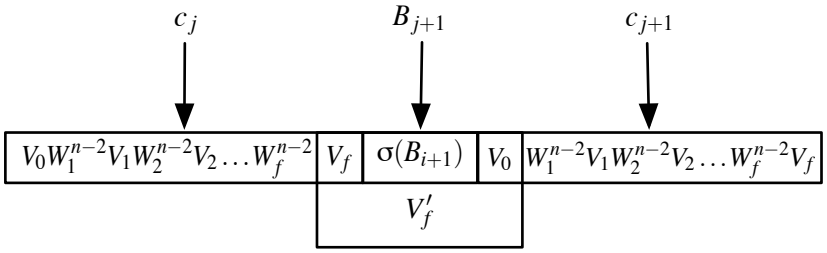


FIG. 3.3 –

Lemme 22. *Soit $\overline{W}$ un mot borné à croissance linéaire pour la substitution σ. Il existe un ensemble fini de mots éventuellement vides $\{V_0, V_1, V_2 \ldots, V_f, W_1, W_2, \ldots W_f\}$ tels que :*

$$\forall n \geq 2,\ \sigma^n(\overline{W}) = V_0W_1^{n-2}V_1W_2^{n-2}V_2\ldots W_f^{n-2}V_f.$$

Démonstration Le mot $\overline{W}$ s'écrit $B_0c_1B_1c_2\ldots B_{j-1}c_jB_j$ pour $c_i \in \mathcal{A}_1$ et $B_i \in \mathcal{B}^*$. En reprenant la fin de la démonstration de la dernière proposition, nous avons encore

$$\sigma^n(\overline{W}) = V_0W_1^{n-2}V_1W_2^{n-2}V_2\ldots W_f^{n-2}V_f.\ \square$$

Lemme 23. *Pour une lettre a à croissance quadratique telle que $\sigma(a) = \overline{V}a\overline{W}$ (avec $\overline{V}$ ou $\overline{W}$ éventuellement vide mais avec le mot $\overline{VW}$ non vide et à croissance linéaire), le mot $\sigma^n(a)$ est de la forme :*

$$\sigma^n(a) = \overline{V_{n-1}}\ \ldots\overline{V_2}\ \overline{V_1V}a\ \overline{W}\ \overline{W_1}\ \overline{W_2}\ldots\overline{W_{n-1}}$$

pour $\overline{V_i} = \sigma^i(\overline{V})$ et $\overline{W_i} = \sigma^i(\overline{W})$.

Démonstration Elle découle du lemme précédent. □

Définition 3.2.1. *Dans ce qui suit, nous appelons une "vague" un tel mot de la forme :*

$$\sigma^n(a) = \overline{V_{n-1}}\ \ldots\overline{V_2}\ \overline{V_1V}a\ \overline{W}\ \overline{W_1}\ \overline{W_2}\ldots\overline{W_{n-1}}$$

*dans lequel les mots $\overline{V_i}$ et $\overline{W_i}$ sont des mots donnés par les itérations successives des mots $\overline{V}$ et $\overline{W}$ à croissances linéaires. Une définition mathématique plus précise et plus "exploitable" sera donnée dans le paragraphe suivant (**Définition 3.3.4**) lorsque nous aurons défini la fonction $gap^{\mathcal{E}}$ pour un ensemble de mots bornés $\mathcal{E}$.*

Exemples Soit σ_i les substitutions :

$$\begin{array}{lll}
\sigma_1 : & 0 \to 01 & \sigma_2 : \quad 0 \to 01 \qquad \sigma_3 : \quad 0 \to 01 \\
& 1 \to 21 & \qquad\quad 1 \to 12 \qquad\quad\ 1 \to 213 \\
& 2 \to 24 & \qquad\quad 2 \to 24 \qquad\quad\ 2 \to 24 \\
& 4 \to 4 & \qquad\quad 4 \to 4 \qquad\quad\ 3 \to 34 \\
& & \qquad\qquad\qquad\quad\ 4 \to 4
\end{array}$$

Dans tous les cas, la lettre 0 est à croissance cubique, la lettre 1 à croissance quadratique, les lettres 2 et 3 à croissance linéaire et la lettre 4 à croissance bornée.

$$\begin{aligned}\sigma_1^n(0) &= 01|21|2421|2442421|24442442421|\dots|24^{n-1}24^{n-2}...2421|\\ \sigma_2^n(0) &= 01|12|1224|1224244|12242442444|\dots|1224...24^{n-2}24^{n-1}\\ \sigma_3^n(0) &= 01|213|2421334|2442421334344|244424424213343443444|\dots\\ &\quad |24^{n-1}24^{n-2}...2421334...34^{n-2}34^{n-1}\end{aligned}$$

Le premier point fixe est constitué de "vagues" décroissantes : dans chacune d'entre elles, encadrée par deux signes |, la suite des puissances de la lettre 4 est de la forme $n-1, n-2 \dots 1, 0$.
Le second point fixe est constitué de "vagues" croissantes : la suite des puissances de la lettre 4 est de la forme $0, 1, \dots n-2, n-1$.
Le troisième point fixe est constitué de "vagues" décroissantes puis croissantes : la suite des puissances de la lettre 4 est de la forme $n-1, n-2 \dots 1, 0, 0, 1, \dots n-2, n-1$.

Dans **l'annexe B**, nous programmons une procédure en langage Maple permettant de tracer le graphe de la fonction $gap^{\mathcal{E}}$ que nous introduirons plus loin et mettant en évidence l'existence de "vagues" dans le cas de quelques exemples de suites à croissance cubique.

Soit alors une substitution à croissance au moins cubique : $\sigma(0) = 0W$ avec W un mot à croissance au moins quadratique. D'après le **Lemme 14**, il existe dans un itéré de W une lettre $a \in \mathcal{A}_2$ de croissance quadratique telle que $\sigma(a) = \overline{V}a\overline{W}$. Autour de cette lettre (comme autour de chaque lettre quadratique apparaissant dans $\sigma^\infty(0)$ se forment au fur et à mesure des itérations, des "vagues" soit décroissantes, soit croissantes, soit décroissantes puis croissantes dont le sommet augmente, et la longueur aussi a fortiori.

Dans l'étude précédente, nous nous sommes intéressé à la hauteur de la plus haute "vague". Nous avions montré que cette hauteur augmentait à chaque itération et nous en avions déduit l'apparition d'un nouveau facteur empêchant la formation de bégaiements suffisamment longs pour appliquer le théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca.
Dans ce qui suit, nous introduisons la fonction *gap* qui nous permet d'étudier la hauteur mais aussi la longueur d'une vague. Nous allons voir que la longueur de la plus longue "vague" augmente également à chaque itération, entraînant à nouveau l'apparition d'un nouveau facteur et empêchant encore la formation de bégaiements assez longs.
Plus loin, nous verrons que lors de certaines transformations de la suite $\sigma^\infty(0)$, la hauteur ou la longueur restent dans un même ordre de grandeur. Nous en déduirons que ce type de transformations ne fait pas apparaître de bégaiements permettant d'appliquer le théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca à la nouvelle suite obtenue.

3.3 Cas de certains réels non substitutifs

Exemple 1. *Nous avions donné un exemple de substitution pour laquelle il n'était pas possible d'appliquer le théorème de Ferenczi-Mauduit. La substitution*

$$\sigma \quad \begin{aligned}2 &\to 210\\ 1 &\to 10\\ 0 &\to 0\end{aligned}$$

est un exemple pour lequel il est impossible d'appliquer le théorème d'Adamczeski-Bugeaud-Luca.

En effet, la lettre 0 est une lettre bornée : $\sigma^n(0) = 0$. Comme $\sigma(1) = 10$ et d'après le **Lemme 9**, la lettre 1 est à croissance linéaire. Enfin, puisque $\sigma(2) = 210$, toujours d'après **Lemme 9**, la lettre 2 est à croissance quadratique.

Finalement, la substitution σ est à croissance polynomiale, donc ne contient aucun bégaiement maximal (ici du type $2W2W2$).

Dans le raisonnement que nous venons de faire, nous avons utilisé des arguments valables pour les suites substitutives. Pourtant, il est possible de montrer que le théorème n'est pas applicable sans faire allusion à la structure de morphisme d'itération.

La formation régulièrement croissante de plages de 0 dans le réel :

$$x = 0,21\ 0\ 1\ 00\ 1\ 000\ 1\ 0000\ 1\ 00000\ 1\ 000000\ 1 \ldots 1\ 0^k\ 1\ 0^{k+1}\ 1 \ldots$$

empêche l'apparition de bégaiements convenables.

En effet, si pour U quelconque, V non vide et V' un préfixe non vide de V, le mot UVV' est un bégaiement tel que le mot V' commence dans la $n^{\text{ième}}$ plage de 0, alors $|UV| > \sum_{k=1}^{k=n} k > n^2$ et $|V'| < 2(n+1)$ car sinon, il "couvrirait" toute la $(n+1)^{\text{ième}}$ plage de 0, ce qui est impossible car le mot 0^{n+1} n'apparaît pas avant V' qui doit pourtant être un préfixe du mot V.

Finalement,

$$\frac{|V'|}{|UV|} < \frac{2(n+1)}{n^2}.$$

Donc aucune suite infinie de bégaiements ne peut vérifier les deux conditions

$$\frac{|U_n|}{|V_n|} < C < \infty \text{ et } \frac{|V'_n|}{|V_n|} > c > 0.$$

Reprenons ce modèle de raisonnement dans un cadre un peu plus général :

Proposition 14. *Soit* $\mathbf{w} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans l'alphabet* $\mathcal{A} = \{0, 1 \ldots (b-1)\}$. *Supposons qu'il existe une "partition" de la suite* $\mathbf{w}$ *en une suite de mots finis* $(B_n)_{\mathbb{N}}$ *tels que* $|B_n| = o(|B_0 B_1 \ldots B_{(n-1)}|)$

Supposons de plus que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists F_n \in \mathcal{A}^* \setminus \{\epsilon\}, F_n \in Fac(B_n) \setminus Fac(B_0 B_1 \ldots B_{(n-1)}).$$

Alors la suite $\mathbf{w}$ *ne vérifie pas de critère de puissance* $\alpha = 1 + \epsilon$ *(condition d'application du théorème de Adamczewski-Bugeaud-Luca.)*

Démonstration Considérons un bégaiement $UV^{1+\epsilon} = UVV'$ tel que U est quelconque, V' est un préfixe non vide de V. Supposons que V' apparaît dans le mot $B_{\alpha(n)}$. Comme V' est un préfixe de V, la longueur $|V'|$ ne peut pas être supérieure à la longueur du mot $B_{\alpha(n)}B_{\alpha(n)+1}$ puisque le mot $F_{\alpha(n)+1}$ apparaissant pour la première fois dans $B_{\alpha(n)+1}$ n'est un facteur ni du mot $B_0 \ldots B_{\alpha(n)}$ ni de V.

Ainsi,

$$|V'| \leq |B_{\alpha(n)}B_{\alpha(n)+1}|$$

Or,

$$|UV| \geq |B_0 B_1 \ldots B_{\alpha(n)-1}|$$

Pour toute suite de bégaiements $U_nV_nV'_n$ tel que $|V'_n| \to \infty$, nous avons donc

$$\frac{|V'_n|}{|U_nV_n|} \leq \frac{|B_{\alpha(n)}B_{\alpha(n)+1}|}{|B_0B_1\dots B_{\alpha(n)-1}|} \to 0. \ \square$$

La proposition précédente met en avant le fait que l'apparition régulière de nouveaux mots dans la suite $\mathbf{w}$ empêche l'apparition de puissance $\alpha = 1 + \epsilon$.

Cas particulier Lorsque $|B_n| \asymp n^k$, soient $m > 0$ et $M > 0$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < mn^k \leq |B_n| \leq Mn^k$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \sum_{i=1}^{i=n-1} i^k \leq |B_1\dots B_{n-1}| \leq M \sum_{i=1}^{i=n-1} i^k$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, m'(n-1)^{k+1} \leq |B_1\dots B_{n-1}| \leq M'(n-1)^{k+1}.$$

Alors, $|B_n| = o(|B_0B_1\dots B_{(n-1)}|)$.

Dans l'exemple présenté au dessus (**Exemple 1**), nous avions $B_0 = 2$, $B_n = 1\ 0^n$, $F_n = 0^n$ et $|B_n| \asymp n$.

En s'inspirant de l'**Exemple 1**, un bon moyen d'assurer l'existence d'un mot $F_n \in Fac(B_n) \setminus Fac(B_0\dots B_{n-1})$ est de supposer que $F_n = W^{f(n)}$ pour W un mot fini non vide et $f(n)$ une suite strictement croissante (dans notre exemple, $F_n = W^{f(n)}$ pour $W = 0$ et $f(n) = n$).

Il se peut que ces plages de plus en plus grandes soient des puissances croissantes de plusieurs mots $W_1, \dots W_i$ finis non vides. Dans ce cas, il faudra envisager une famille de fonctions $f_j(n)$ chacune estimant les puissances de W_j apparaissant dans la suite considérée.

Ces fonctions $f_j(n)$ sont en fait très proches des fonctions gap^W permettant de collecter les longueurs successives de plages constituées des puissances du mot W. Ces notions s'inspirent entre autres de l'étude des liens entre la fonction gap^0 d'une suite binaire et sa complexité par I. Gheorghiciuc dans [Ghe05] .

Définition 3.3.1. *Soit $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^\omega$ et $W \in \mathcal{A}$. Notons $gap^W_{\mathbf{w}}(n)$ la longueur (éventuellement nulle) de la $n^{ième}$ plage du mot W dans $\mathbf{w}$.*

Pour l'**Exemple 1**, $\mathbf{w} = 21\ 0\ 1\ 00\ 1\ 000\ 1\ 0000\ 1\ 00000\ 1\dots$ et $W = 0$, nous avons :

$$gap^0_{\mathbf{w}}(1) = 0, gap^0_{\mathbf{w}}(2) = 1, gap^0_{\mathbf{w}}(3) = 2, gap^0_{\mathbf{w}}(4) = 3, \dots gap^0_{\mathbf{w}}(k) = k - 1.$$

Il se peut que la suite étudiée soit formée de plages du type W_i^n pour différents mots $\{W_i\}_{i\in I}$ pour I fini. Mais pour pouvoir définir sans ambiguïté une fonction gap associée à cet ensemble fini $\{W_i\}_{i\in I}$, cette famille de mots $E = \{W_i\}_{1\leq i\leq n}$ doit vérifier certaines conditions. Nous supposerons que tous les mots W_i sont de la même longueur.

Définition 3.3.2. *Ainsi, en partant d'une famille E quelconque finie de mots W_i, nous construisons la famille $\mathcal{E} = \{W'_i\}$ constituée des mots $W'_i = W_i^{k_i}$ avec k_i tel que*

$$|W'_i| = ppcm\{|W_i|\}_{1\leq i\leq n}.$$

Définition 3.3.3. *Soit* $\mathbf{w}$ *une suite infinie quelconque construite sur l'alphabet* $\mathcal{A}$*. Soit un ensemble fini* $\mathcal{E} = \{W_1, W_2, \ldots, W_m\} \subset \mathcal{A}^*$*, tel que* $|W_1| = |W_2| = \ldots = |W_m|$ *nous généralisons la fonction gap en notant* $gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(n)$ *la puissance du mot* W_i *apparaissant dans la* $n^{ième}$ *plage de l'un des mots* $W_i \in \mathcal{E}$*.*
Cette puissance est définie comme étant égale à la plus grande puissance entière du mot W_i *apparaissant dans la plage du mot* W_i *considérée.*

La fonction $gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}$ *de manière unique en parcourant la suite de gauche à droite.*

Exemple Pour $\mathbf{w}$ = 21 0 1 333 12 00 1 00000 1 515151 2… et $E = \{0, 3, 51\}$, nous avons $\mathcal{E} = \{00, 33, 51\}$ et en écrivant :

$$\mathbf{w} = 2101\ \mathbf{33}\ 312\ \mathbf{00}\ 1\ \mathbf{0000}\ 01\ \mathbf{515151}\ 2\ldots$$

$$\begin{array}{cccc} gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(1) = 0 & gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(2) = 0 & gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(3) = 0 & gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(4) = 1 \\ gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(4) = 0 & gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(5) = 0 & gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(6) = 1 & gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(7) = 2 \\ gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(8) = 0 & gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(9) = 3 & \ldots & \end{array}$$

Certaines conditions sur ces fonctions $gap^{\mathcal{E}}$ sont suffisantes pour empêcher l'existence d'un critère de puissance $\alpha > 1$ et donc l'application du théorème de Adamczewski-Bugeaud-Luca au réel $x = 0, \mathbf{w}$. En effet, chaque fois que la fonction $gap^{\mathcal{E}}$ prend une nouvelle valeur, il apparaît un nouveau facteur dans la suite $\mathbf{w}$. Il suffit donc que ces nouveaux facteurs apparaissent suffisamment régulièrement pour empêcher l'existence d'un critère de puissance $\alpha = 1 + \epsilon$.

Lemme 24. *Soit* $\mathbf{w}$ *une suite infinie quelconque sur l'alphabet* $\mathcal{A}$*. Soit un ensemble fini* $\mathcal{E} = \{W_1, W_2, \ldots, W_m\} \subset \mathcal{A}^*$*, tel que* $|W_1| = |W_2| = \ldots = |W_m|$*. Pour tout entier* N*, on a légalité* $N + \sum_{i=1}^{i=N} |W_i| gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(i) = |W|$ *où* W *est le préfixe de* $\mathbf{w}$ *formé des premieres* N *plages (éventuellement vides) de mots* $W_i \in \mathcal{E}$*.*

Démonstration Chaque plage est de la forme $W_i^{gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(i)}$ pour $gap^{\mathcal{E}}$ éventuellement nul. Une telle plage est toujours préédée d'une lettre $a \in \mathcal{A}$. Donc

$$\begin{aligned} |a\ W_i^{gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(i)}| &= 1 + |W_i^{gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(i)}| \\ &= 1 + |W_i| gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(i). \ \square \end{aligned}$$

Proposition 15. *Soit* $\mathbf{w}$ *une suite infinie quelconque sur l'alphabet* $\mathcal{A}$*. Soit un ensemble fini* $\mathcal{E} = \{W_1, W_2, \ldots, W_m\} \subset \mathcal{A}^*$*, tel que* $|W_1| = |W_2| = \ldots = |W_m|$*. Lorsqu'il existe une suite* $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$*,* M *et* $k \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}$ *vérifie les conditions :*

$$(N_i - N_{i-1}) + \sum_{j=N_{i-1}+1}^{j=N_i} |W_j| gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(j) \ll N_{i-1} + \sum_{j=1}^{j=N_{i-1}} |W_j| gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(j)$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \exists j_0 \in I, \max\{gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(j) | j \leq N_i \text{ et } W_j = W_{j_0}\} < \max\{gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(j) | j \leq N_i + M \text{ et } W_j = W_{j_0}\},$$

les conditions du théorème de Adamczewski-Bugeaud-Luca ne sont pas vérifiées.

