N° d'ordre : D.U : 1735
EDSPIC : 371

UNIVERSITE BLAISE PASCAL - CLERMONT II

ECOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGENIEUR DE CLERMONT-FERRAND

# Thèse

Présentée par

**Teddy VIRIN**
Ingénieur ENSICAEN

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR D'UNIVERSITÉ**
**SPECIALITE : VISION ET ROBOTIQUE**

# Modélisation, Optimisation et Contrôle d'un processus d'épandage pour les applications agricoles.

Soutenue publiquement le 02 Mars 2007 devant le jury :

| | | |
|---|---|---|
| MM. | Philippe MAHEY | Président |
| | Dominique MEIZEL | Rapporteur |
| | Pierre VILLON | Rapporteur |
| | Jonas KOKO | Examinateur |
| | Emmanuel PIRON | Examinateur |
| | Philippe SOUERES | Examinateur |
| | Lionel LEVEILLER | Invité |
| | Philippe MARTINET | Directeur de thèse |

*A mes parents,*
*à Adeline,*
*à toute ma famille,*
*à tous mes amis*

# Remerciements

Cette thèse constitue l'aboutissement de trois années de travail qui se sont déroulées au sein de l'équipe Gepand (Génie des procédés d'épandage) du Cemagref de Montoldre dans le département de l'allier. Aussi, je remercie Didier Méchineau, directeur du groupement du Cemagref de Clermont-Ferrand, ainsi que Dominique Didelot, chef d'unité adjoint Tscf délégué pour Montoldre, de m'avoir accueilli au sein de leur établissement et de m'avoir permis de mener mes travaux dans de bonnes conditions.

Je tiens à remercier chaleureusement Daniel Clochard et Lionel Leveiller, respectivement responsable R&D et technicien au bureau d'études de l'entreprise Sulky-Burel, pour leur grande sympathie et surtout pour la confiance qu'ils ont su m'accorder malgré les orientations scientifiques, au départ incertaines, qui ont pu être adoptées durant la thèse.

Je remercie Philippe Mahey, directeur de l'école doctorale Sciences pour l'Ingénieur de l'université Blaise Pascal et chercheur au LIMOS (Laboratoire d'Informatique, de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes), pour l'honneur qu'il m'a fait d'être président du jury. Je tiens également exprimer ma gratitude à Dominique Meizel, Professeur à l'ENSIL (Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Limoges), et Pierre Villon, Professeur à l'UTC (Université de Technologie de Compiègne), d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse malgré les contraintes de temps qui leur étaient imposées. Que soit remercié Philippe Soueres, chargé de recherches au LAAS (Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes), pour avoir examiné ce travail.

J'aimerais exprimer ma reconnaissance envers Philippe Martinet, mon directeur de thèse, qui par sa rigueur m'a poussé à toujours aller plus loin. Malgré la distance qui nous séparait durant la dernière année, il a toujours été disponible et a su me donner les conseils nécessaires à l'aboutissement de ce travail.

Je souhaiterais exprimer ma profonde gratitude à Jonas Koko, chercheur au LIMOS, qui m'a encadré et m'a initié à ce domaine de recherche passionnant qu'est l'optimisation. J'ai pu apprécier les discussions tenues dans son bureau qui m'ont souvent permis de faire le point et prendre du recul sur les travaux réalisés. Qu'il soit remercié pour sa patience et sa disponibilité.

Je tiens à remercier Emmanuel Piron, ingénieur au Cemagref de Montoldre, qui par son expertise technique m'a permis d'appréhender rapidement les outils et méthodes liés à l'épandage centrifuge. Grâce à sa vision globale, il m'a appris à relativiser les choses et ainsi permis à m'enlever le poids du stress devenu très important surtout lors de la dernière année. Je lui en suis très reconnaissant.

J'adresse un grand merci à Michel Berducat du Cemagref de Clermont-Ferrand, pour ses conseils et son soutien dans les moments difficiles. Son humour m'a maintes fois permis

d'oublier un peu les soucis liés aux théories un peu hasardeuses étudiées en début de thèse.

Je remercie les secrétaires du Cemagref de m'avoir aidé à mener à bien l'ensemble des tâches administratives qui m'incombaient en tant que doctorant. Ainsi, je tiens particulièrement à exprimer ma gratitude à Irene Mingot pour ses actions menées afin de surmonter les difficultés liées aux déplacements à l'occasion des conférences internationales tenues à l'étranger. Un grand merci à Eliane Simon pour son incroyable efficacité, entre autres pour le pot de soutenance.

Merci à Emilie et Denis d'avoir eu la patience de partager mon bureau pendant près d'un an et demi et de ne pas m'avoir tenu rigueur de les avoir déconcentrés en tournant au milieu de la pièce, stylo à la main, pendant des heures. Je remercie Julien pour m'avoir permis de m'évader un peu grâce à ses histoires hilarantes, Gégé pour son expertise en informatique, Jean-Christophe pour ses conseils sur le travail de thésard. Merci à ceux avec qui j'ai pu travailler sur la thématique de l'optimisation de l'épandage centrifuge et qui ont contribué à enrichir cette étude : Ali, Dorothée, Fabien et Julien. Je remercie également l'ensemble de la cellule d'appui technique (plus particulièrement Jacky) ainsi que les autres agents du Cemagref pour les moments de détente qu'ils ont pu m'offrir.

Enfin, je remercie mes amis de m'avoir toujours encouragé, mes parents et Adeline pour leur soutien sans faille et pour la patience dont ils ont fait preuve pour me supporter au quotidien (surtout durant la dernière ligne droite). Cette thèse est en quelque sorte également un peu la leur.

# Table des matières

**Liste des figures** **9**

**Liste des tableaux** **13**

**Introduction** **17**

**1 La fertilisation par procédé centrifuge** **23**
1.1 Fertilisation et agriculture de précision . . . . . 23
1.2 Principe de l'épandage centrifuge . . . . . 26
1.2.1 Le distributeur centrifuge . . . . . 26
1.2.2 Répartition au sol . . . . . 29
1.2.3 Modélisations : rappels bibliographiques . . . . . 32
1.2.4 Régularité de l'épandage au champ . . . . . 35
1.3 Conclusion . . . . . 41

**2 Le problème de défauts de répartition** **43**
2.1 Erreurs de fertilisation . . . . . 43
2.2 Solutions existantes . . . . . 48
2.3 Spécificité de l'étude . . . . . 50
2.4 Conclusion . . . . . 52

**3 Méthodes d'optimisation** **55**
3.1 Problèmes sans contraintes . . . . . 55
3.1.1 Algorithme du simplexe . . . . . 57
3.1.2 Méthodes de descente . . . . . 57
3.1.2.1 Méthode du gradient . . . . . 59
3.1.2.2 Méthode du gradient conjugué . . . . . 59
3.1.2.3 Méthode de Newton . . . . . 60
3.1.2.4 Méthodes quasi-Newtoniennes . . . . . 61
3.1.2.5 Méthode à mémoire limitée : LBFGS ([Noc80, LN89, BNS94]) 62

3.2 Problèmes sous contraintes . . . . . 63
3.2.1 Méthodes de pénalités . . . . . 64
3.2.2 Méthode du Lagrangien Augmenté ([Roc74, Ber82]) . . . . . 66
3.2.3 Méthode des points intérieurs ([BNS94, FG98, CGOT00]) . . . . . 70
3.3 Problèmes de contrôle optimal . . . . . 73
3.3.1 Généralités . . . . . 73
3.3.2 Problème de commande optimale gouverné par des équations différentielles . . . . . 73
3.3.3 Problème de contrôle optimal régi par une équation à dérivées partielles . . . . . 76
3.4 Conclusion . . . . . 79

**4 Apport optimal d'engrais en plein champ 81**
4.1 Formulation mathématique . . . . . 81
4.2 Discrétisation spatiale et temporelle . . . . . 83
4.3 Une méthode de décomposition . . . . . 85
4.4 Algorithme d'optimisation . . . . . 88
4.5 Exemples numériques . . . . . 91
4.5.1 Tests académiques . . . . . 91
4.5.2 Application sur une parcelle réelle . . . . . 99
4.6 Conclusion . . . . . 103

**5 Optimisation de l'épandage de bordure 107**
5.1 Problématique . . . . . 108
5.2 Optimisation en deux temps . . . . . 109
5.2.1 Modélisation . . . . . 109
5.2.2 Algorithmes de résolution . . . . . 112
5.2.3 Exemple d'application . . . . . 117
5.3 Optimisation simultanée . . . . . 120
5.3.1 Formalisation . . . . . 120
5.3.2 Algorithmes d'optimisation . . . . . 121
5.3.3 Test numérique . . . . . 122
5.4 Optimisation de l'épandage de bordure pour une parcelle réelle . . . . . 124
5.5 Conclusion . . . . . 127

**6 Contrôle optimal de l'épandage centrifuge : étude préliminaire 131**
6.1 Equation d'état . . . . . 132
6.1.1 Modélisation . . . . . 132

6.1.2 Simulations . . . . . 134
6.2 Formalisation du problème de contrôle . . . . . 137
6.3 Méthode de résolution . . . . . 138
6.4 Tests numériques . . . . . 141
6.5 Conclusion . . . . . 146

**Conclusion Générale et Perspectives** **147**

**A Algorithmes de recherche linéaire** **153**
A.1 Principe de base des algorithmes de recherche linéaire . . . . . 153
A.2 Recherche linéaire par la méthode de Wolfe . . . . . 154
A.3 Recherche linéaire par la méthode d'Armijo . . . . . 154
A.3.1 Calcul du pas par rebroussement . . . . . 154
A.3.2 Méthode d'Armijo avec interpolation . . . . . 155

**B Paramètres optimaux pour l'épandage plein champ** **157**

**Bibliographie** **160**

# Liste des figures


1.1 Vue d'ensemble des outils installés sur un engin agricole destiné à la fertilisation dans le cadre de la pratique de l'agriculture de précision. . . . . 25
1.2 Zoom sur l'ensemble des organes d'un distributeur centrifuge. . . . . 27
1.3 Direction de projection et composantes de la vitesse d'éjection. . . . . 28
1.4 Influence du point de chute des granulés d'engrais sur la répartition. . . . . 28
1.5 Méthode standard utilisée par le Cemagref pour la mesure de la répartition au sol. . . . . 30
1.6 Exemple de répartition d'engrais au sol exprimée en g/0.25 $m^2$ obtenue par la procédure standard avec $\Delta t = 3$ s. . . . . 32
1.7 Représentation schématique de la répartition au sol comme le produit de 2 gaussiennes. . . . . 35
1.8 Calcul de la distribution transversale (courbe rouge) à partir de la répartition au sol obtenue après épandage avec le disque droit de l'épandeur. . . . 37
1.9 Epandage régulier obtenu en appliquant le principe de recouvrement. . . . 38
1.10 Exemple de répartition au sol obtenue avec un disque gauche muni d'un dispositif bordure. . . . . 40
1.11 Epandage de bordure avec dispositif de bordure. . . . . 41

2.1 Vue d'ensemble de la parcelle traitée. . . . . 45
2.2 Défauts de fertilisation avec dose consigne constante. . . . . 46
2.3 Défauts de fertilisation avec modulation de doses. . . . . 46
2.4 Raisonnement basé sur la répartition homogène de la quantité débitée sur une surface rectangulaire. . . . . 47
2.5 Objectif de l'optimisation : détermination des paramètres optimaux (débit, rayon moyen, angle moyen) en chaque position occupée par le distributeur dans la parcelle. . . . . 52
2.6 Représentation schématique de l'objectif de l'étude. . . . . 52

4.1 Exemple d'une décomposition pour un domaine rectangulaire comportant 3 passages pleins champs. . . . . 86
4.2 Configurations géométriques . . . . . 91
4.3 Carte de dose obtenue après optimisation dans le cas 1. . . . . 93
4.4 Paramètres optimaux obtenus pour l'aller à partir de l'optimisation directe. 94
4.5 Paramètres optimaux obtenus pour le retour à partir de l'optimisation directe. 94
4.6 Paramètres optimaux obtenus pour l'aller à partir l'algorithme ***Gliss.*** . . . 95
4.7 Paramètres optimaux obtenus pour le retour à partir l'algorithme ***Gliss.*** . . 95
4.8 Carte de dose obtenue après optimisation dans le cas 2. . . . . 96
4.9 Paramètres optimaux obtenus pour le retour à gauche à partir de l'optimisation directe. . . . . 96
4.10 Paramètres optimaux obtenus pour l'aller à partir de l'optimisation directe. 97
4.11 Paramètres optimaux obtenus pour le retour à droite à partir de l'optimisation directe. . . . . 97
4.12 Paramètres optimaux obtenus pour le retour à gauche à partir l'algorithme ***Gliss.*** . . . . . 98
4.13 Paramètres optimaux obtenus pour l'aller à partir l'algorithme ***Gliss.*** . . . 98
4.14 Paramètres optimaux obtenus pour le retour à droite à partir l'algorithme ***Gliss.*** . . . . . 99
4.15 Défauts de fertilisation obtenus. . . . . 100
4.16 Apport optimal de fertilisants en plein champ. ($F(\widehat{X}) = 8.7e7$. Temps d'exécution $\approx 4$ jours.) . . . . . 101
4.17 Distribution des erreurs de fertilisation en pourcentage de surface. . . . . 101
4.18 Paramètres optimaux obtenus pour l'aller 1. . . . . 102
4.19 Paramètres optimaux obtenus pour le retour 1. . . . . 102

5.1 Affichage des différents types de zone dans le cas d'une parcelle rectangulaire.108
5.2 Stratégie basée sur l'obtention d'une ligne de recouvrement de courbes transversales de dose parallèle à la ligne de détourage. . . . . 109
5.3 Exemple de zone définie par $\mathcal{D}_{det}$. . . . . 113
5.4 Répartition de dose dans $\mathcal{D}_{det}$ après application de l'algorithme **SM**. ($\widehat{T}_d = [12.9, 13.2, 13.3]^{\mathsf{T}}$.$F_{det}(\widehat{T}_d) = 23.3$.Temps d'exécution= 5.04 min.) . . . . . 117
5.5 Carte de l'erreur de répartition dans $\mathcal{D}_{det}$ après optimisation des réglages. ($F_{bd}(\widehat{X}) = 1.16e6$.Temps d'exécution$\approx$ 8.5 h.) . . . . . 118
5.6 Paramètres optimaux obtenus à l'issue de la résolution de ($\mathcal{P}bd$). . . . . 119
5.7 Répartition de la dose dans $\mathcal{D}_{det}$ correspondant aux instants optimaux de début et d'arrêt d'épandage plein champ. . . . . 122

5.8 Carte de l'erreur de répartition dans $\mathcal{D}_{det}$ après optimisation des réglages. ($F_{bs}(\widehat{X}, \widehat{T_{bs}}) = 9.24e5$.Temps d'exécution≈ 12.2 h.) . . . . . 123
5.9 Paramètres optimaux obtenus à l'issue de la résolution de ($\mathcal{P}bs$). . . . . 124
5.10 Répartition de dose en plein après gestion optimale des débuts et fins d'épandage. . . . . 125
5.11 Carte des défauts de répartition à l'issue de l'optimisation de l'épandage plein champ et bordure. ($F_{bs}(\widehat{X}, \widehat{T_{bs}}) = 1.98e8$. Temps d'exécution≈ 2 jours et demi.) . . . . . 126
5.12 Paramètres optimaux obtenus pour l'épandage de bordure. . . . . 127

6.1 Géométries adoptées pour la résolution numérique de ($\Sigma$). . . . . 134
6.2 Affichage de l'état pour le cas 1. . . . . 135
6.3 Ecart quadratique entre dose exacte et dose calculée. . . . . 136
6.4 Affichage de l'état pour le cas 2. . . . . 136
6.5 Ecart quadratique entre dose exacte et dose calculée. . . . . 136
6.6 Illustration du calcul du gradient. . . . . 140
6.7 Etat optimal.($F_{\kappa}(\widehat{\boldsymbol{X}}) = 0.0033$.Temps d'exécution≈ 1.65 h.) . . . . . 142
6.8 Carte des erreurs de fertilisation. . . . . 142
6.9 Commandes optimales pour l'aller. . . . . 143
6.10 Commandes optimales pour le retour. . . . . 143
6.11 Etat optimal.($F_{\kappa}(\widehat{\boldsymbol{X}}) = 0.0358$.Temps d'exécution≈ 2.47 h.) . . . . . 144
6.12 Carte des erreurs de fertilisation. . . . . 144
6.13 Commandes optimales pour l'aller. . . . . 145
6.14 Commandes optimales pour le retour. . . . . 145

B.1 Paramètres optimaux obtenus pour l'aller 2. . . . . 157
B.2 Paramètres optimaux obtenus pour le retour 2. . . . . 158
B.3 Paramètres optimaux obtenus pour l'aller 3. . . . . 158
B.4 Paramètres optimaux obtenus pour le retour 3. . . . . 159

# Liste des tableaux

2.1 Solutions existantes pour la réduction des défauts de fertilisation. . . . . 51

4.1 Bornes des contraintes . . . . . 92
4.2 Initialisation des paramètres de décision . . . . . 92
4.3 Réglages traditionnels. . . . . 99
4.4 Statistiques. . . . . 100

5.1 Initialisation de l'algorithme **OLBj** . . . . . 118
5.2 Qualité d'épandage de bordure obtenue avec réglages standards et réglages issus de la résolution de $(\mathcal{P}bd)$. . . . . 119
5.3 Comparaison des qualités d'épandage de bordure obtenue avec les 2 types d'approches employées. . . . . 123
5.4 Instants de début et d'arrêt optimaux d'épandage en plein champ. . . . . 125
5.5 Qualité d'épandage sur la totalité du champ obtenue avec réglages standards et réglages optimaux. . . . . 126

6.1 Réglages appliqués lors des simulations. . . . . 135
6.2 Initialisation des paramètres de décision . . . . . 141

# Introduction

Confrontée à une inexorable explosion démographique mondiale dans les années à venir, l'agriculture est de plus en plus sollicitée afin de fournir des aliments en quantités suffisantes et donc permettre de maintenir l'ensemble des êtres humains en vie ([RS05]). Ainsi, l'Institut International de Recherche sur les Politiques Alimentaires (IFPRI, International Food Policy Research Institute en anglais) a prévu une augmentation globale évaluée à environ 41% de la demande en céréales entre 1993 et 2020. Une croissance de 63% en ce qui concerne la demande en protéines animalières a été également pressentie durant cette même période ([IFA98]).

Afin de faire face à ces exigences, une importante mécanisation des opérations culturales a été entreprise depuis la dernière décennie. Malheureusement, les outils développés dans ce cadre, étant utilisés essentiellement dans le but d'augmenter la productivité, incitent les agriculteurs à exécuter les tâches agricoles sans tenir compte des exigences écologiques de rigueur. En effet, du fait de pratiques de techniques culturales intensives, l'agriculture est souvent considérée comme un facteur de dégradation de l'environnement. L'utilisation excessive ou inadaptée de fertilisants minéraux, d'engrais organiques ou de produits chimiques entraîne fréquemment une pollution des eaux de surface et des nappes phréatiques. Les activités agricoles peuvent également détruire le milieu où évolue des espèces sauvages et par la même occasion mener à l'extinction de ces dernières.

Ces observations ont amené alors de nombreux pays industrialisés à mettre en place des mesures visant à réduire les conséquences fâcheuses de l'utilisation de produits chimiques agricoles pour les êtres humains, la faune et les habitats naturels. Ces mesures écologiques se traduisent d'une part par des incitations financières auprès des agriculteurs et d'autre part par des dispositions réglementaires concernant entre autres la qualité de l'eau. La mise en application de ces réglementations ont alors conduit les scientifiques à se pencher sur la question de savoir comment faire évoluer les techniques culturales pour réconcilier l'agriculture et l'environnement. Aussi, de nombreux travaux notables en terme d'innovations technologiques ont vu le jour ([Bla00]). Ces derniers ont, alors, mis en évidence la nécessité de l'intégration des technologies de l'information dans les pratiques agricoles courantes. Ainsi, des équipements électroniques tels que les capteurs, l'ordinateur

embarqué ainsi que le système GPS, jouant un rôle prépondérant dans le positionnement et la navigation de l'outil agricole, font aujourd'hui partie intégrante de l'ensemble des matériels essentiels pour aboutir à une production correcte tout en limitant les risques environnementaux.

Malgré ces efforts, force est de constater que l'agriculture est encore considérée par le grand public comme l'une des activités humaines les plus polluantes. L'opération la plus particulièrement incriminée est sans nul doute l'épandage d'engrais minéraux. En effet, cette tâche est souvent effectuée à l'aide de distributeurs centrifuges, matériels peu chers et simples d'utilisation, et génère malheureusement des irrégularités de dosage du fait de l'hétérogénéité des densités d'engrais distribuées au sol et des formes géométriques complexes des parcelles. Les erreurs de répartition, qui se manifestent par de gros écarts entre une dose consigne correspondant aux besoins des cultures et la dose réellement apportée, peuvent alors induire une pollution des eaux par lessivage du sol dans le cas d'excès d'engrais. Outre cet aspect environnemental, il est important de noter que les défauts de fertilisation peuvent également engendrer des pertes de rendements : baisse de produits inhérent aux sous-dosages et fragilisation des cultures dans le cas contraire. Aussi, au jour d'aujourd'hui, les travaux de recherche concernant l'épandage centrifuge ont pour principal objectif d'apporter les outils théoriques et techniques indispensables pour permettre une fertilisation correcte et respectueuse de l'environnement. L'un des grands défis, dans ce domaine, est de concevoir un épandeur centrifuge intelligent et autonome qui serait capable d'appliquer les quantités de fertilisants correspondant aux doses prescrites quelque soient les formes géométriques des champs traités.

## Contexte et objectifs du travail de thèse

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein de l'équipe Gepand (Génie des technologies et procédés d'épandage) du Cemagref de Montoldre (Département de l'Allier). Il a bénéficié des apports scientifiques de deux laboratoires de l'Université Blaise Pascal et du CNRS : le Laboratoire d'informatique, de modélisation et d'optimisation des systèmes (LIMOS) ainsi que le Laboratoire des sciences et matériaux pour l'électronique, et d'automatique (LASMEA). Par ailleurs, financée en partie par le constructeur français Sulky Burel, l'étude faite dans cette thèse est très étroitement liée à la réalité du terrain et possède donc un caractère relativement applicatif.

Les résultats expérimentaux de Fulton ([FSCH99]) ainsi que ceux obtenus dans le cadre de la thèse de Olieslagers ([Oli97]) avaient déjà pu mettre en évidence les défauts de régularité d'épandage réalisé à l'aide de distributeurs centrifuges. Lorsqu'ils suivent des passages rigoureusement parallèles et régulièrement espacés, ces outils permettent

d'obtenir une répartition correcte d'engrais. Malheureusement, dans le cas contraire, il est courant d'observer des erreurs de fertilisation. Ainsi, les travaux de Fulton et de ses collaborateurs, basés sur des tests effectués au sein d'une parcelle à géométrie non rectangulaire présentant des passages non parallèles, ont mis en exergue des différences notables entre dose consigne, considérée fixe sur la totalité du champ, et dose réelle. Pour ce qui concerne l'étude menée par Olieslagers, elle a contribué à montrer que dans le cas de figure où la dose prescrite n'est pas constante dans la parcelle, une importante dégradation de la qualité d'épandage peut être observée si les réglages de la machine sont modifiés brutalement comme cela se fait dans la pratique lors du processus de fertilisation.

Au regard des travaux précédents, il s'avère donc que la stratégie d'épandage employée aujourd'hui est totalement inappropriée pour parvenir à une application régulière d'engrais dans le champ. Cette inadéquation est en partie dûe à un raisonnement trop simplifié qui ne prend en aucun cas compte des phénomènes réels qui se produisent durant l'opération de fertilisation minérale. Ainsi, jusqu'à présent les règles de décision adoptées par l'ensemble de la communauté agricole reposent uniquement sur l'hypothèse de l'homogénéité des quantités distribuées à chaque position occupée par l'épandeur sur le terrain. D'autre part, les défauts de dosage sont amplifiés par le fait que les paramètres de réglages de l'appareil sont sélectionnés en considérant des trajectoires parallèles et espacées d'une distance constante, ce qui est loin d'être le cas dans la réalité. Par conséquent, il est nécessaire de mener une étude consistant à déterminer les consignes de réglage permettant de conduire à une fertilisation correcte quelque soient les géométries parcellaires rencontrées.

Malgré le nombre et la diversité des recherches effectuées dans le domaine de l'épandage centrifuge, peu d'entre elles traitent véritablement de la minimisation des erreurs de fertilisation en prenant directement en compte l'hétérogénéité spatiale de la distribution d'engrais apportée en chaque position géo-référencée de l'épandeur. Cette distribution, communément appelée nappe de répartition, pouvant être connue à partir des paramètres mécaniques de l'appareil en utilisant des modèles déjà existants, la stratégie retenue pour la réduction des défauts de fertilisation dans le cadre de cette thèse, est une approche basée sur l'optimisation mathématique. Il s'agit de déterminer une combinaison optimale des réglages à appliquer au distributeur le long de chaque trajectoire afin de parvenir à un arrangement des nappes de répartition permettant d'obtenir un épandage le plus régulier possible.

Les passages suivis par l'outil dans la parcelle sont ici considérés imposés. Ainsi, ils sont supposés fixés par les autres techniques culturales effectuées préalablement à l'opération d'épandage et peuvent être connus par le biais des relevés de positions GPS du tracteur portant ou tractant les matériels utilisés pour ces tâches. Aussi, la problématique qui guide cette thèse est la résolution d'un problème d'optimisation où les variables de décision sont

uniquement les paramètres de réglages du distributeur. La fonction coût employée est construite à partir du modèle mathématique des nappes de répartition et traduit les erreurs de fertilisation. Dans le but ultime de commander l'appareil et donc d'obtenir une machine autonome, les solutions sont calculées de manière à ce qu'elles puissent être utilisées comme séquences de consignes optimales à présenter en entrée du système. Pour ce faire, des contraintes reflétant les limites mécaniques et dynamiques de l'épandeur sont prises en compte lors de la détermination des paramètres optimaux.

Face aux importantes étendues de surface présentées par les parcelles traitées, la résolution du problème d'optimisation devient rapidement très coûteuse du fait d'un fort encombrement de la mémoire. Aussi, une approche est développée afin de permettre de réduire les temps d'exécution des algorithmes qui devraient être idéalement implémentés sur des machines classiques aux capacités de calculs et de mémoire limités se trouvant chez l'agriculteur à la ferme.

D'autre part, toujours dans le but d'optimiser l'apport d'engrais dans les champs, une autre stratégie, basée sur la théorie du contrôle optimal, est envisagée. Cette dernière fait l'objet d'une étude préliminaire et consiste alors à résoudre un problème de commande optimale où les réglages sont assimilés à des contrôles et la répartition spatiale d'engrais à la variable d'état.

## Plan du mémoire

Ce document comporte 6 chapitres et est articulé de la manière suivante.

Tout d'abord, le premier chapitre est consacré à la présentation globale de l'opération d'épandage à l'aide de distributeurs centrifuges. Il a pour but de familiariser le lecteur avec l'ensemble des concepts techniques et les stratégies couramment employés dans ce domaine.

Le deuxième chapitre aborde, quant à lui, le problème des irrégularités de dosage générées par une stratégie d'épandage inadaptée. Les défauts de répartition sont ici mis en exergue par le biais de résultats de simulations issus de l'application d'un modèle mathématique traduisant la véritable hétérogénéité spatiale des distributions d'engrais appliquées dans la parcelle. Ce chapitre expose également les solutions techniques qui ont déjà été envisagées pour améliorer la qualité des épandages. Il détaille par ailleurs les hypothèses de travail et définit la problématique de cette thèse qui est la minimisation mathématique des erreurs de fertilisation.

La résolution de la problématique exposée à la fin du deuxième chapitre nécessitant l'utilisation d'algorithmes d'optimisation, le troisième chapitre présente différentes méthodes couramment employées dans ce domaine. Les problèmes sans et sous contraintes

sont discutés.

Le quatrième chapitre est consacré aux développements inhérents à la résolution du problème d'optimisation d'épandage dans les zones des parcelles où le distributeur effectue uniquement des trajets aller-retour (épandage plein champ). Après avoir modélisé la fonction objectif, une méthode de décomposition du problème original est proposée. Des résultats de simulations illustrent la répartition obtenue à l'issue des calculs.

Le cinquième chapitre présente l'étude menée dans le cas de l'optimisation d'apport d'engrais dans les zones bordure du champ (épandage de bordure). Deux approches sont suggérées permettant de gérer de manière optimale les débuts et fins d'épandage en plein champ ainsi que les réglages du distributeur le long de la trajectoire longeant la limite extérieure du champ. Des simulations numériques mettent en évidence les améliorations que l'on peut observer en appliquant ces deux méthodes.

Enfin, le sixième chapitre aborde une nouvelle stratégie reposant sur la théorie de la commande optimale. Les formalisations du critère d'optimisation ainsi que l'équation d'état sont présentées. Ensuite, après avoir développé les algorithmes de résolution, des premiers résultats concernant cette approche sont discutés.

# Chapitre 1

# La fertilisation par procédé centrifuge

L'apport extérieur de matières fertilisantes étant essentiel à la compensation des carences des sols en éléments nutritifs, la fertilisation est une étape obligée dans le processus de production agricole. Ces fertilisants se décomposent aujourd'hui en deux grandes classes : les amendements, destinés principalement à améliorer la constitution physico-chimique des sols, et les engrais, minéraux et organiques, qui contribuent majoritairement à la nutrition des plantes. L'épandage de ces différents produits dans le champ nécessitent alors l'utilisation de matériels adaptés à chaque type de fertilisant. Dans le cas d'engrais minéraux, les outils les plus répandus sont les distributeurs centrifuges.

Ce chapitre a pour objectif de familiariser le lecteur au processus de fertilisation à l'aide de ces machines. Afin de bien appréhender les différents éléments inhérents à l'épandage centrifuge, nous rappelons brièvement le rôle de la fertilisation dans le processus de production agricole. Les tenants et les aboutissants de la pratique d'une telle tâche dans le cadre de l'agriculture de précision sont également mis en exergue en exposant non seulement les organes des distributeurs centrifuges mais aussi les stratégies utilisées afin d'obtenir une répartition régulière au champ.

## 1.1 Fertilisation et agriculture de précision

L'ensemble des techniques culturales pratiquées sur une parcelle agricole afin d'en obtenir une production est toujours effectué suivant un ordre bien précis appelé itinéraire technique. Ainsi, tout d'abord, afin de préparer le sol en vue d'obtenir un lit de semences satisfaisant, le travail du sol est mis en oeuvre. Dans un deuxième temps, l'implantation des graines est réalisée via le semis. Par la suite, vient l'opération de pulvérisation qui consiste à appliquer des produits phytosanitaires destinés à enrayer les maladies, les insectes et les mauvaises herbes pouvant menacer le bon développement des cultures. Cette phase est alors suivie de l'étape de fertilisation qui permet de renforcer la teneur des

sols en éléments minéraux. Enfin, vient l'opération de récolte. La production agricole est ainsi issue d'une suite logique de tâches dépendant les unes des autres. Bien que les deux premières phases constituent des opérations importantes qui contribuent à renforcer les aptitudes des sols à satisfaire les besoins des cultures, la fertilisation tient une place particulière dans l'itinéraire technique car elle intervient directement au niveau de la nutrition des plantes. Il faut savoir qu'afin de développer de la matière végétale, ces dernières s'alimentent en azote minéral contenu dans le sol sous forme de nitrates principalement. Le phosphore, nécessaire à leur bon fonctionnement physiologique, est également absorbé par leurs racines. D'autre part, le potassium, favorisant la synthèse et le stockage de glucides, est de la même manière consommé par les végétaux. L'opération de fertilisation consiste alors à apporter ces différents éléments nutritifs en quantité suffisante afin de compenser les prélèvements de ces derniers par les cultures mais également à améliorer la fertilité des sols pauvres en nutriments.

La dose d'éléments nutritifs à apporter, désignant la masse de matières à distribuer par unité de surface, est traditionnellement calculée suivant le type de cultures considérées. Ainsi, en France, dans le cas de la culture de blé, la dose d'éléments azotés à apporter est évaluée en moyenne à 80 Kg/Ha. Dans le cas du maïs, elle vaut environ 170 Kg/Ha. Depuis les vingt dernières années, ce procédé de mise au point de doses consignes basé uniquement sur les caractéristiques biologiques des plantes tend à disparaître et à laisser place à une méthode de calcul qui prend non seulement compte de la nature des cultures mais également de la variabilité des caractéristiques physico-chimiques des sols. Cette stratégie s'inscrit dans le cadre d'un concept très large baptisé Agriculture de Précision.

Apparu pour la première fois aux Etats-Unis dans les années 80, le concept d'Agriculture de Précision (AP) consiste à gérer les parcelles agricoles en tenant compte de l'existence de variabilité à l'intérieur de ces dernières couramment appelée variabilité intraparcellaire. Aussi, l'ensemble des techniques liées à l'AP représentent une avancée vers plus de précision pour les opérations culturales par la réalisation d'une intervention adéquate (réglage, dose...) au bon endroit et au bon moment.

Aujourd'hui, la plupart des tâches agricoles sont concernées par la modulation intraparcellaire : travail du sol, semis, fertilisation, irrigation... Néanmoins, il est manifeste que cette pratique est surtout appliquée dans le cadre de la fertilisation ([Aue01]). Les agriculteurs attendent de l'adoption de ce concept, d'une part d'utiliser des quantités moins importantes d'engrais pour un même rendement ou faire croître ce dernier avec une même quantité d'engrais, et d'autre part de limiter les effets néfastes des fertilisants sur l'environnement afin de s'inscrire dans le développement durable. Pour ce faire, des outils inhérents aux technologies de l'information existent ([Bla00]). Ainsi, on peut citer tout d'abord le système GPS qui devenu une technologie accessible par l'ensemble des

agriculteurs, permet de déterminer les actions à réaliser selon le positionnement géographique des engins agricoles. La mise en place de capteurs appropriés sur les machines est également utile afin de collecter des informations nécessaires aux prises de décisions. L'utilisation de Système d'Information Géographique (SIG) est aussi courante pour la gestion géoréférencée des informations parcellaires. Par ailleurs, il est également important de noter la présence de système de régulation permettant de calculer de manière continue les réglages des appareils sans aucune intervention de l'agriculteur. Ainsi, dans le cadre de la fertilisation, l'ensemble tracteur-distributeur est souvent équipé de ce type d'outils comme l'illustre la figure 1.1.

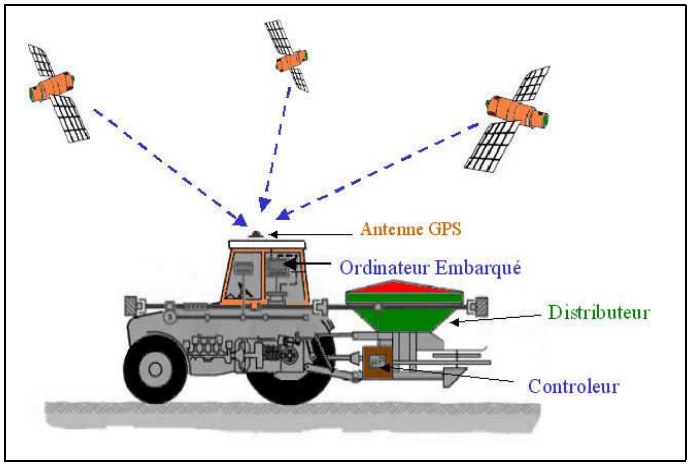



Figure 1.1 – Vue d'ensemble des outils installés sur un engin agricole destiné à la fertilisation dans le cadre de la pratique de l'agriculture de précision.

Bien que fortement recommandée, l'adoption de l'agriculture de précision se fait de manière irrégulière. En effet, de nombreux agriculteurs hésitent à mettre en oeuvre ce type de pratique. De multiples facteurs doivent être considérés afin d'expliquer cette réticence.

De nombreuses études démographiques et économiques ont été menées dans le but de déterminer les raisons qui incitent les agriculteurs à adopter ou non l'AP. Tout d'abord, les premiers éléments à prendre en compte semblent être le contexte socio-économique, tel que la taille de la ferme, le niveau d'éducation ([HH03]) et l'accés aux informations ([DM03]). Outre ces paramètres, d'autres variables liées à la perception de la complexité de cette nouvelle technique sont également à prendre en considération. Ainsi, bien qu'étant conscients que cette dernière puisse réduire les coûts de production et augmenter les rendements tout en respectant l'environnement, bon nombre de producteurs hésitent à investir dans des formations leur permettant d'appréhender l'usage des nouvelles technologies dans le cadre de tâches agricoles courantes. Par ailleurs, l'un des plus gros freins à l'adoption de cette nouvelle pratique est dû aux coûts additionnels liés à l'usage des nouveaux systèmes ([Swi01]). Néanmoins, il a été démontré dans certains cas que les bénéfices obtenus dans

le cadre de l'application des concepts de l'AP compensaient les dépenses faites lors de l'achat des dispositifs associés. Ainsi, [GRW+03] conclut que dans le cas de cultures céréalières, les bénéfices sont positifs lorsque des systèmes basiques à bas coûts sont utilisés pour des surfaces de parcelles supérieures à 80 Ha. Avec des systèmes plus sophistiqués et donc plus coûteux, il est préférable de traiter des surfaces évoluant entre 200 et 300 Ha. En mettant en exergue ce type de résultats et en apportant leur soutien financier, les différents gouvernements européens parviennent petit à petit à accélérer le processus d'adoption. Aussi, dans le cas de la France, une aide s'élevant à 1000 euros est accordée depuis janvier 2006 aux producteurs désireux de mettre en oeuvre l'ensemble des moyens techniques satisfaisant aux exigences de modes de production agricole dans le cadre du développement durable (agriculture raisonnée). Grâce aux différentes techniques de persuasion, on comptait alors parmi les 347 000 exploitations sur le territoire en Mars 2006, selon l'association FARRE ([FAR]), près de 1356 se conformant aux réglementations de l'agriculture raisonnée en faisant appel aux techniques de l'AP. Ainsi, il est de plus en plus fréquent de rencontrer des machines agricoles équipées d'outils d'aide à la décision tels que ceux décrits précédemment. C'est le cas des distributeurs centrifuges très employés pour l'épandage d'engrais minéraux.

## 1.2 Principe de l'épandage centrifuge

### 1.2.1 Le distributeur centrifuge

Afin d'appliquer de manière homogène de l'engrais sur toute la surface d'un champ, il est courant d'utiliser des distributeurs d'engrais minéraux. Ces derniers, réglables, permettent dans beaucoup de cas d'appliquer la bonne dose au bon endroit. L'apport des intrants peut se faire de deux manières possibles : par projection ou en couverture. Cependant, il est manifeste que les outils les plus répandus fonctionnent selon le principe de projection. C'est le cas des distributeurs centrifuges qui, grâce à leur bas coût et leur simplicité d'utilisation, sont les machines les plus majoritairement utilisées dans l'ensemble des pays d'Europe du nord et des Etats-Unis. Ces outils pouvant être portés, comme à la figure 1.1, ou traînés, disposent d'une trémie, d'un système d'alimentation et de dosage, ainsi que d'un simple ou de double disques rotatifs équipés de pales. Le processus d'épandage d'engrais minéraux par distribution centrifuge se décompose comme suit :

- Ecoulement des granulés d'engrais de la trémie par gravité ;
- Ecoulement du flux de granulés par la goulotte d'alimentation sur une région du disque ;
- Chute des particules sur le disque et dispersion de ces dernières par roulement et/ou

glissement ;
- Prise en pale des granulés et accélération des ces derniers sous l'action de la force centrifuge ;
- Ejection des particules et après vol balistique dans l'air, atterrissage de celles-ci au sol .

L'ensemble des organes du distributeur intervenant lors des phases précédentes apparaissent à la figure 1.2.

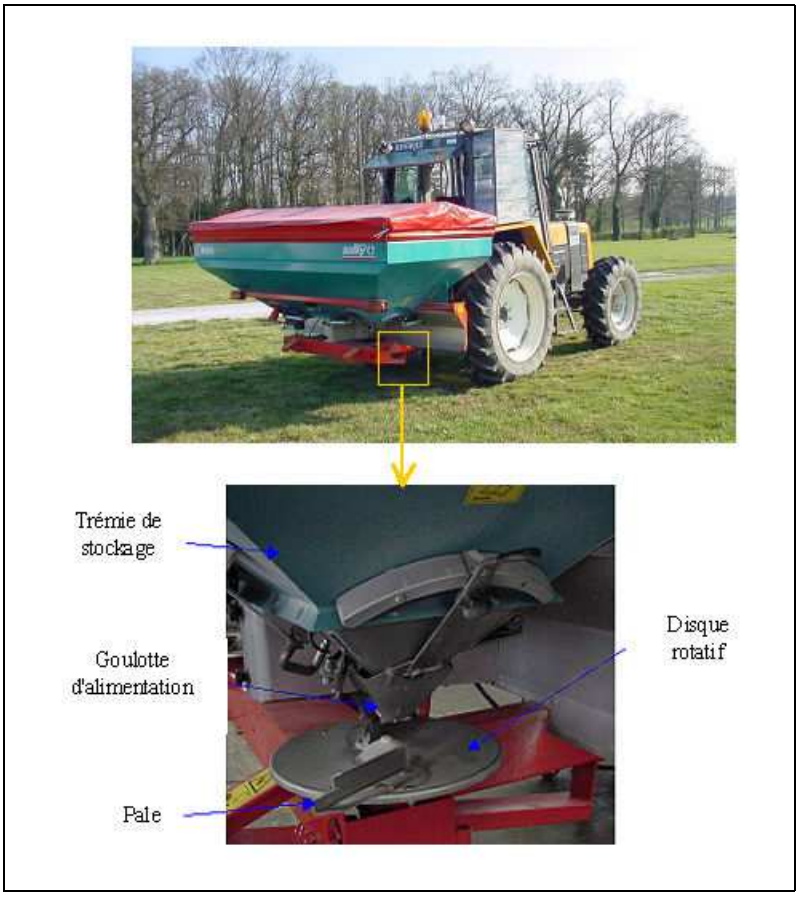



Figure 1.2 – Zoom sur l'ensemble des organes d'un distributeur centrifuge.

Afin d'obtenir une répartition au sol répondant aux objectifs de fertilisation, différents réglages sont effectués sur la machine. Ces derniers permettent de faire varier les paramètres dynamiques mis en jeu dans le processus de distribution centrifuge : la portée de projection, étroitement liée à la vitesse d'éjection des particules, et la direction de projection. Ces grandeurs, illustrées à la figure 1.3, évoluent non seulement différemment selon les propriétés granulométriques des engrais mais elles adoptent également des valeurs qui sont les résultats d'une combinaison complexe de paramètres mécaniques tels que le débit, le diamètre et la vitesse de rotation des disques, la longueur et la forme des pales ainsi que le point de chute des particules sur les disques.

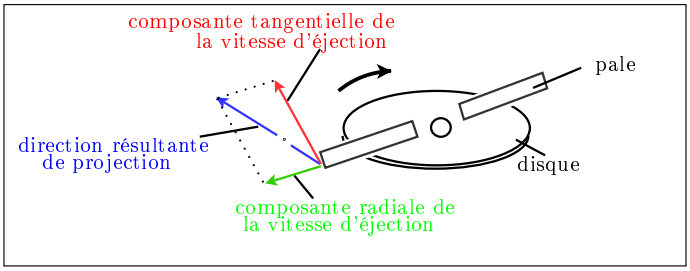



Figure 1.3 – Direction de projection et composantes de la vitesse d'éjection.

Le débit est une variable définissant essentiellement la quantité d'engrais pris en pale. Plus cette quantité est grande, plus les particules auront un temps de transfert long contre les pales et ainsi plus l'épandage se fera sur le côté du distributeur. Néanmoins, ce phénomène est relativement négligeable et le plus souvent le débit n'influe pas sur la répartition au sol.

L'éjection des particules étant inhérente à l'action de la force centrifuge, il est clair que le diamètre et la vitesse de rotation des disques agissent directement sur la portée de projection. Ainsi, lorsque la vitesse de rotation augmente alors la vitesse d'éjection croît et par la même occasion la distance de projection ([Adj93], [Col97]).

De la même manière, les longueurs de pales modifient la distance de projection en augmentant ou en diminuant le temps de transfert des granulés. Par ailleurs, plus leur longueur augmente, plus l'épandage se fait sur le côté comme l'a montré Colin ([Col97]). L'influence de la forme des pales sur la répartition au sol est quant à elle difficile à caractériser étant donné la complexité des mécanismes physiques qui y sont liés.

En ce qui concerne le point de chute des particules sur les disques, on peut dire qu'il permet de faire varier la direction de projection ([Col97]). En effet, comme le montre la figure 1.4, plus il se trouve près du centre du disque, plus l'épandage se fait sur le côté ([PR62]). Dans le cas contraire, l'épandage se fait vers l'arrière comme l'illustre Inns dans [IR62].

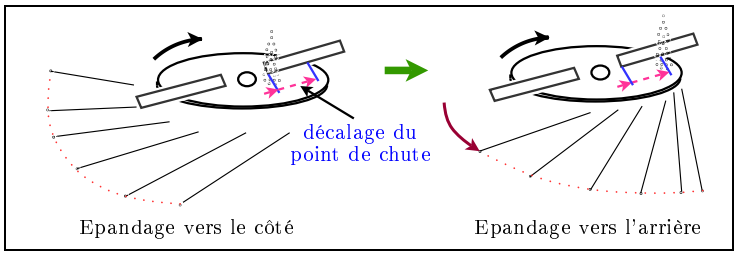



Figure 1.4 – Influence du point de chute des granulés d'engrais sur la répartition.

Comme on peut le constater, il existe de nombreux paramètres mécaniques permettant de modifier la répartition d'engrais au sol. Cependant, étant donné qu'il est difficile d'ap-

préhender les effets des couplages de ces derniers, la plupart des constructeurs conçoivent des machines permettant d'agir sur un nombre limité de réglages. Ainsi, dans le cas des appareils fournis par le constructeur français Sulky-Burel, le débit est régulé par le contrôle de l'ouverture d'une trappe d'alimentation située à la base de la trémie. Outre le débit, le point de chute des granulés sur les disques est également réglable en modifiant la position de la goulotte. D'autres fabricants, tel que Kuhn, fournissent des machines où il est possible de régler le débit et la vitesse de rotation des disques entraînés alors par des moteurs hydrauliques. Il existe également des distributeurs où l'utilisateur peut modifier la longueur et la forme des pales. Cependant, aujourd'hui, ces ajustements ne peuvent être réalisés en temps réel durant le processus d'épandage et doivent donc être faits uniquement avant la mise en route de l'appareil. L'ensemble des réglages évoqués ici étant effectués de sorte que la distribution d'engrais permette de répondre aux objectifs de fertilisation, la connaissance de la répartition au sol est donc déterminante dans la mise au point de la stratégie d'épandage.

### 1.2.2 Répartition au sol

Afin d'étudier la répartition d'engrais au sol et ainsi déterminer les réglages optimaux du distributeur permettant de répondre au mieux aux attentes de l'agriculteur, différentes stratégies de mesure existent.

Intuitivement, une première méthode consisterait à épandre de l'engrais avec un distributeur immobile et à recueillir les granulés à l'aide de bacs de collecte disposés autour de la machine. Cette procédure s'inspirerait des protocoles [ISO85], [CEN03] et [ASA01] en utilisant de bacs de dimension 50 cm $\times$ 50 cm $\times$ 10 à 15 cm équipés de croisillons en plastique afin de limiter les rebonds des particules. Cependant, Colin ([Col97]) a observé qu'un tel dispositif était très lourd à mettre en place car il nécessiterait de disposer près de 900 bacs sur une surface d'environ 15 $\times$ 15 m$^2$. Elle a alors imaginé une solution alternative qui constitue aujourd'hui la procédure standard mise en oeuvre au Cemagref. Cette dernière, réalisée au sein d'un hall d'une surface de 42 $\times$ 21 m$^2$, ne nécessite que l'utilisation de 78 bacs alignés sur 39 m perpendiculairement à l'axe d'avancement du tracteur. La configuration adoptée apparaît alors à la figure 1.5.

Au début de cette procédure, le tracteur occupe une position fixe proche des bacs pendant une durée $\Delta t$ durant laquelle le distributeur épand de l'engrais. A la fin de cette opération d'épandage, les granulés recueillis dans chaque bac sont prélevés et pesés. Les masses mesurées pour les différents bacs sont alors stockées dans une base de données. La phase de pesée terminée, la position du tracteur est incrémentée de 1 ou 3 m dans la direction d'avancement et les procédures d'épandage sur une même durée $\Delta t$ ainsi que de

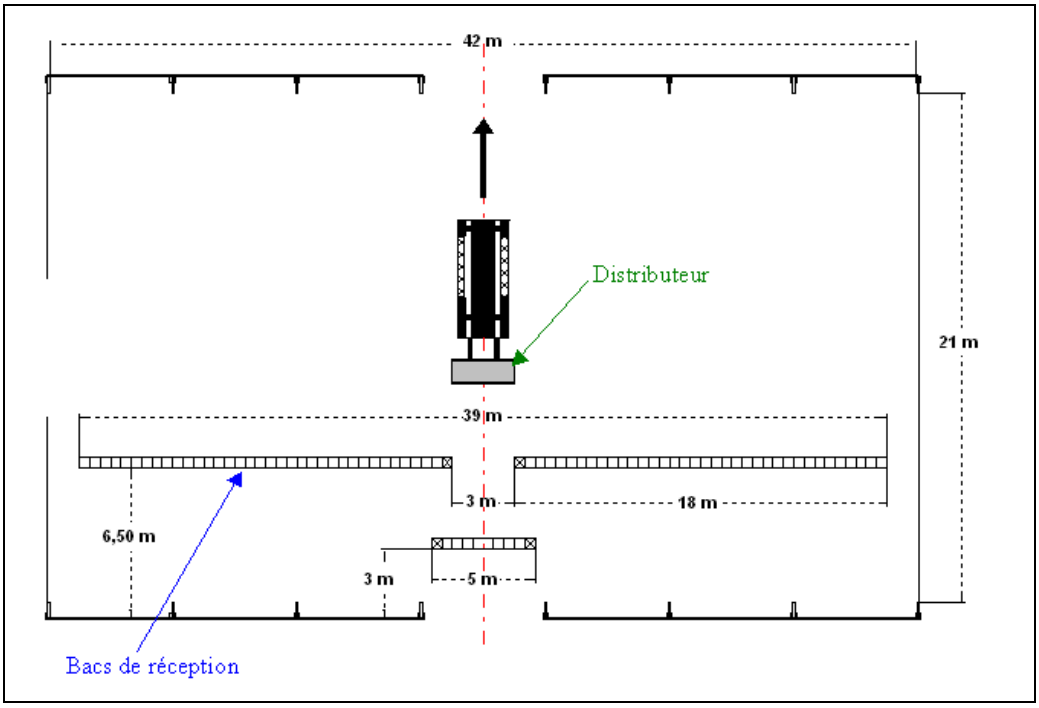



Figure 1.5 – Méthode standard utilisée par le Cemagref pour la mesure de la répartition au sol.

pesée sont à nouveau effectuées. Ces opérations répétées sur une distance d'environ 20 m permettent alors à partir des mesures stockées de reconstruire la répartition d'engrais au sol.

La mesure complète de la répartition par le biais de cette méthode étant malheureusement très coûteuse en temps (4 à 5 heures), une nouvelle procédure a été testée par Piron et Miclet ([PM05]) et sera opérationnelle fin 2006. Au cours de la réalisation de cette dernière, l'ensemble des bacs de réception sont fixés radialement au distributeur qui tourne sur lui même pendant la phase d'épandage. Sur ce nouveau banc d'essai, baptisé Cemib, chaque bac étant équipé d'un capteur de pesée, les masses d'engrais collectés sont mesurées de manière continue permettant ainsi de réduire le temps de l'essai à environ 2 minutes.

Une technique alternative a été proposée par Hofstee ([Hof94]). Cette dernière repose sur la simulation d'un modèle mathématique du vol balistique des particules à partir de la mesure des conditions initiales de ce dernier à savoir le diamètre et la vitesse en sortie de pale des granulés. Les mesures, effectuées dans ce cas à l'aide d'un transducteur ultrason, présentent malheureusement de gros écarts avec les valeurs réelles pouvant conduire ainsi à un mauvais calcul des répartitions au sol.

