



Simulation numérique et stabilité des écoulements de convection mixte en conduite rectangulaire chauffée par le bas

Xavier Nicolas

► To cite this version:

Xavier Nicolas. Simulation numérique et stabilité des écoulements de convection mixte en conduite rectangulaire chauffée par le bas. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1997. Français. NNT : . tel-00812211

HAL Id: tel-00812211

<https://theses.hal.science/tel-00812211>

Submitted on 11 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

**L'UNIVERSITE PAUL SABATIER
TOULOUSE III**

par

Xavier NICOLAS

pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Paul Sabatier

Spécialité

Mécanique des Fluides

Simulation numérique et stabilité des écoulements de convection mixte en conduite rectangulaire chauffée par le bas

Soutenue le 9 juillet 1997, devant le jury composé de:

BORIES S., Directeur de Recherche au C.N.R.S.....	Président du jury
CALTAGIRONE J.-P., Professeur de l'Université de Bordeaux I.....	Examinateur
CHARRIER-MOJTABI M.-C., M.d.C. de l'Université de Toulouse III..	Examinatrice
MOJTABI A., Professeur de l'Université de Toulouse III.....	Directeur de thèse
PADET J., Professeur de l'Université de Reims.....	Rapporteur
PLATTEN J.-K., Professeur de l'Université de Mons-Hainaut.....	Examinateur
ROUX B., Directeur de Recherche au C.N.R.S.....	Rapporteur

A Emmanuelle

et à Louise

Résumé

Nous proposons une étude numérique bidimensionnelle des écoulements laminaires de convection mixte en conduite rectangulaire horizontale chauffée par le bas (encore appelés “écoulements de Poiseuille-Bénard”). La méthode de résolution est de type volumes finis; elle est basée sur la méthode du Lagrangien augmenté.

Nous présentons une revue bibliographique, historique et complète, des travaux effectués sur ce sujet. Nous rapportons de manière détaillée les résultats de trois thèses, analysant la stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille et la stabilité faiblement non-linéaire des rouleaux thermoconvectifs transverses à l'axe de la conduite, et fournissant des mesures expérimentales très fines des champs de vitesse dans les domaines linéaires et non-linéaires. L'objectif de ce travail est d'étudier dans quelle mesure les simulations numériques s'accordent avec théories et expériences en effectuant des comparaisons quantitatives systématiques avec ces trois thèses.

Nous étudions l'influence des conditions aux limites ouvertes et périodiques sur la stabilité et sur le développement spatial et temporel des rouleaux transversaux, en prenant en compte le caractère convectif ou absolu de l'instabilité. Cinq sortes de conditions aux limites ouvertes sont testées. On montre que l'amplitude de la perturbation en amont de la frontière de sortie peut considérablement varier d'une condition à l'autre, alors que la longueur de la zone perturbée varie très peu, et que la structure de l'écoulement en dehors de la zone perturbée se conserve. Avec les conditions aux limites périodiques, les rouleaux transversaux transitent vers l'écoulement de Poiseuille au passage du seuil entre instabilité convective et stabilité linéaire. Avec les conditions aux limites ouvertes, cette transition a lieu près du seuil entre instabilité absolue et instabilité convective.

Tous les résultats de la stabilité faiblement non-linéaire sont reproduits par la simulation 2D, et certains résultats expérimentaux 3D sont retrouvés avec une grande précision. On montre que les points de désaccord qui sont mis en évidence résultent d'effets purement tridimensionnels et qu'ils ne pourront donc être traités que par la simulation numérique 3D.

Mots-clés

Poiseuille-Bénard	Lagrangien augmenté	Stabilité linéaire
Convection mixte	Conditions aux limites ouvertes	Instabilité convective
Volumes finis	Conditions aux limites périodiques	Revue bibliographique

Abstract

A two-dimensional numerical analysis of the laminar mixed convection flows in horizontal rectangular ducts heated from below (also called “Poiseuille-Bénard flows”) is presented. The algorithm is based on the augmented Lagrangian method and a finite volume type discretisation is used.

An exhaustive bibliographical review of the studies on this subject is presented, and three PhD thesis are presented more in detail. They analyse the linear stability of the Poiseuille flow and the weakly non-linear stability of the thermoconvective rolls, transverse to the axis of the duct; they also present very fine experimental measures of the velocity fields in the linear and non-linear domains. The main objective of our work is to study in which degree the numerical simulations are able to reproduce the theoretical and experimental results, by means of systematic quantitative comparisons with these three thesis.

The influence of the open and periodic boundary conditions upon the stability and space and time evolution of the transversal rolls is studied, taking into account the convective or absolute character of the instability. Five different open boundary conditions are tested. The amplitude of the perturbation upstream of the outlet boundary is shown to vary significantly from one open boundary condition to the other; on the other hand, the length of the perturbed zone and the structure of the flow outside this zone nearly not vary and can be considered as being constant. With the periodic boundary conditions, the transition between the transversal rolls and the Poiseuille flow occurs at the border between the convective instability and the linear stability regions. While with the open boundary conditions, this transition occurs between the absolute and convective instability regions.

All the results of the weakly non-linear stability theory are reproduced by the 2D numerical simulations and some of the 3D experimental results are reproduced very precisely. The problems that have to be worked on are enlightened, some of them being able to be treated only with 3D numerical simulations.

Key words

Poiseuille-Bénard	Augmented lagrangian	Linear stability
Mixed convection	Open boundary conditions	Convective instability
Finite volumes	Periodic boundary conditions	Bibliographical review

Remerciements

Cette thèse a été préparée au sein de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, UMR CNRS/INP-UPS 5502. Mon travail de recherche et d'enseignement m'ont amené à partager mon temps entre le Groupe d'Étude des Milieux Poreux, situé à Banlève, et ce qui fut le Laboratoire de Modélisation en Mécanique des Fluides, situé à l'Université Paul Sabatier. Je remercie toutes les personnes qui animent ces deux sites de m'y avoir accueilli et de m'avoir tant apporté au cours de ces années.

Je remercie tout particulièrement le professeur A. Mojtabi de m'avoir donné sa confiance pour mener à bien ce travail. Qu'il trouve ici toute ma reconnaissance pour la manière dont il dirige son équipe de recherche: en particulier, pour la qualité et la simplicité de ses rapports humains, pour sa disponibilité, pour le soutien qu'il sait apporter à ses jeunes chercheurs et pour les moyens matériels et scientifiques qu'il sait mettre à leur disposition.

Le professeur J.-K. Platten m'a fait l'honneur de me recevoir près de deux mois dans son laboratoire de l'Université de Mons-Hainaut. Je le remercie très sincèrement pour la chaleur de son accueil, et pour les nombreuses heures en tête-à-tête qu'il m'aura accordées pour me transmettre une partie de son savoir. Je lui suis profondément reconnaissant de m'avoir consacré ces moments là, qui resteront pour moi le plus riche des enseignements.

C'est sur les conseils et la recommandation du professeur J.-P. Caltagirone que j'ai pu effectuer ma thèse à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse. Je l'en remercie vivement. Je le remercie également de m'avoir permis de travailler à partir de l'un de ses codes numériques.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Messieurs J. Padet et B. Roux pour avoir accepté de consacrer, dans une période difficile, une partie de leur temps précieux à l'examen de ce document.

Je suis très touché de l'honneur que m'a fait Monsieur S. Bories en présidant le jury de ma thèse, et par l'intérêt qu'il a pu porter à mon travail. Je l'en remercie sincèrement.

A Madame M.-C. Charrier-Mojtabi j'exprime toute ma gratitude de m'avoir accueilli dans son bureau et de m'avoir ainsi permis de partager au quotidien son expérience de la recherche et de l'enseignement.

Je remercie toutes les personnes qui de près ou de loin ont contribué à ce travail: celles qui, gratuitement, m'ont consacré un peu de temps, m'ont apporté leur soutien, ou tout simplement m'ont donné le petit coup de pouce qui m'aura permis d'avancer d'un grand pas. En particulier, je tiens à remercier H. Khallouf, P. Traore, O. Thual, J.-P. Ducassou, B. Lacroix, K. Ghorayeb, M. Grundmann, M. Karimi et X. Escrive ...

Enfin, je remercie du plus profond de mon coeur celle qui, dans tous les sens du terme, m'aura toujours supporté: Emmanuelle.

Table des matières

Nomenclature	7
---------------------	----------

Chapitre I : Introduction	17
----------------------------------	-----------

1 Convection naturelle et convection mixte	17
1.1 Convection naturelle dans une couche fluide horizontale	17
1.2 L'écoulement de Poiseuille-Bénard	20
2 Objectifs de l'étude et plan de l'exposé	27

Première partie : Bibliographie

Chapitre II : Revue générale et historique	35
---	-----------

1 1920-1951: les expériences pionnières	37
2 1962-1984: les analyses de stabilité linéaire et les vérifications expérimentales	40
2.1 Écoulement pleinement établi	40
2.1.1 Stabilité des $R_{//}$ de première et de deuxième espèce et transfert thermique	40
2.1.2 Stabilité des $R_{\perp}$ en conduite d'extension latérale infinie	43
2.1.3 Vérifications expérimentales de l'augmentation de $Ra_{\perp}^*$ avec Re	45
2.1.4 Écoulements de $R_{//}$ avec gradient horizontal de température	48
2.2 Zone d'entrée thermique	48
2.3 Tableau récapitulatif des analyses de stabilité linéaire	53

3 1983-1993: l'essor de la simulation numérique directe dans les applications industrielles	55
3.1 Applications industrielles	55
3.1.1 L'étude des dépôts de vapeurs chimiques (la CVD)	55
a) Présentation générale de la CVD	56
b) Choix des modèles numériques et types de structures thermoconvectives observées	56
c) Quelles structures thermoconvectives privilégier en CVD?	57
3.1.2 Le refroidissement des composants électroniques	59
3.2 Analyse globale de l'écoulement	61
3.2.1 Transfert thermique dans la zone d'entrée	61
3.2.2 Longueur d'établissement	63
3.2.3 Transfert thermique dans les écoulements pleinement établis	64
4 1989-1997: les analyses fines non-linéaires des structures convectives et de leur stabilité	66
5 Conclusion	68

Chapitre III : Les travaux de références	71
---	-----------

1 La thèse de <i>Luijckx</i> (1983): analyse de la stabilité linéaire	72
1.1 La méthode d'analyse de la stabilité	73
1.1.1 Les fondements de la théorie de la stabilité linéaire hydrodynamique	73
1.1.2 Établissement des équations de perturbations et évolution temporelle de la solution	74
1.1.3 Intégration spatiale des équations de perturbation - Décomposition en modes normaux	76
1.1.4 Résolution des équations de perturbations par la méthode de Galerkin	80
1.1.5 Détermination des paramètres critiques de l'écoulement	82
1.1.6 Les six étapes principales de l'analyse de la stabilité linéaire	83

1.2 Stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille-Bénard entre deux plaques infinies.....	84
1.2.1 Cas des rouleaux transversaux ($k_y=0$).....	85
1.2.2 Cas des rouleaux longitudinaux ($k_x=0$).....	85
1.2.3 Cas des structures quelconques ($k_x \neq 0$ et $k_y \neq 0$) - Transformation de Squire généralisée.....	86
1.2.4 Les résultats numériques de Luijckx.....	88
1.3 Stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille-Bénard dans un canal d'extension latérale finie.....	92
1.3.1 Rappel des résultats en convection naturelle.....	92
1.3.2 Démarche théorique pour déterminer les paramètres critiques.....	93
1.3.3 Les résultats numériques de Luijckx.....	98
2 La thèse de Müller (1990): analyse de l'instabilité convective.....	104
2.1 Instabilité convective et instabilité absolue: définitions et généralités.....	104
2.2 A propos des équations d'amplitude et de l'équation de Ginzburg-Landau.....	108
2.3 Instabilité convective et instabilité absolue des $R_\perp$: les résultats de la thèse de Müller.....	110
2.3.1 Calcul de la courbe de transition $R_{a\perp}^{conv}$ entre les régions d'instabilités convective et absolue.....	111
2.3.2 Nombre de Nusselt, amplitude de saturation et vitesse de phase des $R_\perp$	113
2.3.3 Enveloppes de la composante de vitesse verticale maximale et longueurs d'établissement.....	115
2.3.4 Influence d'un bruit blanc à l'entrée de la conduite.....	116
2.3.5 Variation de la longueur d'onde des $R_\perp$ en fonction des conditions aux limites.....	118

3 La thèse de Ouazzani (1991): mesures expérimentales par anémométrie laser- Doppler.....	121
3.1 Les expériences de visualisation et les simulations numériques.....	121
3.2 L'analyse quantitative par anémométrie laser-Doppler.....	123
3.2.1 Technique, conditions et erreurs expérimentales.....	123
3.2.2 Résultats des mesures par anémométrie laser-Doppler.....	126
a) Mesure ponctuelle de la vitesse et évolution temporelle des structures convectives.....	126
b) Développement spatial des structures convectives - Comparaison avec Müller (1990).....	131

Deuxième partie : Méthodologie

Chapitre IV : Formulation mathématique du problème	137
1 Introduction.....	137
2 Loi de conservation de la masse.....	139
3 Loi de conservation de la quantité de mouvement.....	139
4 Loi de conservation de l'énergie.....	140
5 Approximation de Boussinesq.....	142
6 Adimensionnalisation.....	147

Chapitre V : Méthode de résolution et conditions aux limites ouvertes	151
1 Introduction.....	151
2 Résumé de l'article.....	151
3 Présentation de l'article.....	155
3.1 Introduction.....	156

3.2 Numerical procedure.....	158
3.2.1 Governing equations.....	158
3.2.2 Augmented Lagrangian Algorithm.....	159
3.2.3 Computational configurations and boundary conditions.....	164
a) First configuration (<i>Config-1</i>).....	164
b) OBCs at outlet of first configuration.....	166
c) Second configuration with PBC (<i>Config-2</i>).....	169
3.3 Results and discussion.....	171
3.4 Conclusions.....	177
3.5 References.....	180

Troisième partie : Analyse des résultats

Chapitre VI : Analyse des résultats 185

1 Observations préliminaires à partir de la reproduction numérique de certaines expériences de Ouazzani.....	188
2 Développement spatial des rouleaux transversaux.....	201
2.1 Enveloppes des amplitudes maximales de vitesse verticale.....	201
2.2 Longueur d'établissement des rouleaux transversaux.....	205
2.3 Amplitudes de saturation de la vitesse verticale.....	210
3 Transfert thermique.....	218
4 Stabilité des rouleaux transversaux vis à vis de l'écoulement de Poiseuille.....	222
4.1 Diagramme de stabilité dans le plan (Ra-Re).....	222
4.2 Comparaison du diagramme de stabilité de Ouazzani avec les résultats récents de la littérature.....	225
4.2.1 Comparaison avec des théories basées sur deux équations d'amplitude couplées.....	226

4.2.2 Comparaison avec des simulations numériques 3D et d'autres expériences.....	230
5 Évolution spatiale et temporelle des rouleaux transversaux pleinement développés.....	237
5.1 Fréquence fondamentale des $R_{\perp}$ dans le cas de <i>Config-1</i>	238
5.2 Longueur d'onde des $R_{\perp}$ dans le cas de <i>Config-1</i>	241
5.3 Fréquence fondamentale des $R_{\perp}$ dans le cas de <i>Config-2</i>	243
5.4 Longueur d'onde "naturelle" des $R_{\perp}$ dans le cas de <i>Config-2</i>	244
5.5 Vitesse de déplacement des $R_{\perp}$	246
6 Conclusion.....	253

Conclusion générale et perspectives 257

Références bibliographiques 263

Nomenclature

Notes

Les vecteurs sont notés en gras.

Les valeurs numériques suivies de “(a)” correspondent aux conditions dans lesquelles sont effectuées les mesures par anémométrie laser-Doppler des expériences de *Ouazzani (1991) et Ouazzani et al. (1990, 1993a-b, 1995)*. Ces valeurs sont utilisées pour faire des comparaisons quantitatives avec nos simulations numériques directes ou avec d'autres résultats de la littérature.

Lettres latines

A	allongement de la conduite, L/h ($A=27,7$ (a))
$A(x, t)$	modulations spatiale et temporelle de l'amplitude des perturbations dont l'évolution est donnée par la théorie des équations d'amplitude
B	aplatissement ou allongement transversal de la conduite, l/h ($B=3,63$ (a))
C_p	chaleur spécifique à pression constante ($C_p=4,1804 \cdot 10^3$ J/(kg.K) (a))
c_0, c_1, c_2	coefficients de l'équation de Ginzburg-Landau valant respectivement, pour $Pr=6,4$ et au premier ordre en Re : $[0,0183 Re]$, $[0,0199 Re]$ et $[-0,0066 Re]$
c_x, c_y	coefficients d'amplification spatiale des perturbations dans les directions longitudinales et transversales ($c_x, c_y \in R$)
D	opérateur d/dz
e	énergie interne par unité de masse
E_c	énergie cinétique
f	fréquence des rouleaux transversaux (s^{-1})
g, g	accélération et vecteur accélération de la pesanteur
h	hauteur de la conduite selon l'axe z ($h=4,15$ mm (a))

i	vecteur unitaire horizontal dirigé dans le sens de l'écoulement moyen
j	vecteur unitaire horizontal tel que $\mathbf{j}=\mathbf{k} \times \mathbf{i}$
k	vecteur unitaire vertical ascendant
k	nombre d'ondes adimensionnel d'une perturbation quelconque, $(k_x^2+k_y^2)^{1/2}$
k^*	nombre d'onde critique d'après la théorie de la stabilité linéaire, $k^*(Re=0)=3,116$
k_x, k_y	nombres d'ondes adimensionnels des perturbations dans les directions longitudinales et transversales ($k_x, k_y \in R$)
l	largeur de la conduite selon l'axe y ($l=15,05$ mm (a))
l_e	longueur d'établissement des rouleaux transversaux; longueur, depuis le début de la conduite, sur laquelle l'enveloppe $W_{max}(x)$ croît de la moitié de son amplitude de saturation ($W_s/2$)
L	longueur de la conduite selon l'axe x ($L=115$ mm (a))
L_e	longueur d'établissement réduite, $\sqrt{\mu} l_e / \xi_0$
Nt	nombre total d'itérations en temps
N_x, N_z	nombre total de mailles dans les directions x et z
n	normale sortante d'une surface
p	pression thermodynamique (adimensionnelle ou dimensionnelle) du fluide
P	pression motrice (adimensionnelle ou dimensionnelle), $p+\rho gz$
$\Delta P/\Delta x$	valeur absolue du gradient de pression horizontal constant générateur de l'écoulement de Poiseuille
P_e	puissance des forces extérieures
P_i	puissance des forces intérieures
q	densité surfacique du flux de chaleur reçu par conduction, $-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$
q	dans la théorie basée sur l'équation de Ginzburg-Landau, $q=k_x-k_x^*$
q	vecteur densité surfacique de flux de chaleur reçu par conduction, $-\kappa \nabla T$ par la loi de Fourier
Q	puissance calorifique ou flux de chaleur fournie par l'extérieur au système

r	différence entre les densités volumiques de flux de chaleur reçu et émis par rayonnement
t	temps (adimensionnel ou dimensionnel)
t_t	temps indiquant la fin d'une phase transitoire
Δt	pas de temps adimensionnel
$\mathbf{T}$	vecteur contrainte, $\bar{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n}$
T	température (adimensionnelle ou dimensionnelle) du fluide
T°	température de référence, température moyenne du fluide en général ($T^\circ=23^\circ\text{C}$ (a))
T_c	température de la plaque chaude du bas de la conduite
T_f	température de la plaque froide du haut de la conduite
ΔT	différence de température entre les plaques chaude et froide du canal, $T_c - T_f$
u, U	composante horizontale de la vitesse (adimensionnelle, respectivement dimensionnelle) dans la direction x
U°	vitesse moyenne (ou débitante) de l'écoulement dans la conduite
U	énergie interne totale
v, V	composante transversale de la vitesse (adimensionnelle, respectivement dimensionnelle) dans la direction y
$\mathbf{v}$	vecteurs vitesse adimensionnelle dont les composantes sont notées v_k ($k=1, 2, 3$) ou (u, v, w)
$\mathbf{V}$	vecteurs vitesse dimensionnelle dont les composantes sont notées V_k ($k=1, 2, 3$) ou (U, V, W)
v_g	vitesse de groupe intervenant dans l'équation de Ginzburg-Landau; $v_g = (\partial \sigma_i / \partial k_x)^*$; pour $Pr=6,4$ et au premier ordre en Re , $v_g \approx [8,299 Re]$
V_g	vitesse de groupe réduite, $v_g \tau_0 / (\mu \xi_0^2 (1 + c_1^2))^{1/2}$
V_r	vitesse des rouleaux transversaux
w, W	composante verticale de la vitesse (adimensionnelle, respectivement dimensionnelle) dans la direction z

$W_{\perp}^{\max}$	valeur maximale de W dans un écoulement de rouleaux transversaux, à mi-hauteur de la conduite, en une coordonnée axiale fixée
$W_{//}^{\max}$	valeur maximale de W dans un écoulement de rouleaux longitudinaux, à mi-hauteur de la conduite, en une coordonnée axiale fixée
$W_{\max}$	enveloppe stationnaire de la composante de vitesse verticale maximale le long de l'axe de la conduite (fonction de x)
W_s	amplitude de saturation de W : valeur de $W_{\max}(x)$ pour $x \in [x_e, x_s]$
$\mathbf{X}$	vecteur position d'une particule fluide élémentaire du milieu étudié
x, X	coordonnée axiale adimensionnelle, respectivement dimensionnelle
x_1, x_2	coordonnées axiales adimensionnelles entre lesquelles sont calculés le nombre de Nusselt et la longueur d'onde des rouleaux transversaux
x_e	coordonnée axiale adimensionnelle indiquant la fin de la zone d'entrée
x_s	coordonnée axiale adimensionnelle indiquant le début de la zone perturbée par les conditions aux limites ouvertes à la sortie de la conduite
Δx	pas adimensionnel de la discrétisation spatiale dans la direction x
y, Y	coordonnée transversale adimensionnelle, respectivement dimensionnelle
z, Z	coordonnée verticale adimensionnelle, respectivement dimensionnelle
Δz	pas adimensionnel de la discrétisation spatiale dans la direction z

Paramètres adimensionnels

A	allongement de la conduite, L/h ($A=27,7$ (a))
B	aplatissement ou allongement transversal de la conduite, l/h ($B=3,63$ (a))
Nu	moyenne spatiale du nombre de Nusselt calculé sur les parois horizontales de la conduite, le nombre de Nusselt étant le rapport entre le flux de chaleur total (somme des flux de chaleur par conduction et convection) et le flux de chaleur par conduction
$\langle Nu \rangle$	moyenne temporelle de Nu durant une phase d'écoulement pleinement établi
Gr	nombre de Grashof, $Ra/Pr = g\beta(T_c - T_f)h^3/\nu^2$
Pe	nombre de Péclet, $RePr = U^\circ h/\alpha$

Pr	nombre de Prandtl, ν/α (Pr=6,4 ^(a))
Ra	nombre de Rayleigh, $g\beta(T_c-T_f)h^3/(\nu\alpha)$
Ra*	nombre de Rayleigh critique à Re=0, i.e. Ra*=1708, ou bien, selon le contexte, Ra*=min(Ra _⊥ *, Ra _{//} *)
Ra _⊥ *	nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des rouleaux transversaux d'après l'analyse de la stabilité linéaire (Ra _⊥ * croît avec Re)
Ra _{//} *	nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des rouleaux longitudinaux d'après l'analyse de la stabilité linéaire (Ra _{//} * est indépendant de Re)
Ra _⊥ ^{conv}	nombre de Rayleigh critique entre les régions d'instabilité convective et d'instabilité absolue pour les rouleaux transversaux
Ra _{//} ^{conv}	nombre de Rayleigh critique entre les régions d'instabilité convective et d'instabilité absolue pour les rouleaux longitudinaux
Re	nombre de Reynolds, $U^\circ h/\nu$
Re*	nombre de Reynolds critique, à Ra=Ra _{//} *, marquant la transition entre écoulement de Poiseuille, rouleaux transversaux et rouleaux longitudinaux
Re* _{⊥//}	nombre de Reynolds critique marquant la transition entre rouleaux transversaux et rouleaux longitudinaux pour Ra>Ra _{//} *
Re**	nombre de Reynolds critique indiquant le seuil de blocage des rouleaux transversaux, pour les petits débits: marque la transition entre les rouleaux transversaux stationnaires et progressifs (en déplacement)
Ri	nombre de Richardson, -Ra/(Re ² Pr)

Lettres grecques

α	diffusivité thermique ($\alpha^\circ=0,1444.10^{-6}$ m ² /s ^(a))
β	coefficient de dilatation thermique ($\beta^\circ=237,62.10^{-6}$ K ⁻¹ ^(a))
γ	coefficient de l'équation de Ginzburg-Landau égal à [0,699], pour Pr=6,4
γ	coefficient de viscosité d'expansion volumique
δ	désigne l'erreur absolue sur une grandeur physique ou un paramètre lorsqu'il est placé devant

δ_{ik}	symbole de Kronecker, $\delta_{ik}=1$ quand $i=k$, $\delta_{ik}=0$ quand $i \neq k$
ε	constante très petite donnant le critère de convergence de l'algorithme itératif d'Uzawa
ε	=(Ra-1708)/1708, écart relatif au nombre de Rayleigh critique Ra*=1708
$\varepsilon_{\perp}^*$	=(Ra _⊥ *-1708)/1708
$\varepsilon_{//}^*$	=(Ra _{//} *-1708)/1708
$\varepsilon_{\perp}^{\text{conv}}$	=(Ra _⊥ ^{conv} -1708)/1708
$\varepsilon_{//}^{\text{conv}}$	=(Ra _{//} ^{conv} -1708)/1708
κ	conductivité thermique ($\kappa^\circ=0,602$ W/(m.K) ^(a))
λ	longueur d'onde adimensionnelle des rouleaux transversaux
μ	=(Ra-Ra _⊥ *)/Ra _⊥ *, écart relatif au nombre de Rayleigh critique Ra _⊥ *(Re)
μ	viscosité dynamique ($\mu^\circ=0,9325.10^{-3}$ kg/(m.s) ^(a))
ν	viscosité cinématique ($\nu^\circ=0,9348.10^{-6}$ m ² /s ^(a))
ξ_0^2	coefficient de l'équation de Ginzburg-Landau égal à [0,148], pour Pr=6,4
ρ	masse volumique ($\rho^\circ=997,54$ kg/m ³ ^(a))
σ	taux de croissance temporelle des perturbations, $\sigma_r+i\sigma_i$
σ_i	pulsation temporelle des perturbations
$\bar{\bar{\sigma}}, \sigma_{ik}$	tenseur des contraintes, $-p\delta_{ik}+\tau_{ik}$
τ	période temporelle adimensionnelle des rouleaux transversaux
τ_0	coefficient de l'équation de Ginzburg-Landau égal à [0,05496], pour Pr=6,4
$\bar{\bar{\tau}}, \tau_{ik}$	tenseur des contraintes de viscosité, $\mu(V_{i,k}+V_{k,i})+\gamma\Box.V\delta_{ik}$
φ	grandeur scalaire ou vectorielle utilisée pour remplacer un ensemble de variables vérifiant la même relation mathématique
ψ	fonction de courant, telle que $u=-\partial\psi/\partial z$ et $w=\partial\psi/\partial x$
ω	vorticité, $\partial u/\partial z - \partial w/\partial x = -\nabla^2\psi$

Abréviations et symboles

Config-1 première configuration de calcul: domaine rectangulaire avec, à l'entrée, un profil de Poiseuille pour la vitesse et une condition de Neumann pour la température, et avec, à la sortie, une condition aux limites ouvertes

Config-2 deuxième configuration de calcul: domaine rectangulaire avec des conditions aux limites périodiques

CFD Computational Fluid Dynamics (Mécanique des Fluides Numérique)

CVD Chemical Vapor Deposition (Dépôts de Vapeurs Chimiques)

LDA Laser Doppler Anemometry (Anémométrie Laser Doppler)

OBCs Open Boundary Conditions (Conditions aux Limites Ouvertes)

PBC Periodic Boundary Condition (Condition aux Limites Périodique)

PBCF Poiseuille-Bénard Channel Flow (Écoulement de Poiseuille-Bénard)

$R_{\perp}$ rouleaux transversaux

$R_{//}$ rouleaux longitudinaux

2D bidimensionnel

3D tridimensionnel

∞ infini

∇ opérateur nabla, vecteur $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ en coordonnées cartésiennes

∇^2 opérateur Laplacien, $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$

Exposants et symboles supérieurs

$^{\circ}$ état de référence ou valeur moyenne; en général, représente les caractéristiques physiques du fluide (eau) à la température moyenne T° et à la pression moyenne p°

conv désigne des paramètres ou des grandeurs physiques à la transition entre les régions d'instabilité convective et d'instabilité absolue

max désigne un maximum

*

— désigne l'état de base dont on étudie la stabilité

' désigne les perturbations

$\wedge$ désigne l'amplitude des perturbations lorsqu'elles sont écrites sous la forme de modes normaux

$\sim$ désigne les quantités après application de la transformation de Squire

Indices et symboles inférieurs

i partie imaginaire d'un nombre complexe

r partie réelle d'un nombre complexe

$\perp$ désigne une grandeur se rapportant aux rouleaux transversaux

// désigne une grandeur se rapportant aux rouleaux longitudinaux

Introduction

Chapitre I

Introduction

1 Convection naturelle et convection mixte

Cette partie a pour but d'expliquer succinctement le phénomène de convection naturelle et de faire une présentation générale qualitative des phénomènes physiques observés dans le problème qui va nous intéresser tout au long de ce document: l'écoulement de Poiseuille-Bénard. Si certains auteurs sont cités dans cette introduction, elle ne constitue pas une étude bibliographique du sujet. Celle-ci sera faite de manière exhaustive au chapitre II.

1.1 Convection naturelle dans une couche fluide horizontale¹

D'une manière générale, on appelle *convection* les mouvements de circulation présents au sein des fluides (liquides ou gaz). Lorsque ces mouvements sont occasionnés par des forces agissant à l'intérieur des fluides, on parle de *convection naturelle*. Ces forces sont le plus souvent les forces de pression (poussée d'Archimède) et de gravité, mais parfois, la source dominante des mouvements convectifs peut être la tension superficielle ou un champ électromagnétique.

¹ Pour rédiger cette partie, nous nous sommes servis de l'article de M. Velarde et C. Normand, "La convection" (1980); les auteurs y font une présentation simple et complète de la convection naturelle.

Dans la vie de tous les jours, la convection naturelle c'est, par exemple, l'air chaud qui monte au dessus du radiateur, les tourbillons dans un potage qui chauffe ou ceux qui apparaissent dans un bol de chocolat chaud. La formation de certains nuages (Cumulus, Cumulonimbus) est due à de l'air humide et chaud qui s'élève en panache convectif. A plus grande échelle encore, les courants océaniques ou bien le mouvement du magma sous la croûte terrestre, responsable de la dérive des continents, ont pour origine des mouvements convectifs de même nature.

La convection peut s'expliquer simplement si on essaie de comprendre ce qui se passe quand on perturbe très légèrement une couche fluide, initialement au repos, comprise entre deux plaques horizontales, chauffée uniformément par le bas et refroidie uniformément par le haut. Cette situation est représentée par la figure I-1 ci-dessous.

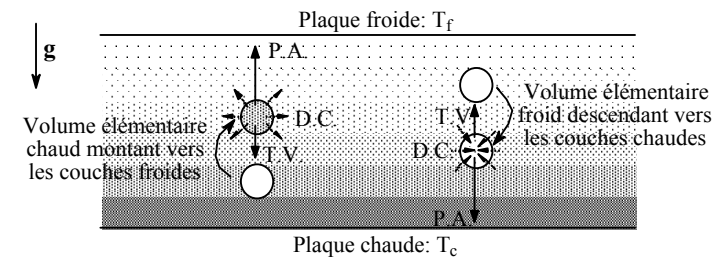


Figure I-1 : Rupture de l'équilibre des forces donnant naissance à la convection naturelle dans une couche fluide horizontale chauffée par le bas.

La situation où la couche fluide est sans mouvement et stratifiée verticalement en température correspond à un état d'équilibre dynamique: on parle de stratification stable. Il y a apparition de la convection quand il y a rupture de cet équilibre: la stratification devient instable et des déplacements spontanés de matière apparaissent à l'échelle macroscopique. Une perturbation de l'état stable peut être représentée par l'ascension d'un volume élémentaire de fluide chaud vers les couches supérieures froides. La particule chaude, en pénétrant dans cette région, se retrouve dans un milieu de densité moyenne supérieure; elle est donc soumise à la résultante (P.A.), dirigée vers le haut, de la poussée d'Archimède et du poids. Cependant, en même temps, deux facteurs s'opposent à l'ascension de la particule: tout d'abord, la force de traînée visqueuse (T.V.) qui freine le déplacement et, d'autre part, la diffusion de la chaleur

(D.C.) de la particule chaude vers le milieu environnant, qui tend à annuler tout gradient de température¹.

Donc, si la poussée d'Archimède arrive à vaincre les effets dissipatifs de la traînée visqueuse et de la diffusion de la chaleur, la convection apparaît. L'importance relative de chacun de ces trois facteurs est mesurée à l'aide d'un nombre sans dimension qu'on appelle le nombre de Rayleigh, noté Ra . Schématiquement, on a :

$$Ra = \frac{\text{poussée d' Archimède}}{\text{force de traînée visqueuse} \times \text{taux de diffusion de la chaleur}}$$

Comme l'intensité de la poussée d'Archimède est déterminée par la différence de température $\Delta T = T_c - T_f$ entre les deux plaques horizontales, Ra est proportionnel à ΔT . La convection démarre donc lorsque ΔT est suffisamment grand, i.e. lorsque le nombre de Rayleigh dépasse **une valeur critique Ra^*** . Au dessus de cette valeur, le fluide est brassé par des cellules thermoconvectives de forme plus ou moins complexes qui s'agencent différemment en fonction de la géométrie de la cavité contenant le fluide.

Aux alentours de 1900, *Henri Bénard* montre expérimentalement que, dans le cas d'une couche fluide mince de surface supérieure libre et reposant sur une plaque de grande dimension chauffée par le bas, les cellules thermoconvectives prennent la forme d'une mosaïque d'hexagones réguliers. Ces cellules sont connues sous le nom de "cellules de Bénard".

Dès 1916, Lord Rayleigh tente de donner une réponse théorique aux observations de Bénard. L'analyse de stabilité linéaire qu'il mène (*Rayleigh (1916-1920)*) se fonde sur les couches fluides minces confinées entre deux plaques planes *infinies* et horizontales, chauffées uniformément par le bas² (elle ne respecte donc pas exactement la configuration de Bénard). Elle montre que pour qu'une situation de fluide au repos devienne instable, il est nécessaire que le gradient de température vertical ait atteint une certaine valeur. Cependant, elle ne permet pas de déterminer la forme des

¹ On aurait pu considérer le cas, représenté aussi sur la figure I-1, où la perturbation provoque le déplacement vers les couches chaudes inférieures d'une particule fluide froide; dans ce cas l'effet des trois facteurs intervenant dans la convection (P.A., T.V., D.C.) est de direction opposée.

² De plus, la théorie de Rayleigh considère que le contact du fluide avec les parois se fait sans frottement; cette situation peu réaliste correspond au cas de "*deux surfaces libres*" planes (non déformées par des effets de tension de surface par exemple). Le cas du fluide réel, avec frottement sur les parois, sera traité théoriquement pour la première fois par *Jeffreys (1928)* ; en général, on désigne cette configuration en parlant de "*deux surfaces rigides*".

cellules convectives; seul leur nombre d'onde peut être calculé. Il sera montré plus tard (cf. *Chandrasekhar (1961)*) qu'au seuil d'apparition de l'instabilité, plusieurs types de structures convectives sont susceptibles d'apparaître: elles peuvent prendre la forme de triangles équilatéraux, de carrés, d'hexagones, de rouleaux parallèles d'axe horizontal, ou encore de toute superposition de ces différentes structures. Pour désigner la multitude des solutions possibles, on parle de la "*dégénérescence*" de la solution du problème Rayleigh-Bénard.

Dans le cas d'un domaine de dimensions *finies*, de forme parallélépipédique, *Davis (1967)*, par une étude de stabilité linéaire, et *Stork et Müller (1972)*, par une étude expérimentale, montrent que les cellules naissent sous la forme de rouleaux horizontaux parallèles à la plus petite arête horizontale. Ils construisent un diagramme donnant Ra^* et le nombre de rouleaux se développant dans la cavité en fonction des dimensions L et l (longueur et largeur) des côtés horizontaux du parallélépipède. Ils montrent que plus la cavité est confinée, i.e. plus les rapports de forme $A=L/h$ et $B=l/h$ sont petits, plus Ra^* est élevé; à l'opposé, quand les dimensions latérales tendent vers l'infini, Ra^* tend vers la valeur limite 1708. Enfin, le nombre de rouleaux se développant dans la cavité est environ égal à A . Cependant, ces résultats très simples doivent être nuancés. Par exemple, lorsque $l \approx L$, il n'existe plus de "petit" ou de "grand" côté. Dans ce cas, *Stork et Müller (1972)* ont observé des cellules plus complexes qui sont symétriques par rapport aux diagonales de cette boîte quasi carrée¹.

1.2 L'écoulement de Poiseuille-Bénard

La *convection naturelle* est souvent opposée à la *convection forcée*. Dans ce cas, le mouvement est induit par une source externe: une pompe ou le déplacement d'un objet dans le fluide par exemple. Quand les mouvements convectifs ont pour origine à la fois des sources internes et externes, on parle de *convection mixte*. L'écoulement de Poiseuille-Bénard est un écoulement de convection mixte. Il est le résultat de la superposition de deux sources convectives appliquées à un fluide compris entre deux plaques planes horizontales: un gradient de pression horizontal donne naissance à un écoulement forcé (de type écoulement de Poiseuille), tandis qu'un gradient de

¹ Dans les cavités parallélépipédiques confinées, des structures plus complexes ou inattendues (rouleaux parallèles aux plus longues faces verticales) ont été observées; on trouvera les références des travaux portant sur ces "cas particuliers" dans *Mukutmoni et Yang (1992)*.

température vertical est la source de structures thermoconvectives (de type Rayleigh-Bénard).

De la même manière que l'écoulement de Rayleigh-Bénard est caractérisé par le nombre de Rayleigh, l'écoulement de Poiseuille est caractérisé par le nombre de Reynolds, Re . Celui-ci représente le rapport d'intensité entre les forces d'inertie et la dissipation visqueuse (ou diffusion de la quantité de mouvement) au sein du fluide:

$$Re = \frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de dissipation visqueuse}}$$

Dans le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard entre deux plaques infinies, on sait que la présence de l'écoulement forcé laminaire oblige les structures convectives à s'aligner dans le sens de l'écoulement. *Idrac (1921)* avait déjà observé dans des écoulements d'air de ce type "la formation de tourbillons à axes horizontaux, ces axes étant des droites parallèles à la vitesse du courant d'air, [... s'agencant] comme dans une série de cylindres engrenant les uns avec les autres par une de leurs génératrices".

Si, entre deux plaques infinies, les rouleaux s'alignent parallèlement à l'écoulement et si, dans une boîte parallélépipédique, à cause de l'influence des bords latéraux, ils s'alignent transversalement au plus grand axe horizontal de la boîte, on peut se demander ce qu'il advient d'un écoulement laminaire dans une conduite de section rectangulaire, chauffée par le bas. Qui des bords latéraux ou de l'écoulement laminaire va gagner la compétition pour aligner les rouleaux dans le sens qui lui convient? La réponse à ce problème se trouve dans l'analyse de stabilité linéaire menée plus récemment par *Luijckx (1983)*.

L'écoulement de base dont il étudie la stabilité est l'écoulement de Poiseuille stratifié linéairement en température (cf. figure I-2). Il montre que cet écoulement reste stable tant que le nombre de Rayleigh ne dépasse pas une valeur critique Ra^* ; au delà, il devient instable et deux sortes de structures thermoconvectives peuvent apparaître. Comme dans les boîtes parallélépipédiques, il peut y avoir des rouleaux d'axes transversaux à l'axe de la conduite et formant une chaîne de cylindres contrarotatifs. Cependant, dans le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard, ces rouleaux sont emportés par le courant moyen dans la conduite, dans la direction de l'écoulement de base. Une représentation schématisée de ces rouleaux, ainsi que des photos obtenues en faisant des plans de lumière dans des écoulements d'air avec de la fumée sont présentées figure I-3. On notera que ces structures sont quasi bidimensionnelles: la

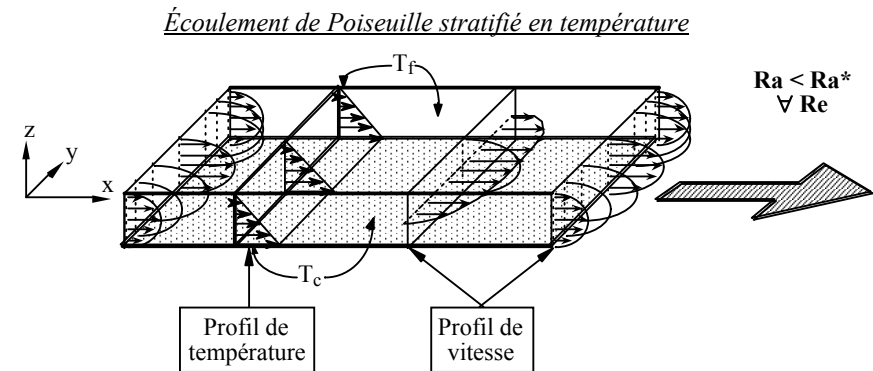


Figure I-2 : Écoulement de base: écoulement de Poiseuille stratifié linéairement en température.

composante transversale de la vitesse est nulle, excepté près des bords latéraux. Dorénavant, dans tout ce document, on appellera cette configuration thermoconvective les "**rouleaux transversaux**" et on les notera $R_{\perp}$.

L'autre configuration qui peut apparaître quand $Ra > Ra^*$ est celle observée par *Idrac (1920)* et qui est décrite plus haut. Ce sont des rouleaux hélicoïdaux, contrarotatifs, stationnaires et d'axes parallèles à celui de la conduite. Ils sont présentés figure I-4. Ici, les trois composantes de vitesse sont non nulles. Dans toute la suite, on appellera cette configuration les "**rouleaux longitudinaux**" et on les notera $R_{//}$.

Dans le cas où la conduite est d'extension latérale infinie, c'est à dire le cas où le rapport d'aspect $B=l/h=\infty$, *Luijckx (1983)* montre que les $R_{//}$ apparaissent toujours plus tôt que les $R_{\perp}$. Les courbes de stabilité linéaires de la figure I-5 montrent que le nombre de Rayleigh critique $Ra_{//}^*$ pour les $R_{//}$ est toujours plus petit que celui (noté $Ra_{\perp}^*$) pour les $R_{\perp}$. A nombre de Reynolds nul, pour la convection naturelle, on ne peut pas distinguer entre rouleaux transversaux ou longitudinaux; le nombre de Rayleigh critique est 1708 dans les deux cas. Par contre, pour $Re \neq 0$, $Ra_{//}^*$ est indépendant de Re alors que $Ra_{\perp}^*$ est une fonction croissante de Re .

Dans le cas des conduites d'extension latérale finie (cf. figure I-6), le confinement a deux effets. Tout d'abord, il stabilise l'écoulement de base puisque quand B décroît, $Ra^* = \min(Ra_{\perp}^*, Ra_{//}^*)$ croît. Ensuite, lorsque le nombre de Reynolds

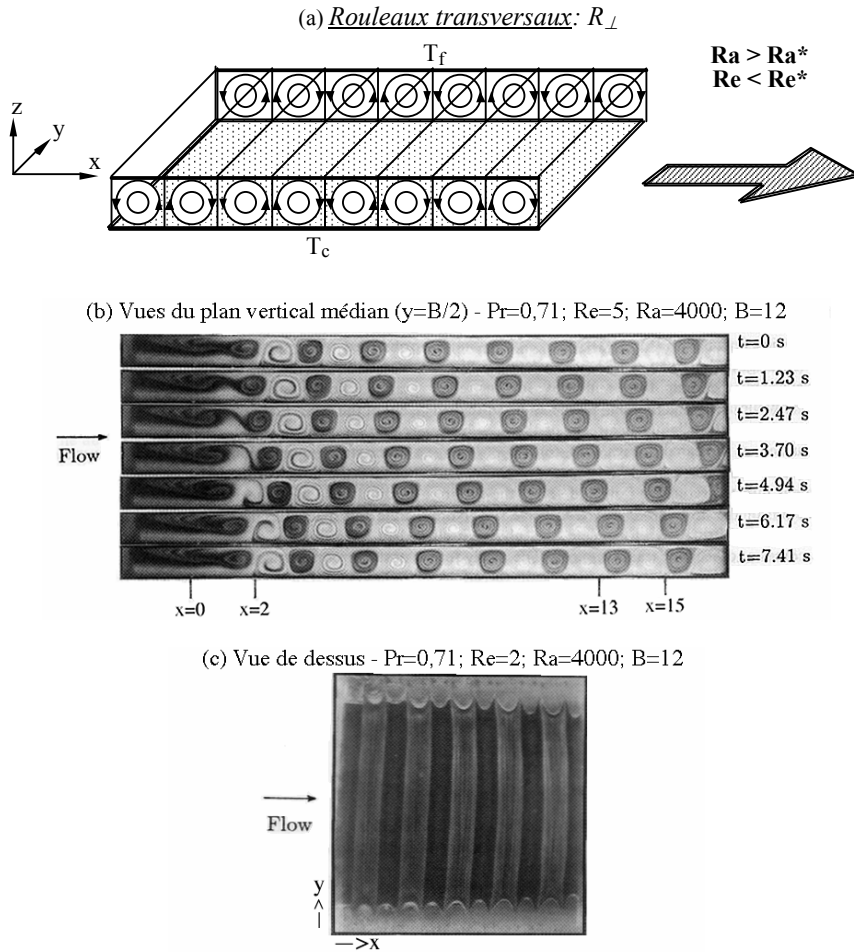


Figure I-3: Écoulement de rouleaux transversaux:

- (a) Représentation schématisée (la zone d'établissement et l'effet des bords verticaux sur la forme des rouleaux ne sont pas représentés);
- (b) Défilement de $R_{\perp}$ visualisé par une série de 7 photographies; on chauffe à partir de $x=0$; pour $x \leq 2$, entrée thermique et zone d'établissement des $R_{\perp}$; pour $x > 2$, écoulement de $R_{\perp}$ pleinement développés;
- (c) 11 $R_{\perp}$ vus de dessus ((b) et (c) sont tirés de *Yu et al. (1997a)*).

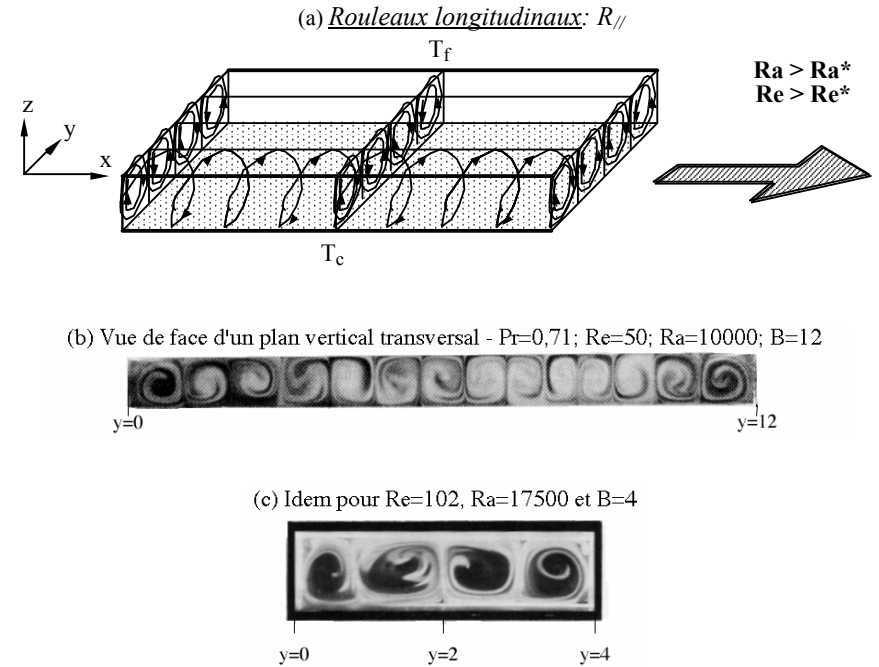


Figure I-4: Écoulements de rouleaux longitudinaux pleinement établis:

- (a) Représentation schématisée (l'effet des bords verticaux sur la forme des rouleaux n'est pas représenté);
- (b) Cas de 14 $R_{//}$ pour $B=l/h=12$ (tiré de *Yu et al. (1997b)*);
- (c) Cas 4 $R_{//}$ pour $B=l/h=4$ (tiré de *Lin et al. (1996b)*).

est inférieur à une valeur critique Re^* , les parois verticales favorisent l'apparition des $R_{\perp}$. Par contre, quand $Re > Re^*$, l'écoulement principal favorise les $R_{//}$. On notera que non seulement $Ra_{\perp}^*$ est une fonction de Re et de B , mais il est aussi fonction du nombre de Prandtl, Pr : quand Pr croît, $Ra_{\perp}^*$ croît (cf. figure I-6). Or, comme $Ra_{//}^*$ ne

¹ Le nombre de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$, est un nombre sans dimension caractéristique de la nature du fluide; il représente le rapport entre la diffusion de la matière par les effets visqueux (représentés par la viscosité cinématique ν) et la diffusion de la température (représentée par la diffusivité thermique α).

Conduite d'extension latérale infinie ($B=l/h=\infty$)

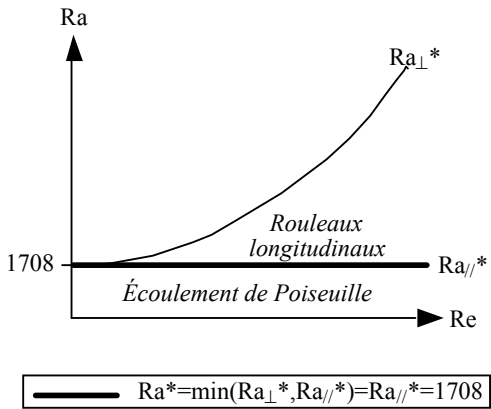


Figure I-5: Diagramme de stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille-Bénard pour une conduite d'extension latérale infinie (extrait de Luijckx et al. (1981)).

Conduite d'extension latérale finie

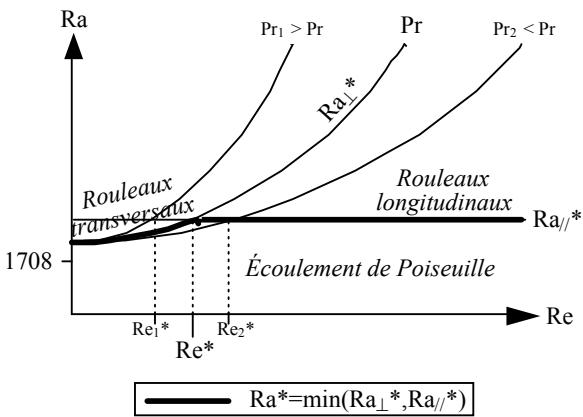


Figure I-6: Diagramme de stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille-Bénard pour une conduite d'extension latérale finie (extrait de Luijckx et al. (1981)).

varie pas quand Pr varie, Re^* diminue si Pr augmente. Ainsi, en guise d'exemple, le tableau I-1 donne Re^* pour quelques valeurs de Ra , à différents nombres de Prandtl. Cependant, comme Re^* est difficile à déterminer précisément dans les expériences ou les simulations numériques directes, on donne dans certains cas la valeur de Re à la transition $R_{\perp}$ - $R_{//}$ pour $Ra > Ra_{//}^*$ (on note $Re_{\perp-//}^*$ cette valeur). Notez que les valeurs expérimentales et numériques de $Re_{\perp-//}^*$ sont en général assez approximatives (excepté pour Ouazzani et al. (1990)) car extraites de graphes avec des échelles importantes.

Référence	Méthode	Pr	B	$Ra_{//}^*$ ou (Ra)	Re^* ou $(Re_{\perp-//}^*)$
Luijckx (1983)	théorique	0,1	5,2	1770,05	14,9
Ouazzani et al. (1989)	expérim.	0,7 (air)	18,5	(2000) (4000)	(4) (9)
Luijckx (1983)	théorique	0,7	5,2	1770,05	6,74
Chen et Lavine (1996)	numérique	0,7	2	(2000) (4000)	(6) (7)
Yu et al. (1997a)	expérim.	0,72 (air)	12	(3000) (4000) (8000) (10000)	(6,5) (10) (15) (17,5)
Luijckx (1983)	théorique	1	2 5,2	2013,24 1770,05	6,98 5,66
Ouazzani et al. (1990)	expérim.	6,4 (eau)	3,63	1840 (2000) (3460) (4700)	0,3 (0,5) (0,7) (0,3)
Luijckx (1983)	théorique	7	2	2013,24	1,67
Luijckx (1983)	théorique	10	2 5,2	2013,24 1770,05	1,20 1,02
Luijckx et al. (1981)	expérim.	450 (huile de silicone)	5,25	(4500)	$(1,7 \cdot 10^{-3})$
Luijckx (1983)	expérim.	450	5,25	1712 ± 220	$6,2 \cdot 10^{-3}$
Luijckx (1983)	théorique	453	2 5,2	2013,24 1770,05	$2,72 \cdot 10^{-2}$ $2,29 \cdot 10^{-2}$

Tableau I-1: valeur du nombre de Reynolds à la transition $R_{\perp}$ - $R_{//}$ en fonction du nombre de Prandtl pour différents nombres de Rayleigh.

Comme nous le verrons, les phénomènes intéressants que nous étudierons se situent dans le voisinage de Re^* , disons pour $0 \leq Re < 10Re^*$. Ainsi, vu les valeurs de Re^* et de $Re_{\perp//}^*$ dans le tableau I-1, l'étude que nous allons mener porte sur des écoulements à petits, voire à très petits, nombres de Reynolds.

2 Objectifs de l'étude et plan de l'exposé

Le premier paragraphe de ce chapitre introductif a permis de présenter le phénomène physique qui va être l'objet de notre étude. La plupart de ces résultats (excepté ceux de la figure I-6) sont connus depuis le début des années 70 et ils ne représentent actuellement que la partie émergée de l'iceberg des connaissances sur le sujet. Ainsi, par exemple, on peut rappeler que les résultats présentés aux figures I-5 et I-6 correspondent à une étude de stabilité linéaire. Le comportement non linéaire de l'écoulement de Poiseuille-Bénard est nettement plus complexe. Aussi, depuis 25 ans, de très nombreux travaux théoriques, expérimentaux et numériques, tant dans le domaine de la recherche fondamentale que dans celui de la recherche appliquée, ont été effectués pour essayer de comprendre plus profondément les phénomènes qui ont lieu dans cet écoulement. Le *premier objectif* de notre étude sera donc de présenter un bilan de ces recherches. Ainsi, dans la première partie de ce document, composée des chapitres II et III, nous présentons une bibliographie exhaustive et détaillée de ces travaux.

Le chapitre II est une “revue générale et historique”. Il retrace l'évolution des connaissances sur le sujet depuis la première étude d'Idrac (1920). Son but est de présenter les principales périodes et les principaux axes de recherche consacrés à l'écoulement de Poiseuille-Bénard. De manière schématique et un peu lapidaire, on peut retenir les étapes suivantes. Les études pionnières (avant 1951) ont permis une compréhension qualitative des phénomènes de base ($R_{\perp}$, $R_{//}$) à partir d'expériences de visualisation. De 1962-1984, les travaux se concentrent sur l'analyse de la stabilité linéaire du problème, dans la zone où l'écoulement thermoconvectif est parfaitement établi d'une part, et dans la région de développement des structures thermoconvectives, au début de la zone chauffée, d'autre part. De nombreuses expériences viennent compléter les études théoriques. Nous montrerons que ces analyses linéaires ont été poussées très loin, notamment par Luijckx (1983) qui s'est intéressé à la stabilité de l'écoulement de base 3D, soumis à des perturbations 3D. A partir de 1983, on constate un essor de la simulation numérique directe comme moyen d'investigation de

l'écoulement de Poiseuille-Bénard. Cette tendance apparaît principalement dans le cadre d'applications industrielles à forts enjeux économiques: les dépôts de vapeurs chimiques (la CVD) pour la fabrication de matériaux de haute technologie (semi-conducteurs, films minces, etc.), et le refroidissement des composants électroniques. Ces études se consacrent majoritairement à l'analyse des caractéristiques globales des écoulements (transferts thermiques et longueurs d'établissement). Elles portent presque exclusivement sur les $R_{//}$ car les nombres de Reynolds sont relativement élevés. La dernière période que nous avons identifiée commence en 1989. Elle est marquée par un retour à l'étude des $R_{\perp}$. On s'intéresse aux transitions non-linéaires entre $R_{\perp}$ et $R_{//}$, et de nouvelles structures thermoconvectives sont identifiées. Des cartes de stabilité plus complexes sont alors dressées pour l'écoulement de Poiseuille-Bénard. Enfin, des analyses fines et locales des champs de vitesse et de température sont réalisées.

C'est cette dernière période qui a retenu notre intérêt pour le présent travail. En effet, deux contributions importantes sont à l'origine de nouvelles directions de recherche:

- tout d'abord, la thèse de Müller (1990) introduit les notions fondamentales d'*instabilité convective* et d'*instabilité absolue* dans l'étude des écoulements de Poiseuille-Bénard. Ce travail théorique utilise une équation d'amplitude monodimensionnelle de type Ginzburg-Landau comme modèle d'écoulement. Nous verrons (chapitre III, §2) que cette théorie est valable uniquement au voisinage de la stabilité marginale, dans un domaine faiblement non-linéaire;

- d'autre part, la thèse de Ouazzani (1991) fournit une banque de données expérimentales très précises sur le problème qui nous concerne. Ces données sont obtenues par des mesures d'anémométrie laser-Doppler dans l'eau. Elles couvrent une gamme très large de paramètres adimensionnels: $Ra \leq 3Ra^*$ et $Re \leq 10Re^*$. Certains signaux de vitesse enregistrés dans cette expérience mettent pour la première fois en évidence l'existence de “structures intermittentes”, superposition des $R_{\perp}$ et des $R_{//}$. Ouazzani établit, dans le plan ($Ra-Re$), une carte de stabilité précise et détaillée des différentes structures thermoconvectives qu'il a identifiées.

Comme notre travail s'appuie sur ces deux thèses, nous les présentons en détail au **chapitre III, consacré aux “travaux de référence”**. Dans ce chapitre, on expose aussi l'analyse de la stabilité linéaire menée par Luijckx (1983). Ce travail n'ayant été publié que très partiellement, nous présentons la méthode utilisée et les résultats quantitatifs obtenus. Ces derniers permettront de valider le code numérique que nous avons utilisé et de vérifier certains résultats de la littérature.

Comme nous le verrons plus précisément au chapitre III, le critère d'instabilité linéaire ne suffit pas pour définir l'instabilité globale des écoulements ouverts ou semi-ouverts tels que l'écoulement de Poiseuille-Bénard. En effet, la stabilité linéaire ne s'intéresse qu'à la croissance temporelle des perturbations. Dans notre cas, il se peut que l'amplitude d'une perturbation unique croisse dans le temps, mais que, transportée par l'écoulement moyen, la perturbation soit totalement évacuée de la conduite ou du domaine de calcul, avant que tout motif thermoconvectif n'ait pu apparaître. On parle dans ce cas d'*instabilité convective*: une perturbation unique ne suffit pas pour déstabiliser l'écoulement. Par contre, si la perturbation croît à la fois temporellement et spatialement, jusqu'à saturer complètement la conduite, on dit que l'écoulement est *absolument instable*. Müller (1990) a déterminé les zones où l'écoulement de $R_\perp$ est convectivement ou absolument instable. Il montre aussi, avec d'autres auteurs (cf. chapitre III, §2.1), que des propriétés ou des comportements très différents sont attachés à l'écoulement, selon qu'il appartient à l'une ou à l'autre des deux catégories: les écoulements convectivement instables sont des amplificateurs de bruit, susceptibles de ne sélectionner que certains modes de perturbation, en fonction de la nature du forçage extérieur; les écoulements absolument instables, par contre, sont peu sensibles au forçage; ils conservent leur structure intrinsèque en présence d'un bruit.

Aussi, lorsque notre première intention fut d'essayer de reproduire par la simulation numérique directe les structures d'écoulement mesurées (mais non visualisées) dans les expériences de Ouazzani (1991), plusieurs questions ont surgi:

- que se passe-t-il lorsque la simulation numérique d'un écoulement convectivement ou absolument instable nécessite la mise en place de conditions aux limites dites ouvertes sur les frontières artificielles du domaine de calcul?

- Ces conditions aux limites ouvertes, ou les conditions aux limites périodiques, implantées habituellement pour pouvoir calculer de tels écoulements, doivent-elles être considérées comme un forçage extérieur?

- Dans quelle mesure perturbent-elles l'écoulement et quelle est la réaction de celui-ci selon qu'il est convectivement ou absolument instable?

Le deuxième objectif de ce document est d'apporter des éléments de réponse à ces questions. Pour cela, nous effectuerons des simulations numériques directes que nous comparerons *quantitativement* avec les données expérimentales obtenues par Ouazzani (1991) et avec les solutions théoriques calculées par Müller (1990). Nous

nous placerons toujours à $Pr=6,4$, valeur pour l'eau à 23°C utilisée par Ouazzani (1991) lors des mesures d'anémométrie laser-Doppler. Müller ayant calculé les coefficients de l'équation de Ginzburg-Landau pour ce nombre de Prandtl, les comparaisons avec la théorie se feront aussi à $Pr=6,4$.

Pour mener à bien notre travail, nous nous sommes limités à la simulation numérique bidimensionnelle de l'écoulement de Poiseuille-Bénard. Le passage direct à la simulation 3D nous a semblé aventureux n'ayant pas identifié au préalable, sur le cas 2D, l'influence des conditions aux limites sur l'écoulement. En effet, le problème de Poiseuille-Bénard nécessite des domaines de calcul de grand rapport d'aspect (en général $A=L/h \geq 10$ et $B=l/h \geq 2$); or, le coût de la simulation 3D étant déjà élevé, il aurait pu devenir prohibitif si, par exemple, la longueur de la zone perturbée, en amont de la condition de sortie, s'était avérée très grande.

Dans le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard bidimensionnel, seuls l'écoulement de Poiseuille et l'écoulement de $R_\perp$ peuvent être modélisés. L'écoulement de $R_\parallel$ ou les structures plus complexes identifiées par Ouazzani (1991) ne peuvent pas être appréhendées. En conséquence, la question principale que nous traitons dans ce document est la suivante:

dans quelle mesure la simulation numérique directe est-elle capable de reproduire quantitativement les données expérimentales et théoriques concernant les $R_\perp$?

Ou, plus précisément,

quelle est l'influence des conditions aux limites sur la stabilité et sur le développement spatial et temporel des $R_\perp$, dans l'écoulement de Poiseuille-Bénard 2D à $Pr=6,4$?

Après la première partie (chapitre II et III) consacrée à la bibliographie, la deuxième partie du document présente la méthodologie que nous avons utilisée. **Dans le chapitre IV, on expose la "formulation mathématique du problème"**. On établit le système d'équations de conservation permettant la modélisation de l'écoulement de Poiseuille-Bénard. On justifie les hypothèses en insistant, en particulier, sur la validité de l'approximation de Boussinesq dans notre étude. On présente le choix des grandeurs de référence pour rendre les équations adimensionnelles.

Le chapitre V présente la “méthode de résolution et les conditions aux limites ouvertes” étudiées. La solution du système d'équations de conservation adimensionnelles, discrétisées en volumes finis, est calculée par la méthode du Lagrangien augmenté, couplée à un algorithme de résolution de type Uzawa. Cette méthode, largement développée par ailleurs, est présentée ici succinctement. Par contre, le choix des conditions aux limites et la manière dont elles sont implantées, sont expliqués de manière détaillée. Pour la frontière artificielle à la sortie de la conduite, cinq sortes de conditions aux limites ouvertes sont testées, ainsi que des conditions aux limites périodiques. Dans ce chapitre, on analyse leur influence sur des écoulements de $R_\perp$ absolument instables uniquement. Pour chaque condition aux limites, on étudie la variation en fonction de Re et de Ra de la longueur de la zone perturbée et de l'amplitude de la perturbation. Cela permet d'identifier la condition aux limites ouvertes qui perturbe le moins l'écoulement, parmi celles testées. Quelle que soit la condition aux limites, on montre que la structure interne des $R_\perp$ n'est pas modifiée en dehors de la zone perturbée, mais que la longueur de cette zone peut devenir très grande pour des petites valeurs de Re et de Ra .

Dans la troisième partie, constituée du chapitre VI, on “analyse les résultats” des simulations numériques, principalement par des comparaisons avec les expériences de *Ouazzani (1991)* et avec la théorie de *Müller (1990)*. On s'intéresse au développement spatial des $R_\perp$ en étudiant l'évolution axiale de la composante verticale maximale de la vitesse, et en déterminant la longueur d'établissement des $R_\perp$. Le transfert thermique est évalué par le calcul du nombre de Nusselt. L'évolution de ces grandeurs en fonction de Ra et de Re permet de déterminer la courbe de transition entre l'écoulement de $R_\perp$ et l'écoulement de Poiseuille. On montre que les seuils de transition sont différents si on effectue les simulations avec des conditions aux limites ouvertes ou avec des conditions aux limites périodiques. Dans le cas des conditions aux limites ouvertes, on met en évidence un décalage entre le seuil théorique obtenu par *Müller (1990)*, et le seuil résultant des simulations numériques. Les courbes de transition obtenues par les trois approches (simulations numériques, expériences, théorie) sont comparées sur le même diagramme.

Les simulations 2D ne permettant pas d'expliquer la présence et la forme des structures 3D intermittentes mesurées dans les expériences de *Ouazzani (1991)*, nous présentons une synthèse bibliographique sur toutes les structures thermoconvectives complexes observées très récemment dans la littérature. Certaines de ces études

permettent d'expliquer l'origine des signaux enregistrés lors des mesures d'anémométrie laser-Doppler et identifiés par *Ouazzani* comme se rapportant à des structures intermittentes.

Enfin, dans la dernière partie du chapitre VI, on présente l'évolution spatiale et temporelle des $R_\perp$ pleinement développés. Plus précisément, on étudie les variations en fonction de Re et de Ra , de la fréquence, de la longueur d'onde et de la vitesse des $R_\perp$. Dans le domaine de calcul avec les conditions aux limites ouvertes, on montre que la fréquence des $R_\perp$ s'annule pour les valeurs de Re voisines de zéro. Ce phénomène, qui n'existe pas avec les conditions aux limites périodiques, est expliqué grâce à d'autres résultats de la littérature.

On conclut par une synthèse des résultats acquis lors de cette étude, et on présente un bilan des points qui nécessitent des approfondissements. Enfin, on termine par la proposition de quelques perspectives.

Première partie

Bibliographie

Chapitre II

Revue générale et historique

Depuis la première étude d'*Idrac (1920)*, de très nombreux travaux ont cherché à analyser et à modéliser les phénomènes présents dans les écoulements de Poiseuille-Bénard. Dans ce chapitre, nous en proposons une revue générale. Elle donne une vue d'ensemble des principaux axes de recherche sur le sujet, des auteurs qui ont contribué aux travaux, des méthodes utilisées et des résultats obtenus. Elle a un caractère historique dans le sens où elle présente l'évolution des connaissances sur le sujet depuis les premières études jusqu'à très récemment. L'analyse bibliographique ayant permis de dégager quatre grandes périodes dans cet historique, celles-ci constituent les quatre parties de ce chapitre¹:

§1 : 1920-1951: cette période est celle des pionniers de la convection. Les travaux sont basés avant tout sur des expériences de visualisation permettant une compréhension qualitative des structures thermoconvectives principales ($R_{\perp}$ et $R_{//}$). En fait, ces expériences ont toutes été effectuées avant 1938, mais en 1951, *Sir David Brunt* rédige une synthèse de leurs résultats.

§2 : 1962-1984: après une longue période très peu productive à cause de la seconde guerre mondiale, les recherches sur le sujet qui nous concerne repartent vers 1960. On effectue principalement des analyses de stabilité linéaire, complétées par des expériences permettant de vérifier les résultats des modèles théoriques. Des travaux se

concentrent sur l'analyse des écoulements thermoconvectifs pleinement établis; d'autres étudient la "zone d'entrée thermique", c'est-à-dire le début de la zone chauffée, là où les rouleaux convectifs se développent. Cette période voit son aboutissement avec, d'une part, la thèse de *Luijckx (1983)* qui analyse la stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille-Bénard soumis à des perturbations 3D dans des conduites 3D et, d'autre part, avec le livre plus général de *Platten et Legros (1984)* qui fait une synthèse sur "la convection dans les liquides".

§3 : 1983-1993: cette période voit l'essor de la simulation numérique directe principalement utilisée, au moins au départ, dans le cadre d'applications industrielles telles que l'étude des dépôts de vapeurs chimiques (la CVD, pour l'abréviation anglaise) ou le refroidissement des composants électroniques. Ces recherches appliquées s'intéressent surtout à la mesure des caractéristiques globales des écoulements: par exemple, la mesure du transfert thermique à travers les parois des conduites et la détermination des longueurs d'établissement des structures convectives.

§4 : 1989-1997: ces huit dernières années, des progrès importants ont été réalisés notamment grâce aux expériences de mesure par anémométrie laser-Doppler (LDA), aux théories faiblement non-linéaires basées sur les équations d'amplitude, et aux simulations numériques directe 3D. Les différentes structures thermoconvectives de l'écoulement ont pu être identifiées précisément grâce à des mesures locales et fines de leurs caractéristiques, et leur stabilité non-linéaire ou faiblement non-linéaire a pu être analysée. La théorie des équations d'amplitude et la notion d'instabilité convective, introduite par *Müller (1989)* pour l'analyse des $R_{\perp}$, a permis d'enrichir considérablement la compréhension de la stabilité de l'écoulement.

Comme le travail que nous présentons dans ce document s'inscrit dans la continuité des recherches menées depuis 1989, celles-ci seront l'objet de très nombreuses comparaisons avec nos propres résultats, au chapitre VI. Nous serons donc amené à citer souvent ces études, à les décrire et à reproduire certaines de leurs figures. De plus, comme les travaux de *Ouazzani et al. (1989 et suivants)* et de *Müller et al. (1989 et suivants)* nous serviront de référence, ils feront l'objet d'une description détaillée au chapitre III. En conséquence, pour éviter les redondances, les travaux entrant dans le cadre du §4 ne seront pas autant détaillés que ceux des trois paragraphes précédents.

La démarche adoptée pour la présentation de cette revue est un compromis entre le suivi de l'ordre chronologique des publications et le regroupement par thème.

¹ Bien sûr, les dates que nous proposons ne sont que des repères approximatifs; il est en effet difficile de caractériser et de délimiter strictement dans le temps une période de production scientifique.

Pour chaque étude théorique, numérique¹ ou expérimentale, on essaie de dégager son intérêt ou sa particularité en précisant la méthode utilisée, la gamme d'écoulements concernés, le type de fluide étudié et les principaux résultats acquis.

1 1920-1951: les expériences pionnières

Nous avons vu dans l'introduction que les premières recherches systématiques sur la convection naturelle sont les expériences de *Henri Bénard (1900)* et que le premier théoricien de la convection fut *Lord Rayleigh (1916)*. La première étude sur le problème de Rayleigh-Bénard avec écoulement est attribuée quant à elle à *Paul Idrac (1920)*. Dans sa thèse (1921), il présente ses observations sur le vol à voile, notamment en Afrique où, dans l'atmosphère de ces régions, il a pu observer "des zones variables où le vent avait une composante verticale, ascendante ou descendante". Après avoir émis l'hypothèse qu'il était possible que "ces zones soient dues à l'existence de courant de convection locaux dus à des différences de température (comme ceux étudiés [...] par H. Bénard)", il décide de monter une expérience de laboratoire pour en faire la vérification: "Au moyen d'un ventilateur convenablement réglé, on produisait un courant horizontal entre deux plaques, dont l'une, inférieure, était maintenue à température élevée au moyen d'un bain de sable convenablement chauffé, et dont l'autre était en contact avec une couche d'eau froide. Dans ces conditions, lorsque la température est uniformément répartie entre les deux plaques et si le courant d'air est parfaitement régulier, on observe (par exemple en rendant les filets d'air visibles au moyen d'une fumée légère) la formation de tourbillons à axes horizontaux, ces axes étant des droites parallèles à la vitesse relative du courant d'air par rapport aux couches adjacentes". On retrouve ici la description des rouleaux longitudinaux, seule structure convective observée par P. Idrac.

Les $R_{//}$ ont aussi étaient étudiés par le japonais *Terada (1928)* et ses élèves qui ont réalisé de belles photos de ces structures dans des écoulements d'alcool, dont la surface se refroidit par simple évaporation, ou d'eau, chauffée par en dessous. Ils se sont intéressés en particulier à l'évolution du rapport λ/h en fonction de la nature du fluide et de l'épaisseur h de la couche liquide (λ est la longueur d'onde des $R_{//}$).

¹ On appellera "études numériques" les études dont la méthode utilise la simulation numérique directe des écoulements, i.e. la résolution directe des équations de conservation.

A cette époque, la motivation principale de toutes ces études est la compréhension de certains phénomènes météorologiques tels que l'alignement des bandes nuageuses sous l'action du vent. Aussi, dans les expériences de laboratoire, les écoulements ne sont pas de type Poiseuille mais de type Couette¹. En effet, pour reproduire l'entraînement cisailé dû au vent, les écoulements d'air sont réalisés par le déplacement horizontal de la plaque supérieure (*Brunt (1951)*) ou bien par la mise en place d'un tapis roulant chauffé en guise de plaque inférieure (*Bénard et Avsec (1938)*). Dans les articles qui suivent, les anglophones utilisent le premier procédé et les francophones le deuxième. D'autre part, il faut noter que toutes ces études, si elles permettent de comprendre qualitativement l'influence de l'écoulement sur la forme des structures convectives et si elles présentent un très grand nombre de photographies, elles se rapportent néanmoins à des situations physiques mal définies: souvent, les observations sont faites sur des écoulements turbulents, à très grands nombres de Rayleigh et de Reynolds.

La première observation des rouleaux transversaux, pour des écoulements cisailés à petits nombres de Reynolds, est due aux météorologistes et physiciens anglais *A. C. Philips et Sir G. T. Walker (1932)*. Leur expérience est réalisée dans une couche d'air de 6 mm d'épaisseur. L'existence des $R_{\perp}$ sera confirmée l'année suivante par *Graham (1933)*.

En France, sous l'égide de la "Commission de Turbulence Atmosphérique" à laquelle participe H. Bénard, des études systématiques de tous les problèmes qui touchent à la "turbulence" sont entreprises. Ainsi, *Avsec (1936-1938)*, dans une série de notes au C.R.A.S., expose les résultats de ses expériences dans lesquelles il tente de reproduire toutes les structures convectives observées dans les études antérieures. Le souci d'Avsec était de pouvoir modéliser au mieux les phénomènes thermoconvectifs se passant dans l'atmosphère. Or, il était gêné par le rapport d'échelle entre l'atmosphère libre et la taille des expériences de laboratoire (généralement inférieure à 1 cm). Pour cela, il s'est intéressé à la "production de tourbillons thermoconvectifs dans une couche d'air ayant une épaisseur de plusieurs centimètres". En fait, il a toujours travaillé avec des couches inférieure à 8 cm d'épaisseur.

¹ On appelle "écoulement de Couette" un écoulement cisailé où le fluide a un profil vertical de vitesse linéaire (et non parabolique comme pour l'écoulement de Poiseuille); cet écoulement peut être provoqué par le déplacement relatif, à écartement constant, des deux plaques parallèles entre lesquelles se trouve le fluide.

Lorsque la vitesse d'écoulement de l'air est supérieure à 2 cm/s, Avsec reproduit aisément les $R_{//}$. Il montre que λ/h est en général supérieur à 2, que ce rapport augmente quand h augmente et qu'il apparaît plutôt un nombre pair de rouleaux. En plaçant des petits cylindres de 1 cm de diamètre dans la zone d'entrée de la conduite et en faisant varier leur écartement, il arrive à faire varier le rapport λ/h entre 1,25 et 5; il note que pour les valeurs extrêmes, les $R_{//}$ sont très peu stables. Lorsque la vitesse est inférieure à 2 cm/s, il reproduit les $R_{\perp}$. Il fait remarquer que cette configuration n'a encore jamais été observée dans les liquides.

Conformément à la théorie de Rayleigh pour la convection libre, Avsec observe l'existence d'un régime préconvectif stable avant la naissance des $R_{\perp}$ ou des $R_{//}$. La naissance de la thermoconvection se situe entre $Ra^*=27\pi^4/4=657,5$ (valeur critique obtenue par Rayleigh dans le cas où la couche fluide est comprise entre deux plaques rigides, parfaitement conductrices mais "*sans frottement*") et $Ra^*\approx 1709,5^1$ (valeur obtenue par Jeffreys (1928) dans le cas plus réaliste où les mêmes plaques sont "*avec frottement*"). Avsec justifie son résultat par le fait que la plaque de verre supérieure utilisée dans l'expérience est mauvaise conductrice de la chaleur. Enfin, il explique que ses essais à $Re=0$ pour essayer de visualiser les cellules polygonales de Bénard sont peu concluants car celles-ci sont très instables. On ne savait pas encore à l'époque que l'existence des cellules de Bénard était liée à la présence de la surface libre et aux effets de tension de surface.

Tous les résultats précédents obtenus par Avsec sont rapportés dans l'article de Bénard et Avsec (1938). Pour avoir une synthèse et une bibliographie complète de l'ensemble des résultats de cette époque tentant d'expliquer l'apparition des structures thermoconvectives dans l'atmosphère, on se référera à Brunt (1951). Les résultats des expériences de Chandra (1938) pour visualiser les cellules convectives dans les problèmes de Bénard et Couette-Bénard y sont notamment rapportés. Quatre catégories de rouleaux sont observés en fonction de la vitesse de l'écoulement: les cellules de Bénard, présentes à vitesse nulle, prennent la forme de fers à cheval dès que le débit devient non nul; si on augmente encore la vitesse, il apparaît les $R_{\perp}$ puis les $R_{//}$. En suivant la classification de l'*International Cloud Atlas* de cette époque, Brunt donne la liste des nuages qui correspondent à chacune des quatre catégories.

¹ La valeur "exacte", calculée précisément plus tard, est $Ra^*=1707,762$. Le nombre d'onde des structures convectives correspondant à ce seuil d'instabilité est $k^*=3,116$.

Nous avons été surpris de constater combien les troubles de l'histoire avaient pu interférer avec la production scientifique. En effet, de 1940 à 1960, hormis l'article de Brunt (1951) réalisant une synthèse des travaux d'avant guerre, les publications sur la convection de Poiseuille-Bénard sont très rares.

2 1962-1984: les analyses de stabilité linéaire et les vérifications expérimentales

La période 1960-1984 est principalement marquée par l'enchaînement d'études théoriques et expérimentales, les premières analysant la stabilité linéaire du problème de Poiseuille-Bénard, les secondes cherchant à vérifier et à compléter les résultats théoriques. Dans cette partie, les différentes études sont classées en deux catégories. D'une part, nous présentons au §2.1 les recherches concernant l'écoulement thermoconvectif pleinement développé (dynamiquement et thermiquement) et, d'autre part, nous décrivons au §2.2 celles qui concernent la zone d'entrée thermique. Cette zone est la région où naissent les structures convectives, là où l'écoulement établi dynamiquement passe sur la plaque chauffée. Au §2.3, dans le tableau II-2, on donne un récapitulatif de toutes les analyses théoriques. Ce tableau présente le type de rouleaux convectifs étudiés, la forme sous laquelle sont recherchées les solutions des équations de perturbations linéarisées (modes normaux), ainsi que la gamme des écoulements concernés.

2.1 Écoulement pleinement établi

2.1.1 Stabilité des $R_{//}$ de première et de deuxième espèce et transfert thermique

L'une des toutes premières études théoriques sur l'écoulement de Poiseuille-Bénard est sans doute celle de Velte (1962). Il étudie la stabilité marginale de l'écoulement de Poiseuille purement conductif dans une conduite de section carrée. Seules des perturbations 2D se rapportant aux $R_{//}$ sont envisagées. Comme la formulation variationnelle faible du problème de stabilité linéaire qu'il propose est trop

restrictive, Sani (1964) reprend cette étude et en généralise la formulation. De plus, il considère une conduite dont la section transversale a un rapport de forme $B=l/h$ quelconque. Le résultat important obtenu est que l'écoulement de Poiseuille purement conductif, dans une conduite horizontale d'extension latérale finie chauffée par dessous, est plus stable (ou au moins aussi stable) que le problème sans écoulement¹, correspondant. Sani montre aussi que Ra^* augmente quand B diminue. Lorsque B tend vers l'infini, il retrouve le même problème de stabilité linéaire que dans le cas de la convection naturelle (Chandrasekhar (1961)) et il en déduit les différentes formes que peuvent prendre les cellules convectives. Par contre, son analyse ne lui permet pas de définir la forme des cellules lorsque B est fini.

Mori et Uchida (1966) réalisent une étude de stabilité linéaire pour un écoulement dans une conduite d'extension latérale infinie. Les perturbations envisagées ne sont fonction que des dimensions transversale y et verticale z . En conséquence, les $R_{\perp}$ ne peuvent pas être mis en évidence; seule la transition vers les $R_{//}$ est étudiée. Cependant, deux espèces de $R_{//}$ sont considérées (cf. figure II-1). Mori et Uchida décrivent la deuxième espèce comme étant la deuxième harmonique de la première espèce. Pour cette dernière, ils montrent que le nombre de Rayleigh critique

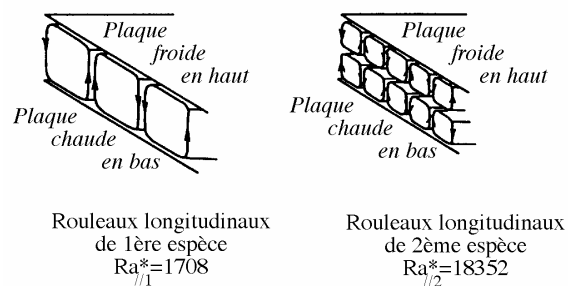


Figure II-1: Rouleaux longitudinaux de première et de deuxième espèce selon Mori et Uchida (1966).

¹ Sani désigne cet écoulement par "problème de Rayleigh-Jeffreys", mais actuellement on le désigne par "problème de Rayleigh-Bénard": c'est la convection naturelle pour un fluide réel dans une conduite à parois rigides; les parois horizontales sont parfaitement conductrices; les parois verticales sont adiabatiques.

$Ra_{//1}^*=1708$ quel que soit Re , et que le nombre d'onde critique correspondant est $k_{y1}=3,13$; pour la deuxième espèce, $Ra_{//2}^*=18352$ quel que soit Re , et $k_{y2}=6,26$. Connaissant la forme de la perturbation (i.e. le nombre d'onde), l'amplitude de la perturbation est déterminée approximativement en faisant les bilans d'énergie et de production d'entropie des $R_{//}$, à partir des équations non-linéaires. Ainsi, des profils de vitesse et de température des $R_{//}$ calculés analytiquement sont présentés. Le transfert thermique dans le fluide est aussi déterminé théoriquement en calculant le nombre de Nusselt Nu (cf. tableau II-4, §3.2.3 en fin de chapitre). On montre que Nu augmente très fortement avec Ra en phase de $R_{//}$.