Cas particulier Lorsque

$$N_i + \sum_{j=1}^{j=N_i} |W_j| gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(j) \asymp i^k,$$

la première condition est vérifiée.
Démonstration Posons

$$B_i = \mathbf{w}[1 \dots N_i + \sum_{j=1}^{j=N_i} |W_j| gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j)].$$

La première condition veut donc dire que $|B_i| \ll |B_1 \dots B_{i-1}|$ et la seconde condition assure qu'il existe $W_{j_0} \in \mathcal{E}$ tel que la plus grande puissance de W_{j_0} apparaissant dans $B_1 \dots B_i$ est strictement inférieure à la plus grande puissance de W_{j_0} apparaissant dans $B_{i+1} \dots B_{i+M}$.

Cela implique entre autres l'existence d'un mot $F_i \in Fac(B_{i+1} \dots B_{i+M}) \setminus Fac(B_1 \dots B_i)$. Or si i tend vers l'infini, $\frac{|B_{i+1} \dots B_{i+M}|}{|B_1 \dots B_i|}$ tend vers 0. D'après la **Proposition 14**, cette condition empêche bien la formation de bégaiements répondant aux hypothèses du théorème Adamczewski-Bugeaud-Luca. □

Voici une autre condition suffisante dans le même ordre d'idée permettant de prouver qu'une suite ne vérifie pas le critère de puissance $\alpha > 1$.

Proposition 16. *Soit* $\mathbf{w}$ *une suite infinie quelconque sur l'alphabet* $\mathcal{A}$*. Soit un ensemble fini* $\mathcal{E} = \{W_1, W_2, \dots, W_m\} \subset \mathcal{A}^*$*, tel que* $|W_1| = |W_2| = \dots = |W_m|$*. Lorsqu'il existe une suite* $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *et* M *tels que* $gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}$ *vérifie les conditions :*

$$(N_i - N_{i-1}) + \sum_{j=N_{i-1}+1}^{j=N_i} |W_j| gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j) \ll N_{i-1} + \sum_{j=1}^{j=N_{i-1}} |W_j| gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j)$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \max\{gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j) | j \leq N_i\} < \max\{gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j) | j \leq N_i + M\},$$

les conditions du théorème de Adamczewski-Bugeaud-Luca ne sont pas vérifiées.

Démonstration Ce qui change ici par rapport à la proposition précédente, c'est que nous contrôlons la taille de la plus grande plage (quel que soit les mots W_i) au lieu de contrôler la taille des plages pour un mot W_{j_0} donné. Dans un cas comme dans l'autre, la deuxième condition traduit le fait qu'il existe un nouveau facteur dans le mot

$$B_{i+M} = \mathbf{w}[1 \dots N_{i+M} + \sum_{j=1}^{j=N_{i+M}} |W_j| gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j)]].$$

Cette plus grande plage constitue à chaque étape i le mot F_i, nouveau facteur de B_{i+M}.
Le reste de la démonstration est similaire à celle de la proposition précédente. □

Remarque : Toute substitution à croissance polynomiale vérifie les hypothèses de cette proposition : il suffit de poser $\mathcal{E} = \{W\}$ pour un mot W dont toutes les puissances entières sont des facteurs de $\sigma^\infty(0)$) et d'utiliser la **Proposition 11** qui assure que si W^n est la plus grande puissance de W apparaissant dans $\sigma^N(0)$, alors W^{n+1} est un (nouveau) facteur de $\sigma^{N+K}(0) \setminus \sigma^N(0)$ pour une constante K ne dépendant que de σ. La suite $(N_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est alors définie par $N_i = |\sigma^i(0)| \asymp i^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ puisque la substitution est à croissance polynomiale.

L'**Exemple 1** 2101001000100001 . . . correspond au cas suivant :

$$\mathcal{E} = \{0\}, gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j) = (j-1), N_i = i$$

$$N_i + \sum_{j=1}^{j=N_i} |W_j| gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j) = i + \sum_{j=1}^{j=i} |0|.(j-1)$$

$$\max\{gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j) | j \leq N_i\} = \max\{(j-1) | j \leq i\} = i-1$$

Alors, effectivement,

$$i + \sum_{j=1}^{j=i} |0|.(j-1) = i + \frac{i(i-1)}{2} \asymp i^2$$

et si $M = 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*, (i-1) < (i-1) + M = i$.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent un aperçu de ce que nous appelons une "vague". Nous pouvons définir cette notion de manière plus rigoureuse grâce à la fonction *gap*.

Définition 3.3.4. *Nous appelons une "vague" un facteur de la suite* $\mathbf{w}$ *sur lequel la restriction de la fonction* $gap^{\mathcal{E}}$ *à ce facteur* ($gap^{\mathcal{E}}_{|n_1 \leq i \leq n_2}$) *vérifie l'une des conditions suivantes si :*

– *la vague est croissante en effectuant des pas de longueur* K *(*K*-croissante) si :*

$$\exists K \in \mathbb{N}\ \forall i \in [[n_1, n_2 - K]]\ \exists j \in [[i, i+K]]\ gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(i) < gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j).$$

– *la vague est décroissante en effectuant des pas de longueur* K *(*K*-décroissante) :*

$$\exists K \in \mathbb{N}\ \forall i \in [[n_1 + K, n_2]]\ \exists j \in [[i-K, i]]\ gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(i) < gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j).$$

Dans **l'annexe B**, nous programmons une procédure en langage Maple permettant de tracer le graphe de la fonction $gap^{\mathcal{E}}$. Nous mettons en évidence l'existence de "vagues" pour des exemples choisis de suites substitutives à croissance cubique.

Étant donné une hauteur H, nous pouvons compter pour chaque vague combien de fois la fonction $gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}$ dépasse la valeur H (nombre de pics dans la vague de hauteur supérieure à H).

Notations : Pour W une vague K-croissante ou K-décroissante et $H > 0$, notons $N_{pic}^{W,H}$ le nombre de "pics" supérieurs à la hauteur H de la fonction $gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}$ (valeurs de $gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(i)$ plus grandes que H) à l'intérieur de la vague W considérée.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $H, K > 0$, notons $\max_{vague}^{H,K}(N)$ le maximum des valeurs $N_{pic}^{W,H}$ pour l'ensemble des vagues W effectuant des pas de longueur K apparaissant dans la restriction de la fonction *gap* à l'intervalle $[[1; N]]$ notée $gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j)_{|j \leq N}$ (lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur H et K, nous noterons simplement $\max_{vague}(N)$).

Dans le cas d'une suite $\mathbf{w}$ quelconque (substitutive ou non), nous avons la proposition suivante.

Proposition 17. *Lorsqu'il existe une suite* $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *et* $M, H, K > 0$ *tels que* $gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}$ *vérifie les conditions :*

$$(N_i - N_{i-1}) + \sum_{j=N_{i-1}+1}^{j=N_i} |W_j| gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j) \ll N_{i-1} + \sum_{j=1}^{j=N_{i-1}} |W_j| gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j)$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \max_{vague}^{H,K}(N_i) < \max_{vague}^{H,K}(N_i + M),$$

les conditions du théorème de Adamczewski-Bugeaud-Luca ne sont pas vérifiées.

Démonstration Toujours dans le même ordre d'idée que les propositions précédentes, le fait qu'une mesure (ici la longueur de la plus grande vague $\max_{vague}^{H,K}$) change trop régulièrement est suffisant pour en déduire l'existence d'un nouveau facteur, empêchant l'existence de tout critère de puissance α pour tout $\alpha > 1$. □

Les mots substitutifs à croissance polynomiale au moins quadratique contiennent des vagues dont le nombre de "pics" arbitrairement haut augmente strictement à chaque itération.

Notation : Pour une substitution σ et $a \in \mathcal{A}$, notons $\max_{vague}^{H,K}(\sigma^N(a))$ le maximum des valeurs $N_{pic}^{W,H}$ pour l'ensemble des vagues K-croissantes ou K-décroissantes W apparaissant dans le mot $\sigma^N(a)$.

Proposition 18. *Pour σ une substitution telle qu'il existe une lettre a à croissance polynomiale quadratique, il existe un ensemble non vide $\mathcal{E}$ de mots de même longueur et $K > 0$ tels que des vagues arbitrairement longues effectuant des pas de longueur K soient des facteurs apparaissant dans l'ensemble des puissances $\{\sigma^N(a)\}_{N\in\mathbb{N}}$.*

Plus précisément, il existe $K' > 0$ telle que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \max_{vague}^{H,K}(\sigma^N(a)) < \max_{vague}^{H,K}(\sigma^{N+K}(a))$$

Démonstration : Quitte à considérer une puissance de σ et de poser K et K' supérieurs à cette puissance, nous pouvons supposer que $\sigma(a) = \overline{V}a\overline{W}$ pour $\overline{VW} \neq \epsilon$ (en effet, une telle lettre existe dans une puissance $\sigma^n(a)$ d'après le **Lemme 14**, et tous les itérés d'une telle lettres sont des facteurs de $\sigma^N(a)$ pour N assez grand).

Supposons par exemple que $\overline{V}$ ne soit pas vide. Étant un mot à croissance linéaire, ses itérations s'écrivent $\sigma^n(\overline{V}) = V_0 W_1^{n-2} V_1 W_2^{n-2} V_2 \dots W_f^{n-2} V_f$ d'après le **Lemme 22** pour des mots V_s et W_s ne dépendant que de V.

Posons $E = \{W_i\}_{1\leq i\leq f}$ et $\mathcal{E} = \{W_i'\}$ construit à partir de E selon la **Définition 3.3.2**. Il existe $C > 0$ tel que $\frac{|\overline{W_i'}|}{|\overline{W_i}|} = C_i \leq C$. Ainsi, lorsque W^i est un facteur de $\overline{V}$, la fonction $gap^{\mathcal{E}}$ prend une valeur plus grande que $\lfloor \frac{i}{C} \rfloor$. Soit $K_1 = (f+1)\times\max\{|V_i| \mid 0 \leq i \leq f\}+1$. Considérons le facteur $\sigma^n(a) = \overline{V_{n-1}}\ \dots \overline{V_2}\ \overline{V_1 V a}\ \overline{W}\ \overline{W_1}\ \overline{W_2} \dots \overline{W_{n-1}}$.

Le mot $\overline{V_{n-1}}\ \dots \overline{V_2}\ \overline{V_1 V}$ est une vague (décroissante) effectuant des pas de longueur $K = K_1 C$. En effet, lorsque la restriction de la fonction $gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}$ à un mot $\overline{V_i}$ $(1 \leq i \leq n-1-C)$ prend une valeur $\lfloor \frac{p}{C_j} \rfloor$ pour une puissance W_j^p, cette fonction $gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}$ prend la valeur $\lfloor \frac{p+1}{C_j} \rfloor$ sur le mot W_j^{p+1} apparaissant dans $\overline{V_i}$. Or le nombre maximal de pas à faire entre $\overline{V_i}$ et $\overline{V_{i+1}}$ est inférieur à K_1 par définition de K_1. Quitte à poser $K = CK_1$, comme $C \geq C_i$, pour chaque valeur p que prend la fonction gap dans $\overline{V_i}$, il existe une valeur strictement supérieure $p+1$ dans $\overline{V_{i+C}}$.

Lorsque n tend vers l'infini, nous obtenons bien des vagues K-décroissantes de plus en plus longues.

De plus, comme pour chaque valeur p que prend la fonction gap dans $\overline{V_i}$, il existe une valeur strictement supérieure $p+1$ dans $\overline{V_{i+C}}$, en posant $K' = C$ nous obtenons le deuxième point :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \max_{vague}^{H,K}(\sigma^N(a)) < \max_{vague}^{H,K}(\sigma^{N+K}(a)) \quad \square$$

Corollaire : Pour σ une substitution à croissance polynomiale au moins quadratique, il existe un ensemble non vide $\mathcal{E}$ de mots de même longueur et $K > 0$ tels que des vagues arbitrairement longues effectuant des pas de longueur K soient des facteurs apparaissant dans l'ensemble des puissances $\{\sigma^N(a)\}_{N\in\mathbb{N}}$.

Plus précisément, il existe $K' > 0$ telle que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \max_{vague}^{H,K}(\sigma^N(a)) < \max_{vague}^{H,K}(\sigma^{N+K}(a))$$

Démonstration : Une substitution à croissance polynomiale au moins quadratique possède au moins une lettre à croissance quadratique (**Lemme 14**). □

ExemplePour la substitution : $\sigma(0) = 01$ $\sigma(1) = 12$ $\sigma(2) = 23$ et $\sigma(3) = 3$, nous avons :

$$\sigma^\infty(0) = 01|12|122\ 3\ |\ 122\ 3\ 2\ 33\ |\ 122\ 3\ 2\ 33\ 2\ 333\ |\ 122\ 3\ 2\ 33\ 2\ 333\ 2\ 3333\ |\ldots$$

Donc pour $\mathcal{E} = 3$, la fonction $gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}$ prend les valeurs successives :

$$0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, 2, 3, 0, 0, 1, 2, 3, 4\ldots$$

En posant $K = 1$ et $H = 1$, $\max_{vague}(1) = 0$, $\max_{vague}(2) = 0$ puis $\max_{vague}(3) = 1$, $\max_{vague}(4) = 2$, $\max_{vague}(5) = 3$, $\max_{vague}(6) = 4$ et ainsi $\max_{vague}(N) = N - 2\ldots$

3.4 Conclusion - Partitions de l'ensemble des substitutions

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points fixes d'une substitution σ d'un alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots b-1\}$ dans $\mathcal{A}^*$ telles qu'il existe $a \in \mathcal{A}$ vérfiant $\sigma(a) = aW$ pour $W \neq \epsilon$.

Nous pouvons partitionner cet ensemble $\mathcal{S}$ selon divers critères :
- selon leur complexité : $p(n)$ de l'ordre de n, $n \log\log n$, $n \log n$ ou n^2.
- selon la croissance de la substitution en partant de a : $|\sigma^n(a)|$ polynomial ou exponentiel.
- selon l'existence ou non de bégaiements : $\mathcal{B}$ ou $\overline{\mathcal{B}}$.
- selon l'existence ou non d'une lettre à croissance maximale qui se répète : $\mathcal{L}$ ou $\overline{\mathcal{L}}$.
- selon qu'il existe ou non des facteurs à croissance bornée de longueur arbitrairement grande : $\mathcal{F}$ ou $\overline{\mathcal{F}}$.
- selon qu'il existe ou non un mot W tel que W^n est un facteur de la suite pour tout n entier : $\mathcal{W}$ ou $\overline{\mathcal{W}}$.

Les résultats de J.-J. Pansiot [Pan84] sont alors les suivants : $\overline{\mathcal{F}} = \{x \in \mathcal{S} | p(n) = O(n \log n)\}$ et $\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{S} | p(n) \asymp n^2)\}$ par complémentaire. On peut même y lire entre les lignes que $\overline{\mathcal{W}} = \{x \in \mathcal{S} | p(n) = O(n \log n)\}$ et donc $\mathcal{W} = \{x \in \mathcal{S} | p(n) \asymp n^2)\}$ par complémentaire.

Nous avons montré dans le corollaire de la **Proposition 14** que $\overline{\mathcal{L}} \subset \mathcal{W}$ (et donc $\overline{\mathcal{W}} \subset \mathcal{L}$ par complémentaire), $\mathcal{L} = \mathcal{B}$ (et $\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{B}}$ par complémentaire) et $\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{S} | \log(|\sigma^n(0)|) \asymp n\}$. Nous avons également retrouvé que $\mathcal{F} = \mathcal{W}$.

Exemple L'inclusion $\overline{\mathcal{L}} \subset \mathcal{W}$ est stricte. Considérons la substitution σ définie de la manière suivante :

$$\begin{array}{rl} \sigma : 2 & \to 221 \\ 1 & \to 10 \\ 0 & \to 0 \end{array} .$$

La lettre 0 est une lettre bornée, la lettre 1 est à croissance linéaire et la lettre 2 est à croissance exponentielle. Cette dernière est donc de croissance maximale et se répète (immédiatement) dans $\sigma^\infty(2)$. Ce point fixe possède donc un bégaiement à croissance maximale et vérifie les hypothèses du théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca :

$$\sigma \in \mathcal{L} = \mathcal{B} = \{x \in \mathcal{S} | \log(|\sigma^n(0)|) \asymp n\}.$$

Cependant, les itérations de la lettre 1 étant de la forme $100\ldots0$, le point fixe de la substitution σ possède des facteurs à croissance bornée de taille arbitrairement grande de la forme W^n pour $W = 0$. La substitution est donc de complexité quadratique :

$$\sigma \in \mathcal{F} = \mathcal{W} = \{x \in \mathcal{S} | p(n) \asymp n^2)\}.$$

Finalement, $\sigma \in \mathcal{L} \cap \mathcal{W}$, donc $\mathcal{L} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$.

Chapitre 4

Multiples rationnels et Homographies d'un réel de basse complexité

4.1 Multiples rationnels d'un réel de basse complexité

Dans toute la suite, $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ désigne un entier supérieur ou égal à 2. Cet entier servira de base entière pour l'écriture des réels x et y de $[0, 1[$. On désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble $\{0, 1, \dots, (b-1)\}$. Rappelons la **Proposition 16** établie au chapitre précédent.