Une autre approche couplant un système optique au même modèle que précédemment, a été mise en place par Grift et Hofstee ([GH97]). Les mesures des vitesses et des

diamètres des granulés sont cette fois-ci réalisées en utilisant deux barrettes de capteurs photosensibles distantes de 27 mm et placées face à une source lumineuse. Les barrettes de capteurs délivrant chacune un signal logique à l'état bas lorsque les particules coupent le faisceau lumineux, la vitesse est déterminée en évaluant la différence entre deux fronts descendants. Le diamètre est quant à lui calculé à partir de la largeur des impulsions d'un des deux signaux. Cette méthode donnant de bons résultats avec des erreurs sur la vitesse et le diamètre variant entre 2 et 5 % pour des particules sphériques, les auteurs ont poursuivi leurs travaux en travaillant sur un épandeur réel (Lowery 300) distribuant des granulés de nitrate d'ammonium ([GH02]). En comparant leurs simulations de répartition au sol aux résultats expérimentaux fournis par le fabricant du distributeur, ils ont remarqué de légères différences au niveau du rayon d'épandage, défini comme étant la plus grande distance entre l'origine du disque du distributeur et les granulés d'engrais tombés au sol. Ainsi, par exemple, dans le cas de tests d'épandage de nitrate d'ammonium avec un réglage de débit fixé à 4, une vitesse de rotation des disques de 540 tours par minute, la valeur prédite était inférieure de 2 m par rapport à la valeur spécifiée par le constructeur de la machine.

Une nouvelle méthode faisant appel à un système d'imagerie pour évaluer la vitesse des particules a été parallèlement étudiée par Cointault ([Coi01]). Contrairement à l'approche précédente, les deux composantes de la vitesse sont déterminées grâce à l'estimation de sa norme et de la direction d'éjection. Le dispositif de mesure, combinant une caméra haute résolution à faible cadence à une batterie de 8 flashes déclenchés en série durant chaque temps d'exposition, donne des résultats corrects mais est néanmoins lourde à mettre en oeuvre et est surtout très coûteuse (12 000 euros).

Des techniques d'imagerie ont également été proposées pour évaluer la répartition au sol par Hensel ([Hen03]). Ce dernier a suggéré d'utiliser un système d'imagerie digitale permettant de distinguer les particules sur le sol et calculer rapidement la quantité d'engrais épandus. Cependant, cette méthode largement affectée par la nature des engrais et les conditions de luminosité n'est pas très employée dans la pratique.

Les méthodes basées sur la mesure de conditions initiales au vol balistique des particules peuvent fournir une bonne estimation de la répartition des engrais au sol et la validation de cette dernière passe irrémédiablement par la confrontation des valeurs calculées aux valeurs expérimentales obtenues à partir de la technique standard reposant sur l'utilisation de bacs de réception des fertilisants. Celle-ci sert ainsi toujours de méthode de référence et constitue donc une procédure incontournable pour une mesure fiable de la répartition au sol. Tout comme les doses d'épandage, cette dernière est souvent représentée comme la distribution de matières fertilisantes par unité de surface. Ainsi, en appliquant

le protocole standard du Cemagref avec un $\Delta t = 3$ s, on obtient après épandage uniquement avec le disque droit du distributeur, la répartition d'engrais au sol représentée à la figure 1.6.

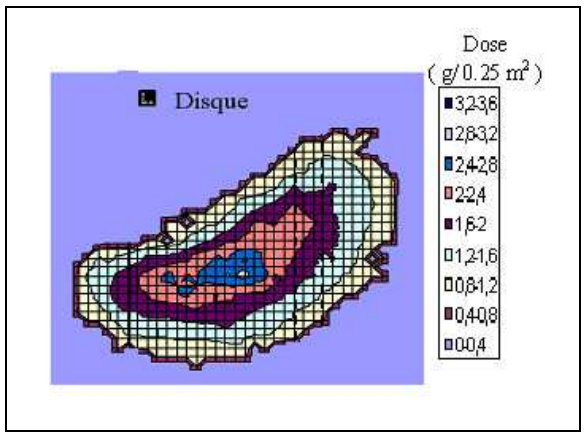



Figure 1.6 – Exemple de répartition d'engrais au sol exprimée en g/0.25 m$^2$ obtenue par la procédure standard avec $\Delta t = 3$ s.

Comme on peut le constater, la répartition d'engrais au sol, communément appelée nappe spatiale de répartition, est hétérogène. Dans un premier temps, l'absence d'homogénéité dans cette répartition peut être expliquée de manière intuitive. En effet, il est clair que les différentes phases composant le processus de distribution centrifuge mettent en jeu des lois de comportement complexes où les propriétés physiques des particules constituent un des paramètres les plus prépondérants. Des essais expérimentaux ont pu montrer que les performances des distributeurs centrifuges étaient étroitement liées non seulement aux réglages des machines mais aussi aux caractéristiques des engrais. Ainsi, selon Hofstee ([HH90]), trois grandes caractéristiques affectent de manière significative le mouvement des granulés sur le disque et dans l'air : la taille de la particule, le coefficient de frottement ainsi que le coefficient de restitution. Ces paramètres étant variables d'une particule à l'autre, il est clair que chaque granulé aura des trajectoires dans la pale et dans l'air qui lui seront propres. Par conséquent, la position atteinte au sol, après le vol balistique, différera d'une particule à l'autre. Ce raisonnement est confortée par des modélisations qui ont fait l'objet de nombreux travaux depuis environ une quarantaine d'années.

### 1.2.3 Modélisations : rappels bibliographiques

Après analyse des différentes étapes du processus d'épandage rappelées à la section (1.2.1), il apparaît clairement que les phases qui déterminent la répartition d'engrais au sol sont :

– le mouvement des particules sur le disque et la pale ;

– le vol balistique de celles-ci dans l'air.

Afin d'évaluer par calcul la répartition au sol, les chercheurs ont tenté de modéliser ces deux phases et simuler, soit l'ensemble du parcours des granulés depuis leur chute sur le disque jusqu'à leur atterrissage au sol, soit uniquement leur parcours dans l'air à partir des mesures des conditions initiales du vol (cf. section (1.2.2)).

Les travaux de modélisation du mouvement de particules sur le disque et dans les pales ont débuté en 1962 avec Patterson et Reece ([PR62]). Ainsi, ils furent les premiers à formaliser cette phase dans le cas d'un disque plat équipé de pales radiales en négligeant les rebonds et en considérant un point de chute proche du centre du disque. Les résultats donnés par leur modèle étaient corrects au vue des essais expérimentaux qui ont été réalisés. Ils ont par ailleurs montré que la vitesse radiale des particules était étroitement liée à leur forme ainsi qu'au coefficient de frottement particule/pale.

Inns et Reece ([IR62]) ont étendu le modèle au cas où le point de chute est éloigné du centre du disque. Ils ont d'autre part considéré cette fois-ci des pales courbes et les rebonds des particules contre celles-ci. Ils ont alors montré que le nouveau modèle donnait des résultats probants pour des particules sphériques mais qu'il était moins performant dans le cas de granulés de formes géométriques irrégulières.

Des modèles prenant en compte des pales radiales et courbes configurées de plusieurs manières différentes ont été par ailleurs étudié par Cunningham ([Cun63]). Ces modèles donnent des valeurs d'angle d'éjection des particules cohérentes avec les mesures effectuées par Cunningham et Chao ([CC67]).

En ce qui concerne la modélisation de la trajectoire des particules dans l'air, un premier modèle fut proposé par Mennel et Reece ([MR63]). Après avoir réalisé des essais avec des balles sphériques en acier, ils concluent que leur modèle donnent une bonne approximation du parcours de celles-ci dans l'air. Les équations du modèle ont été simplifiées par la suite par [PFW82]. Il est alors montré que le plus gros écart existant entre les valeurs de la distance horizontale parcourue obtenues par cette dernière modélisation et celle de Mennel et Reece [MR63] atteint seulement 7%.

A partir des modèles de mouvement de particules sphériques sur le disque et dans l'air, Griffis et ses collaborateurs ([GRM83]) ont tenté de simuler les répartitions au sol de deux types d'engrais. Les modèles utilisés alors ne prenant pas en compte les formes irrégulières des particules, de grosses différences existaient entre les résultats expérimentaux et simulés.

Lors de la validation de leur résultat de simulation, Olieslagers et ses collègues [ORB96] ont également constaté des différences non négligeables avec les répartitions spatiales données par les essais. Selon eux, les erreurs observées étaient essentiellement dûes aux interactions entre particules non prises en compte dans les équations du modèle. Afin

d'intégrer ces interactions dans la simulation, les paramètres d'entrée de cette dernière ont été optimisés afin de coller au plus près à la réalité. Une technique similaire a été employée par [DTO+04] et a montré des résultats concluants. Dans ce travail, les auteurs ont également mis en évidence l'importance des interactions entre granulés dans le processus d'épandage. Ils ont, par la même occasion, identifié les divers paramètres influençant de manière significative ce phénomène physique : le débit, les dimensions et la forme de la trappe d'alimentation par laquelle les granulés s'écoulent lors de leur chute sur le disque, le diamètre et la vitesse de rotation du disque ainsi que la longueur des pales.

Basées sur des modélisations faisant intervenir des équations différentielles non linéaires, les simulations des mouvements des particules durant tout le processus d'épandage, évoquées précédemment, sont effectuées en faisant appel à des méthodes de résolution numérique (le plus souvent la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4). Afin de simuler la totalité d'une répartition au sol, ces dernières sont appelées pour chaque particule, ce qui peut engendrer des temps d'exécution très longs.

Aussi, une modélisation simplifiée et originale, ne faisant apparaître aucune équation différentielle, a été proposée par Colin ([Col97]). Ainsi, à partir d'études statistiques, cette dernière a observé que la répartition angulaire d'engrais au sol obtenue expérimentalement suivait une loi de répartition très proche d'une gaussienne. En effet, pour la plupart des essais, les distributions expérimentales présentaient une dissymétrie inférieure à 0.7 et un aplatissement très faible souvent inférieure à 0.2. De même, elle a montré qu'une loi normale pouvait caractériser approximativement la distribution radiale au sol. Ainsi, elle a noté que les valeurs des dissymétries des distributions radiales évoluaient entre -0.7 et 0.2. L'aplatissement, dans ce cas, présentait une moyenne équivalente à 1.2. A partir de ces résultats, l'auteur en a déduit que la répartition d'engrais au sol pouvait être évaluée par le produit de 2 gaussiennes caractérisant respectivement la distribution radiale et la distribution angulaire. La figure 1.7 illustre alors cette idée.

Selon ce concept, la nappe de répartition (en g/0.25 m$^2$), notée $q$, obtenue après épandage avec un seul disque peut se mettre sous la forme

$$q(X, D, \rho, \varphi) = \frac{D \cdot \Delta t}{0.25} \cdot \exp\left(\frac{-(r(X) - \rho)^2}{2\sigma_r^2}\right) \cdot \exp\left(\frac{-(\theta(X) - \varphi)^2}{2\sigma_\theta^2}\right), \qquad (1.1)$$

avec

- $X$ un point de coordonnées (a,b) ;
- $(r(X), \theta(X))$ les coordonnées polaires de $X$ ;
- $D$ le débit en g/s ;
- $\Delta t$ la durée de l'essai en s ;
- $\rho$ le rayon moyen (moyenne de la distribution radiale) en m ;
- $\varphi$ l'angle moyen (moyenne de la distribution angulaire) en $^\circ$ ;

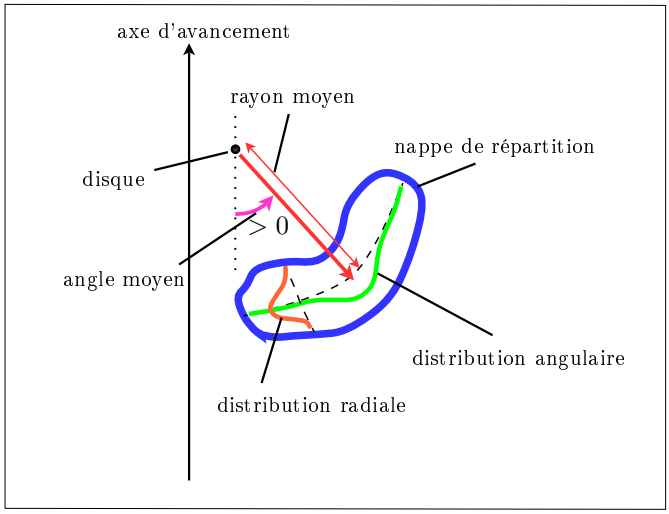



Figure 1.7 – Représentation schématique de la répartition au sol comme le produit de 2 gaussiennes.

- $\sigma_r$ l'écart-type de la distribution radiale en m ;
- $\sigma_\theta$ l'écart-type de la distribution angulaire en °.

Les valeurs de $\sigma_r$ et $\sigma_\theta$ correspondant respectivement aux écart-types relatifs à la distribution radiale et angulaire sont spécifiques à chaque type d'appareil. Celles-ci peuvent alors être facilement déterminées en effectuant une identification de paramètres à partir des mesures effectuées au banc d'essai.

A partir de ce modèle, Bouquet ([Bou99]) a développé un programme permettant de simuler le processus de fertilisation dans des champs. Ainsi à partir des limites de ces derniers ainsi que des données GPS des trajectoires du tracteur, il a pu obtenir des simulations de répartition au champ très proches de la réalité.

Face à une répartition au sol hétérogène, les ingénieurs agronomes ont mis au point une stratégie d'épandage particulière afin d'épandre le plus régulièrement possible de l'engrais dans les parcelles agricole. Cette stratégie est décrite dans la section suivante.

### 1.2.4 Régularité de l'épandage au champ

Après avoir défini la ou les doses permettant d'équilibrer les besoins prévisibles des cultures avec les fournitures d'éléments nutritifs dans le sol, l'agriculteur doit impérativement par la suite épandre le plus régulièrement possible les granulés d'engrais conformément à ces quantités prescrites. En effet, les défauts de fertilisation ont des conséquences négatives d'une part sur la production agricole et d'autre part sur l'environnement. Ainsi, si la dose apportée est inférieure à la dose consigne (sous-dosage) une perte de rendement est automatiquement engendrée. En effet, si l'on prend l'exemple d'une erreur de -20%

pour une dose consigne de 110 Kg/Ha, on peut estimer une perte de rendement de l'ordre de 4 quintaux/Ha en considérant une productivité moyenne de l'unité fertilisante de 20 kg de grains de blés. Pour ce qui concerne les surdosages (cas où la dose apportée est supérieure à la dose prescrite), ils engendrent un gaspillage d'engrais significatif et surtout une importante pollution des eaux. Il faut savoir, en effet, que si des éléments nutritifs (surtout les ions nitrates) se trouvant en large excès dans le sol ne peuvent être totalement absorbés par les cultures, ils sont petit à petit entraînés par lessivage vers les cours d'eaux et les milieux aquatiques. En forte concentration, ils peuvent alors rendre la consommation d'eau impropre et engendrer une eutrophication (développement des algues) des lacs et des étangs ([Ish98]).

Par définition, l'épandage est dit régulier lorsqu'en tout point d'une parcelle la dose apportée correspond à la dose consigne recommandée. Le plus souvent, les agronomes considèrent que cette régularité est satisfaite lorsque la dose appliquée est à 10% près celle que l'on voulait obtenir ([CC95]). Cependant, ce type d'objectif ne peut être atteint qu'avec des engrais homogènes de qualité (taux d'humidité très faible, masse volumique constante, taux de poussière inférieur à 0.1%, sphéricité optimale...) et force est de constater que dans la pratique les engrais utilisés ne présentent malheureusement que peu souvent l'ensemble de ces caractéristiques. Aussi, le plus souvent, l'on s'accorde à dire que l'épandage au champ est uniforme si l'erreur de fertilisation, à savoir la différence entre dose consigne et dose réelle, adopte une valeur évoluant entre -15% et +15% en tout point du champ.

Afin d'aboutir à cette régularité, il est alors impératif que des réglages adéquats, prenant compte de la qualité de la répartition au sol, soient effectués sur l'appareil. L'hétérogénéité spatiale présentée par la nappe de répartition rendant difficile la détermination de ces réglages, les ingénieurs agronomes ont mis au point une représentation simplifiée de cette dernière en partant du constat que les quantités distribués parallèlement à l'axe d'avancement du tracteur affichaient des variations moins importantes que celles épandues selon la direction orthogonale au même axe. En effet, le principe même de la projection d'engrais implique que les quantités de granulés distribuées transversalement à l'axe d'avancement de la machine sont graduellement décroissantes en fonction de la distance par rapport au centre de l'appareil. Cette distribution couramment appelée distribution transversale peut être déduite directement de la mesure de la nappe de répartition en sommant les masses selon la direction d'avancement. La détermination de la distribution transversale selon ce procédé est représentée schématiquement par la figure 1.8. Il est clair que ce type de représentation présente un avantage indéniable de facilité de mesure par banc d'essai transversal, mesure qui fait actuellement référence dans le monde de la fertilisation. Cette procédure de mesure n'est pas sans rappeler la méthode standard de mesure de répartition

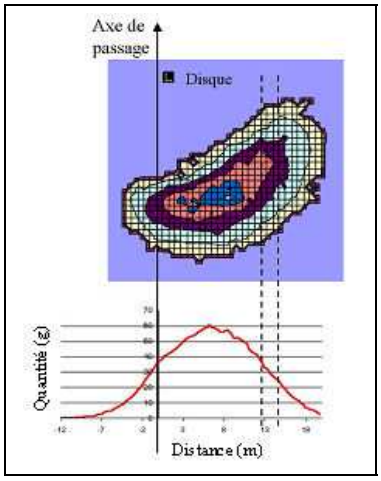



Figure 1.8 – Calcul de la distribution transversale (courbe rouge) à partir de la répartition au sol obtenue après épandage avec le disque droit de l'épandeur.

au sol explicitée précédemment à la section 1.2.2. Ainsi, elle repose également sur la pesée de granulés d'engrais recueillis dans des bacs alignés perpendiculairement à la direction d'avancement du tracteur. Toutefois, en l'occurence, le tracteur ne reste plus immobile mais parcourt à une vitesse constante (souvent fixée à 8 Km/h) une distance d'environ 20 mètres tout au long de laquelle le distributeur épand de l'engrais. La durée de l'essai étant relativement courte, il est possible d'avoir rapidement une idée de la qualité de la répartition au sol.

Au vue de la forme de la distribution transversale, on conçoit aisément qu'au cours d'un seul passage dans le champ, par exemple un aller, les quantités d'engrais épandues par l'appareil ne puissent être les mêmes partout. Les quantités diminuant régulièrement transversalement à l'axe d'avancement, il est alors nécessaire de compenser cette décroissance en appliquant des quantités complémentaires lors d'un autre passage, en l'occurence un retour. Ainsi, afin d'obtenir une régularité d'épandage maximum, il est important que la sommation de doses entre les passages successifs du tracteur soit la plus proche de la dose consigne fixée au préalable. Aussi, dans le cas d'un épandage uniforme idéal, la courbe représentant la sommation des quantités appliquées est une droite.

Afin d'appliquer le principe précédent (principe de recouvrement), les réglages de la machine sont effectuées de sorte que la distance entre passages soit égale à la distance entre deux lignes de recouvrement consécutives. Ces dernières sont dans ce cas constituées de l'ensemble des points où la dose distribuée lors d'un passage atteint la moitié de la dose consigne. Techniquement, la distance entre ces lignes de recouvrement correspond à la largeur de travail du distributeur et est dite optimale dans le cas d'un épandage régulier. Si la distance de passage est inférieure à la largeur de travail il y a excès de fertilisants et donc surdosage. Dans le cas inverse, un sous-dosage se produit. Le principe de recouvrement

dans le cas d'un épandage régulier est rappelé à la figure 1.9.

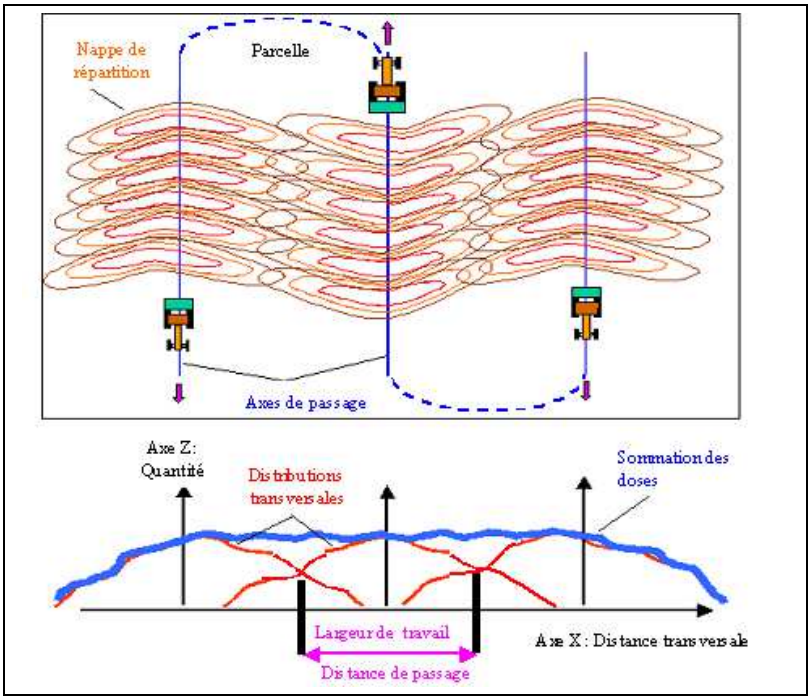



Figure 1.9 – Epandage régulier obtenu en appliquant le principe de recouvrement.

La régularité de l'épandage peut être évaluée mathématiquement par le calcul du coefficient de variation ($CV$) lors des essais. Cette grandeur est alors évaluée en appliquant la relation suivante :

$$CV = (sig/z) \times 100 \tag{1.2}$$

avec

- $sig = \frac{1}{n-1}\sqrt{\sum(z_i - \overline{z})^2}$ ;
- $n$ le nombre de bacs sur la largeur de travail ;
- $z_i$ la quantité recueillie dans chaque bac après recouvrement ;
- $\overline{z}$ la moyenne absolue des quantités recueillies $\overline{z} = \frac{1}{n}\sum(z_i)$

Généralement, au banc d'essai, on estime que la qualité d'épandage est correcte lorsque le $CV$ est inférieur à 15%. Toutefois, il a été observé que ce coefficient était plus élevé dans les champs. Aussi, il est jugé qu'au dessus de 25%, le $CV$ est mauvais et à éviter.

L'obtention d'un bon coefficient de variation passe alors par un réglage optimal du débit de la machine ainsi que de la largeur de travail. Celle-ci est essentiellement modifiée en faisant varier les réglages agissant sur la direction et la vitesse d'éjection des particules (cf. section 1.2.1). Le débit est quant à lui généralement calculé en appliquant une relation mathématique simple liant la dose consigne, la largeur de travail utilisée et la vitesse

du tracteur évoluant principalement entre 8 et 12 Km/h. Cette relation est donnée par l'expression suivante :

$$D = \frac{Q^* \times Lw \times v}{600} \tag{1.3}$$

avec

- $D$ le débit en Kg/min ;
- $Q^*$ la dose consigne en Kg/Ha ;
- $Lw$ la largeur de travail en m ;
- $v$ la vitesse en Km/h.

Ainsi, si l'on considère une dose consigne de 100 Kg/Ha, une largeur de travail de 24 m et une vitesse de déplacement de 12 Km/h, l'épandage sera effectué avec un débit fixé à 48 Kg/min dans le cas d'un distributeur monodisque ou à 24 Kg/min dans le cas bidisque. Le débit étant inhérent à la vitesse du tracteur, grandeur pouvant être non constante durant tout l'épandage, la plupart des distributeurs sont munis d'un système électronique, baptisé DPA pour Débit Proportionnel à l'Avancement, permettant de réguler le débit en fonction celle-ci.

L'usage de la notion de largeur de travail n'est pas exclusivement réservée à la fertilisation. En effet, elle joue également un rôle essentiel dans les techniques employées dans le cas du semis ou de la pulvérisation. Pour l'opération du semis, les largeurs de travail couramment utilisées sont 8, 12, 24 et 36 m. Cette tâche agricole étant la première à être exécutée selon l'itinéraire technique détaillée à la section 1.1, les traces de roue au sol laissées par le passage du semoir constituent généralement le jalonnement des champs. Par conséquent, il est logique que les distances précédentes soient également celles qui sont les plus employées dans le cadre de l'épandage.

Aujourd'hui, la largeur de travail est un paramètre fixe pour toute la parcelle. Ainsi, pour la plupart des épandeurs, une fois déterminés, les réglages précédents sont constants durant toute la phase de fertilisation durant laquelle le tracteur parcourt des allers-retours successifs. Cette phase, habituellement désignée épandage en plein champ, constitue la majeure partie de l'opération étant donné que l'épandage en va et vient couvre la surface la plus importante de la parcelle. Afin d'appliquer de l'engrais sur la totalité du champ, la fertilisation en plein champ est accompagné de l'épandage de bordure. Cette opération consiste alors à distribuer les fertilisants de manière à compléter la dose appliquée en plein champ et à limiter les excès d'engrais à l'extérieur de la parcelle traitée. Ainsi, lors de l'épandage de bordure, il est impératif de réduire la dose du côté de la bordure proportionnellement à la largeur fertilisée. Cependant, les distributeurs centrifuges non munis d'un dispositif de bordure, ne peuvent effectuer cette opération correctement. En

effet, la bordure est généralement trop sous-dosée lorsque l'on veut éviter les projections d'engrais en dehors de la parcelle. Aussi, afin d'éviter ces défauts de fertilisation, les agriculteurs utilisent des appareils équipés du kit de bordure.

Après mesure au banc d'essai, on peut observer que cet outil, fonctionnant également sur le principe de projection, engendre une répartition au sol spatialement hétérogène. Cette dernière peut se décomposer en 2 nappes de répartition telles qu'elles sont obtenues lors de la fertilisation en plein champ. Un exemple de répartition au sol mesurée au banc d'essai pour un disque gauche équipé d'un kit bordure apparaît à la figure 1.10.

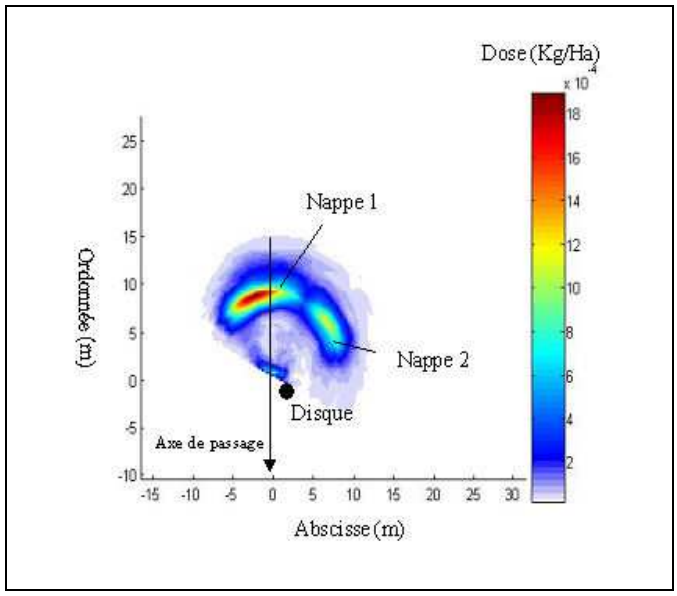



Figure 1.10 – Exemple de répartition au sol obtenue avec un disque gauche muni d'un dispositif bordure.

Afin d'obtenir une répartition la plus uniforme sur toute la parcelle, le passage du tracteur en bordure, appelé ligne de détourage, se fait parallèlement à la limite extérieure au champ à une distance équivalente à la moitié de la largeur de travail. Dans le même but que précédemment, lors des trajets aller-retours en plein champ, l'agriculteur ferme les trappes d'alimentation et arrête donc d'épandre à 4 m avant d'arriver à la ligne de détourage. Dans le cas contraire, lorsque le tracteur s'éloigne du bord du champ, l'opérateur met en route l'épandeur à une distance égale à la largeur de travail. La technique d'épandage de bordure est alors récapitulée à la figure 1.11.

Comme on peut le constater, le processus d'épandage centrifuge au champ est dans sa globalité (plein champ et bordure), essentiellement basée sur la notion de largeur de travail. Ainsi, par le biais d'un raisonnement reposant sur des hypothèses simplificatrices, les ingénieurs agronomes ont pu définir des règles de décision simples permettant d'obtenir un épandage régulier dans le cas de parcelles rectangulaires au sein desquelles le tracteur

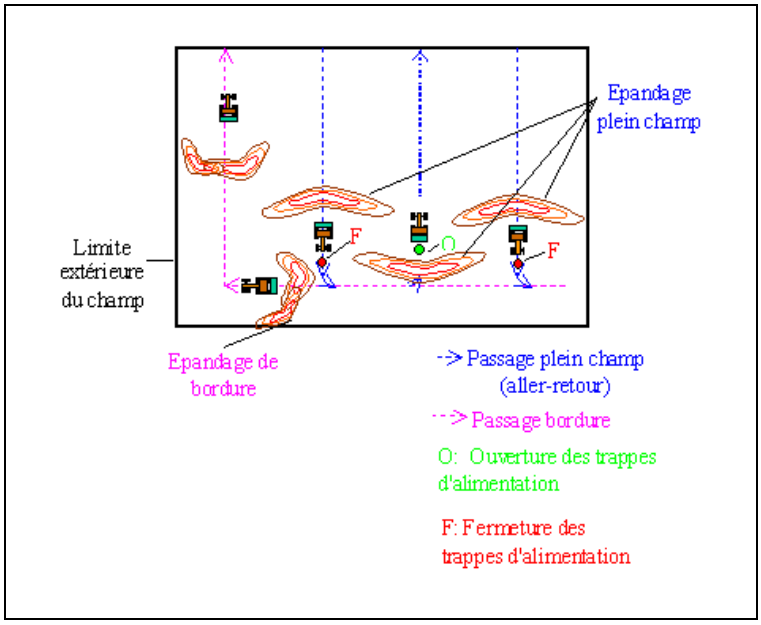



Figure 1.11 – Epandage de bordure avec dispositif de bordure.

parcourt des passages aller-retour parallèles et régulièrement espacés. Du fait de leur simplicité, ces règles sont appliquées dans tous les cas de figure, quelque soit la forme géométrique des parcelles, et constituent à l'heure actuelle les bases fondamentales de la fertilisation par procédé centrifuge.

## 1.3 Conclusion

Ce chapitre a présenté l'importance de l'étape de la fertilisation dans le processus de production agricole ainsi que la stratégie simpliste couramment employée dans la pratique pour l'épandage d'engrais minéraux. Ainsi, afin de répartir ces derniers de la manière la plus uniforme possible, les distributeurs centrifuges, peu coûteux, faciles d'utilisation et très robustes, sont de loin les machines les plus utilisées. Cette facilité d'utilisation provient ici de la simplicité des réglages mécaniques à appliquer. En effet, malgré les phénomènes physiques complexes mis en jeu et l'hétérogénéité des répartition spatiales projetées au sol, les ingénieurs agronomes ont su extraire des règles de décision efficaces. Celles-ci trouvent leur origine dans la simplification de la représentation des nappes spatiales de répartition : les distributions transversales. Ainsi, la stratégie actuelle permettant d'aboutir à un épandage régulier repose uniquement sur le bon recouvrement de ces dernières. Pour ce faire, les réglages de la machine sont ajustés de telle manière que la distance entre passages successifs soit égale à la distance entre lignes de recouvrement, appelée aussi largeur de travail. Lors de l'épandage plein champ, ce recouvrement est réalisé en opérant des trajets aller-retour. Pour ce qui concerne l'épandage de bordure, la machine

est également réglée de sorte que les courbes de doses distribuées complètent le mieux possible les concentrations de fertilisants appliqués en plein champ. Par ailleurs, afin de limiter l'apport de fertilisant en dehors de la parcelle, le distributeur se voit généralement équipé d'un outil spécifique permettant de générer une courbe transversale particulière présentant une décroissance rapide au niveau des limites du champ.

Il est important de noter, qu'au jour d'aujourd'hui, l'ensemble des réglages, établis à l'aide du principe de recouvrement, sont réalisés une fois pour toute avant de procéder à l'épandage. Ainsi, durant tout le processus, les paramètres mécaniques de la machine sont fixes. Quelques réflexions s'imposent alors et il est tout à fait naturel d'émettre des réserves quant à l'efficacité de cette stratégie lorsque la parcelle à traiter est parcourue par des trajectoires non rectilignes et non parallèles entre elles. En effet, il est clair que le principe de recouvrement, tel qu'il est appliqué ici, permet d'épandre régulièrement en plein champ dans le cas de figure où les allers-retours sont rigoureusement parallèles et présentent des distances de passage consécutifs égales. Dans le cas contraire, fréquemment rencontré dans la pratique, il tout à fait logique de penser que la stratégie d'épandage d'aujourd'hui conduise à des répartitions de mauvaise qualité. Par ailleurs, il semble très difficile de parvenir à obtenir une dose uniforme lors de l'épandage de bordure en s'appuyant sur un raisonnement uniquement basé sur les recouvrements de courbes transversales. En effet, du fait de la non prise en compte des véritables répartitions spatiales projetées au sol, des défauts de fertilisation peuvent être attendus au niveau des virages, des pointes de champs engendrées par des rétrécissements de passages en fin de parcelle et des régions où le distributeur doit apporter les quantités de fertilisants indispensables pour compenser les carences de doses laissées par les arrêts et débuts d'épandage en plein champ. L'ensemble de ces réflexions conduit alors à penser que les techniques employées aujourd'hui pour l'épandage centrifuge d'engrais minéraux soient totalement inadaptées pour répondre aux objectifs de production et satisfaire les exigences environnementales. Cette inadéquation est détaillée au chapitre suivant.

# Chapitre 2

# Le problème de défauts de répartition

A cause de terrains glissants ou des erreurs de jalonnement, les agriculteurs ne parviennent pas toujours à suivre précisément des trajectoires parallèles et régulièrement espacées. De plus, face aux formes géométriques variées des parcelles agricoles, des rétrécissements de passages causées par des trajectoires non parallèles sont courants. Ces modifications sont alors souvent la source de dégradations sur la répartition d'engrais. Ainsi, comme il a été exposé au chapitre précédent, lorsque la distance de passage est inférieure à la largeur de travail, la dose augmente dans la zone de recouvrement. Dans le cas inverse, la dose diminue. D'autre part, du fait de l'existence de la variabilité intra-parcellaire, les constructeurs sont de plus en plus amenés à concevoir des distributeurs performants permettant la modulation des doses. Malheureusement, dans de nombreux cas, les réglages apportés aux appareils sont inappropriés et provoquent alors des erreurs de fertilisation.

Des exemples de défauts de répartition dûs à l'inadéquation de la stratégie d'épandage d'aujourd'hui sont alors illustrés dans la première partie de ce chapitre. Ils sont ici mis en évidence par le biais de cartes de rendements présentant des résultats de simulation de distribution d'engrais au sein de différentes parcelles. Nous rappelons alors, par la suite, les solutions ayant déjà été étudiées dans la littérature afin de limiter ces défauts. Enfin, nous présentons l'objectif de ce travail et la spécificité de notre étude basée sur la programmation mathématique.

## 2.1 Erreurs de fertilisation

Travaillant à largeur de travail fixe, il est difficile pour l'agriculteur d'ajuster les doses d'engrais en prenant en compte les variations de trajectoires au sein de la parcelle. Ces ajustements pourraient se faire au mieux en fermant l'un ou l'autre côté du distributeur. Cependant, aucune règle de décision ne permettant à l'heure actuelle de gérer ces instants

de fermeture, cette technique n'est pratiquement jamais utilisée pour l'application d'engrais en cas de distances de passage non constants. Pour les parcelles agricoles présentant ce type de singularités géométriques, il n'est pas rare d'observer des défauts de fertilisation qui sont malheureusement souvent non négligeables. Ces dégradations de répartitions sont illustrées par les 2 exemples détaillés ci-après.

Dans les 2 cas, les paramètres suivants sont adoptés afin de réaliser des simulations ne présentant pas de temps d'exécution trop importants. Ainsi, les parcelles considérées sont tout d'abord virtuellement décomposées en mailles carrés de 1 m $\times$ 1 m. La nappe de répartition étant mesurée au banc à l'aide de bacs de 50 cm $\times$ 50 cm (cf. section 1.2.2), cette discrétisation spatiale peut alors être adoptée puisqu'elle respecte le critère de Shannon. Par ailleurs, afin de ne pas perdre trop d'informations, la nappe de répartition est évaluée tous les 2 points par maille, soit tous les 50 cm. Afin de faciliter les calculs, les trajectoires sont alors temporellement discrétisées avec un pas élémentaire de 0.18 s pour une vitesse de déplacement du tracteur fixée à 10 Km/h. Celle-ci est ici considérée comme un paramètre constant sachant que dans la pratique, elle évolue très peu au cours du temps. Les paramètres du modèle de Colin (1.1) étant facilement identifiable à partir des mesures de nappes de répartition utilisées dans chaque cas, cette modélisation est appliquée pour la réalisation des simulations.

Dans le premier exemple, une parcelle présentant une surface de 3.4 Ha est considérée. Celle-ci est obtenue à partir des relevés GPS des trajectoires suivies par le tracteur comme représentée à la figure 2.1. Comme on peut le noter, les différents trajets allers-retours en plein champ ne sont pas rigoureusement parallèles et sont en certains endroits non rectilignes (principalement pour les 3 premiers en partant de la gauche). Les écarts alors engendrés conduisent à des distances entre passages non constantes. Par conséquent, si l'on applique les règles de décision habituelles, il sera fort probable d'observer des défauts de répartition en ces points. D'autre part, étant donné qu'il s'agit ici d'une parcelle non rectangulaire, un fort rétrécissement d'intervalle de passage entre un trajet plein champ et la ligne de détourage apparaît (comme indiqué par l'ellipse de couleur verte). La distance de passage étant dans ce cas inférieure à la largeur de travail, on peut alors prévoir d'obtenir un fort surdosage.

Pour ce premier cas de figure, regroupant les singularités géométriques les plus courantes, la dose consigne est constante et fixée à 100 Kg/Ha. D'autre part, les distances de passage évoluant entre environ 21 m et 26 m, l'épandage est réalisé en pratique le plus souvent avec des réglages correspondant à une largeur de travail de 24 m (cf. section 1.2.4). Aussi, les paramètres du modèle (1.1) sont déterminés à partir de la mesure de la nappe de répartition correspondante. Les valeurs des débits, des rayons moyens, des écarts-types sur le rayon et sur l'angle qui sont trouvées pour les disques droit et gauche

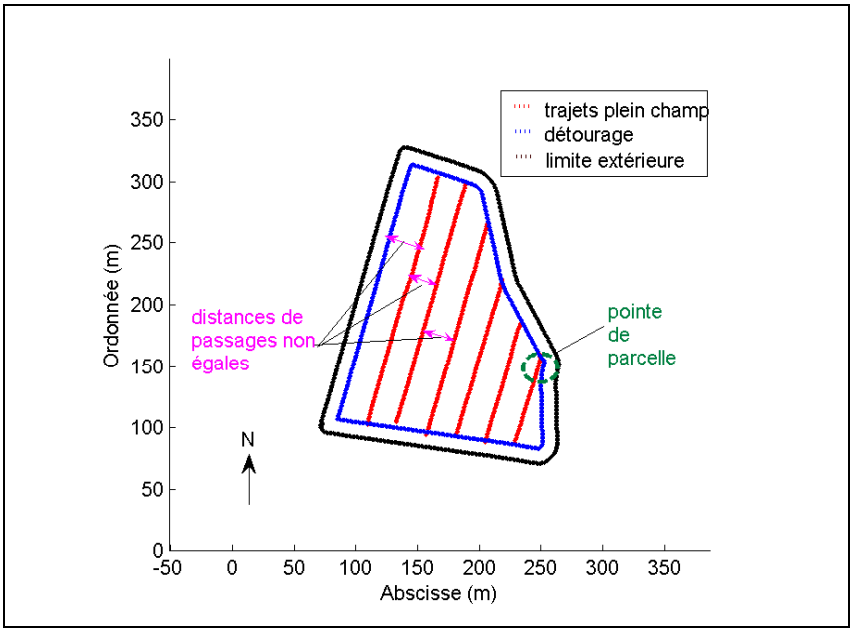



Figure 2.1 – Vue d'ensemble de la parcelle traitée.

sont alors les mêmes et valent respectivement : $D = 16$ Kg/min, $\rho = 15$ m, $\sigma_r = 2$ m et $\sigma_\varphi = 23^\circ$. En adoptant la convention de signe pour les angles apparaissant à la figure 1.7, les angles moyens à gauche et à droite du distributeur sont respectivement fixés à $\theta_g = -20^\circ$et $\theta_d = 20^\circ$. A partir de ces paramètres, il est alors possible d'évaluer la carte de défauts de fertilisation exprimés en pourcentage de la dose consigne, comme cela est le cas à la figure 2.2.

En l'occurence, les zones où les erreurs de répartition sont comprises entre -15% et +15% représentent les régions où l'épandage est dit précis conformément à la norme spécifiée à la section 1.1. Les calculs statistiques montrent alors qu'environ 20% de la surface du champ est sous-dosée et 21% surdosée. Comme prévu, des défauts de fertilisation apparaissent pour les 3 premiers passages. De même, une importante zone de surdosage, atteignant plus de 100%, est visible au niveau de la pointe de parcelle. Cette figure permet, d'autre part, de mettre en évidence l'inadéquation de la technique d'épandage de bordure. En effet, on peut observer de gros défauts au niveau des débuts et fins de trajets plein champ. Il est alors tout à fait logique d'attribuer ces derniers à des instants d'ouverture et de fermeture inappropriés.

Pour le second exemple, la modulation de dose sur une parcelle de 11 Ha, illustrée à la figure 2.3(a), est envisagée. 3 doses consignes sont considérées : 120, 210 et 300 Kg/Ha. L'ajustement des doses se fait dans ce cas uniquement par la modification du débit en appliquant la relation (1.3) avec, comme pour le premier cas de figure, une largeur de travail égale à 24 m. Aussi, pour les valeurs de doses précédentes, on obtient respectivement

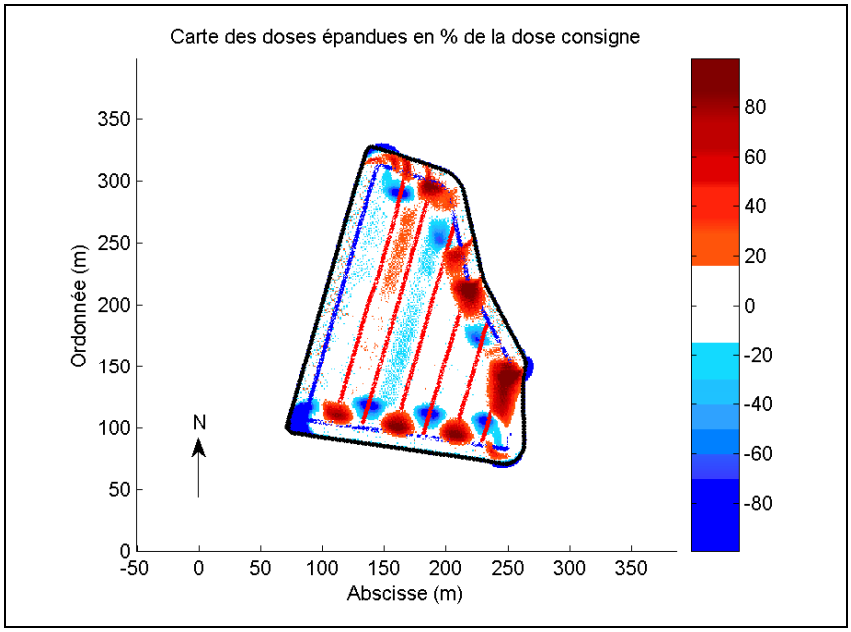
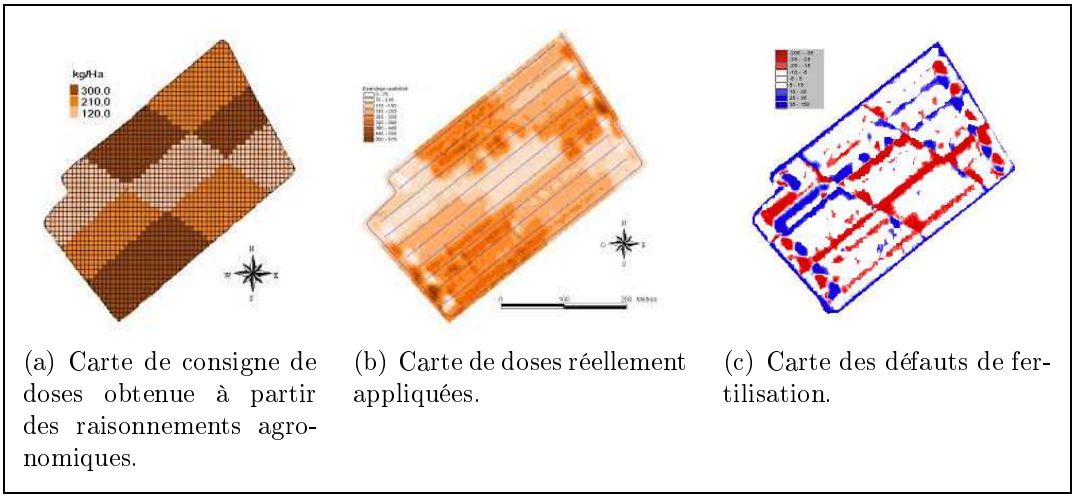



Figure 2.2 – Défauts de fertilisation avec dose consigne constante.

24, 42 et 60 Kg/min. En utilisant ces valeurs de débit et les mêmes paramètres, rayon moyen, angle moyen, écarts-types, définis pour le premier exemple, une carte de défaut est évaluée et représentée à la figure 2.3(c).



(a) Carte de consigne de doses obtenue à partir des raisonnements agronomiques.

(b) Carte de doses réellement appliquées.

(c) Carte des défauts de fertilisation.

Figure 2.3 – Défauts de fertilisation avec modulation de doses.

Comme dans le premier exemple, les régions où les erreurs adoptent des valeurs entre -15% et +15% sont affichées en blanc. On observe alors distinctement de nombreuses zones de surdosage et sous-dosage au niveau des frontières séparant des régions où les doses consignes sont différentes. Ces phénomènes traduisent alors une mauvaise estimation des instants de changements de débits. Par ailleurs, on peut également noter ici des défauts de fertilisation liés aux problèmes de débuts et fins de passages plein champ.

Les 2 exemples traités permettent de mettre en exergue l'inadéquation de la technique d'épandage appliquée en plein champ. Ils ont par la même occasion montré que les règles employées pour déterminer les débuts et fins d'épandage pour les différents trajets allers-retours sont réellement inadaptées. L'inadéquation de celles-ci vient du fait que la stratégie actuelle est basée uniquement sur une simplification de la réalité de l'épandage. En effet, à l'heure actuelle, la mise au point des réglages, en appliquant la relation (1.3), se fait en raisonnant comme-ci la quantité débitée par le distributeur était répartie de façon homogène sur une surface rectangulaire de longueur égale à la largeur de travail et de largeur égale au produit de la vitesse d'avancement et le temps entre 2 points géoréférencés. Ce raisonnement est illustrée à la figure 2.4.

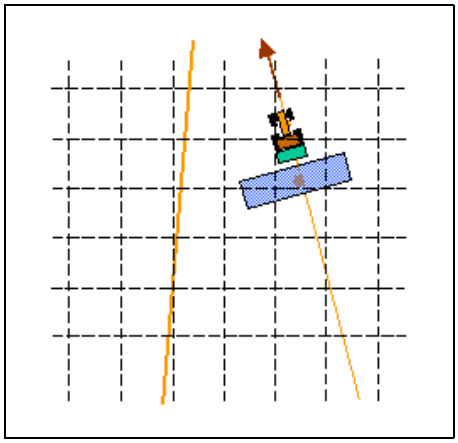


Figure 2.4 – Raisonnement basé sur la répartition homogène de la quantité débitée sur une surface rectangulaire.

Le raisonnement exposé ci-dessus est malheureusement faux car il ne tient en aucun cas compte du véritable phénomène qui se produit lors du processus d'épandage au champ : le recouvrement de nappes de répartition spatialement hétérogènes comme l'illustrent les figures 1.9 et 1.11. En effet, il est clair que la dose en tous points de la parcelle n'est pas apportée par une seule " salve " d'engrais, mais par une succession de salves d'engrais, à des instants différents et provenant de centre d'éjections différents. On comprendra alors aisément que l'absence de prise en compte du véritable phénomène qui se produit lors du processus d'épandage ait des impacts environnementaux et économiques désastreux.

Afin de lutter contre les pollutions causées par ces erreurs de fertilisation (cf. chapitre 1 section 1.1), des réglementations ont été mises en place, notamment la directive nitrate, directive européenne 91/676/CEE du 12 décembre 1991. A l'issue d'un premier programme, mis en application entre 1997 et 2000 et ayant pour but de réduire les pratiques les plus polluantes, un rapport de la commission européenne ([EUR02]) faisait apparaître 20% des eaux souterraines et entre 30 et 40% des lacs et rivières comme étant des eaux présen-

tant des concentrations trop hautes en nitrates d'origine agricole. Au vue de ce type de constat, la fertilisation est, aujourd'hui, souvent assimilée à une tâche agricole grandement polluante. Il est alors essentiel de réinstaurer la confiance sur cette opération culturale en donnant plus d'informations la concernant et surtout en optimisant les techniques employées ([Lam05]).

## 2.2 Solutions existantes

Outre les défauts inhérents aux caractéristiques des engrais, que ce soit pour les épandages uniformes ou pour les épandages à doses modulées, on peut dire que la mauvaise gestion des défauts de jalonnement, des erreurs de suivi de trajectoires, des pointes de parcelle ainsi que celle des débuts et fins de lignes d'épandage représentent les principales sources des défauts de répartition. Partant de l'hypothèse que, dans tous les cas de figure, l'imprécision de l'épandage est dûe à des recouvrements irréguliers de distribution transversale, divers auteurs se sont alors essentiellement focalisées sur des solutions étroitement liées à une meilleure gestion des trajectoires.

Les relevés GPS traduisant des trajets allers-retours non rectilignes et non régulièrement espacés peuvent être expliqués par une mauvaise appréciation des trajectoires de la part de l'agriculteur. Afin d'améliorer la précision de la conduite au cours du processus d'épandage, l'utilisation d'outils d'aides à la navigation est de plus en plus courante. Burks et ses collaborateurs ([BSF00]), ont ainsi montré les performances de ses outils en comparant les résultats obtenus sans dispositifs d'aide, en utilisant des marqueurs en mousse et en faisant appel au système de barre de guidage. Ils ont ainsi pu mettre en évidence une nette amélioration de la colinéarité des passages dans les cas où le conducteur s'appuyait sur les systèmes d'aide. Lors des essais, les meilleurs résultats de colinéarité ont été obtenus avec la barre de guidage. Cependant, avec cet outil, il faut noter que l'intervalle de passage est plus grande que la distance de consigne.

Un autre solution, faisant l'objet de nombreuses recherches, consiste à faire appel aux dispositifs de guidage automatique ([Wil00], [KS00], [RZND00], [Tor00]). Ces systèmes sont le plus souvent composés d'un capteur (mécanique, optique, GPS, vision) fournissant l'erreur de position de la machine, d'un dispositif électronique de contrôle générant les signaux de commande, et d'un actionneur (souvent un système hydraulique) modifiant la direction d'avancement du véhicule. Ces outils rendant complètement autonome le tracteur, l'agriculteur peut alors se consacrer aux réglages du distributeur si cela s'avère nécessaire.

Afin d'éviter d'écraser les cultures, les passages au sein des parcelles destinées aux

grandes cultures sont fixés une fois pour toute par les traces de roue laissées par l'appareil utilisé lors de la première opération de l'itinéraire technique : le semis (cf. Chapitre 1 section 1.1). Aussi, une stratégie reposant sur une optimisation des trajectoires n'est pas envisageable dans ce cas. Elle peut cependant être appliquée dans le cas de systèmes prairiaux destinés aux élevages où l'agriculteur ne travaille pas avec des trajectoires imposées. Ainsi, Palmer et ses collègues ([PWR03]) ont mis en oeuvre un algorithme générant automatiquement des trajectoires plein champ parallèles et régulièrement espacées de sorte que la machine parcourt la totalité du champ en un temps minimal tout en réduisant les recouvrements excessifs. Des essais ont montré alors que la quantité d'éléments appliqués en excès pouvaient être au moins réduit de 10%. D'autres études allant dans ce sens ont également été entreprises par [SBJ04] et [OKV05]. Dans ces travaux, la parcelle traitée est décomposée en sous-domaines au sein desquels est appliqué un algorithme d'optimisation permettant de déterminer les directions des trajectoires. L'optimisation des trajets a été réalisée, dans le premier cas, en considérant les sommets des sous-domaines comme les noeuds d'un graphe et en formulant le critère de la même manière que celui du problème du Facteur Chinois (CPP, en anglais Chinese Postman Problem). Pour ce qui concerne Oksanen et al., un algorithme de recherche heuristique testant les diverses solutions possibles a été utilisé pour la détermination des directions d'avancement. Afin de suivre au mieux ces passages optimaux, l'agriculteur pourra bien évidemment faire appel aux systèmes de guidage automatique. Toutefois, il faut noter que les méthodes suggérées ici, reposant sur des allers-retours parallèles plein champ optimaux, ne permettent pas de résoudre les problèmes de pointes de parcelle ainsi que des instants de début et fin d'épandage en bout de champ.