A la suite de cette étude théorique, Mori et Uchida (1966) effectuent des mesures expérimentales dans un écoulement d'air (de la fumée de paraffine est ajoutée pour la visualisation des $R_{//}$). Les mesures de vitesses locales sont obtenues par anémométrie à fils chauds et les températures sont mesurées par des thermocouples. Le nombre de Reynolds est élevé: de l'ordre de 300. Les auteurs montrent un bon accord entre les résultats théoriques et expérimentaux en ce qui concerne k_{y1} , Nu et les profils de vitesse et de température. Les $R_{//}$ de deuxième espèce ne sont pas visualisés mais les auteurs font remarquer, sans plus de précision, que lorsque l'on se rapproche de $Ra_{//2}^*$, "le mouvement des rouleaux [de première espèce] devient irrégulier et instable".

Ostrach et Kamotani (1975) réalisent une expérience similaire à la précédente: visualisation des structures convectives apparaissant dans un écoulement d'air avec de la fumée et mesures de températures par thermocouples et de vitesse par anémométrie à fils chauds. Les mesures sont effectuées pour $100 \leq Ra \leq 13500$ et $10 \leq Re \leq 100$. Vue la gamme de Re , seuls les $R_{//}$ sont observés. Cependant, à partir $Ra=8000$, le profil transversal de température, normalement sinusoïdal, devient distordu et, pour Ra encore plus grand, les $R_{//}$ deviennent instables. Ce phénomène est expliqué par l'apparition des $R_{//}$ de deuxième espèce, même si la théorie linéaire ne les prévoit qu'à $Ra=18352$ ². Le nombre de Nusselt est calculé en faisant le bilan des flux de chaleur reçus par le fluide et perdus par rayonnement et par conduction vers le milieu environnant. Cette méthode est assez lourde mais plus précise que celle utilisée par Mori et Uchida dans leur expérience (cette dernière, basée sur la mesure du gradient de température près de la plaque chaude, est

¹ Nu représente le rapport entre le flux de chaleur total (somme des flux de chaleur dissipée par conduction, convection et éventuellement rayonnement) et le flux de chaleur dissipée par conduction (donc $Nu \geq 1$).

² Comme le font remarquer Ostrach et Kamotani (1975), on peut légitimement se demander si la théorie linéaire est encore valable à $Ra=18352$!?

peu fiable). Ostrach et Kamotani montrent que Nu mesuré diffère peu des résultats connus en convection naturelle et en convection mixte: Nu ne dépend pas de Re pour $Re \leq 100$. En corrélant plusieurs résultats, les auteurs établissent une formule donnant Nu en fonction de Ra pour $Ra \leq 16000$ (cf. tableau II-4, §3.2.3). Enfin, contrairement à ce qu'avaient observé *Bénard et Avsec (1938)* et *Mori et Uchida (1966)* mais en accord avec *Akiyama et al. (1971)*, la longueur d'onde des $R_{//}$ est environ égale à $2h$ et ce quel que soit la hauteur du canal. Cette contradiction n'est pas relevée par les auteurs et reste inexpliquée.

2.1.2 Stabilité linéaire des $R_{\perp}$ en conduite d'extension latérale infinie

Pour leur étude de stabilité linéaire, *Gage et Reid (1968)* se placent dans le cas d'une conduite d'extension latérale infinie. Les perturbations introduites dans l'écoulement de base (écoulement de Poiseuille 2D purement conducteur) sont tridimensionnelles et dépendantes du temps. Ils considèrent à la fois le problème où la stratification en température est stable (chaud en haut, $Ra < 0$) et celui où elle est instable (chaud en bas, $Ra > 0$). La gamme des nombres de Reynolds¹ Re' s'étend de 0 à 10^6 . La transformation de Squire² est utilisée quel que soit Ra , bien que le théorème de Squire qui la justifie ne soit valable que dans le cas où la stratification est stable. Dans le cas de la stratification instable, l'utilisation de la transformation est justifiée par le fait qu'à $Pr=1$ une analogie entre le problème de Rayleigh-Bénard et le problème de Taylor (convection entre deux cylindres en rotation) est possible. Donc, l'étude se limite à $Pr=1$ lorsque $Ra > 0$. Dans ce cas, pour $0 < Re' < 5400$, l'instabilité est d'origine thermique: quel que soit Re' dans cette gamme, elle prend la forme de $R_{//}$ à partir de $Ra=1708$. L'analyse de Gage et Reid autorise aussi les perturbations donnant naissance à des cellules transversales (par exemple, les $R_{\perp}$) ou à des cellules 3D quelconques (par exemple, des cellules d'axes obliques par rapport à l'écoulement de base). Or, pour ces structures thermoconvectives, il apparaît que Ra^* est une fonction croissante de Re ; elles sont donc

¹ Pour Gage et Reid et certains autres auteurs, le nombre de Reynolds Re' est basé sur la demi-épaisseur $h/2$ de la couche fluide et sur la vitesse maximale U^{max} de l'écoulement de base: $Re' = U^{max}h/(2\nu)$. De notre côté, dans tout ce document, à moins que ce soit mentionné autrement comme c'est le cas ici, nous utiliserons le nombre de Reynolds $Re = U^0h/\nu$ où U^0 est la vitesse moyenne de l'écoulement de base. Ainsi, $Re = 4/3 Re'$.

² La transformation de Squire permet d'obtenir la solution du problème de stabilité linéaire pour des perturbations 3D quelconques en étudiant la stabilité du problème 2D équivalent. Mais cette transformation n'est valable que sous certaines conditions énoncées dans le théorème de Squire (cf. *Squire (1933)* et *Drazin et Reid (1981)*; voir aussi §1.2.3 du chapitre III).

moins stables que les $R_{//}$ lorsque $Re' < 5400$. Au contraire, pour $Re' > 5400$, les perturbations d'origine visqueuse prennent le dessus et donnent naissance à des ondes transverses de type Tollmien-Schlichting¹. Le diagramme de stabilité des différentes configurations de l'écoulement, dans le plan $Ra^{1/2}-Re'$ et pour $Pr=1$, est reproduit figure II-2. Dans ce diagramme, $Ri = -Ra/(64Re'^2Pr)$ est le nombre de Richardson et $Ri^* = -1708/(64 \times 5400^2 \times 1) = -0,92 \times 10^{-6}$ est la valeur critique marquant la brusque transition entre les $R_{//}$ et les ondes de Tollmien-Schlichting. D'autre part, λ est un angle² tel que $\cos \lambda = k_x/(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$, où k_x et k_y sont les nombres d'onde dans les directions x et y . $\lambda = 0^\circ$ correspond aux $R_{\perp}$; $\lambda = 90^\circ$ correspond aux $R_{//}$; les valeurs intermédiaires de λ correspondent à des rouleaux obliques.

Pour *Platten (1971)*, l'étude de la stabilité linéaire du problème de Poiseuille-Bénard en conduite d'extension latérale infinie est une application lui permettant de

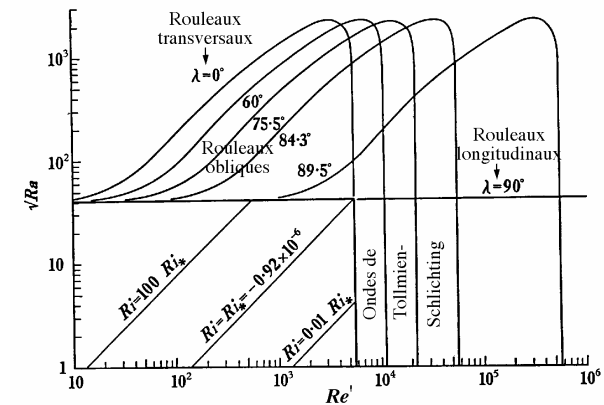


Figure II-2: Diagramme de stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille-Bénard dans une conduite d'extension latérale infinie, à $Pr=1$, selon *Gage et Reid (1968)*.

¹ C'est l'instabilité qui apparaît dans un écoulement de Poiseuille isotherme lorsque les contraintes de viscosité sont trop importantes (i.e. pour $Re' > 5400$ ou $Re' > 7200$); elle prend la forme d'ondes 2D transverses à l'écoulement.

² Partout ailleurs dans ce document, λ désignera la longueur d'onde des $R_{\perp}$ ou des $R_{//}$.

vérifier et de mettre au point la technique variationnelle du potentiel local développée par *Glandsdorff et Prigogine (1971)*. Il se place dans le cas de perturbations 2D ne permettant la naissance que des $R_{\perp}$ finis (la composante transversale des perturbations de vitesse v' est nulle). Il étudie l'effet stabilisant de l'écoulement de Poiseuille sur l'apparition des $R_{\perp}$, vérifiant ainsi pour tous nombres de Prandtl les résultats obtenus par *Gage et Reid (1968)* à $Pr=1$. Pour $Re' < 5000$, $Ra < 20000$ et $Pr=0,7$ et 7 , il donne les deux courbes croissantes $Ra_{\perp}^* = f(Re)$ ainsi qu'un tableau de valeurs montrant que le nombre d'onde critique k_x^* croît avec Re . L'étude montre aussi que dans le cas d'une stratification stabilisante, l'apparition de la turbulence à fort nombre de Reynolds est retardée d'autant plus que Ra est négatif.

2.1.3 Vérifications expérimentales de l'augmentation de $Ra_{\perp}^*$ avec Re

Les premiers qui se soient intéressés expérimentalement à l'action de la vitesse de l'écoulement sur le nombre de Rayleigh critique Ra^* sont sans doute *Platten et Lefebvre (1971)*. En montant une expérience de type *Schmidt-Milverton (1935)* avec de l'eau dans une conduite d'allongements $A \approx 150$ et $B \approx 80$, ils montrent que Ra^* croît de 1708 à 2063 lorsque l'on passe de $Re=0$ à $Re=28$. Ils en déduisent que la preuve expérimentale de l'augmentation de $Ra_{\perp}^*$ avec Re , montrée théoriquement par *Platten (1971)*, est apportée. Cependant, comme nous l'avons vu au tableau I-1, pour l'eau à $Re=28$ et pour un allongement transversal B si grand, les structures convectives sont des $R_{//}$ pour lesquels $Ra_{//}^*$ ne varie pas avec Re . D'autre part, vu l'allongement transversal utilisé, on ne peut pas imputer la croissance de Ra^* à l'influence de B . Donc, la variation de Ra^* est due à autre chose ... Plusieurs explications à ce problème seront proposées. Nous les présentons ci-dessous.

Dans une expérience de visualisation dans une conduite où $B=20$, *Luijckx (1983)* observe, au sein de l'écoulement de $R_{//}$, la présence de dislocations ou de distorsions résiduelles, d'autant plus importantes que Re est faible. Il explique l'augmentation de 1708 à 2063 du point critique Ra^* dans les expériences de *Platten et Lefebvre (1971)*, par la présence de ces défauts. De leur côté, *Platten et Legros (1984)*¹ proposent deux explications. Tout d'abord, ils poussent l'idée de *Luijckx* plus loin, en recherchant théoriquement s'il ne pourrait pas rester dans l'écoulement de $R_{//}$ une structure résiduelle ayant une périodicité dans la direction longitudinale (i.e. des $R_{\perp}$) qui provoquerait l'augmentation de Ra^* . En utilisant la transformation de Squire, ils montrent que des

structures convectives ayant la forme de rouleaux sinueux ou de rouleaux inclinés par rapport à la direction de l'écoulement moyen (l'inclinaison, ou la sinuosité, devenant de plus en plus faible au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente) pourraient exister (cf. §1.2 du chapitre III et figure III-3). *Platten et Legros (1984)* vérifient leur hypothèse en plaçant une sonde de température très sensible en un point fixe au milieu d'un l'écoulement de $R_{//}$: ils enregistrent un signal sinusoïdal témoignant de la présence effective d'une périodicité longitudinale résiduelle dans l'écoulement. Cependant, ces observations sont faites pour $Re \approx 1,5$; elles ne concordent pas avec des photos prises à des nombres de Reynolds plus élevés montrant des $R_{//}$ parfaitement réguliers et ne laissant apparaître ni inclinaison ni sinuosité.

Alors, *Platten et Legros* font une deuxième proposition: ils montrent qu'à $Re=28$ l'intervalle de temps pendant lequel un volume d'eau élémentaire passe sur la plaque chauffée dans l'expérience de *Platten et Lefebvre (1971)* est environ égal à deux fois le temps caractéristique nécessaire pour atteindre l'état thermoconvectif stationnaire du problème de convection naturelle équivalent. Il est donc probable que les $R_{//}$ ne soient pas complètement établis dans cette expérience. Or, comme nous allons le voir au §2.2 suivant, dans la zone d'entrée thermique, Ra^* est plus élevé que dans la zone où l'écoulement est pleinement établi: Ra^* décroît lorsque x augmente. A partir de la figure II-6, on peut dire *très approximativement* que pour $Pe=RePr=28 \times 7 \approx 200$, i.e. dans les conditions de l'expérience de *Platten et Lefebvre (1971)*, $Ra^* \approx 2000$ aux environs de $x \approx 30$ (i.e. à 30 fois la hauteur de la conduite).

Pour avoir une analyse qualitativement exacte de l'influence de Re , de B et aussi de Pr sur les nombres de Rayleigh critiques d'apparition des rouleaux transversaux et longitudinaux ($Ra_{\perp}^*$ et $Ra_{//}^*$), il faut attendre la parution de l'article de *Luijckx et al. (1981)*. Cette analyse a déjà été présentée dans le chapitre introductif au §2.1 et elle peut se résumer graphiquement par les deux très importants diagrammes de stabilité présentés aux figures I-5 et I-6. On rappelle brièvement au tableau II-1 les points principaux de cette analyse dans le cas d'une **conduite d'extension latérale finie**.

On notera que ces résultats *qualitatifs* sont le fruit d'une étude de stabilité linéaire 3D pour un écoulement de base 3D, dont les résultats *quantitatifs* auraient dû être publiés dans la référence [9] ("to be published") de *Luijckx et al. (1981)*. Cette

¹ au chapitre VIII, pages 545 à 556.

- à $Re=0$, $Ra_{\perp}^* \leq Ra_{//}^*$.	$Ra_{//}^* = Ra_{//}^*(B)$
- $Ra_{//}^*$ est indépendant de Re et de Pr .	
- $Ra_{\perp}^*$ augmente avec Re , Pr et B .	$Ra_{\perp}^* = Ra_{\perp}^*(Re, Pr, B)$
- pour $Re < Re^*$, on a des $R_{\perp}$,	
- et pour $Re > Re^*$, on a des $R_{//}$.	$Re^* = Re^*(Pr, B)$

Tableau II-1: Évolution des nombres de Rayleigh et de Reynolds critiques dans une conduite d'extension latérale finie.

publication n'ayant jamais paru, la totalité des résultats quantitatifs se trouve uniquement la thèse de *Luijckx (1983)*. On trouvera cependant quelques valeurs numériques, ainsi que le développement complet de l'analyse théorique lorsque $B=\infty$, et la trame lorsque $B \neq \infty$, au chapitre VIII du livre de *Platten et Legros (1984)*. Le travail de *Luijckx (1983)* étant à nos yeux une contribution très importante à l'analyse de l'écoulement de Poiseuille-Bénard, nous en ferons un résumé et nous reproduirons ses principaux résultats au chapitre III.

L'article de *Luijckx et al. (1981)* ne se limite pas à l'analyse théorique. Son principal objectif est de mettre en évidence la disparition des $R_{\perp}$ quand Re augmente (i.e. la croissance de $Ra_{\perp}^*$ avec Re) par une expérience de visualisation (élément qui faisait défaut dans la première expérience de *Platten et Lefebvre (1971)*). La méthode utilisée consiste à éclairer transversalement les parois en Plexiglas de la conduite pour projeter l'ombre des $R_{\perp}$ sur un écran. La conduite est très longue ($A=L/h \approx 100$) et plus de 90 $R_{\perp}$ peuvent s'y développer. Comme le fluide utilisé est très visqueux (huile de silicone, $Pr \approx 450$), il est nécessaire de travailler à très faible vitesse d'écoulement ($Re=10^{-3}$ ou 10^{-2}) pour apercevoir les $R_{\perp}$. Lorsque le débit dans la conduite est augmenté, à partir d'une certaine valeur critique, les auteurs observent que les $R_{\perp}$ disparaissent dans la zone d'entrée du canal. Plus Re augmente, plus les $R_{\perp}$ sont rejetés vers l'aval et ce jusqu'à disparaître. Les auteurs supposent alors la présence des $R_{//}$, bien que ceux-ci ne puissent pas être observés par la méthode de visualisation utilisée. On peut donc en déduire le nombre de Reynolds critique $Re_{\perp}^*$ (cf. tableau I-1). Il est montré que le rapport Vr/U° de la vitesse de déplacement des $R_{\perp}$ par la vitesse moyenne de l'écoulement est égal à 1,38. Cette valeur est comparée à un résultat théorique (cf. *Luijckx (1983)*) égal à 1,5. On observe aussi que la longueur d'onde λ des $R_{\perp}$ décroît avec Ra et avec Re .

2.1.4 Écoulements de $R_{//}$ avec gradient horizontal de température

Enfin, pour terminer cette revue, citons l'étude de stabilité linéaire originale menée par *Nakayama et al. (1970)* et l'expérience d'*Akiyama et al. (1971)* qui suivit. Ces auteurs ont étudié les $R_{//}$ apparaissant dans un l'écoulement de Poiseuille-Bénard où un écart de température ΔT constant est maintenu entre les deux plaques horizontales, mais où le gradient axial de température est non nul ($\nabla T \cdot \mathbf{i} \neq 0$). Les cas $\Delta T > 0$, $\Delta T < 0$, $\nabla T \cdot \mathbf{i} > 0$ et $\nabla T \cdot \mathbf{i} < 0$ sont analysés. L'étude théorique se place dans le cas d'une conduite d'extension latérale infinie et les perturbations 2D considérées ne sont fonction que de y et z . Les résultats montrent que $|Ra_{//}^*|$ diminue lorsque $\|\nabla T \cdot \mathbf{i}\|$ augmente et que l'écoulement de Poiseuille est plus instable lorsque Pr est petit. Le dessin des lignes de courant et des isothermes montre comment la structure des $R_{//}$ est modifiée par le gradient horizontal de température. L'expérience permet, quant à elle, la présentation de très beaux $R_{//}$ obtenus dans de l'air avec de la fumée. Pour obtenir le gradient de température selon l'axe du canal, le chauffage électrique des parois horizontales varie sur 13 sections. Re est compris entre 6,3 et 105 et $B=l/h=11$ ou 22. Les courbes expérimentales et théoriques $|Ra_{//}^*|=f(\|\nabla T \cdot \mathbf{i}\|)$ concordent assez bien.

2.2 Zone d'entrée thermique

A partir de l'abscisse $x=0$ où le gradient vertical de température est imposé, un écoulement pleinement développé hydrodynamiquement a besoin d'une certaine distance pour s'établir thermiquement (cf. figure I-3(b) dans le cas où naissent des $R_{\perp}$). De nombreux auteurs se sont intéressés à cette zone et ont essayé d'y déterminer les conditions marquant la naissance des instabilités, que ce soit pour des écoulements en conduite ou sur plaque chauffées.

Parmi les premiers auteurs à avoir étudié le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard, on trouve *Hwang et Cheng (1973)*. Ils réalisent une étude de stabilité linéaire pour une conduite d'extension latérale infinie. Les modes normaux introduits dans les équations de perturbations linéarisées se rapportent uniquement aux $R_{//}$ stationnaires; ils sont de la forme $f(x, y, z) = A(z)e^{c_x x} e^{i k_y y}$ (cf. tableau II-2, §2.3). La stabilité neutre (ou marginale) est obtenue lorsque le coefficient d'amplification spatiale dans la direction longitudinale c_x s'annule. D'autre part, le profil thermique de l'écoulement de base est calculé tel qu'en $x=0$ (là où commence le chauffage) la température du fluide soit uniforme et égale à la température de la plaque supérieure froide; c'est à dire que la

conduction axiale de la chaleur vers l'amont est négligée dans l'écoulement de base. Des graphes $Ra^*=f(x)$ et $k_y^*=f(x)$ sont donnés pour plusieurs nombres de Prandtl et de Péclet ($Pe=RePr$). Pour un nombre de Prandtl $Pr \geq 0,7$ et à grand nombre de Péclet, on trouve que l'écoulement est plus stable dans la zone d'entrée que lorsqu'il est pleinement développé; le résultat est inverse pour $Pr \leq 0,2$. Dans les deux cas, lorsqu'on s'éloigne de l'entrée, on retrouve que Ra^* tend vers 1708.

L'étude précédente est généralisée par *Cheng et Wu (1976)* qui introduisent deux modifications importantes: (i) les perturbations sont 3D avec des modes normaux dans la direction x de la forme $f(x, y, z)=A(z)e^{c_x x}e^{i(k_x x + k_y y)}$ (les $R_\perp$ ne sont donc pas écartés); (ii) la conduction de la chaleur vers l'amont est rendue possible en considérant un canal allant de $x=-\infty$ à $x=+\infty$ et en prenant des conditions aux limites adéquates. L'étude montre que pour $Pe < 25$, l'hypothèse de fluide à température uniforme en $x=0$ est erronée et que la conduction axiale de la chaleur ne peut pas être négligée. En effet, à faible Péclet, la courbes $Ra_{//}^*=f(x)$ est nettement en dessous de celle obtenue par *Hwang et Cheng (1973)* car le problème est elliptique et les perturbations remontent vers l'amont de l'écoulement. D'autre part, il est montré que les $R_\perp$ sont plus stables que les $R_{//}$ pour $Pe \leq 0,5$ et $Pr \leq 1$ (i.e. à petit nombre de Reynolds), et que les $R_\perp$ se développent uniquement en amont et juste en aval de $x=0$, endroit où commence le gradient vertical de température. Plus en aval, on retrouve les $R_{//}$ puisque la conduite est d'extension latérale infinie. Pour illustrer cela, on reproduit à la figure II-3 les courbes de stabilité des $R_\perp$ et des $R_{//}$ pour $1 \leq Pr \leq 100$ et $Pe=0,5$. On donne également à la figure II-4 le graphe $Ra^*=f(x)$ pour $Pr=10$ et $Pe=0,5, 2,5, 5$ et 25 .

Sans avoir connaissance du travail de *Cheng et Wu (1976)*, *Kamotani et Ostrach (1976)* puis *Kamotani et al. (1979)* étudient expérimentalement la zone d'entrée thermique dans un écoulement d'air. Les deux études concernent respectivement les gammes d'écoulements suivants: $1000 \leq Ra \leq 31000$ et $30 \leq Re \leq 1100$ pour la première, et $2,2 \cdot 10^4 \leq Ra \leq 2,1 \cdot 10^5$ et $50 \leq Re \leq 300$ pour la seconde. Les mesures de vitesse se font par anémométrie à fil chaud et celles de températures par des thermocouples. Les auteurs constatent que la longueur d'entrée thermique décroît lorsque Ra croît, ou lorsque Re^2/Gr décroît¹. Comme dans leur article précédent en écoulement pleinement établi (cf. §2.1.1, *Ostrach et Kamotani (1975)*), ils mettent l'accent sur la manière de mesurer expérimentalement le transfert thermique dans la zone d'entrée. De nombreux résultats sont présentés à ce sujet; mais, nous les

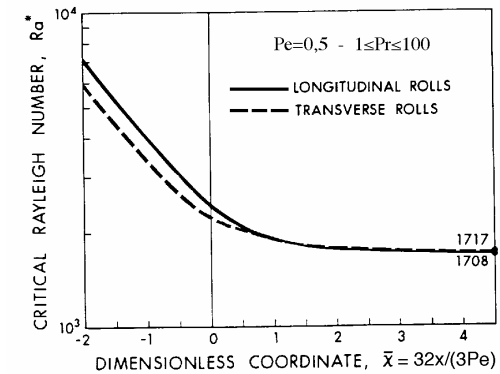


Figure II-3: Courbes de stabilité des rouleaux transversaux (en bas) et longitudinaux (en haut) dans la zone d'entrée thermique d'un canal d'extension latérale infinie (tiré de *Cheng et Wu (1976)*).

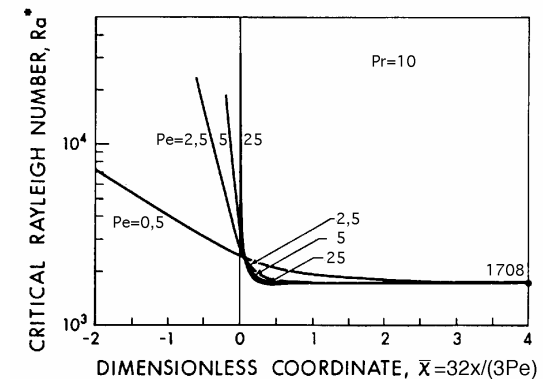


Figure II-4: Évolution du nombre de Rayleigh critique, à $Pr=10$, en amont et en aval de l'entrée thermique dans un canal d'extension latérale infinie (tiré de *Cheng et Wu (1976)*).

¹ Gr est le nombre de Grashof; il est égal à Ra/Pr .

donnerons avec les études numériques au §3.2.1, figure II-9. Par contre, deux résultats importants méritent d'être décrits ci-dessous:

1- Dans les expériences de *Kamotani et al. (1979)*, Ra^* est déterminé lorsqu'on peut détecter une petite déviation dans le profil transversal de température en un x donné. Bien que l'on retrouve que Ra^* décroît avec x , les valeurs expérimentales dans la zone d'entrée sont nettement supérieures aux valeurs théoriques: à la même position axiale $x=0,01$, $Ra^* \approx 30000$ pour l'expérience alors que $Ra^* \approx 3000$ pour la théorie. Ce résultat sera confirmé peu après par une expérience de même type réalisée par *Hwang et Liu (1976)*. L'explication donnée est qu'en théorie les perturbations caractérisant Ra^* sont infinitésimales alors qu'expérimentalement les appareils de mesure n'enregistrent que des perturbations finies (parfois provoquées par l'appareil de mesure lui-même). Cependant, nous verrons un peu plus loin avec l'analyse linéaire de *Lee et Hwang (1991a-b)*, qu'un critère de stabilité neutre basé sur la recherche du point où l'amplification temporelle des perturbations est nulle, permet de retrouver à peu de chose près la courbe critique expérimentale.

2- Le deuxième résultat nouveau est qu'à nombre de Rayleigh élevé ($Ra > 20000$), *Kamotani et Ostrach (1976)* observe dans le profil transversal de température des oscillations de longueur d'onde $\lambda = h$, et non $2h$ comme dans le cas des $R_{//}$ pleinement développés (cf. *Ostrach et Kamotani (1975)*). Les auteurs émettent l'hypothèse que dans la zone d'entrée les $R_{//}$ de première espèce disparaissent alors que les rouleaux de deuxième espèce, leur deuxième harmonique, persistent. Plus tard, *Kamotani et al. (1979)* montreront que lorsque le rapport des forces d'inertie sur les forces de pesanteur est faible, i.e. pour Ra élevé ou Re petit, les instabilités qui apparaissent dans l'écoulement ressemblent à des jets verticaux en forme de champignon et que ces structures donnent un signal de température tel que $\lambda = h$. Plus en aval, les "champignons" laissent place aux $R_{//}$ classiques avec $\lambda \approx 2h$.

Nous ne pouvons pas conclure une revue des articles traitant de la stabilité de l'écoulement de Poiseuille-Bénard dans la zone d'entrée thermique, sans détailler le travail beaucoup plus récent de *Lee et Hwang (1991a, 1991b)*. Dans le premier article (1991a), ils poursuivent le travail de *Hwang et Cheng (1973)* (étonnamment, ils laissent quasiment sous silence le travail de *Cheng et Wu (1976)*). Ils considèrent que l'écoulement de base a un profil de température uniforme en $x=0$ et les perturbations 3D sont écrites sous la forme $f(x, y, z, t) = A(x, z, t)e^{ik_y y}$ (seuls les $R_{//}$ sont envisagés). L'originalité de cette étude est le critère utilisé pour déterminer la stabilité neutre:

" $\nabla f / \nabla t = 0$ et $\nabla f / \nabla x \neq 0$ ". Dans les deux études théoriques précédentes, le problème est stationnaire et le critère utilisé est $c_x = 0$ (cf. la présentation de l'article de *Hwang et Cheng (1973)*). *Lee et Hwang* traduisent cela par " $\partial f / \partial x = 0$ à t fixé". La figure II-5 compare les deux critères: " $\partial f / \partial t = 0$ et $\partial f / \partial x \neq 0$ " permet de déterminer, pour un nombre de Rayleigh fixé, le point noté x_c sur l'axe, en amont duquel les perturbations s'amortissent, et en aval duquel elles s'amplifient (dans le temps); " $\partial f / \partial x = 0$ à t fixé" détermine la position critique d'apparition de la perturbation, qui se trouve toujours en amont de x_c . Ainsi, comme le montrent les graphes de la figure II-6, le nombre de Rayleigh critique obtenu par *Lee et Hwang (1991a)* est supérieur à celui des analyses linéaires précédentes et il permet même d'approcher très correctement les résultats expérimentaux. Cette figure montre aussi que Ra^* décroît en s'éloignant de la zone d'entrée et ce, quel que soit le nombre de Prandtl (à la différence de *Hwang et Cheng (1973)*). Pour finir, la figure II-7 reproduit l'évolution du nombre d'onde critique k_y^* pour les $R_{//}$, en fonction de x . On notera que les graphes concordent avec les résultats des expériences de *Kamotani et al. (1976, 1979)* décrites précédemment: λ est plus petite dans la zone d'entrée. De plus, pour x suffisamment grand, on retrouve que k_y^* tend vers 3,116, sa valeur lorsque l'écoulement est pleinement établi dans une conduite d'extension latérale infinie.

Dans leur deuxième article, *Lee et Hwang (1991b)* présentent une étude de stabilité linéaire similaire à la précédente, mais pour six configurations de chauffe (ou de refroidissement) différentes: ils peuvent chauffer ou refroidir les parois inférieure et supérieure de la conduite et la température d'entrée du fluide peut varier. Pour trois configurations, des graphes montrent l'évolution des différents profils de perturbation en fonction de x . Pour chacun des cas, les courbes $Ra_{//}^* = f(x)$ et $k_y^* = f(x)$ sont présentées.

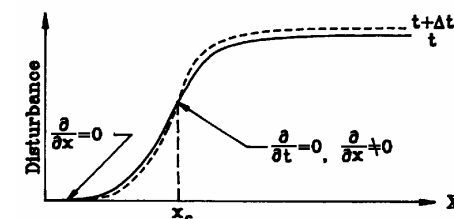


Figure II-5: Critères utilisés pour définir le seuil d'instabilité dans les analyses de stabilité linéaire pour la zone d'entrée (tiré de *Lee et Hwang (1991b)*).

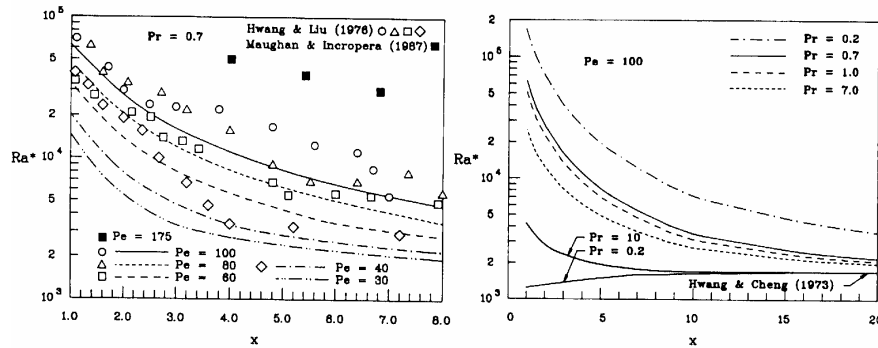


Figure II-6: Évolution axiale du nombre de Rayleigh critique dans la zone d'entrée en fonction de Pe et Pr (tiré de Lee et Hwang (1991a)).

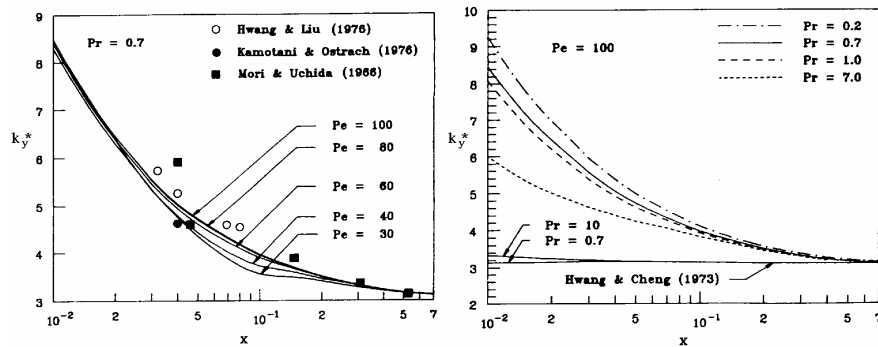


Figure II-7: Évolution axiale du nombre d'onde critique pour les $R_{//}$ dans la zone d'entrée en fonction de Pe et de Pr (tiré de Lee et Hwang (1991a)).

2.3 Tableau récapitulatif des analyses de stabilité linéaire

Pour terminer cette partie, nous faisons, dans le tableau II-2, un récapitulatif des différentes analyses de stabilité linéaire qui ont été présentées, aussi bien pour la zone d'entrée que pour la région où l'écoulement est pleinement établi. Nous indiquons si la conduite est d'extension latérale infinie ou finie (nous donnons les allongements transversaux B étudiés) ainsi que la gamme d'écoulements concernés. Nous présentons

la forme des perturbations qui ont été introduites dans l'écoulement, ainsi que le critère de stabilité marginale utilisé. Enfin, nous précisons le type des rouleaux convectifs qui sont observés.

Références	Zone	Extensio n latérale	Re ou (Pe) [Pr]	Forme des perturbations et critères de stabilité neutre	Rouleaux
Velte (1962)	établie	finie $B=1$	étude qualitative	$f(y, z, t)=A(y, z).e^{\sigma t}$ avec $\sigma_r=0$	$R_{//}$
Sani (1964)	établie	finie	étude qualitative	$f(y, z, t)=A(y, z).e^{\sigma t}$ avec $\sigma_r=0$	$R_{//}$
Mori et Uchida (1966)	établie	infinie	230-570 [0,7]	$f(y, z, t)=A(z).\cos(k_y y).e^{\sigma t}$ avec $\sigma_r=0$	$R_{//}$ (1 ^e et 2 ^e espèce)
Gage et Reid (1968)	établie	infinie	10-10 ⁶ [1]	$f(x, y, z, t)=A(z).e^{i(k_x x + k_y y + \sigma t)}.e^{\sigma t}$ avec $\sigma_r=0$	$R_{//}$, $R_{\perp}$, R_{obliques}
Nakayama et al. (1970)	établie	infinie	0-? [0-100]	$f(y, z, t)=A(z).e^{i k_y y}.e^{\sigma t}$ avec $\sigma_r=0$	$R_{//}$
Platten (1971)	établie	infinie	0-6700 [0,7-7]	$f(x, y, z, t)=A(z).e^{i(k_x x + \sigma t)}.e^{\sigma t}$ avec $\sigma_r=0$	$R_{\perp}$
Luijckx (1983)	établie	infinie	0-8000 [0-453]	$f(x, y, z, t)=A(z).e^{i(k_x x + k_y y + \sigma t)}.e^{\sigma t}$ avec $\sigma_r=0$	$R_{//}$ $R_{\perp}$
Luijckx (1983)	établie	finie $0 \leq B \leq 5,4$	0-1770 [0-1000]	$f(x, y, z, t)=A(y, z).e^{i(k_x x + \sigma t)}.e^{\sigma t}$ avec $\sigma_r=0$	$R_{//}$ $R_{\perp}$ 3D
Platten et Legros (1984)	établie	infinie	0-100 [7]	$f(x, y, z, t)=A(z).e^{i(k_x x + k_y y + \sigma t)}.e^{\sigma t}$ avec $\sigma_r=0$	$R_{//}$ $R_{\perp}$
Platten et Legros (1984)	établie	finie $B=2$ et $5,2$	0-10 [1-453]	$f(x, y, z, t)=A(y, z).e^{i(k_x x + \sigma t)}.e^{\sigma t}$ avec $\sigma_r=0$	$R_{//}$ $R_{\perp}$ 3D
Hwang et Cheng (1973)	entrée	infinie	(10- ∞) [0,1- ∞]	$f(x, y, z)=A(z).e^{i k_y y}.e^{c_x x}$ avec $c_x=0$	$R_{//}$
Cheng et Wu (1976)	entrée	infinie	(0,5-25) [10 ⁻³ - ∞]	$f(x, y, z)=A(z).e^{i(k_x x + k_y y)}.e^{c_x x}$ avec $c_x=0$	$R_{//}$ $R_{\perp}$
Lee et Hwang (1991a)	entrée	infinie	(30-100) [0,2-7]	$f(x, y, z, t)=A(x, z, t).e^{i k_y y}$ avec $\partial f / \partial t = 0$ et $\partial f / \partial x \neq 0$	$R_{//}$

Tableau II-2: Cadre des différentes études de stabilité linéaire menées sur l'écoulement de Poiseuille-Bénard.

3 1983-1993: l'essor de la simulation numérique directe dans les applications industrielles

La période s'étendant de 1983 à 1993 est marquée principalement par la publication de nombreux travaux utilisant la simulation numérique directe comme moyen d'investigation de l'écoulement de Poiseuille-Bénard. De plus, la majorité de ces publications sont motivées par une application industrielle: soit l'étude des dépôts de vapeurs chimiques (Chemical Vapor Deposition: CVD), soit le refroidissement des composants électroniques dans les circuits imprimés. On s'intéresse particulièrement à l'augmentation des transferts thermiques ou des taux de dépôt des vapeurs chimiques, ainsi qu'à la détermination des longueurs nécessaires à l'apparition des structures convectives. Enfin, les écoulements ayant lieu en général à grands nombres de Reynolds, les $R_{\parallel}$ sont presque exclusivement les seules structures observées.

Bien sûr, des travaux expérimentaux ou théoriques ou des études portant sur les $R_{\perp}$ sont publiés dans cette période (à partir de 1989 principalement). Mais, comme ces études ont un caractère plus fondamental (étude de stabilité, analyse fine de l'écoulement) elles seront présentées au §4 suivant.

Dans la première partie de ce paragraphe, on présente les travaux affairant directement aux applications industrielles: la CVD au §3.1.1, et le refroidissement des composants électroniques au §3.1.2. On décrit les méthodologies employées et les principaux résultats pratiques trouvés. Dans la deuxième partie, on donne les résultats obtenus concernant les caractéristiques globales de l'écoulement de Poiseuille-Bénard: on décrit l'évolution du transfert thermique dans la zone d'entrée au §3.2.1; on présente les résultats concernant les longueurs d'établissement dans les écoulement de $R_{\parallel}$ au §3.2.2; enfin, on donne au §3.2.3 des formules de corrélation sur la variation du nombre de Nusselt en fonction de Re et Ra , lorsque l'écoulement est pleinement établi.

3.1 Applications industrielles

3.1.1 L'étude des dépôts de vapeurs chimiques (la CVD)

a) Présentation générale de la CVD:

La CVD¹ est un processus utilisé pour la fabrication de films très minces de matière inorganique. Dans un réacteur, on fait circuler un mélange de gaz inertes et réactifs qui, par pyrolyse au contact d'un substrat chauffé, vont créer des fines couches de dépôts solides. Par exemple, ce procédé intervient lors de la fabrication des circuits micro-électroniques pour obtenir des couches minces de semi-conducteurs, ou lors de la conception de supports d'enregistrements magnétiques ou optiques. L'enjeu de cette technologie est de pouvoir contrôler le taux de dépôt² des vapeurs chimiques, de manière à obtenir les couches les plus uniformes possibles à l'épaisseur souhaitée.

La géométrie du réacteur peut varier, mais la plus répandue est une conduite horizontale de section rectangulaire, où le substrat chauffé est placé sur la paroi du bas (*Jensen et al. (1991)*). On retrouve donc exactement la configuration de l'écoulement de Poiseuille-Bénard. *Evans et Greif (1989)* donnent l'ordre de grandeur des dimensions de tels réacteurs et les caractéristiques de l'écoulement typique rencontré en CVD: $L \sim 100$ cm, $l \sim 10$ cm, h de l'ordre de quelques centimètres, la température du substrat $T_c \approx 1000$ à 1300 K, $Ra \sim 50000$, $Re \sim 20$ et $Pr \sim 0,6$. On constate que les gradients de température sont très élevés. En effet, pour éviter la formation de dépôt sur les parois latérales et supérieure, celles-ci sont refroidies avec de l'eau. Alors, nécessairement, des cellules thermoconvectives apparaissent. L'étude de leur structure est un point très important car elles peuvent être à l'origine de dépôts non uniformes.

b) Choix des modèles numériques et types de structures thermoconvectives observées:

Comme, en général, les écoulements en CVD ont lieu à des nombres de Reynolds élevés, les $R_{\parallel}$ sont les seules structures à pouvoir se développer. Dans ce cas, les trois composantes de vitesse sont non nulles. La simulation numérique nécessite donc, à priori, un modèle 3D. D'autre part, vu les gradients de température mis en jeu,

¹ Pour une revue complète et générale sur la CVD, on se référera à *Jensen et al. (1991)*, *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 23, pp. 197-233. On trouvera une bibliographie plus récente dans *Ingle et Mountziaris (1994)*, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 277, pp. 249-269.

² Le taux de dépôt est la variation de l'épaisseur du dépôt par unité de temps. Il s'exprime en général en Å/min.

l'approximation de Boussinesq¹ ne peut pas être invoquée. Enfin, dans de nombreux cas, il faut ajouter au modèle classique (équations de continuité, de Navier-Stokes et de l'énergie) la résolution de l'équation de conservation des espèces (ou équation de concentration) puisqu'au moins deux gaz² sont présents dans le réacteur. Les modèles utilisés en CVD sont donc relativement complexes et leur résolution numérique serait extrêmement coûteuse en temps de calcul si des hypothèses simplificatrices n'étaient pas envisagées. Ainsi, la diffusion axiale de la chaleur et de la quantité de mouvement est souvent négligée (on suppose qu'il n'y a pas d'écoulement de retour par rapport à la direction principale de l'écoulement). Le système d'équations devient alors parabolique et il peut être résolu par une technique de marche en espace: la solution est calculée, dans le sens de l'écoulement, sur une succession de plans 2D. Comme, les $R_{//}$ sont des structures stationnaires, on peut résoudre les équations de conservation permanentes (avec $\partial/\partial t=0$). Notons que ces deux hypothèses (modèle parabolique ou stationnaire) empêchent de pouvoir simuler les $R_{\perp}$ en déplacement. Nous avons résumé dans le tableau II-3 les différents modèles utilisés par les études numériques en CVD, et nous précisons les différents types de structures convectives observées à chaque fois.

c) Quelles structures thermoconvectives privilégier en CVD?

Dans le cas des $R_{//}$, différentes études (Moffat et Jensen (1986), Kleijn et Hoogendoorn (1991)) montrent que les dépôts de vapeurs chimiques ne sont pas uniformes car ils prennent la forme de stries parallèles à la direction axiale. Suite à leur première étude sur les $R_{\perp}$ (Evans et Greif (1989)), Evans et Greif (1991) montrent qu'il serait sans doute plus judicieux de faire apparaître ce type de rouleaux dans le réacteur, en travaillant à plus petit nombre de Reynolds: en effet, leur déplacement dans le sens de l'écoulement moyen permettraient d'obtenir des couches plus uniformes. Evans et Greif (1993) prolongent cette idée en étudiant l'écoulement de Poiseuille-Bénard à des nombres de Rayleigh et de Reynolds plus élevés que ceux des deux études précédentes, mais plus proches des conditions de la CVD. Ils montrent, en dessinant des nappes 3D du nombre de Nusselt à travers les parois chaude et froide du canal, de belles structures d'écoulement semblant être la superposition des $R_{\perp}$ et des $R_{//}$.

¹ A propos de l'approximation de Boussinesq, voir chapitre IV, §5.

² Le gaz "porteur" (H_2 , N_2 , He, Ar, etc.) et le gaz réactif ($GaAs$, $SiCl_4$, SiH_4 , etc.). L'équation de concentration peut être négligée si la concentration en gaz réactif est très faible et si on ne s'intéresse qu'à l'aspect dynamique de l'écoulement.

Référence	Résolut° de l'éq. de concentration	Code 2D ou 3D	Code elliptique ou parabol.	Code stationnaire ou instat.	Hypoth. de Boussinesq	Zone d'entrée ou écoulement établi	B=l/h en 3D	Structures dans l'écoulement	Remarques
Moffat et Jensen (1986)	oui	3D	parabol.	station.	non	entrée	2	$R_{//}$	1ère visualisation 3D des $R_{//}$ et des dépôts de vapeurs chimiques (Gallium Arsenide)
Chiu et al. (1987)	non	2D	ellipt.	station.	oui	établi	2	$R_{//}$	Intérêt principal de l'article: mesures par LDA. Calcul 2D des $R_{//}$ dans le plan (y,z) = rouleaux de Rayleigh-Bénard
Moffat et Jensen (1988)	oui	3D	parabol.	station.	non	entrée	4	$R_{//}$	Suite de l'article de 1986 pour des dépôts de Silicium
Evans et Greif (1989)	non	2D	ellipt.	instat.	non	entrée et établi		$R_{\perp}$	1ère simulation des $R_{\perp}$ avec des conditions aux limites ouvertes. Longueur d'établissement des $R_{\perp}$
Visser et al. (1989)	non	2D	ellipt.	station.	non	entrée		1 $R_{\perp}$ fixe dessus l'entrée	La plaque du bas n'est chauffée que sur la moitié aval. En plus: expérience de visualisation par plans laser
Ouazzani et Rosenberger (1990)	oui	2D 3D 3D	ellipt. parabol. ellipt.	station.	non	entrée	2,4 2,8 6,3	$R_{\perp}$ fixe dessus l'entrée; $R_{//}$	Pour les 3 types de codes: comparaison des dépôts de vapeurs chimiques. Plaque du bas horizontale ou inclinée à 3,5°
Evans et Greif (1991)	non	3D	ellipt.	instat.	non	entrée et établi	2	$R_{\perp}$ $R_{//}$	2 cas étudiés: (Ra, Re)=(3333; 5) et (3333; 10). Analyse des signaux de vitesse et du Nusselt
Kleijn et Hoogendoorn (1991)	oui	2D 3D	ellipt. ellipt.	station. station.	non	entrée	1,3 2,8 3,8 6,3	$R_{\perp}$ fixe dessus l'entrée; $R_{//}$	Comparaison de l'effet sur l'écoulement des conditions aux limites thermiques sur les parois latérales
Nyce et al. (1992)	non	3D	parabol. ellipt.	station.	oui	entrée et établi	2	$R_{//}$	$R_{//}$ rendus asymétriques par une inclinaison de 2°. Étude de plusieurs conditions aux limites thermiques sur les parois latérales. En plus: mesures par LDA.
Evans et Greif (1993)	non	3D	ellipt.	instat.	non	entrée et établi	2	$R_{//}$ $R_{\perp}+R_{//}$	Représentation de la structure de l'écoulement par des nappes de Nusselt. A forts Ra, superposition complexe de $R_{\perp}$ et de $R_{//}$
Karki et al. (1993)	non	3D	ellipt.	station.	oui	entrée et établi	2 à 4,2	$R_{\perp}$ fixe sur l'entrée; $R_{//}$	B varie de 2 à 4,2 en raison de l'inclinaison de la plaque du bas (dièdre à 6°)
Narusawa (1993)	non	3D	parabol.	station.	non	entrée	10	$R_{//}$	Détermination des longueurs d'établissement
Ingle et Mountziaris (1994)	non	2D	ellipt.	station.	non	entrée et sortie		$R_{\perp}$ fixe dessus l'entrée et sortie	La zone chauffée est petite: apparition de 2 $R_{\perp}$ stationnaires au dessus de l'entrée et de la sortie (étude de la stabilité de ces $R_{\perp}$)

Tableau II-3 : Synthèse des codes numériques utilisés en CVD, et des différents types de structures thermoconvectives observées.

Visser et al. (1989) montrent expérimentalement et numériquement que lorsqu'un écoulement circulant sur une plaque froide arrive brusquement sur une zone chauffée, il est possible qu'il y ait formation d'une cellule transversale stationnaire située au-dessus de la zone de transition de température (cf. figure II-8). Cette cellule n'a rien à voir avec les $R_{\perp}$ emportés par l'écoulement que nous avons rencontré jusqu'à maintenant. C'est une cellule unique qui résulte du fort gradient négatif de pression causée par la variation brusque de la température: l'écoulement accélère près de la plaque inférieure et si Ra est suffisamment grand, un $R_{\perp}$ unique et fixe se maintient sur l'entrée thermique. La stabilité de ce rouleau en fonction de Gr et Re est étudiée par *Visser et al. (1989)* et *Ingle et Mountziaris (1994)*. On le rencontre aussi dans les simulations numériques de *Ouazzani et Rosenberger (1990)*, *Kleijn et Hoogendoorn (1991)* et *Karki et al. (1993)*. Dans le cas d'*Ingle et Mountziaris (1994)*, la zone chauffée étant très courte, il apparaît deux cellules stationnaires contrarotatives: une à l'entrée et l'autre à la sortie de la zone chauffée. Ces auteurs précisent que lorsqu'on désire fabriquer des composants ayant plusieurs couches successives de semi-conducteurs différents avec des interfaces abruptes, les structures transversales (stationnaires ou en mouvement) doivent absolument être éliminées. En effet, pour fabriquer ces composants, on fait circuler dans le réacteur des gaz réactifs de nature différentes, les uns à la suite des autres. En présence de structures transversales, les gaz pourraient se mélanger et détruire la qualité de l'interface entre chaque couche de semi-conducteur.

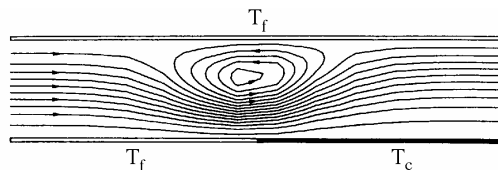


Figure II-8 : Simulation numérique d'une cellule transversale, stationnaire au-dessus de l'entrée sur la plaque chauffée (tirée de *Visser et al. (1989)*).

3.1.2 Le refroidissement des composants électroniques

L'amélioration du processus de fabrication des semi-conducteurs par la CVD a permis la miniaturisation des composants et des équipements électroniques. Notamment, la taille des ordinateurs a été considérablement réduite. Cependant, la

quantité de chaleur dissipée par les circuits intégrés dans un volume donné a considérablement augmentée et cela nuit au bon rendement des ordinateurs. L'étude des transferts thermiques entre les plaques des circuits intégrés et le fluide réfrigérant qui circule entre ces plaques est devenu une nécessité.

La géométrie utilisée pour modéliser ce problème est celle de l'écoulement de Poiseuille-Bénard, à part pour le chauffage qui est périodique et qui peut avoir lieu indifféremment sur la paroi du bas, sur la paroi du haut ou sur les deux en même temps. Ici, les parois de la conduite et le chauffage périodique représentent respectivement deux plaques superposées de circuits intégrés et les composants électroniques chauffants.

Les articles de référence en ce domaine sont ceux de *Kennedy et Zebib (1983)* et de *Braaten et Patankar (1985)*. Plus récemment, *Hasnaoui et al. (1991)* ont résolu numériquement les équations 2D de Navier-Stokes et de l'énergie pour un écoulement laminaire dans un canal horizontal avec un chauffage par le bas localisé. La taille de l'unique élément chauffant peut varier. Le problème est étudié pour $Pr=0,7$ (quelques résultats sont donnés à $Pr=0,1$ et 7), $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ et $Re \leq 6$. Les simulations sont effectuées sur un domaine d'allongement $A=L/h=2$ et en utilisant des conditions aux limites périodiques. A $Re=0$, deux $R_{\perp}$ symétriques et stationnaires sont obtenus. Ils deviennent dissymétriques, mais restent attachés à l'élément chauffant, pour $Re \neq 0$ inférieur à une valeur critique. Au dessus de cette valeur, les cellules sont emportées par l'écoulement qui devient périodique en temps. La variation du nombre de Reynolds critique en fonction de Ra et de la taille de l'élément chauffant est déterminée.

Dans le cas où la zone chauffée est aussi grande que le domaine de calcul, *Hasnaoui et al. (1991)* retrouvent l'écoulement de Poiseuille-Bénard classique avec circulation de $R_{\perp}$. Dans cette situation, dès que $Re \neq 0$, les $R_{\perp}$ se déplacent. Les auteurs calculent le rapport V_r/U^o de la vitesse des $R_{\perp}$ par rapport à la vitesse moyenne de l'écoulement. Comme l'avaient déjà montré *Ouazzani et al. (1989, 1990)*¹, ils trouvent que V_r/U^o est une fonction linéaire décroissante de Ra et est indépendant de Re ². Ils obtiennent:

¹ Cf. chapitre III, §3.1 et tableau III-7.

² La synthèse des résultats de la bibliographie et de notre étude concernant le rapport V_r/U^o est présentée dans le tableau VI-6 et aux figures VI-38 à VI-41.

$$\begin{aligned}
 V_r / U^\circ &\approx 0.952 - 2.87 \times 10^{-5} Ra & \text{à} & \quad Pr = 0,1 \\
 V_r / U^\circ &\approx 1.157 - 0.77 \times 10^{-5} Ra & \text{à} & \quad Pr = 0,7 \\
 V_r / U^\circ &\approx 1.284 - 0.90 \times 10^{-5} Ra & \text{à} & \quad Pr = 7
 \end{aligned}
 \quad (II-1)$$

Plus récemment, *Tangborn (1992)* et *Zhang et Tangborn (1994)* ont aussi étudiés l'écoulement de Poiseuille-Bénard avec un chauffage périodique par le bas. Cependant, ils considèrent le cas plus réaliste où la température maximum de l'élément chauffant est atteinte, non pas par palier, mais avec un accroissement sinusoïdal. La simulation numérique est 2D et utilise des conditions aux limites périodiques. L'objet principal de ce travail est la détermination de la transition, en fonction de Re et Ra , entre les structures transversales attachées à l'élément chauffant (stationnaires) et celles qui se déplacent. Le problème est étudié pour $Pr=1$, $Re \leq 100$ et $Ra \leq 80000$.

3.2 Analyse globale de l'écoulement

3.2.1 Transfert thermique dans la zone d'entrée

La plupart des études portant sur l'évolution du nombre de Nusselt en fonction de x et de Ra dans la zone d'entrée thermique se situent à des grands nombres de Reynolds et donc en phase de $R_{//}$. Nous avons vu au §2.2 que *Kamotani et Ostrach (1976)* et *Kamotani et al. (1979)* ont traité ce problème expérimentalement pour des écoulements d'air avec $Ra \leq 2,1 \cdot 10^5$ et $50 \leq Re \leq 1100$. La figure II-9 présente leurs résultats. Elle donne le nombre de Nusselt en fonction de x , pour plusieurs valeurs de Ra (ici, Nu est calculé sur la plaque inférieure et moyenné dans le sens transversal).

Plus récemment, un travail intensif sur le sujet a été effectué par *Incropera* et ses coauteurs¹. Tous leurs travaux —expérimentaux et/ou de simulations numériques 2D et 3D— étudient le transfert thermique dans la zone d'entrée de conduites horizontales. Ils diffèrent les uns des autres par la gamme des paramètres adimensionnels étudiés, par la nature des conditions aux limites thermiques sur les parois du bas et du haut (flux ou température constante, paroi supérieure isolée ou non) et par le type de fluide utilisé (air ou eau).

¹ *Mahaney, Incropera et Ramadhyani (1987)* dans le cas de l'eau, et *Maughan et Incropera (1987, 1990)* dans le cas de l'air, pour les écoulements en régime laminaire.

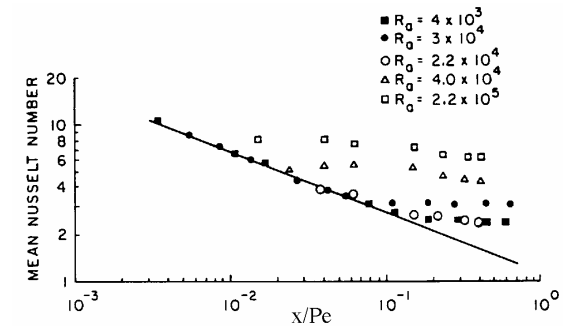


Figure II-9 : Nombre de Nusselt en fonction de la coordonnée axiale, pour plusieurs valeurs de Ra , à $Re=50$ et à $Pr \approx 0,7$, dans des écoulements de $R_{//}$ (tiré de *Kamotani et al. (1979)*).

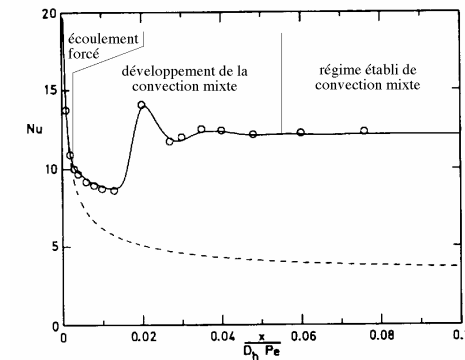


Figure II-10 : Évolution axiale du nombre de Nusselt dans un écoulement de $R_{//}$ à $Ra=5 \cdot 10^5$, $Re=375$, $Pr=6,5$ et $B=2$ (--- : écoulement forcé ; $\circ$: *Mahaney et al. (1989)* ; — : *Nonino et Del Giudice (1991)*).

Mahaney et al. (1987) et *Nonino et Del Giudice (1991)* ont simulé numériquement des écoulements à $Pr=6,5$, dans une conduite rectangulaire, d'extension latérale $B=2$, chauffée par le bas et isolée sur les autres parois. L'évolution du nombre de Nusselt en fonction de x est donné à la figure II-10. La courbe en trait discontinu correspond au cas de l'écoulement forcé, i.e. au cas où l'écoulement de Poiseuille à

température constante conserve des lignes de courant parallèles lorsqu'il passe sur la plaque chauffée. Sur la figure II-9, ce cas est représenté par la droite en trait plein. Le graphe $Nu=f(x)$ de la figure II-10 permet de distinguer trois régions: la région d'écoulement forcé, celle où la convection mixte se développe et celle où le régime est établi.

Il semble que seuls *Evans et Greif (1989, 1991, 1993)* aient publié des résultats sur l'évolution spatiale de Nu dans le cas du développement de $R_{\perp}$. Lorsqu'un écoulement de Poiseuille purement conductif non-isotherme entre dans un canal chauffé par le bas, leurs simulations numériques montrent que l'écoulement reste parallèle ($Nu=1$) sur une distance qui s'allonge si Ra diminue (cf. figure II-11) ou si Re augmente (non montré ici). A l'apparition des $R_{\perp}$, le nombre de Nusselt oscille sinusoïdalement et augmente en moyenne. Lorsque l'écoulement de $R_{\perp}$ est complètement établi, le nombre de Nusselt moyen en temps reste constant. On peut donc noter que des graphes du type de ceux de la figure II-11 permettent de calculer la longueur nécessaire à l'établissement des $R_{\perp}$. *Evans et Greif (1991, 1993)* déterminent aussi, grâce aux simulations 3D, la variation transversale de Nu lorsque l'écoulement est en phase de $R_{\perp}$, de $R_{//}$ ou lorsque des structures plus complexes apparaissent (superposition de $R_{\perp}$ et de $R_{//}$).

3.2.2 Longueurs d'établissement

Nous venons de voir que les travaux d'*Evans et Greif (1989, 1991)* permettent de déterminer la longueur d'établissement des $R_{\perp}$ connaissant $Nu=f(x)$. Nous verrons au chapitre III que *Müller (1990)*, *Müller et al. (1989, 1992a)*, *Ouazzani (1991)* et *Ouazzani et al. (1995)* ont déterminé ces longueurs à partir de l'enveloppe de la composante de vitesse verticale maximale selon l'axe de la conduite.

Dans le cas des écoulements de $R_{//}$, *Chiu et Rosenberger (1987)* ont établi des longueurs d'établissement par des mesures d'anémométrie laser-Doppler dans de l'azote. Ils donnent deux formules, fonction de Re et de $\epsilon=(Ra-1708)/1708$, corrélant leurs résultats expérimentaux et établies pour la gamme d'écoulements suivants: $1300 < Ra < 8300$ et $15 < Re < 170$.

- La longueur $L_1 \approx 0,65h\epsilon^{-0,44}Re^{0,76}$ donne l'endroit où naît l'instabilité à partir du début de la plaque chaude lorsque l'écoulement est à la température $(T_c - T_f)/2$ (cf. nomenclature). Le seuil de naissance de l'instabilité est déterminé lorsque qu'il apparaît en $z=0,2$ des modulations de U de plus de 3% par rapport au profil de Poiseuille.

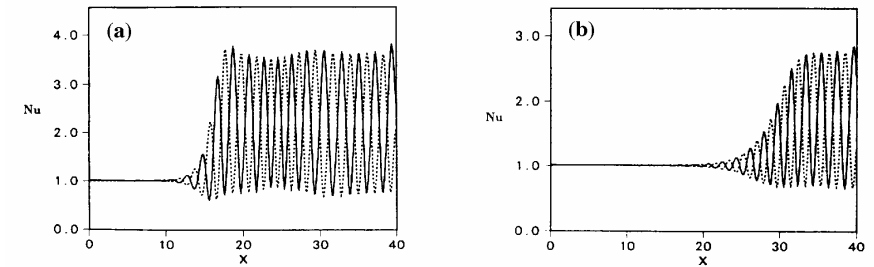


Figure II-11 : Nombre de Nusselt sur la paroi inférieure (—) et sur la paroi supérieure (- - -) dans un écoulement de $R_{\perp}$ à $Re=40$ et $Pr=2/3$;

(a) $Ra=10000$; (b) $Ra=6666$ (tiré d'*Evans et Greif (1989)*).

- La longueur $L_2 \approx 0,68h\epsilon^{-0,69}Re^{0,96}$ donne la distance nécessaire à l'établissement complet des $R_{//}$. Elle est déterminée lorsque l'amplitude de U atteint 95% de son amplitude finale en $z=0,5$.

Les expériences de *Chiu et Rosenberger (1987)* sont reproduites numériquement par *Narusawa (1993)* avec un très bon accord (cf. tableau II-3). Les simulations numériques mettent en évidence que la longueur L_1 correspond au minimum du nombre de Nusselt dans la zone d'entrée (cf. figure II-10). *Narusawa* étudie aussi les longueurs d'établissement et la variation de Nu pour plusieurs températures du fluide à l'entrée et pour des conditions aux limites thermiques adiabatiques et isothermes sur les parois verticales.

3.2.3 Transfert thermique dans les écoulements pleinement établis

Presque tous les travaux théoriques (*Mori et Uchida (1966)*) expérimentaux (*Mori et Uchida (1966)*, *Ostrach et Kamotani (1975)*, *Fukui et al. (1983)*) et numériques (*Fukui et al. (1983)*, *Ouazzani et al. (1989)*, *Hasnaoui et al. (1991)*) dans lesquels on calcule le nombre de Nusselt de l'écoulement de Poiseuille-Bénard pleinement établi s'accordent à dire que Nu ne dépend pas de Re , même pour Re relativement grand, et qu'il croît avec Ra (seul *Müller (1990)* trouve que Nu dépend légèrement de Re ; cf. tableau II-4 ci-dessous et chapitre III, §2.3.2). Cela vaut aussi bien pour les écoulements de $R_{//}$ (*Mori et Uchida (1966)*, *Ostrach et Kamotani (1975)*, *Fukui et al. (1983)*) que pour les écoulements de $R_{\perp}$ (*Ouazzani et al. (1989)*, *Hasnaoui*

et al. (1991)). Autrement dit, dans une conduite rectangulaire chauffée par le bas, le nombre de Nusselt reste le même qu'il y ait un écoulement ou qu'il n'y en ait pas.

On résume dans le tableau II-4 les différentes formules de corrélation qui donnent Nu en fonction de Ra, en précisant la gamme de Ra concernée et le fluide pour lequel la formule a été calculée. L'extension latérale B de la conduite est considérée comme infinie dans tous les cas. On ajoute un résultat de convection naturelle qui a été obtenu par Platten et Legros (1984) en corrélant de très nombreux résultats théoriques, numériques et expérimentaux.

Références	Formules de Corrélation	Domaine de validité	Pr
Mori et Uchida (1966)	$Nu = 1 + 1,413 \frac{Ra - 1708}{Ra}$	1708 < Ra < 3500	air
Ostrach et Kamotani (1975)	$Nu = 1 + \frac{8,3 \times 10^{-4} (Ra - 1708)}{\sqrt{1 + 1,45 \times 10^{-4} (Ra - 1708)^{4/3}}}$	1708 < Ra < 15000	air
Fukui et al. (1983)	$\frac{Ra}{1708} Nu - 1 = 2,47 \left(\frac{Ra - 1708}{1708} \right)^{1,07}$	1708 < Ra < 10000	air
Platten et Legros (1984) (Convection naturelle)	$Nu = 1 + K(Pr) \frac{Ra - 1708}{Ra}$ $(Nu - 1) \frac{Ra}{1708} = K(Pr) \left(\frac{Ra - 1708}{1708} \right)^{1,23}$ où $K(Pr) = \left(0,69942 - \frac{0,00472}{Pr} + \frac{0,00832}{Pr^2} \right)^{-1}$	1708 < Ra < 3500 4000 < Ra	$\forall Pr$ pour l'air: $K(Pr=0,7) = 1,4091$ pour l'eau: $K(Pr=6,4) = 1,4308$
Müller (1990)	$Nu = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{Ra - Ra_*(Re)}{Ra}$	1708 < Ra < 2500	$1/\gamma = 1,423$ à $Pr=1$; $1/\gamma = 1,4306$ à $Pr=6,4$

Tableau II-4 : Formules théoriques ou de corrélation donnant le nombre de Nusselt de l'écoulement de Poiseuille-Bénard en fonction du nombre de Rayleigh.

4 1989-1997: les analyses fines non-linéaires des structures convectives et de leur stabilité

Nous venons de voir au §3 que durant ces quinze dernières années une part importante des travaux de recherche sur l'écoulement de Poiseuille-Bénard a été consacrée à l'analyse globale des écoulements de $R_{//}$ dans le cadre d'applications industrielles. Cependant, depuis 1989, les recherches ont retrouvé un caractère plus fondamental, notamment sous l'impulsion de Ouazzani et al. (1989 et suivants), Müller et al. (1989 et suivants) et Evans et Greif (1989 et suivants). En effet, depuis cette date,

- les écoulements de $R_{\perp}$, et de manière plus générale, les écoulements à petits nombres de Reynolds, sont de nouveaux étudiés;

- ainsi, des structures thermoconvectives plus complexes ont pu être identifiées (superposition de $R_{\perp}$ et de $R_{//}$, structures intermittentes, $R_{//}$ obliques, etc.);

- la stabilité de ces différentes structures dans des domaines faiblement non-linéaires et non-linéaires est étudiée;

- enfin, les écoulements sont analysés plus finement (calcul des fréquences et des longueurs d'onde des rouleaux, étude de leurs variations en fonction de Re et Ra, détermination des vitesses maximales, décomposition spectrale des champs de vitesse, calcul de la vitesse des rouleaux par rapport à la vitesse moyenne de l'écoulement, etc.).

Ces avancées sont en partie dues aux méthodologies plus sophistiquées qui sont employées pour l'analyse. **Expérimentalement**, les mesures par anémométrie laser-Doppler permettent l'acquisition de données très précises sur les champs de vitesse. Grâce à des mesures obtenues avec cette technique dans des écoulements d'azote, Chiu et al. (1987) calculent des décompositions en séries de Fourier des champs de vitesse dans les $R_{//}$. Chiu et Rosenberger (1987) montrent que les $R_{//}$ deviennent instables aux petites valeurs de Re et ils déterminent la transition $R_{//}$ stables- $R_{//}$ instables en fonction de Re et Ra. Ouazzani (1991) et Ouazzani et al. (1990, 1993a, 1995) effectuent des mesures par LDA dans l'eau. Ils dressent une carte complète de la stabilité des différentes structures thermoconvectives observées. Ils mesurent l'évolution de la fréquence des $R_{\perp}$ en fonction de Re et Ra, ainsi que les variations de la composante de vitesse verticale maximale dans les $R_{\perp}$ et les $R_{//}$.

Du point de vue théorique, Müller *et al.* (1989, 1992a-b) et Müller (1990) sont les premiers à utiliser la théorie des équations d'amplitude dans le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard. Ce travail introduit une notion fondamentale dans l'analyse de la stabilité de ce problème: la notion d'instabilité convective (cf. chapitre III, §2.1). Elle permet d'expliquer pourquoi la transition entre l'écoulement de Poiseuille et les $R_{\perp}$, observée expérimentalement par Ouazzani, ne correspond pas au résultat de la stabilité linéaire. De leur côté, Brand *et al.* (1991), Müller *et al.* (1993) et Tveitereid et Müller (1994) utilisent deux équations d'amplitude couplées pour étudier l'instabilité convective et l'instabilité absolue dans les écoulements de $R_{\perp}$ et de $R_{//}$. Cela permet d'expliquer et de modéliser les "structures intermittentes" observées expérimentalement par Ouazzani (1991) et Ouazzani *et al.* (1993) (nous y reviendrons au chapitre VI, §4.2.1).

Enfin, **grâce aux résolutions numériques directes 3D** des équations de conservation complètes (elliptiques et instationnaires), des progrès sont réalisés en ce qui concerne la visualisation des cellules thermoconvectives complexes. En effet, il est très difficile de reconstruire la structure de l'écoulement à partir des signaux enregistrés par anémométrie laser-Doppler. Par contre, le traitement des données numériques obtenues par les simulations directes permet de montrer l'évolution spatiale tridimensionnelle des composantes de vitesse, de la température, du nombre de Nusselt, etc. De telles représentations ont été obtenues par Evans et Greif (1993), Schröder et Bühler (1995) et plus récemment par l'équipe dirigée par T. F. Lin.

Cette équipe de recherche taïwanaise a publié un nombre important d'articles sur l'écoulement de Poiseuille-Bénard très récemment. Ces articles sont: Huang et Lin (1994, 1995), Lin et Lin (1996a, 1996b), Lin, Ker, Lin (1996), Chang, Yu, Lin (1997a, 1997b), Yu, Chang, Lin (1997a), Yu, Chang, Huang, Lin (1997b) et Yu et Lin (1997). Les écoulements sont analysés par des simulations numériques 3D et par des expériences de visualisation par plans laser dans l'air. Les articles de 1994 à 1996 concernent principalement la mesure du transfert thermique et la visualisation des écoulements de $R_{//}$ à $50 \leq Re \leq 1000$. Les cinq articles de 1997 concernent des écoulements à plus petit Re ($Re \leq 50$); des très belles visualisations expérimentales et numériques des $R_{//}$, des $R_{\perp}$ et d'autres structures plus complexes sont présentées. Yu, Chang, Lin (1997a) présentent aussi un diagramme de stabilité des différentes configurations observées dans leurs expériences. De nombreux résultats extraits de ces articles sont présentés au chapitre I, §1.2 et au chapitre VI, §4.2.2.

Toujours en ce qui concerne la simulation numérique directe, on note que seuls Evans et Greif (1991), Schröder et Bühler (1995) et Roth *et al.* (1996) ont étudié l'évolution de la fréquence et/ou de la longueur d'onde des rouleaux en fonction de Re et Ra . Précisons que Roth *et al.* (1996) proposent une étude très intéressante pour nous. En effet, ils effectuent des simulations numériques 2D d'écoulements de $R_{\perp}$ absolument instables, afin d'étudier l'influence des conditions aux limites à l'entrée et à la sortie du domaine de calcul. Nous reviendrons sur ce travail au chapitre V, §3-4, et au chapitre VI, §5-1. Enfin, la seule carte de stabilité des $R_{\perp}$ et des $R_{//}$ obtenue à partir de quelques simulations numériques 3D est proposée par Chen et Lavine (1996) (cf. chapitre VI, §4.2.2).

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une revue générale des très nombreux travaux consacrés à l'écoulement de Poiseuille-Bénard. Nous avons montré que l'étude de cet écoulement a non seulement un intérêt fondamental (l'analyse de la stabilité des différentes structures convectives, par exemple), mais aussi un intérêt pratique. En effet, elle permet d'expliquer certains phénomènes météorologiques, et elle intervient dans des applications industrielles à forts enjeux économiques: les dépôts de vapeurs chimiques (la CVD) et le refroidissement des composants électroniques.

Cet historique nous a permis de mettre en évidence l'existence de quatre grandes périodes de recherche sur l'écoulement de Poiseuille-Bénard. Il ressort des trois premières périodes, que les structures thermoconvectives de base, les $R_{\perp}$ et les $R_{//}$, semblent à ce jour parfaitement décrites et leur domaine d'existence bien connu. D'autre part, l'analyse de la stabilité linéaire de ce problème est accomplie presque entièrement: elle a été effectuée dans la zone d'entrée et dans la zone établie, pour des écoulements dans des conduites d'extension latérale finie et infinie, soumis à des perturbations 2D et 3D. Seul reste le cas de la zone d'entrée avec des conduites d'extension latérale finie. Nous avons aussi pu constater que l'augmentation du transfert thermique (liée à l'apparition de la convection mixte), et sa répartition dans la conduite sont des choses bien connues. De nombreuses lois de corrélation ou théoriques sont proposées pour calculer le nombre de Nusselt dans une large gamme de nombres de Rayleigh. Par contre, l'évolution en fonction de Re et de Ra de la longueur d'onde et de la fréquence

des structures convectives est un élément encore mal connu, qui a été négligé jusqu'à très récemment. Des contradictions à ce sujet ont pu être relevées.

Dans la période la plus récente (1989-1997), de nouveaux axes de recherche sont apparus, en partie grâce au développement de nouveaux moyens d'investigation: les mesures par anémométrie laser-Doppler, la simulation numérique 3D, et la théorie faiblement non-linéaire des équations d'amplitude. Cela a permis d'envisager l'analyse de la stabilité non-linéaire des différentes configurations de l'écoulement de Poiseuille-Bénard. Des domaines d'existence de structures plus complexes que les $R_{\perp}$ et les $R_{//}$ ont été mis en évidence. Des données plus précises sur les caractéristiques des cellules convectives ont été obtenues. Ces différents points, qui n'ont pas été développés dans le §4 de ce chapitre, vont être présentés de façon plus détaillée à travers les travaux de Müller (1989 et suivants) et de Ouazzani (1989 et suivants) au chapitre III.

Chapitre III

Les travaux de référence

Le travail d'analyse numérique que nous avons mené s'est appuyé principalement sur les résultats obtenus dans les trois thèses de doctorat suivantes:

- la thèse de *J. M. Luijkx (1983)*, qui étudie la stabilité linéaire des problèmes de Rayleigh-Bénard et de Poiseuille-Bénard dans des conduites d'extension latérale infinie et finie,

- la thèse de *H. W. Müller (1990)*, qui étudie la stabilité convective et le comportement faiblement non-linéaire de l'écoulement de Poiseuille-Bénard, à partir de la théorie des équations de Ginzburg-Landau et de simulations numériques bidimensionnelles;

- et la thèse de *M. T. Ouazzani (1991)*, qui comporte trois analyses expérimentales différentes de l'écoulement de Poiseuille-Bénard, ainsi que des simulations numériques bidimensionnelles, mais dont l'intérêt principal est sans contester l'analyse du champ de vitesse effectuée à partir de mesures très fines d'anémométrie laser-Doppler dans l'eau.

Au cours de ce document, nous ferons continuellement référence à ces travaux car ils ont servi de banques de données pour valider le code que nous avons développé; ils ont été le point de départ pour des analyses plus fines ou plus larges que celles qui y sont présentées; enfin, ils ont fait l'objet de comparaisons systématiques les uns avec les autres, ainsi qu'avec d'autres résultats de la littérature et avec nos propres résultats numériques.

Ce chapitre est donc consacré à la présentation de ces trois thèses. On y donne les grandes lignes des méthodes employées ainsi que les principaux résultats obtenus. Comme, parmi elles, seules les expériences de Ouazzani couvrent une large gamme de nombres de Rayleigh et de Reynolds (les deux études théoriques ne sont valables que dans des domaines linéaires ou faiblement non linéaires), et comme les mesures par anémométrie laser-Doppler ont prouvé leur précision et le soin avec lequel elles avaient été menées, nous avons décidé d'effectuer nos simulations numériques à $Pr=6,4$, i.e. celui de l'eau à $23^{\circ}C$ utilisée par Ouazzani. En conséquence, pour les deux études théoriques, dans la mesure du possible, nous présentons les résultats sous forme de graphes auxquels nous adjoignons des tableaux donnant des valeurs numériques autour de $Pr=6,4$ et $B=3,63$ (rapport de forme de la conduite utilisée par Ouazzani).

Le §1 est consacré à la thèse de *Luijkx (1983)*. Ses travaux n'ayant été publiés que très partiellement, nous les présentons de manière détaillée. Les différentes étapes des analyses de stabilité linéaire des écoulements 2D et 3D, et les points délicats de leur mise en œuvre, sont largement développés. Les résultats principaux sont rapportés. Au §2, on fait un exposé général des notions d'instabilités convective et absolue, on présente la théorie des équations de Ginzburg-Landau, et on résume les résultats principaux de la thèse de *Müller (1990)*. Enfin, au §3, on présente les travaux de *Ouazzani (1991)*, principalement les résultats obtenus par LDA (abréviation anglaise d'anémométrie laser-Doppler).

1 La thèse de *Luijkx (1983)* : analyse de la stabilité linéaire

La thèse de Luijkx est divisée en deux parties. La première (chapitres I et II) concerne l'étude de l'apparition de la convection dans un milieu, chauffé par le bas, confiné entre deux plaques horizontales de dimensions infinies dans les deux directions. La deuxième partie (chapitres III et IV) concerne le même problème mais le milieu étudié évolue dans une conduite horizontale de longueur infinie, mais où la direction transversale est de dimension finie, délimitée par des parois verticales rigides et adiabatiques. Les chapitres I et III sont consacrés au problème de Rayleigh-Bénard (convection naturelle) et les chapitres II et IV à celui de Poiseuille-Bénard (convection mixte).

Dans tous les cas, la méthode suivie est l'analyse de la stabilité hydrodynamique linéaire des configurations de repos (convection naturelle) ou des écoulements parallèles (convection mixte) purement conductifs. De nombreuses expériences viennent enrichir le discours pour vérifier tel ou tel résultat théorique. Celles qui concernent l'écoulement de Poiseuille-Bénard ont été en grande partie présentées au §2.1.3 du chapitre II précédent; nous ne reviendrons pas sur leur présentation ici. Dans le §1.1 on rappelle les différentes étapes d'une analyse de stabilité hydrodynamique linéaire. Le §1.2 présente la première partie de la thèse de Luijkx (i.e. le cas de l'écoulement entre deux plaques infinies). Le §1.3 présente la deuxième partie (i.e. le cas de l'écoulement en conduite d'extension latérale finie). Cependant, la démarche et les résultats ne sont détaillés que pour l'écoulement de Poiseuille-Bénard.

1.1 La méthode d'analyse de la stabilité linéaire

1.1.1 Les fondements de la théorie de la stabilité linéaire hydrodynamique

Le comportement d'un système hydrodynamique monoconstituant et non-isotherme est modélisé par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, en formulation primitive (vitesse $\mathbf{V}$, température T et pression P), nous verrons qu'elles peuvent s'écrire sous la forme dimensionnelle suivante¹:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{III} - 1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho^\circ} \nabla P + \nu^\circ \nabla^2 \mathbf{V} + \beta^\circ (T - T^\circ) \mathbf{g} \mathbf{k} \quad (\text{III} - 2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \alpha^\circ \nabla^2 T \quad (\text{III} - 3)$$

Les équations (III-1), (III-2) et (III-3) sont respectivement l'équation de continuité, l'équation de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie.

Comme ces équations sont non-linéaires, le système précédent peut avoir plusieurs solutions pour des valeurs identiques des paramètres de l'écoulement (Re , Ra , Pr , B , ...). Par exemple, pour un écoulement incompressible isotherme dans une conduite

¹ Nous renvoyons au chapitre IV en ce qui concerne l'établissement des équations, et à la nomenclature en ce qui concerne la définition de chaque terme.

rectiligne horizontale, l'écoulement parallèle laminaire et l'écoulement turbulent sont deux solutions possibles de l'équation de Navier-Stokes. La question est donc de savoir quel est l'écoulement observé réellement. Supposons maintenant que l'on connaisse une solution stationnaire d'un écoulement régi par le système d'équations précédent. Cette solution, notée $(\bar{\mathbf{V}}(X, Y, Z), \bar{T}(X, Y, Z), \bar{P}(X, Y, Z))$, ne peut pas être stable pour toute la gamme des paramètres de l'écoulement. On peut donc se demander si l'on retourne vers cet état stationnaire lorsqu'on le perturbe. En d'autres termes, la perturbation qui se superpose à la solution stationnaire va-t-elle croître ou s'amortir dans le temps? On comprend aisément que si les fluctuations par rapport à l'état stationnaire sont de grandes amplitudes, la résolution de ce problème, à cause de la non-linéarité des équations, ne sera pas une chose triviale.

Par contre, si les perturbations qui sont introduites dans l'écoulement stationnaire sont de très faible amplitude, les équations deviennent linéaires pour les perturbations: le produit de deux perturbations (ou plus) devient négligeable par rapport aux autres termes. La théorie qui traite ce genre de problèmes est la *théorie de la stabilité hydrodynamique linéaire*. Elle permet de déterminer un *critère suffisant* (mais non nécessaire) *d'instabilité*, i.e. la valeur critique des paramètres de l'écoulement au dessus de laquelle on est sûr que l'écoulement est instable. En effet, si l'écoulement est instable pour des perturbations infinitésimales, il l'est sûrement pour des perturbations d'amplitudes finies. Au contraire, si l'écoulement est stable pour des perturbations infinitésimales, il est possible qu'il soit instable pour des perturbations finies¹.

1.1.2 Établissement des équations de perturbations et évolution temporelle de la solution

Il s'agit de donner une formulation mathématique à ce que nous venons de voir. On veut étudier l'évolution temporelle d'une perturbation infinitésimale (notée $(\mathbf{V}', T', P')$)² autour de la solution stationnaire $(\bar{\mathbf{V}}, \bar{T}, \bar{P})$ du système d'équations précédent. Pour cela, on pose:

¹ La *méthode de l'énergie*, ou encore *méthode énergétique* (cf. Joseph (1976) et Straughan (1992)), permet quant à elle de déterminer un *critère suffisant de stabilité*, i.e. la valeur critique des paramètres de l'écoulement en dessous de laquelle on est sûr que l'écoulement est stable. Dans le cas du problème de Rayleigh-Bénard entre deux plaques infinies, on montre que la valeur critique $Ra^* = 1707,762$ est la même pour la théorie linéaire et pour la méthode énergétique.