Proposition 19. *Soit* $\mathbf{w}$ *une suite infinie quelconque sur l'alphabet* $\mathcal{A}$*. Soit un ensemble fini* $\mathcal{E} = \{W_1, W_2, \dots, W_m\} \subset \mathcal{A}^*$*, tel que* $|W_1| = |W_2| = \dots = |W_m|$*. Lorsqu'il existe une suite* $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$*,* M *et* $k \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}$ *vérifie les conditions :*

$$(N_i - N_{i-1}) + \sum_{j=N_{i-1}+1}^{j=N_i} |W_j| gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j) \ll N_{i-1} + \sum_{j=1}^{j=N_{i-1}} |W_j| gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j)$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \exists j_0 \in \{0, \dots i\}, \max\{gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j) | j \leq N_i\} < \max\{gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j) | j \leq N_i + M\},$$

les conditions du théorème de Adamczewski-Bugeaud-Luca ne sont pas vérifiées.

Considérons le cas d'un réel $x = 0, \mathbf{w}$ dont le développement b-adique vérifie les hypothèses de la proposition précédente empêchant la critère de puissance $\alpha = 1 + \epsilon$. Il est légitime de se demander s'il en est de même pour $x' = h(x)$ pour certaines fonctions h algébriques.

En effet, si h est algébrique, $h(x)$ est de la même nature que x. Par exemple, s'il existait $r_1 \neq 0$ et r_2 des rationnels tels que le théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca [AB06] et [ABL04] puisse s'appliquer à $h(x) = r_1 x + r_2$, nous en déduirions que $h(x)$ est rationnel ou transcendant et donc que x est rationnel ou transcendant.

Le travail présenté dans ce chapitre prouve malheureusement que si x vérifie les hypothèses de la proposition ci-dessus, il en est de même de $h(x) = r_1 x + r_2$, quels que soient les rationnels $r_1 \neq 0$ et r_2.

L'idée de considérer les multiples rationnels du nombre x s'inspire notamment des travaux de S. Lehr, J. Shallit et J. Tromp [Leh93] et [LST96] et de P. Ketkar et L. Zamboni [KZ98] dans le but de montrer que certains sous ensembles de suites (par exemple les suites automatiques) forment un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Q}$. Ces études laissent en effet sous entendre que certaines propriétés combinatoires sont stables sous l'action d'une multiplication ou d'une addition par des rationnels.

Notre preuve est composée de plusieurs étapes :
- le cas $r_1 \in \mathbb{Z}^*$ et $r_2 = 0$
- le cas $r_1 = 1$ et $r_2 \in \mathbb{Z}$
- le cas général.

Notre objectif est de montrer qu'à chaque plage W^n (pour $W \neq \epsilon$ et n suffisamment grand) apparaissant dans le développement b-adique de x, correspond une plage $(W')^{n'}$ (pour $W' \neq \epsilon$) dans le développement b-adique de $h(x)$.

Notre intérêt se porte alors sur les liens entre $|W|^n$ et $|W'|^{n'}$, les longueurs des deux plages respectives apparaissant dans x et dans $h(x)$.

4.1.1 Cas d'une écriture périodique

Les nombres $y = 0, \mathbf{w}$ qui possèdent une écriture ultimement périodique sont les nombres rationnels. Alors, $h(y)$ est encore un rationnel. Nous nous intéressons aux liens entre les pré-période et période de y et les pré-période et période de $h(y)$ en base b. Rappelons que pour U borné et $W \neq \epsilon$, l'écriture $y = 0, U\overline{W}$ signifie que $y = 0, UWWW \dots$

Commençons par quelques résultats plus ou moins triviaux.

Lemme 25. *Si x et r ont des développements en base b qui coïncident exactement sur une plage de la forme UW^k, alors pour tout entier $N \in \mathbb{Z}^*$, $x+N$ et $r+N$ coïncideront exactement sur une plage de la forme UW^k.*

Démonstration En effet, ajouter un entier ne modifie que les chiffres avant la virgule. Le développement b-adique ne change pas ($x = p, UW^k$, alors $x+N = (p+N), UW^k$). □

Soit un rationnel de $[0,1[$

$$y = \frac{p}{b^r(b^s-1)}.$$

Supposons que les entiers r et s soient minimaux (remarquons que cela ne veut pas dire que la fraction est sous une forme irréductible : par exemple, $1/3 = 3/9 = \frac{3}{10^0(10^1-1)}$, les entiers $r=0$ et $s=1$ sont minimaux mais $3/9$ n'est pas sous sa forme irréductible). Alors il existe U de longueur r et W de longueur $s \geq 1$ tels que

$$y = 0, U\overline{W} \text{ en base } b.$$

Le mot U est la prépériode minimale : en particulier, la dernière lettre a de U est différente de la dernière lettre b de W, ce qui a pour conséquence que les mots U et W n'ont aucun suffixe commun non vide. Le mot U peut être vide.

Le mot W est la période minimale. Donc W est un mot primitif. Il ne peut pas être vide. □

Lemme 26. *Soit $y = 0, U\overline{W}$ avec U et $W \neq \epsilon$ minimaux. Soit*

$$Ny = 0, U'\overline{W'}$$

où U' est supposé être la prépériode minimale. Il existe une constante K_1 ne dépendant que de N telle que

$$|U| - K_1 \leq |U'| \leq |U|.$$

Démonstration En effet, $Ny = \frac{Np}{b^r(b^s-1)} = \frac{p'}{b^{r'}(b^s-1)}$. Si b ne divise pas le numérateur p', l'entier r' est minimal. Alors, en base b, $Ny = 0, U'\overline{W'}$ où U' est la prépériode minimale. Dans ce cas, $|U'| = r' \leq r$.

Plus précisément, $r' < r$ si et seulement si b divise pN et si m désigne la plus grande puissance de b apparaissant dans pN (b^m divise exactement pN), $r' - r = m$.

En écrivant $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, notons

$$K_1 = \max\{val_{p_i}(N)) | i = 1 \dots n\}.$$

Cette constante K_1 ne dépend que de N et de b.

Comme b ne divise pas p,

$$r' \geq r - K_1$$

après simplification de la fraction

$$\frac{Np}{b^r(b^s-1)} = \frac{p'}{b^{r'}(b^s-1)}.$$

Ainsi $|U| - K_1 \leq |U'| \leq |U|$ comme annoncé. □

Remarque : dans ce cas, il est possible de choisir W' tel que $|W'| = |W|$ bien que cela ne soit pas en général la longueur de la période minimale (cette longueur minimale divise la longueur de la période minimale de y).

Lemme 27. *Soit $y = 0, U\overline{W}$ avec U et $W \neq \epsilon$ minimaux. Soit*

$$\frac{y}{N} = 0, U'\overline{W'}$$

où U' est supposé être la prépériode minimale. Il existe une constante K_1' ne dépendant que de N telle que

$$|U| \leq |U'| \leq |U| + K_1'.$$

Démonstration C'est un corollaire du lemme précédent en posant $y' = \frac{y}{N}$ et $Ny' = y$. □

Remarque : dans ce cas, en général, W' est tel que $|W'| > |W|$: en réalité, la longueur $|W'|$ est un multiple de $|W|$.

Lemme 28. *Soit $W \neq \epsilon$ un mot borné (de préférence primitif) et q un rationnel. Soit $r_U = 0, U\overline{W}$ pour un mot U borné (éventuellement vide). Le rationnel $qr_U = m, U'\overline{W'}$ avec $W' \neq \epsilon$ primitif. Il existe alors un ensemble fini $\{W_1 W_2 \dots W_n\}$ de $\mathcal{A}^* \setminus \epsilon$ ne dépendant que de W et de q et un entier $j \in [[1, n]]$ tels que $W' = W_j$.*

$$\forall U \in \mathcal{A}^*, \exists U' \in \mathcal{A}^*, \exists i \in \{1, \dots, n\} \quad q.0, U\overline{W} = m, U'\overline{W_i}.$$

Cela traduit le fait qu'il n'existe qu'un nombre fini de périodes (minimales) possibles différentes pour l'ensemble des multiples qr des rationnels r dont la période est W.

Exemple : posons $W = 123$ et $q = 1/11$. Alors, par exemple :

$$\begin{array}{lcllcllcl}
\frac{0,123\overline{123}}{11} & = & 0,\overline{011193} & \frac{0,1123\overline{123}}{11} & = & 0,0\overline{102} & \frac{0,2123\overline{123}}{11} & = & 0,0\overline{193011} \\
\frac{0,3123\overline{123}}{11} & = & 0,\overline{028392} & \frac{0,4123\overline{123}}{11} & = & 0,0\overline{374829} & \frac{0,5123\overline{123}}{11} & = & 0,0\overline{465738} \\
\frac{0,6123\overline{123}}{11} & = & 0,0\overline{556647} & \frac{0,7123\overline{123}}{11} & = & 0,0\overline{647556} & \frac{0,8123\overline{123}}{11} & = & 0,0\overline{738465} \\
\frac{0,933\overline{123}}{11} & = & 0,0\overline{829374} & \frac{0,10123\overline{123}}{11} & = & 0,00\overline{920283} & \frac{0,11123\overline{123}}{11} & = & 0,01\overline{011193}\dots
\end{array}$$

L'ensemble de toutes les périodes (minimales) possibles des multiples qr des rationnels r dont la période est 123 est inclus dans l'ensemble fini des mots de longueurs inférieure à 6.

Démonstration Nous allons en fait montrer que la longueur d'une période minimale W' est bornée par une constante ne dépendant que de $|W|$ et q.
Soit $0, U\overline{W} = 0, U + 0, \overline{W} \times b^{-|U|}$. Finalement,

$$q0, U\overline{W} = q0, U + b^{-|U|} \times q0, \overline{W}.$$

La période de $q0, U$ est aussi celle de qU : sa longueur divise la période P_q de q.
Celle de $q0, \overline{W}$ ne dépend que de $|W|$ et q : elle est de longueur $P_{q,W}$ (inférieure à $P_q|W|$)).
La période de $q0, U\overline{W}$, leur somme, sera donc de période inférieure à $P = \text{ppcm}(P_q, P_{q,W})$.
Finalement, les périodes minimales de qr étant de longueurs inférieures à P, il n'en existe qu'un nombre fini possible. □

4.1.2 Cas d'une plage W^n de l'écriture b-adique d'un réel quelconque

Lemme 29. *Soit x un réel de $[0,1[$. Supposons qu'il existe un rationnel $r = \frac{n}{b^p(b^s-1)} = 0,U\overline{W}$ avec p minimal tel que*

$$\frac{1}{b^{p+K_1}} \leq \left| x - \frac{n}{b^p(b^s-1)} \right| \leq \frac{1}{b^{p+K_2}}.$$

Alors il existe des mots bornés U', $W' \neq \epsilon$, un mot infini V' et un entier k' tels que

$$|U| = |U'|,\ |W| = |W'|,\ \textit{et donc}$$

$$x = 0,U'W'^{k'}V' \textit{ avec } K_2 - s \leq |W'|^{k'} \leq K_1 + s \textit{ et } W' \notin Pref(V'),$$

cette dernière condition exprimant le fait que k' est en fait choisi comme étant maximal.

Démonstration Quitte à prendre le plus grand multiple de s inférieur à K_2 (resp. supérieur à K_1), nous supposerons que K_2 (resp. K_1) est un multiple de s.

- Si $|x - 0,U\overline{W}| \leq \frac{1}{b^{p+K_2}}$, alors : $|b^{p+K_2}x - b^{p+K_2}0,U\overline{W}| \leq 1$.

  En posant $N_1 = \lfloor b^{p+K_2}x \rfloor$ et $N_2 = \lfloor b^{p+K_2}0,U\overline{W} \rfloor = UW^{\frac{K_2}{s}} = UW^K$, cette inégalité devient :

  $$|N_1 - N_2| \leq 1.$$

  Lorsque $N_1 = N_2$, nous avons $x = 0,UW^KV$.
  Sinon, par exemple, $N_1 = N_2 + 1 = UW^K + 1$. Dans ce cas, lorsque W n'est pas de la forme $(b-1)^{|W|}$, seul le dernier bloc W est modifié par l'addition de l'entier 1 : cette retenue est absorbée dans le dernier bloc qui devient $W+1$. Les entiers N_1 et N_2 coïncident donc sur tous les autres blocs W. Donc $x = 0,UW^{K-1}V'$.
  Enfin, lorsque $W = (b-1)^{|W|}$, la retenue 1 remonte tout le premier bloc W, puis le second... et ainsi de suite tous les blocs par périodicité jusqu'à la dernière lettre de U (par exemple, 123 999 + 1 = 124 000). Posons alors $W' = 0^{|W|}$. L'entier p étant minimal, les mots U et W n' ont pas de suffixe non vide commun : la dernière lettre a de U n'est donc pas $(b-1)$. En notant $U = \tilde{U}a$, nous en déduisons alors que $x = 0,\tilde{U}(a+1)\ W'^K\ V'$.

  Dans tous les cas $x = 0,U'W'^{k'}V'$ avec $k' \geq K-1$, donc

  $$|W'^{k'}| \geq |W^{K-1}| \geq K_2 - s.$$

- D'autre part, par l'absurde, supposons que $k' > K_1/s + 1$ et $|W'|^{k'} > K_1 + s$
  En distinguant les cas comme dans ce qui précède, nous obtiendrions :

  $$|x - 0,U\overline{W}| < \frac{1}{b^{p+(K_1+s)}} < \frac{1}{b^{p+K_1}},$$

  ce qui contredirait l'inégalité

  $$\frac{1}{b^{p+K_1}} \leq \left| x - \frac{n}{b^p(b^s-1)} \right|.$$

  Ainsi, $K_1 + s \geq |W'|^{k'} \geq K_2 - s$. □

Proposition 20. *Soit $W \neq \epsilon$ un mot borné fixé. Soient x et r un réel et un rationnel ayant des développements en base b qui coïncident sur une plage de la forme UW^k pour un entier k maximal. Alors leurs multiples rationnels qx et qr coïncident exactement sur une plage de la forme $U'W'^{k'}$ pour $|\,|U| - |U'|\,| \leq K$, et $|\,|W^k| - |W'^{k'}|\,| \leq K'$ où K et K' sont des constantes ne dépendant que du mot W et du rationnel $q \neq 0$.*

Démonstration Posons $|W| = s \geq 1$. Comme k est supposé maximal, $x = 0, UW^kV$ pour $W \notin Pref(V)$ et nous avons les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{b^{p+(k+1)s}} \leq |x - 0, U\overline{W}| \leq \frac{1}{b^{p+ks}}.$$

Alors, pour $q \neq 0$ rationnel, il existe $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ ne dépendant que de q, tels que :

$$\frac{q}{b^{p+ks+s}} \leq |qx - q.0, U\overline{W}| \leq \frac{q}{b^{p+ks}},$$
$$\frac{1}{b^{p+ks+s+k_1}} \leq |qx - 0, U'\overline{W'}| \leq \frac{1}{b^{p+ks-k_2}}$$

Avant de poursuivre, remarquons que d'après ce qui a déjà été fait dans le cas d'un nombre rationnel (paragraphe précédent), $|\ |U'| - |U|\ | \leq K$ pour un entier K ne dépendant que du rationnel q et $s' = |W'|$ vérifie $1 \leq s' \leq P = P_{q,W}$.

D'après le lemme ci-dessus, il existe $\tilde{W'}$ V' et k' tels que :

- le réel qx soit de la forme $0, U'\tilde{W'}^{k'}V'$
- la longueur $|\tilde{W'}^{k'}|$ vérifie : $ks - k_2 - s' \leq |\tilde{W'}^{k'}| \leq ks + s + k_1 + s'$.

En posant $K' = \max\{k_2 + P, s + k_1 + P\}$ qui, d'après le lemme précédent, ne dépend que du rationnel q et du mot borné W, nous obtenons finalement :

$$|\ |W|^k - |\tilde{W'}|^{k'}\ | \leq K' \quad \square$$

Remarque 1 Le **Lemme 28** montre qu'il n'existe qu'un nombre fini de périodes minimales de qr pour des rationnels q et r dont une période est W. Dans le cas général d'un réel x contenant une plage W^k, le nombre qx contient donc une plage $W'^{k'}$ pour un mot W' tel que :

- le mot W' est une période de $q.0, U\overline{W}$ pour un mot U ou
- le mot W' est le mot $(b-1)$ ou
- le mot W' est le mot 0.

Nous en déduisons finalement notre résultat principal suivant.

4.1.3 Théorème principal

Théorème 4.1.1. *Soit $x = 0, \mathbf{w}$ tel que $\mathbf{w}$ vérifie les hypothèses de la **Proposition 19** : il existe un ensemble $\mathcal{E}$, une suite $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et une constante M tels que $gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}$ vérifie les conditions :*

$$(N_i - N_{i-1}) + \sum_{j=N_{i-1}+1}^{j=N_i} |W_j| gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j) \ll N_{i-1} + \sum_{j=1}^{j=N_{i-1}} |W_j| gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j)$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \max\{gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j) | j \leq N_i\} < \max\{gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j) | j \leq N_i + M\}.$$

Pour tous rationnels $q_1 \neq 0$ et q_2, le réel $h(x) = q_1x + q_2$ ne vérifie pas les hypothèses du théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca.

Démonstration Soient q_1 et q_2 deux rationnels. Si $\mathbf{w}$ est le développement b-adique de x, nous désignons par $h(\mathbf{w})$ le développement b-adique de $q_1x + q_2$.

Dans un premier temps, nous supposons que $q_2 = 0$.

D'après la **Remarque 1**, à chaque $W_i \in \mathcal{E}$ correspond un nombre fini de mots primitifs de la forme W'_{i_j}, $(b-1)$, ou 0 tels que chaque plage de type UW_i^k est transformée lors de la

multiplication par le rationnel q_1 en une plage $U'W_i^{'k_1}$, $(b-1)^{k_1}$ ou 0^{k_1}. De plus, d'après la **Proposition 20**, il existe K_{q_1} et K'_{q_1} ne dépendant que de q_1 et $\mathcal{E}'$ tels que dans tous les cas,

$$||U| - |U'|| \leq K_{q_1} \text{ et } ||W_i^k| - |W_{i_j}^{'k_1}|| \leq K'_{q_1}$$

(dans le cas de K'_{q_1} qui normalement dépend aussi de W_i, il suffit de prendre $K_{q_1} = \max_{W_i \in \mathcal{E}}\{K_{q_1,W_i}\}$). Posons $\mathcal{E}' = \{W'_{i_j}\} \cup \{0, b-1\}$.