Outre le problème de suivi de trajectoire et les erreurs de jalonnement, une autre source d'erreur de répartition réside dans la détermination des instants de variation de débits pour ce qui concerne l'épandage à doses modulées. Classiquement, la modification de l'ouverture des trappes d'alimentation de la machine se fait à aux frontières délimitant les zones où les doses consignes diffèrent. Etant donné les temps de réponse des actionneurs, il est normal d'observer dans la plupart des cas un certain retard pour l'établissement d'un régime permanent. Cette analyse est confortée par les travaux de Griepentrog et Persson ([GP01]) qui ont pu montré que les distributeurs centrifuges appliquaient la bonne dose de fertilisants trop tard. Ils ont par la même occasion modéliser ce retard en fonction de la vitesse de déplacement de la machine et de la largeur de travail. Aussi, ils concluent logiquement que l'obtention d'un épandage précis passe par un ajustement optimal des réglages pour les transitions entre dose courante et nouvelle dose.

Les répartitions obtenues lors de ces phases de transition ont été modélisés empiriquement par Fulton et ses collaborateurs ([FSCH01]) comme une fonction de la distance

parcourue dans le champ à partir de l'instant où le débit est modifié. 2 modèles ont, ainsi, été élaborés selon que la dose consigne future soit supérieure ou inférieure à la dose courante recommandée. Dans le premier cas, la répartition est une sigmoïde tandis que dans le second, il s'agit d'un simple modèle linéaire. A l'aide des ces modélisations, Dillon et ses collègues ([DSFK03]) ont tenté de déterminer des trajectoires optimaux afin de limiter les erreurs de fertilisation. En utilisant le critère du problème classique du voyageur de commerce, ils ont pu, après optimisation, simulé une erreur de dosage minimale atteignant 9% en valeur absolue.

Toujours dans le cas de la modulation de dose, Persson *et al.* ([PSW03]) ont suggéré que le choix de la largeur de travail à adopter devrait être fonction de la variabilité intra-parcellaire. En effet, par le biais de simulations lancées à partir de différentes mesures de nappes de répartition, ils ont pu montré que plus grande était la variabilité dans la parcelle, plus petite devait être la largeur de travail. Ainsi, en testant des largeurs de travail adoptant des valeurs incluses entre 12 et 14 m sur champ où les prescriptions de doses variaient de 340 à 480 Kg/Ha, ils ont abouti à une erreur minimale de 22.4 % (en valeur absolue).

Dans le but de mieux répondre aux objectifs de fertilisation, une nouvelle solution basée sur l'ajustement en continu des réglages de l'appareil a été mise en oeuvre par le constructeur allemand AMAZONE. Cependant, nous n'en connaissons toujours pas les performances à ce jour.

Aussi, on peut dire que l'ensemble des solutions connues à l'heure actuelle permettent de mieux gérer les erreurs de jalonnement ainsi que le manque de précision au niveau de la conduite de l'engin agricole. Cependant, elles ne traitent en aucun cas les problèmes engendrés par les pointes de parcelle et les débuts et fins d'épandage en bout de champ. Toutes ces solutions sont récapitulées dans le tableau 2.1.

Afin de résoudre les cas où aucune solution n'a été apportée (cases cochées dans le tableau précédent), il convient alors de se pencher sur une étude, prônée par Olieslagers et ses collègues ([ORB96], [ORB97]), ayant pour objectif d'évaluer les réglages adéquats à réaliser sur la machine au cours du processus d'épandage.

## 2.3 Spécificité de l'étude

Aujourd'hui, les méthodes suggérées pour améliorer la gestion des trajectoires dans la parcelle ne permettent de résoudre le problème de répartition qu'en partie. Ainsi, dans de nombreux cas, il est impossible de modifier les passages plein champ et la stratégie faisant appel à l'aide au guidage ne peut alors réduire efficacement les sous et surdosages

| type de parcelle / source d'erreur | grandes cultures | élevage |
|---|---|---|
| jalonnement | × | optimisation des trajectoires + aide au guidage |
| suivi de trajectoire | aide au guidage | aide au guidage |
| variation de doses | × | optimisation des trajectoires + aide au guidage |
| pointe de parcelle | × | × |
| débuts et fins d'épandage | × | × |

Tableau 2.1 – Solutions existantes pour la réduction des défauts de fertilisation.

observés en appliquant la procédure classique d'épandage. L'ajustement en continu des réglages de l'appareil apparaît donc comme une solution idéale. Les recouvrements des distributions transversales ne traduisant pas la réalité de l'épandage (cf. section 2.1), cet ajustement devra alors se faire en tenant compte cette fois-ci du recouvrement des nappes de répartition spatialement hétérogènes. Afin d'aboutir à un épandage précis, il est par conséquent important de savoir comment arranger de manière optimale les formes et les placements de ces nappes en présence de trajectoires imposées.

L'objectif de ce travail est alors de déterminer une combinaison de paramètres permettant de minimiser les défauts de fertilisation. Dans cette thèse, nous nous orientons vers une approche mathématique permettant un arrangement optimal des nappes d'épandage. Nos efforts porteront alors vers la résolution d'un problème d'optimisation traduisant l'erreur sur la précision d'épandage. Le calcul des solutions peut alors se faire hors ligne à partir des relevés GPS des trajectoires qui auront été effectués au préalable. Le modèle de Colin (1.1) étant facilement implémentable, le choix se porte par conséquent tout naturellement sur ce dernier pour la modélisation de la répartition spatiale. Comme nous le verrons dans les chapitres suivants, l'objectif sera de déterminer des fonctions dépendantes du temps (débit, rayon moyen, angle moyen) minimisant différentes fonctionnelles selon la phase d'épandage traitée (épandage plein champ ou épandage de bordure). Cet objectif est illustré à la figure 2.5.

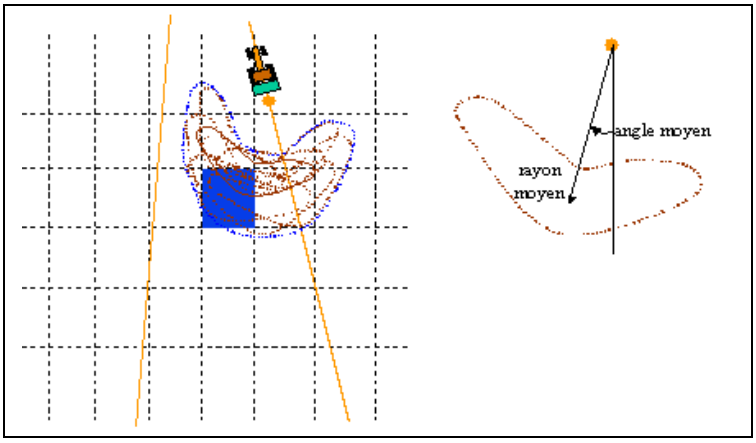



Figure 2.5 – Objectif de l'optimisation : détermination des paramètres optimaux (débit, rayon moyen, angle moyen) en chaque position occupée par le distributeur dans la parcelle.

Afin de tenir compte des limites mécaniques du distributeur, des contraintes doivent être introduites. Ainsi, les paramètres de décision doivent être bornés. D'autre part, afin de tenir compte de la dynamique des actionneurs, les dérivées instantanées des fonctions recherchées sont, également, soumises à des contraintes de bornes. A l'issue de l'optimisation, les grandeurs recherchées constitueront 3 séquences de consignes optimales à présenter en entrée du système (épandeur). Sachant que de ces dernières il est facile, à partir de résultats d'essais au banc, de déduire les valeurs de la vitesse de rotation des disques ainsi que du point de chute des granulés d'engrais, une commande en boucle ouverte pourra directement être appliquée. A la suite d'études futures plus poussées concernant le contrôle du système, il pourra être envisagé d'élaborer une loi de commande en boucle fermée. Une vue d'ensemble de l'étude à mener est synthétisée à travers le schéma 2.6.

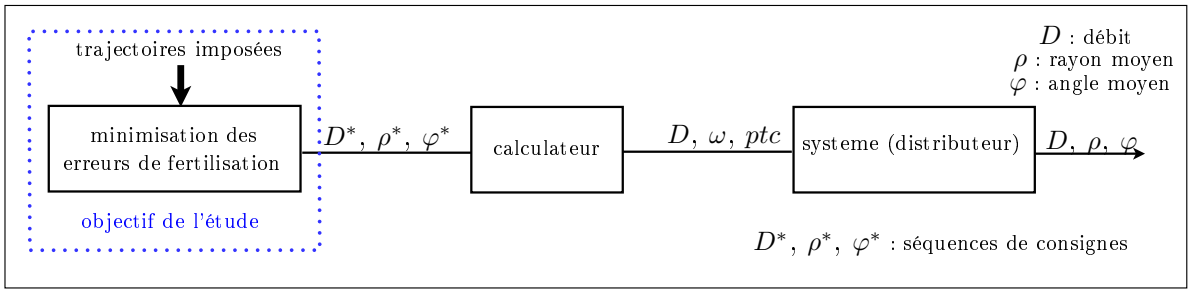



Figure 2.6 – Représentation schématique de l'objectif de l'étude.

## 2.4 Conclusion

A travers ce chapitre, l'inadéquation de la stratégie d'épandage a tout d'abord été mise en exergue. Ainsi, par le biais de simulations numériques du processus réalisées en implé-

mentant un modèle mathématique de la nappe, nous avons pu construire des cartes de rendement et ainsi mettre en relief d'importantes dégradations des répartitions de dose. Comme prévu au chapitre précédent, nous avons pu constater que les paramètres mécaniques du distributeur demeurant constants durant toute l'opération, les espacements irréguliers des passages plein champ, les mauvais suivis de trajectoires ainsi que les pointes de parcelle génèrent automatiquement des défauts de fertilisation souvent très significatifs. Outre ces sources d'erreurs inhérentes aux singularités géométriques présentées par le champ, il a été possible de vérifier que les instants d'ouverture et de fermeture des trappes d'alimentation de l'appareil en bout de parcelle lors de l'épandage en plein champ s'avéraient totalement inappropriés. En effet, à l'issue de l'application d'engrais lors du passage du distributeur sur la ligne de détourage, une succession de régions sur et sous-fertilisées sont généralement observées au niveau des zones de bordure. Par ailleurs, dans le cas de figure où la dose prescrite varie au sein de la parcelle, des erreurs de répartition inévitablement engendrées par les ajustements brusques du débit intervenant à des instants inadaptés sont également mises en avant.

Les diverses stratégies qui ont été envisagées afin de remédier à ces défauts, dans des travaux antérieurs, ont été par ailleurs exposées. Celles-ci, élaborées de manière à obtenir un recouvrement correct des distributions transversales, reposent essentiellement sur des techniques permettant une meilleure gestion des trajectoires. Elles s'articulent alors autour de deux axes de recherche principaux :

- conception d'outils efficaces d'aide à la conduite visant à la réduction des erreurs de suivi de trajectoire ;
- développement d'algorithmes d'optimisation dans le but de générer des trajectoires régulièrement espacées et rigoureusement parallèles.

Par le biais de simulations numériques et d'expérimentations, les différentes études ont pu montrer que la première approche pouvait convenir pour limiter les défauts de répartition amenés par une mauvaise appréciation des trajectoires de la part du conducteur du tracteur. Dans le cas de la fertilisation de systèmes prairiaux où les passages ne sont pas fixés, cette stratégie peut être associée à la deuxième afin de minimiser les irrégularités d'épandage dûes à un jalonnement imparfait et/ou une mauvaise estimation des instants de changements de débit pour la modulation de doses. Malheureusement, cette combinaison des différentes approches ne peut être appliquée en zone de grandes cultures où l'ensemble des trajectoires sont imposées une fois pour toute par l'opération du semis. D'autre part, les solutions proposées, ne prenant en aucun cas compte des recouvrements des nappes de répartition spatialement hétérogènes, sont totalement inappropriées non seulement pour la gestion des débuts et fins d'épandage en plein champ mais aussi pour celle des pointes de parcelle. A partir de ces observations, des investigations concernant

une stratégie d'ajustements en continu des paramètres mécaniques de l'appareil en tenant compte de la réalité du phénomène d'épandage semblent alors nécessaires.

Par la suite, nous nous consacrerons à l'élaboration de méthodes de recherche de réglages permettant un agencement optimal des nappes de répartition conduisant à un épandage régulier au sein de parcelles présentant ou non des singularités géométriques. Les approches suggérées précédemment étant très inefficaces lorsque les passages sont imposés et ne peuvent être modifiés, nous nous intéresserons plus particulièrement à l'épandage en zones de grandes cultures. Aussi, une hypothèse forte de travail est de considérer que l'opération de fertilisation s'effectue avec des trajectoires subies pouvant être connues à l'avance par l'intermédiaire de relevés GPS. La vitesse de déplacement de l'appareil, subissant de faibles fluctuations au cours du processus et pouvant être régulée par l'intermédiaire des systèmes de guidage automatique, sera considérée constante. Les réglages de l'épandeur ne pouvant être déterminés de manière simple afin de réduire les défauts de fertilisation, nous nous proposons d'adopter dans cette thèse des approches reposant sur des méthodes d'optimisation mathématique. Le modèle de nappe de répartition proposé par Colin ([Col97]), étant une fonction de variables directement liées aux paramètres mécaniques du distributeur, pourra être exploité en formalisant des fonctions coûts traduisant les erreurs de répartition des fertilisants. En introduisant des contraintes reflétant les limites dynamiques et mécaniques de l'appareil, les solutions optimales pourront constituer des séquences de consignes applicables en entrée du système pouvant être facilement commandé en boucle ouverte. L'ensemble des stratégies envisagées dans ce travail de thèse faisant appel à la minimisation de critères d'optimisation, il est nécessaire d'appréhender les méthodes d'usage dans ce domaine.

# Chapitre 3

# Méthodes d'optimisation

Comme exposé au chapitre précédent, dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse particulièrement à la mise au point de consignes par optimisation mathématique. Toutefois, la théorie de l'optimisation est un domaine très vaste et pour choisir une méthode adaptée au problème auquel on s'intéresse, quelques réflexions s'imposent. En effet, après avoir déterminé les variables de décision ainsi que les contraintes du problème, il est important de s'interroger sur les propriétés de la fonction objectif afin de savoir si le problème traité se rapproche de problèmes connus. Ainsi, la convexité de la fonction coût, la dimension du problème ainsi que le type de contraintes permettent de guider l'optimiseur sur la ou les méthodes appropriées.

Nous décrivons dans ce qui suit les méthodes auxquelles on fait le plus couramment appel en optimisation. Après avoir exposé, dans un premier temps, les stratégies adaptées aux problèmes sans contraintes, nous examinons les méthodes utilisées dans le cas où la fonction coût est soumise à des contraintes. Notre objectif étant de déterminer des consignes satisfaisant un certain critère d'optimisation, consistant ici à la réduction des défauts de fertilisation, le problème considéré présente alors de fortes similitudes avec un problème de contrôle optimal. Aussi, dans la dernière partie, nous nous intéressons à la théorie liée à ce type de problème fréquemment rencontré dans le domaine de l'automatique.

## 3.1 Problèmes sans contraintes

Bien que les problèmes d'optimisation sans contraintes sont rencontrés peu fréquemment dans la pratique, l'étude des méthodes utilisées dans ces cas est essentielle afin d'appréhender celles auxquelles on fait appel dans le cas avec contraintes. Les problèmes d'optimisation sans contraintes de dimension $n$ consistent à déterminer une solution $x^* \in \mathbb{R}^n$ au problème suivant

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.1}$$

Un résultat d'existence est donné par le théorème suivant :

**Théorème 3.1.1** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$. Si*

$$\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = \infty$$

*alors $(\mathcal{P})$ admet une solution optimale $x^*$.*

Le point $x^*$ est appelé minimum local lorsqu'il existe un voisinage de $x^*$ noté $V(x^*)$ tel que

$$f(x^*) \leq f(x), \ \forall x \in V(x^*). \tag{3.2}$$

C'est un minimum global lorsqu'il vérifie

$$f(x^*) \leq f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

Posons $\nabla f(x)$ et $H(x) = \nabla^2 f(x)$ respectivement le gradient et la matrice hessienne de f au point $x$. Une condition nécessaire pour que $x^*$ soit un minimum local du problème est alors donnée par Fletcher ([Fle87])

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) = 0 \\ H(x^*) \text{ est semi-définie positive} \end{cases} \tag{3.4}$$

Une condition suffisante pour que $x^*$ soit une solution du problème apparaît ci-après : ([Fle87])

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) = 0 \\ H(x^*) \text{ est définie positive} \end{cases} \tag{3.5}$$

Les méthodes les plus employées pour la détermination d'un minimum local sont celles d'ordre zéro ([NM65]), d'ordre un (Gradient) et d'ordre 2 (Newton, BFGS, L-BFGS), le numéro d'ordre désignant le niveau de dérivabilité de la fonction coût utilisée dans la stratégie d'optimisation.

### 3.1.1 Algorithme du simplexe

Cette méthode ne nécessite pas de calcul de gradient ou de hessien et n'utilise que pour seule information les valeurs de la fonction coût en certains points de l'espace de recherche, les sommets d'un simplexe. Le simplexe est une figure géométrique de dimension $n$, créée à partir de $n+1$ points, où chaque dimension correspond à une variable du problème à optimiser. Ainsi, en dimension 2 , le simplexe est représenté par un triangle. Le principe de cette méthode consiste à déplacer ce dernier vers la région optimale en remplaçant itérativement le plus mauvais point. Pour ce faire, 3 transformations sont utilisées : la réflexion, la contraction et l'expansion. Généralement, l'algorithme suivant est mis en oeuvre :

**Algorithme :**

**Etape 0** : Soit $\epsilon > 0$. Soit un simplexe : $x_0, x_1, ..x_n$. $x_{min}$, le point du simplexe où $f$ est minimale $f(x_{min}) = f_{min}$ ; $x_{max}$ celui où elle est maximale $f(x_{max}) = f_{max}$ ; $x_p$ celui où elle prend sa 2ème plus grande valeur $f(x_p) = f_p$ ; $b$ barycentre des points $x_j$ pour $j \neq max$

**Etape 1** : Reflexion : $x_r = b + \alpha(b - x_{max})$ avec $\alpha > 0$, $f(x_r) = f_r$.

Si $f_{min} < f_r < f_p$, $x_{max} \leftarrow x_r$. Aller à l'**Etape 2**.

Si $f_r < f_{min}$, Expansion : $x_e = b + \beta(x_r - b)$ avec $\beta > 0$, $f(x_e) = f_e$.

Si $f_e < f_r$, $x_{max} \leftarrow x_e$. Aller à l'**Etape 2**.

Sinon $x_{max} \leftarrow x_r$. Aller à l'**Etape 2**.

Si $f_p < f_r < f_{max}$, Contraction : $x_c = b + \gamma(b - x_{max})$ avec $0 < \gamma < 1$, $f(x_c) = f_c$.

Si $f_c \leq f_{max}$, $x_{max} \leftarrow x_c$. Aller à l'**Etape 2**.

Sinon $xj = x_{min} + 0.5(x_{min} - xj)$. Aller à l'**Etape 2**.

**Etape 2** : Si $\sqrt{\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left(f_{x_j} - f(b)\right)^2\right)} < \epsilon$, Stop.

Sinon réordonner les points. Retourner à l'**Etape 1**.

La convergence de cette méthode risque d'être très lente car la recherche n'est pas orientée. Toutefois, il faut noter qu'elle implique des calculs extrêmement simples et rapides et peut donc être efficace dans les cas où l'évaluation du gradient ou du hessien est coûteuse. Les méthodes basées sur ces calculs, communément appelées méthodes de descente, sont rappelées ci-après.

### 3.1.2 Méthodes de descente

Les techniques de descente constituent des méthodes itératives permettant de générer une suite de points $x_0$, $x_1, \ldots, x_k$ qui converge vers un minimum local de la fonction

coût. A chaque étape $k$, $x_{k+1}$ est donné par : $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$ où $t_k > 0$ est un pas de déplacement et $d_k$ une direction de descente, i.e. $\nabla f(x_k)^\mathsf{T} d_k < 0$. Aussi, l'algorithme, caractérisant ces méthodes, consiste à faire les itérations suivantes :

**Algorithme :**
**Etape 0** : $k \leftarrow 0$. Initialisation de $x_0$.
**Etape 1** : calcul de $d_k$ tel que $\nabla f(x_k)^\mathsf{T} d_k < 0$
**Etape 2** : $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$
**Etape 3** : Si le critère d'arrêt est vérifié, STOP.
Sinon retourner à l'**Etape 1**.

**Remarque :**

Le test d'arrêt apparaissant à l'**Etape 2** peut être de plusieurs types. Les plus utilisés sont les suivants :

- Critère 1 : $||\nabla f(x_k)||_2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_k)\right)^2 < \epsilon_1$ ($\epsilon_1 > 0$ donné)
- Critère 2 : $|f(x_k) - f(x_{k-1})| < \epsilon_2$ ($\epsilon_2 > 0$ donné)
- Critère 3 : arrêt après un nombre d'itérations fixé

Comme on peut le voir, les calculs du pas $t_k$ et de la direction $d_k$ constituent des points cruciaux assurant la convergence de l'algorithme.

Le pas $t_k$ est déterminé de sorte qu'il fasse décroître $f$ suffisamment le long de $d_k$. Aussi, le pas de déplacement est choisi tel que

$$t_k = \arg\min_{t>0} f(x_k + t d_k).$$

La détermination de $t_k$ par résolution de ce problème d'optimisation, dite recherche linéaire exacte, est cependant très peu employée dans la pratique du fait du nombre élevé d'évaluation de la fonction et du gradient pouvant être engendré. Aussi, on préfère le plus souvent faire appel à une recherche linéaire inexacte permettant de contrôler le pas tel qu'il vérifie certaines conditions. La réalisation de la condition suivante (condition d'Armijo) assure une décroissance suffisante de la fonction coût

$$f(x_k + t_k d_k) \leq f(x_k) + \omega_1 t_k \nabla f(x_k)^\mathsf{T} d_k, \tag{3.6}$$

où $\omega_1 \in ]0, 1[$. Afin d'éviter que le pas soit trop proche de zéro, une condition supplémentaire est ajoutée (condition de Wolfe)

$$\nabla f(x_k + t_k d_k)^\mathsf{T} d_k \geq \omega_2 \nabla f(x_k)^\mathsf{T} d_k, \tag{3.7}$$

ou la condition de Goldstein

$$\nabla f(x_k + t_k d_k)^\mathsf{T} d_k \geq f(x_k) + \omega_2 t_k \nabla f(x_k)^\mathsf{T} d_k, \tag{3.8}$$

avec $0 < \omega_1 < \omega_2 < 1$. Les algorithmes utilisés pour effectuer la recherche linéaire inexacte sont détaillés en annexe (Annexe A).

Pour ce qui concerne le calcul de la direction de descente, il s'appuie essentiellement sur l'évaluation du gradient ou de la matrice hessienne de la fonction objectif selon la méthode employée. Dans ce qui suit, afin d'expliciter ces diverses méthodes, nous utiliserons les notations suivantes

$$g_k = \nabla f(x_k),$$
$$H_k = \nabla^2 f(x_k).$$

#### 3.1.2.1 Méthode du gradient

Cette méthode, plus communément appelée Méthode de la plus grande pente, est une méthode de référence pour la résolution de problèmes d'optimisation sans contraintes. Elle s'appuie sur le fait que la direction opposée à celle du gradient constitue une direction de descente. Ainsi, dans cet algorithme, la direction de recherche est définie par

$$d_k = -g_k. \tag{3.9}$$

Bien qu'elle soit très facile à mettre en oeuvre, cette méthode est à éviter. En effet, l'algorithme converge très lentement du fait de la non prise en compte de la courbure de $f$ évaluée par le hessien.

#### 3.1.2.2 Méthode du gradient conjugué

Initialement utilisée pour l'optimisation de fonctions quadratiques, cette technique s'est peu à peu étendue aux fonctions quelconques. En l'occurence, à chaque itération $k$, la direction de descente est donnée par

$$d_k = \begin{cases} -g_0 \text{ si } k = 0 \\ -g_k + \beta_k d_{k-1} \text{ si } k \geq 1 \end{cases} \tag{3.10}$$

Le coefficient $\beta_k$ peut être calculé de plusieurs manières différentes. Les plus utilisées sont :

– Polak-Ribière ([PR69]) :

$$\beta_k = \frac{{g_k}^{\mathsf{T}}(g_k - g_{k-1})}{||g_{k-1}||^2}, \tag{3.11}$$

– Fletcher-Reeves ([FR64]) :

$$\beta_k = \frac{||g_k||^2}{||g_{k-1}||^2}. \tag{3.12}$$

La convergence globale des 2 versions (Fletcher-Reeves et Polak-Ribière) n'est assurée que si l'on effectue une réinitialisation de l'algorithme de manière périodique. On peut fixer ce redémarrage arbitrairement toutes les $n+1$ itérations en initialisant à nouveau la direction de descente avec $d_0 = -g_{n+1}$ ([FR64]). On peut également redémarrer lorsque la condition suivante n'est plus satisfaite ([Pow77])

$$\frac{{g_k}^{\mathsf{T}} d_k}{||g_k||||d_k||} \leq -\alpha, \tag{3.13}$$

avec $0 < \alpha < 1$.

Il faut noter que cette méthode ne stocke que très peu d'informations au cours des itérations et converge beaucoup plus rapidement que la méthode de la plus grande pente. Aussi, elle constitue l'une des méthodes les plus populaires pour la résolution de problèmes de grandes tailles.

#### 3.1.2.3 Méthode de Newton

L'idée de base de cette technique consiste à déterminer la direction de recherche en appliquant la méthode de Newton à la résolution du système d'équations $\nabla f(x) = 0$. Aussi, à chaque itération, $d_k$ est la solution de l'équation suivante

$$H_k d_k = -g_k, \tag{3.14}$$

où $d_k$ représente effectivement une direction de descente lorsque le hessien $H_k$ est défini positif. Par conséquent, si à l'itération $k$, $x_k$ est suffisamment proche d'un minimum local $x^*$, alors l'algorithme converge quadratiquement vers $x^*$ ([Fle87]). Cependant, pour des problèmes non linéaires généraux, la définie positivité du hessien peut ne pas être vérifiée lorsque $x$ se trouve éloigné de la solution. Dans ce cas, l'algorithme ne converge pas. Afin de pallier à ce problème, différentes techniques existent telles que l'approche basée sur les régions de confiance ([Ste83]) ou la méthode de Newton tronquée ([DS83]). Grâce à ces algorithmes, le problème de convergence de la méthode de Newton peut être résolu. Toutefois, cet algorithme présente le gros inconvénient de la nécessité du calcul du hessien connu pour être très coûteux. Pour ne pas être confronté à des temps d'exécution trop

importants, on peut alors faire appel aux méthodes de quasi-Newton.

#### 3.1.2.4 Méthodes quasi-Newtoniennes

Afin d'éviter le calcul des dérivées secondes de la fonction objectif, cette approche consiste à approximer le hessien par une matrice $M_k$ mise à jour à chaque itération en prenant en compte la courbure de $f$. Cette dernière est construite à partir de la relation de récurrence $M_{k+1} = M_k + A_k$ où $A_k$ est une matrice symétrique permettant de vérifier les conditions suivantes :

**(i)** l'équation sécante $M_{k+1}(x_{k+1} - x_k) = g_{k+1} - g_k$ est satisfaite pour tout $k$,

**(ii)** $M_{k+1}$ est symétrique définie positive.

Il existe diverses techniques de mises à jour ([Fle87], [Dav91], [FP63]) mais depuis les années 70, la méthode la plus utilisée satisfaisant les conditions **(i)-(ii)** est sans conteste celle de BFGS ([Bro67], [Fle70], [Gol70], [Sha70]). Cette dernière, considérée comme la plus efficace, permet d'approximer l'inverse du hessien comme ci-après

$$M_{k+1} = M_k - \frac{M_k y_k {y_k}^\mathsf{T} M_k}{{y_k}^\mathsf{T} M_k y_k} + \frac{s_k {s_k}^\mathsf{T}}{{s_k}^\mathsf{T} y_k}, \tag{3.15}$$

avec

$$s_k = x_{k+1} - x_k,$$
$$y_k = g_{k+1} - g_k.$$

Le plus souvent, la formule (3.15) est mise sous une forme numériquement plus stable donnée par

$$M_{k+1} = \left(I_n - \frac{s_k {y_k}^\mathsf{T}}{{y_k}^\mathsf{T} s_k}\right) M_k \left(I_n - \frac{y_k {s_k}^\mathsf{T}}{{y_k}^\mathsf{T} s_k}\right) + \frac{s_k {s_k}^\mathsf{T}}{{y_k}^\mathsf{T} s_k}. \tag{3.16}$$

Au cours des itérations, on peut noter que la définie positivité du hessien est assurée lorsque la condition suivante est vérifiée

$${y_k}^\mathsf{T} s_k > 0. \tag{3.17}$$

La méthode BFGS est alors tout à fait applicable lorsque la recherche linéaire inexacte se fait selon les règles de Goldstein ou de Wolfe connues pour permettre de satisfaire (3.17).

Il faut également noter que cette méthode est adaptée à des problèmes de grandes tailles où la fonction objectif peut se décomposer comme une somme de fonctions avec peu de paramètres. Néanmoins, cette propriété est souvent difficile à vérifier. Aussi, on préfère de loin utiliser des méthodes à mémoire limitée.

#### 3.1.2.5 Méthode à mémoire limitée : LBFGS ([Noc80, LN89, BNS94])

Pour les problèmes de grande taille, la méthode classique BFGS exposée précédemment peut s'avérer rapidement inefficace. En effet, à chaque itération, cette technique nécessite le stockage de $n(n+1)/2$ informations, ce qui peut causer une occupation trop importante de l'espace mémoire lorsque $n$ devient très grand. Aussi, au lieu de stocker les matrices $M_k$, la méthode à mémoire limitée BFGS (LBFGS) permet d'approximer le hessien ou son inverse en ne stockant qu'un nombre limité $m$ de paires de vecteurs $\{s_i, y_i\}$. La mise à jour de l'inverse du hessien se fait alors selon la procédure suivante :

Pour $k+1 \leq m$, mise à jour selon la procédure classique BFGS

$$\begin{aligned} M_{k+1} = {} & {v_k}^\mathsf{T} {v_{k-1}}^\mathsf{T} \cdots {v_0}^\mathsf{T} M_0 v_0 \cdots v_{k-1} v_k \\ & + {v_k}^\mathsf{T} \cdots {v_1}^\mathsf{T} \rho_0 s_0 {s_0}^\mathsf{T} v_1 \cdots v_k \\ & \vdots \\ & + {v_k}^\mathsf{T} {v_{k-1}}^\mathsf{T} \rho_{k-2} s_{k-2} {s_{k-2}}^\mathsf{T} v_{k-1} v_k \\ & + {v_k}^\mathsf{T} \rho_{k-1} s_{k-1} {s_{k-1}}^\mathsf{T} v_k \\ & + \rho_k s_k {s_k}^\mathsf{T}. \end{aligned}$$

Pour $k+1 > m$, mise à jour spéciale :

$$\begin{aligned} M_{k+1} = {} & {v_k}^\mathsf{T} {v_{k-1}}^\mathsf{T} \cdots {v_{k-m+1}}^\mathsf{T} M_0 v_{k-m+1} \cdots v_{k-1} v_k \\ & + {v_k}^\mathsf{T} \cdots {v_{k-m+2}}^\mathsf{T} \rho_{k-m+1} s_{k-m+1} {s_{k-m+1}}^\mathsf{T} v_{k-m+2} \cdots v_k \\ & \vdots \\ & + {v_k}^\mathsf{T} \rho_{k-1} s_{k-1} {s_{k-1}}^\mathsf{T} v_k \\ & + \rho_k s_k {s_k}^\mathsf{T} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \rho_k = 1/{y_k}^\mathsf{T} s_k \text{ et } v_k = (I_n - \rho_k y_k {s_k}^\mathsf{T}).$$

Comme on peut le voir, pendant les $m$ premières itérations cette méthode est semblable à la méthode BFGS. Lorsque $k > m$, la mise à jour se fait en éliminant la paire de vecteurs la plus ancienne et en la remplaçant par celle calculée au point courant.

En pratique, lorsque $m$ adopte des petites valeurs ($3 \leq m \leq 7$), on montre que cette stratégie est particulièrement bien adaptée aux problèmes de grande taille . Afin de calculer efficacement la direction de descente, une formule récursive facilement programmable due à Matthies et Strang ([MS79]) est couramment utilisée. Ainsi, le produit $M_k g_k$ est évalué en appliquant l'algorithme ci-après :

**Algorithme :**

**Etape 0** : Si $k \leq m$ $iter = 0$, $bo = k$, $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$
Sinon $iter = k - m$, $bo = m$.

**Etape 1** : $q_{bo} = g_k$.

**Etape 2** : Pour $i = (bo - 1), ..., 0$
$j = i + iter$
$\alpha_i = \rho_j {s_j}^{\mathsf{T}} q_{i+1}$
$q_i = q_{i+1} - \alpha_i y_i$
$r_0 = M_0.q_0$
Pour $i = 0, 1, ..., (bo - 1)$
$j = i + iter$
$\beta_j = \rho_j {y_j}^{\mathsf{T}} r_i$
$r_{i+1} = r_i + s_j(\alpha_i - \beta_i)$

La matrice $M_0$ est une matrice de mise à l'échelle pouvant être égale à la matrice identité. Cependant, afin d'augmenter les performances de l'algorithme, on préfère en général la remplacer par la matrice $M_k^{(0)}$ donnée par

$$M_k^{(0)} = \gamma_k M_0, \tag{3.18}$$

où $\gamma_k = {y_k}^{\mathsf{T}} s_k / ||y_k||^2$.

## 3.2 Problèmes sous contraintes

Les problèmes sous contraintes peuvent se formuler de la manière suivante :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \min f(x) \\ x \in K \subset \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.19}$$

Le théorème suivant donne un résultat d'existence :

**Théorème 3.2.1** *Soit $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $K$ et si de plus $K$ est un ensemble fermé et borné, alors le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution optimale $x^*$.*

L'unicité de la solution résulte de la convexité de $f$ et de $K$ :

**Théorème 3.2.2** *Soit $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strictement convexe sur $K$ convexe. Le minimum de $f$ sur $K$, s'il existe, est unique.*

Nous nous intéressons ici à des problèmes pouvant présenter des contraintes d'égalité, d'inégalités simples ainsi que de doubles inégalités. De manière générale, ce type de problème se formule de la manière suivante :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \min f(x) \\ h_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, ..., m_h \\ g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, ..., m_g \\ l_i \leq c_i(x) \leq u_i \quad i = 1, 2, ..., m_c \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.20}$$

où les fonctions de contraintes $h_i$, $g_i$, $c_i$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $l$ et $u$ dans $\mathbb{R}^n$ désignent respectivement les vecteurs de bornes inférieures et supérieures.

Il existe diverses méthodes qui permettent de résoudre $(\mathcal{P})$. Certaines sont essentiellement utilisées dans le cas où les contraintes sont linéaires (méthode des surfaces actives, méthode du gradient projeté). D'autres sont privilégiées lorsque les contraintes sont non linéaires (programmation quadratique séquentielle). Dans cette partie, nous nous consacrerons à la description d'algorithmes majoritairement utilisés pour traiter indifféremment les deux types de contraintes (linéaires ou non) : méthode des pénalités, du Lagrangien augmenté et des points intérieurs.

### 3.2.1 Méthodes de pénalités

Ces méthodes consistent à remplacer la résolution du problème avec contraintes $(\mathcal{P})$ par une suite de résolutions de problèmes sans contraintes. Cette opération est effectuée en introduisant dans la fonction coût un terme de pénalisation de chaque contrainte.

Dans un premier temps, considérons le problème avec contraintes d'égalité suivant :

$$(\mathcal{P}_e) \qquad \begin{cases} \min f(x) \\ h(x) = 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.21}$$

où $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_h}$.

Afin de déterminer une solution approchée de $(\mathcal{P}_e)$, l'idée consiste à résoudre la suite de problèmes $\{\mathcal{P}_j\}$ définis comme suit

$$(\mathcal{P}_j) \qquad \begin{cases} \min f_{r^j}(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.22}$$

avec

$$f_{r^j}(x) = f(x) + \frac{r^j}{2}||h(x)||^2, \tag{3.23}$$

où $r^j$ est une suite de coefficient de pénalité qui doit vérifier

$$0 < r^j < r^{j+1} \qquad \forall j,\ r^j \to \infty, \tag{3.24}$$

afin d'assurer la convergence de l'algorithme.

La méthode des pénalités permet également d'approcher les solutions des problèmes faisant intervenir des contraintes d'inégalités simples tels que $(\mathcal{P}_i)$ donné par

$$(\mathcal{P}_i) \qquad \begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, ..., m_g \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.25}$$

Pour ce faire, on résout de la même manière que précédemment une suite de problèmes $\{\mathcal{P}_j\}$ en considérant cette fois-ci

$$f_{r^j}(x) = f(x) + \frac{1}{r^j}\varphi(x), \tag{3.26}$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m_g} \left[\max(0, g_i(x))\right]^2. \tag{3.27}$$

où $r^j$ est la suite de coefficient de pénalité qui doit vérifier

$$0 < r^{j+1} < r^j \qquad \forall j,\ r^j \to 0. \tag{3.28}$$

En appliquant cette procédure, il est également possible de calculer une solution d'un problème avec contraintes de doubles inégalités $(\mathcal{P}_d)$ défini par

$$(\mathcal{P}_d) \qquad \begin{cases} \min f(x) \\ l_i \leq c_i(x) \leq u_i \quad i = 1, 2, ..., m_c \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.29}$$

en le réécrivant comme un problème présentant des contraintes de simples inégalités $(\mathcal{P}_d^{'})$ donné par :

$$(\mathcal{P}_d^{'}) \qquad \begin{cases} \min f(x) \\ c_i(x) - u_i \leq 0 \quad i = 1, 2, ..., m_c \\ l_i - c_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, ..., m_c \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.30}$$

Les méthodes exposées précédemment sont souvent appelées méthodes de pénalités

extérieures car elles pénalisent la violation de contraintes. Par ailleurs, les solutions calculées au cours des itérations ne sont pas toujours réalisables ce qui peut présenter un inconvénient si l'algorithme ne converge pas. De plus, ce type de méthodes ne conviennent pas dans le cas où la fonction coût n'est pas défini à l'extérieur du domaine de solutions acceptables. Dans ce cas, d'autres techniques, dites méthodes de pénalités intérieures, pénalisant l'abord de la frontière du domaine admissible peuvent être utilisées.

Ainsi, si l'on considère $(\mathcal{P}_i)$, la fonction coût $f$ est modifiée en rajoutant l'une des fonctions de pénalisation suivante appelées couramment fonctions barrières

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{m_g} \frac{1}{g_i(x)^2}, \tag{3.31}$$

$$\text{ou} \quad \psi(x) = -\sum_{i=1}^{m_g} \ln g_i(x). \tag{3.32}$$

Ici, (3.31)-(3.32) traduisent bien le fait que si $x$ s'approche de la limite de l'espace réalisable, la fonction tend vers l'infini. Dans ce cas, la suite de problèmes à considérer est donné par

$$(\mathcal{P}_j) \qquad \begin{cases} \min f(x) + r^j \psi(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.33}$$

Contrairement à la méthode des pénalités extérieures, pendant l'exécution de l'algorithme, les solutions trouvées sont dans le domaine réalisable mais, il faut disposer d'un point initial qui soit dans ce domaine, ce qui n'est pas toujours facile.

### 3.2.2 Méthode du Lagrangien Augmenté ([Roc74, Ber82])

Tout comme la méthode des pénalités, l'idée de la technique du Lagrangien augmenté est de pénaliser fortement les solutions non réalisables en modifiant la fonction coût en faisant intervenir un terme de pénalisation.

Dans le cas d'un problème du type $(\mathcal{P}_e)$, on définit le lagrangien augmenté $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donné par

$$\mathcal{L}(x, \lambda, r) = f(x) + \lambda^{\mathsf{T}} h(x) + \frac{r}{2} ||h(x)||^2. \tag{3.34}$$

où $\lambda$ représente le vecteur de multiplicateurs de Lagrange et $r$ un coefficient de pénalité.

Les travaux de [Roc74] et [Ber82] montrent alors que la solution de $(\mathcal{P}_e)$ peut être déterminée en résolvant la suite de problèmes sans contraintes

$$(\mathcal{P}_k) \qquad \begin{cases} \min \mathcal{L}(x, \lambda^k, r^k) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.35}$$

où $\lambda^k$ est une suite bornée de $\mathbb{R}^{m_h}$ et $r^k$ une suite de coefficient de pénalité telle que pour tout $k$, $0 < r^k < r^{k+1}$.

Aussi, afin de trouver une solution approchée de $(\mathcal{P}_e)$, l'algorithme suivant est le plus souvent employé :

**Algorithme LE :**

**Etape 0** : Choix de $x^0$. Choix de $\epsilon$, écart maximal de violation des contraintes
$j \leftarrow 0$ ; $\lambda^0 \leftarrow 0$ ; $r^0 > 0$

**Etape 1** : $k \leftarrow k + 1$

**Etape 2** : $x^k = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\arg\min}\, \mathcal{L}(x, \lambda^k, r^k)$

**Etape 3** : Si $||h(x)||^2 < \epsilon$ alors STOP
Sinon mise à jour des multiplicateurs de Lagrange $\lambda^k$ et des coefficients de pénalité $r^k$
Retourner à l'**Etape 1**.

Dans le but d'aboutir à une solution faisable, les multiplicateurs de Lagrange sont mis à jour à l'**Etape 3** de l'algorithme précédent selon la formule suivante ([Ber82]) :

$$\lambda^{k+1} \leftarrow \lambda^k + r^k h(x_k). \tag{3.36}$$

D'autre part, un ajustement des coefficients de pénalité est également mis en oeuvre en appliquant

$$r^{k+1} \leftarrow \beta r^k. \tag{3.37}$$

Ici, $\beta > 1$ de telle sorte que la suite $r^k$ soit strictement croissante. Par ailleurs, pour éviter que le problème devienne mal conditionné et que l'algorithme converge assez rapidement, on a le plus souvent $\beta \in [4, 10]$. De plus, afin de satisfaire à ces deux conditions, l'ajustement (3.37) est effectué seulement si la mesure de la violation des contraintes $||h(x^k)||$ ne décroît pas suffisamment. Aussi, au lieu d'appliquer (3.37), on préfère utiliser la mise à jour définie par

$$r^{k+1} \leftarrow \begin{cases} \beta r^k \text{ si } ||h(x^k)|| > \gamma ||h(x^{k-1})|| \\ r^k \text{ sinon} \end{cases} \tag{3.38}$$

Une autre version consiste à considérer différents paramètres de pénalité pour chaque contrainte $h_i(x) = 0$. Ainsi, uniquement les coefficients de pénalité correspondant aux

contraintes $i$ où la diminution de l'écart $||h_i(x^k)||$ est inférieure du facteur $\gamma$ à l'écart de l'itération précédente, sont ajustés.

Des valeurs judicieuses pour les paramètres $\beta$ et $\gamma$ sont ([Ber82]) : $\beta = 10$ et $\gamma = 0.25$. En pratique, le choix de $\lambda^0 = 0$ ne modifie pas de manière significative la convergence de l'algorithme. En revanche, celle-ci est largement influencée par la valeur de $r^0$. Ainsi, comme cela est le cas pour $\beta$, $r^0$ doit être choisi ni trop grand ni trop petit pour éviter respectivement des instabilités numériques et une convergence trop lente. N'ayant pas à priori les informations nécessaires pour déterminer facilement cette valeur, $r^0$ est généralement évaluée en procédant à de multiples tests numériques.

La méthode du lagrangien augmenté permet également d'approcher les solutions des problèmes faisant intervenir des contraintes d'inégalités simples du type $(\mathcal{P}_i)$. L'idée est de rajouter des variables d'écart afin de se ramener à un problème avec contraintes d'égalités. Aussi, le nouveau problème est donné par

$$(\mathcal{P}_i^{'}) \qquad \begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) + s_i^2 = 0 \quad i = 1, 2, ..., m_g \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.39}$$

où $s = \{\{s_i\} \, | i = 1, 2, ..., m_g\}$.

Le lagrangien augmenté $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_g} \times \mathbb{R}^{m_g} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de $(\mathcal{P}_i)$ est alors

$$\mathcal{L}(x, s, \lambda, r) = f(x) + \lambda^{\mathsf{T}}(g(x) + s^2) + \frac{r}{2}||g(x) + s^2||^2. \tag{3.40}$$

L'objectif est alors de déterminer les paramètres $(x^*, s^*)$ minimisant (3.40). Ici, il est important de noter que $s^*$ peut être calculé de manière explicite pour chaque $x$ fixé.

Considérons alors le problème suivant

$$\min_s \mathcal{L}(x, s, \lambda, r) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_g} \min_{s_i} \left\{ \lambda_i(g_i(x) + s_i^2) + \frac{r}{2}||g_i(x) + s_i^2||^2 \right\}. \tag{3.41}$$

Un calcul direct permet d'obtenir la solution $s_i^*$ donné par

$$s_i^* = \max\{0, -[(\lambda_i/r) + g_i(x)]\}. \tag{3.42}$$

On a alors

$$g_i(x) + s_i^* = \max\{g_i(x), -(\lambda_i/r)\}. \tag{3.43}$$

Aussi, on peut dire que

$$\mathcal{L}(x,\lambda,r) = f(x) + \frac{1}{2r}\sum_{i=1}^{m_g}\left\{\left[\max\left\{0,\lambda_i + rg_i(x)\right\}\right]^2 - \lambda_i^2\right\}. \tag{3.44}$$

On obtient ainsi une expression de la même forme que (3.34) et l'on peut alors appliquer l'algorithme **LE** en considérant la mise à jour suivante à l'**Etape 3**

$$\lambda_i^{k+1} \leftarrow \max\left\{0, \lambda_i^k + r^k g_i(x^k)\right\}. \tag{3.45}$$

Il faut noter que la méthode du Lagrangien augmenté permet de minimiser directement la fonction objectif sujet à des contraintes de double inégalités. Ainsi, il est possible d'éviter d'appliquer la transformation permettant, de la même manière qu'au paragraphe 3.2.1, de mener au problème $(\mathcal{P}_d^{'})$ et ainsi de doubler le nombre de contraintes. Pour ce faire, on privilégie la procédure détaillée par la suite.

Ainsi, dans un premier temps, on peut remarquer que $(\mathcal{P}_d)$ peut être reformulé comme suit

$$(\mathcal{P}_d'') \qquad \begin{cases} \min f(x) \\ l_i \leq c_i(x) - v_i \leq u_i,\ i = 1,2,...,m_c \\ v_i = 0, \quad i = 1,2,...,m_c \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.46}$$

En éliminant la contrainte $v = 0$ du problème précédent, il est alors possible d'approcher une solution de $(\mathcal{P}_d)$ grâce à la résolution de la suite de problèmes donnés par

$$(\mathcal{P}_v) \qquad \begin{cases} \min f(x) + \sum_{i=1}^{m_c}\left\{\lambda_i^k v_i + \frac{r^k}{2}(v_i)^2\right\} \\ l_i \leq c_i(x) - v_i \leq u_i,\ i = 1,2,...,m_c \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.47}$$

En séparant les variables $x$ et $v$, $(\mathcal{P}_v)$ devient équivalent à

$$(\mathcal{P}_v^{'}) \qquad \begin{cases} \min f(x) + \sum_{i=1}^{m_c} q_i[c_i(x,\lambda_i^k, r^k)] \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.48}$$

où

$$q_i[c_i(x,\lambda_i^k,r^k)] = \min_{l_i \le c_i(x)-v_i \le u_i} \left\{ \lambda_i^k v_i + \frac{r^k}{2}(v_i)^2 \right\}. \tag{3.49}$$

En procédant de la même manière que pour les contraintes de simples inégalités, on peut pour $x$ fixé calculer $v^*$ dont les composantes sont données par

$$v_i^* = \begin{cases} c_i(x) - u_i \ \text{ si } \ \lambda_i^k v_i + r^k[c_i(x) - u_i] > 0 \\ c_i(x) - l_i \ \text{ si } \ \lambda_i^k v_i + r^k[c_i(x) - l_i] < 0 \\ -\lambda_i^k / r^k \ \text{ sinon} \end{cases} \tag{3.50}$$

On a alors

$$q_i[c_i(x,\lambda_i^k,r^k)] = \begin{cases} \lambda_i^k[c_i(x) - u_i] + \frac{r^k}{2}(c_i(x) - u_i)^2 \ \text{ si } \ \lambda_i^k v_i + r^k[c_i(x) - u_i] > 0 \\ \lambda_i^k[c_i(x) - l_i] + \frac{r^k}{2}(c_i(x) - l_i)^2 \ \text{ si } \ \lambda_i^j v_i + r^k[c_i(x) - l_i] < 0 \\ -(\lambda_i^k)^2/2r^k \ \text{ sinon} \end{cases} \tag{3.51}$$

En tenant compte de (3.51) et en considérant (3.47), on retombe typiquement sur un problème pouvant être résolu par l'algorithme **LE**. En l'occurrence, la mise à jour des $\lambda_i^k$ se fera comme suit

$$\lambda_i^{k+1} \leftarrow \begin{cases} \lambda_i^k + r^k(c_i(x) - u_i) \ \text{ si } \ \lambda_i^k v_i + r^k[c_i(x) - u_i] > 0 \\ \lambda_i^k + r^k(c_i(x) - l_i) \ \text{ si } \ \lambda_i^k v_i + r^k[c_i(x) - l_i] < 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases} \tag{3.52}$$

### 3.2.3 Méthode des points intérieurs ([BNS94, FG98, CGOT00])

Durant ces dernières années, de nombreux travaux concernant cette technique ont été menés et ont conduit entre autres à l'élaboration de puissants logiciels tels que LOQO ([VS99]) et KNITRO ([BHN00]).

Pour un problème avec contraintes d'inégalités simples $(\mathcal{P}_i)$, cette méthode consiste à remplacer ce dernier par le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_{int}) \qquad \begin{cases} \min f(x) \\ g(x) + w = 0 \\ w \ge 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.53}$$

Les contraintes d'inégalités sont alors éliminées en faisant intervenir une fonction barrière. On obtient le nouveau problème

$$(\mathcal{P}_\mu) \qquad \begin{cases} \min f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m_i} (\ln (w_i)) \\ g(x) + w = 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.54}$$

avec $\mu > 0$. L'idée de l'approche des points intérieurs est donc de résoudre la suite de problèmes $(\mathcal{P}_\mu)$, puis par décroissance du paramètre de perturbation $\mu$ d'aboutir à la solution du problème original.

Notons $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_g} \to \mathbb{R}$, le lagrangien du problème $(\mathcal{P}_\mu)$ défini par

$$\mathcal{L}(x, y) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m_g} (\ln (w_i)) + y^{\mathsf{T}} (g(x) + w). \tag{3.55}$$

En appliquant les conditions d'optimalité du premier ordre, on peut dire que si $x$ est solution de $(\mathcal{P}_\mu)$ alors il existe un vecteurs $y \in \mathbb{R}^{m_g}$ tel que

$$\begin{cases} \nabla_x L = \nabla f(x) + \nabla g(x)^{\mathsf{T}} y = 0 \\ \nabla_w L = -\mu W^{-1} e + y = 0 \\ \nabla_y L = g(x) + w = 0 \end{cases} \tag{3.56}$$

où $W$ est une matrice diagonale avec les éléments $w_i$ et $e$ un vecteur de taille $m_g$ tel que $e = [1...1]^{\mathsf{T}}$.

Afin de résoudre le système primal-dual (3.56), l'approche de Newton est couramment utilisée. Après calcul des directions de recherche $\Delta x$, $\Delta w$ et $\Delta y$, les algorithmes effectuent alors une recherche linéaire de telle sorte que les nouveaux itérés réduisent non seulement la fonction objectif du problème $(\mathcal{P}_\mu)$ mais également une fonction de mérite afin d'assurer la faisabilité des solutions. Si $f$ est convexe, on montre que les directions trouvées sont effectivement des directions de descente ([Wri92]). Dans le cas contraire, différentes techniques permettant de trouver un minimum de la fonction coût existent ([VS99], [Wri92]).

Dans le cas où le problème à résoudre est similaire à $(\mathcal{P}_d)$, on se ramène au problème

suivant :

$$(\mathcal{P}_{dint}) \qquad \begin{cases} \min f(x) \\ c(x) - w = l \\ w + q = r \\ w, q \geq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.57}$$

avec $l + r = u$.

De la même manière que précédemment, une fonction barrière est utilisée pour éliminer les contraintes d'inégalités

$$(\mathcal{P}'_{\mu}) \qquad \begin{cases} \min f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m_c} (\ln(w_i) + \ln(q_i)) \\ c(x) - w - l = 0 \\ w + q - r = 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.58}$$

avec $\mu > 0$.