² Pour simplifier, on suppose que les caractéristiques physiques du fluide (ρ° , ν° , β° , α°) ne sont pas sujettes à fluctuation.

$$\begin{cases} \mathbf{V}(X, Y, Z, t) = \bar{\mathbf{V}}(X, Y, Z) + \mathbf{V}'(X, Y, Z, t) \\ T(X, Y, Z, t) = \bar{T}(X, Y, Z) + T'(X, Y, Z, t) \\ P(X, Y, Z, t) = \bar{P}(X, Y, Z) + P'(X, Y, Z, t) \end{cases}$$

dans (III-1, III-2, III-3) et on linéarise les équations par rapport aux perturbations. On obtient alors le système d'équations de perturbations suivant:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}' = 0 \quad (\text{III} - 4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \mathbf{V}' + (\mathbf{V}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{V}} = -\frac{1}{\rho^0} \nabla P' + \nu^0 \nabla^2 \mathbf{V}' + \beta^0 (T' - T^0) \mathbf{g} \mathbf{k} \quad (\text{III} - 5)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla T' + \mathbf{V}' \cdot \nabla \bar{T} = \alpha^0 \nabla^2 T' \quad (\text{III} - 6)$$

La solution stationnaire et les perturbations doivent vérifier les conditions aux limites du problème étudié. Si ϕ remplace l'une des variables primitives,

- dans le cas où la condition aux limites est de type Dirichlet ($\phi=C$), les conditions sur $\bar{\phi}$ et ϕ' sont: $\bar{\phi}=C$ et $\phi'=0$;

- dans le cas où la condition aux limites est de type Neumann ($\partial\phi / \partial X = C$), les conditions sur $\bar{\phi}$ et ϕ' sont: $\partial\bar{\phi} / \partial X = C$ et $\partial\phi' / \partial X = 0$.

Bien que le système (III-4, III-5, III-6) soit linéaire, il est en général difficile à résoudre car les équations sont couplées et les coefficients sont non constants (ils sont fonction de X, Y et Z par l'intermédiaire de $\bar{\mathbf{V}}$ et de $\bar{T}$). Cependant, en raison de la linéarité et de la forme des équations, on sait que la dépendance temporelle des perturbations est du type $e^{\sigma t}$. Ainsi, comme le processus de différenciation par rapport au temps des équations de perturbations revient à multiplier par σ , on peut d'ores et déjà penser que l'on sera amené à résoudre un problème aux valeurs propres en σ . Notons que, dans le cas général, le taux d'amplification temporelle est complexe: $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$. La dépendance en temps des perturbations est donc de la forme $e^{\sigma_r t} e^{i\sigma_i t}$.

L'étude du signe de σ_r et de σ_i pour une perturbation donnée, permet de déterminer la stabilité de l'écoulement de base (l'écoulement initialement stationnaire et non perturbé) vis à vis de cette perturbation. En effet,

- si $\sigma_r < 0$ ($\forall \sigma_i \in \mathbb{R}$), la perturbation décroît asymptotiquement vers 0; on dit que l'écoulement de base est *linéairement asymptotiquement stable*;

- si $\sigma_r > 0$ et $\sigma_i \neq 0$, l'écoulement de base est instable vis à vis de cette perturbation et l'instabilité apparaît sous la forme d'oscillations d'amplitudes croissantes; dans ce cas, on dit qu'il y a *surstabilité* (*overstability* en anglais);

- si $\sigma_r > 0$ et $\sigma_i = 0$, l'écoulement de base est instable pour la perturbation considérée et l'instabilité apparaît sous la forme d'un mouvement stationnaire, sans oscillation; dans ce cas, on dit que *le principe d'échange de stabilité est satisfait*;

- enfin, si $\sigma_r = 0$, on est dans une situation de *stabilité neutre* ou *marginale*¹: l'amplitude de la perturbation ne varie pas au cours du temps. Les valeurs correspondantes des paramètres de l'écoulement sont des valeurs critiques marquant la transition entre les zones de stabilité et d'instabilité linéaire de l'écoulement de base. Le calcul de la solution des équations de perturbations et la détermination des paramètres de l'écoulement lorsque $\sigma_r = 0$ est donc une étape essentielle de l'étude de la stabilité hydrodynamique d'un écoulement.

1.1.3 Intégration spatiale des équations de perturbations - décomposition en modes normaux

Pour connaître la réponse du système à une perturbation initiale infinitésimale, i.e. pour déterminer σ , il est nécessaire d'intégrer les équations de perturbations. Nous venons de voir que la dépendance temporelle de la solution peut s'écrire de manière simple. Ce n'est par contre pas le cas de la dépendance spatiale. On doit faire intervenir une technique fondamentale en analyse de stabilité linéaire: la *décomposition en modes normaux*. Nous allons en faire la présentation dans le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard 2D.

On considère les équations de perturbations (III-4)-(III-6) sous la forme adimensionnelle suivante:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (\text{III} - 7)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial u'}{\partial t} + \text{Re} \left(\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial u'}{\partial z} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P'}{\partial x} + \nabla^2 u' \quad (\text{III} - 8)$$

¹ Pour avoir une définition mathématique rigoureuse et générale de la stabilité, se référer à Lin (1955). Pour avoir la justification des termes *asymptotiquement stable*, *surstabilité*, *principe d'échange de stabilité*, *stabilité marginale*, se référer à Chandrasekhar (1961), chapitres I et II.

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial w'}{\partial t} + \text{Re} \left(\bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial w'}{\partial z} + u' \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P'}{\partial z} + \nabla^2 w' + \text{Ra} T' \quad (\text{III}-9)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \text{Re} \text{Pr} \left(\bar{u} \frac{\partial T'}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial T'}{\partial z} \right) + u' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \nabla^2 T' \quad (\text{III}-10)$$

Les transformations utilisées pour passer en variables adimensionnelles sont:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [1/h] \mathbf{X} \\ t &= [\alpha^0/h^2] t \\ \bar{\mathbf{v}} &= [1/U^0] \bar{\mathbf{V}} \\ \mathbf{v}' &= [h/\alpha^0] \mathbf{V}' \\ (\bar{T}, T') &= [1/\Delta T] ((\bar{T}-T^0), (T'-T^0)) \\ (\bar{P}, P') &= [h^2/(\alpha^0 \nu^0 \rho^0)] (\bar{P}, P') \end{aligned} \quad (\text{III}-11)$$

On vérifie que l'écoulement de base présenté figure III-1, solution du système d'équations (III-1, III-2, III-3) et vérifiant des conditions d'adhérence et d'isothermicité sur les parois horizontales, s'écrit adimensionnellement:

$$\begin{cases} \bar{u}(z) = \frac{3}{2}(1-4z^2) \\ \bar{w} = 0 \\ \bar{T}(z) = -z \\ \bar{P}(x, z) = -(\Delta P / \Delta x)x - (\text{Ra} / 2)z^2 + \text{cste} \end{cases} \quad (\text{III}-12)$$

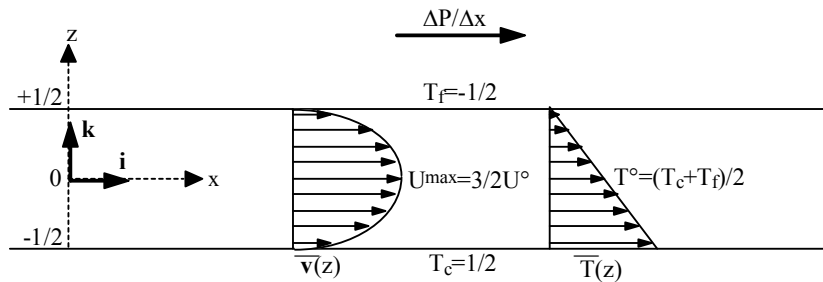


Figure III-1: Écoulement de base pour l'étude de la stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille-Bénard bidimensionnel.

Le confinement dans la direction verticale induit la dépendance en z de l'écoulement de base. Notamment, le fait que la vitesse ait un profil parabolique donne dans les équations (III-8) et (III-9) des coefficients variables en $(1-4z^2)$ qui enlèvent tout espoir de trouver de manière simple la dépendance en z de u' et w' . Par contre, la direction horizontale étant infinie, on peut imaginer que la solution a une certaine périodicité dans la direction x . Comme, les coefficients multiplicatifs des perturbations dans le système (III-7)-(III-10) ne sont pas fonction de x , on vérifie aisément que des perturbations où la dépendance en x est de la forme $e^{ik_x x}$ sont des solutions périodiques satisfaisant le système. Ainsi, dans le cas présent, on doit chercher les solutions des équations de perturbations sous la forme:

$$\phi'(x, z, t) = \hat{\phi}(z) e^{ik_x x} e^{\sigma t} \quad (\text{III}-13)^{1,2}$$

où $\phi = (u, w, T, P)$ et où k_x est le nombre d'onde de la perturbation dans la direction x , sa valeur pouvant varier entre $-\infty$ et $+\infty$.

La périodicité de la perturbation étant inconnue a priori, il faut chercher la valeur de σ non pas pour une seule onde particulière, caractérisée par une seule valeur de k_x , mais pour toutes les ondes possibles. Or, d'après l'analyse de Fourier, une solution quelconque peut s'écrire comme la somme de plusieurs *modes normaux* (i.e. la superposition de plusieurs ondes) de longueurs d'onde $\lambda = 2\pi/k_x$ différentes. On cherchera donc les perturbations plutôt sous la forme:

$$\begin{aligned} \phi'(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(z) e^{\sigma t} e^{ik_x x} dk_x, \quad \text{si } k_x \text{ est une variable continue} \\ \phi'(x, z, t) &= \sum_{\text{toutes les valeurs de } k_x} \hat{\phi}(z) e^{\sigma t} e^{ik_x x}, \quad \text{si } k_x \text{ est une variable discrète} \end{aligned} \quad (\text{III}-14)^3$$

¹ Les fluctuations ϕ' sont des quantités complexes qui ne sont que des solutions particulières des équations de perturbations (leur complexe conjugué est aussi solution). La solution générale est une quantité réelle, combinaison linéaire de (III-13) et de son complexe conjugué. Ici, on limitera la discussion à la recherche des solutions sous la forme (III-13), mais on gardera en mémoire que seule la partie réelle de ϕ' nous intéresse.

² Si on applique (III-13) aux perturbations de vitesses et qu'on essaie de visualiser le champ de vitesse total (écoulement de base + perturbations), on obtient la configuration correspondant à un écoulement de $R_{\perp}$ 2D à condition que $\hat{\phi}$ soit une fonction paire de z .

³ On notera que dans les expressions (III-13) et (III-14), l'amplitude des composantes de Fourier $\hat{\phi}(z) e^{\sigma t}$ aurait dû être notée $\hat{\phi}_{k_x}(z) e^{\sigma_{k_x} t}$ car, clairement, le coefficient d'amplification σ et l'amplitude $\hat{\phi}$ dépendent de la valeur de k_x .

Cependant, les équations de perturbations étant linéaires, il n'est pas nécessaire d'étudier la réponse du système à l'ensemble des modes normaux; il suffit de le faire individuellement pour chaque mode normal. Donc, on peut rechercher les perturbations sous la forme (III-13), à condition de se rappeler que k_x est un nouveau paramètre de l'étude à faire varier de $-\infty$ à $+\infty$.¹ Ainsi, en remplaçant dans les équations de perturbations (III-7)-(III-10), $\bar{\varphi}(z)$ et $\varphi'(z)$ par leurs expressions données par (III-12) et (III-13), on obtient le système d'équations linéaires suivant, où les inconnues ne sont plus que les termes $\hat{\varphi}(z)$:

$$ik_x \hat{u} + D\hat{w} = 0 \quad (\text{III} - 15)$$

$$\frac{\sigma}{Pr} \hat{u} + ik_x Re \bar{u} \hat{u} + Re D\bar{u} \hat{w} = -ik_x \hat{P} + (D^2 - k_x^2) \hat{u} \quad (\text{III} - 16)$$

$$\frac{\sigma}{Pr} \hat{w} + ik_x Re \bar{u} \hat{w} = -D\hat{P} + (D^2 - k_x^2) \hat{w} + Ra \hat{T} \quad (\text{III} - 17)$$

$$\sigma \hat{T} + ik_x Re Pr \bar{u} \hat{T} - \hat{w} = (D^2 - k_x^2) \hat{T} \quad (\text{III} - 18)$$

avec $D=d/dz$.

Les équations (III-15), (III-16) et (III-17) peuvent se réduire à une équation à une inconnue en éliminant successivement $\hat{u}$ et $\hat{P}$. Le problème que l'on doit résoudre est alors le suivant:

$$DQ_{k_x} D\hat{w} - k_x^2 Q_{k_x} \hat{w} - ik_x Re D^2 \bar{u} \hat{w} - ik_x Re D\bar{u} D\hat{w} + Ra k_x^2 \hat{T} = 0 \quad (\text{III} - 19)$$

$$\text{où } Q_{k_x} = \frac{\sigma}{Pr} + ik_x Re \bar{u} - D^2 + k_x^2$$

+ équation (III-18)

$$\text{avec } \hat{w} = D\hat{w} = \hat{T} = 0 \quad \text{en } z = \pm 1/2. \quad (\text{III} - 20)$$

¹ Il est important de noter qu'à la différence des paramètres de contrôle "externes" de l'écoulement (Re , Ra , Pr , B , ...), k_x est un paramètre "interne" à l'analyse de la stabilité linéaire: il est nécessaire d'étudier la réponse du système à la totalité des valeurs prises par k_x , pour un ensemble de paramètres "externes" donnés.

² La condition aux limites $D\hat{w}=0$ vient de la condition d'adhérence sur $\hat{u}$ ($\hat{u}=0$) et de l'équation de continuité (III-15).

On remarquera que dans le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard 2D, les équations de perturbations sont fonction de cinq paramètres: Ra , Re , Pr , σ et k_x .

1.1.4 Résolution des équations de perturbations par la méthode de Galerkin

La dernière étape de l'analyse de la stabilité linéaire est la résolution du problème (III-18)-(III-20). Plusieurs méthodes peuvent être utilisées: la plus classique est probablement la méthode de Galerkin; on peut aussi utiliser la méthode équivalente du potentiel local; lorsque le problème est plus complexe, une intégration numérique directe de type différences finies ou éléments finis s'impose. Ici, nous nous limiterons à la résolution par la méthode de Galerkin¹.

Celle-ci consiste à rechercher les inconnues (en l'occurrence $\hat{w}(z)$ et $\hat{T}(z)$) sous la forme d'un développement en série limitée de fonctions de base, du type:

$$\begin{aligned} \hat{w}(z) &= \sum_{i=1}^M a_i \cdot A_i(z) \\ \hat{T}(z) &= \sum_{j=1}^N b_j \cdot B_j(z) \end{aligned} \quad (\text{III} - 21).$$

où $(A_i(z))_{i=1,M}$ et $(B_j(z))_{j=1,N}$ constituent chacun séparément un ensemble de fonctions de base linéairement indépendantes, vérifiant les conditions aux limites (III-20) et formant un ensemble complet de l'espace des fonctions considérées. Dans le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard 2D, comme on recherche les structures convectives sous la forme de $R_\perp$, les fonctions de base doivent être en plus paires en z . Par exemple, on pourra prendre:

$$\begin{aligned} A_i(z) &= (z^2 - 1/2)^2 T_{2i-2}(z) \\ B_j(z) &= (z^2 - 1/2) T_{2j-2}(z) \end{aligned} \quad (\text{III} - 22)$$

où les $T_n(z) = \cos(n \arccos(z))$ sont des polynômes de Chebyshev

¹ Luijkx et l'équipe du professeur Platten utilisent en général la méthode du potentiel local (cf. *Glansdorff et Prigogine (1971)*); celle-ci à l'avantage de donner une signification physique à l'analyse de la stabilité dans le sens où le potentiel local est une généralisation du concept de potentiel thermodynamique.

Le calcul des coefficients a_i et b_j dans (III-21) se fait par la méthode des résidus pondérés. Elle consiste à écrire, d'une part, que Res_M , le résidu d'ordre M de la relation (III-19)¹, doit être orthogonal à chacune des fonctions de base $(A_i(z))_{i=1,M}$ et, d'autre part, que Res_N , le résidu d'ordre N de la relation (III-18), doit être orthogonal à chacune des fonctions de base $((B_j(z)))_{j=1,N}$. Ainsi, les résidus doivent vérifier:

$$\begin{aligned} \int_{z=-1/2}^{z=+1/2} \text{Res}_M \cdot A_i(z) dz &= 0 & \text{de } i=1 \text{ à } M \\ \int_{z=-1/2}^{z=+1/2} \text{Res}_N \cdot B_j(z) dz &= 0 & \text{de } j=1 \text{ à } N \end{aligned} \quad (\text{III-23})$$

Les relations (III-23) constituent un système algébrique de $(M+N)$ équations homogènes linéaires permettant de calculer les $(M+N)$ coefficients a_i et b_j . Les éléments de la matrice de ce système contiennent des intégrales de produits de fonctions de base et ils sont fonction des cinq paramètres Ra , Re , Pr , σ et k_x . On montre que le problème (III-23) peut s'écrire sous la forme:

$$(\bar{M} + i \text{Re} \bar{P} - \sigma \bar{N}) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\bar{N}^{-1} \bar{M} + i \text{Re} \bar{N}^{-1} \bar{P} - \sigma \bar{I}) \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{III-24})$$

où $\begin{cases} \bar{M}, \bar{N}, \bar{P} \text{ et } \bar{I} \text{ sont des matrices de taille } (M+N)^2, \\ \bar{I} \text{ est la matrice unité,} \\ \mathbf{a} \text{ et } \mathbf{b} \text{ sont les vecteurs } (a_i)_{i=1,M} \text{ et } (b_j)_{j=1,N}. \end{cases}$

Le problème se réduit donc à la recherche des valeurs propres σ de la matrice $\bar{N}^{-1} \bar{M} + i \text{Re} \bar{N}^{-1} \bar{P}$. Les vecteurs propres correspondants donneront la forme analytique des solutions du problème. En fait, il est suffisant de déterminer la valeur propre de plus grande partie réelle (et le vecteur propre correspondant) car $\sigma_r^{\max}$ est le taux d'amplification temporelle de la perturbation la plus déstabilisante.

¹ On rappelle que le résidu d'ordre M de la relation (III-19) est la relation (III-19) dans laquelle on a substitué $\hat{w}$ et T par les expressions (III-21) développées à l'ordre M .

1.1.5 Détermination des paramètres critiques de l'écoulement

La démarche à suivre pour rechercher les paramètres critiques d'apparition de la convection est la suivante. Pour un écoulement à Pr et Re donnés (disons pour $Pr=Pr^1$ et $Re=Re^1$) et pour une valeur de k_x fixée, on recherche la valeur du nombre de Rayleigh (en le faisant varier par pas successifs) pour laquelle la partie réelle du taux d'amplification temporelle, $\sigma_r^{\max}$, s'annule. On répète cette opération pour k_x variant de $-\infty$ à $+\infty$. Ainsi, on obtient la courbe de stabilité neutre représentée figure III-2 dans le plan $(Ra-k_x)$ et correspondant à $\sigma_r^{\max}=0$. Pour $Ra < Ra^*$, l'écoulement de Poiseuille purement conductif est nécessairement stable quelle que soit la valeur de k_x , alors qu'il peut être stable ou instable en fonction de la valeur de k_x lorsque $Ra > Ra^*$. Donc, pour $Pr=Pr^1$ et $Re=Re^1$, Ra^* , le minimum de la courbe $Ra=f(k_x)$, est la valeur critique du nombre de Rayleigh donnant le *critère suffisant d'instabilité* de la théorie linéaire tel que nous l'avons défini au §1.1.1. k_x^* (cf. figure III-2) est la valeur correspondante du nombre d'onde des rouleaux au seuil d'apparition de l'instabilité. De même, on peut déterminer la partie imaginaire de la valeur propre de partie réelle $\sigma_r^{\max}$ correspondant au point (Ra^*, k_x^*) ; on la notera σ_i^* . La courbe critique $Ra_{\perp}^*=f(Re)$ d'apparition des rouleaux transversaux dans le problème de Poiseuille-Bénard 2D, à $Pr=Pr^1$ donné, s'obtient alors en calculant les points (Ra^*, k_x^*) pour un nombre suffisamment important de valeurs de Re .

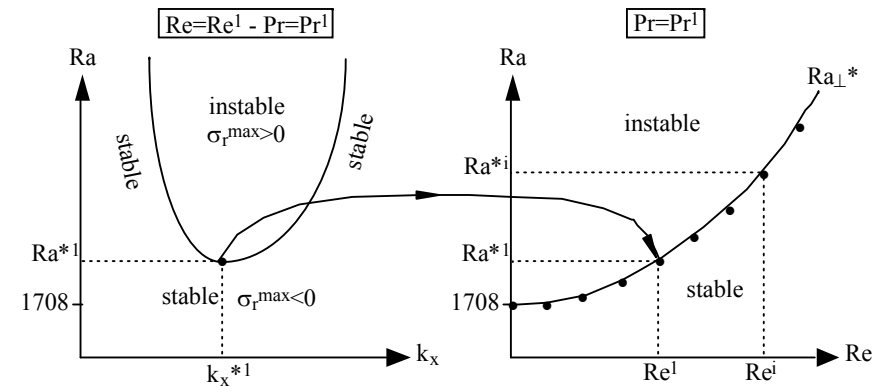


Figure III-2: Détermination de la courbe critique $Ra_{\perp}^*=f(Re)$ pour $Pr=Pr^1$ donné, à partir de la courbe $Ra=f(k_x)$.

1.1.6 Les six étapes principales de l'analyse de stabilité linéaire

Pour conclure ce paragraphe, on rappelle ci-dessous les six étapes principales de l'analyse de stabilité linéaire. Cependant, afin d'introduire les deux paragraphes suivants, on généralise la formulation au cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard 3D soumis à des perturbations 3D, dans le cas où l'écoulement a lieu entre deux plaques infinies (cas 1), et dans le cas où il a lieu dans un canal d'extension latérale finie (cas 2):

- étape 1: détermination du profil de base $\bar{\phi}(x, y, z) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{T}, \bar{P})$.

- étape 2: écriture des équations de perturbations en $\phi'(x, y, z, t) = (U', V', W', T', P')$.

- étape 3: Recherche des solutions ϕ' sous la forme de modes normaux dans les directions infinies de l'espace, avec une dépendance en temps du type $e^{\sigma t}$ et avec $\hat{\phi}$ fonction des composantes spatiales selon les directions confinées:

$$\phi'(x, y, z, t) = \hat{\phi}(z) e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{\sigma t} \quad (\text{cas 1}) \quad (\text{III} - 25)$$

$$\phi'(x, y, z, t) = \hat{\phi}(y, z) e^{ik_x x} e^{\sigma t} \quad (\text{cas 2}) \quad (\text{III} - 26)$$

- étape 4: écriture des équations en $\hat{\phi} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T}, \hat{P})$ et réduction du nombre d'inconnues par élimination successive de $\hat{u}$, de $\hat{v}$ et de $\hat{P}$ (cas 1), ou de $\hat{u}$ et de $\hat{P}$ (cas 2).

- étape 5: développement de $\hat{\phi}$ en séries limitées de fonctions de base, du type:

$$\hat{\phi}(z) = \sum_{i=1}^M a_i \cdot A_i(z) \quad (\text{cas 1}) \quad (\text{III} - 27)$$

$$\hat{\phi}(y, z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^P b_{jk} \cdot B_j(y) C_k(z) \quad (\text{cas 2}) \quad (\text{III} - 28)$$

où les fonctions de base A_i , B_j et C_k vérifient les conditions aux limites et tiennent compte de la symétrie des structures convectives recherchées ($R_{\perp}$, $R_{//}$, ...), i.e. de la parité ou de l'imparité en z et en y des rouleaux convectifs.

- étape 6: écriture du ou des systèmes algébriques (un par type de structures convectives) résultant de la méthode de Galerkin (ou de celle du potentiel local), puis résolution des problèmes aux valeurs propres en σ correspondants.

1.2 Stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille-Bénard entre deux plaques infinies

Nous avons vu dans le chapitre I au §1.1, que dans le problème de Rayleigh-Bénard entre deux plaques infinies, il y a dégénérescence des solutions. L'étude de Luijkx que nous rapportons ici va montrer que l'introduction d'une direction privilégiée dans l'écoulement, en l'occurrence celle de l'écoulement moyen imposé par le gradient de pression horizontal entre les deux plaques, permet de lever cette dégénérescence. Nous allons voir aussi comment, en utilisant la transformation de Squire, l'analyse de la stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille-Bénard 3D entre deux plaques infinies se ramène au cas 2D que nous avons traité au paragraphe précédent.

Le profil de base dont on veut étudier la stabilité est donné par (III-12), avec en plus la composante transversale de la vitesse $\bar{v}=0$. En considérant des perturbations fonction de (x, y, z, t) dans les trois directions de l'espace ($u' \neq 0$, $v' \neq 0$, $w' \neq 0$), on doit résoudre un système de cinq équations de perturbations. En recherchant ces dernières sous la forme (III-25), on obtient un système de cinq équations en $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$, $\hat{T}$ et $\hat{P}$ qui peut se réduire aux deux équations suivantes en éliminant successivement $\hat{u}$, $\hat{v}$ et $\hat{P}$:

$$DQ_k D\hat{w} - k^2 Q_k \hat{w} - ik_x \text{Re} D^2 \bar{u} \hat{w} - ik_x \text{Re} D \bar{u} D\hat{w} + \text{Ra} k^2 \hat{T} = 0 \quad (\text{III} - 29)$$

$$\text{où} \quad Q_k = \frac{\sigma}{\text{Pr}} + ik_x \text{Re} \bar{u} - D^2 + k^2 \quad \text{et} \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

$$\sigma \hat{T} + ik_x \text{Re} \text{Pr} \bar{u} \hat{T} - \hat{w} = (D^2 - k^2) \hat{T} \quad (\text{III} - 30)$$

Nous allons discuter la solution en fonction de la forme des perturbations recherchées et plus précisément en fonction de leur nombre d'onde k . On distingue trois cas:

- 1- si $k=k_x$ (i.e. $k_y=0$), les perturbations sont périodiques uniquement dans la direction x : on a affaire aux $R_{\perp}$ de longueur infinie;
- 2- si $k=k_y$ (i.e. $k_x=0$), les perturbations sont périodiques uniquement dans la direction y : on a affaire aux $R_{//}$ de longueur infinie;
- 3- si k est quelconque (i.e. $k_x \neq 0$ et $k_y \neq 0$), la forme des perturbations est a priori quelconque: comme le montre la figure III-3, on peut avoir affaire, par exemple,

à des rouleaux obliques par rapport à la direction de l'écoulement de base, ou à des rouleaux sinueux, ...

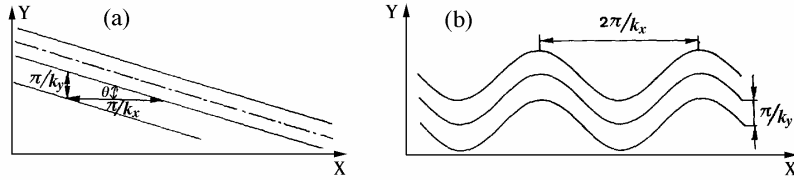


Figure III-3: Formes possibles des structures convectives lorsque le nombre d'onde $k=(k_x^2+k_y^2)^{1/2}$ est quelconque: (a) rouleaux obliques, (b) rouleaux sinueux (tiré de *Platten et Legros (1984)*).

1.2.1 Cas des rouleaux transversaux ($k_y=0$)

De manière évidente, si l'on pose $k_y=0$ dans les équations (III-29) et (III-30), on retrouve les équations (III-19) et (III-18) se rapportant à la naissance des instabilités sous la forme de rouleaux transversaux dans le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard 2D. La solution en ce qui concerne le critère de stabilité est donc celle présentée figure III-2: $Ra_{\perp}^*$ croît avec Re et $Ra_{\perp}^*=1707,762$ à $Re=0$.¹

1.2.2 Cas des rouleaux longitudinaux ($k_x=0$)

Les équations (III-29) et (III-30) se simplifient beaucoup; on obtient:

$$(D^2 - k_y^2) \left(D^2 - k_y^2 - \frac{\sigma}{Pr} \right) \hat{w} = Ra k_y^2 \hat{T} \quad (\text{III} - 31)$$

$$(D^2 - k_y^2 - \sigma) \hat{T} = -\hat{w} \quad (\text{III} - 32)$$

¹ Dans le cas de l'écoulement 3D de $R_{\perp}$, on montre que l'équation en $\hat{v}$ est découplée des autres équations et que la perturbation $\hat{v}$ ne contribue pas à la naissance de l'instabilité; donc, pour les $R_{\perp}$, on peut poser $\hat{v}=0$. Par contre, lorsque $Re \neq 0$, *Platten et Legros (1984)* montrent que la solution sous forme de $R_{//}$ n'existe que si $u' \neq 0$; en effet, $u'=0 \Rightarrow \hat{v}'=\hat{w}'=\hat{T}'=\hat{P}'=0$.

Remarquons que le nombre de Reynolds n'apparaît plus dans ce système de deux équations. Donc, le problème aux valeurs propres et le nombre de Rayleigh critique que l'on obtient en le résolvant seront indépendants de Re . En fait, on retrouve les équations du problème de Rayleigh-Bénard entre deux plaques infinies traité par *Chandrasekhar (1961)*: les équations (III-31) et (III-32) sont respectivement similaires aux équations (99) et (100) du chapitre II de son livre, à condition de remplacer k_y par k et aux choix de l'adimensionnalisation près. On en conclut que le seuil d'instabilité correspondant à la naissance de la convection sous la forme de rouleaux longitudinaux est caractérisé, quel que soit le nombre de Reynolds, par $Ra_{//}^*=1707,762$, $k_y^*=3,116$ et $\sigma_i^*=0$ (le principe d'échange de stabilité est vérifié).

1.2.3 Cas des structures quelconques ($k_x \neq 0$ et $k_y \neq 0$) - Transformation de Squire généralisée

Comme nous l'avons déjà mentionné, au lieu de résoudre le système (III-29)-(III-30) complet, on peut simplifier le problème en appliquant la transformation de Squire. Celle-ci consiste à se placer dans un repère dont la base a tourné d'un angle $\theta = \arctan(k_y/k_x)$ par rapport à la base ($\mathbf{i}, \mathbf{j}$), où $\mathbf{i}$ indique la direction de l'écoulement de base et $\mathbf{j}$ la direction transversale. Si on suppose que les perturbations naissent sous la

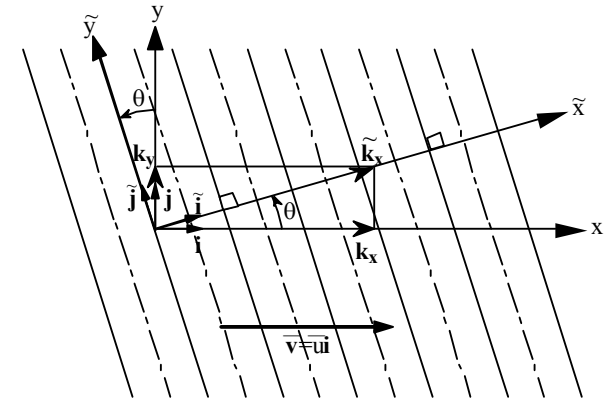


Figure III-4: Changement de repère résultant de la transformation de Squire dans le cas où les perturbations naissent sous la forme de rouleaux inclinés de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k_x \mathbf{i} = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2} \tilde{\mathbf{i}}$.

forme de rouleaux obliques, la figure III-4 schématise ce changement de repère. Les rouleaux sont orthogonaux à l'axe $(O, \tilde{\mathbf{i}})$ du nouveau repère. On a:

$$\tilde{k}_x = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2} \quad \tilde{k}_y = 0 \quad \cos \theta = \frac{k_x}{\tilde{k}_x} \quad \sin \theta = \frac{k_y}{\tilde{k}_x}$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{u}\tilde{\mathbf{i}} = \tilde{u} \cos \theta \tilde{\mathbf{i}} - \tilde{u} \sin \theta \tilde{\mathbf{j}} = \tilde{u}\tilde{\mathbf{i}} + \tilde{v}\tilde{\mathbf{j}} \Rightarrow \tilde{u} = \tilde{u} \cos \theta \Rightarrow \tilde{k}_x \tilde{Re} = k_x Re$$

Explicitement, la transformation de Squire consiste à faire le changement de variables suivant dans le système (III-29)-(III-30):

$$\left\{ \begin{array}{l} k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \tilde{k}_x^2 \\ k_x Re = \tilde{k}_x \tilde{Re} \\ \sigma = \tilde{\sigma} \\ Pr = \tilde{Pr} \\ Ra = \tilde{Ra} \end{array} \right. \quad (III-33)$$

On doit alors résoudre:

$$D\tilde{Q}_k D\tilde{w} - \tilde{k}_x^2 \tilde{Q}_k \tilde{w} - i\tilde{k}_x \tilde{Re} D\tilde{u} \tilde{w} - i\tilde{k}_x \tilde{Re} D\tilde{u} \tilde{w} + \tilde{Ra} \tilde{k}_x^2 \hat{T} = 0 \quad (III-34)$$

$$\text{où} \quad \tilde{Q}_k = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{Pr}} + i\tilde{k}_x \tilde{Re} \tilde{u} - D^2 + \tilde{k}_x^2$$

$$\tilde{\sigma} \hat{T} + i\tilde{k}_x \tilde{Re} \tilde{Pr} \tilde{u} \hat{T} - \hat{w} = (D^2 - \tilde{k}_x^2) \hat{T} \quad (III-35)$$

Ce système est identique à celui obtenu au §1.2.1 dans le cas des $R_\perp$. La résolution se ramène donc au cas bidimensionnel: il n'y a plus qu'un seul nombre d'onde ($\tilde{k}_x$) et la détermination des valeurs des paramètres critiques peut se faire sans l'aide de l'équation en $\hat{v}$ (non montrée ici). Luijkx (1983) ou Platten et Legros (1984) parlent dans ce cas de "généralisation du théorème de Squire".

A la figure III-5, on montre comment la solution du cas général ($k_x \neq 0$ et $k_y \neq 0$) peut se déduire graphiquement à partir de la solution du cas 2D (donnée figure III-2). En effet, grâce à la transformation de Squire, on sait que la stabilité neutre ($\tilde{\sigma}_r^{\max} = \sigma_r^{\max} = 0$), lorsque $\tilde{Pr} = Pr$, est atteinte pour le même nombre de Rayleigh critique ($\tilde{Ra}^* = Ra^*$), dans les deux cas, si $\tilde{Re} = k_x / k_y Re$. Comme $k_x < k_x$, les valeurs critiques sont atteintes pour $Re > \tilde{Re}$. Dans le cas limite où k_x tend vers 0, la transformation permet aussi de retrouver la courbe 4 établie au §1.2.2; en effet, pour $\tilde{Re}$ fini, k_x tend vers 0 implique que $\tilde{k}_x$ tend vers $k_y \neq 0$ et donc que Re tend vers l'infini.

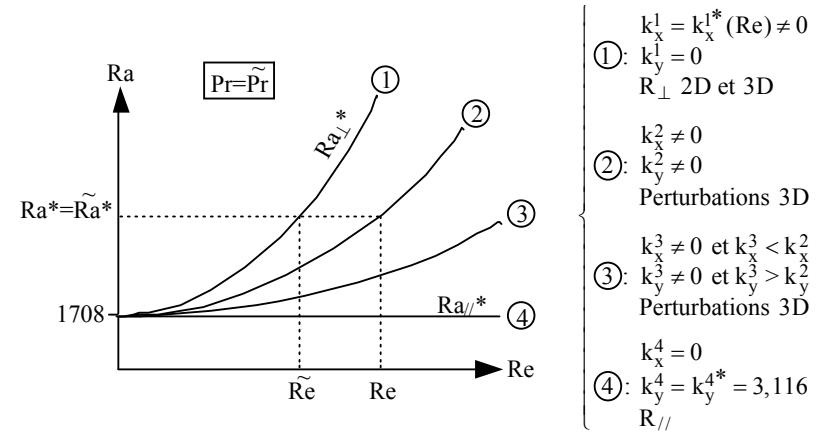


Figure III-5: Détermination de la courbe critique $Ra^*=f(Re)$ pour des perturbations 3D quelconques en utilisant la transformation de Squire (tiré de Platten et Legros (1984)).

1.2.4 Les résultats numériques de Luijkx

D'après la figure III-5, on sait que, dans le problème de Poiseuille-Bénard avec écoulement entre deux plaques d'extension infinie, la structure apparaissant au seuil d'instabilité prend la forme de $R_{//}$ et que les valeurs des paramètres critiques à la transition sont parfaitement définies (cf. §1.2.2). Malgré cela, nous allons présenter les résultats de Luijkx se rapportant aux $R_\perp$ car nous pourrions les comparer aux résultats des simulations numériques directes bidimensionnelles exposés au chapitre VI. Nous rappelons que la simulation 2D ne permet le calcul que des $R_\perp$. Les tableaux de valeurs numériques que donnent Luijkx à propos des $R_\perp$ concernent: (i) $R_{\perp}^*$ et k_x^* pour $0 \leq Re \leq 8000$ à $Pr=7$, et (ii) $R_{\perp}^*$, k_x^* , σ_1^* et $(Vr/U^0)^*$ ⁽¹⁾ pour $0 \leq Re \leq 20$ à $Pr=10^{-6}$, 1, 10 et 453. Ici, nous ne présentons que les résultats qui seront susceptibles de nous intéresser pour la suite, notamment ceux proches de $Pr=6,4$.

⁽¹⁾ $(Vr/U^0)^*$ est le rapport entre la vitesse de propagation des $R_\perp$ au point critique et la vitesse moyenne de l'écoulement de base.

Le tableau III-1 et les figures III-6 et III-7 donnent $Ra_{\perp}^*$ et k_x^* en fonction de Re à $Pr=7$. On retrouve le résultat, bien connu de nous maintenant, qui montre l'augmentation de $Ra_{\perp}^*$ avec Re . Cependant, en prolongeant les calculs bien au delà de $Re=20$, Luijkx montre qu'à partir de $Re \approx 7000$, $Ra_{\perp}^*$ décroît brusquement lorsque Re augmente (non détaillé ici); il trouve que $Ra_{\perp}^*=0$ à $Re=7696,28$ pour un nombre d'onde assez faible $k_x^*=2,041$ (cf. tableau III-1). Ce seuil d'instabilité dans une couche isotherme correspond en fait à la naissance des ondes de Tollmien-Schlichting sous l'effet des fortes contraintes de viscosité (cf. §2.1.2 du chapitre II). La figure III-6 montre aussi l'influence de Pr sur $Ra_{\perp}^*$: l'écoulement moyen a un effet stabilisant sur l'écoulement de Poiseuille d'autant plus important que le nombre de Prandtl est élevé.

Luijkx montre que, dès que le nombre de Reynolds est non nul, le principe d'échange de stabilité n'est plus vérifié: $\sigma_i^*(Re \neq 0) < 0$. Ainsi, la forme des perturbations de vitesse se rapportant aux $R_{\perp}$ s'écrit, au point critique, $\mathbf{v}' = \hat{\mathbf{v}}(z)e^{i(k_x^*x + \sigma_i^*t)}$. Les $R_{\perp}$ se comportent donc comme des ondes de longueur d'onde adimensionnelle $\lambda = 2\pi/k_x^*$ et de période adimensionnelle $\tau = 2\pi/|\sigma_i^*|$. Si on note V_r la vitesse de déplacement dimensionnelle des $R_{\perp}$, au point critique $V_r^* = \lambda h / (\tau h^2 / \alpha^0) = |\sigma_i^*| \alpha^0 / (k_x^* h)$ (cf. formules (III-11) pour avoir les grandeurs de référence de l'adimensionnalisation). Il est alors possible de calculer le rapport $(V_r/U^0)^*$ défini précédemment. En effet, comme la vitesse moyenne de l'écoulement de base $U^0 = Re v^0 / h$, on a:

$$\left(\frac{V_r}{U^0}\right)^* = \frac{|\sigma_i^*(Re, Pr)| \alpha^0}{k_x^*(Re, Pr)} \frac{h}{Re v^0} = \frac{|\sigma_i^*(Re, Pr)|}{k_x^*(Re, Pr)} \frac{1}{Re Pr} \quad (III - 36)$$

On donne des valeurs de $(V_r/U^0)^*$ en fonction du nombre de Reynolds et pour différents nombres de Prandtl dans le tableau III-2. $(V_r/U^0)^*$ dépend de Re et de Pr , mais ce rapport peut être considéré comme constant, à Pr fixé, si on se limite aux petites valeurs du nombre de Reynolds. Par exemple, à $Pr=10$, on peut estimer que la perturbation se propage à une vitesse de 30% supérieure à la vitesse moyenne du fluide pour $0 < Re \leq 4$. D'autre part, on peut considérer approximativement que la théorie linéaire donne $(V_r/U^0)^* \approx 1,25$ pour $Pr=6,4$ et $0 < Re \leq 5$.

Re	$Ra_{\perp}^*$	k_x^*
0	1707,762	3,116
1	1729,614	3,107
2	1793,625	3,081
2,27	1804	3,073
4,12	2024	3,010
6	2376,284	2,959
8	2795,595	2,948
10	3269,373	2,966
12	3794,971	2,991
14	4380,566	3,007
16	5038,534	3,009
18	5781,601	2,997
20	6621,632	2,973
7000	$\sim 33 \times 10^6$	2,053
7696,28	0	2,041

Tableau III-1: Nombre de Rayleigh critique et nombre d'onde critique en fonction de Re , au seuil d'apparition des rouleaux transversaux, pour $Pr=7$.

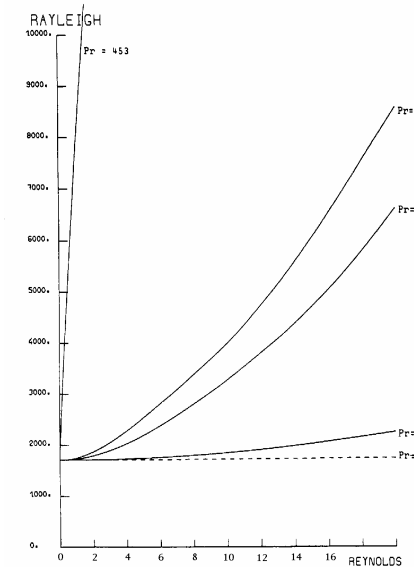


Figure III-6: Nombre de Rayleigh critique pour les rouleaux transversaux, en fonction de Re , à $Pr=0, 1, 7, 10$ et 453 (tiré de Luijkx(1983)).

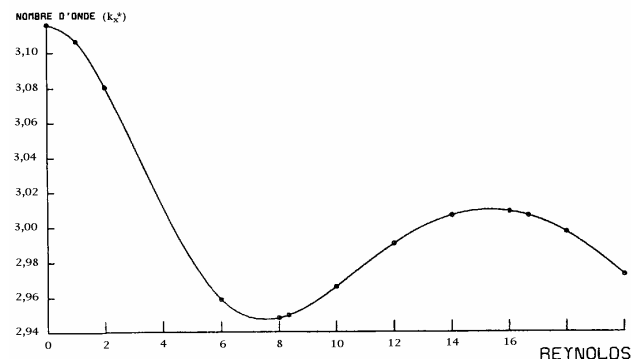


Figure III-7: Nombre d'onde critique pour les rouleaux transversaux, en fonction de Re , à $Pr=7$ (tiré de *Luijkx(1983)*).

Re	$(Vr/U^\circ)^*$ à $Pr=10^{-6}$	$(Vr/U^\circ)^*$ à $Pr=1$	$(Vr/U^\circ)^*$ à $Pr=10$	$(Vr/U^\circ)^*$ à $Pr=453$
0,2	0,8833	1,1703	1,296	1,380
0,4	0,8833	1,1703	1,296	1,410
0,6	0,8833	1,1703	1,296	1,424
0,8	0,8833	1,1703	1,297	1,432
1	0,8833	1,1703	1,297	1,438
2	0,8833	1,1703	1,300	1,453
3	0,8833	1,1702	1,304	1,459
4	0,8832	1,1701	1,309	1,462
6	0,8830	1,1700	1,320	1,465
8	0,8829	1,1696	1,329	1,465
10	0,8826	1,1692	1,335	1,463

Tableau III-2 : Rapport de la vitesse des $R_\perp$, Vr , sur la vitesse moyenne de l'écoulement de base, U° , au point critique, en fonction de Re et de Pr .

1.3 Stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille-Bénard dans un canal d'extension latérale finie

Ce problème a été présenté sommairement dans le chapitre introductif. Nous avons décrit la compétition entre l'influence des bords latéraux et celle de l'écoulement moyen sur la forme de la structure convective au seuil d'instabilité. Notamment, nous avons vu apparaître un nouveau paramètre critique, $Re^*(Pr, B)$, marquant le moment où la convection cesse de naître sous la forme de structures 3D transverses à l'écoulement au profit des rouleaux longitudinaux. Dans cette partie et dans un premier temps, nous allons montrer l'ampleur du travail d'analyse linéaire à accomplir pour obtenir les valeurs de Re^* . Dans un second temps, nous donnerons quelques valeurs des paramètres critiques $Ra_\perp^*$, $Ra_\parallel^*$, Re^* , k^* , $(Vr/U^\circ)^*$ en fonction de B et de Pr .

1.3.1 Rappel des résultats en convection naturelle

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent pour des géométries infinies dans les deux directions horizontales, il existe beaucoup d'analogies entre la stabilité linéaire des problèmes de Rayleigh-Bénard et de Poiseuille-Bénard. Il en est de même dans le cas des canaux d'extension latérale finie. L'étude de la stabilité linéaire menée par Luijkx, pour cette configuration en convection naturelle, a déjà été publiée: elle se trouve dans *Luijkx et Platten (1981)*. Nous en rappelons ici les principaux résultats:

- dès que $B \neq \infty$ (où B est le rapport de forme transversal), la dégénérescence des solutions existant dans le cas de la géométrie infinie est levée: la convection apparaît sous la forme de structures 3D ressemblant à des rouleaux transversaux à l'axe du canal, dont les extrémités au contact des bords verticaux s'affinent. Nous noterons toujours cette configuration par $R_\perp$.

- Le nombre de Rayleigh critique $Ra_\perp^*$ correspondant à ces structures est indépendant de Pr et diminue uniformément lorsque B augmente; il tend vers la valeur $Ra_\perp^*=1708$ lorsque $B \rightarrow \infty$.

- Comme l'avait déjà montré *Davies-Jones (1970)*, les $R_\perp$ finis¹ calculés par *Davis (1967)* ne sont pas solution du problème; ils sont seulement une bonne

¹ Les $R_\perp$ finis sont des structures théoriques purement bidimensionnelles décrites par: $\varphi'(x, y, z, t) = \varphi(z)e^{ik_x x} e^{i\sigma t}$ avec $v'=0$. Ils sont solutions du problème de Rayleigh-Bénard entre plaques infinies mais ne le sont pas dans un canal d'extension latérale finie.

approximation des $R_{\perp}$ 3D décrits ci-dessus. Luijkx vérifie expérimentalement cette affirmation (cf. aussi Luijkx et al. (1982)).

- Les $R_{//}$ infinis, avec $u'=0$, sont solutions du problème mais ils apparaissent toujours pour des valeurs des nombres de Rayleigh critiques supérieures à celles correspondant à l'apparition des $R_{\perp}$ 3D. $Ra_{//}^*$ est indépendant de Pr mais varie en fonction de B .

1.3.2 Démarche théorique pour déterminer les paramètres critiques

L'écoulement dont on veut étudier la stabilité est représenté schématiquement figure I-2. Le profil de vitesse $\bar{u}$, parabolique en z , est maintenant aussi fonction de y . Si on adopte le système de coordonnées et les conditions aux limites représentés à la figure III-8, et si on conserve l'adimensionnalisation (III-11) sauf pour la coordonnée Y que l'on réduit par la largeur l du canal, alors, le calcul analytique de $\bar{u}(y, z, B)$ donne (cf. Platten et Legros (1984)):

$$\bar{u}(y, z, B) = \frac{3}{2}(1-4z^2) + \frac{48}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cosh((2n+1)\pi By) \cos((2n+1)\pi z)}{(2n+1)^3 \cosh((n+1/2)\pi B)} \quad (\text{III} - 37)$$

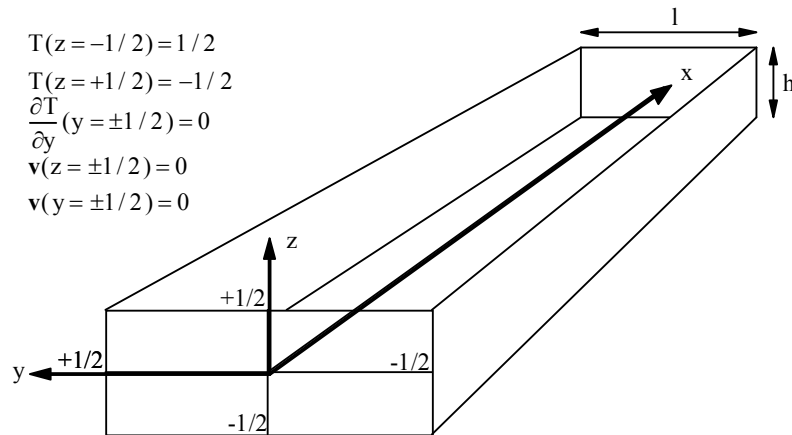


Figure III-8 : Système de coordonnées et conditions aux limites pour le canal d'extension latérale finie.

En suivant la démarche générale présentée au §1.1.6 pour le cas 2, on obtient, à la quatrième étape, un système de cinq équations en $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$, $\hat{T}$ et $\hat{P}$ que l'on peut réduire à 3 équations en $\hat{v}$, $\hat{w}$ et $\hat{T}$ en éliminant successivement $\hat{u}$ et $\hat{P}$. L'étape suivante consiste à rechercher les inconnues $\hat{\phi}(y, z)$ sous la forme de développements en série de fonctions de base du type (III-28) et à résoudre le problème aux valeurs propres (nous le noterons $\mathcal{L}$) qui en découle. Cependant, nous allons voir que l'on peut scinder ce problème par la résolution de quatre problèmes aux valeurs propres distincts.

En utilisant les symétries du problème, on peut faire une décomposition en la somme de quatre termes de parités différentes et écrire:

$$\hat{\phi}(y, z) = \hat{\phi}^{PP}(y, z) + \hat{\phi}^{PI}(y, z) + \hat{\phi}^{IP}(y, z) + \hat{\phi}^{II}(y, z) \quad (\text{III} - 38)$$

où les exposants "P" et "I" indiquent la parité de chacun des termes, le premier se rapportant à y et le second à z . Or, en remplaçant une des inconnues ($\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$, $\hat{T}$ ou $\hat{P}$) du système complet d'équations par l'un des quatre termes de (III-38), pour des raisons d'homogénéité, on en déduit automatiquement la parité correspondante des autres inconnues. Ainsi, on détermine qu'il y a quatre types de solutions possibles pour les équations d'amplitudes de perturbations, en fonction de la parité en y et en z . Ces solutions (numérotées A, B, C et D) sont données au tableau III-3. Les quatre problèmes aux valeurs propres $\mathcal{L}_A$, $\mathcal{L}_B$, $\mathcal{L}_C$ et $\mathcal{L}_D$ que l'on doit résoudre et les solutions correspondantes sont donc tels que:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_C + \mathcal{L}_D \quad (\text{III} - 39)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{v}^{PI} \\ \hat{w}^{IP} \\ \hat{T}^{IP} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}^{II} \\ \hat{w}^{PP} \\ \hat{T}^{PP} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}^{PP} \\ \hat{w}^{II} \\ \hat{T}^{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}^{IP} \\ \hat{w}^{PI} \\ \hat{T}^{PI} \end{pmatrix}$$

Un autre avantage de la décomposition des solutions du problème en fonction de leur parité est de pouvoir déterminer aisément la forme des structures convectives à la naissance de l'instabilité. Ces dernières sont dessinées au tableau III-3 dans le plan (y, z) à partir des composantes v' et w' des perturbations de vitesse. Pour obtenir la forme complète de la structure, il faut ajouter l'évolution spatiale de u' et prendre en compte la dépendance en x des perturbations (de la forme $e^{ik_x x}$):

- lorsque $k_x=0$, la forme des structures se déduit directement de celle dessinée dans le plan (y, z) puisque la solution est uniforme dans la direction x ; on a affaire à différents types de rouleaux longitudinaux:

- cas A: nombre impair de $R_{//}$

- cas B: nombre pair de $R_{//}$

- cas C et D: nombre pair de $R_{//}$ superposés; ces structures n'ont jamais été observées expérimentalement près du seuil d'instabilité. Luijckx a vérifié qu'elles ne pourront exister qu'à partir de nombres de Rayleigh plus élevés que pour les cas A et B. Les $R_{//}$ du cas D, correspondant aux $R_{//}$ de 2^{ème} espèce au sens de *Mori et Uchida (1966)*, apparaissent à $Ra^*=18352$ selon la théorie linéaire pour $B=\infty$ (cf. §2.1.1 du chapitre II).

En outre, lorsque $k_x=0$, on montre que le système de 3 équations en $\hat{v}$, $\hat{w}$ et $\hat{T}$ à intégrer ne contient plus le nombre de Reynolds et est identique au système obtenu lorsqu'il n'y a pas d'écoulement laminaire ($\bar{u}=0$). Les points critiques d'apparition des $R_{//}$ sont donc ceux obtenus dans le problème de convection naturelle correspondant, i.e. pour le même B. Ces points critiques, notamment $Ra_{//}^*$, sont donc valables quel que soit Re et quel que soit Pr, mais ils sont fonction de B.

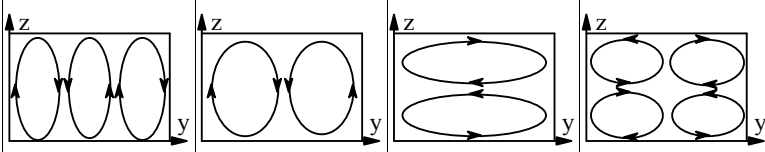
	A		B		C		D	
	y	z	y	z	y	z	y	z
u'	I	I	P	I	I	P	P	P
v'	P	I	I	I	P	P	I	P
w'	I	P	P	P	I	I	P	I
T'	I	P	P	P	I	I	P	I
P'	I	I	P	I	I	P	P	P
								
- nombre impair de $R_{//}$ lorsque $k_x=0$; - structure non observée physiquement lorsque $k_x \neq 0$. - nombre pair de $R_{//}$ lorsque $k_x=0$; - $R_{\perp}$ 3D en forme de fers à cheval lorsque $k_x \approx 3$. - $R_{//}$ superposés (non observés physiquement à proximité du point critique). - $R_{//}$ de 2^{ème} espèce lorsque $k_x=0$ (moins stables que les $R_{//}$ de 1^{ère} espèce des cas A et B)								

Tableau III-3 : Formes possibles des perturbations dans le plan (y, z) en fonction de la parité en y et en z de leurs amplitudes, et description des structures complètes.

- lorsque $k_x \neq 0$, on a affaire à des rouleaux périodiques en x, superposés aux structures longitudinales décrites ci-dessus lorsque $k_x=0$; le résultat est une structure purement tridimensionnelle assez complexe:

- cas A: les rouleaux périodiques en x, superposés à un nombre impair de $R_{//}$, ont une amplitude u' qui s'annule dans le plan vertical médian $y=0$ (car u' est impair en y); ces structures n'ont jamais été observées au voisinage du point critique.

- cas B: superposés à un nombre pair de $R_{//}$, les rouleaux périodiques en x sont d'amplitude u' paire en y. Les calculs montrent que près du point critique, pour $k_x \approx 3$, cela correspond à des rouleaux transverses à l'écoulement mais courbés par les effets d'adhérence à la paroi: les rouleaux ont la forme de fers à cheval¹.

- cas C et D: Pour la même raison que lorsque $k_x=0$, on peut penser que ces structures conduisent à des nombres de Rayleigh critiques beaucoup plus élevés que pour les cas A et B: elles seront donc exclues du calcul.

On déduit de ce qui précède que les seules structures susceptibles d'apparaître au seuil d'instabilité linéaire sont les solutions des problèmes $\mathcal{L}_A$ et $\mathcal{L}_B$; il est donc inutile de résoudre $\mathcal{L}_C$ et $\mathcal{L}_D$. Cependant, les éléments des matrices de $\mathcal{L}_A$ et $\mathcal{L}_B$ sont très complexes puisqu'ils contiennent des intégrales (provenant des produits scalaires de type (III-23) apparaissant dans la méthode de Galerkin) de $\bar{u}(y, z, B)$ et des fonctions de base. A cela s'ajoutent des problèmes de précision et de convergence liés au choix de la troncature de la série infinie intervenant dans le calcul de $\bar{u}(y, z, B)$ (cf. (III-37)). Enfin, les deux problèmes aux valeurs propres qu'il est nécessaire de résoudre ($\mathcal{L}_A$ et $\mathcal{L}_B$) font intervenir chacun six paramètres: σ , k_x , Ra , Re , Pr et B . Ces remarques donnent une idée de l'ampleur des calculs numériques à effectuer pour déterminer les paramètres critiques dans le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard en conduite d'extension latérale finie.

La figure III-9 montre la démarche à suivre pour déterminer la valeur du nombre de Reynolds critique, Re^* , d'un écoulement à $Pr=Pr^1$ et $B=B^1$ donnés. Comme nous l'avons déjà fait au §1.1.5, la première étape consiste à rechercher, à Re fixé, le minimum de Ra lorsque k_x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Le graphe III-9(a) représente le cas d'un écoulement à $Re=Re^1$ assez faible pour lequel la valeur minimale de Ra est obtenue

¹ Bien que l'axe de ces rouleaux ne soit pas rectilignes, nous continuerons à les noter $R_{\perp}$.

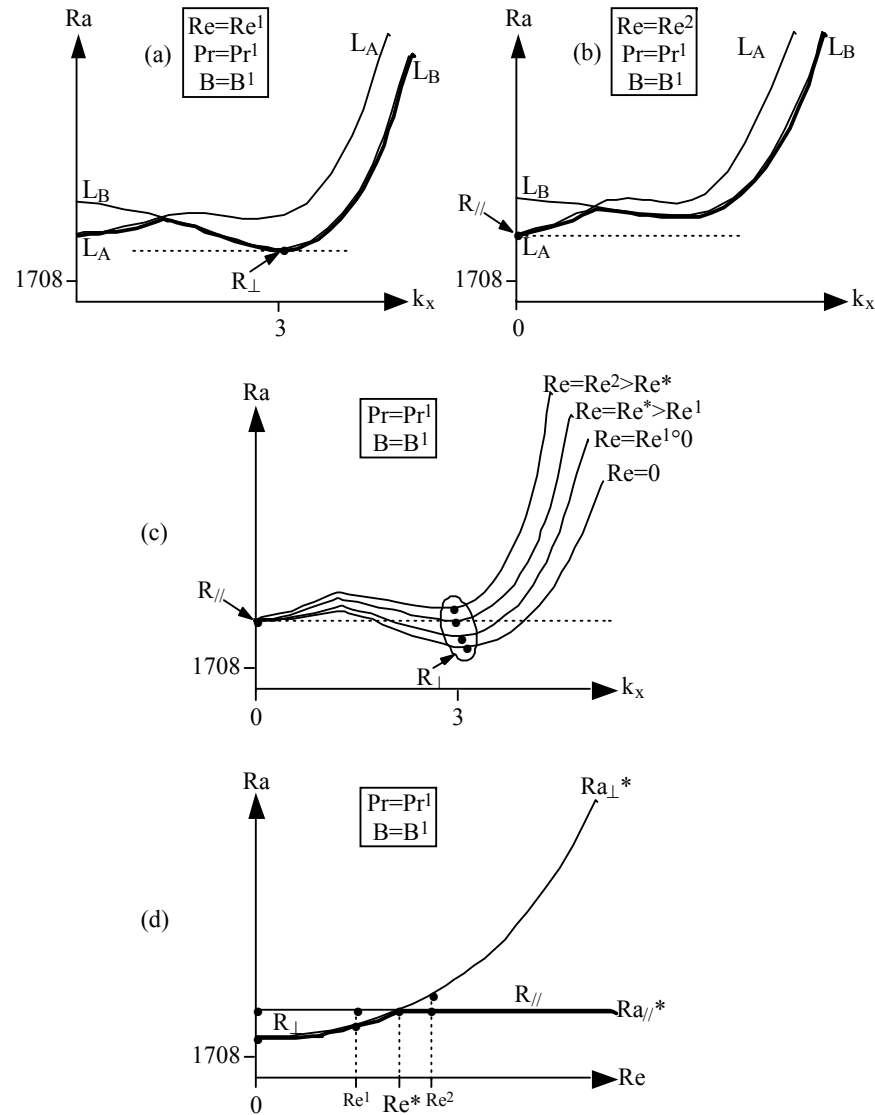


Figure III-9 : Les différentes étapes pour déterminer le nombre de Reynolds critique Re^* pour un écoulement à Pr et B fixés.

pour $k_x \approx 3$ en résolvant L_B . La structure convective au seuil de l'instabilité à $Re=Re^1$ est donc de type $R_{\perp}$ 3D en forme de fers à cheval. Le graphe III-9(b) montre le cas d'un écoulement à $Re=Re^2 > Re^1$, où le nombre de Rayleigh critique est atteint pour $k_x=0$ en résolvant le problème L_A . Au seuil d'apparition de l'instabilité on a donc affaire à un nombre impair de $R_{//}$. Le graphe III-9(c) donne $Ra^*=f(k_x)$ à différents nombres de Reynolds, dont Re^1 et Re^2 . Il met en évidence une valeur de Re pour laquelle la courbe de stabilité neutre a deux minima: le premier à $k_x=0$ et le second à $k_x \approx 3$. Cette valeur de Re correspond à Re^* . Le graphe III-9(d) montre comment on obtient les courbes neutres $Ra_{\perp}^*$ et $Ra_{//}^*$ à partir du graphe III-9(c).

Nous avons vu à la figure III-6 que $Ra_{\perp}^*$ est fonction de Pr dès que $Re \neq 0$. Re^* est donc aussi fonction de Pr . D'autre part, nous avons fait remarquer un peu plus haut dans ce paragraphe que $Ra_{//}^*$ est fonction de B . En conséquence, Re^* est aussi fonction de B . Vu le travail nécessaire à l'obtention du graphe III-9(d) pour $Pr=Pr^1$ et $B=B^1$, on imagine alors le nombre de calculs qu'il aura fallu à Luijkx pour obtenir les courbes $Re^*=f(Pr)$ et $Re^*=f(B)$ données au paragraphe suivant.

1.3.3 Les résultats numériques de Luijkx

Le tableau III-4 et la figure III-10 donnent l'évolution du nombre de Rayleigh critique $Ra_{//}^*$ pour les rouleaux longitudinaux en fonction de B , ainsi que le nombre de rouleaux longitudinaux qui apparaissent lorsque B varie. Ces résultats ont été publiés dans l'article de Luijkx et Platten (1981) qui traite de la stabilité linéaire de l'écoulement de Rayleigh-Bénard en conduite d'extension latérale finie. Mais, comme nous l'avons déjà dit, la stabilité des rouleaux longitudinaux dans le problème de Poiseuille-Bénard se ramène au cas de la convection libre.

De manière équivalente, la figure III-11 donne l'évolution du nombre de Rayleigh critique $Ra_{\perp}^*$ pour plusieurs valeurs du rapport de forme et à $Pr=10$, dans le cas de perturbations purement tridimensionnelles, i.e. lorsque la convection naît sous la forme de $R_{\perp}$ 3D. Les résultats dans le cas de l'écoulement entre deux plaques infinies ($B=\infty$) sont aussi reportés sur ce graphe. Il apparaît que l'influence stabilisante des bords latéraux de la conduite sur l'apparition de la convection sous forme de structures 3D transverses est d'autant plus grande que B est petit. On a aussi reporté sur la figure les valeurs de $Ra_{//}^*$ (tirées du tableau III-4) en dessinant des segments de droite horizontale coupant les courbes $Ra_{\perp}^*$. Ainsi, pour les rapports de forme $B=1, 2$ et 5 et pour $Pr=10$, on peut déterminer les valeurs de Re^* .

Rapport de forme transversal B	Nombre de Rayleigh critique $Ra_{//}^*$	Problème aux valeurs propres $\mathcal{L}_A$ ou $\mathcal{L}_B$	Nombre de $R_{//}$
0,1	5082048,64	$\mathcal{L}_A$	1
0,5	12113,34	$\mathcal{L}_A$	1
1	2585,03	$\mathcal{L}_A$	1
2	2013,24	$\mathcal{L}_B$	2
3	1870,72	$\mathcal{L}_A$	3
3,64	1848,87	$\mathcal{L}_A$	3
4	1810,48	$\mathcal{L}_B$	4
5	1779,00	$\mathcal{L}_A$	5
5,4	1767,28	$\mathcal{L}_A$	5
∞	1707,76	$\mathcal{L}_A$ et $\mathcal{L}_B$	∞

Tableau III-4 : $Ra_{//}^*$ en fonction de B, avec indication du nombre de $R_{//}$ et du problème aux valeurs propres donnant la valeur critique (tiré de Luijkx et Platten (1981)).

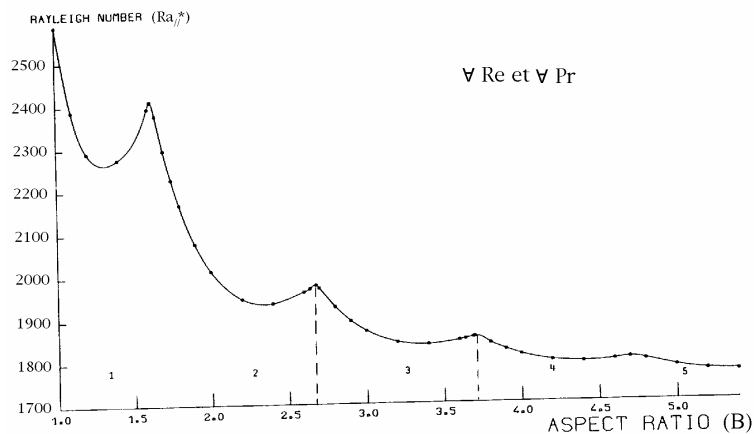


Figure III-10 : Nombre de Rayleigh critique pour les rouleaux longitudinaux en fonction du rapport de forme transversal, avec indication du nombre de $R_{//}$ (tiré de Luijkx (1983)).

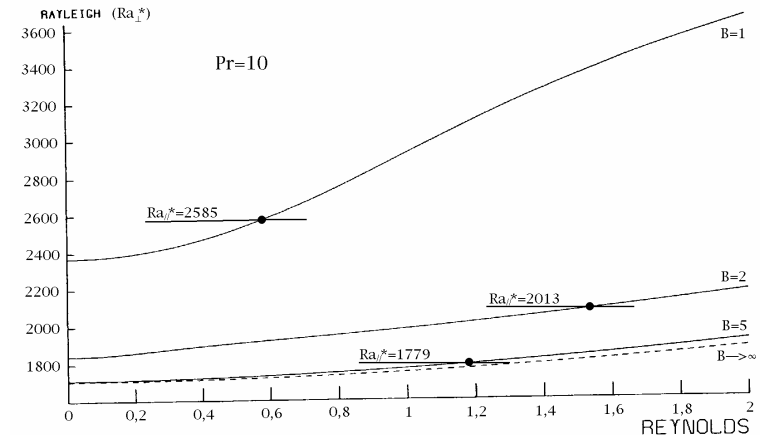


Figure III-11 : Nombre de Rayleigh critique $Ra_{\perp}^*$ pour les structures transverses tridimensionnelles ($R_{\perp}$ 3D), en fonction de Re , pour différents rapports de forme, à $Pr=10$; intersection avec les droites $Ra_{//}^*=f(Re)$ (tiré de Luijkx (1983)).

La figure III-12 donne Re^* en fonction de B pour $Pr=1, 10$ et 100 . Re^* tend vers l'infini pour $B \rightarrow 0$ et tend vers zéro pour $B \rightarrow \infty$. Les trois courbes présentent une série de minima et de maxima coïncidant avec les minima et les maxima des courbes $Ra_{//}^*=f(B)$ (cf. figure III-10). On notera que l'ordre de grandeur de Re^* est assez faible: $Re^* > 2$ lorsque $B < 1$ ou pour $Pr < 10$.

La figures III-13 représente l'évolution du nombre d'onde critique k_x^* dans le cas des perturbations purement tridimensionnelles, à $Pr=10$, pour $B=1, 2, 5$ et ∞ . On observe que le nombre d'onde au point critique diminue de manière continue lorsque Re augmente, excepté pour $B=1$. Comme nous l'avons déjà précisé au paragraphe précédent, on note que les valeurs de k_x^* restent toujours assez proche de 3 pour la gamme de nombres de Reynolds envisagée.

A partir de valeurs numériques tirées de la thèse de Luijkx, on représente à la figure III-14 l'évolution en fonction de Re du rapport $(V_r/U^*)^*$ entre la vitesse de propagation des $R_{\perp}$ 3D au point critique et la vitesse moyenne de l'écoulement (cf. formule (III-36)). Les courbes sont dessinées pour $B=1, 2, 5$ et ∞ à $Pr=10$. On note que

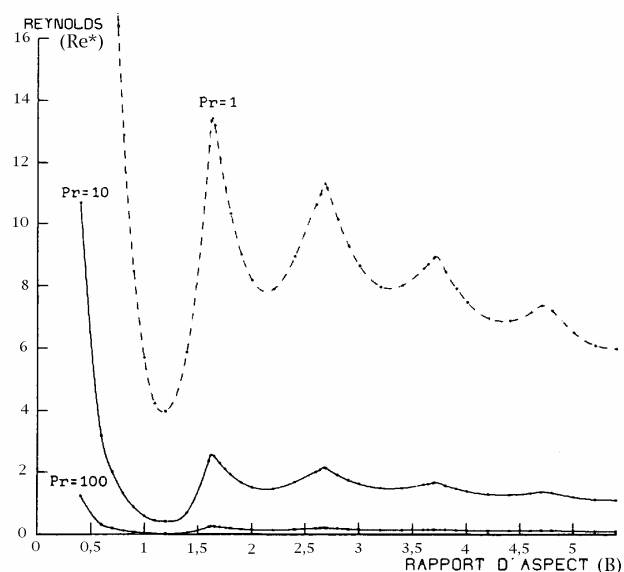


Figure III-12 : Nombre de Reynolds critique en fonction du rapport de forme B, pour $Pr=1, 10, 100$ (tiré de Luijkx (1983)).

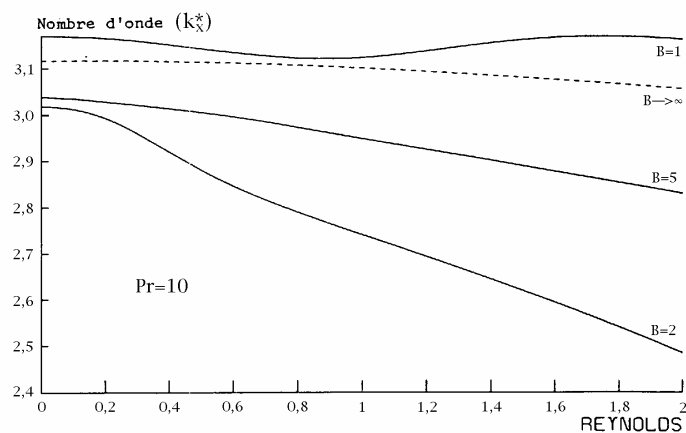


Figure III-13 : Nombre d'onde critique k_x^* pour les $R_{\perp}$ 3D, en fonction de Re , pour $B=1, 2, 5$ et ∞ , à $Pr=10$ (tiré de Luijkx (1983)).

la vitesse de défilement des structures convectives en présence de parois verticales ($B=1, 2$ et 5) est supérieure à celle qu'auraient ces structures dans une couche infinie ($B=\infty$). Donc, les parois ont pour effet d'accélérer les $R_{\perp}$ 3D au voisinage du point critique. On notera aussi que pour $B=2$, la théorie linéaire prévoit que les $R_{\perp}$ 3D se propagent à une vitesse de plus de 60% supérieure à la vitesse moyenne de l'écoulement, c'est à dire plus rapidement que la vitesse maximum dans le profil de Poiseuille 3D.

La figure III-15 donne $(Vr/U^0)^*$ en fonction de B , pour $Pr=1, 10, 100$ et 1000 lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement est égal à $Re^*(B, Pr)$. Le segment correspondant à $Pr \approx 6,4$ est dessiné "à la main" et permet d'évaluer que $(Vr/U^0)^* \approx 1,5$ pour $B=3,63$.

Pour terminer, on donne au tableau III-5 des valeurs numériques des paramètres critiques k_x^* et $(Vr/U^0)^*$ au point $(Ra_{//}^*, Re^*)$. Ces valeurs sont données pour $0,5 < Pr < 453$ et $B=2, 3,64$ et $5,2$. On rappelle que les expériences de Ouazzani sont réalisées à $Pr=6,4$ avec une conduite d'extension latérale $B=3,63$.

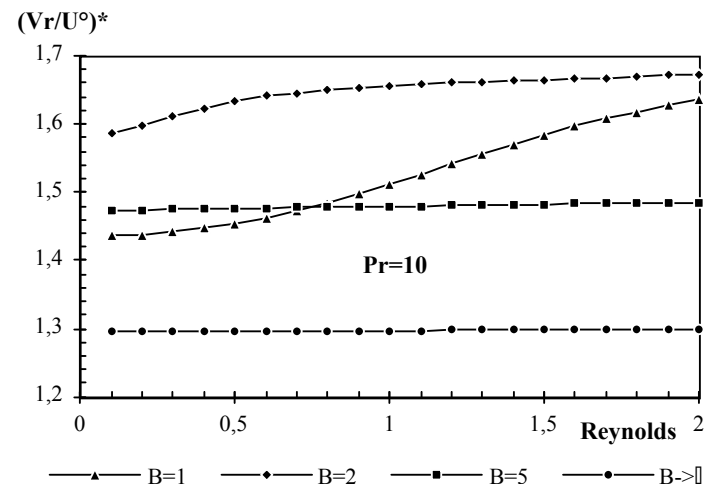


Figure III-14 : Rapport entre la vitesse de propagation des $R_{\perp}$ 3D au point critique et la vitesse moyenne de l'écoulement, en fonction de Re , pour $B=1, 2, 5$ et ∞ , à $Pr=10$.

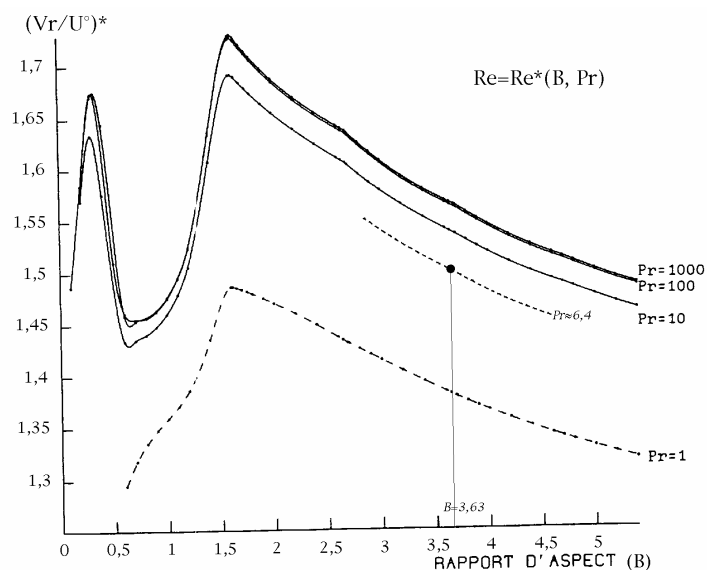


Figure III-15 : $(Vr/U^\circ)^*$ en fonction de B , à différents nombres de Prandtl et pour $Re=Re^*(B, Pr)$ (tiré de Luijkx (1983)).

Pr	B=2 ($Ra_{//}^*=2013,24$)			B=3,64 ($Ra_{//}^*=1848,87$)			B=5,2 ($Ra_{//}^*=1770,05$)		
	Re^*	k_x^*	$(Vr/U^\circ)^*$	Re^*	k_x^*	$(Vr/U^\circ)^*$	Re^*	k_x^*	$(Vr/U^\circ)^*$
0,5	10,48	2,740	1,3704				7,94	3,011	1,2452
0,7							6,74	2,997	1,2858
1	6,98	2,737	1,4728	8,7346	2,948	1,3806	5,66	2,985	1,3937
5	2,26	2,692	1,6302				1,924	2,954	1,4498
7	1,67	2,691	1,6467			$\sim 1,5$			
10	1,096	2,693	1,6598	1,631	2,891	1,5375	1,018	2,953	1,4724
100	0,1231	2,7	1,6892	0,1672	2,891	1,5627	0,1039	2,955	1,4949
453	0,0272	2,701	1,6918	0,037	2,891	1,5650	0,0229	2,956	1,4969

Tableau III-5 : valeurs numériques des paramètres critiques Re^* , k_x^* et $(Vr/U^\circ)^*$ pour $0,5 < Pr < 453$ et $B=2, 3,64$ et $5,2$ (tiré de Luijkx (1983)).

2 La thèse de Müller (1990) : analyse de l'instabilité convective

Le travail de Müller consiste principalement en l'analyse des instabilités convective et absolue, dans l'écoulement de Poiseuille-Bénard 2D, à partir d'un modèle utilisant une équation d'amplitude: l'équation de Ginzburg-Landau. Avant d'exposer les principaux résultats de cette analyse au §2.3, nous présentons de manière générale les concepts d'instabilités convective et absolue au §2.1, et la théorie des équations d'amplitude, ainsi que l'équation de Ginzburg-Landau, au §2.2.

2.1 Instabilité convective et instabilité absolue: définitions et généralités

Nous venons de voir, au §1 précédent, que la stabilité linéaire étudie la *croissance temporelle* de perturbations infinitésimales. Un écoulement est linéairement stable si, quelle que soit la perturbation infinitésimale auquel il est soumis, l'amplitude de cette perturbation décroît dans le temps. Il est linéairement instable s'il existe au moins une perturbation dont l'amplitude croît dans le temps. Ce critère est suffisant pour déterminer l'*instabilité absolue* des écoulements dans le cas des systèmes fermés, c'est-à-dire les systèmes dans lesquels aucun fluide n'entre ou ne sort (les écoulements de Rayleigh-Bénard ou de Taylor-Couette par exemple). Il est insuffisant dans le cas des systèmes ouverts avec un écoulement moyen non nul (par exemple, les écoulements de Poiseuille, de Poiseuille-Bénard et les écoulements cisailés des couches de mélange). Dans ce cas, la *croissance spatiale* des perturbations doit être prise en compte, et la notion d'*instabilité convective* apparaît.

Ces concepts d'instabilités convective et absolue ont été définis dans le cadre de la physique des plasmas par Briggs (1964) et Bers (1983). Huerre et Monkewitz (1985) sont parmi les premiers à avoir introduit ces notions pour l'étude des instabilités hydrodynamiques (dans le cas des écoulements de couche de mélange précisément). On trouvera la formulation mathématique générale de ces concepts, ainsi que la définition des critères de transition entre les zones de stabilité, d'instabilité convective

et d'instabilité absolue¹, dans Huerre et Monkewitz (1990).

Le principe de base qui permet de définir l'instabilité absolue ou l'instabilité convective consiste à étudier la réponse de l'écoulement lorsqu'on le soumet à une perturbation impulsionnelle unique. Sans perdre en généralité, ceci est représenté schématiquement à la figure III-16, dans le plan (Ra-Re), dans le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard 2D. Plus précisément, ce graphe donne les "transitions absolue et convective" entre l'écoulement de Poiseuille et les $R_{\perp}$. Nous verrons au §2.3.1 comment ce diagramme de stabilité a été établi par Müller (1990). A la figure III-16, on étudie donc les évolutions spatio-temporelles possibles d'une perturbation impulsionnelle, localisée en $x=x_0$ à l'instant $t=t_0$, dans les cas de stabilité, d'instabilité convective et d'instabilité absolue.

- Sous la courbe de stabilité linéaire, pour $Ra < Ra_{\perp}^*(Re)$, l'écoulement est *linéairement stable*: l'amplitude de la perturbation tend à s'annuler partout dans la conduite pour des temps suffisamment longs.

- Pour $Ra > Ra_{\perp}^*(Re)$, l'écoulement est linéairement instable. Il est *convectivement instable* pour $Ra_{\perp}^*(Re) < Ra < Ra_{\perp}^{conv}(Re)$: quel que soit t , les fronts amont et aval de la perturbation se propagent tous les deux dans le sens de l'écoulement moyen, dirigé ici selon les x croissants. Il existe un système de référence en mouvement, attaché au déplacement de la perturbation, dans lequel l'amplitude de cette dernière ne cesse de croître dans le temps. Par contre, pour des temps suffisamment longs, l'amplitude de la perturbation décroît pour tout x . La perturbation est évacuée de la conduite et l'écoulement retourne à sa position d'équilibre.

- Pour $Ra > Ra_{\perp}^{conv}(Re)$, l'écoulement est absolument instable: les fronts de la perturbation se propagent vers l'amont et vers l'aval. A cause des non-linéarités, l'amplitude croît jusqu'à saturation en toute position x de la conduite, lorsque t tend vers l'infini.

¹ Nous portons l'attention sur le fait que, dans le cas où l'écoulement de base n'est pas parallèle mais évolue lentement spatialement (couches de mélange, jets, couches limites de plaques planes, écoulement de Poiseuille-Bénard avec gradient horizontal de température), des concepts d'instabilités *locales* et *globales* ont été ajoutés à ceux d'instabilités convectives et absolues. En effet, pour ces écoulements, un profil de vitesse *localement absolument instable* ne signifie pas forcément que le champ de vitesse dans son ensemble est *globalement absolument instable*. Dans notre étude, l'écoulement de base étant un écoulement parallèle (l'écoulement de Poiseuille purement conducteur), nous n'en dirons pas plus ici; pour en savoir davantage, nous renvoyons à Chomaz et al. (1988) et à Huerre et Monkewitz (1990).

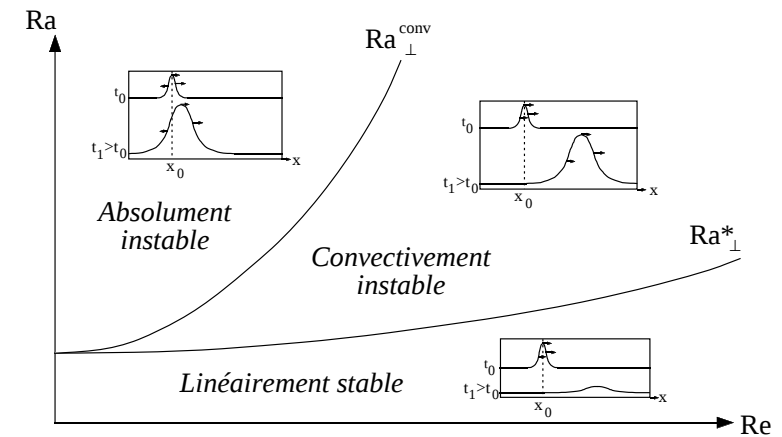


Figure III-16 : Évolution spatiale et temporelle d'une perturbation impulsionnelle dans le cas d'écoulements linéairement stables et convectivement et absolument instables; nombres de Rayleigh critiques pour les $R_{\perp}$ entre les différentes zones d'instabilité.

Des propriétés très différentes sont attachées aux écoulements absolument et convectivement instables. Dans le premier cas, une perturbation unique suffit à produire asymptotiquement une structure cohérente (l'apparition des $R_{\perp}$ par exemple). Seules certaines fréquences, les modes "naturels" de l'écoulement, sont amplifiées. Les écoulements absolument instables sont très peu sensibles à un forçage extérieur. Dans le cas où l'écoulement de Poiseuille-Bénard prend la forme de $R_{\perp}$, Müller et al. (1992a-b) montre numériquement que les modes naturellement amplifiés sont très peu perturbés par la présence d'un bruit blanc à l'entrée.