Ainsi, les plages de $\mathbf{w}$ et de $h(\mathbf{w})$ se correspondent les unes les autres : elles commencent "presque" au même endroit (à une translation près de K_{q_1} constant) et sont "presque" de même longueur (à la constante K'_{q_1} près).

Nous en déduisons que $\max\{gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}'}(j)|j \leq N_i + M\}$ est atteint pour une plage $U'W_{i_j}^{'k_1}$ correspondant à l'image par h d'une plage UW_i^k vérifiant la condition :

$$|U| - K_{q_1} < |U'| < |U| + K_{q+1} \text{ et } |W_i^k| - K'_{q_1} \leq |W_{i_j}^{'k_1}| \leq |W_i^k| + K'_{q_1}.$$

Ainsi, $|W_{i_j}^{'k_1}| \leq \max\{gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j)|j \leq N_i\} + K'_{q_1}$ et

$$\max\{gap_{h(\mathbf{w})}^{\mathcal{E}'}(j)|j \leq N_i\} - K'_{q_1} \leq \max\{gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j)|j \leq N_i\}.$$

D'autre part, on doit aussi avoir $\max\{gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j)|j \leq N_i\} \leq |W_{i_j}^{'k_1}| + K'q_1$ donc

$$\max\{gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j)|j \leq N_i\} - K'_{q_1} \leq \max\{gap_{h(\mathbf{w})}^{\mathcal{E}'}(j)|j \leq N_i\}.$$

En réunissant ces deux dernières inégalités, nous obtenons finalement :

$$\max\{gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j)|j \leq N_i\} - K'_{q_1} \leq \max\{gap_{h(\mathbf{w})}^{\mathcal{E}'}(j)|j \leq N_i\} - K'_{q_1} \leq \max\{gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j)|j \leq N_i\}.$$

Ainsi, lorsque x vérifie les hypothèses ci-dessus, il en est de même de tout multiple $q_1 x$.

Ce constat est pratiquement évident dans le cas où $q_1 = 1$ et $q_2 = n$ est un entier : en effet, comme nous l'avons déjà mentionné, le fait d'ajouter un entier ne modifie pas le développement b-adique de x : ainsi, lorsque x vérifie les hypothèses de la proposition, il en est de même pour $x + n$.

Finalement, dans le cas général (q_1 et q_2 quelconques), en remarquant que $q_1 x + q_2 = q_2(\frac{q_1}{q_2}x + 1)$, nous en déduisons dans un premier temps que $\frac{q_1}{q_2}x$ vérifie les hypothèses, ainsi que $\frac{q_1}{q_2}x + 1$ puis finalement $q_1 x + q_2$. □

Théorème 4.1.2. *Soit $x = 0, \mathbf{w}$ tel que $\mathbf{w}$ est le point fixe d'une substitution polynomiale. Alors, pour tous rationnels $q_1 \neq 0$ et q_2, le réel $h(x) = q_1 x + q_2$ ne vérifie pas les hypothèses du théorème d'Adamczewski-Bugeaud-Luca.*

Démonstration Rapellons que si le développement b-adique de x est donné par une suite substitutive à croissance polynomiale, le réel x vérifie les hypothèses de la **proposition 19**, donc les hypothèses du théorème précédent. □

4.2 Images de fractions continues substitutives par une homographie rationnelle

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à une autre manière d'écrire les nombres à partir d'une entier a_0 et d'un mot $\mathbf{w} = a_1 a_2 \ldots \in \mathcal{A}^\infty$: sous forme de fractions continues.

Les termes de l'écriture de la fraction continue étant tous strictement positifs (à l'exception éventuellement du premier), l'alphabet $\mathcal{A}$ désigne dans tout ce qui suit l'ensemble $\{1, \ldots, b\}$.

Dans ce qui suit, pour $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $\mathbf{w} = a_1 a_2 \ldots \in \mathcal{A}^\infty$, nous écrivons : $x = [a_0; \mathbf{w}]$ pour désigner le nombre réel :

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots}}}.$$

Définition 4.2.1. *Soit un ensemble fini de mots de même longueur $\mathcal{E} = \{W_i\}$ et $\mathbf{w}$. La fonction associée $gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}$ est définie comme dans la **définition 3.3.3**. Nous appelons coupure à la hauteur H de la plage de longueur L la fonction suivante :*

$$C^{\mathcal{E},\mathbf{w}}_{H,L}(i) \begin{cases} = 0 \ si \ \max_{i \le j \le i+L}\{gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(j)\} < H \\ = 1 \ si \ \max_{i \le j \le i+L}\{gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(j)\} \ge H. \end{cases}$$

Cette famille de fonctions $C^{\mathcal{E},\mathbf{w}}_{H,L}$ permettent "de faire disparaître" les plages de longueurs L sur lesquelles il n'apparaît que des facteurs W_i^n (où $W_i \in \mathcal{E}$) pour lesquelles la puissance n est jugée "trop petite". Pour une suite substitutive $\mathbf{w}$ à croissance polynomiale, il existe un ensemble $\mathcal{E}$ tel que pour tout $K \in \mathbb{N}$, la fonction $C^{\mathcal{E},\mathbf{w}}_{H,L}$ n'est pas identiquement nulle. En effet, il existe un mot W tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le mot W^n est un facteur de $\mathbf{w} = \sigma^\infty(0)$ (corollaire du **Lemme 15**). Il suffit alors de supposer qu'une puissance entière de W appartient à $\mathcal{E}$.

Dans tout ce qui suit, dans le cas d'une suite substitutive, E est l'ensemble (fini) de tous les mots W primitifs tels que pour tout entier n, W^n est un facteur de $\sigma^\infty(0)$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est construit à partir de l'ensemble E comme cela a été indiqué dans le chapitre précédent au paragraphe **3.3** (en prenant le ppcm des longueurs des mots de E). Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur l'ensemble $\mathcal{E}$ ni sur $\mathbf{w}$, nous écrirons $C_{H,L}$ plutôt que $C^{\mathcal{E},\mathbf{w}}_{H,L}$.

Rappel 1 Pour une suite $\mathbf{w}$ point fixe d'une substitution à croissance polynomiale d'ordre au moins cubique, la fonction $C_{H,L}$ possède des plages arbitrairement longues $[[i, j]]$ sur lesquelles $C_{H,L} \neq 0$ (**Proposition** 18 et son corollaire).

Rappel 2 Cette fonction $C_{K,H}$ est assez similaire à la fonction $\max^{K,H}_{vague}$ qui permet de compter le nombre de "pics" supérieurs à H de la fonction $gap^{\mathcal{E}}_a$ dans une même vague K-croissante ou K-décroissante. En effet, la fonction $C_{K,H}$ permet de détecter la présence d'une telle vague (sur laquelle elle doit être constante égale à 1) tandis que la fonction $\max^{K,H}_{vague}$ calcule le nombre de fois que la fonction $gap^{\mathcal{E}}_a$ dépasse la valeur H dans une vague.

En 2005, B. Adamczewski et Y. Bugeaud [AB05] ont amélioré le critère de transcendance de J.-P. Allouche, J. Davison et M.Queffélec de [ADQZ01] et [All00] qui permettait par exemple

de démontrer la transcendance d'un réel dont l'écriture en fraction continue était déterminée par une suite sturmienne ou celle de Thue-Morse (voir [Que98]). Le critère de transcendance d'Adamczewski-Bugeaud s'applique à une plus grande famille de suites substitutives. La démonstration du cas de la suite de Thue-Morse a pu d'ailleurs être simplifiée dans [ABre]. Toutefois, cette famille de suite ne contient toujours pas les points fixes des substitutions à croissance polynomiale. En effet, il est nécessaire (mais cette fois, plus suffisant) que la suite vérifie un critère de puissance $\alpha = 1+\epsilon$. En nous inspirant de l'étude de la première partie de ce chapitre, nous nous sommes demandé si l'image d'un réel $x = [a_0; \mathbf{w}]$ où $\mathbf{w}$ est le point fixe d'une substitution à croissance polynomiale par une homographie $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ pouvait vérifier un tel critère de puissance $\alpha > 1$.

Plus généralement, nous nous sommes posé la même question pour un réel $x = [a_0; \mathbf{w}]$ dont l'écriture en fraction continue vérifie les hypothèses de la proposition suivante empêchant le critère de puissance $\alpha = 1 + \epsilon$:

Proposition 21. *Il existe un ensemble fini de mots $\mathcal{E} = \{W_i\}$, une suite $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $K, H > 0$ et $M > 0$, tels que $gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}$ vérifie les conditions :*

$$(N_i - N_{i-1}) + \sum_{j=N_{i-1}+1}^{j=N_i} |W_j| gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(j) \ll N_{i-1} + \sum_{j=1}^{j=N_{i-1}} |W_j| gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(j)$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \max K, H_{vague}(N_i) < \max^{K,H}_{vague}(N_i + M)$$

L'idée que nous développons est la suivante : dans le cas de l'étude des multiples de réels substitutifs, nous avions trouvé une grandeur $G(n)$ qui augmentait régulièrement (en fait, quitte à considérer une puissance de σ, $G(n)$ augmentait à chaque itération). De plus, en passant de x à $r_1 x + r_2$, nous avons montré que cette grandeur ne variait que très peu : pour $r_1 x + r_2$, si $G'(n)$ est la grandeur de $x' = h(x)$, $|G'(n) - G(n)| \leq K$ pour $K > 0$.

Cette grandeur $G(n)$ était la longueur de la plus grande plage W^N apparaissant dans $\sigma^n(0)$.

Cette grandeur ne nous suffit malheureusement pas pour l'étude de la fraction continue de l'image par une homographie rationnelle d'une fraction continue substitutive. En effet, nous allons voir que pour $\frac{ax+b}{cx+d}$, nous ne pourrions pas obtenir une meilleure approximation que

$$K_1 \leq \frac{G'(n)}{G(n)} \leq K_2.$$

Nous avons donc été obligé de trouver une autre grandeur vérifiant $|G'(n) - G(n)| \leq K$ pour $K > 0$. Cette grandeur est la valeur de $\max^{K,H}_{vague}$, évaluant le nombre maximal de pics contenus dans une même vague dont il nous faudra choisir correctement le pas K et la hauteur minimale H.

Le travail présenté dans cette deuxième partie de chapitre montre que si x vérifie les hypothèses de la proposition ci-dessus pour K et H donnés, il en est de même de $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, quels que soient les rationnels (a, b, c, d) avec a ou c non nul et $ad - bc \neq 0$ pour K' et H' à déterminer (remarquons que nous pouvons supposer a, b, c et d entiers, quitte à récrire la fraction). C'est le résultat du **théorème 4.2.3**.

Notation Dans tout ce qui suit, lorsque $V \in \mathcal{A}^*$ est le préfixe d'un mot W, nous notons $W_{/V}$ le mot W privé du préfixe V.

Notre preuve repose sur plusieurs résultats :

• Le théorème de Lagarias-Shallit [LS97] montre que l'image d'une fraction continue à coefficients bornés par une homographie rationnelle est une fraction continue à coefficients bornés.

Théorème 4.2.1. *Soit $x = [a_0; \mathbf{w}]$ pour $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^* = \{1, \ldots, b\}$.*
Soit $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = [b_0; \mathbf{w}'] = [b_0; b_1, b_2 \ldots]$.
Il existe alors $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \in \mathcal{B} = \{0, 1, \ldots, Mb\}$.

• L'algorithme de Raney [Ran73] : étant donné un entier $a_0 \in \mathbb{Z}$ et une suite $\mathbf{w} = a_1 \ldots$ à valeurs dans $\mathcal{A}$, nous construisons une suite construite sur l'alphabet $\{L, R\}$ en posant

$$\mathbf{w}_{a_0}^{L,R} = L^{\max(0,a_0)} R^{a_1} L^{a_2} R^{a_3} \ldots$$

Le choix des lettres L et R est expliqué dans l'**Annexe A** où l'algorithme est détaillé. Le premier terme $L^{\max(0,a_0)}$ est mis à part car a_0 peut être négatif. Dans ce cas, la première lettre du mot $\mathbf{w}_{a_0}^{L,R}$ est un R car $\max(0, a_0) = 0$ et $a_1 > 0$.

Le théorème de Raney montre que si $x = [a_0, \mathbf{w}]$ et $h(x) = [b_0, \mathbf{w}']$ pour h homographie rationnelle, il existe un transducteur $\mathcal{T}$ et des préfixes P_1 et P_2 de $\mathbf{w}{a_0}^{L,R}$ et de $\mathbf{w}'^{L,R}_{b_0}$ tel que l'image par $\mathcal{T}$ de $\mathbf{w}_{a_0}^{L,R}{}_{/P_1}$ est égale à $\mathbf{w}'^{L,R}_{b_0}{}_{/P_2}$

Théorème 4.2.2. *Soient $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{w} = a_1 \ldots$ et $\mathbf{w}' = b_1 \ldots$ deux suites infinies et h une homographie rationnelle telles que $x = [a_0; \mathbf{w}]$ et $h(x) = [b_0; \mathbf{w}']$.*
Il existe un transducteur $\mathcal{T}$ sur l'alphabet $\{L, R\}$ dont le nombre d'états est fini, des mots P_1 et P_2 de $\mathcal{A}^*$ tels que

$$\mathcal{T}(\mathbf{w}_{a_0}^{L,R}{}_{/P_1}) = \mathbf{w}'^{L,R}_{b_0}{}_{/P_2}$$

Grâce au fonctionnement de l'algorithme détaillé dans [Ran73] (voir aussi **Annexe A**), nous montrons qu'à chaque plage W^n (pour n suffisamment grand) apparaissant dans la fraction continue de x correspond une plage $W'^{n'}$ dans la fraction continue de $h(x)$.

Notre intérêt se porte alors sur les liens entre $|W|$ et $|W'|$, entre les deux entiers n et n' puis finalement entre les deux fonctions $\max_{vague}^{K,H}$ des deux suites $\mathbf{w}$ et $\mathbf{w}'$.

4.2.1 Quelques rappels sur l'algorithme de Raney

Commençons par rappeler rapidement le fonctionnement de l'algorithme de Raney [Ran73].

Soit $y = h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Le résultat de Raney assure le fait que si $x = [a_0; a_1, a_2 \ldots]$ pour des entiers a_i positifs, et si $ab - cd \neq 0$, les coefficients de la fraction continue de y peuvent être déterminés à l'aide d'un transducteur, objet similaire à un automate dont le nombre d'états est fini.

Notation Lorsqu'il existe $M > 0$ tel que $a/M \leq b \leq aM$, nous notons $a \asymp_M b$.

Définition 4.2.2. *Nous dirons que $\mathcal{T} = \{\mathcal{S}, \mathcal{V}\}$ est un transducteur lorsque $\mathcal{S}$ désigne un ensemble fini non vide (l'ensemble des états de $\mathcal{T}$) et $\mathcal{V}$ est un ensemble fini de quadruplets (S_1, V_1, V_2, S_2) (l'ensemble des transitions de $\mathcal{T}$) pour lesquels S_1 et S_2 sont deux éléments de $\mathcal{S}$ (deux états) et V_1 et V_2 deux mots finis non vides (respectivement les mots d'entrée et de sortie) formés sur l'alphabet $\mathcal{C}$ tels que :*
– *Si $(S_1, V_1, V_2, S_2) \in \mathcal{V}$ et $(S_1, V_1, V_2', S_2') \in \mathcal{V}$, alors $V_2 = V_2'$ et $S_2 = S_2'$.*

– *Pour tout $S_1 \in \mathcal{S}$, l'ensemble des mots V_1 tels qu'il existe un quadruplet (S_1, V_1, V_2, S_2) forment unun ensemble générateur de l'ensemble $\mathcal{C}^*$ dont aucun sous ensemble n'est générateur de $\mathcal{C}^*$.*

Remarque Dans ce cas de transducteur à états finis, il existe une constante absolue C telle que $\max\{|V_i| \mid V_i \text{ est un mot d'entrée ou de sortie de } \mathcal{T}\} \leq C$.

Notation Pour un préfixe V d'un mot W, nous notons $W_{/V}$ le mot W privé du préfixe V.

L'algorithme de Raney fonctionne donc de la manière suivante : si $x = [a_0; a_1 \ldots] = [a_0; \mathbf{w}]$, nous notons $\mathbf{w}_{a_0}^{L,R} = L^{\max(0,a_0)} R^{a_1} \ldots$ De même, pour $y = h(x) = [b_0; b_1 \ldots] = [b_0; \mathbf{w}']$, nous notons $\mathbf{w}'^{\,L,R}_{b_0} = L^{\max(0,b_0)} R^{b_1} \ldots$

Proposition 22. *Il existe P_1 et P_2 deux mots finis de $\{L, R\}^*$, un transducteur $\mathcal{T}$ sur l'alphabet $\mathcal{C} = \{L, R\}$ et un état S_1 de $\mathcal{T}$ tel que :*

$$\mathbf{w}'^{\,L,R}_{b_0} = P_2 \mathcal{T}_{S_1}(\mathbf{w}^{L,R}_{a_0 /P_1}),$$

où $\mathcal{T}_{S_1}$ signifie que l'initialisation du transducteur $\mathcal{T}$ se fait à l'état S_1.

Donc, quitte à omettre un préfixe de chaque suite $\mathbf{w}_{a_0}^{L,R}$ et $\mathbf{w}'^{\,L,R}_{b_0}$, ces deux suites sont images l'une de l'autre par un transducteur dont le nombre d'états est fini.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que le problème est "simplifié" et donc que

$$\mathcal{T}_{S_1}(\mathbf{w}_{a_0}^{L,R}) = \mathbf{w}'^{\,L,R}_{b_0}.$$

Ce qui nous intéresse se passe "loin". L'ajout ou le retrait d'un préfixe ne change pas l'essentiel des résultats qui suivent.