Si nous posons $\mathcal{L}_d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_c} \times \mathbb{R}^{m_c} \to \mathbb{R}$ le lagrangien du problème $(\mathcal{P}'_{\mu})$ défini par

$$\mathcal{L}_d(x, y, \lambda) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m_c} (\ln(w_i) + \ln(q_i)) + y^{\mathsf{T}}(c(x) - w - l) + \lambda^{\mathsf{T}}(w + q - r) \tag{3.59}$$

nous sommes alors amenés à considérer le système suivant en appliquant les conditions d'optimalité du premier ordre

$$\begin{cases} \nabla_x L = \nabla f(x) + \nabla c(x)^{\mathsf{T}} y = 0 \\ \nabla_w L = -\mu W^{-1} e - y + \lambda = 0 \\ \nabla_q L = -\mu Q^{-1} e + \lambda = 0 \\ \nabla_y L = c(x) - w - l = 0 \\ \nabla_\lambda L = w + q + r = 0 \end{cases} \tag{3.60}$$

où $Q$ est une matrice diagonale avec les éléments $q_i$. (3.60) est alors résolu également en faisant appel à une approche de Newton et l'algorithme s'effectue comme exposé pour la résolution de $(\mathcal{P}_i)$.

Cependant, il est important de noter ici que $(\mathcal{P}'_{\mu})$ fait apparaître des contraintes ainsi que des variables supplémentaires impliquant ainsi une augmentation du nombre des multiplicateurs de Lagrange.

## 3.3 Problèmes de contrôle optimal

### 3.3.1 Généralités

Un problème de commande optimale est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle mesurant l'écart entre l'état courant du système et l'état désiré. Dans certains cas, cette fonctionnelle peut également comporter un terme supplémentaire permettant alors de pondérer les contrôles selon les objectifs souhaités. Par ailleurs, il n'est pas rare de faire intervenir des contraintes sur l'état et les commandes. Ainsi, un problème de contrôle optimal se formule généralement de la manière suivante :

$$(\mathcal{P}_{opt}) \begin{cases} \min\limits_{u} J(z,u) \\ z = F(u,t), \quad \text{(Equation d'état)} \\ u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad \text{(Contraintes sur les contrôles)} \\ z \in K, \quad \text{(Contraintes sur l'Etat)} \end{cases} \tag{3.61}$$

où $u$ est le vecteur de contrôle et $\mathcal{U}_{ad}$ est l'ensemble des contrôles admissibles.

Par ailleurs, l'équation d'état peut être :

- un système d'équations différentielles ;
- une ou plusieurs équations aux dérivées partielles.

La résolution d'un problème de contrôle optimal faisant appel à des théories spécifiques à chaque type d'équation d'état, les sections suivantes traiteront séparément ces deux classes de problèmes.

### 3.3.2 Problème de commande optimale gouverné par des équations différentielles

Si l'on ne tient pas compte des contraintes sur l'état, le problème de contrôle est dans ce cas généralement donné par

$$(\mathcal{P}_{diff}) \begin{cases} \min\limits_{u} \; J(z,u) = \displaystyle\int_0^{t_f} V(t,z(t),u(t))dt + R(t_f, z(t_f)) \\ \dot{z} = F(t,z(t),u(t)) \\ u \in \mathcal{U}_{ad} \end{cases} \tag{3.62}$$

où $F$ est $C^1$ de $\mathbb{R}^{1+m+n}$ dans $\mathbb{R}^m$, $V$ est $C^1$ de $\mathbb{R}^{1+m+n}$ dans $\mathbb{R}$, R est continue sur $\mathbb{R}^{1+m}$, $z \in \mathbb{R}^m$ et les commandes $u$ sont à valeurs dans un compact $\mathcal{U}_{ad} \subset \mathbb{R}^n$ dont les trajectoires associées relient un point initial de $Z_0 \subset \mathbb{R}^m$ à un point final de $Z_1 \subset \mathbb{R}^m$. Par ailleurs, le temps final $t_f$ peut être fixé ou non.

En particulier, dans le cas le plus fréquemment rencontré en automatique où l'objectif est de stabiliser l'état autour d'une trajectoire de consigne, la fonction coût se formule de la manière suivante :

$$\min_u J(z,u) = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} (z(t) - z^*(t))^2 dt + \frac{\epsilon}{2}\int_0^{t_f} u(t)^2 dt \tag{3.63}$$

où $\epsilon > 0$ et $z^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ est l'état désiré.

Le théorème suivant donne un résultat d'existence d'une solution au problème $(\mathcal{P}_{diff})$ :

**Théorème 3.3.1** ([Tre05]) *Supposons que :*

- *il existe un réel positif $b$ tel que toute trajectoire associée à un contrôle $u \in \mathcal{U}_{ad}$ est uniformément bornée par $b$ sur $[0, t_f]$, i. e.*

$$\exists b > 0 | \forall u \in \mathcal{U}_{ad}\ \forall t \in [0, t_f]\ \ ||z(t)|| \leq b, \tag{3.64}$$

- *$\forall (t,z) \in \mathbb{R}^{1+n}$, l'ensemble $\widetilde{V}(t,z)$ défini par :*

$$\widetilde{V}(t,z) = \{(V(t,z,u), F(t,z,u)) \,|u \in \mathcal{U}_{ad}\} \tag{3.65}$$

*est convexe.*

*Alors il existe un contrôle optimal $u$ sur $[0, t_f]$ qui minimise $(\mathcal{P}_{diff})$.*

Soit $\mathcal{H} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction de Pontryaguine associée au système intervenant dans $(\mathcal{P}_{diff})$ et définie par

$$\mathcal{H}(z,u,p,p_0,t) = p^\mathsf{T} F(t,z,u) + p_0(V(t,z,u) + R(t,z)). \tag{3.66}$$

Le Hamiltonien du système $H : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est alors donné par

$$H(z,p,p_0,t) = \sup_{u \in \mathcal{U}_{ad}} \mathcal{H}(z,u,p,p_0,t). \tag{3.67}$$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont données par le théorème suivant qui est souvent présenté comme le "Principe du Maximum de Pontryagin" ([PBGM74]) :

**Théorème 3.3.2** *Si $u \in \mathcal{U}_{ad}$ associé à la trajectoire $z(\cdot)$ est optimal sur $[0, t_f]$, alors il existe un réel négatif $p_0$ et une application $p(\cdot) : [0, t_f] \to \mathbb{R}^m$ continue appelée vecteur adjoint tels que :*

- *le vecteur adjoint $p$ soit solution de l'équation différentielle*

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}(z,u,p,p_0,t) \tag{3.68}$$

– *pour presque tout* $t \in [0, t_f]$, $u(t)$ *réalise le maximum instantané de* $\mathcal{H}(z, \cdot, p, p_0, t)$

$$\mathcal{H}(z(t), u(t), p(t), p_0, t) = \underset{v \in \mathcal{U}_{ad}}{\text{Max}}\ \mathcal{H}(z(t), v, p(t), p_0, t) = H(z(t), p(t), p_0, t) \quad (3.69)$$

– *si* $t_f$ *n'est pas fixé, la condition suivante est assurée (Condition de transversalité sur le Hamiltonien)*

$$\underset{v \in \mathcal{U}_{ad}}{\text{Max}}\ \mathcal{H}(z(t_f), v, p(t_f), p_0, t_f) = -p_0 \frac{\partial R}{\partial R}(t_f, z(t_f)) \quad (3.70)$$

– *si* $Z_0$ *et* $Z_1$ *ont des espaces tangents en* $z(0)$ *et* $z(t_f)$*, alors le vecteur adjoint vérifie les conditions suivantes aux extrémités (Conditions de transversalité sur le vecteur adjoint)*

$$p(0) \perp T_{z(0)} Z_0 \quad (3.71)$$

$$p(t_f) - p_0 \frac{\partial R}{\partial z}(t_f, z(t_f)) \perp T_{z(t_f)} Z_1 \quad (3.72)$$

En appliquant le Principe du Maximum de Pontryagin, la résolution de $(\mathcal{P}_{diff})$ se ramène à la détermination du couple $(z(t), p(t))$ solution d'un système différentiel de la forme $\dot{\eta} = N(t, z(t))$ où $\eta = (z(t), p(t))$ et où les conditions de transversalité se mettent sous la forme $S(\eta(0), \eta(t_f)) = 0$. Si $\eta(t, \eta_0)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\dot{\eta} = N(t, z(t)), \quad \eta(0) = \eta_0,$$

et si l'on note $D(\eta_0) = S(\eta(0), \eta(t_f, \eta_0))$, alors le problème différentiel aux deux bouts devient équivalent à

$$(\mathcal{P}_{dir}) \quad D(\eta_0) = 0. \quad (3.73)$$

$(\mathcal{P}_{dir})$ peut alors être résolu en appliquant la méthode de Newton. L'approche qui ici repose sur le calcul d'un contrôle optimal par le biais de la résolution d'un système différentiel est couramment appelé méthode de tir simple. Une autre stratégie, baptisée méthode de tir multiple, permet également de résoudre le même système en subdivisant cette fois-ci l'intervalle $[0, tf]$ en $l$ intervalles $[t_j, t_{j+1}]$ et où l'on considère les valeurs $\eta(t_j)$ comme étant les inconnues du problème. Ces deux approches sont assimilées à des méthodes dites indirectes.

Il existe également des méthodes directes. Ces dernières consistent à discrétiser l'état et le contrôle et à ramener le problème de commande optimale à un problème d'optimisation non linéaire. Il s'agit ainsi de choisir dans un premier temps une discrétisation dans des

espaces de dimension finie

$$z(t) = \sum_{j=1}^{l} z_j E_j(t), \tag{3.74}$$

$$u(t) = \sum_{j=1}^{l} u_j U_j(t), \tag{3.75}$$

où $E_j(t)$ et $U_j(t)$ sont des bases de Galerkin. A l'issue de cette phase, on retombe alors sur un problème d'optimisation sous contraintes pouvant être résolu en faisant appel à l'une des techniques de la section 3.2.

### 3.3.3 Problème de contrôle optimal régi par une équation à dérivées partielles

Les problèmes de contrôle optimal faisant apparaître des contraintes sous la forme d'équations à dérivées partielles font aujourd'hui de plus en plus l'objet de bon nombre d'études du fait de leur grande importance dans les applications industrielles. Ainsi, ces problèmes peuvent intervenir par exemple dans le domaine de l'aéronautique avec l'optimisation de formes d'ailes d'avion, ou encore dans le domaine de la météorologie avec l'amélioration des prévisions des phénomènes atmosphériques et océaniques.

Les théories concernant l'existence de solution ou les conditions nécessaires et/ou suffisantes d'optimalité diffèrent selon le type d'équation d'état (elliptique, parabolique ou hyperbolique). Toutefois, les méthodes de résolution numérique les plus souvent utilisées sont très similaires dans chaque cas et consistent à discrétiser la fonction objectif ainsi que l'équation à dérivées partielles et à transformer alors le problème original en un problème d'optimisation non linéaire comme exposé précédemment ([BIT99], [MM00], [RWT98]). L'objectif de cette partie étant de présenter ces approches numériques nous présenterons, par souci de clarté, ces dernières en traitant un exemple où l'équation d'état est une équation elliptique.

Considérons alors le problème de contrôle donné par

$$(\mathcal{P}_{par}) \begin{cases} \min\limits_{u} J(z,u) \\ u \in \mathcal{U}_{ad}, \text{ avec } \mathcal{U}_{ad} \text{ un compact de } L^2(\Omega) \end{cases} \tag{3.76}$$

où $z \in H^1(\Omega)$ est solution de l'équation d'état

$$(\mathcal{E}_{llip}) \begin{cases} -\Delta z = y(u), \text{ avec } y \in L^2(\Omega) \\ z = w \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega, \text{ avec } w \in H^{1/2}(\Gamma) \quad \text{(Contrainte de Dirichlet)} \end{cases} \tag{3.77}$$

**Définition 3.3.1** *La restriction au bord* $\Gamma$ *d'une fonction* $z \in H^1(\Omega)$ *est appelée* trace au bord *et est notée* $\gamma_0(z)$.

**Théorème 3.3.3** ([RT83]) *L'ensemble des traces au bord des fonctions de* $H^1(\Omega)$ *forme un sous-espace de* $L^2(\Omega)$.

Nous pouvons alors décomposer la fonction $z$ en une somme $z_0 + z_w$ où $z_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $z_w \in H^1(\Omega)$ vérifiant $\gamma_0(z_w) = w$. D'autre part, on définit sur $V = H_0^1(\Omega)$

$$a(z_0, \psi) = \int_\Omega \nabla z_0 \nabla \psi dv, \tag{3.78}$$

$$l(\psi) = \int_\Omega y(u)\psi dv - \int_\Omega \nabla z_w \nabla \psi dv. \tag{3.79}$$

**Proposition 3.3.1** ([RT83]) *La solution* $z = z_0 + z_w$ *de* $(\mathcal{E}_{llip})$ *est unique et* $z_0$ *peut être déterminée à partir de la résolution du problème variationnel suivant :*

$$\begin{cases} \textit{trouver } z_0 \in V \textit{ tel que pour tout } \psi \in V : \\ a(z_0, \psi) = l(\psi). \end{cases} \tag{3.80}$$

A partir de ce résultat et en tenant compte que $\mathcal{U}_{ad}$ est un ensemble compact et que $J$ est continue sur $H^1(\Omega) \times \mathcal{U}_{ad}$, on peut conclure que le problème $(\mathcal{P}_{par})$ admet au moins une solution.

Le plus souvent la fonction coût et l'équation d'état sont difficilement calculables de manière analytique. Une discrétisation est alors réalisée afin de se ramener à un problème de dimension finie.

Notons $V_1 = H^1(\Omega)$. Soient $V_1^M \subset V_1$ et $\mathcal{U}_{ad}^N \subset \mathcal{U}_{ad}$ deux espaces de Hilbert de dimension finie. Par ailleurs, définissons $M$ fonctions $\phi_j \in V_1^M$ et $N$ fonctions $\widehat{\phi}_j \in \mathcal{U}_{ad}^N$ telles que

$$z(x) \approx \sum_{j=1}^{M} z_j \phi_j(x),$$

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^{N} u_j \widehat{\phi}_j(x).$$

Posons $U = (u_1, ..., u_N)$ et $Z = (z_1, ..., z_M)$. Une solution du problème de dimension infinie $(\mathcal{P}_{par})$ est alors approximée en déterminant $U$ solution du problème de dimension fini suivant :

$$(\mathcal{P}_{disc}) \begin{cases} \min\limits_{U} J^h(Z, U) \\ U \in \mathcal{U}_{ad}^N \end{cases} \tag{3.81}$$

où $Z$ est solution du système linéaire suivant :

$$A(U)Z = B(U) \tag{3.82}$$

avec $A(U)$ et $B(U)$ des matrices obtenues en appliquant un schéma de discrétisation d'éléments finis ou de différences finies. On aboutit ainsi à un problème d'optimisation sous contraintes pouvant être résolu en appliquant l'une des techniques présentées dans la section 3.2. Le calcul du gradient de la fonction objectif, essentiel pour la détermination d'une direction de descente, peut alors se faire par différences finies ou de manière analytique. C'est cette dernière approche qui est le plus souvent employée lorsque l'équation d'état est une équation elliptique. En effet dans ce cas, le gradient est donné par le théorème qui suit :

**Théorème 3.3.4** *Si les applications $U \to A(U)$ et $U \to B(U)$ sont suffisamment régulières, alors*

$$\frac{\partial J(U)}{\partial u_j} = \frac{\partial J(Z,U)}{\partial u_j} + p^{\mathsf{T}} \left( \frac{\partial B(U)}{\partial u_j} - \frac{\partial A(U)}{\partial u_j} \right) \tag{3.83}$$

*où $p$ est la solution du système adjoint*

$$A(U)p = \nabla_U J(Z, U) \tag{3.84}$$

Aussi, le calcul du gradient de la fonction objectif à l'itération $j$ peut se faire en appliquant l'algorithme qui suit :

**Algorithme $\boldsymbol{PAR_j}$ :**
**Etape 0** : Calcul de $Z^j$ par résolution de $A(U^j)Z^j = B(U^j)$
**Etape 1** : Calcul de $p^j$ par résolution de $A(U^j)p^j = \nabla_{U^j} J(Z^j, U^j)$
**Etape 2** : Calcul du gradient de $J(U)$ en appliquant (3.83).

On peut alors résoudre $(\mathcal{P}_{disc})$ en implémentant l'algorithme suivant :

**Algorithme $\boldsymbol{OPT}$ :**
**Etape 0** : Choix de $U^0$ et de $\epsilon$. $j \leftarrow 0$.
**Etape 1** : Calcul de $\nabla J(U^j)$ à partir de $\boldsymbol{PAR_j}$ et détermination d'une direction de

descente $d^j$.

**Etape 2** : $U^{j+1} = U^j + t^j d^j$.

**Etape 3** : Si $\|\nabla J(U^{j+1})\|^2 < \epsilon$ alors STOP.
Sinon $j \leftarrow j+1$ et retourner à l'**Etape 1**.

## 3.4 Conclusion

Ce chapitre a présenté différentes méthodes de résolution de problèmes d'optimisation. Dans un premier temps, les avantages et les inconvénients des algorithmes les plus fréquemment utilisés dans le cas de problèmes sans contraintes ont été exposés. Ainsi, la méthode du simplexe peut s'avérer être une stratégie très efficace lorsque la fonction objectif considérée est non différentiable ou si l'évaluation de son gradient est très coûteuse. L'usage de stratégies s'appuyant sur les informations données par les dérivées secondes de la fonction coût, telles que les méthodes quasi-Newtoniennes, peut d'autre part se révéler pertinent pour la résolution de problèmes dont le temps de calcul du critère d'optimisation ainsi que de son gradient ne soit pas trop important. Dans le cas de problèmes de grande taille, il est préférable de faire appel à des stratégies ne nécessitant le stockage que peu d'informations comme l'algorithme du gradient conjugué ou une méthode du type LBFGS.

Les travaux de cette thèse reposant sur la minimisation d'une fonction objectif en présence de contraintes (contraintes d'inégalités entre autres) comme discuté au Chapitre 2, des algorithmes dédiés à la résolution de cette classe de problèmes sont également présentés. Ces derniers sont alors choisis de telle sorte qu'ils puissent traiter indifféremment des contraintes linéaires et non linéaires. Parmi ces méthodes, essentiellement basées sur la résolution d'une suite de problèmes sans contraintes obtenus en ajoutant aux fonctions coût originales un terme permettant de pénaliser fortement les solutions non acceptables, celle du Lagrangien augmenté s'avère la mieux adaptée pour traiter les problèmes avec contraintes d'inégalités et de doubles inégalités. Il est donc fort probable que nous soyons amenés à utiliser ce genre d'algorithme dans cette étude. Par ailleurs, les stratégies couramment appliquées pour la résolution de problèmes de contrôle optimal, type particulier de problèmes d'optimisation sous contraintes où l'une d'entre elles est une équation différentielle ou à dérivées partielles couramment appelée équation d'état, sont également mises en exergue. Nous verrons dans les prochains chapitres comment l'ensemble des techniques présentées ici peuvent être utilisées pour résoudre le problème de défauts de répartition.

# Chapitre 4

# Apport optimal d'engrais en plein champ

Lorsque les erreurs de suivis de trajectoires peuvent être considérées comme négligeables du fait d'une correction apportée par l'une des méthodes exposées au Chapitre 2, les défauts de répartition d'engrais en plein champ sont alors uniquement dûs à des singularités géométriques caractérisées ici par des passages irrégulièrement espacées ou non parallèles. Il convient donc de s'appuyer sur la connaissance de ces trajectoires imposées afin de déterminer les consignes à appliquer en entrée du distributeur permettant de minimiser les erreurs de fertilisation. Nous adoptons ici une approche mathématique permettant d'assimiler le problème d'apport optimal d'engrais en plein champ à un problème d'optimisation où la fonction coût mesure l'écart quadratique entre les doses réellement épandues le long des passages et les doses désirées.

Dans la première partie de ce chapitre, nous nous attardons sur une première formulation mathématique du critère adopté. Nous explicitons, par la suite, l'approche employée afin de faciliter la résolution du problème original. Les algorithmes d'optimisation utilisés sont également détaillés. Enfin, nous exposons des résultats numériques obtenus pour une optimisation de la répartition plein champ concernant dans un premier temps des parcelles fictives présentant des trajectoires rigoureusement parallèles puis un champ réel.

## 4.1 Formulation mathématique

La formalisation du problème repose sur le modèle de répartition spatiale d'engrais (1.1). Afin de définir de manière rigoureuse la fonction objectif, précisons tout d'abord quelques notations.

Soit $t \in \mathbb{R}$ le temps, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$ un domaine spatial et $s : (0, T) \to \mathbb{R}^2$ une trajectoire

sur $\mathcal{D}$. L'équation (1.1) modélisant une nappe de répartition générée uniquement par un seul disque, la nappe globale produite par un distributeur bidisque résulte alors de la sommation des répartitions issues des disques droit et gauche. Aussi, on définit pour la nappe éjectée par le disque à droite de la machine $m_1 : (0,T) \to \mathbb{R}$, $\rho_1 : (0,T) \to \mathbb{R}^+$ et $\varphi_1 : (0,T) \to \mathbb{R}$ qui sont respectivement le débit massique, le rayon moyen et l'angle moyen de répartition. De même, on pose $m_2 : (0,T) \to \mathbb{R}$, $\rho_2 : (0,T) \to \mathbb{R}^+$ et $\varphi_2 : (0,T) \to \mathbb{R}$, les fonctions définissant le débit massique, le rayon moyen et l'angle moyen de la nappe spatiale générée par le disque gauche. Pour simplifier les notations, on utilisera dans la suite $M(t) = (m_1(t), m_2(t)) \in \mathbb{R}^2$, $R(t) = (\rho_1(t), \rho_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ et $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in \mathbb{R}^2$. Par ailleurs, le modèle (1.1) donné par Colin ([Col97]) fait intervenir les écarts-types radial $\sigma_r : \mu \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et angulaire $\sigma_\varphi : \mu \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ pouvant être modélisés empiriquement et définis respectivement par :

$$\sigma_r(\mu) = \begin{cases} (\mu - 5)^4 + \dfrac{8.6\text{e}-1}{4.12} \times (\mu - 5) + \dfrac{8.2\text{e}-2}{4.12} \text{ si } \mu < 5 \\ \dfrac{8.6\text{e}-1}{4.12} \times (\mu - 9\text{e}-2) - 1.005 \quad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\sigma_\varphi(\mu) = \begin{cases} (\mu - 5)^4 + \dfrac{2.27}{4.12} \times (\mu - 5) + \dfrac{70.41}{4.12} \text{ si } \mu < 5 \\ \dfrac{2.27}{4.12} \times (\mu - 9\text{e}-2) + 14.385 \quad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{4.2}$$

Selon la modélisation proposée par Colin ([Col97]), les nappes distribuées par les disques droit et gauche de l'épandeur, à l'instant $t$, sont données par les fonctions $q_\alpha$ : $\mathcal{D} \times (0,T) \to \mathbb{R}$, $1 \leq \alpha \leq 2$, définis par

$$q_\alpha(x, m_\alpha(t), \rho_\alpha(t), \varphi_\alpha(t)) = \kappa_\alpha \cdot \exp\left( -\frac{(r(x,t) - \rho_\alpha(t))^2}{2\sigma_r(\rho_\alpha(t))^2} - \frac{(\theta(x,t) - \varphi_\alpha(t))^2}{2\sigma_\theta(\rho_\alpha(t))^2} \right), \tag{4.3}$$

où

$$\kappa_\alpha = \frac{m_\alpha(t)}{2\pi\sigma_r(\rho_\alpha(t))\sigma_\theta(\rho_\alpha(t))}. \tag{4.4}$$

La répartition globale $q_{tot} : \mathcal{D} \times (0,T) \to \mathbb{R}$ est alors donnée par

$$q_{tot}(x, M(t), R(t), \Phi(t)) = \sum_{\alpha=1}^{2} q_\alpha(x, m_\alpha(t), \rho_\alpha(t), \varphi_\alpha(t)). \tag{4.5}$$

A partir de (4.5), il est alors possible de déduire la dose totale $Q : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ distribuée au cours d'un passage sur le domaine $\mathcal{D}$ définie par

$$Q(x, M, R, \Phi) = \int_0^T q_{tot}(x, M(t), R(t), \Phi(t))dt. \tag{4.6}$$

La réduction des effets néfastes de la fertilisation centrifuge étant directement liée à la diminution des erreurs de répartition d'engrais dans le champ, il convient donc de déterminer les fonctions optimales $M$, $R$, $\Phi$ qui minimisent la fonctionnelle suivante

$$F(M,R,\Phi) = \int_{\mathcal{D}} [Q(x,M,R,\Phi) - Q^*]^2 \, dx, \tag{4.7}$$

avec $Q^*$ la dose prescrite obtenue par les calculs menés préalablement par les ingénieurs agronomes. D'autre part, afin de tenir compte des limites mécaniques du système et de ne pas solliciter trop violemment les actionneurs, la minimisation de $F$ doit se faire de sorte que les fonctions $M$, $R$, $\Phi$ ainsi que leurs dérivées premières soient bornées. Considérons donc $\mathcal{C}^0(0,T)$ l'espace vectoriel des fonctions continues et $\mathcal{C}^{0,1}(0,T)$ l'espace des fonctions Lipschitz sur $(0,T)$. Nous pouvons alors définir l'ensemble des fonctions admissibles $\mathcal{S}$ par

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \big\{ (M,R,\Phi) \in \mathcal{C}^{0,1}(0,T) |\, & M_{min} \leq M \leq M_{max}, \quad R_{min} \leq R \leq R_{max}, \\ & \Phi_{min} \leq \Phi \leq \Phi_{max}, \quad |M^{'}(t)| \leq \alpha\delta, \quad |R^{'}(t)| \leq \beta\delta, \quad |\Phi^{'}(t)| \leq \gamma\delta \big\}\end{aligned} \tag{4.8}$$

où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des constantes positives telles que $\mathcal{S}$ soit non vide. Le problème de réduction des erreurs de fertilisation peut alors se remettre sous la forme :

Trouver $(\widehat{M}, \widehat{R}, \widehat{\Phi}) \in \mathcal{S}$ tels que :

$$F(\widehat{M}, \widehat{R}, \widehat{\Phi}) \leq F(M,R,\Phi), \quad \forall (M,R,\Phi) \in \mathcal{S} \tag{4.9}$$

## 4.2 Discrétisation spatiale et temporelle

Le calcul analytique de (4.7) étant impossible, nous procédons alors à une discrétisation spatiale et temporelle afin d'en obtenir une valeur approchée. Ainsi, comme cela est le cas pour la carte de consigne de dose (cf. figure 2.3), le domaine $\mathcal{D}$ est virtuellement décomposé en mailles élémentaires carrées de dimension 1 m $\times$ 1 m de sorte que $Q$ puisse être approximée par le biais d'une interpolation bilinéaire. En ce qui concerne la discrétisation sur le temps, elle est effectuée en divisant l'intervalle $(0,T)$ en $n$ sous-intervalle de longueurs $\delta = T/n$. On définit alors $M_i = M(t_i)$, $R_i = R(t_i)$ et $\Phi_i = \Phi(t_i)$ et

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Dans chaque sous-intervalle, nous faisons alors appel à la formule des trapèzes

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)), \tag{4.10}$$

afin d'approcher l'intégrale (4.6). Ainsi, il vient que

$$Q(x, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Phi}) = \delta \left( \chi + \sum_{i=1}^{n-1} q_{tot}(x, M_i, R_i, \Phi_i) \right), \tag{4.11}$$

$$\text{avec} \qquad \chi = \frac{1}{2} q(x, M_n, R_n, \Phi_n). \tag{4.12}$$

La fonction à minimiser est alors maintenant

$$F(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Phi}) = \int_{\mathcal{D}} [Q(x, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Phi}) - Q^*]^2 dx. \tag{4.13}$$

En utilisant la méthode des trapèzes, nous avons implicitement considéré une approximation linéaire de $M$, $R$ et $\Phi$. Aussi, il vient que l'ensemble des contraintes défini par (4.8) peut être approximé par l'ensemble $S \subset \mathbb{R}^{6n}$ défini par

$$\begin{aligned} S = \big\{ (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Phi}) \in \mathbb{R}^{6n} |\, & M_{min} \leq \boldsymbol{M} \leq M_{max}, \quad R_{min} \leq \boldsymbol{R} \leq R_{max}, \\ & \Phi_{min} \leq \boldsymbol{\Phi} \leq \Phi_{max}, \quad |M_{i+1} - M_i| \leq \alpha\delta, \quad |R_{i+1} - R_i| \leq \beta\delta, \quad |\Phi_{i+1} - \Phi_i| \leq \gamma\delta \big\}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

On aboutit alors au problème d'optimisation non linéaire $(\mathcal{P})$ donné par

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Phi}) \in S} F(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Phi}). \tag{4.15}$$

$S$ est un ensemble fermé borné et est donc un compact de $\mathbb{R}^{6n}$. Donc, d'après le théorème 3.2.1, le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins un minimum local.

L'épandage s'effectuant en parcourant un nombre $p$ de trajectoires décalées les unes par rapport aux autres, l'expression (4.6) peut alors être remplacée par

$$Q(x, M, R, \Phi) = \sum_{k=1}^{p} \int_{t_d^k}^{t_f^k} q(x, M(t^k), R(t^k), \Phi(t^k)) dt, \tag{4.16}$$

où les trajectoires $s^k(t)$ sont définies sur $(t_d^k, t_f^k)$. Nous pouvons alors appliquer le même schéma de discrétisation que précédemment en considérant $M_i^k = M(t_i^k)$, $R_i^k = R(t_i^k)$, $\Phi_i^k = \Phi(t_i^k)$.

Il est facile de voir que la discrétisation temporelle exposée précédemment nous conduit à considérer un problème de grande taille. En effet, afin de perdre le minimum d'informations concernant le problème continu, il est préférable de calculer les solutions en 2 points

par maille élémentaire. Ainsi, par exemple, dans le cas d'une parcelle traversée par seulement 3 passages de 500 m, il faut prendre en compte au moins 1000 points par trajectoire et le nombre de paramètres s'élève alors au minimum dans ce cas à $1000 * 3 * 6 = 18000$ (6 variables doivent être évaluées en chaque point : débit, rayon moyen et angle moyen pour les disques droit et gauche de l'épandeur). Par conséquent, étant donné les grandes dimensions des parcelles et les importantes longueurs des trajectoires suivies par le tracteur (plusieurs centaines de mètres), nous sommes nécessairement amenés à manipuler plusieurs centaines de milliers de variables voire des millions. Il existe divers algorithmes pouvant traiter efficacement des problèmes de grande taille ([Ber95, Lue84, CGT94, Gou03]). Cependant dans notre cas, l'importance du domaine spatial d'étude impliquant le stockage d'un grand nombre de coordonnées, l'occupation en mémoire serait alors critique. Aussi, afin d'éviter un trop important encombrement de celle-ci, nous proposons dans la section suivante une nouvelle stratégie qui permette de calculer facilement une solution sous-optimale du problème $(\mathcal{P})$.

## 4.3 Une méthode de décomposition

L'idée consiste ici à définir successivement une zone de la parcelle étudiée et à minimiser localement au sein de cette même zone les erreurs de fertilisation en tenant compte des quantités de fertilisants déjà distribués. Il s'agit ainsi de déterminer les paramètres de réglage de l'épandeur de sorte qu'ils soient solutions de sous-problèmes construits à partir d'une décomposition du domaine spatial d'étude. Afin de mieux expliciter cette idée, définissons quelques notations.

Soit $\mathcal{J} = \{1 \leq j \leq d\}$. Pour tout $j \in \mathcal{J}$, nous considérons le domaine $\mathcal{D}^j \in \mathbb{R}^2$, le $j^{\text{ième}}$ sous-domaine de $\mathcal{D}$ tel que $\mathcal{D} = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{D}^j$. Pour tout $j \in \mathcal{J}$, $\mathcal{D}^j$ est défini de manière à ce qu'il soit délimité par 2 passages plein champ consécutifs $s^k$ et $s^{k+1}$ respectivement à gauche et à droite. Par ailleurs, les sous-domaines $\mathcal{D}^j$ sont construits de sorte qu'ils soient disjoints 2 à 2, c'est-à-dire $\forall j \in \mathcal{J},\ \mathcal{D}^j \cap \mathcal{D}^{i \neq j} = \emptyset$. Pour une meilleure compréhension, la figure 4.1 illustre cette décomposition pour un domaine rectangulaire $\mathcal{D}$.

A partir de la décomposition spatiale de $\mathcal{D}$, (4.13) peut alors être reformulé comme

$$F(X) = \int_{\mathcal{D}^d} [Q(x,X) - Q^*]^2 dx + \int_{\mathcal{D}^{d-1}} [Q(x,X) - Q^*]^2 dx + \cdots + \int_{\mathcal{D}^1} [Q(x,X) - Q^*]^2 dx, \quad (4.17)$$
$$\text{avec } X = [\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Phi}]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{6n}.$$

D'autre part pour tout $j \in \mathcal{J}$, on définit $\mathcal{K}_j = \{i \in \mathbb{N} |\, q_{tot}(x, M_i, R_i, \Phi_i) \neq 0\ \forall x \in \mathcal{D}^j\}$ et $\nu_j = card(\mathcal{K}_j)$. De plus, posons $\boldsymbol{M}^j$, $\boldsymbol{R}^j$ et $\boldsymbol{\Phi}^j$, des vecteurs de taille $\nu_j$ tels que

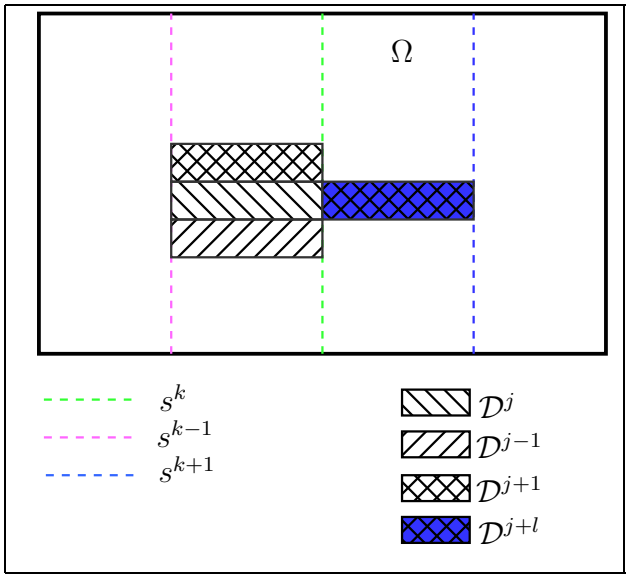



Figure 4.1 – Exemple d'une décomposition pour un domaine rectangulaire comportant 3 passages pleins champs.

$(\boldsymbol{M}^j)_i = M_{i\in\mathcal{K}_j}$, $(\boldsymbol{R}^j)_i = R_{i\in\mathcal{K}_j}$ et $(\boldsymbol{\Phi}^j)_i = \Phi_{i\in\mathcal{K}_j}$. De même que précédemment, nous pouvons alors définir pour tout $j \in \mathcal{J}$, l'ensemble des contraintes $S^j$ donné par

$$S^j = \big\{(\boldsymbol{M}^j, \boldsymbol{R}^j, \boldsymbol{\Phi}^j) \in \mathbb{R}^{6\nu_j} |\, M_{min} \leq \boldsymbol{M}^j \leq M_{max}, \quad R_{min} \leq \boldsymbol{R}^j \leq R_{max},$$
$$\Phi_{min} \leq \boldsymbol{\Phi}^j \leq \Phi_{max}, \quad |M^j_{i+1} - M^j_i| \leq \alpha\delta, \quad |R^j_{i+1} - R^j_i| \leq \alpha\delta, \quad |\Phi^j_{i+1} - \Phi^j_i| \leq \beta\delta\big\}.$$

Si l'on note $X^j = \left[\boldsymbol{M}^j, \boldsymbol{R}^j, \boldsymbol{\Phi}^j\right]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{6\nu_j}$, (4.17) est alors équivalent à

$$\begin{aligned} F(X) = &\int_{\mathcal{D}^d} [Q(x, X^d) - Q^*]^2 dx + \int_{\mathcal{D}^{d-1}} [Q(x, X^{d-1}) - Q^*]^2 dx \\ &+ \cdots + \int_{\mathcal{D}^2} [Q(x, X^2) - Q^*]^2 dx + \int_{\mathcal{D}^1} [Q(x, X^1) - Q^*]^2 dx. \end{aligned} \tag{4.18}$$

L'approche dont il est question dans cette section consiste alors à minimiser une suite de problèmes $\{\mathcal{P}_j\}$ telle que pour tout $j \in \mathcal{J}$, le problème $(\mathcal{P}_j)$ est donné par

$$(\mathcal{P}_j) \quad \min_{X^j \in S^j} N(X^j) = \int_{\mathcal{D}^j} [Q(x, X^j) - Q^*]^2 dx + \sum_{k=1,\cdots,j-1} \int_{\mathcal{D}^k} [Q(x, \widetilde{X^k}) - Q^*]^2 dx, \tag{4.19}$$

où

$$\left(\widetilde{X^k}\right)_{1\leq i\leq \nu_k^*} = \left(\widehat{X^k}\right)_{1\leq i\leq \nu_k^*},\ k\in\mathcal{J}, \tag{4.20}$$

$$\left(\widetilde{X^k}\right)_{\nu_k^*+1\leq i\leq \nu_k} = \left(X^k\right)_{1\leq i\leq \nu_k-\nu_k^*},\ k\in\mathcal{J}, \tag{4.21}$$

$$\widehat{X^k} = \underset{X^k\in S^k}{\arg\min}\, N(X^k), \tag{4.22}$$

avec pour tout $j\in\mathcal{J}$, $\mathcal{K}_j^* = \{i\in\mathbb{N}\}$ tel que :

$$\begin{cases} q_{tot}(x, M_i, R_i, \Phi_i) \neq 0\ \forall x\in\mathcal{D}^j \\ q_{tot}(x, M_i, R_i, \Phi_i) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \tag{4.23}$$

et $\nu_j^* = card(K_j^*)$.

Par ailleurs, notons $\mathcal{I}(j)$ l'ensemble des sous-domaines $i\neq j$ tels que $Q(x, X^j)\neq 0$ pour tout $x\in\mathcal{D}^i$. Il vient alors que $\widehat{X^j}$ est également solution du problème $(\mathcal{P}_j')$ défini par

$$(\mathcal{P}_j') \qquad \min_{X^j\in S^j} \mathcal{N}(X^j) = \int_{\mathcal{D}^j} [Q(x, X^j) - Q^*]^2 dx + \sum_{k\in\mathcal{I}(j)} \int_{\mathcal{D}^k} [Q(x, \widetilde{X^k}) - Q^*]^2 dx. \tag{4.24}$$

De même que précédemment, l'existence de solution vient de l'application du théorème 3.2.1 en remarquant que l'ensemble des contraintes $S^j$ est clairement un compact de $\mathbb{R}^{6\nu_j}$. Chaque problème $(\mathcal{P}_j')$ admet ainsi au moins une solution.

Pour tout $j\in\mathcal{J}$, la résolution du problème $(\mathcal{P}_j')$ ne nécessite que la détermination de $6\times\nu_j$ variables et le stockage des points appartenant uniquement aux domaines $\mathcal{D}^i$ avec $i = \{j\cup\mathcal{I}(j)\}$. Le calcul de $\widehat{X^j}$ revient alors à déterminer les réglages optimaux du distributeur à appliquer le long des trajectoires qui intersectent $\mathcal{D}^j$ en tenant compte des quantités de fertilisants déjà épandues à l'intérieur d'un ensemble de domaines voisins de $\mathcal{D}^j$, noté ici $\mathcal{I}(j)$, eux-même pouvant recevoir un apport d'engrais au cours des passages considérés.

La minimisation des erreurs de fertilisation sur la parcelle totale peut alors être effectuée en résolvant la suite de problème $\left\{\mathcal{P}_j'\right\}$. Du fait du caractère séquentiel de la stratégie employée, cette dernière est appelée *méthode de fenêtres glissantes*. L'optimisation sur l'ensemble du domaine spatial est réalisée en appliquant l'algorithme ci-après :

**Algorithme *Gliss* :**
**Etape 0** : Choix de $\widehat{X^{(0)}}$ et de $\epsilon$. $k\leftarrow 1$
**Etape 1** : Pour tout $j\leq d$ calcul de $\widehat{X^{j(k)}}$ solution de $(\mathcal{P}_{j(k)}')$,
**Etape 2** : Si $\left\|\frac{\widehat{X^{(k)}}-\widehat{X^{(k-1)}}}{\widehat{X^{(k-1)}}}\right\| < \epsilon$, STOP
Sinon $k\leftarrow k+1$

Retourner à l'**Etape 1**

L'**Etape 1** de l'algorithme $\mathcal{G}$***liss*** nécessitant la résolution d'un problème d'optimisation, nous nous consacrerons dans la partie suivante à la description de l'algorithme de minimisation qui a été choisi en l'occurrence.

## 4.4 Algorithme d'optimisation

D'après les modélisations précédentes, il apparaît que tout comme $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{P}'_j)$ est un problème d'optimisation non linéaire comportant des contraintes de doubles inégalités. Comme il a été exposé au Chapitre 3, trois grandes familles de méthodes permettent de traiter efficacement ce dernier : méthode de pénalités, méthode de points intérieurs et technique du Lagrangien augmenté. La discrétisation temporelle générant un grand nombre de variables de décision, du fait des grandes surfaces des domaines spatiaux traités, il faut alors nécessairement considérer par la même occasion de très nombreuses contraintes. La première méthode d'optimisation citée ci-dessus nécessitant un dédoublement des contraintes et la seconde technique impliquant le calcul d'un nombre de multiplicateurs de Lagrange supérieur au nombre des contraintes du problème initial, notre choix s'oriente alors tout naturellement vers un algorithme du type Lagrangien augmenté.

Avant de formuler la fonction du Lagrangien augmenté du problème $(\mathcal{P}'_j)$, définissons dans un premier temps les notations suivantes :

$$u = [M_{min}, R_{min}, \Phi_{min}]^{\mathsf{T}}$$

$$U = [M_{max}, R_{max}, \Phi_{max}]^{\mathsf{T}}$$

$$v = \left[-\alpha \times I_{1\times 2(\nu_j-1)}, -\beta \times I_{1\times 2(\nu_j-1)}, -\gamma \times I_{1\times 2(\nu_j-1)}\right]^{\mathsf{T}}$$

$$V = \left[\alpha \times I_{1\times 2(\nu_j-1)}, \beta \times I_{1\times 2(\nu_j-1)}, \gamma \times I_{1\times 2(\nu_j-1)}\right]^{\mathsf{T}}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & A_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & A_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & A_4 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & A_5 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \frac{1}{Tech} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

où $Tech$ désigne la période d'échantillonnage.

Chaque problème $(\mathcal{P}_j^{'})$ peut alors se mettre sous la nouvelle forme :

$$(\mathcal{P}_j^{'}) \qquad \begin{cases} \min\limits_{X^j} \mathcal{N}(X^j) \\ u_i \leq a_i \leq U_i,\ i = 0, \cdots, 6\nu_j - 1 \\ v_i \leq b_i \leq V_i,\ i = 0, \cdots, 6(\nu_j - 1) - 1 \\ X^j \in \mathbb{R}^{6\nu_j} \end{cases} \tag{4.25}$$

où

$$a_i = (X^j)_i, \tag{4.26}$$

$$b_i = (AX^j)_i. \tag{4.27}$$

Notons respectivement $\lambda_i$ et $r_i$ les multiplicateurs de Lagrange et les coefficients de pénalité associés aux contraintes d'inégalité $a_i$ et $b_i$. Définissons alors les fonctions de mesure de violation des contraintes $\zeta(a_i, \vartheta_i)$ et $\eta(b_i, \iota_i)$

$$\zeta(a_i, \vartheta_i) = \lambda(a_i) + r(a_i)(a_i - \vartheta_i), \tag{4.28}$$

$$\kappa(b_i, \iota_i) = \lambda(b_i) + r(b_i)(b_i - \iota_i). \tag{4.29}$$

où $\vartheta_i$ et $\iota_i$ sont respectivement les bornes de $a_i$ et $b_i$.

Par ailleurs, d'après le paragraphe 3.2.2 si nous posons

$$\Pi_i(X^j, \lambda) = \begin{cases} \lambda(a_i)(a_i - U_i) + \frac{r(a_i)}{2}(a_i - U_i)^2 \text{ si } \zeta(a_i, U_i) > 0 \\ \lambda(a_i)(a_i - u_i) + \frac{r(a_i)}{2}(a_i - u_i)^2 \text{ si } \zeta(a_i, u_i) < 0 \\ -\frac{(\lambda(a_i))^2}{2r(a_i)} \end{cases} \tag{4.30}$$

et

$$\Psi_i(X^j, \lambda) = \begin{cases} \lambda(b_i)(b_i - Z_i) + \frac{r(b_i)}{2}(b_i - V_i)^2 \text{ si } \zeta(b_i, Z_i) > 0 \\ \lambda(b_i)(b_i - z_i) + \frac{r(b_i)}{2}(b_i - v_i)^2 \text{ si } \zeta(b_i, z_i) < 0 \\ -\frac{(\lambda(b_i))^2}{2r(b_i)} \end{cases} \tag{4.31}$$

le Lagrangien augmenté de $(\mathcal{P}_j^{'})$ est donné par

$$L(X^j, \lambda, r) = \mathcal{N}(X^j) + \sum_{i=0}^{6v_j - 1} \Pi_i(X^j, \lambda) + \sum_{i=0}^{6(v_j - 1) - 1} \Psi_i(X^j, \lambda). \tag{4.32}$$

Une solution de $(\mathcal{P}_j^{'})$ est alors approchée en considérant la suite de problèmes $(\mathcal{P}_j^k)$

donné par

$$(\mathcal{P}_j^k) \qquad \min_{(X^{j^{(k)}},\lambda^{(k)})\in\mathbb{R}^{12v_j+6(v_j-1)}} L(X^{j^{(k)}},\lambda^{(k)},r^{(k)}), \tag{4.33}$$

où $\lambda^{(k)}, r^{(k)}$ sont respectivement les multiplicateurs de Lagrange et les coefficients de pénalité associés au problème $(\mathcal{P}_j^k)$.

La détermination d'une solution se fait alors en appliquant l'algorithme suivant dont les principes sont détaillés au paragraphe 3.2.2 :

**Algorithme OLj :**

**Etape 0** : Choix de $X^{j^{(0)}}$. Choix de $\epsilon$, écart maximal de violation des contraintes
$k \leftarrow 0\,;\ \lambda^{(0)} \leftarrow 0\,;\ r^{(0)} \leftarrow 1$

**Etape 1** : $k \leftarrow k+1$

**Etape 2** : A l'itération $k$, déterminer $(X^{j^{(k)}},\lambda^{(k)})$ solutions de $(\mathcal{P}_j^k)$

**Etape 3** : Si $\sum_{i=0}^{6v_j-1}\left(\Pi_i(X^{j^{(k)}},\lambda^{(k)})\right)^2 + \sum_{i=0}^{6(v_j-1)-1}\left(\Psi_i(X^{j^{(k)}},\lambda^{(k)})\right)^2 < \epsilon$ alors STOP
Sinon mise à jour des multiplicateurs et des coefficients de pénalité
Retourner à l'**Etape 1**.

La mise à jour des multiplicateurs à l'**Etape 3** est donnée par la démarche expliquée également à la section 3.2.2. Pour ce qui concerne les coefficients de pénalité, leur ajustement se fait en appliquant la procédure ci-dessous :

$$\text{Si } \left(\Pi_i(X^{j^{(k)}},\lambda^{(k)})\right)^2 > 0.25\left(\Pi_i(X^{j^{(k-1)}},\lambda^{(k-1)})\right)^2 \text{ alors } r(a_i)^{(k+1)} \leftarrow 10r(a_i)^{(k)},$$
$$\text{Si } \left(\Psi_i(X^{j^{(k)}},\lambda^{(k)})\right)^2 > 0.25\left(\Psi_i(X^{j^{(k-1)}},\lambda^{(k-1)})\right)^2 \text{ alors } r(b_i)^{(k+1)} \leftarrow 10r(b_i)^{(k)}.$$

L' **Etape 2** de l'algorithme **OLj** fait apparaître un problème d'optimisation sans contraintes. En pratique, le plus souvent, afin d'éviter de traiter un nombre trop important de problèmes $(\mathcal{P}_j')$, les sous-domaines $\mathcal{D}^j$ sont définis de sorte que ce soient des zones intersectant les trajectoires sur environ 10 m. En appliquant le schéma de discrétisation temporelle explicité précédemment, le nombre de paramètres de décision s'élève alors à environ plus ou moins 850 selon la configuration géométrique de la parcelle. Etant donné la complexité du problème, la méthode LBFGS, permettant d'approximer le hessien sans l'évaluer tout en limitant l'encombrement en mémoire, a été implémenté. Par ailleurs, les critères d'arrêt utilisés sont les critères 1 et 2 définis au paragraphe 3.1.2 du Chapitre 3 avec $\epsilon_1 = 10^{-3}$ et $\epsilon_2 = 10^{-4}$.

## 4.5 Exemples numériques

Dans un premier temps, nous exposerons les résultats obtenus sur des exemples académiques afin de mettre en évidence la réduction du temps de calcul liée à l'application de l'algorithme ***Gliss***. Par la suite, nous traiterons d'une application plus réaliste concernant l'optimisation de la fertilisation en plein champ sur une parcelle réelle. Pour l'ensemble des tests, la totalité des algorithmes ont été implémentés sous Matlab. La toolbox "Optimization" ne comprenant pas la technique du Lagrangien augmenté ni celle de LBFGS, les instructions composant ces dernières ont été entièrement réécrites.

### 4.5.1 Tests académiques

Dans cette partie, une dose consigne constante fixée à 80 Kg/Ha est considérée. La largeur de travail est en l'occurence égale à 12 m et la vitesse de déplacement du tracteur est fixe et vaut 10 Km/h sachant que le processus d'épandage s'effectue en moyenne à cette vitesse dans la pratique. Nous considérons 2 exemples où la parcelle est de forme rectangulaire avec dans le premier cas uniquement 2 passages (un aller et un retour) et dans l'autre 3 passages (un aller et 2 retours). L'objectif est ici de confronter les résultats donnés en résolvant $(\mathcal{P})$ directement sur la totalité du champ (optimisation directe) et ceux obtenus grâce à la stratégie de fenêtres glissantes. Les configurations géométriques qui ont été adoptées apparaissent à la figure 4.2.

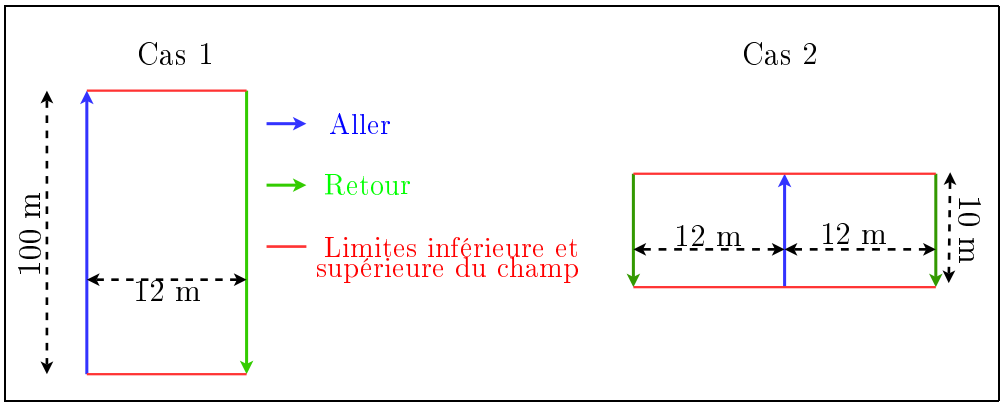



Figure 4.2 – Configurations géométriques

Les domaines spatiaux ciblés étant discrétisés par le biais d'un maillage carré de 1 m $\times$ 1 m, nous obtenons pour le cas 1 une grille de 1313 noeuds. Pour le deuxième exemple, nous devons considérer un maillage comportant 275 sommets.

Les contraintes ont été choisies de sorte qu'elle regroupent l'ensemble des limites mécaniques et dynamiques de la plupart des distributeurs. Les bornes des contraintes de doubles inégalités que nous avons considérés sont données par le tableau 4.1. Des précisions sont données lorsqu'une borne est spécifique à un disque (droite ou gauche).

| | **Borne inférieure** | **Borne supérieure** |
|---|---|---|
| **Débit (Kg/min)** | 0 | 200 |
| **Rayon moyen (m)** | 5 | 20 |
| **Angle moyen (°)** | -40(gauche)/-10(droite) | +10(gauche)/+40(droite) |
| $M'(t)$ **(Kg/(min.s))** | -0.5 | 0.5 |
| $R'(t)$ **(m/s)** | -2.5 | 2.5 |
| $\Phi'(t)$ **(°/s)** | -6 | 6 |

Tableau 4.1 – Bornes des contraintes

A partir de (4.1)-(4.5) et de la valeur maximale que peut atteindre le rayon moyen, il est possible d'en déduire que pour tout instant $t$, la nappe de répartition est intégralement incluse dans une zone circulaire de rayon équivalent à 30 m et de centre $x_a(t)$, le centre du disque rotatif de l'épandeur. Aussi, pour les exemples traités, la position finale occupée par le distributeur pour chaque trajectoire est située à 30 m en dessous de la limite inférieure du domaine spatial s'il s'agit d'un retour. Dans le cas d'un aller, la machine s'arrête à 30 m au dessus de la limite supérieure du champ. Dans tous les cas de figure, l'appareil commence à épandre au point d'intersection entre la trajectoire courante et la limite inférieure (supérieure) pour un aller (pour un retour). En appliquant la procédure de discrétisation standard, le nombre total *ntot* de paramètres de décision s'élève alors à 3132 pour le cas 1. Pour le second exemple, $ntot = 972$.