Dans le cas des écoulements convectivement instables, une perturbation unique ne suffit pas pour déstabiliser l'écoulement de base. Pour voir apparaître un motif convectif, il faut perturber en permanence l'écoulement. Par exemple, le bruit inhérent aux manipulations expérimentales peut parfois être suffisant. Les écoulements convectivement instables sont très sensibles à un forçage extérieur car ce sont des amplificateurs de bruit. A priori, n'importe quel mode de la perturbation est susceptible d'être amplifié. L'écoulement résultant du forçage peut être vu comme la somme d'ondes de différentes fréquences, spatialement amplifiées et évoluant dans le sens de

l'écoulement. *Chomaz et al. (1988)* expliquent que pour ces écoulements le spectre de fréquence est en général un "spectre-bande" car les phénomènes d'auto-entretien des oscillations ou de résonance n'y sont pas possibles. L'étude de *Deissler (1987a)* montre aussi ce résultat. Il utilise une équation de Ginzburg-Landau comme modèle d'écoulement convectivement instable. Il superpose à l'écoulement entrant un bruit blanc à spectre uniformément réparti pour étudier le processus de sélection des différents modes selon la direction de l'écoulement moyen. Dans la zone d'entrée, lors de la phase d'amplification linéaire, quasiment une seule fréquence est amplifiée: le spectre est très étroit. Mais plus loin en aval, après amplification non-linéaire et saturation, l'écoulement parfaitement établi montre effectivement un spectre large.

Cependant, dès qu'un écoulement convectivement instable subit un forçage extérieur cohérent, des fréquences particulières sont amplifiées. Ce phénomène a principalement été étudié dans le cas des couches de mélange, et plus généralement dans le cas du développement des instabilités de type Kelvin-Helmholtz. Expérimentalement, des phénomènes de résonance sont observés lorsqu'on introduit un petit obstacle dans la région de développement de telles instabilités (cf. *Chomaz et al. (1988)*). Lors de simulations numériques directes de couches de mélanges en écoulements compressibles, *Astruc (1993)* montre que des fréquences particulières sont sélectionnées en fonction de la nature des conditions aux limites de sortie. De plus, il apparaît que ces fréquences varient avec la longueur du domaine de calcul. Les simulations numériques de *Buell et Huerre (1988)* montrent aussi ce phénomène dans le cas incompressible. Dans ces trois exemples, le mécanisme de sélection de la fréquence de l'instabilité est expliqué par un effet de "feedback" (de bouclage) aéro ou hydro-acoustique: l'interaction des structures tourbillonnaires avec l'obstacle ou avec les conditions aux limites de sortie provoquent des fluctuations globales de pression qui se répercutent jusqu'à l'entrée (ou qui sont transmises instantanément dans le cas incompressible). Ces fluctuations sont converties en ondes d'instabilité hydrodynamiques par les conditions aux limites d'entrée. On obtient des oscillations auto-entretenues avec amplification de modes particuliers.

2.2 A propos des équations d'amplitude et de l'équation de Ginzburg-Landau

Les équations qui décrivent les systèmes physiques peuvent être très compliquées et difficiles à étudier (l'équation de Navier-Stokes par exemple). Alors, on fait parfois des approximations pour pouvoir les réduire à un jeu d'équations simplifiées, en espérant que celui-ci conserve les propriétés essentielles du phénomène que l'on souhaite étudier. De manière générale, les équations d'amplitude constituent de telles équations réduites. Ce sont des équations *monodimensionnelles* qui traduisent la dynamique *faiblement non-linéaire* des systèmes physiques. C'est-à-dire que ce sont des modèles simples qui permettent d'étudier l'évolution non-linéaire d'une instabilité au voisinage du point de bifurcation déterminé par la stabilité linéaire.

Au §1, lors de l'étude de la stabilité linéaire, nous avons vu qu'au seuil de l'instabilité supercritique, une perturbation infinitésimale de l'état de base d'un système physique bidimensionnel, décrit dans le plan (x, z) , confiné dans la direction z , pouvait s'écrire: $\varphi(x, z, t) = \hat{\varphi}(z) e^{i(k_x x + \sigma_1 t)} + \text{c.c.}$ (où $\varphi = u, w$ ou T et où "c.c." désigne le complexe conjugué). Au delà du seuil, mais dans son voisinage, l'influence des non-linéarités reste faible. Les variations temporelles et éventuellement spatiales des variables $\varphi(x, z, t)$ sont lentes. Les solutions du problème faiblement non-linéaire peuvent donc être recherchées sous la forme:

$$\varphi(x, z, t) = A(x, t) \hat{\varphi}(z) e^{i(k_x x + \sigma_1 t)} + \text{c.c.} \quad (\text{III} - 40)$$

où $A(x, t)$ désigne une amplitude lentement modulée en espace et en temps et où $\hat{\varphi}(z)$ est la fonction propre, associée à la valeur propre du mode le plus instable, déterminée par la théorie linéaire. Les équations d'amplitude se proposent précisément de décrire les modulations spatio-temporelles de $A(x, t)$.

Lorsqu'on étudie la stabilité d'un système physique, l'ensemble de tous les modes de perturbations doit être pris en compte. Or, dans le voisinage de la stabilité marginale, certains modes sont stables et doivent être amortis rapidement, alors que les modes presque marginaux évoluent très lentement. En fait, sur des temps longs, les amplitudes des modes stables sont asservies non linéairement à l'évolution des amplitudes des modes presque marginaux. Pour cela, les modes stables sont appelés les "modes esclaves". Alors, très schématiquement, le principe de base que l'on utilise pour établir une équation d'amplitude consiste à éliminer l'amplitude des modes esclaves dans les termes non-linéaires des équations complètes, pour ne décrire que l'évolution

non-linéaire de l'amplitude des modes presque marginaux. Le développement en fonction d'un petit paramètre¹ des différents termes de l'équation ainsi obtenue, et la prise en compte des symétries du problème permettent ensuite de déterminer la forme finale de l'équation d'amplitude. On trouvera la description complète de la méthode dans *Thual (1987)* ou dans *Barthelet (1995)*. *Newel et al. (1993)* proposent, quant à eux, une revue complète des différentes équations d'amplitude et de leur champ d'application.

La forme des équations d'amplitude ne dépend que de la classe d'instabilité considérée. Elles peuvent être classées en terme de fréquence et de nombre d'onde caractéristiques de l'instabilité. Le caractère spécifique de chaque système physique n'intervient que dans les valeurs des coefficients des différents termes des équations d'amplitude.

L'équation de Ginzburg-Landau est un type d'équation d'amplitude. Sa forme la plus générale est une équation complexe aux dérivées partielles, fonction de x et de t , qui s'écrit:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + v_g \frac{\partial A}{\partial x} = aA + b \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - c|A|^2 A \quad (\text{III} - 41)$$

Dans le cas général, l'amplitude $A=A(x, t)$ est une fonction complexe et a , b et c sont des coefficients complexes, où la partie réelle de b est positive. $v_g=(\partial\sigma_i/\partial k_x)^*$ est la vitesse de groupe du mode le plus instable au point de bifurcation déterminé par la stabilité linéaire.

Dans l'équation de Ginzburg-Landau, le terme en dérivée seconde de x permet de traduire, par exemple, la modulation de l'amplitude causée par l'influence des conditions aux limites dans le système étudié. Le terme cubique non-linéaire permet quant à lui de prendre en compte la saturation de l'amplitude. Ainsi, l'équation (III-41) est un modèle très simple qui apparaît dans de nombreuses analyses de la dynamique faiblement non-linéaire des systèmes fluides. Elle a permis, par exemple, l'étude de la convection de Rayleigh-Bénard (*Newel et Whitehead (1969)*, *Cross (1980)*), des écoulements de Taylor-Couette (*Kogelman et DiPrima (1970)*), de l'écoulement de Poiseuille (*Stewartson et Stuart (1971)*), de la convection oscillante dans les fluides

¹ Le petit paramètre est en général une puissance de l'écart du paramètre de contrôle de l'écoulement à sa valeur critique au seuil: par exemple $(Ra-Ra^*)^k$ ou $(Re-Re^*)^k$, où $k=cste$.

binaires (*Cross (1986a, 1988)*, *Schöpf et Rehberg (1994)*), du problème de Taylor-Couette avec écoulement axial (*Babcock et al. (1994)*, *Büchel et al. (1996)*), et du problème de Poiseuille-Bénard (*Müller et al. (1989, 1992a)*). Pour une revue plus complète des travaux qui ont traité tel ou tel écoulement, nous renvoyons le lecteur à la bibliographie de *Huerre et Monkewitz (1990)* et de *Newel et al. (1993)*.

On notera que dans de nombreux cas, l'équation de Ginzburg-Landau est étudiée pour elle-même: elle est utilisée uniquement comme un modèle théorique permettant d'identifier les possibles mécanismes de transition dans un système physique. Par exemple, les travaux de *Deissler (1987a, 1987b, 1989)* montrent la très grande richesse des phénomènes qu'elle peut décrire dans le cas de systèmes ouverts ($v_g \neq 0$ dans III-41) que l'on perturbe par un bruit blanc. *Huerre et Monkewitz (1990)* signalent que l'équation de Ginzburg-Landau linéarisée (sans le terme cubique) est le modèle le plus simple permettant de donner naissance à des instabilités absolues et convectives.

2.3 Instabilité convective et instabilité absolue des $R_\perp$: les résultats de la thèse de Müller

Dans sa thèse, *Müller (1990)* étudie la stabilité et le développement des $R_\perp$ dans l'écoulement de Poiseuille-Bénard bidimensionnel, à l'aide de l'équation de Ginzburg-Landau. Celle-ci est dérivée rigoureusement en partant des équations de conservation complètes, i.e. les coefficients de l'équation (III-41) sont calculés explicitement pour le problème en question (voir aussi *Müller et al. (1992a)*). Parallèlement, afin de valider et de comparer avec son modèle monodimensionnel, Müller effectue des simulations numériques directes 2D. Quatre types de conditions aux limites sont testés: (i) des conditions périodiques, (ii) des conditions de Dirichlet imposant un profil de Poiseuille purement conducteur à l'entrée et à la sortie du domaine de calcul, (iii) la même condition que (ii) avec superposition d'un bruit blanc à l'entrée, et (iv) des conditions de Neumann imposant la phase des $R_\perp$ aux extrémités du domaine. Le code employé est basé sur un schéma explicite en différences finies.

Tous les résultats sont obtenus pour $Pr=1$, $Re<7$, et un nombre de Rayleigh ne dépassant jamais 2500 afin de rester dans le domaine faiblement non-linéaire. Les résultats de la thèse sont publiés dans leur quasi intégralité dans *Müller et al. (1992a)*. L'article de *Müller et al. (1989)* résume plus particulièrement les résultats obtenus à

partir de l'équation d'amplitude et Müller *et al.* (1992b) insiste davantage sur les simulations numériques directes 2D. Müller calculera les coefficients de son équation-modèle pour $Pr=6,4$ afin de permettre à Ouazzani (1991) et Ouazzani *et al.* (1995) de faire quelques comparaisons entre la théorie et les expériences d'anémométrie laser-Doppler. Nous donnons ces coefficients un peu plus loin.

2.3.1 Calcul de la courbe de transition $Ra_{\perp}^{conv}$ entre les régions d'instabilités convective et absolue

La première étape du travail de Müller a consisté à reprendre l'analyse de stabilité linéaire effectuée par Luijckx (1983) pour le problème 2D (cf. §1.1) afin de connaître les caractéristiques de l'instabilité au seuil de la transition: k_x^* , σ_i^* , v_g , et $Ra_{\perp}^*$ (au lieu de $Ra_{\perp}^*$, Müller utilise l'écart relatif au seuil à $Re=0$ défini par: $\varepsilon_{\perp}^*=Ra_{\perp}^*/1708-1$). Ces grandeurs sont fonction de Re et de Pr . Müller (1990) et Müller *et al.* (1992a) calculent pour chacune d'elles une expression analytique obtenue à partir de développements en fonction de Re (Re restant petit). Ci-dessous, nous donnons les expressions obtenues à $Pr=6,4$:

$$k_x^* = 3,116 - 8,325 \times 10^{-3} Re^2 + O(Re^4) \quad (III - 42)$$

$$\sigma_i^* = 25,632 Re + O(Re^3) \quad (III - 43)$$

$$v_g = 8,299 Re + O(Re^3) \quad (III - 44)$$

$$\varepsilon_{\perp}^* = 1,091 \times 10^{-2} Re^2 + O(Re^4) \quad (III - 45)$$

$$Ra_{\perp}^* = 1707,76 + 18,63 Re^2 + O(Re^4) \quad (III - 46)$$

La forme de l'équation de Ginzburg-Landau établie par Müller est la suivante:

$$\tau_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial x} \right) A = \left[\mu (1 + ic_0) + \xi_0^2 (1 + ic_1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \gamma (1 + ic_2) \right] |A|^2 A \quad (III - 47)$$

Cette expression résulte du développement des équations de conservation autour du point critique, en fonction du petit paramètre $\sqrt{\mu}$, où

$$\mu = \frac{Ra - Ra_{\perp}^*(Re)}{Ra_{\perp}^*(Re)} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{\perp}^*(Re)}{1 + \varepsilon_{\perp}^*(Re)} \quad (III - 48)$$

est la distance réduite entre le nombre de Rayleigh courant et le nombre de Rayleigh critique au seuil $Ra_{\perp}^*(Re)$. v_g est la vitesse de groupe dont l'expression est donnée par (III-44). Les autres coefficients de (III-47) sont fonction de Pr et de Re . τ_0 , ξ_0^2 et γ peuvent s'écrire par des développements en fonctions paires de Re , et c_0 , c_1 et c_2 par des développements en fonctions impaires de Re . En première approximation, pour Re petit, les termes en Re^2 (respectivement en Re^3) peuvent être négligés par rapport aux termes constants (respectivement en Re). Pour $Pr=6,4$, ces coefficients sont:

$$\begin{cases} \tau_0 &= 0,05496 + O(Re^2) \\ \xi_0^2 &= 0,148 + O(Re^2) \\ \gamma &= 0,699 + O(Re^2) \\ c_0 &= 0,0183 Re + O(Re^3) \\ c_1 &= 0,0199 Re + O(Re^3) \\ c_2 &= -0,0066 Re + O(Re^3) \end{cases} \quad (III - 49)$$

Les critères d'instabilités convective et absolue pour des perturbations prenant la forme de $R_{\perp}$, dans l'écoulement de Poiseuille-Bénard 2D, se traduisent de la façon suivante (cf. Deissler (1987)):

- l'écoulement est stable pour $\mu < 0$,
- absolument instable pour $\mu > \mu_{\perp}^{conv} = \frac{v_g^2 \tau_0^2}{4 \xi_0^2 (1 + c_1^2)}$,
- et convectivement instable pour $0 < \mu < \mu_{\perp}^{conv} = \frac{v_g^2 \tau_0^2}{4 \xi_0^2 (1 + c_1^2)}$.

La frontière entre les régions absolument et convectivement instables est donc définie par $\mu = \mu_{\perp}^{conv}$, ou encore par $\varepsilon = \varepsilon_{\perp}^{conv}$ avec $\varepsilon_{\perp}^{conv} = \varepsilon_{\perp}^* + (1 + \varepsilon_{\perp}^*) \mu_{\perp}^{conv}$. Les expressions de $\varepsilon_{\perp}^{conv}$ et de $Ra_{\perp}^{conv} = 1708 + 1708 \varepsilon_{\perp}^{conv}$, pour $Pr=6,4$, sont donc les suivantes:

$$\varepsilon_{\perp}^{conv} = 36,248 \times 10^{-2} Re^2 + O(Re^4) \quad (III - 50)$$

$$Ra_{\perp}^{conv} = 1707,76 + 619,03 Re^2 + O(Re^4) \quad (III - 51)$$

Elles peuvent être comparées aux expressions (III-45) et (III-46) donnant les courbes de transition entre stabilité linéaire et instabilité convective. La figure III-17 montre clairement la différence de variation avec Re des courbes $\varepsilon_{\perp}^*$ et $\varepsilon_{\perp}^{conv}$.

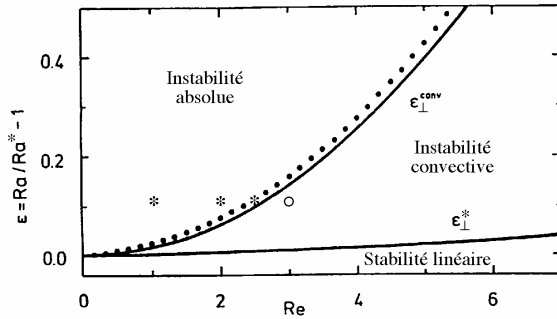


Figure III-17 : Comparaison entre les courbes $\varepsilon_{\perp}^*$ et $\varepsilon_{\perp}^{conv}$, à $Pr=1$
(tiré de Müller (1990)).

2.3.2 Nombre de Nusselt, amplitude de saturation et vitesse de phase des $R_{\perp}$

A partir de l'équation d'amplitude, Müller (1990) et Müller et al. (1992a) obtiennent l'expression suivante pour le nombre de Nusselt moyen en espace et en temps:

$$\langle Nu \rangle = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{\mu}{1+\mu} = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{Ra - Ra_{\perp}^*}{Ra} \quad (III-52)$$

$$\text{avec } \frac{1}{\gamma} = 1,4306 + O(Re^2) \quad \text{à } Pr = 6,4$$

On constate que $\langle Nu \rangle$ ne dépend de Re que par l'intermédiaire de γ et de $Ra_{\perp}^*$. $\langle Nu \rangle$ varie donc très peu en fonction de Re , lorsque Re est petit. Müller confirme ce résultat par des simulations numériques directes utilisant des conditions aux limites périodiques. Une légère déviation entre simulation et théorie est cependant observée sur $Nu=f(\mu)$, lorsque $\mu > 0,25$.

La solution générale du problème faiblement non-linéaire est donnée par (III-40). Dans le cas où $\varphi=w$, l'amplitude de saturation W_s de la composante verticale de la vitesse est obtenue à mi-hauteur du canal (en $z=0,5$), pour x suffisamment éloigné de l'influence des conditions d'entrée et de sortie, dans l'écoulement de $R_{\perp}$ pleinement établi. Müller (1990) montre que cette amplitude est donnée, sous forme dimensionnelle, par:

$$W_s = 2 \frac{\alpha}{h} \hat{w}(z=0,5) \sqrt{1 - \frac{\xi_0^2 q^2}{\mu}} \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}} \quad (III-53)$$

où α et h sont respectivement la diffusivité thermique du fluide et la hauteur de la conduite. $\hat{w}(z=0,5)$ est la valeur maximale de la fonction propre $\hat{w}(z)$ obtenue par l'analyse de stabilité linéaire 2D (cf. chapitre III, §1.1, équation (III-21)). Cette valeur n'est pas donnée explicitement par Müller, mais on peut la déterminer graphiquement à partir de certaines figures. On trouve: $\hat{w}(z=0,5)=5,04 \pm 0,04$. Enfin, $q=k_x - k_x^*$ est la différence entre le nombre d'ondes de l'écoulement pour Ra et Re fixés, et le nombre d'ondes critique. Or, Müller montre que $(1 - \xi_0^2 q^2 / \mu)^{1/2} \approx 1$, car la solution obtenue à partir de l'équation de Ginzburg-Landau est telle que k_x est toujours très proche de k_x^* .

Une caractéristique importante de l'écoulement est le rapport entre la vitesse de phase des $R_{\perp}$, $V_r = \sigma_i / k_x$, et la vitesse moyenne de l'écoulement dans la direction axiale U^0 . Müller (1990) et Müller et al. (1992a) montrent que:

$$\frac{V_r}{U^0} = \frac{\sigma_i^* + v_g q + \xi_0^2 q^2 (c_1 - c_2) / \tau_0 - \mu (c_0 - c_2) / \tau_0}{(k_x^* + q) Pr Re} \quad (III-54)$$

Nous avons vu que σ_i^* , v_g , c_0 , c_1 et c_2 sont proportionnels à Re à l'ordre le plus bas. Donc, si on néglige dans ces termes les corrections d'ordre supérieur en Re , Re n'apparaît plus explicitement dans (III-54). Comme près du seuil $k_x \approx k_x^*$, et donc $q \approx 0$, on obtient pour $Pr=6,4$:

$$\frac{V_r}{U^0} = 1,285 - 0,0227 \mu = 1,308 - 0,0227 \frac{Ra}{Ra_{\perp}^*(Re)} \quad (III-55)$$

L'équation (III-54) permet donc de montrer théoriquement que la vitesse de propagation des $R_{\perp}$ décroît linéairement avec Ra , pour Re fixé. Mais si Re reste suffisamment petit, on a $Ra_{\perp}^*(Re) \approx 1708$, et l'expression (III-55) devient indépendante de Re :

$$\frac{V_r}{U^0} \approx 1,308 - 1,329 \times 10^{-5} Ra \quad (III-56)$$

Par des simulations numériques utilisant des conditions aux limites périodiques, Müller vérifie que V_r/U^0 ne dépend pas de Re pour $1,67 < Re < 6,67$, à $Pr=1$.

2.3.3 Enveloppes de la composante de vitesse verticale maximale et longueurs d'établissement

La figure III-18 permet de comprendre le développement spatial des $R_{\perp}$. Elle montre l'évolution axiale de la composante verticale de la vitesse $w(x, z=0,5)$, pour trois valeurs de Re , à Ra et à t fixés. Le signal sinusoïdal est obtenu à partir de simulations numériques dans un canal d'allongement $A=L/h=25$, en imposant un profil de Poiseuille purement conductif à l'entrée et à la sortie du domaine de calcul. L'enveloppe stationnaire qui entoure ce signal est la solution de l'équation de Ginzburg-Landau résolue avec $A(x=0, t)=A(x=25, t)=0$ pour conditions aux limites. Elle donne l'évolution de la composante verticale maximale de la vitesse en fonction de x . Nous appellerons $W_{\max}(x)$ la fonction traduisant l'évolution de cette enveloppe.

A partir de l'entrée, $W_{\max}$ croît avec x jusqu'au seuil de saturation W_s , sur une distance qui augmente avec Re . Comme cela a déjà été observé expérimentalement par *Luijckx et al. (1981)* et numériquement par *Evans et Greif (1989)*, les $R_{\perp}$ sont poussés de plus en plus vers l'aval du canal lorsque le débit augmente, ou lorsque Ra diminue (non montré ici). On définit alors une longueur d'établissement l_e pour les $R_{\perp}$, telle que:

$$W_{\max}(l_e) = W_s / 2 \quad (\text{III} - 57)$$

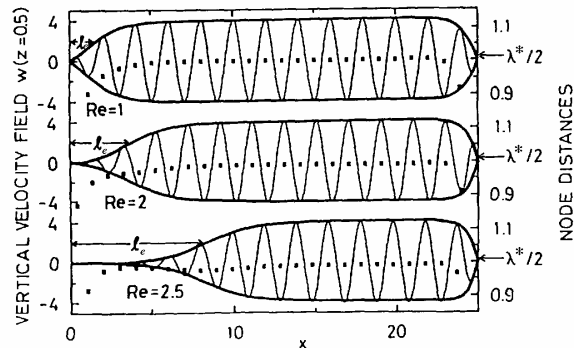


Figure III-18 : Évolution spatiale de la composante verticale de la vitesse en $z=0,5$, à $Pr=1$, $\varepsilon=0,114$ et pour trois valeurs de Re telles que les écoulements soient absolument instables; comparaison entre les signaux sinusoïdaux obtenus par les simulations 2D et l'enveloppe obtenue par l'équation d'amplitude. Les carrés donnent la valeur de la demi-longueur d'onde des $R_{\perp}$ sur l'axe des ordonnées à droite (tiré de Müller (1990)).

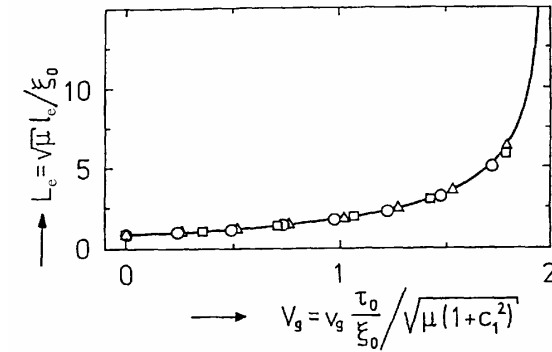


Figure III-19 : Longueur d'établissement réduite en fonction de la vitesse de groupe réduite. Trait plein: résultat de l'équation de Ginzburg-Landau. Symboles: résultats des simulations numériques 2D (cercles: $\varepsilon=0,114$, $Re \leq 2,5$; carrés: $\varepsilon=0,215$, $Re \leq 3,4$; triangles: $\varepsilon=0,417$, $Re \leq 4$) (tiré de Müller (1990)).

Celle-ci est représentée par des double-flèches à la figure III-18. Notez que les trois simulations de cette figure ont lieu dans la région absolument instable (elles sont représentées par les trois étoiles (*) dans le plan (ε, Re) de la figure III-17). Ainsi, **la longueur d'établissement augmente lorsqu'on se rapproche de la région convectivement instable, et elle diverge pour $\varepsilon=\varepsilon_{\perp}^{conv}$.**

La figure III-19 compare l'évolution de l_e en fonction de la vitesse de groupe v_g , calculée avec l'équation de Ginzburg-Landau (trait plein) et avec les simulations numériques (symboles). Plus précisément, Müller trace $L_e = f(V_g)$, où $L_e = \sqrt{\mu} l_e / \xi_0$ est la longueur d'établissement réduite et où $V_g = v_g \tau_0 / (\mu \xi_0^2 (1 + c_1^2))^{1/2}$ est la vitesse de groupe réduite. Ce choix particulier des grandeurs de réduction permet d'unifier toutes les courbes $l_e = f(v_g)$, à condition que Ra et Re restent suffisamment petits. Müller démontre à partir de l'équation d'amplitude que la courbe $L_e = f(V_g)$ est universelle, dans le sens où elle est valable quel que soit le nombre de Prandtl. La figure III-19 montre que la divergence de l_e , i.e. la courbe $\varepsilon=\varepsilon_{\perp}^{conv}$, correspond à $V_g=2$. Près de $V_g=2$, L_e croît très vite. Cela est mis en évidence à la figure III-17: la courbe en pointillés qui représente $l_e=10$ est très proche de la courbe $\varepsilon=\varepsilon_{\perp}^{conv}$ pour laquelle $l_e \rightarrow \infty$.

2.3.4 Influence d'un bruit blanc à l'entrée de la conduite

Comme les conditions aux limites utilisées dans les simulations de la figure III-18 empêchent l'entrée de toute perturbation dans le domaine de calcul, la formation des $R_{\perp}$ n'est plus possible dès que l'on pénètre dans la région d'instabilité convective (cf. §2.1). Ainsi, bien que l'écoulement soit linéairement instable, aucune structure convective ne se forme pour $\varepsilon_{\perp}^* < \varepsilon_{\perp}^{\text{conv}}$. Pour étudier l'influence des perturbations dans cette région, Müller superpose aux conditions d'entrée, dans le modèle théorique 1D et dans le modèle numérique 2D, un champ fluctuant de vitesse verticale, en utilisant une suite de nombres aléatoires non-corrélés de moyenne nulle. Pour ε et Re fixés, trois simulations sont effectuées, telles que l'amplitude de ce bruit blanc à l'entrée soit égale à 1%, 10% et 100% de l'amplitude de saturation W_s de l'écoulement aval. Dans le cas où (ε, Re) se situe dans la région absolument instable, Müller montre avec les simulations numériques que l'écoulement est à peine perturbé par le bruit: seules, des petites variations dans l'enveloppe en reflètent la présence, sur une courte distance à l'entrée de la conduite. Plus loin en aval, les $R_{\perp}$ se comportent comme dans le cas non perturbé.

Par contre, lorsqu'on se trouve dans la région convectivement instable, la réponse de l'écoulement est très différente. La figure III-20 donne le résultat des simulations numériques pour $(\varepsilon, Re) = (0,114, 3)$ (représenté par un cercle à la figure III-17). Elle montre l'évolution axiale de $w(x, z=0,5)$ pour les trois intensités de bruit à l'entrée. Après une phase d'amplification linéaire (cf. *Deissler (1987)* et §2.1) pendant laquelle seuls certains modes sont sélectionnés, la phase d'amplification non-linéaire permet la formation de $R_{\perp}$ qui se propagent vers l'aval. Cependant, Müller observe que les enveloppes $W_{\text{max}}(x)$ des $R_{\perp}$ ne sont plus stationnaires mais fluctuent légèrement autour d'un profil moyen. La moyenne temporelle de l_c décroît de manière monotone avec l'intensité du bruit. Si ce dernier est stoppé, i.e. si la source des perturbations est arrêtée, les cellules convectives meurent: elles sont évacuées du domaine de calcul.

L'équation d'amplitude traduit la même dynamique pour les écoulements soumis à un bruit blanc. Dans la région près de l'entrée, dans la phase d'amplification linéaire, l'équation de Ginzburg-Landau linéarisée permet de démontrer que l'amplitude du mode le plus amplifié est égale à $A_0 e^{\kappa x}$, où A_0 est l'amplitude du bruit blanc à l'entrée, et où κ est une constante pour Ra et Re fixés. On retrouve ce résultat avec les simulations numériques de la figure III-20: la ligne droite en pointillés relie les positions axiales où la vitesse verticale a la même (petite) amplitude, résultant d'un bruit dont l'intensité A_0 croît linéairement sur une échelle logarithmique lorsqu'on passe du graphe (a) au graphe (c). Pour simplifier, on peut dire que la longueur de la zone d'amplification linéaire décroît linéairement en fonction de $\text{Log}(A_0)$.

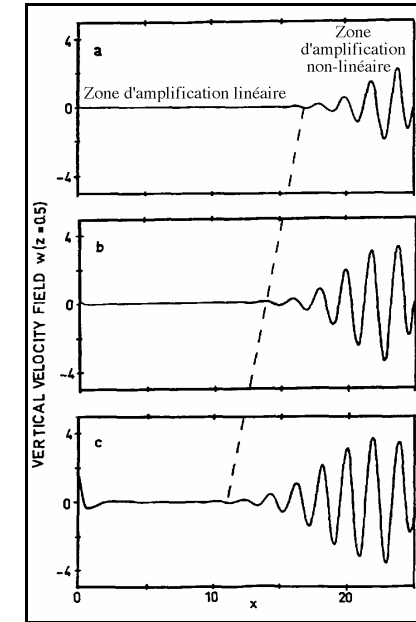


Figure III-20 : Évolution spatiale de la composante verticale de la vitesse en $z=0,5$, dans un écoulement convectivement instable ($Re=3$, $\varepsilon=0,114$, $Pr=1$), soumis à un bruit blanc en $x=0$, dont l'amplitude est égale à 1% (a), 10% (b) et 100% (c) de l'amplitude de saturation W_s ; la ligne droite pointillée relie des positions où l'amplitude de $w(x, z)$ est la même (tiré de Müller (1990)).

2.3.5 Variations de la longueur d'onde des $R_{\perp}$ en fonction des conditions aux limites

Nous avons vu un peu plus haut, que d'après l'équation de Ginzburg-Landau, la longueur d'onde λ des $R_{\perp}$ varie très peu par rapport à la longueur d'onde critique $\lambda^*=2,01$ de la stabilité marginale. Il n'en est pas de même avec les simulations numériques 2D. Lorsqu'un profil de Poiseuille purement conductif et non perturbé est imposé à l'entrée et à la sortie du domaine de calcul, Müller montre que λ est uniforme dans la région centrale du domaine de calcul, et qu'elle décroît de manière monotone lorsque Re ou Ra augmentent. Ce comportement est en accord avec les expériences de

Luijckx *et al.* (1981). Pour les plus grandes valeurs de Ra et de Re testées par Müller (Ra=2420 et Re=4 à Pr=1), $\lambda \approx 1,9$. Des gradients de longueur d'onde apparaissent dans les zones où l'amplitude de l'enveloppe varie beaucoup, i.e. à l'entrée et à la sortie (cf. figure III-18). Dans la région centrale, on observe que λ ne dépend que de Re et de Ra, et qu'elle ne dépend ni de la configuration initiale de l'écoulement ou de l'histoire du système, ni de la longueur du domaine.

Müller a aussi étudié l'écoulement de Poiseuille-Bénard en utilisant des conditions aux limites qui imposent la phase des $R_{\perp}$ à l'entrée et à la sortie du domaine de calcul¹. Elles consistent à remplacer les conditions précédentes sur w et T par $\partial w / \partial x = \partial T / \partial x = 0$ en $x=0$ et en $x=L/h$. Ainsi, on impose un écoulement ascendant ou descendant maximal aux extrémités du domaine. Ce choix de conditions aux limites est motivé par l'expérience de visualisation de Pocheau *et al.* (1987). Ces auteurs étudient l'écoulement de Poiseuille-Bénard dans un espace annulaire d'axe vertical, de section rectangulaire, dans lequel l'entrée et la sortie du fluide se font par deux ouvertures diamétralement opposées (cf. figure III-21). Le fluide circule symétriquement dans les deux moitiés de l'anneau et l'écoulement thermoconvectif obtenu forme une chaîne de $R_{\perp}$, d'axes radiaux. Ce système permet d'imposer la phase des structures convectives au niveau des ouvertures de l'anneau, à l'entrée et à la sortie du fluide. Dans cette

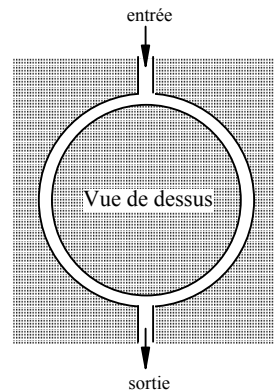


Figure III-21 : Représentation schématique de la cellule expérimentale de Pocheau *et al.* (1987).

¹ La terminologie anglaise pour ces conditions aux limites est: "phase-pinning" ou "phase-fixing boundary conditions".

situation, des $R_{\perp}$ stationnaires, de longueur d'onde uniforme, sont observés à Re=0. Pour Re≠0 et suffisamment petit, les structures convectives restent stationnaires, mais elles se déforment: leur longueur d'onde λ augmente à l'entrée et diminue à la sortie de l'anneau. Enfin, si Re augmente au delà d'une valeur critique Re^{**} ,¹ une instabilité d'Eckhaus, localisée près des ouvertures de l'anneau, apparaît. Elle provoque soit la génération d'un rouleau à l'entrée, soit la disparition d'un rouleau à la sortie. Cela est à l'origine de la mise en mouvement des $R_{\perp}$.

Müller retrouve ce comportement de l'écoulement, d'une part, grâce aux simulations numériques 2D utilisant les conditions aux limites décrites un peu plus haut et, d'autre part, grâce à une équation de diffusion de phase établie rigoureusement à partir de l'équation de Ginzburg-Landau. Ce modèle lui permet d'obtenir une estimation (majorée) du nombre de Reynolds critique Re^{**} entre les rouleaux stationnaires déformés et les rouleaux en déplacement; il trouve la valeur suivante:

$$Re^{**} \approx \frac{2,126\sqrt{\varepsilon}}{(\text{Pr} + 0,3432)L/h} \quad (\text{III} - 58).$$

¹ Cette valeur critique de Re est très petite: pour les calculs de Müller (1990, 1992a, 1992b), à Pr=1, $0,01 \leq Re^{**} \leq 0,1$.

3 La thèse de *Ouazzani (1991)* : mesures expérimentales par anémométrie laser-Doppler

On peut considérer que le travail de Ouazzani comporte deux grandes parties. Dans un premier temps, il aborde l'étude de l'écoulement de Poiseuille-Bénard sous un aspect plutôt qualitatif. Il réalise deux types d'expériences de visualisation et des simulations numériques directes bidimensionnelles. Dans un deuxième temps, il effectue des expériences de mesures par anémométrie laser-Doppler (LDA), qui permettent une analyse fine et quantitative de l'écoulement de Poiseuille-Bénard.

3.1 Les expériences de visualisation et les simulations numériques

Pour un premier contact avec les phénomènes apparaissant dans l'écoulement de Poiseuille-Bénard, Ouazzani réalise une expérience de visualisation par plans laser dans un écoulement d'air avec de la fumée de tabac à $Pr \approx 0,7$. Les caractéristiques géométriques de la conduite, la gamme des paramètres adimensionnels étudiés et les principaux résultats acquis sont donnés au tableau III-7. Les plans laser verticaux selon l'axe longitudinal et transversal permettent de visualiser les $R_{\perp}$ et les $R_{//}$, et de déterminer la courbe de transition entre ces deux phases dans le plan Ra-Re. En ce qui concerne les $R_{\perp}$, Ouazzani est le premier à montrer que la vitesse adimensionnelle V_r/U° (rapport entre la vitesse des $R_{\perp}$ et la vitesse moyenne de l'écoulement dans la conduite) décroît linéairement avec Ra et est indépendante de Re (cf. tableau III-7).

Pour compléter cette étude dans l'air, des simulations numériques 2D sont effectuées à $Pr=0,71$. Le code développé est basé sur une discrétisation en différence finie des équations de conservation dans une formulation fonction de courant-vorticité-température (ψ , ω , T); la méthode de résolution est semi-implicite de type directions alternées (ADI) et les conditions aux limites sont périodiques. Qualitativement, les résultats numériques concordent avec l'expérience: le transport des $R_{\perp}$ par l'écoulement moyen est reproduit en dessinant les isothermes et les lignes de courant en différents instants, et V_r/U° décroît aussi linéairement avec Ra (cf. tableau III-7). *Ouazzani*

(1990) montre que le nombre de Nusselt moyen en temps et en espace $\langle Nu \rangle$ augmente avec Ra et décroît très légèrement avec Re. Cependant, les résultats obtenus à partir de ce code sont peu précis. Par exemple, Ouazzani trouve $V_r/U^{\circ}=1,68$ à $Ra=2000$ alors que la théorie linéaire 2D (cf. tableau III-2, §1.2.4) prévoit $V_r/U^{\circ} \approx 1,15$. A $Ra=10000$, $Re=10$ et $Pr=0,71$, le benchmark d'*Evans et Paolucci (1990)* et nos propres résultats numériques (cf. tableau V-2) donnent respectivement $V_r/U^{\circ}=\lambda/\tau=1,09$ et 1,11, alors que *Ouazzani et al. (1989)* trouvent $V_r/U^{\circ}=1,56$.

Méthodes	Caractéristiques géométriques	Gamme de variation de Pr, Ra et Re	Principaux résultats
Visualisation par plans laser dans l'air avec de la fumée	$\begin{cases} L = 580 \text{ mm} \\ l = 348 \text{ mm} \\ h = 20 \text{ mm} \\ A = 29 \\ B = 17,4 \end{cases}$	$Pr=0,7$ $2000 \leq Ra \leq 8000$ $4 \leq Re \leq 14$	$V_r/U^{\circ}=1,5-2,7 \times 10^{-5} Ra$ photographies des $R_{\perp}$ - $R_{//}$ courbe de transition $R_{\perp}$ - $R_{//}$
Simulation numérique 2D pour l'air	$A=8$	$Pr=0,71$ $2000 \leq Ra \leq 12000$ $1 \leq Re \leq 9$	$V_r/U^{\circ}=1,7-1,9 \times 10^{-5} Ra$ isothermes et lignes de courant pour les $R_{\perp}$ $\langle Nu \rangle = f(Ra, Re)$
Interférométrie différentielle dans l'eau	$\begin{cases} L = 115 \text{ mm} \\ l = 15,05 \pm 0,05 \text{ mm} \\ h = 4,15 \pm 0,05 \text{ mm} \\ A = 27,7 \\ B = 3,63 \end{cases}$	$Pr=8,3$ $1900 \leq Ra \leq 3900$ $0,09 \leq Re \leq 0,45$	$V_r/U^{\circ}=1,53-9,6 \times 10^{-5} Ra$ photographies de l'interférogramme des $R_{\perp}$ - $R_{//}$ courbe de transition $R_{\perp}$ - $R_{//}$
Simulation numérique 2D pour l'eau	$A=2 \text{ et } 4$	$Pr=2, 4 \text{ et } 6,4$ $2000 \leq Ra \leq 5000$ $0,1 \leq Re \leq 0,7$	$V_r/U^{\circ}=1,41-2,74 \times 10^{-5} Ra$ à $Pr=2$ $V_r/U^{\circ}=1,43-4,38 \times 10^{-5} Ra$ à $Pr=4$ $V_r/U^{\circ}=1,43-6,9 \times 10^{-5} Ra$ à $Pr=6,4$ isothermes et lignes de courant pour les $R_{\perp}$ $W_{\perp, \max} = f(Ra, Re)$
Anémométrie laser-Doppler dans l'eau	$\begin{cases} L = 115 \text{ mm} \\ l = 15,05 \pm 0,05 \text{ mm} \\ h = 4,15 \pm 0,05 \text{ mm} \\ A = 27,7 \\ B = 3,63 \end{cases}$	$Pr=6,4$ $0 \leq Ra \leq 4700$ $0 \leq Re \leq 3,3$	$V_r/U^{\circ}=1,62-8,67 \times 10^{-5} Ra$ $W=f(t)$ et $U=f(t)$ $f=f(Re)$ diagramme de stabilité dans le plan Ra-Re (5 zones) $W_{\perp, \max}$ et $W_{//, \max} = f(Re, Ra)$ $W=f(x)$ et $W_{\perp, \max} = f(x)$ $l_c = f(Re)$

Tableau III-7 : Résumé des différentes méthodes utilisées par Ouazzani dans sa thèse et des principaux résultats obtenus.

La deuxième expérience de visualisation réalisée dans la thèse utilise l'interférométrie différentielle (ou de Schlieren) dans le cas d'écoulements d'eau à $Pr=8,3$ ($T^\circ=14^\circ C$). Cette technique utilise les propriétés de variation de l'indice de réfraction en fonction de la densité —et donc de la température— du fluide que l'on chauffe par le bas. Elle permet d'obtenir une image des champs des différents indices de réfraction. En théorie, on peut en déduire des renseignements quantitatifs sur le champ de température. Mais en pratique, comme la largeur de la conduite utilisée dans cette expérience est petite (cf. tableau III-7) et comme les différences de température entre les deux plaques horizontales restent faibles, Ouazzani n'a pu obtenir que des renseignements qualitatifs car il y a peu de réfraction. Par exemple, à $Ra=2000$, on ne peut observer que trois franges d'interférence. Hormis les photographies des interférogrammes différentiels à $Ra=3030$ et 3910 , pour plusieurs valeurs de Re , les résultats présentés se bornent à l'établissement de la courbe de transition entre les $R_\perp$ et les $R_\parallel$ dans le plan $Ra-Re$, et au calcul de V_r/U° lorsque $Pr=8,3$ (cf. tableau III-7).

Enfin, d'autres simulations numériques sont effectuées à $Pr=6,4$ pour pouvoir comparer les résultats des mesures par anémométrie laser-Doppler avec une théorie non-linéaire. L'exploitation des résultats numériques est cependant restée limitée: les comparaisons avec l'expérience portent sur la composante de vitesse verticale maximale $W_{\perp max}$ pour différentes valeurs de Ra et de Re , et sur la variation de V_r/U° avec Ra , mais aussi avec Pr (des calculs sont effectués à $Pr=2$ et 4). Comme on peut le voir au tableau VI-6 et à la figure VI-39 qui comparent toutes les relations linéaires $V_r/U^\circ=f(Ra)$ rencontrées dans la bibliographie, les résultats numériques de Ouazzani s'accordent peu avec ceux des autres auteurs. En conséquence, notre travail se basera principalement sur les mesures par anémométrie laser-Doppler dont la présentation suit.

3.2 L'analyse quantitative par anémométrie laser-Doppler

3.2.1 Technique, conditions et erreurs expérimentales

a) Technique expérimentale: à la différence d'autres techniques de mesure du champ de vitesse qui créent des perturbations dans l'écoulement (l'anémométrie à fils chauds par exemple), l'anémométrie laser-Doppler est une méthode optique non-intrusive et non-perturbative. C'est aussi une technique permettant des mesures fines: avec l'équipement utilisé par Ouazzani il est possible de mesurer des vitesses jusqu'à 20

$\mu m/s$ environ. On trouvera la description du principe de la mesure par anémométrie laser-Doppler dans de nombreux ouvrages spécialisés.

b) Conditions expérimentales: la cellule utilisée est la même que celle employée lors de la visualisation par interférométrie différentielle. Ses caractéristiques géométriques sont données au tableau III-7, ainsi que la gamme de Ra et de Re balayée lors des mesures par LDA. Les expériences ont été réalisées avec de l'eau à température moyenne $T^\circ=23^\circ C$. On donne au tableau III-8 les différentes valeurs des propriétés physiques de l'eau autour de cette température. On note en particulier que $Pr=6,475$ à $T=23^\circ C$. On montrera au chapitre IV, §5, que dans ces conditions expérimentales ($Ra \leq 4700$), on peut considérer que l'eau est un fluide de Boussinesq.

c) Sources d'erreurs expérimentales: en raison de la dilatation possible des tuyaux d'alimentation du circuit d'eau et de la formation d'étranglements causés par des agrégats de sphères de latex utilisées en LDA, Ouazzani signale que sur la durée d'une expérience (24 heures en moyenne), Re peut varier de $\delta Re = \pm 0,01$.

En ce qui concerne $Ra = g\beta\Delta T h^3 / (\nu\alpha)$, Ouazzani observe des fluctuations sur ΔT égales à $\delta\Delta T = \pm 0,015^\circ C$ et la hauteur $h=4,15$ mm de la conduite est déterminée à $\delta h = \pm 0,05$ mm près. Donc, si on néglige les erreurs commises sur la détermination de g , β , ν et α , l'erreur relative sur le nombre de Rayleigh est $\delta Ra/Ra = \delta\Delta T/\Delta T + 3\delta h/h = 0,015/\Delta T + 0,036$. On note, de plus, qu'à $T^\circ=23^\circ C$ et pour $h=4,15$ mm, on a $Ra=1235,51\Delta T$.

Or, d'après Dubois et Bergé (1978), on sait que l'amplitude de saturation de la vitesse verticale W_s lorsque $Re=0^1$ est proportionnelle à $\varepsilon^{1/2}$ pour $Ra < 2500$ (voir à ce sujet, chapitre VI, §2.3). Ici $\varepsilon = (Ra - 1730)/1730$ où 1730 est la valeur critique du nombre de Rayleigh $Ra^*(Re=0)$ lorsque le confinement latéral est $B=3,63$. Donc, l'erreur absolue sur ε est $\delta\varepsilon = \delta Ra/1730$ et l'erreur relative sur W_s est $\delta W_s/W_s = 1/2(\delta\varepsilon/\varepsilon)$. Le tableau III-9 donne la variation de ces différentes erreurs en fonction de ΔT pour la gamme de nombres de Rayleigh balayée par l'expérience. On constate que pour $Ra < 1900$, i.e. à proximité de la valeur critique 1730, une erreur relative de 4,6% sur Ra entraîne une erreur de plus de 25% sur W_s . Lorsque $Ra=1804$, celui-ci est en fait connu à 83 unités près, et W_s est déterminé à 56% près! Ces observations seront bien sûr prises en compte lors des comparaisons entre expériences et simulations numériques.

¹ Lorsque $Re \neq 0$, d'après Müller (1990), W_s est proportionnelle à $\mu^{1/2}$ (cf. équation (III-53)).

T (°C)	Coef. de dilatation thermique β (10 ⁻⁶ K ⁻¹)	Masse volumique ρ (kg/m ³)	Chaleur spécifique à P constante C_p (kJ/(kg.K))	Viscosité dynamique μ (g/(m.s))	Conductiv. thermique κ (W/(m.K))	Diffusivité thermique $\alpha=\kappa/(\rho C_p)$ (10 ⁻⁶ m ² /s)	Viscosité cinémati. $\nu=\mu/\rho$ (10 ⁻⁶ m ² /s)	Nombre de Prandtl $Pr=\nu/\alpha$
10	87,97	999,7026	4,1922	1,307	0,577	0,1377	1,3074	9,496
15	150,87	999,1026	4,1858	1,139	0,589	0,1408	1,1400	8,094
20	206,78	998,2071	4,1819	1,0019	0,597	0,1430	1,0037	7,018
21	217,26	997,9955	4,1813	0,9779	0,599	0,1435	0,9799	6,826
22	227,54	997,7735	4,1808	0,9548	0,601	0,1441	0,9569	6,642
23	237,62	997,5415	4,1804	0,9325	0,602	0,1444	0,9348	6,475
24	247,5	997,2995	4,1800	0,9111	0,604	0,1449	0,9136	6,305
25	257,21	997,0479	4,1796	0,8904	0,606	0,1454	0,8930	6,141
26	266,73	996,7867	4,1793	0,8705	0,608	0,1459	0,8733	5,984
27	276,1	996,5162	4,179	0,8513	0,609	0,1462	0,8543	5,842
28	285,3	995,2365	4,1788	0,8327	0,611	0,1469	0,8367	5,695
29	294,34	995,9478	4,1786	0,8148	0,613	0,1473	0,8181	5,554
30	303,24	995,6502	4,1785	0,7975	0,615	0,1478	0,8010	5,418
35	345,73	994,0349	4,1782	0,7194	0,62	0,1493	0,7237	4,848

Tableau III-8 : Évolution des propriétés physiques de l'eau en fonction de la température pour $10^\circ\text{C} \leq T \leq 35^\circ\text{C}$ (d'après *Weast et Astle (1980)*);
 $T^\circ=23^\circ\text{C}$ est la température moyenne dans l'expérience de Ouazzani.

ΔT (°C)	Ra	δRa	$\delta Ra/Ra$ (%)	ε	$\delta \varepsilon/\varepsilon$ (%)	$\delta W_s/W_s$ (%)
1,46	1804	83	4,6	0,043	112,8	56,4
1,49	1836	85	4,6	0,061	79,8	39,9
1,54	1900	87	4,6	0,098	51,1	25,6
1,64	2024	91	4,5	0,170	31,1	15,5
1,96	2420	106	4,4	0,399	15,3	7,7
2,80	3460	143	4,1	1,000	8,3	4,1
3,80	4700	188	4,0	1,717	6,3	3,2

Tableau III-9 : Conséquence des sources d'erreurs expérimentales sur la précision avec laquelle sont déterminés Ra, ε et W_s , dans l'expérience d'anémométrie laser-Doppler de Ouazzani.

3.2.2 Résultat des mesures par anémométrie laser-Doppler

Ouazzani consacre deux chapitres à la présentation des résultats des mesures par LDA. Le premier concerne l'analyse approfondie des signaux temporels $W=f(t)$ et $U=f(t)$ lorsque Re et Ra varient. Les signaux sont enregistrés en un point fixe situé exactement à mi-hauteur de la conduite, sur l'axe, et à 6,5 cm de l'entrée, i.e. en (x; y; z)=(15,7; 0,5; 0,5). Le deuxième chapitre étudie le développement spatial des $R_\perp$ à l'aide d'enregistrements de W en fonction de x. Ce chapitre, motivé par le travail récent de *Müller (1990)* sur la notion de stabilité convective, compare les résultats expérimentaux à ceux de la théorie des équations d'amplitude.

Le tableau III-7 résume les différents résultats obtenus par anémométrie laser-Doppler. Comme une grande part de notre travail étudie dans quelle mesure la simulation numérique est capable de reproduire les expériences menées par Ouazzani, des graphes extraits de sa thèse sont présentés tout au long de ce document, lors des confrontations entre les simulations numériques et les expériences. Ici nous ne montrons que les résultats majeurs.

a) Mesure ponctuelle de la vitesse et évolution temporelle des structures convectives: on présente aux figures III-22(a) et III-22(b) des enregistrements typiques des composantes de vitesse verticale W et horizontale U obtenus par anémométrie laser-Doppler. La figure III-22(a) montre l'évolution de la structure de l'écoulement à $Ra=2420$ lorsque Re varie. Pour $Re \leq 0,65$, on observe des $R_\perp$: le signal $W(t)$ est sinusoïdal, de moyenne nulle, et sa fréquence augmente avec Re. Pour $Re=0,83$, l'écoulement transite vers une structure de $R_\perp$: $W(t)$ est constant et non nul (il en serait de même pour $U(t)$ et $V(t)$). La figure III-22(b) montre un signal $U(t)$ enregistré en $z=0,25, 0,5$ et $0,75$ (points c, b et a) dans un écoulement de $R_\perp$. Le signal oscille autour d'une moyenne non nulle égale à la composante maximale de U qu'aurait l'écoulement de Poiseuille au même nombre de Reynolds. On note que l'amplitude des oscillations est minimale au point b, i.e. au centre de la conduite, et un oeil averti pourra remarquer qu'en ce point le signal est bichromatique.

La répétition des enregistrements de $W(t)$ du type de celui de la figure III-22(a)¹, en fixant Ra et en faisant varier Re (ou le contraire), permet de suivre

¹ Voir aussi les enregistrements de Ouazzani reproduits aux figures VI-1(a), VI-2(a), VI-3(a) et VI-4(a).

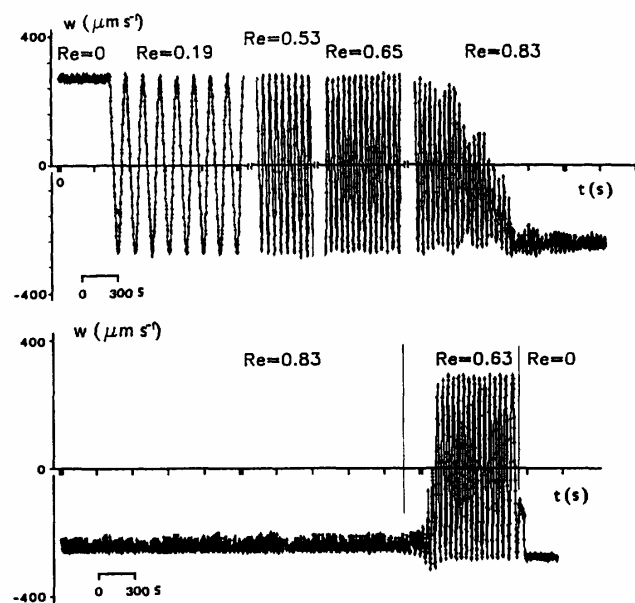


Figure III-22(a) : Évolution de la vitesse verticale $W(t)$ pour Re variant, à $Ra=2420$; transition des $R_{\perp}$ fixes à $Re=0$, vers les $R_{\perp}$ en déplacement pour $0 < Re \leq 0,65$, puis vers les $R_{//}$ à $Re=0,83$, et retour à $Re=0$ (tiré de Ouazzani (1991)).

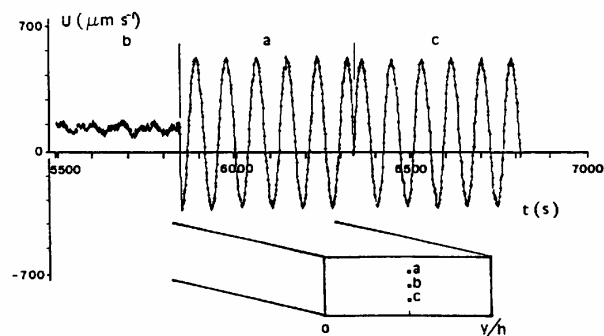


Figure III-22(b) : Vitesse horizontale $U(t)$ pour les $R_{\perp}$ à $Re=0,4$ et $Ra=3448$, enregistrée en $z=0,75$ (point a), en $z=0,5$ (point b) et en $z=0,25$ (point c) (tiré de Ouazzani (1991)).

l'évolution des structures de l'écoulement, de déterminer les valeurs de Re et de Ra pour lesquelles il y a changement de phase, et donc de dresser la carte de stabilité des différentes structures présentes dans l'écoulement de Poiseuille-Bénard à $Pr=6,4$. Cette carte, présentée dans le plan $Ra-Re$, est reproduite figure III-23. Ouazzani a identifié cinq zones dans ce plan:

- dans la zone I, pour les petites valeurs de Ra , on observe un écoulement de Poiseuille non-isotherme (purement conductif). Au-dessus de cette région, dans les zones II, III, IV et V, des structures thermoconvectives sont toujours présentes;
- dans la zone II, pour les petits nombres de Reynolds, on observe des $R_{\perp}$ qui restent stables vis à vis de diverses perturbations;
- dans la zone III, pour les valeurs de Re les plus élevées, l'écoulement prend la forme de $R_{//}$ stables;
- dans la zone IV, Ouazzani observe que les structures convectives sont soit des $R_{\perp}$, soit des $R_{//}$, en fonction des conditions initiales, i.e. en fonction de la structure de l'écoulement avant que Re et Ra "entrent" dans la zone IV.

- Enfin, dans la petite zone V (cf. figure III-23(b)), la structure de l'écoulement montre un caractère intermittent qui ne correspond ni aux $R_{\perp}$, ni aux $R_{//}$, mais plutôt à la superposition des deux. La figure III-24 montre un enregistrement dans cette zone: la vitesse $W(t)$ oscille autour d'une moyenne non nulle, avec une modulation périodique de l'enveloppe de ces oscillations. Ce signal peut se maintenir plusieurs jours (figure III-24(a)), et la figure III-24(b) montre que le déplacement de la sonde de mesure dans la direction y au temps t^* provoque le changement de signe de la valeur moyenne de W ; cela indique une périodicité selon y correspondant aux $R_{//}$, et qui vient se superposer à la périodicité selon x des $R_{\perp}$. Ces structures dites "intermittentes" n'ont pas été visualisées par Ouazzani; nous montrerons la forme possible qu'elles peuvent prendre, au chapitre VI, §4.2.

À la figure VI-25, on reproduit les courbes de transition entre les $R_{\perp}$ et les $R_{//}$ obtenues par Ouazzani grâce aux trois expériences différentes qu'il a menées. Cette figure met en évidence le fait que les $R_{\perp}$ sont d'autant plus stables vis à vis des $R_{//}$ que Pr est petit. On rappelle que la théorie linéaire de Ljijx (cf. figure III-6) prévoit la transition entre les $R_{\perp}$ et l'écoulement de Poiseuille, pas entre les $R_{\perp}$ et les $R_{//}$. On constate malgré tout que les courbes des figures VI-25 et III-6 évoluent dans le même sens en fonction de Pr .

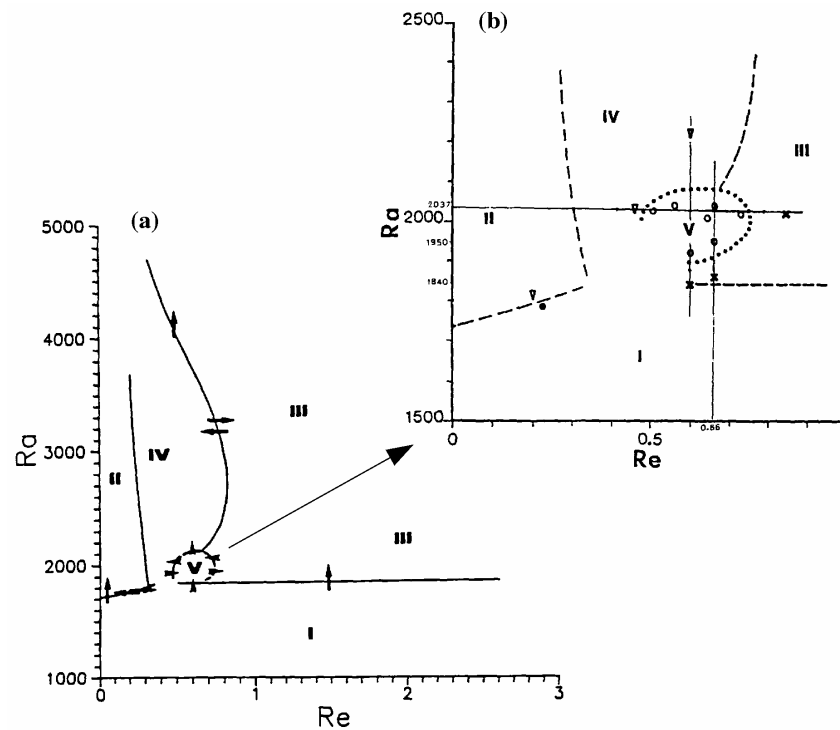


Figure III-23 : Domaine d'existence, dans le plan $Ra-Re$, des différents modèles d'écoulement identifiés par *Ouazzani (1991)* dans l'écoulement de Poiseuille-Bénard à $Pr=6,4$; (a) vue générale; (b) zoom sur la zone V;

- I : écoulement de Poiseuille
- II : $R_{\perp}$ stables
- III : $R_{//}$ stables
- IV : $R_{\perp}$ ou $R_{//}$ selon les conditions initiales
- V : superposition des $R_{\perp}$ et des $R_{//}$

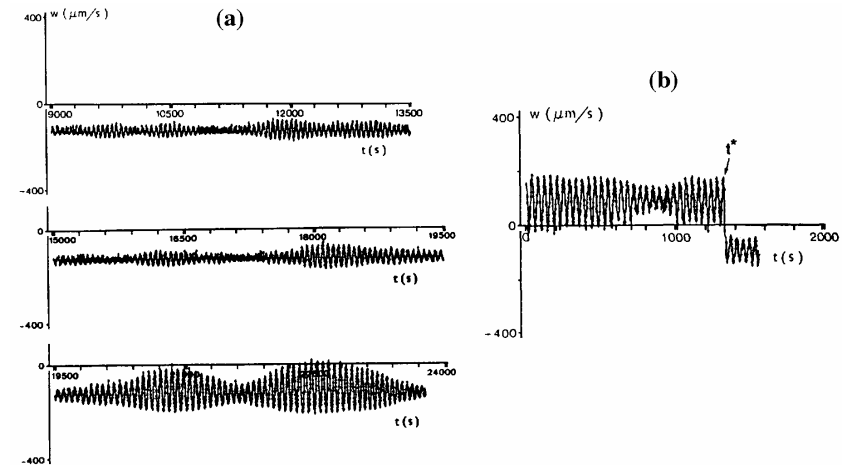


Figure III-24 : (a) extrait d'un enregistrement sur plusieurs jours des structures dites intermittentes de la zone V, pour $Re=0,56$ et $Ra=2037$. (b) Périodicité dans la direction y mise en évidence par le déplacement de la sonde à $t=t^*$ (cf. texte); $Ra=2012$ et $Re=0,63$ (tiré de *Ouazzani (1991)*).

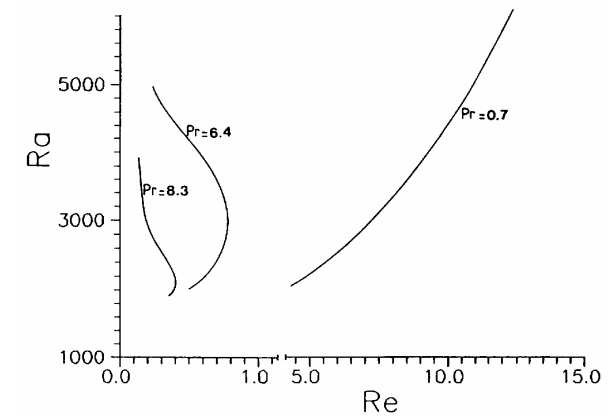


Figure III-25 : Courbes de transition entre les $R_{\perp}$ et les $R_{//}$ pour trois nombres de Prandtl: $Pr \approx 0,7$ (air), $Pr \approx 6,4$ (eau à $23^{\circ}C$), $Pr \approx 8,3$ (eau à $14^{\circ}C$) (tiré de *Ouazzani (1991)*).

A partir des signaux $W(t)$, Ouazzani montre que la fréquence f des $R_{\perp}$ est une fonction linéaire de Re . Comme pour les expériences précédentes, il montre que Vr/U° est une fonction linéaire de Ra (cf. tableau III-7). Enfin, il étudie la variation en fonction de Re et Ra des composantes de vitesses verticales maximales dans les $R_{\perp}$ et les $R_{//}$ ($W_{\perp}^{\max}$ et $W_{//}^{\max}$). Sur ce point, il montre que l'expérience concorde de manière satisfaisante avec des théories faiblement non-linéaires. Tous ces résultats seront comparés à ceux des simulations numériques et discutés en détail au chapitre VI. L'ensemble des résultats obtenus par Ouazzani dans ce paragraphe a) sont publiés dans Ouazzani *et al.* (1990) et, en ce qui concerne les structures intermittentes, dans Ouazzani *et al.* (1993a).

b) Développement spatial des structures convectives - Comparaisons avec Müller (1990): Ouazzani a pu effectuer quelques comparaisons entre les résultats de ses expériences et ceux obtenus à partir de la théorie des équations de Ginzburg-Landau. Ces comparaisons sont en fait peu nombreuses: elles se résument aux figures III-26, III-28 et III-29 données ci-dessous. Les résultats se rapportant à cette partie sont publiés dans Ouazzani *et al.* (1995).

Sur la figure III-26, l'auteur compare la courbe expérimentale de transition entre l'écoulement de Poiseuille et les $R_{\perp}$ (transition entre les zones I et II de la figure III-23) avec les courbes $\varepsilon_{\perp}^*$ et $\varepsilon_{\perp}^{\text{conv}}$ (ou $Ra_{\perp}^*$ et $Ra_{\perp}^{\text{conv}}$) calculées par Müller (1990) à $Pr=6,4$. Sans contestation possible, il apparaît que la transition expérimentale s'accorde avec la courbe de stabilité convective et pas avec la courbe de stabilité linéaire. Ouazzani fait remarquer que si la conduite expérimentale avait été plus longue, l'accord entre expérience et théorie convective aurait été encore meilleur car, pour Re plus grand ou Ra plus petit, on aurait pu observer la naissance des $R_{\perp}$ plus loin en aval.

Pour étudier le développement spatial des $R_{\perp}$, Ouazzani effectue des enregistrements de W du type de celui présenté à la figure III-27. Le déplacement selon la direction axiale de la sonde de mesure placée en $(y; z)=(0,5; 0,5)$ montre que l'amplitude ($W^{\max}-W^{\min}$) croît avec x à partir de l'entrée, jusqu'à atteindre un seuil de saturation, et décroît près de la sortie du canal. Les oscillations ont lieu autour d'une moyenne nulle sauf à l'entrée et à la sortie car la structure de l'écoulement de base n'y est pas symétrique. A partir de tels enregistrements, Ouazzani dessine des enveloppes de la composante verticale de la vitesse $W_{\max}(x)$, où il définit $W_{\max}=(W^{\max}+|W^{\min}|)/2$ car les oscillations ne sont pas symétriques par rapport à $W=0$.

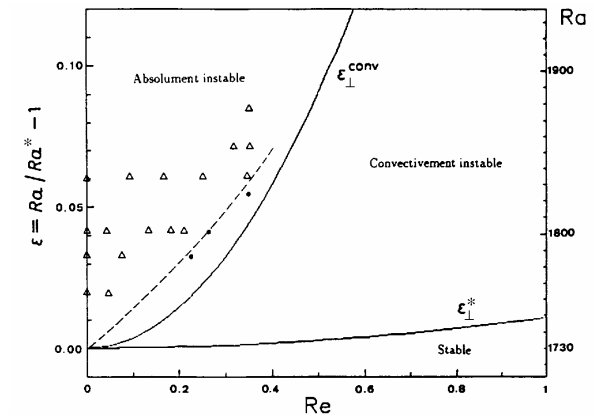


Figure III-26 : Comparaison entre la courbe expérimentale (---) de transition entre les $R_{\perp}$ (Δ) et l'écoulement de Poiseuille ($\bullet$) obtenue par Ouazzani avec les courbes de stabilité linéaire ($\varepsilon_{\perp}^*$) et convective ($\varepsilon_{\perp}^{\text{conv}}$) calculées par Müller (1990) (tiré de Ouazzani (1991)).

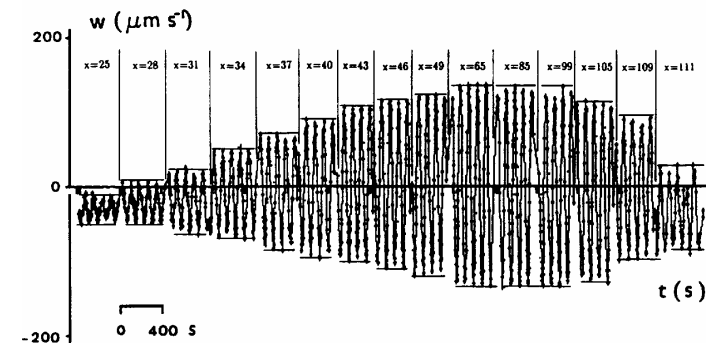


Figure III-27 : Enregistrement des oscillations de la vitesse verticale $W(t)$, en $(y; z)=(0,5; 0,5)$ et en différentes positions x , à $Ra=1854$ et $Re=0,32$ (tiré de Ouazzani (1991)).

La figure III-28 montre l'évolution de ces enveloppes lorsque Re augmente à $Ra \approx 1836$ et lorsque Ra diminue à $Re \approx 0,04$. La comparaison avec le calcul théorique de Müller aux mêmes valeurs de Re , Ra et Pr montre une très bonne concordance du point de vue qualitatif et quantitatif. On retrouve que la longueur d'établissement l_e , définie par $W_{max}(l_e) = W_s/2$, augmente lorsque Re croît ou lorsque Ra diminue. La figure III-29 compare les courbes $l_e = f(Re)$ obtenues par Ouazzani et Müller à $Ra = 1836$. Elle montre que l_e diverge pour $Re \approx 0,4$ dans les deux cas. $Re \approx 0,4$ est donc la valeur du nombre de Reynolds critique correspondant à la transition $R_{\perp}$ -écoulement de Poiseuille lorsqu'on augmente Re , à $Ra = 1836$.

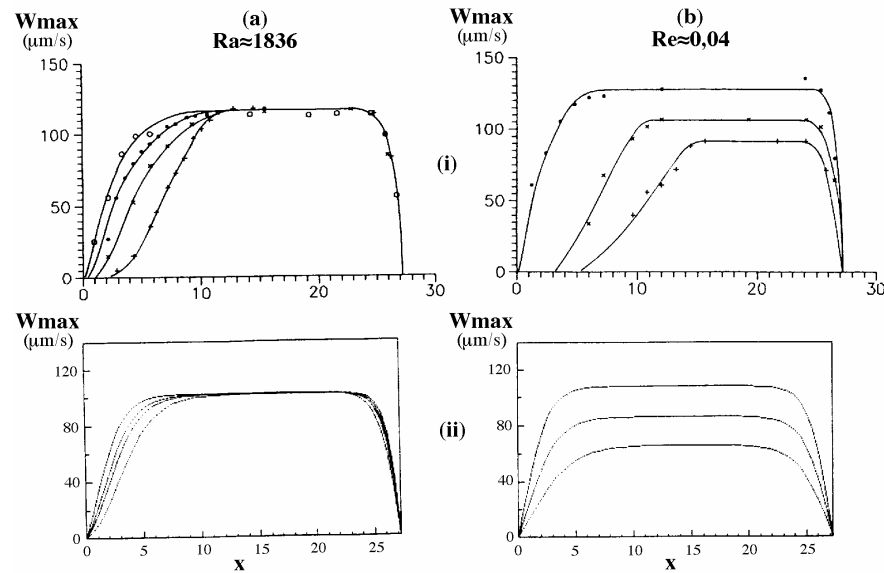


Figure III-28 : Enveloppes de la vitesse verticale maximale $W_{max}(x)$ à $Pr=6,4$; comparaison entre l'expérience (i) et la théorie (ii) (tiré de Ouazzani (1991)).

(a) $Ra \approx 1836$ et, de gauche à droite, $Re=0,09$; $0,16$; $0,19$ et $0,25$;
 (b) $Re \approx 0,04$ et, de haut en bas, $Ra=1842$; 1805 et 1774 .

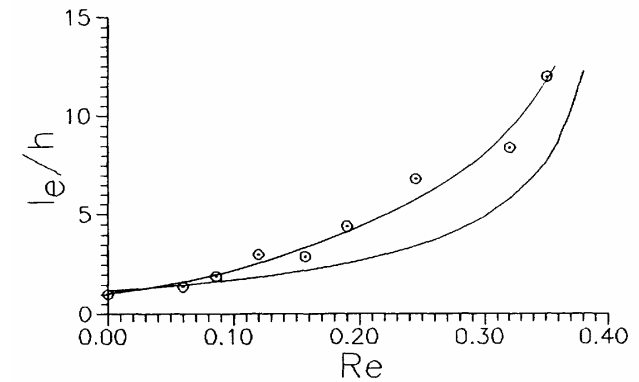


Figure III-29 : Longueur d'établissement l_e en fonction de Re à $Ra \approx 1836$;
 ○ : expériences d'anémométrie laser-Doppler de Ouazzani ;
 — (courbe du bas) : théorie de Müller (1990) ;
 (tiré de Ouazzani (1991)).

Deuxième partie

Méthodologie

Chapitre IV

Formulation mathématique du problème

I Introduction

Le problème qui nous intéresse est la modélisation de l'écoulement d'un fluide Newtonien et incompressible, induit à la fois par un gradient de pression horizontal et par la force de poussée d'Archimède verticale, dans une conduite semi-infinie, de section rectangulaire et d'axe horizontal, chauffée par le bas et refroidie par le haut en imposant des températures constantes et uniformes.

D'une manière générale, la formulation mathématique d'un tel problème s'obtient en écrivant les théorèmes généraux de la mécanique des fluides et de la thermodynamique. Ces théorèmes traduisent la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie au sein du fluide. Dans ce chapitre, nous allons établir les équations qui nous permettront de modéliser le problème de Poiseuille-Bénard, en se servant de la formulation intégrale des lois de conservation et en introduisant des hypothèses simplificatrices qui seront justifiées¹. Les conditions aux limites et les conditions initiales permettant le calcul des solutions seront présentées au chapitre V.

Tout d'abord, nous allons introduire quelques notations et rappeler brièvement les outils nécessaires à l'établissement des équations.

¹ Ces équations peuvent être aussi obtenues en faisant le bilan des quantités transportées et produites dans un volume élémentaire du milieu étudié; on retrouvera cette méthode dans les ouvrages de base de la mécanique des fluides, par exemple dans *Bird et al. (1960)* ou dans *Platten et Legros (1984)*.

Soit D un domaine de volume $\mathcal{V}$ et de surface Σ du milieu continu $\mathcal{D}$ que l'on étudie; on suit D dans son mouvement. Soit M une particule fluide élémentaire de D , de volume dv , dont la position est repérée par le vecteur $\mathbf{X}$. M est soumise à la force volumique $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$ (somme des actions à distance), et Σ est soumise à la force surfacique $\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{n}, t) = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n}$ (somme des actions de contact). $\bar{\bar{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes et $\mathbf{n}$ la normale sortante de Σ .

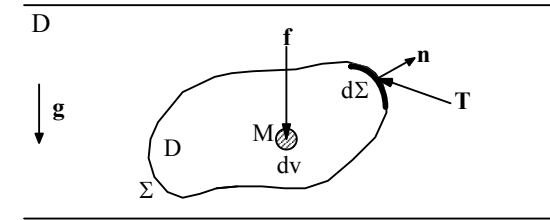


Figure IV-1: Action des forces extérieures sur un élément de volume du domaine fluide.

Soit $\varphi(\mathbf{X}, t)$ une fonction définie et continue dans D traduisant, par exemple, l'évolution d'une grandeur physique attachée à la particule M . On notera

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi \quad (\text{IV} - 1)$$

la dérivée particulaire de $\varphi(\mathbf{X}, t)$; on rappelle que c'est le taux de variation de φ dans le temps lorsque l'observateur suit la particule fluide dans son mouvement.

On utilisera aussi deux lemmes fondamentaux en mécanique des fluides. Le premier permet d'obtenir une équation locale connaissant une relation intégrale pour tous les domaines D appartenant à une famille dense d'ouverts de $\mathcal{D}$:

$$\int_D \varphi(\mathbf{X}, t) dv = 0 \quad \forall D \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi(\mathbf{X}, t) = 0 \quad \forall M \in D \quad (\text{IV} - 2)$$

Le deuxième donne la dérivée particulaire de $K(t) = \int_D \varphi(\mathbf{X}, t) dv$, où $\varphi(\mathbf{X}, t)$ est une fonction scalaire:

$$\frac{dK(t)}{dt} = \int_D \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{V}) \right] dv \quad (\text{IV} - 3)$$

2 Loi de conservation de la masse

Cette loi traduit le fait qu'il n'y a ni création, ni disparition de matière dans D au cours de son mouvement (et ce, quel que soit le volume D considéré):

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho(\mathbf{X}, t) dv = 0 \quad (\text{IV} - 4)$$

En appliquant successivement (IV-3) et (IV-2), on obtient l'équation locale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{IV} - 5)$$

Cette équation est aussi appelée équation de continuité.

Dans le cas où le fluide est isovolume, $\rho(\mathbf{X}, t) = \rho^0 = \text{cste}$, $\forall \mathbf{X}$ et $\forall t$, alors (IV-5) s'écrit:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{IV} - 6)$$

La masse volumique d'un fluide monoconstituant étant fonction de sa pression et de sa température, dire que le fluide est isovolume suppose qu'il soit à la fois incompressible et non dilatable ($\rho(p, T) = \text{cste} \Rightarrow \partial \rho / \partial p = 0$ et $\partial \rho / \partial T = 0$). Nous verrons au §5 consacré à l'approximation de Boussinesq, que cette hypothèse est trop restrictive dans le cadre de notre étude car elle empêche de prendre en compte le terme moteur de la convection naturelle: la force de flottabilité due à l'expansion thermique du fluide.

3 Loi de conservation de la quantité de mouvement

C'est la deuxième loi de Newton, encore appelée principe fondamental de la dynamique; son énoncé est le suivant: dans un référentiel galiléen, la dérivée particulière de la quantité de mouvement du fluide contenu dans D est égale à la somme de toutes les forces extérieures appliquées sur D:

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \mathbf{V} dv = \int_D \mathbf{f} dv + \int_{\Sigma} \mathbf{T} d\Sigma \quad (\text{IV} - 7)$$

Dans le cas de notre problème, $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} = -\rho g \mathbf{k}$ et $\mathbf{T} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n}$ avec, en utilisant une notation contractée, $\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \tau_{ik}$. $\bar{\bar{\tau}} = (\tau_{ik})$ est le tenseur des contraintes de viscosité pour les fluides Newtoniens: $\tau_{ik} = \mu (V_{i,k} + V_{k,i}) + \gamma \square \cdot \mathbf{V} \delta_{ik}$; μ est le coefficient de viscosité de cisaillement pur (ou viscosité dynamique) et γ est le coefficient de viscosité d'expansion volumique¹. Nous avons vu au tableau III-8, que dans le cadre des expériences de Ouazzani, μ varie peu (moins de 10% dans la gamme de températures étudiées). Pour simplifier les écritures, nous faisons donc l'hypothèse que μ est constante dans les équations; cela sera justifié au §5 dans le cadre de l'approximation de Boussinesq.

En transformant l'intégrale de surface de (IV-7) en intégrale de volume par le théorème de la divergence et en appliquant (IV-3) puis (IV-2) et (IV-5), on arrive à:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + (\gamma + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (\text{IV} - 8)$$

Dans le cas où $\square \cdot \mathbf{V} = 0$ ($\square \cdot \mathbf{V} = 0 \Rightarrow \rho = \rho^0 = \text{cste}$), on obtient l'équation de Navier-Stokes:

$$\rho^0 \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho^0 \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (\text{IV} - 9)$$

4 Loi de conservation de l'énergie

A chaque instant, la dérivée particulière de la somme de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie interne U d'un domaine fluide D que l'on suit dans son mouvement, est égale à la somme de la puissance mécanique P_e fournie à D par les forces extérieures (actions de contact et à distance) et de la puissance calorifique Q (ou taux de chaleur) fournie à D par l'extérieur:

$$\frac{d(E_c + U)}{dt} = P_e + Q \quad (\text{IV} - 10)$$

¹ L'hypothèse de Newton-Stokes donne $\gamma = -2/3\mu$; selon *Bird et al. (1960)*, on peut considérer que $\gamma \approx -2/3\mu$ dans le cas des liquides et pour les gaz monoatomiques, ou pour les gaz polyatomiques mais suffisamment denses.

Le théorème de l'énergie cinétique, qui se déduit de la loi de conservation de la quantité de mouvement, s'énonce, quant à lui, de la manière suivante: la dérivée particulaire de l'énergie cinétique E_c d'un domaine D que l'on suit dans son mouvement est, à chaque instant, égale à la puissance de toutes les forces extérieures P_e et intérieures P_i appliquées à D :

$$\frac{dE_c}{dt} = P_e + P_i \quad (\text{IV} - 11)$$

A partir de (IV-10) et (IV-11), on retrouve la forme classique de la première loi de la thermodynamique: la variation de l'énergie interne d'un système D est égale à la puissance calorifique qu'il reçoit de l'extérieur, moins la puissance dissipée par les forces intérieures:

$$\frac{dU}{dt} = Q - P_i \quad (\text{IV} - 12)$$

$$\text{avec } \begin{cases} U = \int_D \rho e \, dv \\ Q = \int_{\Sigma} \mathbf{q}(\mathbf{X}, t, \mathbf{n}) \, d\Sigma + \int_D \mathbf{r}(\mathbf{X}, t) \, dv \\ P_i = - \int_D (\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \nabla \mathbf{V}) \, dv \end{cases} \quad \begin{cases} \bullet e : \text{énergie interne par unité de masse} \\ \bullet \mathbf{q} = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} : \text{densité surfacique du flux de chaleur reçue par conduction} \\ \bullet \mathbf{r} : \text{puissance volumique dissipée localement sous forme de chaleur} \\ \bullet (\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \nabla \mathbf{V}) = \sigma_{ik} V_{i,k} = -p \nabla \cdot \mathbf{V} + (\bar{\boldsymbol{\tau}} : \nabla \mathbf{V}) \end{cases}$$

Comme précédemment, en utilisant (IV-3), (IV-2), (IV-5) et le théorème de la divergence, on obtient l'équation locale suivante:

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{r} - p \nabla \cdot \mathbf{V} + (\bar{\boldsymbol{\tau}} : \nabla \mathbf{V}) \quad (\text{IV} - 13)$$

La loi de Fourier traduit une relation linéaire entre le flux de chaleur par conduction $\mathbf{q}$ et le gradient de température, le coefficient de proportionnalité étant la conductivité thermique κ du fluide:

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T \quad (\text{IV} - 14)$$

Dans les applications pratiques, il est plus intéressant d'exprimer l'équation de conservation de l'énergie (IV-13) en fonction de la température du fluide et de sa capacité calorifique plutôt qu'en fonction de son énergie interne massique. Pour les fluides (pour les gaz en particulier) il est aussi plus facile de mesurer expérimentalement la capacité calorifique à pression constante que celle à volume

constant. Pour ces deux raisons, il faut exprimer e en fonction de T et p . Or, l'enthalpie massique $h = e + p/\rho$ peut s'exprimer en fonction de T et p de la manière suivante¹:

$$dh = C_p dT + \frac{1}{\rho} (1 - \beta T) dp \quad (\text{IV} - 15)$$

$$\text{où } \begin{cases} C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p & \text{est la capacité calorifique par unité de masse à pression constante} \\ \beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p & \text{est le coefficient de dilatation thermique} \end{cases}$$

On obtient ainsi, en utilisant (IV-14), (IV-15) et l'équation de continuité (IV-5), une forme générale de l'équation de conservation de l'énergie dans un fluide monoconstituant:

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} - \beta T \frac{dp}{dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \mathbf{r} + (\bar{\boldsymbol{\tau}} : \nabla \mathbf{V}) \quad (\text{IV} - 16)$$

Cette équation est très compliquée. Il s'agit donc maintenant de voir si elle peut se simplifier. Mis à part le terme source $\mathbf{r}$, la simplification des différents termes de (IV-16) entre dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. C'est l'objet de la partie suivante.

Quant à $\mathbf{r}$, il représente la somme des puissances calorifiques dissipées par l'ensemble des sources de chaleur présentes au sein du fluide. Ces sources d'énergie peuvent être de nature radiative, nucléaire, électromagnétique, etc. Dans notre problème, la seule source à prendre en considération est la différence entre les flux de chaleur reçu et émis par rayonnement. Cependant, vu les températures et les différences de températures mises en jeu entre le fluide et les plaques isothermes dans l'expérience de Ouazzani, on supposera que $\mathbf{r}$ est négligeable dans notre étude.