Lemme 30. *Soient $U^{L,R}$ et $U'^{\,L,R}$ deux mots de $\{L, R\} \in \mathcal{C}^*$ tels que $x = [U \ldots]$ et $h(x) = [U' \ldots]$. Supposons que $\mathcal{T}_{S_1}(U^{L,R}) = U'^{\,L,R}$ correspond à l'homographie h. Alors l'homographie h^{-1} correspond à une transformation $\mathcal{T}_{S_2}(U'^{\,L,R} \ldots)$ telle que $\mathcal{T}_{S_2}(U'^{\,L,R}) = U^{L,R}$.*

Démonstration Le fait que si $\mathcal{T}_{S_1}(U^{L,R} \ldots) = U'^{\,L,R} \ldots$, il existe un état S_2 tel que $\mathcal{T}_{S_2}(U'^{L,R} \ldots) = U^{L,R} \ldots$ est un résultat de Raney (voir [Ran73]). Ce que nous voulons montrer ici est que si $U'^{L,R}$ correspond exactement à $U^{L,R}$ par la transformation $\mathcal{T}_{S_1}$, alors $U^{L,R}$ correspond exactement à $U'^{L,R}$ par la transformation h^{-1}. Soit $\mathcal{T}_{S_2}(U'^{\,L,R}) = U''^{\,L,R}$. Par l'absurde, supposons par exemple que $|U''^{\,L,R}| > |U^{L,R}|$, alors $U^{L,R} S = U''^{\,L,R}$ pour un mot S non vide. Soit $\overline{U''^{\,L,R}} = U^{L,R} S' \neq U''^{\,L,R}$. Alors :

– le mot $\mathcal{T}_{S_1}(\overline{U''^{\,L,R}} \ldots)$ doit commencer par $U'^{\,L,R}$
– le mot $\mathcal{T}_{S_1}(\overline{U''^{\,L,R}} \ldots)$ doit commencer aussi par $U'^{\,L,R}$
– le mot $\mathcal{T}_{S_2}(U'^{\,L,R}) \ldots$ doit commencer par $U''^{\,L,R}$ d'après le premier point.

Mais d'après le deuxième point, il existe un mot S' tel que le mot $\mathcal{T}_{S_2}(U'^{\,L,R}) S'$ doit commencer par $\overline{U''^{\,L,R}} \ldots$. Cela contredit le dernier point puisque $\overline{U''^{\,L,R}} \neq U''^{\,L,R}$.

Le cas $|U''^{\,L,R}| > |U^{L,R}|$ se traite de la même manière.

Finalement, nous avons bien correspondance dans un sens comme dans l'autre entre $U^{L,R}$ et $U'^{\,L,R}$ à travers le transducteur $\mathcal{T}$. □

Proposition 23. *Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de mots de même longueurs $L > 0$ et $W \in \mathcal{E}$. Supposons que $\mathbf{w}_{a_0}^{L,R}$ commence par UW^n pour un mot U fini non vide et n entier. Si n est assez grand, $\mathbf{w}'^{\,L,R}_{b_0} = \overline{UW}^{n'}$ pour :*

$$|U| \asymp_M |\overline{U}|$$
$$|W| \asymp_M |\overline{W}| = L$$
$$n \asymp_M n'$$

Démonstration À un mot d'entrée V_1 facteur de $\mathbf{w}_{a_0}^{L,R}$ correspond un mot de sortie V_2 facteur de ${\mathbf{w}'_{b_0}}^{L,R}$. Comme le nombre d'états du transducteur est fini, il existe deux constantes c et C ne dépendant que du transducteur telles que

$$c \leq \frac{|V_2|}{|V_1|} \leq C.$$

Donc si $V = \mathcal{T}(U)$, $c|U| \leq |V| \leq C|U|$.

D'autre part, pour chaque occurrence de W, quitte à prendre une puissance de W pour éviter que le transducteur ne transforme W entièrement en une seule fois, $\mathcal{T}$ s'initialise quelque part dans W pour la première fois à la place i en l'état S_i. Il lit alors toujours le même mot V_i commençant à la place i dans le mot W faisant parti des mots de transitions de l'état S_i. Le couple (S_i, i) caractérise exactement l'état du transducteur juste avant de lire le mot V_i : ainsi, lorsque dans une autre occurrence de W, le transducteur se trouve exactement avec le même couple (S_i, i), les mots de sorties seront identiques.

Comme le nombre d'états possibles S_i est borné par S, de même que le nombre de places i possibles par $L = |W|$, si $n \geq SL+1$, il existe deux occurrences distinctes de W, disons $n_1 < n_2$ pour lesquelles le transducteur s'initialise exactement de la même manière.

De plus, pour les entiers $n_i = n_1 + i(n_2 - n_1)$, le transducteur s'initialise encore de la même manière. Donc, la suite ${\mathbf{w}'_{b_0}}^{L,R}$ est périodique pendant un certain temps. La somme des longueurs de sa pré-période $\overline{U}$ et de sa période $\overline{W}$ est de plus inférieure à

$$|\overline{U}| \leq |\overline{UW}| = |\mathcal{T}(UW^{SL})| \leq C(|U|W^{SL}|) \leq CL \times SL|U|$$

$$|\overline{W}| \leq \mathcal{T}(W^{SL}) \leq CL \times SL$$

Et en partant de UW^n pour $n > SL+1$, nous obtenons :

$$\mathcal{T}(UW^n) = \overline{UW}^{n'}.$$

Supposons maintenant que n et n' sont maximaux (W n'est pas un suffixe de U et $\overline{W}$ n'est pas un suffixe de $\overline{U}$). Montrons que $|U| \leq K'|\overline{U}|$ pour une constante K' absolue.

Remarquons que si $x' = h(x)$, alors $x = h'(x') = \frac{-dx'+b}{cx'-a}$. Si deux préfixes de x et x' se correspondent par l'algorithme de Raney en considérant la transformation $x' = h(x)$, ils doivent aussi se correspondre par l'algorithme de Raney par la transformation $x = h'(x')$. Ainsi, d'après le lemme précdent, $\mathcal{T}(\overline{UW}^{n'}) = U''W''^{\,n''}$. Avec, $UW^n = U''W''^{\,n''}$.

Supposons alors par exemple que $|\overline{U}| \leq \frac{|U|-2L}{CL^2S}$. Alors, $|U''| \leq CL^2S\frac{|U|-2L}{CL^2S} \leq |U| - 2L$. Cela signifie que $W''^{n''}$ commence strictement avant W^n. Par chevauchement des deux "puissances", W et W'' sont la puissance d'un même mot primitif. De plus, $UW^n = U''W^{n''}$ pour $|U''| \leq |U| - 2L$. Donc n n'était pas la puissance maximale possible.

Finalement, si n est supposé maximal, $|\overline{U}| \geq \frac{|U|-2L}{CL^2S}$. Si $|U| \geq 4L$, alors $|U| - 2L \geq \frac{|U|}{2}$ et $|\overline{U}| \geq \frac{|U|}{2CL^2S}$. Sinon, quitte à décaler la période $\overline{W}$ d'une place vers la droite, il est toujours possible de poser $\overline{U} \geq 1 \geq \frac{|U|}{4L}$.

Dans tous les cas,

$$\frac{|U|}{M} \leq |\overline{U}| \leq M|U|$$

Il est évident que $\frac{|W|}{L} \leq |\overline{W}| \leq CLS|W|$, puisque $|W| = L$ et $|\overline{W}| \geq 1$.

La formation des mots $\overline{W}$ est essentiellement due à la plage W^n. Cependant, il se peut que certains se forment sur un suffixe de $\mathcal{T}(U^{L,R})$ en réitérant le raisonnement fait pour la longueur de $\overline{U}$

Finalement, il existe $M > 0$ tel que $\frac{|W|^n}{M} \leq |\overline{W}^{n'}| \leq M|W|^n$

Ainsi il existe $M > 0$ tel que, $|U| \asymp_M |\overline{U}|$, $|W| \asymp_M |\overline{W}|$, et $|W^n| \asymp_M |\overline{W}^{n'}|$. Des deux derniers résultats, nous déduisons $n \asymp_{M'} n'$ □

4.2.2 Cas d'une écriture périodique

Les nombres $y = [a_0, \mathbf{w}]$ qui possèdent une écriture ultimement périodique sont les nombres irrationnels quadratiques. Alors, $h(y)$ est encore un irrationnel quadratique. Nous nous intéressons aux liens entre les pré-période et période de y et les pré-période et période de $h(y)$.

Lemme 31. *Il existe une constante K ne dépendant que de h telle que si $y = [U, \ldots]$ et $h(y) = [U', \ldots]$ sont deux préfixes qui se correspondent (via Raney ou l'algorithme "habituel"),*

$$\frac{|U|}{K} \leq |U'| \leq K|U|.$$

Démonstration Via Raney, pour passer de U à U', nous passons par trois étapes : $U \to U^{LR}$, puis $U^{LR} \to U'^{LR}$ et enfin $U'^{LR} \to U'$.

Comme le transducteur est à états finis, $|U^{LR}| \asymp_M |U'^{LR}|$ (**Proposition 23**). Grâce au théorème de Lagarias-Shallit, $|U'^{LR}| \asymp_M U'$.

Enfin, comme $\mathcal{A}$ est fini, $|U| \asymp_M |U^{LR}|$.

Finalement, $|U| \asymp_{M'} |U'|$.

Corollaire *De la même manière, nous déduisons le fait que si $y = [UV \ldots]$ (U et V dans $\mathcal{A}^*$) et $h(y) = [U'V' \ldots]$ (U' et V' dans $\mathcal{A}^*$) tels que $\mathcal{T}(U^{L,R}) = U'^{L,R}$ et $\mathcal{T}(UV^{L,R}) = U'V'^{L,R}$, alors $\mathcal{T}V^{L,R} = V'^{\,L,R}$ et donc que $|V| \asymp_M |V'|$.*

Dans tout ce qui suit, a, b, c, d sont des entiers et $x' = h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Lemme 32. *Soit $x = [UV^nW]$ pour U, V finis, W infini et $n > 0$ entier maximal (cela signifie que V n'est pas un suffixe de U ni un préfixe de W.) Si n est assez grand, $x' = [\overline{UV}^{n'}\overline{W}]$ pour $\overline{U}, \overline{V}$ fini, $\overline{W}$ infini et $n' > 0$ entier maximal.*

Démonstration Supposons que $x = [UV^nW]$ pour U, V finis, W infini et $n > 0$ entier maximal. Il est facile de voir alors que $\mathbf{w}_{a_0}^{L,R} = U^{L,R}V^{L,R\ n}W^{L,R}$.

D'après la proposition précédente, $\mathbf{w}'^{\ L,R}_{b_0} = \overline{U^{L,R}V^{L,R}}^{\ n'}\overline{W^{L,R}}$.

Donc finalement, $\mathbf{w}' = \overline{UV}^{n'}\overline{W}$ □

Lemme 33. *Dans les mêmes conditions que le lemme précédent et d'après ce qui précède, il existe une constante M telle que*

$$|\overline{U}| \asymp_M |U|, |\overline{V}| \asymp_M |V| \text{ et } n' \asymp_M n$$

Démonstration Le passage du mot $\mathbf{w}$ au mot $\mathbf{w}_{a_0}^{L,R}$ se fait facilement puisque l'alphabet $\mathcal{A}$ est fini. Celui de $\mathbf{w}_{a_0}^{L,R}$ au mot ${\mathbf{w}'_{b_0}}^{L,R}$ a été démontré dans la proposition précédente. Enfin, celui de ${\mathbf{w}'_{b_0}}^{L,R}$ au mot $\mathbf{w}'$ se fait facilement puisque $\mathcal{B}$ est fini. □

Corollaire Si la fonction $gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}$ correspond au réel x, la fonction $gap_{\mathbf{w}'}^{\mathcal{E}'}$ correspondant au réel x' vérifie la propriété :

$$\forall i \leq N_n, \exists j \leq N'_n, gap_{\mathbf{w}'}^{\mathcal{E}'}(i) \asymp_M gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j).$$

Ce lemme montre que les "grands pics" de la fonction $gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}$ sont en bijection avec les "grands pics" de la fonction $gap_{\mathbf{w}'}^{\mathcal{E}'}$. Nous sommes donc capable de mettre en relation les vagues K-croissantes de la suite $\mathbf{w}$ avec les vagues MK-croissantes de la suite $\mathbf{w}'$. En effet, si la distance entre deux pics est bornée par K dans la suite de départ, elle sera bornée par MK dans la suite d'arrivée puisqu'à un mot de longueur K correspond un mot de longueur inférieure à MK par l'algorithme de Raney.

De même, à un pic de hauteur H de la suite de départ correspond un pic de hauteur H' telle que $H/M \leq H' \leq MH$ dans la suite d'arrivée.

Lemme 34. *En particulier, si $H > M$, lorsque $C_{H,K}(i) \neq 0$, il correspond un j tel que $C_{1,KM}(j) \neq 0$. Plus généralement, lorsque $H > aM$ et $C_{H,K}(i) \neq 0$, il existe j tel que $C_{a,KM}(j) \neq 0$.*

Corollaire 1 Lorsqu'il existe une vague $[[i,j]]$ telle que $C_{H,K}(m) \neq 0$ pour $m \in [[i,j]]$, il existe une vague $[[i',j']]$ telle que $|j-i| = |j'-i'|$ et $C_{\frac{H}{M},KM}(m) \neq 0$ pour $m \in [[i',j']]$.

Corollaire 2 Supposons que pour j entier, $\max_{vague}^{H,K}(j) = L$, ce qui signifie que L est le nombre maximal de "pics" supérieurs à H dans toutes les vagues K-croissantes ou K-décroissantes existant avant l'indice j de la fonction $gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}$.

Alors, d'après le **Lemme 33**, à chacun de ces pics correspond un pic de $gap_{\mathbf{w}'}^{\mathcal{E}'}$ supérieur à L/M. Ainsi, si j' est l'indice correspondant à j dans la suite d'arrivée,

$$\max_{vague}^{H/M,KM}(j') \geq L$$

Remarque 1 Mais ce raisonnement est vrai dans l'autre sens puisque $\mathbf{w}$ est aussi l'image de $\mathbf{w}'$ par une homographie utilisant le même transducteur $\mathcal{T}$. Ainsi, lorsque pour j', $\max_{vague}^{H/M,KM}(j') \geq L$, nous devons avoir aussi pour j correspondant à j' l'inégalité :

$$\max_{vague}^{H/M^2,KM^2}(j) \geq L.$$

Par contraposition, si pour j, $\max_{vague}^{H/M^2,KM^2}(j) \leq L$, alors pour j',

$$\max_{vague}^{H/M,KM}(j') \leq L.$$

Cette remarque permet de rappeler finalement que :

$$\max_{vague}^{H,K}(j) \leq \max_{vague}^{H/M,KM}(j') \leq \max_{vague}^{H/M^2,KM^2}(j).$$

Ainsi, lorsqu'il existe une constante $G > 0$ telle que pour la suite de départ,

$$|\max_{vague}^{H,K}(j) - \max_{vague}^{H/M^2,KM^2}(j)| \leq G,$$

la fonction $\max_{vague}^{H/M,KM}(j')$ correspondante pour la suite d'arrivée se comporte de la même manière que la fonction de la suite de départ.

Nous supposerons dans toute la suite qu'il existe des constantes H et K positives telles que cette condition soit vérifée par la suite $\mathbf{w}$.

Remarque 2 C'est le cas pour toutes les suites substitutives à croissance polynomiale d'ordre au moins cubique. En effet, la croissance des pics étant linéaire au fil des itérations, pour H assez grand, les pics supérieurs à H sont uniquement formés par les plages $W^nV_nW^{n+p}V_{n+1}W^{n+2p}\dots$ pour des mots V_i bornés. Sur ces plages, la fonction $gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}$ ne prend qu'un nombre N_p fini de fois des valeurs entre H/M^2 et H. Ce nombre ne dépend que des valeurs possibles de p. Ce nombre de valeurs possibles étant fini, il suffit de considérer le maximum des N_p.

4.2.3 Théorème principal

Théorème 4.2.3. *Soit $x = [\mathbf{w}]$ tel que $\mathbf{w}$ vérifie les hypothèses (Hyp) suivantes et h une homographie à coefficient rationnels non triviale.*

(Hyp) Il existe une suite $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$, des constantes H, K, G et M positives tels que $gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}$ vérifie les conditions :

$$|\max_{vague}^{H,K}(j) - \max_{vague}^{H/M^2,KM^2}(j)| \leq G$$

$$(N_i - N_{i-1}) + \sum_{j=N_{i-1}+1}^{j=N_i} |W_j| gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j) \ll N_{i-1} + \sum_{j=1}^{j=N_{i-1}} |W_j| gap_{\mathbf{w}}^{\mathcal{E}}(j)$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \max_{vague}(N_i) < \max_{vague}(N_i + M),$$

Alors, le réel $h(x)$ vérifie encore les hypothèses (Hyp). De plus, les réels x et $h(x)$ ne vérifient aucun critère de puissance $\alpha > 1$.

Démonstration Soit $G(n) = \max^{H,K}{}_{\cdot vague}(n)$ pour la suite de départ et $G'(n) = \max^{H,K}{}_{\cdot vague}(n)$ pour la suite d'arrivée.

D'après la remarque 2 précédente et la première condition

$$|\max_{vague}^{H,K}(j) - \max_{vague}^{H/M^2,KM^2}(j)| \leq G,$$

si n et n' se correspondent, les grandeurs $G(n)$ et $G'(n')$ vérifient :

$$|G(n) - G'(n')| \leq G \text{ et}$$

$$G(n) \text{ est une suite strictement croissante.}$$

Nous en déduisons que la suite $G'(n')$ est "presque" strictement croissante, *i.e.* :

$$\exists\, T \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, G'(n' + T) > G'(n').$$

Ainsi, quitte à considérer la sous suite $(n'T)_{n'\in\mathbb{N}}$, nous avons $G'(n'+1) > G'(n')$. D'autre part, la sous-suite $(N_{iT})_{i\in\mathbb{N}}$ possède la même propriété que la suite $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$, à savoir que :

$$(N_iT - N_{(i-1)T}) + \sum_{j=N_{(i-1)T}+1}^{j=N_iT} |W_j| gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(j) \ll N_{(i-1)T} + \sum_{j=1}^{j=N_{(i-1)T}} |W_j| gap^{\mathcal{E}}_{\mathbf{w}}(j)$$

Le réel $h(x)$ vérifie donc encore les hypothèses de la proposition. Il ne vérifie aucun critère de puissance $\alpha > 1$ □

Corollaire *Soit $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $\mathbf{w}$ une suite non ultimement périodique à croissance polynomiale, et $x = [a_0; \mathbf{w}]$, aucune des écritures des $h(x)$ en fraction continue (h non triviale) ne vérifie de critère de puissance $\alpha > 1$. Il n'est donc pas possible de leur appliquer le théorème d'Adamczewski-Bugeaud.*

Démonstration Les suites à croissance polynomiale d'ordre supérieur ou égal à 3 vérifient les hypothèses de la proposition. Nous excluons les suites à croissance linéaire qui sont ultimement périodiques correspondant donc aux cas des irrationnels algébriques. Reste donc à montrer le résultat pour les suites dont la croissance est quadratique.