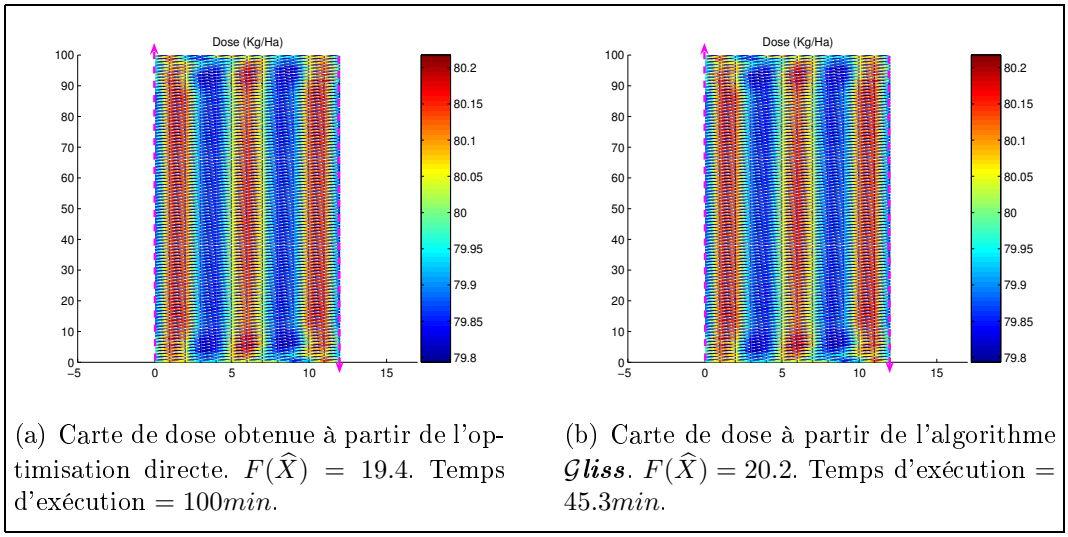
Les géométries considérées étant de forme rectangulaire, la décomposition du domaine global se fait de la même manière que présentée à la figure 4.1 et les sous-domaines $\mathcal{D}^j$ sont définis de sorte qu'ils aient une hauteur comprise entre 10 et 15 m afin de limiter la complexité des différents problèmes $(\mathcal{P}'_j)$. Obtenant dans la majorité des cas de meilleurs résultats avec des fenêtres de 10 m, c'est cette dimension qui est naturellement choisie ici. Pour le premier exemple, nous avons alors $d = 10$ et $v_j = 972$ pour tout $j \in K_j$.

Pour les deux configurations géométriques ainsi que pour les deux stratégies d'optimisation utilisées (directe et fenêtres glissantes), le nombre de paires de vecteurs stockés pour la construction du Hessien en appliquant la technique LBFGS est en l'occurence égale à 3. Par ailleurs, l'algorithme du Lagrangien augmenté est initialisé avec des variables de décision ayant des valeurs correspondantes aux données constructeur dans le cas d'un épandage avec une largeur de travail fixe de 12 m. Ces paramètres apparaissent dans le tableau 4.2 :

| | **Disque gauche** | **Disque droit** |
|---|---|---|
| **Débit (Kg/min)** | 8 | 8 |
| **Rayon moyen (m)** | 9 | 9 |
| **Angle moyen (°)** | -15 | +15 |

Tableau 4.2 – Initialisation des paramètres de décision

Les cartes de dose obtenues après optimisation dans le cas 1 ainsi que les valeurs de $F(\widehat{X})$, où $\widehat{X}$ désigne la solution optimale calculée, apparaissent à la figure 4.3.




(a) Carte de dose obtenue à partir de l'optimisation directe. $F(\widehat{X}) = 19.4$. Temps d'exécution = $100min$.

(b) Carte de dose à partir de l'algorithme $\mathcal{G}\boldsymbol{liss}$. $F(\widehat{X}) = 20.2$. Temps d'exécution = $45.3min$.

Figure 4.3 – Carte de dose obtenue après optimisation dans le cas 1.

A partir des cartes précédentes, les erreurs de fertilisation calculées en appliquant les 2 stratégies d'optimisation, sont largement inférieures à 1%. Ces résultats sont très satisfaisants au regard de l'objectif consistant à réduire les défauts de fertilisation à des valeurs incluses entre -15% et +15% (cf. Chapitre 2). Bien que l'erreur de répartition évaluée à l'issue de l'application de l'algorithme $\mathcal{G}\boldsymbol{liss}$ est légèrement supérieure à celle déterminée après optimisation directe, les qualités des solutions dans les deux cas de figure sont jugées équivalentes dans la pratique. Ici, il est surtout important de noter la différence des temps d'exécution des différentes méthodes. En effet, grâce à l'utilisation de la *méthode des fenêtres glissantes*, il est possible de réduire considérablement la durée des calculs. Pour cet exemple, un gain de près de 55 minutes peut être observé.

Les figures 4.4 et 4.5 représentent les paramètres optimaux calculés respectivement pour l'aller et le retour à partir de l'optimisation directe. En ce qui concerne les réglages déterminés à partir de l'algorithme $\mathcal{G}\boldsymbol{liss}$, ils apparaissent à la figure 4.6 pour l'aller et à la figure 4.7 pour le retour. Ces graphiques affichent des solutions très similaires pour les deux méthodes. De plus, elles évoluent au cours du temps autour de valeurs moyennes proches des réglages imposés par la majorité des fabriquants. Ainsi, le débit pour chaque disque atteint en moyenne 8 Kg/min, valeur pouvant être déterminée en appliquant la relation 1.3 vue au Chapitre 1. Les deux autres paramètres sont quant à eux facilement déterminés à partir de la lecture des tableaux de réglages de la machine. Ces tendances confortent alors la cohérence des résultats avec la réalité. Par ailleurs, nous pouvons noter des variations relativement importantes concernant surtout les angles moyens lors de l'entrée et la sortie du distributeur dans le champ. Ces fluctuations montrent alors que

des ajustements instantanées sont nécessaires afin de réduire les défauts de répartition près des limites inférieures et supérieures d'une parcelle de forme rectangulaire.

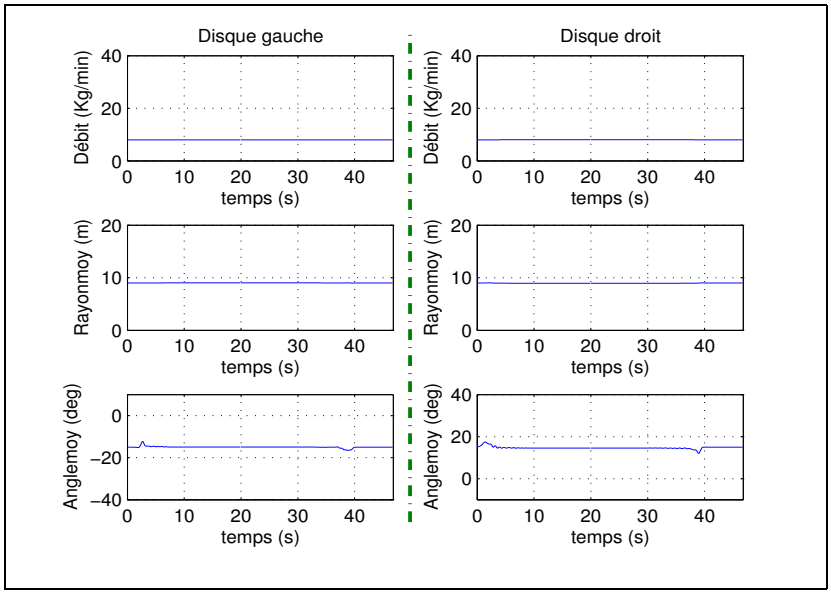



Figure 4.4 – Paramètres optimaux obtenus pour l'aller à partir de l'optimisation directe.

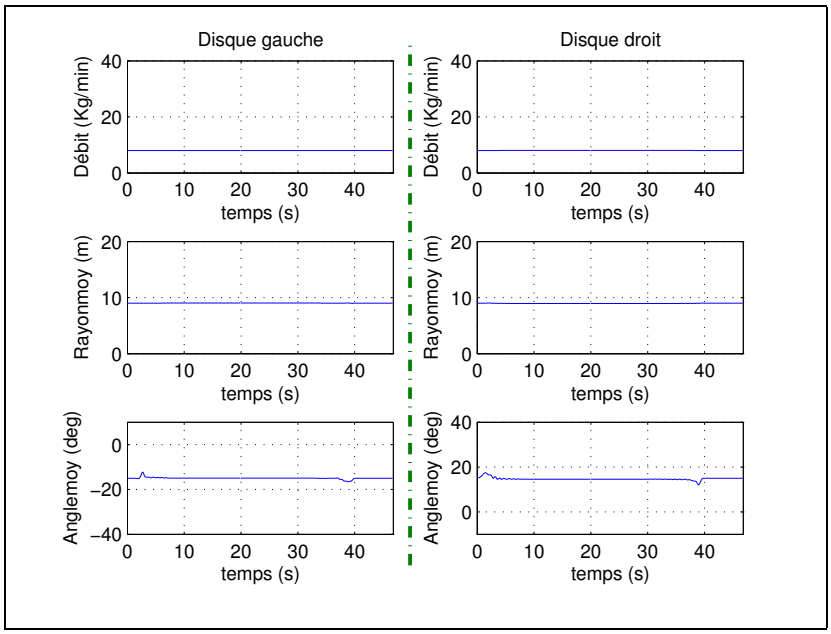



Figure 4.5 – Paramètres optimaux obtenus pour le retour à partir de l'optimisation directe.

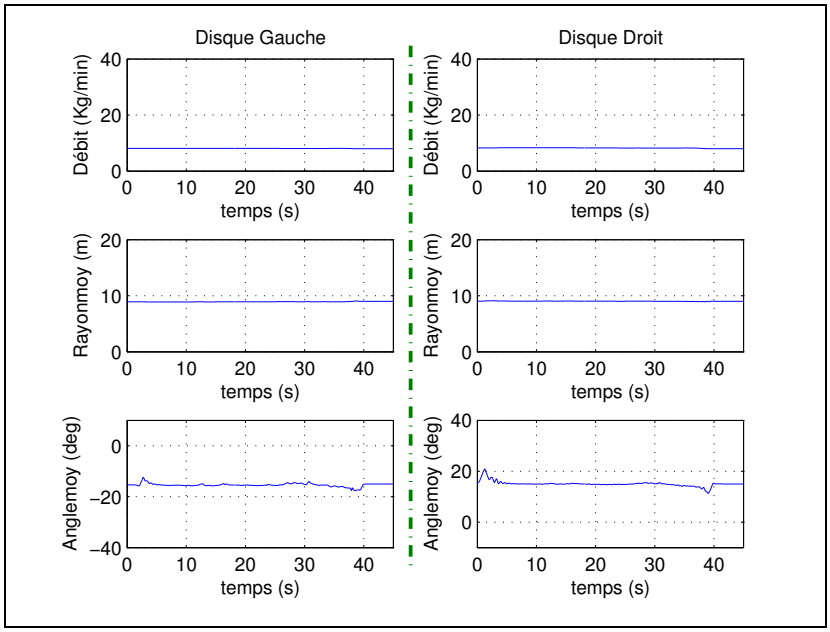



Figure 4.6 – Paramètres optimaux obtenus pour l'aller à partir l'algorithme ***Gliss.***

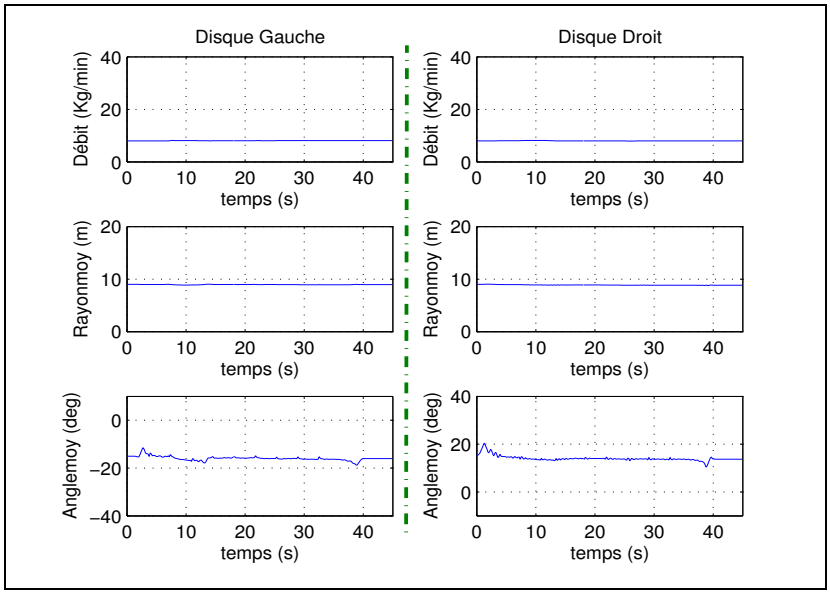
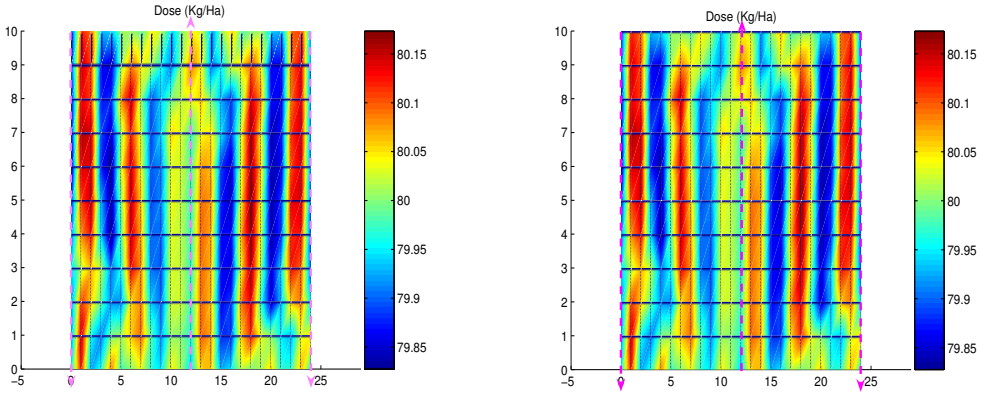



Figure 4.7 – Paramètres optimaux obtenus pour le retour à partir l'algorithme ***Gliss.***

Si nous nous intéressons à un épandage réalisé en parcourant 3 passages parallèles, nous pouvons observer qu'il est également possible d'obtenir une répartition très correcte. Comme l'affiche la figure 4.8, les valeurs finales résultant des différentes procédures d'optimisation sont faibles et très proches l'une de l'autre dans le cas 2. Pour cet exemple, nous pouvons également observer une diminution du temps de calcul qui, en l'occurence, avoisine 12 minutes.




(a) Carte de dose obtenue à partir de l'optimisation directe. $F(\widehat{X}) = 2.3$. Temps d'exécution $= 33.4min$.

(b) Carte de dose à partir de l'algorithme ***Gliss***. $F(\widehat{X}) = 1.89$. Temps d'exécution $= 21.2min$.

Figure 4.8 – Carte de dose obtenue après optimisation dans le cas 2.

Donnés aux figures 4.9-4.14, les paramètres optimaux déterminés à l'aide des deux types de stratégie d'optimisation présentent des tendances similaires à celles mises en exergue dans le cas 1. En effet, ces derniers sont très proches des paramètres de réglages traditionnels. De plus, il est également possible de noter les mêmes types de variations près des bords inférieurs et supérieurs de la parcelle en ce qui concerne les angles de projection de nappe.

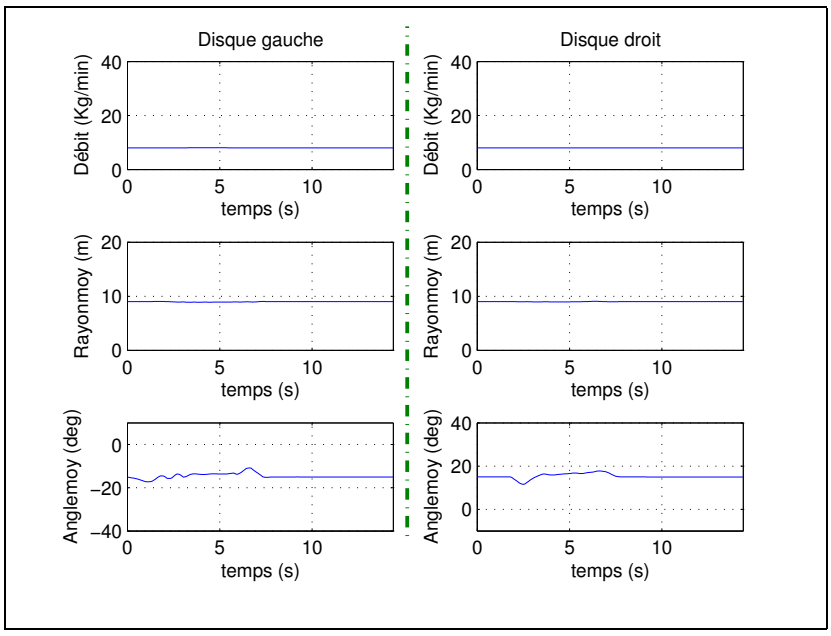



Figure 4.9 – Paramètres optimaux obtenus pour le retour à gauche à partir de l'optimisation directe.

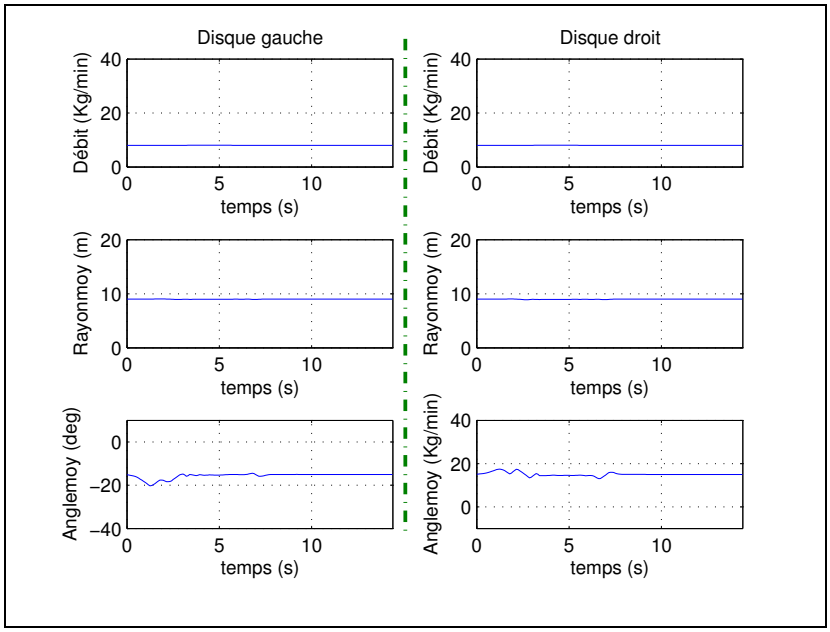



Figure 4.10 – Paramètres optimaux obtenus pour l'aller à partir de l'optimisation directe.

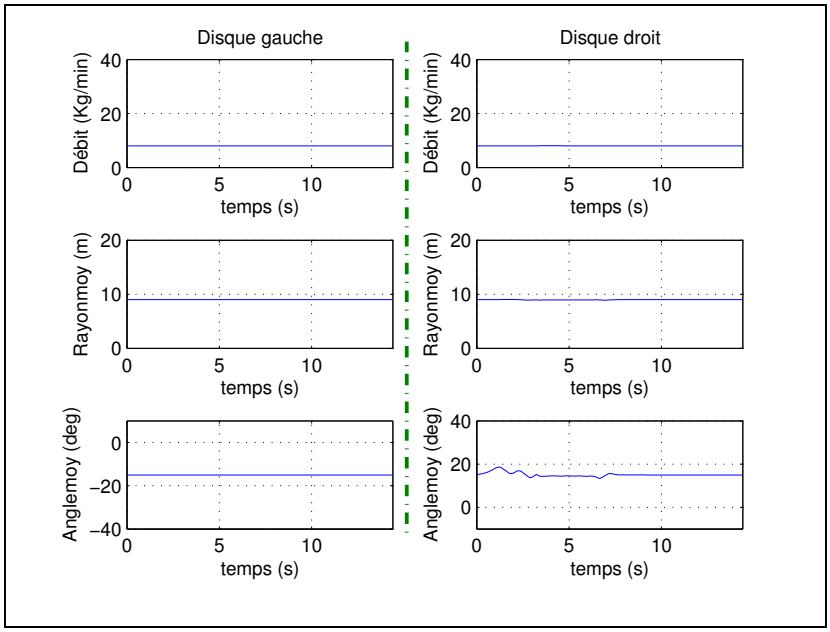



Figure 4.11 – Paramètres optimaux obtenus pour le retour à droite à partir de l'optimisation directe.

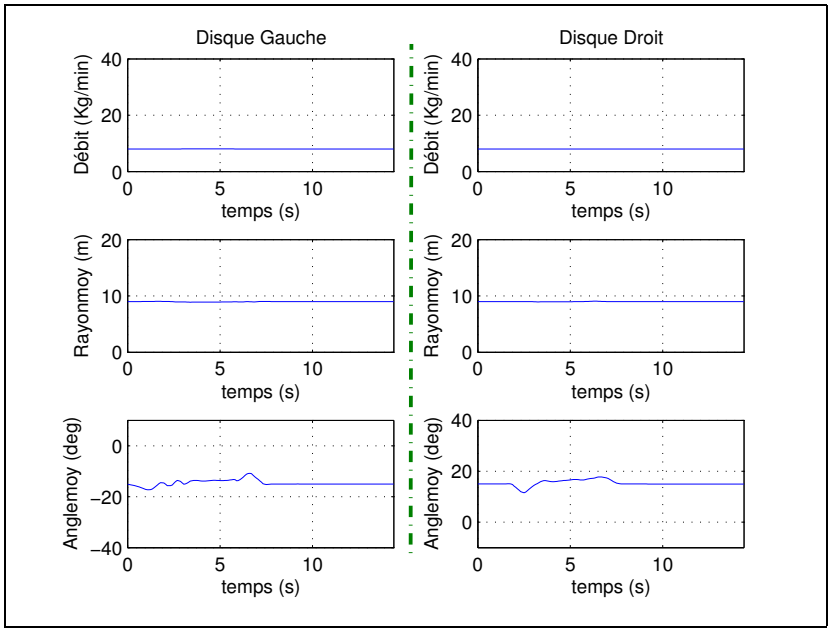



Figure 4.12 – Paramètres optimaux obtenus pour le retour à gauche à partir l'algorithme ***Gliss.***

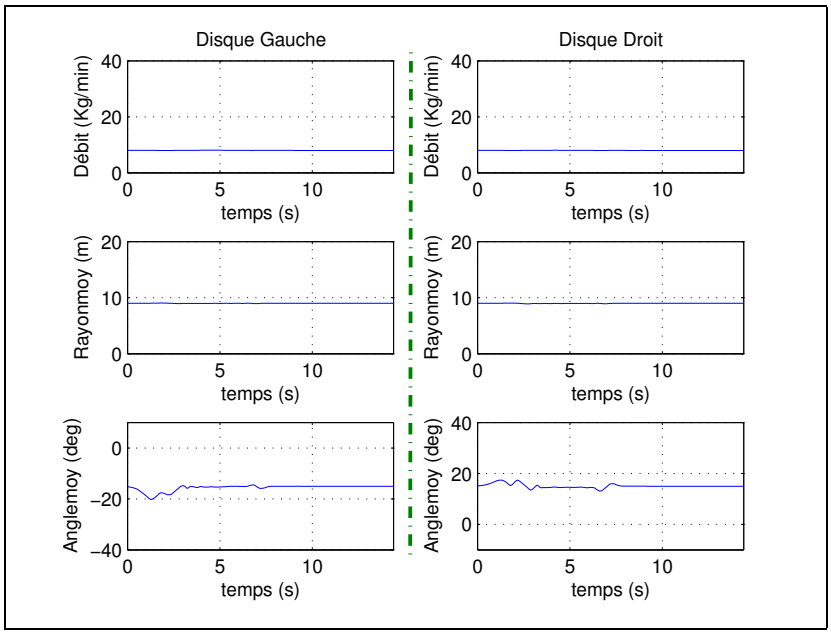



Figure 4.13 – Paramètres optimaux obtenus pour l'aller à partir l'algorithme ***Gliss.***

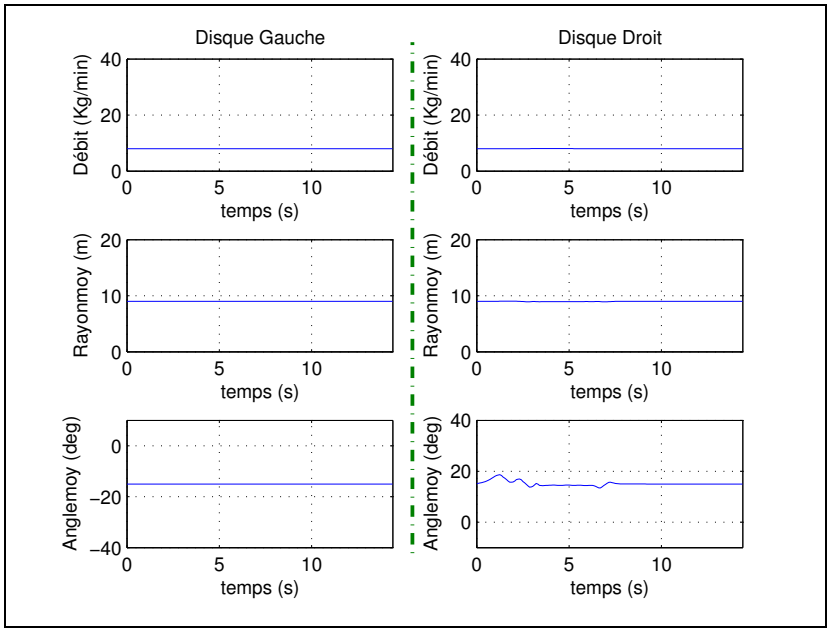



Figure 4.14 – Paramètres optimaux obtenus pour le retour à droite à partir l'algorithme ***Gliss.***

### 4.5.2 Application sur une parcelle réelle

A travers cette partie, le but visé n'est plus de comparer les résultats obtenus en appliquant les deux procédures d'optimisation précédemment exposées, mais de présenter un exemple d'apport optimal d'engrais en plein champ pour une parcelle réelle. Le cas traité concerne ici le champ illustré à la figure 2.1 au Chapitre 2. En considérant une dose consigne de 80 Kg/Ha, une vitesse de déplacement du distributeur de 10 Km/h et une largeur de travail fixée par défaut à 24 m comme cela se fait en pratique, les réglages traditionnels sont alors donnés par le tableau 4.3.

| | **Disque gauche** | **Disque droit** |
|---|---|---|
| **Débit (Kg/min)** | 16 | 16 |
| **Rayon moyen (m)** | 15 | 15 |
| **Angle moyen (°)** | -20 | +20 |

Tableau 4.3 – Réglages traditionnels.

Comme cela était le cas pour les cartes affichées aux figures 2.2 et 2.3(c), la carte des défauts de répartition résultant des réglages précédents, représentée à la figure 4.15 fait apparaître en blanc les régions où l'apport de fertilisants est correcte et où l'erreur de fertilisation est incluse entre -15% et +15%. Pour cette parcelle, seulement environ 73.5% de la surface traitée est correctement fertilisée. Une zone de sous-dosage, à -30% en moyenne, apparaît clairement entre le $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ passage plein champ. Ailleurs, les

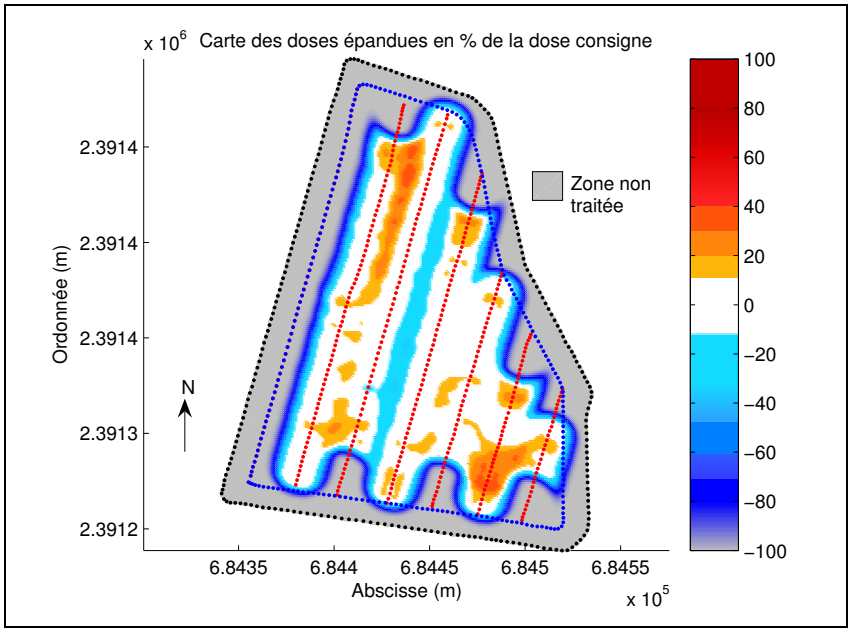



Figure 4.15 – Défauts de fertilisation obtenus.

principaux défauts consistent en des régions de surfertilisation dont le taux peut parfois être supérieur à +40%.

Afin de minimiser ces défauts, l'algorithme ***Gliss***, permettant d'avoir des solutions avec des temps d'exécution inférieurs à ceux obtenus à partir d'une optimisation globale, est utilisé. Les différents sous-domaines sont définis de sorte qu'ils soient délimités à droite et à gauche par 2 trajectoires consécutives sur une longueur moyenne de 10 m. Le nombre de variables de décision *ntot* impliqués pour chaque sous-problème évolue entre 876 et 984. Un exemple d'apport optimal d'engrais en plein champ est illustré à la figure 4.16.

Sur l'ensemble de la surface traitée, les défauts de répartition ont dans leur totalité disparu. Ainsi, l'intégralité du plein champ est correctement amendée. Ce constat est conforté par le tableau 4.4 présentant les statistiques concernant les pourcentages de surface correctement fertilisée, surdosée et sous-dosée.

| | **Réglages standards** | **Réglages optimaux** |
|---|---|---|
| **Application correcte (% surface)** | 73.5 | 100 |
| **Surdosage (% surface)** | 10.3 | 0 |
| **Sous-dosage (% surface)** | 16.2 | 0 |

Tableau 4.4 – Statistiques.

Afin de visualiser la manière dont est répartie les erreurs de fertilisation sur la surface considérée à travers cet exemple, la distribution de ces dernières en terme de pourcentage surfacique est décrite à la figure 4.17.

Comme cela a pu être observé à la figure 2.2, nous pouvons voir sur le graphique ci-

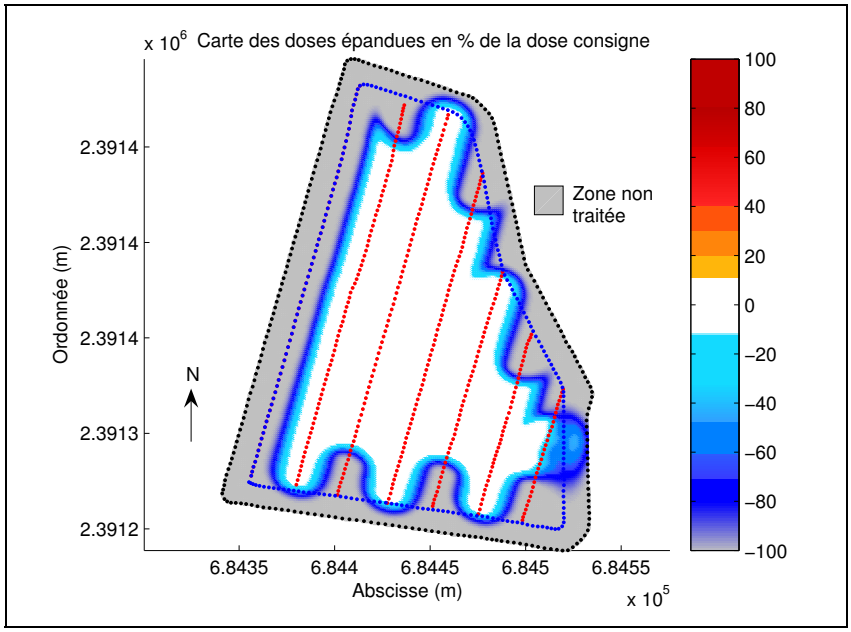



Figure 4.16 – Apport optimal de fertilisants en plein champ. ($F(\widehat{X}) = 8.7e7$. Temps d'exécution $\approx$ 4 jours.)

dessous que les surfaces surdosées sont les plus prépondérantes dans le cas où les réglages sont effectués de manière traditionnelle. A l'issue de l'optimisation, la distribution des erreurs devient en revanche centrée en 0. De plus, il faut noter que dans ce cas, elle est très resserrée autour de l'axe central. Cette propriété montre alors que les réglages calculés satisfont pleinement les objectifs fixés tant du point de vue économique qu'environnemental.

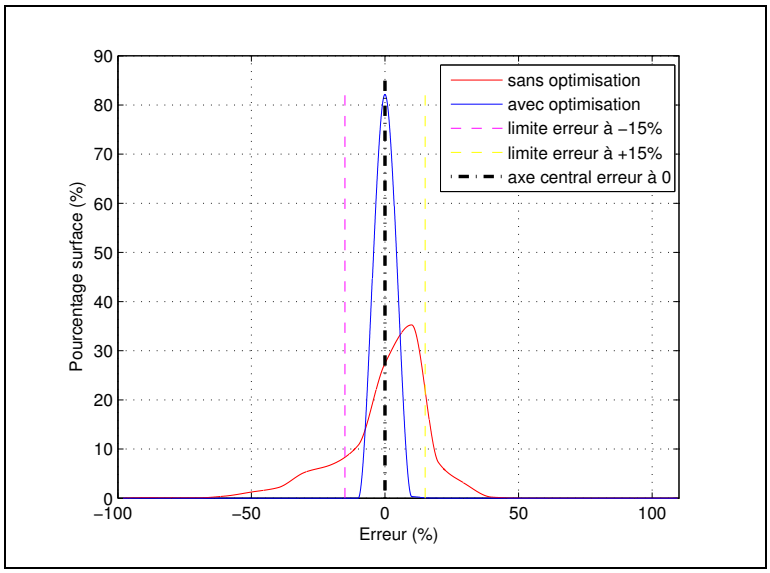



Figure 4.17 – Distribution des erreurs de fertilisation en pourcentage de surface.

Les variables optimales permettant de mener à ce type de fertilisation sont exposées aux figures 4.18 et 4.19.

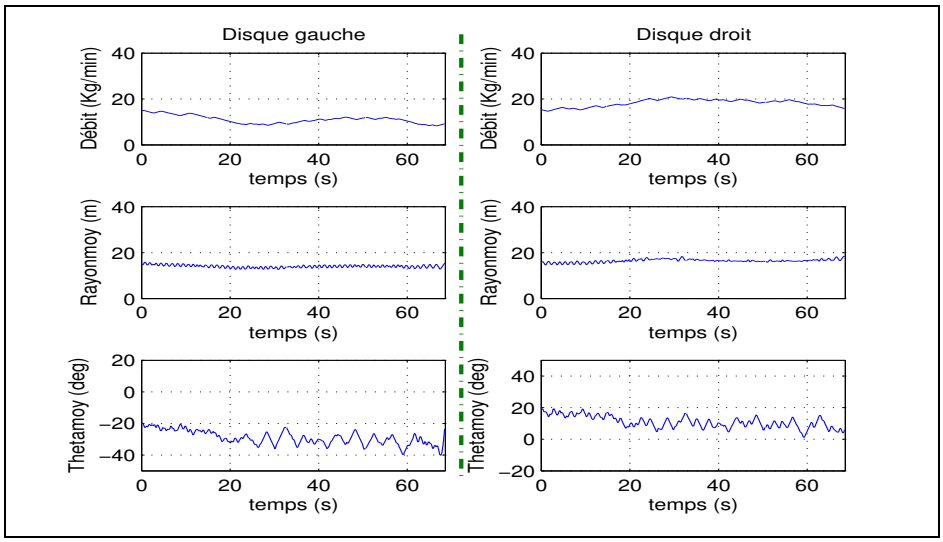



Figure 4.18 – Paramètres optimaux obtenus pour l'aller 1.

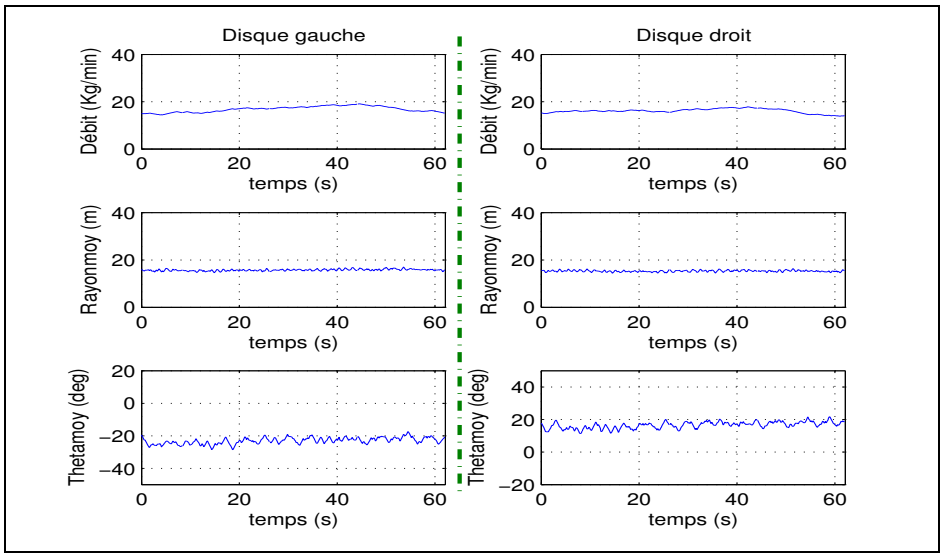



Figure 4.19 – Paramètres optimaux obtenus pour le retour 1.

Les consignes à appliquer en entrée du système pour les différents aller-retours présentant des comportements similaires dans l'ensemble, nous avons choisi de représenter ici les paramètres optimaux générés par l'algorithme uniquement pour le premier aller-retour. Le lecteur pourra retrouver les résultats concernant les autres trajectoires à l'Annexe B.

Contrairement aux tests académiques où les variables optimales ne présentaient pas d'importantes fluctuations au cours des trajectoires, cet exemple met en exergue des ajustements non négligeables des réglages de la machine à réaliser au cours du processus

d'épandage. Pour les passages considérés, nous pouvons noter que bien que le rayon moyen soit sujet à de petites oscillations, ce paramètre ne subit pas d'importantes variations au cours du temps et reste relativement proche des recommandations des constructeurs. Aussi, malgré la présence de trajectoires non rigoureusement parallèles et non régulièrement espacées, un épandage régulier en plein champ pourrait être à première vue obtenu en gardant une vitesse de rotation de disque constante. En revanche, des ajustements en temps réel du débit et de l'angle moyen sont indispensables pour minimiser les défauts de répartition. Ainsi, pour la parcelle étudiée, le débit peut évoluer de 8 Kg/min à environ 21 Kg/min. Ces valeurs extrémales sont essentiellement atteintes pour l'aller (cf. figure 4.18). La consigne qui subit les plus significatives variations est sans conteste l'angle moyen qui adopte des valeurs allant de -40° à +20° pour le disque gauche et comprises entre +1.5° et +19° en ce qui concerne le disque droit. L'analyse des courbes précédentes nous suggère alors de proposer une nouvelle formulation mathématique d'une fonction coût où seules 2 variables, à savoir le débit et l'angle de projection, soient dépendantes du temps. Le rayon moyen pour chaque disque serait alors fixe et déterminé par les tableaux de réglages de l'épandeur. Cette procédure permettrait alors de ramener le nombre de paramètres de décision à $4v_j$ et donc de diminuer la complexité des sous-problèmes $(\mathcal{P}'_j)$.

## 4.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'élaboration d'une nouvelle approche permettant la réduction des défauts de fertilisation en plein champ. Contrairement à l'ensemble des stratégies proposées actuellement qui ont une efficacité très limitée en zone de grande culture face aux multiples singularités géométriques parcellaires, nous nous sommes attachés à concevoir une stratégie de réglage de l'appareil en prenant en compte la réalité de l'épandage : le recouvrement de nappes de répartition spatiale.

Afin de résoudre ce problème, non trivial du fait de la complexité des phénomènes physiques mis en jeu lors du processus, la méthode qui a été privilégiée ici repose sur la minimisation d'un critère d'optimisation. Ce dernier devant refléter les défauts de répartition, la fonction coût qui a été retenue est l'intégration spatiale de l'erreur quadratique entre doses consigne et doses réellement appliquées. Celles-ci étant évaluées à partir de l'intégration temporelle des nappes pouvant être exprimées en fonction de leurs portées et angles de projection ainsi que du débit de la machine, ces variables ont alors été tout naturellement admises comme paramètres de décision. Etant directement liées aux commandes de la machine (ouverture des trappes d'alimentation, vitesse de rotation des disques et point de chute des granulés d'engrais sur celles-ci), ces paramètres ainsi que leurs dérivées temporelles sont soumis à des contraintes de bornes dans le but de ne pas solliciter

violemment les actionneurs et de prendre en compte les limites de ces derniers.

Le calcul analytique de la fonction objectif étant analytiquement impossible, le problème est spatialement et temporellement discrétisé. Cependant, face aux larges surfaces des exploitations agricoles considérées, ces discrétisations engendrent un nombre important de paramètres de décision et nous avons été alors rapidement confrontés à un problème d'optimisation très coûteux. L'objectif initial étant de développer un algorithme de résolution implémentable sur des ordinateurs, se trouvant chez l'agriculteur, et donc ne possédant pas nécessairement de grosses capacités de calcul, une approche consistant à simplifier la formulation mathématique originale a été proposée afin d'éviter des temps d'exécution prohibitifs. Cette dernière est basée sur une décomposition spatiale adéquate permettant de minimiser les défauts de répartition sur la totalité de la parcelle en résolvant une suite de problèmes de complexité plus faible que celle du problème initial. L'efficacité de cette procédure a été illustrée, à travers différents tests, par des réductions des temps d'exécution significatifs. La détermination des consignes optimales à présenter en entrée du système par le biais de cette approche a été testée également dans le cas d'une parcelle réelle. Les résultats alors obtenus répondent totalement aux exigences économiques et environnementales de l'épandage.

Au final, nous avons pu ici mettre en exergue une nouvelle méthode de réglage qui par le biais de techniques d'optimisation mathématique permet d'améliorer considérablement la qualité de la répartition de fertilisants par procédé centrifuge en plein champ. Cette dernière, valorisée notamment par ([VKP$^+$06a, VKp$^+$06b]), est à la base de développements en cours chez le constructeur Sulky-Burel.

Après analyse des variations des paramètres optimaux, il s'avère qu'en présence de trajectoires lentement variables, la portée de projection moyenne optimale calculée en plein champ est très proche de la valeur préconisée par les réglages des fabricants des distributeurs. Une autre approche permettant de réduire la complexité du problème consisterait à éliminer la variable rayon moyen de la fonction coût en la déterminant à partir des données du constructeur.

Par ailleurs, si nous négligeons les contraintes matérielles imposées par les moyens de calcul existant chez l'agriculteur, une étude plus poussée, du point de vue algorithmique, pourrait être menée sur une décomposition plus rigoureuse du critère d'optimisation original. Ainsi, en se basant sur les mêmes fenêtres glissantes utilisées par notre approche, le problème initial peut être naturellement décomposé en sous-problèmes qui serait définis comme des restrictions du problème original sur les sous-domaines et qui comporteraient une contrainte supplémentaire permettant d'assurer la continuité des paramètres de décision aux frontières des différents domaines $\mathcal{D}^j$. Les sous-problèmes résultant de cette procédure pouvant alors être traité de manière indépendante les uns des autres, une im-

plémentation sur une machine parallèle permettrait de résoudre efficacement le problème initial.

Comme précisé au Chapitre 2, le distributeur peut être commandé en boucle ouverte en faisant appel à des relations empiriques déterminées à partir des essais réalisés au banc. Cependant, ces relations mathématiques pouvant être entâchées d'erreurs, il est tout à fait logique de penser qu'une dérive notable entre les sorties réelles du système, pouvant être mesurées par la mise en place d'un capteur de débit et d'un capteur basé sur des techniques d'imagerie (du même type que ceux exposés à la section 1.2.2 du Chapitre 1), et les valeurs de références puisse apparaître et ainsi engendrer des défauts de répartition que nous pouvons penser non négligeables. Pour compenser ces derniers, une loi de commande prédictive pourrait être conçue étant donné qu'il est possible de connaître les séquences de consigne à l'avance par l'intermédiaire de l'approche suggérée dans ce chapitre.

Pour améliorer la qualité des répartitions d'engrais au sol durant l'épandage de bordure, il est possible de s'appuyer sur la méthode mise en relief ici. Ainsi, les réglages de l'appareil pourraient être déterminés en minimisant une fonction objectif, définie de la même manière que dans ce chapitre, qui prendrait en compte les doses déjà appliquées en plein champ. Néanmoins, des précautions supplémentaires doivent être prises non seulement pour assurer une meilleure gestion des débuts et fins d'épandages en plein champ et ainsi aboutir à une répartition uniforme sur la totalité de la parcelle, mais aussi afin de restreindre les quantités d'engrais susceptibles d'être éjectés en dehors du champ. Pour répondre à ces exigences, différentes techniques sont mises en oeuvre au Chapitre 5.

# Chapitre 5

# Optimisation de l'épandage de bordure

L'épandage de bordure est sans nul doute l'étape la plus délicate du processus de fertilisation. En effet, contrairement à l'épandage plein champ, où l'on attend uniquement de l'agriculteur qu'il applique, le long de la trajectoire courante, les quantités indispensables pour compléter les doses déjà distribuées lors de passages précédents, cette opération nécessite que le conducteur de la machine remplisse deux objectifs : apporter le complément de dose afin d'avoir une répartition uniforme dans la totalité du champ et surtout éviter l'apport excessif de fertilisants à l'extérieur de la parcelle traitée. Les instants marquant le début et la fin d'épandage le long des passages plein champ étant déterminés en tenant uniquement compte de la largeur de travail par défaut et non de la géométrie de la parcelle, les quantités distribuées lors du détourage avec un distributeur à réglages fixes engendrent inévitablement d'importantes zones de sur et sous-dosage. Afin de répondre aux objectifs de fertilisation, il est donc impératif de déterminer non seulement les points où l'agriculteur doit commencer et s'arrêter d'épandre en plein champ, mais également les réglages à appliquer lors du passage en bordure.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à deux approches permettant de réduire significativement les défauts de répartition en bordure. La première consiste à traiter le problème en deux temps : tout d'abord déterminer les instants optimaux d'ouverture et de fermeture des trappes d'alimentation pour les passages plein champ, puis optimiser les réglages du distributeur lors de détourage. En ce qui concerne la seconde méthode, elle est basée sur le calcul simultané des consignes en entrée de l'épandeur ainsi que des positions dans la parcelle où l'agriculteur doit commencer et arrêter d'épandre. Une comparaison entre les différentes stratégies est discutée à travers un exemple traitant de manière partielle la gestion optimale de l'épandage de bordure d'une parcelle fictive. Nous nous attardons ensuite sur l'étude d'un détourage complet sur une parcelle réelle.

## 5.1 Problématique

Comme il a été exposé au Chapitre 1, durant l'épandage de bordure, le distributeur éjecte de l'engrais le long d'une trajectoire située à environ une demie largeur de travail de la limite extérieure de la parcelle. Dans le cas où la ligne de détourage est plus ou moins parallèle aux passages plein champ, il est tout à fait possible d'appliquer le même type de stratégie que celle définie pour l'optimisation d'apport d'engrais plein champ (cf. Chapitre 4). En revanche, cette approche n'est pas réellement appropriée dans les zones où le passage bordure intersecte les virages systématiquement effectués par le tracteur lors de la fertilisation en va et vient en plein champ. Il est en effet essentiel de gérer de manière optimale les débuts et fins d'épandage en ces endroits afin que la dose distribuée lors du détourage complète du mieux possible celle appliquée en plein champ. Les régions où doivent être appliquées les différentes stratégies d'optimisation sont présentées à travers un exemple simple à la figure 5.1.

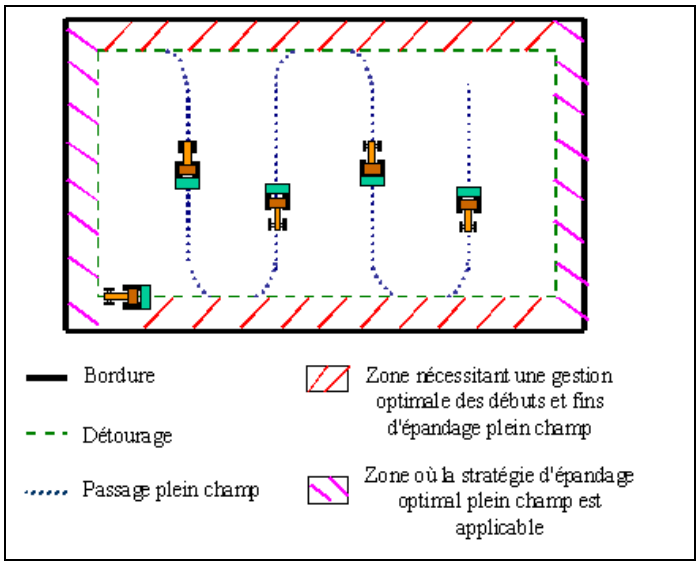



Figure 5.1 – Affichage des différents types de zone dans le cas d'une parcelle rectangulaire.

L'optimisation de l'épandage de bordure peut alors s'effectuer de deux manières différentes selon la région ciblée :

- Détermination des réglages optimaux du distributeur en bordure dans les régions hachurées en violet ;
- Calcul des instants d'ouverture et de fermeture des trappes d'alimentation en plein champ + Optimisation des réglages de la machine le long du détourage pour les zones hachurées en rouge.

Partant de l'hypothèse que les zones en violet peuvent être efficacement traitées en faisant appel aux techniques exposées au chapitre précédent, nous nous attachons donc

dans ce qui suit à définir une méthode adéquate permettant d'obtenir une répartition régulière à l'intérieur des régions où l'influence de la configuration adoptée pour commencer ou arrêter l'application d'engrais en plein champ est significative.

## 5.2 Optimisation en deux temps

### 5.2.1 Modélisation

Dans un premier temps, l'approche étudiée ici consiste à déterminer les meilleurs instants marquant les débuts et fins d'épandage en plein champ afin de reproduire la configuration géométrique idéale à partir de laquelle a été construite la stratégie de fertilisation telle qu'elle existe aujourd'hui. En effet, rappelons que dans le cas de passages parallèles, une répartition uniforme peut être facilement obtenue en réglant le distributeur de telle sorte que les lignes de recouvrement entre courbes transversales de dose soient parallèles aux trajectoires suivies par le tracteur. Aussi, la stratégie la plus simple à mettre en œuvre, afin d'appliquer des quantités de fertilisants de manière à ce qu'elles complètent de la manière la plus correcte possible les doses déjà épandues en plein champ, est de trouver une ligne de recouvrement entre les courbes transversales de dose distribuée en plein champ (déterminées en réalisant un transect orthogonalement au détourage), et celles de la dose distribuée pour le détourage qui soit parallèle au passage effectué pour l'épandage en bordure. Le schéma apparaissant à la figure 5.2 explicite cette idée :

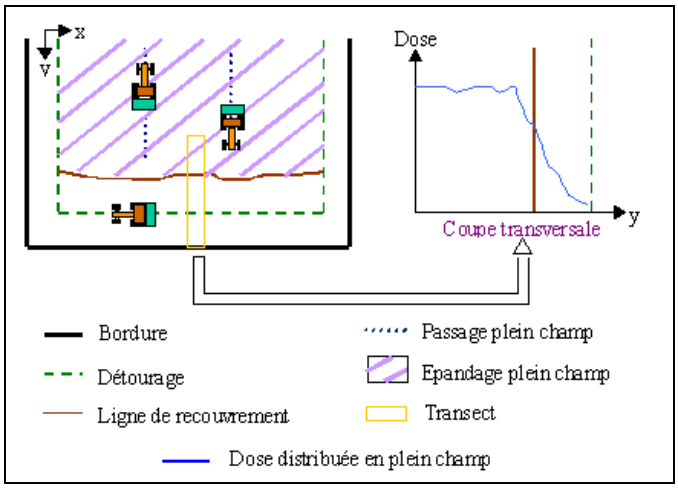



Figure 5.2 – Stratégie basée sur l'obtention d'une ligne de recouvrement de courbes transversales de dose parallèle à la ligne de détourage.