5 Approximation de Boussinesq

¹ On trouvera la démonstration de (IV-15), entre autre, dans *Platten et Legros (1984)*.

L'approximation, qui est attribuée à *Boussinesq (1903)*, mais qui a été présentée pour la première fois par *Oberbeck (1879)*, comporte 3 propositions:

1- La masse volumique ρ est supposée constante dans tous les termes des équations de conservation ($\rho(T, p) = \rho(T^\circ, p^\circ) = \rho^\circ = \text{cste}$, où T° et p° sont une température et une pression de référence) sauf dans le terme de poussée d'Archimède $\rho \mathbf{g}$. Dans ce terme, on prend ρ fonction linéaire de la température uniquement: $\rho(T, p) = \rho(T) = \rho^\circ (1 - \beta^\circ (T - T^\circ))$.

2- Toutes les autres propriétés thermophysiques du fluide ($\beta, \mu, \gamma, \kappa, C_p$) sont supposées constantes.

3- Dans l'équation de l'énergie (IV-16), la puissance volumique liée aux variations de pression ($\beta T(dp/dt)$) et la dissipation visqueuse ($\bar{\tau} : \nabla \mathbf{V}$)¹ sont négligeables devant le flux de chaleur diffusé par conduction ($\nabla \cdot (\kappa \nabla T)$).

Les trois équations de conservation (IV-5), (IV-8) et (IV-16), qui ont été établies sans introduire d'hypothèse sur la nature de l'écoulement et du fluide (autre que la viscosité dynamique μ est constante dans (IV-8) et que le fluide est Newtonien), peuvent donc se simplifier considérablement si on prend en compte l'ensemble des trois propositions de l'approximation de Boussinesq. Le système d'équations que l'on obtient, appelé parfois équations de Boussinesq, s'écrit alors:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{IV-17})$$

$$\rho^\circ \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho^\circ (1 - \beta^\circ (T - T^\circ)) \mathbf{g} - \nabla p + \mu^\circ \nabla^2 \mathbf{V} \quad (\text{IV-18})$$

$$\frac{dT}{dt} = \alpha^\circ \nabla^2 T \quad (\text{IV-19})$$

Dans (IV-19), $\alpha^\circ = \kappa^\circ / \rho^\circ C_p^\circ$ est la diffusivité thermique du fluide et la puissance volumique radiative r est négligée (cf. §4).

¹ ($\bar{\tau} : \nabla \mathbf{V}$) représente le taux d'accroissement de l'énergie interne par unité de volume dû à la dissipation visqueuse. Ce terme étant toujours positif, il représente la partie de l'énergie mécanique qui est dégradée de manière irréversible en énergie thermique. Il est en général négligeable; il ne l'est plus quand la diffusivité massique ν est beaucoup plus grande que la diffusivité thermique α du fluide (la chaleur générée localement par les effets visqueux n'est pas diffusée), ou bien quand il y a de très grands gradients de vitesse (écoulement cisailé par une hélice de moteur d'avion, extrusion à grande vitesse, ...). Nous allons voir que ce terme est négligeable dans notre étude.

L'utilisation de l'approximation de Boussinesq et du système d'équations qui en découle est tellement répandue dans la communauté scientifique que l'on finit par oublier les conditions de son application. Pourtant, nous allons voir que dans le cas de la convection naturelle dans l'eau, sa limite de validité est vite atteinte.

La première justification mathématique permettant de définir le cadre de l'approximation de Boussinesq est attribuée à *Mihaljan (1962)*. *Perez Cordon et Velarde (1975)* généralisent cette étude en prenant des hypothèses de départ moins restrictives. Ils permettent que ρ soit fonction de T et de p , et que les autres caractéristiques thermophysiques soient fonction de T , alors que *Mihaljan (1962)* impose que ρ soit fonction de T uniquement, et que les autres caractéristiques thermophysiques soient constantes.

L'étude justifiant la validité de l'approximation de Boussinesq qui a retenu notre intérêt est celle de *Gray et Giorgini (1976)*. Elle s'applique sans restriction aux liquides et aux gaz, la démonstration mathématique est simple et elle permet, pour le problème de Rayleigh-Bénard, le calcul explicite de la région où l'approximation est valable. Comme pour les deux études précédentes, les auteurs partent des équations de conservation complètes, ils font des hypothèses sur les caractéristiques physiques du fluide, rendent les équations adimensionnelles et déterminent l'ordre de grandeur de chaque terme pour voir s'il peut être négligé.

L'originalité de cet article est de se placer dans un cadre encore plus général que celui des deux études précédentes: toute propriété du fluide ϕ , où $\phi = (\rho, \beta, \mu, \kappa, C_p)$, est considérée comme une fonction linéaire de T et de p ; ainsi, les auteurs posent:

$$\phi = \phi^\circ \left(1 + \phi_T'^\circ (T - T^\circ) + \phi_p'^\circ (p - p^\circ) \right) \quad (\text{IV-20})$$

$$\text{où } \phi_T'^\circ = \frac{1}{\phi^\circ} \left(\frac{\partial \phi}{\partial T} \right)^\circ \quad \text{et} \quad \phi_p'^\circ = \frac{1}{\phi^\circ} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right)^\circ$$

et où “ $^\circ$ ” représente l'état de référence défini par (T°, p°) , avec T° la température moyenne du fluide et p° la pression hydrostatique à mi-hauteur de la couche fluide. Pour l'expérience de Ouazzani, et donc pour notre étude, $T^\circ = 23^\circ\text{C}$; $\phi_T'^\circ$ pour l'eau à cette température est donné dans le tableau IV-1. Ces valeurs ont été calculées à partir du tableau III-8 qui donne les propriétés physiques de l'eau entre 20 et 30°C tous les degrés. $\phi_p'^\circ$ n'est pas donné ici; pour l'eau, *Gray et Giorgini (1976)* donnent $\phi_p'^\circ < 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$, quel que soit ϕ .

Les auteurs insistent aussi sur l'importance du choix des grandeurs pour rendre adimensionnelles les équations; ce choix doit être bien approprié au problème étudié

T (°C)	$\beta_T'^{\circ}$ (K ⁻¹)	$\rho_T'^{\circ} = -\beta^{\circ}$ (K ⁻¹)	$C_{pT}'^{\circ}$ (K ⁻¹)	$\mu_T'^{\circ}$ (K ⁻¹)	$\kappa_T'^{\circ}$ (K ⁻¹)
23	4,2 10 ⁻²	-2,4 10 ⁻⁴	-9,6 10 ⁻⁵	-2,3 10 ⁻²	2,5 10 ⁻³

Tableau IV-1 : $\phi_T'^{\circ} = (\phi^{\circ})^{-1} (\partial\phi / \partial T)^{\circ}$: variation des propriétés physiques de l'eau en fonction de la température à T°=23°C.

afin que l'ordre de grandeur de chaque terme qui apparaît dans les équations, et qui représente chacun un mécanisme physique différent, soit correctement évalué. Les choix opérés dans certaines études antérieures sont critiqués.

Pour rendre adimensionnels (T-T°) et (p-p°), Gray et Giorgini choisissent respectivement (T_c-T_f)=ΔT et (ρ°gh). A partir de là, ils définissent dix paramètres, associés aux variations en fonction de T et p des propriétés physiques du fluide (ρ, β, μ, κ, C_p), et qui prennent en compte les caractéristiques du problème de Rayleigh-Bénard traité. Ces paramètres sont: $\varepsilon_{\phi_T} = \phi_T'^{\circ} \Delta T$ et $\varepsilon_{\phi_p} = \phi_p'^{\circ} (\rho^{\circ} gh)$. C'est la détermination de l'ordre de grandeur de ε_{ϕ_T} et de ε_{ϕ_p} qui permet à Gray et Giorgini d'obtenir les trois conditions suivantes qu'il faut vérifier pour que l'approximation de Boussinesq soit acceptable:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{\phi_T}|, |\varepsilon_{\phi_p}| &\leq 0,1 \quad \forall \phi = (\rho, \beta, \mu, \kappa, C_p) & (IV-21) \\ \left| \frac{\beta^{\circ} gh}{C_p^{\circ} \Delta T} \right| &\leq 0,1 & (IV-22) \\ \left| \frac{\beta^{\circ} gh}{C_p^{\circ} Pr} \right| &\leq 0,1 & (IV-23) \end{aligned}$$

La condition (IV-21) permet de satisfaire les deux premières propositions de l'approximation (ρ fonction linéaire de T et les autres propriétés du fluide constantes). Précisément, cette condition limite à 10% l'écart maximum qu'il peut y avoir lorsque, dans les équations, les termes φ du type (IV-20) sont approximés par φ° constant.

La troisième proposition de l'approximation de Boussinesq est vérifiée lorsque les conditions (IV-22) et (IV-23) sont satisfaites. (IV-22) est la condition pour que la puissance volumique liée aux variations de pression (βT(dp/dt)) soit négligeable vis à vis des autres termes de l'équation. (IV-23) est la condition pour que le terme de

condition (IV-21) pour ε_{ϕ_T}	condition (IV-21) pour ε_{ϕ_p}	condition (IV-22)	condition (IV-23)
$\Delta T \leq 2,38^{\circ}\text{C}$	$h \leq 1000\text{m}$	$h/\Delta T \leq 605\text{m}/^{\circ}\text{C}$	$h \leq 27,7\text{km}$

Tableau IV-2 : Traduction en termes de ΔT et h des 3 conditions de validité de l'approximation de Boussinesq dans le problème de Rayleigh-Bénard pour l'eau à 23°C selon Gray et Giorgini (1976).

dissipation visqueuse ($\bar{\tau} : \nabla \mathbf{V}$) soit négligeable par rapport au terme de conduction $\nabla \cdot (\kappa \nabla T)$.

Les trois conditions donnent des limites supérieures à ΔT et à h en dessous desquelles on peut considérer que l'approximation de Boussinesq est valable. En se servant du tableau IV-1, on montre que la condition (IV-21) la plus restrictive pour ΔT est obtenue avec $\beta_T'^{\circ}$ (ensuite vient $\mu_T'^{\circ}$). Le tableau IV-2 donne les limites de ΔT et h pour chaque condition. La première colonne de ce tableau donne une condition assez restrictive sur l'écart maximal de température puisque, pour l'expérience de Ouazzani où h=4,15mm, il faut Ra≤2940 pour qu'elles soient satisfaites¹. Comme Ouazzani a mené ses expériences jusqu'à Ra=4700, dans certains cas nous sortirons légèrement du cadre de l'approximation pour essayer de reproduire numériquement toutes ces expériences. Il est à noter que Tritton (1985) propose aussi des critères de validité de l'approximation de Boussinesq. La démonstration qu'il en donne est, semble-t-il, moins rigoureuse que celle de Gray et Giorgini. Pour Tritton, le critère le plus restrictif sur ΔT est: βΔT<<1. Si on suppose que βΔT≤0,001 satisfait cette condition, on doit avoir ΔT≤4,2°C et donc Ra≤5200.

On remarquera que les critères du tableau IV-2 se rapportant à h ne seront violés que pour des systèmes à très grande échelle: pour des systèmes géophysiques par exemple. Pour les expériences de laboratoire, il seront toujours satisfaits.

Quoi qu'il en soit, le modèle numérique qui sera utilisé dans ce travail consistera à résoudre les équations de Boussinesq (IV-17), (IV-18) et (IV-19). On gardera en mémoire que pour de l'eau à Pr=6,4, on sort du cadre de l'approximation de Boussinesq si Ra>5000.

¹ La condition (IV-21) sur $\mu_T'^{\circ}$ donne ΔT≤4,35°C soit Ra≤5370 dans le cas de la conduite de Ouazzani.

6 Adimensionnalisation

Les équations de la mécanique des fluides et de la thermique comportent en général de très nombreux paramètres physiques. La mise sous forme adimensionnelle de ces équations, obtenue en choisissant des échelles de référence appropriées et en réalisant des groupements sans dimension des paramètres physiques, est une étape très importante de la modélisation d'un problème physique:

- d'un point de vue théorique, elle permet de définir et de décrire des classes d'écoulements que l'on dira "dynamiquement similaires"; c'est pour cela que l'analyse dimensionnelle des équations porte le nom de *similitude*;

- d'un point de vue expérimental ou technologique, l'analyse dimensionnelle est à la base des essais sur modèles réduits;

- d'un point de vue mathématique, la mise sous forme adimensionnelle est sans conséquence sur la nature des solutions obtenues et il est possible de remonter sans peine aux solutions des équations dimensionnelles de départ;

- d'un point de vue numérique, le choix d'échelles de référence prenant en compte la nature de l'écoulement permettra une économie de temps de calcul non négligeable. En effet, lors de la simulation d'écoulements complexes, une grande partie du temps de calcul est consommée dans la résolution de gros systèmes linéaires¹; il est donc indispensable que la matrice de ces systèmes soit bien conditionnée. Or, en cas de choix inapproprié des échelles de référence, l'ordre de grandeur des paramètres adimensionnels peut être considérablement modifié; cela peut, par exemple, "réduire la dominance" de la diagonale principale de la matrice, et donc en détériorer le conditionnement.

Concrètement, la mise sous forme adimensionnelle des équations de Boussinesq (IV-17)-(IV-19) consiste à les réécrire sous la forme suivante:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{IV} - 24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + K_c (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -K_p \nabla P + K_v \nabla^2 \mathbf{v} + K_g \mathbf{T} \mathbf{k} \quad (\text{IV} - 25)$$

¹ Lors des simulations numériques directes de l'écoulement de Poiseuille-Bénard présentées dans ce document, 90% du temps total est utilisé pour la résolution des systèmes linéaires.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + C_c \mathbf{v} \cdot \nabla T = C_\alpha \nabla^2 T \quad (\text{IV} - 26)$$

où K_c , K_p , K_v , K_g , C_c et C_α sont des coefficients adimensionnels associés respectivement aux termes de convection, de pression, de diffusion et de gravité dans l'équation de Navier-Stokes et aux termes de convection et de diffusion dans l'équation de l'énergie. Ils sont déterminés par le choix des échelles de référence. Dans notre problème, ce choix ne pose pas de difficulté car il s'impose de manière naturelle.

Les coordonnées spatiales sont rapportées à l'échelle caractéristique de la conduite: sa hauteur h . Les expériences de Ouazzani montrent que pour la gamme d'écoulements étudiés les composantes de vitesse verticales et horizontales maximales sont du même ordre de grandeur¹; ainsi, la vitesse moyenne de l'écoulement dans la conduite $U^\circ = 2/3 U^{\max}$ peut être choisie comme grandeur de référence. On peut alors prendre pour échelle de temps caractéristique h/U° . $\Delta T = T_c - T_f$ est la différence de température caractéristique du problème de Poiseuille-Bénard; on s'en servira pour rendre adimensionnel le terme $T - T^\circ$. L'échelle de référence de la pression ne s'impose pas a priori; on peut la définir en se servant des grandeurs déjà considérées; nous avons choisi $\rho(U^\circ)^2$ afin que $K_p = 1$.

Les échelles de référence que nous venons de définir nous amènent à résoudre le système d'équations adimensionnelles suivant:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{IV} - 27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\text{Ra}}{\text{Re}^2 \text{Pr}} \mathbf{T} \mathbf{k} \quad (\text{IV} - 28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla^2 T \quad (\text{IV} - 29)$$

où K_c , K_p , K_v , K_g , C_c et C_α sont exprimés en fonction des trois paramètres adimensionnels Ra , Re et Pr^2 (cf. tableau IV-3).

¹ Dans les expériences de Ouazzani, la gamme d'écoulements étudiés correspond à des vitesses moyennes U° variant entre 20 et 350 $\mu\text{m/s}$ (pour $0,1 < \text{Re} < 1,5$) et à des vitesses verticales maximales variant entre 100 et 600 $\mu\text{m/s}$ (pour $1800 < \text{Ra} < 4500$).

² Nous renvoyons le lecteur à la nomenclature et au chapitre I pour avoir la définition et la signification physique de Ra , Re et Pr .

	Cas	K_c	K_p	K_v	K_g	C_c	C_α
convection mixte	(i) Pr usuels Ra modérés Re modérés	1	1	$\frac{1}{Re}$	$\frac{Ra}{Re^2 Pr}$	1	$\frac{1}{Re Pr}$
convection naturelle	(ii) Pr usuels Ra modérés ¹	1	1	Pr	Ra Pr	1	1
	(iii) force de gravité faible ²	1	1	1	$\frac{Ra}{Pr}$	1	$\frac{1}{Pr}$
<i>Cheddadi</i> (1993)	(iv) Pr grands Ra petits	$\frac{Ra}{Pr}$	1	1	1	$\frac{Ra}{Pr}$	$\frac{1}{Pr}$
	(v) Pr petits Ra grands	$\left(\frac{Ra}{Pr}\right)^{1/2}$	1	1	$\left(\frac{Ra}{Pr}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{Ra}{Pr}\right)^{1/2}$	$\frac{1}{Pr}$

Tableau IV-3 : valeurs des coefficients adimensionnels dans l'équation de Navier-Stokes (IV-24) et dans l'équation de l'énergie (IV-25) pour différents types d'écoulements de convection naturelle et mixte.

Dans les étapes de validation du code que nous avons développé, nous avons été amenés à traiter différents problèmes de convection naturelle (problème de Rayleigh-Bénard, cavité différentiellement chauffée) pour des gammes différentes de Ra et de Pr. Il est clair que la vitesse U° ne peut plus servir de grandeur de référence dans ces cas là. En fonction de la nature des écoulements étudiés, d'autres échelles de référence apparaissent naturellement. On trouvera une analyse détaillée de la similitude pour différents types de problèmes de convection naturelle dans la thèse de *Cheddadi* (1993). Le tableau IV-3 résume les résultats de son analyse dimensionnelle en donnant la valeur des coefficients K_c , K_p , K_v , K_g , C_c et C_α en fonction de Ra et de Pr. Le cas (i) correspond au problème de convection mixte (IV-27)-(IV-29).

Dans le tableau IV-3, on remarquera une astuce numérique bien utile pour passer de la résolution d'un problème de convection mixte à celle d'un problème de convection naturelle: il suffit de poser $Re=1/Pr$ (respectivement $Re=1$) dans le cas (i), pour obtenir l'adimensionnalisation du cas (ii) (respectivement du cas (iii)).

¹ Ce cas correspond à une balance d'énergie équilibrée entre les termes d'advection et de conduction dans l'équation de l'énergie (IV-25); les échelles de vitesse et de temps sont respectivement α/h et h^2/α ; les autres échelles restent inchangées par rapport à la convection mixte.

² Ce cas correspond à des forces de gravité faibles par rapport aux forces d'inertie et de viscosité; les échelles de référence de la vitesse et du temps sont respectivement v/h et h^2/v .

Chapitre V

Méthode de résolution et conditions aux limites ouvertes

1 Introduction

On présente la méthode de résolution des équations de conservation, établies au chapitre IV, et les différentes conditions aux limites que nous avons sélectionnées pour fermer le modèle mathématique. L'objectif principal de ce chapitre est d'étudier l'influence de ces conditions sur l'écoulement de Poiseuille-Bénard. On teste et on compare cinq conditions aux limites ouvertes à la sortie du domaine de calcul, ainsi que des conditions aux limites périodiques. On désire quantifier les perturbations provoquées par ces conditions sur l'écoulement de $R_\perp$. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans *l'International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 25, no. 3, (1997). Nous retranscrivons intégralement cet article au §3. Comme il est rédigé en anglais, on présente un résumé en français au §2.

2 Résumé de l'article

Dans un premier paragraphe introductif (§3.1), on présente de manière générale le problème posé par l'implantation de conditions aux limites dites "ouvertes" (OBCs ou

open boundary conditions en anglais), lors de la simulation numérique d'écoulements dans des conduites ouvertes ou semi-ouvertes. On expose ce problème plus spécifiquement dans le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard.

Le §3.2 présente la procédure numérique dans sa globalité. Après avoir rappelé au §3.2.1 le système d'équations modélisant le problème, on expose au §3.2.2 la méthode de calcul que nous avons utilisée. Les équations sont discrétisées par une méthode de type volumes finis et le principe de la résolution est basé sur la méthode du Lagrangien augmenté (*Fortin et Glowinski (1982), Glowinski (1984)*). C'est une méthode d'optimisation sous contrainte qui consiste à rechercher la solution du problème comme un point-selle des champs de vitesse et de pression, la contrainte étant l'incompressibilité ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$). Le point-selle est calculé en utilisant un algorithme itératif de type Uzawa (*Uzawa (1958)*). L'algorithme complet de la méthode est présenté à la figure V-1.

Les méthodes utilisant des algorithmes de type "prédicteur-correcteur" tels que les méthodes SIMPLE ou SIMPLER (*Patankar (1980)*), ou encore les méthodes dites "de projection" (*Chorin (1968), Goda (1979)*) sont très utilisées en mécanique des fluides. La méthode du Lagrangien augmenté semble moins employée. Il est vrai qu'elle possède deux inconvénients: d'une part, elle nécessite la résolution de gros systèmes linéaires en raison du couplage des différentes composantes de vitesse; d'autre part, l'algorithme d'Uzawa étant itératif, la résolution du système linéaire se reproduit plusieurs fois à chaque pas de temps. Elle est donc plus coûteuse en mémoire vive et en temps CPU. Cependant, elle a deux avantages: d'une part, elle ne nécessite pas l'imposition de conditions aux limites sur la pression, ce qui est un point délicat dans les autres méthodes, particulièrement dans le cas des domaines ouverts; d'autre part, elle semble plus robuste. En effet, ayant programmé un code basé sur l'algorithme de *Goda (1979)*, nous avons constaté qu'il ne permet pas de monter aussi haut en Rayleigh que la méthode du Lagrangien augmenté. Le code basé sur l'algorithme de *Goda* diverge dès $Ra=3000$, à $Pr=6.4$, pour certaines conditions aux limites ouvertes: les structures tourbillonnaires qui ne sont pas évacuées proprement provoquent des oscillations dans la solution, puis sa divergence.

Pour avoir plus de détails que ce qui est donné dans l'article sur la manière dont est implémentée la méthode du Lagrangien augmenté, nous renvoyons le lecteur aux thèses de *Khadra (1995)* et de *Traore (1996)*. Il en est de même pour les schémas de discrétisation spatiale et temporelle. Le corps principal des codes utilisés dans ces travaux est identique au nôtre.

Dans l'article, nous mettons l'accent sur la façon d'implanter les conditions aux limites. Nous proposons deux alternatives pour les discrétiser: la "formulation faible" et la "formulation forte" (voir la fin du §3.2.2). Les équations étant discrétisées sur des grilles décalées (cf. figure V-2), nous avons constaté qu'il est préférable, et parfois obligatoire, d'employer la formulation faible pour les grandeurs calculées directement sur la frontière, et la formulation forte dans le cas contraire.

Le §3.2.3 décrit les deux configurations que nous avons utilisées pour calculer les écoulements de Poiseuille-Bénard, ainsi que les cinq sortes de conditions aux limites ouvertes que nous avons testées. La première configuration, notée **Config-1**, est un domaine de calcul rectangulaire, chauffé uniformément en bas, refroidi uniformément en haut, dans lequel on impose un profil de Poiseuille et une condition de Neumann pour T à l'entrée, et l'une des conditions aux limites ouvertes en sortie. **Config-1** permet donc l'étude du développement des $R_{\perp}$ à partir de l'endroit où l'écoulement de Poiseuille passe sur la plaque chauffée. **Config-1** est présentée à la figure V-3.

Les cinq conditions aux limites ouvertes testées à la sortie du domaine de calcul sont présentées de manière très détaillée. On donne pour chacune d'elles la façon dont elle est implémentée. Ce sont les conditions suivantes:

- **OBC1** : on impose un profil de vitesse carré pour simuler la présence d'une paroi poreuse;
- **OBC2** : on impose la conservation de la masse en discrétisant l'équation de continuité;
- **OBC3** : on impose la dérivée seconde de U égale à zéro, i.e. on fait une extrapolation linéaire de U à la frontière;
- **OBC4** : on écrit une condition de type Fourier, c'est-à-dire une condition mixte entre les conditions de Dirichlet et de Neumann;
- **OBC5** : on écrit une condition de type Orlanski, c'est-à-dire une équation de transport, à la vitesse moyenne U^o , pour U , W et T .

La deuxième configuration de calcul, notée **Config-2**, permet la simulation de l'écoulement de Poiseuille-Bénard en utilisant des conditions aux limites périodiques (**PBC** pour l'abréviation anglaise). Cette configuration permet l'étude de l'écoulement parfaitement établi uniquement. La façon dont nous avons procédé pour l'implémenter est présentée à la figure V-4.

Le §3.3 présente et analyse les résultats comparant l'influence sur l'écoulement des différentes conditions aux limites testées. Les comparaisons sont effectuées avec une solution dites de *Référence*, qui correspond à un calcul de la solution sur un domaine deux fois plus long que celui utilisé pour OBC1, ..., OBC5, et dont on ne retient que la première moitié. Certains tests effectuent les comparaisons avec le benchmark d'*Evans et Paolucci (1990)* qui donne une solution précise de l'écoulement de Poiseuille-Bénard 2D à $Pr=2/3$, $Ra=10000$ et $Re=10$. Nous insistons sur le fait que **tous les calculs présentés dans ce chapitre correspondent à des écoulements de $R_{\perp}$ dans la zone d'instabilité absolue.**

Les comparaisons portent sur les isolignes des différents champs (figure V-5), et sur leur profil vertical à la frontière de sortie (figure V-6). Le critère de comparaison le plus significatif est la comparaison des enveloppes des composantes de vitesse maximales et minimales (figures V-7 et V-8). Il permet de quantifier à la fois l'amplitude de la perturbation, et la longueur de la zone perturbée en amont de la sortie. Le tableau V-2 donne, quant à lui, des informations sur la structure interne des $R_{\perp}$ (longueur d'onde et fréquence) et sur le nombre de Nusselt moyen, en dehors de la zone perturbée par les conditions aux limites. On obtient alors les résultats suivants:

- 1- Sans contestation possible, la condition aux limites de type Orlanski (OBC5) est celle qui perturbe le moins l'écoulement. C'est la seule qui permet un écoulement de retour, i.e. un écoulement rentrant, lorsqu'un $R_{\perp}$ est à cheval sur la frontière de sortie.
- 2- L'amplitude des perturbations causées par les quatre autres conditions aux limites ouvertes est au minimum supérieure de 50% à celles causées par OBC5 (cf. tableau V-2).
- 3- Les perturbations causées par les conditions aux limites périodiques sont négligeables; elles sont inférieures à celles causées par OBC5.
- 4- L'amélioration apportée par OBC5 n'agit que sur une importante réduction de l'amplitude de la perturbation. La longueur de la zone perturbée reste approximativement la même, quelle que soit la condition aux limites ouvertes testée.
- 5- La longueur de la zone perturbée augmente quand Ra ou Re diminue. A $Pr=6,4$, elle varie de h pour $(Ra; Re)=(4700, 3)$, à $5h$ pour $(Ra; Re)=(1804, 0,18)$.
- 6- En dehors de la zone perturbée à la sortie du domaine de calcul, les caractéristiques de l'écoulement de $R_{\perp}$ pleinement établi ne varient pas d'une condition aux limites à l'autre. Cela est en accord avec les propriétés des écoulements absolument instables soumis à un forçage extérieur (cf. chapitre III, §2.1 et 2.3).

3 Présentation de l'article:

Augmented lagrangian method and open boundary conditions in 2D simulation of Poiseuille-Bénard channel flow

X. NICOLAS¹, P. TRAORE¹, A. MOJTABI¹ and J.-P. CALTAGIRONE²

¹*Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, UMR CNRS/INP-UPS 5502, Avenue
Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France*

²*Laboratoire MASTER, ENSCPB, Avenue Pey-Berland, BP 108, 33402 Talence Cedex, France*

SUMMARY

The main objective of this study is to compare the influence of different boundary conditions upon the incompressible Poiseuille-Bénard channel flow (PBCF) in a 2D rectangular duct heated from below. In a first technical part, the algorithm used to carry out this work, based on the Augmented Lagrangian Method, is presented. The implementation details of the five different open boundary conditions (OBCs) and the periodic boundary conditions (PBC) tested in the present paper are also given. The study is then carried out for $1800 < Ra \leq 10000$, $0 < Re \leq 10$ and $0.67 \leq Pr \leq 6.4$. The five selected OBCs, applied at the outlet of the computational domain, respectively express the following conditions: a square profile for the velocity (OBC1), mass conservation (OBC2), zero second derivative of the horizontal velocity component (OBC3), a mixed boundary condition combining Dirichlet and Neumann conditions (OBC4), and an Orlanski type boundary condition (OBC5). A good estimation of the perturbation amplitude and of the length of the perturbed zone at the outlet boundary is proposed. It is shown that OBC5 causes very little perturbation in the recirculating flow compared to the other OBCs.

KEY WORDS: open boundary conditions, Poiseuille-Bénard flow, augmented lagrangian, thermal instabilities

3.1 Introduction

Often in computational fluid dynamics (CFD), to compute an outflow, one encounters the problem of open boundary conditions (OBCs). Computational time costs and memory limitations do not permit simulations on large physical domains. To solve the problem mathematically, the domain must be truncated and confined between artificial boundaries onto which numerical conditions are introduced, depending on the nature of the governing equations. However, it is difficult to establish these boundary conditions when the studied fluid system is isolated from the effects of its environment; information about the dynamics of the fluid through the boundary is all the more necessary as the flow is of an elliptic nature (i.e., is made of eddies and recirculations). The OBCs are the result of assumptions which do not reflect exactly the real physical phenomenon; if they are not properly chosen, they can have spurious effects such as numerical instabilities, reflections at the boundary and, generally, errors that can propagate and alter the results throughout all the computational domain. Thus, the choice of good OBCs is crucial in CFD. This choice is closely linked to the physical behaviour of the flow and to the method used to solve the problem.

The main objective of this paper is to study the influence of five different OBCs, at the outlet of the computational domain, upon the thermoconvective structures that are liable to develop when simulating incompressible Poiseuille-Bénard channel flow (PBCF). The PBCF is a mixed convection flow in a horizontal rectangular channel heated from below. If there is no heating and the channel is open, it is a simple Poiseuille flow. If vertical walls close each end of the channel and if the vertical temperature gradient is sufficiently high ($Ra > 1708$, where Ra is the Rayleigh number), it is a thermoconvective Bénard flow. For three-dimensional channels, when the two phenomena are added, the flow structure is quite complex. For a given Prandtl number, Pr , and a given aspect ratio of the duct, several types of thermoconvective structures, depending on Ra and Re (where Re is the Reynolds number), can be observed: there can be either transversal rolls, longitudinal rolls (i.e., thermoconvective rolls with their axes either orthogonal or parallel to the axis of the channel) or intermittent patterns.

The stability of these different configurations is a very interesting problem; this has given rise to many theoretical¹⁻⁷ and experimental^{1,4,8-11} papers. To our knowledge, only two similar papers^{12,13} have recently presented results obtained by means of direct

three-dimensional numerical simulation ^(a). Other works¹⁴⁻¹⁶, carried out in the frame of CVD (Chemical Vapor Deposition), have mainly focused on heat transfer enhancement related to different thermoconvective structures. When studying their stability numerically, several difficulties appear: it is necessary to ensure, first, that the amplitude of the perturbation caused by the OBC does not cause bifurcations between the different types of thermoconvective structures (transversal or longitudinal rolls) and, second, that the length of the perturbed zone above the outlet, is limited compared with the length of the computational domain.

In the present paper, the analysis of influence of OBCs is limited to the two-dimensional PBCF. In this case, the flow structure consists of two-dimensional contra-rotative rolls with their axes transversal to the direction of the average channel flow and moving away with the mean flow. The purpose of this study is to determine the OBC which causes the smallest perturbation among the five selected ones. With this aim in view, the five OBCs are all compared with a benchmark solution of the PBCF that was computed by Evans and Paolucci¹⁷, for $Re=10$, $Ra=10000$ and $Pr=2/3$. They are also compared with simulations involving periodic boundary conditions (PBC). The Nusselt number, the variation in the transversal roll wavelength, λ , and time period, τ , are presented for the different OBCs. Several criteria are also proposed for estimating the length of the perturbed zone and the amplitude of the perturbation; their evolution as a function of the Rayleigh and Reynolds numbers is studied for the following range of dimensionless parameters: $0 < Re \leq 10$, $1800 < Ra \leq 10000$ and $0.67 \leq Pr \leq 6.4$.

The 2D PBCF was already proposed by Sani and Gresho¹⁸ as a test case for an OBC minisymposium that took place in Swansea, UK, on the 10th July 1989. Bottaro¹⁹ and Kobayachi et al.²⁰ compared different OBCs to Evans and Paolucci's benchmark solution. Other test cases were proposed during the minisymposium; the summary and remarks of this event are described in reference 18.

As mentioned before, the choice of the OBCs is partly linked to the method used to compute the solution of the problem. For the present work, a finite volume numerical code, based on the Augmented Lagrangian Method, has been developed. This method consists of an optimisation method to determine a velocity-pressure saddle point under the incompressibility constraint $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$; the saddle-point is computed by

^(a) Très récemment, des résultats de simulations numériques 3D et d'expériences de visualisation concernant l'étude de la stabilité de l'écoulement de Poiseuille-Bénard dans l'air ont été publiés par l'équipe dirigée par T. F. Lin. Ces articles sont: *Chang et al. (1997a, 1997b)*, *Yu et al. (1997a, 1997b)* et *Yu et Lin (1997)*.

an iterative algorithm of Uzawa type^{21,22}. This method, at present, is not frequently used. However, our experience in CFD has shown that it is very efficient in comparison with the classical numerical schemes: it permits us to simulate flows with important constraints, or with strong variations in the control parameters and in the geometry, for which other methods diverge. The Augmented Lagrangian Method was formulated in the publications by Fortin and Glowinski²³ and Glowinski²⁴, in which a variety of problems in the fields of fluid mechanics and elasticity are treated. The first part of this paper presents the main outlines of the method. For more details, see references 23-26 in which numerous remarks on the implementation of the algorithm are available.

3.2 Numerical procedure

3.2.1 Governing equations

The problem is formulated considering the usual hypotheses for a Newtonian and incompressible fluid and the Boussinesq approximation is assumed to be valid. The three conservation equations (continuity, momentum and energy equations), provided with the adequate initial and boundary conditions, enables us to express the solution of the PBCF. In primitive variables (velocity $\mathbf{V}$, pressure P , temperature T) and under its dimensionless form, the system that has to be solved takes the following expression:

$$\begin{aligned} (I) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V} + \frac{Ra}{Re^2 Pr} T \mathbf{k} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \frac{1}{Re Pr} \Delta T \end{array} \right. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (V-1) \\ (V-2) \\ (V-3) \end{array}$$

The reference length, velocity, temperature and pressure for scaling are the height h of the duct, the average velocity U° of the PBCF, the temperature difference $(T_{hot}-T_{cold})$ between the bottom and the top of the channel and $\rho^\circ U^\circ$ (where ρ° is the mass per unit volume of the fluid) respectively. Thus, $Re=U^\circ h/\nu$ is the Reynolds number, $Ra=g\beta(T_{hot}-T_{cold})h^3/\nu\alpha$ the Rayleigh number and $Pr=\nu/\alpha$ the Prandtl number. ν , β and α are the kinematic viscosity, thermal expansion coefficient and thermal diffusion coefficient of the fluid respectively. g is the gravity constant and $\mathbf{k}$ is the vertical unit vector.

The time scheme used to solve (I) is Gear's second order backward implicit scheme ((a, b, c)=(1.5, 2, -0.5) in system (II) below). The time discretization being

uniform, the time step is denoted Δt ; the current time and the following time step (time at which the fields are unknown) are $n\Delta t$ and $(n+1)\Delta t$ respectively. The superscripts of the primitive variables correspond to the time index. In the momentum equation, the buoyancy term $Ra.Tk/(Re^2Pr)$ is treated explicitly; therefore, the two coupled equations (V-2) and (V-3) are solved separately. The advective term $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$ being linearised, the time discretized form of (I) consists of computing $(\mathbf{V}^{n+1}, p^{n+1}, T^{n+1})$ as follows:

$$(II) \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1} = 0 & (V-4) \\ A^n \mathbf{V}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{F} & (V-5) \\ B T^{n+1} = G & (V-6) \end{cases}$$

where

$$\begin{cases} A^n = \frac{a}{\Delta t} + (\mathbf{V}^n \cdot \nabla) - \frac{1}{Re} \Delta \\ \mathbf{F} = \frac{Ra}{Re^2 Pr} T^n \mathbf{k} + \frac{b\mathbf{V}^n + c\mathbf{V}^{n-1}}{\Delta t} \\ B = \frac{a}{\Delta t} + \mathbf{V}^{n+1} \cdot \nabla - \frac{1}{Re Pr} \Delta \\ G = \frac{bT^n + cT^{n-1}}{\Delta t} \end{cases}$$

3.2.2 Augmented Lagrangian Algorithm

In system (II), the main difficulties occur in the computation of equations (V-4) and (V-5); these difficulties are due to the velocity-pressure coupling, the treatment of the continuity constraint $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, and the determination of boundary conditions on pressure. It could be argued that the coupled linear system in $(\mathbf{V}, p)$ corresponding to equations (V-4) and (V-5) can be solved directly; however, the associated matrix is often very large and very ill-conditioned, making it difficult to ensure the stability and convergence of the iterative solver for the linear system. It is often preferred to separate the computation of the velocity from that of the pressure. Here this is achieved by using the Augmented Lagrangian Method^{23,24}.

It has been shown^{23,24} that the variational formulation of the problem “to find $(\mathbf{V}, p)$ in order that (V-4) and (V-5) is satisfied” consists of minimizing a functional (derived from the momentum equation) under the incompressibility constraint $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$. This minimization problem is equivalent to solving a saddle-point search problem for $(\mathbf{V}, p)$ after having introduced the augmented lagrangian associated with the functional and the constraint defined above. The determination of the saddle-point $(\mathbf{V}, p)$

is obtained by the iterative Uzawa algorithm^{21,22}: $(\mathbf{V}^n, p^n)$ being known, $(\mathbf{V}^{n+1}, p^{n+1})$ is obtained with the following external loop with iteration index k (time index is n):

$$(III) \begin{cases} (\mathbf{V}^{k=0}, p^{k=0}) = (\mathbf{V}^n, p^n) \\ A_r^k \mathbf{V}^{k+1} = \mathbf{F}^n - \nabla p^k & (V-7) \\ p^{k+1} = p^k - s(\nabla \cdot \mathbf{V}^{k+1}) & (V-8) \\ \text{When } \|\nabla \cdot \mathbf{V}^{k+1}\| < \varepsilon, \text{ then } (\mathbf{V}^{n+1}, p^{n+1}) = (\mathbf{V}^{k+1}, p^{k+1}) \end{cases}$$

In equation (V-7), $A_r^k = A^k - r\nabla(\nabla \cdot)$. The additional operator $-r\nabla(\nabla \cdot)$ comes from the augmented lagrangian and takes into account the incompressibility constraint; its function is to increase the rate of convergence of algorithm (III). Here r , s and ε are three positive constants. ε has a small value and is used to determine the convergence criterion (in this paper, all the results were obtained with $\varepsilon=10^{-5}$). $\|\nabla \cdot \mathbf{V}^{k+1}\|$ represents the arithmetic mean of the absolute values of $\nabla \cdot \mathbf{V}$ at each mesh point.

Fortin and Glowinski²³ show that the convergence condition for algorithm (III) is $0 < s < 2(r+1/Re)$. They also prove that a greater rate of convergence of (III) is achieved as r increases; but, on the other hand, the bigger r is, the more ill-conditioned the matrix of the linear system (derived from A_r^k in equation (V-7)) will be. So, the choice of r must be a compromise in relation to two conflicting requirements: minimizing the number of iterations on k , and minimizing the number of iterations necessary to solve the linear system. Note that when very small time steps are used (e.g. for unsteady problems), the matrix of the system becomes more diagonally dominant and it is possible to increase the value of r . Fortin and Glowinski experimentally show²³, by several numerical tests, that the optimum rate of convergence is approximately obtained when s is slightly bigger than r , when r is large. Thus, in this research, after having tested several values of r and s between 10 and 5000, we chose $r=400$ and $s=500$, when $\Delta t=0.0005$. The complete algorithm, to move from the time $n\Delta t$ to the time $(n+1)\Delta t$, is presented in figure V-1.

The augmented lagrangian term $-r\nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}^{k+1})$ couples the velocity components and subsequently adds eight diagonals (in 2D problems) in the matrix associated with A_r^k . Therefore, a highly efficient method has to be used to solve the linear system derived from (V-7) since U and W must be calculated at the same time. Since the discretization of the advective term $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$ makes the linear system matrix non-symmetric, and since it is a regular matrix, the BI-CGSTAB (bi-conjugate stabilised

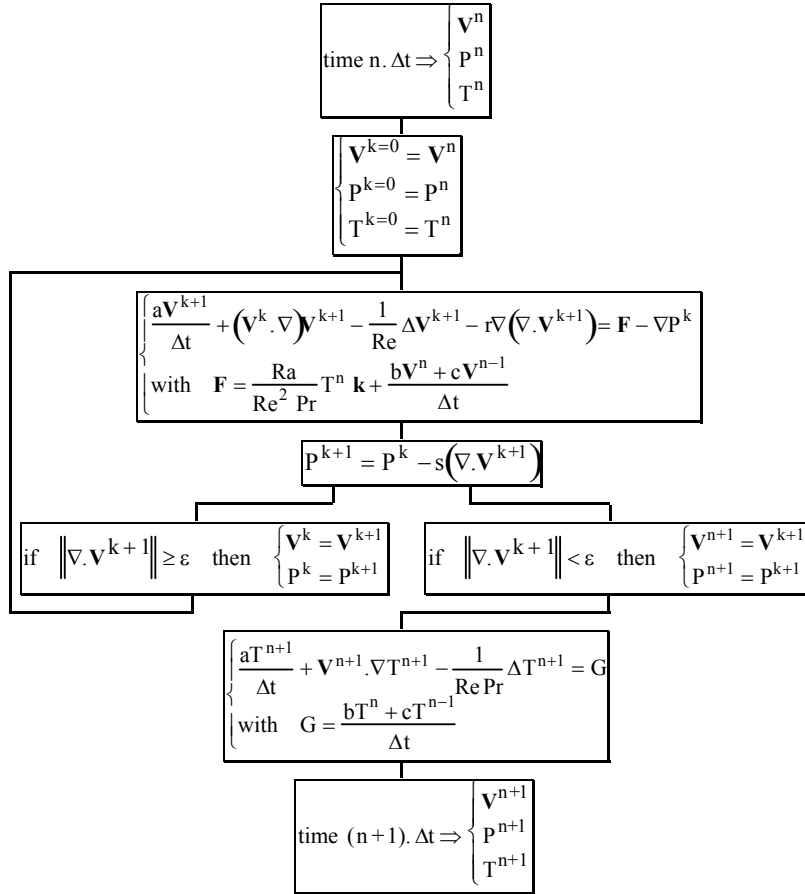


Figure V-1: Augmented Lagrangian algorithm.

gradient) method²⁷ with a preconditioning based on a modified and incomplete Gauss factorisation: MILU²⁸, was the chosen solver. The same solver is used to compute T from the linear system derived from (V-6).

The space discretisation of the momentum equation (V-7) and energy equation (V-6) is generated by using a finite control volume method on a staggered grid²⁹. This grid is Cartesian and uniform in each space direction, with the space step Δx in the horizontal direction and Δz in the vertical direction. P and T are computed at the nodes of the control volumes; U and W, the horizontal and vertical velocity components, are computed at the center of the horizontal (respectively vertical) edges of the control volumes (see figure V-2). A central difference scheme is used for the space discretization of the convective fluxes, while the diffusive fluxes are discretized with central second-order derivative approximations. We note that the finite volume method leads to the following discretized equation for each control volume²⁹:

$$a_P(\phi)\phi_P = a_E(\phi)\phi_E + a_N(\phi)\phi_N + a_W(\phi)\phi_W + a_S(\phi)\phi_S + b(\phi) \quad (V-9)$$

where ϕ stands for one of the three variables T, U or W, and where $a_i(\phi)$ (with $i=P, E, N, W, S$) and $b(\phi)$ are coefficients depending on the discretization scheme. The subscript P refers to the central control volume point (i, k) and subscripts E, N, W and S refer to its neighbouring points to the east, north, west and south, respectively (see figure V-2).

To be able to compute the linear system corresponding to (V-9) for all the control volumes, equation (V-9) must be verified everywhere, even at the outlet boundary. However, this is not always possible when, for example, ϕ_E is unknown on this boundary. To solve the problem, OBCs are implemented. In this paper, two formulations have been used: the "weak formulation" consists of expressing ϕ_E from the discretized form of the OBC and introducing it in equation (V-9). For instance, in the case of figure V-2(a) or V-2(c), applying the Neumann boundary condition $\partial\phi/\partial x=0$ gives $\phi_E=\phi_W$; by introducing this expression in (V-9), the coefficients are modified in the following way:

$$\begin{cases} a_W(\phi) = a_W(\phi) + a_E(\phi) \\ a_E(\phi) = 0 \\ a_P(\phi), a_N(\phi), a_S(\phi) \text{ and } b(\phi) \text{ remain unchanged} \end{cases}$$

The "strong formulation" consists of directly identifying the discretized form of the OBC with equation (V-9). For instance, in the case of figure V-2(b), the Neumann condition on the boundary (OB) gives $\phi_P=\phi_W$. Then the coefficients are:

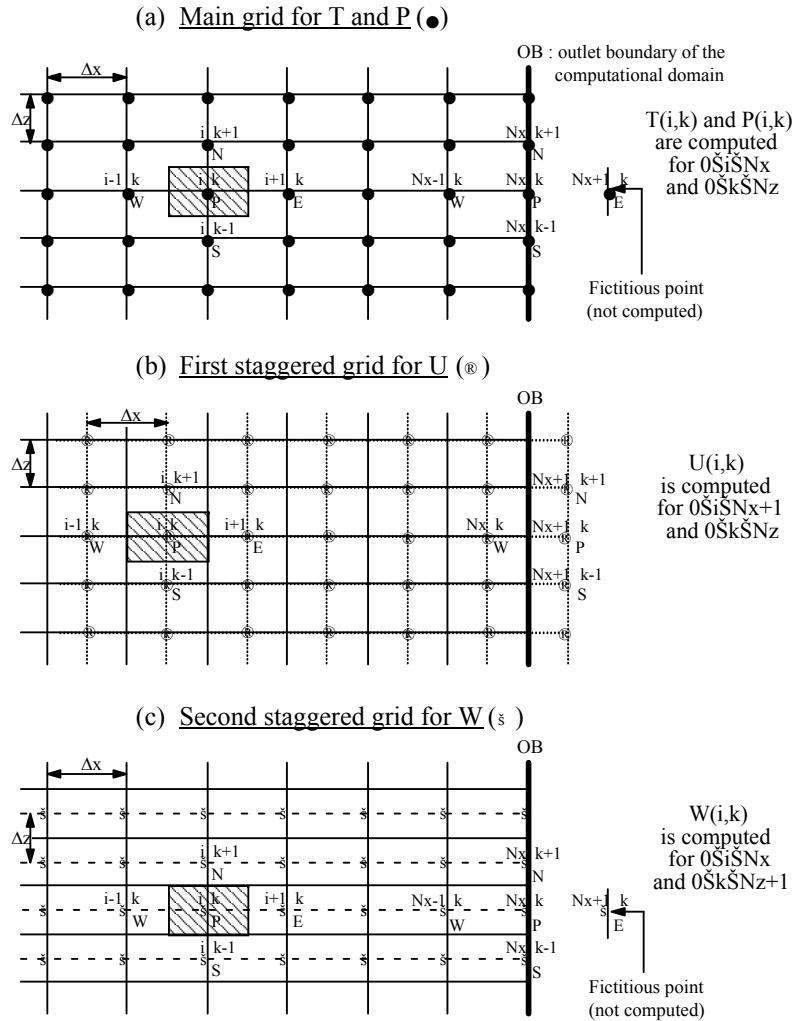


Figure V-2: Grid system and positioning of the variables ((a) T and P; (b) U; (c) W) near the outlet of the computational domain.

$$\begin{cases} a_P(\phi) = a_W(\phi) = 1 \\ a_N(\phi) = a_E(\phi) = a_S(\phi) = b(\phi) = 0 \end{cases} \quad (b)$$

So far, no hypothesis has been made about the nature and geometry of the flow; it has only been assumed that the system was provided with adequate initial and boundary conditions in order to be solved. The conditions that have been implemented to compute the PBCF are presented in the following subsection. Note that one of the advantages of Uzawa's algorithm (III) (compared e.g. with the classical SIMPLE, SIMPLER, PISO, etc. methods) is that no boundary condition on pressure is required. Indeed, owing to the explicit treatment of P in (V-8), only the initial conditions for pressure (and the entire velocity field) are needed to compute P at each time step.

3.2.3 Computational configurations and boundary conditions

Two main computational configurations have been used to compute the PBCF. The first one (*Config-1*) is a rectangular channel, with one of the five tested OBCs at the outlet, and a Poiseuille flow for $\mathbf{V}$ and Neumann boundary conditions for T at the inlet; the second one (*Config-2*) is a rectangular channel with PBC. The description of these configurations and the method used to implement the different OBCs or the PBC, are given below.

a) First configuration (*Config-1*): This is illustrated in figure V-3 and its initial and boundary conditions for ($\mathbf{V}$, P, T) are given in table V-1 (except the five OBCs whose definition and implementation are given in the next subsection).

This configuration allows us to observe the space amplification of the perturbation until nonlinear saturation occurs⁵; when thermoconvection develops in the PBF, three zones can be distinguished (see figure V-3): (i) for $0 \leq x \leq x_{in}$, the inlet zone in which the perturbation is growing; then, after its saturation, (ii) for $x_{in} \leq x \leq x_{out}$, a fully-established periodic flow of transversal rolls; and, (iii) near the outlet, for $x_{out} \leq x \leq L/h$, the zone on which we are going to focus, where the rolls are more or less distorted by the OBC (the longer this zone is, the more spurious the effect of the OBC).

(b) On notera que la "formulation faible" permet de conserver, sur la frontière, un maximum d'information concernant l'équation de conservation que l'on cherche à calculer (et qui, une fois discrétisée peut s'écrire sous la forme (V-9)). En effet, dans ce cas, la condition à la limite sert "uniquement" à évaluer les termes inconnus dans (V-9). Par contre, dans le cas de la "formulation forte", on ne tient plus compte de l'équation de conservation puisqu'on impose fortement la condition à la limite: on discrétise une nouvelle équation sur la frontière.

Note that the length of the inlet and of the outlet can vary according to the values of Ra, Re and Pr. Therefore, computational domains with different aspect ratios L/h (where L and h are the length and the height of the duct respectively) are used to obtain a fully-developed periodic flow for each computed case. For the test case proposed by Evans and Paolucci¹⁷ (Ra=10000, Re=10, Pr=2/3), $x_{in} \approx 2$; therefore we chose L/h=5; for the space and time steps, we took $(\Delta x, \Delta z, \Delta t) = (0.0725, 0.05, 0.0005)$. For Pr=6.4, when (Ra, Re)=(4700, 0.18) and (4700, 3), we chose L/h=10; but, when (Ra, Re)=(1804, 0.18), we took L/h=20 because $x_{in} \approx 9$. In all cases with Pr=6.4, $(\Delta x, \Delta z, \Delta t) = (0.1, 0.05, 0.0005)$, unless stated otherwise.

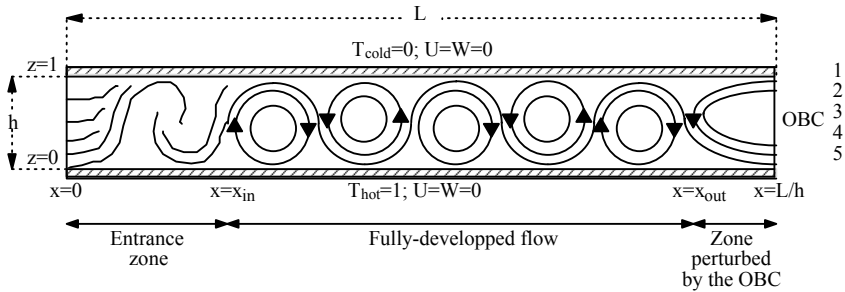


Figure V-3 : *Config-1*, first computational configuration with a Poiseuille flow at the inlet and one of the five tested OBCs at the outlet.

Inlet BC ($x=0$)	Bottom BC ($z=0$)	Top BC ($z=1$)	Initial condition ($t=0$)
$U(0, z, t) = -6(z^2 - z)$	$U(x, 0, t) = 0$	$U(x, 1, t) = 0$	$U(x, z, 0) = -6(z^2 - z)$
$W(0, z, t) = 0$	$W(x, 0, t) = 0$	$W(x, 1, t) = 0$	$W(x, z, 0) = 0$
$(\partial T / \partial x)(0, z, t) = 0$	$T(x, 0, t) = 1$	$T(x, 1, t) = 0$	$T(x, z, 0) = 0$
No BC for P	No BC for P	No BC for P	$P(x, z, 0) = 1 - x$

Table V-1 : Inlet, bottom and top boundary conditions as well as initial conditions for the first computational configuration (with OBC).

b) OBCs at outlet of first configuration: Many OBCs are used by the CFD research community. Frequently, their physical interpretation is difficult, but they permit one to close the problem mathematically. When simulating a flow, no clear criterion permits one to select one of these OBCs over the other; the only way to proceed is to analyse the behaviour of the flow, a posteriori. Subsequently, we decided to test five of the most commonly encountered OBCs. Their definition and the ways in which they are implemented are given below. Note that the strong formulation is used to implement the OBCs for U, while the weak formulation is used for W (except for OBC1) and T.

OBC1:

$$U = U^\circ ; W = 0 ; \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

where $U^\circ = \int_{z=0}^{z=1} -6(z^2 - z) dz = 1$ is the average velocity of the flow

To be more precise, in order to take into account both the no-slip condition on the horizontal plates of the channel and the mass conservation, we took $U(i, 0) = U(i, Nz) = 0$, and $U(i, k) = Nz / (Nz - 1) U^\circ$ for $0 < k < Nz$ (Nz is the total number of meshes in the z direction).

OBC1 is a coarse way to simulate the porous side walls^{8,12} that are often placed at the inlet and outlet of experimental channels in order to avoid direct contact of the measurement zone with the feed pump.

OBC2:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial W}{\partial z} ; \frac{\partial W}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

The discretization of the condition for U gives (see figure V-2(b)):

$$U^{k+1}(Nx + 1, k) - U^{k+1}(Nx, k) = -\Delta x / \Delta z (W^n(Nx, k + 1) - W^n(Nx, k))$$

In strong formulation, this expression implies:

$$\begin{cases} a_P(U) = a_W(U) = 1 \\ b(U) = -\Delta x / \Delta z (W^n(Nx, k + 1) - W^n(Nx, k)) \\ a_E(U) = a_N(U) = a_S(U) = 0 \end{cases}$$

OBC2 is directly obtained by applying the conservation of mass at the outlet boundary. We have verified (not shown here) that OBC2 has exactly the same influence on the numerical solution (same profiles of U, W and T at the outlet, same amplitude of

perturbations, same perturbed length, etc.) as a Neumann boundary condition on U , W and T . The only difference is that the computational time is shorter with OBC2. Indeed, with the augmented lagrangian algorithm, a larger number of loops in k (see system (III) or figure V-1) is necessary to reach the convergence criterion $\|\nabla \cdot \mathbf{V}\| < \varepsilon$ when using the simple Neumann condition. This criterion is more easily verified by OBC2 since it ensures the continuity equation on the boundary. OBC2 must be seen here as a means to close the problem mathematically.

$$\text{OBC3: } \boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 ; \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0}$$

$U^{k+1}(Nx+1, k)$ is obtained explicitly by discretizing the condition for U with a second order upwind scheme in space:

$$U^{k+1}(Nx+1, k) = 2.5U^n(Nx, k) - 2U^n(Nx-1, k) + 0.5U^n(Nx-2, k).$$

Therefore,

$$\begin{cases} a_P(U) = 1 \\ b(U) = 2.5U^n(Nx, k) - 2U^n(Nx-1, k) + 0.5U^n(Nx-2, k). \\ a_E(U) = a_W(U) = a_N(U) = a_S(U) = 0 \end{cases}$$

Note that the semi-implicit treatment of this OBC implies an ill-conditioning of the linear system matrix: $a_P(U)=1$ and $a_W(U)=2.5$.

OBC3 is less restricting than the Neumann boundary condition: whereas the latter implies a constant extrapolation of U at the outlet boundary, OBC3 can be seen as a linear extrapolation of U on this boundary. Note that a second order derivative was also tested for T ; but the results were never as good as those obtained with the first order derivative.

$$\text{OBC4: } \boxed{\frac{\partial U}{\partial x} = -\beta_U(U - U_\infty) ; \quad \frac{\partial W}{\partial x} = -\beta_W(W - W_\infty) ; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -\beta_T(T - T_\infty)}$$

For U , the discretization gives (see figure V-2(b)):

$$U^{k+1}(Nx+1, k) - U^{k+1}(Nx, k) = -\Delta x \beta_U ((U^{k+1}(Nx+1, k) + U^{k+1}(Nx, k)) / 2 - U_\infty(k))$$

and the strong formulation implies:

$$\begin{cases} a_P(U) = 1 + \Delta x \beta_U / 2 \\ a_W(U) = 1 - \Delta x \beta_U / 2 \\ b(U) = \Delta x \beta_U U_\infty(k) \\ a_E(U) = a_N(U) = a_S(U) = 0 \end{cases}$$

For W , the discretization gives (see figure V-2(c)):

$$W^{k+1}(Nx+1, k) - W^{k+1}(Nx-1, k) = -2\Delta x \beta_W (W^{k+1}(Nx, k) - W_\infty(k))$$

and the weak formulation implies:

$$\begin{cases} a_W(W) = a_W(W) + a_E(W) \\ a_P(W) = a_P(W) + 2\Delta x \beta_W a_E(W) \\ b(W) = b(W) + 2\Delta x \beta_W W_\infty(k) a_E(W). \\ a_E(W) = 0 \\ a_N(W) \text{ and } a_S(W) \text{ remain unchanged} \end{cases}$$

OBC4 is a Fourier type boundary condition: this is a mixed condition between Neumann and Dirichlet conditions. In the case of open flows (e.g. flows around an obstacle), it permits the connection of the recirculating local flow with the fully-established parallel flow at infinity ($U_\infty, W_\infty, T_\infty$) by adjusting the three positive constants ($\beta_U, \beta_W, \beta_T$). In the case of channel flows, ($U_\infty, W_\infty, T_\infty$) generally represent the upstream non-perturbed flow. In the present paper, they represent the thermally stratified Poiseuille flow: $U_\infty = -6(z^2 - z)$, $W_\infty = 0$ and $T_\infty = 1 - z$.

Neumann boundary conditions are obtained when $(\beta_U, \beta_W, \beta_T) = (0, 0, 0)$ and Dirichlet boundary conditions when $(\beta_U, \beta_W, \beta_T) = (\infty, \infty, \infty)$. By choosing $(\beta_U, \beta_W, \beta_T)$ between these two limits, the outlet behaviour of the flow can be considerably improved. Since the three constants depend on the nature of the flow and on the chosen non-dimensionalization, the best compromise for $(\beta_U, \beta_W, \beta_T)$ cannot be obtained by a straightforward theoretical principle; it can only be obtained by numerical experiments. For the present work, after having tested and compared several sets of $(\beta_U, \beta_W, \beta_T)$, the optimal value of the triplet was found to be $(\beta_U, \beta_W, \beta_T) \approx (5., 5., 0.)$.

$$\text{OBC5: } \boxed{\frac{\partial U}{\partial t} + U^\circ \frac{\partial U}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial W}{\partial t} + U^\circ \frac{\partial W}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial T}{\partial t} + U^\circ \frac{\partial T}{\partial x} = 0}$$

For U , the discretization gives:

$$\frac{U^{k+1}(N_x+1, k) + U^{k+1}(N_x, k) - U^n(N_x+1, k) - U^n(N_x, k)}{2\Delta t} + \frac{U^\circ}{\Delta x} (U^{k+1}(N_x+1, k) - U^{k+1}(N_x, k)) = 0$$

which implies

$$\begin{cases} a_P(U) = U^\circ + \Delta x / (2\Delta t) \\ a_W(U) = U^\circ - \Delta x / (2\Delta t) \\ b(U) = (U^n(N_x+1, k) + U^n(N_x, k))\Delta x / (2\Delta t) \\ a_E(U) = a_N(U) = a_S(U) = 0 \end{cases}$$

For W, the discretization gives:

$$\frac{W^{k+1}(N_x, k) - W^n(N_x, k)}{\Delta t} + \frac{U^\circ}{2\Delta x} (W^{k+1}(N_x+1, k) - W^{k+1}(N_x-1, k)) = 0$$

which implies

$$\begin{cases} a_W(W) = a_W(W) + a_E(W) \\ a_P(W) = a_P(W) + 2\Delta x / (U^\circ \Delta t) a_E(W) \\ b(W) = b(W) + 2\Delta x / (U^\circ \Delta t) W^n(N_x, k) a_E(W) \\ a_E(W) = 0 \\ a_N(W) \text{ and } a_S(W) \text{ remain unchanged} \end{cases}$$

This boundary condition is a derived and simplified form of Orlanski's boundary condition³⁰. It was initially introduced by Bottaro¹⁹ and later tested by Kobayashi et al.²⁰ on the same configuration as the one used by us. OBC5 can be seen as an approximation of the momentum equation on the boundary; U, W and T are convected by a transport equation whose celerity is the average velocity U° of the flow (U° being defined above). In this way, the reflection of these quantities when passing through the boundary is expected to be avoided.

c) Second configuration (Config-2) with PBC (Periodic Boundary Conditions): To try to free ourselves from the problem of the OBCs we have computed the PBCF with PBC since this flow is spatially and temporally periodic when it is fully-developed. When implementing PBC, it is no longer possible to induce the flow in the channel by enforcing a Poiseuille flow at the inlet; now, it is induced by imposing a constant pressure gradient ΔP° between the inlet and the outlet boundaries during all the computation. Taking ΔP° as new scaling factor for pressure (instead of $\rho^\circ U^\circ$), the

boundary conditions for pressure are $P=1$ at the inlet and $P=0$ at the outlet. Taking $(\Delta P^\circ / \rho^\circ)^{1/2}$ as new scaling factor for velocity (instead of U°), the Reynolds number in system (I) is now defined by $Re = (\Delta P^\circ / \rho^\circ)^{1/2} h / \nu$.

The periodicity for V and T is assumed in the following way: at each time step $(n+1)\Delta t$, (V^n, T^n) obtained at the time step $n\Delta t$ in the center of the duct ($x=L/2h$), is simultaneously enforced as a boundary condition at the inlet and at the outlet of the channel (see figure V-4); in this way, at any moment, the convective roll which goes out from the numerical domain goes into it on the opposite side. The top and bottom boundary conditions, as well as the initial conditions, are the same as those of the first configuration (see table V-1). Note that, because of the special way of proceeding, the number of transversal rolls in the computational domain is necessarily a multiple of 4. Therefore, the transversal roll wavelength λ is imposed by the aspect ratio L/h . In Evans and Paolucci's benchmark case¹⁷, characterized by $Ra=10000$, $Re=10$ and $Pr=2/3$, it was shown that $\lambda \approx 1.44$. Thus, for the simulation with PBC, a channel with $L/h=2.88$ has been chosen so that 4 transversal rolls with the right wavelength appear in the duct; in this case, the steps in space are $(\Delta x, \Delta z) = (0.0725, 0.05)$.

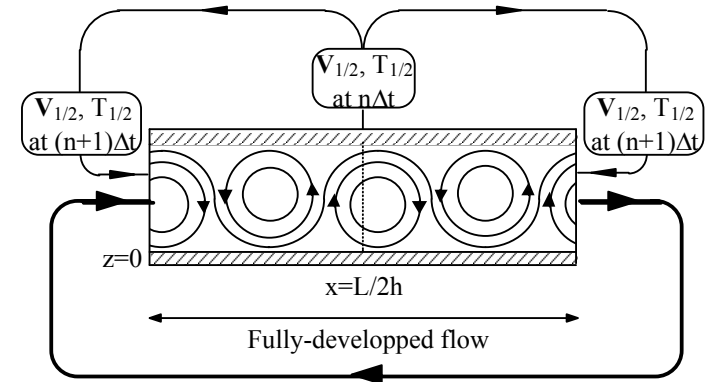


Figure V-4 : Config-2, second computational configuration; simulation of periodic boundary conditions.

3.3 Results and discussion

The results obtained with the five OBCs are compared with a reference solution for each set of Rayleigh, Reynolds and Prandtl numbers. These solutions are called "Reference" on all the figures and tables. They are computed over domains twice as long as those used to test the OBCs, and only their first half is taken into account. Indeed, the perturbation due to the OBC at the outlet of the channel is supposed to be negligible on this first half. For the Reference, the grid is finer and the OBC used is OBC5.

In the first step, all the tests are carried out for the case proposed by Evans and Paolucci. The Reference is computed on a domain of aspect ratio 10 with $(\Delta x, \Delta z) = (0.05, 0.0385)$. Figure V-5 permits us to compare the streamlines, isotherms, iso-values of horizontal velocity component and iso-vorticity contours obtained with the different OBCs and with the Reference. Each solution is recorded at the same time t^* defined as the time when the temperature reaches a local minimum at the fixed position $(x, z) = (L - (5/4)\lambda, h/2)$, where λ is the roll wavelength ($\lambda = 1.44$). From the OBC point of view, this is the most unfavourable time since this is the moment when a thermoconvective roll sits astride the outlet boundary: nearly half of this boundary is submitted to an entrance flow. This is also the most interesting time to evaluate the behaviour of the OBCs faced with return flows. Figure V-5 shows that the solution is very perturbed by OBC1, OBC2, OBC3 and OBC4, whereas OBC5 seems to allow a good undisturbed evacuation of the transversal rolls.

To focus on the perturbation at the outlet boundary, figure V-6 presents the ψ , T , U and W vertical profiles at $x = L/h$ for each OBC and for the PBC compared with the Reference (where ψ is the stream function). The recording time is t^* , as before. The profiles which are the furthest from the reference solution are obtained with OBC2; the behaviours of OBC1, OBC3 and OBC4 are not very good either. On the other hand, OBC5 behaves almost like the Reference (except for W). OBC5 is also the only boundary condition, with OBC3 to a lesser degree, which allows a clear return flow, i.e. a negative horizontal velocity component. The good agreement between the PBC and the Reference can be noted too. Generally speaking, all the results obtained with PBC describe very well the behaviour of the transversal rolls.

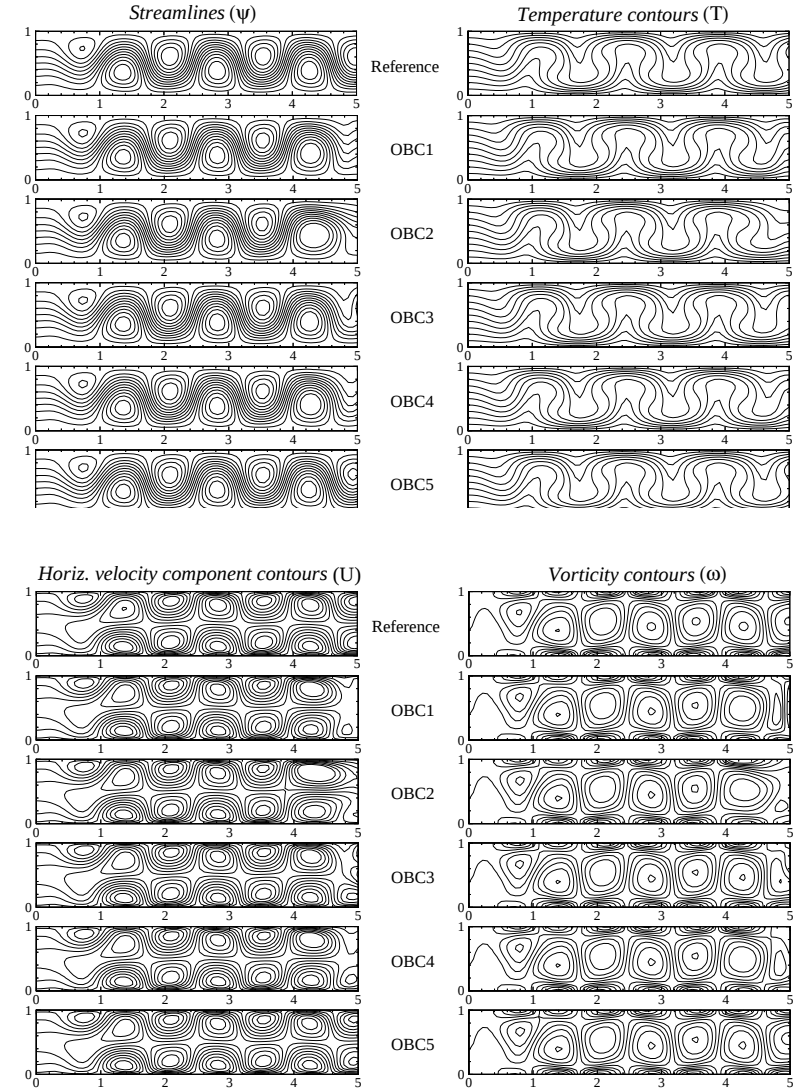


Figure V-5: Field plots for the different OBC treatments, at time t^*
($Ra=10000$, $Re=10$ and $Pr=2/3$).

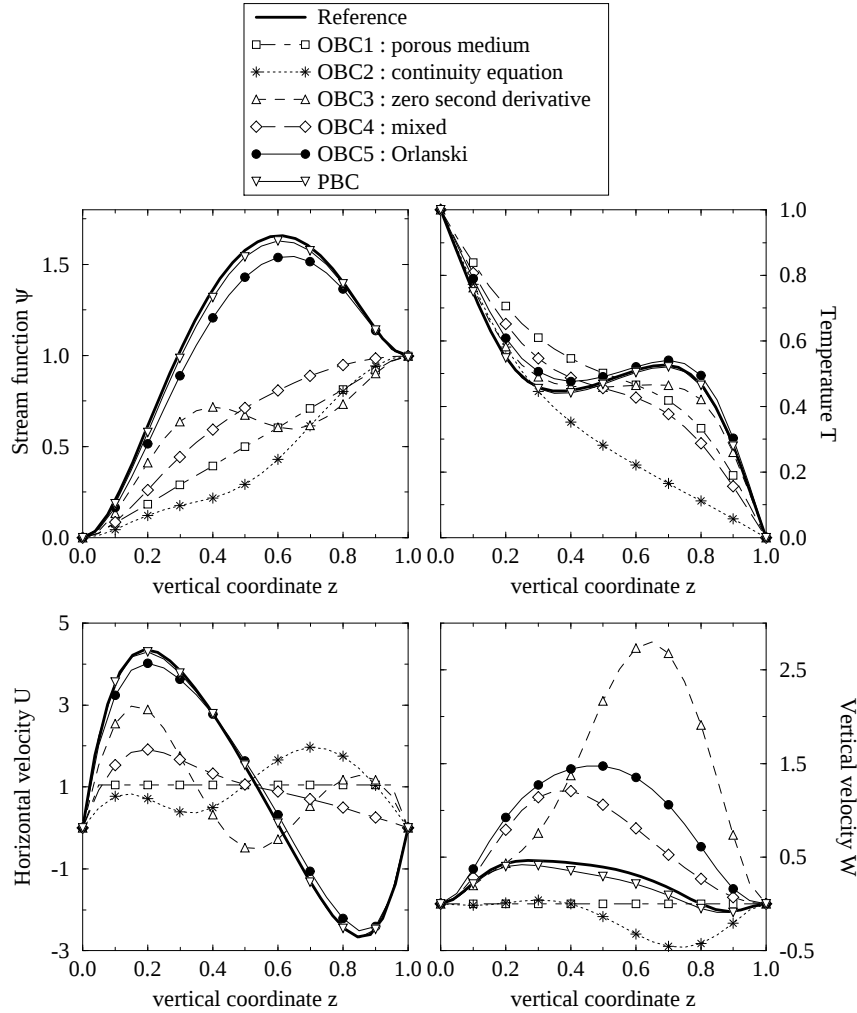


Figure V-6: Field profiles at the outlet boundary, at time t^* , for the different OBCs and the PBC ($Ra=10000$, $Re=10$ and $Pr=2/3$).

The minimum and the maximum values of U and of W in the course of time, in each vertical section (i) of the duct, are presented in figure V-7. More precisely, this figure shows $U_{min}(i)$, $U_{max}(i)$, $W_{min}(i)$ and $W_{max}(i)$ as a function of x , where

$$U_{min}(i) = \min_{t=0, Nt} \left(\min_{k=0, Nz} U(i, k) \right) \quad U_{max}(i) = \max_{t=0, Nt} \left(\max_{k=0, Nz} U(i, k) \right)$$

$$W_{min}(i) = \min_{t=0, Nt} \left(\min_{k=0, Nz+1} W(i, k) \right) \quad W_{max}(i) = \max_{t=0, Nt} \left(\max_{k=0, Nz+1} W(i, k) \right).$$

i and k are the horizontal and the vertical space index respectively, Nt is the total number of time iterations and Nz is the total number of meshes in the z -direction. In this way, the envelopes that are obtained illustrate clearly the magnitude of the perturbation and the length of the perturbed zone for each OBC. The amplitude of the perturbation varies significantly from one OBC to another; for instance, compared with the Reference, the amplitude of the perturbation is less than 7% for OBC5 and reach 100% for OBC1 and OBC2. The length of the perturbed zone is more difficult to determine precisely because the perturbations propagate upstream oscillating slightly. Nevertheless, for the present flow, the length of the perturbed zone varies approximately between h for OBC5 and $1.5h$ for OBC2.

Figure V-7 is also a good means to evaluate the length of the entrance zone. It is approximately $2h$ long. Thus, for $x \geq 2$, the convective flow of transversal rolls can be considered as being established. Table V-2 presents several physical parameters computed in this zone and characterizing the thermoconvective flow; these parameters are the wavelength λ and time period τ of the transversal rolls, and the space and time average Nusselt number $\langle Nu \rangle$ on the bottom and top plates of the channel:

$$\langle Nu \rangle = \frac{1}{Nt \cdot \Delta t} \int_0^{Nt \cdot \Delta t} Nu(t) dt$$

$$\text{where } Nu(t) = \frac{1}{(L/H - 2)} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0^+} (x, t) + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=1^-} (x, t) \right) dx$$

The values of $U_{min}(i)$, $U_{max}(i)$, $W_{min}(i)$ and $W_{max}(i)$ the furthest from the Reference, for $x=2$ to L/h , are also given; these values are respectively denoted U_{min} , U_{max} , W_{min} and W_{max} and the discrepancies with respect to the Reference are given as a percentage below each value. All these results (except $\langle Nu \rangle$) obtained for the five OBCs and the PBC, are compared with the benchmark of Evans and Paolucci¹⁷.

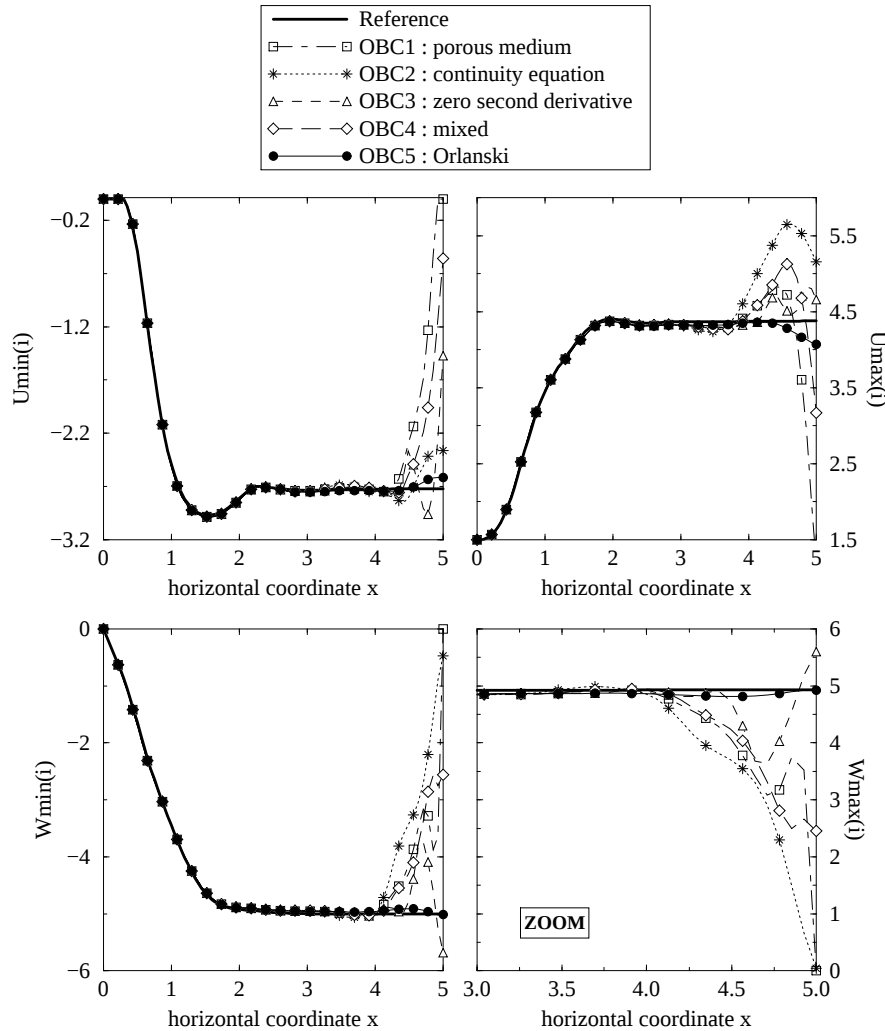


Figure V-7: Envelopes of U and W extrema along the axis of the channel; visualisation of the perturbed zone for the different tested OBCs (Ra=10000, Re=10 and Pr=2/3).

	λ	τ	$\langle Nu \rangle$	Umin	Umax	Wmin	Wmax
Evans & Paolucci ¹⁷	1.4465	1.3319		-2.6495	4.3958	-5.0587	5.0319
Reference	1.439	1.298	2.643	-2.720	4.380	-5.002	4.929
OBC1	1.413	1.298	2.578	0. 100%	1.05 76%	0. 100%	0. 100%
OBC2	1.419	1.296	2.537	-2.348 14%	5.653 29%	-0.469 91%	0.045 99%
OBC3	1.419	1.298	2.638	-1.474 46%	4.828 10%	-3.741 25%	3.641 26%
OBC4	1.406	1.298	2.582	-0.558 80%	3.174 28%	-2.559 49%	2.456 50%
OBC5	1.425	1.296	2.649	-2.616 4%	4.072 7%	-4.909 2%	4.814 2%
PBC	1.440	1.310	2.662	-2.741 0.8%	4.358 0.5%	-4.951 1%	4.859 1.4%

Table V-2 - Comparison of the flow parameters obtained with the different OBCs and with the Reference values, for Ra=10000, Re=10 and Pr=2/3. The percentages give the discrepancy with respect to the Reference.

From table V-2, it appears that the internal structure of the flow is not modified by the choice of the OBCs; indeed, taking into account the margin of error on the measurements (± 0.01 on λ and ± 0.001 on τ), the wavelength and time period of the transversal rolls do not vary as a function of the OBCs; the fluctuations of the Nusselt number are negligible too. On the other hand, the variations in the velocity can be locally very important; the discrepancies of Umin, Umax, Wmin and Wmax with respect to the Reference are small only with OBC5 and with the PBC.

The influence of the OBCs as a function of Ra and Re is studied for flows corresponding to the experiments of Ouazzani et al.¹⁰ i.e. for water flows (Pr=6.4) at an average temperature of 23°C ($\nu=0.93 \cdot 10^{-6}$ m²/s) in a duct of height $h=4.15$ mm. In that aim, figure V-8 gives Wmax(i) as a function of x for three combinations of Ra and Re; Wmax(i) is plotted dimensionally. Ra=1804 is close to the critical Rayleigh number Ra^* characterizing the onset of thermoconvection in the Poiseuille-Bénard flow. Note that the appearance of fully-established thermoconvective rolls is rejected far from the inlet

($x \approx 7$) when $Re=3$, for $Ra=4700$ (see figure V-8(c)). When the Rayleigh number is smaller (e.g. $Ra=1804$) and $Re=3$, the thermoconvective rolls can not appear in the channel at $Pr=6.4$ (see reference 10).

Whatever the combination of Ra and Re , the smallest amplitude of perturbation is always obtained with OBC5; the behaviour of the flow with OBC1, OBC2 and OBC4 is approximately the same (especially at $Ra=1804$, figure V-8(a)); the behaviour of OBC3 is different: the perturbation oscillates at the smallest Reynolds number $Re=0.18$ (figures V-8(a) and V-8(b)), particularly when $Ra=1804$. As it has already been shown in the case of the flow of Evans and Paolucci, the length of the perturbed zone varies very little from an OBC to the other; on the other hand, it varies with Ra and Re : it is around $5h$ on figure V-8(a) for $Ra=1804$ and $Re=0.18$, around $3h$ in figure V-8(b) for $Ra=4700$ and $Re=0.18$ (a bit more for OBC4), and around h in figure V-8(c) for $Ra=4700$ and $Re=3$.

The fact that the length of the perturbed zone increases when Ra diminishes is in good agreement with the linear theory; the latter predicts⁴, in the case of free convection (i.e. with rigid boundaries at the outlet), that the length necessary to obtain fully developed thermoconvective rolls varies as $((Ra-Ra^*)/Ra^*)^{-1/2}$: therefore, near the boundaries, the length in question tends to infinity when Ra tends to Ra^* (with $Ra > Ra^*$). The length of the perturbed zone also increases when Re diminishes because the perturbations caused by the OBCs can go upstream all the more easily as the forced convection is weak.

3.4 Conclusions

In the first part of this paper, the implementation details of the algorithm based on the Augmented Lagrangian Method are given; the implementation of the different open boundary conditions (OBCs) and of the periodic boundary condition (PBC) is also described.