Regardons ce qui se passe dans le cas du réel $x = [1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2 \ldots]$, cas qui se généralise.

Le seul mot primitif qui se répète à toutes les puissances entières est le mot 1. Donc $E = \{1\}$ et $\mathcal{E} = \{1\}$ également.

La fonction $gap^{\mathcal{E}}_x(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ une homographie non triviale. Les différentes plages $11\ldots1 = 1^n$ sont transformées en plages $P_iW_i^{n_i}S_i$ par l'application du l'algorithme de Raney. Cet algorithme ne peut s'initialiser au début du mot 1^n que d'un nombre fini de manières différentes. Ainsi, il n'existe qu'un nombre fini de préfixes de 1^n (n supposé assez grand) lus par l'algorithme juste avant qu'il ne commence à "se périodiser". De la même manière, il n'existe qu'un nombre fini de manière d'arrêter de produire le mot W_i lorsque l'algorithme arrive à la fin de la lecture du mot 1^n. Ce raisonnement mène à la conclusion suivante : les mots P_i et S_i sont à valeur dans un ensemble fini et il existe un nombre fini de α_i et β_i rationnels tel que qu'elle que soit l'initialisation de l'algorithme au début du mot 1^n, la puissance n_i rationnelle du mot W_i vaut :

$$n_i = \alpha n + \beta \text{ pour } \alpha \in \{\alpha_i\}_{i\in I'}, \beta \in \{\beta_i\}_{i\in I'}.$$

Ainsi, si $\mathcal{E}' = \{W_i\}_{i\in I}$, à un entier $n \in \mathbb{N}$, il est possible d'associer un entier $v(n) = \alpha n + \beta$ tel que à la plage 1^n corresponde une plage "longue" de taille $v(n)$. Réciproquement, si n' est suffisamment grand, comme α et β sont bornés, $W_i^{n'}$ provient automatiquement d'une plage du type 1^n et donc $n' = \alpha n + \beta$.

Supposons maintenant que UVV' soit un bégaiement de $h(x)$. Il doit correspondre à ce VV' un bégaiement dans la suite $gap^{\mathcal{E}'}_{h(x)}(i)$.

Si ce bégaiement dans la fonction $gap^{\mathcal{E}'}_{h(x)}$ contient des éléments n' suffisamment grands, il leur correspond un entier n tel que $n' = \alpha n + \beta$. Ainsi, quitte à considérer une coupure de la fonction gap à une hauteur suffisante, les valeurs strictement positives de $gap^{\mathcal{E}}$ et de $gap^{\mathcal{E}'}$ se correspondent. Soit alors $n'_0, n'_2 \ldots n'_{K-1}, n'_K = n'_0, n'_{K+1} = n'_1 \ldots n'_{K+j} = n'_j$ le bégaiement apparaissant dans $gap^{\mathcal{E}}$. Alors il correspond un entier n dans $gap^{\mathcal{E}}$ tel que :

$$n'_0 = \alpha_0 n + \beta_0, n'_1 = \alpha_1(n+1) + \beta_1 \ldots$$

Alors $1 = \frac{n'_0}{n'_K} = \frac{\alpha_0 n+\beta_0}{\alpha_K(n+K)+\beta_K} = \ldots = \frac{n'_j}{n'_{K+j}} = \frac{\alpha_j n_j+\beta_j}{\alpha_{K+j}(n+K+j)+\beta_{K+j}}$.

Comme l'ensemble des couples $(\alpha_i, \beta_i, \alpha_{i+K}, \beta_{i+K})$ possibles est fini, disons de cardinal C, si j est suffisamment grand, il existe au moins $\frac{j}{C}$ indices pour lesquels le quadruplet est le même, disons $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$. Pour deux de ces indices i_1 et i_2,

$$\frac{\alpha i_1 + \beta}{\alpha'(i_1 + K) + \beta'} = 1 = \frac{\alpha i_2 + \beta}{\alpha'(i_2 + K) + \beta'}$$

$$\alpha i_1 + \beta - (\alpha i_2 + \beta) = \alpha'(i_1 + K) + \beta' - (\alpha'(i_2 + K) + \beta')$$
$$\alpha(i_1 - i_2) = \alpha'(i_1 - i_2)$$

Donc $\alpha = \alpha'$ puisque $i_1 \neq i_2$. Ainsi, par exemple, $\alpha i_1 + \beta = \alpha(i_1 + K) + \beta'$ et $K = \frac{\beta-\beta'}{\alpha}$ appartient donc è un ensemble fini.

Donc si le bégaiement UVV' est tel que $|U|$ est de l'ordre de n^2, le mot $|V| \leq \sum_{n\leq i\leq n+K} i \ll n^2$. Il est donc impossible de trouver une suite de bégaiements vérifiant un critère de puissance $\alpha > 1$.

Le cas général d'une substitution à croissance quadratique se traite de la même manière en envisageant la fonction $gap^{\mathcal{E}}$ pour E, l'ensemble de tous les mots primitifs appariassant à toutes les puissances $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{E}$ un ensemble de mots correspondant de longueur $\text{ppcm}\{|W| \mid W \in E\}$ et en utilisant le fait que la croissance de la fonction gap est d'ordre linéaire : quitte à extraire, $gap^{\mathcal{E}}_x(\alpha(n)) = a\alpha(n) + b$ en lieu et place de $gap^{\mathcal{E}}_x(n) = n$. □

Annexe A

Algorithme de Raney

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de l'application d'une homographie à un réel dont on connaît l'écriture en fractions continues. Nous désignons par h l'homographie $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des entiers relatifs.

Soit alors α un nombre réel différent de $-d/c$ dont nous connaissons l'écriture en fractions continues $[a_0; a_1, a_2 \ldots]$. Nous nous proposons d'étudier l'écriture en fractions continues du réel $\beta = h(\alpha) = [b_0; b_1, b_2 \ldots]$.

Pour calculer la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathbf{b}$, nous utilisons l'algorithme de G. N. Raney [Ran73] que nous allons détailler au fur et à mesure de sa programmation dans le langage Maple.

Expérimenter cet algorithme sur des nombres réels dont les développements en fractions continues sont fixés par des suites substitutives nous a permis de constater que certaines propriétés combinatoires de la suite de départ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathbf{a}$ apparaissaient encore dans la suite $\mathbf{b}$.

La compréhension du fonctionnement de l'algorithme nous a ensuite permis de démontrer ce résultat que l'expérience nous avait suggéré.

A.1 Les différentes étapes de l'algorithme de Raney :

De manière générale, dans tout ce qui suit, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathbf{a}$ désigne la suite des coefficients la fraction continue du réel $\alpha = [a_0; a_1, a_2 \ldots]$. Nous supposerons $\alpha \notin \mathbb{Q}$ de manière à ce que $\mathbf{a}$ soit une suite infinie.

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathbf{b}$ désigne la suite des coefficients de la fraction continue du réel $\beta = [b_0; b_1, b_2 \ldots] = h(\alpha)$.

Nous supposons que la suite $\mathbf{a}$ est à valeur dans un ensemble fini que nous désignons par $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, k\}$. On rappelle que le $i^{\text{ème}}$ coefficient a_i doit être strictement positif lorsque $i \neq 0$.

La première étape de l'algorithme de Raney est de construire à partir de la suite $\mathbf{a}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$, une suite notée $\mathbf{a}^{LR}$ à valeurs dans l'alphabet $\{l, r\}$.

Dans la deuxième étape, nous faisons passer la suite $\mathbf{a}^{LR}$ dans un transducteur $\mathcal{T}$ et nous obtenons une suite $\mathbf{b}^{LR} = \mathcal{T}(\mathbf{a}^{LR})$, toujours à valeurs dans l'alphabet $\{l, r\}$.

Enfin, nous reconstruisons la suite $\mathbf{b}$ finale à partir de la suite $\mathbf{b}^{LR}$. Cette suite $\mathbf{b}$ est à valeurs dans un ensemble fini $\mathcal{B} = \{0, 1, \ldots, k'\}$ où k' peut être majoré en fonction de k (travaux de Lagarias et Shallit dans [LS97]).

A.2 Analyse et programmation de l'algorithme de Raney :

A.2.1 Quelques notations :

Les lettres $p, q, p', q', d, i, j, k, s_1, s_2, g$ désignent dans toute la suite des entiers strictement positifs. L'entier d est souvent le PGCD des entiers p et q.

À l'aide des entiers p et q, nous construisons le vecteur colonne $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Les lettres l et r sont les élements de l'alphabet $\{l, r\}$.

Les lettres M, N désignent des matrices.

Les lettres L et R désignent les matrices $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Nous rappelons que pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, $L^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$ et $R^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Un élément de l'ensemble $\{L, R\}$ sera désigné par la lettre S_i.

La lettre W_* désigne également une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$souvent associée à un nombre rationnel p/q ou à un vecteur colonne $\mathbf{x}$.

A.2.2 Calculer un mot à partir d'un nombre rationnel :

Soit $\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \xi_1\xi_2 \neq 0 \right\}$ le quart de plan supérieur droit de $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine.

Lemme 35. *Pour un vecteur $X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$, il est posible de construire par récurrence une suite $(S_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{L, R\}$ et une suite $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{P}$ telles que $X = X_0$ et pour tout entier $i > 0$,*

$$X = S_1 S_2 \dots S_i X_i.$$

Démonstration : pour $X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, si $\xi_1 \leq \xi_2$ (respectivement $\xi_1 \geq \xi_2$), alors $X' = L^{-1}X \in \mathcal{P}$ donc $X = LX'$ (respectivement $X = RX'$).

Ainsi, $X = X_0 = S_1X_1 = S_1S_2X_2 = S_1 \dots S_iX_i$ avec $S_i \in \{L, R\}$ et $X_i \in \mathcal{P}$ pour tout $i > 0$.
Remarque : cet algorithme permet de déterminer une suite de manière unique lorsque pour tout entier $i \geq 0$, le vecteur $X_i = \begin{pmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \end{pmatrix}$ vérifie la relation $\xi_1^i \neq \xi_2^i$. Ce résultat mène au lemme suivant :

Lemme 36. *soit $X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$.*

Si $\xi_1/\xi_2 \in \mathbb{Q}$, il existe un entier n tel que $X_n = \begin{pmatrix} \xi_1^n \\ \xi_2^n \end{pmatrix}$ et $\xi_1^n = \xi_2^n = \xi_1^0 \wedge \xi_2^0$. L'algorithme précédent permet donc de construire deux suites $\{\boldsymbol{S}, L, R^\infty\}$ et $\{\boldsymbol{S}, R, L^\infty\}$ où $\boldsymbol{S} = S_1, S_2 \dots S_n$ est déterminé de manière unique.

Si $\xi_1/\xi_2 \notin \mathbb{Q}$, pour tout entier i, $\xi_1^i \neq \xi_2^i$ et l'algorithme précédent permet de construire une suite $\boldsymbol{S} = \{S_1, S_2, \dots\}$ de manière unique.

Démonstration : ce résultat est entre autres démontré dans les travaux de A. Hurwitz [Hur94] et rappelé dans [Ran73].

Notre première procédure éxecute cet algorithme pour $\xi_1 = p$ et $\xi_2 = q$ deux entiers. Elle détermine le produit $W_{p/q}$ des matrices L et R, l'entier $d = p \wedge q$.

La variable "List" conserve les différentes matrices S_i tandis que la variable "List2" conserve les lettres correspondantes (r pour une matrice R et l pour pour une matrice L).

```
> restart; with(StringTools):with(LinearAlgebra):
```

```
> rationalword := proc (p,q)
> local i,j,k,M;
> global pgcd,List,List2,L,R;
> R:=< <1,0>|<1,1>>:
> L:=< <1,1>|<0,1>>:
> i:=p; j:=q; List:=[NULL]; List2:=[NULL]:
> while i <> j do
> if i>j then
> i:=i-j;List:=[op(List),R];List2:=[op(List2),r];
> else
> j:=j-i;List:=[op(List),L];List2:=[op(List2),l];
> end if;
> end do;
> M:=< <p,q>>;
> pgcd:=i;
> end:
```

Définition : une matrice $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est dite équilibrée en lignes (row-balanced en anglais) si et seulement si $a > c$ et $d > b$ ou bien $a < c$ et $d < b$.

En supposant que $\det(N) > 0$, la condition $a > c$ et $d > b$ est la seule possible à cause du déterminant qui doit être positif.

L'ensemble $\mathcal{RB}_n$ est composé des matrices équilibrées en lignes et de déterminant $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour une matrice $N \in \mathcal{RB}_n$, posons $r(N) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d-b \\ a-c \end{pmatrix}$. D'après ce qui précède, p et q sont tous les deux des entiers positifs. Il existe donc une matrice $W_N = W_{p/q}$ tel que $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = W_N \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}$ pour $d = p \wedge q$.

Le théorème 4.4 de [Ran73] démontre que pour toute matrice $N \in \mathcal{RB}_n$, il existe un unique triplet (d, s, s') tel que :

$$NW_N = \begin{pmatrix} s'+d & s \\ s' & s+d \end{pmatrix}.$$

Nous dirons que (d, s, s') est le triplet caractéristique associé à la matrice N.

La procédure suivante calcule pour une matrice N la valeur de son triplet caractérisitque (d, s, s') et la matrice de transition W_N associée.

Pour cela, nous commençons par calculer le vecteur $r(N)$ associé à la matrice N auquel nous appliquons l'algorithme précédent. Cela nous donne la matrice W_N. Il ne reste qu'à calculer le produit NW_N pour identifier dans l'ordre les entiers s, s' et d.

```
> gss := proc (N)
> local a,b,c,d,p,q,e;
> global g,s1,s2,MatTrip;
> MatTrip:=N;
> a := N[1,1] ; b := N[1,2] ; c := N[2,1] ; d := N[2,2];
> p:=d-b ; q:=a-c ;
> rationalword(p,q);
> for e from 1 to nops(List) do
> MatTrip := MatTrip.List[e];
> end do;
> s2:=MatTrip[2,1] ; s1:=MatTrip[1,2] ; g:=MatTrip[1,1]-s2;
> end:
```

Définition : une matrice $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant positif est dite équilibrée en lignes et en colonnes (doubly-balanced en anglais) si et seulement si

$$a > c, d > b, a > b, d > c.$$

L'ensemble $\mathcal{DB}_n$ est composé des matrices équilibrées en lignes et en colonnes de déterminant $n \in \mathbb{N}^*$.

Le théorème 4.5 de [Ran73] démontre qu'il existe une unique matrice Q équilibrée en ligne et en colonne notée Q dont le triplet est (d, s, s') pour d, s et s' des entiers fixés. Notre procédure suivante calcule pour un triplet (d, s, s') donné, la matrice Q de $\mathcal{DB}_n$ associée.

Cette matrice s'obtient en partant de la matrice $\begin{pmatrix} s'+d & s \\ s' & s+d \end{pmatrix}$.

La procédure doublybal (respectivement doublybaltrans) transforme une matrice équilibrée en ligne, de $\mathcal{RB}_n$ (respectivement en colonne, de $\mathcal{CB}_n$) en une matrice équilibrée en ligne et en colonne, de $\mathcal{DB}_n$.

Par exemple, pour le programme doublybal, lorsque la première colonne de la matrice "domine" la seconde, nous multiplions à droite par la matrice L^{-1} afin de réduire le phénomène. Finalement, en un nombre fini d'étapes, nous obtenons une matrice équilibrée en colonnes.

Comme tout au long de cette procédure, les matrices restent équilibrées en lignes, la matrice finale appartient bien à l'ensemble $\mathcal{DB}_n$.

Durant cette procédure, nous mémorisons également le mot w_Q associé à la matrice W_Q qui permet de passer de la matrice $\begin{pmatrix} s'+d & s \\ s' & s+d \end{pmatrix}$ à la matrice $Q \in \mathcal{DB}_n$ équilibrée associée. Les préfixes de w_Q nous serviront plus loin à calculer toutes les matrices équilibrées en lignes ayant un triplet associé (d, s, s') fixé.

```
> doublybal := proc (N)
> local a,b,c,d,P,s,e;
> global R,L,DB,W_DB,W_DB2;
> R:=< <1,0>|<1,1>>: L:=< <1,1>|<0,1>>:
> P:=N: s:=0:
> W_DB:=< <1,0>|<0,1>>; W_DB2 := NULL;
> while s=0 do
> a := P[1,1] ; b := P[1,2] ; c := P[2,1] ; d := P[2,2];
> if a>=b and c>=d then
> P := P.L^(-1); W_DB := L.W_DB; W_DB2 := cat(l,W_DB2);
> else
> if a<=b and c<=d then
> P := P.R^(-1); W_DB := R.W_DB; W_DB2 := cat(r,W_DB2);
> else
> s:=1;
> end if;
> end if;
> end do;
> DB:=P;
> end:
> doublybaltrans := proc (N)
> local a,b,c,d,P,s,e;
> global R,L,DB,W_DB,W_DB2;
> R:=< <1,0>|<1,1>>: L:=< <1,1>|<0,1>>:
> P:=N:
> W_DB:=< <1,0>|<0,1>>; W_DB2 := NULL;
> s:=0;
> while s=0 do
> a := P[1,1] ; b := P[1,2] ; c := P[2,1] ; d := P[2,2];
> if a>=c and b>=d then
> P := R^(-1).P; W_DB := W_DB.R; W_DB2 := cat(W_DB2,r);
> else
> if a<=c and b<=d then
> P := L^(-1).P; W_DB := W_DB.L; W_DB2 := cat(W_DB2,l);
> else
> s:=1;
> end if;
> end if;
> end do;
> DB:=P;
> end:
```

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. Les états du transducteur $\mathcal{T}$ que nous utiliserons pour calculer les coefficients de la fraction continue de β correspondent exactement à l'ensemble des matrices de $\mathcal{DB}_n$.