Dans le cas où l'objectif de fertilisation est d'apporter de l'engrais à dose consigne constante, il est facile de voir que la ligne de recouvrement présente bien les propriétés

recherchées si la ligne frontière délimitant le début de la zone fertilisée plein champ est elle même parallèle au passage bordure.

Les points marquant l'arrêt d'épandage étant fixés par les contraintes de manœuvre de l'appareil, ces derniers sont déterminés de la même manière que dans la pratique à savoir lorsque les disques sont situés à environ 9 mètres du passage bordure. Par ailleurs, en utilisant cette approche, la surface concernée par l'épandage plein champ sera plus grande. Cela permettra alors d'optimiser dans un deuxième temps les réglages de l'appareil lors du détourage en considérant une surface non fertilisée plus réduite. Contrairement aux instants marquant la fermeture des trappes d'alimentation en plein champ, ceux marquant le début de l'épandage sont ici sujet à une optimisation.

Avant de formaliser le critère permettant de déterminer ces instants, définissons tout d'abord quelques notations. De la même manière qu'au chapitre précédent, notons $t_d^k$, l'instant à partir duquel le distributeur commence à éjecter de l'engrais sur la $k^{\text{ième}}$ trajectoire plein champ. Posons alors $T_d = [t_d^1, \cdots, t_d^w]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^w$ où $w$ désigne le nombre de passages plein champ où le début d'épandage doit être gérée de manière optimale. D'autre part, considérons une ligne frontière notée $\mathscr{C}_{lim}$ paramétrée par la fonction $x_{lim} : (\eta, T_d) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. D'autre part, soit $x_{det} : \eta \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, une fonction définissant une ligne de détourage que nous noterons $\mathscr{C}_{det}$. Travaillant sur un domaine spatial discrétisé, supposons que $\mathscr{C}_{lim}$ coupe $m$ fois le maillage de discrétisation utilisé. Aussi, soit $x_{lim}(\eta_i, T_d)$, le $i^{\text{ième}}$ point d'intersection entre ce dernier et $\mathscr{C}_{lim}$. De même, nous pouvons définir $x_{det}(\eta_i)$ comme étant le $i^{\text{ième}}$ point le plus proche de $x_{lim}(\eta_i, T_d)$ appartenant à $\mathscr{C}_{det}$. Notons alors pour tout $i \leq m$, $dist_i(T_d) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction mesurant la distance entre $x_{det}(\eta_i)$ et $x_{lim}(\eta_i, T_d)$ définie par

$$dist_i(T_d) = \left\| x_{lim}(\eta_i, T_d) - x_{det}(\eta_i) \right\|_2 , \tag{5.1}$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$.

$\mathscr{C}_{lim}$ peut alors se rapprocher d'une courbe parallèle à $\mathscr{C}_{det}$ si pour tout $i \leq m$, $dist_i(T_d)$ tend vers une constante. Aussi, la stratégie adoptée consiste à minimiser la variance de la variable aléatoire discrète $dist(T_d)$ prenant des valeurs dans l'ensemble $\{dist_1(T_d), \cdots, dist_m(T_d)\}$ afin que pour tout $i \leq m$, $dist_i(T_d)$ se rapproche d'une distance de parallélisme. Par conséquent, il convient de considérer le problème d'optimisation $(\mathcal{P}det)$ donné par

$$(\mathcal{P}det) \quad \min_{T_d \in \mathbb{R}^w} F_{det}(T_d), \tag{5.2}$$

avec $F_{det} : \mathbb{R}^w \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F_{det} = Var(dist(T_d)). \tag{5.3}$$

Afin d'interdire le distributeur d'éjecter des granulés d'engrais à l'extérieur du champ, il est important que ce dernier ne commence pas à épandre trop tôt. D'autre part, pour chaque passage $s^k$ où le début d'épandage est sujet à une optimisation, le paramètre correspondant $\widehat{t_d^k}$ solution de $(\mathcal{P}det)$, doit être inférieur à l'instant où l'agriculteur arrête la machine en bout de parcelle. Ces limitations se traduisent alors par une contrainte de borne sur $T_d$ qui apparaît dans la nouvelle formulation du problème noté cette fois-ci $(\mathcal{P}detn)$

$$(\mathcal{P}detn) \quad \begin{cases} \min Var(dist(T_d)) \\ T_{seuil} \leq T_d \leq T_f \\ T_d \in \mathbb{R}^p \end{cases} \tag{5.4}$$

avec $T_{seuil} \in \mathbb{R}^w$ spécifiant les instants à partir desquels les nappes éjectées le long de chaque trajectoire $s^k$ sont totalement incluses dans la parcelle et $T_f \in \mathbb{R}^w$ les instants d'arrêt associés.

La dose réellement distribuée en plein champ, notée ici $Q_{pc}$, pouvant être calculée à partir de la connaissance de $\widehat{T_d}$ solutions de $(\mathcal{P}detn)$, la détermination des réglages à adopter le long du passage bordure peut alors se faire en minimisant, comme cela a été le cas dans le chapitre précédent, l'intégration spatiale de l'erreur quadratique de répartition de dose. Comme illustré au Chapitre 1, l'épandage bordure se fait le plus souvent à l'aide d'un kit bordure équipant le disque projetant les fertilisants au niveau de la limite extérieure de la parcelle. L'utilisation d'un tel dispositif fixant le rayon moyen et l'angle moyen de la nappe bordure, le nombre de paramètres de décision impliqués est par conséquent moins important que dans le cas de l'optimisation d'épandage plein champ. Pour simplifier l'exposé, nous supposons ici que le disque gauche est équipé du système bordure. En utilisant les mêmes notations définies au chapitre précédent, posons $M_{bd}(t) = (m_d(t), m_g(t)) \in \mathbb{R}^2$, $R_{bd}(t) = \rho_d(t) \in \mathbb{R}$, $\Phi_{bd}(t) = \varphi_d(t) \in \mathbb{R}$. En appliquant le schéma de discrétisation temporel détaillé à la section , nous sommes alors amenés à considérer les paramètres de décision suivants :

$$\boldsymbol{M_{bd}} = \begin{bmatrix} M_{bd_1} \\ \vdots \\ M_{bd_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \boldsymbol{R_{bd}} = \begin{bmatrix} R_{bd_1} \\ \vdots \\ R_{bd_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n}, \quad \boldsymbol{\Phi_{bd}} = \begin{bmatrix} \Phi_{bd_1} \\ \vdots \\ \Phi_{bd_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n}.$$

Outre les limites mécaniques et dynamiques de l'appareil, la contrainte concernant la réduction des quantités d'engrais éjectés en dehors de la parcelle traitée doit être également prise en compte pour le calcul des consignes. L'ensemble des solutions admissibles, notée

$S_{bd} \subset \mathbb{R}^{4n}$, est alors

$$S_{bd} = \Big\{(\boldsymbol{M_{bd}}, \boldsymbol{R_{bd}}, \boldsymbol{\Phi_{bd}}) \in \mathbb{R}^{4n} |\, M_{min} \leq \boldsymbol{M_{bd}} \leq M_{max}, \quad R_{min} \leq \boldsymbol{R_{bd}} \leq R_{max},$$
$$\Phi_{min} \leq \boldsymbol{\Phi_{bd}} \leq \Phi_{max}, \quad |M_{bd_{i+1}} - M_{bd_i}| \leq \alpha\delta, \quad |R_{bd_{i+1}} - R_{bd_i}| \leq \beta\delta, \quad |\Phi_{bd_{i+1}} - \Phi_{bd_i}| \leq \gamma\delta,$$
$$\int_{\mathcal{D}_{ext}} Q(x, \boldsymbol{M_{bd}}, \boldsymbol{R_{bd}}, \boldsymbol{\Phi_{bd}})dx \leq \nu \Big\}.$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont définis au tableau 4.1 et $\nu$ est un paramètre connu spécifié par les raisonnements pédologiques des ingénieurs agronomes. D'autre part, $\mathcal{D}_{ext}$ désigne ici un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathcal{D}_{ext} \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

Le problème à résoudre est donc

$$(\mathcal{P}bd) \qquad \min_{(\boldsymbol{M_{bd}}, \boldsymbol{R_{bd}}, \boldsymbol{\Phi_{bd}}) \in S_{bd}} F_{bd}(\boldsymbol{M_{bd}}, \boldsymbol{R_{bd}}, \boldsymbol{\Phi_{bd}}), \tag{5.5}$$

où

$$F_{bd}(\boldsymbol{M_{bd}}, \boldsymbol{R_{bd}}, \boldsymbol{\Phi_{bd}}) = \int_{\mathcal{D}_{bd}} [Q(x, \boldsymbol{M_{bd}}, \boldsymbol{R_{bd}}, \boldsymbol{\Phi_{bd}}) + Q_{pc} - Q^*]^2 dx, \tag{5.6}$$

avec $\mathcal{D}_{bd}$ un sous-domaine de $\mathcal{D}$ tel que $\partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}_{bd} = \partial\mathcal{D}_{bd}$ et $x_{det}(\eta) \in \mathcal{D}_{bd}$ pour tout $\eta \in \mathbb{R}$.

### 5.2.2 Algorithmes de résolution

Soit $\mathcal{D}_{det} \in \mathbb{R}^2$ un sous-domaine de $\mathcal{D}$ nécessitant une amélioration de la gestion des débuts et fins d'épandage en plein champ (zones apparaissant en rouge à la figure 5.1). Ce dernier est défini tel que :

- $\bigcup_{1 \leq k \leq 4} \Gamma_k = \partial\mathcal{D}_{det}$,
- $\Gamma_1 = \partial\mathcal{D}_{det} \cap \partial\mathcal{D}$,
- $\Gamma_2 = \partial\mathcal{D}_{det} \cap \partial s^1$,
- pour tout $x_{\Gamma_3}$ de $\Gamma_3$ et $x_{\Gamma_1}$ de $\Gamma_1$, $\max(\|x_{\Gamma_3} - x_{\Gamma_1}\|_2) > Z_{det}$
- $\Gamma_4 = \partial\mathcal{D}_{det} \cap \partial s^p$,

où $Z_{det}$ désigne la distance maximale entre la limite extérieure du champ et un point d'intersection entre $\mathscr{C}_{lim}$ et un trajet retour. Ainsi, si l'on considère par exemple, le cas d'un épandage dans un champ présentant des trajectoires régulièrement espacés de 24 m, $Z_{det}$ est équivalent à $12 + 9 + 15 = 36$ m (=demi-largeur de travail+distance des disques par rapport au détourage+rayon moyen). Un exemple de région définie par $\mathcal{D}_{det}$, pour une parcelle de forme rectangulaire traversée par 5 passages plein champ (3 allers et 1 retour), est décrite à la figure 5.3. Afin de mieux appréhender la notion $Z_{det}$ définie précédemment, cette illustration fait également apparaître la répartition spatiale des quantités

de fertilisants résultant de l'épandage plein champ réalisé avec une dose consigne de 100 Kg/Ha.

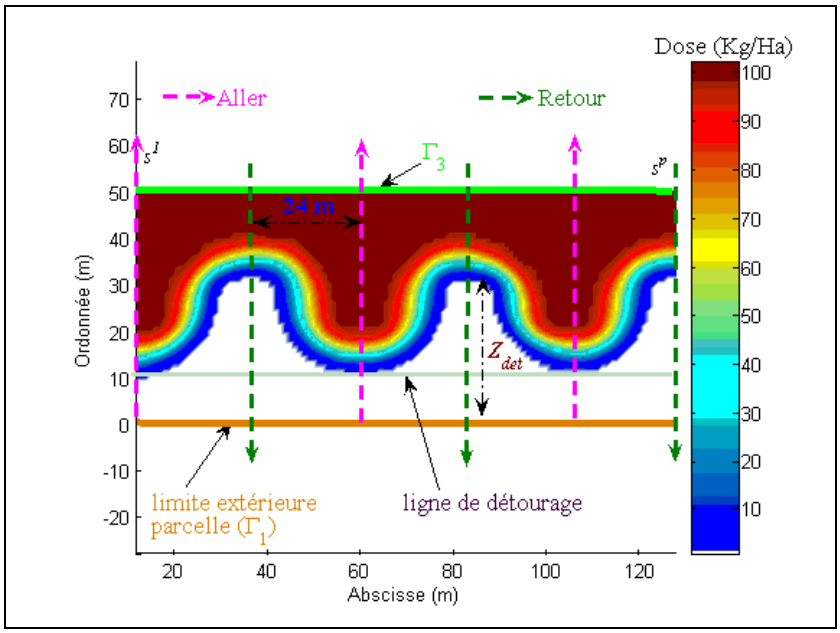



Figure 5.3 – Exemple de zone définie par $\mathcal{D}_{det}$.

Le domaine $\mathcal{D}_{det}$ définit une zone présentant une importante surface. Celle-ci peut être équivalente à 4000 m$^2$ pour les plus petites parcelles rencontrées dans la pratique. De plus, la totalité des trajectoires ont une influence significative dans cette région. L'évaluation de $F_{det}$, nécessitant la sommation des nappes éjectées le long des passages inclus dans cette zone, est rapidement coûteuse en temps de calcul. Par ailleurs, le calcul du gradient est très délicat. Ces observations nous conduisent alors à faire appel à un algorithme d'ordre zéro n'utilisant que les informations de la fonction objectif. L'implémentation de la méthode du simplexe de Nelder-Mead, basée uniquement sur l'évaluation de la fonction à minimiser, peut donc être envisageable (cf. Chapitre 3). Toutefois, cette technique étant à la base dédiée à la résolution de problèmes sans bornes, des modifications sont nécessaires afin de prendre en compte les contraintes d'inégalité. Le domaine défini par l'ensemble de ces inégalités étant convexe, il est clair que chaque contraction du simplexe à l'intérieur de cet espace génère un simplexe respectant les bornes de contrainte. Aussi, il suffit de tester les contraintes uniquement après les opérations d'expansion et de réflexion. Ce test consiste simplement à remplacer un sommet du simplexe déplacé à l'extérieur de l'espace des contraintes par un nouveau point situé à l'intersection de l'hyperplan de contrainte et de la droite qui relie ce nouveau sommet à l'ancien. La procédure à appliquer est donc la suivante :

$$Proj(T_d) = \begin{cases} T_d^i = T_{seuil}^i & \text{si } T_d^i < T_{seuil}^i \\ T_d^i = T_f^i & \text{si } T_d^i > T_f^i \end{cases} \tag{5.7}$$

où $T_{seuil}^i$ et $T_f^i$ sont les $i^{\text{ème}}$ composantes de $T_{seuil}$ et $T_f$ respectivement.

La stratégie de projection sur les bornes présente malheureusement l'inconvénient de générer parfois un simplexe dégénéré pouvant causer l'échec de la recherche d'un minimum local. En effet, après ce type d'opération, il est possible que les arêtes issus de certains sommets deviennent linéairement dépendants, réduisant l'espace de recherche au sous-espace défini par ces arêtes. Pour contourner cette difficulté, un test d'optimalité est effectué lorsque des contraintes sont saturées pour la solution calculée. Ce dernier est effectué en appliquant une procédure efficace, étudiée par Luersen ([Lue04]), basée sur un redémarrage de l'algorithme au point trouvé. Si la méthode retourne au point de départ, il s'agit d'un minimum local. Dans le cas contraire, c'est un minimum dégénéré. L'algorithme du simplexe modifié, noté **SM**, qui est implémenté est décrit ci-dessous :

**Algorithme SM :**

**Etape 0** : Soit $\epsilon > 0$. Soit un simplexe : $T_d^{(0)}, T_d^{(1)}, ..T_d^{(w)}$. $T_d^{min}$, le point du simplexe où $F_{det}$ est minimale $F_{det}(T_d^{min})$=$F_{det}^{min}$ ; $T_d^{max}$ celui où elle est maximale $F_{det}(T_d^{max})$=$F_{det}^{max}$ ; $T_d^{(q)}$ celui où elle prend sa 2ème plus grande valeur $F_{det}(T_d^{(q)})$=$F_{det}^{(q)}$ ; $b$ barycentre des points $T_d^{(j)}$ pour $j \neq w$

**Etape 1** : Reflexion : $T_d^{(r)} = b + \alpha(b - T_d^{max})$ avec $\alpha > 0$,
Si $T_{seuil} \leq T_d^{(r)} \leq T_f$, $F_{det}(T_d^{(r)}) = F_{det}^{(r)}$,
Sinon $T_d^{(r)} \leftarrow Proj(T_d^{(r)})$, $F_{det}(T_d^{(r)}) = F_{det}^{(r)}$.

Si $F_{det}^{min} < F_{det}^{(r)} < F_{det}^{max}$, $T_d^{max} \leftarrow T_d^{(r)}$. Aller à l'**Etape 2**.

Si $F_{det}^{(r)} < F_{det}^{min}$, Expansion : $T_d^{(e)} = b + \beta(T_d^{(r)} - b)$ avec $\beta > 0$,
Si $T_{seuil} \leq T_d^{(e)} \leq T_f$, $F_{det}(T_d^{(e)}) = F_{det}^{(e)}$,
Sinon $T_d^{(e)} \leftarrow Proj(T_d^{(e)})$, $F_{det}(T_d^{(e)}) = F_{det}^{(e)}$.
Si $F_{det}^{(e)} < F_{det}^{(r)}$, $T_d^{max} \leftarrow T_d^{(e)}$. Aller à l'**Etape 2**.
Sinon $T_d^{max} \leftarrow T_d^{(r)}$. Aller à l'**Etape 2**.

Si $F_{det}^{(q)} < F_{det}^{(r)} < F_{det}^{max}$, Contraction : $T_d^{(c)} = b + \gamma(b - T_d^{max})$ avec $0 < \gamma < 1$,
$F_{det}(T_d^{(c)}) = F_{det}^{(c)}$.
Si $F_{det}^{(c)} \leq F_{det}^{max}$, $T_d^{max} \leftarrow T_d^{(c)}$. Aller à l'**Etape 2**.
Sinon $T_d^{(j)} = T_d^{min} + 0.5(T_d^{min} - T_d^{(j)})$. Aller à l'**Etape 2**.

**Etape 2** : Si $\sqrt{\left(\frac{1}{w+1}\sum_{j=0}^{w}\left(F_{det}T_d^{(j)} - F_{det}(b)\right)^2\right)} < \epsilon$,
Si contraintes saturées, Aller à l'**Etape 3**.
Sinon Stop.
Sinon réordonner les points. Retourner à l'**Etape 1**.

**Etape 3** : Si redémarrage au point de convergence déjà effectué et si retour au même point, Stop.
Sinon réordonner les points. Retourner à l'**Etape 1**.

Au vue de la large surface des zones de bordure et de l'importante longueur de la ligne de détourage, il est aisé de concevoir que $(\mathcal{P}bd)$ constitue un problème de grande taille après discrétisation de la fonction coût $F_{bd}$. Par conséquent, il semble tout à fait logique d'implémenter la *méthode de fenêtres glissantes* exposée au chapitre précédent. Chacun de ces sous-domaines de $\mathcal{D}$ est, en l'occurrence, construite de sorte qu'elle soit traversée par la passage bordure sur une longueur d'environ 10 m et délimitée par $\mathscr{C}_{lim}$ et $\mathscr{C}_{bord}$ la limite extérieur du champ. Notons $\mathcal{D}_{bd}^j$, la $j^{\text{ème}}$ fenêtre incluse dans $\mathcal{D}_{bd}$. Soient $w_{bd}$ le nombre de sous-domaines couvrant la totalité de la ligne de détourage, et $\mathcal{I}_{bd}(j)$ un ensemble de fenêtres défini de la même manière que $\mathcal{I}(j)$ au Chapitre 4. La détermination des consignes de réglages de la machine se fait alors en résolvant une suite de problèmes $\{\mathcal{P}bd_j\}$ telle que pour tout $j \leq w_{bd}$, $(\mathcal{P}bd_j)$ est donné par

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}bd_j) \quad \min_{X^j \in S_{bd}^j} \mathcal{N}bd(X^j) = &\int_{\mathcal{D}_{bd}^j} [Q(x, X^j) - Q^*]^2 dx \\ &+ \sum_{k \in \mathcal{I}_{bd}(j)} \int_{\mathcal{D}_{bd}^k} [Q(x, \widetilde{X^k}) - Q^*]^2 dx,\end{aligned} \tag{5.8}$$

où

$$\begin{aligned}S_{bd}^j = \Big\{(\boldsymbol{M_{bd}}^j, \boldsymbol{R_{bd}}^j, \boldsymbol{\Phi_{bd}}^j) \in \mathbb{R}^{4v_j} \,|\, M_{min} \leq \boldsymbol{M_{bd}}^j \leq M_{max}, \quad R_{min} \leq \boldsymbol{R_{bd}}^j \leq R_{max}, \\ \Phi_{min} \leq \boldsymbol{\Phi_{bd}}^j \leq \Phi_{max}, \quad |M_{bd_{i+1}}^j - M_{bd_i}^j| \leq \alpha\delta, \quad |R_{bd_{i+1}}^j - R_{bd_i}^j| \leq \beta\delta, \quad |\Phi_{bd_{i+1}}^j - \Phi_{bd_i}^j| \leq \gamma\delta, \\ \int_{\mathcal{D}_{ext}} Q(x, \boldsymbol{M_{bd}}^j, \boldsymbol{R_{bd}}^j, \boldsymbol{\Phi_{bd}}^j) dx \leq \nu \Big\}.\end{aligned}$$

avec $\nu > 0$ désignant une quantité d'engrais à ne pas dépasser à l'extérieur du champ.

$(\mathcal{P}bd_j)$ étant un problème comportant des contraintes de doubles inégalités et de simple inégalité, le calcul d'une solution $\widehat{X^j}$ peut se faire efficacement en appliquant un algorithme du type Lagrangien augmenté. Afin de simplifier l'écriture du Lagrangien augmenté, reformulons $(\mathcal{P}bd_j)$ comme ci-après :

$$(\mathcal{P}bd_j) \qquad \begin{cases} \min\limits_{X^j} \mathcal{N}bd(X^j) \\ u_i \leq a_i \leq U_i,\ i = 0, \cdots, 4v_j - 1 \\ z_i \leq b_i \leq Z_i,\ i = 0, \cdots, 4(v_j - 1) - 1 \\ c = \int_{\mathcal{D}_{ext}} Q(x, \boldsymbol{M_{bd}}, \boldsymbol{R_{bd}}, \boldsymbol{\Phi_{bd}})dx - \nu \leq 0 \\ X^j \in \mathbb{R}^{4v_j} \end{cases} \tag{5.9}$$

où les vecteurs $a$, $b$, $u$, $U$, $z$ et $Z$ sont définis de la même manière que dans la section 4.4.

Soient $\omega$ et $y$ respectivement le multiplicateur de Lagrange et le coefficient de pénalité liés à la contrainte d'inégalité $c$. A partir des notations utilisées dans le chapitre précédent et des définitions de $\Pi_i$ et $\Psi_i$ données par (4.30) et(4.31), le Lagrangien augmenté de $(\mathcal{P}bd_j)$ peut alors s'écrire comme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X^j, \lambda, r, \omega, y) = \mathcal{N}bd(X^j) + \sum_{i=0}^{4v_j-1} \Pi_i(X^j, \lambda) + \sum_{i=0}^{4(v_j-1)-1} \Psi_i(X^j, \lambda) \\ + \frac{1}{2y} \left\{ \left[ \max\left\{0, \omega + yc(x)\right\} \right]^2 - \omega^2 \right\}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

$(\mathcal{P}bd_j)$ peut alors être résolu en implémentant l'algorithme détaillé ci-dessous :

**Algorithme OLBj :**

**Etape 0** : Choix de $X^{j^{(0)}}$. Choix de $\epsilon$, écart maximal de violation des contraintes
$k \leftarrow 0$ ; $\lambda^{(0)} \leftarrow 0$ ; $r^{(0)} \leftarrow 1$ ; $\omega^{(0)} \leftarrow 0$ ; $y^{(0)} \leftarrow 1$

**Etape 1** : $k \leftarrow k + 1$

**Etape 2** : $(X^{j^{(k)}}, \lambda^{(k)}, \omega^{(k)})$ solutions de $(\mathcal{P}bd_j^k)$

**Etape 3** : Si $V(X^{j^{(k)}}, \lambda^{(k)}, \omega^{(k)}) < \epsilon$ alors STOP
Sinon mise à jour des multiplicateurs et des coefficients de pénalité
Retourner à l'**Etape 1**.

où à l'**Etape 3**, $V : \mathbb{R}^{8v_j-3} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est définie par :

$$\begin{aligned} V(X^{j^{(k)}}, \lambda^{(k)}, \omega^{(k)}) = \sum_{i=0}^{4v_j-1} \left( \Pi_i(X^{j^{(k)}}, \lambda^{(k)}) \right)^2 + \sum_{i=0}^{4(v_j-1)-1} \left( \Psi_i(X^{j^{(k)}}, \lambda^{(k)}) \right)^2 \\ + \left[ \text{Max} \left\{ c(X^{j^{(k)}}, \omega^{(k)}), -\frac{\omega^{(k)}}{y^{(k)}} \right\} \right]^2 \end{aligned} \tag{5.11}$$

et la mise à jour de $y^{(k+1)}$ est effectuée de la manière suivante :

$$\text{Si } \left[\text{Max}\left\{c(X^{j^{(k)}},\omega^{(k)}),-\frac{\omega^{(k)}}{y^{(k)}}\right\}\right]^2 > 0.25\left[\text{Max}\left\{c(X^{j^{(k-1)}},\omega^{(k-1)}),-\frac{\omega^{(k-1)}}{y^{(k-1)}}\right\}\right]^2,$$
$$\text{alors } y^{(k+1)} \leftarrow 10y^{(k)}.$$

### 5.2.3 Exemple d'application

Nous nous intéressons dans cette partie à la réduction d'erreurs de fertilisation sur la zone bordure apparaissant à la figure 5.3. La région traitée présente une surface de 5763 m$^2$ et $Z_{det}$ est en l'occurrence égale à 36 m (calcul précisé dans la section 5.2.2). D'autre part, la dose qui est prescrite ici vaut 100 Kg/Ha et la vitesse de déplacement de la machine sur la ligne de détourage est fixée à 10 Km/h.

Comme expliquée précédemment, déterminons dans un premier temps les instants optimaux de début d'épandage en plein champ afin d'obtenir une ligne $\mathscr{C}_{lim}$ la plus parallèle possible de $\mathscr{C}_{det}$. Dans le cas présent, $T_{seuil} = [1.08, 1.08, 1.08]^\mathsf{T}$ pour éviter l'éjection de fertilisants à l'extérieur de la parcelle. Après application de l'algorithme **SM**, la répartition d'engrais distribués dans $\mathcal{D}_{det}$ à l'issue de l'épandage plein champ est affichée à la figure 5.4.

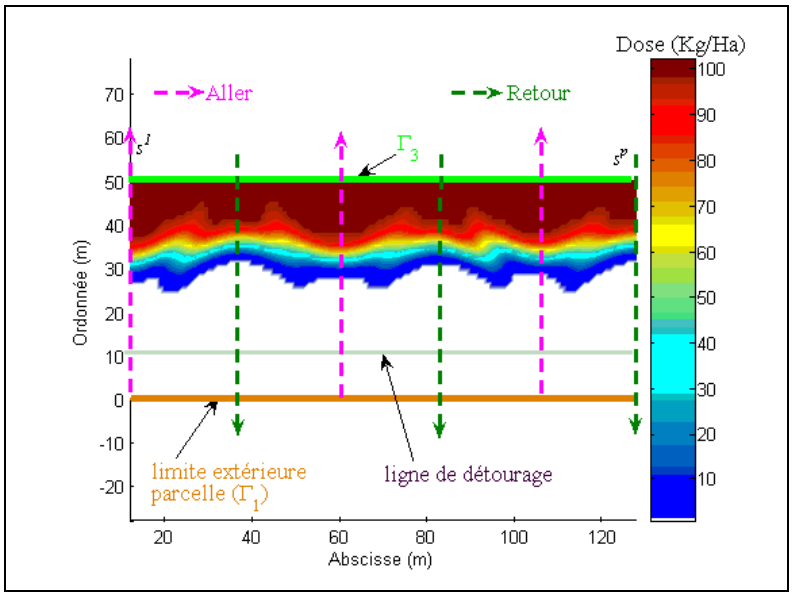



Figure 5.4 – Répartition de dose dans $\mathcal{D}_{det}$ après application de l'algorithme **SM**. ($\widehat{T}_d = [12.9, 13.2, 13.3]^\mathsf{T}$.$F_{det}(\widehat{T}_d) = 23.3$.Temps d'exécution= 5.04 min.)

Les points optimaux de début d'épandage en plein champ étant déterminés, nous pouvons alors procéder au calcul des consignes à présenter en entrée du distributeur le long du parcours de bordure apparaissant en gris à la figure ci-dessus. Le nombre total de

paramètres à estimer vaut 1172. Grâce à la stratégie de *fenêtres glissantes*, nous sommes amenés à traiter de manière séquentielle un problème $(\mathcal{P}bord_j)$ ne faisant intervenir que $4v_j = 324$ variables. La méthode LBFGS est exécutée avec un nombre maximal de paire de vecteurs stockés égal à 3. D'autre part, l'algorithme **OLBj** est initialisé avec des valeurs de paramètres qui sont celles les plus couramment utilisées en pratique lors de l'épandage de bordure pour une largeur de travail de 24 m et une dose de référence de 100 Kg/Ha. Ces valeurs d'initialisation sont regroupées dans le tableau 5.1 où les disques bordure et plein champ désignent respectivement les disques droit et gauche si nous considérons que le tracteur se déplace le long de la ligne de détourage de la figure 5.4 de la gauche vers la droite.

| | **Disque bordure** | **Disque plein champ** |
|---|---|---|
| **Débit (Kg/min)** | 10 | 20 |
| **Rayon moyen (m)** | | 15 |
| **Angle moyen (°)** | | +20 |

Tableau 5.1 – Initialisation de l'algorithme **OLBj**

Pour ce qui concerne le rayon moyen et l'angle moyen de la nappe de bordure, ils demeurent constants et valent respectivement 11 m et -10°. D'autre part, les bornes inférieures et supérieures des contraintes mécaniques et dynamiques du système sont les mêmes que celles du tableau 4.1. De plus, si nous considérons des régions $\mathcal{D}_{ext}$ de surface de 50 m$^2$ (10 m × 5 m), $\nu$ est fixé à 0.5 Kg afin de respecter les normes environnementales. La figure 5.5 illustre la carte de défauts de fertilisation simulée après optimisation.

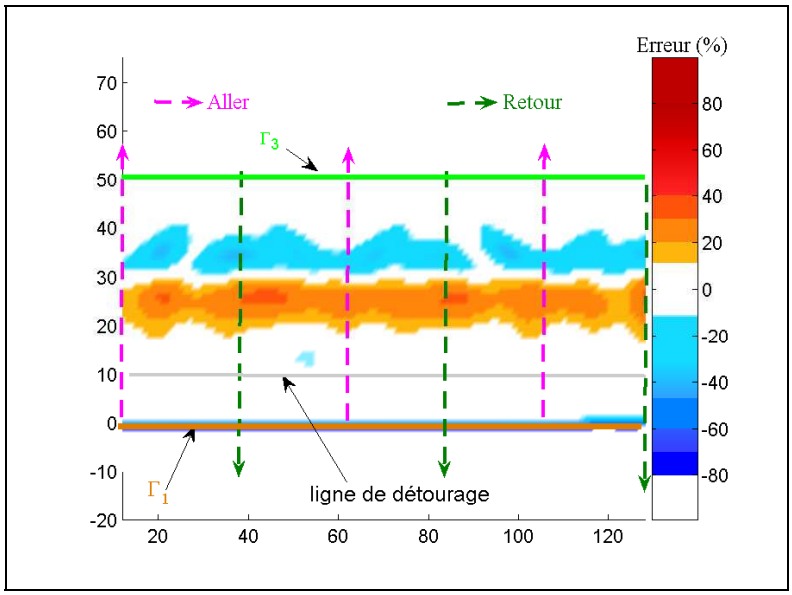



Figure 5.5 – Carte de l'erreur de répartition dans $\mathcal{D}_{det}$ après optimisation des réglages. $(F_{bd}(\widehat{X}) = 1.16e6$.Temps d'exécution≈ 8.5 h.)

A première vue, les résultats obtenus semblent mitigés car il est vrai que contrairement au cas de l'épandage plein champ, les erreurs de répartition en l'occurrence n'ont pas totalement disparu et peuvent atteindre en certains points des valeurs proches de 30%. Néanmoins, si nous comparons la proportion de surface correctement amendée en appliquant cette stratégie à celle obtenue en procédant de manière classique à partir des préconisations des constructeurs, il est forcé de constater que la qualité de l'épandage résultant de l'application des nouveaux réglages est nettement meilleure. Ces proportions sont affichées au tableau 5.2.

| | **Réglages standards** | **Réglages optimaux** |
|---|---|---|
| **Application correcte (% surface)** | 52.7 | 73.2 |
| **Surdosage (% surface)** | 28.9 | 15 |
| **Sous-dosage (% surface)** | 18.4 | 11.8 |

Tableau 5.2 – Qualité d'épandage de bordure obtenue avec réglages standards et réglages issus de la résolution de ($\mathcal{P}bd$).

Les paramètres optimaux calculés apparaissent à la figure 5.6.

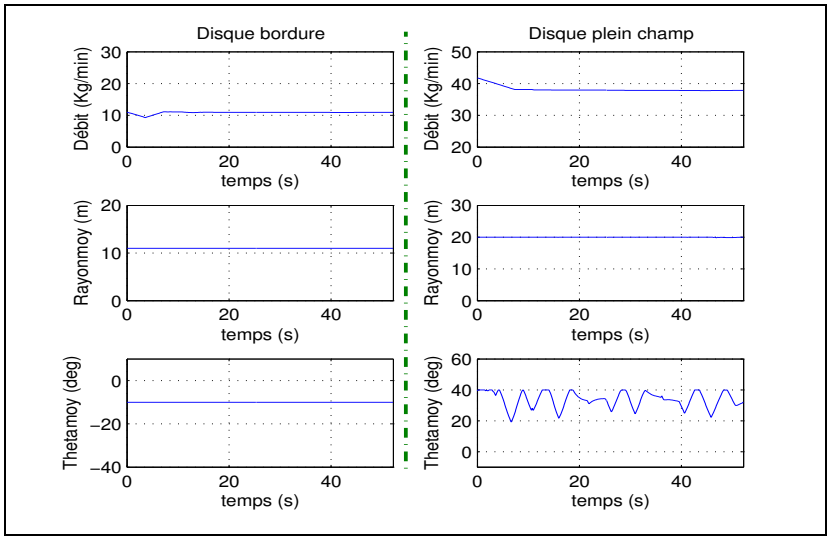



Figure 5.6 – Paramètres optimaux obtenus à l'issue de la résolution de ($\mathcal{P}bd$).

Comme nous pouvons le remarquer, les consignes calculées sont nettement différentes des réglages donnés par les fabricants de machine. Ainsi, les débits droit et gauche atteignent des valeurs beaucoup plus importantes que celles présentées lors de l'initialisation de l'algorithme d'optimisation. Nous pouvons par ailleurs noter que le rayon moyen reste constant au cours du temps et égale à sa borne supérieure à savoir 20 m. Ce phénomène pourrait s'expliquer du fait que la courbe $\mathscr{C}_{lim}$, délimitant le début de la zone où les quantités d'engrais appliqués en plein champ est non nulle, se trouve très éloignée du passage de

détourage. En effet, en l'occurrence la distance séparant ces deux lignes étant supérieure à 20 m, la dose apportée lors du parcours en bordure peut difficilement compléter celle du plein champ. Pour cette même raison, l'angle de projection atteint de manière fréquente sa valeur maximale. Ce paramètre est sujet également à des oscillations qui sont nécessaires pour permettre d'obtenir une répartition régulière. Ces remarques nous suggèrent alors de gérer les débuts et fins d'épandage en plein champ afin de rapprocher $\mathscr{C}_{lim}$ de la limite extérieure de la parcelle et par conséquent aboutir à un meilleur recouvrement des courbes de doses plein champ et bordure.

## 5.3 Optimisation simultanée

### 5.3.1 Formalisation

A la section précédente, le problème d'épandage de bordure était traitée en 2 étapes : détermination des débuts d'épandage de façon à se ramener à une configuration proche de celle recommandée par la stratégie de base de la fertilisation dans un premier temps, puis calcul des réglages à appliquer au système. Dans cette partie, nous adoptons une approche différente qui consiste à considérer un problème plus général ne faisant aucune hypothèse concernant la ligne de recouvrement des doses plein champ et bordure. Il s'agit ainsi de ne plus traiter séparément les variables de décision "*temps*" et "*réglages*" mais plutôt de les calculer de manière simultanée en ne considérant plus qu'un seul critère d'optimisation.

Avant de modéliser la fonction coût dont il est question, reformulons l'expression de la dose totale réellement épandue en plein champ données par (4.16). En notant $M_{pc}$, $R_{pc}$, $\Phi_{pc}$ les consignes optimales relatives à la fertilisation en plein champ, $Q_{pc}$ peut être ré-écrite comme une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}^{4n} \times \mathbb{R}^{p}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} Q_{pc}(x, M_{pc}, R_{pc}, \Phi_{pc}, T_{bs}) = &\sum_{k_a=1}^{p_a} \int_{T_{bs_{k_a}}}^{t_{fa}^{k_a}} q_{tot}(x, M_{pc}(t^{k_a}), R_{pc}(t^{k_a}), \Phi_{pc}(t^{k_a}))dt \\ &+ \sum_{k_r=1}^{p_r} \int_{t_{dr}^{k_r}}^{T_{bs_{p_a+k_r}}} q(x, M_{pc}(t^{k_r}), R_{pc}(t^{k_r}), \Phi_{pc}(t^{k_r}))dt, \end{aligned} \tag{5.12}$$

où $T_{bs_i}$ désigne la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $T_{bs} = [t_{d_a}^1, \cdots, t_{d_a}^{p_a}, t_{f_r}^1, \cdots, t_{f_r}^{p_r}]^\mathsf{T}$, et où les passages aller $s^{k_a}(t)$ et retour $s^{k_r}(t)$ sont respectivement au nombre de $p_a$ et $p_r$ avec $p_a + p_r = p$.

Afin de réduire les défauts de répartition de dose dans la région $\mathcal{D}_{bord}$, il convient de calculer les paramètres $\boldsymbol{M_{bs}}$, $\boldsymbol{R_{bs}}$, $\boldsymbol{\Phi_{bs}}$ et $T_{bs}$ solutions de $(\mathcal{P}bs)$ donné par

$$(\mathcal{P}bs) \min_{(\boldsymbol{M_{bs}},\boldsymbol{R_{bs}},\boldsymbol{\Phi_{bs}},T_{bs})\in S_{bs}} F_{bs}(\boldsymbol{M_{bs}},\boldsymbol{R_{bs}},\boldsymbol{\Phi_{bs}},\boldsymbol{T_{bs}}) = \int_{\mathcal{D}_{bd}} [Q(x,\boldsymbol{M_{bs}},\boldsymbol{R_{bs}},\boldsymbol{\Phi_{bs}}) + Q_{pc}(x,\boldsymbol{M_{pc}},\boldsymbol{R_{pc}},\boldsymbol{\Phi_{pc}},T_{bs}) - Q^*]^2 dx, \tag{5.13}$$

où $S_{bs}$ représente l'ensemble des contraintes que doivent respecter les variables de décision. Ce dernier est défini par

$$S_{bs} = \Big\{(\boldsymbol{M_{bs}},\boldsymbol{R_{bs}},\boldsymbol{\Phi_{bs}},T_{bs}) \in \mathbb{R}^{4n+p} |\, M_{min} \leq \boldsymbol{M_{bs}} \leq M_{max}, \quad R_{min} \leq \boldsymbol{R_{bs}} \leq R_{max},$$
$$\Phi_{min} \leq \boldsymbol{\Phi_{bs}} \leq \Phi_{max}, \quad |M_{bs_{i+1}} - M_{bs_i}| \leq \alpha\delta, \quad |R_{bs_{i+1}} - R_{bs_i}| \leq \beta\delta, \quad |\Phi_{bs_{i+1}} - \Phi_{bs_i}| \leq \gamma\delta,$$
$$\int_{\mathcal{D}_{ext}} Q(x,\boldsymbol{M_{bs}},\boldsymbol{R_{bs}},\boldsymbol{\Phi_{bs}})dx \leq \nu, \quad T_{min} \leq T_{bs} \leq T_{max}\Big\}.$$

### 5.3.2 Algorithmes d'optimisation

Pour les mêmes raisons évoquées lors du choix d'un algorithme de résolution du problème $(\mathcal{P}bd)$ (cf. section 5.2.2), $(\mathcal{P}bs)$ est traité en faisant appel à la technique de *fenêtres glissantes* en tenant compte d'une décomposition du domaine $\mathcal{D}_{bd}$ similaire à celle effectuée précédemment.

Notons ici pour tout $j \leq w_{bd}$, $K'_j = \{i \in \mathbb{N}\}$ tel que $Q_{pc}(x,\boldsymbol{M_{pc}},\boldsymbol{R_{pc}},\boldsymbol{\Phi_{pc}},T_{bs_i}) \neq 0\ \forall x \in \mathcal{D}^j_{bd}$ et $v'_j = card(K'_j)$. D'autre part, soit $X^j_{pc} = \left[\boldsymbol{M_{pc}},\boldsymbol{R_{pc}},\boldsymbol{\Phi_{pc}},T^j_{bs}\right]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{v'_j}$. Il vient qu'une solution de $(\mathcal{P}bs)$ peut être approximée en résolvant la suite de problèmes $\{\mathcal{P}bs_j\}$ décrit par

$$(\mathcal{P}bs_j) \quad \min_{(X^j,T^j_{bs})\in S^j_{bs}} \mathcal{N}bs(X^j,T^j_{bs}) = \int_{\mathcal{D}^j_{bd}} [Q(x,X^j) + Q_{pc}(x,X^j_{pc}) - Q^*]^2 dx + \sum_{k\in\mathcal{I}_{bd}(j)} \int_{\mathcal{D}^k_{bd}} Q(x,\widetilde{X^k}) + Q_{pc}(x,\widetilde{X^k_{pc}}) - Q^*]^2 dx, \tag{5.14}$$

où $S^j_{bs}$ désigne la restriction de $S_{bs}$ dans $\mathcal{D}^j_{bd}$ et $X^j = \left[\boldsymbol{M_{bs}}^j,\boldsymbol{R_{bs}}^j,\boldsymbol{\Phi_{bs}}^j\right]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{4v_j}$.

$(\mathcal{P}bs_j)$ étant un problème sujet à de nombreuses contraintes d'inégalités, un algorithme du Lagrangien augmenté est utilisé. Reformulons les vecteurs $u$ et $U$ (définis initialement au Chapitre 4) de la manière suivante :

$$u = [u, T_{min}]^{\mathsf{T}},$$
$$U = [U, T_{max}]^{\mathsf{T}}.$$

Par ailleurs posons $a = [X^j, T^j_{bs}]^{\mathsf{T}}$. A partir des notations de la section 4.4, il vient que le Lagrangien augmenté de $(\mathcal{P}bs_j)$ est

$$\mathcal{L}(X^j, T_{bs}^j, \lambda, r, \omega, y) = \mathcal{N}bs(X^j, T_{bs}^j) + \sum_{i=0}^{4v_j+p-1} \Pi_i(X^j, T_{bs}^j, \lambda) + \sum_{i=0}^{4(v_j-1)-1} \Psi_i(X^j, \lambda) + \frac{1}{2y}\left\{[\max\{0, \omega + yc(x)\}]^2 - \omega^2\right\}. \tag{5.15}$$

($\mathcal{P}bs$) peut donc être résolu en appliquant la procédure $\mathcal{G}$**liss** où à l'**Etape 1** l'algorithme **OLBj** est utilisé.

### 5.3.3 Test numérique

Afin de comparer la qualité d'épandage résultant de l'application de cette nouvelle approche à celle obtenue avec la stratégie d'optimisation en deux temps, nous nous intéressons à la même région bordure traitée au paragraphe 5.2.3. Les valeurs initiales des paramètres de réglages sont les mêmes que celles apparaissant au tableau 5.1. Pour chaque fenêtre $j$, la variable $T_{bs}$ est initialisée telle que $T_{bs}^{j(0)} = [1.08, 1.08, 1.08, 7.56, 7.56, 7.56]^\mathsf{T}$. A l'issue de l'optimisation, nous obtenons $\widehat{T_{bs}} = [9.48, 9.28, 9.26, 7.56, 7.56, 7.56]^\mathsf{T}$ et la répartition de la dose de fertilisants distribuée le long des passages plein champ est illustrée à la figure 5.7.

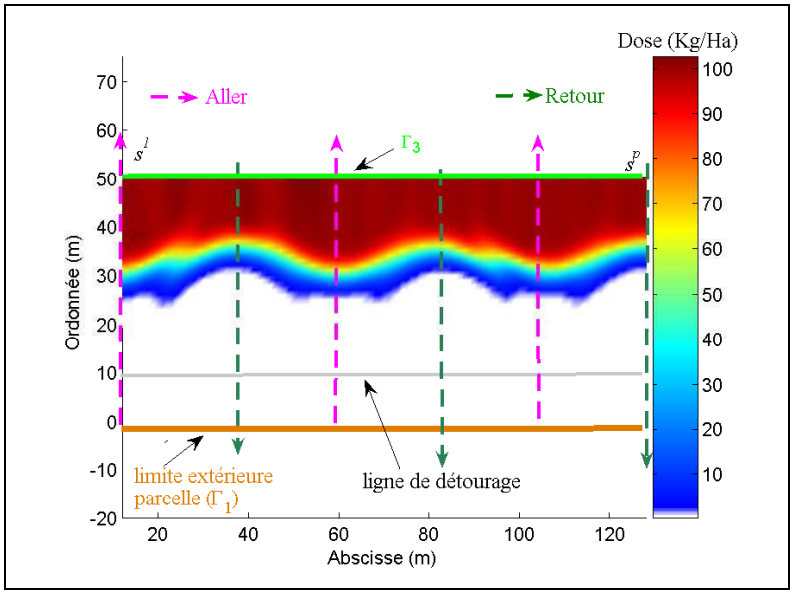



Figure 5.7 – Répartition de la dose dans $\mathcal{D}_{det}$ correspondant aux instants optimaux de début et d'arrêt d'épandage plein champ.

Comme nous pouvons le constater, la carte obtenue diffère légèrement de celle représentée à la figure 5.4. En effet, il est aisé de voir que $\mathscr{C}_{lim}$ décrit en l'occurrence une courbe qui n'est plus parallèle à la limite extérieure du champ. D'autre part, il est important de

noter que grâce à cette configuration, les nouveaux défauts de répartition, représentés à la figure 5.8, connaissent une réduction plus importante que celle observée en faisant appel à la stratégie d'optimisation en deux temps.

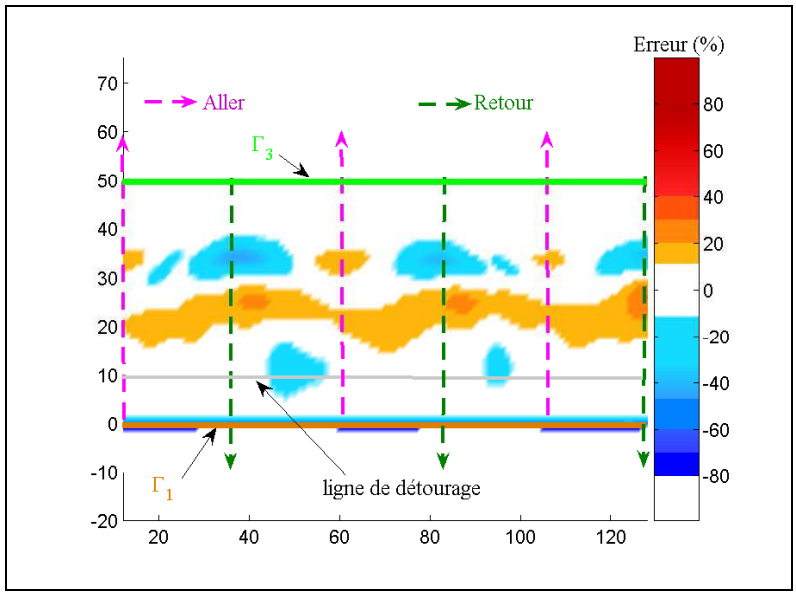



Figure 5.8 – Carte de l'erreur de répartition dans $\mathcal{D}_{det}$ après optimisation des réglages. ($F_{bs}(\widehat{X}, \widehat{T_{bs}}) = 9.24e5$.Temps d'exécution$\approx$ 12.2 h.)

En analysant la carte d'erreurs, nous pouvons remarquer une nette diminution de la surface des régions sous-fertilisées. Par ailleurs, la bande de la zone surdosée de la figure 5.4 est nettement plus fine. Ces observations visuelles sont non seulement confortées par la valeur finale de $F_{bs}(\widehat{X}, \widehat{T_{bs}})$ qui est environ inférieure de $2e3$ à $F_{bd}(\widehat{X})$, mais aussi par les statistiques du tableau 5.3 où les approches 1 et 2 désignent respectivement les méthodes basée sur l'optimisation en deux temps et l'optimisation simultanée.

| | **Réglages "approche 1"** | **Réglages "approche 2"** |
|---|---|---|
| **Application correcte (% surface)** | 73.2 | 83.6 |
| **Surdosage (% surface)** | 15 | 7.1 |
| **Sous-dosage (% surface)** | 11.8 | 9.3 |

Tableau 5.3 – Comparaison des qualités d'épandage de bordure obtenue avec les 2 types d'approches employées.

La configuration résultant de la nouvelle gestion des instants d'ouverture et de fermeture des trappes d'alimentation du distributeur le long des trajectoires plein champ et la supériorité de la qualité d'épandage résultant de l'application de l'approche 2, nous amène alors à penser que les paramètres de réglages soient, en l'occurrence, soumis à de plus fortes variations que dans le cas de l'approche 1. Cette idée est vérifiée par les courbes

présentées à la figure 5.9. En effet, l'angle de projection de la nappe recouvrant la dose plein champ est sujet à d'importantes fluctuations et évolue entre 20 et 40° au cours du temps. Pour ce qui concerne les autres paramètres, ils suivent les mêmes tendances que celles affichées à la figure 5.6.

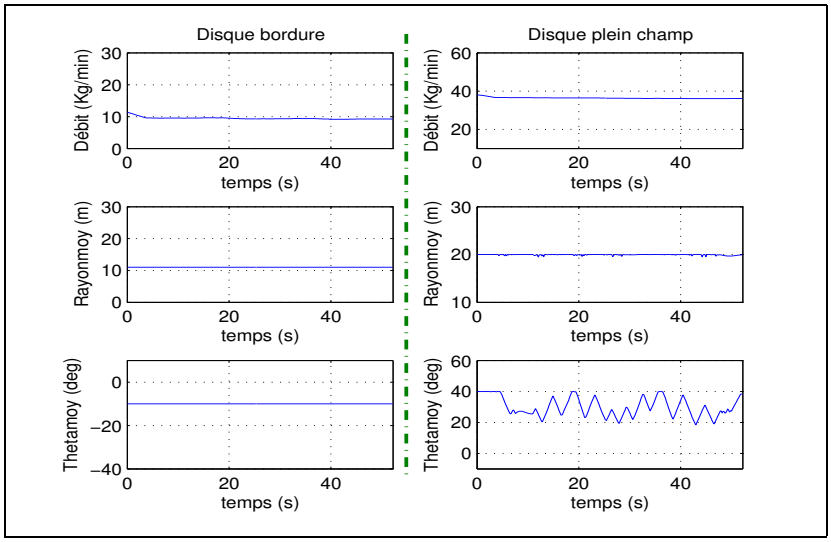



Figure 5.9 – Paramètres optimaux obtenus à l'issue de la résolution de ($\mathcal{P}bs$).

Bien que la stratégie, basée sur l'optimisation simultanée des variables *"temps"* et *"réglages"*, apporte des résultats très satisfaisants, elle présente cependant l'inconvénient d'être plus coûteux en temps d'exécution que l'approche 1. L'utilisateur final privilégiera l'application de telle ou telle méthode selon le degré de précision d'épandage voulue. Ainsi, s'il s'avère qu'une solution de grande qualité soit préférable, ce dernier pourra faire appel à l'approche 2. Dans le cas contraire, l'approche 1 permettant d'obtenir des résultats corrects avec un temps d'exécution moins important sera employé.