The second part is dedicated to the analyse of the response of the Poiseuille-Bénard channel flow (PBCF) solved with the five different OBCs. In particular, comparison criteria are introduced to finely evaluate the amplitude of the perturbation and the length of the perturbed zone at the outlet boundary of the computational domain. The results show the very good behaviour of the flow when Orlanski type

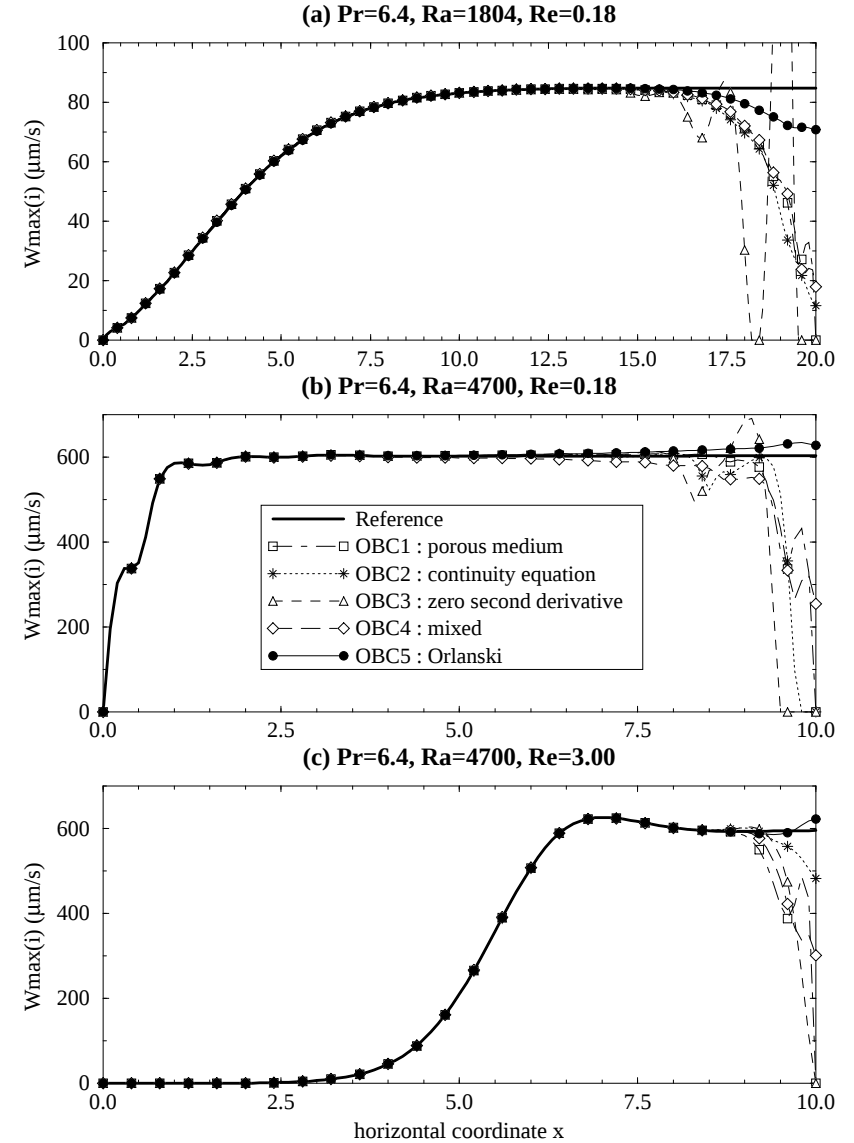


Figure V-8: OBC effect upon the envelope of the vertical velocity component as a function of the Rayleigh and Reynolds numbers.

boundary conditions (OBC5) are used at the outlet; they also show that the flow is comparatively very perturbed with the other four OBCs. On the other hand, the PBC gives excellent results; it also allows us to reduce the length of the computational domain (and subsequently to save storage and computing time), since it is possible to work with only two space periods of the thermoconvective flow.

It is shown that the internal structure of the fully-developed Poiseuille-Bénard flow does not vary as a function of the different tested OBCs: the variations in the wavelength and time period of the transversal rolls and the variations in the Nusselt number are negligible when passing from one OBC to another ^(c).

The improvement obtained with OBC5 is due to the important reduction of the amplitude of the perturbation near the outlet, without any significant reduction of the length of the perturbed zone. The latter remains approximately constant whatever the OBC used. It is also shown that the length of the perturbed zone can vary from h to $5h$ with Ra and Re ; the length increases when Ra and Re diminish.

ACKNOWLEDGEMENTS

The numerical simulations for the present work were performed on the IBM-SP2 computer of the CNUSC (South University National Center of Computation). The

^(c) Nous avons précisé au §2 que tous les calculs présentés dans ce chapitre correspondent à des écoulements de $R_\perp$ dans la zone d'instabilité absolue. En conséquence, connaissant les propriétés des écoulements absolument instables soumis à un forçage extérieur (cf. chapitre III, §2.1 et 2.3), il est normal que les caractéristiques des écoulements de $R_\perp$ pleinement établis se conservent quelle que soit la condition à la frontière de sortie.

Complément bibliographique: très récemment, Roth et al. (1996) ont proposé une étude sur l'influence des conditions aux limites d'entrée et de sortie, sur des écoulements de $R_\perp$ 2D dans la zone d'instabilité absolue. Deux conditions sur W ($W=0$ ou $\partial W/\partial x=0$) et trois conditions sur T ($T=1-z$, $T=1/2$ ou $\partial T/\partial x=0$) sont testées en $x=0$ et en $x=A$; la condition sur U ne change pas: le profil de Poiseuille est imposé en $x=0$ et en $x=A$ (dans leur étude $A=50$).

L'étude confirme que les conditions aux limites de sortie n'ont qu'une influence locale (dans le voisinage de $x=A$) sur λ et sur l'amplitude de U , W et T . Leur influence sur l'écoulement pleinement établi est négligeable. Ce n'est pas le cas des conditions d'entrée: λ et f varient selon le type de condition en $x=0$. Les auteurs expliquent cette différence entre les conditions d'entrée et de sortie par le fait que le taux d'amplification des perturbations est différent pour les x croissants et pour les x décroissants. Ils montrent, par exemple, qu'un changement de condition de sortie induit des variations sur f , 10^{-3} à 10^{-5} fois plus petites qu'avec un changement des conditions d'entrée.

Ils montrent aussi qu'en imposant des "phase-fixing boundary conditions" (i.e. $\partial W/\partial x=0$ ou/et $\partial T/\partial x=0$) en $x=0$, λ diminue légèrement avec x ; avec des conditions de Dirichlet à l'entrée, λ reste constante $\forall x$. (Nous reviendrons sur ces différents points au chap. VI, §5).

authors would like to thank the staff of the CNUSC for their technical support and training.

3.5 References

1. **Y. Mori and Y. Uchida**, 'Forced convective heat transfer between horizontal flat plates', Int. J. Heat Mass Transfer, **9**, 803-817, (1966).
2. **K. S. Gage and W. H. Reid**, 'The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow', J. Fluid Mech., **33**, 21-32, (1968).
3. **K. C. Cheng and R. S. Wu**, 'Axial heat conduction effects on thermal instability of horizontal plane Poiseuille flows heated from below', J. Heat Transfer, **98**, 564-569, (1976).
4. **J. K. Platten and J. C. Legros**, *Convection in Liquids*, Springer Verlag, Berlin, (1984).
5. **H. W. Müller, M. Lücke and M. Kamps**, 'Convective patterns in horizontal flow', Europhysics letters, **10**, 451-456, (1989).
6. **H. R. Brand, R. J. Deissler and G. Ahlers**, 'Simple model for the Bénard instability with horizontal flow near threshold', Physical review. A, **43**, 4262-4268, (1991).
7. **H. W. Müller, M. Tveitereid and S. Trainoff**, 'Rayleigh-Bénard problem with imposed weak through-flow: two coupled Ginzburg-Landau equations', Physical Review E, **48**, 263-272, (1993).
8. **J. M. Luijckx, J. K. Platten and J. C. Legros**, 'On the existence of thermoconvective rolls, transverse to a superimposed mean Poiseuille flow', Int. J. Heat Mass Transfer, **24**, 803-817, (1981).
9. **M. T. Ouazzani, J. P. Caltagirone, G. Meyer and A. Mojtabi**, 'Etude numérique et expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes', Int. J. Heat Mass Transfer, **32**, 261-269, (1989).
10. **M. T. Ouazzani, J. K. Platten and A. Mojtabi**, 'Etude expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes -2', Int. J. Heat Mass Transfer, **33**, 1417-1427, (1990).
11. **M. T. Ouazzani, J. K. Platten and A. Mojtabi**, 'Intermittent patterns in mixed convection', Applied scientific research, **51**, 677-685, (1993).
12. **E. Schröder and K. Bühler**, 'Three-dimensional convection in rectangular domains with horizontal throughflow', Int. J. Heat Mass Transfer, **38**, 1249-1259, (1995).

13. **S. S. Chen and A. S. Lavine**, ' *Laminar, buoyancy induced flow structures in a bottom heated, aspect ratio 2 duct with throughflow* ', Int. J. Heat Mass Transfer, **39**, 1-11, (1996).
14. **H. K. Moffat and K. F. Jensen**, ' *Complex flow phenomena in MOCVD reactors - I. horizontal reactors* ', J. Crystal Growth, **77**, 108-119, (1986).
15. **G. Evans and R. Greif**, ' *Unsteady three-dimensional mixed convection in a heated horizontal channel with applications to chemical vapor deposition* ', Int. J. Heat Mass Transfer, **34**, 2039-2051, (1991).
16. **G. Evans and R. Greif**, ' *Thermally unstable convection with applications to chemical vapor deposition channel reactors* ', Int. J. Heat Mass Transfer, **36**, 2769-2781, (1993).
17. **G. Evans and S. Paolucci**, ' *The thermoconvective instability of a plane Poiseuille flow heated from below: a proposed benchmark solution for open boundary flows* ', Int. J numer. methods fluids, **11**, 1001-1013, (1990).
18. **R. L. Sani and P. M. Gresho**, ' *Résumé and remarks on the open boundary condition minisymposium* ', Int. J numer. methods fluids, **18**, 983-1008, (1994).
19. **A. Bottaro**, ' *Note on open boundary conditions for elliptic flows* ', Numer. Heat Transfer, Part B, **18**, 243-256, (1990).
20. **M. H. Kobayashi, J. C. F. Pereira and J. M. M. Sousa**, ' *Comparison of several open boundary numerical treatments for laminar recirculating flows* ', Int. J numer. methods fluids, **16**, 403-419, (1993).
21. **H. Uzawa**, ' *Iterative methods for concave programming* ', Studies in linear and nonlinear programming, K. J. Arrow, L. Hurwicz and H. Uzawa, Stanford University Press, 154-165, (1958).
22. **R. Temam**, *Navier-Stokes equations - Theory and numerical analysis*, North-Holland, Elsevier, (1977).
23. **M. Fortin and R. Glowinski**, *Méthodes de lagrangien augmenté*, Collection Méthodes Mathématique de l'Informatique, Dunod, (1982).
24. **R. Glowinski**, *Numerical methods for non-linear variational problems*, Springer Series in Computational Physics, Springer, New-York, (1984).
25. **K. Khadra**, *Méthode adaptative de raffinement local multigrille - Application aux équations de Navier-Stokes et de l'énergie*, PhD thesis, University of Bordeaux I, France, (1994).
26. **P. Traore**, *Contribution numérique à l'étude des transferts couplés de quantité de mouvement, de chaleur et de masse dans un jet semi-confiné*, PhD thesis, University of Toulouse III, France, (1996).

27. **H. A. Van Der Vorst**, ' *BI-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear system* ', SIAM J. of Scientific and Statistical Computing, **13**, 631-644, (1992).
28. **I. Gustafsson**, *On first and second order symmetric factorisation methods for the solution of elliptic difference equations*, Chalmers University of Technology, (1978).
29. **S. V. Patankar**, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Series in computational methods in mechanics and thermal sciences, Hemisphere Publishing Corporation, (1980).
30. **I. Orlanski**, ' *A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows* ', J. Comput. Phys, **21**, 251-269, (1976).

Troisième partie

Analyse des résultats

Chapitre VI

Analyse des résultats

Ce chapitre est consacré à l'analyse des résultats concernant l'écoulement de Poiseuille-Bénard obtenus par des simulations numériques directes bidimensionnelles. La plupart des résultats se réfèrent aux expériences de *Ouazzani (1991)* et à la théorie faiblement non-linéaire de *Müller (1990)* basée sur l'équation de Ginzburg-Landau (cf. chapitre III, §2 et §3), afin d'effectuer des comparaisons *quantitatives* entre expériences et théories. Les simulations sont toutes effectuées à $Pr=6,4$, et l'écoulement est étudié de manière systématique pour $Re \leq 4$ et $Ra \leq 4700$ (de rares simulations ont été réalisées à $Ra=6000$). Ainsi, une large gamme de paramètres adimensionnels est couverte puisque, approximativement, $Ra < 1900$ correspond au domaine linéaire, $Ra < 2500$ au domaine faiblement non-linéaire et $Ra > 2500$ au domaine non-linéaire. On rappelle qu'au dessus de $Ra=5000$ on sort du cadre de l'approximation de Boussinesq (cf. §5 du chapitre IV).

Toutes les simulations sont effectuées dans les configurations de calcul *Config-1* et *Config-2* présentées au chapitre V, §3.2.3a et §3.2.3c. Dans tout ce chapitre, pour *Config-1*, on utilise les conditions aux limites de type Orlanski (OBC5) à la sortie du domaine de calcul, les conditions d'entrée ne sont pas modifiées par rapport au chapitre V, et on utilise un rapport de forme longitudinal $A=L/h=10$ (à moins qu'une autre valeur soit précisée explicitement). Dans le cas des conditions aux limites périodiques (*Config-2*), on utilise toujours des rapports de forme A tels que quatre $R_{\perp}$ se développent dans le domaine de calcul. Lors de la présentation des résultats, si rien n'est précisé, il faudra considéré que les calculs sont effectués avec *Config-1*.

La discussion que nous allons mener comporte cinq grandes parties:

§1 - Dans une **confrontation préliminaire avec l'expérience**, on se propose de reproduire numériquement certains des enregistrements de vitesse verticale, W , obtenus par Ouazzani, et d'enregistrer simultanément l'évolution de la composante horizontale de la vitesse, U , et du nombre de Nusselt moyen, Nu . En premier lieu, cette étape a pour but d'évaluer la capacité du code numérique à reproduire l'expérience; nous verrons qu'il y réussit dans la plupart des cas avec une précision surprenante. Le deuxième objectif est de mettre en évidence les points de désaccord entre expériences et simulations afin d'en donner une explication dans la suite du chapitre.

§2 - Dans la deuxième partie, nous étudierons le **développement spatial des rouleaux transversaux** sur toute la longueur de la conduite. Nous montrerons comment évolue W en fonction de x , en dessinant pour de nombreuses valeurs de Ra et de Re les enveloppes stationnaires, $W_{max}(x)$, de la composante de vitesse verticale maximale sur chaque section verticale de la conduite. A partir de chaque enveloppe, on déterminera, d'une part, la longueur caractéristique, l_e , d'établissement des rouleaux transversaux et, d'autre part, l'amplitude de saturation, W_s , de la vitesse verticale lorsque les $R_{\perp}$ sont pleinement établis. On montre que l_e est en très bon accord avec les résultats de la théorie des équations de Ginzburg-Landau. Notamment, la divergence de l_e lorsque le nombre de Reynolds augmente¹ permet de retrouver avec une bonne précision les valeurs de la courbe $Ra_{\perp}^{conv}$ calculée par Müller. Les valeurs de W_s calculées numériquement avec *Config-1* ou *Config-2* sont aussi en bon accord avec la théorie des équations d'amplitude dans son domaine de validité. Avec *Config-2*, on montre que W_s tend vers 0, i.e. que les $R_{\perp}$ disparaissent au profit de l'écoulement de Poiseuille, lorsqu'on coupe la courbe de stabilité linéaire $Ra_{\perp}^*(Re)$.

§3 - La troisième partie est dédiée à l'étude quantitative de l'augmentation du **transfert thermique** occasionnée par la présence des $R_{\perp}$. Un graphe donnant le nombre de Nusselt moyenné en espace et en temps, $\langle Nu \rangle$, en fonction de Re est présenté pour $1800 < Ra < 4700$. Pour $Re=0$, la dépendance en Rayleigh de $\langle Nu \rangle$ est comparée, dans le domaine linéaire, avec une théorie basée sur des développements asymptotiques, et, dans le domaine non-linéaire, avec une équation empirique basée sur des corrélations de nombreux résultats expérimentaux et numériques. Pour des valeurs de Ra modérées, la décroissance de $\langle Nu \rangle$ en fonction de Re est en accord avec les résultats de Müller. Dans tous les cas, les simulations numériques concordent avec les

¹ Une grande partie des résultats présentés dans ce chapitre a été publiée dans l'article de X. Nicolas, A. Mojtabi et J.-K. Platten, *Two-dimensional numerical analysis of the Poiseuille-Bénard flow in a rectangular channel heated from below*, Physics of Fluids, vol. 9, no. 2, (1997).

¹ Voir à ce sujet la présentation de la thèse de Müller, chapitre III, §2.3.3.

travaux auxquels ils sont confrontés. Enfin, dans le cas de *Config-2*, comme avec les courbes $W_s=f(Re)$, on montre à partir du graphe $\langle Nu \rangle = f(Re)$ que la transition $R_{\perp}$ -écoulement de Poiseuille, caractérisée par $\langle Nu \rangle = 1$, suit la courbe de stabilité linéaire $Ra_{\perp}^*(Re)$.

§4 - La quatrième partie synthétise les résultats consacrés à l'**analyse de la stabilité des $R_{\perp}$ vis à vis de l'écoulement de Poiseuille**. Une carte de stabilité de ces deux configurations d'écoulement est établie dans la plan $Ra-Re$, à partir des simulations numériques réalisées sur *Config-1*. Les courbes théoriques $Ra_{\perp}^*$ et $Ra_{\perp}^{conv}$ calculées pour $Pr=6,4$, et les structures convectives observées dans les expériences par Ouazzani sont projetées sur cette carte de stabilité. On confirme que les transitions écoulement de Poiseuille-rouleaux transversaux calculées par les expériences numériques 2D s'accordent bien avec le critère d'instabilité convective $Ra_{\perp}^{conv}$. Dans une étude bibliographique, on présente des résultats très récents sur la stabilité des structures thermoconvectives complexes 3D, telles que les structures "intermittentes" observées par Ouazzani.

§5 - Dans la cinquième et dernière partie, on analyse l'**évolution spatiale et temporelle des $R_{\perp}$ pleinement développés**. Dans un premier sous-paragraphe, on étudie la fréquence fondamentale f des $R_{\perp}$. On montre l'existence d'un effet de blocage des $R_{\perp}$ à très faibles débits ($f=0$ pour $Re \neq 0$ lorsque Re est petit) avec *Config-1* mais pas avec *Config-2*. Ce phénomène est expliqué par l'influence des conditions aux limites. Le deuxième sous-paragraphe concerne l'étude de la variation de la longueur d'onde λ des $R_{\perp}$ en fonction de Re et de Ra . Dans le cas des conditions aux limites périodiques, λ est lié à la valeur de l'allongement $A=L/h$. On montre cependant qu'il est possible de déterminer la longueur d'onde "naturelle" en étudiant la variation de l'amplitude de saturation de la vitesse verticale et du nombre de Nusselt avec A . Dans le dernier sous-paragraphe, on étudie le rapport V_r/U^o de la vitesse des $R_{\perp}$ sur la vitesse moyenne de l'écoulement. On retrouve que V_r/U^o décroît linéairement avec Ra et est indépendant de Re . On montre qu'il est possible de reproduire très précisément le résultat des équations de Ginzburg-Landau. Enfin, on donne un tableau et un graphe récapitulatif, pour $0,1 < Pr < 530$, toutes les lois $V_r/U^o = f(Ra)$ que nous avons pu trouver dans la littérature.

1 Observations préliminaires à partir de la reproduction numérique de certaines expériences de Ouazzani

En guise de premier résultat comparant expériences et simulations numériques, les figures VI-1, VI-2, VI-3 et VI-4 présentent l'évolution temporelle des composantes de vitesse et du nombre de Nusselt moyen pour quatre écoulements différents. Pour la figure VI-1, le nombre de Reynolds est fixé à $Re=0,21$ et le nombre de Rayleigh est augmenté par paliers. Pour les figures VI-2, VI-3 et VI-4, le nombre de Rayleigh est fixé respectivement à $Ra=2420$, 2024 et 1804 , et Re est augmenté graduellement.

Dans chaque figure, la partie (a) donne le signal expérimental de l'évolution temporelle de la composante verticale de vitesse, $W(t)$, résultant de la mesure par anémométrie laser-Doppler; le signal équivalent obtenu par la simulation numérique est donné dans la partie (b). Simultanément à $W(t)$, les enregistrements des parties (c) et (d) donnent, respectivement, l'évolution temporelle de la composante horizontale de la vitesse, $U(t)$, et du nombre de Nusselt moyen, $Nu(t)$. $U(t)$ et $Nu(t)$ sont le fruit des simulations numériques uniquement, car ils n'ont pas été mesurés expérimentalement. Les enregistrements expérimentaux des figures VI-1(a), VI-2(a), VI-3(a) et VI-4(a) sont reproduits de *Ouazzani et al. (1990)* ou de la thèse de *Ouazzani (1991)*.

Les composantes de vitesse u et w sont calculées numériquement de manière adimensionnelle. Afin de pouvoir comparer avec les données expérimentales, les graphes donnent U et W en $\mu m/s$, obtenus par la transformation suivante:

$$\begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} = U^o \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \frac{\nu^o Re}{h} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \quad (VI-1)$$

Les composantes de vitesse calculées numériquement sont enregistrées à mi-hauteur et aux trois quarts de la longueur du canal, i.e. au point $(x; z)=(7,5; 0,5)$. De leur côté, les signaux expérimentaux sont enregistrés à mi-hauteur et à $6,5$ cm de l'entrée du canal, i.e. au point $(x; z)=(15,7; 0,5)$.

Le nombre de Nusselt est défini et calculé de la façon suivante:

$$Nu(t) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0^+} (x, t) + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=1^-} (x, t) \right] dx \quad (VI-2)$$

$$\text{ou} \begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0^+} (x = i\Delta x, t = n\Delta t) \approx \frac{3T^n(i, 0) - 4T^n(i, 1) + T^n(i, 2)}{2\Delta z} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=1^-} (x = i\Delta x, t = n\Delta t) \approx \frac{-3T^n(i, Nz) + 4T^n(i, Nz-1) - T^n(i, Nz-2)}{2\Delta z} \end{cases}$$

Dans le calcul de $Nu(t)$, les flux de chaleur sur les parois horizontales sont moyennés de $x_1=4$ à $x_2=8,5$ de manière à exclure, dans le calcul de l'intégrale, les zones où les $R_\perp$ ne sont pas complètement établis, i.e. l'entrée et la sortie du canal. Ceci est en général suffisant, à part pour les nombres de Rayleigh les plus faibles pour lesquels ces deux zones peuvent devenir beaucoup plus longues (cf. chapitre V ou le §2.1 de ce chapitre).

Les figures VI-1(a) et VI-2(a) montrent que $W(t)$ varie sinusoïdalement autour d'une valeur moyenne nulle; ce signal est caractéristique de l'entraînement à vitesse uniforme par le courant moyen des $R_\perp$. $W_{\perp}^{\max}$, la composante de vitesse verticale maximale des $R_\perp$ sur l'axe médian du canal, croît avec Ra et $(W_{\perp}^{\max})^2$ est une fonction linéaire de Ra (cf. figure VI-5). Le signal expérimental et le signal numérique concordent l'un avec l'autre, aussi bien en amplitude (excepté à $Ra=1804$) qu'en fréquence, f . En effet, à $Re=0,21$, on constate que f reste constante quel que soit Ra^1 , et que $f \approx 6,5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ dans l'expérience et $f \approx 7,15 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ dans la simulation. L'écart est donc de 10% pour la fréquence.

En ce qui concerne l'amplitude, le tableau VI-1 permet de comparer les valeurs expérimentales et numériques de $W_{\perp}^{\max}$ extraites des figures VI-1 à VI-4. L'écart maximum entre les deux séries de données est inférieur à 5%, excepté pour le nombre de Rayleigh le plus faible, $Ra=1804$, pour lequel l'écart atteint 40%. Trois causes peuvent être invoquer pour expliquer ce dernier résultat. La première est attribuée à la difficulté expérimentale de déterminer précisément le nombre de Rayleigh. Ce point a été discuté lors de la présentation de la thèse de Ouazzani, au §3.2.1c du chapitre III. $W_{\perp}^{\max}$ étant proportionnel à $(Ra/Ra_\perp^*-1)^{1/2}$, l'erreur relative sur $W_{\perp}^{\max}$ augmente quand Ra tend vers $Ra_\perp^*$. Ainsi, nous avons vu au tableau III-9 que le nombre de Rayleigh expérimental est déterminé avec une précision de ± 83 unités lorsque $Ra=1804$, et que ceci induit une erreur relative de 56% sur $W_{\perp}^{\max}$. La deuxième cause pouvant expliquer une part de l'écart de 40% peut être attribuée à la position des "sondes de mesure" dans la conduite. Dans l'expérience, le point de mesure est en $x=15,7$ alors qu'il est en $x=7,5$ dans la simulation numérique. Comme nous le

¹ Attention! Nous verrons au §5.1 que $Re \approx 0,21$ est une valeur particulière; pour des valeurs plus élevées ou plus petites que $Re \approx 0,21$, f dépend légèrement de Ra .

montrons au §2, à $Ra=1804$, l'écoulement de $R_\perp$ est pleinement développé en $x=15,7$ alors qu'en $x=7,5$ on se trouve encore dans la zone d'entrée: l'amplitude de W n'a pas encore atteint son maximum. Enfin, la troisième cause est peut-être d'ordre numérique: il se peut qu'à l'approche du point critique, la diffusion numérique ne soit plus négligeable.

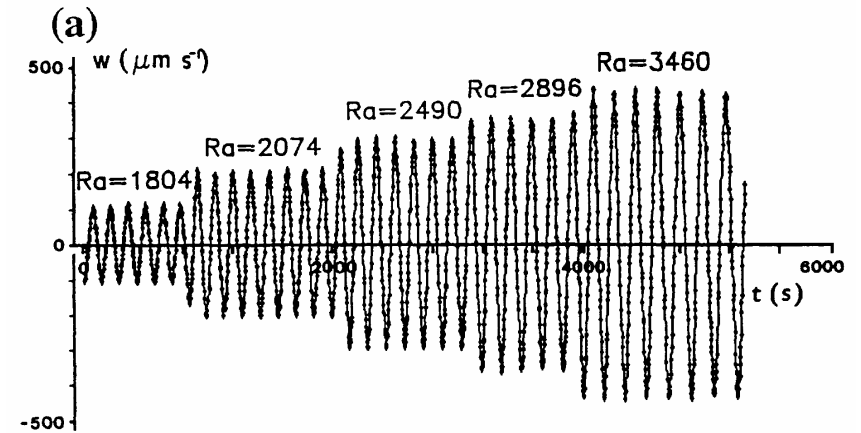


Figure VI-1 : Évolution temporelle des composantes verticale $[W(t)]$ et horizontale $[U(t)]$ de la vitesse, et du nombre de Nusselt moyenné en espace $[Nu(t)]$, lors du déplacement des rouleaux transversaux, pour $Re=0,21$, $Pr=6,4$ et pour Ra augmentant par paliers.

(a) - (ci-dessus) - $W(t)$ en $(x; z)=(15,7; 0,5)$, tiré des expériences de Ouazzani.

(b), (c), (d) - (page de droite) - Signaux résultants des présentes simulations numériques, représentant respectivement $W(t)$ et $U(t)$ en $(x; z)=(7,5; 0,5)$ et $Nu(t)$.

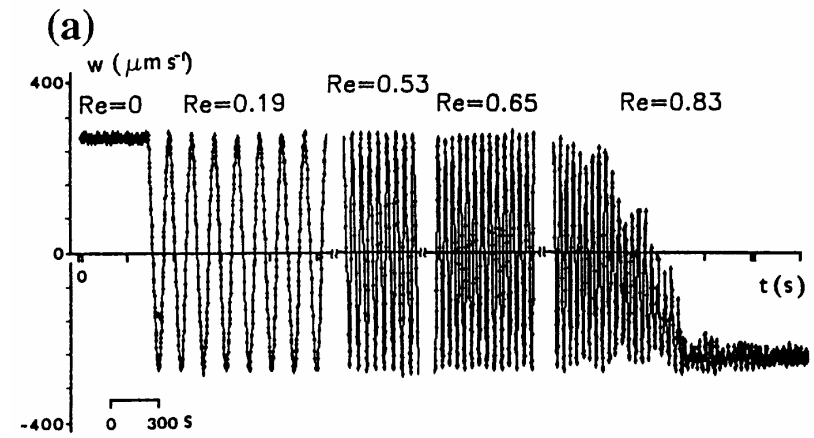
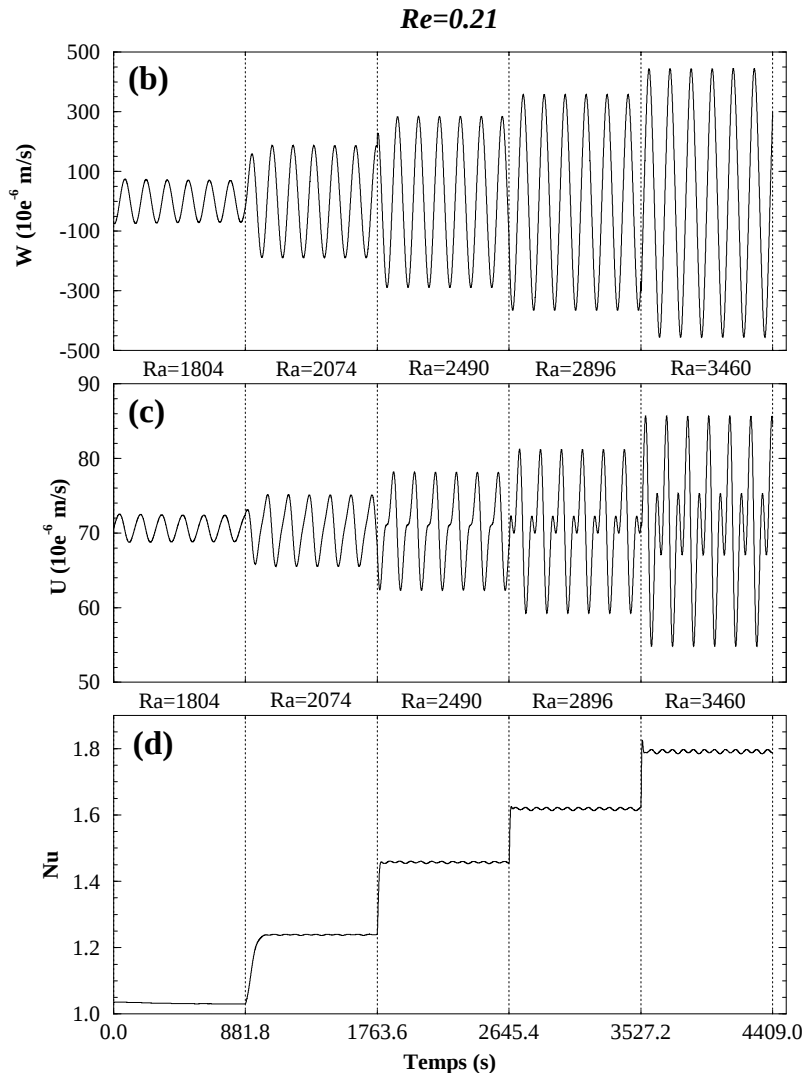


Figure VI-2 : Évolution temporelle des composantes verticale $[W(t)]$ et horizontale $[U(t)]$ de la vitesse, et du nombre de Nusselt moyenné en espace $[Nu(t)]$, lors du déplacement des rouleaux transversaux, pour $Ra=2420$, $Pr=6,4$ et pour Re augmentant par paliers.

(a) - $W(t)$ en $(x; z)=(15,7; 0,5)$, tiré des expériences de Ouazzani.
 (b), (c), (d) - Signaux résultants des présentes simulations numériques, représentant respectivement $W(t)$ et $U(t)$ en $(x; z)=(7,5; 0,5)$ et $Nu(t)$.

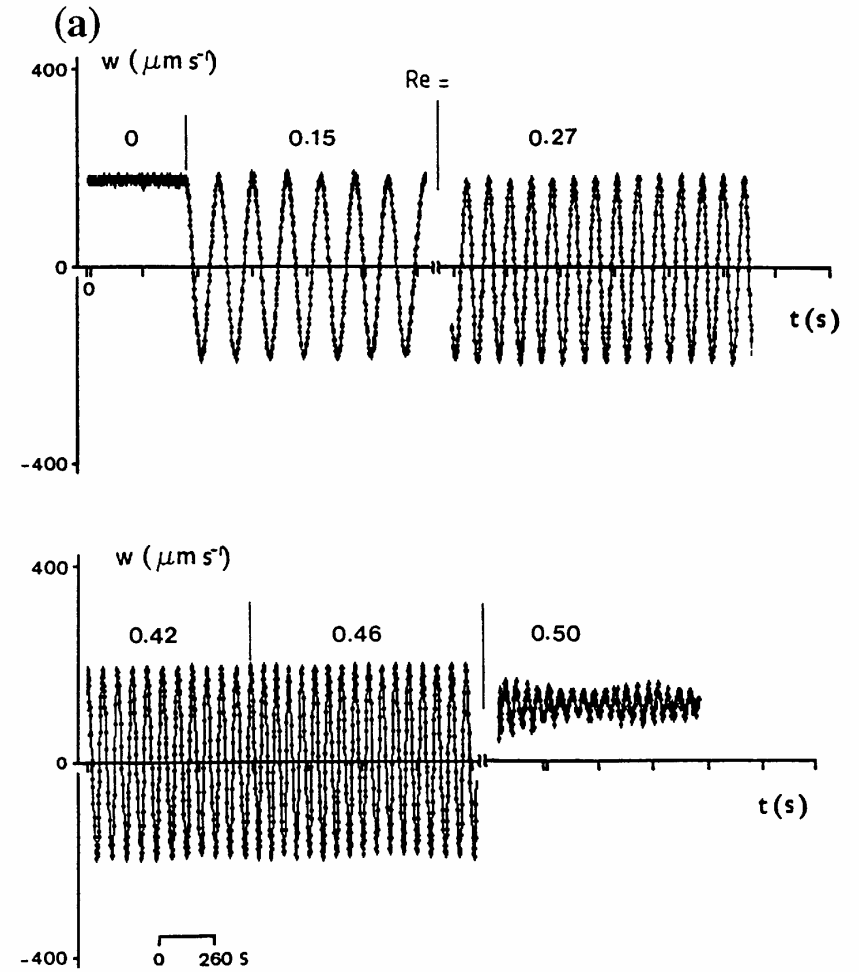
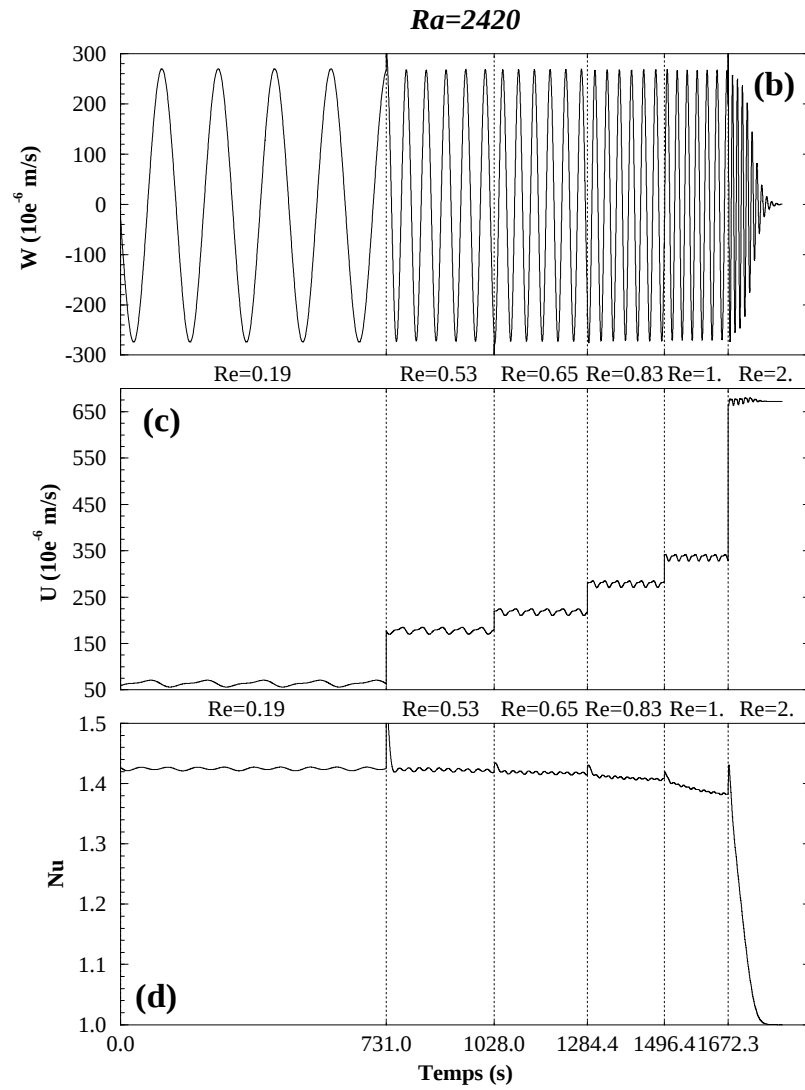
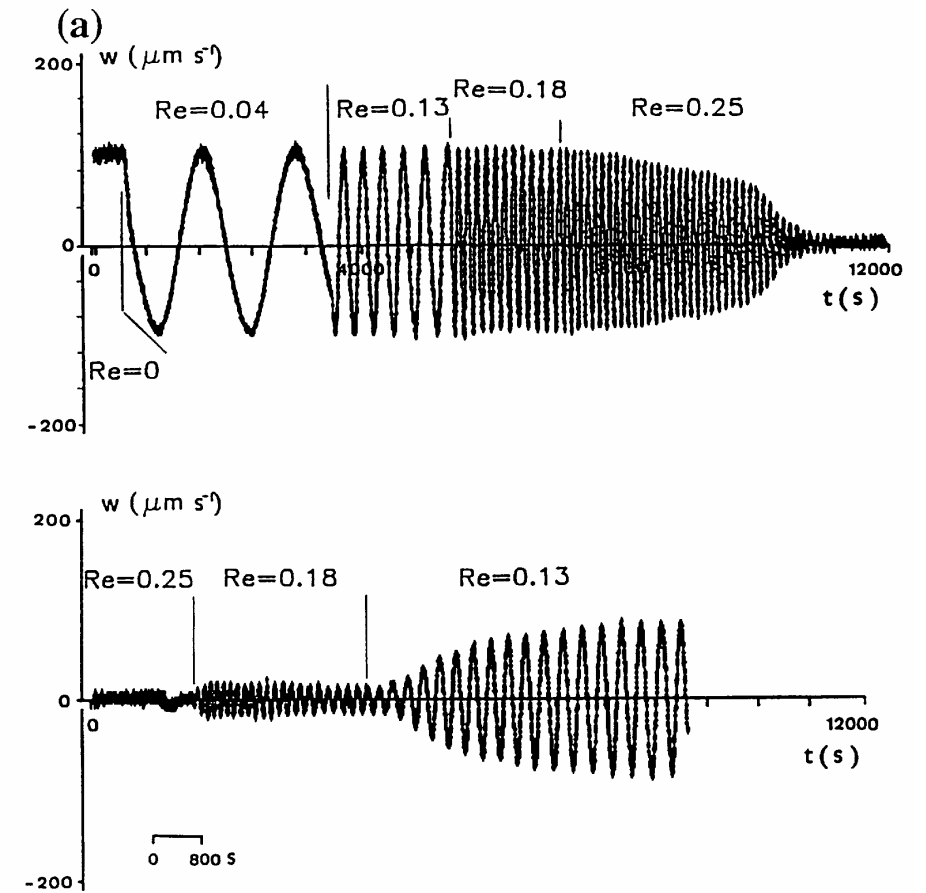
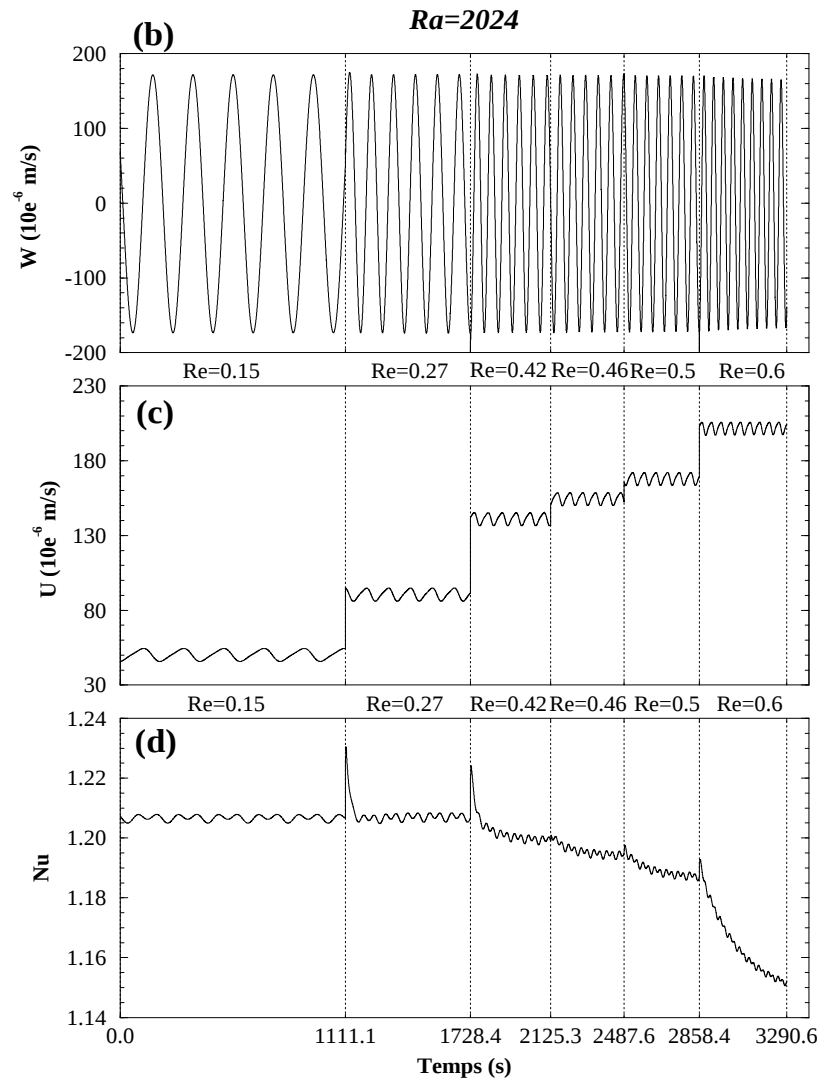


Figure VI-3 : Comme la figure précédente, mais pour Ra=2024.

(a) - $W(t)$ en $(x; z)=(15,7; 0,5)$, tiré des expériences de Ouazzani.(b), (c), (d) - Signaux résultants des présentes simulations numériques, représentant respectivement $W(t)$ et $U(t)$ en $(x; z)=(7,5; 0,5)$ et $Nu(t)$.

Figure VI-4 : Comme les deux figures précédentes, mais pour $Ra=1804$.

(a) - $W(t)$ en $(x; z)=(15,7; 0,5)$, tiré des expériences de Ouazzani.

(b), (c), (d) - Signaux résultants des présentes simulations numériques, représentant respectivement $W(t)$ et $U(t)$ en $(x; z)=(7,5; 0,5)$ et $Nu(t)$.

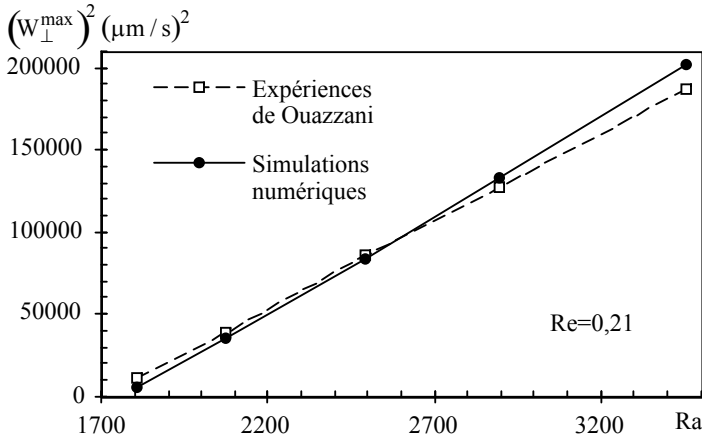
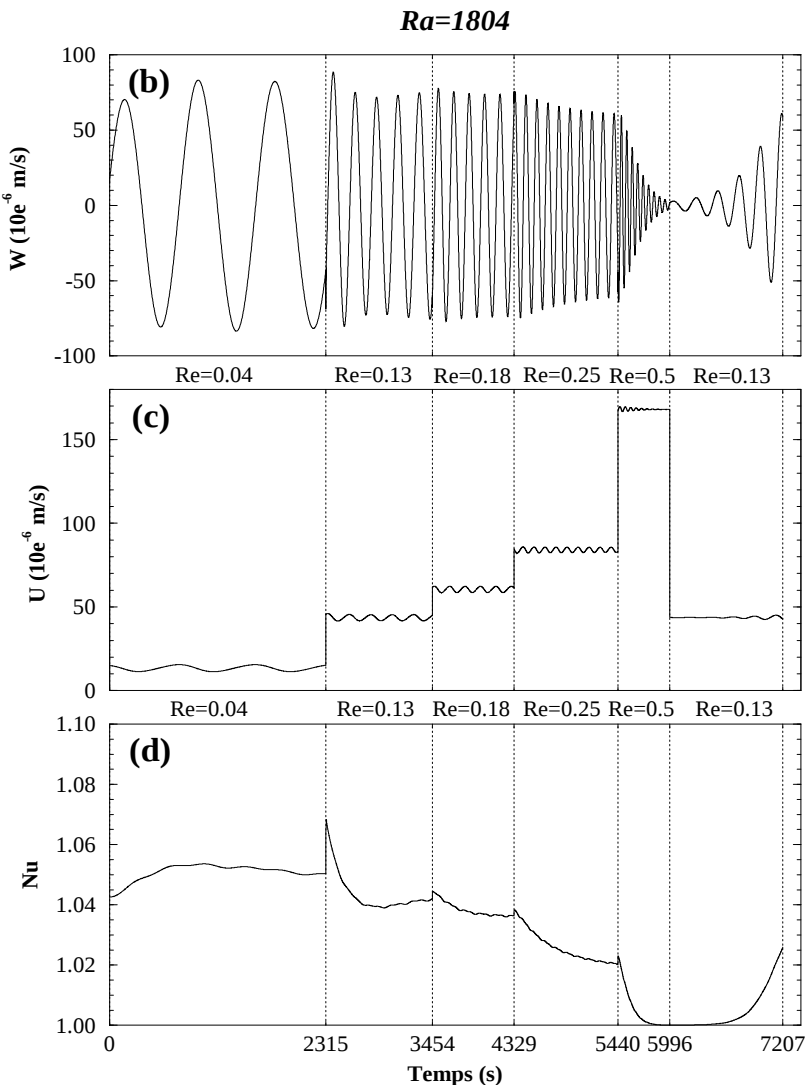


Figure VI-5 : Variation linéaire de $(W_{\perp}^{\max})^2$ en fonction de Ra, à $Re=0,21$; comparaison entre expériences et simulations numériques.

	Ra	Re	$W_{\perp}^{\max} (\mu\text{m/s})$ en $x=15,7$ Expériences de Ouazzani	$W_{\perp}^{\max} (\mu\text{m/s})$ en $x=7,5$ Simulations numériques	écart (%)
Figure VI-1	1804	0,21	106	71	39,5
	2074		197	189	4,1
	2490		292	289	1,0
	2896		357	365	2,2
	3460		432	455	5,0
Figure VI-2	2420	0,19	273	274	0,4
		0,53	273	273	0,0
		0,65	273	273	0,0
Figure VI-3	2024	0,15	180	174	3,4
		0,27	180	174	3,4
		0,42	180	173	4,0
Figure VI-4	1804	0,04	106	84	23,2
		0,13	104	75	32,4

Tableau VI-1 : Comparaison des composantes de vitesses verticales maximales $W_{\perp}^{\max}$, mesurées dans les expériences de Ouazzani ou dans les simulations numériques, lors d'écoulements de $R_{\perp}$.

On peut voir à la figure VI-1(c) que le signal $U(t)$ devient bichromatique au fur et à mesure que Ra augmente. L'analyse de son spectre de Fourier, représenté figure VI-6 pour chaque valeur de Ra , montre que la fréquence fondamentale $f_0=6,8\cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ est environ égale à la fréquence f de $W(t)$ et que le deuxième pic $f_1=14,4\cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} \approx 2f_0$ correspond à la première harmonique¹. Les amplitudes des modes f_0 et f_1 croissent avec Ra . Bien que cela ne soit pas très visible sur les figures VI-2(c), VI-3(c) et VI-4(c), on observe aussi que les amplitudes des modes f_0 et f_1 sont indépendantes de Re . Enfin, dans tous les cas, on montre que la valeur moyenne de $U(t)$ (mesuré en $z=0,5$) correspond à la vitesse maximale du profil de Poiseuille pour le nombre de Reynolds correspondant.

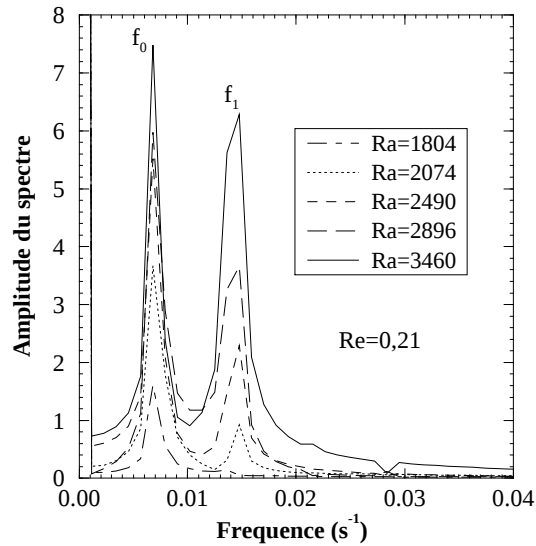


Figure VI-6 : Amplitudes des spectres de la transformée de Fourier de $U(t)$ à $Re=0,21$ pour plusieurs valeurs de Ra .

¹ La transformée de Fourier rapide (FFT) calculée ici pour chaque valeur de Ra est basée sur un signal de 2048 points enregistrés tous les $10\Delta t$ (avec $\Delta t=0,0005$). Comme la précision fréquentielle $\delta f \approx 1/(\text{durée de l'enregistrement})$ on a $\delta f \approx 1,1\cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Pour une FFT réalisée sur un signal de 8192 points, on a une précision fréquentielle $\delta f \approx 0,3\cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ et on obtient $f_0=7,2\cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ et $f_1=14,2\cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.

La figure VI-1(d) montre l'augmentation du nombre de Nusselt, et donc du transfert thermique, lorsque Ra croît. La présence des petites oscillations dans le signal $Nu(t)$ est due à la longueur arbitraire de l'intervalle $[x_1, x_2]$ sur lequel le flux de chaleur est moyenné (cf. formule (VI-2)): cet intervalle ne contient pas nécessairement un nombre fini et pair de $R_\perp$, alors, lors de leur déplacement, la valeur de $Nu(t)$ varie. En conséquence, nous serons amenés à utiliser un nombre de Nusselt moyenné en temps, noté $\langle Nu \rangle$, défini par:

$$\langle Nu \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} Nu(t) dt \quad (VI-3)$$

où l'intervalle de temps $(t_2 - t_1)$ ne prend pas en compte la petite phase transitoire qui peut apparaître lorsqu'on augmente Ra par palier.

Pour chacune des figures VI-2, VI-3 et VI-4, le nombre de Rayleigh reste constant. Si le nombre de Reynolds reste suffisamment petit (pour les valeurs listées dans le tableau VI-1 par exemple), des $R_\perp$ pleinement développés sont observés dans la cellule: $W_\perp^{\max}$, et $\langle Nu \rangle$ dans une moindre mesure, restent constants lorsque Re varie. De plus, la fréquence des rouleaux croît linéairement avec Re (cela sera montré en détail au §5.1).

Par contre, si Re augmente trop, l'écoulement transite vers d'autres structures. A la figure VI-2(a), l'écoulement expérimental transite à $Ra=2420$ et $Re=0,83$ vers une configuration de $R_\parallel$, caractérisée par une composante de vitesse verticale non nulle et constante. Pour la simulation numérique 2D de cet écoulement (figure VI-2(b-c-d)), on transite à $Re=2$ vers l'écoulement de Poiseuille, caractérisé par $W(t)=0$, $U(t)$ constant et $Nu(t)=1$. A la figure VI-3, à un nombre de Rayleigh inférieur ($Ra=2024$), le scénario reste le même lorsque Re augmente, à part que dans l'expérience on obtient une phase de "structures intermittentes" à $Re=0,5$ (cf. chapitre III, §3.2.2a et figure III-24). A la figure VI-4, pour un nombre de Rayleigh encore plus faible ($Ra=1804$), on transite dans les deux cas vers l'écoulement de Poiseuille puisque $Ra < Ra_\parallel \approx 1840$ (cf. tableau I-1). La transition a lieu entre $Re=0,18$ et $Re=0,25$ dans l'expérience, et entre $Re=0,25$ et $Re=0,5$ dans la simulation numérique (une détermination plus précise sera effectuée au §2.2: elle situe la transition à $Re=0,36$). Quand on diminue de nouveau le nombre de Reynolds pour l'amener à la valeur $Re=0,13$, on retrouve un écoulement de $R_\perp$ de même amplitude et de même fréquence.

Cette étude préliminaire a permis de dégager plusieurs points nécessitant une analyse plus approfondie: détermination de la longueur nécessaire à l'établissement des $R_\perp$ pleinement développés, analyse spectrale de $U(t)$ et $W(t)$ en fonction de Ra et Re ,

caractérisation de la transition $R_{\perp}$ -écoulement de Poiseuille dans la simulation 2D et comparaison avec l'expérience, ... Une des observations importantes qui a été faite est qu'un domaine de calcul d'allongement $A=L/h=10$ est insuffisant pour obtenir un écoulement pleinement développé de $R_{\perp}$ aux nombres de Rayleigh les plus faibles (cf. $Ra=1804$ dans le tableau VI-1). En conséquence, dans toute la suite de ce chapitre, on utilise un domaine de calcul de rapport de forme $A=20$ lorsque $Ra=1780$, 1804 ou 1836. Ceci permet d'obtenir des résultats en meilleur accord avec les expériences.

2 Développement spatial des rouleaux transversaux

Au chapitre III, §3.2.2b et figure III-26, nous avons vu que dans les expériences de Ouazzani, le nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des $R_{\perp}$ se compare favorablement avec $Ra_{\perp}^{conv}$, mais pas avec $Ra_{\perp}^*$. Dans cette partie, en étudiant le développement spatial des $R_{\perp}$ et la variation avec Re de la longueur nécessaire à leur établissement (l_e), on retrouve numériquement, à $Pr=6,4$, des résultats concernant $Ra_{\perp}^{conv}$ obtenus expérimentalement pour $Ra < Ra_{\perp}^*/=1840$ et théoriquement pour $Ra < 2500$. De plus, on montre que l'outil numérique permet d'accéder à des résultats pour les forts nombres de Rayleigh, au delà du domaine de validité de l'approche basée sur les équations de Ginzburg-Landau.

2.1 Enveloppes des amplitudes maximales de vitesse verticale

Dans un premier temps, on présente aux figures VI-7 et VI-8 des enveloppes de W pour de nombreuses valeurs de Ra et de Re . Ces enveloppes sont du même type que celles qui ont été calculées au chapitre V pour mettre en évidence l'influence sur l'écoulement des conditions aux limites de sortie. On rappelle que les enveloppes sont invariantes au cours du temps et qu'elles montrent l'évolution de la composante de vitesse verticale maximale le long de l'axe de la conduite. Pour être précis, les courbes tracées aux figures VI-7 et VI-8 donnent W_{max} en fonction de x , où

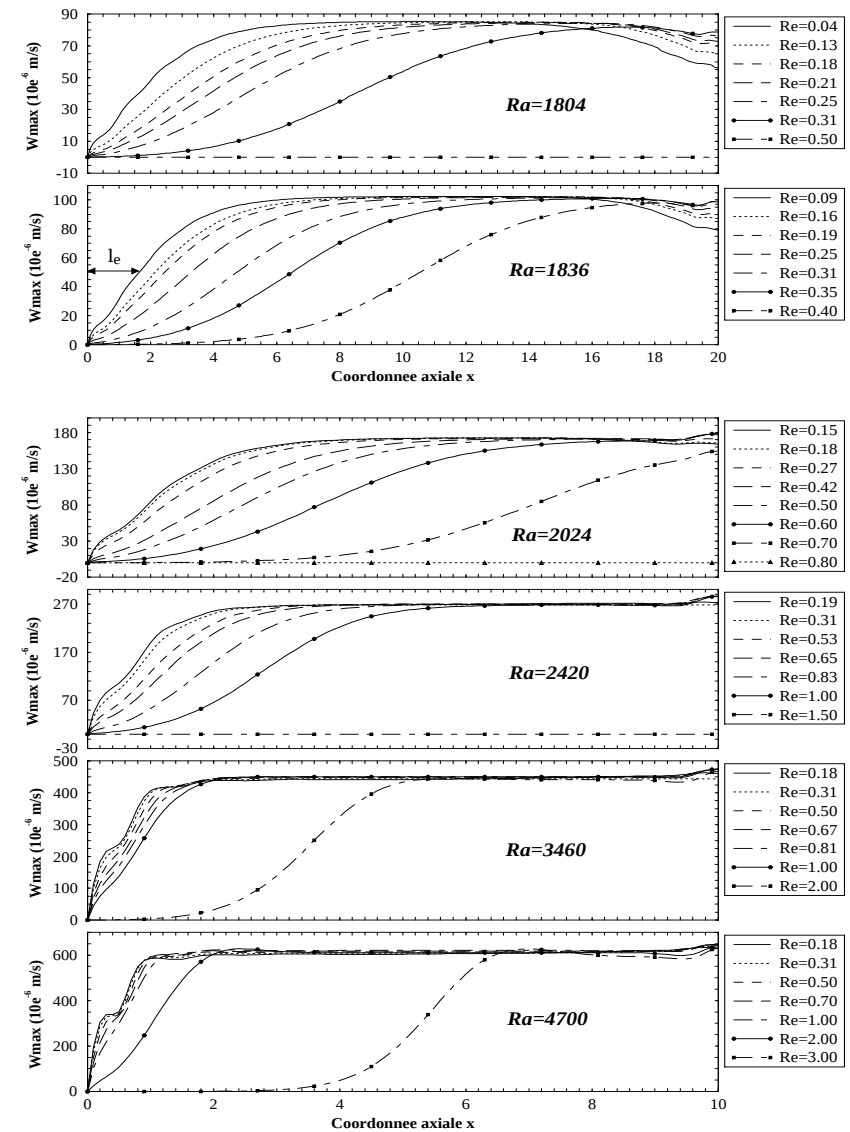


Figure VI-7 : (cf. page de droite)

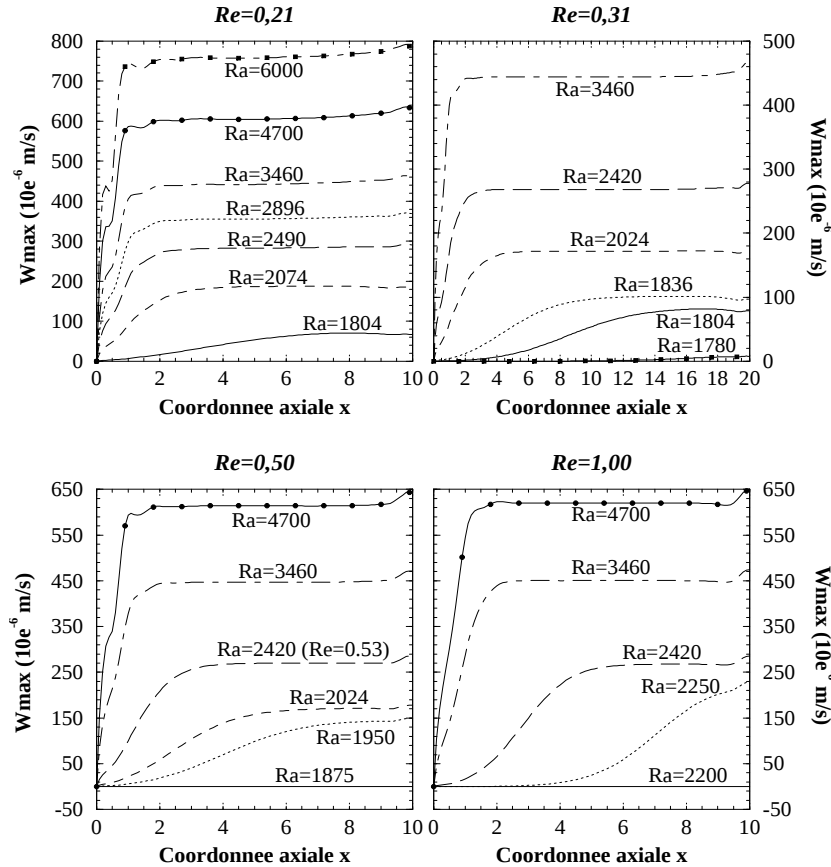


Figure VI-8 : Enveloppe $W_{\max}(x)$ pour quatre valeurs de Re fixées et pour $Pr=6,4$; notez que $A=L/h=10$ pour $Re=0,21$, $0,5$ et 1 et que $A=20$ pour $Re=0,31$.

Figure VI-7 (page de gauche) : Enveloppe $W_{\max}(x)$ pour plusieurs valeurs de Ra fixées et pour $Pr=6,4$ (représente l'évolution spatiale de la composante maximale de W sur toute la longueur de la conduite); notez que $A=L/h=20$ pour $Ra=1804$ et 1836 et que $A=10$ pour les autres valeurs de Ra . La longueur caractéristique de l'établissement des $R_{\perp}$, l_e , représentée par une double-flèche à $Ra=1836$ et $Re=0,09$, est définie par $W_{\max}(l_e)=W_s/2$, où W_s est l'amplitude de saturation de W .

$$W_{\max}(x) = \max_{t \in [t_1, t_2]} \left(\max_{z \in [0, 1]} W(x, z, t) \right) \quad \text{avec } t_2 > t_1 \text{ et } t_1 > t_i \quad (\text{VI-4})$$

et où t_i est le temps indiquant la fin d'une phase d'écoulement transitoire.

Tout d'abord, intéressons-nous à la figure VI-7. Celle-ci permet de confirmer des observations faites au chapitre V, au sujet de la variation de la longueur de la zone perturbée par les conditions aux limites de sortie. En effet, grâce au nombre important d'expériences numériques présentées sur cette figure, on voit très clairement que la longueur de la zone perturbée augmente lorsque Re ou Ra diminue. Pour Ra et Re les plus faibles, i.e. à $Ra=1804$ et $Re=0,04$, cette zone atteint 6 fois la hauteur de la conduite. Cela donne une raison supplémentaire de prendre des grands domaines de calcul aux faibles valeurs de Ra .

Maintenant, focalisons-nous sur le cas $Ra=1804$, pour lequel nous avons vu au tableau VI-1 que les résultats expérimentaux et numériques ne s'accordent pas. On relève que l'amplitude de saturation, W_s , définie par

$$W_s = \max_{x \in [x_e, x_s]} W_{\max}(x) \quad (\text{VI-5})$$

est égale à $85 \mu\text{m/s}$ dans les simulations. Elle est atteinte en $x \approx 9$ à $Re=0,04$, en $x \approx 11$ à $Re=0,13$ et en $x \approx 15$ à $Re=0,21$. Cela explique pourquoi les valeurs obtenues au tableau VI-1 par les enregistrements numériques en $x=7,5$ sont systématiquement plus petites que les valeurs expérimentales enregistrées en $x=15,7$. On note pourtant qu'un écart de 20% persiste avec les expériences puisque pour ces dernières $W_s \approx 105 \mu\text{m/s}$. On discutera ce point au §2-3 de ce chapitre.

La figure VI-7 montre donc que pour Ra fixé, les enveloppes $W_{\max}(x)$ se développent de plus en plus loin de l'entrée lorsque Re augmente. Cela traduit le fait que les $R_{\perp}$ naissent de plus en plus en aval de l'entrée. A $(Ra; Re)=(1804; 0,5)$, $(2024; 0,8)$ et $(2420; 1,5)$, on observe même que $W_{\max}=0$ quel que soit $x \in [0, A]$, c'est à dire que l'écoulement de Poiseuille se maintient sur toute la longueur du domaine de calcul. Ce comportement est en parfait accord avec les observations de Müller *et al.* (1989, 1990, 1992a) pour le problème de Poiseuille-Bénard, mais aussi avec celles de Cross (1986a, 1988) et Zimmermann *et Müller* (1992) pour les écoulements de fluides binaires avec effet Soret entre deux plaques horizontales, ou de Babcock *et al.* (1994) et Büchel *et al.* (1996) dans des écoulements de Taylor-Couette avec écoulements. Ces auteurs ont montré que les "travelling-waves" (l'état d'ondes progressives dans leur

problème, ou les $R_{\perp}$ dans notre cas) se situent de plus en plus près de la sortie de la conduite lorsque Re augmente.

En ce qui concerne la figure VI-8, on observe que les enveloppes se forment de plus en plus en aval de l'entrée lorsque Ra décroît pour Re fixé. On obtient l'écoulement de Poiseuille à $(Re; Ra)=(0,5; 1875)$ et $(1; 2200)$. On peut noter que l'on serait arrivé à la même conclusion pour $(Re; Ra)=(0,31; 1780)$ si le calcul avait été mené sur un domaine de rapport de forme $A=10$. Mais l'enveloppe calculée sur un domaine de rapport de forme $A=20$ montre que les $R_{\perp}$ se développent au delà de $x=10$.

2.2 Longueur d'établissement des rouleaux transversaux

Lors de la discussion du cas $Ra=1804$ de la figure VI-7, nous avons vu qu'il était difficile de donner précisément la position x en laquelle l'amplitude $W_{\max}(x)$ atteint sa valeur de saturation W_s . Aussi, en suivant la proposition de Müller dans sa thèse, nous décidons de définir la longueur caractéristique du développement spatial des $R_{\perp}$, notée l_e , par:

$$W_{\max}(l_e) = W_s / 2 \quad (\text{VI-6})$$

l_e est représentée par une double-flèche pour la courbe à $Ra=1836$ et $Re=0,09$ de la figure VI-7.

Restons un moment sur cette figure, et concentrons-nous plus longuement sur le cas $Ra=1836$. Pour chaque valeur de Re , on peut déterminer l_e à partir de chacune des enveloppes. On reporte la fonction $l_e=f(Re)$ sur la figure VI-9. On constate alors que la courbe $l_e=f(Re)$ à $Ra=1836$ diverge pour $Re \approx 0,44$. Ce comportement coïncide très bien avec la courbe théorique obtenue par Müller à partir des équations d'amplitude (courbe en trait gras) et plutôt bien avec les résultats expérimentaux de Ouazzani (courbe en pointillés). On observe aussi que les courbes à $Ra=1804$ et 2024 divergent. Bien sûr, la divergence de l_e est obtenue plus tôt à $Ra=1804$ (en $x \approx 0,36$) et plus tard à $Ra=2024$ (en $x \approx 0,8$).

Ainsi, la distance à partir de l'entrée nécessaire à l'apparition des $R_{\perp}$ tend vers l'infini en une valeur particulière de Re . On montre (cf. Chomaz et al. (1988)) qu'en cette valeur de Re , la vitesse de groupe v_g du paquet d'onde atteint aussi une valeur

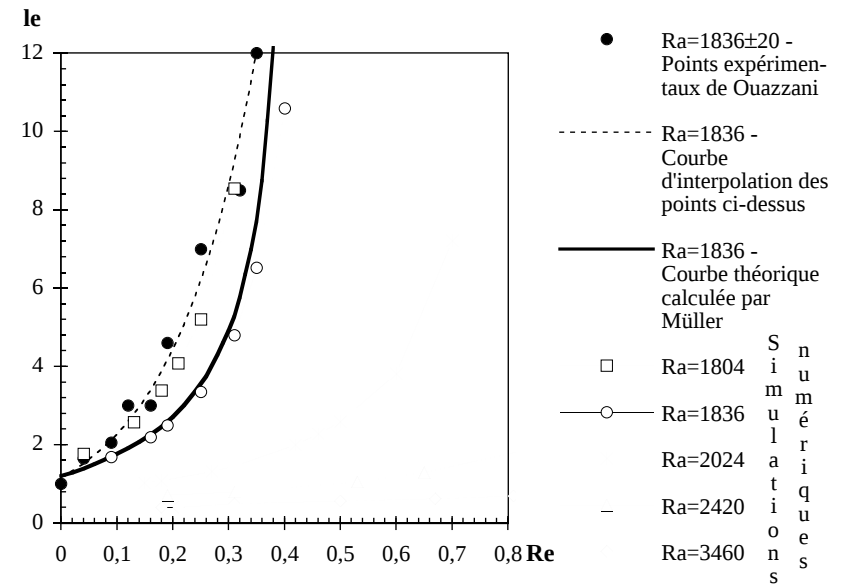


Figure VI-9 : Longueur d'établissement des $R_{\perp}$ en fonction de Re pour plusieurs valeurs de Ra ; comparaison avec la théorie des équations d'amplitude et avec les expériences à $Ra=1836$.

critique. Ces valeurs critiques de Re ou de v_g caractérisent la transition entre instabilité absolue et instabilité convective.

Quoi qu'il en soit, on peut répéter la procédure permettant d'obtenir les courbes $l_e=f(Re)$ pour toutes les valeurs de Ra de la figure VI-7. On obtient le graphe VI-10. Pour $Ra=4700$, un calcul supplémentaire a été effectué à $Re=3,75$ sur une conduite de rapport de forme $A=30$. Dans ce cas, on trouve que $l_e=17,1$. Nous n'avons pas poussé plus loin les calculs à $Ra=2420$ et 3460 car les calculs sur des domaines de grand rapport de forme s'avèrent trop coûteux en temps CPU. La figure VI-10 suffit pour montrer que la divergence de l_e a lieu à des nombres de Reynolds de plus en plus élevés au fur et à mesure que Ra croît. Ajoutons que nous avons vérifié que l_e ne dépend pas de la longueur du domaine de calcul; cela peut se voir par exemple sur les figures V-7 et V-8, lorsqu'on compare la solution de référence aux autres OBCs (le domaine de calcul est deux fois plus long avec la solution de référence).

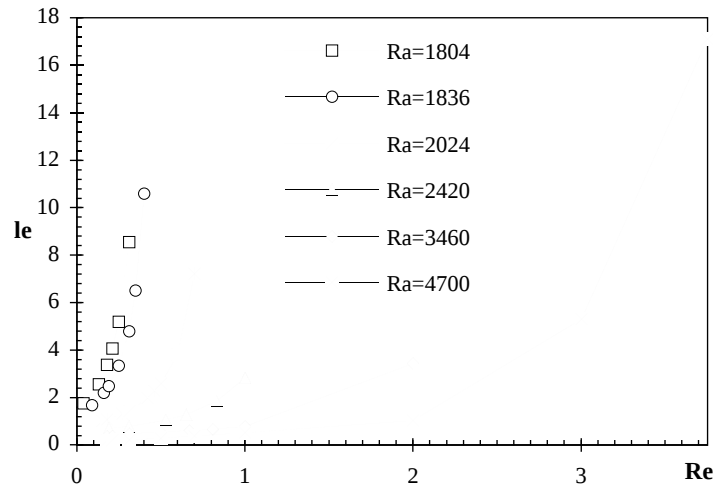


Figure VI-10 : Longueur d'établissement des $R_{\perp}$ en fonction de Re pour 6 valeurs de Ra , correspondant à toutes les enveloppes de la figure VI-7.

Nous avons vu au chapitre III, §2.3.3 et figure III-19, que Müller (1990) et Müller *et al.* (1992a) proposent une réduction, basée sur les coefficients des équations d'amplitude, permettant d'unifier toutes les courbes $l_e=f(Re)$. Ils montrent que la fonction $L_e(V_g)$, où $L_e = \sqrt{\mu} l_e / \xi_0$ est la longueur d'établissement réduite et où $V_g = v_g \tau_0 / (\mu \xi_0^2 (1 + c_1^2))^{1/2}$ est la vitesse de groupe réduite, est une représentation universelle des courbes $l_e=f(Re)$, valable quel que soit le nombre de Prandtl et pour toutes les valeurs de Ra et de Re restant suffisamment petites. Aux figures VI-11 et VI-12, on compare les résultats des simulations numériques à $Pr=6,4$ avec la courbe $L_e=f(V_g)$ établie par Müller théoriquement. On observe que les courbes numériques et théorique concordent effectivement tant que Ra et Re ne sont pas trop grands. Dans le cas contraire, on observe numériquement des $R_{\perp}$ pour $V_g \geq 2$, alors que la théorie prévoit que l'écoulement devient convectivement instable pour $V_g \geq 2$ et qu'il est absolument instable tant que $V_g < 2$.

Dans le cas de la convection naturelle dans une conduite de section rectangulaire, obturée à ses extrémités par deux parois verticales rigides, on peut aussi

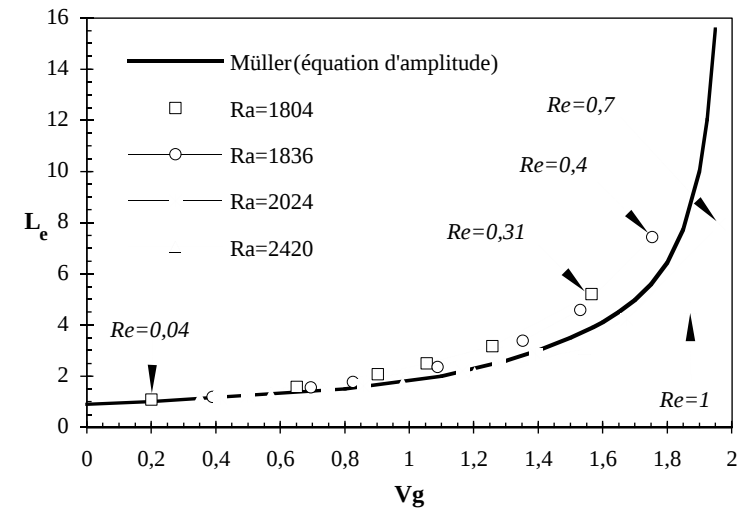


Figure VI-11 : Longueur d'établissement réduite, L_e , en fonction de la vitesse de groupe réduite, V_g ; comparaison des simulations numériques (pour plusieurs valeurs de Ra) avec la courbe théorique "universelle" de Müller.

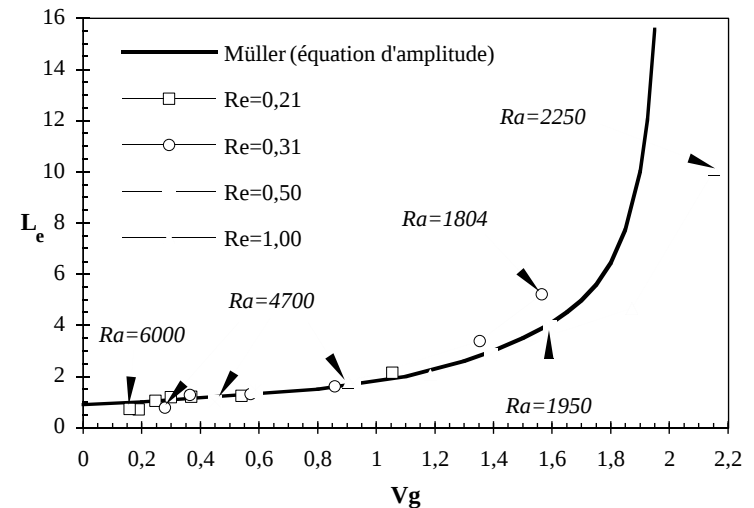


Figure VI-12 : Comme pour la figure VI-11, mais pour plusieurs valeurs de Re .

déterminer des enveloppes $W_{\max}(x)$. Lorsqu'on a affaire à un écoulement de rouleaux de Rayleigh-Bénard pleinement développés, on sait que $W_{\max}(0)=W_{\max}(A=L/h)=0$ à cause des effets d'adhérence sur ces parois. On peut donc définir une longueur l_e caractéristique du développement spatial des $R_{\perp}$ stationnaires. *Wesfreid et al. (1978)* et *Platten et Legros (1984)* ont analysé ce problème en se servant d'une équation phénoménologique de type Landau donnant l'évolution spatiale et temporelle d'une amplitude $A(x, t)$:

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau_0} \left(\varepsilon A(x, t) + \xi_0^2 \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} - \frac{A^3(x, t)}{A_0^2} \right) \quad (\text{VI-7})$$

Dans cette équation, $\varepsilon=(Ra-1708)/1708$ est l'écart relatif au nombre de Rayleigh critique dans le problème de Rayleigh-Bénard. Les autres coefficients sont déterminés empiriquement en faisant des corrélations avec des résultats expérimentaux par exemple. Bien sûr, le modèle de Landau, se limitant à un seul terme non-linéaire, est en général valable qu'à proximité du point critique, i.e. pour ε petit.

Pour le problème de convection libre, on a $\gamma/\gamma_t=0$. Si on prend $A(x, t)=A(x)=W_{\max}(x)$, on montre, à partir de l'équation (VI-7), que $W_{\max}(\infty)=W_s=\pm A_0 \varepsilon^{1/2}$ et que $W_{\max}(x)=W_s \tanh(x/\xi)$, où $\xi=\sqrt{2} \xi_0 \varepsilon^{-1/2}$ est une longueur de corrélation. A partir d'expériences d'anémométrie laser-Doppler dans de l'huile au silicone ($Pr=490$), *Wesfreid et al. (1978)* et *Platten et Legros (1984)* ont déterminé que $\xi=0,54\varepsilon^{-1/2}$ et que cette loi reste valable pour $\varepsilon \leq 1$. Par conséquent, on peut calculer l_e : il faut que $\tanh(l_e/\xi)=1/2$, c'est à dire que $l_e=0,297\varepsilon^{-1/2}$. Il est possible de comparer cette loi avec le résultat des équations d'amplitude. La courbe de Müller $L_e(V_g)$ donne $L_e \approx 0,88$ pour $V_g=0$, i.e. pour $Re=0$. On en déduit alors que $l_e=\xi_0 L_e / \sqrt{\mu}=0,339\varepsilon^{-1/2}$. La loi de Müller¹ et celle de Platten et Legros sont donc de la même forme. On les représente à la figure VI-13 et on y reporte les valeurs des simulations numériques, obtenues en extrapolant à $Re=0$ les courbes $l_e=f(Re)$ de la figure VI-10. On estime que les valeurs numériques de l_e sont déterminées à $\pm 0,1$ unité près (on trace les barres d'erreur sur le graphe). On constate que les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats de Müller. La courbe empirique de Platten et Legros donne des valeurs de l_e légèrement inférieures aux deux autres approches.

¹ Dans les équations d'amplitudes, le coefficient $\xi_0^2=0,148$, quel que soit le nombre de Prandtl. Donc, la loi de Müller $l_e=0,339\varepsilon^{-1/2}$ —et par extrapolation celle de Platten et Legros— sont indépendantes de Pr .

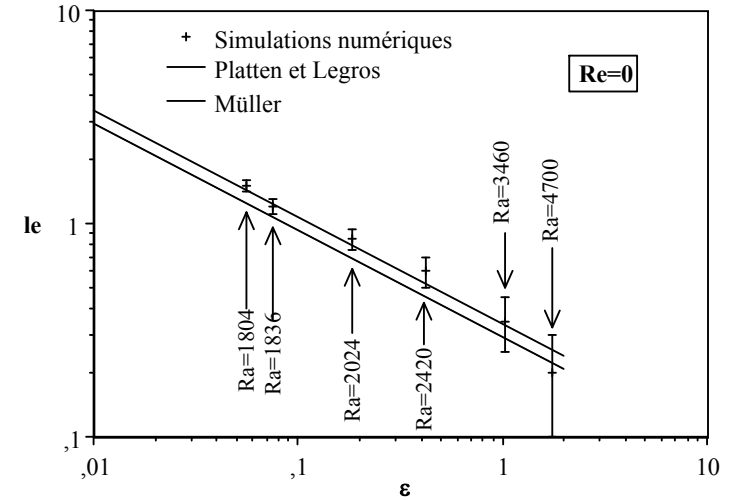


Figure VI-13 : Longueur caractéristique du développement spatial des $R_{\perp}$ dans le problème de Rayleigh-Bénard, en fonction de ε ; comparaison entre simulations numériques, modèle empirique de type Landau et équations d'amplitude.

2.3 Amplitudes de saturation de la vitesse verticale

L'amplitude de saturation W_s (cf. équation (VI-5)), déduite des enveloppes de la figure VI-7 (dont on rappelle qu'elles sont le résultat de simulations numériques avec *Config-1*), sont représentées en fonction de Re à la figure VI-14. Ces courbes sont comparées avec celles obtenues avec des simulations numériques utilisant des conditions aux limites périodiques (*Config-2*) et avec les résultats expérimentaux de Ouazzani. Nous verrons au §5.3 que W_s varie beaucoup en fonction de l'allongement $A=L/h$ de *Config-2*; pour chaque valeur de Ra et de Re , nous avons donc choisi A de telle manière que quatre $R_{\perp}$ se développent dans le domaine de calcul et que leur longueur d'onde corresponde à $\pm 0,1$ unité près à celle déterminée avec *Config-1* (cf. §5.2, figure VI-33).

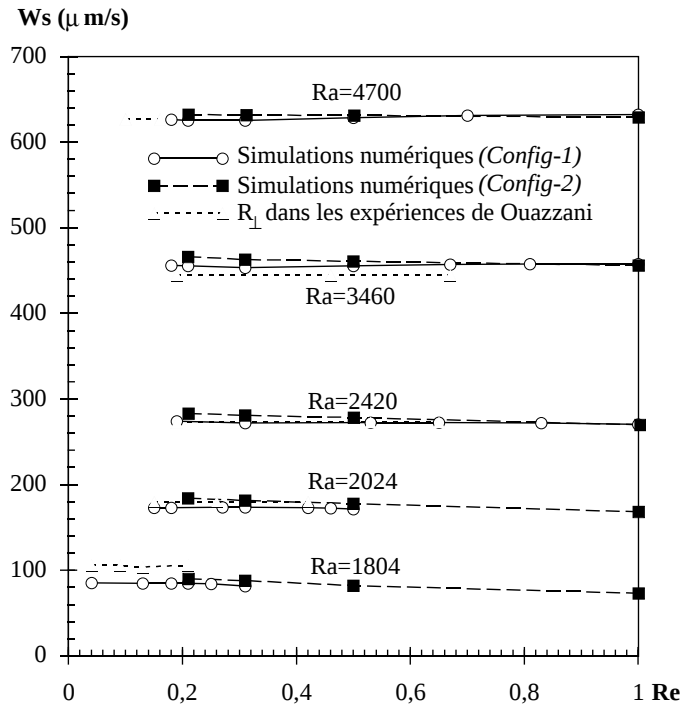


Figure VI-14 : Amplitude de saturation de la composante de vitesse verticale maximale W_s en fonction de Re ; comparaison entre les simulations numériques (*Config-1* et *Config-2*) et les expériences de Ouazzani.

La figure VI-14 montre que pour $0 \leq Re \leq 1$ l'amplitude de saturation reste quasiment constante à Ra fixé (W_s décroît légèrement avec Re pour *Config-2*) et que l'accord quantitatif entre simulations numériques et expériences est très bon. Au tableau VI-2, on donne la valeur de W_s à $Re \approx 0,2$ pour différentes valeurs de Ra . On constate que l'écart maximum entre les expériences et les simulations numériques (avec l'une ou l'autre des configurations) reste toujours inférieur à 5% pour $Ra \geq 2024$. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'écart plus important aux faibles nombres de Rayleigh (21% à $Ra=1804$ et 11% à $Ra=1836$) témoigne soit de la difficulté expérimentale à déterminer précisément la valeur de Ra , soit d'une diffusion numérique non négligeable lorsqu'on se rapproche du point critique.

Ra	W_s (en $\mu m/s$)				Écart maximal (en %) entre		
	Simulations numériques <i>Config-1</i>	Simulations numériques <i>Config-2</i>	Expérience de Ouazzani	Théorie (<i>Dubois & Bergé (1978)</i>)	simulations numériques et expériences	simulations numériques et théorie	expérience et théorie
1804	85	90	105	100	21	16	4,9
1836	102		114	115	11	12	0,9
2024	174	182	180	181	3,4	4	0,6
2420	274	283	273	272	3,6	4	0,4
3460	456	466	445	426	4,6	9	4,4
4700	626	632	627	557	0,8	13	12

Tableau VI-2 : Comparaison entre simulations numériques, expériences et théorie, de l'amplitude de saturation W_s en fonction de Ra , lorsque $Re \approx 0$.