Mais nous venons de voir qu'à chaque matrice de $\mathcal{DB}_n$ correspondait un et un seul triplé caractéristique (d, s, s'). Puisque $\det \begin{pmatrix} s'+d & s \\ s' & s+d \end{pmatrix} = d(s+s'+d) = n$, il nous suffit de trouver dans un premier temps tous les triplés (d, s, s') vérifiant la relation $d(s+s'+d) = n$ et dans un second temps d'utiliser le programme précédent en partant de la matrice $\begin{pmatrix} s'+d & s \\ s' & s+d \end{pmatrix}$ pour obtenir l'ensemble de tous les éléments de $\mathcal{DB}_n$.

Comme s et s' sont des entiers positifs, $d \leq s + s' + d$. Donc les entiers d sont les diviseurs de n inférieurs à $\sqrt{n}$.

Puis, pour chacun de ces diviseurs d, $s + s' = \frac{n}{d} - d$. L'entier s varie donc entre 0 et $\frac{n}{d} - d$ et $s' = \frac{n}{d} - d - s$.

Chaque nouveau triplé est ajouté à la liste ListTrip.

```
> triplets := proc(n)
> local m,i,j,g,splus;
> global ListTrip;
> ListTrip:=[NULL]:
> j:=floor(evalf(sqrt(n))):
> for m from 1 to j do
> if n/m=floor(n/m) then
> g:=m ; splus := n/m - g ;
> for i from 0 to splus do
> ListTrip := [op(ListTrip),< <g,i,splus-i>>]:
> end do;
> end if;
> end do;
> end:
```

Nous sommes maintenant en mesure de calculer pour un entier n toutes les matrices équilibrées en ligne et en colonne de déterminant n.

Pour cela, nous commençons par calculer tous les triplets (g, s, s') associés à l'entier n grâce au programme triplets(n).

Puis pour chaque triplet, nous reduisons la matrice $\begin{pmatrix} s'+g & s \\ s' & s+g \end{pmatrix}$ en une matrice $Q_{g,s,s'}$ équilibrée en ligne et en colonne grâce au programme doublybal().

```
> ListDB := proc(n)
> local i,G,S1,S2,localN;
> global ListMatDB;
> triplets(n);
> ListMatDB:=[NULL];
> for i from 1 to nops(ListTrip) do
> localN:=ListTrip[i];
> G:=localN[1,1] ;
> S1:=localN[2,1];
> S2:=localN[3,1];
> doublybal(< <S2+G,S2>|<S1,S1+G>>);
> localN:=DB;
> ListMatDB:=[op(ListMatDB),localN];
> end do;
> end:
```

Étant donné un mot $w \in \{l, r\}^*$, on définit la ramification (immediate offshoot en anglais) de w l'ensemble des mots v tels que :

– Tous les préfixes propres de v sont des préfixes de w.

– Le mot v n'est pas un préfixe de w.

La ramification du mot w est notée Ram_w.

Par exemple, la ramification du mot $rrlrll$ est l'ensemble $\{\mathbf{l}, r\mathbf{l}, rr\mathbf{r}, rrl\mathbf{l}, rrlr\mathbf{r}, rrlrl\mathbf{r}, rrlrll\mathbf{r}\}$.

La procédure suivante calcule pour une matrice M de $\mathcal{RB}_n$ la ramification du mot w_M.

Le mot w_M est associé à la matrice W_M qui vérifie

$$MW_M = \begin{pmatrix} s'+d & s \\ s' & s+d \end{pmatrix}.$$

En partant du mot w_M obtenu en appliquant le programme gss(M), le programme ImmOff(M) parcourt le mot en changeant à chaque étape la lettre qui est en train d'être lue (l en r et r en l) et stocke le nouveau mot obtenu dans la liste B_{M2} tandis que les matrices associées sont stockées dans la liste B_M.

```
> ImmOff := proc(M)
> local i,j,N,N2,Der;
> global R,L,W_M,B_M,W_M2,B_M2,Dern;
> R:=< <1,0>|<1,1>>: L:=< <1,1>|<0,1>>:
> gss(M); W_M:=List; W_M2:=List2; B_M:=[NULL] ; B_M2:=[NULL]; Dern:=[NULL]; Der:=NULL;
> for i from 1 to nops(W_M) do
> N:=< <1,0>|<0,1>>; N2:=NULL :
> j:=1;
> while j <= i-1 do
> N:=N.W_M[j];
> N2:=cat(N2,W_M2[j]);
> j:=j+1;
> end do;
> if W_M[i]=L then
> N:=N.R;
> N2:=cat(N2,r);
> Der:=R;
> end if;
> if W_M[i]=R then
> N:=N.L; N2:=cat(N2,l);Der:=L;
> end if;
> B_M:=[op(B_M),N];
> B_M2:=[op(B_M2),N2];
> Dern:=[op(Dern),Der];
> end do;
> N:=< <1,0>|<0,1>>; N2:=NULL; j:=1;
> while j <= nops(W_M) do
> N:=N.W_M[j];N2:=cat(N2,W_M2[j]);j:=j+1;
> end do;
> B_M:=[op(B_M),N.L];B_M2:=[op(B_M2),cat(N2,l)];Dern:=[op(Dern),L];
> B_M:=[op(B_M),N.R];B_M2:=[op(B_M2),cat(N2,r)];Dern:=[op(Dern),R];
> end:
```

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer les différents états et transitions d'un transducteur permettant de transformer la suite $\mathbf{a}^{L,R}$ en la suite $\mathbf{b}^{L,R}$ pour une homographie dont la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice équilibrée en lignes et en colonnes et dont le déterminant n est positif (a, b, c et d sont toujours des entiers naturels).

Le théorème 5.1 de [Ran73] démontre que pour $M_1 \in \mathcal{RB}_n$ et pour tout élement $v_1 \in Ram_{w_{M_1}}$ de la ramification du mot w_{M_1} associé à M_1, il existe une unique matrice $M_2 \in \mathcal{DB}_n$ et un unique mot v_2 dont la matrice W_{v_2} associée vérifient la relation :

$$M_1 W_{v_1} = W_{v_2} M_2.$$

Les états de ce transducteur sont les différentes matrices équilibrées en ligne et en colonne de déterminant n. Nous savons les trouver grâce à la procédure ListDB(n).

Pour chaque matrice M_1 de $\mathcal{DB}_n$ associée à chaque état du trasnducteur, et pour chaque mot $v_1 \in Ram_{w_{M_1}}$, le programme calcule l'unique couple $(M_2, v_2) \in \mathcal{DB}_n \mathrm{x} Ram_{w_{M_2}}$ vérifiant la relation précédente.

Alors la transition de l'état M_1 vers l'état M_2 est représentée par le quadruplet (M_1, v_1, v_2, M_2).

Le mot v_1 (respectivement v_2) est appelé le mot d'entrée (respectivement le mot de sortie) de la transition de M_1 vers M_2.

Le théorème 6.6 de [Ran73] démontre que si $M \in \mathcal{DB}_n$ et si $\mathbf{a}^{L,R}$ est la suite construite à partir du réel α, alors $\mathbf{b}^{L,R}$ est l'image de $\mathbf{a}^{L,R}$ par le transducteur précédent initialisé en l'état M.

Nous reprenons l'exemple cité dans [Ran73]. Soit $\alpha = [2; 2, 2, 1, 6, 2, \ldots]$ et $\beta = \frac{2\alpha+1}{\alpha+2}$.

En posant $S = R^2L^2R^2L^1R^6L^2\ldots$ et $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{DB}_3$, les différents états du transducteur sont associés aux matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Les différentes transitions sont (A, R, R^3, A), (A, LR, R, B), (A, L^2R, RL^2, A'), (A, L^3, L, A), (B, L, LR, A), (B, R, RL, A'), (A, L, L^3, A'), (A, R^2L, LR^2, A), (A, RL, L, B) et (A, R^3, R, A').

La suite d'entrée est $\mathbf{S} = R^2L^2R^2L^1R^6L^2\ldots = (R)(RL)(L)(R)(R)(LR)(R)(R^3)(RL)(L)\ldots$

Les états du transducteur par lesquels l'algorithme passe sont $BA'BAAABA'A'BA\ldots$

Les mots de sortie sont $(RL)(L)(LR)(R^3)(R^3)(R)(RL)(R)(L)(LR)\ldots$

Le mot final est donc $RL^3R^9LRL^2R\ldots = R^1L^3R^9L^1R^1L^2\ldots$ dont on déduit que la fraction continue de $\beta = [1; 3, 9, 1, 1, 2\ldots]$

```
> Transit := proc(n)
> local i,j,M_1,P_1,P_2,M_2,M,dd:
> global L,R,Transitions,Transitions2:
> R:=< <1,0>|<1,1>>: L:=< <1,1>|<0,1>>:
> ListDB(n);Transitions:=[NULL]:Transitions2:=[NULL];
> for i from 1 to nops(ListMatDB) do
> M_1:=ListMatDB[i]:
> ImmOff(M_1):
> M:=M_1:
> for j from 1 to nops(B_M) do
> M_1 := M_1.B_M[j]:
> M_1 := Dern[j]^(-1).M_1:
> if Dern[j][1,2]=L[1,2] then
> dd:=l;
> else dd:=r; end if;
> doublybaltrans(M_1):
> Transitions:= [op(Transitions) ,[M,B_M[j], Dern[j].W_DB,DB]];
> Transitions2:= [op(Transitions2), [M,B_M2[j], cat(dd,W_DB2),DB]];
> M_1:=M:
> end do;
> end do;
> end:
```

Avant de programmer la procédure principale de l'algorithme qui calcule l'image de $\mathbf{a}^{L,R}$ par le transducteur, la procédure Reduc(N) permet de réduire un problème général de l'homographie dont la matrice N est quelconque au cas particulier d'une homographie M dont la matrice est positive équilibrée en lignes et en colonnes.

Lors de chaque étape, nous transformons le problème (N, α, β) en un problème "équivalent" (N', α', β') jusquà ce que $N' \in \mathcal{DB}_n$.

Étape 1 : Si $a_0 < 0$, N est remplacée par $N' = \begin{pmatrix} a & b+aa_0 \\ c & d+aa_0 \end{pmatrix}$.

En posant, $\alpha' = \alpha - a_0$, nous avons $\alpha' = [0; a_1, a_2 \ldots]$. Or $\beta = [b_0; b_1, \ldots] = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d} = \frac{a\alpha'+(b+aa_0)}{c\alpha'+(d+ca_0)}$.

Donc les problèmes (N, α, β) et (N', α', β) sont équivalents.

Dès lors, l'entier a_0 sera supposé positif ou nul.

Étape 2 :

Si $\det(N) < 0$ posons $N' = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$ et $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$.

Dans ce cas, si $\mathbf{S}$ est la suite obtenue à partir du réel α, alors $INV(\mathbf{S})$ est la suite obtenue à partir de la suite α' où $INV(\mathbf{S})$ est obtenue en remplaçant R par L et L par R.

Alors, $\beta = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$ si et seulement si $\beta = \frac{b\alpha'+a}{d\alpha'+c}$.

Dès lors, le déterminant $\det(N)$ sera supposé strictement positif.

Étape 3 :

Lorsque $\alpha < 1$ et $ab < 0$ ou $cd < 0$, posons $N' = NL = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix}$ et $\alpha = \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Alors, si $\alpha = L^{a_1}R^{a_2}\ldots$, avec $a_1 > 0$, $\alpha' = L^{a_1-1}R^{a_2}\ldots$.

En revanche, si $\alpha \geq 1$ et $ab < 0$ ou $cd < 0$, posons $N' = NR = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$ et $\alpha' = \alpha - 1$.

Alors, si $\alpha = R^{a_0}L^{a_1}R^{a_2}\ldots$, avec $a_0 > 0$, $\alpha' = R^{a_0-1}L^{a_1}R^{a_2}\ldots$.

Dans tous les cas, cela revient concrètement à "effacer" la première lettre de la suite α. Dans les deux cas, $a'b' \geq ab$ et $c'd' \geq cd$ et nous savons qu'au bout d'un nombre fini d'itérations, nous obtenons $ab \geq 0$ et $cd \geq 0$, ce que nous supposons dans toute la suite.

A chaque intermédiaire de étape, $\beta = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$ si et seulement si $\beta' = \frac{a'\alpha'+b'}{c'\alpha'+d'}$: les problèmes (N, α, β) et (N', α', β) sont donc équivalents.

Étape 4 :

Lorsque $c < 0$ ou $d < 0$, posons $N' = -N$ en conservant les valeurs de α et de β. Dans ce cas, $\beta = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d} = \frac{-a\alpha-b}{-c\alpha-d}$.

Nous supposons donc que $c \geq 0$ et $d \geq 0$.

Étape 5 :

Si $a < 0$ ou $b < 0$, posons $N' = R^m N = \begin{pmatrix} a+mc & b+md \\ c, d \end{pmatrix}$ et $\beta' = \beta + m$ pour m le plus petit entier positif tel que $a + mc \geq 0$ et $b + md \geq 0$ et posons $\beta' = \beta + m$. Alors les problèmes sont encore équivalents et on peut supposer $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

Dès lors, N est équilibrée en lignes et en colonnes et $n = \det(N)$.

Étape 6 :

Lorsque N n'est pas équilibrée en lignes, $N = PQ$ pour P une matrice de transition équilibrée en lignes et en colonnes de déterminant 1 et Q une matrice équilibrée en lignes. Ces matrices sont calculées par le programme doublybaltrans() qui permet d'équilibrer une matrice en lignes.

Alors, si $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, $N' = Q$, $\beta' = \frac{w\beta - y}{-z\beta + x}$, alors si $P = PROD(V)$ et $\beta'^{L,R} = S$, on a $\beta^{L,R} = VS$. Il faudra donc rajouter à la fin le préfixe V à la suite obtenue par le transducteur.

Nous pouvons donc supposer que N est une matrice équilibrée en lignes.

Étape 7 :

D'une manière similaire, lorsque N n'est pas équilibrée en lignes et en colonnes, il existe des mots V_1,V_2 et une matrice Q équilibrée tels que $M.PROD(V_1) = PROD(V_2).Q$.

Pour $PROD(V_1) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}$ et $PROD(V_2) = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}$, en posant $\alpha' = \frac{w_1\alpha - y_1}{-z_1\alpha + x_1}$ et $\beta' = \frac{w_2\beta - y_2}{-z_2\beta + x_2}$ et $N' = Q$, les problèmes (N, α, β) et (N', α', β') sont équivalents.

Enfin, si $\alpha^{L,R} = S$ et $\beta'^{L,R} = S'$, alors $\alpha'^{L,R}$ est obtenu en supprimant le préfixe V_1 de la suite S et $\beta^{L,R}$ est obtenu en rajoutant le préfixe V_2 à la suite S'.

Dès lors, N peut être supposée équilibrée en lignes et en colonnes.

```
> Reduc := proc(N)
> local  i,j,M,Suit2;
> global Fraccont,Suit,a_0,R,L,etat,INT,ic,ic2, ie,iff,ig,ih,Determ,V_1,V_2,alpha;
> R:=< <1,0>|<1,1>>: L:=< <1,1>|<0,1>>:
> M:=N; INT:=0;
> if a_0<0 then
> M:=< <M[1,1],M[2,1]>|<M[1,2]+M[1,1]*a_0,M[2,2]+M[2,1]*a_0>>;
> a_0:=0;print("il faut poser a_0=0");
> end if;
> if Determinant(M)<0 then
> M:=< <M[1,2],M[2,2]>|<M[1,1],M[2,1]>>;
> INT:=INT+1 mod 2;
> print("il faut échanger L et R dans l'écriture de la suite à rentrer dans le
transducteur");
> end if;
> Fraccont:=[a_0,op(Fraccont)]:
> Suit:=num2word(Fraccont);
> ic:=0;
> while ( M[1,1]*M[1,2]<0 or M[2,1]*M[2,2]<0 ) do
> if Suit[ic+1]="l" then
> M:=M.L; else
> M:=M.R;
> end if;
> ic:=ic+1;
> end do;
> print("il faut enlever les ",ic," permiers termes de la suite initiale");
> if (M[2,1]<0 or M[2,2]<0) then
> M:=-M;
> end if;
> if (M[1,1]<0 or M[1,2]<0) then
> if M[2,1]<>0 then i:=-floor(M[1,1]/M[2,1]); else i:=0; end if;
> if M[2,2]<>0 then j:=-floor(M[1,2]/M[2,2]); else j:=0; end if;
> ie:=max(i,j);
> M:=R^(ie).M;
> print("il faut soustraire la valeur : ",ie," à b_0");
> end if;
> Determ := Determinant(M);
> doublybaltrans(M);
> M:=DB;
> iff:=W_DB2;
> print("il faut rajouter le mot ",W_DB2," à gauche du mot final.");
> ImmOff(M);
> i:=1;
> while IsPrefix(B_M2[i],Suit)=false do
> i:=i+1;
> end do;
> V_1:=B_M[i]; doublybaltrans(M.V_1);
> V_1:=B_M2[i];V_2:=W_DB2; M:=DB;
> ig:=V_1;
> ih:=V_2;
> print("il faut enlever le préfixe ",ig,"à la suite de départ");
> print("il faut ajouter le préfixe ",ih,"à la suite de fin");
> etat:=M;
> end:
```

Le programme suivant permet de transformer la suite $\mathbf{a}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ en la suite $\mathbf{a}^{L,R}$ à valeurs dans l'ensemble $\{L, R\}$.

```
> num2word := proc(Mat)
> local letter,i,j;
> global a_0,Suitentree,INT;
> Suitentree:="";
> if INT=0 then letter:=r; else letter:=l; end if;
> for i from 1 to nops(Mat) do
> for j from 1 to Mat[i] do
> Suitentree:=cat(Suitentree,letter);
> end do;
> if letter=r then letter:=l else letter:=r end if;
> end do;
> Suitentree;
> end:
```

Le programme suivant permet de transformer la suite $\mathbf{b}^{L,R}$ à valeurs dans $\{L, R\}$ en la suite $\mathbf{b}$ à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{B}$.

```
> word2num := proc(W)
> local i,j,letter;
> global Suitesortie,b_0;
> j:=1:b_0:=0:
> while substring(W,j)=r do
> b_0:=b_0+1:
> j:=j+1:
> end do:
> Suitesortie:=[b_0];
> while j<=length(W) do
> letter:=substring(W,j);
> i:=1:
> while substring(W,j+i)=letter do
> i:=i+1
> end do;
> Suitesortie:=[op(Suitesortie),i]:
> j:=j+i;
> end do;
> end:
```

Enfin, Raney$(a_0, \mathbf{a}_{i\in[1,N]}, M)$ permet à partir de $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N, \ldots]$ et de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, de calculer les premiers termes de la fraction continue de β.