## 5.4 Optimisation de l'épandage de bordure pour une parcelle réelle

La parcelle dont il est question dans cette partie est la même que celle traitée en dernière section du chapitre précédent. En l'occurrence, la ligne de détourage se trouve à environ 12 m de la limite extérieure du champ ce qui nous conduit à adopter des valeurs similaires de réglages que celles employées pour le rayon moyen et l'angle moyen du disque bordure en section 5.2.3. Afin de déterminer la solution permettant d'aboutir à la meilleure répartition de dose, nous appliquons ici la méthode basée sur la gestion optimale simultanée des débuts et fins d'épandage et des consignes de réglages.

Avant de procéder à l'exécution de l'algorithme d'optimisation, le vecteur $T_{bs}$ est initialisé tel que chaque composante correspondant à une ouverture de la trappe d'alimentation de la machine vaut 1.08 s. Celles associées à un instant de fermeture peuvent être regroupées dans le vecteur $T_{stop} = [78.5, 73.6, 63.8, 46, 38.5, 20]^{\mathsf{T}}$. A l'issue de l'optimisation, les instants calculés sont récapitulés dans le tableau 5.4.

| **Passage** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Instant de début (s)** | 9.46 | 11.5 | 12.75 | 11.47 | 13.76 | 10.7 |
| **Instant d'arrêt (s)** | 78.22 | 73.62 | 63.56 | 45.9 | 38.54 | 19.62 |

Tableau 5.4 – Instants de début et d'arrêt optimaux d'épandage en plein champ.

La répartition de dose plein champ correspondant est exposée à la figure 5.10.

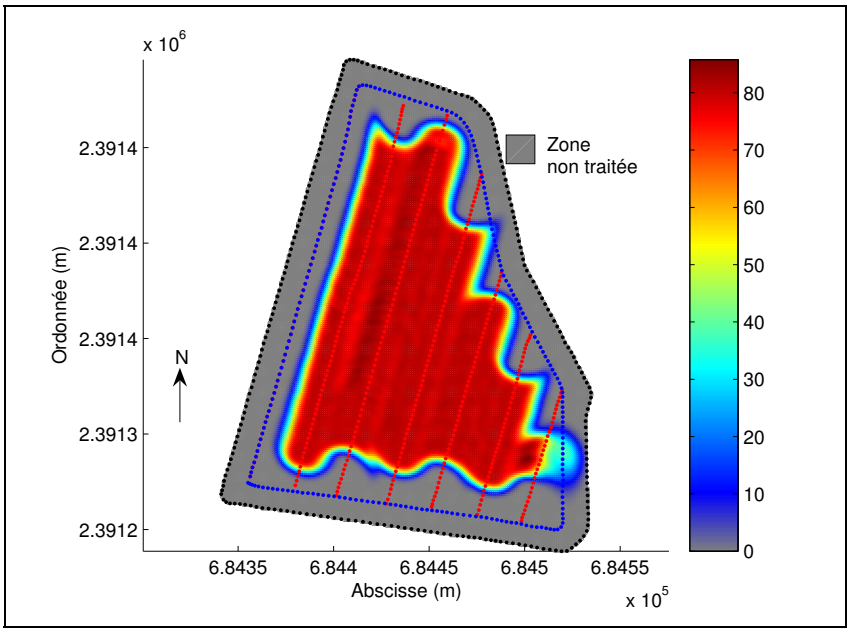



Figure 5.10 – Répartition de dose en plein après gestion optimale des débuts et fins d'épandage.

Contrairement à la gestion traditionnelle des débuts et fins d'épandage en bout de champ, le résultat obtenu après optimisation montre que l'agriculteur doit commencer à épandre dans certains cas à plus de 30 m de la ligne de détourage. Au vue des défauts de fertilisation mises en exergue à la figure 2.2, cette longue distance semble légitime afin d'éviter des grosses zones de surdosage en bordure.

La simulation des erreurs de répartition, après détermination de la séquence de consignes optimales à présenter en entrée du système le long du passage bordure, fait apparaître diverses zones de sur et sous-dosage. Ainsi, à partir de la figure 5.11, nous pouvons observer que contrairement à l'épandage en plein champ, celui en bordure présente de nombreuses

régions où les erreurs sont nettement supérieures à 15% en valeur absolue et peuvent atteindre près de 70% en certains endroits. Néanmoins, il faut noter que les zones fertilisées de manière incorrecte sont beaucoup moins importantes que celles de la figure 2.2. Par ailleurs, nous pouvons noter que les régions sous-fertilisées affichent une surface plus importante que celles qui sont surdosées, ce qui est très important du point de vue environnemental.

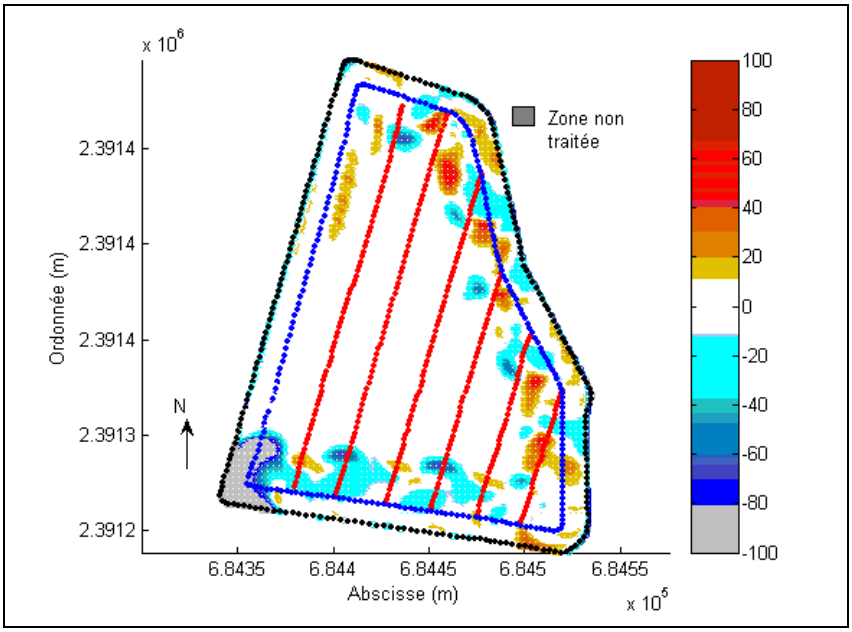



Figure 5.11 – Carte des défauts de répartition à l'issue de l'optimisation de l'épandage plein champ et bordure. ($F_{bs}(\widehat{X}, \widehat{T_{bs}}) = 1.98e8$. Temps d'exécution≈ 2 jours et demi.)

D'autre part, si nous nous attardons sur la proportion de surface correctement fertilisée (cf. Tab.5.5), nous pouvons juger que le résultat découlant de l'optimisation est très largement satisfaisant.

| | **Réglages standards** | **Réglages optimaux** |
|---|---|---|
| **Application correcte (% surface)** | 45.2 | 83.9 |
| **Surdosage (% surface)** | 38.9 | 5.8 |
| **Sous-dosage (% surface)** | 15.9 | 10.3 |

Tableau 5.5 – Qualité d'épandage sur la totalité du champ obtenue avec réglages standards et réglages optimaux.

Du fait d'une ligne de détourage non rigoureusement rectiligne, tous les paramètres de décision, apparaissant à la figure 5.12, présentent des variations au cours du temps. Toutefois, les plus importantes fluctuations peuvent être attribuées à l'angle moyen de projection qui, variant entre -40° et +10°, occupe toute la plage des valeurs autorisées par les contraintes de borne. Pour ce qui concerne le rayon moyen, nous pouvons noter

qu'il est la plupart du temps égal à sa valeur maximale autorisée et qu'il adopte ainsi une tendance similaire à celle observée sur les exemples traités précédemment. D'autre part, contrairement aux courbes illustrées par les figures 5.6 et 5.9, le débit appliqué au niveau du disque plein champ est nettement inférieur à 40 Kg/min. Ce phénomène pourrait alors expliquer les grandes variations de l'angle moyen. En effet, les valeurs adoptées par le débit étant relativement basses, en comparaison avec les résultats calculés plus haut, les nappes éjectées doivent alors "balayer" toute la surface bordure afin d'aboutir à une répartition aussi uniforme que possible sur la totalité de la parcelle.

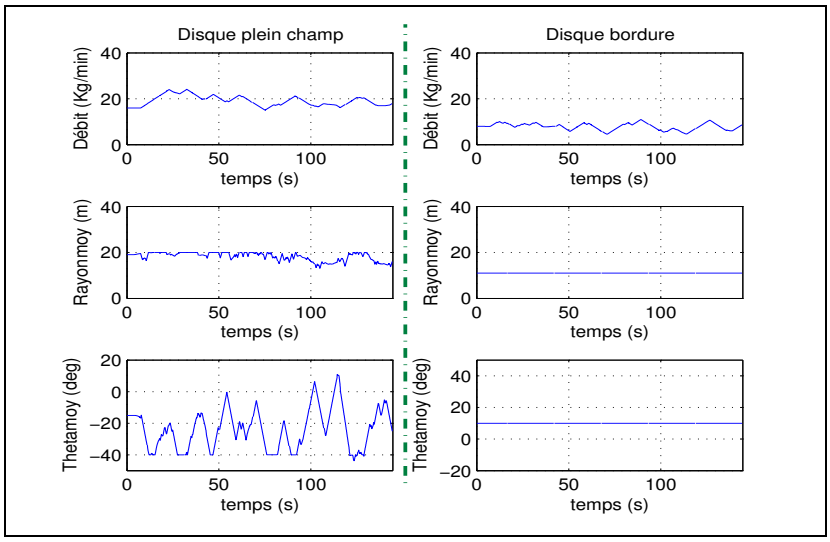



Figure 5.12 – Paramètres optimaux obtenus pour l'épandage de bordure.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, deux approches sont proposées afin de réduire les dégradations de la qualité de la répartition de fertilisants appliqués lors de la difficile phase d'épandage de bordure qui a pour but d'apporter le complément de doses nécessaire à l'obtention d'une application uniforme sur l'ensemble du champ tout en limitant les concentrations d'engrais à l'extérieur de ce dernier. Les stratégies envisagées ont été élaborées en tenant compte des deux principales sources d'erreurs de fertilisation apparaissant durant cette opération, à savoir d'une part les réglages fixes ne permettant pas de prendre en compte les singularités géométriques fréquentes au niveau des zones frontières de la parcelle, et d'autre part les instants d'ouverture et de fermeture des trappes d'alimentation de la machine en plein champ inadéquats du fait de l'application d'un raisonnement erroné (cf. Chapitre 1).

Aussi, partant de l'hypothèse qu'une répartition uniforme peut être facilement obtenue dans le cas où les lignes de recouvrement de courbes transversales de dose sont parallèles

au passages suivis par le tracteur (base de la stratégie d'épandage d'aujourd'hui), une méthode est tout d'abord développée de manière à gérer séparément les débuts et fins d'épandage en bout de champ et les ajustements des paramètres mécaniques de l'outil pendant le parcours de la ligne de détourage. Ainsi, dans un premier temps, en utilisant les points marquant l'arrêt d'épandage définis par les contraintes de manoeuvres effectuées en bout de parcelle, les instants d'ouverture des trappes de la trémie du distributeur sont déterminées afin de minimiser la variance de la distance entre la ligne du détourage et la ligne frontière délimitant le début de la région fertilisée en plein champ. Face à l'évaluation coûteuse de la fonction objectif et du calcul difficile du gradient de cette dernière, nous avons implémenté une version modifiée de la méthode du simplexe de Nelder-Mead afin de prendre en compte les contraintes de bornes imposées par la géométrie parcellaire. A partir de la configuration obtenue à l'issue de la gestion des débuts d'épandage en plein champ, les consignes de réglage de l'appareil sont alors calculées par l'intermédiaire de la résolution d'un problème d'optimisation consistant à minimiser l'écart quadratique entre dose désirée et dose réelle tout en prenant en compte les contraintes mécaniques du distributeur de la même manière que dans le chapitre précédent. Cette approche, testée sur une parcelle fictive, permet alors de réduire significativement les zones de sur et sous-dosage habituellement observées après fertilisation des régions de bordure.

Pour ce qui concerne la seconde stratégie, le problème de gestion des arrêts et débuts d'épandage pour les aller-retours plein champ ainsi que celui du réglage du distributeur sont traités simultanément. Pour ce faire, une approche mathématique basée sur le calcul des solutions d'un problème d'optimisation sous contraintes est également employée. L'intégration spatiale de l'erreur quadratique entre dose réellement épandue et dose prescrite a tout naturellement été choisie comme fonction coût. Contrairement au Chapitre 4, où les variables décision étaient uniquement les paramètres mécaniques du distributeur, les instants de débuts et fins d'épandage sont ici aussi considérées comme des inconnues à déterminer. Grâce à l'utilisation de l'algorithme ***Gliss***, le problème peut être résolu de manière efficace et une plus importante réduction des erreurs de fertilisation dans la zone bordure peut être observée en appliquant cette approche qu'en faisant appel à la première stratégie. Cependant, cette qualité d'épandage est obtenue au prix d'un temps d'exécution supérieur à celui mesuré dans le cas de l'optimisation en deux temps. Par conséquent, le choix final d'employer l'une ou l'autre méthode résultera d'un compromis entre temps d'exécution et régularité de l'application d'engrais.

Il faut noter que les paramètres optimaux calculés ici, sont des solutions sous-optimales qui résultent du fait d'optimiser séparément l'épandage plein champ et bordure. Bien que cette stratégie soit nécessaire pour éviter une explosion du temps d'exécution sur une machine standard, une amélioration de la qualité des solutions pourrait être observée

dans le cas d'une parallélisation de l'algorithme telle qu'elle a été exposée au chapitre précédent.

D'autre part, il est tout à fait logique de penser que les défauts de répartitions qui subsistent à l'issue de l'optimisation sont, dans une certaine mesure dûs à l'utilisation d'un dispositif de bordure, qui en fixant le rayon et l'angle moyen de projection de la nappe vers l'extérieur du champ, limite grandement les capacités du distributeur. Aussi, une étude concernant l'optimisation des paramètres de la nappe ainsi que de la forme du kit bordure pourrait amener à une distribution de fertilisants plus régulière.

# Chapitre 6

# Contrôle optimal de l'épandage centrifuge : étude préliminaire

A travers les Chapitres 4 et 5, les consignes de réglages à adopter étaient déterminées en minimisant la valeur d'une fonction objectif reflétant les défauts de répartition observés dans le champ traité. Le critère à optimiser était alors défini naturellement comme étant la norme $L^2$ de l'erreur entre la dose prescrite et la dose réellement épandue. Cette dernière était évaluée dans ce cas directement à partir du modèle de Colin (1.1). Une autre possibilité aurait été de calculer ces quantités d'engrais véritablement distribuées à partir de la résolution d'une équation à dérivées partielles. C'est cette approche qui est privilégiée ici. Il s'agit donc, plus précisément, de reformaliser le problème d'optimisation de manière à ce qu'il puisse être assimilé à un problème de commande optimale où la variable d'état est en l'occurrence la dose apportée par le distributeur.

Ce chapitre constitue une étude préliminaire concernant la détermination des consignes optimales à appliquer à l'épandeur par résolution d'un problème de contrôle optimal. Afin d'expliciter cette nouvelle approche, nous présentons, tout d'abord, l'équation d'état du problème. Quelques résultats issus de la résolution numérique de ce dernier sont également exposés afin de vérifier sa validité. La formalisation du problème d'optimisation, ainsi que la méthode de résolution employée sont ensuite mises en exergue. Enfin, nous illustrons cette nouvelle approche par des exemples académiques simples où des petits domaines comportant seulement deux passages sont considérés : dans un premier temps parallèles, ensuite non parallèles.

## 6.1 Equation d'état

Rappelons qu'un problème de commande optimal est par définition un problème d'optimiation sous contraintes où l'une de ces dernières est une équation d'état modélisant entièrement le système étudié. Aussi, afin de formaliser notre problème de contrôle, il est avant tout nécessaire de définir l'équation dont la résolution permet de connaître l'état du processus d'épandage, à savoir la quantité d'engrais distribuée.

### 6.1.1 Modélisation

**Proposition 6.1.1** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Lorsque le centre du disque $\boldsymbol{x_c} = (x_c, y_c)$ occupe des positions successives se trouvant à l'extérieur de $\Omega$, la quantité d'engrais distribuée $Q$ sur $\Omega$ (définie par l'équation 4.6 du Chapitre 4 section 4.1) peut être considérée comme la solution de l'équation aux dérivées partielles en $z$*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial z}{\partial y^2} = f, \ dans \ \Omega \\ z = g, \ sur \ \partial\Omega \end{cases} \tag{6.1}$$

*où $f$ et $g$ sont tout simplement*

$$f = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}, \ dans \ \Omega, \tag{6.2}$$

$$g = Q, \ sur \ \partial\Omega. \tag{6.3}$$

**Preuve :**

Afin de simplifier l'exposé, nous considérons uniquement la répartition d'engrais dûe uniquement à un seul disque pour une unique trajectoire, le résultat pouvant être facilement étendu dans le cas d'un épandage avec les deux disques sur plusieurs passages. D'après Colin ([Col97]), $Q : \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est alors définie comme suit

$$Q(x, M, R, \Phi) = \int_0^T q(x, M(t), R(t), \Phi(t)), \tag{6.4}$$

avec

$$\begin{aligned} q(x, M(t), R(t), \Phi(t)) = \frac{M(t)}{2\pi\sigma_r\sigma_\theta} \exp\left( \frac{-\left(\sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2} - R(t)\right)^2}{2\sigma_r^2} \right) \\ \times \exp\left( \frac{-\left(\operatorname{atan2}\left(y - y_c, x - x_c\right) - \Phi(t)\right)^2}{2\sigma_\theta^2} \right), \end{aligned} \tag{6.5}$$

et où la fonction atan2 :$\mathbb{R}^2 \to [-\pi/2, \pi/2]$ est définie par

$$\text{atan2}\,(y,x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \times u_H(-x) \times sign(y) & \text{si } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.6}$$

La fonction $u_H$ désigne ici la fonction de Heaviside (ou fonction échelon) telle que :

$$u_H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{6.7}$$

Considérons maintenant les fonctions $q_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $q_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$q_r(x,y) = \exp\left(\frac{-\left(\sqrt{X_c^2+Y_c^2} - R(t)\right)^2}{2\sigma_r^2}\right), \tag{6.8}$$

$$q_\varphi(x,y) = \exp\left(\frac{-\left(\text{atan2}\,(Y_c,X_c) - \Phi(t)\right)^2}{2\sigma_\theta^2}\right), \tag{6.9}$$

avec $X_c = x - x_c$ et $Y_c = y - y_c$.

Calculons alors les dérivées partielles secondes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_r(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{-q_r(x,y)}{\sigma_r^2(X_c^2+Y_c^2)} \times \left[\frac{(X_c^2+Y_c^2-X_c)(\sqrt{X_c^2+Y_c^2}-R(t))}{\sqrt{X_c^2+Y_c^2}}\right. \\ &\quad \left. + X_c^2 - \frac{X_c^2(\sqrt{X_c^2+Y_c^2}-R(t))^2}{\sigma_r^2}\right], \end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_r(x,y)}{\partial y^2} &= \frac{-q_r(x,y)}{\sigma_r^2(X_c^2+Y_c^2)} \times \left[\frac{(X_c^2+Y_c^2-Y_c)(\sqrt{X_c^2+Y_c^2}-R(t))}{\sqrt{X_c^2+Y_c^2}}\right. \\ &\quad \left. + Y_c^2 - \frac{Y_c^2(\sqrt{X_c^2+Y_c^2}-R(t))^2}{\sigma_r^2}\right], \end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_\varphi(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{q_\varphi(x,y)}{\sigma_\theta^2(X_c^2+Y_c^2)^2} \times \left[-2X_cY_c(\text{atan2}\,(Y_c,X_c)-\Phi(t)) - Y_c^2\right. \\ &\quad \left. + \frac{Y_c^2(atan2(Y_c,X_c)-\Phi(t))^2}{\sigma_\theta}\right] \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial^2 q_\varphi(x,y)}{\partial y^2} = \frac{-q_\varphi(x,y)}{\sigma_\theta^2(X_c^2+Y_c^2)^2} \times \left[-2X_cY_c(\text{atan2}\,(Y_c,X_c)-\Phi(t))+X_c^2 - \frac{X_c^2(\text{atan2}\,(Y_a,X_a)-\Phi(t))^2}{\sigma_\theta}\right]. \tag{6.13}$$

A partir de (6.10)-(6.13), il est aisé de voir que $f \in L^2(\Omega)$ si et seulement si $X_c^2+Y_c^2 \neq 0$. Le résultat découle alors de la proposition 3.3.1. □

### 6.1.2 Simulations

Afin d'illustrer la proposition 6.1.1, nous nous intéressons ici à la résolution numérique de $(\Sigma)$ sur deux types de domaines $\Omega_1$ et $\Omega_2$ illustrés à la figure 6.1.

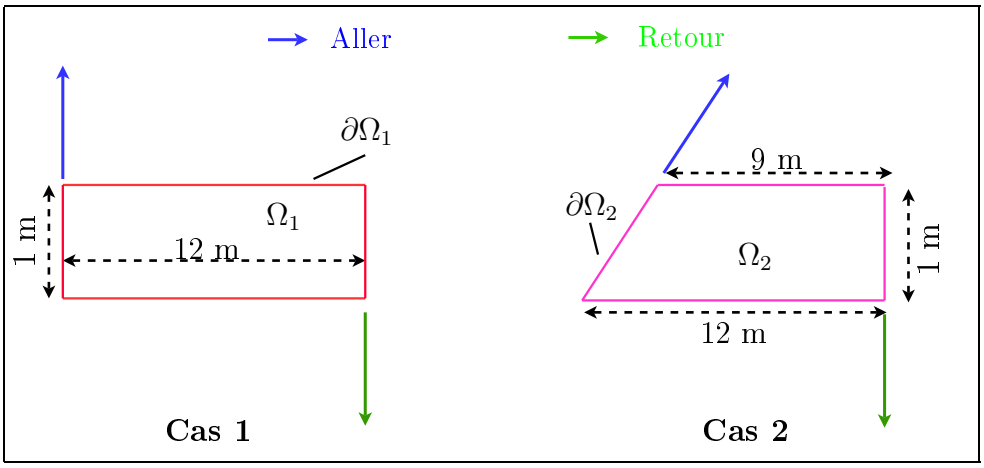



Figure 6.1 – Géométries adoptées pour la résolution numérique de $(\Sigma)$.

La résolution de $(\Sigma)$ se fait en appliquant la méthode des éléments finis à l'aide de la toolbox Matlab "Partial Differential Equation". Le maillage est constitué de $N$ noeuds et est issu d'une triangulation de Delaunay. D'après le paragraphe 3.3.3, le problème se réduit alors au système linéaire suivant :

$$KZ = B \tag{6.14}$$

où $Z$ désigne un vecteur des valeurs de la fonction $z$ aux sommets du maillage, $K$ et $B$ respectivement une matrice $N \times N$ symétrique définie positive (matrice de rigidité) de

composantes $K_{i,j}$ et un vecteur de taille $N$ de composantes $B_i$ tels que :

$$\begin{aligned}
K_{i,i} &= \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_i dx \text{ pour tout noeud } i \text{ à l'intérieur de } \Omega,\\
K_{i,i} &= \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_i dx + AG_i \text{ pour tout noeud } i \text{ sur } \partial\Omega,\\
K_{i,j} &= \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j dx \text{ pour tout } i \neq j,\\
B_i &= \int_\Omega f\phi_i dx - \int_\Omega \nabla g \cdot \nabla\phi_i dx \text{ pour tout noeud } i \text{ à l'intérieur de } \Omega,\\
B_i &= \int_\Omega f\phi_i dx - \int_\Omega \nabla g \cdot \nabla\phi_i dx + AG_i \text{ pour tout noeud } i \text{ sur } \partial\Omega. \qquad (6.15)
\end{aligned}$$

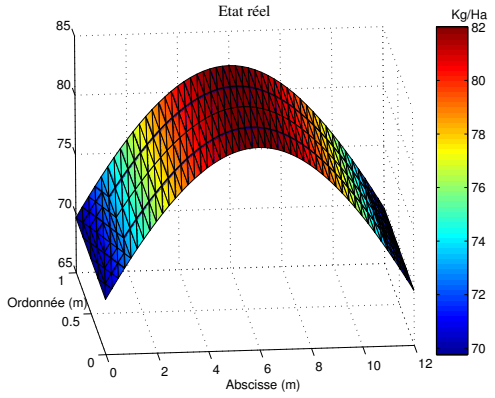
avec pout tout $i$, $\phi_i$ une fonction d'interpolation linéaire définie sur chaque triangle du maillage, $G_i$ la valeur de $g$ au noeud $i$ et $A$ un nombre choisi tel que $A >> \max(K_{i,j})$.

Pour les deux exemples étudiés, qu'il s'agisse d'un aller ou d'un retour, le distributeur commence à éjecter de l'engrais à 50 cm de la limite extérieure du domaine. Les déplacements du tracteur se font sur 20 m avec une vitesse de 10 Km/h. De plus, les réglages utilisés apparaissent au tableau 6.1.

| | **Disque gauche** | **Disque droit** |
|---|---|---|
| **Débit (Kg/min)** | 8 | 8 |
| **Rayon moyen (m)** | 14 | 14 |
| **Angle moyen (°)** | -20 | +20 |

Tableau 6.1 – Réglages appliqués lors des simulations.

Pour le premier exemple, l'ensemble des calculs sont réalisés avec un maillage comportant 277 noeuds et conduisent aux résultats présentés aux figures 6.2 et 6.3.




(a) Dose réelle.

(b) Dose calculée par résolution de l'équation d'état.

Figure 6.2 – Affichage de l'état pour le cas 1.

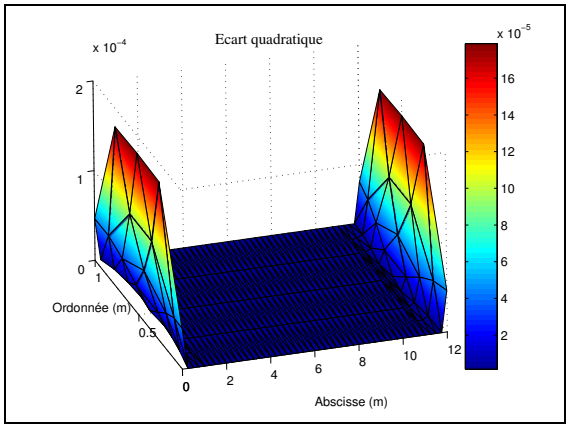
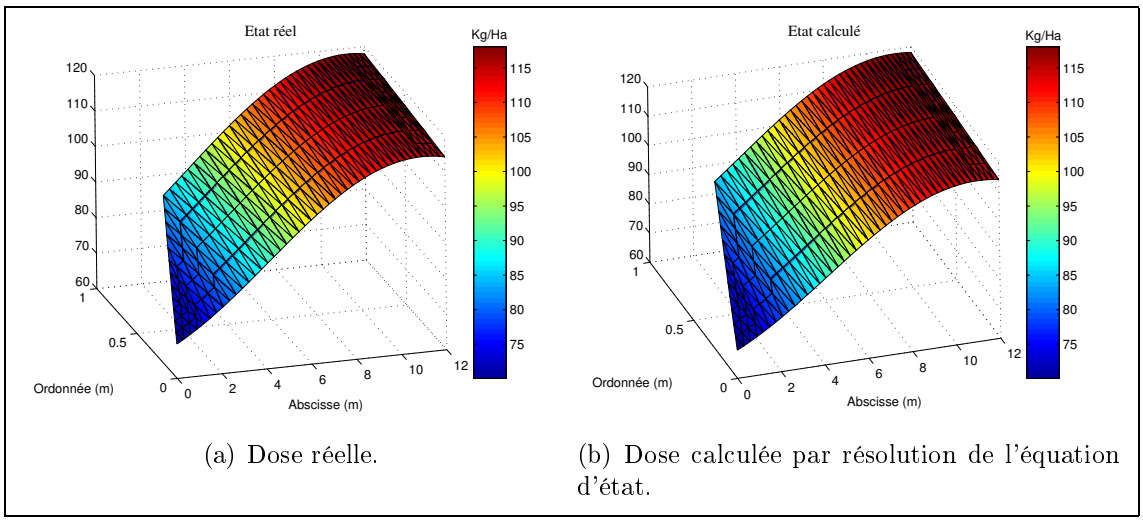



Figure 6.3 – Ecart quadratique entre dose exacte et dose calculée.

Pour ce qui concerne le cas de figure avec passages non parallèles, avec un maillage comptant 241 points, nous obtenons les simulations exposées aux figures 6.4 et 6.5.




(a) Dose réelle.

(b) Dose calculée par résolution de l'équation d'état.

Figure 6.4 – Affichage de l'état pour le cas 2.

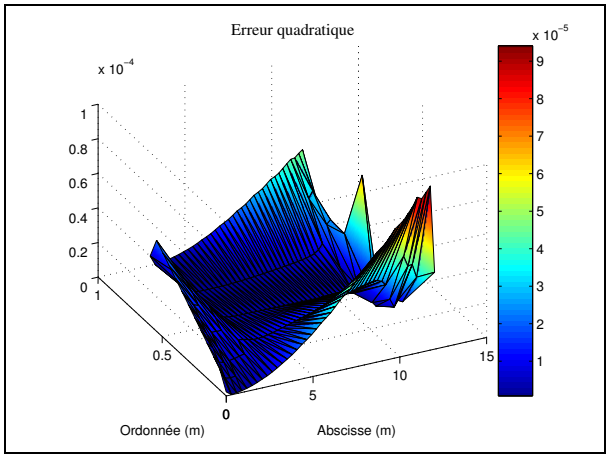



Figure 6.5 – Ecart quadratique entre dose exacte et dose calculée.

Au vue de l'ensemble de ces résultats, nous pouvons constater que les solutions de l'équation d'état calculées numériquement correspondent bien aux doses réelles. Le même type de maillage sera alors utilisé lors de la résolution des problèmes de contrôle optimal présentés plus loin dans ce chapitre.

## 6.2 Formalisation du problème de contrôle

L'objectif étant toujours de réduire les défauts de répartition d'engrais, si $q^* \in L^2(\Omega)$ désigne la dose consigne, il vient que la fonction coût à considérer pour une unique trajectoire est

$$F(M,R,\Phi) = \int_\Omega [z(M,R,\Phi) - q^*]^2 dx, \tag{6.16}$$

où $z$ est la variable d'état solution de $(\Sigma)$ et où $M$, $R$, $\Phi$ constituent les commandes recherchées.

De la même manière que dans les chapitres précédents, pour tenir compte des limites des actionneurs du distributeur, nous introduisons un ensemble de contraintes sur les commandes, notée $\mathcal{S}$ et définie par (4.8).

Le problème à résoudre est donc le suivant

$$(\mathcal{P}_{co}) \qquad \begin{cases} \min F(M,R,\Phi) = \int_\Omega [z(M,R,\Phi) - q^*]^2 dx \\ (M,R,\Phi) \in \mathcal{S} \\ z \text{ solution de } (\Sigma) \end{cases} \tag{6.17}$$

Nous savons que $(\Sigma)$ admet une solution unique $z$. Par ailleurs, $F$ est continue sur $\mathcal{S}$ qui est un compact de $\mathcal{C}^{0,1}(0,T)$. Nous pouvons conclure que $(\mathcal{P}_{co})$ admet donc bien au moins une solution comme cela a été évoqué plus haut.

En appliquant la méthode des éléments finis comme à la section 6.1.2, nous pouvons opérer la simplification suivante

$$\int_\Omega [z(M,R,\Phi) - q^*]^2 dx \approx (Z(M,R,\Phi) - \boldsymbol{Q^*})^\mathsf{T} W (Z(M,R,\Phi) - \boldsymbol{Q^*}), \tag{6.18}$$

où $\boldsymbol{Q^*}$ est un vecteur de taille $N$ des valeurs de $q^*$ aux noeuds du maillage et où les $N \times N$ composantes $W_{i,j}$ de la matrice $W$ (matrice de masse) sont définies par

$$W_{i,j} = \int_\Omega \phi_j \phi_i dx. \tag{6.19}$$

Aussi, nous obtenons le problème d'optimisation non linéaire $(\mathcal{P}_{nco})$ donné par

$$(\mathcal{P}_{nco}) \begin{cases} \min F(M,R,\Phi) = (Z(M,R,\Phi) - \boldsymbol{Q^*})^{\mathsf{T}} W (Z(M,R,\Phi) - \boldsymbol{Q^*}) \\ KZ = B(M,R,\Phi) \\ (M,R,\Phi) \in S \end{cases} \tag{6.20}$$

## 6.3 Méthode de résolution

Dans un premier temps, nous pouvons considérer le problème $(\mathcal{P}_{nco})$ comme un problème d'optimisation présentant deux types de contraintes : contraintes d'égalité et contraintes d'inégalités. En effet, si nous considérons la variable de décision $X$ telle que :

$$X = (Z, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Phi}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{6\times n} \tag{6.21}$$

où $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Phi}$ les vecteurs, issus de la discrétisation temporelle, sont définis comme au Chapitre 4 paragraphe 4.2. $(\mathcal{P}_{nco})$ peut s'écrire autrement et devient un problème d'optimisation dont les variables sont $Z$ et $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Phi})$ :

$$(\mathcal{P}'_{nco}) \begin{cases} \min F(X) = (Z(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Phi}) - \boldsymbol{Q^*})^{\mathsf{T}} W (Z(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Phi}) - \boldsymbol{Q^*}) \\ K(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Phi})Z - B(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Phi}) = 0 \\ (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Phi}) \in S \end{cases} \tag{6.22}$$

Pour résoudre ce dernier, nous pouvons associer à chaque contrainte un multiplicateur de Lagrange ainsi qu'un coefficient de pénalité, et appliquer une méthode de Lagrangien augmenté. Néanmoins, cette stratégie peut être lourde à mettre en oeuvre. En effet, dans le cas où le maillage présente un nombre de sommets trop important, le calcul du gradient, lors de la détermination d'une direction de descente, devient rapidement fastidieux et très coûteux.

Nous préférons ici garder la version originale de $(\mathcal{P}_{nco})$ et considérer uniquement comme paramètre de décision, le vecteur de commandes $\boldsymbol{X}$ donné par

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Phi}) \in \mathbb{R}^{6\times n}. \tag{6.23}$$

En considérant les vecteurs de bornes $u$, $U$ et la matrice $A$ définis au paragraphe 4.4 et si nous définissons les nouveaux vecteurs $v$ et $V$ par

$$v = \left[-\alpha \times I_{1\times 6(n-1)}, -\beta \times I_{1\times 6(n-1)}, -\gamma \times I_{1\times 6(n-1)}\right]^{\mathsf{T}},$$
$$V = \left[\alpha \times I_{1\times 6(n-1)}, \beta \times I_{1\times 6(n-1)}, \gamma \times I_{1\times 6(n-1)}\right]^{\mathsf{T}},$$

nous pouvons réécrire $(\mathcal{P}_{nco})$ comme :

$$(\mathcal{P}_{nco}bis) \qquad \begin{cases} \underset{\boldsymbol{X}}{\text{Min}}\ F(\boldsymbol{X}) \\ u_i \leq \boldsymbol{a}_i \leq U_i,\ i = 1, \cdots, 6n \\ v_i \leq \boldsymbol{b}_i \leq V_i,\ i = 1, \cdots, 6(n-1) \\ K(\boldsymbol{X}^k)Z = B(\boldsymbol{X}) \\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{6n} \end{cases} \tag{6.24}$$

où

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{X}_i \tag{6.25}$$
$$\boldsymbol{b}_i = (A\boldsymbol{X})_i \tag{6.26}$$

En réutilisant les mêmes notations qu'à la section 4.4, nous pouvons alors formuler le Lagrangien augmenté partiel de $(\mathcal{P}_{nco}bis)$, qui ne prend en compte que les contraintes $\boldsymbol{a}_i$ et $\boldsymbol{b}_i$, comme suit

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{X}, \lambda, r) = F(\boldsymbol{X}) + \sum_{i=1}^{6n} \Pi_i(\boldsymbol{X}, \lambda) + \sum_{i=1}^{6(n-1)} \Psi_i(\boldsymbol{X}, \lambda). \tag{6.27}$$

Il est alors possible d'approcher une solution de $(\mathcal{P}_{nco}bis)$ en résolvant la suite de problèmes suivante :

$$(\mathcal{P}_{nco}bis^k) \qquad \begin{cases} \underset{(\boldsymbol{X}^{(k)}, \lambda^{(k)}) \in \mathbb{R}^{6n+6(2n-1)}}{\min} \mathcal{L}(\boldsymbol{X}^{(k)}, \lambda^{(k)}, r^{(k)}) \\ \text{avec } K(\boldsymbol{X}^{(k)})Z = B(\boldsymbol{X}^{(k)}) \end{cases} \tag{6.28}$$

avec $\lambda^{(k)}$,$r^{(k)}$ respectivement les multiplicateurs de Lagrange et les coefficients de pénalité associés au problème $(\mathcal{P}_{nco}bis^k)$.

Le calcul d'une direction de descente étant effectué à partir du gradient de $\mathcal{L}$, celui-ci peut être approximé en utilisant une méthode de différences finies explicitée par

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{X}^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\partial \boldsymbol{X}_i^{(k)}} \approx \frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{X}^{(k)} + \tau e_i, \lambda^{(k)}) - \mathcal{L}(\boldsymbol{X}^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\tau}, \quad \tau > 0. \tag{6.29}$$

Le plus souvent on préfère évaluer analytiquement le gradient en faisant appel à la tech-

nique de l'état adjoint basé sur l'application du théorème 3.83. Ainsi, on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{X}^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\partial \boldsymbol{X}_i^{(k)}} = \frac{\partial \mathcal{L}(Z^{(k)}, \boldsymbol{X}^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\partial \boldsymbol{X}_i^{(k)}} + q^{\mathsf{T}} \left( \frac{\partial B(\boldsymbol{X}^{(k)})}{\partial \boldsymbol{X}_i^{(k)}} - \frac{\partial K(\boldsymbol{X}^{(k)})}{\partial \boldsymbol{X}_i^{(k)}} Z^k \right), \tag{6.30}$$

avec $q$ solution du système adjoint donné par

$$K(\boldsymbol{X}^{(k)})q = \nabla_Z \mathcal{L}(Z^{(k)}, \boldsymbol{X}^{(k)}, \lambda^{(k)}). \tag{6.31}$$

Bien qu'elle ne soit pas facile à implémenter, notre choix se porte vers cette dernière procédure nettement plus efficace que la méthode de différences finies qui nécessiterait $6n$ résolutions de $(\Sigma)$ pour la détermination d'une direction descente. Par conséquent, à la $j^{\text{ème}}$ itération, nous utilisons l'algorithme $\boldsymbol{PAR_j}$ détaillé au paragraphe 3.3.3 et illustré par la figure 6.6.

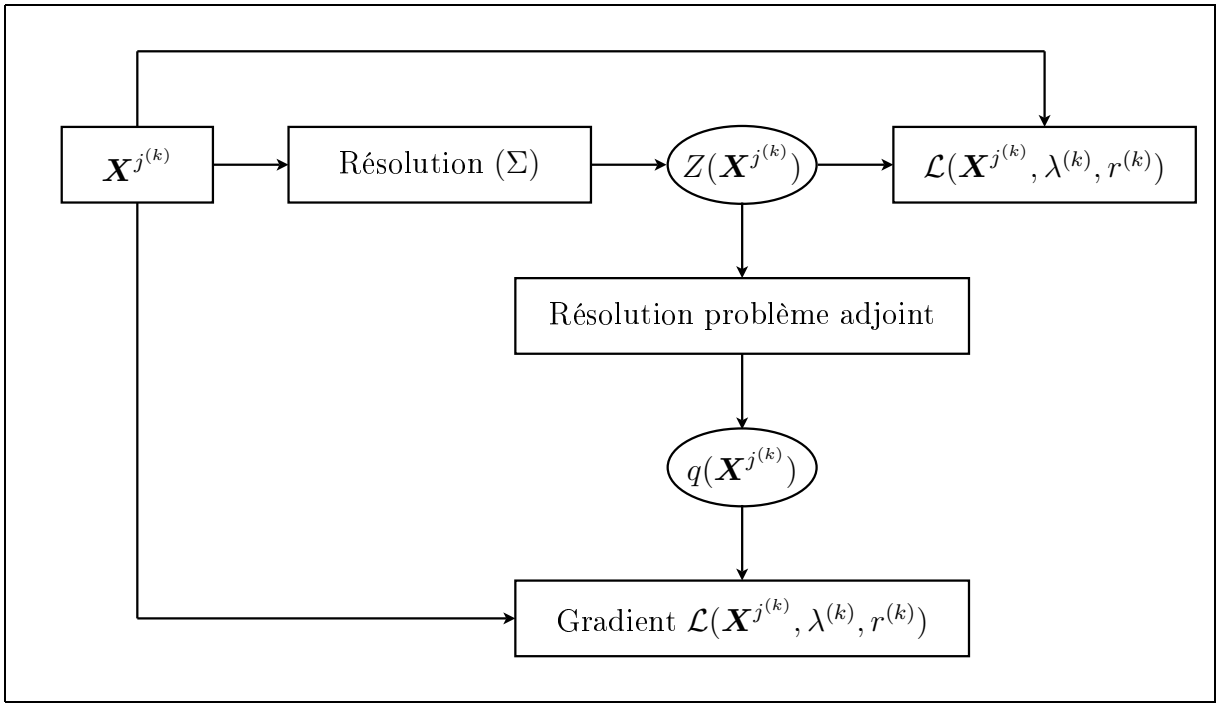



Figure 6.6 – Illustration du calcul du gradient.

Si nous appliquons la méthode LBFGS comme méthode de minimisation de chaque problème $(\mathcal{P}_{nco}bis^k)$, une solution du problème $(\mathcal{P}_{nco}bis)$ peut alors être calculée en implémentant l'algorithme ci-dessous :

**Algorithme COP :**

**Etape 0** : Choix de $\boldsymbol{X}^{(0)}$. Choix de $\epsilon$, écart maximal de violation des contraintes
$k \leftarrow 0$ ; $\lambda^{(0)} \leftarrow 0$ ; $r^{(0)} \leftarrow 1$

**Etape 1** : $k \leftarrow k+1$

**Etape 2** : A l'itération $k$, déterminer $(\boldsymbol{X}^{(k)}, \lambda^{(k)})$ solution de $(\mathcal{P}_{nco}bis^k)$ à partir des algorithmes LBFGS et $\boldsymbol{PAR_j}$

**Etape 3** : Si $\sum_{i=1}^{6n}\left(\Pi_i(\boldsymbol{X}^{(k)}, \lambda^{(k)})\right)^2 + \sum_{i=1}^{6(n-1)}\left(\Psi_i(\boldsymbol{X}^{(k)}, \lambda^{(k)})\right)^2 < \epsilon$ alors STOP
Sinon mise à jour des multiplicateurs et des coefficients de pénalité
Retourner à l'**Etape 1**.

## 6.4 Tests numériques

Les géométries qui sont traitées ici sont les mêmes que celles de la figure 6.1. Pour les deux exemples, l'algorithme **COP** est initialisé avec $\lambda^{(0)} = 0$ et $r^{(0)} = 1$. D'autre part, $\epsilon$ est choisi égal à $10^{-5}$. La dose consigne est imposée constante et équivalente à 80 Kg/Ha. Les valeurs des contraintes sont les mêmes que celles présentées au tableau 4.1.

Dans le premier cas (domaine rectangulaire), les variables de décision sont initialisées avec les valeurs du tableau 6.2.

| | **Disque gauche** | **Disque droit** |
|---|---|---|
| **Débit (Kg/min)** | 8 | 8 |
| **Rayon moyen (m)** | 9 | 9 |
| **Angle moyen (°)** | -15 | +15 |

Tableau 6.2 – Initialisation des paramètres de décision

A l'issue de l'optimisation, l'état optimal calculé ainsi que la carte de défauts, apparaissant respectivement aux figures 6.7 et 6.8, montrent que la stratégie appliquée est concluante. En effet, à partir de ces résultats, nous pouvons constater que l'erreur de répartition est en valeur absolue nettement inférieure à 1%. Il s'agit alors d'une fertilisation plus que satisfaisante. Toutefois, il est important de noter que le temps d'éxecution de l'algorithme est très important (proche de 2 heures) relativement à la quantité de surface traitée. Cette durée est étroitement liée à l'évaluation des dérivées partielles de l'état qui s'avère être coûteuse avec un temps d'éxecution d'environ 1.87 sec.

Les commandes optimales déterminées pour les passages aller et retour, permettant de conduire à ce type d'épandage, sont affichées respectivement aux figures 6.9 et 6.10 et sont très proches des réglages recommandés par les fabricants de machine. Contrairement aux paramètres exposés aux figures 4.4-4.7, l'angle de projection des nappes n'est pas soumis à des fluctuations. Ce constat conforte alors la remarque évoquée au paragraphe 4.5.1 concernant la nécessité de réajustements rapides lorsque le distributeur entre dans le domaine.

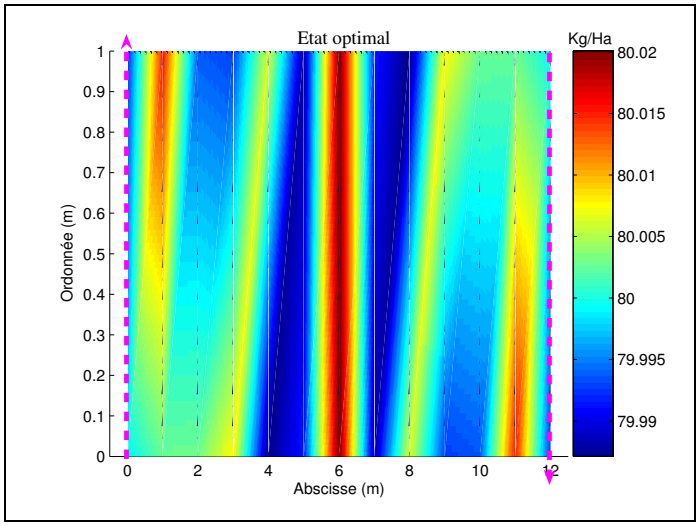



Figure 6.7 – Etat optimal.($F_\kappa(\widehat{\boldsymbol{X}}) = 0.0033$.Temps d'exécution$\approx$ 1.65 h.)

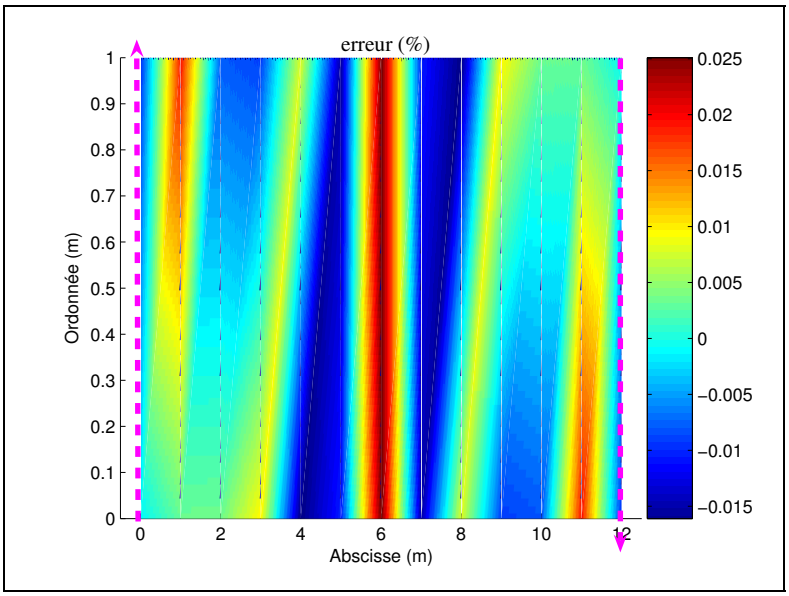



Figure 6.8 – Carte des erreurs de fertilisation.

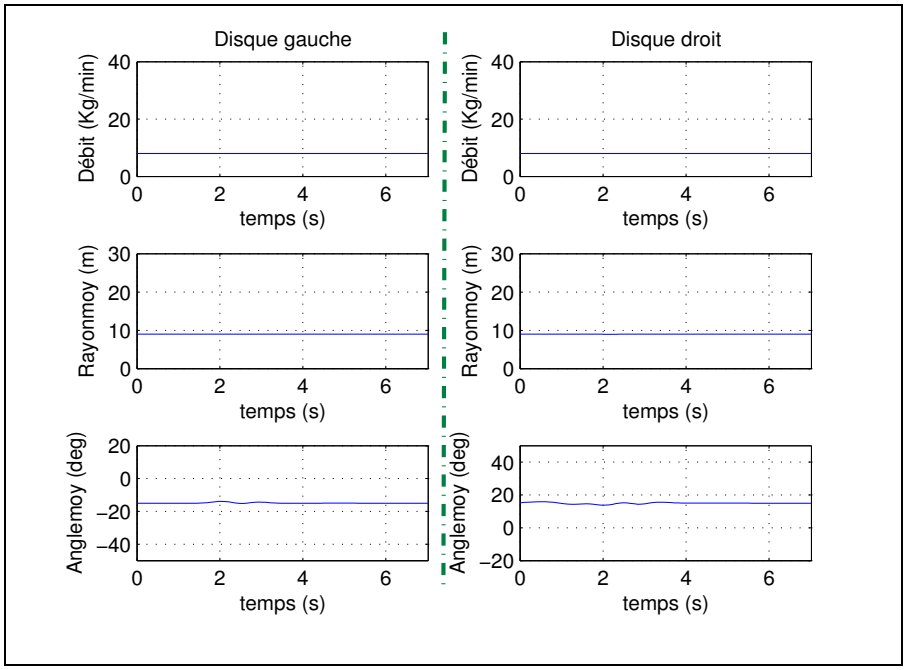



Figure 6.9 – Commandes optimales pour l'aller.

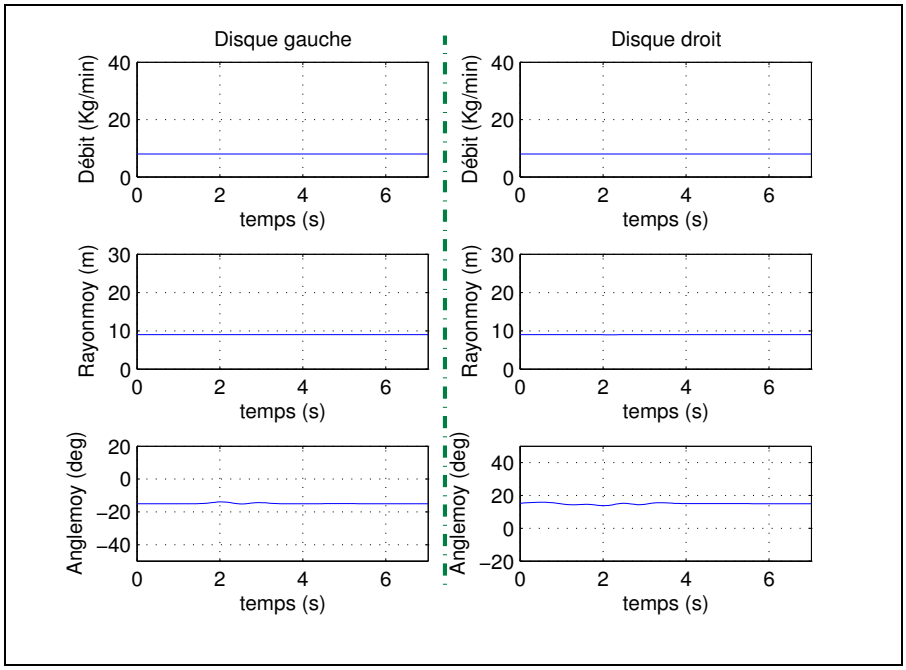



Figure 6.10 – Commandes optimales pour le retour.

Pour le deuxième exemple, les variables de décision sont initialisés de la même manière que dans le tableau 6.2. Après résolution du problème de contrôle, l'état optimal ainsi que l'erreur de fertilisation associée sont présentés aux figures 6.11-6.12.

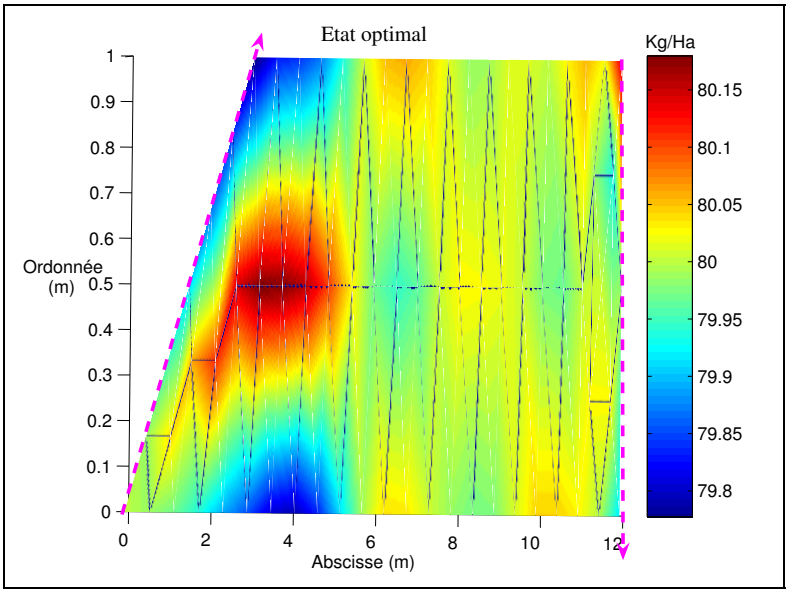



Figure 6.11 – Etat optimal.($F_\kappa(\widehat{\boldsymbol{X}}) = 0.0358$.Temps d'exécution≈ 2.47 h.)