Pour déterminer la cause principale de cet écart lorsque Ra est petit, nous nous sommes servi d'un résultat de *Dubois et Bergé (1978)* concernant le problème de Rayleigh-Bénard, qui combine des observations expérimentales et des résultats théoriques de *Normand et al. (1977)* et de *Schlüter et al. (1965)*.

Dubois et Bergé (1978) ou *Bergé (1975)* étudient expérimentalement l'instabilité de Rayleigh-Bénard dans un canal horizontal de section rectangulaire jusqu'à 10 fois le nombre de Rayleigh critique. Ils effectuent une analyse de Fourier du champ de vitesse et ils donnent l'évolution spatiale et en fonction de Ra de ses trois premières harmoniques. Pour $\varepsilon < 2$ (i.e. pour $Ra < 5000$), ils montrent que les amplitudes de la seconde et de la troisième harmonique sont petites comparées à celle du mode fondamental. Ainsi, dans ce domaine de Ra , le mode fondamental W^1 de la composante verticale de la vitesse suffit pour décrire l'évolution de W en fonction de Ra . En conséquence, on peut assimiler l'amplitude maximale de W^1 (notée W_{max}^1) à W_s .

Pour le même problème, *Normand et al. (1977)* et *Schlüter et al. (1965)* ont calculé théoriquement, à partir de développements en fonction d'un petit paramètre ε , l'amplitude des différentes composantes du champ de vitesse, leur dépendance spatiale ainsi que celle en fonction de Ra . Le nombre de Rayleigh et les composantes de vitesse (par exemple W) sont développés de la manière suivante:

$$\begin{aligned} Ra &= Ra * + \tilde{\varepsilon} Ra^{(1)} + \tilde{\varepsilon}^2 Ra^{(2)} + \tilde{\varepsilon}^3 Ra^{(3)} + \dots \\ W &= \tilde{\varepsilon} W^{(1)} + \tilde{\varepsilon}^2 W^{(2)} + \tilde{\varepsilon}^3 W^{(3)} + \dots \end{aligned} \quad (VI-8)$$

Lorsque la convection apparaît sous la forme de rouleaux 2D on montre que $Ra^{(1)}=Ra^{(3)}=0$. Ainsi, si on restreint le développement de W au premier terme en $\tilde{\varepsilon}$, ce qui n'est valable que pour des petits nombres de Rayleigh surcritiques, on a :

$$\tilde{\varepsilon} = \left(\frac{Ra - Ra^*}{Ra^{(2)}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{Ra^*}{Ra^{(2)}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\varepsilon^2} \quad \text{où} \quad \varepsilon = \left(\frac{Ra - Ra^*}{Ra^*} \right) \quad (VI-9)$$

$$W = W^1 = \tilde{\varepsilon} W^{(1)}$$

$Ra^{(2)}$ est un polynôme fonction du nombre de Prandtl. *Schlüter et al. (1965)* ont calculé ce polynôme pour différentes sortes de structures convectives (rouleaux, cellules carrées ou hexagonales). Dans le cas des rouleaux, on obtient :

$$Ra^{(2)} = 2031,40 - 13,71 Pr^{-1} + 24,16 Pr^{-2} \quad (VI-10)$$

Donc, $Ra^{(2)}=2029,84$ pour $Pr=6,4$.

Finalement, en se servant des résultats numériques de *Normand et al. (1977)* en ce qui concerne $W^{(1)}$, *Dubois et Bergé (1978)* donnent le développement suivant pour l'amplitude maximale de W^1 , et donc pour W_s :

$$W_{\max}^1 = W_s = 0,96\sqrt{2}k^2 \frac{\alpha}{h} \tilde{\varepsilon} = 0,96\sqrt{2}k^2 \frac{\alpha}{h} \left(\frac{Ra^*}{Ra^{(2)}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\varepsilon^2} \quad (VI-11)$$

Cette valeur théorique de W_s à $Pr=6,4$, ainsi que les écarts relatifs entre simulations numériques, expérience et théorie, sont donnés au tableau VI-2 en fonction de Ra . L'analyse de ces résultats montre que :

1 - à proximité du point critique ($Ra=1804$ et 1836), l'écart entre les simulations numériques d'une part, et les expériences ou la théorie d'autre part, est non négligeable (supérieur à 11%). Par contre, expérience et théorie s'accordent bien puisque l'écart est inférieur à 5%.

2 - pour les valeurs de Ra intermédiaires ($Ra=2024$ et 2420), les trois méthodes donnent des résultats concordants : l'écart est inférieur à 4% dans tous les cas.

3 - pour les valeurs de Ra les plus élevées ($Ra=3460$ et 4700), simulations numériques et expérience continuent à donner des résultats similaires, mais l'écart entre la théorie et les deux autres types d'approche augmente avec Ra .

On déduit donc des trois points précédents que :

1 - à proximité du point critique, les simulations numériques directes ne permettent pas de rendre compte correctement de l'amplitude de la vitesse verticale dans les rouleaux convectifs. En effet, pour les faibles valeurs de Ra , l'amplitude de W

est petite et, en conséquence, l'impact de la diffusion numérique lors du calcul de cette vitesse n'est plus négligeable.

2 - les valeurs présentées dans le tableau VI-2 montrent que la théorie basée sur des développements en fonction de $\tilde{\varepsilon}$ reste valable jusqu'à $Ra \approx 2500$, i.e. jusqu'à $\varepsilon \approx 0,5$. Au delà, la formule (VI-11) n'est donc plus valable.

3 - les résultats du tableau VI-2 témoignent de la grande qualité des expériences menées par Ouazzani car elles s'accordent à la fois avec la théorie dans le domaine linéaire et avec les simulations numériques directes dans le domaine non-linéaire.

Comparons maintenant les simulations numériques avec les résultats obtenus par la théorie des équations d'amplitude. A partir de l'équation (III-53) donnant W_s calculée par *Müller (1990)*, on obtient :

$$W_s = 419,5 \mu^{1/2} \quad (\text{en } \mu\text{m} / \text{s}) \quad (VI-12)$$

Pour Ra fixé, W_s dépend de Re par l'intermédiaire de $\mu(Re)=Ra/Ra_*(Re)-1$. Pour $Re=0$, comme $\mu(Re=0)=\varepsilon$, on retrouve le résultat de *Dubois et Bergé (1978)*. En effet, la formule (VI-11) donne $W_s=420,7\varepsilon^{1/2}$, alors que (VI-12) donne $W_s=419,5\varepsilon^{1/2}$.

La figure VI-15 compare les courbes $W_s=f(Re)$ obtenues par la théorie des équations d'amplitude avec celles obtenues par simulations numériques sur *Config-1* et *Config-2*. Ces comparaisons ont lieu pour les mêmes valeurs de Ra qu'à la figure VI-14, mais pour une gamme beaucoup plus large de valeurs de Re : $0 \leq Re \leq 4$. Dans le cas de *Config-1*, la longueur de la conduite est limitée à $A=10$ pour $Ra=2024$, 2420 et 3460 , et à $A=20$ pour $Ra=1804$. En conséquence, pour ces valeurs de Ra , toute la gamme de Re n'est pas couverte car l'amplitude de saturation n'est plus atteinte dans le domaine de calcul lorsque Re est trop grand. On notera que les valeurs de W_s à $Ra=4700$ ont été calculées avec une conduite de rapport de forme $A=20$ pour $Re=3$, et avec une conduite de rapport de forme $A=30$ pour $Re=3,75$ et 4 .

La première observation que l'on peut faire est qu'à Ra fixé, les courbes obtenues par les trois approches sont quasiment parallèles et qu'elles décroissent toutes lorsque Re augmente (l'écart d'amplitude entre les simulations numériques et la théorie a été expliqué plus haut lors de l'analyse du tableau VI-2). Notamment, les calculs à $Ra=4700$ montrent clairement que W_s décroît quand Re augmente, même avec *Config-1*. La figure VI-16, qui montre les enveloppes $W_{\max}(x)$, pour $0 \leq x \leq 28$, à $Ra=4700$ et $Re=0,18$, 3 et $3,75$, confirme ce résultat : on observe effectivement que W_s diminue de $40\mu\text{m/s}$ lorsque Re passe de $0,18$ à $3,75$. Cela signifie donc que lorsqu'on augmente Re dans un canal semi-infini, les R_L ne subissent pas uniquement une

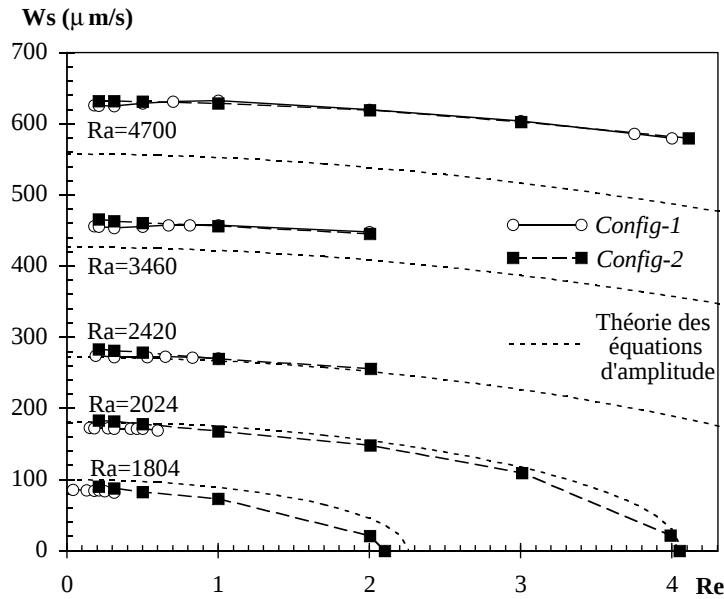


Figure VI-15 : Amplitude de saturation de la composante de vitesse verticale maximale W_s en fonction de Re ; comparaison entre les simulations numériques (*Config-1* et *Config-2*) et la théorie des équations d'amplitude.

translation vers l'aval: en même temps que la longueur d'établissement l_e augmente, ils subissent une "contraction", i.e. une diminution de l'amplitude de leur vitesse de rotation. Cela pourrait en partie expliquer pourquoi, expérimentalement, on observe une transition des $R_{\perp}$ vers les $R_{//}$ lorsque Re augmente. En effet, dans les expériences de Ouazzani reproduites à la figure VI-17, on observe que:

1 - pour les nombres de Rayleigh suffisamment élevés ($Ra \geq 3460$), l'amplitude de la vitesse verticale maximale au centre de la conduite, $W^{\max}$, reste constante lorsqu'on passe des $R_{\perp}$ aux $R_{//}$;

2 - en phase de $R_{//}$, $W^{\max}$ reste constante sur toute la gamme de Re présentée sur la figure, i.e. au moins jusqu'à $Re \approx 3$ (cf. $Ra=2420$ et 3460).

Ainsi, lorsque la convection prend la forme de $R_{//}$, W_s restant constant avec Re , on peut supposer que le transfert thermique à travers la conduite garde la même intensité. Par contre, nous verrons au paragraphe suivant (§3) que, comme pour W_s , le

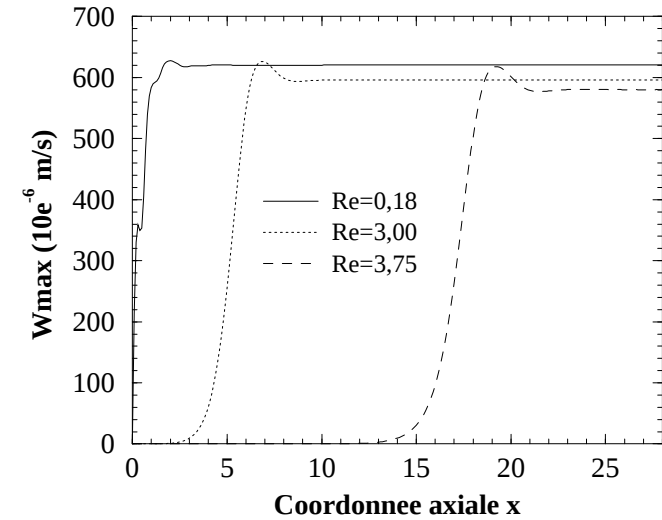


Figure VI-16 : Enveloppe de la vitesse verticale maximale en fonction de x , à $Ra=4700$ et $Re=0,18, 3$ et $3,75$.

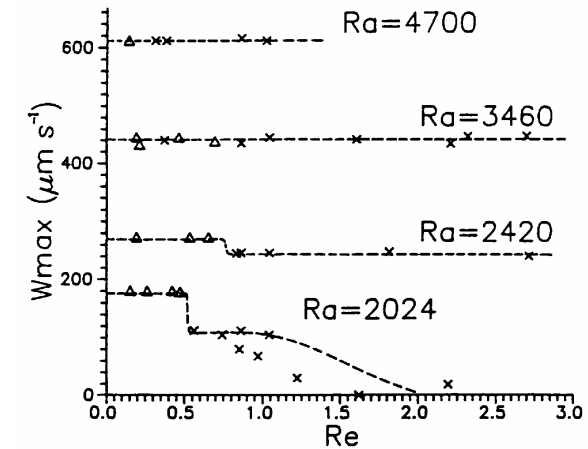


Figure VI-17 : Vitesse verticale maximale au centre de la conduite, en fonction de Re et pour différents Ra , mesurée expérimentalement par anémométrie laser-Doppler: Δ : pour les $R_{\perp}$ ($W_{\perp}^{\max}$) ; ∞ : pour les $R_{//}$ ($W_{//}^{\max}$); (tiré de Ouazzani et al. (1990)).

nombre de Nusselt moyen $\langle Nu \rangle$ dans la phase de $R_{\perp}$ diminue lorsque Re augmente. Le passage des structures convectives transverses vers les structures longitudinales serait donc le moyen "choisi par la nature" pour conserver le flux de chaleur le plus élevé possible à travers la conduite.

Revenons à la figure VI-15. Les résultats de la théorie utilisée par Müller et des calculs avec *Config-2* sont les seuls qui permettent d'observer la diminution de W_s avec Re jusqu'à ce que W_s tende vers 0 (avec *Config-1*, il faudrait un domaine de calcul de longueur infinie!). Ainsi, à $Ra=1804$ et 2024 , on observe que W_s devient nulle, c'est à dire que les $R_{\perp}$ disparaissent au profit de l'écoulement de Poiseuille, pour les valeurs de Re qui sont reportées dans le tableau VI-3. D'après ce que nous avons vu au chapitre III, §2.1, à propos du comportement des écoulements convectivement instables soumis à des perturbations extérieures, on s'attend à ce que ces valeurs concordent avec des seuils de stabilité linéaire. En effet, avec des conditions aux limites périodiques, les perturbations qui sortent du domaine de calcul sont en permanence réinjectées à l'entrée. En conséquence, dans la zone où l'écoulement est convectivement instable, des cellules convectives se forment car elles sont entretenues par un "bruit" permanent. La seule transition observable dans ces conditions est donc le seuil de stabilité linéaire. Dans le tableau VI-3, on donne les valeurs de Re obtenues par la théorie linéaire et définies par $Ra_{\perp}^*(Re)=1804$ et 2024 (cf. chapitre III, §1.2.4, tableau III-1). La comparaison de toutes ces valeurs montre que les trois approches fournissent des résultats similaires (à condition de prendre en compte la diffusion numérique dans le cas de *Config-2*). On confirme donc qu'avec des conditions aux limites périodiques, lorsqu'on augmente Re , on simule une transition $R_{\perp}$ -écoulement de Poiseuille correspondant à un seuil de stabilité linéaire.

Ra	Valeur de Re telle que:		
	$Ra_{\perp}^*(Re)=Ra$ selon <i>Luijckx (1983)</i> (théorie linéaire)	$W_s=0$ et $\langle Nu \rangle=1$ selon <i>Müller (1990)</i> (équations d'amplitude)	$W_s=0$ et $\langle Nu \rangle=1$ simulations numériques avec <i>Config-2</i>
1804	2,27	2,26	~ 2,05
2024	4,12	4,07	~ 4,05

Tableau VI-3 : Valeur de Re à la transition écoulement de $R_{\perp}$ -écoulement de Poiseuille, pour $Ra=1804$ et 2024 et pour $Pr=6,4$.

3 Transfert thermique

Comme nous venons de le faire pour l'amplitude de saturation, on se propose, à la figure VI-18, de comparer l'évolution en fonction de Re du nombre de Nusselt, $\langle Nu \rangle$ (cf. formule VI-3), calculé numériquement avec *Config-1* et *Config-2* et théoriquement à l'aide d'une équation d'amplitude (cf. *Müller (1990, 1992a)* et chapitre III, §2.3.2). On rappelle que Ouazzani n'a pas mesuré $\langle Nu \rangle$ dans ces expériences, et qu'à notre connaissance, il n'existe pas de résultat expérimental relatif à la mesure du transfert thermique pour des écoulements de Poiseuille-Bénard avec de l'eau. En utilisant l'équation de Ginzburg-Landau, Müller établit pour $\langle Nu \rangle$ la formule suivante (cf. équation (III-52)):

$$\langle Nu \rangle = 1 + 1,4306 \frac{Ra - Ra_{\perp}^*}{Ra} \quad \text{pour } Pr = 6,4 \quad (VI-13)$$

On peut comparer la formule (VI-13) au résultat de *Schlüter et al. (1965)*, valable uniquement dans le domaine linéaire (i.e. pour $\varepsilon=(Ra-1708)/1708 \ll 1$), et relatif à l'apparition de rouleaux infinis dans un écoulement de convection naturelle entre deux plaques horizontales:

$$\langle Nu \rangle = 1 + K(Pr) \frac{Ra - 1708}{Ra} \quad (VI-14)$$

$$\text{où } K(Pr) = \left(0,69942 - \frac{0,00472}{Pr} + \frac{0,00832}{Pr^2} \right)^{-1} = 1,4308 \quad \text{pour } Pr = 6,4$$

On constate que la formule de Müller (VI-13) n'est rien d'autre que la formule de Schlüter et al. (VI-14) dans laquelle $Ra^*(Re=0)=1708$ est remplacé par $Ra_{\perp}^*(Re)$. Par conséquent, dans (VI-13), $\langle Nu \rangle$ n'est fonction de Re que par l'intermédiaire de $Ra_{\perp}^*$ et $\langle Nu \rangle$ ne sera valable que pour des petites valeurs de Ra .

Dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard ($Re=0$) et pour le domaine non-linéaire (plus précisément pour $\varepsilon>1$, i.e. $Ra>3400$), *Platten et Legros (1984)* proposent la formule empirique ci-dessous, corrélant de très nombreux résultats théoriques, numériques et expérimentaux obtenus à différentes valeurs de Pr :

$$(\langle Nu \rangle - 1) \frac{Ra}{1708} = K(Pr) \left(\frac{Ra - 1708}{1708} \right)^{1,23} = K(Pr) \varepsilon^{1,23} \quad (VI-15)$$

À la figure VI-18, les calculs numériques avec *Config-1* sont effectués pour des conduites de rapports de forme A différents en fonction des valeurs de Ra et de Re .

Pour $(Ra; Re)=(4700; 3,75)$ et $(4700; 4)$, $A=30$ car l'amplitude de saturation est atteinte pour $x>22$; aussi, $\langle Nu \rangle$ est-il moyenné de $x_1=23$ à $x_2=28,5$ pour $Re=3,75$, et de $x_1=24,5$ à $x_2=28,5$ pour $Re=4$ (cf. équation (VI-2)). Pour $Ra=1804$ quel que soit la valeur de Re , et pour $(Ra, Re)=(4700, 3)$, $A=20$ et la moyenne spatiale de $\langle Nu \rangle$ est calculée de $x_1=10$ à $x_2=18$. Dans tous les autres cas, $A=10$ et $\langle Nu \rangle$ est moyenné entre $x_1=4$ et $x_2=8,5$. Avec *Config-2*, comme pour lors du calcul de W_s , afin d'imposer aux $R_{\perp}$ des longueurs d'onde en accord avec celles calculées par *Config-1*, on fait varier A entre 3,6 et 3,9 en fonction de Ra et Re .

L'analyse des courbes $\langle Nu \rangle = f(Re)$ de la figure VI-18 est tout à fait similaire à celle des courbes $W_s = f(Re)$ de la figure VI-15. Tout d'abord, on constate que pour les trois approches, le nombre de Nusselt décroît avec Re . Ce résultat est en apparence contradiction avec les résultats de la bibliographie présentés au chapitre II, §3.2.3 et tableau II-4, pour lesquels $\langle Nu \rangle$ ne dépend pas de Re . Cette différence s'explique par le fait que les résultats de la littérature ont été obtenus à partir d'écoulements de $R_{//}$, où à partir d'écoulements de $R_{\perp}$ à faibles Re . En effet, comme le montre l'équation (VI-13), $\langle Nu \rangle$ est fonction de l'écart au nombre de Rayleigh critique: dans le cas des $R_{\perp}$, $(\langle Nu \rangle - 1)$ est proportionnel à $(Ra - Ra_{\perp}^*)$. On peut donc supposer que dans le cas des $R_{//}$, $(\langle Nu \rangle - 1)$ est proportionnel à $(Ra - Ra_{//}^*)$. Donc, quand Re augmente à Ra fixé, $\langle Nu \rangle$ décroît dans le cas des $R_{\perp}$ (puisque $Ra_{\perp}^*$ augmente avec Re), alors que $\langle Nu \rangle$ reste constant dans le cas des $R_{//}$ (puisque $Ra_{//}^*$ ne dépend pas de Re). Au chapitre II, §3.2.3, les études de *Ouazzani et al. (1989)* et de *Hasnaoui et al. (1991)* concernent des écoulements de $R_{\perp}$, à $Pr=0,7$ et pour $Re \leq 9$, i.e. pour $Re < Re_{\perp}^*$ (cf. tableau I-1, §2.1 du chapitre I). Il est probable que la décroissance de $\langle Nu \rangle$ avec Re soit négligeable dans ces deux études, car $(Ra - Ra_{\perp}^*)$ varie peu dans cette gamme de Re . Dans les simulations 2D de la figure VI-18, $\langle Nu \rangle$ décroît car $Re=4$ correspond à peu près à $8Re_{\perp}^*$ et que l'on continue à observer des $R_{\perp}$. Dans la réalité (dans les expériences 3D), le transfert thermique reste quasi-constant, et donc maximum, car les $R_{\perp}$ disparaissent au profit des $R_{//}$ dès que $Re \geq Re_{\perp}^*$.

A la figure VI-18, lorsque Re est suffisamment grand, le nombre de Nusselt tend vers $\langle Nu \rangle = 1$ (ce qui correspond à la transition vers l'écoulement de Poiseuille). Avec *Config-2* et par la théorie des équations d'amplitude, on retrouve que la valeur $\langle Nu \rangle = 1$ est atteinte lorsque $W_s = 0$, i.e. lorsqu'on coupe la courbe de stabilité neutre $Ra_{\perp}^*$ (cf. tableau VI-3). Avec *Config-1*, pour Ra fixé, $\langle Nu \rangle = 1$ est atteint pour des valeurs de Re beaucoup plus petite que pour les deux autres approches. Comme on peut le voir à $Ra=1804, 2024$ et 2420 , ces valeurs correspondent à peu de chose près

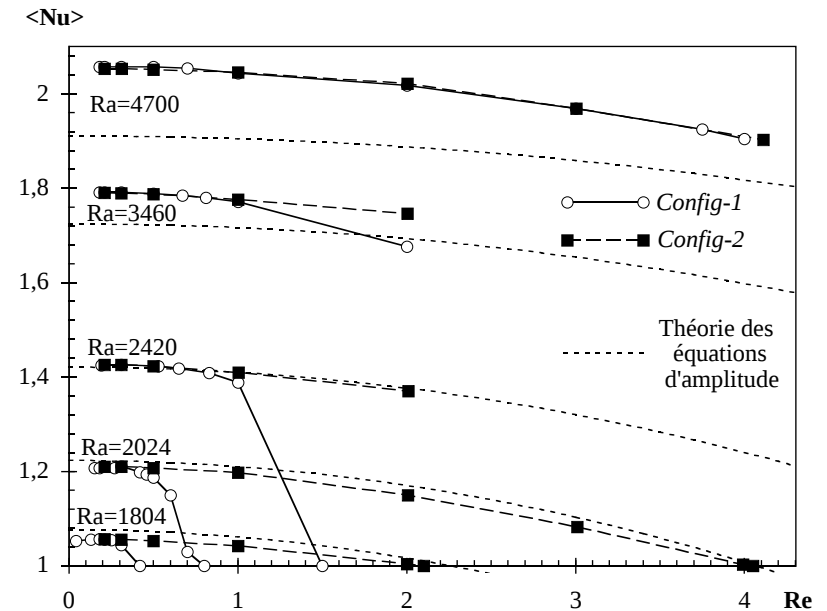


Figure VI-18 : Nombre de Nusselt moyen en espace et en temps, en fonction de Re ; comparaison entre les simulations numériques (*Config-1* et *Config-2*) et la théorie des équations d'amplitude.

aux valeurs des figures VI-9 et VI-10, pour lesquelles la longueur d'établissement l_e diverge. Par conséquent, avec *Config-1*, l'écoulement de Poiseuille est atteint lorsqu'on coupe la courbe $Ra_{\perp}^{conv}$.

Bien sûr, les valeurs de $\langle Nu \rangle$ calculées avec *Config-1* et *Config-2* coïncident très bien entre elles, quel que soit Ra , pour les petites valeurs de Re , c'est à dire pour les écoulements où, dans *Config-1*, l'amplitude de saturation des rouleaux transversaux est atteinte pour tout x entre x_1 et x_2 . Notamment, on peut noter qu'à $Ra=4700$, les résultats des deux approches numériques s'accordent parfaitement jusqu'à $Re=4$, car les domaines de calculs ont été pris suffisamment grands ($A=20$ à $Re=3$ et $A=30$ à $Re=3,75$ et 4). Le nombre de Nusselt calculé par (VI-13) est en bon accord avec les valeurs numériques quel que soit Re , pour $Ra \leq 2420$ (on note qu'aux plus faibles

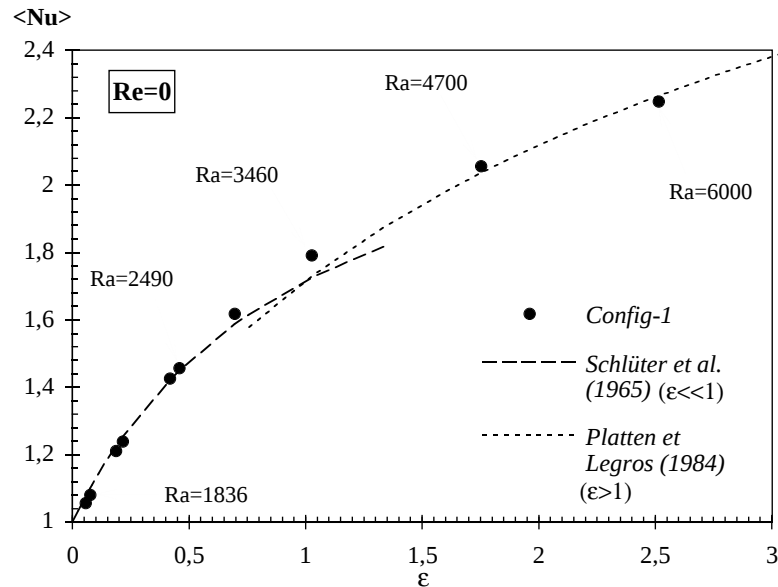


Figure VI-19 : Nombre de Nusselt moyen en espace et en temps, en fonction de ε , pour $Re=0$; comparaison des simulations numériques (*Config-1*) avec la théorie de *Schlüter et al. (1965)* lorsque $\varepsilon \ll 1$, et avec la courbe de corrélation proposée par *Platten et Legros (1984)* pour $\varepsilon > 1$.

valeurs de Ra , on retrouve toujours le petit écart que nous attribuons à la diffusion numérique). Pour les valeurs de Ra plus élevées, la théorie de Müller n'est plus valable.

Le graphe VI-19 présente l'évolution de $\langle Nu \rangle$ en fonction de ε , à $Re=0$, i.e. dans le cas de la convection libre de Rayleigh-Bénard. On compare le nombre de Nusselt obtenu par les simulations numériques, avec les courbes résultant des formules (VI-14) et (VI-15) données ci-dessus. Les valeurs relatives aux simulations numériques sont déterminées en extrapolant à $Re=0$ les valeurs de $\langle Nu \rangle$ obtenues à $Re \approx 0,2$ avec *Config-1*. On constate que les simulations numériques concordent très bien avec la courbe de *Schlüter et al. (1965)* pour $\varepsilon \leq 0,5$ et avec la courbe de Platten et Legros pour $\varepsilon \geq 1,5$. Pour $0,5 < \varepsilon < 1,5$, les résultats numériques s'accordent moins bien avec les deux formules (VI-14) et (VI-15) car celles-ci se trouvent à la limite de leur domaine de validité.

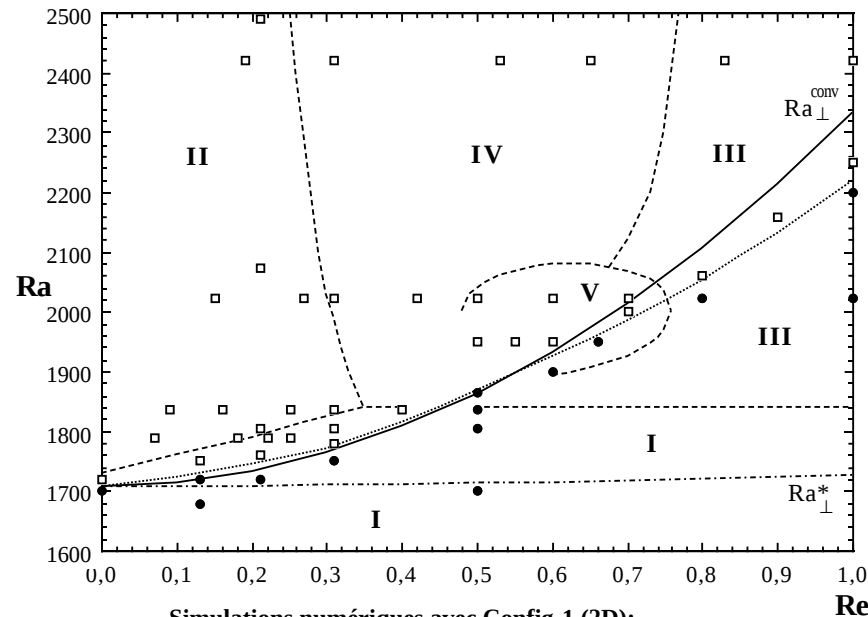
4 Stabilité des rouleaux transversaux vis à vis de l'écoulement de Poiseuille

4.1 Diagramme de stabilité dans le plan ($Ra-Re$)

Nous avons vu dans les paragraphes précédents, qu'avec *Config-2*, la transition rouleaux transversaux-écoulement de Poiseuille est forcément obtenue lorsqu'on coupe la courbe théorique $Ra_{\perp}^*$ et que la transition est caractérisée par $W_s=0$ ou $\langle Nu \rangle = 1$ sur tout le domaine de calcul. Avec *Config-1*, ce critère n'est pas suffisant car, même si l'écoulement de Poiseuille est présent sur tout le domaine de calcul, il est possible que les $R_{\perp}$ naissent plus loin en aval. La théorie nous dit que dans le cas de *Config-1* la transition est caractérisée par la divergence de la longueur d'établissement, l_e , ou bien par une vitesse de groupe des $R_{\perp}$, v_g , supérieure à une certaine valeur critique (sous forme réduite, $V_g > 2$). Pour certaines valeurs de Ra et Re , nous avons vu que l'on obtient numériquement une transition concordant avec la courbe théorique de Müller: $Ra_{\perp}^{conv}$.

Dans ce paragraphe, à la figure VI-20, on présente dans le plan ($Ra-Re$) un diagramme de stabilité des différentes configurations observées dans l'écoulement de Poiseuille-Bénard à $Pr=6,4$. Ce graphe fait une synthèse des résultats acquis par les différentes approches théoriques (stabilité linéaire de *Luijckx (1983)* et stabilité convective de *Müller et al. (1989, 1990, 1992a)*), expérimentales (*Ouazzani et al. (1990, 1991)*) et numériques (les simulations du présent travail effectuées avec *Config-1*). On rappelle que les résultats théoriques et numériques se rapportent à des écoulements 2D, alors que les résultats expérimentaux sont 3D. En conséquence, les expériences permettent la naissance d'un nombre plus important de configurations thermoconvectives et donc de transitions.

Dans la figure VI-20, les points correspondent à des simulations numériques pour des couples (Ra , Re) donnés: les carrés blancs indiquent qu'on observe des $R_{\perp}$ et les cercles noirs correspondent à l'écoulement de Poiseuille. Chaque point du graphe est obtenu en partant d'un écoulement de $R_{\perp}$ comme condition initiale et en suivant son évolution lorsqu'on incrémente Ra et/ou Re . Pour plusieurs calculs, nous avons vérifié que le choix des conditions initiales n'entraîne pas d'effet d'hystérésis: on a

**Simulations numériques avec Config-1 (2D):**

- Courbe séparant les deux zones suivantes:
- écoulements de Poiseuille,
- rouleaux transversaux.

Analyse théorique (2D):

- Stabilité linéaire (Luijkx (1983)).
- Stabilité convective (Müller (1990)).

Expériences de Ouazzani (3D):

- Courbes séparant les différentes zones suivantes:
- I écoulement de Poiseuille,
- II rouleaux transversaux,
- III rouleaux longitudinaux,
- IV rouleaux transversaux ou rouleaux longitudinaux selon les conditions initiales,
- V structures intermittentes.

Figure VI-20 : Diagramme de stabilité dans le plan (Ra-Re) des différentes configurations de l'écoulement de Poiseuille-Bénard à $Pr=6,4$; comparaison des simulations numériques avec les analyses théoriques de Luijkx et de Müller et avec les expériences de Ouazzani.

retrouvé les mêmes écoulements de $R_{\perp}$ en utilisant, pour conditions initiales, un écoulement de Poiseuille purement conductif perturbé

- soit par un signal sinusoïdal sur W de même longueur d'onde que les $R_{\perp}$ et d'amplitude égale à 5% de leur amplitude finale,
- soit par un bruit blanc en $x=0$ sur W , d'amplitude égale à 10% de l'amplitude finale.

En pratique, à l'approche de la transition rouleaux transversaux-écoulement de Poiseuille, de très longs temps de calculs sont nécessaires pour obtenir la convergence de la solution¹. Concrètement, pour des maillages $(N_x, N_z)=(100, 20)$, i.e. pour des domaines de calcul d'allongement $A=10$, de l'ordre de 50 heures (temps CPU mono-utilisateur) sont nécessaires sur des stations IBM-RS6000 de type 355.² En conséquence, la courbe de transition obtenue à partir des simulations numériques n'est encadrée que par 19 points. Pour économiser du temps de calcul, toutes les simulations ont été effectuées avec *Config-1* pour $A=10$. Cependant, pour les nombres de Rayleigh les plus faibles, $A=20$ a parfois été employé afin de confirmer la présence des $R_{\perp}$. Par exemple, à la figure VI-8, pour $Re=0,31$ et $Ra=1780$, nous avons vu que l'écoulement de Poiseuille semble se maintenir sur toute la première moitié de la conduite (i.e. jusqu'à $x=10$) et que les $R_{\perp}$ n'apparaissent qu'après. Bien sûr, cette remarque est fonction de "la loupe" que l'on utilise pour observer la naissance ou la disparition des perturbations dans l'écoulement: dans toute cette étude (aussi bien avec *Config-1* qu'avec *Config-2*), nous avons considéré que les $R_{\perp}$ disparaissent au profit de l'écoulement de Poiseuille dès que le critère suivant est satisfait:

¹ Ce comportement peut s'expliquer très simplement dans un écoulement de Rayleigh-Bénard en se servant du modèle de Landau (VI-7). Nous avons vu que celui-ci traduit correctement l'évolution spatiale et temporelle d'une amplitude $A(x, t)$ tant qu'on ne s'éloigne pas trop du point critique (ε doit rester petit). En ne considérant pas les variations spatiales de $A(x, t)$ et en

se plaçant dans un cadre linéaire, l'équation (VI-7) s'écrit: $\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_0} \varepsilon A(t)$. On obtient

donc

que $A(t)$ varie comme $e^{t/\tau}$, où $\tau = \tau_0 \varepsilon^{-1}$ est la constante de temps. Ainsi, lorsque Ra tend vers Ra^* , ε tend vers zéro et τ tend vers l'infini: près du point critique, il faut attendre très longtemps pour observer une petite variation de $A(t)$.

² Sur le calculateur IBM-SP2 du C.N.U.S.C. (Centre National Universitaire Sud de Calcul), le temps de calcul est à peu près divisé par deux, soit de l'ordre de 25 heures par simulation, à proximité du point critique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [0,10], \quad W_{\max}(x) < 0,1 \mu\text{m} / \text{s} \\ \text{et} \quad < Nu > -1 < 10^{-6} \end{array} \right. \quad (\text{VI}-16)$$

L'analyse de la figure VI-20 montre que les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats des équations d'amplitude. On note cependant que la courbe numérique part en dessous de la courbe de Müller lorsque $Re > 0,6$ ou $Ra > 2000$. En de nombreuses occasions, lors des comparaisons avec les simulations numériques non-linéaires, nous avons pu constater que la théorie développée par Müller dans le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard reste valable jusqu'à $Ra \approx 2500$. Il n'est donc pas question de remettre en cause ce domaine de validité pour expliquer le comportement de la courbe numérique lorsque $Ra > 2000$. L'explication plausible est que numériquement, des perturbations inhérentes aux simulations (par exemple, l'effet des conditions aux limites) entretiennent les cellules convectives au-delà de la transition théorique $Ra_{\perp}^{\text{conv}}$. Quoi qu'il en soit, l'écart entre la courbe numérique et la courbe de Müller reste faible. La figure VI-20 confirme donc que les transitions observées dans les simulations de l'écoulement de Poiseuille-Bénard avec *Config-1* satisfont le critère de stabilité convective et pas le critère de stabilité linéaire.

Le diagramme de stabilité de l'écoulement expérimental 3D est beaucoup plus complexe. Nous renvoyons au chapitre III, §3.2.2 et figure III-23, pour avoir une description plus détaillée des cinq zones identifiées par Ouazzani (1991) et Ouazzani et al. (1990) dans le plan (Ra-Re). Notons simplement ici que les simulations numériques et la théorie de Müller s'accordent avec l'expérience uniquement pour la transition entre les régions I et II de la figure VI-20. L'accord avec $Ra_{\perp}^{\text{conv}}$ aurait été meilleur si Ouazzani avait pu faire des mesures beaucoup plus loin en aval de l'entrée thermique car, ainsi, la transition entre les $R_{\perp}$ et l'écoulement de Poiseuille aurait pu être observée à des nombres de Reynolds plus grands.

4.2 Comparaison du diagramme de stabilité de Ouazzani avec les résultats récents de la littérature

Donc, à part pour les nombres de Reynolds les plus petits ($Re < Re^* \approx 0,3$), il est difficile de comparer le diagramme de stabilité expérimental avec les courbes des trois autres approches théoriques ou numériques. Pour que cela soit possible, il faudrait que les simulations numériques soient tridimensionnelles et les théories plus sophistiquées. Aussi, dans ce paragraphe, on présente des résultats publiés récemment dans des revues

internationales qui permettent de confirmer l'existence des zones IV et V de la figure VI-20, et de donner des éclaircissements sur la structure des cellules convectives dites "intermittentes".

4.2.1 Comparaison avec des théories basées sur deux équations d'amplitude couplées

Du point de vue théorique, deux équipes de chercheurs se sont intéressées à l'interaction entre les $R_{\perp}$ et les $R_{//}$. Toutes deux se sont servies de deux équations d'amplitude couplées, l'une étant associée au développement des $R_{\perp}$ et l'autre à celui des $R_{//}$. Brand et al. (1991) ont utilisé un modèle phénoménologique de type Landau, alors que Müller et al. (1993) ont dérivé les équations d'amplitude de manière rigoureuse à partir des équations de Navier-Stokes. Les résultats obtenus par ces types d'approche n'étant valables que dans un domaine faiblement non-linéaire, les graphes présentés se limitent à $\varepsilon < 0,3$ (soit $Ra < 2200$).

Brand et al. (1991) ont utilisé le modèle suivant, où $A_{\perp} = A_{\perp}(x,t)$ et $A_{//} = A_{//}(x,t)$ représentent, respectivement, les amplitudes des $R_{\perp}$ et des $R_{//}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{\perp}^0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\perp} \frac{\partial}{\partial x} \right) A_{\perp} = \left[\chi_{\perp} + \xi_{\perp}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta_{\perp} |A_{\perp}|^2 - \delta_{\perp} |A_{//}|^2 \right] A_{\perp} \\ \tau_{//}^0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{//} \frac{\partial}{\partial x} \right) A_{//} = \left[\chi_{//} + \xi_{//}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta_{//} |A_{//}|^2 - \delta_{//} |A_{\perp}|^2 \right] A_{//} \end{array} \right. \quad (\text{VI}-17)$$

On note que le dernier terme de chaque équation (noté en gras) est un terme de couplage entre $R_{\perp}$ et $R_{//}$.

La difficulté dans ce modèle phénoménologique est de donner une valeur aux différents coefficients. En ce qui concerne l'équation en $A_{\perp}$ (hormis pour le coefficient de couplage $\delta_{\perp}$), les auteurs se sont servi des coefficients de l'équation de Ginzburg-Landau pour les $R_{\perp}$ établie par Müller et al. (1989). Pour l'équation en $A_{//}$, les coefficients ont été choisis de façon à rendre compte correctement des résultats connus, physiques et théoriques, concernant les $R_{//}$: notamment, la valeur de $Ra_{//}^*$ (cf. Platten et Legros (1984)) et la courbe $Ra_{//}^{\text{conv}}$ (déduite des travaux de Deissler (1987a-b, 1989)), ainsi que le nombre de Reynolds critique Re^* (les coefficients ont été choisis afin d'avoir $Re^* = 1,5$, ce qui correspond à peu près à une conduite d'allongement transversal $B=2$ pour $Pr=7$). Les coefficients de couplage $\delta_{\perp}$ et $\delta_{//}$ étant inconnus dans la littérature, et leur effet sur la structure de l'écoulement n'étant pas négligeable, Brand et al. (1991) ont testé plusieurs valeurs pour ces coefficients.

Les équations (VI-17) permettent alors de construire le diagramme de stabilité qui est reproduit à la figure VI-21. Il donne les stabilités linéaire et convective à la fois pour les $R_{\perp}$ et pour les $R_{//}$. Les courbes 1 et 2 correspondent à $Ra_{//}^*$ et à $Ra_{//}^{conv}$. Les courbes 3 et 4 correspondent, quant à elles, aux courbes classiques $Ra_{\perp}^*$ et $Ra_{\perp}^{conv}$ telle que nous les avons rencontrées jusqu'à maintenant: c'est les courbes obtenues sans prendre en compte le terme de couplage dans (VI-17), i.e. celles associées à une transition écoulement de Poiseuille-rouleaux transversaux. Dans ce cas, le coefficient d'amplification des $R_{\perp}$ est proportionnel à $\chi_{\perp}$ (où $\chi_{\perp}=Ra-Ra_{\perp}^*$). Or, lorsque $Re>Re^*$, les courbes 3 et 4 sont au dessus des courbes 1 et 2; il faut donc étudier la transition $R_{//}$ - $R_{\perp}$. Celle-ci est prise en compte par l'équation en $A_{\perp}$ complète (avec le terme de couplage). Dans ce cas, on constate que le coefficient d'amplification des $R_{\perp}$ devient proportionnel à $(\chi_{\perp}-\delta_{\perp r}|A_{//}|^2)$ (où $\delta_{\perp r}$ est la partie réelle strictement positive de $\delta_{\perp}$). En conséquence, le coefficient d'amplification diminuant, la transition est obtenue à des valeurs de Ra plus élevées: les courbes 3 et 4 sont déplacées vers le haut pour donner les courbes de stabilités linéaire et convective 5 et 6. On peut constater que ces courbes reproduisent qualitativement la croissance très rapide de la courbe expérimentale correspondante, marquant la transition entre les zones III et IV (cf. figure VI-20).

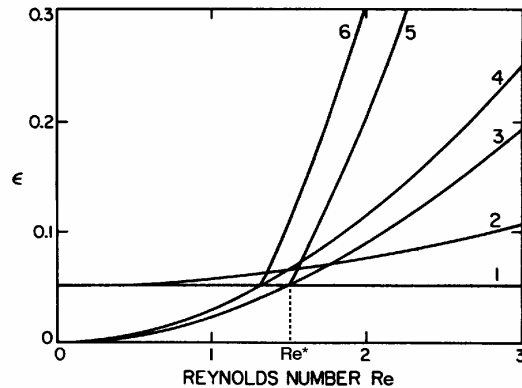


Figure VI-21 : Diagramme de stabilité dans le plan (ϵ, Re) , établi par *Brand et al. (1991)*, se rapportant qualitativement au cas $Pr=7$ et $B=2$.

Désirant reproduire des conditions expérimentales, *Brand et al. (1991)* imposent un bruit gaussien à l'entrée de la conduite comme conditions aux limites des équations d'amplitude (VI-17). Dans ces conditions, ils obtiennent des structures convectives ($R_{\perp}$ ou $R_{//}$) à la fois dans les zones d'instabilité absolue et dans les zones d'instabilité convective. Ils observent la coexistence des deux types de structures en différents endroits de la même conduite (voir les enveloppes pour les $R_{\perp}$ et les $R_{//}$ de la figure VI-22(a)). Dans la région comprise entre les courbes 5 et 6, ils mettent en évidence des effets d'hystérésis¹ tout à fait similaires à ceux observés dans la zone IV de la figure VI-20. Enfin, pour certaines valeurs des coefficients de couplage $\delta_{\perp}$ et $\delta_{//}$, ils montrent la coexistence des enveloppes pour les $R_{\perp}$ et des enveloppes pour les $R_{//}$, au même endroit de la conduite (cf. figure VI-22(b)); ceci confirme donc, au moyen d'un modèle très simple, l'existence possible de structures mixtes ($R_{\perp}+R_{//}$), assimilables aux structures intermittentes observées par Ouazzani dans la zone V.

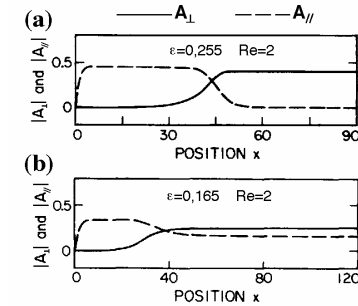


Figure VI-22 : Enveloppes des $R_{\perp}$ et des $R_{//}$, d'après *Brand et al. (1991)*

- (a) coexistence des $R_{\perp}$ et des $R_{//}$ en différentes positions axiales de la conduite; $\epsilon=0,255$, $Re=2$, $\delta_{\perp}=0,75$ et $\delta_{//}=1,5$;
 (b) superposition stabilisée des $R_{\perp}$ et des $R_{//}$ pour $\forall x>40$;
 $\epsilon=0,165$, $Re=2$, $\delta_{\perp}=0,5$ et $\delta_{//}=1,4$.

De leur côté, les équations de Ginzburg-Landau établies par *Müller et al. (1993)* s'écrivent:

¹ Existence des $R_{\perp}$ ou des $R_{//}$ pour une même valeur des paramètres ϵ et Re , en fonction du trajet suivi pour atteindre la valeur en question.

$$\begin{cases} \tau_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\perp} \frac{\partial}{\partial x} \right) A_{\perp} = \\ \left[\chi_{\perp} (1 + ic_0) + \xi_{\perp}^2 (1 + ic_1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (1 + ic_2) |A_{\perp}|^2 - \delta_{\perp} (1 + ic_3) |A_{//}|^2 \right] A_{\perp} \\ \tau_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{//} \frac{\partial}{\partial x} \right) A_{//} = \\ \left[\chi_{//} + \xi_{//}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{//} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \lambda_{//} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - |A_{//}|^2 - \delta_{//} |A_{\perp}|^2 \right] A_{//} \end{cases} \quad (VI-18)$$

Ces équations ne rendent pas compte exactement des conditions expérimentales car elles modélisent l'interaction entre les $R_{\perp}$ et les $R_{//}$ dans une conduite où les conditions aux limites sur les parois latérales verticales seraient de type glissement pur (pas d'adhérence). Ce cas correspond aussi à une conduite infinie dans les deux directions horizontales; on a donc $Re^*=0$. Pour remédier à cela, Müller *et al.* (1993) imposent dans les équations (VI-18) des seuils de stabilité linéaire ($Ra_{\perp}^*$ et $Ra_{//}^*$)¹ qui se coupent en $Re^* \approx 0,5$. Plus précisément, ils imposent $\varepsilon_{\perp}^* = 0,07 Re^2$ et $\varepsilon_{//}^* = 0,02$ (soit $Ra_{//}^* = 1742$). De cette manière, ils se placent quasiment dans les conditions de Ouazzani puisque, dans ses expériences, $Re^* \approx 0,3$ et $Ra_{//}^* = 1840$. De plus, les coefficients des équations d'amplitude sont calculés pour $Pr = 5,8^2$, au lieu de $Pr = 6,4$ dans les expériences.

Le diagramme de stabilité résultant du modèle (VI-18) est reproduit à la figure (VI-23). Il donne les courbes de stabilité dans le plan (ε, Re) . Lorsque $\varepsilon_{\perp}^* < \varepsilon < \varepsilon_{\perp}^{conv}$ (respectivement, $\varepsilon_{//}^* < \varepsilon < \varepsilon_{//}^{conv}$), l'état de base (l'écoulement de Poiseuille conducteur) devient convectivement instable vis à vis des $R_{\perp}$ (respectivement, des $R_{//}$). Lorsque $\varepsilon > \varepsilon_{\perp}^{conv}$ (respectivement, $\varepsilon > \varepsilon_{//}^{conv}$), l'état de base devient absolument instable vis à vis des $R_{\perp}$ (respectivement, des $R_{//}$). Enfin, pour $\varepsilon < \varepsilon_{\perp}^*$, un écoulement de $R_{//}$ stationnaires devient instable vis à vis des $R_{\perp}$, et pour $\varepsilon < \varepsilon_{//}^*$, un écoulement de $R_{\perp}$ uniformes devient instable vis à vis des $R_{//}$.

¹ Dans (VI-18), $Ra_{\perp}^*$ et $Ra_{//}^*$ interviennent dans $\chi_{\perp}$ et $\chi_{//}$: on a $\chi_{\perp} = Ra - Ra_{\perp}^*$ et $\chi_{//} = Ra - Ra_{//}^*$.

² Cf. Müller *et al.* (1993) pour avoir les valeurs numériques des coefficients des équations d'amplitude couplées (VI-18) lorsque $Pr = 5,8$.

³ Dans le graphe (VI-23), les courbes de stabilité $\varepsilon_{\perp}^*$ et $\varepsilon_{//}^*$ sont obtenues en réalisant une étude de stabilité linéaire des solutions uniformes, non-linéaires, $A_{\perp}^s$ et $A_{//}^s$ des équations de Ginzburg-Landau couplées, où $A_{\perp}^s = A_{\perp}^0 e^{i\Omega_{\perp} t}$, $A_{//}^s = A_{//}^0$ et où $A_{\perp}^0, A_{//}^0$ et $\Omega_{\perp}$ sont des constantes. La convection sous la forme de $R_{\perp}$ est donnée par: (cf. page suivante)

On constate de nouveau pour cette étude que la courbe $\varepsilon_{//}^*$ se compare favorablement à la transition entre les zones III et IV de la figure VI-20. Cependant, Müller *et al.* (1993) n'observent jamais d'effet d'hystérésis. Pour $\varepsilon > (\varepsilon_{\perp}^*, \varepsilon_{//}^*)$, ils montrent qu'il y a coexistence en différents endroits de la conduite des $R_{\perp}$ et des $R_{//}$ (cf. figure VI-24(a)). Mais, en aucun cas, des structures mixtes du type de celles de Brand *et al.* (1991) (superposition des $R_{\perp}$ et des $R_{//}$ sur toute la conduite) ne sont observées. Müller *et al.* (1993) montrent que cette configuration existe, mais que c'est une solution instable des équations d'amplitude; ils expliquent que la solution stable de la figure VI-22(b) est dû à un choix inapproprié des paramètres de couplage $\delta_{\perp}$ et $\delta_{//}$. Par contre, comme on peut le voir à la figure VI-24(b), une structure mixte est observée localement dans la conduite, pour des paramètres de l'écoulement proches de $\varepsilon_{//}^*$. Cette configuration est obtenue en imposant un forçage à l'entrée de la conduite, de manière à ce que les structures de nature convective puissent se développer. On peut envisager qu'un enregistrement de $W(t)$ dans cette zone donne un signal similaire à celui de la figure III-24(a) enregistré dans la zone V "intermittente" de Ouazzani: la partie sinusoïdale du signal étant la contribution des $R_{\perp}$, et la valeur moyenne non nulle résultant de la contribution des $R_{//}$.

4.2.2 Comparaison avec des simulations numériques 3D et d'autres expériences

Des éclaircissements sur les structures des cellules convectives mixtes ou intermittentes ont été obtenus grâce à la simulation numérique 3D ou à des expériences de visualisation par plans laser. Ainsi, à la figure VI-25, Schröder *et Bühler* (1995) présentent, à partir de leurs simulations numériques, des nappes de la composante verticale de la vitesse qui permettent de retrouver et d'expliquer les signaux enregistrés dans la zone V de Ouazzani. A la figure VI-26, ces auteurs montrent des $R_{\perp}$ courbés (en forme de fers à cheval), superposés à des $R_{//}$.

Très récemment, l'équipe de T. F. Lin (cf. chapitre II, §4), a réalisé de nombreuses expériences de visualisation de l'écoulement de Poiseuille-Bénard dans l'air, suivies de modélisations numériques directes 3D, pour des conduites de grande extension latérale: $B=l/h=12$. Ces travaux, notamment la visualisation par plan laser horizontal en $z=0,5$, ont permis de montrer, pour la première fois, certaines

(suite de la page précédente) $|A_{\perp}^0|^2 = Ra - Ra_{\perp}^*$, $\tau_0 \Omega_{\perp} = (c_0 - c_2) |A_{\perp}^0|^2$ et $|A_{//}^0|^2 = 0$. Celle sous la forme de $R_{//}$ est donnée par: $|A_{\perp}^0|^2 = \Omega_{\perp} = 0$ et $|A_{//}^0|^2 = Ra - Ra_{//}^*$.

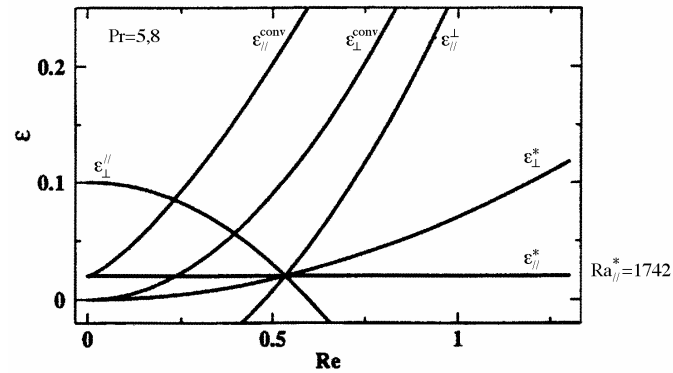


Figure VI-23 : Diagramme de stabilité dans le plan (ϵ, Re) , établi par Müller *et al.* (1993), pour $Pr=5,8$ et $Re^{*}\approx 0,5$ (cf. texte pour les explications).

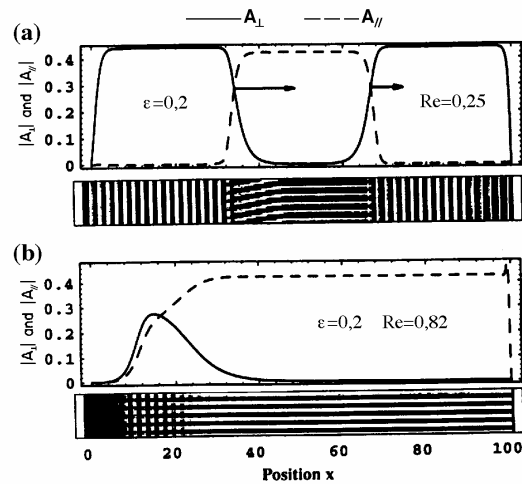


Figure VI-24 : Enveloppes des $R_{\perp}$ et des $R_{||}$, avec représentation simple des structures correspondantes de l'écoulement (d'après Müller *et al.* (1993)).

- (a) coexistence des $R_{\perp}$ et des $R_{||}$ en différentes positions axiales de la conduite; $\epsilon=0,2$, $Re=0,25$ et $Pr=5,8$;
 (b) superposition locale des $R_{\perp}$ et des $R_{||}$; $\epsilon=0,2$, $Re=0,82$ et $Pr=5,8$.

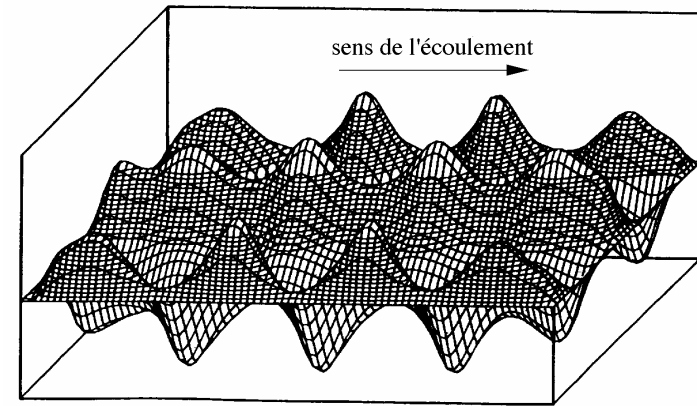


Figure VI-25 : Superposition de $R_{||}$ et de $R_{\perp}$ obtenue par simulation numérique 3D pour $Ra=14600$, $Re=2,7 \times 10^{-3}$, $Pr=530$ et $B=4,1$; représentation par une nappe de W en $z=0,5$ (tiré de Schröder *et Bühler* (1995)).

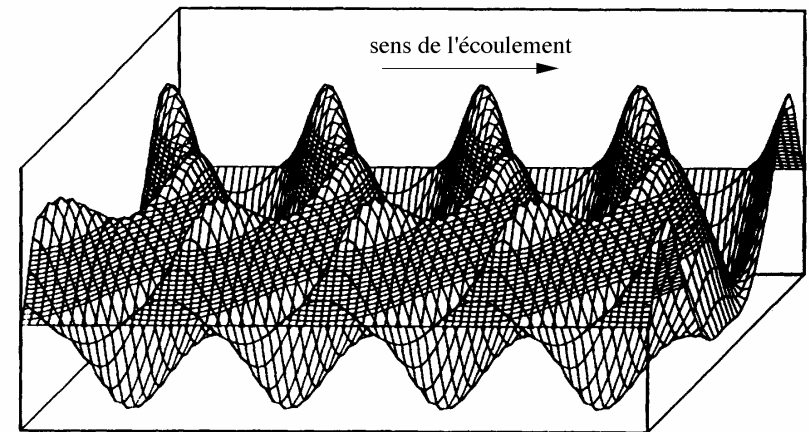


Figure VI-26 : Nappe de W en $z=0,5$ représentant des $R_{\perp}$ en forme de fers à cheval, superposés à des $R_{||}$, obtenus par simulation numérique 3D pour $Ra=7600$, $Re=0,05$, $Pr=530$ et $B=4,1$ (tiré de Schröder *et Bühler* (1995)).

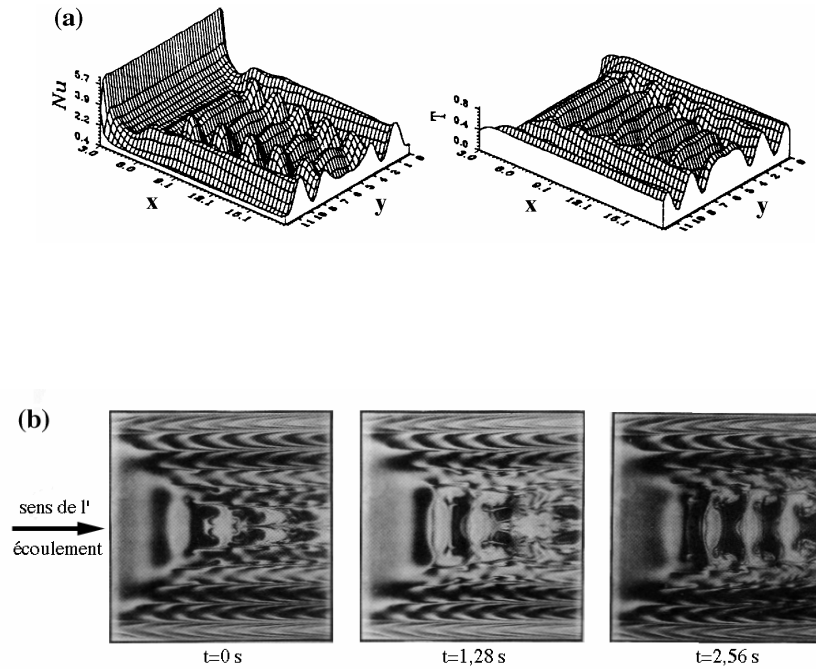


Figure VI-27 : Visualisation de la superposition des $R_{//}$ (situés le long des bords latéraux) et des $R_{\perp}$ (situés au centre de la conduite):

(a) Nappes de Nu en $z=0$ et de T en $z=0,5$, obtenues par simulation numérique 3D pour $Ra=4200$, $Re=10$, $Pr=0,71$ et $B=12$ (tiré de *Chang et al. (1997b)*);

(b) Écoulement intermittent visualisé par plan laser dans de l'air avec de la fumée, en $z=0,5$ (vue de dessus), à trois instants différents et pour $Ra=4000$, $Re=10$, $Pr\approx 0,7$ et $B=12$ (tiré de *Yu et al. (1997a)*).

configurations de l'écoulement que l'on ne soupçonnait pas. Ainsi, la figure VI-27 montre, dans la zone d'entrée, une structure mixte où il y a coexistence des $R_{//}$ (situés le long des bords latéraux de la conduite) et des $R_{\perp}$ (situés au centre de la conduite). Pour Ra et Re suffisamment élevé, *Chang et al. (1997a)* montrent expérimentalement que les $R_{//}$ peuvent, au cours du temps, se scinder en deux ou au contraire fusionner. Le diagramme de stabilité des différentes configurations observées par cette équipe dans leurs expériences est reproduit à la figure VI-28. Six types de structures sont identifiés (voir la légende de la figure). On remarquera que le diagramme ne fait pas apparaître de nombre de Reynolds critique Re^* entre les phases de $R_{\perp}$ et de $R_{//}$, cela en raison de la valeur du rapport de forme ($B=12$). Cependant, étant donné le système de refroidissement utilisé dans ces expériences de visualisation¹ et l'échelle importante des axes Ra et Re de la figure VI-28, ce diagramme de stabilité doit probablement être regardé d'un point de vue qualitatif.

Par la simulation numérique 3D, la même équipe (*Yu et al. (1997b)*) a mis en évidence des rouleaux longitudinaux inclinés par rapport à l'axe de la conduite: la figure VI-29 montre le cas où les $R_{//}$ vont d'un bord à l'autre de la conduite, et la figure VI-30 montre le cas de $R_{//}$ formant des V. Ces structures n'ont pas été observées dans les expériences et n'apparaissent pas dans le diagramme de stabilité VI-28.

On note de plus qu'aucun effet d'hystérésis n'est rapporté dans ces expériences: il n'existe pas de zone IV comme dans les expériences de Ouazzani (cf. graphe VI-20). Ce comportement n'est relaté que dans le cas de conduite de faible rapport de forme. C'est le cas pour les expériences de *Schröder et Bühler (1995)* avec de l'huile de silicone ($Pr=530$), dans une conduite telle que $B=4,1$. *Chen et Lavine (1996)* observent aussi des effets d'hystérésis lors de simulations numériques 3D avec $B=2$ et $Pr=0,7$. Cependant, dans ce cas, ce comportement semble lié à un artifice numérique: le choix du pas de temps Δt .

¹ Pour permettre des visualisations par le dessus de la conduite, la plaque horizontale supérieure est en verre et elle est refroidie par un film d'eau froide isotherme. *Chang et al. (1997b)* expliquent qu'avec ce système des variations de températures de $\pm 0,05$ à $\pm 0,12^\circ\text{C}$ sont enregistrées. A titre de comparaison, on rappelle que dans les expériences de Ouazzani, la température varie de $\pm 0,015^\circ\text{C}$.

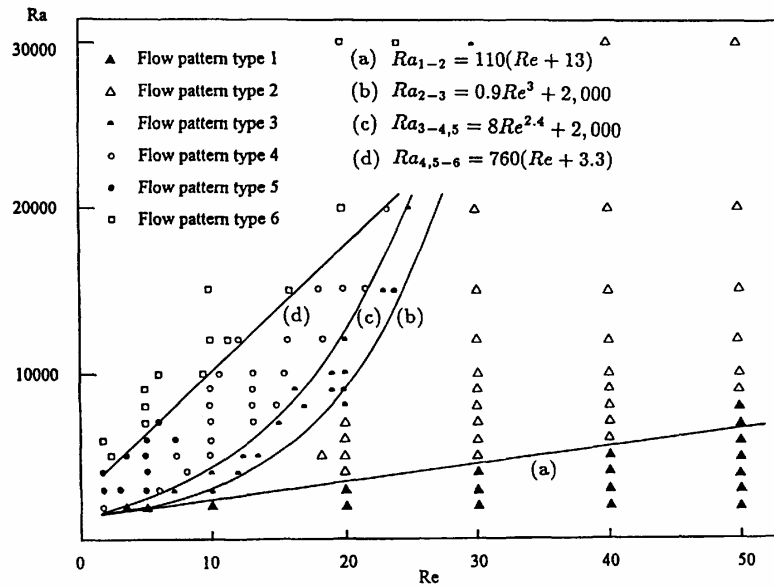


Figure VI-28 : Diagramme de stabilité des différentes configurations observées expérimentalement par Yu *et al.* (1997a), dans des écoulements de Poiseuille-Bénard avec de l'air ($Pr \approx 0,7$) et pour $B=12$.

Six configurations différentes sont identifiées:

- | | |
|--|---|
| <u>type 1</u> : $R_{//}$ stables | <u>type 4</u> : écoulement mixte avec |
| <u>type 2</u> : $R_{//}$ instables (avec | coexistence des $R_{\perp}$ et des $R_{//}$ |
| fusion et division des $R_{//}$ | (cf. figure VI-27(b)) |
| au sein de l'écoulement) | <u>type 5</u> : $R_{\perp}$ stables |
| <u>type 3</u> : transition des $R_{//}$ | <u>type 6</u> : rouleaux irréguliers |
| instables vers les $R_{\perp}$ | non stabilisés |

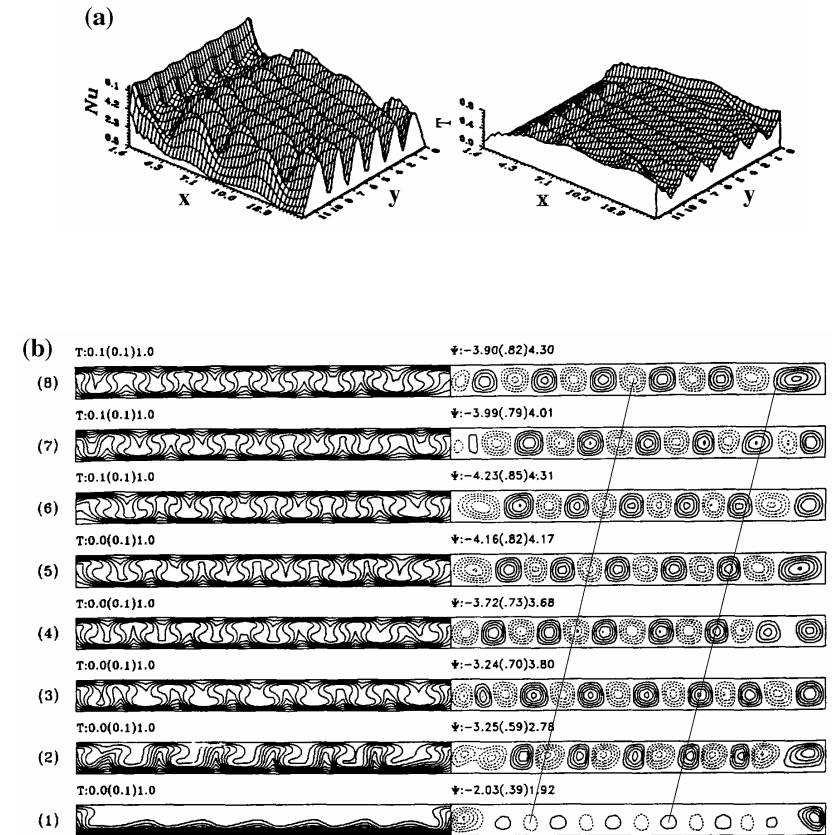


Figure VI-29 : Représentation de $R_{//}$ obliques, obtenus par simulation numérique 3D pour $Ra=20000$, $Re=50$, $Pr=0,71$ et $B=12$ (tiré de Yu *et al.* (1997b)).

(a) Nappes de Nu en $z=0$ et de T en $z=0,5$;

(b) Isothermes et lignes de courant dans des plans (y, z) en $x=2,52$ (1), $4,21$ (2), $5,89$ (3), $7,57$ (4), $9,26$ (5), $10,94$ (6), $12,62$ (7) et $14,30$ (8).

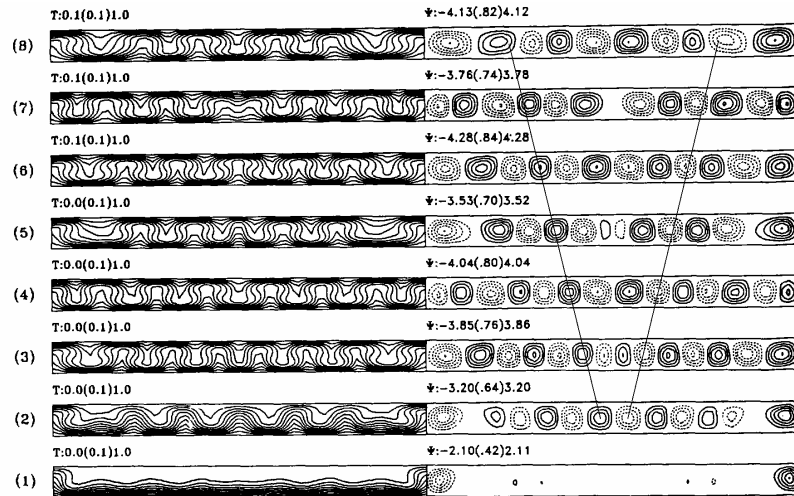


Figure VI-30 : Isothermes et lignes de courant, dans les mêmes plans que la figure VI-29(b), représentant des $R_{\perp}$ obliques en forme de V, obtenus par simulation numérique 3D pour $Ra=9000$, $Re=30$, $Pr=0,71$ et $B=12$ (tiré de *Yu et al. (1997b)*).

5 Évolution spatiale et temporelle des rouleaux transversaux pleinement développés

Dans ce paragraphe, nous présentons successivement l'évolution en fonction de Re et de Ra de la fréquence fondamentale f des $R_{\perp}$ (exprimée en s^{-1}), de leur longueur d'onde adimensionnelle λ , et de leur vitesse de phase adimensionnelle V_r/U° . Pour chacune des trois grandeurs, nous présentons les résultats obtenus avec *Config-1* et avec *Config-2*. D'une manière générale, pour Ra et Re fixés, nous avons vérifié que f , λ et V_r/U° ne dépendent ni des conditions initiales, ni de l'allongement $A=L/h$, pour $10 \leq A \leq 30$ (à ce sujet, voir au tableau V-2 la comparaison entre la solution de référence et les différentes OBCs). Nous avons aussi vérifié que ces grandeurs peuvent être considérées comme constantes quel que soit x en dehors de la zone perturbée par les conditions aux limites de sortie (i.e. pour $x < x_s$).

5.1 Fréquence fondamentale des $R_{\perp}$ dans le cas de *Config-1*

On présente à la figure VI-31 l'évolution de la fréquence f des $R_{\perp}$, en fonction de Re , pour plusieurs valeurs de Ra . Les fréquences sont calculées en faisant l'analyse de Fourier des signaux temporels $W(t)$, $U(t)$ et $T(t)$ en $z=0,5$ (cf. §1) enregistrés en différentes positions x . La figure montre que f est une fonction linéaire de Re , pour Ra fixé, et que les résultats numériques sont en bon accord avec les quelques résultats expérimentaux donnés par *Ouazzani (1991)*.

Aux plus petites valeurs de Re , on observe que la fréquence des $R_{\perp}$ s'annule alors que le débit est non nul. Ce phénomène appelé "phase-fixing" ou "phase-pinning", a été observé expérimentalement la première fois par *Pocheau et al. (1987)*, et il a été reproduit numériquement et théoriquement par *Müller et al. (1992a)*. Nous avons vu au chapitre III, §2.3.5, que d'après ces auteurs, cet effet de blocage des $R_{\perp}$ est lié à la nature des conditions aux limites aux extrémités de la conduite. Dans le cas de *Müller et al. (1992)*, les conditions de "phase-fixing" sont des conditions de type Neumann. Cela est confirmé par *Roth et al. (1996)*. Cette étude montre, en plus, que c'est avant tout l'influence des conditions d'entrée qui est la cause du blocage des rouleaux (cf. chapitre V, §3.4, "Complément bibliographique"). Dans le cas des simulations de la figure VI-31, les calculs sont effectués en imposant à l'entrée un profil de Poiseuille pour la vitesse et une condition de Neumann pour la température (cf. chapitre V, §3.2.3, tableau V-1). Nous sommes donc en accord avec *Roth et al. (1996)*.

Cependant, cet effet de blocage a aussi été observé avec des conditions aux limites de Dirichlet par *Schröder et Bühler (1995)*. Ces auteurs étudient l'écoulement de Poiseuille-Bénard expérimentalement avec de l'huile de silicone. Ils utilisent un canal rectangulaire dont l'entrée et la sortie sont constituées de deux petites briques d'un milieu poreux. Ils reproduisent l'expérience par des simulations numériques 3D, en imposant un profil de vitesse carré purement conductif comme conditions d'entrée et de sortie du domaine de calcul. Dans les deux cas, un seuil de blocage des rouleaux est très nettement mis en évidence. Nous avons aussi testé la condition $T=1-z$ à l'entrée de *Config-1*, dans le cas où $Ra=4700$. Le résultat est présenté à la figure VI-32. Il est comparé à la droite $f=f(Re)$ à $Ra=4700$ de la figure VI-31, i.e. avec la condition $\partial T/\partial x=0$ à l'entrée. On observe que le seuil de blocage est plus élevé avec la

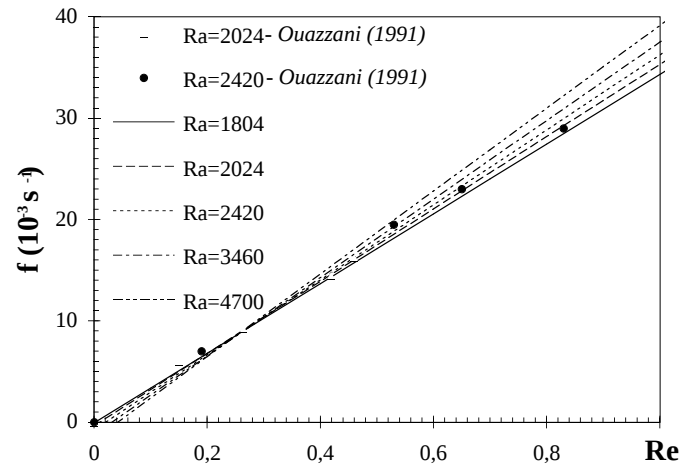


Figure VI-31 : Variation de la fréquence f des $R_{\perp}$ en fonction de Re , pour plusieurs valeurs de Ra dans le cas de *Config-1*; comparaison avec les expériences de *Ouazzani (1991)*.

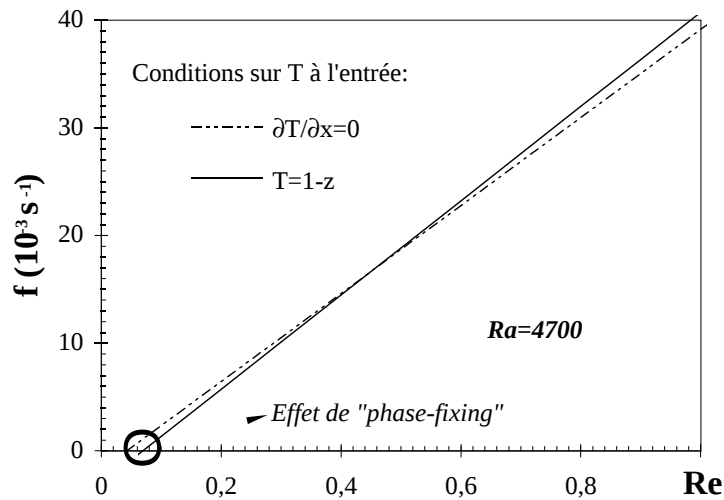


Figure VI-32 : Comparaison de l'influence des conditions aux limites à l'entrée du domaine de calcul sur le seuil de blocage des $R_{\perp}$ (effet de "phase-fixing").

Ra	ε	Re^{**} d'après la figure VI-31 (calculs avec <i>Config-1</i>)	Re^{**} d'après <i>Müller et al. (1992)</i> - formule (III-58)
1804	0,056	0,003	0,007
2024	0,185	0,011	0,014
2420	0,417	0,021	0,020
3460	1,026	0,032	0,032
4700	1,752	0,042	0,042

Tableau VI-4 : Nombre de Reynolds critique Re^{**} marquant la transition entre $R_{\perp}$ stationnaires et $R_{\perp}$ propagatifs, aux faibles valeurs de Re ; comparaison entre simulation numérique et théorie.

condition de Dirichlet qu'avec la condition de Neumann. Le dessin des lignes de courant de l'écoulement, dans le cas où la condition à la limite est $T=1-z$, montre la présence d'un long $R_{\perp}$ stationnaire juste après l'entrée, à partir duquel se détachent les autres $R_{\perp}$, qui eux sont entraînés vers l'aval de la conduite. Nous pensons que ce long rouleau stationnaire fixe les autres $R_{\perp}$ aux faibles débits et donc augmente le seuil de blocage des rouleaux.

Dans le cas où des conditions de Neumann sont utilisées, nous avons vu au chapitre III, §2.3.5, que la formule (III-58) proposée par *Müller et al. (1992)* permet de majorer la valeur du nombre de Reynolds critique Re^{**} correspondant au seuil de blocage des $R_{\perp}$. Pour $Pr=6,4$ et $A=L/h=10$, cette formule donne $Re^{**} \approx 0,03153\varepsilon^{1/2}$. Au tableau VI-4, nous comparons les valeurs obtenues par cette relation à celles déduites des droites d'interpolation linéaire présentées à la figure VI-31. On constate que les résultats numériques et théoriques concordent au delà du domaine de validité de la théorie faiblement non-linéaire de *Müller et al. (1992)*.

A nombre de Reynolds fixé, *Schröder et Bülher (1995)* observent que f décroît lorsque Ra augmente, quel que soit la valeur de Re . La figure VI-31 montre ce comportement uniquement pour $Re < 0,26$ en raison de l'effet de phase-fixing. Nous pensons, mais cela reste à vérifier, que cela est lié aux variations différentes de la longueur d'onde des $R_{\perp}$ entre les deux études. En effet, comme nous allons le voir au §5.2, la longueur d'onde moyenne des $R_{\perp}$ varie beaucoup en fonction de Pr et de B . Or, $Pr=530$ et $B=4,1$ pour *Schröder et Bülher (1995)*, alors que $Pr=6,4$ et " $B=\infty$ " dans notre étude.

5.2 Longueur d'onde des $R_{\perp}$ dans le cas de *Config-1*

Il existe peu d'information sur l'évolution de λ en fonction de Re et de Ra dans le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard. De plus, les quelques résultats disponibles sont difficiles à relier les uns aux autres car ils sont obtenus pour des valeurs de Pr et de $B=l/h$ très différentes. Dans ce paragraphe, on présente tout d'abord nos résultats, puis on les compare aux résultats connus de la littérature.

A la figure VI-33, on donne, pour différents nombres de Rayleigh, les courbes $\lambda=f(Re)$ obtenues par les calculs dans *Config-1*. λ est calculée à partir des signaux $U(x)$, $W(x)$ et $T(x)$, enregistrés en $z=0,5$, pour $x_1 \leq x \leq x_2$ (i.e. dans la région où l'écoulement est pleinement établi), et en huit instants différents. Pour un seul signal, quand $A=10$, $\Delta x=0,1$ et $x_2-x_1=4,5$, λ est déterminée approximativement à $\pm 0,05$ unité près. En multipliant le nombre d'enregistrements (pour U , W et T à 8 instants différents, soit 24 signaux), on estime que l'erreur sur λ est inférieure à $\pm 0,015$ unité. Les barres d'erreur sur λ sont représentées pour quelques points à la figure VI-33. Ajoutons qu'à la différence de *Roth et al. (1996)* (cf. chapitre V, §3.4), nous n'avons pas remarqué de variation de λ avec x , bien que nous imposons $\partial T/\partial x=0$ sur la frontière d'entrée. Cela vient du fait que dans nos calculs $A=10$ alors que $A=50$ pour *Roth et al. (1996)*.

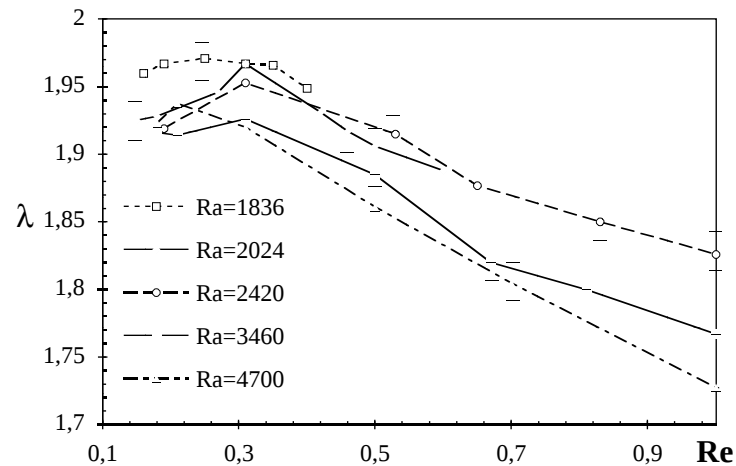


Figure VI-33 : Variations de la longueur d'onde des rouleaux transversaux en fonction de Re , pour différents Ra , calculées avec *Config-1*.