Le programme commence par transformer $\mathbf{a}$ en $\mathbf{a}^{L,R}$ puis calcule l'image de $\mathbf{a}^{L,R}$ par le transducteur.

Étant donné un problème (N, α, β), nous avons obtenu un problème (N', α', β') équivalent et réduit par la procédure précédente.

La procédure suivante calcule l'image de la suite $\mathbf{a'}^{L,R}$ de α' par le transducteur en l'initialisant à l'état N'. Le résultat est la suite $\mathbf{b'}^{L,R}$ de β'.

Il faut donc ensuite reconstruire la suite $\mathbf{b'}^{L,R}$ de β' en appliquant les transformations données par le programme précédent

Enfin, le programme transforme $\mathbf{b}^{L,R}$ en $\mathbf{b}$.

```
> Raney := proc(entier,fraccont,homograph,TLC)
> local L1,L2,final,i;
> global Fraccont,long,S,Suit,Suitesortie,etat,nn,vv,ic,ig,b_0,Suitentree,
> verific0,verific,verific1,verific2,R,L,output,ie,a_0;
> R:=< <1,0>|<1,1>>: L:=< <1,1>|<0,1>>:
> a_0:=entier:Fraccont:=fraccont;
> Reduc(homograph):
> output:="": long:=length(Suit); Suit:=substring(Suit,length(ig)+ic+1..long);
> vv:=gcd(gcd(gcd(etat[1,1],etat[1,2]),etat[2,1]),etat[2,2]);
> nn:=Determinant(etat)/vv^2;
> etat:=1/vv*etat; S:=Suit:
> if TLC=1 then
> Transit(nn);
> end if;
> long:=length(S);
> while long>1 do
> i:=1;
> while ((Transitions[i][1][1,1]<>etat[1,1]) or (Transitions[i][1][2,1]<>etat[2,1])
or (Transitions[i][1][1,2]<>etat[1,2]) or (Transitions[i][1][2,2]<>etat[2,2]))
or (not(IsPrefix(Transitions2[i][2],S))) do
> i:=i+1;
> end do;
> output:= cat (output, Transitions2[i][3]):
> etat := Transitions[i][4]:
> long:=length(Transitions2[i][2]);
> S:= Delete ( S , 1.. long):
> long := length (S):
> end do:
> output:=cat(ih,output); output:=cat(iff,output);
> word2num(output):
> L2:=Suitesortie:
> L2[1]:=L2[1]-ie:
> final:=L2:
> print(final);
> end:
> st:= time():
> Raney(-1,[5,1,1,1,2,2,3,1,2,1,1,1,2,2],< <-97,62>|<-39,25>>,1);
> time() - st;
```

``il faut poser a_0=0''

``il faut échanger L et R dans l'écriture de la suite à rentrer dans le transducteur''

``il faut enlever les '', 2, `` permiers termes de la suite initiale''

``il faut soustraire la valeur : '', 2, `` à b_0''

``il faut rajouter le mot '', $llrr$, `` à gauche du mot final.''

``il faut enlever le préfixe '', $r$, ``à la suite de départ''

``il faut ajouter le préfixe '', $rllll$, ``à la suite de fin''

$$[-2, 2, 3, 7, 1, 1, 1, 17, 1, 7, 3, 1]$$
$$2.675$$

Annexe B

Fonction $gap^{\mathcal{E}}$ et mise en évidence des "vagues"

Le programme suivant permet de représenter les vagues (il trace en réalité le graphe de la fonction $gap^{\mathcal{E}}$ définie au paragraphe **3.3**). Dans nos exemple, la liste W contient uniquement le mot 4. De manière générale, W contient tous les mots de l'ensemble $\mathcal{E}$ (n étant la taille commune de tous ces mots) servant à définir la fonction $gap^{\mathcal{E}}$

```
> gap:=proc(M,W,n)
> local l,L,gapf,gapn,w,w_1,i,k,x,y,j;
> gapf:=[]: gapn:=0:x:=[]:y:=[]:
> L:=[-1,op(M)]:
> w:=0: w_1:=0:
> for i from 3 to nops(L)-n do
> for k from 1 to n do
> x:=[op(x),L[i+k-1]]:
> if i+k-2 < nops(L)-n then y:=[op(y),L[i+n+k-1]]: end if:
> end do:
> for j from 1 to nops(W) do
> if x=W[j] then
> w_1:=1: gapn:=gapn+1: i:=i+n:
> if x=y then w_1:=2: i:= i-1: end if:
> end if:
> end do:
> if w_1<=1 then
> k:=nops(gapf):
> gapf:=[op(gapf),[k+1,gapn]]:
> gapn:=0:
> end if:
> w_1:=0: x:=[]: y:=[]:
> end do:
> if gapn<>0 then k:=nops(gapf): gapf:=[op(gapf),[k+1,gapn+1]]:end if:
> plot(gapf);
> end:
```

```
> Sigma1:=proc(i)
> local M,L,j,k,a:
> M:=[]:
> L:=[0]:
> j:=1:
> while j < i+1 do
> M:=[]:
> k:=1:
> while k < nops(L)+1 do
> a:=L[k]:
> if (a=0) then M := [op(M),0,1] :end if:
> if (a=1) then M := [op(M),2,1] :end if:
> if (a=2) then M := [op(M),2,4] :end if:
> if (a=4) then M := [op(M),4] :end if:
> k:=k+1
> end do;
> L:=M:
> j:=j+1
> end do;
> L:=M:
> L; end:
> gap(Sigma1(20),[[4]],1);
```

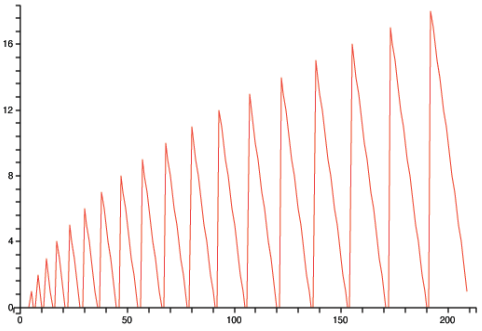


FIG. B.1 – Vagues décroissantes de σ_1

```
> Sigma2:=proc(i)
> local M,L,j,k,a:
> M:=[]:
> L:=[0]:
> j:=1:
> while j < i+1 do
> M:=[]:
> k:=1:
> while k < nops(L)+1 do
> a:=L[k]:
> if (a=0) then M := [op(M),0,1] :end if:
> if (a=1) then M := [op(M),1,2] :end if:
> if (a=2) then M := [op(M),2,4] :end if:
> if (a=4) then M := [op(M),4] :end if:
> k:=k+1
> end do;
> L:=M:
> j:=j+1
> end do;
> L:=M:
> L; end:
> gap(Sigma2(20),[[4]],1);
```

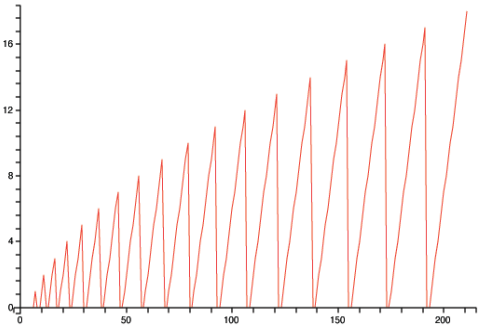


FIG. B.2 – Vagues croissantes de σ_2

```
> Sigma3:=proc(i)
> local M,L,j,k,a:
> M:=[]:
> L:=[0]:
> j:=1:
> while j < i+1 do
> M:=[]:
> k:=1:
> while k < nops(L)+1 do
> a:=L[k]:
> if (a=0) then M := [op(M),0,1] :end if:
> if (a=1) then M := [op(M),2,1,3] :end if:
> if (a=2) then M := [op(M),2,4] :end if:
> if (a=3) then M := [op(M),3,4] :end if:
> if (a=4) then M := [op(M),4] :end if:
> k:=k+1
> end do;
> L:=M:
> j:=j+1
> end do;
> L:=M:
> L; end:
> gap(Sigma3(20),[[4]],1);
```

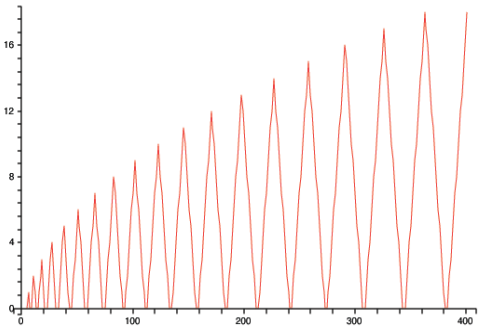


FIG. B.3 – Vagues décroissantes puis croissantes de σ_3

Bibliographie

[AB05] B. Adamczewski and Y. Bugeaud. On the complexity of algebraic numbers ii. Continued fractions. *Acta Math.*, 195 :1–20, 2005.

[AB06] B. Adamczewski and Y. Bugeaud. On the complexity of algebraic numbers i. Expansions in integer bases. *Annals of Math.*, à paraître 2006.

[ABre] B. Adamczewski and Y. Bugeaud. A short proof of the transcendence of Thue-Morse continued fractions. *Amer. Math. Monthly*, à paraître.

[ABL04] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, and F. Luca. Sur la complexité des nombres algébriques. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, 339 :11–14, 2004.

[AC03] B. Adamczewski and J. Cassaigne. On the transcendence of real numbers with a regular expansion. *J. Number Theory*, 103 :27–37, 2003.

[Ada04] B. Adamczewski. Transcendance "à la Liouville" de certains nombres réels. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, 338 :511–514, 2004.

[ADQZ01] J.-P. Allouche, J. L. Davison, M. Queffélec, and L. Q. Zamboni. Transcendence of sturmian or morphic continued fractions. *J. Number Theory*, 91 :39–66, 2001.

[All94] J.-P. Allouche. Sur la complexité des suites infinies. *Bull. Belg. Math. Soc.*, 1 :133–143, 1994.

[All00] J.-P. Allouche. Nouveaux résultats de transcendance de réels à développement non aléatoire. *Gazette des Mathématiciens*, 84 :19–34, 2000.

[AS03] J.-P. Allouche and J. Shallit. *Automatic sequences. Theory, Applications, Generalizations.* Cambridge University Press, 2003.

[AZ98] J.-P. Allouche and L. Q. Zamboni. Algebraic irrational binary numbers cannot be fixed points of non-trivial constant length or primitive morphisms. *J. Number Theory*, 69 :119–124, 1998.

[BBCP04] D. Bailey, J. Borwein, R. Crandall, and C. Pomerance. On the binary expansions of algebraic numbers. *J. Théorie Nombres Bordeaux*, 16 :487–518, 2004.

[BF02] V. Becher and S. Figueira. An example of a computable absolutely normal number. *Theoretical Comp. Sci.*, 270 :947–958, 2002.

[Bor09] É. Borel. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 27 :247–271, 1909.

[Bor50] É. Borel. Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaîne. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 230 :591–593, 1950.

[BS93] J. Berstel and P. Séébold. A characterization of overlap-free morphisms. *Disc. Appl. Math*, 46 :275–281, 1993.

[CE46] A. Copeland and P. Erdös. Note on normal numbers. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52 :857–860, 1946.

[CH73] E. M. Coven and G. A. Hedlund. Sequences with minimal block growth. *Math. Systems Theory*, 7 :138–153, 1973.

[Cha33] D. Chapernowne. The construction of decimals normal in the scale of ten. *J. London Math. Soc.*, 8 :254–260, 1933.

[Cha75] G. J. Chaitin. A theory of program size formally identical to information theory. *ACM*, 22 :329–340, 1975.

[Cob72] A. Cobham. Uniform tag sequences. *Math. Systems Theory*, 6 :164–192, 1972.

[Dej72] F. Dejean. Sur un théorème de Thue. *J. Combin. Theory. Ser. A*, 13 :90–99, 1972.

[Dek77] F. Dekking. Transcendance du nombre de Thue-Morse. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 285 :356–371, 1977.

[Eve96] J.-H. Evertse. An improvement of the quantitative subspace theorem. *Compositio Math.*, 101 :225–311, 1996.

[FM97] S. Ferenczi and C. Mauduit. Transcendence of numbers with a low complexity expansion. *J. Number Theory*, 67 :146–161, 1997.

[Gan60] F. R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*. Chelsea, 1960.

[Ghe05] I. Gheorghiciuc. The subword complexity of a class of infinite binary words. *preprint*, 2005.

[Hur94] A. Hurwitz. Über die angenäherte Darstellungen der Zahlen durch rationale Brüche. *Math. Ann.*, 44 :417–436, 1894.

[HW85] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 5th edition, 1985.

[KZ98] P. Ketkar and L. Zamboni. Primitive substitutive numbers are closed under rational multiplication. *J. Théorie Nombres Bordeaux*, 10 :315–320, 1998.

[Leh93] S Lehr. Sums and rational numtiples of q automatic sequences are q automatic. *Theoret. Comput. Sci.*, 108 :385–391, 1993.

[Lio44] J. Liouville. Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même reductible à des irrationelles algébriques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 18 :883–885, 910–911, 1844.

[LS97] J. Lagarias and J. Shallit. Linear fractional transformations of continued franctions with bounded partial quotients. *J. Théorie Nombres Bordeaux*, 9 :267–279, 1997.

[LST96] S. Lehr, J. Shallit, and J. Tromp. On the vector space of the automatic reals. *Theoret. Comput. Sci.*, 163 :193–210, 1996.

[LVdP82] J. Loxton and A. Van der Poorten. Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations. *J. Reine Angew. Math.*, 330 :159–172, 1982.

[LVdP88] J. Loxton and A. Van der Poorten. Artihmetic properties of automata : regular sequences. *J. Reine Angew. Math.*, 392 :57–69, 1988.

[MH38] M. Morse and G. A. Hedlund. Symbolic dynamics. *Amer. J. Math.*, 60 :815–866, 1938.

[MP92] F. Mignosi and G. Pirillo. Repetitions in the Fibonacci infinite word. *RAIRO Inform. Théor. App.*, 26 :199–204, 1992.

[Pan84] J.-J Pansiot. Complexité des facteurs des mots infinis engendrés par morphismes itérés. *ICALP84, Ed. J. Paredaens, Springer Verlag, Lect. Notes Comput. Sci.*, 172 :380–389, 1984.

[Que98] M. Queffélec. Transcendance des fractions continues de Thue-Morse. *J. Number Theory*, 73 :201–211, 1998.

[Ran73] G. Raney. On continued fractions and finite automata. *Math. Annal.*, 206 :265–284, 1973.

[Rid57] D. Ridout. Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika*, 4 :125–131, 1957.

[Rot55] K. Roth. Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika*, 2 :1–20, 1955.

[RZ00] R. Risley and L. Zamboni. A generalization of sturmian sequences : combinatorial structure and transcendence. *Acta Arith.*, 95 :167–184, 2000.

[Śé85] P. Séébold. Sequences generated by infinitely iterated morphisms. *Disc. Appl. Math*, 11 :255–264, 1985.

[Sch72] W Schmidt. Norm form equations. *Ann. of Math. (2)*, 96 :526–551, 1972.

[Sch77] H. Schlickewei. The p-adic Thue-Siegel-Roth-Schmidt theorem. *Arch. Math. (Basel)*, 29 :267–270, 1977.

[Sie17] W Sierpinski. Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Borel sur les nombres normaux et détermination effective d'un tel nombre. *Bull. Soc. Math. France*, 45 :125–144, 1917.

Index

σ-maximal, 32, 33

Adamczewski-Bugeaud-Luca, 14, 15, 22, 36, 42, 58, 67, 69, 71
Adamczewski-Bugeaud-luca, 68
Adamczexski-Bugeaud-Luca, 57
Allouche, 28, 31
alphabet, 6
approximation diophantienne, 17

begaiement, 10, 11, 57
Borel, 21, 22, 26

Champernowne, 21
chevauchement, 10, 11, 26, 33, 34
complexite, 22, 43
complexite, 13, 14, 22, 42, 57, 71
conjecture de Borel, 22
croissance, 8, 9, 16, 26, 28, 30, 43, 49, 57, 58, 71
croissance exponentielle, 57, 58, 71
croissance polynomiale, 47, 53, 57, 59, 70, 71

exposant critique, 11

facteur, 7
facteur borne, 53, 59
factuer borne, 71
Ferenczi-Mauduit, 22, 26, 27, 33, 38
fonction *gap*, 66, 69, 105

longueur d'un mot, 6, 7

Mahler, 23, 26
matrice de transition, 9, 27
morphisme, 7, 8
morphisme primitif, 8, 9, 14
morphisme uniforme, 8, 9, 14
mot fini, 6
mot infini, 6, 8, 27
mot vide, 6, 8

normal, 21

Pansiot, 14, 16, 43, 71
Perron-Frobenius, 9, 27, 30
point fixe, 8
préfixe, 7
primitive, 28
puissance, 10–12, 14, 27, 42, 52

Ridout, 19, 26, 27

Schmidt, 20, 42
substitution, 7, 8, 17, 26–28, 42, 43, 53, 57, 70, 71
suffixe, 7
suite automatique, 8, 14, 42
suite sturmienne, 14, 26

Thue-Morse, 9, 10, 12, 23, 26, 28

uniforme, 28

vague, 69, 70, 105

Zamboni, 28, 31