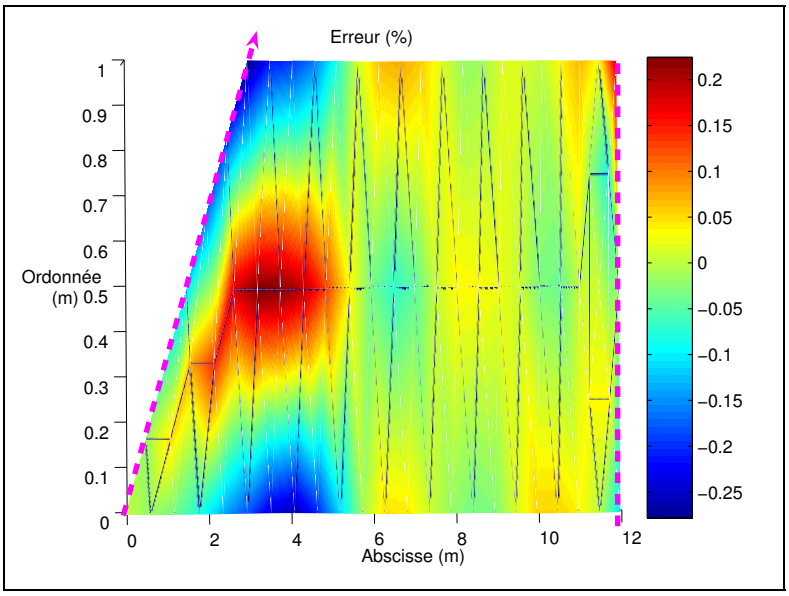



Figure 6.12 – Carte des erreurs de fertilisation.

Comme pour le premier cas qui comportaient à la différence d'ici des passages parallèles, l'erreur de répartition est très faible. Ainsi, bien que la distance entre les deux passages ne soit pas fixe, il est possible de déterminer les réglages de la machine permettant d'obtenir une répartition uniforme. Nous pouvons également observer l'exécution de l'algorithme de résolution **COP** nécessite un temps non négligeable du fait d'une évaluation de la fonction coût et du gradient très coûteuse.

En l'occurrence, les paramètres optimaux calculés sont exposés aux figures 6.13 et 6.14.

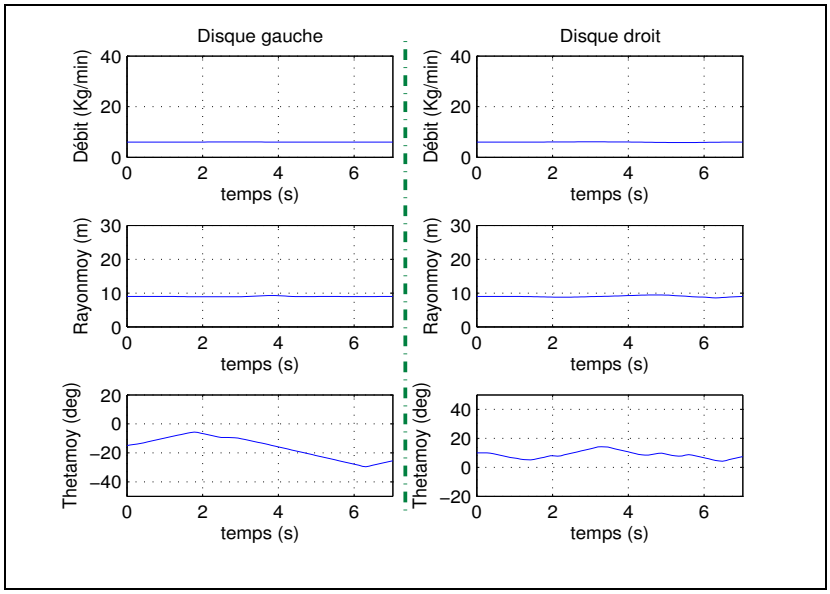



Figure 6.13 – Commandes optimales pour l'aller.

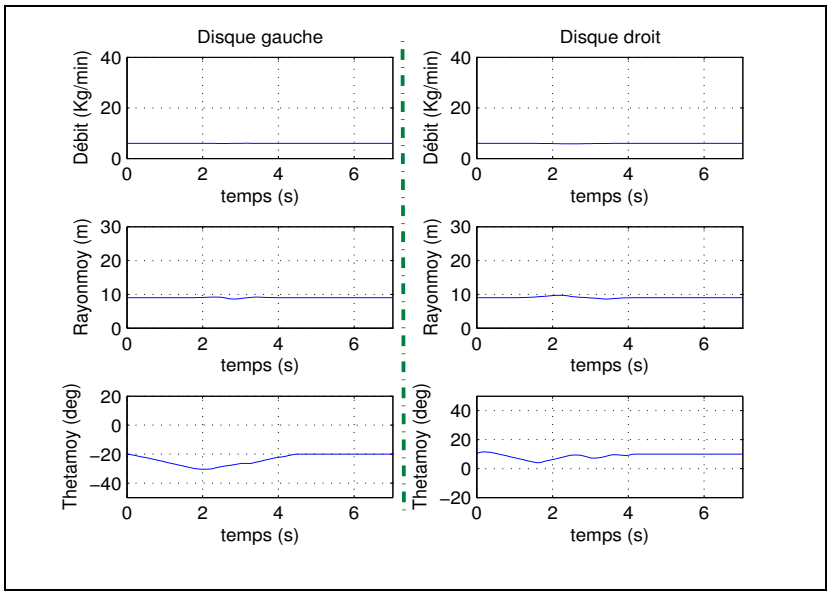



Figure 6.14 – Commandes optimales pour le retour.

Du fait du rétrécissement de passage apparaissant vers le haut du domaine traité, que ce soit pour le trajet aller ou le trajet retour, l'angle moyen d'éjection à droit et à gauche du distributeur varie de manière significative au cours du temps. Les autres paramètres, débit et rayon moyen, ne sont quant à eux que très peu modifiés.

Par faute de temps, la stratégie définie dans ce chapitre n'a pu être appliquée sur des domaines de plus grande taille et sur des parcelles réelles. Au vue des résultats précédents, des développements devraient être poursuivis afin de mieux analyser les performances de cette méthode.

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, le problème de défauts de fertilisation par procédé centrifuge a été abordée avec une approche différente de celles proposées lors des chapitres précédents. Plus précisément, une première étude concernant une stratégie basée sur la théorie du contrôle optimal est menée ici pour minimiser les conséquences négatives inhérentes à une mauvaise répartition d'engrais au sein des parcelles. Afin de formaliser le problème de commande, une équation d'état caractérisant le processus d'épandage est proposée. Dans le but de se rapprocher d'un problème de poursuite classique, la dose distribuée sur un intervalle de temps donné a été retenue comme variable d'état. Celle-ci vérifiant une équation elliptique, un problème de contrôle optimal régi par une équation aux dérivées partielles avec contraintes sur les commandes est formulé. Afin de déterminer les solutions de manière efficace ce dernier, un algorithme de Lagrangien augmenté associé à une technique reposant sur la résolution du problème adjoint, permettant d'évaluer le gradient de la fonction objectif, ont été implémentés.

Cette nouvelle approche n'a pu être appliquée que sur deux parcelles fictives de petites dimensions faute de temps. Néanmoins, les tests permettent déjà de mettre en relief un inconvénient non négligeable de cette méthode : le temps d'exécution est très important. Mis à part cet aspect négatif, la résolution du problème de contrôle permet d'aboutir à des résultats tout à fait satisfaisants avec des erreurs de répartition inférieures en valeur absolue 1%. Bien que face à la lenteur de l'algorithme, les stratégies mises en exergue au Chapitres 4 et 5 soient préférées à la procédure suggérée ici, des investigations plus en avant sont nécessaires afin de comparer rigoureusement les différentes approches.

A partir des observations exposées plus haut, une ou plusieurs techniques doivent être envisagées pour réduire les temps d'exécution et ainsi améliorer l'efficacité de la stratégie basée sur la résolution d'un problème de contrôle. Une solution possible serait de faire appel à une méthode de décomposition de domaine permettant de décomposer le problème original en sous-problème de complexité plus faible. Une résolution sur une machine parallèle serait alors possible sous réserve de bien définir les conditions de transmission entre les différents sous-domaines.

# Conclusion Générale et Perspectives

Dans cette thèse, le problème de la réduction des défauts de répartition de particules épandues par procédé centrifuge a été abordé. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés ici à l'épandage centrifuge d'engrais minéraux, technique culturale très controversée à l'heure actuelle. Ainsi, du fait d'une répartition de fertilisants mal maîtrisée, cette tâche est aujourd'hui considérée comme l'une des activités agricoles les plus polluantes. Outre les impacts environnementaux désastreux, cette opération, générant fréquemment des erreurs, engendre automatiquement des baisses de rendement qui peuvent dans des cas extrêmes mettre en péril la viabilité des exploitations. Face à ces constats et sous la pression de législations de plus en plus sévères, de nombreux laboratoires ont mené des investigations qui, partant de l'hypothèse que les défauts de répartition étaient dûs à des mauvais recouvrement des courbes transversales (vision simplifiée de la réalité de l'épandage d'engrais), ont été orientées vers la conception d'outils et d'algorithmes permettant une meilleure gestion des trajectoires parcourues par le tracteur dans le champ. Ces études, s'avérant être malheureusement rapidement inefficaces lorsque les passages sont fixes et que des singularités géométriques sont présentes dans la parcelle à traiter (passages non parallèles, virages, pointes de parcelle...), constituent alors le point de départ des réflexions menées à travers cette thèse.

Après avoir mis en avant les origines des erreurs de fertilisation par l'intermédiaire de simulations numériques prenant en compte la réalité du phénomène d'épandage, à savoir le recouvrement de nappes de répartition spatialement hétérogènes, il ressort que la solution la plus judicieuse pour limiter l'irrégularité de l'épandage en présence de passages fixes consiste à ajuster en continu les paramètres mécaniques du distributeur au cours du processus de fertilisation. La détermination des réglages permettant d'agencer de manière optimale les nappes de répartition, quelque soient les singularités géométriques existant dans le champ, étant un problème difficile du fait de la complexité des phénomènes physiques mis en jeu, des approches mathématiques s'appuyant sur la modélisation du processus d'épandage ainsi que sur des techniques d'optimisation ont été proposées. L'objectif étant de fournir des séquences de consignes optimales à présenter en entrée du système épandeur, les variables de décision qui ont été retenues sont le débit, la portée et

l'angle de projection des nappes. En effet, ces paramètres étant facilement modifiables en agissant sur l'ouverture de la trappe d'alimentation du distributeur, la vitesse de rotation des disques et la position du point de chute des particules d'engrais sur celles-ci, les solutions calculées peuvent être alors directement utilisées dans le cadre d'une commande en boucle ouverte. Les passages suivis par le tracteur pouvant être connus à l'avance par l'intermédiaire de relevés GPS effectués au cours d'autres opérations telle que le semis et partant de l'hypothèse que les erreurs de suivi de trajectoire sont quasi nulles et que la vitesse de déplacement est fixe grâce aux techniques modernes de guidage automatique, les stratégies de réglage ont alors été élaborées en considérant un épandage à vitesse constante en présence de trajectoires imposées.

Ainsi, dans un premier temps, une méthode d'optimisation spatiale de l'apport d'engrais en plein champ a été développée. Nous avons alors formalisé la fonction objectif comme l'intégrale spatiale de l'écart quadratique entre dose désirée et dose réelle. Afin de respecter les limites mécaniques de l'appareil et de ne pas solliciter trop violemment les actionneurs, des contraintes de borne sur les variables de décision ainsi que sur leurs dérivées temporelles ont tout naturellement été rajoutées. La discrétisation spatiale et temporelle du critère d'optimisation, qui ne peut être évaluée de manière analytique, générant un problème de grande taille et un gros encombrement de la mémoire, une méthode de décomposition, consistant à découper le domaine global original en sous-domaines de taille moins importante sur lesquels un algorithme d'optimisation peut être appliqué, a été proposée. Confrontés alors à des problèmes sous contraintes de doubles inégalités, nous avons implémenté un algorithme du Lagrangien augmenté connu pour être efficace dans ces cas de figure. Associé à une méthode LBFGS, permettant de limiter le nombre de données à stocker durant le processus de minimisation, cette stratégie permet alors de réduire les temps d'exécution et d'obtenir des solutions plus rapidement que si une optimisation directe est utilisée. Outre ces aspects algorithmiques, dans le cas d'un épandage plein champ, la procédure développée permet de limiter considérablement les défauts de fertilisation malgré des espacements entre passages irréguliers.

Afin de compléter l'étude faite pour l'épandage en plein champ, nous nous sommes également attachés à développer une stratégie visant à minimiser les zones de sur et sous-fertilisation couramment observées à l'issue de l'épandage de bordure. Pour ce qui concerne cette phase délicate, les réglages de la machine doivent être non seulement optimisés mais également les instants de débuts et fins d'épandage en plein champ. Afin d'apporter une solution à ce problème, deux approches ont été étudiées. En s'inspirant de la stratégie de fertilisation telle qu'elle existe aujourd'hui, la première a consisté à déterminer dans un premier temps les positions sur les passages plein champ où l'agriculteur doit ouvrir ou fermer les trappes d'alimentation de l'appareil de telle sorte que la ligne de recouvrement

entre courbes transversales des doses distribuées en plein champ et celles appliquées dans les zones bordure soit la plus parallèle possible de la limite extérieure des parcelles. A partir de ces positions optimales, les consignes de réglages peuvent alors être calculées de la même manière que dans le cas de l'optimisation d'épandage en plein champ. La seconde technique a été, quant à elle, implémentée de sorte que les instants de débuts et fins d'épandage plein champ ainsi que les paramètres mécaniques de l'outil soient gérés simultanément. L'application de la première stratégie permet d'aboutir à des résultats satisfaisants bien que de qualité inférieure à ceux simulés dans le cas où la seconde approche est employée. Aussi, l'utilisateur final pourra choisir entre ces deux méthodes selon la précision du dosage désirée. En effet, si ce dernier souhaite avoir la meilleure qualité d'épandage, la seconde stratégie peut être privilégiée. Dans le cas contraire, il pourra se contenter d'appliquer la première approche qui présente l'avantage d'avoir un temps d'exécution moins important.

A la recherche d'une méthode toujours plus efficace, une procédure d'optimisation reposant sur la résolution d'un problème de commande optimale a été par ailleurs étudiée. Celle-ci a consisté à considérer comme variable d'état la quantité de fertilisants distribuée durant un intervalle de temps donné et comme variables d'entrée (commandes) les réglages de l'épandeur. Afin de formaliser le problème de contrôle, nous nous sommes tout d'abord consacrés à la modélisation d'une équation d'état. Ainsi, il s'est avéré qu'une équation elliptique pouvait être utilisée comme équation d'état. L'objectif étant toujours de réduire les défauts de fertilisation, en s'inspirant de la formulation mathématique des problèmes de poursuite en automatique, un critère basé sur la norme $L^2$ de l'erreur entre l'état réel et la consigne de dose a été proposé. Outre la contrainte d'égalité représentée par l'équation d'état, des contraintes d'inégalité sont imposées sur les commandes dans le but de tenir compte des limites mécaniques du système. Confrontés alors à un problème de commande optimale régi par une équation aux dérivées partielles, une discrétisation basée sur la méthode des éléments finis a été effectuée. En faisant appel à la technique standard reposant sur l'état adjoint, cette méthode permet d'obtenir une répartition de très bonne qualité. Faute de temps, cette stratégie n'a pu être appliquée sur des parcelles réelles mais nous pouvons déjà pointer le gros défaut de cette méthode comme étant les temps d'exécution prohibitifs obtenus à l'issue des tests réalisés sur des domaines fictifs de petite taille. Néanmoins, avant de rejeter cette dernière au profit des stratégies présentées plus haut, des études supplémentaires comportant des améliorations algorithmiques mériteraient d'être faites.

Grâce à l'ensemble des méthodes proposées dans ce travail de thèse, il est alors possible de définir les réglages de référence à appliquer à un distributeur permettant de se rapprocher de la meilleure qualité de répartition d'engrais durant un processus d'épandage se déroulant à vitesse constante avec trajectoires imposées, malgré la présence de

singularités géométriques dans le champ. Par ailleurs, les algorithmes, relativement coûteux, présentés ici peuvent être exécutés qu'une seule fois pour chaque parcelle. En effet, les singularités géométriques de cette dernière demeurant figées pendant de nombreuses années, les consignes à appliquer en entrée du système resteront les mêmes à moins d'un réaménagement de la parcelle (opération qui est toutefois effectuée avec une fréquence peu élevée). D'autre part, il faut noter que les stratégies étudiées ici peuvent être facilement étendues au cas de l'épandage avec modulation de doses. En effet, pour ce faire, il suffit de considérer la dose consigne non plus comme une constante mais comme une fonction de l'espace.

# Perspectives

L'optimisation spatiale de l'apport d'engrais est un domaine nouveau qui intéresse de plus en plus bon nombre de chercheurs et d'industriels. En ce qui concerne les travaux exposés dans cette thèse, les efforts doivent se poursuivre dans plusieurs directions.

Tout d'abord, d'un point de vue algorithmique, bien qu'elle réduise considérablement les temps de calcul, la méthode de décomposition étudiée dans ce document reste relativement coûteuse. Si nous nous affranchissons des contraintes inhérentes aux matériels, une possibilité pour diminuer les durées d'exécution est d'adopter une stratégie parallélisable. Ainsi, en utilisant la même décomposition spatiale présentée au Chapitre 4, nous pouvons considérer des sous-problèmes indépendants les uns des autres en insérant une contrainte supplémentaire de continuité des paramètres de décision aux frontières des différents sous-domaines. En effectuant les calculs en parallèle sur plusieurs de ces derniers, la résolution du problème original peut être accélérée. Pour ce qui concerne le contrôle optimal, une méthode semblable peut être employée en introduisant cette fois-ci des contraintes de continuité de l'état et des flux. D'autre part, des simplifications permettant une réduction des temps d'exécution peuvent être envisagées dans le cas de l'épandage plein champ. En effet, au vue des simulations exposées également au Chapitre 4, si les trajectoires sont lentement variables et si les espacements entre les différents passages ne sont pas très éloignés de la largeur de travail par défaut, le rayon moyen peut être gardé constant et égale à la valeur donnée par les tableaux de réglages traditionnels préconisés par les constructeurs.

Il faut souligner que l'ensemble des stratégies utilisées dans cette thèse se basent sur l'hypothèse que les trajectoires soient figées et que l'outil parcourt toujours de la même manière ces passages. Aussi, il est impératif d'employer un système d'aide au guidage avec régulateur de vitesse afin de minimiser les erreurs de suivi de trajectoires. L'hypothèse est tout à fait vérifiée dans le cas des zones de grandes cultures mais les passages peuvent ne pas être imposés pour les zones d'élevage. Aussi, pour les systèmes prairiaux, la minimi-

sation des erreurs de fertilisation peut se faire en considérant un problème d'optimisation ayant comme inconnues non seulement les réglages du distributeur mais également les trajectoires suivies par le tracteur.

Par ailleurs, rappelons que les commandes appliquées en entrée du distributeur sont calculées totalement de manière empirique et aucune rétroaction n'est employée. Le mécanisme souffrant d'imperfections, il est tout à fait envisageable d'observer des dérives entre les consignes et les sorties réelles. Ces dernières pouvant être mesurées en mettant en place des capteurs de débits et des dispositifs optiques permettant d'avoir accès à l'angle et à la portée de projection des nappes, une approche prédictive peut tout à fait être mise en oeuvre puisque les séquences de consignes futures sont déjà connues à partir des méthodes discutées dans ce mémoire. Confronté à un système non linéaire, multivariable et difficilement modélisable, un modèle neuronal, du type perceptron, peut être utilisé afin de définir l'équation de prédiction.

D'autre part, il faut noter que dans certains cas, les systèmes de guidage peuvent ne pas comporter de régulateur de vitesse. Dans ce cas de figure, si aucune précaution n'est prise, des erreurs de répartition peuvent apparaître à cause des variations de vitesse. Une première solution, pour compenser ces défauts, pourrait consister à faire appel à un système équivalent au DPA permettant de réguler le débit en fonction de l'avancement du tracteur. Ainsi, ce paramètre calculé par optimisation hors ligne pourrait être ajusté proportionnellement à la vitesse.

# Annexe A

# Algorithmes de recherche linéaire

## A.1 Principe de base des algorithmes de recherche linéaire

La convergence des méthodes de descente est assurée en partie par le calcul à chaque itération $k$ d'une valeur $t_k > 0$ vérifiant

$$f(x_k + t_k d_k) \leq f(x_k).$$

En pratique, la détermination d'un tel pas se fait le plus souvent en choisissant $t_k$ dans un intervalle de recherche qui est réduit au cours des itérations. Ainsi, en notant

$$\varphi(t_k) = f(x_k + t_k d_k),$$

l'algorithme de recherche linéaire inexacte peut se décrire comme suit :

**Algorithme RLI :**
**Etape 0** : Choisir $\beta$ tel que $\varphi(\beta) > \varphi(0)$. $\alpha \leftarrow 0$.
**Etape 1** : Choisir $t_k$ dans $[\alpha, \beta]$
**Etape 2** : Si $t_k$ convient, STOP
Sinon
Si $t_k$ est trop petit, $\alpha \leftarrow t_k$
Sinon $t_k$ est trop grand, $\beta \leftarrow t_k$
**Etape 3** : Retourner à l'**Etape 1**.

Les relations sur $\varphi$ permettant de caractériser les valeurs de $t_k$ convenables reposent sur les conditions de Wolfe, d'Armijo ou de Goldstein (cf. paragraphe 3.1.2). Généralement

les méthodes basées sur un critère d'arrêt reposant sur la vérification d'une des deux premières conditions sont préférablement employées dans la pratique.

## A.2 Recherche linéaire par la méthode de Wolfe

L'algorithme reposant sur la vérification des conditions de Wolfe est détaillé ci-après :

**Algorithme RLIW :**
**Etape 0** :$\alpha \leftarrow 0$, $\beta \leftarrow +\infty$, $f_0 \leftarrow \varphi(0)$, $df_0 \leftarrow \varphi'(0)$, $f_\alpha \leftarrow f_0$, $df_\alpha \leftarrow df_0$
Choisir $0 < \omega_1 < \omega_2 < 1$, $t > 0$, $c > 1$
**Etape 1** : $f \leftarrow \varphi(t)$
Si $f - f_0 \leq \omega_1 df_0 t$ alors
$df \leftarrow \varphi'(t)$
Si $df \geq \omega_2 df_0$ alors $t_k \leftarrow t$, STOP
Sinon $\alpha \leftarrow t$, $f_\alpha \leftarrow f$, $df_\alpha \leftarrow df$, $t \leftarrow ct$
Sinon $\beta \leftarrow t$, $f_\beta \leftarrow f$, $df_\beta \leftarrow df$
Calculer $\widehat{\varphi}(t)$, approximation cubique de $\varphi(t)$ et $t \leftarrow \arg\min \widehat{\varphi}(t)$
**Etape 2** : Retourner à l'**Etape 1**.

## A.3 Recherche linéaire par la méthode d'Armijo

Il existe différentes versions d'algorithmes s'appuyant sur cette méthode. Les deux plus populaires sont la technique du calcul de pas par rebroussement et une méthode, relativement similaire à celle de Wolfe, basée sur une approximation quadratique de $\varphi(t)$ sur $[\alpha, \beta]$.

### A.3.1 Calcul du pas par rebroussement

**Algorithme RLIR :**
**Etape 0** :$\alpha \leftarrow 0$, $\beta \leftarrow 1$, $f_0 \leftarrow \varphi(0)$, $df_0 \leftarrow \varphi'(0)$
Choisir $0 < \omega_1 < 1$, $t = 1$, $0 < c < 1$
**Etape 1** : $f \leftarrow \varphi(t)$
Si $f - f_0 \leq \omega_1 df_0 t$ alors
$t_k \leftarrow t$, STOP
Sinon $t \leftarrow ct$
**Etape 2** : Retourner à l'**Etape 1**.

### A.3.2 Méthode d'Armijo avec interpolation

**Algorithme RLIA :**

**Etape 0** :$\alpha \leftarrow 0$, $\beta \leftarrow +\infty$, $f_0 \leftarrow \varphi(0)$, $df_0 \leftarrow \varphi'(0)$, $f_\alpha \leftarrow f_0$, $df_\alpha \leftarrow df_0$

Choisir $0 < \omega_1 < 1$, $t > 0$

**Etape 1** : $f \leftarrow \varphi(t)$

Si $f - f_0 \leq \omega_1 df_0 t$ alors

$t_k \leftarrow t$, STOP

Sinon $\beta \leftarrow t$, $f_\beta \leftarrow f$

Calculer $\widehat{\varphi}(t)$, approximation quadratique de $\varphi(t)$ et $t \leftarrow \arg\min \widehat{\varphi}(t)$

**Etape 2** : Retourner à l'**Etape 1**.

# Annexe B

# Paramètres optimaux pour l'épandage plein champ

Les figures affichées ici représentent les séquences de consignes optimales à appliquer à l'entrée de l'épandeur, au cours de l'épandage plein champ, lors des parcours des deuxième et troisième allers-retours traversant la parcelle réelle du Chapitre 4 section 4.5.2.

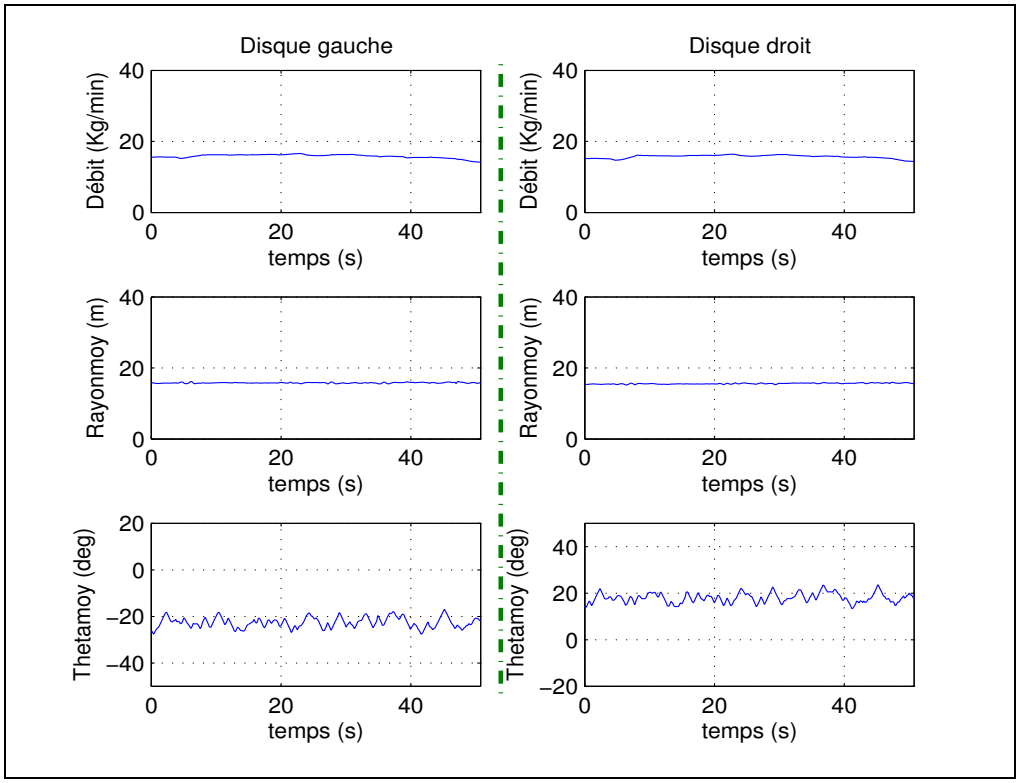



Figure B.1 – Paramètres optimaux obtenus pour l'aller 2.

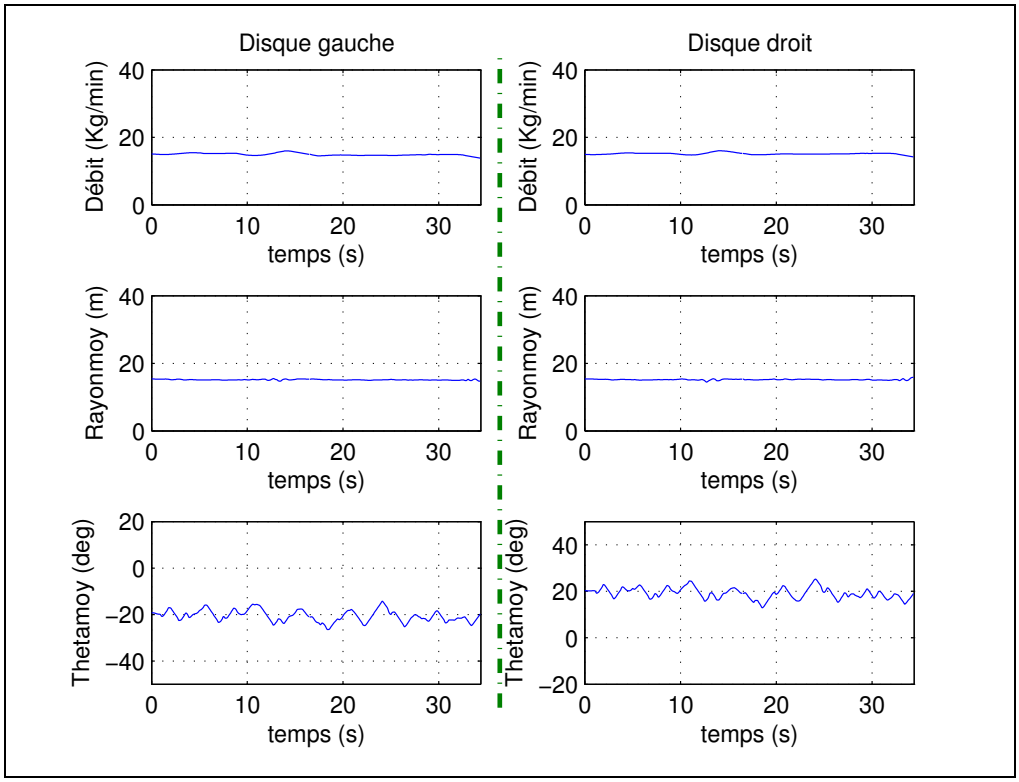



Figure B.2 – Paramètres optimaux obtenus pour le retour 2.

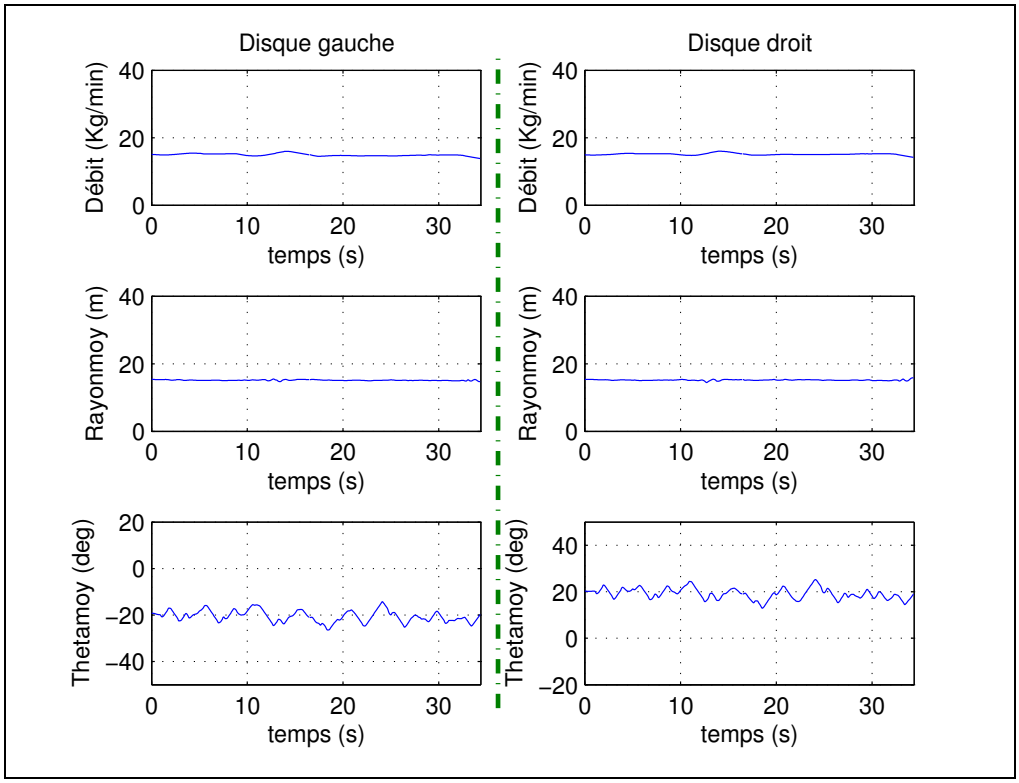



Figure B.3 – Paramètres optimaux obtenus pour l'aller 3.

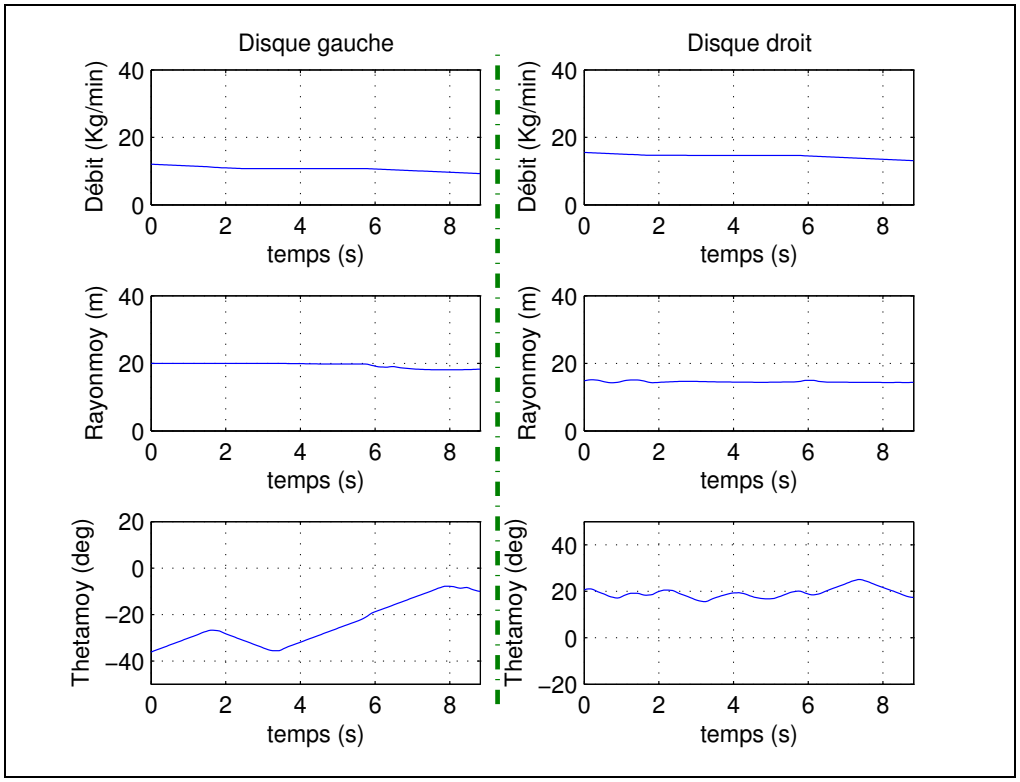



Figure B.4 – Paramètres optimaux obtenus pour le retour 3.

# Bibliographie


[Adj93] R. Adjroudi : *Comportement d'un flux de particules solides hétérogènes sous l'action d'un lanceur rotatif.* Thèse de doctorat, Institut National Agronomique Paris-Grignon, 1993.

[ASA01] ASAE : *S341.3 Procedure for Measuring Distribution Uniformity and Calibrating Granular Broadcast Spreaders.* St. Joseph, Mich. USA, 45th édition, 2001.

[Aue01] H. Auernhammer : Precision farming - the environmental challenge. *Computers and Electronics in Agriculture*, 30:31–43, 2001.

[Ber82] D. P. Bertsekas : *Constrained Optimization and Lagrange Multipliers Methods.* Academic Press, New York, 1982.

[Ber95] D. P. Bertsekas : *Nonlinear Programming.* Athena Scientific, Belmont, Massachussetts, USA, 1995.

[BHN00] R. H. Byrd, M. E. Hribar et J. Nocedal : An interior point algorithm for large scale nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 9:877–900, 2000.

[BIT99] M. Bergounioux, K. Ito et F. Trolzsch : Primal-dal strategy for optimal control problems. *SIAM J. Control Optim.*, 37:1176–1194, 1999.

[Bla00] B. S. Blackmore : Using information technology to improve crop management. *In Weather & Agro-Environmental Management*, pages 30–38, Dublin, 2000.

[BNS94] R H Byrd, J Nocedal et R B Schnabel : Representations of quasi-newton matrices and their use in limited memory methods. *Mathematical Programming*, 63:129–156, 1994.

[Bou99] S. Bouquet : Simulation de l'épandage d'engrais pour la modulation des apports. Rapport de fin d'études, 1999.

[Bro67] C. G. Broyden : Quasi-newton methods and their application to function minimization. *Maths. of Computation*, 21:368–381, 1967.

[BSF00] T. F. Burks, S. A. Shearer et J. P. Fulton : Assessment of fertilizer application accuracy with the use of navigation aids. *In* ASAE, éditeur : *2000 ASAE Annual International Meeting*, numéro 001154, Midwest Express Center, Milwaukee, Wisconsin, July 9-12 2000.

[CC67] F M Cunningham et E Y S Chao : Design relationships for centrifugal fertilizer distributors. *Transactions of the ASAE*, 10:91–95, 1967.

[CC95] Cemagref et Comifer : *Epandage d'engrais minéraux solides (granulés, perlés, compactés, cristallisés) - Méthodologie, Conseils pratiques pour bien épandre, Contrôle au champ*. Cemagref, 1995.

[CEN03] CEN : *EN 13739-2 : Matériel agricole - Distributeurs d'engrais solides en nappe et centrifuges - Protection de l'environnement - Partie 2 : Méthodes d'essai*. Comité Européen de Normalisation, Bruxelles, 2003.

[CGOT00] A. R. Conn, N. I. M. Gould, D. Orban et Ph. L. Toint : A primal-dual trust-region algorithm for non-convex nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 87:215–249, 2000.

[CGT94] A R Conn, N I M Gould et Ph L Toint : Large-scale nonlinear constrained optimization : a current survey. *In Algorithms for Continuous Optimization : The State of the Art*, pages 287–332, Dordrecht, The Netherlands, 1994.

[Coi01] F. Cointault : *Automatisation de la mesure du débit d'engrais et trajectographie des granulés d'engrais par imagerie rapide : application à la fertilisation raisonnée dans le contexte de l'agriculture de précision*. Thèse de doctorat, Université de Bourgogne, 2001.

[Col97] A. Colin : *Etude du procédé d'épandage centrifuge d'engrais minéraux*. Thèse de doctorat, Université technologique de Compiègne, 1997.

[Cun63] F. M. Cunningham : Performance characteristics of bulk spreaders for granular fertilizer. *Transactions of the ASAE*, 6:108–114, 1963.

[Dav91] W. C. Davidon : Variable metric methods for minimization. *SIAM J. Optimization*, 1:1–17, 1991.

[DM03] S. G. Daberkow et W. D. McBride : Farm and operator characteristics affecting the awareness and adoption of precision agriculture technologies in the us. *Precision Agriculture*, 4:163–177, 2003.

[DS83] R. S. Dembo et T. Steihaug : Truncated-newton algorithms for large-scale unconstrained optimization. *Mathematical Programming*, 26:190–212, 1983.

[DSFK03] C. Dillon, S. Shearer, J. Fulton et M. Kanakasabai : Optimal path nutrient application using variable rate technology. *In Proc. of the Four th European Conference on Precision Agriculture*, pages 171–176, 2003.

[DTO+04] E. Dintwa, E. Tijskens, R. Olieslagers, J. De Baerdemaeker et H. Ramon : Calibration of a spinning disc spreader simulation model for accurate site-specific fertiliser application. *Biosystems Engineering*, 88:49–62, 2004.

[EUR02] COMMISSION EUROPEENNE : Mise en oeuvre de la directive 91/676/cee du conseil concernant la protection des eaux contre la pollution par les nitrates à partir de sources agricoles, 2002.

[FAR] FARRE : Forum de l'agriculture raisonnée respectueuse de l'environnement. http ://www.farre.org.

[FG98] A. Forsgren et P. E. Gill : Primal-dual interior methods for nonconvex nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 8:1132–1152, 1998.

[Fle70] R. Fletcher : A new approach for variable metric algorithms. *Computer J.*, 13:317–322, 1970.

[Fle87] R. Fletcher : *Practical methods of optimization.* John Wiley, Chichester, 1987.

[FP63] R. Fletcher et M. J. D. Powell : A rapidly convergent descent method for minimization. *Computer J.*, 3:163–168, 1963.

[FR64] R. Fletcher et C. M. Reeves : Function minimization by conjugate gradient. *Computer Journal*, 7:143–154, 1964.

[FSCH99] J P Fulton, S A Shearer, G Chabra et S G Higgins : Field evaluation of a spinner disc variable-rate fertilizer applicator. *In 1999 ASAE Annual International Meeting*, numéro 991101, Sheraton Centre, Toronto, Canada, July 17-21 1999.

[FSCH01] J. P. Fulton, S. A. Shearer, G. Chabra et S. F. Higgins : Performance assessment and model development of a variable-rate, spinner-disc fertilizer applicator. *Transactions of the ASAE*, 44:1071–1081, 2001.

[GH97] T. E. Grift et J. W. Hofstee : Measurement of velocity and diameter of individual fertilizer particles by an optical method. *Journal of Agricultural Engineering Research*, 66:235–238, 1997.

[GH02] T. E. Grift et J. W. Hofstee : Testing an online spread pattern determination sensor on a broadcast fertiliser spreader. *Transactions of the ASAE*, 45:561–567, 2002.

[Gol70] D. Goldfarb : A family of variable metric methods derived by variational means. *Maths. of Computation*, 24:23–26, 1970.

[Gou03] N. I. M. Gould : Some reflections on the current state of active-set and interior point methods for constrained optimization. *SIAG/OPT Views-and-News*, 14(1):2–7, 2003.

[GP01] H. W. Griepentrog et K. Persson : A model to determine the positional lag for fertiliser spreaders. *In Proceedings of the 3rd European Conference on Precision Agriculture*, 2001.

[GRM83] C. L. Giffis, D. W. Ritter et E. J. Matthews : Simulation of rotary spreader distribution patterns. *Transactions of the ASAE*, 26:33–37, 1983.

[GRW+03] R. J. Godwin, T. E. Richards, G. A. Wood, J. P. Welsh et S. M. Knight : An economic analysis of the potential for precision farming in uk cereal production. *Biosystems Engineering*, 84:533–545, 2003.

[Hen03] O. Hensel : A new methodology for mapping fertilizer distribution. *In 2003 ASAE Annual International Meeting*, numéro 03-1123, Las Vegas, Nevada, USA, July 27-30 2003.

[HH90] J. W. Hofstee et W. Huisman : Handling and spreading of fertilisers. part 1 : Physical properties of fertiliser in relation to particle motion. *Journal of Agricultural Engineering Research*, 47:213–234, 1990.

[HH03] D. Hudson et D. Hite : Willingness to pay for water quality improvements : the case of precision application technology. *Journal of Agricultural and Resource Economics*, 27:433–449, 2003.

[Hof94] J. W. Hofstee : Handling and spreading of fertilisers. part 3 : Measurement of partice velocities and directions with ultrasonic transducers, theory, measurement system and experimental arrangements. *Journal of agricultural Engineering Research*, 58:1–16, 1994.

[IFA98] IFA : *The Fertilizer Industry, World Food Supplies and the Environment.* IFA, 1998.

[IR62] F. M. Inns et A. R. Reece : The theory of the centrifugal distributor. II : Motion on the disc, off-centre feed. *Journal of Agricultural Engineering Research*, 7:345–353, 1962.

[Ish98] K. F. Isherwood : *Mineral Fertilizer Use and the Environment.* IFA, 1998.

[ISO85] ISO : *ISO 5690/1 Equipment for distributing fertilizers - Test methods - Part 1 : Full width fertilizer distributors.* International Organization for Standardization, Geneve, 1985.

[KS00] R. Keicher et H. Seufert : Automatic guidance for agricultural vehicles in europe. *Computers and Electronics in Agriculture*, 25:169–194, 2000.

[Lam05] C. LAMBERT : Fertilisation et société. *In 7èmes rencontres de la fertilisation raisonnée et de l'analyse de terre*, pages 11–13, 2005.

[LN89] D. C. LIU et J. NOCEDAL : On the limited memory bfgs method for large scale optimization. *Mathematical programming*, 45:503–528, 1989.

[Lue84] D. G. LUENBERGER : *Linear and nonlinear programming*. Addison Wesley, Massachusetts, 1984.

[Lue04] M. A. LUERSEN : *GBNM : Un algorithme d'optimisation par recherche directe - Application à la conception de Monopalmes de nage*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Rouen, 2004.

[MM00] H. D. MITTELMANN et H. MAURER : Solving elliptic control problems with interior point and sqp methods : control and state constraints. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 120:175–195, 2000.

[MR63] R. M. MENNEL et A. R. REECE : The theory of the centrifugal distributor. III : Particle trajectories. *Journal of agricultural Engineering Research*, 7:78–84, 1963.

[MS79] H. MATTHIES et G. STRANG : The solution of nonlinear finite element equations. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 14:1613–1626, 1979.

[NM65] J. A. NELDER et R. MEAD : A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 7:308–313, 1965.

[Noc80] J. NOCEDAL : Updating quasi-newton matrices with limited storage. *Mathematics Of Computation*, 35(151):773–782, 1980.

[OKV05] T. OKSANEN, S. KOSONEN et A. VISALA : Path planning algorithm for field traffic. *In 2005 ASAE Annual International Meeting*, Tampa, Florida, 2005.

[Oli97] R. OLIESLAGERS : *Fertilizer distribution modelling for centrifugal spreader design*. Thèse de doctorat, K.U. Leuven, 1997.

[ORB96] R OLIESLAGERS, H RAMON et J DE BAERDEMAEKER : Calculation of fertilizer distribution patterns from a spinning disc spreader by means of a simulation model. *Journal of Agricultural Engineering Research*, 63:137–152, 1996.

[ORB97] R. OLIESLAGERS, H. RAMON et J. DE BAERDEMAEKER : Performance of a continuously controlled spinning disc spreader for precision application of fertilizer. *In 1st European Conference on Precision Agriculture*, pages 661–668, 1997.

[PBGM74] L. Pontryagin, V. Boltyanski, R. Gamkrelidze et E. Michtchenko : *Théorie mathématique des processus optimaux.* Editions Mir, Moscou, 1974.

[PFW82] R. E. Pitt, G. S. Farmer et L. P. Walker : Approximating equations for rotary distributor spread patterns. *Transactions of the ASAE*, 25:1544–1552, 1982.

[PM05] E. Piron et D. Miclet : Centrifugal fertiliser spreaders : a new method for their evaluation and testing. *In International Fertiliser Society*, numéro 556, pages 1–24, 2005.

[Pow77] M. J. D. Powell : Restart procedures for the conjugate gradient methods. *Mathematical Programming*, 12:241–254, 1977.

[PR62] D. E. Patterson et A. R. Reece : The theory of the centrifugal distributor. I : Motion on the disc, near-centre feed. *Journal of Agricultural Engineering Research*, 7:232–240, 1962.

[PR69] E. Polak et G. Ribière : Note sur la convergence des méthodes de directions conjuguées. *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, 16:35–43, 1969.

[PSW03] K. Persson, M. Skovsgaard et C. Weltzien : Technical solutions for variable rate fertilisation. *In Fourth European Conference on Precision Agriculture*, Berlin, 2003.

[PWR03] R. J. Palmer, D. Wild et K. Runtz : Improving the efficiency of field operations. *Biosystems Engineering*, 84:283–288, 2003.

[Roc74] T. R. Rockafellar : Augmented lagrange multiplier fonctions and duality in nonconvex programming. *SIAM J. Control*, 2:269–285, 1974.

[RS05] G. P. Robertson et S. M. Swinton : Reconciling agricultural productivity and environmental integrity : a grand challenge for agriculture. *Frontiers in Ecology and the Environment*, 3:38–46, 2005.

[RT83] P. M. Raviart et J. E. Thomas : *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Masson, Paris, 1983.

[RWT98] V. Rehbock, S. Wang et K. L. Teo : Computing optimal control with a hyperbolic partial differential equation. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 40:266–287, 1998.

[RZND00] J. F. Reid, Q. Zhang, N. Noguchi et M. Dickson : Agricultural automatic guidance research in north america. *Computers and Electronics in Agriculture*, 25:155–167, 2000.

[SBJ04] C. G. Sørensen, T. Bak et R. N. Jørgensen : Mission planner for agricultural robotics. *In AgEng 2004*, Leuven, Belgium, 2004.

[Sha70] D. F. Shanno : Conditioning of quasi-newton methods for function minimization. *Maths. of Computation*, 24:647–656, 1970.

[Ste83] T. Steihaug : The conjugate gradient method and trust regions in large scale optimization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20:626–637, 1983.

[Swi01] S. M. Swinton : Global adoption of precision agriculture technologies : Who, when and why ? *In Third European Conference on Precision Agriculture*, pages 557–562, 2001.

[Tor00] T. Torii : Research in autonomous agriculture vehicles in japan. *Computers and Electronics in Agriculture*, 25:133–153, 2000.

[Tre05] E. Trelat : *Contrôle optimal : théorie & applications*. Vuibert, 2005.

[VKP+06a] T. Virin, J. Koko, E. Piron, M. berducat et P. Martinet : Application of optimization techniques for an optimal fertilization by centrifugal spreading. *In IEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS 2006*, cd-rom 6p, 2006.

[VKp+06b] T. Virin, J. Koko, E. piron, M.Berducat et P. Martinet : On the use of optimization methods for the minimization of fertilizer application error with centrifugal spreaders. *In 3rd International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, ICINCO 2006*, cd-rom 6 p, 2006.

[VS99] R. J. Vanderbei et D. F. Shanno : An interior point algorithm for nonconvex nonlinear programming. *Computational Optimization and Applications*, 13:231–252, 1999.

[Wil00] J. N. Wilson : Guidance of agricultural vehicles - a historical perspective. *Computers and Electronics in Agriculture*, 25:3–9, 2000.

[Wri92] M. H. Wright : Interior methods for constrained optimization. *In Acta Numerica 1992*, pages 341–407. Cambridge University Press, New York, USA, 1992.

# Résumé

Du fait d'une stratégie inadaptée, l'épandage d'engrais minéraux par procédé centrifuge engendre des défauts de fertilisation. Pour déterminer les séquences de consigne à appliquer à l'entrée des distributeurs qui permettent de limiter les erreurs de répartition, nous proposons plusieurs méthodes basées sur l'optimisation avec contraintes.

Tout d'abord, nous modélisons la distribution spatiale d'engrais dans les parcelles et formalisons un problème d'optimisation sous contraintes en plein champ. Pour le résoudre, nous développons une approche de fenêtres glissantes et implémentons un algorithme de Lagrangien augmenté associé à la méthode LBFGS. En appliquant deux différentes techniques reposant sur ces principes, nous parvenons à réduire les défauts en bordure et avoir plus de 80% des surfaces correctement fertilisées. Une autre stratégie utilisant la résolution d'un problème de contrôle optimal est également développée et apporte des premiers résultats encourageants.



**Mots Clés** : Epandage centrifuge, optimisation sous contraintes, modélisation, fenêtres glissantes, Lagrangien augmenté, LBFGS, contrôle optimal.



# Abstract

By the fact of an unsuitable strategy, centrifugal spreading of mineral fertilizers leads to degradations of fertilization accuracy. To determine the reference values to be applied for the control of the spreaders which permit to reduce application errors, we propose several methods based on constrained optimization.

First of all, we model fertilizers spatial distribution in the fields and formalize a constrained optimization problem for the spreading operation in main field body. To solve it, we develop a sliding windows approach and implement an augmented Lagrangian algorithm combined with the LBFGS method. By applying two different techniques relying on these principles, we get to reduce errors in the boundary zones and obtain more than 80 % of surface areas with correct application. An other strategy using the solution of an appropriate optimal control problem is also developped and leads to first promising results.



**Keywords** : Centrifugal spreading, constrained optimization, modelling, sliding windows, augmented Lagrangian, LBFGS, optimal control.