Malgré l'imprécision liée à la taille du maillage, on observe que λ décroît légèrement quand Re et Ra augmentent (sauf pour les plus petites valeurs de Re , $Re \leq 0,3$). Ce comportement est en accord avec ce qui a été observé par *Müller et al. (1989, 1992a)* dans leurs simulations 2D (cf. §2.3.5, chapitre III). On rappelle qu'avec l'équation de Ginzburg-Landau, *Müller* obtient que les variations de λ sont négligeables. Pour quelques valeurs de Re , à Ra fixé, les expériences de *Luijckx et al. (1981)* montrent aussi que λ diminue lorsque Re augmente; il en est de même pour les simulations numériques 3D de *Schröder et Bülher (1995)*, sauf près de $Re=0$ où, comme pour nous, λ augmente quand Re augmente. Nous pensons qu'aux faibles débits, les $R_{\perp}$ "retenus par la condition d'entrée" (comme dans l'effet de phase-fixing) s'allongent sous l'effet de l'écoulement, d'autant plus que Re augmente. La stabilité linéaire de *Luijckx (1983)* montre quant à elle que le nombre d'onde critique $k_x^*=2\pi/\lambda^*$ décroît quand Re augmente, pour $2 \leq B < \infty$ (cf. figure III-13). A la figure VI-33, on retrouve la valeur critique de λ à $Re=0$ donnée par la stabilité linéaire ($\lambda^*=2,01$, cf. figure III-13 à $Re=0$ et $B=\infty$), puisqu'on obtient $\lambda \approx 1,96$ pour $Ra=1836$ et Re petit.

Dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard, *Platten et Legros (1984)* constatent que, d'une manière générale, dans les expériences, on observe que λ augmente lorsque Ra augmente, alors que dans les simulations numériques 2D c'est le contraire. Cette (apparente) contradiction est aussi observée en convection mixte. Dans le tableau VI-5, on donne les valeurs moyennes de λ (indépendamment de Re) enregistrées dans des expériences ou dans des simulations numériques pour

Références	Méthodes et configuration	Pr	Valeur moyenne de λ enregistrée pour $1,5Ra_{\perp}^* \leq Ra \leq 5Ra_{\perp}^*$
<i>Schröder et Bülher (1995)</i>	Simulations numériques 3D ($B=4,1$)	530	$2,4 \approx 1,1\lambda^*$
<i>Luijckx et al. (1981)</i>	Expériences ($B=5,25$)	450	$2,2 \approx 1,03\lambda^*$
<i>Ce travail</i> (figure VI-33)	Simulations numériques 2D	6,4	$1,8 \approx 0,88\lambda^*$
<i>Müller et al. (1989, 1992)</i>	Simulations numériques 2D	1	$1,9 \approx 0,94\lambda^*$
<i>Ce travail</i> (tableau V-2)	Simulations numériques 2D	0,7	$1,4 \approx 0,7\lambda^*$

Tableau VI-5 : Valeurs moyennes de la longueur d'onde des $R_{\perp}$, pour $1,5Ra_{\perp}^* \leq Ra \leq 5Ra_{\perp}^*$, en fonction du nombre de Prandtl et du confinement latéral.

$1,5Ra_{\perp}^* \leq Ra \leq 5Ra_{\perp}^*$. On compare ces valeurs aux valeurs de λ^* données par la stabilité linéaire aux tableaux III-1 et III-5. On constate que $\lambda > \lambda^*$, i.e. que λ augmente avec Ra , à la fois pour les grands nombres de Prandtl et les petits rapports de forme. Cependant, le tableau VI-5 ne nous permet pas de trancher pour savoir qui de Pr ou de B à l'influence la plus importante sur la variation de λ avec Ra . On peut ajouter que la stabilité linéaire prévoit que λ^* augmente lorsque B diminue (pour $B \geq 2$ et Pr fixé), et cela d'autant plus que Re est grand (cf. figure III-13). Quoiqu'il en soit, la nature de l'influence de B et de Pr sur λ est un problème difficile à éclaircir avec les données actuelles, et il mérite des approfondissements.

5.3 Fréquence fondamentale des $R_{\perp}$ dans le cas de *Config-2*

On présente à la figure VI-34 la variation de f en fonction de Re , pour plusieurs valeurs de Ra et pour $A=3,6$ et $A=3,9$. On rappelle que dans le cas de *Config-2*, la longueur d'onde des $R_{\perp}$ est imposée par l'allongement du domaine de calcul; pour

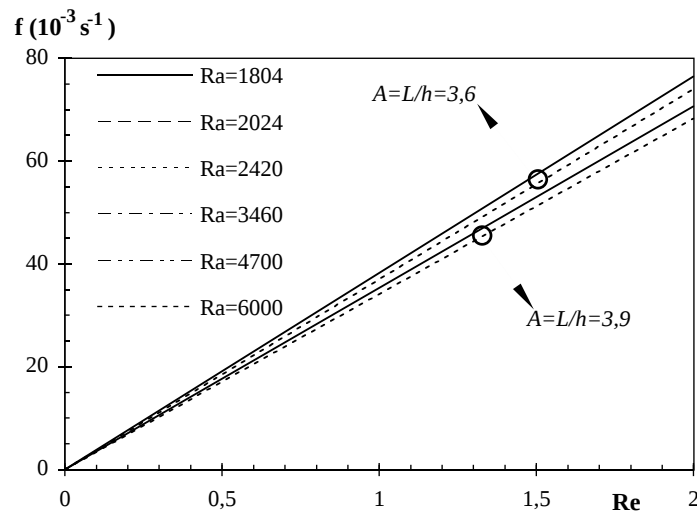


Figure VI-34 : Variations de la fréquence des $R_{\perp}$ en fonction de Re , pour différents Ra , calculées avec *Config-2* pour deux allongements: $A=L/h=3,6$ et $3,9$.

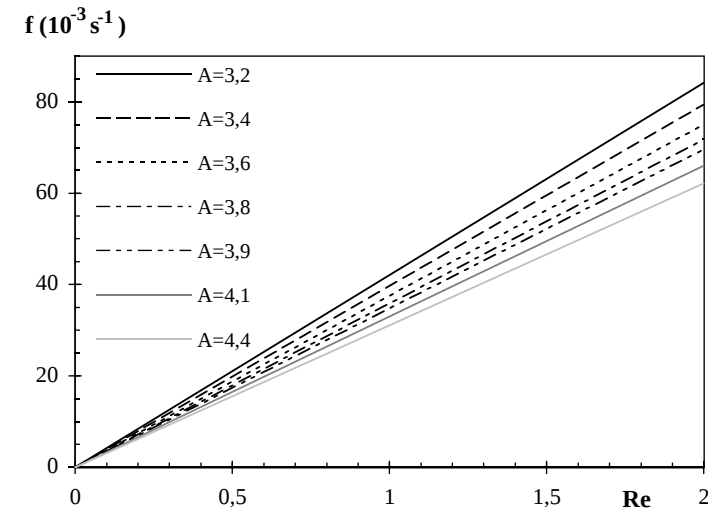


Figure VI-35 : Variations de la fréquence des rouleaux transversaux en fonction de Re et de l'allongement $A=L/h$ de *Config-2* (l'influence du nombre de Rayleigh est négligée par rapport à celle de A).

$A=3,9$, $\lambda=1,95$, et pour $A=3,6$, $\lambda=1,8$. On constate que, comme pour *Config-1*, f est une fonction linéaire de Re . Par contre, il n'y a plus d'effet de blocage des $R_{\perp}$ à petit nombre de Reynolds. De plus, à la différence de la figure VI-31, mais en accord avec les simulations numériques de *Schröder et Bülher (1995)* utilisant des conditions aux limites périodiques, on constate que f diminue *légèrement* lorsque Ra augmente, pour Re et A fixés. Cependant, la fréquence varie *beaucoup* en fonction de λ . A la figure VI-35, on représente les droites d'interpolation linéaire $f=f(Re)$ obtenues à partir de toutes les valeurs de Ra , pour un rapport de forme donné. On fait varier A entre 3,2 et 4,4. Cette figure confirme, pour un grand nombre de rapports de forme, que la fréquence des $R_{\perp}$ diminue fortement lorsque A augmente.

5.4 Longueur d'onde "naturelle" des $R_{\perp}$ dans le cas de *Config-2*

Nous venons de voir que lorsqu'on utilise des conditions aux limites périodiques, il n'est pas possible de déterminer avec assurance les caractéristiques

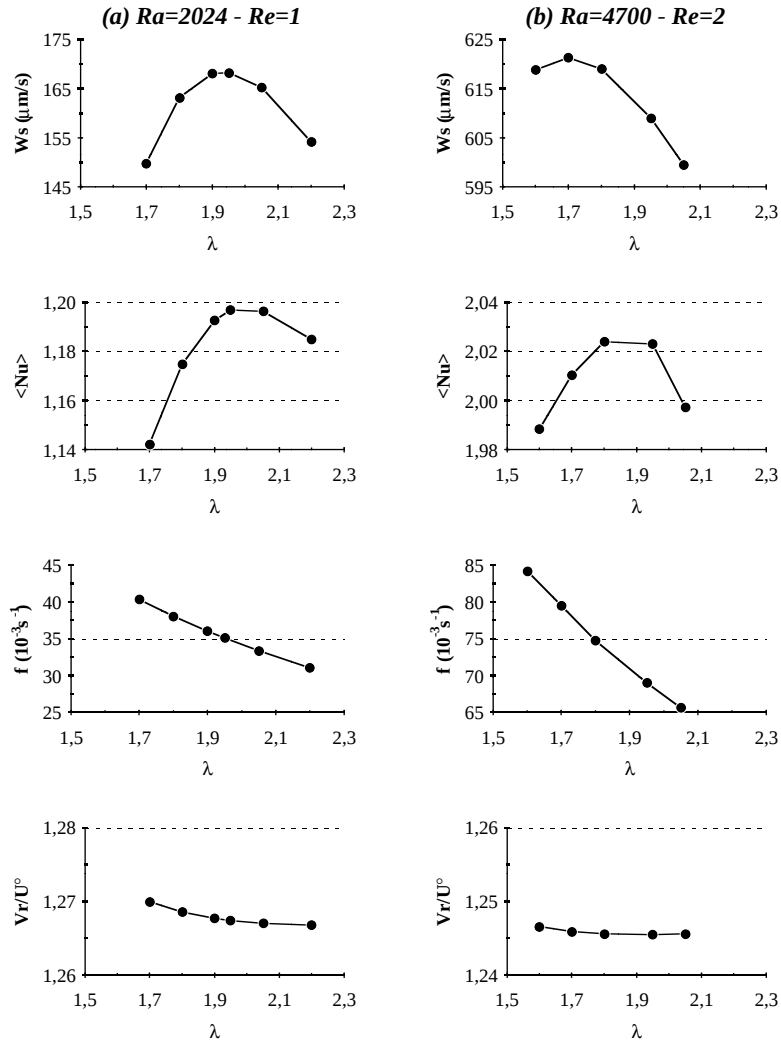


Fig. VI-36 : Évolution de l'amplitude de saturation W_s , du nombre de Nusselt moyen $\langle Nu \rangle$, de la fréquence f , et de la vitesse adimensionnelle Vr/U° des $R_{\perp}$, en fonction de λ , pour $(Ra; Re) = (2024; 1)$ (colonne a), et pour $(4700, 2)$ (colonne b), dans le cas de *Config-2*.

physiques des $R_{\perp}$, puisqu'en fixant *a priori* la longueur d'onde, on impose toute la structure de l'écoulement. Pourtant, on est sûr qu'il existe un rapport de forme A qui correspond à la longueur d'onde des $R_{\perp}$ naturellement amplifiés. Le problème est de savoir comment arriver à sélectionner ce rapport de forme particulier. Pour cela, nous présentons, à la figure VI-36, l'évolution de l'amplitude de saturation W_s , du nombre de Nusselt moyen $\langle Nu \rangle$, de la fréquence f , et de la vitesse adimensionnelle Vr/U° des $R_{\perp}$, en fonction de λ , pour $(Ra; Re) = (2024; 1)$ et $(4700, 2)$. Notons que $Vr/U^\circ = \lambda/\tau$, où τ est la période adimensionnelle des $R_{\perp}$ (cf. formule (III-36)). Donc, Vr/U° s'exprime en fonction de f et de λ de la manière suivante: $Vr/U^\circ = \lambda/\tau = (h/U^\circ)f\lambda = (h^2/(vRe))f\lambda$ (car λ est sans dimension et f s'exprime en s^{-1}).

Alors que f décroît quasi-linéairement lorsque λ augmente et que Vr/U° peut être considérée comme indépendante de λ , on constate que W_s et $\langle Nu \rangle$ passent par des maxima pour des valeurs particulières de λ . Pour $(Ra; Re) = (2024; 1)$, le maximum est en $\lambda = 1,95$ pour W_s et $\langle Nu \rangle$; or, avec *Config-1*, en prolongeant la courbe correspondant à ce cas dans la figure VI-33, on trouve que $\lambda \approx 1,85$. Pour $(Ra; Re) = (4700; 2)$ dans la figure VI-36, le maximum est en $\lambda = 1,7$ pour W_s et en $\lambda = 1,8$ pour $\langle Nu \rangle$; avec *Config-1*, on trouve $\lambda = 1,6$ (valeur calculée non représentée à la figure VI-33). Donc, dans le cas de *Config-2*, les valeurs du rapport de forme longitudinal, correspondant à un maximum de la vitesse verticale ou à un maximum de transfert thermique, permettent de déterminer approximativement la longueur d'onde sélectionnée "naturellement" dans le cas de *Config-1*.

5.5 Vitesse de déplacement des $R_{\perp}$

Dans le cas de *Config-2*, la figure VI-36 montre que le rapport Vr/U° est indépendant de λ . Comme Vr/U° est proportionnel à (λf) , cela signifie que dans le cas où on utilise des conditions aux limites périodiques, la fréquence s'adapte à l'allongement du domaine de calcul afin que la vitesse de déplacement Vr/U° des $R_{\perp}$ reste constante.

À la figure VI-37, on montre l'évolution de Vr/U° en fonction de Ra , pour plusieurs valeurs de Re , dans le cas de *Config-2*. Comme nous l'avons vu à plusieurs reprises dans la partie bibliographique, on constate que Vr/U° décroît quasi-linéairement avec Ra . De plus, pour Ra fixé et $0,21 \leq Re \leq 2$, Vr/U° varie de moins de 2%. On peut donc considérer que ce rapport ne dépend pas de Re . La courbe moyenne,

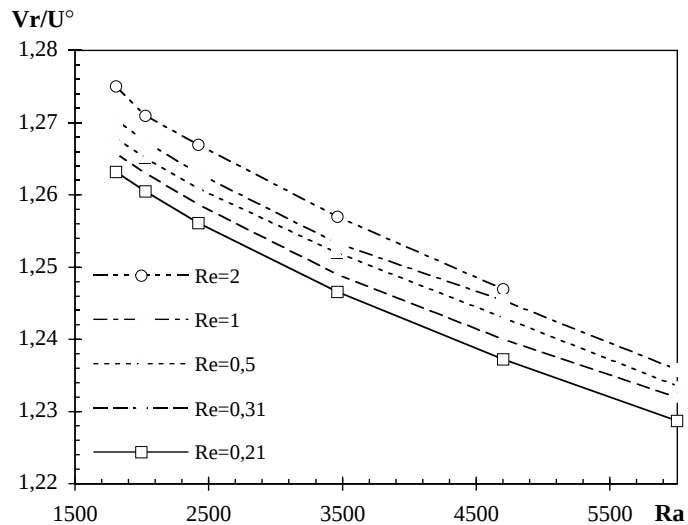


Fig. VI-37 : Vr/U° en fonction de Ra , pour différentes valeurs de Re , dans le cas de *Config-2*.

pour $Re=0,5$, est reproduite à la figure VI-38 pour être comparée à d'autres résultats (elle est notée *Config-2* en "repère fixe"). La droite d'interpolation linéaire de toutes les valeurs de la figure VI-37 a pour équation: $Vr/U^\circ = 1,282 - 0,82 \times 10^{-5} Ra$.

Dans le cas de *Config-1*, Vr/U° est calculé à partir des résultats sur la fréquence et sur la longueur d'onde présentés respectivement aux figures VI-31 et VI-33. La droite d'interpolation linéaire qui en résulte est dessinée à la figure VI-38. Elle a pour équation: $Vr/U^\circ = 1,254 - 0,95 \times 10^{-5} Ra$. Elle est donc légèrement en dessous de la courbe obtenue avec les conditions aux limites périodiques. Avec *Config-1*, comme f augmente avec Ra (pour $Re > 0,26$), la décroissance de Vr/U° est due à la décroissance plus rapide de λ . L'indépendance de Vr/U° par rapport à Re est moins nette qu'avec *Config-2*. En effet, on montre que Vr/U° varie de 0,06 unité (soit 5%) pour $0,18 \leq Re \leq 2$. Cela est dû au fait que la longueur d'onde est déterminée à $\pm 0,015$ unité près avec *Config-1*, alors qu'elle est fixée par le rapport de forme avec *Config-2*.

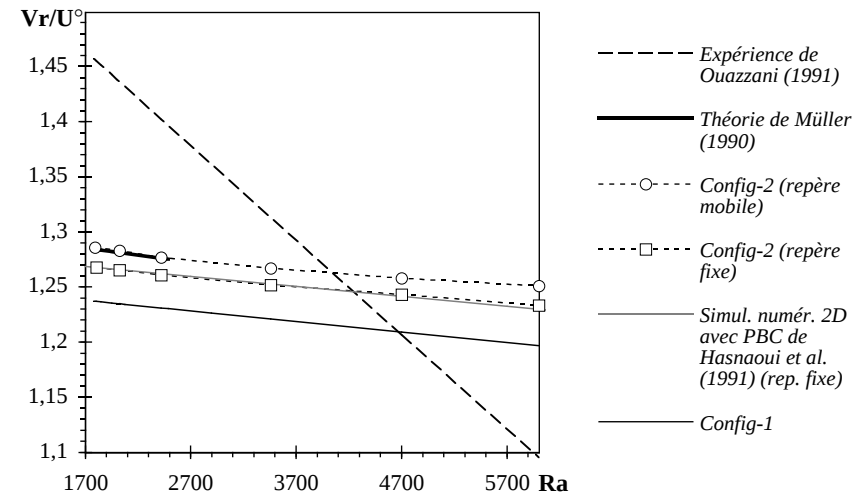


Fig. VI-38 : Évolution du rapport Vr/U° en fonction de Ra , à $Pr=6,4$; comparaison des solutions numériques 2D avec les résultats expérimentaux de *Ouazzani (1991)* et avec la théorie faiblement non-linéaire de *Müller (1990)* (valable jusqu'à $Ra \approx 2500$); toutes les courbes sont indépendantes de Re .

A la figure VI-38, nous comparons nos résultats numériques avec l'équation (III-56) obtenue par *Müller (1990)* à partir de la théorie des équations d'amplitude, et avec la droite d'interpolation linéaire calculée à partir des résultats expérimentaux de *Ouazzani (1991)*. Nous avons ajouté un résultat de *Hasnaoui et al. (1991)* calculé numériquement à $Pr=7$ en utilisant des conditions aux limites périodiques. Pour *Config-2*, nous présentons deux courbes, l'une en "repère fixe" (elle a été présentée plus haut), et l'autre en "repère mobile".

En effet, comme avec *Config-2* l'écoulement est périodique de l'entrée à la sortie du domaine de calcul, si l'observateur se trouve dans un référentiel qui se déplace à la même vitesse que les $R_{\perp}$, l'écoulement devient stationnaire. A ce moment là, la vitesse du repère mobile c est égale à la vitesse Vr/U° des $R_{\perp}$. Numériquement, obtenir l'écoulement stationnaire a de gros avantages, car on diminue le temps de calcul et parce que l'influence du pas de temps sur la solution devient minimale. On peut ainsi effectuer les calculs avec des pas de temps plus grands sans perdre en précision; ici,

nous avons utilisé $\Delta t=0,01$ au lieu de $\Delta t=0,0005$. Mathématiquement, la transformation qui consiste à se placer dans un repère mobile se déplaçant à une vitesse constante c par rapport au repère fixe, est très simple: elle revient à remplacer dans les équations de conservation les termes convectifs dans la direction axiale ($U\partial/\partial x$) par $((U-c)\partial/\partial x)$. Bien sûr, on ne connaît pas a priori la vitesse c permettant de rendre l'écoulement stationnaire. Numériquement, il faut faire une première prédiction de c , et des corrections successives, en fonction de la vitesse de déplacement des $R_{\perp}$ par rapport aux différents repères mobiles considérés. En pratique, deux ou trois itérations suffisent pour rendre l'écoulement parfaitement stationnaire car, ici, nous connaissons V_r/U° par les calculs dans *Config-1* et dans *Config-2* en repère fixe.

A la figure VI-38, on constate que les simulations numériques de *Hasnaoui et al. (1991)*, utilisant des conditions aux limites périodiques dans un repère fixe, donnent un résultat très proche du nôtre dans ce cas (les deux courbes se confondent). On vérifie que la courbe $V_r/U^{\circ}=f(Ra)$ obtenue avec *Config-2* dans le repère mobile ne varie que de 0,3% en fonction de Re . On observe qu'elle est parallèle à celles obtenues dans le repère fixe, et qu'elle coïncide parfaitement avec la courbe de Müller (dans son domaine de validité). Les cinq courbes qui correspondent à des modélisations 2D de l'écoulement de Poiseuille-Bénard (les simulations numériques et la théorie de Müller) donnent des résultats relativement concordants. Elles reproduisent assez précisément le résultat de la stabilité linéaire de *Luijckx (1983)* dans le cas de conduites d'extension latérale infinie: $(V_r/U^{\circ})^* \approx 1,25$ pour $Pr=6,4$ (cf. chapitre III, §1.2.4 et tableau III-2). La droite expérimentale de Ouazzani, obtenue dans une conduite 3D, diffère très nettement des autres résultats. Il n'en demeure pas moins qu'elle concorde très bien avec la théorie linéaire: en effet, on a estimé que $(V_r/U^{\circ})^* \approx 1,5$ pour $B \approx 3,6$, au §1.3.3 du chapitre III et à la figure III-15. Ainsi, la différence entre $V_r/U^{\circ} \approx 1,25$ et $V_r/U^{\circ} \approx 1,5$ à proximité de Ra^* est clairement due au confinement latéral du fluide. Il est tentant de penser que la différence entre les pentes des courbes $V_r/U^{\circ}=f(Ra)$ des modélisations 2D et 3D est aussi liée au confinement; cependant cela n'a jamais été vérifié théoriquement. Des simulations numériques directes 3D seraient nécessaires.

Pour terminer, on présente au tableau VI-6 et à la figure VI-39 un récapitulatif de toutes les relations $V_r/U^{\circ}=f(Ra)$ trouvées dans la littérature. On indique à chaque fois la méthode, le nombre de Prandtl et le rapport de forme B de la conduite. Les résultats sont très dispersés. Cependant, on peut remarquer qu'à Pr fixé, la pente des droites lorsqu'il y a confinement latéral est toujours plus importante que lorsque $B=\infty$ (cf. figure VI-38 pour $Pr=6,4$). On remarque que *Yu et al. (1997a)* proposent, à partir de leurs expériences dans l'air, une relation logarithmique fonction de Re et de Ra .

Références	Méthodes	Pr	B=l/h	$V_r/U^{\circ}=f(Ra)$
<i>Hasnaoui et al. (1991)</i>	Simul. numér. (PBC)	0,1	∞	$V_r/U^{\circ} \approx 0,952-2,87 \times 10^{-5} Ra$
<i>Hasnaoui et al. (1991)</i>	Simul. numér. (PBC)	0,7	∞	$V_r/U^{\circ} \approx 1,157-0,77 \times 10^{-5} Ra$
<i>Ouazzani et al. (1989)</i>	Simul. numér. (PBC)	0,71	∞	$V_r/U^{\circ} = 1,7-1,9 \times 10^{-5} Ra$
<i>Ouazzani et al. (1989)</i>	Exp. (visualisations par plans laser)	0,71	17,4	$V_r/U^{\circ} = 1,5-2,7 \times 10^{-5} Ra$
<i>Yu et al. (1997a)</i>	Exp. (visualisations par plans laser)	0,72	12	$V_r/U^{\circ} = 2,95-0,163 \ln(Ra \propto Re)$
<i>Müller (1990)</i>	Théorie (équation de Ginzburg-Landau)	1	∞	$V_r/U^{\circ} = 1,193-1,29 \times 10^{-5} Ra$
<i>Ouazzani (1991)</i>	Simul. numér. (PBC)	2	∞	$V_r/U^{\circ} = 1,41-2,74 \times 10^{-5} Ra$
<i>Ouazzani (1991)</i>	Simul. numér. (PBC)	4	∞	$V_r/U^{\circ} = 1,43-4,38 \times 10^{-5} Ra$
<i>Ouazzani (1991)</i>	Simul. numér. (PBC)	6,4	∞	$V_r/U^{\circ} = 1,43-6,9 \times 10^{-5} Ra$
<i>Müller (1990)</i>	Théorie (équation de Ginzburg-Landau)	6,4	∞	$V_r/U^{\circ} = 1,308-1,33 \times 10^{-5} Ra$
<i>Présent travail</i>	Simul. numér. (PBC, <i>Config-2</i> , repère mobile)	6,4	∞	$V_r/U^{\circ} = 1,299-0,83 \times 10^{-5} Ra$
<i>Présent travail</i>	Simul. numér. (PBC, <i>Config-2</i> , repère fixe)	6,4	∞	$V_r/U^{\circ} = 1,282-0,82 \times 10^{-5} Ra$
<i>Hasnaoui et al. (1991)</i>	Simul. numér. (PBC)	7	∞	$V_r/U^{\circ} \approx 1,284-0,90 \times 10^{-5} Ra$
<i>Présent travail</i>	Simulations numériques (OBC - <i>Config-1</i>)	6,4	∞	$V_r/U^{\circ} = 1,254-0,95 \times 10^{-5} Ra$
<i>Ouazzani et al. (1990)</i>	Expériences (LDA)	6,4	3,63	$V_r/U^{\circ} = 1,62-8,67 \times 10^{-5} Ra$
<i>Ouazzani (1991)</i>	Exp. (interférométrie différentielle)	8,3	3,63	$V_r/U^{\circ} = 1,53-9,6 \times 10^{-5} Ra$
<i>Schröder and Bühler (1995)</i>	Simulations numériques (PBC)	530	4,1	$V_r/U^{\circ} = 1,53-3,18 \times 10^{-5} Ra$

Tableau VI-6 : Récapitulatif, en fonction du nombre de Prandtl et de B , des relations $V_r/U^{\circ}=f(Ra)$ trouvées dans la littérature.

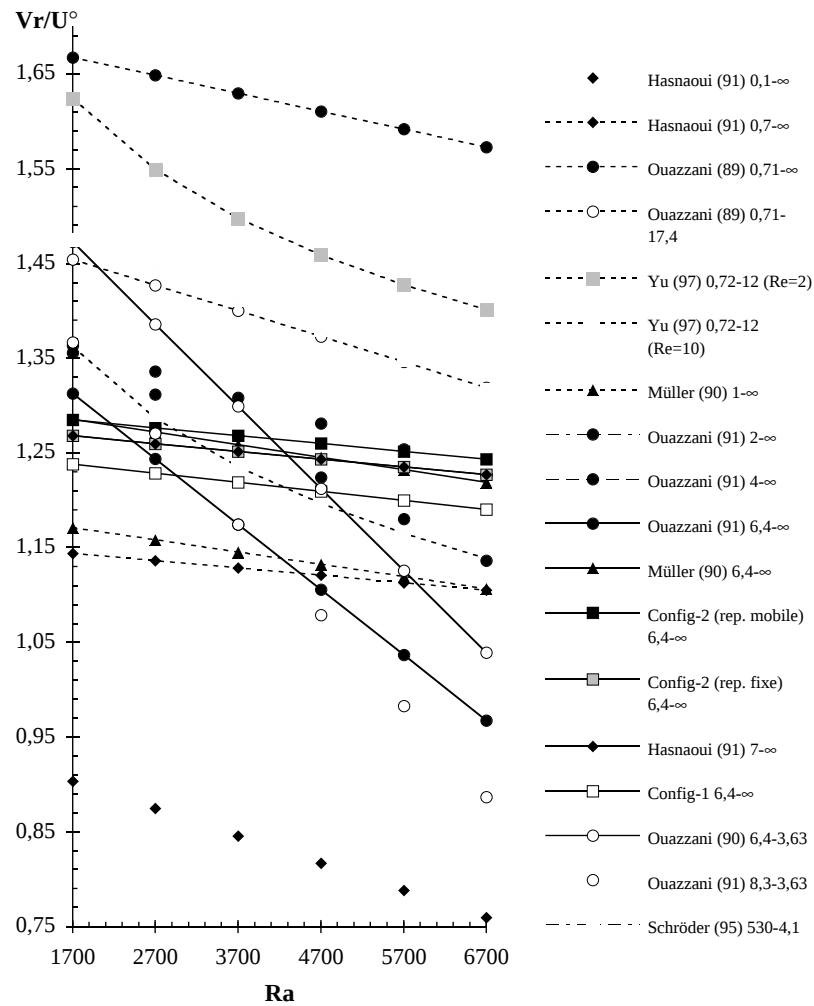


Figure VI-39 : Courbes $V_r/U^\circ=f(Ra)$ dont les équations sont données au tableau VI-6; en légende, on indique successivement le nom du premier auteur, la date (entre parenthèses), le nombre de Prandtl, et le rapport de forme $B=l/h$ de la conduite.

Nous avons tracé cette relation pour $Re=2$ et $Re=10^1$ à la figure VI-39. Compte tenu des autres résultats, la très légère concavité des deux courbes est acceptable. Dans une moindre mesure, nous obtenons aussi ce comportement avec *Config-2* (cf. figures VI-37 et VI-38). Par contre, la variation en fonction de Re de ces courbes logarithmiques est en désaccord avec les autres études.

A la figure VI-39, on note que les résultats des simulations numériques 2D de *Ouazzani et al. (1989)* et *Ouazzani (1991)* diffèrent sensiblement des résultats des autres auteurs aux mêmes valeurs de Pr et de B . Si on exclut de la figure ces résultats anachroniques et que l'on retient uniquement les résultats des modélisations 2D, il apparaît clairement, à la figure VI-40, que V_r/U° augmente quand le nombre de Prandtl augmente, lorsque " $B=\infty$ ". Lorsque B est fini (cf. figure VI-41), les variations de V_r/U° en fonction de Pr sont moins claires.

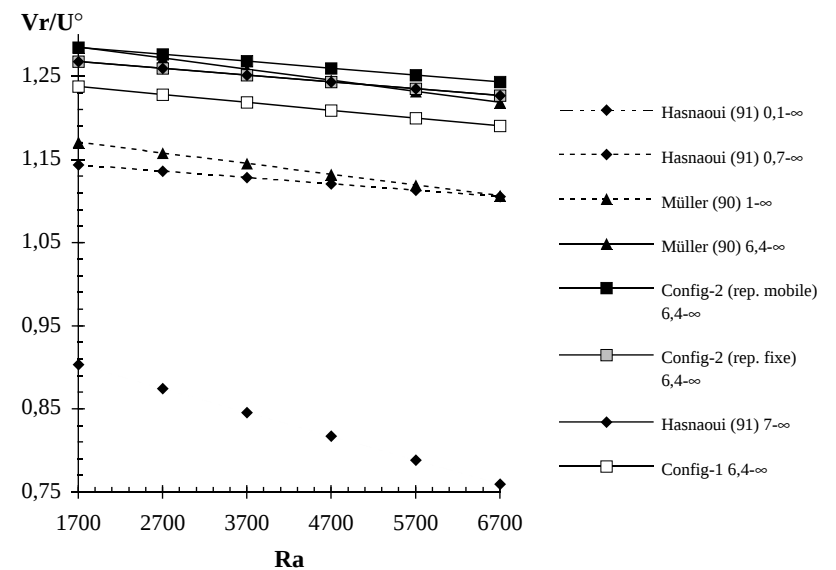


Figure VI-40 : Influence du nombre de Prandtl sur les courbes $V_r/U^\circ=f(Ra)$ dans le cas des modélisations bidimensionnelles (" $B=\infty$ ") (cf. légende de la figure VI-39).

¹ Rappelons que dans le cas de l'air, le nombre de Reynolds critique $Re^*_{\perp-//}$ marquant la transition entre les $R_{\perp}$ et les $R_{//}$ est de l'ordre de 10 (cf. tableau I-1).

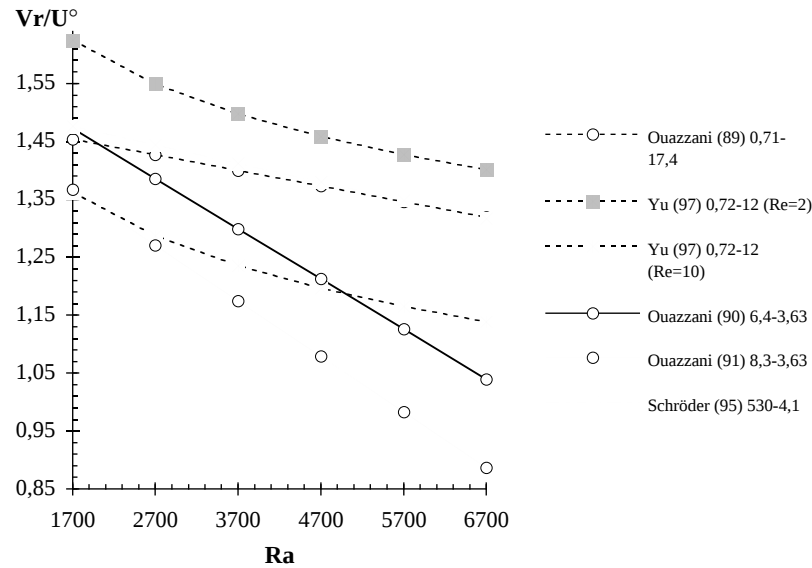


Figure VI-41 : Comparaison des courbes $Vr/U^\circ=f(Ra)$ lorsqu'il y a un effet de confinement latéral ($B<\infty$) (cf. légende de la figure VI-39).

6 Conclusion

D'une manière générale, nous avons vérifié dans ce chapitre que les simulations numériques 2D permettent de reproduire avec une grande précision les résultats théoriques de la stabilité linéaire et faiblement non-linéaire, ainsi que les résultats expérimentaux de *Ouazzani (1991)* concernant les écoulements de $R_\perp$.

Dans le domaine faiblement non-linéaire, **tous les résultats obtenus par Müller (1991) à partir de l'équation de Ginzburg-Landau sont vérifiés par les simulations numériques**, soit en utilisant des conditions aux limites ouvertes avec *Config-1*, soit en utilisant des conditions aux limites périodiques avec *Config-2*. Avec *Config-1*, on retrouve l'évolution en fonction de Re et/ou de Ra des enveloppes de la composante de vitesse verticale maximale $W_{max}(x)$, des longueurs d'établissement l_e , de la courbe de

transition $Ra_\perp^{conv}$, et du nombre de Reynolds critique Re^{**} correspondant au seuil de blocage des $R_\perp$ à faible débit. Avec *Config-2*, on obtient un bon accord, quel que soit le nombre de Reynolds, en ce qui concerne l'amplitude de saturation W_s , et le nombre de Nusselt moyen $\langle Nu \rangle$ (cet accord n'est obtenu que pour les petites valeurs de Re avec *Config-1*, car sinon les $R_\perp$ sont rejetés en dehors du domaine de calcul); on retrouve aussi exactement le résultat de Müller concernant la vitesse adimensionnelle Vr/U° des $R_\perp$ en se plaçant dans un référentiel mobile, lié au déplacement des $R_\perp$.

Toutes ces grandeurs caractéristiques des écoulements de $R_\perp$ sont calculées, avec les simulations numériques, pour une large gamme de nombres de Rayleigh et de Reynolds (pour $Re \leq 4$ et $Ra \leq 6000$). Nous avons montré qu'elles s'accordent, pratiquement dans tous les cas, avec la théorie de Müller jusqu'à $Ra \approx 2500$. Cette valeur de Ra correspond donc à la limite de validité de la théorie basée sur l'équation de Ginzburg-Landau, dans le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard; cette valeur ne peut pas être déterminée par la théorie elle-même.

Nous avons toutefois observé de légers écarts entre théorie et simulations numériques, pour W_s à proximité du point critique (pour $Ra < 1900$), et pour la courbe $Ra_\perp^{conv}$ lorsque $Ra > 2000$. Dans le premier cas, nous attribuons cet écart à de la diffusion numérique; dans le deuxième cas, nous pensons que des perturbations inhérentes aux simulations numériques, d'intensité d'autant plus grande que Ra est grand, maintiennent l'existence des structures convectives légèrement au delà de la courbe théorique $Ra_\perp^{conv}$, dans la zone d'instabilité convective.

Dans le domaine non-linéaire, les comparaisons ont été effectuées avec les expériences de Ouazzani. Nous avons reproduit numériquement, avec un excellent accord, les enregistrements temporels de la composante verticale de la vitesse, dans les écoulements de $R_\perp$. Dans tous les cas, sauf pour $Ra < 1850$, les amplitudes des signaux $W(t)$ et les fréquences des $R_\perp$ sont retrouvées à moins de 10% près. Par contre la simulation 2D ne permet pas de traduire la variation de Vr/U° , en fonction de Ra , mesurée dans l'expérience 3D. La comparaison avec un ensemble de résultats bibliographiques montre que cela est très certainement dû à l'effet du confinement latéral.

Dans *Config-1*, nous avons montré que la transition entre les $R_\perp$ et l'écoulement de Poiseuille correspond à $Ra_\perp^{conv}$, mais qu'elle est obtenue pour des valeurs de Re légèrement plus élevées (voir plus haut). Pour les petites valeurs de Ra ,

nous avons vérifié que la disparition des structures convectives du domaine de calcul, lorsqu'on augmente Re , ne suffit pas pour déterminer le seuil de transition entre instabilité absolue et instabilité convective. Cette transition ne peut être déterminée qu'en étudiant l'évolution en fonction de Re et de Ra de la longueur d'établissement des $R_{\perp}$; la transition se situe pour les valeurs des paramètres adimensionnels pour lesquels l_e diverge.

Dans *Config-2*, nous avons montré que la transition entre les $R_{\perp}$ et l'écoulement de Poiseuille correspond au seuil de la stabilité linéaire $Ra_{\perp}^*$. Cela s'explique par le fait qu'avec les conditions aux limites périodiques, les perturbations qui sortent du domaine de calcul y sont réinjectées en permanence. Nous avons montré qu'à Ra fixé, les $R_{\perp}$ "rétrécissent" progressivement, jusqu'à retrouver l'écoulement de Poiseuille, lorsque Re augmente, car W_s et $\langle Nu \rangle$, qui sont proportionnels à $(Ra - Ra_{\perp}^*)$, diminuent lorsque Re croît. Dans le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard 3D, cela explique que les $R_{\perp}$ transitent vers les $R_{//}$ lorsque Re augmente, puisque qu'alors $(Ra - Ra_{//}^*)$, et donc W_s et $\langle Nu \rangle$, restent constants (le transfert thermique reste maximum).

Bien sûr, les simulations 2D n'ont pas permis de reproduire le diagramme de stabilité des différentes configurations de l'écoulement de Poiseuille-Bénard 3D observées par Ouazzani. Cependant, **une étude bibliographique des travaux récents a permis de confirmer l'existence d'une région où, soit les $R_{\perp}$, soit les $R_{//}$, apparaissent en fonction des conditions initiales, et l'existence d'une région où apparaissent des structures convectives intermittentes.** Ces deux situations convectives ont été modélisées théoriquement à partir de deux équations d'amplitude couplées. Des simulations numériques 3D ont permis quant à elles de visualiser de nombreuses structures thermoconvectives complexes, dont certaines concordent avec les enregistrements de Ouazzani pour les rouleaux intermittents.

D'une manière générale, **nous avons montré que les données de la littérature concernant la fréquence f , la longueur d'onde λ et la vitesse V_r/U° des $R_{\perp}$ sont très dispersées.** En effet, ces caractéristiques des $R_{\perp}$ sont fortement dépendantes des conditions aux limites (d'entrée principalement), du nombre de Prandtl et de l'allongement transversal $B=l/h$ de la conduite. De plus, elles sont liées entre elles car V_r/U° est proportionnel à (λf) .

Nous avons montré et vérifié dans la littérature que, pour Ra , Pr et B fixés, f est une fonction linéaire de Re , λ décroît avec Re (sauf pour Re petit; voir dessous) et V_r/U° varie très peu en fonction de Re . Il est aussi acquis que V_r/U° décroît quasi-

linéairement en fonction de Ra et que, pour les modélisations 2D, V_r/U° augmente avec le nombre de Prandtl. Enfin, la valeur absolue de la pente des droites $V_r/U^{\circ}=f(Ra)$ augmente avec B .

Par contre, à nombre de Reynolds fixé, les résultats connus concernant les variations de f et de λ en fonction de Ra , de Pr et de B sont trop dispersés pour pouvoir les résumer simplement ici. Dans le cas de nos simulations numériques, on peut signaler que $Re \approx 0,3$ est une valeur critique. En effet, pour $Re < 0,3$, f diminue lorsque Ra augmente et λ augmente lorsque Re augmente; c'est le contraire pour $Re > 0,3$. Nous expliquons ce comportement par l'effet du blocage des $R_{\perp}$ aux faibles valeurs du débit ("effet de phase-fixing").

A propos de cet effet, nous avons montré qu'il n'apparaît qu'avec *Config-1*, et pas avec *Config-2*. Avec *Config-1*, en accord avec d'autres simulations numériques, on le trouve à la fois avec des conditions d'entrée de type Neumann et avec des conditions de type Dirichlet. Dans le cas des études théoriques faiblement non-linéaires, ce phénomène n'est observé qu'avec des conditions de Neumann à l'entrée. Lorsque nous utilisons ces conditions dans nos simulations numériques, nous retrouvons les valeurs du nombre de Reynolds critique Re^{**} , marquant la transition entre les $R_{\perp}$ fixes et progressifs, prévues par la théorie.

Nous avons étudié de manière détaillée l'influence de l'allongement $A=L/h$, lorsqu'on effectue des simulations numériques avec des conditions aux limites périodiques (*Config-2*). Lorsque A varie, c'est-à-dire lorsque la longueur d'onde des $R_{\perp}$ varie, nous avons montré que l'amplitude de saturation et le transfert thermique passent par un maximum pour une valeur de λ qui correspond approximativement à celle obtenue dans *Config-1*, pour les mêmes valeurs de Ra et de Re . Enfin, nous avons montré que la fréquence des $R_{\perp}$ varie en fonction de A de telle façon que le rapport de vitesses V_r/U° reste constant.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce document, nous avons apporté une contribution numérique à l'étude de l'écoulement de Poiseuille-Bénard. **Le premier objectif que nous nous étions fixé était de présenter une synthèse bibliographique** de l'ensemble des travaux effectués sur le sujet. Cela a permis de montrer, entre autre, que l'écoulement réel tridimensionnel met en jeu des structures thermoconvectives très variées et que l'étude de leur stabilité est complexe. Notamment, le caractère convectivement ou absolument instable de cet écoulement doit être pris en compte (on rappelle que ces notions ne sont apparues que depuis 1985 dans la communauté des mécaniciens des fluides). **Notre second objectif a donc été d'étudier dans quelle mesure la simulation numérique directe est capable de reproduire les caractéristiques principales, et de traduire la stabilité, de tels écoulements.** Notre démarche a été de faire des comparaisons quantitatives et systématiques avec les mesures d'anémométrie laser-Doppler de *Ouazzani (1991)* et avec la théorie faiblement non-linéaire, basée sur l'équation de Ginzburg-Landau, de *Müller (1990)*. Notre étude s'est cependant limitée au cas bidimensionnel, c'est à dire à l'analyse de la transition entre l'écoulement de Poiseuille et les rouleaux transversaux. Le comportement tridimensionnel de l'écoulement a été abordé aux travers d'études bibliographiques. Dans nos simulations numériques 2D, nous nous sommes attachés à analyser l'influence des conditions aux limites sur les écoulements semi-ouverts de rouleaux transversaux.

L'étude bibliographique a montré qu'avant 1989, les seules structures convectives clairement identifiées dans les écoulements de Poiseuille-Bénard sont les rouleaux transversaux et les rouleaux longitudinaux. La stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille purement conductif est aussi parfaitement connue. La contribution principale sur cette question, avec prise en compte du confinement latéral de l'écoulement, est donnée dans la thèse de *Luijckx (1983)*. Cependant, ce travail n'a été publié que très partiellement. **Nous avons donc présenté, de manière détaillée, à la fois la méthode et les résultats de cette étude.** Les données quantitatives qu'elle

fournit sont utilisées pour valider et vérifier nos résultats numériques et ceux de la littérature.

Depuis 1989, une compréhension fine de la structure des écoulements, et de leur stabilité non-linéaire ou faiblement non-linéaire, a été rendue possible grâce à des techniques expérimentales telles que l'anémométrie laser-Doppler et la visualisation par plans laser, et grâce aussi à la théorie des équations d'amplitude (couplées ou non) et à la simulation numérique tridimensionnelle. Ces études ont mis en évidence l'existence de structures complexes (superposition de rouleaux transversaux et longitudinaux, rouleaux obliques, rouleaux en "fer à cheval", etc.), et quelques cartes de stabilité complètes de l'écoulement ont pu être dressées. Au niveau théorique, l'apparition des notions d'instabilités convectives et absolues, introduites par *Müller (1990)* dans le cas de notre problème, s'est avérée être un élément essentiel. Cela a permis de comprendre les transitions entre l'écoulement de Poiseuille, les rouleaux transversaux et les rouleaux longitudinaux, observées dans les expériences et dans les simulations numériques.

Pour mener à bien notre étude numérique, nous nous sommes servis d'un code bidimensionnel, de type volumes finis, basé sur la méthode du Lagrangien augmenté. **Une part importante de notre travail a consisté à rechercher pour la sortie du domaine de calcul, des conditions aux limites ouvertes perturbant le moins possible l'écoulement.** Pour cela, nous en avons testé et comparé cinq, rencontrées assez couramment dans les simulations numériques des écoulements ouverts et semi-ouverts incompressibles. Dans le cas d'écoulements de Poiseuille-Bénard *absolument instables*, quelle que soit la condition à la limite ouverte, nous avons montré que la perturbation qu'elle provoque reste localisée au voisinage de la frontière de sortie. *La longueur de cette zone perturbée ne varie pas d'une condition de sortie à l'autre*, mais elle augmente lorsque les nombres de Rayleigh et de Reynolds diminuent (près du seuil de la stabilité linéaire, à $Ra \approx 1800$, elle atteint 6 fois la hauteur du canal). Le caractère spécifique de chaque condition aux limites apparaît dans *l'amplitude* de la perturbation qu'elle provoque sur l'écoulement. Ainsi, **nous avons montré que dans le cas de l'écoulement de Poiseuille-Bénard, ce sont les conditions aux limites non-réfléchissantes de type Orlanski qui sont "les meilleures"**, dans le sens où elles permettent de réduire considérablement l'amplitude de la perturbation, en amont de la frontière de sortie. En dehors de la zone perturbée, pour Ra et Re fixés, on montre que

toutes les caractéristiques¹ des écoulements de rouleaux transversaux restent invariantes, quelle que soit la condition aux limites; il en est de même quel que soit le rapport d'aspect longitudinal de la conduite, pourvu que celui-ci soit suffisamment grand afin que les rouleaux transversaux soient pleinement établis.

Des travaux récents ont montré que des modifications importantes des caractéristiques des écoulements peuvent subvenir lorsqu'on change les conditions aux limites d'entrée. La théorie faiblement non-linéaire montre que des conditions de Neumann sur cette frontière sont à l'origine d'un effet de blocage des rouleaux transversaux pour les faibles débits (effet de "phase-fixing"). Nous avons obtenu ce comportement numériquement pour Ra grand, avec des conditions de Neumann, mais aussi avec des conditions de Dirichlet.

L'influence des conditions aux limites périodiques sur les écoulements de rouleaux transversaux a été étudiée de manière approfondie. Nous avons montré qu'il n'y a pas d'effet de phase-fixing avec ces conditions aux limites. D'autre part, bien qu'elles imposent artificiellement la longueur d'onde des rouleaux transversaux, nous avons vérifié que l'on peut retrouver la longueur d'onde "naturelle" en recherchant le maximum de $\langle Nu \rangle$ ou de W_s , en fonction du rapport d'aspect longitudinal $A=L/h$ du domaine de calcul.

Les configurations de calcul avec les conditions aux limites ouvertes ou avec les conditions aux limites périodiques sont complémentaires. La première configuration permet d'étudier le développement spatial des rouleaux transversaux dans la zone d'entrée thermique. Nous avons vérifié que la longueur, l_e , nécessaire à l'établissement complet de ces rouleaux augmente quand Ra diminue ou Re augmente. Les valeurs des paramètres de l'écoulement pour lesquelles l_e tend vers l'infini ont permis de retrouver la courbe de transition $Ra_{l_{conv}}$ entre les zones d'instabilités convective et absolue, déterminées par la théorie des équations d'amplitude. Pour Ra petit ou Re grand, l'obtention de l'écoulement pleinement établi de rouleaux transversaux nécessite donc des cellules de grand rapport d'aspect A , et les calculs peuvent s'avérer fort coûteux en temps et en place mémoire. Par contre, l'utilisation des conditions aux limites périodiques permet de ne simuler qu'une ou deux longueurs d'onde des rouleaux transversaux, et donc de limiter le coût des simulations. Avec cette configuration, nous avons montré que l'on retrouve les résultats expérimentaux et

¹ Ces caractéristiques sont: la longueur d'établissement (l_e), l'amplitude de saturation de la vitesse verticale (W_s), le nombre de Nusselt moyen ($\langle Nu \rangle$), la fréquence (f), la longueur d'onde (λ), et le rapport Vr/U° entre la vitesse des rouleaux et la vitesse moyenne de l'écoulement.

théoriques concernant l'écoulement pleinement établi, même pour Re grand et Ra petit. Enfin, nous avons vérifié qu'avec les conditions aux limites périodiques, la transition entre l'écoulement de Poiseuille et les rouleaux transversaux est obtenue au seuil de la stabilité linéaire Ra_{l^*} .

D'une manière générale, avec l'une ou l'autre des deux configurations, **nous avons retrouvé tous les résultats de la stabilité faiblement non-linéaire de Müller (1990).** Bien que nos simulations soient bidimensionnelles, nous avons aussi reproduit avec une grande précision l'amplitude et la fréquence des signaux temporels de vitesse enregistrés expérimentalement par Ouazzani (1991) dans le cas des écoulements de rouleaux transversaux. Par contre, nous avons montré que les modélisations 2D et les expériences 3D sont en désaccord en ce qui concerne la longueur d'onde λ et la vitesse Vr/U° des R_{l^*} . Il apparaît en effet que ces grandeurs sont fortement dépendantes du confinement latéral de la conduite (i.e. du rapport d'aspect $B=l/h$) et du nombre de Prandtl; mais ce point n'a jamais été étudié de manière approfondie dans la littérature.

Depuis 1995, des simulations numériques 3D et des expériences de visualisation sont venues compléter la description initiale de l'écoulement présentée par Ouazzani (1991). De nouvelles structures convectives plus complexes, jamais observées expérimentalement, ont été décrites qualitativement par les simulations 3D qui, jusque là, se sont limitées à un nombre restreint de cas étudiés parmi tous les paramètres de l'écoulement (Ra , Re , Pr et B). Nous pensons donc, que dans un premier temps, **il est nécessaire de développer la simulation 3D afin, d'une part, de dresser une carte de stabilité précise des structures convectives observées** (on envisagera de faire des simulations en perturbant les structures complexes pour étudier leur stabilité), **et d'autre part, d'étudier l'influence de B et de Pr sur λ et Vr/U° .** Dans un deuxième temps, on pourra envisager de relancer des expériences du type de celles de Ouazzani pour rechercher les structures nouvelles et stables, mises éventuellement en évidence par les simulations.

Toutefois, avant d'entamer ce travail numérique 3D intensif, nécessitant parfois des domaines de calcul de longueur relativement grande, **il est nécessaire de mener une réflexion pour rechercher le code numérique le plus performant et le plus adapté.** On tâchera aussi d'adapter au cas tridimensionnel les conditions aux limites de type Orlandi.

Nous savons que **dans la région d'instabilité convective**, l'écoulement se comporte comme un amplificateur de bruit et qu'il est très sensible à tout forçage extérieur. Dans cette région, nous savons également qu'il est nécessaire de perturber l'écoulement en permanence pour faire apparaître des structures convectives. Cela a été étudié numériquement en 2D, par *Müller et al. (1992)*, dans le cas où l'écoulement est soumis à un bruit blanc. Nous pensons qu'il **serait intéressant de mener une étude similaire, mais en soumettant l'écoulement à des perturbations sinusoïdales de pulsation et d'amplitude bien déterminées**. On pourrait alors étudier le mode d'amplification de ces perturbations et la sélection fréquentielle que l'écoulement opère, en fonction de la géométrie du domaine de calcul (en fonction de $A=L/h$) et de la nature des conditions aux limites.

Références bibliographiques

E. M. Agee

Mesoscale cellular convection over the oceans

Dynamics of the atmospheres and oceans, vol. 10, pp. 317-341, Elsevier science publisher, (1987).

M. Akiyama, G. J. Hwang, K. C. Cheng

Experiments on the onset of longitudinal vortices in laminar forced convection between horizontal plates

J. Heat Transfer, series C, vol. 93, no. 4, pp. 335-341, (1971).

D. Astruc

Instabilité de Kelvin-Helmholtz en régime subsonique: développement spatial et conditions aux limites ouvertes

Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, (1993).

D. Avsec

Sur la formation des tourbillons de convection, dans une couche gazeuse, sous des épaisseurs de quelques centimètres

C.R.A.S., vol. 203, pp. 532-534, (1936).

D. Avsec

Sur la vérification expérimentale du fait, prévu par la théorie de Lord Rayleigh, de l'existence du régime préconvectif stable et sur le mécanisme de l'apparition des courants convectifs dans une couche gazeuse chauffée par en dessous

C.R.A.S., vol. 203, pp. 556-558, (1936).

D. Avsec

Sur le rapport λ/h des tourbillons en bandes longitudinales

C.R.A.S., vol. 203, pp. 1318-1320, (1936).

D. Avsec

Tourbillons en bandes transversales dans une couche d'air chauffée par en dessous

CRAS, vol. 206, pp. 40-41, (1938).

K. L. Babcock, G. Ahlers, D. S. Cannell

Noise-Sustained structure in Taylor-Couette flow with trough flow

Physical Review Letters, vol. 67, no. 24, pp. 3388-3391, (1991).

P. Barthelet

Dynamique non-linéaire des ondes interfaciales entre deux fluides cisailés

Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, (1995).

H. Bénard

Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide

Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées, vol. 11, pp. 1261-1271 et 1309-1328 (1900).

H. Bénard, D. Avsec

Travaux récents sur les tourbillons en bandes; applications à l'astrophysique et à la météorologie

J. Phys. et le Radium, vol. 9, pp. 468-500, (1938).

P. Bergé

Rayleigh-Bénard instability: experimental findings obtained by light scattering and other optical methods

"Fluctuation, Instabilities and Phase Transition", édité par T. Riste, NATO Advanced Study Institutes, (Plenum Press), vol. B11, pp. 323-352, (1975).

P. Bergé, M. Dubois

Étude de la vitesse locale dans l'instabilité convective de Rayleigh-Bénard: les différentes transitions vers la turbulence

Lecture Notes in Physics: "Les instabilités hydrodynamiques en convection libre, forcée et mixte" (Springer Verlag), vol. 72, pp. 133-151, (1978).

A. Bers

Space-time evolution of plasma instabilities—absolute and convective

Dans "Handbook of plasma physics", édité par M. N. Rosenbluth et R. Z. Sagdeev, vol. 1, pp. 451-517, Amsterdam, (1983).

R. B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot

Transport phenomena

John Wiley and Sons, New York (1960).

A. Bottaro

Note on open boundary conditions for elliptic flows.

Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 18, pp. 243-256, (1990).

J. Boussinesq

Théorie analytique de la chaleur, Vol 2

Gauthier-Villars, Paris (1903).

M. E. Braaten, S. V. Patankar

Analysis of laminar mixed convection in shrouded arrays of heated rectangular blocks

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 28, pp. 1699-1709, (1985).

H. R. Brand, R. J. Deissler, G. Ahlers

Simple model for the Bénard instability with horizontal flow near threshold

Physical Rev. A, vol. 43, no. 8, pp. 4262-4268, (1991).

R. J. Briggs

Electron-stream interaction with plasmas

Research Monograph, no. 29, Cambridge, M.I.T. Press (1964).

C. H. Bruneau, P. Fabrie

Effective downstream boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations

Int. J. for Numerical Methods in Fluids, vol. 19, pp. 693-705, (1994).

Sir D. Brunt*Experimental cloud formation*

Compendium of Meteorology, American Meteorological Society, Boston, pp. 1255-1262, (1951).

P. Büchel, M. Lücke, D. Roth, R. Schmitz*Pattern selection in the absolutely unstable regime as a nonlinear eigenvalue problem: Taylor vortices in axial flow*

Physical Review E, vol. 53, no. 5, pp. 4764-4777, (1996).

J. C. Buell, P. Huerre*Inflow / outflow boundary conditions and global dynamics of spatial mixing layers*

Rapport CTR-S88 du Center for Turbulence Research, Proceedings of the Summer Program, Stanford University, (1988).

K. Chandra*Instability of fluids heated from below*

Proc. Roy. Soc., London, series A, vol. 164, p. 231-242, (1938).

S. Chandrasekhar*Hydrodynamic and hydromagnetic stability*

Clarendon Press, Oxford, (1961).

M. Y. Chang, C. H. Yu, T. F. Lin*Changes of longitudinal vortex roll structure in a mixed convective air flow through a horizontal plane channel: an experimental study*

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 40, no. 2, pp. 347-363, (1997a).

M. Y. Chang, C. H. Yu, T. F. Lin*Flow visualization and numerical simulation of transverse and mixed vortex roll formation in mixed convection of air in a horizontal flat duct*

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 40, no. 8, pp. 1907-1922, (1997b).

A. Cheddadi*Bifurcations et transitions thermoconvectives bidimensionnelles et tridimensionnelles en géométrie annulaire fluide*

Thèse de doctorat d'état de l'Université Mohammed V de Rabat, Maroc, (1993).

S. S. Chen, A. S. Lavine*Laminar, buoyancy induced flow structures in a bottom heated, aspect ratio 2 duct with throughflow*

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 39, no. 1, pp. 1-11, (1996).

K. C. Cheng, G. J. Hwang*Numerical solution for combined free and forced laminar convection in horizontal rectangular channels*

J. Heat Transfer, series C, vol. 91, no. 1, pp. 59-66, (1969).

K. C. Cheng, R. S. Wu*Axial heat conduction effects on thermal instability of horizontal plane Poiseuille flows heated from below*

J. Heat Transfer, vol. 98, pp. 564-569, novembre (1976).

K. C. Chiu, J. Ouazzani, F. Rosenberger*Mixed convection between horizontal plates -2. Fully developed flow*

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 30, no. 8, pp. 1655-1662, (1987).

K. C. Chiu, F. Rosenberger*Mixed convection between horizontal plates -1. Entrance effects*

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 30, no. 8, pp. 1645-1654, (1987).

J. M. Chomaz, P. Huerre, L. G. Redekopp*Bifurcations to local and global modes in spatially developing flows*

Physical Review Letters, vol. 60, no. 1, pp. 25-28, (1988).

A. J. Chorin*A numerical method for solving incompressible viscous flow problems*

J. Computational Physics, vol. 2, pp. 12-26, (1967).

M. C. Cross*Derivation of the amplitude equation at the Rayleigh-Bénard instability*

Phys. Fluids, vol. 23, no. 9, pp. 1727-1731, (1980).

M. C. Cross*Travelling and standing waves in binary-fluid convection in finite geometries*

Physical Rev. Letters, vol. 57, pp. 2935-2938, (1986a).

M. C. Cross*An eight-mode Lorenz-model of travelling waves in a binary fluid convection*

Physics Letters A, vol. 119, pp. 21-24, (1986b).

M. C. Cross*Structure of nonlinear travelling-wave states in finite geometries*

Physical Review A, vol. 38, pp. 3593-3600, (1988).

R. P. Davies-Jones*Thermal convection in an infinite channel with no-slip sidewalls*

J. Fluid Mech., vol. 44, no. 4, pp. 695-704, (1970).

S. H. Davis*Convection in a box: linear theory*

J. Fluid Mech., vol. 30, part 3, pp. 465-478, (1967).

R. J. Deissler*Turbulent bursts, spots and slugs in a generalized Ginzburg-Landau equation*

Physics letters A, vol. 120, no. 7, pp.334-339, (1987a).

R. J. Deissler

Spacially growing waves, intermittency and convective chaos in an open-flow system
Physica D, vol. 25, pp. 233-260, (1987b).

R. J. Deissler

External noise and the origin and dynamics of structure in convectively unstable systems
J. Statistical Physics, vol. 54, no. 5/6, pp. 1459-1488, (1989).

M. Dubois, P. Bergé

Experimental study of the velocity field in Rayleigh-Bénard convection
J. Fluid Mech., vol. 85, part 4, pp. 641-653, (1978).

P. G. Drazin, H. W. Reid

Hydrodynamic stability
Cambridge University Press, London, (1981).

G. Evans, R. Greif

A study of traveling wave instabilities in a horizontal channel flow with applications to chemical vapor deposition
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 32, no. 5, pp. 895-911, (1989).

G. Evans, R. Greif

Unsteady three-dimensional mixed convection in a heated horizontal channel with applications to chemical vapor deposition
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 34, no. 8, pp. 2039-2051, (1991).

G. Evans, R. Greif

Thermally unstable convection with applications to chemical vapor deposition channel reactors
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 36, no. 11, pp. 2769-2781, (1993).

G. Evans, S. Paolucci

The thermoconvective instability of a plane Poiseuille flow heated from below: a proposed benchmark solution for open boundary flows
Int. J. Numerical Methods in Fluids, vol. 11, pp. 1001-1013, (1990).

M. Fortin, R. Glowinski

Méthodes de lagrangien augmenté
Collection Méthodes Mathématique de l'Informatique - Dunod, Paris, (1982).

K. Fujimura, R. E. Kelly

Interaction between longitudinal convection rolls and transverse waves in unstably stratified plane Poiseuille flow
Phys. Fluids, vol. 7, no. 1, pp. 68-79, (1995).

K. Fukui, M. Nakajima, H. Ueda

The longitudinal vortex and its effects on the transport processes in combined free and forced laminar convection between horizontal and inclined parallel plates
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 26, no. 1, pp. 109-120, (1983).

K. S. Gage, W. H. Reid

The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow
J. Fluid Mech., vol. 33, pp. 21-32, (1968).

P. Glansdorff, I. Prigogine

Structure, stabilité et fluctuations
Masson, Paris, (1971).

R. Glowinski

Numerical methods for non-linear variational problems
Springer Series in Computational Physics, Springer, New-York, (1984).

K. Goda

A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows
J. Computational Physics, vol. 30, pp. 76-95, (1979).

A. Graham

Shear patterns in an unstable layer of air
Phil. Trans. Roy. Soc., London, série A, vol. 232, pp. 285-296, (1933).

D. D. Gray, A. Giorgini

The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 19, pp. 545-551, (1976).

P. M. Gresho, R. L. Sani

On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations
Int. J. for Numerical Methods in Fluids, vol. 7, pp. 1111-1145, (1987).

I. Gustafsson

On first and second order symmetric factorisation methods for the solution of elliptic difference equations
Chalmers University of Technology, (1978).

T. Y. Han, J. C. S. Meng, G. E. Innis

An open boundary condition for incompressible stratified flows
J. Computational Physics, vol. 49, pp. 276-297, (1983).

M. Hasnaoui, E. Bilgen, P. Vasseur, L. Robillard

Mixed convective heat transfer in a horizontal channel heated periodically from below
Num. Heat Transfer, part A, vol. 20, pp. 297-315, (1991).

C. C. Huang, T. F. Lin

Buoyancy induced flow transition in mixed convective flow of air through a bottom heated horizontal rectangular duct
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 37, no. 8, pp. 1235-1255, (1994).

C. C. Huang, T. F. Lin

Vortex flow and thermal characteristics in mixed convection of air in a horizontal rectangular duct: effects of the Reynolds and Grashof numbers
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 38, no. 9, pp. 1661-1674, (1995).

P. Huerre, P. A. Monkewitz

Absolute and convective instabilities in free shear layers
J. Fluid Mech., vol. 159, pp. 151-168, (1985).

P. Huerre, P. A. Monkewitz

Local and global instabilities in spatially developing flows
Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 22, pp. 473-537, (1990).

G. J. Hwang, K. C. Cheng

Convective instability in the thermal entrance region of a horizontal parallel plate channel heated from below
J. Heat Transfer, vol. 95, series C, pp. 72-77, (1973).

G. J. Hwang, C. L. Liu

An experimental study of convective instability in the thermal entrance region of a horizontal parallel plate channel heated from below
Canadian J. Chem Eng., vol. 54, pp. 521-525, (1976).

P. Idrac

Sur les courants de convection atmosphérique et leur rapport avec le vol à voile et la formation des bandes nuageuses
C.R.A.S., July-Dec, p. 42-44, (1920).

P. Idrac

Etudes expérimentales sur le vol à voile
Thèse de doctorat, Paris, (1921).

N. K. Ingle, T. J. Mountziaris

The onset of transverse recirculations during flow of gases in horizontal ducts with differentially heated lower walls
J. Fluid Mech., vol. 277, pp. 249-269, (1994).

H. Jeffreys

Some cases of instability in fluid motion
Proc. Roy. Soc., London, series A, vol. 118, pp. 195-208, (1928).

K. F. Jensen, E. O. Einset, D. I. Fotiadis

Flow phenomena in chemical vapor deposition of thin films
Annu. Rev. Fluid Mech., no. 23, pp. 197-233, (1991).

G. Jin, M. Braza

A nonreflecting outlet boundary condition for incompressible unsteady Navier-Stokes calculations
J. Computational Physics, vol. 107, no. 2, (1993).

D. D. Joseph

Stability of fluid motions
Springer Tracts in Net. Phil. 27 et 28, tomes 1 et 2, (1976).

Y. Kamotani, S. Ostrach

Effect of thermal instability on thermally developing laminar channel flow
J. Heat Transfer, vol. 98, pp. 62-66, (1976).

Y. Kamotani, S. Ostrach, H. Miao

Convective Heat transfer augmentation in thermal entrance regions by means of thermal instability
J. Heat Transfer, vol. 101, pp. 222-226, (1979).

K. C. Karki, P. S. Sathiyamurthy, S. V. Patankar

Three-dimentional mixed convection in a horizontal chemical vapor deposition reactor
J. Heat Transfer, vol. 115, pp. 803-806, (1993).

K. J. Kennedy, A. Zebib

Combined free and forced convection between horizontal parallel planes: some cases studies
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 26, pp. 471-474, (1983).

K. Khadra

Méthode adaptative de raffinement local multigrille - Application aux équations de Navier-Stokes et de l'énergie
Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux I, (1994).

H. Khallouf

Simulation numérique de la convection thermo-vibrationnelle par une méthode spectrale
Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier, Toulouse III, (1995).

C. R. Kleijn, C. J. Hoogendoorn

A study of 2-D and 3-D transport phenomena in horizontal chemical vapor deposition reactors
Chemical Engineering Science, vol. 46, no. 1, pp. 321-334, (1991).

M. H. Kobayashi, J. C. F. Pereira, J. M. M. Sousa

Comparison of several open boundary numerical treatments for laminar recirculating flows
Int. J. Numerical Methods in Fluids, vol. 16, pp. 403-419, (1993).

S. Kogelman, R. C. DiPrima

Phys. Fluids, vol. 13, pp. 1, (1970).

F. S. Lee, G. J. Hwang

Transient analysis on the onset of thermal instability in the thermal entrance region of a horizontal parallel plate channel
J. Heat Transfer, vol. 113, pp. 363-370, (1991a).

F. S. Lee, G. J. Hwang

The effect of asymmetric heating on the onset of thermal instability in the thermal entrance region of a parallel plate channel

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 34, no. 9, pp. 2207-2218, (1991b).

J. C. Legros, J. K. Platten

Étude numérique non linéaire de la convection libre à deux dimensions

Lecture Notes in Physics: "Les instabilités hydrodynamiques en convection libre, forcée et mixte" (Springer Verlag), vol. 72, pp. 152-169, (1978).

J. C. Legros, J. K. Platten

Problèmes de Bénard avec écoulement dans les mélanges liquides

Lecture Notes in Physics: "Les instabilités hydrodynamiques en convection libre, forcée et mixte" (Springer Verlag), vol. 72, pp. 61-72, (1978).

C.C. Lin

The theory of hydrodynamic stability

Cambridge University Press, London, (1955).

W. L. Lin, Y. T. Ker, T. F. Lin

Experimental observation and conjugated heat transfer analysis of vortex flow development in mixed convection of air in a horizontal rectangular duct

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 39, no. 17, pp. 3667-3683, (1996).

W. L. Lin, T. F. Lin

Experimental study of unstable mixed convection of air in a bottom heated horizontal rectangular duct

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 39, no. 8, pp. 1649-1663, (1996a).

W. L. Lin, T. F. Lin

Unstable aiding and opposing mixed convection of air in a bottom-heated rectangular duct slightly inclined from the horizontal

J. Heat Transfer, vol. 118, pp. 47-55, (1996b).

J. M. Luijkx

Influence de la présence de parois latérales sur l'apparition de la convection libre, forcée et mixte.

Thèse de doctorat de l'Université d'état de Mons, Belgique, (1983).

J. M. Luijkx, J. K. Platten

On the onset of free convection in a rectangular channel

J. Non-Equilibrium Thermodyn., vol. 6, no. 3, pp. 141-158, (1981).

J. M. Luijkx, J. K. Platten, J. C. Legros

On the existence of thermoconvective rolls, transverse to a superimposed mean Poiseuille flow

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 24, no. 7, pp. 803-817, (1981).

J. M. Luijkx, J. K. Platten, J. C. Legros

Precise measurements of the wavelength at the onset of Rayleigh-Bénard convection in a long rectangular duct

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 25, no. 8, pp. 1252-1254, (1982).

H. V. Mahaney, F. P. Incropera, S. Ramadhyani

Development of laminar mixed convection flow in a horizontal rectangular duct with uniform bottom heating

Numerical Heat Transfer, vol. 12, pp. 137-155, (1987).

J. R. Maughan, F. P. Incropera

Experiments on mixed convection heat transfer for airflow in a horizontal and inclined channel

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 30, no. 7, pp. 1307-1318, (1987).

J. R. Maughan, F. P. Incropera

Regions of heat transfer enhancement for laminar mixed convection in a parallel plate channel

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 33, no. 3, pp. 555-570, (1990).

J. M. Mihaljan

A rigorous exposition of the Boussinesq approximations applicable to a thin layer of fluid

Astrophys. J., vol. 136, no. 3, pp. 1126-1133, (1962).

H. K. Moffat, K. F. Jensen

Complex flow phenomena in MOCVD reactors -I. horizontal reactors

J. Crystal Growth, vol. 77, pp. 108-119, (1986).

H. K. Moffat, K. F. Jensen

Three-dimensional flow effects in silicon CVD in horizontal reactors

J. Electrochemical Society, vol. 135, no. 2, pp. 459-470, (1988).

P. A. Monkewitz

The role of absolute and convective instability in predicting the behaviour of fluid systems

Eur. J. Mech., part B/Fluids, vol. 9, no. 5, pp. 395-413, (1990).

Y. Mori, Y. Uchida

Forced convective heat transfer between horizontal flat plates

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 9, pp. 803-817, (1966).

D. Mukutmoni, K. T. Yang

Wavenumber selection for Rayleigh-Bénard convection in a small aspect ratio box

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 35, no. 9, pp. 2145-2159, (1992).

H. W. Müller

Thermische Konvektion in horizontaler Scherströmung

Thèse de doctorat de l'Université de Saarlandes à Sarrebruck, Allemagne, (1990).

H. W. Müller, M. Lücke, M. Kamps

Convective patterns in horizontal flow

Europhysics Letters, vol. 10, no. 5, pp. 451-456, (1989).

H. W. Müller, M. Lücke, M. Kamps

Transversal convection patterns in horizontal shear flow
Physical Review A, vol. 45, no. 6, pp. 3714-3725, (1992a).

H. W. Müller, M. Lücke, M. Kamps

The effect of throughflow on Rayleigh Bernard convective rolls
dans "Ordered and Turbulent Patterns in Taylor-Couette Flow", édité par C. D. Andereck, F. Hayot, NATO ASI Series, vol. B297, pp. 187-196, (1992b).

H. W. Müller, M. Tveitereid, S. Trainoff

Rayleigh-Bénard problem with imposed weak through-flow: two coupled Ginzburg-Landau equations
Physical Review E, vol. 48, no. 1, pp. 263-272, (1993).

W. Nakayama, G. J. Hwang, K. C. Cheng

Thermal instability in plane Poiseuille flow
J. Heat Transfer, series C, vol. 92, no. 1, pp. 61-68, (1970).

U. Narusawa

Numerical analysis of mixed convection at the entrance region of a rectangular duct heated from below
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 36, no. 9, pp. 2375-2384, (1993).

A. C. Newel, T. Passot, J. Lega

Order parameter equations for patterns
Annual Rev. Fluid Mech., vol. 25, pp. 399-453, (1993).

A. C. Newel, J. A. Whitehead

Finite bandwidth, finite amplitude convection
J. Fluid Mech., vol. 38, pp. 279-303, (1969).

X. Nicolas, A. Mojtabi

Simulation numérique 2D de l'écoulement de Poiseuille-Bénard
Proceedings du 12^{ème} Congrès Français de Mécanique, vol. 2, pp. 301-304, (4-8 sept. 1995).

X. Nicolas, A. Mojtabi, J. K. Platten

Two dimensional numerical analysis of the Poiseuille-Bénard flow in a rectangular channel heated from below.
Physics of Fluids, vol. 9, no. 2, pp. 337-348, (1997a).

X. Nicolas, P. Traore, A. Mojtabi, J. P. Caltagirone

Augmented Lagrangian method and open boundary conditions in 2D simulation of Poiseuille-Bénard channel flow
Int. J. for Numerical Methods in Fluids, vol. 25, no. 3, pp. 265-283, (1997b).

C. Nonino, S. Del Giudice

Laminar mixed convection in the entrance region of horizontal rectangular ducts
Int. J. Numerical Methods in Fluids, vol. 13, pp. 33-48, (1991).

C. Normand, Y. Pomeau, M. G. Velarde

Convective instability: a physicist's approach
Rev. Modern Physics, vol. 49, no. 3, pp. 581-624, (1977).

T. A. Nyce, J. Ouazzani, A. Durand-Daubin, F. Rosenberger

Mixed convection in a horizontal rectangular channel - experimental and numerical velocity distributions
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 35, no. 6, pp. 1481-1494, (1992).

A. Oberbeck

Über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperatur Differenzen,
Ann. Phys. Chem., vol. 7, pp. 271-292, (1879).

T. C. Oppe, W. D. Joubert, D. R. Kincaid

NSPCG User's Guide, Version 1.0, A package for solving large sparse system by various iterative methods
Center for Numerical Analysis - University of Texas at Austin (1988).

I. Orlanski

A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows
J.Comput.Phys., vol. 21, pp. 251-269, (1976).

S. Ostrach, Y. Kamotani **Heat transfer augmentation in laminar fully developed channel flow by means of heating from below**

J. Heat Transfer, vol. 97, pp. 220-225, (1975).

J. Ouazzani, F. Rosenberger

Three-dimensional modelling of horizontal chemical vapor deposition -I. MOCVD at atmospheric pressure
J. Crystal Growth, vol. 100, pp. 545-576, (1990).

M. T. Ouazzani

Transferts thermiques et mécanique des écoulements de convection mixte
Thèse de doctorat de l'Université de Mons-Hainaut, Belgique, (1991).

M. T. Ouazzani, J. P. Caltagirone, G. Meyer, A. Mojtabi

Etude numérique et expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 32, no. 2, pp. 261-269, (1989).

M. T. Ouazzani, J. K. Platten, A. Mojtabi

Etude expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes - 2
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 33, no. 7, pp. 1417-1427, (1990).

M. T. Ouazzani, J. K. Platten, A. Mojtabi

Intermittent patterns in mixed convection
Applied Scientific Research, vol. 51, pp. 677-685, (1993a).

M. T. Ouazzani, J. K. Platten, H. W. Müller, M. Lücke

Experimental study of mixed convection by laser Doppler velocimetry comparison with an amplitude equation

ITEC 93 Proceedings, vol. 1, pp. 304-308, Marrakesh, Maroc, (6-10 Juin 1993b).

M. T. Ouazzani, J. K. Platten, H. W. Müller, M. Lücke

Etude de la convection mixte entre deux plans horizontaux à des températures différentes - 3

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 38, no. 5, pp. 875-886, (1995).

S. V. Patankar

Numerical heat transfer and fluid flow

Series in computational methods in mechanics and thermal sciences, Hemisphere Publishing Corporation, (1980).

A. Pellew et R. V. Southwell

On maintained convective motion in a fluid heated from below

Proc. Roy. Soc., London, series A, vol. 176, pp. 312-343, (1940).

R. Perez Cordon, M. G. Velarde

On the (non-linear) foundations of Boussinesq approximation applicable to a thin layer of fluid

Le J. de Physique, vol. 36, no. 7-8, pp. 591-601, (1975).

A. C. Philips, Sir G. T. Walker

The forms of stratified clouds

Quart. J. Roy. Meteor. Soc., London, vol. 58, no. 243, pp. 23-30, (1932).

J. K. Platten

A variational formulation for the stability of flows with temperature gradients

Int. J. Engng. Sci., vol. 9, pp. 855-869, (1971).

J. K. Platten, M. Lefebvre

A preliminary experimental investigation of the stability of flows with an imposed temperature gradient

Physica, vol. 51, pp. 330-332, (1971).

J. K. Platten, J. C. Legros

Convection in Liquids

Springer Verlag, (1984).

A. Pocheau, V. Croquette, P. Le Gal, C. Poitou

Convective pattern deformations under mean flow stress

Europhysics Letters, vol. 3, no. 8, pp. 915-920, (1987).

T. J. Poinsot, S. K. Lele

Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows

J. Computational Physics, vol. 101, no. 1, (1992).

Lord Rayleigh

On convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side

Phil. Mag., vol. 32, pp. 529-546, (1916); se trouve aussi dans Scientific Papers, Cambridge University Press, vol. 6, pp. 432-446, (1920).

D. Roth, P. Büchel, M. Lücke, H.W. Müller, M. Kamps, R. Schmitz

Influence of boundaries on pattern selection in through-flow

Physica D, vol. 97, pp. 253-263, (1996).

R. Sani

Note on flow instabilities in heated ducts

Z. Angew. Math. Phys., vol. 15, pp. 381-387, (1964).

R. L. Sani, P. M. Gresho

Résumé et remarks on the open boundary condition minisymposium

Int. J. for Numerical Methods in Fluids, vol. 18, pp. 983-1008, (1994).

A. Schlüter, D. Lortz, F. Busse

On the stability of steady finite amplitude convection

J. Fluid Mech., vol. 23, part 1, pp. 129-144, (1965).

R. J. Schmidt, S. W. Milverton

On the instability of a fluid when heated from below

Proc. Roy. Soc., London, series A, vol. 152, pp. 586-594, (1935).

W. Schöpf, I. Rehberg

The influence of thermal noise on the onset of travelling-wave convection in binary fluid mixtures: an experimental investigation

J. Fluid Mech., vol. 271, pp. 235-265, (1994).

E. Schröder, K. Bühler

Three-dimensional convection in rectangular domains with horizontal throughflow

Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 38, no. 7, pp. 1249-1259, (1995).

H. B. Squire

On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls

Proc. Roy. Soc., London, series A, vol. 142, pp. 621-628, (1933).

K. Stewartson, J. T. Stuart

A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille-flow

J. Fluid Mech., vol. 48, pp. 529-545, (1971).

K. Stork, U. Müller

Convection in boxes: experiments

J. Fluid Mech., vol. 54, part 4, pp. 599-611, (1972).

B. Straughan

The energy method, stability and linear convection
Springer Verlag, (1992).

A. Tangborn

A two-dimensional instability in a mixed convection flow with spatially periodic temperature boundary conditions
Physics Fluids A, vol. 4, no. 7, pp. 1583-1586, (1992).

R. Temam

Navier-Stokes equations - Theory and numerical analysis
North-Holland, Elsevier, (1977).

T. Terada and second year students of physics

Some experiments on periodic columnar formation of vortices caused by convection
Report of the Aeronautical Research Institute Tokyo Univ., vol. 3, no. 243, pp. 1-46, (1928).

O. Thual

Generic instabilities and nonlinear dynamics
Cours des Houches, session XLVII, "Dynamique des fluides astrophysiques", édité par J.-P. Zahn et J. Zinn-Justin, Elsevier Science Publishers (1987).

P. Traore

Contribution numérique à l'étude des transferts couplés de quantité de mouvement, de chaleur et de masse dans un jet semi-confiné
Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier, Toulouse III, (1996).

P. Traore, X. Nicolas, A. Mojtabi, M. C. Charrier-Mojtabi, H. Boisson

Influence of the open boundary conditions upon a thermoconvective roll flow numerical simulation
Proceedings du congrès EURO THERM no. 36, Poitiers, (21-23 septembre 1994), publié dans "Advanced concepts and techniques in thermal modelling", édité par D. Lemonnier, J.-B. Saulnier et M. Fiebig, Elsevier, pp. 128-134.

D. J. Tritton

Physical fluid dynamics
Van Nostrand Reinhold, Wokingham, pp. 155-161, (1985).

A. Tsameret, V. Steinberg

Noise-Modulating propagating pattern in a convectively unstable system
Physical Review Letters, vol. 67, no. 24, pp. 3392-3395, (1991).

H. Uzawa

Iterative methods for concave programming
dans *Studies in linear and nonlinear programming*, de K. J. Arrow, L. Hurwicz, H. Uzawa, Stanford University Press, pp. 154-165, (1958).

H. A. Van Der Vorst

BI-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear system
SIAM J. of Scientific and Statistical Computing, vol. 13, no. 2, pp. 631-644, (1992).

M. Velarde, C. Normand

La Convection
Pour la Science, no. 35, pp. 54-71, (1980).

W. Velte

Zür Stabilität der Strömung in einem horizontalen Rohr bei ungleichmässig erwärter Wand
Z. Angew. Math. Phys., vol. 13, pp. 591-600, (1962).

E. P. Visser, C. R. Kleijn, C. A. M. Govers, C. J. Hoogendoorn, L. J. Giling

Return flows in horizontal MOCVD reactors studied with the use of TiO₂ particle injection and numerical calculations
J. Crystal Growth, vol. 94, pp. 929-946, (1989).

R. C. Weast, M. J. Astle

CRC Handbook of Chemistry and Physics
CRC Press, 61^{ème} édition, Boca Raton, Floride, (1980).

J. Wesfreid, Y. Pomeau, M. Dubois, C. Normand, P. Bergé

Critical effects in Rayleigh-Bénard convection
J. Physiques Lettres, vol. 39, no. 7, pp. 725-730, (1978).

C. H. Yu, M. Y. Chang, T. F. Lin

Structures of moving transverse and mixed rolls in mixed convection of air in a horizontal plane channel
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 40, no. 2, pp. 333-346, (1997a).

C. H. Yu, M. Y. Chang, C. C. Huang, T. F. Lin

Unsteady vortex roll structures in a mixed convective air flow through a horizontal plane channel: a numerical study
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 40, no. 3, pp. 505-518, (1997b).

C. H. Yu, T. F. Lin

Effects of aspect ratio on vortex flow patterns in mixed convection of air through a bottom-heated horizontal rectangular duct
Numerical Heat Transfer, Part A, vol. 31, pp. 745-764, (1997).

S. Q. Zhang, A. V. Tangborn

Flow regimes in two-dimensional mixed convection with spatially periodic lower wall heating
Phys. Fluids, vol. 6, no. 10, pp. 3285-3293, (1994).

G. Zimmermann, U. Müller

Bénard convection in a two-component system with Soret effect
Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 35, no. 9, pp. 2245-2256, (1992).